

МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 70–82
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 70–82

mmi.sgu.ru

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-70-82>

EDN: SWEWSQ

Научная статья
УДК 539.3

О физических уравнениях деформируемого тела на шаге нагружения с реализацией на основе смешанного МКЭ

Н. А. Гуреева¹, Р. З. Киселева^{2✉}, Ю. В. Клочков²,
А. П. Николаев², В. В. Рябуха²

¹Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Россия, 125993, ГСП-3, г. Москва, Ленинградский проспект, д. 49

²Волгоградский государственный аграрный университет, Россия, 400002, г. Волгоград, Университетский проспект, д. 26

Гуреева Наталья Анатольевна, доктор физико-математических наук, доцент, доцент департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий, Natalya-gureeva@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3496-2008>, AuthorID: 306195

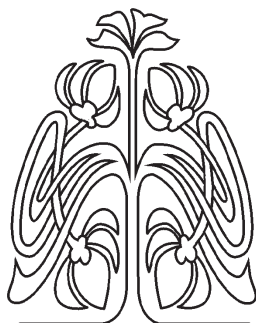
Киселева Румия Зайдуллаевна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования, rumia1970@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3047-5256>, AuthorID: 573150

Клочков Юрий Васильевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Klotchkov@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1027-1811>, AuthorID: 161677

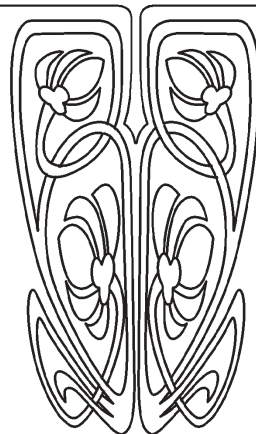
Николаев Анатолий Петрович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования, anpetr40@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7098-5998>, AuthorID: 161676

Рябуха Виталий Васильевич, аспирант, vitalik30090@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7394-8885>, AuthorID: 1175851

Аннотация. Для получения матрицы деформирования призматического конечного элемента на шаге нагружения с учетом физической нелинейности использованы три варианта физических уравнений. В первом варианте реализованы определяющие уравнения теории пластического течения, согласно которой приращение деформаций разделяется на упругую



Научный
отдел





и пластическую части. Приращения упругих деформаций связаны с приращениями напряжений законом Гука. Связь приращений пластических деформаций с приращениями напряжений определяется на основе гипотезы о пропорциональности компонент тензора приращений пластических деформаций компонентам девиатора напряжений. Во втором варианте компоненты тензора приращений пластических деформаций получены на основе предложенной гипотезы о пропорциональности этих компонент компонентам девиатора приращений напряжений на шаге нагружения. В этом варианте так же, как и в первом варианте, принята гипотеза о несжимаемости материала при пластическом деформировании. В третьем варианте определяющие уравнения на шаге нагружения получены на основе предложенной гипотезы о пропорциональности компонент девиатора приращений деформаций компонентам девиатора приращений напряжений без разделения приращений деформаций на упругую и пластическую части. Коэффициент пропорциональности оказался функцией хордового модуля диаграммы деформирования. Гипотеза о несжимаемости материала при пластическом деформировании не принималась, а реализована зависимость между первыми инвариантами тензоров деформаций и тензоров напряжений, получаемая из эксперимента. Для сравнения с первым и вторым вариантами определяющих уравнений эта зависимость между первыми инвариантами тензоров деформаций и напряжений определена по формуле упругого деформирования. В качестве конечного элемента принят призматический элемент с треугольными основаниями. В качестве узловых неизвестных приняты приращения перемещений и приращения напряжений. Аппроксимация искомых величин метода конечных элементов в смешанной формулировке через узловые значения осуществлялась с использованием линейных функций. Матрица напряженно-деформированного состояния представлена на основе смешанного функционала, полученного из физического выражения равенства возможных и действительных работ внешних и внутренних сил на шаге нагружения с заменой действительной работы внутренних сил разностью полной и дополнительной работы внутренних сил. На примере расчета показано адекватное соответствие в результатах расчета на основе рассмотренных вариантов физических соотношений и отмечена предпочтительность предложенного третьего варианта определяющих уравнений теории пластичности.

Ключевые слова: определяющие уравнения пластичности, девиаторы приращений деформаций, девиаторы приращений напряжений, смешанный МКЭ

Для цитирования: Гуреева Н. А., Киселева Р. З., Клочков Ю. В., Николаев А. П., Рябуха В. В. О физических уравнениях деформируемого тела на шаге нагружения с реализацией на основе смешанного МКЭ // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 70–82. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-70-82>, EDN: SWEWSQ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

On the physical equations of a deformable body at the loading step with implementation based on a mixed FEM

N. A. Gureeva¹, R. Z. Kiseleva^{2✉}, Yu. V. Klochkov², A. P. Nikolaev²,
V. V. Ryabukha²

¹Financial University under the Government of the Russian Federation, 49 Leningradsky Prospekt, GSP-3, Moscow 125993, Russia

²Volgograd State Agricultural University, 26 Universitetskiy Prospekt, Volgograd 400002, Russia

Natalia A. Gureeva, Natalya-gureeva@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3496-2008>, AuthorID: 306195



Rumiya Z. Kiseleva, rumial1970@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3047-5256>, AuthorID: 573150

Yuri V. Klochkov, Klotchkov@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1027-1811>, AuthorID: 161677

Anatoly P. Nikolaev, anpetr40@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7098-5998>, AuthorID: 161676

Vitaly V. Ryabukha, vitalik30090@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7394-8885>, AuthorID: 1175851

Abstract. To obtain the deformation matrix of the prismatic finite element at the loading step, taking into account the physical nonlinearity, three variants of physical equations were used. In the first variant, the defining equations of the theory of plastic flow are implemented, according to which the increment of deformations is divided into elastic and plastic parts. The increment of elastic deformations is related to the increments of stresses by Hooke's law. The relationship of plastic strain increments with stress increments is determined based on the hypothesis of the proportionality of the components of the plastic strain increment tensor to the components of the stress deviator. In the second variant, the components of the plastic strain increment tensor are obtained on the basis of the proposed hypothesis about the proportionality of these components to the components of the stress increment deviator at the loading step. In this variant, as well as in the first variant, the hypothesis of incompressibility of the material during plastic deformation is accepted. In the third variant, the defining equations at the loading step were obtained on the basis of the proposed hypothesis about the proportionality of the components of the deformation increment deviator to the components of the stress increment deviator without dividing the deformation increments into elastic and plastic parts. The proportionality coefficient turned out to be a function of the chord modulus of the deformation diagram. The hypothesis of incompressibility of the material during plastic deformation was not accepted, but the dependence between the first invariants of strain tensors and stress tensors obtained from the experiment was realized. For comparison with the first and second variants of the defining equations, this dependence between the first invariants of strain and stress tensors is determined by the elastic deformation formula. A prismatic element with triangular bases is adopted as the finite element. Displacement increments and stress increments are taken as nodal unknowns. Approximation of the desired values of the finite element method, in a mixed formulation through nodal values, was carried out using linear functions. The stress-strain state matrix is presented on the basis of a mixed functional obtained from the physical expression of the equality of the possible and actual work of external and internal forces at the loading step with the replacement of the actual work of internal forces by the difference of the full and additional work of internal forces. The calculation example shows an adequate correspondence in the calculation results based on the considered variants of the physical relations and the preference of the third variant of the defining equations of the theory of plasticity is noted.

Keywords: defining plasticity equations, deformation increment deviators, stress increment deviators, mixed FEM

For citation: Gureeva N. A., Kiseleva R. Z., Klochkov Yu. V., Nikolaev A. P., Ryabukha V. V. On the physical equations of a deformable body at the loading step with implementation based on a mixed FEM. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 70–82 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-70-82>, EDN: SWEWSQ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

В реальных инженерных конструкциях всегда имеются зоны, в которых при нагружении возникает концентрация напряжений. Поэтому уже при нагрузках, далеких от предельных, в них возникают напряжения, превышающие предел текучести. Сле-



довательно, определение напряженного состояния с учетом пластических деформаций в ограниченных зонах является актуальной инженерной задачей.

При расчете инженерных конструкций за пределом упругости наиболее часто используется теория пластического течения и теория малых упругопластических деформаций [1–3]. Для реализации соотношений теории пластичности используется численный метод конечных элементов как в формулировке метода перемещений [4–6], так и в смешанной формулировке [7].

В настоящей работе на основе призматического конечного элемента в смешанной формулировке в первом варианте реализованы определяющие уравнения теории пластического течения и два варианта физических уравнений на шаге нагружения, полученные на основе предложенных гипотез.

Определяющие уравнения теории течения состоят из приращений упругих деформаций и деформаций пластических. Приращения упругих деформаций определяются законом Гука. Приращения пластических деформаций определяются на основе гипотезы о пропорциональности приращений пластических деформаций компонентам девиатора напряжений.

Во втором варианте для получения приращений пластических деформаций использовалась гипотеза о пропорциональности приращений пластических деформаций компонентам девиатора приращений напряжений. В третьем варианте без разделения деформаций на упругие и пластические части получены определяющие уравнения на основе гипотезы о пропорциональности компонент девиатора приращений деформаций компонентам девиатора приращений напряжений без ограничительного предположения о несжимаемости материала при пластическом деформировании.

1. Методы исследования

1.1. Деформированное состояние в точке тела на шаге нагружения

Приращения деформаций $\Delta\varepsilon_{xx}$, $\Delta\varepsilon_{yy}$, $\Delta\varepsilon_{zz}$, $\Delta\gamma_{xy}$, $\Delta\gamma_{xz}$, $\Delta\gamma_{yz}$ в зависимости от приращений перемещений Δu , Δv , Δw на шаге нагружения определяются в геометрически линейной постановке [8, 9]:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial\Delta u}{\partial x}, & \Delta\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial\Delta v}{\partial y}, & \Delta\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial\Delta w}{\partial z}, \\ \Delta\gamma_{xy} &= \frac{\partial\Delta u}{\partial y} + \frac{\partial\Delta v}{\partial x}, & \Delta\gamma_{xz} &= \frac{\partial\Delta u}{\partial z} + \frac{\partial\Delta w}{\partial x}, & \Delta\gamma_{yz} &= \frac{\partial\Delta v}{\partial z} + \frac{\partial\Delta w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1)$$

Соотношения (1) записываются в матричном виде

$$\{\Delta\varepsilon\}_{6 \times 1} = [L]_{6 \times 3} \{\Delta\omega\}_{3 \times 1}, \quad (2)$$

где $\{\Delta\varepsilon\}_{1 \times 6}^T = \{\Delta\varepsilon_{xx}, \Delta\varepsilon_{yy}, \Delta\varepsilon_{zz}, \Delta\gamma_{xy}, \Delta\gamma_{xz}, \Delta\gamma_{yz}\}$ — матрица-строка приращения деформаций, $\{\Delta\omega\}_{1 \times 3}^T = \{\Delta u, \Delta v, \Delta w\}$ — строка приращений перемещений, $[L]_{6 \times 3}$ — матрица дифференциальных операторов.



1.2. Физические уравнения на шаге нагружения

1.2.1. Физические уравнения теории пластического течения

Согласно этой теории приращения деформаций представляются суммой приращений упругих и приращений пластических деформаций:

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\varepsilon_{ij}^e + \Delta\varepsilon_{ij}^p. \quad (3)$$

Приращения упругих деформаций определяются законом Гука [1]:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{xx}^e &= \frac{1}{E}(\Delta\sigma_{xx} - \nu\Delta\sigma_{yy} - \nu\Delta\sigma_{zz}), \\ \Delta\varepsilon_{yy}^e &= \frac{1}{E}(\Delta\sigma_{yy} - \nu\Delta\sigma_{xx} - \nu\Delta\sigma_{zz}), \\ \Delta\varepsilon_{zz}^e &= \frac{1}{E}(\Delta\sigma_{zz} - \nu\Delta\sigma_{xx} - \nu\Delta\sigma_{yy}), \\ 2\Delta\varepsilon_{xy}^e &= \frac{1+\nu}{E}\Delta\sigma_{xy}, \quad 2\Delta\varepsilon_{xz}^e = \frac{1+\nu}{E}\Delta\sigma_{xz}, \quad 2\Delta\varepsilon_{yz}^e = \frac{1+\nu}{E}\Delta\sigma_{yz}, \end{aligned} \quad (4)$$

где E — модуль упругости материала при растяжении, ν — коэффициент поперечной деформации.

Приращения пластических деформаций определяются в теории пластического течения на основе гипотезы о пропорциональности приращений пластических деформаций компонентам девиатора полных напряжений:

$$\Delta\varepsilon_{ij}^p = \frac{\Delta\varepsilon_i^p}{\sigma_i}(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_c), \quad (5)$$

где $\Delta\varepsilon_i^p$ — приращение интенсивности пластических деформаций, σ_i — интенсивность напряжений, δ_{ij} — символ Кронекера, $\sigma_c = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$ — среднее значение нормальных напряжений.

Приращение интенсивности пластических деформаций, входящее в (5), определяется разностью [1]:

$$\Delta\varepsilon_i^p = \Delta\varepsilon_i - \Delta\varepsilon_i^e = \frac{\Delta\sigma_i}{E_x} - \frac{\Delta\sigma_i}{E_n} = \Delta\sigma_i \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E_n} \right), \quad (6)$$

где $\Delta\varepsilon_i$ — приращение интенсивности деформаций, $\Delta\varepsilon_i^e$ — приращение интенсивности упругих деформаций, E_x — хордовый модуль диаграммы деформирования материала, E_k — касательный модуль диаграммы деформирования, E_n — модуль начального участка диаграммы деформирования, $\Delta\sigma_i$ — приращение интенсивности напряжений.

Входящая в (6) величина приращения интенсивности напряжений $\Delta\sigma_i$ определяется дифференцированием величины

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2)]^{1/2}$$

в таком общем виде:

$$\sigma_i = \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{xx}}\Delta\sigma_{xx} + \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{yy}}\Delta\sigma_{yy} + \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{zz}}\Delta\sigma_{zz} + \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{xy}}\Delta\sigma_{xy} + \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{xz}}\Delta\sigma_{xz} + \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{yz}}\Delta\sigma_{yz}. \quad (7)$$

При учете (6), (7) приращения пластических деформаций запишутся выражениями

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{xx}^p &= m(\sigma_{xx} - \sigma_c) (S_{xx}\Delta\sigma_{xx} + S_{yy}\Delta\sigma_{yy} + S_{zz}\Delta\sigma_{zz} + \\ &\quad + S_{xy}\Delta\sigma_{xy} + S_{xz}\Delta\sigma_{xz} + S_{yz}\Delta\sigma_{yz}), \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta\varepsilon_{yz}^p &= m\sigma_{yz} (S_{xx}\Delta\sigma_{xx} + S_{yy}\Delta\sigma_{yy} + S_{zz}\Delta\sigma_{zz} + \\ &\quad + S_{xy}\Delta\sigma_{xy} + S_{xz}\Delta\sigma_{xz} + S_{yz}\Delta\sigma_{yz}),\end{aligned}\tag{8}$$

где $m = \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma_i} \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E_n} \right)$, $S_{ij} = \frac{\partial\sigma_i}{\partial\sigma_{ij}}$.

Следует отметить, что соотношения (8) получены в предположении о несжимаемости материала при пластическом деформировании.

Суммируя в соответствии с (3) выражения (4) и (8), можно записать физические уравнения теории пластического течения в матричном виде

$$\{\Delta\varepsilon\}_{6 \times 1} = \{C_1\}_{6 \times 6} \{\Delta\sigma\}_{6 \times 1},\tag{9}$$

где $\{\Delta\varepsilon\}_{1 \times 6}^T = \{\Delta\varepsilon_{xx} \Delta\varepsilon_{yy} \Delta\varepsilon_{zz} \Delta\gamma_{xy} \Delta\gamma_{xz} \Delta\gamma_{yz}\}$, $\{\Delta\sigma\}_{1 \times 6}^T = \{\Delta\sigma_{xx} \Delta\sigma_{yy} \Delta\sigma_{zz} \Delta\sigma_{xy} \Delta\sigma_{xz} \Delta\sigma_{yz}\}$.

1.2.2 Вариант приращений пластических деформаций

Предлагается вариант физических уравнений на шаге нагружения, основанный на гипотезе о пропорциональности приращений пластических деформаций $\Delta\varepsilon_{ij}^p$ компонентам девиатора приращений напряжений ΔS_{ij} :

$$\Delta\varepsilon_{ij}^p = \psi \Delta S_{ij},\tag{10}$$

где $\Delta S_{ij} = \Delta\sigma_{ij} - \delta_{ij} \Delta\sigma_c$, $\psi = \frac{3 \Delta\varepsilon_i^p}{2 \Delta\sigma_i}$ — коэффициент пропорциональности.

Принимая во внимание (6), приращения пластических деформаций можно записать выражением

$$\Delta\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E_n} \right) (\Delta\sigma_{ij} - \delta_{ij} \Delta\sigma_c).\tag{11}$$

В физических уравнениях (11) также полагается несжимаемость материала при пластическом деформировании.

Суммируя приращения упругих деформаций (4) и приращения пластических деформаций (11), можно сформировать матричное соотношение

$$\{\Delta\varepsilon\}_{6 \times 1} = \{C_2\}_{6 \times 6} \{\Delta\sigma\}_{6 \times 1},\tag{12}$$

1.2.3 Вариант физических уравнений без разделения деформаций на упругую и пластическую части

При получении третьего варианта физических уравнений предлагается отказаться от разделения приращений деформаций на упругие и пластические части, а определять



соотношения между полными приращениями деформаций и приращениями напряжений на основе гипотезы о пропорциональности компонент девиатора приращений деформаций компонентам девиатора приращений напряжений:

$$\Delta\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\Delta\varepsilon_c = \frac{3}{2} \frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta\sigma_i} (\Delta\sigma_{ij} - \delta_{ij}\Delta\sigma_c), \tag{13}$$

где $\Delta\varepsilon_i$ — приращение интенсивности деформаций, $\frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta\sigma_i} = \frac{1}{E_x}$, E_x — хордовый модуль диаграммы деформирования, $\Delta\varepsilon_c = \frac{1}{3}(\Delta\varepsilon_{xx} + \Delta\varepsilon_{yy} + \Delta\varepsilon_{zz})$.

Следует отметить, что в (13) используется зависимость $\Delta\varepsilon_c = k\Delta\sigma_c$, получаемая из эксперимента без использования гипотезы о несжимаемости материала.

Если предположить, как в (9) и (12), что материал несжимаем при пластических деформациях, т.е.

$$\Delta\varepsilon_c = \frac{1 - 2\nu}{E} \Delta\sigma_c, \tag{14}$$

то можно сформировать матричное выражение

$$\{\Delta\varepsilon\}_{6 \times 1} = \{C_3\}_{6 \times 6} \{\Delta\sigma\}_{6 \times 1}. \tag{15}$$

1.3. Матрица деформирования призматического конечного элемента

Основаниями призматического конечного элемента являются произвольные треугольники с узлами i, j, k для нижнего основания и с узлами m, n, p для основания верхнего. В качестве узловых неизвестных приняты приращения перемещений и приращения напряжений. Для выполнения численного интегрирования по объему конечного призматического элемента дискретизации он отображается на локальную призму с основаниями в виде равнобедренных треугольников, координаты которых изменялись в пределах $0 \leq \xi, \eta \leq 1$, а координата по высоте призмы изменялась в пределах $-1 \leq \zeta \leq 1$. Аппроксимация координат x, y, z , приращений перемещений $\Delta u, \Delta v, \Delta w$, а также приращений напряжений $\Delta\sigma_{xx}, \Delta\sigma_{yy}, \Delta\sigma_{zz}, \Delta\sigma_{xy}, \Delta\sigma_{xz}, \Delta\sigma_{yz}$ через узловые значения соответствующих величин осуществлялась линейными функциями

$$\lambda = \left\{ (1-\xi-\eta) \frac{1-\zeta}{2} : \xi \frac{1-\zeta}{2} : \eta \frac{1-\zeta}{2} : (1-\xi-\eta) \frac{1+\zeta}{2} : \xi \frac{1+\zeta}{2} : \eta \frac{1+\zeta}{2} \right\} \{\lambda_y\} = \\ = \{f(\xi, \eta, \zeta)\}_{1 \times 6}^T \{\lambda_y\}_{6 \times 1}, \tag{16}$$

где $\{\lambda_y\}_{1 \times 6}^T = \{\lambda^i \lambda^j \lambda^k \lambda^m \lambda^n \lambda^p\}$ — матрица узловых значений аппроксимируемой величины.

С учетом аппроксимирующих функций (16) матричные выражения (2) можно записать в виде

$$\{\Delta\omega\}_{3 \times 1} = [A]_{3 \times 18} \{\Delta v_y\}_{18 \times 1}, \quad \{\Delta\varepsilon\}_{6 \times 1} = [L]_{6 \times 33 \times 18} [A]_{3 \times 18} \{\Delta v_y\}_{18 \times 1} = [B]_{6 \times 18} \{\Delta v_y\}_{18 \times 1}, \tag{17}$$

где $\{\Delta v_y\}_{1 \times 18}^T = \{\Delta u^i \Delta u^j \Delta u^k \Delta u^m \Delta u^n \Delta u^p \Delta v^i \Delta v^j \Delta v^k \Delta v^m \Delta v^n \Delta v^p \Delta w^i \Delta w^j \Delta w^k \Delta w^m \Delta w^n \Delta w^p\}$.



Для приращений напряжений внутренней точки конечного элемента на основе (16) можно составить матричное соотношение

$$\{\Delta\sigma\} = [S] \{\Delta\sigma_y\}, \quad (18)$$

$\begin{matrix} 6 \times 1 & & 6 \times 36 & 36 \times 1 \end{matrix}$

где $\{\Delta\sigma_y\}^T = \{\Delta\sigma_{xx}^i \Delta\sigma_{xx}^j \Delta\sigma_{xx}^k \Delta\sigma_{xx}^m \Delta\sigma_{xx}^n \Delta\sigma_{xx}^p \dots \Delta\sigma_{yz}^i \Delta\sigma_{yz}^j \Delta\sigma_{yz}^k \Delta\sigma_{yz}^m \Delta\sigma_{yz}^n \Delta\sigma_{yz}^p\}$.

Для формирования матрицы напряженно-деформированного состояния конечного элемента использовался на шаге нагружения смешанный функционал [10]

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_V \{\Delta\sigma\}^T [L] \{\Delta w\} dV - \frac{1}{2} \int_V \{\Delta\sigma\}^T [C_l] \{\Delta\sigma\} dV - \\ & - \frac{1}{2} \int_S \{\Delta w\}^T \{\Delta q\} dS - \int_S \{\Delta w\}^T \{q\} dS - \int_V \{\sigma\}^T \{\Delta\varepsilon\} dV \quad (l = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (19)$$

$\begin{matrix} 1 \times 6 & 6 \times 3 & 3 \times 1 & 1 \times 6 & 6 \times 6 & 6 \times 1 & 1 \times 3 & 3 \times 1 & 1 \times 6 & 6 \times 1 \end{matrix}$

где $\{\Delta q\}$ — нагрузка на шаге нагружения, $\{q\}$ — нагрузка, приложенная до рассматриваемого шага нагружения, S — площадь приложения нагрузки, V — объем элемента.

С учетом аппроксимирующих выражений (17) и (18) функционал (19) запишется выражением

$$\begin{aligned} \Pi = & \{\Delta\sigma\}^T \int_V [S]^T [B] dV \{\Delta v_y\} - \frac{1}{2} \{\Delta\sigma_y\}^T \int_V [S]^T [C_l] [S] dV \{\Delta\sigma_y\} - \\ & - \frac{1}{2} \{\Delta v_y\}^T \int_S [A]^T \{\Delta q\} dS - \{\Delta v_y\}^T \int_S [A]^T \{q\} dS - \{\Delta v_y\}^T \int_V [B]^T \{\sigma\} dV. \end{aligned} \quad (20)$$

$\begin{matrix} 1 \times 36 & 36 \times 6 & 6 \times 18 & 18 \times 1 & 1 \times 36 & 36 \times 6 & 6 \times 6 & 6 \times 36 & 36 \times 1 & 1 \times 18 & 18 \times 3 & 3 \times 1 & 1 \times 18 & 18 \times 3 & 3 \times 1 & 1 \times 18 & 18 \times 6 & 6 \times 1 \end{matrix}$

Варьирование функционала (20) по узловым неизвестным $\{\Delta\sigma_y\}^T$ и $\{\Delta v_y\}^T$ приводит к системам уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \{\Delta\sigma_y\}^T} &= [Q] \{\Delta v_y\} - [H] \{\Delta\sigma_y\} = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \{\Delta v_y\}^T} &= [Q]^T \{\Delta\sigma_y\} - \{\Delta f_q\} - \{R\} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$\begin{matrix} 36 \times 18 & 18 \times 1 & 36 \times 36 & 36 \times 1 & 18 \times 36 & 36 \times 1 & 18 \times 1 & 18 \times 1 \end{matrix}$

где $[Q] = \int_V [S]^T [B] dV$, $[H] = \int_V [S]^T [C_l] [S] dV$, $\{\Delta f_q\} = \int_S [A]^T \{\Delta q\} dS$, $\{R\} = \int_S [A]^T \{q\} dS - \int_V [B]^T \{\sigma\} dV$ — невязка Рафсона.

Систему (21) можно записать в традиционной конечно-элементной форме

$$[K] \{Z_y\} = \{F_y\}, \quad (22)$$

$\begin{matrix} 54 \times 54 & 54 \times 1 & 54 \times 1 \end{matrix}$

где $[K] = \begin{bmatrix} -[H] & [Q] \\ [Q]^T & [0] \end{bmatrix}$ — матрица напряженно-деформированного состояния ко-

нечного элемента на шаге нагружения, $\{Z_y\}^T = \left\{ \{\Delta\sigma_y\}^T \{\Delta v_y\}^T \right\}$ — вектор узловых

неизвестных, $\{F_y\} = \left\{ \{0\}^T \{\Delta f_q\}^T + \{R\}^T \right\}$ — вектор узловых нагрузок.

2. Результаты

Пример

Рассматривалось напряженно-деформированное состояние консольной балки длиной l с квадратным поперечным сечением высотой h при загрузении сосредоточенной силой P на конце консоли. Были приняты следующие исходные данные: $l = 0.1$ м, $h = 0.01$ м, $P = 300$ Н, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

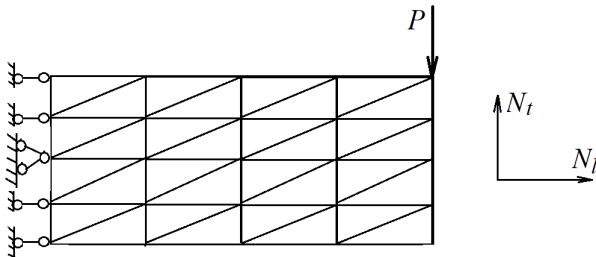


Рис. 1. Сетка дискретизации консольной балки на конечные элементы: N_l — число узлов вдоль оси балки, N_t — число узлов по высоте балки

Fig. 1. Discretization mesh of a cantilever beam into finite elements: N_l — number of nodes along the beam axis, N_t — number of nodes along the height of the beam

При расчете консольной балки на основе МКЭ принималась схема дискретизации балки на конечные элементы по рис. 1.

Численные значения нормальных напряжений в верхних σ_{xx}^B и нижних волокнах σ_{xx}^H заделки и сечения, отстоящего на расстоянии h от заделки, приведены в табл. 1 при различных сетках дискретизации консольной балки. Там же дано перемещение w точки приложения сосредоточенной силы. В строке 10 табл. 1 приведены значения параметров, полученных по формулам сопротивления материалов.

Таблица 1 / Table 1

Численные значения нормальных напряжений
Numerical values of normal stresses

№	N_l	N_t	Заделка		Сечение на расстоянии h от заделки		w , см
			σ_{xx}^H , МПа	σ_{xx}^B , МПа	σ_{xx}^H , МПа	σ_{xx}^B , МПа	
1	6	3	-84.59	11.49	-95.72	103.69	-0.0020
2	11	3	-146.28	185.89	-153.51	145.19	-0.0181
3	21	3	-166.57	198.76	-160.24	177.33	-0.0603
4	21	5	-173.21	188.98	-168.84	170.45	-0.0604
5	21	7	-176.51	186.89	-162.37	165.30	-0.0605
6	21	9	-176.15	183.16	-161.76	167.78	-0.0604
7	31	9	-178.22	185.79	-161.43	160.97	-0.0605
8	41	9	-178.62	186.98	-162.83	162.72	-0.0605
9	41	11	-180.43	185.99	-161.80	161.80	-0.0605
10	—	—	-180.0	180.0	-162.0	162.0	-0.06

На основании анализа табличных результатов можно сделать вывод, что при использовании разработанного конечного элемента в смешанной формулировке в вычислительном процессе наблюдаются сходимость в результатах и адекватное соответствие с результатами, полученными по формулам сопротивления материалов.

При расчете с учетом пластических деформаций диаграмма растяжения материала балки принималась по рис. 2, а со следующими исходными данными: предел текучести $\sigma_T = 200$ МПа, деформация, соответствующая пределу текучести, $\varepsilon_T = 0.001$, $\varepsilon_k = 0.01$, $\sigma_k = 300$ МПа.



Диаграмма деформирования (рис. 2, б) строилась на основе формул [1]

$$\sigma_i = \sigma, \quad \varepsilon_i = \frac{2}{3}(1 + \nu)\varepsilon.$$

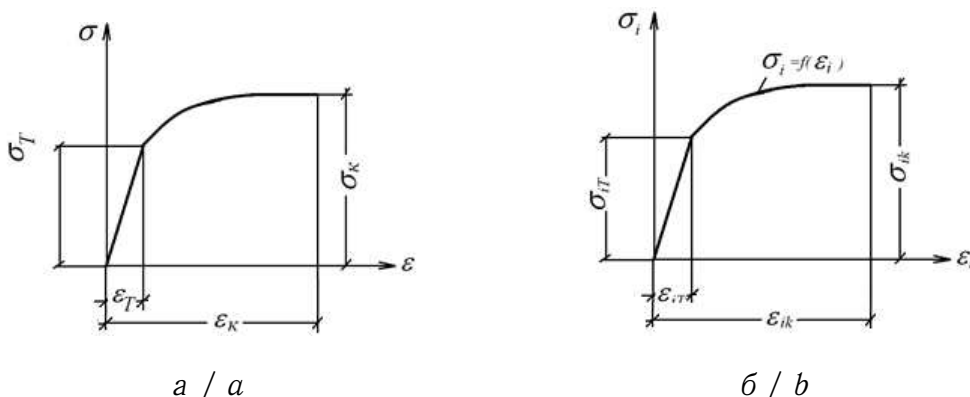


Рис. 2. Диаграммы растяжения (а) и деформирования (б) материала
 Fig. 2. Diagrams of stretching (a) and deformation (b) of the material

Численные значения параметров диаграммы деформирования материала получились следующими: $\sigma_{iT} = \sigma_T$, $\varepsilon_{iT} = 0.866667 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_{ik} = 0.866667 \cdot 10^{-2}$, $\sigma_{ik} = \sigma_k = 300$ МПа.

Функция кривой диаграммы деформирования $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ принята в виде параболы $\sigma_i = a\varepsilon_i^2 + b\varepsilon_i + c$ (при $\varepsilon_i > \varepsilon_{iT}$).

Коэффициенты параболы определялись из условий:

при $\varepsilon_i = \varepsilon_{iT}$ величина $\sigma_i = \sigma_{iT}$;

при $\varepsilon_i = \varepsilon_{ik}$ величина $\sigma_i = \sigma_{ik}$;

при $\varepsilon_i = \varepsilon_{iT}$ величина $\frac{\partial \sigma_i}{\partial \varepsilon_i} = 0.1E_n = 0.1 \frac{\partial \sigma_i T}{\partial \varepsilon_i T} = 2.3 \cdot 10^4$ МПа.

Значения коэффициентов получились следующие: $a = -13301746.149$ МПа, $b = 25825.591$ МПа, $c = 1790.009$ МПа.

Расчет выполнялся при сетке дискретизации $N_l = 41$ и $N_t = 11$. Напряжения по высоте поперечного сечения балки, отстоящего на расстоянии h от заделки, приведены в табл. 2. Результаты первой строки получены при использовании уравнений теории течения, результаты второй и третьей строк — по формулам (12) и (15) соответственно.

Таблица 2 / Table 2

Значения нормальных напряжений по вариантам физических уравнений
 Values of normal stresses according to variants of physical equations

N	Значения, полученные по варианту N, МПа									
1	-239.47	-233.37	-218.95	-208.23	-134.41	1.34	127.97	212.53	218.0	232.87
2	-238.57	-231.28	-218.76	-209.45	-143.99	8.88	132.63	211.96	217.16	232.67
3	-239.32	-232.62	-219.64	-208.81	-133.62	6.41	124.60	210.18	218.57	233.36

Значения табл. 2 получены при действии силы $P = 600$ Н, достигаемой за 20 шагов нагружения. Сходимость вычислительного процесса проверялась при числах шагов нагружения 20 и 40.

Как видно из данных табл. 2, результаты, полученные с использованием различных вариантов физических уравнений, оказались в адекватном соответствии.



По значениям, полученным по первому варианту физических уравнений (см. табл. 2), на рис. 3 представлена эпюра нормальных напряжений в сечении $x = h$ консольной балки.

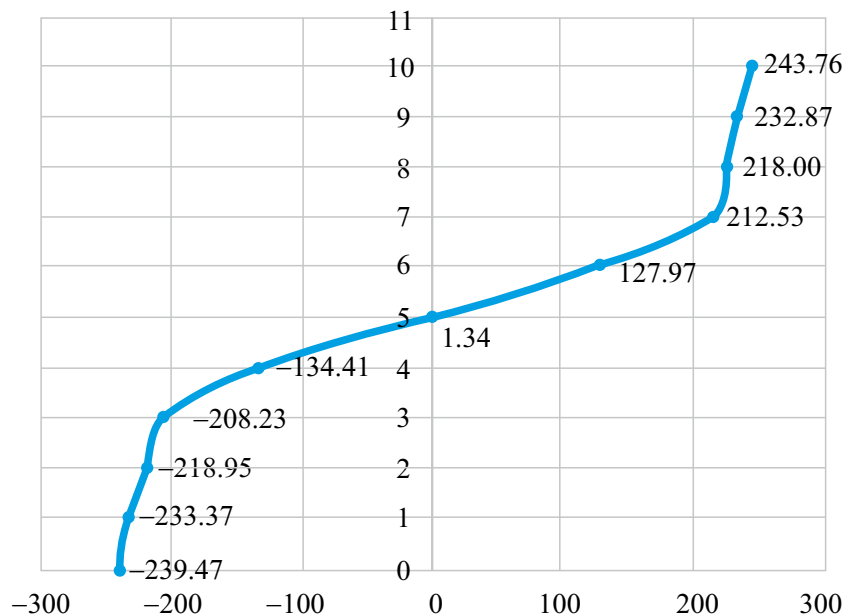


Рис. 3. Эпюра нормальных напряжений в сечении консольной балки с абсциссой $x = h$ при $P = 600$ Н

Fig. 3. Diagram of normal stresses in the section of a cantilever beam with abscissa $x = h$ at $P = 600$ N

Для эпюры нормальных напряжений (см. рис. 3) уравнения равновесия имеют вид

$$\sum x = -9153.4 + 9139.2 = -14.2 \text{ Н},$$

$$\sum M_c \equiv M_p - 2707.5 - 2700.2 = 5400 - 5407.7 = -7.7 \text{ Н}\cdot\text{см},$$

где $M_p = 600 \cdot 9 = 5400$ Н·см — момент в рассматриваемом сечении от заданной силы $P = 600$ Н.

Как видно, уравнения равновесия выполняются с достаточной точностью: по усилиям различие $\delta_1 = 0.15\%$, по моментам — $\delta_2 = 0.14\%$.

Заключение

Все три варианта физических уравнений на шаге нагружения предназначены для использования при расчетах конструктивных элементов в декартовой системе координат и приводят на приведенном примере к практически одинаковым результатам.

В первом варианте (теория пластического течения) и во втором варианте (физические уравнения) используется гипотеза о разделении приращений деформаций на упругую и пластическую части, причем первые инварианты приращений пластических деформаций принимаются равными нулю. Третий вариант физических уравнений оказывается наиболее предпочтительным для расчета конструктивных элементов (гидротехнических сооружений, фундаментов промышленных зданий, композиционных конструкций с различными физико-механическими свойствами материалов и др.) за



пределом упругости в декартовой системе координат, так как в нем не используется операция разделения приращений деформаций на упругую и пластическую части, что позволяет использовать в физических уравнениях третьего варианта зависимость между первыми инвариантами тензора приращений деформаций и тензора приращений напряжений $\varepsilon_c = \varphi(\sigma_c)$, полученную экспериментально, или на основе адекватной гипотезы.

Список литературы

1. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. Москва : Машиностроение, 1975. 400 с. EDN: [VLPSRF](#)
2. *Голованов А. И., Султанов Л. У.* Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. Казань : Казанский гос. ун-т, 2009. 464 с. EDN: [QJWGNN](#)
3. *Петров В. В.* Нелинейная инкрементальная строительная механика. Москва : Инфра-Инженерия, 2014. 480 с. EDN: [SFTTJV](#)
4. *Бате К. Ю.* Метод конечных элементов / пер. с англ. В. П. Шидловского ; под ред. Л. И. Турчака. Москва : Физматлит, 2010. 1022 с.
5. *Левин В. А.* Нелинейная вычислительная механика прочности : в 5 т. Т. 1. Модели и методы. Образование и развитие дефектов. Москва : Физматлит, 2015. 456 с.
6. *Голованов А. И., Тюленева О. Н., Шигабутдинов А. Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. Москва : Физматлит, 2006. 392 с. EDN: [QJPXPV](#)
7. *Гуреева Н. А., Арьков Д. П.* Реализация деформационной теории пластичности в расчетах плосконапряженных пластин на основе МКЭ в смешанной формулировке // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2011. № 2. С. 12–15. EDN: [NUPEON](#)
8. *Самуль В. И.* Основы теории упругости и пластичности : учебное пособие. Москва : Высшая школа, 1982. 264 с.
9. *Демидов С. П.* Теория упругости. Москва : Высшая школа, 1979. 432 с.
10. *Гуреева Н. А., Клочков Ю. В., Николаев А. П., Юшкин В. Н.* Напряженно-деформированное состояние оболочки вращения при использовании различных формулировок трехмерных конечных элементов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16, № 5. С. 361–379. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-361-379>, EDN: [RRVXBB](#)

References

1. Malinin N. N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [Applied Theory of Plasticity and Creep]. Moscow, Mashinostroenie, 1975. 400 p. (in Russian). EDN: [VLPSRF](#)
2. Golovanov A. I., Sultanov L. U. *Matematicheskie modeli vychislitel'noi nelineinoi mekhaniki deformiruemyykh sred* [Mathematical Models of Computational Nonlinear Mechanics of Deformable Media]. Kazan, Kazan State University Publ., 2009. 464 p. (in Russian). EDN: [QJWGNN](#)
3. Petrov V. V. *Nelineinaya inkremental'naya stroitel'naya mekhanika* [Nonlinear Incremental Building Mechanics]. Moscow, Infra-Inzheneriya, 2014. 480 p. (in Russian). EDN: [SFTTJV](#)
4. Bathe K. J. *Finite Element Procedures*. New Jersey, Prentice Hall, 1996. 1038 p. (Russ. ed.: Moscow, Fizmatlit, 2010. 1022 p.).
5. Levin V. A. *Nelineinaya vychislitel'naya mekhanika prochnosti. T. 1. Modeli i metody. Obrazovanie i razvitie defektov* [Nonlinear Computational Mechanics of Strength. Vol. 1. Models and Methods. Formation and Development of Defects]. Moscow, Fizmatlit, 2015. 456 p. (in Russian).
6. Golovanov A. I., Tiuleneva O. N., Shigabutdinov A. F. *Metod konechnyykh elementov v*



- statike i dinamike tonkostennykh konstruktsiy* [Finite Element Method in Statics and Dynamics of Thin-Walled Structures]. Moscow, Fizmatlit, 2006. 392 p. (in Russian). EDN: [QJXPV](#)
7. Gureeva N. A., Arkov D. P. Flat problem of theory of jump in base method of final elements in mixed understanding in account physical nonlinearity. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Sciences*, 2011, iss. 2, pp. 12–15 (in Russian). EDN: [NUPEON](#)
 8. Samul' V. I. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* [Fundamentals of the Theory of Elasticity and Plasticity]. Moscow, Vysshaya shkola, 1982. 264 p. (in Russian).
 9. Demidov S. P. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Vysshaya shkola, 1979. 432 p. (in Russian).
 10. Gureeva N. A., Klochkov Yu. V., Nikolaev A. P., Yushkin V. N. Stress-strain state of shell of revolution analysis by using various formulations of three-dimensional finite elements. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2020, vol. 16, iss. 5, pp. 361–379. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-361-379>, EDN: [RRVXBB](#)

Поступила в редакцию / Received 09.02.2022

Принята к публикации / Accepted 16.06.2022

Опубликована / Published 01.03.2023