Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 24–35
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 24–35
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-24-35, EDN: CQXPUH

Научная статья
УДК 517.51

Исправление функций и интерполяция типа Лагранжа – Якоби

В. В. Новиков

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Новиков Владимир Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и стохастического анализа, vvnovikov@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-6147-1311, AuthorID: 149594

Аннотация. Известно, что интерполяционный процесс Лагранжа с узлами в нулях многочленов Чебышева может расходиться всюду (с произвольными узлами — почти всюду), подобно ряду Фурье суммируемой функции. В то же время известно, что любую измеримую (конечную почти всюду) функцию можно исправить на множестве сколь угодно малой меры так, что ее ряд Фурье станет равномерно сходящимся (так называемое усиленное C-свойство). Возникает вопрос, не обладает ли класс непрерывных функций подобным свойством по отношению к интерполяционному процессу по той или иной матрице узлов? В настоящей работе показано, что существует матрица узлов интерполирования $\mathfrak{M}_\gamma$, как угодно близкая к матрице узлов Якоби $\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}$, $\alpha, \beta > -1$, такая, что после исправления (с сохранением непрерывности) функции $f \in C[-1,1]$ на множестве как угодно малой меры интерполяционный процесс с узлами $\mathfrak{M}\gamma$ будет сходиться к исправленной функции равномерно на $[a,b] \in (-1,1)$.
Ключевые слова: интерполяция Лагранжа, ортогональные многочлены Якоби, исправление функций
Для цитирования: *Новиков В. В.* Исправление функций и интерполяция типа Лагранжа – Якоби // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 24–35. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-24-35, EDN: CQXPUH

Article

Function correction and Lagrange – Jacobi type interpolation

V. V. Novikov

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Vladimid A. Novikov, vvnovikov@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-6147-1311, AuthorID: 149594

Abstract. It is well-known that the Lagrange interpolation based on the Chebyshev nodes may be divergent everywhere (for arbitrary nodes, almost everywhere), like the Fourier series of a summable function. On the other hand, any measurable almost everywhere finite function can be "adjusted" in a set of an arbitrarily small measure such that its Fourier series will be uniformly convergent. The question arises whether the class of continuous functions has a similar property with respect to any interpolation process. In the present paper, we prove that there exists the matrix of nodes $\mathfrak{M}_\gamma$ arbitrarily close to the Jacoby matrix $\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}$, $\alpha, \beta > -1$ with the following property: any function $f \in C[-1,1]$ can be adjusted in a set of an arbitrarily small measure such that interpolation process of adjusted continuous function g based on the nodes $\mathfrak{M}_\gamma$ will be uniformly convergent to g on $[a,b] \subset (-1,1)$.

Keywords: Lagrange interpolation, Jacobi orthogonal polynomials, adjustment of functions

For citation: Novikov V. V. Function correction and Lagrange – Jacobi type interpolation. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 24–35 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-24-35, EDN: CQXPUH

Введение

Пусть $\alpha, \beta > -1$, $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность многочленов Якоби, ортогональных на отрезке $[-1,1]$ с весом $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, и

$$-1 < x_{n,n}^{(\alpha,\beta)} < x_{n-1,n}^{(\alpha,\beta)} < \ldots < x_{1,n}^{(\alpha,\beta)} < 1, \quad n \geqslant 1,$$

— нули многочлена $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, пронумерованные в порядке убывания. Для функции f, заданной на $[-1,1]$, обозначим через $L_n(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, f, x)$ многочлен Лагранжа, интерполирующий ее в узлах n-ой строки матрицы $\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)} = \{x_{i,n}^{(\alpha,\beta)} : \; i = 1, \ldots, n; \; n = 1, 2, \ldots$ Если $\gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$ — произвольная последовательность положительных чисел и матрица $\mathfrak{M} = \{y_{i,n}\}_{i,n=1}^{\infty}$ такова, что

$$|x_{k,n}^{(\alpha,\beta)} - y_{k,n}| < \gamma_n, \quad i = 1, \ldots, n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то условимся писать $\mathfrak{M} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$. В дальнейшем, в целях сокращения записей, всюду будем использовать обозначение $x_{i,n}$ вместо $x_{i,n}^{(\alpha,\beta)}$, подразумевая, что α и β — произвольные фиксированные числа, бо́льшие -1.

Хорошо известно [1, 2], что интерполяционный процесс $\{L_n(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ для $f \in C[-1,1]$ при $\alpha = \beta = -1/2$ может расходиться всюду (для произвольных узлов — почти всюду [3]), подобно ряду Фурье суммируемой функции. В то же время известно ([4], см. также [5]), что любую измеримую (конечную п. в.) функцию можно исправить на множестве сколь угодно малой меры так, что ее ряд Фурье станет равномерно сходящимся (усиленное C-свойство по терминологии Н. К. Бари). Возникает вопрос, не обладает ли класс непрерывных функций подобным свойством по отношению к интерполяционному процессу по той или иной матрице узлов?

В настоящей статье доказывается, что для произвольных $\alpha, \beta > -1$ существует матрица узлов $\mathfrak{M}_\gamma$, как угодно близкая к $\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}$, со следующим свойством: любую функцию $f \in C[-1,1]$ можно исправить (с сохранением непрерывности) на множестве сколь угодно малой меры так, что интерполяционный процесс $\{L_n(\mathfrak{M}_\gamma, g, x)\}_{n=1}^{\infty}$ исправленной функции g будет сходиться к ней равномерно на любом заранее заданном отрезке $[a,b] \subset (-1,1)$. Отметим, что для самой матрицы $\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}$ (и тем более для произвольных узлов) вопрос о возможности исправления непрерывной функции в указанном выше смысле остается открытым.

1. Обозначения и леммы

Пусть отрезок числа a, b, и $\varepsilon > 0$ таковы, что

$$-1 < a - \varepsilon < a < b < b + \varepsilon < 1, \tag{1}$$

$$\mathfrak{M}: \ -1 =: y_{n+1,n} < y_{n,n} < y_{n-1,n} < \ldots < y_{1,n} < y_{0,n} := 1, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

— произвольная матрица узлов интерполирования на $[-1, 1]$ и $f \in C[-1; 1]$. Положим

$$\Delta_{i,n} = (y_{i+1,n}, y_{i,n}), \ \overline{\Delta}_{i,n} = [y_{i+1,n}, y_{i,n}], \ |\Delta_{i,n}| = y_{i,n} - y_{i+1,n}, \ \Delta f_i = f(y_{i,n}) - f(y_{i+1,n}),$$

и пусть ε' — любое фиксированное число такое, что $0 < \varepsilon' < \varepsilon$.

Обозначим $I = [a - \varepsilon', b + \varepsilon']$, $d_1(\mathfrak{M}, n) = \min\limits_{i:\, \Delta_{i,n} \subset I} |\Delta_{i,n}|$, $d_2(\mathfrak{M}, n) = \max\limits_{i:\, \Delta_{i,n} \subset I} |\Delta_{i,n}|$,

$$T_{n,p,\varepsilon}(\mathfrak{M}, f) = \sum_{i:\, |y_{p,n} - y_{i,n}| < \varepsilon} \frac{|\Delta f_i|}{|p - i| + 1}, \quad T_{n,\varepsilon}(\mathfrak{M}, f) = \max_{p:\, y_{p,n} \in [a,b]} T_{n,p,\varepsilon}(\mathfrak{M}, f).$$

Для произвольного конечного множества $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_m\} \subset \mathbb{R}$ будем обозначать через $d(A) := \min\limits_{i,j}\{|a_i - a_j| : a_i \neq a_j\}$ наименьшее положительное расстояние между его точками. Кроме того, как обычно, через C обозначаются абсолютные, вообще говоря различные, постоянные.

Лемма 1 ([6]). *Существуют постоянные b_1 и b_2, зависящие только от $\alpha, \beta > -1$, такие, что*

$$\frac{b_1}{n} \leqslant \theta_{k+1,n} - \theta_{k,n} \leqslant \frac{b_2}{n}, \tag{2}$$

где $\theta_{k,n} = \arccos x_{k,n}$, $k = 0, \ldots, n$, $\theta_{0,n} := 0$, $\theta_{n+1,n} := \pi$, $n = 3, 4, \ldots$

Лемма 2 ([7]). *Пусть верно (1) и*

$$l_{k,n}(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_{i,n}}{x_{k,n} - x_{i,n}}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

— фундаментальный многочлен интерполяции Лагранжа с узлами Якоби. Тогда равномерно по $x \in [a, b]$ и по тем индексам i, для которых $x_{i,n} \in [a, b]$, справедливо следующее представление:

$$l_{i,n}(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, x) = O\left(\frac{1}{|i - p| + 1}\right), \tag{3}$$

где m определяется из условия

$$x_{p+1,n} < x \leqslant x_{p,n}, \quad p = 0, \ldots n, \quad x_{0,n} := 1, \quad x_{n+1,n} := -1.$$

Лемма 3 ([8, лемма 1]). *Равномерно по $x \in [a, b]$ выполняется равенство*

$$\sum_{i=1}^{n} \left| l_{i,n}(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, x) + l_{i+1,n}(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, x) \right| = O(1), \tag{4}$$

где $l_{n+1,n}(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, x) \equiv 0$.

Лемма 4 ([9]). *Равномерно по $x \in [a,b]$ выполняется равенство*

$$\sum_{|x-x_{i,n}|<\varepsilon} \left| l_{i,n}(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, x) \right| = O(\log x). \tag{5}$$

Лемма 5 ([8, теорема 1]). *Пусть верно* (1) *и* $f \in C[-1,1]$. *Тогда равномерно для всех* $x \in [a,b]$ *выполняется равенство*

$$f(x) - L_n(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, f, x) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{|x-x_{i,n}|<\varepsilon} [f(x_{i+1,n}) - f(x_{i,n})]\, l_{i,n}(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, x) + O\left\{ \omega\left(f, \frac{\log n}{n} \right) \right\}, \tag{6}$$

где $\omega(f, \cdot)$ *— модуль непрерывности функции* f *на* $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$.

Лемма 6. *Пусть заданы произвольные числа* $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$. *Тогда существует последовательность* $\gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ *такая, что для любой матрицы узлов интерполирования* $\mathfrak{M} = \{y_{i,k}\} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$ *справедливо неравенство*

$$|l_{i,n}(\mathfrak{M}, x) - l_{i,n}(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, x)| < h_n, \quad x \in [-1,1], \quad i = 1, \ldots, n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Доказательство. Так как функция

$$\phi_i\left(x, \vec{t}\,\right) := l_{i,n}(\mathfrak{M}, x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - t_{j,n}}{t_{i,n} - t_{j,n}}, \quad \vec{t} = (t_{1,n}, \ldots, t_{n,n}),$$

непрерывна по $\vec{t}$ в точке $\vec{x_0} = (x_{1,n}, \ldots, x_{n,n})$, в проверке нуждается лишь тот факт, что (7) будет выполняться равномерно относительно параметра $x \in [-1,1]$, если только γ_n достаточно мало. Применяя к приращению функции ϕ_i в точке $\vec{x_0}$ формулу Тейлора, находим

$$\phi_i\left(x, \vec{y}\,\right) - \phi_i\left(x, \vec{x_0}\,\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t_{k,n}} \phi_i\left(x, \vec{c}\,\right) \cdot (y_{k,n} - x_{k,n}), \tag{8}$$

где $\vec{c} = \vec{x_0} + \theta \cdot (\vec{y} - \vec{x_0})$, $\theta \in (0,1)$, а соответсвующие производные имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t_{k,n}} \phi_i\left(x, \vec{t}\,\right) = \begin{cases} \dfrac{x - t_{i,n}}{(t_{k,n} - t_{i,n})^2} \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - t_{j,n}}{t_{i,n} - t_{j,n}}, & k \neq i; \\ -\displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{t_{i,n} - t_{j,n}} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{n} \frac{x - t_{m,n}}{t_{i,n} - t_{m,n}}, & k = i. \end{cases} \tag{9}$$

Поскольку $|x - t_{i,n}| \leqslant 2$, $x \in [-1,1]$, $i = 1, \ldots, n$, и, кроме того, при достаточно малом γ_n (скажем, при $\gamma_n < \tilde{\gamma}_n := 4^{-1} \min\{x_{i,n} - x_{i+1,n} : 1 \leqslant i \leqslant n-1\}$) справедливы неравенства

$$\frac{\gamma_n}{2} < |t_{i,n} - t_{j,n}| < 2, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad i \neq j,$$

из (9) следует существование постоянной $C = C(n)$ такой, что при указанных γ_n будут выполняться неравенства

$$\left| \frac{\partial}{\partial t_{k,n}} \phi_i(x, \vec{c}) \right| \leqslant C(n), \quad x \in [-1,1], \quad k = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

Соотношения (10) в сочетании с (8) дают утверждение леммы. □

Лемма 7. *Пусть верно* (1). *Тогда существует последовательность* $\gamma = \{\gamma_n\} \subset \subset \mathbb{R}_+$ *со следующим свойством: для любой* $f \in C[-1;1]$ *и любой матрицы узлов интерполирования* $\mathfrak{M} = \{y_{i,k}\} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$ *условие*

$$\lim_{n\to\infty} T_{n,\varepsilon}(\mathfrak{M}, f) = 0 \tag{11}$$

влечет за собой равенство

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n(\mathfrak{M}, f, \cdot)\|_{C[a,b]} = 0. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть выполнено (1). Прежде всего, убедимся, что можно так выбрать γ, что соотношение (6) будет выполнено для любых $f \in C[-1,1]$ и $\mathfrak{M} = \{y_{i,k}\} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$. Действительно, при выводе равенства (6) в [8] явный вид узлов ($\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$) учитывается только в той части доказательства, которая использует соотношения (4) и (5). В силу леммы 6 для достаточно малых $\{\gamma_n\}$ эти соотношения будут иметь место не только для матрицы узлов $\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}$, но и для любой $\mathfrak{M} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$. Поэтому выбрав надлежащим образом $\{\gamma_n\}$ и дословно повторив «не зависящую от узлов» часть доказательства теоремы 1 из [8], мы получим, что для любой $f \in C[-1,1]$ равномерно для всех $x \in [a,b]$ выполняется равенство

$$f(x) - L_n(\mathfrak{M}, f, x) = \frac{1}{2} \sum_{|x-y_{i,n}|<\varepsilon} [f(y_{i+1,n}) - f(y_{i,n})]\, l_{i,n}(\mathfrak{M}, x) + O\left\{\omega\left(f, \frac{\log n}{n}\right)\right\}, \tag{13}$$

если только $\mathfrak{M} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$.

Далее, снова применяя лемму 6 (и уменьшив при необходимости γ_n), мы сможем добиться того, что для любой матрицы $\mathfrak{M} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$ будет верно (3), т. е. того, что равномерно по $x \in [a,b]$ и по тем индексам i, для которых $y_{i,n} \in [a,b]$, будет верно представление

$$l_{i,n}(\mathfrak{M}, x) = O\left(\frac{1}{|i-p|+1}\right), \tag{14}$$

где p определяется из условия

$$y_{p+1,n} < x \leqslant y_{p,n}, \quad p = 0, \ldots, n. \tag{15}$$

Наконец, нетрудно проверить, если γ_n достаточно мало, то в силу (2) можно считать, что узлы $\{y_{i,n}\} \subset [a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ удовлетворяют условию

$$\frac{b_1'}{n} \leqslant y_{i,n} - y_{i+1,n} \leqslant \frac{b_2'}{n}, \tag{16}$$

где b_1', b_2' зависят от α, β, a, b и ε.

Перейдем непосредственно к доказательству импликации (11)$\Rightarrow$(12). Предположим, что $x \in [a,b]$ и p задано соотношением (15). Тогда на основании (13) и (14) получим

$$|f(x) - L_n(\mathfrak{M}, f, x)| \leqslant C \sum_{|x-y_{i,n}|<\varepsilon} \frac{|f(y_{i+1,n}) - f(y_{i,n})|}{|i-p|+1} + o(1) \tag{17}$$

равномерно по $x \in [a,b]$.

Кроме того, ([16]) показывает, что, заменяя в ([17]) суммирование по $i : |x - y_{i,n}| < \varepsilon$ на суммирование по $i : |y_{i,n} - y_{p,n}| < \varepsilon$, мы теряем или приобретаем группу, состоящую из ν слагаемых, причем ν не превосходит некоторого $\nu_0 = \nu_0(\alpha, \beta, a, b, \varepsilon)$. Ошибка, возникающая при такой замене, не превосходит величины $\nu_0 \cdot \omega\left(f, \frac{C}{n}\right) = o(1)$, поэтому равномерно по $x \in [a, b]$ имеем

$$|f(x) - L_n(\mathfrak{M}, f, x)| \leqslant CT_{n,\varepsilon}(f) + o(1).$$

$\square$

Лемма 8. *Пусть $\gamma = \{\gamma_n\}$ удовлетворяет утверждению леммы 7 и $\mathfrak{M} = \{y_{i,n}\} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$. Пусть далее $r > 0$ — произвольное достаточно малое число и конечный набор точек $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=0}^{m+1}$ таков, что $a - \varepsilon' =: \lambda_{m+1} < \lambda_m < \dots < \lambda_1 < \lambda_0 := b + \varepsilon'$, $d(\Lambda) > r$. Тогда найдется номер $n_0 = n_0(r)$, зависящий только от r, такой, что при $n > n_0$ равномерно по $p \in J_n(a, b) := \{p : y_{p,n} \in [a, b]\}$ будут верны неравенства*

$$Q_{p,n}(\Lambda, r) := \sum_i \frac{1}{|i - p| + 1} \leqslant 3, \tag{18}$$

где суммирование идет по тем i, для которых $\Delta_{i,n} \subset I$ и $\Delta_{i,n} \cap (\Lambda \backslash \{\lambda_0; \lambda_{m+1}\}) \neq \varnothing$.

Доказательство. Фиксируем $r > 0$ и пусть $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=0}^{m+1}$ удовлетворяет условиям леммы. Будем считать n настолько большим, что $d_2(\mathfrak{M}, n) < 4^{-1} d(\Lambda)$. Тогда $Q_{p,n}(\Lambda, r)$ можно представить в виде не более чем двух сумм $Q_{p,n}(\Lambda, r) = \Sigma_1 + \Sigma_2$, каждая из которых имеет вид $\Sigma_\nu = \sum_{s=1}^{q(\nu)} 1/i_s^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2$, где $q(\nu) \leqslant m$ и положительные целые $i_s^{(\nu)}$, $s = 1, \dots, q(\nu)$, таковы, что

$$i_{s+1}^{(\nu)} - i_s^{(\nu)} \geqslant Cnr, \ s = 1, \dots, q(\nu) - 1. \tag{19}$$

Очевидно, что $i_1^{(\nu)} \geqslant 1$, а из ([19]) получаем $\sum_{s=2}^{q(\nu)} 1/i_s^{(\nu)} \leqslant 1/2$, если только n больше некоторого $n_0^{(\nu)}(r)$. Таким образом, ([18]) верно для всех $n > n_0(r) = \max\{n_0^{(1)}; n_0^{(2)}\}$. $\square$

Лемма 9. *Пусть $\gamma = \{\gamma_n\}$ удовлетворяет утверждению леммы 7 и $\mathfrak{M} = \{y_{i,n}\} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$. Пусть далее $h_1 < h_2$ — произвольные постоянные числа, $h := h_2 - h_1$, и $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=0}^{m+1}$ — множество точек из леммы 8 (теперь все эти точки фиксированы). Для положительного числа $\sigma < d(\Lambda)/2$ определим функцию $\psi(x)$ на множестве $\bigcup_{k=1}^{m} [\lambda_k - \sigma, \lambda_k + \sigma]$ следующим образом:*

$$\psi(x) = \begin{cases} h_1, & x = \lambda_k, \quad k = 1, \dots, m; \\ h_2, & x = \lambda_k \mp \sigma, \quad k = 1, \dots, m; \\ \textit{линейная}, & x \in [\lambda_k - \sigma, \lambda_k] \cup [\lambda_k, \lambda_k + \sigma], \end{cases}$$

и пусть

$$J := \{i : \ \Delta_{i,n} \subset [\lambda_k - \sigma, \lambda_k + \sigma], \ k = 1, \dots, m\}.$$

Тогда σ можно выбрать так, что

$$G_{n,p}(\Lambda, \sigma) := \sum_{i \in J} \frac{|\Delta \psi_i|}{|p - i| + 1} \leqslant 3h, \quad p = 0, \dots, n, \tag{20}$$

если только n удовлетворяет условию $d_2(\mathfrak{M}, n) \leqslant \sigma$.

Доказательство. Обозначим $\varepsilon := d(\Lambda)$, выберем число σ так, что $\sigma < \varepsilon/2$, и будем считать, что $d_2(\mathfrak{M}, n) \leqslant \sigma$. Положим

$$J^{(1)} := \{i \in J : \Delta_{i,n} \subset [y_{p,n} - \varepsilon, y_{p,n} + \varepsilon]\}$$

и

$$k_{p,n}(\varepsilon) := \min\{|p - i| + 1 : i \in J \backslash J^{(1)}\}.$$

Не теряя общности, будем считать, что $J^{(1)}$ не пусто. Так как в это множество входят лишь индексы узлов, лежащих в некотором интервале длины 2σ (или в части такого интервала), получаем, что

$$M := \operatorname{card}(J^{(1)}) \leqslant \frac{2\sigma n}{b_1'}, \tag{21}$$

где b_1' — константа из (16). Кроме того, очевидно

$$|\Delta\psi_i| \leqslant \frac{hb_1'}{\sigma n}. \tag{22}$$

Теперь с учетом (21) и (22) находим

$$\begin{aligned} G_{n,p}(\Lambda, \sigma) &\leqslant \left(\sum_{i \in J^{(1)}} + \sum_{i \in J \backslash J^{(1)}}\right) \frac{|\Delta\psi_i|}{|p-i|+1} \leqslant \frac{hb_1'}{\sigma n} \sum_{i \in J^{(1)}} \frac{1}{|p-i|+1} + \\ &+ \frac{1}{k_{p,n}(\varepsilon)} \sum_{i \in J \backslash J^{(1)}} |\Delta\psi_i| < \frac{hb_1'}{\sigma n} \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{i} + \frac{2hm}{k_{p,n}(\varepsilon)} < \\ &< \frac{hb_1'}{\sigma n} \log(M+1) + \frac{2hm}{k_{p,n}(\varepsilon)} < \frac{2hb_1'}{\sigma n} \log M + \frac{2hm}{k_{p,n}(\varepsilon)} < \\ &< \frac{2hb_1'}{\sigma n} \log\left(\frac{2\sigma n}{b_1'}\right) + \frac{2hm}{k_{p,n}(\varepsilon)} < 2h + \frac{2hm}{k_{p,n}(\varepsilon)}. \end{aligned} \tag{23}$$

Поскольку выражение $k_{p,n}(\varepsilon) \to \infty$ равномерно по $p = 0, \ldots, n$ при $n \to \infty$ при фиксированном ε, получим, что

$$\frac{2m}{k_{p,n}(\varepsilon)} < 1, \quad \forall\, p = 0, \ldots, n, \tag{24}$$

если только $d_2(\mathfrak{M}_\gamma, n) < \sigma$ и σ достаточно мало. Теперь (20) следует из (23) и (24). $\square$

Лемма 10. *Пусть $\gamma = \{\gamma_n\}$ удовлетворяет утверждению леммы 7 и $\mathfrak{M} = \{y_{i,n}\} \in$ $\in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$. Тогда если $f \in C[-1,1]$ имеет ограниченную вариацию на $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$, то для f верно равенство* (11).

Доказательство. Доказательство леммы 1 полностью аналогично доказательству [5, гл. IV, § 5] того факта, что непрерывная функция ограниченной вариации удовлетворяет условиям признака Салема. $\square$

2. Основной результат

Теорема. *Пусть* $\gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ — *произвольная последовательность. Тогда существует матрица узлов интерполирования* $\mathfrak{M}_\gamma \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$ *такая, что для любых* $f \in C[-1,1]$, $-1 < a < b < 1$, *и* $0 < \delta < b - a$ *найдутся функция* $g \in C[-1,1]$ *и множество* $E \subset [a,b]$, $\mathrm{mes} E > b - a - \delta$, *для которых* $f = g$ *на* E *и*

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(\mathfrak{M}_\gamma, g, \cdot) - g\|_{C[a,b]} = 0.$$

Доказательство. Пусть $f \in C[-1,1]$ — произвольная непрерывная функция, числа a, b, ε, ε' выбраны и зафиксированы, как указано выше, и δ — сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \delta < b - a$. Пусть далее $\gamma = \{\gamma_n\}$ — последовательность, для которой выполнены все сделанные выше предположения, и $\mathfrak{M} = \{y_{i,n}\} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$. Потребуем, чтобы все точки $\{y_{i,n}\}$ были попарно различными и не совпадали с узлами сетки $t_{k,j} := -1 + k2^{1-j}$, $k = 1, ..., 2^j$, $j \in \mathbb{N}$.

Положим $I_{k,j} := [-1 + (k-1)2^{1-j}, -1 + k2^{1-j}]$ и определим на $[-1,1]$ функции

$$\tilde{f}_j(x) := \min_{t \in I_{k,j}} f(t), \quad x \in I_{k,j}, \quad k = 1, ..., 2^j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Последовательность $\{\tilde{f}_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ не убывает по j и равномерно сходится к f на $[-1,1]$, поскольку $\left\|f - \tilde{f}_j\right\|_{C[-1,1]} \leqslant \omega(f, 2^{1-j})$. Пусть $f_j(x) := \tilde{f}_j(x) - \tilde{f}_{j-1}(x)$, $\tilde{f}_0(x) \equiv 0$. Тогда ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ равномерно и абсолютно сходится к f на $[-1,1]$, так как $f_j(x) \geqslant 0$ при любом $x \in [-1,1]$, $j \geqslant 2$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} f_j(x) = \tilde{f}_n(x)$. Докажем, что для каждого $j = 1, 2...$ существует функция $g_j \in C(I)$ такая, что

$$\mathrm{mes}\{t \in [-1,1] : f_j(t) \neq g_j(t)\} < 2^{-j}\delta, \tag{25}$$

$$\max_n T_{n,\varepsilon}(\mathfrak{M}, g_j) \leqslant C\, \|f_j\|_{C(I)} \to 0 \text{ при } j \to \infty, \tag{26}$$

$$\lim_{n\to\infty} T_{n,\varepsilon}(\mathfrak{M}, g_j) = 0. \tag{27}$$

Кроме того, при $j \geqslant 2$ функция g_j дополнительно удовлетворяет условиям

$$0 \leqslant g_j(x) \leqslant f_j(x), \quad x \in I, \tag{28}$$

для любого наперед заданного числа $N_j \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$T_{n,\varepsilon}(\mathfrak{M}, g_j) = 0, \quad n = 1, ..., N_j. \tag{29}$$

После того как функции $\{g_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ будут построены, мы покажем, что $g(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} g_j(x)$ — искомая.

Займемся построением последовательности $\{g_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$. Пусть задано произвольное $0 < \delta < b - a$. Функцию g_1 определим следующим образом: фиксируем $\sigma_1 \in (0, \delta/2)$ и полагаем $g_1(x) = f_1(x)$, если $x \in [-1,1] \backslash (-\sigma_1, \sigma_1)$, $g_1(x)$ линейная на $[-\sigma_1, \sigma_1]$.

Предположим теперь, что $j \geqslant 2$, и построим функцию g_j. Обозначим через L множество точек разрыва функции f_j, лежащих в I. Выберем номер $M_j > N_j$ так, чтобы при $n > M_j$ для всех индексов i суммы $T_{n,p,\varepsilon}(\mathfrak{M}, f)$, $p \in I_n(a,b)$, выполнялось условие $\Delta_{i,n} \in I$, и пусть $D_0 := L \cup \{y_{i,s} \in I : 1 \leqslant s \leqslant M_j\}$. В силу леммы 2 найдется номер $\mu(0)$, для которого

$$Q_{n,p}(D_0) \leqslant 3 \quad \forall\ n \geqslant \mu(0), \quad p \in J_n(a,b).$$

Пусть $\{\sigma_l\}_{l=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ — последовательность такая, что $\sigma \downarrow 0$ при $l \to \infty$, причем $\sigma_l/\sigma_{l-1} < 2^{-l}$, $l = 1, 2, \dots$; окончательно мы подберем ее позже.

Для каждого $t \in D_0$ построим замкнутую окрестность $[t - \sigma_0, t + \sigma_0]$, при этом σ_0 выберем настолько малым, что:

1) $\sigma_0 < 4^{-1} d(\tilde{D}_0)$, где $\tilde{D}_0 := D_0 \cup \{y_{i,s} \in I : M_j + 1 \leqslant s \leqslant \mu(0)\}$;
2) общая длина окрестностей всех точек t из D_0 меньше, чем $2^{-j-1}\delta$;
3) $\max\{n :\ d_1(\mathfrak{M}_\gamma, n) > \sigma_0\} > \mu(0)$.

Для $x \in [-1, 1]$ положим

$$g_{0,j}(x) = \begin{cases} 0, & x \in D_0; \\ f_j(x), & x \in [-1,1] \backslash \cup_{t \in D_0} (t - \sigma_0, t + \sigma_0); \\ \text{линейная на} & [t - \sigma_k, t] \cup [t, t + \sigma_k],\ t \in D_0. \end{cases}$$

Предположим, что уже определены множества $D_0, \dots, D_{l-1}$, выбраны числа $\sigma_0, \dots, \sigma_{l-1}$ и построены функции $g_{0,j}, \dots, g_{l-1,j}$, $l \geqslant 1$. Определим D_l, σ_l и построим $g_{l,j}$. Пусть $E_{u,v} := \cup_{s=u}^{v} \cup_{t \in D_s} [t - \sigma_s, t + \sigma_s]$ и $D_l := \{y_{i,s} : s = M_j + l,\ y_{i,s} \in I \backslash E_{0,l-1}\}$. Для конечного множества $D_l \cup P_{l-1}$, где $P_{l-1} := \cup_{s=0}^{l-1} \cup_{t \in D_s} \{t - \sigma_s;\ t;\ t + \sigma_s\}$, найдем, применяя лемму 2, число $\mu(l)$ такое, что:

1) $Q_{n,p}(D_l \cup P_{l-1}) < 3$, $\forall n \geqslant \mu(l)$, $p \in J_n(a, b)$;
2) $\mu(l) > \min\{n :\ d_2(\mathfrak{M}_\gamma, n) \leqslant \sigma_{l-1}\}$.

Теперь строим окрестности $[t - \sigma_l, t + \sigma_l]$, $t \in D_l$, выбирая σ_l так, что:

1) $\sigma_l < 4^{-1} d(\tilde{D}_l)$, где $\tilde{D}_l := D_l \cup \{y_{i,s} \in I \backslash E_{0,l-1} :\ M_j + l \leqslant s \leqslant \mu(l)\}$;
2) общая длина окрестностей всех точек t из D_l меньше, чем $2^{-j-l}\delta$;
3) $\max\{n :\ d_1(\mathfrak{M}_\gamma, n) > \sigma_l\} > \mu(l)$.

Обозначим $h_{k,j} := f_j(x)$, $x \in I_{k,j}$ и для $x \in [-1, 1]$ положим

$$g_{l,j}(x) = \begin{cases} h_{k,j} \sum\limits_{s=1}^{l} 2^{-l}, & x \in D_l \cap I_{k,j}; \\ g_{l-1,j}(x), & x \in [-1,1] \backslash \cup_{t \in D_l} (t - \sigma_l, t + \sigma_l); \\ \text{линейная на} & [t - \sigma_l, t] \cup [t, t + \sigma_l],\ t \in D_l. \end{cases}$$

Определим функцию $g_j(x) := \lim\limits_{l \to \infty} g_{l,j}(x)$, $x \in [-1, 1]$, $j \in \mathbb{N}$, и проверим для нее выполнение условий (26) и (27) (справедливость (25), (28), (29), а также условия $g_j \in C(I)$ очевидна). Пусть $n > M_j$. Определим номер l из условий (формально полагаем $\sigma_{-1} := 2$)

$$d_2(\mathfrak{M}, n) \leqslant \sigma_{l-1}, \tag{30}$$

$$\exists\ i_0 : \quad |\Delta_{i_0,n}| > \sigma_l, \quad \Delta_{i_0,n} \subset I. \tag{31}$$

Из определения f_j следует, что все узлы, участвующие в построении числителей суммы $T_{n,p,\varepsilon}(\mathfrak{M}_\gamma, g_j)$, содержатся в множестве $E_{0,n}$. При этом $\Delta^2 g_{j,i} = 0$, если $\Delta_{i,n}$ целиком лежит на промежутке линейности функции g_j, т. е. если при некоторых s и $t \in D_s$ имеет место включение $\Delta_{i,n} \subset (t - \sigma_s, t) \cup (t, t + \sigma_s)$. Далее, по построению окрестности $[y_{i,s} - \sigma_s, y_{i,s} + \sigma_s]$ узлов строк с номерами $s = M_j + l, \dots, \mu(l)$ попарно не пересекаются. Тогда, предположив в дополнение к (8), что $n \leqslant \mu(l)$, получим, что из условия $\Delta_{i,n} \subset I \setminus E_{0,l-1}$ следует равенство $g_j(y_{2i-1,n}) = g_j(y_{2i,n}) = g_j(y_{2i+1,n})$, так что для указанных i снова имеем $\Delta^2 g_{j,i} = 0$. С учетом высказанных соображений можно записать

$$T_{n,p,\varepsilon}(\mathfrak{M}_\gamma, g_j) = \left| \left(\sum_{i \in J_1} + \sum_{i \in J_2} \right) \frac{\Delta^2 f_i}{p - 2i} \right| \equiv S_1 + S_2,$$

где

$$J_1 = \{i : \ \Delta_{i,n} \cap P_{l-2} \neq \varnothing\}, \tag{32}$$

$$J_2 = \{i : \ \Delta_{i,n} \cap \left(\cup_{t \in D_{l-1}} \{t - \sigma_{l-1};\ t;\ t + \sigma_{l-1}\}\right) \neq \varnothing\}. \tag{33}$$

Разумеется, если n недостаточно велико, то множества J_1, J_2 могут оказаться пустыми. В этом случае соответствующие части суммы считаем равными нулю. Положим $c_j := \|g_j\|_{C(I)} = \|f_j\|_{C(I)}$. Тогда из определения g_j и учитывая, что $\sigma_l / \sigma_{l-1} < 2^{-l}$, $l = 1, 2, \ldots$, получаем

$$\left|\Delta^2 g_{j,i}\right| \leqslant 2c_j \max\left\{\frac{\sigma_{l-1}}{\sigma_{l-2}};\ 2^{1-l}\right\} \leqslant \frac{Cc_j}{2^l}, \quad i \in J_1, \tag{34}$$

$$\left|\Delta^2 g_{j,i}\right| \leqslant 2c_j 2^{1-l} = \frac{Cc_j}{2^l}, \quad i \in J_2. \tag{35}$$

Так как $n > \mu(l-1)$, то с учетом определения $\mu(l-1)$ и (34) имеем

$$S_1 \leqslant \frac{Cc_j}{2^l} Q_{n,p}(P_{l-2}) \leqslant \frac{Cc_j}{2^l}. \tag{36}$$

Аналогично

$$S_2 \leqslant \frac{Cc_j}{2^l} \left(Q_{n,p}(D_{l-1}) + Q_{n,p}(D^-_{l-1}) + Q_{n,p}(D^+_{l-1})\right) \leqslant \frac{Cc_j}{2^l}, \tag{37}$$

где $D^-_s := \cup_{t \in D_s}\{t - \sigma_s\}$, $D^+_s := \cup_{t \in D_s}\{t + \sigma_s\}$, $s = 0, 1, \ldots$ Таким образом, для n таких, что верно (30) и $n \leqslant \mu(l)$, получим

$$T_{n,p,\varepsilon}(\mathfrak{M}_\gamma, g_j) \leqslant \frac{Cc_j}{2^l}, \quad p \in J_n(a, b). \tag{38}$$

Пусть теперь $n > \mu(l)$. Ясно, что $M_j + l + 1 < n$, кроме того, из (31) и определения $\mu(l+1)$ следует неравенство $n \leqslant \mu(l+1)$. Аналогично предыдущему получаем, что окрестности узлов строк с номерами от $M_j + l + 1$ до $\mu(l+1)$ попарно не пересекаются. Значит, теперь можно записать

$$T_{n,p,\varepsilon}(\mathfrak{M}_\gamma, g_j) = \left| \left(\sum_{i \in J_1} + \sum_{i \in J_2} + \sum_{i \in J_3} \right) \frac{\Delta^2 f_i}{p - 2i} \right| \equiv S_1 + S_2 + S_3,$$

где J_1 и J_2 определены посредством (32) и (33), а $J_3 := \{i : \Delta_{i,n} \cap \left(D_l \cup D^-_l \cup D^+_l\right) \neq \varnothing\}$. Для сумм S_1, S_2 и числителей суммы S_3 сохраняются прежние оценки, кроме того,

$$S_3 \leqslant \frac{Cc_j}{2^l} \left(Q_{n,p}(D_l) + Q_{n,p}(D^-_l) + Q_{n,p}(D^+_l)\right) \leqslant \frac{Cc_j}{2^l}.$$

Таким образом, для n, удовлетворяющих (31) и условию $n > \mu(l)$, мы снова получаем оценку (38). Итак, (38) верно при всех n. Поскольку $c_j \to 0$ при $j \to \infty$, из (38) следует (26). Кроме того, поскольку $l = l(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, из (16) следует также и (27).

Положим

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x), \quad g(x) = g(x)/\varphi(x), \quad x \in (-1,1), \quad g(\pm 1) := g(\pm 1 \mp 0)\,.$$

Так как $g_j \in C(I)$ и в силу (28) ряд сходится равномерно на I, имеем $g \in C(I)$. Кроме того, $g(x) = f(x)$, $x \in \backslash I$ и $g(a-\varepsilon'+0) = f(a-\varepsilon')$, $g(b+\varepsilon'-0) = f(b+\varepsilon')$, так что g, $g \in C[-1,1]$. Далее из (25) следует, что

$$\mathrm{mes}\{x \in [-1,1] : f(x) \neq g(x)\} = \mathrm{mes}\{x \in [-1,1] : f(x) \neq g(x)\} < \delta. \qquad (39)$$

Подберем теперь последовательность $\{M_j\}_{j=1}^{\infty}$ так, чтобы для функции g выполнялось условие

$$\lim_{n\to\infty} R_n(\mathfrak{M}_\gamma, g) = 0. \qquad (40)$$

Возьмем в качестве M_1 произвольное натуральное число и предположим, что $M_1, \ldots,$ M_{j-1}, $j \geqslant 2$, уже выбраны. За счет (27) можно подобрать M_j так, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{s=1}^{j-1} R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, g_s) < \frac{1}{j}, \quad \forall\, n > M_j, \quad p \in J_n(a,b). \qquad (41)$$

Завершив индукцию по j и выбрав $\{M_j\}$, мы окончательно построим функцию g. Пусть n — достаточно большой номер. Определим j из условия $M_j < n \leqslant M_{j+1}$. Имеем

$$R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, g) \leqslant \sum_{s=1}^{j-1} R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, g_s) + R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, g_j) + R_{n,p}\left(\mathfrak{M}_\gamma, \sum_{s=j+1}^{\infty} g_s\right) \equiv \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3. \quad (42)$$

Из (41), (26) и (29) соответственно находим $\Sigma_1 < 1/j$, $\Sigma_2 < Cc_j$ и $\Sigma_3 = 0$. С учетом этих соотношений и того, что $j \to \infty$ при $n \to \infty$, из (42) получаем (40).

В силу леммы 1 из (40) следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(\mathfrak{M}_\gamma, g, \cdot) - g\|_{C[a,b]} = 0,$$

которое совместно с (39) показывает, что функция g является искомой. □

Замечание. Основной результат настоящей статьи вместе с краткой схемой доказательства был анонсирован в [10].

Список литературы

1. *Grünwald G.* Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome Stetiger Funktionen // Annals of Mathematics. 1936. Vol. 37, № 4. P. 908–918. https://doi.org/10.2307/1968627
2. *Marcinkiewicz J.* Sur la divergence des polynomes d'interpolation // Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae : Sectio scientiarum mathematicarum. 1937. Vol. 8. P. 131–135.

3. *Erdős P., Vértesi P.* On the almost everywhere divergence of Lagrange interpolatory polynomials for arbitrary system of nodes // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1980. Vol. 36, iss. 1–2. P. 71–89. https://doi.org/10.1007/BF01897094
4. *Menchoff D.* Sur les séries de Fourier des fonctions continues [О рядах Фурье от непрерывных функций] // Математический сборник. 1940. Т. 8 (50), № 3. С. 493–518. URL: https://mi.mathnet.ru/sm6044 (дата обращения: 30.03.2022).
5. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. Москва : Физматгиз, 1961. 936 с.
6. *Натансон Г. И.* Двусторонняя оценка функции Лебега интерполяционного процесса Лагранжа с узлами Якоби // Известия вузов. Математика. 1967. № 11. С. 67–74. URL: https://mi.mathnet.ru/ivm3239 (дата обращения: 30.03.2022).
7. *Привалов А. А.* Критерий равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Известия вузов. Математика. 1986. № 5. С. 49–59. URL: https://mi.mathnet.ru/ivm7554 (дата обращения: 30.03.2022).
8. *Неваи Г. П.* Замечания об интерполировании // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1974. Vol. 25, iss. 1–2. P. 123–144. https://doi.org/10.1007/BF01901754
9. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. Москва : Физматлит, 1962. 500 с.
10. *Новиков В. В.* Исправление функций и интерполяция Лагранжа в узлах, близких к узлам Якоби // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20-й междунар. Сарат. зимн. шк. (Саратов, 28 января –1 февраля 2020 г.). Саратов : Научная книга, 2020. С. 277–280. EDN: BJDTHR

References

1. Grünwald G. Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome Stetiger Funktionen. *Annals of Mathematics*, 1936, vol. 37, iss. 4, pp. 908–918 (in German). https://doi.org/10.2307/1968627
2. Marcinkiewicz J. Sur la divergence des polynomes d'interpolation. In: *Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae : Sectio scientiarum mathematicarum*, 1937, vol. 8, pp. 131–135 (in French).
3. Erdős P., Vértesi P. On the almost everywhere divergence of Lagrange interpolatory polynomials for arbitrary system of nodes. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 1980, vol. 36, iss. 1–2, pp. 71–89. https://doi.org/10.1007/BF01897094
4. Menchoff D. Sur les séries de Fourier des fonctions continues. *Recueil Mathématique (Nouvelle série)*, 1940, vol. 8 (50), iss. 3, pp. 493–518 (in French). Available at: https://www.mathnet.ru/eng/sm6044 (accessed 30 March 2022).
5. Bary N. K. *A Treatise on Trigonometric Series*. Vol. 2. Oxford, New-York, Pergamon Press, 1964. 508 p. (Russ. ed.: Moscow, Fizmatgiz, 1961. 936 p.).
6. Natanson G. I. Two-sided estimate for the Lebesgue function of the Lagrange interpolation process with Jacobi nodes. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1967, no. 11, pp. 67–74 (in Russian). Available at: http://mi.mathnet.ru/eng/ivm3239 (accessed 30 March 2022).
7. Privalov A. A. A criterion for uniform convergence of Lagrange interpolation processes. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1986, vol. 30, iss. 5, pp. 65–77. Available at: https://www.mathnet.ru/eng/ivm7554 (accessed 30 March 2022).
8. Nevai G. P. Notes on interpolation. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 1974, vol. 25, iss. 1–2, pp. 123–144 (in Russian). https://doi.org/10.1007/BF01901754
9. Szegő G. *Orthogonal Polynomials*. Providence, Rhode Island, AMS, 1939. 440 p. (Russ. ed.: Moscow, Fizmatlit, 1962. 500 p.).
10. Novikov V. V. Adjustment of functions and Lagrange interpolation based on the nodes close to the Jacobi nodes. In: *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications*. Saratov, Nauchnaya kniga, 2020, pp. 277–280 (in Russian). EDN: BJDTHR

Поступила в редакцию / Received 31.03.2022
Принята к публикации / Accepted 01.10.2022
Опубликована / Published 01.03.2023