Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 169–182
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 169–182
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-169-182, EDN: JKUQAS

Научная статья
УДК 517.518.8

О приближении ограниченных функций тригонометрическими полиномами в метрике Хаусдорфа

Е. Х. Садекова

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Россия, 115409, г. Москва, Каширское шоссе, д. 31

Садекова Екатерина Халиловна, старший преподаватель кафедры высшей математики, vetka.08@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-4124-7432, AuthorID: 1131874

Аннотация. Рассматривается задача о приближении в метрике Хаусдорфа ограниченной (не обязательно однозначной) 2π-периодической функции f тригонометрическими полиномами. Построение приближающего полинома проводится в несколько этапов. Сначала по функции f строится подходящая кусочно-постоянная 2π-периодическая функция g, обладающая свойством λ-монотонности, для которой получены оценки хаусдорфова уклонения от f, модуля непрерывности и вариации. Затем по функции g строится 2π-периодическая сплайн-функция φ порядка r. Получена оценка производной $\varphi^{(r)}$ через модуль непрерывности функции f. На последнем этапе используется классическое неравенство Джексона для наилучшего приближения гладкой функции тригонометрическими полиномами. В итоге доказана точная по порядку оценка указанного отклонения функции f в метрике Хаусдорфа с явно выписанной константой. По порядку оценка совпадает с известными результатами Б. Сендова и В. А. Попова, но лучше с точки зрения выбора константы.

Ключевые слова: сплайн-функция, приближение тригонометрическими полиномами, метрика Хаусдорфа

Для цитирования: *Садекова Е. Х.* О приближении ограниченных функций тригонометрическими полиномами в метрике Хаусдорфа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 169–182. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-169-182, EDN: JKUQAS

Article

On the approximation of bounded functions by trigonometric polynomials in Hausdorff metric

E. H. Sadekova

National Research Nuclear University MEPhI, 31 Kashirskoye Shosse, 115409 Moscow, Russia

Ekaterina H. Sadekova, vetka.08@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-4124-7432, AuthorID: 1131874

Abstract. The article discusses a method for constructing a spline function to obtain estimates that are exact in order to approximate bounded functions by trigonometric polynomials in the Hausdorff metric. The introduction provides a brief history of approximation of continuous and bounded functions in the uniform metric and the Hausdorff metric. Section 1 contains the main definitions, necessary facts, and formulates the main result. An estimate for the indicated approximations is obtained from Jackson's inequality for uniform approximations. In section 2 auxiliary statements are proved. So, for an arbitrary 2π-periodic bounded function, a spline function is constructed. Then, estimates are obtained for the best approximation, variation, and modulus of continuity of a given spline function. Section 3 contains evidence of the main results and final comments.

Keywords: spline function, approximation by trigonometric polynomials, Hausdorff metric

For citation: Sadekova E. H. On the approximation of bounded functions by trigonometric polynomials in Hausdorff metric. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 169–182 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-169-182, EDN: JKUQAS

Введение

В теории приближения непрерывных функций алгебраическими полиномами пространство непрерывных на компакте X функций стандартно рассматривается с *равномерной* (чебышевской) *метрикой*

$$\rho(f,g) = \|f-g\| = \max\{|f(x)-g(x)| : x \in X\}.$$

В 1911 г. Д. Джексон [1] (см. также [2]) доказал оценку наилучшего приближения для непрерывных 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами степени не выше n через значение $\omega(f;\,1/n)$ модуля непрерывности функции f. В 60-х годах прошлого века рассматривались различные метрики пространства функций для получения точных оценок приближений непрерывных (или ограниченных) функций полиномами. Так, Б. Сендов предложил использовать метрику Хаусдорфа [3] в тех случаях, когда «близость двух функций ... является “для глаза” понятием более естественным, чем понятие их близости в любой другой метрике» (цит. по: [4, с. 509]). В этой метрике Б. Сендов установил [3], что любая ограниченная на отрезке функция приближается алгебраическими полиномами степени n со скоростью $O(\ln n/n)$ при $n \to \infty$. Позже В. Веселинов указал [5], что с этой же скоростью любая 2π-периодическая функция приближается в метрике Хаусдорфа тригонометрическими полиномами. В 1970-х гг. Е. П. Долженко и Е. А. Севастьяновым были предложены новые методы исследования, использующие, в частности, понятие среднего модуля колебания функции. Это позволило получить новые оценки в прямых и обратных теоремах, относящихся к приближению ограниченных функций в хаусдорфовой метрике [6]. В дальнейшем Б. Сендовым и В. А. Поповым [7, 8] было доказано, что отмеченное наилучшее приближение алгебраическими полиномами не превосходит величины $\max\left\{\dfrac{A}{n}\ln\left(n\,\omega\left(f;\,1/n\right)\right),\ \dfrac{A}{n}\right\}$, где A — абсолютная постоянная.

В настоящей работе показано, как из известных результатов теории равномерных приближений тригонометрическими полиномами можно получить точные по порядку оценки для приближения в хаусдорфовой метрике ограниченной 2π-периодической функции.

1. Основные определения и главный результат

Рассмотрим метрическое пространство точек на плоскости xOy с *расстоянием Минковского*

$$\rho\left((x_1,\, y_1), (x_2,\, y_2)\right) = \max\left\{|x_1 - x_2|,\, |y_1 - y_2|\right\}.$$

Хаусдорфовым расстоянием между плоскими замкнутыми множествами A *и* B *на плоскости* xOy назовем величину

$$H(A,B) = \inf\left\{\varepsilon > 0:\ A \subset U_\varepsilon(B),\ B \subset U_\varepsilon(A)\right\},$$

где $U_\varepsilon(X) = \{(x,y) : \rho\left((x,y),\, X\right) \leqslant \varepsilon\}$ — ε-окрестность множества X относительно расстояния ρ.

Хаусдорфово расстояние для двух непрерывных на отрезке $[a,\, b]$ *функций* $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ задается по правилу

$$H(f_1,\, f_2) = H(F(f_1),\, F(f_2)),$$

где $F(f)$ — график функции $y = f(x)$ (см. [2]).

Если рассматривать разрывные ограниченные (вообще говоря, многозначные) функции, то удобно дополнить их графики вертикальными отрезками в точках разрыва до связного множества. Под *дополненным графиком* $F(f)$ такой функции f будем понимать наименьшее замкнутое множество плоскости xOy, содержащее график $\{(x,\, f(x))\}$ этой функции, а также все точки вертикальных отрезков, образуемых любыми двумя точками множества (x_1, y_1) и $(x_1,\, y_2)$. Такое множество называется *выпуклым относительно оси* Oy.

Хаусдорфовым расстоянием $H(f,\, g;\, E)$ *между двумя ограниченными функциями* $f(x)$ *и* $g(x)$, где $x \in E$, называется хаусдорфово расстояние между их дополненными графиками, т. е. $H(f,\, g;\, E) = H\left(F(f),\, F(g)\right)$. Используем символ $H(f,\, g)$ для аналогичного расстояния между 2π-периодическими функциями.

Введем еще некоторые обозначения, используемые в работе. Для наименьшего уклонения в смысле равномерной метрики 2π-периодической функции $f(x)$ от тригонометрических полиномов T_n порядка не выше n применяем обозначение

$$E_n^T(f) = \inf_{T_n}\left\{\|f - T_n\|\right\},$$

где $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, $T_n(x) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$.

Аналогичное наименьшее уклонение в смысле хаусдорфова расстояния для ограниченной 2π-периодической функции обозначим символом $HE_n^T(f) = \inf\limits_{T_n}\left\{H(f,\, T_n)\right\}$.

Как обычно, $\omega(f, \Delta;\, \delta) = \sup\left\{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in \Delta,\, |x' - x''| \leqslant \delta\right\}$ — *равномерный модуль непрерывности* функции $f(x)$ на (конечном или бесконечном) промежутке $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, а $\underset{\Delta}{Var}\ f$ — ее полное изменение на этом промежутке. Для $2l$-периодической функции $f(x)$ пишем $\omega(f;\, \delta)$ вместо $\omega(f, [0, 2l]; \delta)$ и $Var\, f$ вместо $\underset{[0,\,2l]}{Var}\, f$.

Следуя [4], введем *средний модуль колебания* функции $f(x)$ на отрезке Δ по формуле

$$\Omega(f,\, \Delta;\, \delta) = \frac{1}{|\Delta|}\int\limits_{\Delta} \Omega\Big(f,\, (x - \delta/2,\, x + \delta/2) \cap \Delta\Big)\, dx,$$

где $|\Delta|$ — длина отрезка Δ, $\delta > 0$, и $\Omega(f, E) = \sup\limits_{x \in E} f(x) - \inf\limits_{x \in E} f(x)$. Для $2l$-периодической функции $f(x)$ вместо $\Omega(f, [0, 2l]; \delta)$ пишем $\Omega(f; \delta)$. Известно (см. [4]), что средний модуль колебания $\Omega(f, \Delta; \delta)$ является неотрицательной, возрастающей и непрерывной функцией переменной $\delta > 0$.

Напомним, что функция $\varphi(x)$ называется *кусочно-постоянной* (соответственно, *кусочно-линейной*) *на конечном отрезке* $\Delta = [a, b]$, если существует такое разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ этого отрезка точками $\{x_k\}_{k=0}^{n}$, что на каждом интервале (x_{k-1}, x_k) функция $\varphi(x)$ постоянна (линейна), а в каждой точке x_j — непрерывна слева или справа (соответственно, просто непрерывна). Функция $\varphi(x)$ называется *кусочно-постоянной* (*кусочно-линейной*) *на бесконечном интервале* Δ, если она такова на каждом отрезке $\tilde{\Delta} \subset \Delta$. Отметим, что кусочно-линейная $2l$-периодическая функция непрерывна на $\mathbb{R}$ и имеет конечное число точек излома на периоде.

Дадим теперь определение λ-монотонной на интервале функции. Пусть функция $f(x)$ (не обязательно однозначная) определена на некотором промежутке Δ, и $\lambda > 0$ — заданное число. Функция $f(x)$ называется *λ-монотонной* на Δ, если она является монотонной на каждом интервале $(\alpha, \beta) \subset \Delta$ длины $\beta - \alpha = \lambda$, причем если $\Delta \neq \mathbb{R}$, то дополнительно требуем, чтобы $f(x)$ была равна одной постоянной на каждом интервале, представляющем собой пересечение Δ с открытой $(\lambda/2)$-окрестностью каждой концевой точки промежутка Δ.

Классическим сплайном (сплайн-функцией) *нулевой степени* называется кусочно-постоянная функция. При $r \in \mathbb{N}$ функция $\varphi(x)$ называется *классическим сплайном степени* r, если $\varphi^{(r-1)}(x)$ является непостоянной непрерывной кусочно-линейной функцией. Таким образом, если $\varphi(x)$ — классический сплайн r-ой степени, то r-я производная $\varphi^{(r)}(x)$ кусочно-постоянна и отлична от тождественного нуля, а $\varphi(x)$ — последовательная r-я первообразная от кусочно-постоянной функции $\varphi^{(r)}(x)$.

Ниже будет показано, как оценку уклонений тригонометрических полиномов в метрике Хаусдорфа от произвольной ограниченной 2π-периодической функции можно получить из классического неравенства Джексона

$$E_{n-1}^{T}(\varphi) \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} M, \tag{1}$$

справедливого для 2π-периодической функции φ, имеющей $(r-1)$-ю производную $\varphi^{(r-1)}$ с модулем непрерывности $\omega\left(\varphi^{(r-1)}; \delta\right) \leqslant M\delta$. Здесь $\mathcal{K}_r$ — *константа Фавара*, определяемая по формуле

$$\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(r+1)}}{(2m+1)^{r+1}}.$$

Центральным результатом настоящей работы является следующее утверждение (см. теорему 2 в разд. 3).

Пусть $f(x)$ — ограниченная не обязательно однозначная 2π-периодическая функция. Тогда при всех натуральных $n \geqslant 2$ выполняется оценка

$$HE_{n-1}^{T}(f) \leqslant \frac{9eC}{n} \ln\left(e + n\omega\left(f; \frac{\pi}{n}\right)\right),$$

где $C = \sqrt[r]{\mathcal{K}_r}$, $r = \left[\ln\left(e + n\omega\left(f; \pi/n\right)\right)\right] \in \mathbb{N}$, $\mathcal{K}_r$ — постоянная Фавара, $C \leqslant \pi/2$.

2. Вспомогательные утверждения

Для доказательства основного результата понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть f — ограниченная 2π-периодическая, вообще говоря, неоднозначная функция, $q \in \mathbb{N}$. Тогда существует 2π-периодическая кусочно-постоянная и $\frac{\pi}{q}$-монотонная функция $g(x)$ такая, что*

$$H(f,g) \leqslant \frac{3\pi}{2q}, \tag{2}$$

$$\omega\left(g; \frac{\pi}{q}\right) \leqslant \omega\left(f; \frac{3\pi}{q}\right), \tag{3}$$

$$Var\, g \leqslant 2q\,\Omega\left(f; \frac{4\pi}{q}\right). \tag{4}$$

Доказательство. Введем на числовой прямой промежутки Δ_j и $\tilde{\Delta}_j$ вида

$$\Delta_j = \left[\left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{q}, \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{q}\right), \quad \tilde{\Delta}_j = \left[(j-1)\,\frac{\pi}{q}\,(j+1)\frac{\pi}{q}\right), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $m_j = \inf\left\{f(x) : x \in \tilde{\Delta}_j\right\}$, $M_j = \sup\left\{f(x) : x \in \tilde{\Delta}_j\right\}$ $(j \in \mathbb{Z})$. Определим 2π-периодическую кусочно-постоянную функцию $g\,(x)$ ее значениями на отрезке $[0, 2\pi]$ следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} m_0, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2q}\right), \\ m_{2i}, & x \in \Delta_{2i},\ i = 1, \ldots, q-1, \\ M_{2i-1}, & x \in \Delta_{2i-1},\ i = 1, \ldots, q, \\ m_0, & x \in \left[2\pi - \frac{\pi}{2q}, 2\pi\right]. \end{cases}$$

Определим также 2π-периодические функции $m(x)$ и $M(x)$ равенствами $m(x) = m_{2i}$ при $x \in \tilde{\Delta}_{2i}$ и $M(x) = M_{2i-1}$ при $x \in \tilde{\Delta}_{2i-1}$, где $i \in \mathbb{Z}$.

В качестве иллюстрации приведем следующую таблицу:

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$\ldots$	$j=2q-2$	$j=2q-1$	
$\tilde{\Delta}_j$	$\left[-\frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{q}\right)$	$\left[0, \frac{2\pi}{q}\right)$	$\left[\frac{\pi}{q}, \frac{3\pi}{q}\right)$	$\ldots$	$\left[\frac{(2q-3)\pi}{q}, \frac{(2q-1)\pi}{q}\right)$	$\left[\frac{(2q-2)\pi}{q}, 2\pi\right)$	
m_j	m_0		m_2	$\ldots$	m_{2q-2}		
M_j		M_1		$\ldots$		M_{2q-1}	
Δ	$\left[0, \frac{\pi}{2q}\right)$	$\left[\frac{\pi}{2q}, \frac{3\pi}{2q}\right)$	$\left[\frac{3\pi}{2q}, \frac{5\pi}{2q}\right)$	$\ldots$	$\left[2\pi - \frac{5\pi}{2q}, 2\pi - \frac{3\pi}{2q}\right)$	$\left[2\pi - \frac{3\pi}{2q}, 2\pi - \frac{\pi}{2q}\right)$	$\left[2\pi - \frac{\pi}{2q}, 2\pi\right]$
$g(x)$	m_0	M_1	m_2	$\ldots$	m_{2q-2}	M_{2q-1}	$m_0.$

Здесь соответствующее $\Delta \subset \tilde{\Delta}_j$.

Для доказательства неравенства (2) требуется проверить такие два включения: $F(f) \subset U_\varepsilon\,(F(g))$ и $F(g) \subset U_\varepsilon\,(F(f))$, где всюду далее $\varepsilon = \frac{3\pi}{2q}$ для краткости.

Действительно, докажем, что $F(f) \subset U_\varepsilon\,(F(g))$. Для этого рассмотрим дополненные графики $F(g)$ и $F(f)$ на каждом из промежутков $\tilde{\Delta}$, $\left|\tilde{\Delta}\right| = \frac{2\pi}{q}$.

Начнем с $j=0$ и для $\tilde{\Delta}_0=\left[-\frac{\pi}{q},\frac{\pi}{q}\right)$ рассмотрим промежутки, на которых функция $g(x)$ постоянна, и точки, в которых функция $g(x)$ меняет свое значение.

Пусть $i=0$. На промежутке $\Delta_0\subset\tilde{\Delta}_0$ функция $g(x)$ постоянна, $g(x)=m_0$, где $m_0=\inf\limits_{x\in\tilde{\Delta}_0}\{f(x)\}$. Для удобства обозначим $F(g)|_{\Delta}$ часть дополненного графика функции $g(x)$, рассматриваемой на множестве Δ, а $U_\varepsilon\left(F(g)|_{\Delta_0}\right)$ — $\frac{3\pi}{2q}$-окрестность соответствующей части дополненного графика $F(g)$,

$$U_\varepsilon\left(F(g)|_{\Delta_0}\right)=\left[-\frac{2\pi}{q},\frac{2\pi}{q}\right]\times\left[m_0-\frac{3\pi}{2q},m_0+\frac{3\pi}{2q}\right].$$

Рассмотрим отдельно точку $x=\frac{\pi}{2q}$. Функция $g(x)$ при переходе через эту точку меняет значение и $F(g)|_{x=\frac{\pi}{2q}}=\left\{\frac{\pi}{2q}\right\}\times[m_0,M_1]$, $M_1=\sup\limits_{x\in\tilde{\Delta}_1}\{f(x)\}$, где $\tilde{\Delta}_1=\left[0,\frac{2\pi}{q}\right)$. Тогда

$$U_\varepsilon\left(F(g)|_{x=\frac{\pi}{2q}}\right)=\left[-\frac{\pi}{q},\frac{2\pi}{q}\right]\times\left[m_0-\frac{3\pi}{2q},M_1+\frac{3\pi}{2q}\right].$$

Объединяя полученные на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2q},\frac{\pi}{2q}\right]$ результаты, имеем там

$$F(f)\subset U_\varepsilon\left(F(g)\right). \tag{5}$$

Далее, задавая $j=1$, $\tilde{\Delta}_1=\left[0,\frac{2\pi}{q}\right)$, $i=1$, получим промежуток $\Delta_1=\left[\frac{\pi}{2q},\frac{3\pi}{2q}\right)$. На этом промежутке $g(x)=M_1=\sup\limits_{x\in\tilde{\Delta}_1}\{f(x)\}$ и требуемое включение выполняется для точек промежутка Δ_1.

Повторяя рассуждения, будем получать включения типа (5) для каждого внутреннего промежутка.

Выделим особо случаи $j=-1$ и $j=q$ («концевых» промежутков).

Пусть $j=-1$, $\tilde{\Delta}_{-1}=\left[-\frac{2\pi}{q},0\right)$, $i=-1$, тогда получим промежуток $\Delta_{-1}=\left[-\frac{3\pi}{2q},-\frac{\pi}{2q}\right)$, где функция $g(x)=M_{2q-1}$. В силу периодичности функции $f(x)$ рассмотрения на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2q},-\frac{\pi}{2q}\right)$ повторяют аналогичные для $j=0$.

Обозначим точку $x^*=-\frac{\pi}{2q}$, $y^*=M_0$. Рассмотрим $\frac{3\pi}{2q}$-окрестность дополненного графика $F(g)|_{x=-\frac{\pi}{2q}}=\left\{-\frac{\pi}{2q}\right\}\times[m_0,M_0]$, т. е.

$$U_\varepsilon\left(F(g)|_{x=-\frac{\pi}{2q}}\right)=\left[-\frac{2\pi}{q},\frac{\pi}{q}\right]\times\left[m_0-\frac{3\pi}{2q},M_0+\frac{3\pi}{2q}\right],\quad \varepsilon=\frac{3\pi}{2q}.$$

Эта окрестность содержит весь график функции f на $\tilde{\Delta}_0$. Аналогично проводится доказательство для других интервалов.

Таким образом, дополненные графики функций $m(x)$ и $M(x)$ задают «коридор», который содержит дополненный график $F(f)$ и сам находится в окрестности дополненного графика $F(g)$ функции g.

Аналогично проводится доказательство второго включения: $F(g)\subset U_\varepsilon\left(F(f)\right)$ с тем же $\varepsilon=\frac{3\pi}{2q}$.

Докажем неравенство (3), т. е. $\omega\left(g;\frac{\pi}{q}\right)\leqslant\omega\left(f;\frac{3\pi}{q}\right)$.

По определению

$$\omega\left(g;\frac{\pi}{q}\right) := \sup\left\{|g(x')-g(x'')| : x',x''\in\Delta,\ |x'-x''|\leqslant\frac{\pi}{q}\right\},$$
$$\omega\left(f;\frac{3\pi}{q}\right) := \sup\left\{|f(x')-f(x'')| : x',x''\in\Delta, |x'-x''|\leqslant\frac{3\pi}{q}\right\}.$$

Обозначим отрезок $\Delta_j^* = \left[j\frac{\pi}{q},(j+1)\frac{\pi}{q}\right]$, $j\in\mathbb{Z}$, а отрезок $\Delta_j^{**} = \left[(j-1)\frac{\pi}{q},(j+2)\frac{\pi}{q}\right]$, $j\in\mathbb{Z}$. Ясно, что $\Delta_j^*\subset\Delta_j^{**}$. Поскольку

$$\sup_{x\in\Delta_j^*}\{g(x)\} - \inf_{x\in\Delta_j^*}\{g(x)\} \leqslant \sup_{x\in\Delta_j^{**}}\{f(x)\} - \inf_{x\in\Delta_j^{**}}\{f(x)\},$$

то $\Omega(g,\Delta_j^*)\leqslant\Omega(f,\Delta_j^{**})$, что и доказывает неравенство (3).

Оценим

$$\begin{gathered}
Var\, g = \underset{[0,2\pi]}{Var}\, g = (M_1-m_0)+(M_1-m_2)+(M_3-m_2)+\dots+\\
+(M_{2q-3}-m_{2q-2})+(M_{2q-1}-m_{2q-2})+(M_{2q-1}-m_0)=\\
=\sum_{j=1}^{2q}\left(M\left(\left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{q}\right)-m\left(\left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{q}\right)\right)=\\
=\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi}(M(x)-m(x))\,dx\leqslant\frac{q}{\pi}\int_0^{2\pi}\Omega\left(f,x-\frac{2\pi}{q}-\varepsilon,x+\frac{2\pi}{q}+\varepsilon\right)dx=\\
=2q\,\Omega\left(f;\frac{4\pi}{q}+2\varepsilon\right)\longrightarrow Var\,g\leqslant 2q\,\Omega\left(f;\frac{4\pi}{q}\right)
\end{gathered}$$

при $\varepsilon\to 0+0$, где

$$\begin{gathered}
M(x)-m(x)\leqslant\sup_{x\in\Delta^*}\{f(x)\}-\inf_{x\in\Delta^*}\{f(x)\}\leqslant\Omega\Big(f,\Big(x-\frac{2\pi}{q}-\varepsilon,x+\frac{2\pi}{q}+\varepsilon\Big)\Big),\\
\Delta^*=\left(x-\frac{2\pi}{q}-\varepsilon,x+\frac{2\pi}{q}+\varepsilon\right).
\end{gathered}$$

Данное неравенство справедливо для любого $\varepsilon>0$, значит, и для $\varepsilon=0$. Таким образом, неравенство (4) и лемма 1 доказаны. $\square$

Лемма 2. *Пусть $0<h\leqslant\delta$, а ограниченная 2ℓ-периодическая функция $f(x)$ является 2δ-монотонной. Тогда функция Стеклова*

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(x+t)\,dt \tag{6}$$

является 2ℓ-периодической, $2(\delta-h)$-монотонной и справедливо неравенство

$$H\left(f,f_h\right)\leqslant h.$$

Доказательство. Докажем, что

$$F(f)\subset U_\varepsilon\left(F(f_h)\right). \tag{7}$$

Пусть (α,β) — интервал постоянства функции $f(x)$ такой, что на любом другом интервале, содержащем (α,β), функция $f(x)$ уже не является постоянной. Тогда $\beta-\alpha\geqslant 2\delta\geqslant 2h>0$ и функция $f_h(x)$ на $(\alpha+h,\beta-h)$ также является постоянной, совпадая с $f(x)$.

Пусть теперь $x_0\notin[\alpha+h,\beta-h]$. Функция $f(x)$ будет монотонной на отрезке $[x_0-2h,x_0+2h]$, а функция $f_h(x)$ будет монотонной на отрезке $[x_0-h,x_0+h]$ и $f_h(x_0-h)\leqslant f(x_0)\leqslant f_h(x_0+h)$. Неравенство следует из определения функции Стеклова, так как

$$f_h(x_0-h)=\frac{1}{2h}\int_{x_0-2h}^{x_0} f(t)\,dt\leqslant f(x_0),$$

$$f(x_0)\leqslant f_h(x_0+h)=\frac{1}{2h}\int_{x_0}^{x_0+2h} f(t)\,dt.$$

Поэтому существует x_1 из $[x_0-2h,x_0+2h]$ такое, что $f_h(x_1)=f(x_0)$. Таким образом, для всякой точки $(x_0,f(x_0))$ существует точка $(x_1,f_h(x_1))$ такая, что $|x_0-x_1|\leqslant h$.

Рассмотрим случай, когда $f(x)$ не является монотонной на (x_0-2h,x_0+2h). Существует интервал $(\alpha,\beta)\subset(x_0-2h,x_0+2h)$, $\beta-\alpha\geqslant 2\delta\geqslant 2h>0$, такой, что $f(x)=\mathrm{const}$ на (α,β) и $f(x)\neq\mathrm{const}$ на любом интервале, содержащем (α,β). Тогда $x_0\in(\alpha,\beta)$ и возможны три случая:

1) $x_0\in(\alpha,\alpha+h]=\Delta_1$;
2) $x_0\in[\beta-h,\beta)=\Delta_2$;
3) $x_0\in(\alpha+h,\beta-h)=\Delta_3$.

Рассмотрим случай 1). Пусть $x_0\in(\alpha,\alpha+h]=\Delta_1$. Тогда $f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)\,dt$, где $f(x)$ — функция, монотонная на $(\alpha-2h,\alpha+h]$ и $(\alpha,\alpha+h]\subset(\alpha-h,\alpha+h]$, причем $f_h(\alpha)=m_f\leqslant f_h(x_0)\leqslant M_f=f_h(\alpha+h)$, а $m_f=\inf\limits_{x\in\Delta_1} f_h(x)=f_h(\alpha)$, $M_f=\sup\limits_{x\in\Delta_1} f_h(\alpha+h)$. Далее считаем, что $f(x)$ и $f_h(x)$ возрастают (для убывающих функций действуем аналогично). При этом $f_h(\alpha)\leqslant f(\alpha)\leqslant f(x_0)\leqslant f_h(\alpha+h)=\mathrm{const}$, поскольку $f(x)$ монотонна, а $f_h(\alpha+h)=\mathrm{const}=f(\alpha+h)$. Тогда существует такое значение $x_1\in\Delta_1$, что $f_h(x_1)=f(x_0)$.

Случай 2) рассматривается аналогично.

В случае 3) справедливы равенства $f_h(x)=f(x)=\mathrm{const}$ на Δ_3. Все случаи рассмотрены, включение (7) доказано.

Докажем, что

$$F(f_h)\subset U_\varepsilon\left(F(f)\right), \tag{8}$$

т.е. каждая точка $(x_0,f_h(x_0))$ дополненного графика функции $f_h(x)$ содержится в h-окрестности дополненного графика функции $f(x)$.

Пусть $m_f=\inf\limits_{x\in\Delta_1}\{f(t):|t-x_0|\leqslant h\}$, $M_f=\sup\limits_{x\in\Delta_1}\{f(t):|t-x_0|\leqslant h\}$. Тогда $m_f\leqslant$ $\leqslant f_h(x_0)\leqslant M_f$, причем существуют значения x_1, x_2 такие, что $m_f=f(x_1)$, $M_f=f(x_2)$ и точки (x_1,m_f), (x_2,M_f) принадлежат $F(f)$.

Так как $F(f)$ линейно связное, то существует непрерывная кривая, которая соединяет эти точки дополненного графика, и существует $\tilde{x}$ из $[x_0-h,x_0+h]$ такое, что $f(\tilde{x})=f_h(x_0)$.

Получаем, что для каждой точки графика $y=f_h(x)$ найдется точка графика $y=f(x)$, отстоящая от нее по горизонтали не более чем на h. Таким образом, включение (8) доказано.

Из вышесказанного следует, что $H\left(f,f_h\right)\leqslant h$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3. *Пусть $h > 0$, $r \in \mathbb{N}$, а интегрируемая (измеримая) $2l$-периодическая функция $f(x)$ является $2hr$-монотонной. Тогда функция Стеклова $f_{h,r}(x)$ порядка r для $f(x)$ с шагом h является $2l$-периодической и выполняется неравенство*

$$H\left(f, f_{h,r}\right) \leqslant rh.$$

Доказательство. Напомним, что для функции $f(x)$ функция Стеклова $f_{h,r}(x)$ порядка r с шагом h определяется следующим образом:

$$f_{h,1}(x) = f_h(x),\ \ f_{h,2}(x) = \left(f_{h,1}(x)\right)_h, \ldots, \quad f_{h,r}(x) = \left(f_{h,r-1}(x)\right)_h, \quad r = 2, 3, \ldots . \tag{9}$$

Воспользуемся методом математической индукции.

1. Пусть $r = 1$. Рассмотрим $f_{h,1}(x) = f_h(x)$ — функцию Стеклова для $f(x)$ порядка 1 с шагом $h > 0$, т.е. $f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt$. По лемме 2 получим:

1) $f_h(x)$ — $2l$-периодическая, как интеграл от $2l$-периодической функции $f(x)$;

2) $H\left(f, f_h\right) \leqslant h$.

2. Пусть $r = 2$. Рассмотрим $f_{h,2}(x) = \left(f_{h,1}(x)\right)_h$, $f_{h,2}(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f_{h,1}(t)\,dt$. Требуется доказать:

1) $f_{h,2}(x)$ — $2l$-периодическая;

2) $H\left(f, f_h\right) \leqslant 2h$.

Докажем 1). Повторяя рассуждения из леммы 2, получим, что $f_{h,2}(x)$ — $2l$-периодическая, так как $f_{h,1}(x) = f_{h,1}(x + 2l)$ по свойству интеграла от периодической функции.

Докажем 2). Для начала докажем, что $H\left(f_{h,1}, f_{h,2}\right) \leqslant h$.

Справедливо включение

$$F(f_{h,2}) \subset U_h\left(F(f_{h,1})\right). \tag{10}$$

Действительно, для любой точки $A\left(x_0, f_{h,2}(x_0)\right)$ существует точка $B\left(x_1, f_{h,1}(x_1)\right)$ такая, что $\rho(A, B) \leqslant h$. Если $f_{h,2}(x) = \mathrm{const}$ на $[x_0 - h, x_0 + h]$, то включение (10) очевидно, так как $f_{h,2}(x) = f_{h,1}(x) = \mathrm{const}$ при $|x_1 - x_0| \leqslant h$ (из определения функции Стеклова). Если $f_{h,2}(x) \neq \mathrm{const}$ на $[x_0 - h, x_0 + h]$, то она монотонна на данном отрезке и по лемме 2 $f_{h,1}(x_0 - h) \leqslant f_{h,2}(x_0) \leqslant f_{h,1}(x_0 + h)$. Таким образом, существует точка $x_1 \in [x_0 - h, x_0 + h]$ такая, что $f_{h,2}(x_0) = f_{h,1}(x_1)$. Следовательно, включение (10) доказано.

Теперь докажем справедливость включения

$$F(f_{h,1}) \subset U_h\left(F(f_{h,2})\right). \tag{11}$$

Если $f_{h,1}(x)$ постоянна на $[x_0 - 2h, x_0 + 2h]$ для любой точки $\tilde{A}(x_0, f_{h,1}(x_0))$, то на $[x_0 - h, x_0 + h]$ функция $f_{h,2}(x)$ постоянна и $f_{h,2}(x) = f_{h,1}(x) = \mathrm{const}$, т. е. $|x - x_0| \leqslant h$.

Если для любой точки $\tilde{A}(x_0, f_{h,1}(x_0))$ функция $f_{h,1}(x)$ монотонна на $[x_0 - 2h, x_0 + 2h]$, то функция $f_{h,2}(x)$ также монотонна на $[x_0 - h, x_0 + h]$ и существует точка x_1 из $[x_0 - h, x_0 + h]$ такая, что при $f_{h,2}(x_0 - h) \leqslant f_{h,1}(x_0) \leqslant f_{h,2}(x_0 + h)$ и $f_{h,1}(x_0) = f_{h,2}(x_1)$. Включение (11) верно.

Значит, $H\left(f_{h,1}, f_{h,2}\right) \leqslant h$. Тогда $H\left(f, f_{h,2}\right) \leqslant H\left(f, f_h\right) + H\left(f_{h,1}, f_{h,2}\right) \leqslant h + h \leqslant 2h$, т. е. 2) доказано.

3. Далее по индукции ($r \in \mathbb{N}$) предположим, что $f_{h,r-1}(x)$ — $2l$-периодическая и $H(f, f_{h,r-1}) \leqslant (r - 1) \cdot h$.

Докажем, что $f_{h,r}(x) = (f_{h,r-1}(x))_h$ — $2l$–периодическая и $H\left(f, f_{h,r}\right) \leqslant rh$.

Повторяя рассуждения п. 2, заменив $f_{h,1}(x)$ на $f_{h,r-1}(x)$ и $f_{h,2}(x)$ на $f_{h,r}(x)$, придем к утверждению леммы. □

Лемма 4. *Пусть $h > 0$, $r \in \mathbb{N}$ и $f(x)$ — ограниченная интегрируемая (измеримая) $2l$-периодическая функция. Тогда почти всюду*

$$\left| f_{h,r}^{(r)}(x) \right| \leqslant \frac{\omega(f; 2h)}{2h^r}.$$

Кроме того, если $Var\, f < \infty$, то справедливо неравенство

$$Var\, f_{h,r}^{(r)} \leqslant \frac{Var\, f}{h^r}.$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$. Напомним, что симметрической разностью для функции $g(x)$ называется величина

$$\Delta_\delta^1(g) = g\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - g\left(x - \frac{\delta}{2}\right), \quad \delta > 0.$$

Тогда симметрическая разность для $F(x)$ имеет вид

$$\Delta_{2h}^1(F(x)) = F(x+h) - F(x-h).$$

Обозначим $f_{h,1}(x) = \frac{1}{2h}\Delta_{2h}^1(F)$.

По индукции симметрическая разность порядка k для функции $g(x)$ задается формулой $\Delta_\delta^r(g) = \Delta_\delta^1\left(\Delta_\delta^{r-1}(g)\right)$, $k = 2, 3, \ldots$. Тогда в силу определений функции Стеклова и симметрической разности порядка r получим

$$f_{h,r}(x) = \frac{\Delta_{2h}^r(F_r(x))}{(2h)^r}, \tag{12}$$

где $F_r(x)$ — r-я последовательная первообразная функции $f(x)$.

Дифференцируя равенство (12) r раз, для почти всех x будем иметь

$$f_{h,r}^{(r)}(x) = \frac{\Delta_{2h}^r(f(x))}{(2h)^r}.$$

Для тех же x докажем по индукции справедливость неравенства

$$|\Delta_{2h}^r f(x)| \leqslant 2^{r-1}\omega(f; 2h).$$

В условиях леммы справедлива цепочка соотношений

$$\begin{gathered}
\Delta_{2h}^1(f(x)) = |f(x+h) - f(x-h)| \leqslant \omega(f; 2h), \\
\Delta_{2h}^2(f(x)) \leqslant |f(x+2h) - f(x) - f(x) + f(x-2h)| \leqslant \\
\leqslant |f(x+2h) - f(x)| + |f(x) - f(x-2h)| \leqslant 2\omega(f; 2h), \\
\ldots \\
\Delta_{2h}^r(f(x)) \leqslant 2^{r-1}\omega(f; 2h).
\end{gathered}$$

Тогда, используя (12), запишем

$$\left| f_{h,r}^{(r)}(x) \right| = \frac{|\Delta_{2h}^r(f(x))|}{(2h)^r} \leqslant \frac{2^{r-1}}{(2h)^r}\omega(f; 2h) = \frac{\omega(f; 2h)}{2h^r}.$$

Рассуждения, аналогичные проведенным выше, дают неравенства

$$Var\, \Delta_{2h}^1(f(x)) \leqslant 2\, Var\, f, \ldots, Var\, \Delta_{2h}^r f(x) \leqslant 2^r\, Var\, f.$$

Тогда

$$Var\, f_{h,r}^{(r)} = \frac{1}{(2h)^r}\, Var\, \Delta_{2h}^r(f(x)) \leqslant \frac{1}{(2h)^r} 2^r\, Var\, f = \frac{Var\, f}{h^r}$$

и лемма доказана. □

3. Доказательство основных результатов

Для формулировки и доказательства основных результатов понадобится стандартная норма в $L_\infty(X)$

$$\|\varphi\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |\varphi(x)| = \inf \{K : |\varphi(x)| \leqslant K \text{ для п.в. } x \in X\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $0 < h \leqslant \frac{\pi}{2r}$, $r \in \mathbb{N}$, $q = \left[\frac{\pi}{2hr}\right] \left(> \frac{\pi}{4hr}\right)$ *и* $f(x)$ — *ограниченная* 2π*-периодическая функция. Тогда существует такой* 2π*-периодический сплайн* $\varphi(x)$ *степени* r*, что*

$$\|\varphi^{(r)}\|_\infty \leqslant \frac{1}{2h^r}\,\omega\left(f; \frac{3\pi}{q}\right) \leqslant \frac{6r}{h^r}\,\omega(f;h). \tag{13}$$

При этом верны оценки

$$H(f,\varphi) \leqslant \frac{3\pi}{2q} + rh \leqslant 7rh,$$
$$HE^T_{n-1}(f) \leqslant E^T_{n-1}(\varphi) + \frac{3\pi}{2q} + rh \leqslant E^T_{n-1}(\varphi) + 7rh, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Здесь $\varphi^{(r)}(x)$ — производная порядка r, которая в условиях теоремы существует всюду, за исключением конечного числа точек, на любом конечном промежутке.

Доказательство. По лемме 1 существует 2π-периодическая кусочно-постоянная функция $g(x)$, которая является $\frac{\pi}{q}$-монотонной (а значит, и $2hr$-монотонной). Как было доказано ранее,

$$H(f,g) \leqslant \frac{3\pi}{2q}. \tag{15}$$

Пусть $\varphi(x)$ — функция Стеклова порядка r для $g(x)$ с шагом h, т.е. $\varphi(x) = g_{r,h}(x)$ из леммы 2 (см. (6)). Тогда по лемме 4 имеем

$$|\varphi^{(r)}(x)| \leqslant \frac{\omega(g;2h)}{2h^r}$$

(неравенство (9)).

Согласно неравенству (3) запишем

$$\|\varphi^{(r)}\|_\infty \leqslant \frac{1}{2h^r}\omega(g;2h) \leqslant \frac{1}{2h^r}\omega\left(g; \frac{\pi}{q}\right) \leqslant \frac{1}{2h^r}\omega\left(f; \frac{3\pi}{q}\right).$$

В силу условий теоремы 1 верны соотношения $q \leqslant \pi/2hr$ и $6hr \leqslant 3\pi/q$. Значит,

$$\|\varphi^{(r)}\|_\infty \leqslant \frac{1}{2h^r}\,\omega\left(f; \frac{3\pi}{q}\right) \leqslant \frac{6r}{h^r}\,\omega(f;h).$$

По свойству хаусдорфова расстояния из леммы 1 (неравенство (2)) с учетом неравенства $H(g, g_{h,r}) \leqslant rh$ из леммы 3 получим, что

$$H(f,\varphi) \leqslant \frac{3\pi}{2q} + rh \leqslant 7rh.$$

В последней оценке величина $3\pi/(2q)$ меньше $6hr$, так как по условию теоремы $q > \pi/(4hr)$.

Наконец, докажем неравенство (14). Имеем

$$HE^T_{n-1}(f) \leqslant E^T_{n-1}(\varphi) + H(f,g) + H(g,\varphi) \leqslant E^T_{n-1}(\varphi) + \frac{3\pi}{2q} + rh \leqslant E^T_{n-1}(\varphi) + 7rh.$$

Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ — ограниченная не обязательно однозначная 2π-периодическая функция. Тогда при всех натуральных $n \geqslant 2$ выполняется оценка*

$$HE^T_{n-1}(f) \leqslant \frac{9eC}{n} \ln\left(e + n\omega\left(f; \frac{\pi}{n}\right)\right),$$

где $C = \sqrt[r]{\mathcal{K}_r}$, $r = \left[\ln\left(e + n\omega\left(f; \pi/n\right)\right)\right] \in \mathbb{N}$, $\mathcal{K}_r$ — постоянная Фавара, $C \leqslant \pi/2$.

Доказательство. Положим

$$h = \frac{eC}{n}, \quad r = \left[\ln\left(e + n\omega\left(f; \frac{\pi}{n}\right)\right)\right]. \tag{16}$$

Рассмотрим случай, когда $hr \leqslant \pi/6$. Пусть $q = \left[\frac{\pi}{2hr}\right]$, имеем $q \geqslant 3$. По теореме 1 для функции φ справедливы соотношения:

$$\|\varphi^{(r)}\|_\infty \leqslant \frac{1}{2h^r}\omega\left(f; \frac{3\pi}{q}\right) \leqslant \frac{6r}{h^r}\omega(f;h),$$
$$H(f,\varphi) \leqslant 7rh, \quad HE^T_{n-1}(f) \leqslant E^T_{n-1}(\varphi) + 7rh,$$

где $0 < h \leqslant \frac{\pi}{2r}$, $r \in \mathbb{N}$, $q = \left[\frac{\pi}{2hr}\right]$ $(> \frac{\pi}{4hr})$.

Используя (13), из неравенства Джексона (1) получаем

$$E^T_{n-1}(\varphi) \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\|\varphi^{(r)}\|_\infty \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \cdot \frac{1}{2h^r} \cdot \omega\left(f; \frac{3\pi}{q}\right) \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{2(hn)^r} \cdot \omega\left(f; \frac{3\pi}{q}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2e^r} \cdot \omega\left(f; \frac{3\pi}{q}\right) \leqslant \frac{e}{2n} \cdot \frac{\omega\left(f; \frac{3\pi}{q}\right)}{\omega\left(f; \frac{\pi}{n}\right)}.$$

Поскольку $1 = \frac{e\cdot C}{hn}$, или $\left(\frac{1}{e}\right)^r = \left(\frac{C}{hn}\right)^r$, из (16) получаем

$$e^r \cdot e \geqslant e + n \cdot \omega\left(f; \frac{\pi}{n}\right),$$
$$\frac{1}{e^r} \leqslant \frac{e}{e + n \cdot \omega\left(f; \frac{\pi}{n}\right)} \leqslant \frac{e}{n \cdot \omega\left(f; \frac{\pi}{n}\right)}.$$

С учетом того, что $q \leqslant \frac{\pi}{2hr} < q + 1$ и $q \geqslant 3$, имеем

$$\frac{1}{q} < \frac{1}{q}(q+1)\frac{2hr}{\pi} = \left(1 + \frac{1}{q}\right)\frac{2hr}{\pi} \leqslant \frac{8hr}{3\pi}, \tag{17}$$

$$\omega\left(f; \frac{3\pi}{q}\right) \leqslant \left(\frac{3n}{q} + 1\right)\omega\left(f; \frac{\pi}{n}\right) \leqslant \left(\frac{8nhr}{\pi} + 1\right)\omega\left(f; \frac{\pi}{n}\right). \tag{18}$$

Пользуясь соотношениями $1 = \frac{e\cdot C}{hn}$, $C > 1$, $r \in \mathbb{N}$, из (16)–(18) получим

$$E^T_{n-1}(\varphi) \leqslant \frac{e}{2n} \cdot \frac{\omega\left(f; \frac{3\pi}{q}\right)}{\omega\left(f; \frac{\pi}{n}\right)} \leqslant \frac{e}{2n}\left(\frac{8nhr}{\pi} + 1\right) =$$

$$= 4hr \cdot \left(\frac{e}{\pi} + \frac{e}{8hrn}\right) = 4hr\left(\frac{e}{\pi} + \frac{1}{8Cr}\right) < 4hr.$$

Здесь учли, что $\frac{e}{\pi} + \frac{1}{8Cr} < 1$.

Поэтому из (14) имеем

$$HE_{n-1}^{T}(f) \leqslant E_{n-1}^{T}(\varphi) + \frac{3\pi}{2q} + rh \leqslant 4hr + \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{8hr}{3\pi} + hr \leqslant 4hr + 4hr + hr = 9hr,$$

что совпадает с доказываемой оценкой в случае $hr \leqslant \frac{\pi}{6}$.

Рассмотрим случай $hr > \frac{\pi}{6}$. Поскольку $HE_1^T(f) \leqslant \pi$, то $HE_{n-1}^T(f) \leqslant HE_1^T(f) \leqslant \leqslant \pi < 6hr$. Значит, неравенство (15) также справедливо и при $hr > \frac{\pi}{6}$.

Теорема доказана. □

Список литературы

1. *Jackson D.* Üeber die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung. Inaugural–Dissertation. Gottingen, 1911. 99 S.
2. *Даугавет И. К.* Введение в теорию приближений функций. Ленинград : ЛГУ, 1977. 185 с.
3. *Сендов Б. Х.* Апроксимиране на функции с алгебрични полноми по отношение на едне метрика от хаусдорфовки тип // Годишник на Софийския университет. Физико-математически факултет. София : Наука и изкуство, 1962. Т. 55. С. 1–39.
4. *Долженко Е. П., Севастьянов Е. А.* О приближениях функций в хаусдорфовой метрике посредством кусочно монотонных (в частности, рациональных) функций // Математический сборник. 1976. Т. 101, № 4. С. 508–541.
5. *Веселинов В. М.* Аппроксимирование функций при помощи тригонометрических полиномов относительно одной метрики хаусдорфовского типа // Mathematica. 1967. Т. 9, № 1. С. 185–199.
6. *Долженко Е. П., Севастьянов Е. А.* О зависимости свойств функций от скорости их приближения полиномами // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1978. Т. 42, № 2. С. 270–304.
7. *Сендов Б. Х., Попов В. А.* Точная асимптотика наилучшего приближения алгебраическими и тригонометрическими полиномами в метрике Хаусдорфа // Математический сборник. 1972. Т. 89, № 1. С. 138–147.
8. *Sendov B. Kh., Popov V. A.* On a generalization of Jackson's theorem for best approximation // Journal of Approximation Theory. 1973. Vol. 9, iss. 2. P. 102–111. https://doi.org/10.1016/0021-9045(73)90098-1
9. *Боянов Т. П.* Точная асимптотика наилучшего хаусдорфова приближения классов функций с заданным модулем непрерывности // Сердика Българско математическо списание. 1980. Т. 6. С. 84–97.

References

1. Jackson D. *Üeber die Genuigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung*. Inaugural–Dissertation. Gottingen, 1911. 99 p. (in German).
2. Daugavet I. K. *Vvedenie v teoriyu priblizheniy funktsiy* [Introduction to the Theory of Approximation of Functions]. Leningrad, Leningrad State University Publ., 1977. 184 p. (in Russian).
3. Sendov B. Approximation of functions with algebraic completeness with respect to a Hausdorff type metric. *Annuaire de l'Université de Sofia. Faculté des sciences physiques et mathématiques*. Sofia, Nauka i izkustvo, 1962, vol. 55, pp. 1–39 (in Bulgarian).

4. Dolzhenko E. P., Sevast'yanov E. A. Approximations of functions in the Hausdorff metric by piecewise monotonic (in particular, rational) functions. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1976, vol. 30, iss. 4, pp. 449–477. https://doi.org/10.1070/SM1976v030n04ABEH002283
5. Veselinov V. M. Approximation of functions by means of trigonometric polynomials with respect to a metric of Hausdorff type. *Mathematica (Cluj)*, 1967, vol. 9, iss. 1, pp. 185–199 (in Russian).
6. Dolzhenko E. P., Sevast'yanov E. A. On the dependence of properties of functions on their degree of approximation by polynomials. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1978, vol. 12, iss. 2, pp. 255–288. https://doi.org/10.1070/IM1978v012n02ABEH001853
7. Sendov B. Kh., Popov V. A. The exact asymptotic behavior of the best approximation by algebraic and trigonometric polynomials in the Hausdorff metric. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1972, vol. 18, iss. 1, pp. 139–149. https://doi.org/10.1070/SM1972v018n01ABEH001621
8. Sendov B. Kh., Popov V. A. On a generalization of Jackson's theorem for best approximation. *Journal of Approximation Theory*, 1973, vol. 9, iss. 2, pp. 102–111. https://doi.org/10.1016/0021-9045(73)90098-1
9. Boyanov T. P. The exact asymptotics of the best Hausdorff approximation of classes of functions with a given modulus of continuity. *Serdika Bulgarian Mathematical Journal*, 1980, vol. 6, pp. 84–97 (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 01.04.2022
Принята к публикации / Accepted 16.11.2022
Опубликована / Published 31.05.2023