Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 58–69
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 58–69
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-58-69, EDN: UYQLJS

Научная статья
УДК 517.54

Задача Римана на луче для обобщенных аналитических функций с сингулярной линией

П. Л. Шабалин✉, Р. Р. Фаизов

Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Россия, 420043, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

Шабалин Павел Леонидович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, pavel.shabalin@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-2791-3964, AuthorID: 14693

Фаизов Рафаэль Рустамович, аспирант кафедры высшей математики, rafael.faizov@yandex.com, https://orcid.org/0000-0003-4744-164X, AuthorID: 1130264

Аннотация. В данной работе изучается неоднородная краевая задача Римана с конечным индексом и краевым условием на луче для одного обобщенного уравнения Коши – Римана с сингулярным коэффициентом. Для решения этой задачи выведена формула общего решения обобщенного уравнения Коши – Римана при ограничениях, приводящих к бесконечному индексу логарифмического порядка у сопутствующей задачи для аналитических функций. Получена формула общего решения задачи Римана и проведено полное исследование существования и числа решений краевой задачи для обобщенных аналитических функций с сингулярной линией.

Ключевые слова: задача Римана, обобщенные аналитические функции, бесконечный индекс, целые функции уточненного нулевого порядка

Для цитирования: *Шабалин П. Л., Фаизов Р. Р.* Задача Римана на луче для обобщенных аналитических функций с сингулярной линией // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 58–69. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-58-69, EDN: UYQLJS

Article

The Riemann problem on a ray for generalized analytic functions with a singular line

P. L. Shabalin✉, R. R. Faizov

Kazan State University of Architecture and Engineering, 1 Zelenaya St., Kazan 420043, Russia

Pavel L. Shabalin, pavel.shabalin@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-2791-3964, AuthorID: 14693

Rafael R. Faizov, rafael.faizov@yandex.com, https://orcid.org/0000-0003-4744-164X, AuthorID: 1130264

Abstract. In this paper, we study an inhomogeneous Riemann boundary value problem with a finite index and a boundary condition on a ray for a generalized Cauchy – Riemann equation with a singular coefficient. For the solution of this problem, we derived a formula for the general solution of the generalized Cauchy – Riemann equation under constraints that led to an infinite index of logarithmic order of the accompanying problem for analytical functions. We have obtained a formula for the general solution of the Riemann problem and conducted a complete study of the existence and the number of solutions of a boundary value problem for generalized analytic functions with a singular line.

Keywords: Riemann problem, generalized analytical functions, infinite index, integer functions of refined zero order

For citation: Shabalin P. L., Faizov R. R. The Riemann problem on a ray for generalized analytic functions with a singular line. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 58–69 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-58-69, EDN: UYQLJS

Введение

В плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного $z = x + iy = re^{i\theta}$ рассмотрим область D, границей которой служит луч $\Gamma = \{z : \operatorname{Re} z > 1, \operatorname{Im} z = 0\}$, и мнимую ось $L = \{z : \operatorname{Re} z = 0\}$. В области D рассмотрим частный случай обобщенной системы Коши – Римана с сингулярной линией L

$$\partial_{\overline{z}} U - A(z)U = F(z), \quad A(z) = \frac{a(z)}{\overline{z} + z}. \tag{1}$$

Для решений $U(z)$ этой системы в области D исследуем задачу Римана с краевым условием на луче Γ

$$U^+(t) = G(t)U^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma, \tag{2}$$

с непрерывными по Гельдеру всюду на Γ, включая бесконечно удаленную точку, функциями $\ln G(t)$ и $g(t)$. В формуле (2) $U^+(t)$, $U^-(t)$– предельные значения функции $U(z)$ при $z \to t$ слева и справа, т.е. при $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$ соответственно. Решение краевой задачи проведем с использованием структурной формулы общего решения системы (1). Эту формулу выведем при достаточно общих ограничениях, приводящих к бесконечному индексу сопутствующей краевой задачи для аналитических функций.

Теория обобщенных аналитических функций с регулярными коэффициентами построена И. Н. Векуа (см. [1] и библиографию). Решению обобщенной системы Коши – Римана

$$\partial_{\overline{z}} U + A(z)U + B(z)\overline{U} = F(z),$$

коэффициенты которой обращаются в бесконечность степенного порядка на некоторой линии L (L — сингулярная линия), и изучению краевых задач для ее решений посвящены работы [2–11] и др. Метод построения решений такой системы основан на купировании сингулярной линии семейством областей с последующим предельным переходом в последовательности построенных решений. Интересное развитие этого подхода к решению обобщенной системы Коши – Римана с сингулярной и сверхсингулярной линией в конечной односвязной области с гладкой границей разработано в статье А. Б. Расулова и А. П. Солдатова [11]. Полученное решение применено к изучению задачи, объединяющей черты задач линейного сопряжения и Гильберта. Аналогичный подход был применен для решения задачи типа Гильберта в [12].

Следует отметить, что в приведенных выше работах рассматривались задачи, приводящиеся к краевым задачам теории аналитических функций с конечным индексом. А. Б. Расулов обратил внимание на то, что при решении краевой задачи с конечным индексом для обобщенных аналитических функций с сингулярной линией она может трансформироваться в аналогичную задачу теории аналитических функций, но с бесконечным индексом. Эта ситуация описана в работе [13] для задачи Римана на полуокружности и задачи Римана и Римана – Гильберта на гладком замкнутом контуре [14]. Приведены формулы общего решения и обсуждается разрешимость краевых задач.

Начало исследования задачи Римана в случае бесконечного индекса для аналитических функций было положено Н. В. Говоровым. Его результаты по краевой задаче Римана с бесконечным индексом степенного порядка с краевым условием на гладком разрезе составили содержание монографии [15] и инициировали развитие тематики краевых задач с бесконечным индексом. Этой проблеме посвящен ряд работ других авторов. Широкое развитие данной тематики содержится в монографии [16]. Задача Римана с бесконечным индексом на криволинейном контуре рассмотрена в [17]. Задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка на гладком разрезе была исследована П. Г. Юровым [18, 19].

1. Решение эллиптической системы

Следуя [11], мы будем предполагать, что для $A(z)$ существует такая аналитическая в D, ограниченная в $\overline{D}$ функция $a_0(z)$, что

$$A_0(z) := \frac{a(z) - a_0(z)}{\overline{z} + z} \in L_{p,2}(D), \quad p > 2. \tag{3}$$

Граничные значения функции $a_0(z)$, т. е. функции $a_0^+(x)$, $a_0^-(x)$, будем считать непрерывными по Гельдеру всюду на Γ, включая бесконечно удаленную точку, в которой они принимают чисто мнимые значения. Кроме того, на функцию $a_0(z)$ дополнительно налагаем следующие ограничения:

$$|a_0(z) - a_0(-\overline{z})| \leqslant K(|z + \overline{z}|^{\alpha}), \quad x \to 0, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{4}$$

$$a_0(z) = O(|z|^{-\gamma}), \quad z \to +\infty, \quad \gamma > 0, \quad y \neq 0, \tag{5}$$

$$a_0(z) = O(|z|), \quad z \to 0. \tag{6}$$

Отметим, что мы несколько ослабили ограничения из [11] на функции $a_0(z)$, отказавшись от непрерывности $a_0(z)$ на Γ и требования обращения в нуль функции $a_0(z)$ в точках пересечения контура Γ и сингулярной линии. Эти изменения при решении краевой задачи приведут к случаю бесконечного индекса при редукции к аналогичной задаче теории аналитических функций.

Выведем формулу общего решения уравнения (1) в области D методом из работы [11]. Пусть ε малое положительное число, $E_{1/\varepsilon}$ — круг радиуса $1/\varepsilon$ с центром в начале координат. Введем области $D_\varepsilon^{\pm} = E_{1/\varepsilon} \cap \{z : \pm \operatorname{Re} z > \varepsilon\} \cap D$. Граница области D_ε^- состоит из части полуокружности $\gamma_{1/\varepsilon}^-$ и вертикального отрезка L_ε^-. Граница области D_ε^+ состоит из части полуокружности $\gamma_{1/\varepsilon}^+$, вертикального отрезка L_ε^+ и разреза Γ_ε по лучу Γ. Теперь введем открытое множество $D_\varepsilon = D_\varepsilon^- \cup D_\varepsilon^+$.

Обозначим символом $T_\varepsilon A$ интегральный оператор Векуа по объединению областей D_ε. Нам нужно убедиться, что $(T_\varepsilon A)(z)$, $z \in K$, равномерно сходится при $\varepsilon \to 0$ к пределу $\Omega(z)$ на любом компакте K, $K \in D_\varepsilon^- \cup D_\varepsilon^+$, причем $\partial_{\bar z}\Omega(z) = A(z)$, $z \in K$. Следуя [11], представим $T_\varepsilon A$ в виде

$$(T_\varepsilon A)(z) = (T_\varepsilon A_0)(z) - I_\varepsilon(z), \quad I_\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{D_\varepsilon} \frac{a_0(\zeta)}{\bar\zeta + \zeta} \cdot \frac{d_2\zeta}{\zeta - z},$$

причем последний интеграл понимаем как

$$I_\varepsilon(z) = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{D_{\varepsilon,\delta}} \frac{a_0(\zeta)}{\bar\zeta + \zeta} \cdot \frac{d_2\zeta}{\zeta - z}, \quad D_{\varepsilon,\delta} = D_\varepsilon \cap \{|\zeta - z| \geqslant \delta\}.$$

Правую часть равенства преобразуем по формуле Грина

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{D_{\varepsilon,\delta}} \frac{a_0(\zeta)}{\bar\zeta + \zeta} \cdot \frac{d_2\zeta}{\zeta - z} = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\partial D_\varepsilon^-} + \int\limits_{\partial D_\varepsilon^+}\right)\frac{a_0(t)\ln|t+\bar t|}{t - z}dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-t|=\delta}\frac{a_0(t)\ln|t+\bar t|}{t-z}dt.$$

После перехода к пределу по $\delta \to 0$ получим

$$I_\varepsilon(z) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\partial D_\varepsilon^-} + \int\limits_{\partial D_\varepsilon^+}\right)\frac{a_0(t)\ln|t+\bar t|}{(t - z)}dt - a_0(z)\ln|z + \bar z|. \tag{7}$$

Поскольку начало координат не принадлежит областям D_ε^-, D_ε^+, формулу (7) с учетом теоремы Коши перепишем так:

$$I_\varepsilon(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_\varepsilon^-}\left(\frac{\ln|t+\bar t|}{t-z} - \frac{\ln(-2t)}{t}\right)a_0(t)\,dt -$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_\varepsilon^+}\left(\frac{\ln|t+\bar t|}{t-z} - \frac{\ln(2t)}{t}\right)a_0(t)\,dt - a_0(z)\ln|z+\bar z|. \tag{8}$$

Пусть $z = x + iy$ — фиксированная точка из компакта K и $z \in D_\varepsilon^+$. Выберем ε настолько малым, чтобы выполнялись неравенства $|z| < 1/\varepsilon$, $\operatorname{Re} z > \varepsilon$. Рассмотрим входящие в правую часть формулы (8) криволинейные интегралы. Для интеграла по дуге окружности $\gamma_{1/\varepsilon}^+$ с использованием условия (5) выводим оценку

$$\left|\int\limits_{\gamma_{1/\varepsilon}^+}\frac{a_0(t)\ln|t+\bar t|}{(t-z)}\,dt\right| = \left|\left(\int\limits_{-\arccos\varepsilon^2}^{0} + \int\limits_{0}^{\arccos\varepsilon^2}\right)\ln\left(\frac{2\cos\theta}{\varepsilon}\right)\frac{a(e^{i\theta}/\varepsilon)}{e^{i\theta}/\varepsilon - z}\cdot\frac{ie^{i\theta}d\theta}{\varepsilon}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C\varepsilon^\gamma}{(1-\varepsilon|z|)}\ln\frac{2}{|\varepsilon|}.$$

Аналогичные неравенства получаем и для остальных интегралов по дугам окружностей. Таким образом, имеет место следующее асимптотическое равенство:

$$\left(\int\limits_{\gamma_{1/\varepsilon}^{-}} + \int\limits_{\gamma_{1/\varepsilon}^{+}}\right) a_0(t) \left(\frac{\ln|t+\bar{t}|}{t-z} - \frac{\ln(\pm 2t)}{t}\right) dt = O\left(\varepsilon^{\gamma} \ln\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \to 0. \tag{9}$$

Теперь рассмотрим криволинейный интеграл из (7) по L_ε^-, L_ε^+, который представим в виде

$$\left(\int\limits_{L_\varepsilon^-} + \int\limits_{L_\varepsilon^+}\right) \frac{a_0(t)\ln|t+\bar{t}|}{t-z} dt = i\ln(2\varepsilon) \int\limits_{-\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon}^{\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon} \left[\frac{a_0(-\varepsilon+i\eta)}{-\varepsilon+i\eta-z} - \frac{a_0(\varepsilon+i\eta)}{\varepsilon+i\eta-z}\right] d\eta.$$

Отсюда с привлечением условия (4) и ограниченности функции $a_0(t)$ выводим

$$\left|\left(\int\limits_{L_\varepsilon^-} + \int\limits_{L_\varepsilon^+}\right) \frac{a_0(t)\ln|t+\bar{t}|}{(t-z)} dt\right| = O\left(\varepsilon^{\alpha} \ln^2\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \to 0. \tag{10}$$

Такое же соотношение получим при $\varepsilon \to 0$ и для суммы интегралов

$$\left(\int\limits_{L_\varepsilon^-} + \int\limits_{L_\varepsilon^+}\right) a_0(t) \frac{\ln(\mp 2t)}{t} dt =$$

$$= \int\limits_{-\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon}^{\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon} \left[\frac{a_0(-\varepsilon+i\eta)}{-\varepsilon+i\eta}\ln(2\varepsilon - i2\eta) - \frac{a_0(\varepsilon+i\eta)}{\varepsilon+i\eta}\ln(2\varepsilon+i2\eta)\right] d\eta.$$

Правую часть последней формулы перепишем так:

$$\left(\int\limits_{L_\varepsilon^-} + \int\limits_{L_\varepsilon^+}\right) a_0(t) \frac{\ln(\mp 2t)}{t} dt = \int\limits_{-\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon}^{\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon} \ln(2\varepsilon - i2\eta) \left[\frac{a_0(-\varepsilon+i\eta)}{-\varepsilon+i\eta} - \frac{a_0(\varepsilon+i\eta)}{\varepsilon+i\eta}\right] d\eta +$$

$$+ \int\limits_{-\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon}^{\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon} a_0(\varepsilon+i\eta) \frac{\ln(2\varepsilon - i2\eta)/(2\varepsilon+i2\eta)}{\varepsilon+i\eta} d\eta.$$

Модуль первого слагаемого оценивается с использованием условия (4) и ограниченности функции $a_0(z)$ величиной $O\left(\varepsilon^{\alpha}\ln^2\frac{1}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon \to 0$. Оценим по модулю второе слагаемое

$$\left|\int\limits_{-\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon}^{\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon} a_0(\varepsilon+i\eta) \frac{\ln(2\varepsilon - i2\eta)/(2\varepsilon+i2\eta)}{\varepsilon+i\eta} d\eta\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left(\int\limits_{0}^{\sqrt{\varepsilon}} + \int\limits_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon} \right) \frac{|a_0(\varepsilon + i\eta)| \operatorname{arctg}(\varepsilon/\eta)}{\sqrt{\varepsilon^2+\eta^2}} d\eta.$$

С использованием условия (6) имеем

$$\int\limits_{0}^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{|a_0(\varepsilon + i\eta)| \operatorname{arctg}(\varepsilon/\eta)}{\sqrt{\varepsilon^2+\eta^2}} d\eta = O\left(\sqrt{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \to 0.$$

С учетом неравенства $|a_0(z)| \leqslant C$ для некоторой постоянной C простой оценкой интеграла получим

$$\int\limits_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{1-\varepsilon^4}/\varepsilon} \frac{|a_0(\varepsilon + i\eta)| \operatorname{arctg}(\varepsilon/\eta)}{\sqrt{\varepsilon^2+\eta^2}} d\eta \leqslant C\sqrt{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon^{3/2}}.$$

Таким образом, получена следующая асимптотическая формула:

$$\left(\int\limits_{L_\varepsilon^-} + \int\limits_{L_\varepsilon^+} \right) a_0(t) \frac{\ln(\mp 2t)}{t} dt = O\left(\varepsilon^\beta \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \to 0, \quad \beta = \min\{\alpha, 1/2\}. \tag{11}$$

Наконец, для интеграла по обоим берегам разреза $\Gamma_\varepsilon = \{t, \ 1 < t < 1/\varepsilon\}$ имеем

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon^-} \frac{z a_0^-(t) \ln(2t)}{t(t-z)} dt + \int\limits_{\Gamma_\varepsilon^+} \frac{z a_0^+(t) \ln(2t)}{t(t-z)} dt = \int\limits_{1}^{1/\varepsilon} \frac{z(a_0^+(t) - a_0^-(t)) \ln(2t)}{t(t-z)} dt. \tag{12}$$

Здесь $a_0^-(t)$, $a_0^+(t)$ — краевые значения аналитической функции $a_0(z)$ на левом и правом берегах разреза.

В равенстве (8), принимая во внимание оценки (9)–(11) и формулу (12), переходим к пределу по $\varepsilon \to 0$ при фиксированном $z \in K$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon(z) = -\frac{z}{2\pi i} \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(a_0^+(t) - a_0^-(t)) \ln(2t)}{t(t-z)} dt - a_0(z) \ln |z + \overline{z}|.$$

Вблизи бесконечно удаленной точки имеем [19]

$$-\frac{z}{2\pi i} \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(a_0^-(t) - a_0^+(t)) \ln |2t|}{t(t-z)} dt = -\frac{a_0^-(+\infty) - a_0^+(+\infty)}{4\pi i} \ln^2 z -$$
$$-\frac{a_0^-(+\infty) - a_0^+(+\infty)}{2} \ln z + O(1), \quad |z| \to +\infty. \tag{13}$$

Итак, доказано, что при условиях (4)–(6) функция $I_\varepsilon^+(z)$ равномерно сходится на компакте к пределу (11) и $\partial_{\overline{z}} \Omega(z) = A(z)$, $z \in K$.

Следовательно (см. [11]), если выполнены условия (3)–(6) и $(e^{-\Omega}F)(z) \in L_{p,2}(\overline{D})$, то общее решение уравнения (1) в области D в классе функций с ограниченным произведением $U(z)e^{-\Omega(z)}$ задается формулами вида

$$U(z) = e^{\Omega(z)}[(T(e^{-\Omega}F))(z) + \phi(z)], \tag{14}$$

где функция

$$\Omega(z) = (TA_0)(z) + \frac{z}{2\pi i}\int\limits_1^{+\infty} \frac{(a_0^-(t) - a_0^+(t))\ln 2t}{t(t-z)}dt + a_0(z)\ln|z+\overline{z}|, \tag{15}$$

интегральный оператор Векуа

$$(TA_0)(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{A_0^+(\zeta)\ d_2\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in D,$$

действует [1] из $L_{p,2}(D)$, $p > 2$, в класс Гельдера $H(\overline{D})$, функция $\phi(z)$ аналитична в области D.

2. Решение задачи Римана

Для функции $U(z)$, удовлетворяющей уравнению (1) в D, рассмотрим задачу Римана с краевым условием

$$U^+(t) = G(t)U^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma, \tag{16}$$

где $G(t)$ и $g(t)$ непрерывны по Гельдеру всюду на Γ, включая бесконечно удаленную точку. Привлекая формулы (14), перепишем краевое условие (16) в виде краевого условия задачи Римана для аналитической в области D функции $\phi(z)$

$$\begin{gathered}\phi^+(t) = G_1(t)\phi^-(t) + g_1(t), \quad t \in \Gamma, \quad G_1(t) = \frac{e^{\Omega^-(t)}G(t)}{e^{\Omega^+(t)}},\\ g_1(t) = \frac{g(t)}{e^{\Omega^+(t)}} + \frac{G(t)e^{\Omega^-(t)}T\left(e^{-\Omega^-}F^-\right)(t)}{e^{\Omega^+(t)}} - T\left(e^{-\Omega^+}F^+\right)(t).\end{gathered} \tag{17}$$

Обозначим односторонние пределы функции $a_0^\pm(x)$ в бесконечности символами $a_0^\pm(+\infty) = i\nu^\pm$. В соответствии с равенствами (15), (13) для функции $\Omega(z)$ вблизи бесконечно удаленной точки справедлива формула

$$\Omega(z) = \frac{\nu^- - \nu^+}{4\pi}\ln^2 z + i\frac{\nu^- - \nu^+}{2}\ln z + a_0(z)\ln|z+\overline{z}| + O(1), \quad |z| \to +\infty.$$

Отсюда выводим

$$\begin{gathered}\Omega^+(t) = \frac{\nu^- - \nu^+}{4\pi}\ln^2 t + i\frac{\nu^- + \nu^+}{2}\ln t + O(1), \quad t \to +\infty,\\ \Omega^-(t) = \frac{\nu^- - \nu^+}{4\pi}\ln^2 t + i\frac{3\nu^- - \nu^+}{2}\ln t + O(1), \quad t \to +\infty.\end{gathered}$$

С учетом приведенной асимптотики из формулы (17) получим

$$\begin{gathered} argG_1(t) = (\nu^- - \nu^+)\ln t + \varphi(t), \quad t \in (1,+\infty), \quad \varphi(t) \in H_{(1,+\infty)}, \\ \ln|G_1(t)| = \psi(t), \quad \psi(t) \in H_{(1,+\infty)}, \\ g_1(t) = \exp\left\{\frac{\nu^+ - \nu^-}{4\pi}\ln^2 t - i\frac{\nu^- + \nu^+}{2}\ln t\right\} O(1). \end{gathered} \tag{18}$$

Вместе с задачей (17) рассмотрим соответствующую однородную задачу

$$\phi^+(t) = G_1(t)\phi^-(t). \tag{19}$$

Нас интересует ситуация, когда функции $\ln|G_1(t)|$, $g_1(t)$ непрерывны по Гельдеру на $(1,+\infty)$, включая бесконечно удаленную точку, а индекс краевой задачи Римана (18) равен $+\infty$, поэтому будем считать выполненными условия

$$\begin{cases} \nu^- + \nu^+ \leqslant 0, \\ \nu^- - \nu^+ \geqslant 0. \end{cases} \tag{20}$$

Таким образом, задачу (16) сводим к краевой задаче Римана (17) на разрезе для аналитических функций с бесконечным индексом и завихрением в бесконечно удаленной точке логарифмического порядка. Полное решение этой задачи проведено П. Г. Юровым в [18] (см. также [20]) и традиционно представлено в виде суммы частного решения неоднородной задачи (17) и общего решения соответствующей однородной задачи (19). Формулу последнего мы позаимствуем из более поздней работы [20] как более наглядную. Именно в [20] общее решение задачи (19) с краевым условием на разрезе по положительной действительной полуоси с началом в точке с координатой, равной единице для функции, аналитической и ограниченной в комплексной плоскости с разрезом, представлено формулой

$$\phi(z) = e^{(\nu^+ - \nu^-)T_*(z)/4\pi} X(z) f(z), \quad X(z) = e^{\Gamma(z)}, \tag{21}$$

$$T_*(z) := \begin{cases} T(z), & \operatorname{Im} z \geqslant 0, \\ \overline{T}(z), & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases} \qquad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \ln[G_1(\tau)e^{(\nu^- - \nu^+)\operatorname{Re} T(\tau)/2\pi}]\frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Здесь $T(z) := (ln(z+i) - i\pi)^2$, под $(ln(z) - i\pi)^2$ будем понимать непрерывную однозначную ветвь, аналитическую в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, кроме точек $z = 0$, $z = 1$. Наконец, $f(z)$– произвольная целая функция нулевого порядка, удовлетворяющая условию

$$|f(t)| < Ce^{(\nu^- - \nu^+)\operatorname{Re} T(t)/4\pi}, \quad t \in \Gamma. \tag{22}$$

Следовательно, множество решений однородной краевой задачи Римана (19) зависит от множества целых функций нулевого порядка, удовлетворяющих условию (22). Именно [18] если $\nu^- - \nu^+ < 0$, то однородная задача (19) неразрешима в классе ограниченных аналитических функций, при $\nu^- - \nu^+ = 0$ задача (19) имеет единственное решение вида (21), где $f(z) = \text{const}$. Если $\nu^- - \nu^+ > 0$, то однородная задача (19) имеет бесконечно много решений, заданных формулой (21), в которой $f(z)$ — произвольная целая функция нулевого порядка, удовлетворяющая условию (22).

Формулу частного решения $\phi_0(z)$ неоднородной задачи (17) возьмем из работы П. Г. Юрова [18]

$$\phi_0(z) = \frac{f_0(z)X(z)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g_1(\tau)d\tau}{f_0(\tau)X^+(\tau)(\tau - z)}, \quad X_1(z) = \exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\ln G_1(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)}\right\},$$

где

$$f_0(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{r_k}\right), \quad n_{f_0}(r) = \left[\frac{1}{2} + \frac{\nu^- - \nu^+}{2\pi}\ln r\right],$$

все нули функции $f_0(z)$ лежат на отрицательной полуоси, $n_{f_0}(r)$ — считающая функция нулей целой функции $f_0(z)$, а $[x]$ обозначает целую часть числа x.

Таким образом, общее решение неоднородной задачи (17) в случае $\nu^- - \nu^+ > 0$ можно представить формулой

$$\phi(z) = \frac{X_1(z)f_0(z)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g_1(\tau)d\tau}{f_0(\tau)X^+(\tau)(\tau - z)} + X(z)e^{(\nu^+ - \nu^-)T_*(z)/4\pi}f(z), \tag{23}$$

в которой $f(z)$ — произвольная целая функция нулевого порядка, удовлетворяющая условию (22).

Если $\nu^- - \nu^+ = 0$, то задача (17) имеет единственное решение, представленное формулой (23) с $f(z) = \mathrm{const}$.

Если $\nu^- - \nu^+ < 0$, то задача (17) имеет [18] единственное решение

$$\phi(z) = \frac{X_1(z)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g_1(\tau)d\tau}{X_1^+(\tau)(\tau - z)}$$

при выполнении следующей системы условий:

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{f_0(\tau)}{X_1^+(\tau)}\cdot\frac{g_1(\tau)d\tau}{\tau + r_k} = 0, \quad k = \overline{1, \infty}.$$

На основании изложенного выше получается следующая

Теорема. *Пусть для коэффициентов уравнения* (1) *выполнены условия* (3)–(6) *и* $(e^{-\Omega}F)(z) \in L_{p,2}(\overline{D})$, $p > 2$, *односторонние пределы на бесконечности функции* $a_0^{\pm}(x)$ *удовлетворяют системе неравенств* (20). *Тогда если* $\nu^- - \nu^+ > 0$, *то неоднородная задача Римана* (16) *имеет бесконечное множество решений в классе функций* $U(z)$, *удовлетворяющих уравнению* (1) *в области* D *с ограниченным произведением* $U(z)e^{-\Omega(z)}$. *Общее решение задачи* (16) *представляется формулой* (14) *с* $\phi(z)$ *в виде* (21), *в которой* $f(z)$ — *произвольная целая функция нулевого порядка, удовлетворяющая условию* (22). *Если* $\nu^- - \nu^+ = 0$, *то неоднородная задача Римана имеет единственное решение, представимое формулой* (14) *с* $\phi(z)$ *в виде* (21), *в которой* $f(z) = \mathrm{const}$.

Список литературы

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. Москва : Наука, 1988. 507 с.
2. *Михайлов Л. Г.* Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе : ТаджикНИИНТИ, 1963. 183 с.

3. *Раджабов Н. Р.* Интегральные представление и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или с сингулярными поверхностями : в 2 ч. Ч. 1. Душанбе : Таджикский гос. ун-т, 1980. 147 с.
4. *Раджабов Н. Р.* Интегральные представление и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или с сингулярными поверхностями : в 2 ч. Ч. 2. Душанбе : Таджикский гос. ун-т, 1981. 170 с.
5. *Раджабов Н. Р.* Интегральные представления и граничные задачи для обобщенной системы Коши – Римана с сингулярной линией // Доклады Академии наук СССР. 1982. Т. 267, № 2. С. 300–305. URL: https://mi.mathnet.ru/dan45725 (дата обращения: 02.08.2022).
6. *Раджабов Н. Р., Расулов А. Б.* Интегральные представление и граничные задачи для одного класса систем дифференциальных уравнений эллиптического типа с сингулярным многообразием // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 7. С. 1279–1981. URL: https://mi.mathnet.ru/de6927 (дата обращения: 02.08.2022).
7. *Усманов З. Д.* Обобщенные системы Коши – Римана с сингулярной точкой. Душанбе : ТаджикНИИНТИ, 1993. 245 с.
8. *Begehr H., Dao-Qing Dai.* On continuous solutions of a generalized Cauchi – Riemann system with more than one singularity // Journal of Differential Equations. 2004. Vol. 196, iss. 1. P. 67–90. https://doi.org/10.1016/j.jde.2003.07.013
9. *Meziani A.* Representation of solutions of a singular CR equation in the plane // Complex Variables and Elliptic Equations. 2008. Vol. 53, iss. 12. P. 1111–1130. URL: https://doi.org/10.1080/17476930802509239 (дата обращения: 02.08.2022).
10. *Расулов А. Б.* Представления многообразия решений и исследование краевых задач для некоторых обобщенных систем Коши – Римана с одной и двумя сингулярными линиями // Известия АН Тадж. ССР. Серия физико-математических, химических и геологических наук. 1982. № 2 (84). С. 23–32.
11. *Расулов А. Б., Солдатов А. П.* Краевая задача для обобщенного уравнения Коши – Римана с сингулярными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 5. С. 637–650. https://doi.org/10.1134/S0374064116050083
12. *Федоров Ю. С., Расулов А. Б.* Задачи типа Гильберта для уравнения Коши – Римана с сингулярными окружностью и точкой в младших коэффициентах // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, № 1. С. 140–144. https://doi.org/10.31857/S0374064121010143
13. *Расулов А. Б.* Задача Римана на полуокружности для обобщенной системы Коши – Римана с сингулярной линией // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 9. С. 1290–1292. https://doi.org/10.1007/s10625-005-0015-7
14. *Расулов А. Б.* Интегральные представления и задача линейного сопряжения для обобщенной системы Коши – Римана с сингулярным многообразием // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 2. С. 270–275. https://doi.org/10.1007/BF02754217
15. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. Москва : Наука, 1986. 240 с.
16. *Монахов В. Н., Семенко Е. В.* Краевые задачи и псевдодифференциальные операторы на римановых поверхностях. Москва : Физматлит, 2003. 416 с. EDN: UGLDLN
17. *Островский И. В.* Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом на криволинейном контуре // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1991. №. 56. С. 95–105.
18. *Юров П. Г.* Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка $\alpha \geqslant 1$ // Материалы Всесоюзной конференции по краевым задачам. Казань : Изд-во Казанского ун-та, 1970. С. 279–284.
19. *Юров П. Г.* Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического типа // Известия высших учебных заведений. Математика. 1966. № 2. С. 158–163. URL: https://mi.mathnet.ru/ivm2700 (дата обращения: 02.08.2022)

20. *Салимов Р. Б., Хасанова Э. Н.* Решение однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка на луче новым методом // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 160–171. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-160-171

References

1. Vekua I. N. *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions]. Moscow, Nauka, 1988. 507 p. (in Russian).
2. Mikhailov L. G. *Novye klassy osobykh integral'nykh uravneniy i ikh primenenie k differentsial'nym uravneniyam s singulyarnymi koeffitsiyentami* [New Classes of Singular Integral Equations and Their Application to Differential Equations with Singular Coefficients]. Dushanbe, TadjikNIINTI, 1963. 183 p. (in Russian).
3. Radzhabov N. R. *Integralnye predstavleniya i granichnye zadachi dlya nekotorykh differentsial'nykh uravneniy s singuliarnoy liniey ili singuliarnymi poverkhnostyami* [Integral Representations and Boundary Value Problems for Some Differential Equations with Singular Line or Singular Surfaces]. Vol. 1. Dushambe, Tadzhikskiy gosuniversitet Publ., 1980. 147 p. (in Russian).
4. Radzhabov N. R. *Integral'nye predstavleniya i granichnye zadachi dlya nekotorykh differentsial'nykh uravneniy s singuliarnoi liniei ili s singuliarnymi poverkhnostiami* [Integral Representations and Boundary Value Problems for Some Differential Equations with Singular Line or Singular Surfaces]. Vol. 2. Dushambe, Tadzhikskiy gosuniversitet Publ., 1981. 170 p. (in Russian).
5. Radzhabov N. R. Integral representations and boundary value problems for the generalized Cauchy – Riemann system with a singular line. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1982, vol. 267, iss. 2, pp. 300–305 (in Russian). Available at: https://mi.mathnet.ru/dan45725 (accessed 2 August 2022).
6. Radzhabov N. R., Rasulov A. B. Integral representations and boundary value problems for a class of systems of differential equations of elliptic type with singular manifolds. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1989, vol. 25, iss. 7, pp. 1279–1981 (in Russian). Available at: https://mi.mathnet.ru/de6927 (accessed 2 August 2022).
7. Usmanov Z. D. *Generalized Cauchy – Riemann Systems with a Singular Point*. New York, Routledge, 1997. 232 p. (Russ. ed.: Dushambe, TadzhikNIINTI, 1993. 245 p.). https://doi.org/10.1201/9780203753750
8. Begehr H., Dao-Qing Dai. On continuous solutions of a generalized Cauchi – Riemann system with more than one singularity. *Journal of Differential Equations*, 2004, vol. 196, iss. 1, pp. 67–90. https://doi.org/10.1016/j.jde.2003.07.013
9. Meziani A. Representation of solutions of a singular CR equation in the plane. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2008, vol. 53, iss. 12, pp. 1111–1130. Available at: https://doi.org/ 10.1080/17476930802509239 (accessed 2 August 2022).
10. Rasulov A. B. Representation of the variety of solutions and investigation of the boundary value problems for some generalized Cauchy – Riemann systems with one and two singular lines. *Izvestiya AN Tadzh. SSR. Seriia fiziko-matematicheskikh, khimicheskikh i geologicheskikh nauk*, 1982, iss. 4 (84), pp. 23–32 (in Russian).
11. Rasulov A. B., Soldatov A. P. Boundary value problem for a generalized Cauchy – Riemann equation with singular coefficients. *Differential Equations*, 2016, vol. 52, iss. 5, pp. 616–629. https://doi.org/10.1134/S0374064116050083
12. Fedorov Iu. S., Rasulov A. B. Hilbert type problem for a Cauchy – Riemann equation with singularities on a circle and at a point in the lower-order coefficients. *Differential Equations*, 2021, vol. 57, iss. 1, pp. 127–131. https://doi.org/10.1134/S0012266121010122

13. Rasulov A. B. The Riemann problem on a semicircle for a generalized Cauchy – Riemann system with a singular line. *Differential Equations*, 2004, vol. 40, iss. 9, pp. 1364–1366. https://doi.org/10.1007/s10625-005-0015-7
14. Rasulov A. B. Integral representations and the linear conjugation problem for a generalized cauchy-riemann system with a singular manifold. *Differential Equations*, 2000, vol. 36, iss. 2, pp. 306–312. https://doi.org/10.1007/BF02754217
15. Govorov N. V. *Riemann's Boundary Problem with Infinite Index*. Operator Theory: Advances and Applications, vol. 67. Berlin, Birkhauser Basel, 1994. 263 p. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8506-5 (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1986. 240 p.).
16. Monakhov V. N., Semenko E. V. *Kraevye zadachi i psevdodifferentsial'nye operatory na rimanovykh poverkhnostyakh* [Boundary Value Problems and Pseudodifferential Operators on Riemann Surfaces]. Moscow, Fizmatlit, 2003. 416 p. (in Russian). EDN: UGLDLN
17. Ostrovskii I. V. Homogeneous Riemann boundary value problem with infinite index on a curved contour. *Theory of Functions, Functional Analysis and Their Applications*, 1991, iss. 56, pp. 95–105 (in Russian).
18. Yurov P. G. Inhomogeneous Riemann boundary value problem with infinite index of logarithmic order $\alpha \geqslant 1$. In: *Materialy Vsesoyuznoy konferentsii po kraevym zadacham* [Materials of the All-Union Conference on Boundary Value Problems]. Kazan, Kazan State University Publ., 1970, pp. 279–284 (in Russian).
19. Yurov P. G. The homogeneous Riemann boundary value problem with an infinite index of logarithmic type. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1966, iss. 2, pp. 158–163 (in Russian). Available at: https://mi.mathnet.ru/ivm2700 (accessed 2 August 2022).
20. Salimov R. B., Khasanova E. N. The solution of the homogeneous boundary value problem of Riemann with infinite index of logarithmic order on the beam by a new method. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 160–171 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-160-171

Поступила в редакцию / Received 09.08.2022
Принята к публикации / Accepted 26.09.2022
Опубликована / Published 01.03.2023