Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 11–23
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 11–23
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-11-23, EDN: ZMDMGI

Научная статья
УДК 511.84

Применение метода обобщенных степеней для построения решений кватернионного варианта системы Коши – Римана

Е. А. Лошкарева[1]✉, Ю. А. Гладышев[1], Е. Н. Малышев[2]

[1]Калужский государственный университет имени К. Э. Циолковского, Россия, 248023, г. Калуга, ул. Степана Разина, д. 26

[2]Калужский филиал Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана, Россия, 248000, г. Калуга, ул. Баженова, д. 2

Лошкарева Елена Анатольевна, кандидат технических наук, доцент кафедры физики и математики, losh-elena@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-6981-2758, AuthorID: 370561

Гладышев Юрий Александрович, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры физики и математики, gladyshev.yua@yandex.ru, AuthorID: 119923

Малышев Евгений Николаевич, кандидат технических наук, заведующий кафедрой машиностроительных технологий, malen@bmstu.ru, https://orcid.org/0000-0001-6493-2817, AuthorID: 376024

Аннотация. В настоящей статье указан один из способов решения обобщенной системы Коши – Римана для кватернионных функций в восьмимерном пространстве. В предыдущих работах были изучены некоторые классы решений этой системы и заявлено, что существует возможность использования метода обобщенных степеней для построения решений этой системы дифференциальных уравнений. Показано, что решение поставленной задачи может быть сведено к нахождению двух произвольных кватернионных гармонических функций в восьмимерном пространстве. Все 8 компонент этих функций φ, ψ должны быть гармоническими функциями, т. е. быть дважды непрерывно дифференцируемы по всем восьми действительным переменным x_i, y_i, где $i = \overline{1,4}$. В настоящей статье рассмотрен параметрический метод обобщенных степеней, который применим к отдельным уравнениям второго и более высоких порядков.

Ключевые слова: обобщенные степени Берса, кватернионы, система Коши – Римана

Для цитирования: *Лошкарева Е. А., Гладышев Ю. А., Малышев Е. Н.* Применение метода обобщенных степеней для построения решений кватернионного варианта системы Коши – Римана // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 11–23. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-11-23, EDN: ZMDMGI

Article

Application of the generalized degree method for constructing solutions of the quaternion variant of the Cauchy – Riemann system

E. A. Loshkareva[1✉], **Yu. A. Gladyshev**[1], **E. N. Malyshev**[2]

[1]Kaluga State University named after K. E. Tsiolkovski, 26 Stepan Razin St., Kaluga 248023, Russia
[2]Bauman Moscow State Technical University (Kaluga Branch), 2 Bazhenova St., Kaluga 248000, Russia
Elena A. Loshkareva, losh-elena@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-6981-2758, AuthorID: 370561
Yuri A. Gladyshev, gladyshev.yua@yandex.ru, AuthorID: 119923
Evgeniy N. Malyshev, malen@bmstu.ru, https://orcid.org/0000-0001-6493-2817, AuthorID: 376024

Abstract. This article indicates one of the ways to solve the generalized Cauchy – Riemann system for quaternionic functions in an eight-dimensional space. In previous works, some classes of solutions of this system were studied and it was stated that it is possible to use the method of generalized degrees to construct solutions of this system of differential equations. It is shown that the solution of the problem can be reduced to finding two arbitrary quaternionic harmonic functions in an eight-dimensional space. All 8 components of these functions φ, ψ must be harmonic functions, that is, be twice continuously differentiable over all 8 real variables x_i, y_i, where $i = \overline{1,4}$ solutions of the Laplace equation. In this article, the parametric method of generalized degrees is considered, which is applicable to individual equations of the second and higher orders.

Keywords: generalized Bers degrees, quaternion, Cauchy – Riemann system

For citation: Loshkareva E. A., Gladyshev Yu. A., Malyshev E. N. Application of the generalized degree method for constructing solutions of the quaternion variant of the Cauchy – Riemann system. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 11–23 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-11-23, EDN: ZMDMGI

Введение

Обобщенная система Коши – Римана была введена в работе [1] как естественное развитие систем, определенных в работах Мойсила [2] и Фуэттера [3]. При их определении использовалась алгебра кватернионных функций [4], поэтому естественно при введении обобщенной системы сохранить кватернионные методы. Но возможны и другие, например, матричная форма.

Система Коши – Римана допускает физическую интерпретацию, как система уравнений Максвелла для электромагнитного поля при наличии скалярных полей, а также как система Дирака для частиц с нулевой массой.

Данная статья посвящена методу обобщенных степеней как способу решения обобщенной системы Коши – Римана для кватернионных функций в восьмимерном пространстве, которая имеет вид

$$\left.\begin{aligned} D_1\varphi - \psi D_2 = 0, \\ \varphi\bar{D}_2 + \bar{D}_1\psi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Здесь φ, ψ — функции переменных x_i, y_i $(i=\overline{1,4})$, принимающие значения в теле кватернионов с системой единиц e_i $(i=\overline{0,3})$, а D_1, D_2 — кватернионые операторы

$$D_1=\sum_0^3 e_i\frac{\partial}{\partial x_{i+1}},\quad D_2=\sum_0^3 e_i\frac{\partial}{\partial y_{i+1}},\quad i=(\overline{0,3}).$$

Система (1) допускает введение новых функций α, β от x_i, y_i вида

$$\varphi=\bar{D}_1\alpha+\beta D_2,\quad \psi=-\alpha\bar{D}_2+D_1\beta. \tag{2}$$

Предполагая, что α, β таковы, что φ, ψ имеют непрерывные первые производные, убеждаемся, что функции α, β гармонические кватернионы

$$\left(D_1\bar{D}_1+D_2\bar{D}_2\right)\alpha=0,\quad \left(D_1\bar{D}_1+D_2\bar{D}_2\right)\beta=0,$$

т. е. все компоненты α, β являются решениями восьмимерного уравнения Лапласа.

В работе [1] были приведены некоторые классы решений и показано, что введение двух кватернионных потенциалов, аналогов электромагнитных потенциалов, сводит решение системы к построению многомерного уравнения Лапласа. В данной работе для решения этой проблемы будет использован развитый ранее метод обобщенных степеней Берса.

Метод ОС, впервые введенный Берсом [5–7], может быть представлен в двух видах, а именно в матричном и параметрическом. Матричный вариант эффективен при построении решения систем дифференциальных уравнений [8]. В работе [9] представлено понятие ОС на комплексной плоскости, описаны основные свойства. В литературе также описано применение матричного метода ОС для построения решений системы Мойсила – Теодореску, для решения задач теплопроводности и тепломассообмена [10–14]. Матричные модели теплопередачи, построенные на уравнении баланса массы и энергии, используются для решения обратной задачи теплопередачи [15, 16]. В работе [17] описан параметрический метод ОС. Данный вариант более удобен, когда нужно построить последовательность решений одного уравнения, например второго порядка производных. Поэтому далее использован параметрический вариант.

Приведем основные положения метода параметрических ОС (далее — ПОС). Для понимания основных методов достаточно рассмотреть случай одного независимого переменного x.

Пусть оператор D может быть введен как произведение линейных операторов D_i, $i=\overline{1,k}$:

$$D=D_kD_{k-1}\cdots D_1,$$

зависящих от x. Самый простой пример при $k=2$ связан с операторами

$$D_1=D_2=\frac{d}{dx},\quad D=D_2D_1=\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}. \tag{3}$$

В общем случае перестановочность операторов D_1, D_2 не требуется.

Обязательным является выполнение требований наличия у всех операторов непустых ядер, элементы которых обозначим C_i:

$$D_iC_i=0,\quad i=1,2.$$

Например, для (3) это константы.

Второе требование состоит в существовании правых обратных I_i для всех операторов:

$$D_i I_i = 1, \quad i = 1, 2.$$

Для примера (3) это интеграл с переменным верхним x и заданным нижним пределом x_0

$$I_i = \int\limits_{x_0}^{x} d\eta \ldots$$

Поэтому можно ввести проекционные операторы

$$P_i = 1 - I_i D_i$$

со свойствами

$$P_i^2 = P_i, \quad P_i C_i = C_i, \quad D_i P_i = 0, \quad P_i D_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Для простейшего примера (3) это просто подстановка нижнего предела интегрирования x_0:

$$P_i = \ldots|_{x=x_0}.$$

Приведем выражение для оператора I правого обратного для D

$$I = \int\limits_{x_0}^{x} d\eta_1 \int\limits_{x_0}^{\eta_1} d\eta_2 \ldots, \quad DI = 1$$

и вид обобщенной константы (ОК) для $DC = 0$.

В общем случае для k операторов константа строится по формуле

$$C = C_1 + I_1 C_2 + \ldots + I_1 \ldots I_{k-1} C_k. \tag{4}$$

Поэтому для случая (3) найдем

$$C = C_1 + C_2 (x - x_0).$$

Произвольные действительные константы C_1, C_2 далее будем называть параметрами. Для проектора имеем общую формулу для произведения k операторов

$$P = P_1 + I_1 P_2 D_1 + \ldots$$

Соответственно, для (3) имеем

$$P = \ldots|_{x_0} + (x - x_0) \left(\frac{d}{dx} \ldots \right)_{x=x_0}.$$

Определим ОС, приняв символ $X^{(p)}(x, x_0)C$ как

$$X^{(p)}(x, x_0)C = p! I^p C.$$

Поэтому легко видеть, что выполнено правило

$$DX^{(p)}C = pX^{(p-1)}C, \quad X^{(0)}C = C.$$

Это и подтверждает использованный термин ОС.

Следует помнить, что запись $X^{(p)}C$ — это единый символ, а не произведение некоторой функции. Если надо указать параметры C_1, C_2, то пишем

$$X^{(p)}C = X^{(p)}(C_1 + C_2 x).$$

Таким образом, символ $X^{(p)}$ следует скорее понимать как оператор, определенный на множестве линейных функций, а не как некоторую функцию.

Для примера (3) без каких-либо затруднений найдем

$$X^{(p)}(x,0) = p!\left(C_1\frac{x^{2p}}{(2p)!} + C_2\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\right).$$

Операция сложения ОС определена как сложение параметров C_1, C_2. Поэтому можно говорить о многочленах и рядах от ОС.

$$V_n = \sum_{i=0}^{n} X^{(i)}(x,x_0)C_i, \quad V = \sum_{i=0}^{\infty} X^{(i)}(x,x_0)C_i.$$

Например, для случая нахождения коэффициентов C_i можно использовать аналог формулы Тейлора

$$C_i = \frac{1}{i}P_i D^i V_n.$$

Формулу Тейлора для примера (3) запишем

$$C_i = \frac{1}{i!}\left[\left(\frac{d^{2i}}{dx^{2i}}\cdots\right)\Big|_{x=0} + I_1\left(\frac{d^{2i+1}}{dx^{2i+1}}\cdots\right)\Big|_{x=0}\right]. \tag{5}$$

Например, проводя разложение по формуле (5), найдем

$$x^n a = \begin{cases} X^{(p)}\frac{(2p)!}{p!}a, & n = 2p, \\ X^{(0)}\frac{(2p+1)!}{p!}a, & n = 2p+1. \end{cases}$$

Можно говорить о функциях, представленных рядом

$$V = \sum_{0}^{\infty} X^{(n)}(x,x_0)C_n,$$

Если введена метрика, имеем

$$V = e^{\alpha X(x,0)}C = \sum \frac{\alpha^i}{i!}X^{(i)}(x,0)C = \mathrm{ch}\sqrt{|\alpha|}x + \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}}\mathrm{sh}\sqrt{|\alpha|}x, \quad \alpha > 0,$$

$$V = e^{-\alpha X(x,0)}C = \sum \frac{(-1)^i\alpha^i}{i!}X^{(i)}(x,0)C = \cos\sqrt{|\alpha|}x + \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}}\sin\sqrt{|\alpha|}x, \quad \alpha > 0.$$

1. О построении гармонических функций многих действительных переменных методом параметрических обобщенных степеней

Хорошая черта метода ПОС состоит в том, что его обобщение на любое число независимых переменных является почти очевидным. Доказано, что общая константа может быть найдена как произведение ОК для ОК отдельных операторов. Договоримся обозначать переменные, к которым относятся операторы, в скобках после символа оператора

$$D(i) = D_k(i)D_{k-1}(i)\dots D_1(i),$$

аналогично для правых обратных, но в обратном порядке

$$I(i) = I_1(i)I_2(i)\dots I_k(i).$$

Здесь k — индекс оператора, входящего в данный $D(i)$. Примем далее, что все операторы, относящиеся к разным переменным, коммутируют:

$$D_{k_1}(j_1)D_{k_2}(j_2) = D_{k_2}(j_2)D_{k_1}(j_1).$$

Это распространяется и на правые обратные. Обобщенные константы снабдим символами по такому же правилу. Поэтому для операторов $I(i)$ для случая (3) должны принять

$$D(i) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad I(i) = \int\limits_{x_{i0}}^{x_i} d\eta_i \int\limits_{x_{i0}}^{\xi_i} d\xi_i \dots \tag{6}$$

Найдем при $x_{i0} = 0$

$$C = \prod_{i=1}^{d}(c_{1i} + c_{2i}x_i). \tag{7}$$

Имеем $2d$ параметров, которые далее назовем первичными. Выражение (7) можно представить в развернутой форме, проведя умножение. Параметры с одним индексом C_i, $i = \overline{1, 2^d}$, которые далее будут определять решение, назовем основными параметрами. Их число равно 2^d.

Используя операторы (6), найдем выражение для ОС с первичными параметрами как

$$X_1^{(p_1)}X_2^{(p_2)}\dots X_d^{(p_d)}C = p_1!p_2!\dots p_d!\prod_{i=1}^{d}\left(c_{1i}\frac{x_i^{2p_i}}{(2p_i)!} + c_{2i}\frac{x_i^{2p_i+1}}{(2p_i+1)!}\right).$$

Приведем основное свойство ОС относительно операторов $D(i)$:

$$D(i)X_1^{(p_1)}X_2^{(p_2)}\dots X_i^{(p_i)}\dots X_d^{(p_d)}C = p!X_1^{(1)}\dots X_i^{(i-1)}\dots X_dC.$$

Здесь i любое из $\overline{1, d}$.

Напомним, что оператор $D(i)$ — вторая производная, согласно примеру (3), по переменной x_i, $i \in (\overline{1, d})$.

Для использования функций, которые были названы ОС, важно следующее соотношение:

$$\begin{gathered}(D(1) + D(2) + \dots + D(d))(h_1X_1^{()} + h_2X_2^{()} + \dots + h_dX_d^{()})^nC = \\ = n(h_1 + h_2 + \dots + h_d)(h_1X_1^{()} + \dots + h_dX_d^{()})^{n-1}C,\end{gathered} \tag{8}$$

где h_i — произвольные действительные числа. В этой формуле степень суммы ОС дана в символической форме. Это суммы однородных многочленов общего порядка n вида

$$\sum c_{p_1\dots p_d}X_1^{(p_1)}X_2^{(p_2)}\dots X_d^{(p_d)}$$

при $p_1 + \dots + p_d = dn$.

В эти одночлены не входит операция умножения степеней, соответствующих одной и той же независимой переменной x_i. Докажем это соотношение методом математической индукции по размерности пространства. Для доказательства разделим сумму операторов и степеней на две части согласно выражению

$$A = [(D(1) + \ldots + D(d-1)) + D(d)][(h_1 X_1 + \ldots + h_{d-1} X_{d-1}) + h_d X_d]^n C. \qquad (9)$$

Раскроем степень по правилам бинома, рассматривая его как сумму двух слагаемых

$$A = [(D(1) + \ldots + D\,(d-1)) + D\,(d)] \left[\sum_{i=0}^{n} c_n^i (h_1 X_1 + \ldots + h_{d-1} X_{d-1})^{n-i} (h_d X_d)^i C \right].$$

Используя сделанное предположение о справедливости формулы (8) при $d-1$ и применяя оператор к сумме, найдем

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} c_n^i (n-i)(h_1 + \ldots + h_{d-1})^{n-i-1} C + (X_1 + \ldots + X_{d-1})^{n-i-1} (h_d X_d)^i C +$$
$$+ \sum_{i=0}^{n} C_n^i i (h_1 X_1 + \ldots + h_{d-1} X_{d-1})^{n-i} h_d^i X_d^{(i-1)} C.$$

Сдвинем суммирование во второй сумме и, объединив суммирование, запишем

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} [C_n^i (n-i)(h_1 + \ldots + h_{d-1}) + c_n^{i+1} (i+1) h_d](h_1 X_1 + \ldots + h_{d-1} X_{d-1})^{n-1-i} h_d^i X_d^{(i)} C.$$

Учтя равенство

$$C_n^i (n-1) = C_n^{i+1} (i+1) = n C_{n-1}^i,$$

найдем согласно биномиальной формуле

$$A = n(h_1 + \ldots + h_d)(h_1 X_1 + \ldots + h_d X_d)^{n-1}.$$

Назовем условие $\sum h_i = 0$ условием гармоничности. Поэтому выражение

$$V_n = (h_1 X_1 + \ldots + h_d X_d)^n C$$

при условии (9) дает базисную функцию уравнения Лапласа в пространстве d измерений. Например, положим $d = 3$, $n = 2$, $h_1 = h_2 = 1$, $h_3 = -2$

$$V_2 = (X_1 + X_2 - 2X_3)^2 C = X_1^{(2)} + X_2^{(2)} - 4X_3^{(2)} + 2X_1^{(1)} X_2^{(2)} - 4X_1^{(2)} X_3^{(2)} - 4X_2^{(1)} X_3^{(1)}.$$

Согласно (7) имеем 8 функций $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8$, дающих решение трехмерного уравнения Лапласа.

Метод построения решения уравнения Лапласа в виде функции от линейной комбинации независимых переменных хорошо известен [18]. В нашем случае, в отличие от известного, взята линейная комбинация ОС. Поэтому основное условие (1) имеет линейный характер, в то время как в первом случае для коэффициентов требуется выполнение квадратичного условия, которое имеет решение только в поле комплексных чисел.

2. Построение решений уравнения Лапласа в пространстве многих комплексных переменных

Метод построения гармонических функций, приведенный в предыдущем пункте, не исчерпывает всех возможностей решения поставленной задачи. Далее приведем способ, который использует комплексные переменные

$$z_k = x_k + iy_k, \quad \bar{z}_k = x_k - iy_k, \quad k = \overline{1,4}, \tag{10}$$

что упрощает решение и открывает новые возможности.

Этот способ предполагает, что размерность пространства в декартовых координатах четная $d = 2s$. Для удобства общее число координат разделено на два набора, обозначенных как x_k и y_k при $k = \overline{1,4}$, что и учтено в (10).

Напомним, что размерность пространства, связанного с основной системой, $d = 8$ $(s = 4)$. Использование комплексного s-мерного пространства делает результаты более простыми и позволяет строить решения, которые построить ранее приведенным вариантом ОС было бы трудно.

Запишем соответствующие (10) операторы

$$D_k = 2\frac{\partial}{\partial z_k} = \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right), \quad \bar{D}_k = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right),$$

а также их правые обратные

$$I_k = \frac{1}{2}\int\limits_{z_{k0}}^{z_k} d\xi \ldots, \quad \bar{I}_k = \frac{1}{2}\int\limits_{\bar{z}_{k0}}^{\bar{z}_k} d\eta \ldots. \tag{11}$$

Ограничим их действие чисто алгебраическими операциями над переменными $z_k, \bar{z}_k$.

Введенные операторы обладают всеми свойствами, необходимыми для применений метода ОС. Ниже всюду использован параметрический вариант метода ОС. Поэтому функции, используемые во всех выражениях и конструкциях, являются комплексно-значными однокомпонентными функциями восьми комплексных переменных z_k, $\bar{z}_k$, $k = \overline{1,4}$.

В переменных z_k, $\bar{z}_k$ уравнения Лапласа для функций α_i, β_i из (2) запишем

$$\sum_{k=1}^{4} 4\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial z_k \partial \bar{z}_k} = 0, \quad \sum_{k=1}^{4} 4\frac{\partial^2 \beta_i}{\partial z_k \partial \bar{z}_k} = 0, \quad i = \overline{1,4} \tag{12}$$

или, приняв обозначение $D_k = 4\frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_k}$, как

$$\sum_{k=1}^{4} D_k \alpha_i = 0, \quad \sum_{k=1}^{4} D_k \beta_i = 0, \tag{13}$$

где через α_i, β_i обозначены компоненты кватернионов α, β.

Для обобщенной константы C найдем согласно (4)

$$C = \prod_{k=1}^{4} (f_{1k}(z_k) + f_{2k}(\bar{z}_k)). \tag{14}$$

Здесь f_{1k}, f_{2k} — аналитические функции соответствующих комплексных переменных. Из (14) следует, что обобщенная константа представлена как произведение заданных функций одного комплексного переменного.

Найдем ОК, используя общий метод, а именно (4). Положим в (13)

$$D_1 = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}, \quad D_2 = 2\frac{\partial}{\partial z_k}.$$

Тогда найдем

$$c_k = f_1(z_k) + \frac{1}{2}\int\limits_{z_{k0}} d\bar{z}_k \left(2\frac{\partial f_2(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\right).$$

Это совпадает с точностью до константы с указаниями в (14).

После перемножения комплексных c_{1k}, c_{2k} при $k = 4$ имеем 16 комплексных параметров. Это совпадает с полученным числом 32 ранее при действительных константах. Если учесть, что при этом каждая комплексная скобка для данных независимых переменных z_i, $\bar{z}_i$ содержит четыре действительных параметра, то после умножения имеем 4^4 параметров. Это совпадает с 2^8 числом параметров, приведенных ранее при использовании действительных независимых переменных. Это не означает совпадения функциональной части ОС.

В дальнейшем в качестве f_{1k}, f_{2k} возьмем важный случай степенных функций

$$f_{1k} = c_{1k} z_k^{l_k}, \quad f_{2k} = c_{2k} \bar{z}_k^{m_k} \tag{15}$$

при действительных заданных числах l_k, m_k.

Компонентные величины c_{1k}, c_{2k} дают в дальнейшем при подстановке в (14) 16 произведений. Назовем эти произвольные постоянные параметрами. Далее будем использовать интегральные операторы I_k, определив их на основе (11) как

$$I_k = \frac{1}{4}\int\limits_{z_{k0}}^{z_k} d\eta \int\limits_{\bar{z}_{k0}}^{\bar{z}_k} d\xi, \quad k = \overline{1,4}. \tag{16}$$

Напомним, что z_k, $\bar{z}_k$ рассматриваются как независимые переменные.

Обобщенная степень $X^{(p)}C$ определена выражением

$$X_1^{(p_1)} X_2^{(p_2)} X_3^{(p_3)} X_4^{(p_4)} C = p_1! p_2! p_3! p_4! I_1^{p_1} I_2^{p_2} I_3^{p_3} I_4^{p_4} C = \prod_{k=1}^{4} p_k! I_k^{p_k} C. \tag{17}$$

Левая сторона формулы имеет символический характер и указывает на конструкцию и свойства правой части, которая может быть вычислена как комплексная функция 8 комплексных переменных z_k, $\bar{z}_k$, $k = \overline{1,4}$.

По конструкции левая часть дана как обычное произведение функций, зависящих от различных независящих переменных (разделение переменных).

Действительно, используя (17) и независимость комплексных переменных, проводя операции интегрирования (16) по комплексным переменным при C, определенном в (15), найдем

$$X_1^{(p_1)} X_2^{(p_2)} X_3^{(p_3)} X_4^{(p_4)} C = 2^{2p} \prod_{k=1}^{4} p_k! \left(\frac{l_k! z_k^{p_k + l_k} \bar{z}_k^{p_k}}{(p_k + l_k)! p_k!} c_{k1} + \frac{m_k! z_k^{p_k} \bar{z}_k^{p_k + m_k}}{(p_k + m_k)! p_k!} c_{k2} \right) \tag{18}$$

при $p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$.

Например, в частном случае $p_1 = p_3 = p_4 = 0$, $p_2 = 1$

$$X_2^{(1)}C = \frac{1}{4}\left(c_{11}z_1^{l_1} + c_{21}\bar{z}_1^{m_1}\right)\left(c_{12}\frac{\bar{z}_2 z^{l_2+1}}{l_2+1} + c_{22}\frac{\bar{z}_2^{m_2+1}z_2^2}{l_2+1}\right)\times$$
$$\times\left(c_{13}z_3^{l_3} + c_{23}\bar{z}_3^{m_3}\right)\left(c_{14}z_4^{l_4} + c_{24}\bar{z}_4^{m_4}\right).$$

По построению (18) имеет следующие правила «дифференцирования», т. е. действия операторов D_i:

$$D_i\prod_{k=1}^{4}X_k^{(p_k)}C = p_i\prod_{k=1}^{4}X_k^{(p_k-\delta_{ki})}C, \tag{19}$$

где δ_{ki} — символ Кронекера.

Таким образом, имеем последовательность комплексных функций, основным свойством которых является связь между ними, установленная правилом «дифференцирования» (19). Именно оно определяет полезность конструкций ОС.

Составим линейную комбинацию степеней $X^{(p)}C$, подставив ее в символической форме как степень суммы $\sum h_k X_k^{(1)}C$:

$$V_n = \left(\sum_{k=1}^{4}h_k X_k^{(1)}\right)^n C, \tag{20}$$

где h_k — произвольные действительные числа. Она имеет смысл, ибо умножение ОС на действительное число законно и не меняет свойства ОС. Эта формула имеет символическое значение. Выражение (20) должно быть раскрыто по правилам бинома и представлено мономами вида $X_1^{(p_1)}\ldots X_n^{(p_n)}C$, которые не должны содержать произведения степеней с одинаковым нижним индексом.

Формула (9), введенная в п. 1, справедлива, в этом случае найдем

$$D_i\left(\sum_{j=1}^{4}h_j X_j^{(p)}\right)^n = nh_i\left(\sum_{j=1}^{4}h_j X_j^{(p-1)}\right)^{n-1}. \tag{21}$$

Из вида (21) следует, что выражение V_n, введенное в (20), удовлетворяет (12), если потребовать

$$\sum_{j=1}^{4}h_j = 0. \tag{22}$$

Аналогично п. 1 назовем условие (22) условием гармоничности, ибо выражение (20) в этом случае удовлетворяет уравнению Лапласа (13) и дает последовательность его решений.

Полученные результаты позволяют получить решение уравнения метагармонического типа. Есть возможность построить решение методом ОС в несколько другом виде.

Построение функций на основе полученного базиса и являющихся формальными аналогами элементарных функций предполагается провести в следующем сообщении.

Метод параметрических ОС без каких-либо трудностей может быть распространен на уравнения параболического типа, ибо в этом случае ОК — это просто постоянная, а соответствующий интегральный оператор — однократное интегрирование.

Заключение

В работе показано, что решение обобщенной системы Коши – Римана может быть получено на основе двух кватернионных функций с компонентами, которые являются гармоническими функциями восьми действительных переменных. Приведен метод построения гармонических функций в многомерном пространстве любого числа действительных переменных. Дано развитие метода обобщенных степеней в комплексном четырехмерном пространстве с целью построения гармонических функций. Указано на возможность дальнейшего развития метода.

Список литературы

1. *Гладышев Ю. А.* О некоторых классах решений обобщенной системы Коши – Римана // Проблемы математического анализа. 2021. Т. 109. С. 59–64.
2. *Moisil G.* Sur les quaternions monogenes // Bulletin of Mathematical Sciences. 1931. Vol. 55. P. 168–174.
3. *Fueter R.* On the theory of regular functions of a quaternion variable // Monatshefte für Mathematik und Physik. 1936. Vol. 43. P. 69–74. https://doi.org/10.1007/BF01707588
4. *Мисюра Н. Е.* Кватернионные модели в кинематике и динамике твердого тела : учебное пособие. Екатеринбург : Изд-во Уральского ун-та, 1961. 260 с.
5. *Берс Л.* Математические основы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. Москва : Изд-во иностранной литературы, 1961. 206 с.
6. *Bers L., Gelbart A.* On a class of differential equations in mechanics of continua // Quarterly of Applied Mathematics. 1943. Vol. 1. P. 168–188. https://doi.org/10.1090/qam/8556
7. *Bers L., Gelbart A.* On a class of functions defined by partial differential equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1944. Vol. 56, iss. 1. P. 67–93. https://doi.org/10.2307/1990278
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика : в 2 т. Т. 2. Теория поля. Москва : Наука, 1973. 504 с.
9. *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* О методах построения комплексных обобщенных степеней Берса // Вестник Калужского университета. 2020. № 2 (47). С. 77–80. EDN: ZLPPKC
10. *Калманович В. В., Степович М. А., Серегина Е. В.* О численном решении задач тепломассопереноса с использованием матричного метода и метода обобщенных степеней Берса // Теоретические основы и конструирования численных алгоритмов решения задач математической физики : тезисы докладов XXII Всероссийской конференции, посвященной памяти К. И. Бабенко. Москва : Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 2018. С. 51–52. EDN: YLOPJJ
11. *Калманович В. В., Степович М. А.* О возможности совместного применения матричного метода и аппарата Берса к моделированию процессов тепломассопереноса, обусловленного электромагнитным излучением в многослойной планарной среде // XXV Международная научно-техническая конференция и школа по фотоэлектронике и приборам ночного видения : труды конференции. Москва : НПП Орион, 2018. С. 491–494.
12. *Куликов А. Н., Горбунов А. К., Силаева Н. А., Коржавый А. П.* Моделирование поведения гидродинамической дисперсии с помощью решения краевых задач // Наукоемкие технологии. 2021. Т. 22, № 6. С. 46–53. https://doi.org/10.18127/j19998465-202106-05
13. *Калманович В. В., Степович М. А.* О совместном применении матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процессов тепломассопереноса в полупроводниковых метериалах электронной техники // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем. 2018. № 3. С. 194–201. https://doi.org/10.31114/2078-7707-2018-3-194-201
14. *Widder D. V.* Some analogies from classical analysis in the theory of heat conduction //

Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1966. Vol. 21, iss. 2. P. 108–113. https://doi.org/10.1007/BF00266570

15. *Жуков В. П., Барочкин А. Е., Боброва М. С., Беляков А. Н., Шувалов С. И.* Матричный метод решения обратной задачи теплопередачи в теплообменных аппаратах // Вестник Ивановского государственного энергетического университета. 2021. № 2. С. 62–69. https://doi.org/10.17588/2072-2672.2021.2.062-069
16. *Барочкин А. Е.* Матричный метод решения обратной задачи теплопередачи в контактных аппаратах с учетом фазового перехода в теплоносителях // Вестник Ивановского государственного энергетического университета. 2021. № 5. С. 68–75. https://doi.org/10.17588/2072-2672.2021.5.068-075
17. *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* Об использовании метода параметрических обобщенных степеней для построения решений одного класса дифференциальных уравнений // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2022 : материалы международной конференции / под ред. В. А. Костина. Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2022. С. 67–71. URL: https://vzms.kmm-vsu.ru/files/vzms2022.pdf (дата обращения: 25.03.2022).
18. *Бринкман Г.* Применение спинорных инвариантов в атомной физике. Москва : Изд-во иностранной литературы, 1959. 96 с.

References

1. Gladyshev Yu. A. On some classes of solutions to the generalized Cauchy – Riemann system problem. *Problemy matematicheskogo analiza* [Problems of Mathematical Analysis], 2021, vol. 109, pp. 59–64 (in Russian).
2. Moisil G. Sur les quaternions monogenes. *Bulletin of Mathematical Sciences*, 1931, vol. 55, pp. 168–174 (in German).
3. Fueter R. On the theory of regular functions of a quaternion variable. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1936, vol. 43, pp. 69–74 (in German). https://doi.org/10.1007/BF01707588
4. Misyura N. E. *Kvaternionnye modeli v kinematike i dinamike tverdogo tela* [Quaternion Models in Kinematics and Dynamics of a Solid]. Ekaterinburg, Ural University Publishing House, 1961. 260 p. (in Russian).
5. Bers L. *Matematicheskie osnovy dozvukovoy i transzvukovoy gazovoy dinamiki* [Mathematical Foundations of Subsonic and Transonic Gas Dynamics]. Moscow, Publishing House of Foreign Literature, 1961. 206 p. (in Russian).
6. Bers L., Gelbart A. On a class of differential equations in mechanics of continua. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1943, vol. 1, pp. 168–188. https://doi.org/10.1090/qam/8556
7. Bers L., Gelbart A. On a class of functions defined by partial differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1944, vol. 56, iss. 1, pp. 67–93. https://doi.org/10.2307/1990278
8. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Teoreticheskaya fizika. T. 2. Teoriya polya* [Theoretical Physics. Vol. 2. Field Theory]. Moscow, Nauka, 1973. 504 p. (in Russian).
9. Gladyshev Yu. A., Loshkareva E. A. On methods of constructing complex generalized degrees of Bers. *Vestnik of Kaluga University*, 2020, iss. 2 (47), pp. 77–80 (in Russian). EDN: ZLPPKC
10. Kalmanovich V. V., Stepovich M. A., Seregina E. V. On the numerical solution of heat and mass transfer problems using the matrix method and the method of generalized degrees of Bers. *Teoreticheskie osnovy i konstruirovaniya chislennykh algoritmov resheniya zadach matematicheskoi fiziki* [Theoretical foundations and design of numerical algorithms for solving problems of mathematical physics. Abstracts of the XII All-Russian Conference dedicated to the memory of K. I. Babenko]. Moscow, Keldysh Institute of Applied Mathematics Publ., 2018, pp. 51–52 (in Russian). EDN: YLOPJJ

11. Kalmanovich V. V., Stepovich M. A. On the possibility of joint application of the matrix method and the Bers apparatus to modeling the processes of heat and mass transfer caused by electromagnetic radiation in a multilayer planar medium. *XXV Mezhdunarodnaia nauchno-tekhnicheskaia konferentsiia i shkola po fotoelektronike i priboram nochnogo videniia* [XXV International Scientific and Technical Conference and School on Photo-electronics and Night Vision Devices. Proceedings of the Conference]. Moscow, NPP Orion, 2018, pp. 491–494 (in Russian).
12. Kulikov A. N., Gorbunov A. K., Silaeva N. A., Korzhavy A. P. Modeling the behavior of hydrodynamic dispersion by solving boundary value problems. *Journal Science Intensive Technologies*, 2021, vol. 22, iss. 6, pp. 46–53 (in Russian). https://doi.org/10.18127/j19998465-202106-05
13. Kalmanovich V. V., Stepovich M. A. On the joint application of the matrix method and the apparatus of generalized Bers degrees for mathematical modeling of heat and mass transfer processes in semiconductor materials of electronic technology. *Problems of Development of Promising Micro- and Nanoelectronic Systems*, 2018, iss. 3, pp. 194–201 (in Russian). https://doi.org/10.31114/2078-7707-2018-3-194-201
14. Widder D. V. Some analogies from classical analysis in the theory of heat conduction. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1966, vol. 21, iss. 2, pp. 108–113 (in German). https://doi.org/10.1007/BF00266570
15. Zhukov V. P., Barochkin A. E., Bobrova M. S., Belyakov A. N., Shuvalov S. I. Matrix method for solving the inverse problem of heat transfer in heat exchangers. *Bulletin of the Ivanovo State Power Engineering University*, 2021, iss. 2, pp. 62–69 (in Russian). https://doi.org/10.17588/2072-2672.2021.2.062-069
16. Barochkin A. E. Matrix method for solving the inverse problem of heat transfer in contact devices taking into account the phase transition in heat carriers. *Bulletin of the Ivanovo State Power Engineering University*, 2021, iss. 5, pp. 68–75 (in Russian). https://doi.org/10.17588/2072-2672.2021.5.068-075
17. Gladyshev Yu. A., Loshkareva E. A. On the use of the method of parametric generalized degrees for constructing solutions of one class of differential equations. In: *Materialy Voronezhskoi zimnei matematicheskoi shkoly S. G. Crane* [Materials of the International Conference "Voronezh Winter Mathematical School of S. G. Crane"], Voronezh, Publishing House of Voronezh State University, 2022, pp. 67–71 (in Russian). URL: https://vzms.kmm-vsu.ru/files/vzms2022.pdf (accessed 25 March 2022).
18. Brinkman G. *Primenenie spinornykh invariantov v atomnoi fizike* [Application of Spinor Invariants in Atomic Physics]. Moscow, Publishing House of Foreign literature, 1959. 96 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 29.03.2022
Принята к публикации / Accepted 18.08.2022
Опубликована / Published 01.03.2023