Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 95–112
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 95–112
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-95-112, EDN: MGPFPX

Научная статья
УДК 629.78

Новый алгоритм квазиоптимальной переориентации космического аппарата

Я. Г. Сапунков, А. В. Молоденков✉

Институт проблем точной механики и управления РАН (ИПТМУ РАН), Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24

Сапунков Яков Григорьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением, iptmuran@san.ru, https://orcid.org/0000-0001-7149-5117, AuthorID: 7447

Молоденков Алексей Владимирович, доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением, molalexei@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-4991-4220, AuthorID: 7448

Аннотация. Рассматривается классическая задача оптимального управления пространственной переориентацией космического аппарата как твердого тела произвольной динамической конфигурации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости космического аппарата без ограничения на вектор-функцию управления и с фиксированным временем переходного процесса. Как критерий оптимальности используется функционал энергии, затраченной на поворот космического аппарата. В рамках концепции Пуансо, описывающей произвольное угловое движение твердого тела в терминах обобщенного конического движения, проведена модификация задачи оптимального управления угловым движением космического аппарата, и его траектория задана в этом классе движений. При этом общность исходной задачи практически не нарушается, так как известные точные решения классической задачи оптимального углового движения динамически-симметричного космического аппарата в случаях плоского поворота или регулярной прецессии и аналогичные решения модифицированной задачи полностью совпадают; в других случаях в числовых расчетах классической и модифицированной задач расхождение между значениями функционала оптимизации составляет не более нескольких процентов, включая повороты космического аппарата на большие углы. Поэтому предлагаемое решение модифицированной задачи может использоваться как квазиоптимальное по отношению к классической задаче. Приведены явные выражения для кватерниона ориентации и вектора угловой скорости космического аппарата, на основе решения обратной задачи динамики твердого тела получена формула для вектора управляющего момента космического аппарата. Дается квазиоптимальный алгоритм оптимального поворота космического аппарата. Приведены числовые примеры, показывающие близость решений классической и модифицированной задач оптимальной переориентации космического аппарата.

Ключевые слова: оптимальное управление, космический аппарат, произвольное твердое тело, квазиоптимальное аналитическое решение, алгоритм

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-21-00218) и в рамках темы FFNM-2022-0007.

Для цитирования: *Сапунков Я. Г., Молоденков А. В.* Новый алгоритм квазиоптимальной переориентации космического аппарата // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 95–112. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-95-112, EDN: MGPFPX

Article

The new algorithm of quasi-optimal reorientation of a spacecraft

Ya. G. Sapunkov, A. V. Molodenkov✉

Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences (IPTMU RAS), 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia

Yakov G. Sapunkov, iptmuran@san.ru, https://orcid.org/0000-0001-7149-5117, AuthorID: 7447
Alexei V. Molodenkov, molalexei@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-4991-4220, AuthorID: 7448

Abstract. The classical problem of optimal control of the attitude maneuver of a spacecraft as a rigid body of arbitrary dynamic configuration under arbitrary boundary conditions for the angular position and angular velocity of a spacecraft without restriction on the control vector function and with a fixed transition time is considered. As a criterion of optimality, the functional of the energy spent on the rotation of a spacecraft is used. Within the bounds of the Poinsot concept describing arbitrary angular motion of a rigid body in terms of generalized conical motion, a modification of the problem of optimal control of the angular motion of a spacecraft is carried out and its trajectory is given in this class of motions. At the same time, the generality of the original problem is practically not violated, since the known exact solutions to the classical problem of optimal angular motion of a dynamically symmetric spacecraft in cases of plane rotation or regular precession and similar solutions of the modified problem completely coincide; in other cases, in numerical calculations of the classical and modified problems, the discrepancy between the values of the optimization functional is no more than a few percent, including spacecraft rotations at large angles. Therefore, the proposed solution of the modified problem can be used as quasi-optimal with respect to the classical problem. Explicit expressions for the quaternion of the orientation and the vector of angular velocity of a spacecraft are given, a formula for the vector of the control moment of a spacecraft is obtained based on the solution of the inverse problem of the dynamics of a rigid body. The quasi-optimal algorithm for optimal rotation of a spacecraft is given. Numerical examples showing the proximity of solutions to the classical and modified problems of optimal reorientation of a spacecraft are given.
Keywords: optimal control, spacecraft, arbitrary rigid body, quasi-optimal analytical solution, algorithm
Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-21-00218) and within the theme FFNM-2022-0007.
For citation: Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V. The new algorithm of quasi-optimal reorientation of a spacecraft. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 95–112 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-95-112, EDN: MGPFPX

Введение

Задачам управления угловым движением космического аппарата (КА) в различных постановках посвящено большое количество публикаций (например, обзорная статья [1], книги [2–4] и обширные ссылки на литературу в них). Однако сложность стоящих здесь проблем, отсутствие общих аналитических решений продолжают оставлять эту проблематику актуальной. Аналитическое решение задачи программного углового движения для наиболее часто используемых функционалов оптимизации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА не найдено даже в случае сферической симметрии КА, не говоря уже о его произвольной динамической конфигурации. Известны лишь некоторые частные случаи решения задачи; в общем случае приходится рассчитывать только на приближенные численные методы. Между тем аналитическое решение задачи оптимального поворота в замкнутой форме имеет не только теоретический, но и большой практический интерес, так как позволяет использовать на борту КА готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории.

В статье рассматривается классическая задача оптимального в смысле минимума энергозатрат и фиксированного времени поворота КА произвольной динамической конфигурации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА без ограничения на функцию управления. С применением кватернионов на основании принципа максимума Л. С. Понтрягина получены выражения для структуры оптимального управления, функции Гамильтона – Понтрягина и сопряженной системы уравнений, т.е. сформулирована краевая задача оптимизации. Кратко описано численное решение краевой задачи оптимального управления [5] на основе алгоритма Левенберга – Марквардта, представляющего собой комбинацию модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска. Из большого количества проведенных численных расчетов решения задачи об оптимальном развороте КА для различных граничных условий и различных распределений масс в КА, что характеризуется значениями главных моментов инерции, можно сделать следующие выводы: кинематические характеристики разворота КА (кватернион ориентации и вектор угловой скорости) слабо зависят от распределения масс в КА и в основном определяются граничными условиями задачи; управляющий момент существенно зависит от распределения масс в КА и граничных условий задачи. Слабая зависимость кинематических характеристик оптимального движения КА от его динамической конфигурации обеспечивает близость решений классической задачи оптимальной переориентации и так называемой модифицированной задачи оптимального разворота при произвольной динамической конфигурации КА.

В статье представлено аналитическое решение модифицированной задачи оптимального по энергии поворота КА при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА, доведенное до алгоритма. В классе обобщенных конических движений произведена модификация классической задачи оптимального поворота, которая позволила получить аналитические решения для уравнений движения, содержащие произвольные постоянные и две произвольные скалярные функции (параметры обобщенного конического движения). Относительно этих функций и их производных формулируется и решается оптимизационная задача с квадратичным функционалом, в которой в качестве управлений выступают вторые производные от этих двух функций. Найденное аналитическое решение модифицированной задачи может рассматриваться как приближенное (квазиоптимальное) решение классической задачи оптимального разворота КА при произвольных граничных условиях. Получены явные выражения для вектора угловой скорости, управляющего момента и траектории движения КА. Вектор управляющего момента получается из вектора угловой скорости на основе решения обратной задачи динамики твердого тела.

Следует отметить, что предлагаемый в статье подход к решению задачи хорошо соответствует концепции Пуансо из теоретической механики, когда за всяким произвольным движением твердого тела вокруг неподвижной точки стоит обобщенное коническое движение. Поэтому траектория движения КА определялась в классе обобщенных конических движений. При этом для случаев аналитической разрешимости классической задачи оптимального поворота при сферической симметрии КА, когда наложены ограничения на краевые условия задачи — плоский эйлеров поворот, коническое движение, — аналитические решения классической и модифицированной задач полностью совпадают. В остальных случаях в численных примерах при решении классической и модифицированной задачи расхождение между величинами функционала качества, который является определяющей характеристикой задачи, составляет от долей процента до нескольких процентов, включая большие повороты КА на 180°.

Предлагаемый в статье метод решения задачи ранее был успешно применен к задаче оптимальной по быстродействию переориентации КА произвольной динамической конфигурации с ограниченным управлением [6] и задаче оптимального в смысле комбинированного функционала поворота осесимметричного КА с нефиксированным временем переходного процесса [7].

Отметим, что в литературе известны некоторые квазиоптимальные решения задачи поворота КА с использованием обратной задачи динамики твердого тела, например [8, 9]. В [8] решение получено с помощью принципа оптимальности Р. Беллмана на основе задачи оптимальной переориентации КА в кинематической постановке, где функцией управления выступает вектор угловой скорости КА. Направление вектора угловой скорости КА при этом определяется граничными условиями по угловому положению КА. В [9] решение задачи получено посредством представления кватерниона ориентации КА полиномами и выражения вектора угловой скорости через этот кватернион. Однако никаких гарантий (доказанных теорем или соображений из теоретической механики), что на всей совокупности угловых движений КА при любых граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА эти решения будут достаточно хорошо аппроксимировать оптимальную траекторию углового движения КА, не приводится.

1. Постановка задачи

Движение КА как твердого тела произвольной динамической конфигурации вокруг центра масс описывается уравнениями [2]:

$$2\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega}(t), \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{M} - \mathbf{I}^{-1}[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}], \tag{2}$$

где $\mathbf{\Lambda} = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)i_1 + \lambda_2(t)i_2 + \lambda_3(t)i_3$ — кватернион, описывающий положение КА в инерциальном пространстве; $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \omega_2(t)\mathbf{i}_2 + \omega_3(t)\mathbf{i}_3$ — вектор угловой скорости; i_1, i_2, i_3 — орты гиперкомплексного пространства (мнимые единицы Гамильтона), которые можно идентифицировать с ортами трехмерного векторного пространства

$\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$; символ $\circ$ означает кватернионное умножение; $[\cdot,\cdot]$ — векторное произведение; $\mathbf{M}(t) = [M_1(t), M_2(t), M_3(t)]^{\mathrm{T}}$ — вектор внешнего момента, действующего на КА, матрица

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

— тензор инерции. Фазовые координаты $\mathbf{\Lambda}$, $\boldsymbol{\omega}$ и управление $\mathbf{M}$ удовлетворяют требованиям задачи оптимального управления [10] ($\mathbf{\Lambda}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$ непрерывные функции и $\mathbf{M}$ кусочно-непрерывная функция); кватернион $\mathbf{\Lambda}(t)$ нормирован, т. е. $\|\mathbf{\Lambda}\| = \lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+$ $+\lambda_0^3 = 1$. В динамических уравнениях Эйлера (2) I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции твердого тела.

Заданы произвольные граничные условия по угловому положению

$$\mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{\Lambda}_0, \quad \mathbf{\Lambda}(T) = \mathbf{\Lambda}_T \tag{3}$$

и угловой скорости КА

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T. \tag{4}$$

Требуется определить оптимальное управление $\mathbf{M}^{\mathrm{opt}}(t)$ системой (1), (2) при граничных условиях (3) и (4), доставляющее минимум функционалу

$$J = \int\limits_0^T \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\,dt, \tag{5}$$

где время T произвольно и зафиксировано.

2. Переход к безразмерным переменным

Перейдем от размерных переменных в задаче к безразмерным по формулам

$$I_* = \left(\left(I_1^2+I_2^2+I_3^2\right)/3\right)^{1/2}, \quad I_k^{\mathrm{dimless}} = I_k/I_*, \quad k=1,2,3;$$
$$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{dimless}} = T\boldsymbol{\omega}, \quad t^{\mathrm{dimless}} = T^{-1}t, \quad \mathbf{M}^{\mathrm{dimless}} = I_*^{-1}T^2\mathbf{M}, \quad J^{\mathrm{dimless}} = I_*^{-2}T^3 J,$$

при этом вид формул (1)–(4) не изменится, а функционал (5) запишется так:

$$J = \int\limits_0^1 \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\,dt. \tag{6}$$

Далее будем иметь в виду постановку задачи (1)–(4) (где $T=1$), (6) в безразмерных переменных, и верхний индекс у них будет опущен.

3. Применение принципа максимума

Выполним процедуру принципа максимума Л. С. Понтрягина [2, 10]. Введем вспомогательные функции $\mathbf{\Psi}(t)$ (кватернион) и $\boldsymbol{\varphi}(t)$ (вектор), сопряженные к фазовым переменным $\mathbf{\Lambda}$, $\boldsymbol{\omega}$. Составим функцию Гамильтона – Понтрягина

$$H = -\psi^*\left(\mathbf{M},\mathbf{M}\right) + \left(\mathbf{\Psi}, \mathbf{\Lambda}\circ\boldsymbol{\omega}\right)/2 + \left(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{I}^{-1}\mathbf{M} - \mathbf{I}^{-1}[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}]\right), \tag{7}$$

где постоянная $\psi^* \geqslant 0$, а $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение векторов. Будем рассматривать невырожденные решения краевой задачи принципа максимума, для которых $\psi^* > 0$. В силу однородности функции Гамильтона – Понтрягина H в формуле (7) положим $\psi^* = 1$.

Сопряженная система:

$$\begin{cases} 2\dot{\mathbf{\Psi}} = \mathbf{\Psi} \circ \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} = -\mathrm{vect}\left(\tilde{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{\Psi}\right)/2 - [\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}] + \mathbf{I}\,[\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}], \end{cases} \tag{8}$$

где «vect» обозначает векторную часть кватерниона, а «˜» — сопряжение кватерниона. Как видно, уравнения для переменных $\mathbf{\Psi}$ и $\mathbf{\Lambda}$ совпадают, а их решения различаются на кватернионную мультипликативную константу $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{C} \circ \mathbf{\Lambda}. \tag{9}$$

Используя это и введя обозначение [2]

$$\mathbf{p} = \mathrm{vect}\left(\tilde{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{\Psi}\right) = \tilde{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{c}_v \circ \mathbf{\Lambda}, \tag{10}$$

где $\mathbf{c}_v = \mathrm{vect}\,\mathbf{C}$, сопряженную систему (8) запишем так:

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{c}_v \circ \mathbf{\Lambda}, \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} = -\mathbf{p}/2 - [\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}] + \mathbf{I}\,[\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}]. \end{cases}$$

Следует отметить, что применение этого приема [2], основанного на самосопряженности дифференциальной кватернионной системы уравнений (1) (замена кватернионной сопряженной переменной $\mathbf{\Psi}$ на векторную переменную $\mathbf{p}$ (10)), позволяет понизить размерность краевой задачи, получаемой после применения принципа максимума, на четыре единицы.

Условие максимума функции Гамильтона – Понтрягина (7) дает следующую структуру оптимального управления:

$$\mathbf{M}^{\mathrm{opt}} = \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi}/2. \tag{11}$$

Как видно, вектор-функция управления в задаче носит непрерывный характер.

Функция Гамильтона – Понтрягина (7) с учетом новой переменной $\mathbf{p}$ (10) примет вид

$$H = -(\mathbf{M},\, \mathbf{M}) + (\mathbf{p},\, \boldsymbol{\omega})/2 + \left(\boldsymbol{\varphi},\, \mathbf{I}^{-1}\mathbf{M} - \mathbf{I}^{-1}[\boldsymbol{\omega},\, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}]\right). \tag{12}$$

4. Наводящие соображения

В данном разделе приводятся примеры численного решения задачи оптимального поворота для различных вариантов динамической конфигурации КА (твердого тела) и соображения, основанные на этих примерах.

Численное решение задачи оптимального поворота КА (1)–(4), (6) сводится к решению краевой задачи для следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} 2\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{M} - \mathbf{I}^{-1}[\boldsymbol{\omega},\, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}], \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} = -\mathbf{p}/2 - [\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}] + \mathbf{I}\,[\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}], \\ \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{c}_v \circ \mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{c}_v = \mathrm{const}, \end{cases} \tag{13}$$

$$\mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{\Lambda}_0, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0, \tag{14}$$

$$\mathbf{\Lambda}(T) = \mathbf{\Lambda}_T, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T, \tag{15}$$

$$\mathbf{M}^{\mathrm{opt}} = \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\varphi}/2, \tag{16}$$

откуда подлежат нахождению величины $\mathbf{M}^{\mathrm{opt}}$, $\mathbf{\Lambda}^{\mathrm{opt}}$, $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{opt}}$, $\mathbf{c}_v$.

Конечное условие (15) необходимо переписать в семимерном фазовом пространстве $\mathbf{\Lambda} \times \boldsymbol{\omega}$ в виде

$$\mathrm{vect}\,(\mathbf{\Lambda}(T) \circ \tilde{\mathbf{\Lambda}}_T) = 0, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T. \tag{17}$$

Для решения краевой задачи (13), (14), (16), (17) применялся итерационный численный метод, представляющий собой комбинацию методов Рунге – Кутты, Ньютона и градиентного спуска [5]. Важно отметить, что условие совпадения кватерниона ориентации твердого тела в конечный момент времени с кватернионом, определяющим заданную конечную ориентацию твердого тела (условие (15)), заменено условием обращения в нуль векторной части кватернионного произведения $\mathbf{\Lambda}(T) \circ \tilde{\mathbf{\Lambda}}_T$ (17). В [11] автор пытался выполнить условие $\mathbf{\Lambda}(T) = \mathbf{\Lambda}_T$, что приводило к вырождению матриц частных производных от невязок. В качестве первого приближения по недостающим начальным условиям при решении краевой задачи (13), (14), (16), (17) оптимального управления с произвольными граничными условиями по угловому положению и угловой скорости твердого тела берутся начальные условия по переменным $\boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{p}$, полученные при решении задачи оптимального разворота сферически симметричного КА (твердого тела) в классе плоских эйлеровых поворотов.

Для твердых тел с различным распределением масс сравним кинематические характеристики оптимального движения в задачах оптимального разворота с одними и теми же граничными условиями. Например,

$$\mathbf{\Lambda}_0 = (0.7951, 0.2981, -0.3975, 0.3478), \quad \boldsymbol{\omega}_0 = (0.2739, -0.2388, -0.3), \tag{18}$$

$$\mathbf{\Lambda}_T = (0.8443, 0.3984, -0.3260, 0.1485), \quad \boldsymbol{\omega}_T = (0.0, 0.0, -0.59). \tag{19}$$

Тело 1. Сферически симметричное твердое тело $I_1 = I_2 = I_3 = 1.0$.

Тело 2. Произвольное твердое тело $I_1 = 0.9869$, $I_2 = 1.1843$, $I_3 = 0.7895$.

Тело 3. Произвольное твердое тело $I_1 = 0.9506$, $I_2 = 1.3308$, $I_3 = 0.5704$.

Тело 4. МКС (ранняя версия [12]) как произвольное твердое тело $I_1 = 4853000\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$, $I_2 = 23601000\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$, $I_3 = 26278000\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$ (размерные моменты инерции) или $I_1 = 0.2358$, $I_2 = 1.1466$, $I_3 = 1.2766$ (безразмерные величины).

Тело 5. «Спейс Шаттл» (динамические характеристики КА «Спейс Шаттл» такие же, как у почти осесимметричного твердого тела):

$I_1 = 3400648\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$, $I_2 = 21041672\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$ или $I_1 = 0.1967$, $I_2 = 1.2168$, $I_3 \approx I_2$.

Тело 6. Произвольное твердое тело $I_1 = 0.9116$, $I_2 = 1.3674$, $I_3 = 0.5470$.

В табл. 1 приведены кинематические характеристики (компоненты кватерниона положения твердого тела и вектора угловой скорости) для пяти из вышеуказанных тел при $t = 0.5$ (в середине промежутка времени оптимального движения) при решении задачи оптимального управления с граничными условиями (18), (19) в классической постановке. В последней строке табл. 1 для сравнения приводятся данные, полученные при решении модифицированной задачи оптимального управления, о которой пойдет речь в разделах 6, 7 статьи.

Для тех же тел при тех же граничных условиях в табл. 2 приводятся компоненты векторов углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \varepsilon_1(t)\mathbf{i}_1 + \varepsilon_2(t)\mathbf{i}_2 + \varepsilon_3(t)\mathbf{i}_3 = \dot{\boldsymbol{\omega}}(t)$ для начала, середины и конца процесса оптимального управления ($t = 0$, $t = 0.5$, $t = T = 1$).

Таблица 1 / Table 1

Кинематические характеристики КА при граничных условиях (18), (19)
Kinematic characteristics of a spacecraft under boundary conditions (18), (19)

Класс тела	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	ω_1	ω_2	ω_3
Тело 1	0.8096	0.3625	−0.3768	0.2668	−0.0502	−0.0114	−0.4937
Тело 2	0.8095	0.3628	−0.3766	0.2670	−0.0499	−0.0115	−0.4941
Тело 3	0.8093	0.3631	−0.3765	0.2674	−0.0496	−0.0116	−0.4949
Тело 4	0.8077	0.3654	−0.3773	0.2678	−0.0506	−0.0159	−0.4949
Тело 5	0.8086	0.3634	−0.3780	0.2668	−0.0519	−0.0137	−0.4948
Модифицированная задача	0.8099	0.3627	−0.3756	0.2673	−0.0488	−0.0098	−0.4938

Таблица 2 / Table 2

Вектор углового ускорения КА при граничных условиях (18), (19)
Angular acceleration vector of a spacecraft under boundary conditions (18), (19)

Класс тела	$\varepsilon_1(0)$	$\varepsilon_2(0)$	$\varepsilon_3(0)$	$\varepsilon_1(0.5)$	$\varepsilon_2(0.5)$	$\varepsilon_3(0.5)$	$\varepsilon_1(1)$	$\varepsilon_2(1)$	$\varepsilon_3(1)$
Тело 1	−0.9854	0.7259	−0.4892	−0.2917	0.2087	−0.2878	0.5077	−0.1272	−0.0985
Тело 2	−0.9649	0.7262	−0.4736	−0.3051	0.2053	−0.2902	0.5357	−0.1154	−0.0965
Тело 3	−0.9399	0.7235	−0.4449	−0.3207	0.2039	−0.2942	0.5681	−0.1076	−0.0940
Тело 4	−0.9262	0.6536	−0.4422	−0.3182	0.2586	−0.2978	0.5591	−0.2446	−0.0886
Тело 5	−0.7914	0.6537	−0.4345	−0.3968	0.2549	−0.3002	0.7341	−0.2381	−0.0875
Модифицированная задача	−0.9647	0.7634	−0.4932	−0.3103	0.1687	−0.2847	0.5350	−0.0220	0.1024

Также приведем кинематические характеристики оптимального движения различных тел для случая, когда начальное состояние тела определяется соотношением (18), а конечное состояние соотношением

$$\mathbf{\Lambda}_T = (0.79368,\ 0.49375,\ -0.26823,\ 0.23309), \quad \boldsymbol{\omega}_T = (0.2,\ 0.3,\ -0.2). \tag{20}$$

В табл. 3 для тел 1, 6, 4, 5 приводятся компоненты кватерниона положения и вектора угловой скорости при $t = 0.5$.

Таблица 3 / Table 3

Кинематические характеристики КА при граничных условиях (18), (20)
Kinematic characteristics of a spacecraft under boundary conditions (18), (20)

Класс тела	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	ω_1	ω_2	ω_3
Тело 1	0.78995	0.41434	−0.35808	0.28583	0.32168	−0.01522	−0.52451
Тело 6	0.78999	0.41442	−0.35860	0.27492	0.32414	−0.01453	−0.52402
Тело 4	0.79080	0.41371	−0.35618	0.27679	0.31768	−0.01578	−0.52304
Тело 5	0.79103	0.41317	−0.35664	0.27635	0.31932	−0.01491	−0.52314

Для тех же тел при тех же граничных условиях в табл. 4 приводятся компоненты векторов углового ускорения при $t = 0$, $t = 0.5$, $t = T = 1$.

Аналогичные расчеты проводились и для других начальных и конечных состояний тел. Из табл. 1–4 и других проведенных расчетов с другими граничными условиями

Таблица 4 / Table 4

Вектор углового ускорения КА при граничных условиях (18), (20)
Angular acceleration vector of a spacecraft under boundary conditions (18), (20)

Класс тела	$\varepsilon_1(0)$	$\varepsilon_2(0)$	$\varepsilon_3(0)$	$\varepsilon_1(0.5)$	$\varepsilon_2(0.5)$	$\varepsilon_3(0.5)$	$\varepsilon_1(1)$	$\varepsilon_2(1)$	$\varepsilon_3(1)$
Тело 1	0.26547	0.38677	−1.00250	−0.06733	0.52385	0.10458	−0.43888	0.74958	1.18404
Тело 6	0.19271	0.34271	−1.05149	−0.05270	0.54857	0.12304	−0.41047	0.70409	1.16712
Тело 4	0.36496	0.53821	−1.00244	−0.07017	0.44837	0.10585	−0.54722	0.88317	1.18497
Тело 5	0.28551	0.51819	−1.00680	−0.04259	0.45769	0.10771	−0.55803	0.86381	1.18517

видно, что кинематические характеристики оптимального движения тел существенно зависят от начального и конечного состояния тел и слабо зависят от распределения масс в теле. Отсюда следует, что, используя кинематические характеристики тела со сферической симметрией, из динамических уравнений Эйлера с учетом моментов инерции произвольных тел можно вычислить управляющие моменты для движения произвольных тел. Такие моменты можно рассматривать как квазиоптимальные управляющие моменты для перевода твердых тел из начального состояния в конечное состояние. Выражения для траектории углового движения и угловой скорости твердого тела (КА) можно построить аналитически в явном виде на основе решения модифицированной задачи оптимального разворота, а управляющий момент определить исходя из решения обратной задачи динамики твердого тела. Покажем это.

5. Модифицированная задача оптимальной переориентации

Движение КА по-прежнему описывается соотношениями (1)–(4), (6), при этом начальное и конечное значения по угловому положению и угловой скорости КА произвольны.

Одной из основных проблем при построении аналитического решения в задаче оптимального разворота твердого тела (КА) является разрешимость классической задачи Дарбу — аналитического определения кватерниона $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ из уравнения (1) при известных $\boldsymbol{\Lambda}_0$, $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Для кватернионного дифференциального уравнения (1) при условии, что вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ задается выражением

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{i}_1\dot{f}(t)\sin g(t) + \mathbf{i}_2\dot{f}(t)\cos g(t) + \mathbf{i}_3\dot{g}(t), \tag{21}$$

в котором $f(t)$ и $g(t)$ — произвольные функции времени, известно решение [13], удовлетворяющее начальному условию (3):

$$\boldsymbol{\Lambda}(t) = \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{-\mathbf{i}_2 f(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 f(t)/2\} \circ \\ \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\}, \tag{22}$$

где символ «$\mathbf{exp}\{\cdot\}$» обозначает кватернионную экспоненту [2]. Формулы (21), (22) включают в себя все известные точные аналитические решения традиционной задачи оптимального разворота КА при его сферической симметрии, когда вектор угловой скорости на всем интервале времени движения КА постоянен по направлению или описывает в пространстве круговой конус [1–3, 14].

Заметим [13], что задачу Дарбу с произвольно заданным вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ с помощью замен переменных можно свести к решению уравнения типа (1) с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}^*(t) = -(\mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)),$$

отличающейся от (21) только знаком. При этом явное аналитическое решение этой задачи, как и при произвольном векторе $\boldsymbol{\omega}(t)$, не известно. Таким образом, предлагаемая структура угловой скорости (21) хорошо соотносится с концепцией Пуансо, что всякое произвольное угловое движение твердого тела вокруг неподвижной точки можно рассматривать как некоторое обобщенное коническое движение твердого тела [15].

Выражение (21) и решение (22) можно обобщить, добавив поворот на постоянный угол вокруг некоторой оси. Такой поворот задается с помощью кватерниона $\mathbf{K}$, $\|\mathbf{K}\| = 1$. Тогда вектор $\boldsymbol{\omega}$ и кватернион $\boldsymbol{\Lambda}$ будут определяться соотношениями

$$\boldsymbol{\omega} = \widetilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)) \circ \mathbf{K}, \tag{23}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ \widetilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(t) - f(0))/2\} \circ \\ \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K}. \tag{24}$$

Будем рассматривать вторые производные от функций f и g в качестве управляющих параметров. Тогда если ввести обозначения

$$\dot{f} = f_1, \quad \dot{g} = g_1, \tag{25}$$

то можно составить систему дифференциальных уравнений, описывающих управляемую систему:

$$\dot{f} = f_1, \quad \dot{g} = g_1, \quad \dot{f}_1 = u_1, \quad \dot{g}_1 = u_2, \tag{26}$$

где f, f_1, g, g_1 — фазовые координаты, u_1, u_2 — управляющие параметры. Ограничимся случаем, когда кватернион $\mathbf{K}$ представляется в виде произведения

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1, \quad \mathbf{K}_1 = \exp\{\mathbf{i}_1 \alpha_1/2\}, \quad \mathbf{K}_2 = \exp\{\mathbf{i}_2 \alpha_2/2\}, \tag{27}$$

где α_1, α_2 — некоторые постоянные. Отметим, что кватернионы $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ определяют поворот вектора $\boldsymbol{\omega}$ (21) вокруг осей $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$. Поворот вокруг оси $\mathbf{i}_3$ уже включен в формулу (23), если учесть, что в функцию $g(t)$ входит аддитивная постоянная. Сопряженный кватернион $\widetilde{\mathbf{K}}$ будет представляться так:

$$\widetilde{\mathbf{K}} = \widetilde{\mathbf{K}}_1 \circ \widetilde{\mathbf{K}}_2, \quad \widetilde{\mathbf{K}}_1 = \exp\{-\mathbf{i}_1 \alpha_1/2\}, \quad \widetilde{\mathbf{K}}_2 = \exp\{-\mathbf{i}_2 \alpha_2/2\}. \tag{28}$$

Условия того, что выражения для $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Lambda}$ (23), (24) удовлетворяют граничным условиям (3), (4) ((17)) с учетом (27), (28), запишутся как

$$\tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 f_1(0) \sin g(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0) \cos g(0) + \mathbf{i}_3 g_1(0)) \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\omega}_0, \tag{29}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 f_1(T) \sin g(T) + \mathbf{i}_2 f_1(T) \cos g(T) + \mathbf{i}_3 g_1(T)) \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\omega}_T, \tag{30}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ \mathbf{exp}\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_2 (f(T) - f(0))/2\} \circ \\ \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_3 g(T)/2\} \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\Lambda}_T. \tag{31}$$

Тогда для управляемой системы (26) можно сформулировать следующую задачу оптимального управления, решение которой можно рассматривать как приближенное (квазиоптимальное) решение задачи (1)–(5) ((6)): требуется найти оптимальные управления $u_1(t)$, $u_2(t)$, которые переводят управляемую систему (26) из начального состояния

$$f = f(0), \quad f_1 = f_1(0), \quad g = g(0), \quad g_1 = g_1(0) \tag{32}$$

в конечное состояние

$$f = f(T), \quad f_1 = f_1(T), \quad g = g(T), \quad g_1 = g_1(T), \tag{33}$$

удовлетворяющие соотношениям (29)–(31), в которых α_1, α_2 выступают как параметры, подлежащие определению, и доставляют минимум функционалу

$$J = \int_0^T (u_1^2 + u_2^2)\, dt. \tag{34}$$

Соотношения (29)–(31) можно переписать в виде

$$(\mathbf{i}_1 f_1(0) \sin g(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0) \cos g(0) + \mathbf{i}_3 g_1(0)) = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \boldsymbol{\omega}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \tag{35}$$

$$(\mathbf{i}_1 f_1(T) \sin g(T) + \mathbf{i}_2 f_1(T) \cos g(T) + \mathbf{i}_3 g_1(T)) = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \boldsymbol{\omega}_T \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \tag{36}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{exp}\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_2 (f(T) - f(0))/2\} \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_3 g(T)/2\} = \\ = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_0 \circ \boldsymbol{\Lambda}_T \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2.\end{gathered} \tag{37}$$

Такую задачу оптимального управления будем называть модифицированной задачей оптимального разворота КА (твердого тела). Управляющий момент, соответствующий решению модифицированной задачи оптимального разворота КА, определяется из (2) по формуле

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}]. \tag{38}$$

6. Решение задачи с помощью принципа максимума

Функция Гамильтона – Понтрягина для поставленной задачи оптимального управления имеет вид

$$H = -(u_1^2 + u_2^2) + \psi_1 f_1 + \psi_2 g_1 + \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2, \tag{39}$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 — сопряженные переменные, удовлетворяющие системе уравнений

$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = -\psi_1, \quad \dot{\psi}_4 = -\psi_2. \tag{40}$$

Общее решение уравнений (40), содержащее произвольные постоянные $c_1, \ldots, c_4$, имеет вид

$$\psi_1 = c_1, \quad \psi_2 = c_2, \quad \psi_3 = -c_1 t + c_3, \quad \psi_4 = -c_2 t + c_4.$$

Из условия максимума для функции Гамильтона – Понтрягина (39) определяется оптимальное управление

$$u_1 = \psi_3/2 = (-c_1 t + c_3)/2, \quad u_2 = \psi_4/2 = (-c_2 t + c_4)/2. \tag{41}$$

После подстановки (41) в систему уравнений (26) находится общее решение для фазовых координат, содержащее восемь произвольных постоянных $c_1, \ldots, c_8$:

$$\begin{gathered} f = -c_1 t^3/12 + c_3 t^2/4 + c_5 t + c_6, \quad g = -c_2 t^3/12 + c_4 t^2/4 + c_7 t + c_8, \\ f_1 = -c_1 t^2/4 + c_3 t/2 + c_5, \quad g_1 = -c_2 t^2/4 + c_4 t/2 + c_7. \end{gathered} \tag{42}$$

В связи с тем что c_6 входит в функцию f как аддитивная постоянная, из формулы (24) видно, что эта постоянная не оказывает влияния; поэтому c_6 можно положить равной нулю. Таким образом, для определения девяти неизвестных постоянных задачи $c_1, \ldots, c_5$, c_7, c_8 и α_1, α_2 служат девять уравнений из системы (35)–(37) (отметим, что в кватернионном уравнении (37) независимыми являются только три уравнения в скалярной форме из-за нормированности кватерниона $\mathbf{\Lambda}$). Если формулы (42) подставить в (23), (24), то будут получены аналитические выражения для определения законов изменения оптимальной угловой скорости и оптимальной траектории КА. Эти выражения определят оптимальный в смысле минимума функционала энергозатрат (34) разворот КА в классе обобщенных конических движений. Управляющий момент согласно (23) и (38)

$$\begin{gathered}\mathbf{M} = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}] = \mathbf{I}(\tilde{\mathbf{K}} \circ ((\mathbf{i}_1(u_1 \sin g + f_1 g_1 \cos g) + \\ + \mathbf{i}_2(u_1 \cos g - f_1 g_1 \sin g) + \mathbf{i}_3 u_2) \circ \mathbf{K}) + [\tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 f_1 \sin g + \\ + \mathbf{i}_2 f_1 \cos g + \mathbf{i}_3 g_1) \circ \mathbf{K}, \quad \mathbf{I}(\tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 f_1 \sin g + \mathbf{i}_2 f_1 \cos g + \mathbf{i}_3 g_1) \circ \mathbf{K})]. \qquad (43)\end{gathered}$$

Формула (43) с учетом (41), (42) определяет аналитическое решение для управляющего момента, соответствующего решению модифицированной задачи. Модифицированная задача оптимального разворота твердого тела (КА) тем самым решена полностью.

Следует отметить, что при сферической симметрии КА ($I_1 = I_2 = I_3$) квадрат модуля управляющего момента выражается через управляющие параметры и фазовые координаты модифицированной задачи следующим образом:

$$\mathbf{M}^2 = u_1^2 + f_1^2 g_1^2 + u_2^2. \qquad (44)$$

Если в задаче оптимального разворота сферически-симметричного КА векторы граничных условий по угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_0$ и $\boldsymbol{\omega}_T$ положить параллельными $\mathrm{vect}(\tilde{\mathbf{\Lambda}}_0 \circ \mathbf{\Lambda}_T)$ (плоский эйлеров разворот КА), то решения задач в классической и модифицированной постановках полностью совпадут. То же самое можно сказать и о случае, когда решение классической задачи оптимального разворота сферически-симметричного КА получено в классе конических движений [14]. В этих случаях слагаемое $f_1^2 g_1^2$ в (44) обращается в нуль и функционал (34) полностью переходит в функционал (5) ((6)) классической задачи. В задаче поворота сферически-симметричного КА при произвольных граничных условиях, полагая, что $\int\limits_0^1 f_1^2 g_1^2\, dt$ мало по сравнению с $\int\limits_0^1 \mathbf{M}^2\, dt$, в (44) можно опустить последнее слагаемое. Тогда модифицированная задача оптимального управления в переменных f, g, f_1, g_1, u_1, u_2 с функционалом (34) и выражениями (23), (24), (35)–(38), (42), (43) будет соответствовать классической задаче оптимального поворота сферически-симметричного тела в классе обобщенных конических движений. На основании рассуждений раздела 5 статьи модифицированная задача может рассматриваться как квазиоптимальная задача поворота произвольного КА при произвольных граничных условиях.

Приведем алгоритм решения задачи оптимального разворота КА произвольной динамической конфигурации при произвольных граничных условиях в классе обобщенных конических движений в безразмерных переменных.

Шаг 1. По заданным граничным условиям по угловому положению $\mathbf{\Lambda}_0$, $\mathbf{\Lambda}_T$ (3), угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_0$, $\boldsymbol{\omega}_T$ (4) и времени переориентации КА ($T = 1$) из формул (27), (28) и девяти уравнений системы (35)–(37) определяются девять неизвестных постоянных задачи $c_1, \ldots, c_5$, c_7, c_8, α_1, α_2 и строятся функции f, f_1, g, g_1.

Шаг 2. Используя формулы (27), находим компоненты кватерниона $\mathbf{K}$.

Шаг 3. По формуле (23)

$$\boldsymbol{\omega} = \widetilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)) \circ \mathbf{K}$$

вычисляется вектор угловой скорости КА.

Шаг 4. По формуле (24)

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ \widetilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(t) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K}$$

вычисляется кватернион ориентации твердого тела.

Шаг 5. Используя формулу (43), вычисляется вектор управляющего момента КА.

Шаг 6. По формулам (6), (43) вычисляется значение безразмерного функционала оптимизации задачи оптимальной переориентации.

7. Численные примеры

В данном разделе рассматриваются сравнительные результаты численных решений классической и модифицированной задач оптимального разворота КА (твердого тела). Для модифицированной задачи выполнялись расчеты по аналитическому алгоритму раздела 6 статьи. Значения постоянных α_1, α_2,c_1, c_6, c_8, входящих в аналитическое решение модифицированной задачи, для разворота с граничными условиями (18), (19) таковы:

$$\alpha_1 = -0.0421, \quad \alpha_2 = -0.2226, \quad c_1 = 3.2902, \quad c_2 = -1.4885, \quad c_3 = 2.2113,$$
$$c_4 = -1.45, \quad c_5 = -0.4156, \quad c_6 = 0, \quad c_7 = -0.2221, \quad c_8 = -0.9216.$$

Решения классической и модифицированной задачи оказались близки. Для примера в табл. 5–7 приведем значения компонент вектора $\mathbf{M}(t)$ на концах и в середине интервала времени движения твердого тела (КА) в этих двух решениях для тел вида 3–5.

Таблица 5 / Table 5

Вектор управляющего момента для КА вида 3
Control moment vector for a spacecraft of type 3

t	M_1^{classic}	M_2^{classic}	M_3^{classic}	M_1^{modif}	M_2^{modif}	M_3^{modif}
0	−0.9480	0.9316	−0.2786	−0.9715	0.9847	−0.3062
0.5	−0.3093	0.2807	−0.1676	−0.2987	0.2337	−0.1622
T=1	0.5401	−0.1432	−0.0536	0.5085	−0.0293	−0.0584

Таблица 6 / Table 6

Вектор управляющего момента для КА вида 4
Control moment vector for a spacecraft of type 4

t	M_1^{classic}	M_2^{classic}	M_3^{classic}	M_1^{modif}	M_2^{modif}	M_3^{modif}
0	−0.2091	0.8349	−0.6241	−0.2181	0.9608	−0.6893
0.5	−0.0741	0.2697	−0.3795	−0.0725	0.1683	−0.3630
T =1	0.1318	−0.2804	−0.1131	0.1261	−0.0253	−0.1307

Таблица 7 / Table 7

Вектор управляющего момента для КА вида 5
Control moment vector for a spacecraft of type 5

t	M_1^{classic}	M_2^{classic}	M_3^{classic}	M_1^{modif}	M_2^{modif}	M_3^{modif}
0	−0.1556	0.8793	−0.5955	−0.1897	1.0127	−0.6669
0.5	−0.0780	0.2846	−0.3644	−0.0610	0.1807	−0.3459
T=1	0.1444	−0.2897	−0.1065	0.1052	−0.2682	−0.1246

В табл. 8 приводятся значения функционала качества процесса управления (6) для тел 1–5, полученные в результате решения классической и модифицированной задач оптимального управления с граничными условиями (18), (19).

Таблица 8 / Table 8

Значения функционалов для классической и модифицированной задач
Functional values for classical and modified problems

Класс тела	Тело 1	Тело 2	Тело 3	Тело 4	Тело 5
J^{classic}	0.4782	0.4920	0.4947	0.35522	0.35797
J^{modif}	0.4797	0.4935	0.4966	0.36404	0.36775

Из данных табл. 8 видно, что с возникновением существенной разницы между моментами инерции твердого тела I_1, I_2, I_3 увеличивается расхождение между управляющими моментами, полученными при решении классической и модифицированной задач в зависимости от характера изменения моментов инерции твердого тела между собой. Но в то же время различие между значениями функционала качества процесса управления (6), вычисленными при решении классической и модифицированной задач, приемлемо. Надо заметить, что значение функционала качества процесса управления — определяющая характеристика задачи.

Также проводились расчеты по решению задачи оптимального разворота для случаев, когда начальное состояние твердого тела (КА) определялось соотношениями (18). Конечное положение тела задавалось поворотом тела из начального положения на некоторый угол вокруг эйлеровой оси, единичный вектор которой определялся координатами

$$(0.04500, -0.07519, -0.99615). \tag{45}$$

В табл. 9 приводятся компоненты кватернионов конечного положения твердого тела (КА) для поворотов на различные величины эйлерова угла в градусах вокруг вектора с направлением (45).

Таблица 9 / Table 9

Кватернион конечного положения КА
Quaternion of the spacecraft final position

φ, °	$\lambda_0(T)$	$\lambda_1(T)$	$\lambda_2(T)$	$\lambda_3(T)$
30.0	0.84643	0.40650	−0.31853	0.12982
60.0	0.84013	0.48716	−0.21783	−0.09703
90.0	0.77657	0.53461	−0.10229	−0.31727
120.0	0.66009	0.54564	0.02023	−0.51589
150.0	0.49863	0.51948	0.14136	−0.67935
180.0	0.30318	0.45792	0.25286	−0.79652

В табл. 10 приводятся значениям функционалов J^{classic}, J^{modif} классической и модифицированной задач, определяющих качество процесса перевода тел 1, 6, 4 из начального состояния (45) в конечные состояния по табл. 9 и при $\boldsymbol{\omega}_T$ (19),

Таблица 10 / Table 10

Оптимальное и квазиоптимальное значения функционалов при переводе КА из начального состояния (18) в конечные положения по табл. 9 при угловой скорости (19)

Optimal and quasi-optimal values of functionals when a spacecraft is transferred from initial state (18) to final positions according to Table 9 at angular velocity (19)

Тело	J	$\varphi = 30.0°$	$\varphi = 60.0°$	$\varphi = 90.0°$	$\varphi = 150.0°$	$\varphi = 180.0°$
1	J^{classic}	0.52385	4.63277	15.31437	56.39081	86.78094
	J^{modif}	0.52510	4.63724	15.32882	56.52086	87.51533
	ΔJ	0.00125	0.00447	0.01445	0.13005	0.73439
	%	0.24	0.10	0.09	0.23	0.85
6	J^{classic}	0.48938	1.68431	4.99284	17.73522	27.05714
	J^{modif}	0.49142	1.69229	5.08024	18.48275	28.29371
	ΔJ	0.00204	0.00798	0.08740	0.74753	1.23657
	%	0.40	0.48	1.75	4.20	4.56
4	J^{classic}	0.44007	7.25434	24.73075	88.98745	132.97487
	J^{modif}	0.44918	7.26926	24.80963	92.18788	142.39358
	ΔJ	0.00911	0.01492	0.07888	3.30042	9.41871
	%	2.07	0.21	0.32	3.71	7.08

с указанием разности между значениями этих функционалов $\Delta\, J = J^{\text{modif}} - J^{\text{classic}}$ и процентного расхождения $(\Delta J \,/\, J^{\text{classic}}) \cdot 100\%$.

В табл. 11 приводятся подобные показатели, когда конечная угловая скорость твердых тел определяется вектором $\boldsymbol{\omega}_T = (0.0, 0.0, 0.0)$, т. е. в этом случае твердое тело (КА) переводится в состояние покоя.

Из большого количества проведенных численных расчетов решения задачи об оптимальном развороте КА (твердого тела) для различных граничных условий и для различных распределений масс в теле, что характеризуется значениями главных моментов инерции I_1, I_2, I_3, можно сделать следующие выводы:

1) кинематические характеристики разворота КА (кватернион ориентации $\boldsymbol{\Lambda}$ и вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$) в классической задаче слабо зависят от распределения масс в КА и в основном определяются граничными условиями задачи, а в модифицированной задаче кинематические характеристики вращения КА зависят только от граничных условий задачи;

2) управляющий момент существенно зависит от распределения масс в КА и граничных условий как в классической, так и в модифицированной постановках задачи. Слабая зависимость кинематических характеристик оптимального движения КА (твердого тела) от его динамической конфигурации обеспечивает близость решений модифицированной и классической задач оптимального разворота КА при произвольной динамической конфигурации. Решение модифицированной задачи может рассматриваться как квазиоптимальное решение классической задачи поворота КА.

Следует отметить, что кватернион ориентации КА $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ может быть двузначным [2], т. е. $\boldsymbol{\Lambda}$ и $-\boldsymbol{\Lambda}$ соответствуют одному и тому же угловому положению КА в пространстве.

Таблица 11 / Table 11

Оптимальное и квазиоптимальное значения функционалов при переводе КА из начального состояния (18) в конечные положения по табл. 9 и состояние покоя

Optimal and quasi-optimal values of functionals when a spacecraft is transferred from initial state (18) to final positions according to Table 9 and to rest state

Тело	J	$\varphi = 90.0°$	$\varphi = 120.0°$	$\varphi = 150.0°$	$\varphi = 180.0°$
1	J^{classic}	24.25074	45.17597	72.66431	106.71186
	J^{modif}	24.28745	45.19513	72.77169	107.40843
	ΔJ	0.03672	0.01916	0.10738	0.69657
	%	0.15	0.04	0.15	0.65
6	J^{classic}	7.67679	14.14398	22.61087	33.03152
	J^{modif}	7.82727	14.55971	23.46155	34.32325
	ΔJ	0.15048	0.41573	0.85068	1.29173
	%	1.92	2.94	3.76	3.91
4	J^{classic}	39.30956	72.66173	113.88517	162.63861
	J^{modif}	39.45538	73.72885	118.74480	174.83836
	ΔJ	0.14582	1.06712	4.85963	12.19975
	%	0.37	1.47	4.26	7.53
5	J^{classic}	35.85965	67.01230	83.69665	158.59297
	J^{modif}	35.91027	67.10659	83.93641	159.06287
	ΔJ	0.06062	0.09429	0.23 0.976	46990
	%	0.17	0.14	0.29	0.30

Заключение

Представленное в статье аналитическое квазиоптимальное решение классической задачи оптимального разворота КА как твердого тела произвольной динамической конфигурации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости может найти свое применение при построении систем управления КА. Предлагаемый алгоритм с хорошими точностями решает задачу оптимальной переориентации КА и не требует численного решения краевой задачи оптимизации или иного сложного численного решения. Полученные результаты на основе решения обратной задачи динамики твердого тела могут быть обобщены на случаи управления КА при наличии в постановке задачи элементов нежесткости конструкции КА и различных возмущений. Результаты также могут быть применены для КА нанокласса, имеющих ограничения на вычислительные мощности.

Список литературы

1. *Scrivener S. L., Thompson R. C.* Survey of time-optimal attitude maneuvers // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1994. Vol. 17, iss. 2. P. 225–233. https://doi.org/10.2514/3.21187
2. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. Москва : Наука, 1973. 320 с.
3. *Junkins J. L., Turner J. D.* Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers. New York : Elsevier, 1986. 515 p. https://doi.org/10.1016/c2009-0-09714-1
4. *Crassidis J. L., Markley F. L.* Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and

Control. New York : Springer, 2014. 486 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-0802-8
5. *Сапунков Я. Г., Молоденков А. В.* Численное решение задачи оптимальной переориентации вращающегося космического аппарата // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 6. С. 66–70.
6. *Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G.* Analytical quasi-optimal solution of the problem of the time-optimal rotation of a spacecraft // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2021. Vol. 60, iss. 4. P. 639–653. https://doi.org/10.1134/S1064230721030114
7. *Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V.* Analytical solution of the problem on an axisymmetric spacecraft attitude maneuver optimal with respect to a combined functional // Automation and Remote Control. 2021. Vol. 82, iss. 7. P. 1183–1200. https://doi.org/10.1134/S0005117921070043
8. *Акуленко Л. Д., Лилов Л. К.* Синтез квазиоптимальной системы переориентации и стабилизации КА // Космические исследования. 1990. Т. 28, вып. 2. С. 186–197.
9. *Boyarko G. A., Romano M., Yakimenko O. A.* Time-optimal reorientation of a spacecraft using an inverse dynamics optimization method // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2011. Vol. 34, iss. 4. P. 1197–1208. https://doi.org/10.2514/1.49449
10. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. Москва : Наука, 1961. 391 с.
11. *Lastman G. J.* A shooting method for solving two-point boundary-value problems arising from non-singular bang-bang optimal control problems // International Journal of Control. 1978. Vol. 27, iss. 4. P. 513–524. https://doi.org/10.1080/00207177808922388
12. *Банит Ю. Р., Беляев М. Ю., Добринская Т. А., Ефимов Н. И., Сазонов В. В., Стажков В. М.* Определение тензора инерции международной космической станции по телеметрической информации. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2002. № 57.
13. *Molodenkov A. V.* On the solution of the Darboux problem // Mechanics of Solids. 2007. Vol. 42, iss. 2. P. 167–176. https://doi.org/10.3103/S002565440702001X
14. *Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G.* Analytical solution of the optimal slew problem of a spherically symmetric spacecraft in the class of conical motion // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2013. Vol. 52, iss. 3. P. 491–501. https://doi.org/10.1134/S1064230713020081
15. *Molodenkov A. V., Perelyaev S. E.* Solution of approximate equation for modified rodrigues vector and attitude algorithm design // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2021. Vol. 44, iss. 6. P. 1224–1227. https://doi.org/10.2514/1.G006008

References

1. Scrivener S. L., Thompson R. C. Survey of time-optimal attitude maneuvers. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1994, vol. 17, iss. 2, pp. 225–233. https://doi.org/10.2514/3.21187
2. Branets V. N., Shmyglevskij I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachax orientatsii tverdogo tela* [The Use of Quaternions in Problems of Orientation of Solid Bodies]. Moscow, Nauka, 1973. 320 p. (in Russian).
3. Junkins J. L., Turner J. D. *Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers*. New York, Elsevier, 1986. 515 p. https://doi.org/10.1016/c2009-0-09714-1
4. Crassidis J. L., Markley F. L. *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control*. New York, Springer, 2014. 486 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-0802-8
5. Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V. Numerical solution of the optimal spacecraft reorientation problem. *Mechatronics, Automation, Control*, 2008, iss. 6, pp. 10–15.
6. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical quasi-optimal solution of the problem of the time-optimal rotation of a spacecraft. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2021, vol. 60, iss. 4, pp. 639–653. https://doi.org/10.1134/S1064230721030114
7. Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V. Analytical solution of the problem on an axisymmetric spacecraft attitude maneuver optimal with respect to a combined functional. *Automation*

and Remote Control, 2021, vol. 82, iss. 7, pp. 1183–1200. https://doi.org/10.1134/S0005117921070043

8. Akulenko L. D., Lilov L. K. Synthesis of a quasi-optimal system of reorientation and stabilization of spacecraft. *Kosmicheskie issledovaniya* [Space Research], 1990, vol. 28, iss. 2, pp. 186–197 (in Russian).
9. Boyarko G. A., Romano M., Yakimenko O. A. Time-optimal reorientation of a spacecraft using an inverse dynamics optimization method. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2011, vol. 34, iss. 4, pp. 1197–1208. https://doi.org/10.2514/1.49449
10. Pontriagin L. S., Boltianskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaia teoriya optimal'nykh protsessov* [The Mathematical Theory of Optimal Processes]. Moscow, Nauka, 1961. 391 p. (in Russian).
11. Lastman G. J. A shooting method for solving two-point boundary-value problems arising from non-singular bang-bang optimal control problems. *International Journal of Control*, 1978, vol. 27, iss. 4, pp. 513–524. https://doi.org/10.1080/00207177808922388
12. Banit Yu. R., Belyaev M. Yu., Dobrinskaya T. A., Efimov N. L., Sazonov V. V., Stazhkov V. M. *Estimating the Inertia Tensor of the International Space Station on the Base of the Telemetry Information*. Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS Preprint, 2002, no. 57 (in Russian).
13. Molodenkov A. V. On the solution of the Darboux problem. *Mechanics of Solids*, 2007, vol. 42, iss. 2, pp. 167–176. https://doi.org/10.3103/S002565440702001X
14. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical solution of the optimal slew problem of a spherically symmetric spacecraft in the class of conical motion. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2013, vol. 52, iss. 3, pp. 491–501. https://doi.org/10.1134/S1064230713020081
15. Molodenkov A. V., Perelyaev S. E. Solution of approximate equation for modified rodrigues vector and attitude algorithm design. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2021, vol. 44, iss. 6, pp. 1224–1227. https://doi.org/10.2514/1.G006008

Поступила в редакцию / Received 16.06.2022
Принята к публикации / Accepted 31.08.2022
Опубликована / Published 01.03.2023