Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 536–548
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 536–548
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-536-548, EDN: BHQKFP

Научная статья
УДК 519.17

Вершинные расширения 4-слойных графов и гиперкубов

А. А. Лобов, М. Б. Абросимов✉

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Лобов Александр Андреевич, аспирант кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, aisanekai@mail.com, https://orcid.org/0000-0003-3422-3811, AuthorID: 525179

Абросимов Михаил Борисович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, mic@rambler.ru, https://orcid.org/0000-0002-4473-8790, AuthorID: 175520

Аннотация. Дж. П. Хейз предложил математическую модель отказоустойчивых реализаций технических систем на основе графов, которой в более абстрактном виде соответствуют вершинные и рёберные расширения графов. Граф G^* называется вершинным k-расширением графа G, если граф G вкладывается в каждый граф, полученный из G^* удалением любых k вершин. Если никакая собственная часть графа G^* не является вершинным k-расширением графа G, то расширение G^* называется неприводимым. Если вершинное k-расширение имеет минимально возможное число вершин и рёбер, то оно называется минимальным. Задача поиска минимальных расширений для произвольного графа является вычислительно сложной. Только для некоторых классов графов удалось найти частичное или полное описание их минимальных вершинных расширений. В данной работе предложена общая схема построения вершинных 1- и 2-расширений для почти всех двудольных графов, в том числе и для гиперкубов. Гиперкуб является интересным графом с точки зрения его свойств и возможности использования в качестве топологии вычислительной системы. Минимальные вершинные расширения для гиперкубов неизвестны. На практике используются тривиальные 1-расширения, которые получаются добавлением одной вершины и соединением её со всеми остальными. Неприводимое 1-расширение для 16-вершинного гиперкуба, которое предлагается в данной работе, содержит на одно ребро меньше, чем тривиальное 1-расширение. Также в статье определяется количество неизоморфных расширений для каждого гиперкуба, которые можно построить с использованием предложенных схем, и доказывается неприводимость вершинных 1-расширений гиперкуба.

Ключевые слова: теория графов, вершинное расширение, отказоустойчивость, двудольные графы, гиперкуб

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0006).

Для цитирования: *Лобов А. А., Абросимов М. Б.* Вершинные расширения 4-слойных графов и гиперкубов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 536–548. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-536-548, EDN: BHQKFP

Article

Vertex extensions of 4-layer graphs and hypercubes

A. A. Lobov, M. B. Abrosimov✉

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Alexandr A. Lobov, aisanekai@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-3422-3811, AuthorID: 525179
Mikhail B. Abrosimov, mic@rambler.ru, https://orcid.org/0000-0002-4473-8790, AuthorID: 175520

Abstract. J. P. Hayes proposed a graph-based model of fault tolerant systems, which in a more abstract form corresponds to vertex and edge extensions of graphs. A graph G^* is called a vertex k-extension of a graph G if the graph G is embedded in every graph obtained from G^* by removing any k vertices. If no proper part of the graph G^* is a vertex k-extension of the graph G, then the extension G^* is said to be irreducible. If a vertex k-extension has the minimum possible number of vertices and edges, then it is called minimal. The task of finding minimal extensions for an arbitrary graph is computationally difficult. Only for some classes of graphs, it was possible to find a partial or complete description of their minimal vertex extensions. In this paper, we propose a general scheme for constructing vertex 1- and 2-extensions for almost all bipartite graphs, including hypercubes. The hypercube is an interesting graph in terms of its properties and the possibility of using it as a topology of an interconnection network. The minimum vertex extensions for hypercubes are unknown. In practice, trivial 1-extensions are used, which are obtained by adding one vertex and connecting it to all the others. The irreducible 1-extension for the 16-vertex hypercube proposed in this paper contains one less edge than the trivial 1-extension. The article also determines the number of non-isomorphic extensions for each hypercube that can be constructed using the proposed schemes and proves the irreducibility of hypercube vertex 1-extensions.
Keywords: graph theory, vertex extension, fault tolerance, bipartite graphs, hypercube
Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of science and education of the Russian Federation in the framework of the basic part of the scientific research state task (project No. FSRR-2020-0006).
For citation: Lobov A. A., Abrosimov M. B. Vertex extensions of 4-layer graphs and hypercubes. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 536–548 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-536-548, EDN: BHQKFP

Введение

В работе будут рассматриваться простые неориентированные графы. Основные определения используются по работе [1]. Напомним, что граф называется *двудольным*, если его вершины можно разбить на две доли так, чтобы все рёбра соединяли вершины разных долей. Если каждая пара вершин из разных долей смежна, то такой двудольный граф называется полным. Далее будет представлено семейство двудольных графов, которое мы будем называть многослойными графами. Из многослойных графов наибольшей интерес представляют 4-слойные графы. Для них будет предложена схема построения вершинных 1- и 2-расширений. Важнейшим представителем 4-слойных графов являются гиперкубы, которые представляют не только теоретический, но и практический интерес как популярная топология построения вычислительных систем [2]. Вершинные и рёберные расширения являются моделью исследования отказоустойчивости технических систем на языке теории графов [3–5]. Сначала была представлена модель для исследования отказов элементов системы, позднее модель была расширена на случай отказов связей.

Граф G^* называется *вершинным k-расширением* (В-k-Р) графа G, если граф G вкладывается в каждый граф, полученный из G^* удалением любых k вершин. Если никакая собственная часть В-k-Р G^* не является В-k-Р графа G, то расширение G^* называется *неприводимым*. Если В-k-Р имеет минимально возможное число вершин и рёбер, то оно называется *минимальным*.

Для каждого графа G можно построить тривиальное В-k-Р, которое получается добавлением k вершин, соединением их рёбрами между собой и с остальными вершинами графа G. Если в графе n вершин, то в тривиальном В-1-Р на n рёбер больше, чем в G, а в тривиальном В-2-Р — на $2n+1$.

Под вложением понимается изоморфное вложение, т. е. граф $G = (V, \alpha)$ вкладывается в граф $H = (U, \beta)$, если $(\exists \phi : V \to U)((u, v) \in \alpha \Rightarrow (\phi(u), \phi(v)) \in \beta)$.

Пусть $G = (V, \alpha)$, $v \in V$ — произвольная вершина, а $\{u, v\}$ — некоторое ребро. Обозначим через $G - v$ граф, получающийся из G удалением вершины v и всех её рёбер, а через $G - \{u, v\}$ — граф, получающийся из G удалением ребра $\{u, v\}$.

Задача построения вершинных и рёберных расширений является вычислительно сложной [6]. В работах [7, 8] были предложены алгоритмы построения минимальных вершинных и рёберных расширений графа без проверки на изоморфизм, которые хорошо подходят для параллельной реализации. Однако даже для 16-вершинного гиперкуба на данный момент не удалось найти минимальное вершинное 1-расширение. На практике в качестве отказоустойчивой реализации 16-вершинного гиперкуба используется его тривиальная реализация. В данной работе будет предложено неприводимое расширение гиперкуба, которое имеет на одно ребро меньше. Заметим, что для минимальных рёберных 1-расширений гиперкуба известен теоретический результат [4], который также был подтверждён с помощью вычислительного эксперимента [8].

1. Многослойные графы

Будем называть граф k-слойным, если его вершины можно раскрасить в k цветов $(1, 2, \ldots, k)$ так, что каждое ребро $\{u, v\}$ будет соединять две вершины цветов $c(u)$, $c(v)$, если $|c(u) - c(v)| = 1$, при этом для каждого цвета есть хотя бы одна вершина, окрашенная в этот цвет. Через L_k обозначим множество k-слойных графов. Из определения видно, что k-слойные графы являются частным случаем k-дольного графа. 1-слойные графы — это множество вполне несвязных графов. 2-слойные графы по определению совпадают с двудольными графами.

Лемма 1 (Об иерархии k-слойных графов). *При $k \geqslant 2$ $L_{k+1} \subseteq L_k$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный граф $G \in L_{k+1}$ с соответствующей раскраской. Вершины цвета $k+1$ могут быть смежны только с вершинами цвета k, вершины цвета $k-1$ также могут быть смежны с вершинами цвета k. Перекрасив вершины цвета $k+1$ в цвет $k-1$, получим раскраску k-слойного графа, т. е. $G \in L_k$. G выбран произвольно, значит, $L_{k+1} \subseteq L_k$. □

Напомним, что граф называется *связным*, если между каждой парой его вершин есть соединяющий их путь. *Расстоянием* между вершинами u и v назовём число рёбер в кратчайшем пути между ними и обозначим $d(u, v)$. *Эксцентриситетом* вершины называется максимальное расстояние от неё до остальных вершин графа. *Диаметром* графа G называется максимальный из эксцентриситетов его вершин и обозначается $d(G)$.

Теорема 1 (Критерий связного k-слойного графа). *Связный n-вершинный граф G с диаметром d является k-слойным при $k \geqslant 2$ тогда и только тогда, когда G является двудольным и $n \leqslant k \leqslant d+1$.*

Доказательство. Выберем вершину u, эксцентриситет которой равен диаметру. Дадим каждой вершине v цвет, равный $d(u,v)+1$. Получим вершины $d+1$ цветов, так как для u есть вершина, расстояние до которой равно диаметру d. Пусть в графе есть ребро $\{v,w\}$. Очевидно, что $d(u,v)+1 \geqslant d(u,w)$ и $d(u,w)+1 \geqslant d(u,v)$ в силу смежности w и v, отсюда $|d(u,v)-d(u,w)| \leqslant 1$. Если $|d(u,v)-d(u,w)| = 0$, то вершины v и w принадлежат одной доле двудольного графа и не могут быть смежны. Это значит, что $|d(u,v)-d(u,w)| = 1$. Таким образом, была построена раскраска k-слойного графа для $k = d+1$. С учётом леммы 1 можно построить раскраску и в меньшее количество цветов.

Предположим, что $k > d+1$. Это означает, что в графе будут вершины цвета 1 и $d+2$. Так как граф связный, то между любыми двумя вершинами есть путь. Рёбра соединяют вершины, цвета которых отличаются на 1, т. е. любой путь между вершиной цвета 1 к вершине цвета $d+2$ содержит минимум $d+1$ ребро, что больше диаметра. Получили противоречие, а значит, $k \leqslant d+1$. □

Критерий легко перенести и на общий случай.

Теорема 2 (Критерий k-слойного графа). *Граф G, состоящий из t компонент связности с диаметрами $d_1, d_2, \ldots, d_t$, является k-слойным тогда и только тогда, когда G — двудольный граф и $k \leqslant (\sum_{i=1}^{t} d_i) + t$.*

Далее для нас будут представлять основной интерес 4-слойные графы, поэтому сформулируем для них отдельное следствие.

Следствие 1 (Критерий 4-слойного графа). *Двудольный граф $G = (U \cup V, \alpha)$, где U и V — доли графа, является 4-слойным тогда и только тогда, когда количество вершин в нём не меньше 4 и $(\exists u \in U)(\exists v \in V)\{u,v\} \notin \alpha$, т. е. он не является полным двудольным графом.*

Доказательство. *Необходимость* следует из того, что вершины слоёв 1 и 4 не смежны друг с другом и принадлежат разным долям.

Достаточность. Если количество вершин меньше 4, то их невозможно раскрасить в 4 цвета так, чтобы все цвета были задействованы. Если граф связный, то между вершинами u и v из разных долей нет ребра, поэтому путь между ними будет состоять минимум из трёх рёбер (три перехода между долями).

Пусть граф G несвязный и количество компонент равно 2. Рассмотрим два случая.

1. Одна из компонент является O_1, т. е. её диаметр 0, а в другой компоненте не менее 3 вершин, при этом как минимум две из них в одной доле, а расстояние между вершинами одной доли не может быть меньше 2. Диаметры равны 0 и 2, количество компонент равно 2, поэтому по теореме 2 граф будет 4-слойным.

2. В каждой компоненте минимум 2 вершины. Тогда диаметр каждой компоненты не может быть меньше 1, т. е. граф 4-слойный.

Если количество компонент 3, то в графе из 4 вершин будет хотя бы одна компонента с двумя вершинами, диаметр которой будет не меньше 1, а значит, по формуле из теоремы 2 он будет 4-слойным.

Более 3 компонент по теореме 2 приводят к 4-слойности графа. □

2. Вершинные расширения 4-слойных графов

Теорема 3 (о В-1-Р 4-слойных графов). *Пусть дан 4-слойный n-вершинный граф $G = (W, \alpha)$, т. е. двудольный граф с долями U и V, в котором есть две несмежные вершины u, v: $u \in U$, $v \in V$. Тогда граф $G^* = (W^*, \alpha^*) = (W \cup \{w\}, \alpha \cup \beta \cup \delta_u \cup \delta_v \cup \eta)$ является В-1-Р графа G, где $\delta_u = \{\{u, x\} | x \in V \backslash N_u \backslash \{v\}\}$, $\beta = \{\{w, x\} | x \in N_v \cup N_u\}$, $\eta = \{\{u, v\}\}$, $\delta_v = \{\{v, x\} | x \in U \backslash N_v \backslash \{u\}\}$, N_u, N_v — множества смежных с u и v вершин.*

Доказательство. Вершины u и v будем называть опорными. Рассмотрим количество дополнительных рёбер в графе G^*. Множества α, β, δ_u, δ_v и η не имеют попарных пересечений, поэтому:

$$|\beta \cup \delta_u \cup \delta_v \cup \eta| = |\beta| + |\delta_u| + |\delta_v| + |\eta| = |N_u \cup N_v| + |V \backslash N_u \backslash \{v\}| + |U \backslash V_u \backslash \{u\}| + 1 =$$
$$= |N_u| + |N_v| + |V| - |N_u| - 1 + |U| - |V_u| - 1 + 1 = |U| + |V| - 1 = n - 1.$$

Заметим, что если вершины u и v и доли U и V поменять местами, то граф G^* не изменится. Рассмотрим несколько случаев удаления вершины в графе G^* и для каждого из них построим вложение графа G.

1. Удалена вершина w. Покажем, что g_w: $g_w(x) = x$ является вложением G в $G^* - w$. Ребро $\{x, y\} \in \alpha \subseteq W \times W \Rightarrow \{x, y\} \in \alpha^* \wedge \{x, y\} \in W \times W \Rightarrow \{x, y\} \in \alpha^* \cap (W \times W)$. Так как $\{g_w(x), g_w(y)\} = \{x, y\}$, то g_w является вложением.

2. Удалена вершина v (для u аналогично). Имеем

$$g_v(x) = \begin{cases} w, & \text{если } x = v, \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $\{v, s\} \in \alpha \Rightarrow s \in N_v \Rightarrow \{g_v(v), g_v(s)\} = \{w, s\} \in \beta$.

3. Удалена вершина $r \in V \backslash \{v\}$ (для $r \in U \backslash \{u\}$ аналогично). Имеем

$$g_r(x) = \begin{cases} w, & \text{если } x = v, \\ v, & \text{если } x = r, \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда

- $\{v, s\} \in \alpha \Rightarrow s \in N_v \Rightarrow \{g_r(v), g_r(s)\} = \{w, s\} \in \beta$;
- $\{r, s\} \in \alpha \Rightarrow \{g_r(r), g_r(s)\} = \{v, s\} \wedge s \in U \Rightarrow \begin{cases} s \in N_v & \Rightarrow \{v, s\} \in \alpha, \\ s \in U \setminus N_v \setminus \{u\} & \Rightarrow \{v, s\} \in \delta_v, \\ s = u & \Rightarrow \{v, u\} \in \eta; \end{cases}$
- $\{x, s\} \in \alpha \wedge \{x, s\} \cap \{r, v\} = \varnothing \Rightarrow \{g_r(x), g_r(s)\} = \{x, s\} \in \alpha$.

Таким образом, по определению G^* является В-1-Р графа G, и количество дополнительных рёбер в нём равно $n - 1$. □

Теорема 4 (о В-2-Р 4-слойных графов)**.** *Пусть дан 4-слойный n-вершинный граф $G = (W, \alpha)$, т. е. двудольный граф с долями U и V и две несмежные вершины $u \in U$ и $v \in V$. Тогда граф $G^* = (W^*, \alpha^*)$ является В-2-Р графа G, где $W^* = W \cup \{w_u, w_v\}$, $\alpha^* = \alpha \cup \beta_v \cup \beta_u \cup \delta_u \cup \delta_v \cup \eta$, $\beta_v = \{\{w_v, x\} | x \in N_v \cup V\}$, $\delta_u = \{\{u, x\} | x \in V \backslash N_u \backslash \{v\}\}$, $\eta = \{\{u, v\}\}$, $\beta_u = \{\{w_u, x\} | x \in N_u \cup U\}$, $\delta_v = \{\{v, x\} | x \in U \backslash N_v \backslash \{u\}\}$.*

Доказательство. Подсчёт ребер проводится аналогично теореме 3. Количество дополнительных ребер:

$$|N_v \cup V| + |N_u \cup U| + |V \backslash N_u \backslash \{v\}| + |U \backslash N_v \backslash \{u\}| + 1 =$$
$$= |N_v| + |V| + |N_u| + |U| + |V| - |N_u| - 1 + |U| - |N_v| - 1 + 1 =$$
$$= 2|V| + 2|U| - 1 = 2n - 1.$$

Рассмотрим различные возможные ситуации и укажем схемы построения вложения. Для начала отметим, что добавление рёбер в графе производится симметрично относительно U, V и опорных вершин u, v, т. е. при их взаимном переименовании граф G^* не изменится. Воспользуемся этой симметрией для уменьшения количества рассматриваемых случаев.

Для начала определим В-1-Р H^* графа G, построенное по теореме 3:

$$H^* = (W \cup \{w\},\ \alpha \cup \beta \cup \delta_u \cup \delta_v \cup \eta),$$

где $\beta = \{\{w, x\} | x \in N_v \cup N_u\}$.

I. Покажем, что следующее отображение из H^* в $G^* - w_v$ является вложением:

$$\phi(x) = \begin{cases} w_u, & \text{если } x = w; \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Справедливо следущее:

- $\{s, x\} \in \alpha \cup \delta_u \cup \delta_v \cup \eta \Rightarrow \{\phi(s), \phi(x)\} = \{s, x\} \in \alpha \cup \delta_u \cup \delta_v \cup \eta$;
- $\{w, x\} \in \beta \Rightarrow x \in N_u \cup N_v \subseteq N_u \cup U \Rightarrow \{\phi(w), \phi(x)\} = \{w_u, x\} \in \beta_u$.

Таким образом, граф $G^* - w_v$ является В-1-Р графа G. Это означает, что вложение G в $G^* - w_v - r$ для произвольной вершины r существует.

При удалении w_u ситуация аналогична.

II. Покажем, что существует вложение ϕ графа H^* в $G^* - v$. Имеем

$$\phi(x) = \begin{cases} w_v, & \text{если } x = w, \\ w_u, & \text{если } x = v, \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда

1) $\{s, x\} \in \alpha \Rightarrow \begin{cases} s = v (\text{при } x = v \text{ аналогично}) & \Rightarrow \{\phi(v), \phi(x)\} = \{w_u, x\} \in \beta_u, \\ s \neq v \text{ и } x \neq v & \Rightarrow \{\phi(s), \phi(x)\} = \{s, x\} \in \alpha; \end{cases}$

2) $\{w, x\} \in \beta \Rightarrow x \in N_u \cup N_v \Rightarrow \{\phi(w), \phi(x)\} = \{w_v, x\} \in \beta_v$;

3) $\{u, x\} \in \delta_u \Rightarrow x \in V \setminus N_u \setminus \{v\} \Rightarrow \{\phi(u), \phi(x)\} = \{u, x\} \in \delta_u$;

4) $\{v, x\} \in \delta_v \Rightarrow x \in U \setminus N_v \setminus \{u\} \subseteq U \Rightarrow \{\phi(v), \phi(x)\} = \{w_u, x\} \in \beta_u$;

5) $\{u, v\} = \{v, u\} \in \eta \Rightarrow \{\phi(v), \phi(u)\} = \{w_u, u\} \in \beta_u$.

Таким образом, в $G^* - v$ вкладывается В-1-Р графа G. Следовательно, $G^* - v$ также является В-1-Р графа G. Это означает, что вложение G в $G^* - v - r$ для произвольной вершины r существует.

Случай $G - u$ аналогичен.

III. При удалении вершин из одной доли: $r_1, r_2 \in V \setminus \{v\}$. Имеем

$$g_1(x) = \begin{cases} w_u, & \text{если } x = r_1, \\ v, & \text{если } x = r_2, \\ w_v, & \text{если } x = v, \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Покажем, что отображение g_1 является вложением:
1) $\{r_1, s\} \in \alpha \Rightarrow s \in U \Rightarrow \{g_1(r_1), g_1(s)\} = \{w_u, s\} \in \beta_u \subseteq \alpha^*$;
2) $\{r_2, s\} \in \alpha \Rightarrow s \in U \Rightarrow \{g_1(r_2), g_1(s)\} = \{v, s\} \Rightarrow \begin{cases} \{v, s\} \in \eta, & \text{если } s = u, \\ \{v, s\} \in \alpha, & \text{если } s \in N_v, \\ \{v, s\} \in \delta_v, & \text{иначе;} \end{cases}$
3) $\{v, s\} \in \alpha \Rightarrow s \in N_v \Rightarrow \{g_1(v), g_1(s)\} = \{w_v, s\} \in \beta_v \subseteq \alpha^*$;
4) $\{s_1, s_2\} \in \alpha \wedge \{s_1, s_2\} \cap \{v, r_1, r_2\} = \varnothing \Rightarrow \{g_2(s_1), g_2(s_2)\} = \{s_1, s_2\} \in \alpha \subseteq \alpha^*$.
По определению g_1 является вложением. Случай $r_1, r_2 \in U \setminus \{u\}$ аналогичен.
VI. При удалении вершин из разных долей $r_v \in V \setminus \{v\}$ и $r_u \in U \setminus \{u\}$ имеем

$$g_2(x) = \begin{cases} v, & \text{если } x = r_v, \\ u, & \text{если } x = r_u, \\ w_u, & \text{если } x = v, \\ w_v, & \text{если } x = u, \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Покажем, что отображение g_2 является вложением:
1) $\{u, s\} \in \alpha \Rightarrow s \in N_u \Rightarrow \{g_2(u), g_2(s)\} = \{w_v, s\} \in \beta_v \subseteq \alpha^*$;
2) $\{v, s\} \in \alpha \Rightarrow s \in N_v \Rightarrow \{g_2(u), g_2(s)\} = \{w_v, s\} \in \beta_u \subseteq \alpha^*$;
3) $\{r_u, s\} \in \alpha \Rightarrow s \in V$ (так как G — двудольный и $r_u \in U$):
   - $s = r_v \Rightarrow \{g_2(r_u), g_2(r_v)\} = \{u, v\} \in \eta \Rightarrow \alpha^*$;
   - $s = v \Rightarrow \{g_2(r_u), g_2(v)\} = \{u, w_u\} = \{w_u, u\} \in \beta_u \subseteq \alpha^*$;
   - $s \in N_u \Rightarrow \{g_2(r_u), g_2(s)\} = \{u, s\} \in \alpha \subseteq \alpha^*$;
   - $s \in V \setminus N_u \setminus \{r_v, v\} \Rightarrow \{g_2(r_u), g_2(s)\} = \{u, s\} \in \delta_u \subseteq \alpha^*$;
4) $\{r_v, s\} \in \alpha \Rightarrow s \in U$:
   - $s = r_u \Rightarrow \{g_2(r_v), g_2(r_u)\} = \{v, u\} = \{u, v\} \in \eta \subseteq \alpha^*$;
   - $s = u \Rightarrow \{g_2(r_v), g_2(u)\} = \{v, w_v\} = \{w_v, v\} \in \beta_v \subseteq \alpha^*$;
   - $s \in N_v \Rightarrow \{g_2(r_v), g_2(s)\} = \{v, s\} \in \alpha \subseteq \alpha^*$;
   - $s \in U \setminus N_v \setminus \{r_u, u\} \Rightarrow \{g_2(r_v), g_2(s)\} = \{v, s\} \in \delta_v \subseteq \alpha^*$;
5) $\{s_1, s_2\} \in \alpha \wedge \{s_1, s_2\} \cap \{u, v, r_u, r_v\} = \varnothing \Rightarrow \{g_2(s_1), g_2(s_2)\} = \{s_1, s_2\} \in \alpha \subseteq \alpha^*$.

Таким образом, g_2 является вложением G в $G^* - r_u - r_v$. Все случаи разобраны, поэтому G^* является В-2-Р графа G. □

Далее понадобится лемма 2.1.4 из работы [2].

Лемма 2. *Если минимальная степень вершины графа G есть $d > 0$, то его минимальное вершинное k-расширение G^* не содержит вершин степени ниже $d + k$.*

Лемма 3. *Если G — регулярный 4-слойный граф степени $d > 0$, то G^* — В-1-Р графа G, построенное по схеме из теоремы 1, неприводимо тогда и только тогда, когда $G^* - \{u, v\}$ не является В-1-Р графа G.*

Доказательство. В теореме 3 к графу G добавляется ребро $\{u, v\}$, а также к каждой вершине x, отличной от u, v и w, добавляется ребро $\{x, v\}$, $\{x, u\}$ или $\{x, w\}$, что увеличивает степень вершины x до $d+1$. Таким образом, каждое ребро графа, которое неинцидентно одновременно u, v и w, будет иметь на конце вершину степени $d+1$, и её удаление приведёт к появлению вершины степени d, поэтому по лемме 2 полученный таким образом граф не будет являться В-1-Р графа G. Остаётся рассмотреть только ребро $\{u, v\}$, так как рёбра $\{u, w\}$ и $\{v, w\}$ отсутствуют.

Следовательно, G^* неприводимо тогда и только тогда, когда $G^* - \{u, v\}$ не является В-1-Р графа G. □

Лемма 4. *Если G — регулярный 4-слойный граф степени больше $d > 0$, то G^* — В-2-Р графа G, построенное по схеме из теоремы 4, неприводимо тогда и только тогда, когда ни один из трёх графов $G^* - \{u, v\}$, $G^* - \{w_v, v\}$ и $G^* - \{w_u, u\}$ не является В-2-Р графа G.*

Доказательство. Опираясь на доказательство леммы 3, получим, что среди дополнительных рёбер удаление произвольного ребра, отличного от $\{u, v\}$, $\{w_v, v\}$ и $\{w_u, u\}$, приводит к образованию вершины степени $d+1$, что меньше, чем $d+2$. Поэтому для определения неприводимости расширения остаётся проверить только те графы, которые получены удалением данных рёбер. □

3. Вершинные расширения гиперкубов

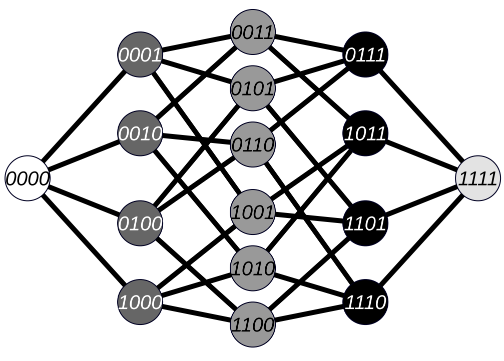
Под N-мерным гиперкубом или N-кубом будем подразумевать граф

$$Q_N = (V = \{0, 1\}^N, \quad \alpha = \{\{u, v\} | u, v \in V, \ h(u, v) = 1\}),$$

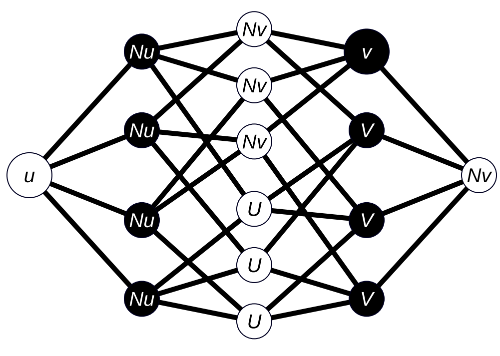
где h — дистанция Хемминга. В Q_N $d(u, v) = h(u, v)$.

Гиперкубы являются двудольными графами, диаметр N-куба равен N [9], поэтому они являются $(N+1)$-слойными графами, а значит, при $N \geqslant 3$ для N-куба применимы теоремы 3 и 4. Будем использовать следующую $(N+1)$-слойную раскраску N-куба: вершина с i единицами в метке окрашена в цвет i.

Для 4-куба пример разметки и 5-слойной раскраски изображён на рис. 1, *а*. На рис. 1, *б* показана разметка вершин при построении В-1-Р и В-2-Р по теоремам 3 и 4.



а / *a*



б / *b*

Рис. 1. Схема 5-слойной раскраски 4-куба (*а*) и разметка 4-куба для построения расширений по схемам из теорем 3 и 4 (*б*)

Fig. 1. Scheme of 5-layer coloring of the 4-cube (*a*) and labeling of the 4-cube for constructing extensions according to the schemes from Theorems 3 and 4 (*b*)

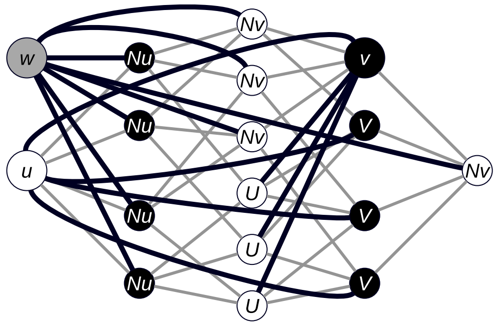


Рис. 2. Схема построения B-1-P гиперкуба Q_4 по теореме 3

Fig. 2. Scheme for constructing a 1-NFT of the hypercube Q_4 according to Theorem 3

На рис. 2 изображено B-1-P 16-вершинного гиперкуба. Метки N_u, N_v, U, V обозначают вершины из соответствующих множеств.

N-куб имеет 2^N вершин степени N. Так как N-куб двудольный и симметричный, его доли имеют одинаковое количество вершин. По построению B-1-P по схеме из теоремы 3 граф будет иметь следующие степени вершин:

1) $d(u) = d(v) = 2^N/2 = 2^{N-1}$;

2) $d(w) = 2N$;

3) степени остальных вершин равны $N+1$.

Автоморфизмом графа $G = (V, \alpha)$ называется биективное отображение $\psi : V \to V$ такое, что

$$\forall\ \{u,v\}(\{u,v\} \in \alpha \Rightarrow \{\psi(u), \psi(v)\} \in \alpha),$$

т. е. при применении автоморфизма к графу получается тот же граф. Множество автоморфизмов графа G обозначается как $Aut(G)$.

Очевидно, что если ϕ — вложение, то суперпозиция ϕ с автоморфизмом $\psi \circ \phi$ также является вложением. Каждый N-куб является дистанционно-транзитивным графом [10], т. е.

$$\forall\ u_1, u_2, v_1, v_2 \in V(d(u_1,u_2) = d(v_1,v_2) \Rightarrow \exists\ \Omega_{u_1,u_2,v_1,v_2} \in Aut(Q)) :$$
$$\Omega_{u_1,u_2,v_1,v_2}(u_1) = v_1 \ \wedge\ \Omega_{u_1,u_2,v_1,v_2}(u_2) = v_2.$$

Теорема 5 (О количестве неизоморфных B-1-P гиперкуба, построенных по схеме из теоремы 3)**.** *Количество неизоморфных B-1-P N-куба, построенных по теореме 3, равно* $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$.

Доказательство. Учитывая дистанционную транзитивность гиперкуба G, если выбрать в качестве опорных вершины u и v, то полученное расширение по теореме 3 будет изоморфно любому расширению, в котором в качестве опорных выбраны вершины a и b, расстояние между которыми равно расстоянию между u и v. Изоморфизмом в данном случае будет $\Phi_{u,v,a,b}(x) = \begin{cases} w, & \text{если } x = w, \\ \Omega_{u,v,a,b}(x), & \text{иначе.} \end{cases}$

Это означает, что неизоморфными могут быть только те расширения с опорными вершинами u, v, расстояние между которыми различно и равно 3, 5, 7, 9 и т. д. Пусть есть два расширения N-куба H_1 и H_2, расстояние между u и v в которых было равно d_1 и d_2 соответственно ($d_1 < d_2$). Степени вершин расширения N-куба, как уже было отмечено, равны: $d(w) = 2N$, $d(u) = d(v) = N^{2-1}$, степень остальных вершин равна $N+1$. Проведём в G_1 простой путь длины d_1 $(u, x_1, x_2, \ldots, x_{d_1-2}, x_{d_1-1}, v)$, $x_1 \in N_u, x_{d_1-1} \in N_v, d(x_i) = N+1$. Рассмотрим, можно ли построить такой же путь в графе G_2. В таком пути нет вершины w, следовательно, рёбра из множества β не могут быть использованы. Вершины u и v находятся на концах, а $x_1 \in N_u, x_{d_1-1} \in N$, и они всегда есть в пути, так как $d_1 \geqslant 3$, поэтому рёбра из δ_u, δ_v и η не могут быть использованы. Это значит, что использоваться могут только рёбра гиперкуба. При этом расстояния между опорными вершинами u и v в самом гиперкубе в различных случаях равны d_2 и d_1, при этом $d_2 > d_1$, поэтому такого пути не может существовать. То есть в G_1 можно провести простой путь длины d_1 между вершинами степени 2^{N-1}, степени помежуточных вершин в котором равны $N+1$, а в G_2 — нет.

Следовательно, два В-1-Р гиперкуба, построенные по схеме из теоремы 3, неизоморфны тогда и только тогда, когда расстояния между u и v различны. Значит, количество таких неизоморфных В-1-Р для N-куба равно $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$. □

Теорема 6 (О количестве неизоморфных В-2-Р гиперкуба, построенных по теореме 4)**.** *Количество неизоморфных В-2-Р N-куба, построенных по теореме 4, равно* $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 5. В построении пути в качестве промежуточных вершин не могут участвовать вершины u, v, w_u и w_v, поэтому также могут использоваться только рёбра гиперкуба. Степени промежуточных вершин равны $N+2$, остальных — отличны от этого значения. □

Теорема 7 (О неприводимости В-1-Р гиперкуба, построенных по теореме 3)**.** *В-1-Р N-куба, построенные по схеме из теоремы 3, являются неприводимыми.*

Доказательство. По лемме 3 В-1-Р G^* N-куба Q_N является неприводимым тогда и только тогда, когда $G^* - \{u, v\}$ не является В-1-Р. Рассмотрим граф $H = G^* - \{u, v\} - r$, где $r \in N_u$.

При $N = 3$: вершина u в G^* имеет степень 4, значит, в H её степень будет равна 2 (удалена r смежная с u и ребро $\{u, v\}$), что меньше степеней вершин 3-куба, а так как количество вершин в G и H одинаково, вложение G в H построить невозможно.

При $N > 3$ рассмотрим структуру N-куба.

Рассмотрим вложение ψ из Q_N в G. Пусть $\psi(x) = y$. Так как Q_N — вершинно-симметричный, существует автоморфизм ϕ, который переводит произвольную вершину z в x, а значит, существует вложение $\phi \circ \psi$, которое переводит z в y. Если такого вложения не существует и количество вершин в Q_N и G одинаково, то вложения Q_N в G не существует.

Рассмотрим структуру N-куба, которую будем пытаться найти:

1) он имеет единственную вершину цвета 0;

2) с ней смежна каждая вершина цвета 1. Таких вершин ровно N;

3) каждая вершина цвета 2 смежна с двумя вершинами цвета 1 (их можно получить, заменив одну единицу в метке вершины цвета 2 на ноль). Таких вершин ровно $C_N^2 = \frac{N(N-1)}{2}$.

Вершины цвета 1 имеют ровно одну единицу в метке. Их можно занумеровать по позиции, в которой эта единица находится.

Рассмотрим отображение $P_{i_1,\ldots,i_N}(u) = v$, где $u = (u_1, \ldots, u_N)$, $v = (u_{i_1}, \ldots, u_{i_N})$. Данное отображение выполняет перестановку элементов в метке. Оно является автоморфизмом, так как не меняет дистанцию Хемминга между соответствующими образами, т. е. $d(u, v) = d(P_{i_1,\ldots,i_N}(u), P_{i_1,\ldots,i_N}(v))$.

Таким образом, для проверки вложения достаточно зафиксировать один порядок вершин цвета 1, так как для каждого порядка следования вершин можно подобрать соответствующий автоморфизм $P_{i_1,..,i_N}$.

Пусть r не смежна ни с одной вершиной из N_v. Вершина r в G^* имеет $N+1$ инцидентное ребро: рёбра гиперкуба и дополнительно одно к вершине w, поэтому оно может быть смежно с вершинами из N_v только через ребро гиперкуба. Если расстояние между u и v в гиперкубе больше 3, то расстояние между смежными с u и v вершинами больше 1, и они не могут быть смежны в G^*, а если равно 3, то метки вершин u и v отличаются в трёх позициях, и метка r должна во всех этих трёх позициях совпадать с u, что возможно, так как длина меток $N > 3$.

Рассмотрим граф $H = G^* - \{u, v\} - r$. Вершина r была смежна с вершинами u, w и $N-1$ вершинами, степень которых была равна $N+1$, а после удаления r в H стала равна N. Обозначим последние как $q_1, \dots, q_{N-1}$. Вершины q_i и q были смежны с r в N-кубе, а значит, их метки отличаются от r в одной позиции. Обозначим q как q_N, а позиции, в которых q_i отличается от r, как b_i.

Пусть s_0 вкладывается в v. Так как вершина $r \in N_u \subseteq V$, то $q_1, \dots, q_{N-1} \subset U \setminus \{u\}$, поэтому все данные вершины смежны с v. Так как их степени равны N, то в них будут отображены $N-1$ вершина цвета 1.

Вершины $q_1, \dots, q_{N-1}$ могут быть смежны с u, w.

Вершины цвета 2 должны отображаться в вершины, смежные с $q_1, \dots, q_{N-1}$. Рассмотрим их.

Вершина v уже использована в отображении, остальные — это вершины $q_{i,j} = q_{j,i} = (r_1, \dots, r_{b_{i-1}}, r_{b_i} \oplus 1, r_{b_{i+1}}, \dots, r_{b_{j-1}}, r_{b_j} \oplus 1, r_{b_{j+1}}, \dots, r_N)$, $i \neq j$. Заметим, что каждая вершина q_i смежна с $N-1$ вершиной $q_{i,j}$. При этом $q_{i,j}$ смежна с q_i и q_j, т. е. хотя бы с одной из уже отображённых вершин ($q_i \neq q_N$ или $q_j \neq q_N$). Количество различных вершин $q_{i,j}$ равно $C_N^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, т. е. они все должны быть образами вершин N-куба цвета 2.

Среди образов вершин цвета 2 есть $N-1$ вершина, которая смежна только с одной вершиной цвета 1, — это вершины $q_{i,N}$. Образ оставшейся вершины цвета 1 должен быть смежен с каждой из них.

Рассмотрим $q_{j_1,N} = (r_1 \oplus 1, r_2, r_3, \dots, r_N \oplus 1)$ и $q_{j_2,N} = (r_1 \oplus 1, r_2, r_3, \dots, r_N \oplus 1)$. Среди общих смежных вершин у них есть $q_{j_1,j_2,N} = (r_1 \oplus 1, r_2 \oplus 1, r_3, \dots, r_N \oplus 1)$ и $q_N = (r_1, r_2, r_3, \dots, r_N \oplus 1)$, а также могут быть w, v и u через дополнительные рёбра. Вершина v является образом вершины цвета 0, вершины u и w не смежны с v по условию, а $q_N = u$. При этом $h(q_{j_1,j_2,N}, q_{j_3,N}) = 3$, где $q_{j_3,N} = (r_1, r_2, r_3 \oplus 1, r_4, \dots, r_N \oplus 1)$, т. е. $q_{j_1,j_2,N}$ не смежна с $q_{j_3,N}$.

Следовательно, не существует образов для оставшейся вершины N-куба цвета 1, т. е. вложения не существует, а это означает, что H не является В-1-Р графа G, т. е. G^* является неприводимым В-1-Р. □

Заключение

В работе были предложены схемы построения вершинных 1- и 2-расширений для 4-слойных графов, которые имеют меньше дополнительных рёбер, чем тривиальные расширения: $n-1$ и $2n-1$ соответственно, где n — число вершин графа. Множество 4-слойных графов совпадает с множеством всех двудольных графов с числом вершин, больших 4, за исключением полных двудольных графов. К 4-слойным графам относятся и гиперкубы. Доказывается, что вершинные 1-расширения, построенные по предлагаемым схемам, для гиперкубов являются неприводимыми. Для 16-вершинного гиперкуба приводится вершинное 1-расширение в явном виде.

Список литературы

1. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. Москва : Физматлит, 1997. 368 с. EDN: XYCVTZ

2. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2012. 192 с. EDN: QMXQLB
3. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Transactions on Computers. 1976. Vol. C-25, № 9. P. 875–884. https://doi.org/10.1109/TC.1976.1674712
4. *Harary F., Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. Vol. 23, iss. 2. P. 135–142. https://doi.org/10.1002/net.3230230207
5. *Harary F., Hayes J. P.* Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. Vol. 27, iss. 1. P. 19–23. https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0037(199601)27:1<19::AID-NET2>3.0.CO;2-H
6. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Математические заметки. 2010. Т. 88, вып. 5. С. 643–650. https://doi.org/10.4213/mzm8403, EDN: RLRFEF
7. *Абросимов М. Б., Камил Ихаб А. К., Лобов А. А.* Построение всех неизоморфных минимальных вершинных расширений графа методом канонических представителей // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 4. С. 479–486. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-479-486, EDN: YXOMDX
8. *Абросимов М. Б., Судани Х. Х. К., Лобов А. А.* Построение минимальных рёберных расширений графа без проверки на изоморфизм // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 105–115. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-105-115, EDN: PXDRGJ
9. *Harary F., Hayes J. P., Wu H.-J.* A survey of the theory of hypercube graphs // Computers & Mathematics with Applications. 1988. Vol. 15, iss. 4. P. 277–289. https://doi.org/10.1016/0898-1221(88)90213-1
10. *Biggs N. L.* Distance-transitive graphs // Algebraic Graph Theory. Cambridge : Cambridge University Press, 1974. P. 155–163. https://doi.org/10.1017/CBO9780511608704.021

References

1. Bogomolov A. M., Salii V. N. *Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem* [Algebraic Foundations of the Theory of Discrete Systems]. Moscow, Fizmatlit, 1997. 368 p. (in Russian). EDN: XYCVTZ
2. Abrosimov M. B. *Grafovye modeli otkazoustojchivosti* [Graph Models of Fault Tolerance]. Saratov, Saratov University Publ., 2012. 192 p. (in Russian). EDN: QMXQLB
3. Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing systems. *IEEE Transactions on Computers*, 1976, vol. C-25, no. 9, pp. 875–884. https://doi.org/10.1109/TC.1976.1674712
4. Harary F., Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs. *Networks*, 1993, vol. 23, iss. 2, pp. 135–142. https://doi.org/10.1002/net.3230230207
5. Harary F., Hayes J. P. Node fault tolerance in graphs. *Networks*, 1996, vol. 27, iss. 1, pp. 19–23. https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0037(199601)27:1<19::AID-NET2>3.0.CO;2-H
6. Abrosimov M. B. On the complexity of some problems related to graph extensions. *Mathematical Notes*, 2010, vol. 88, iss. 5–6, pp. 619–625. https://doi.org/10.1134/S0001434610110015, EDN: OHNTMT
7. Abrosimov M. B., Kamil I. A. K., Lobov A. A. Construction of all nonisomorphic minimal vertex extensions of the graph by the method of canonical representatives. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, vol. 19, iss. 4, pp. 479–486 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-479-486, EDN: YXOMDX
8. Abrosimov M. B., Sudani H. H. K., Lobov A. A. Construction of all minimal edge extensions of the graph with isomorphism rejection. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 105–115 (in Russian).https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-105-115, EDN: PXDRGJ

9. Harary F., Hayes J. P., Wu H.-J. A survey of the theory of hypercube graphs. *Computers & Mathematics with Applications*, 1988, vol. 15, iss. 4, pp. 277–289. https://doi.org/10.1016/0898-1221(88)90213-1
10. Biggs N. Distance-transitive graphs. In: *Algebraic Graph Theory*. Cambridge, Cambridge University Press, 1974, pp. 155–163. https://doi.org/10.1017/CBO9780511608704.021

Поступила в редакцию / Received 23.07.2022
Принята к публикации / Accepted 18.08.2022
Опубликована / Published 30.11.2022