Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 311–319
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 311–319
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-311-319, EDN: GUFKKJ

Научная статья
УДК 519.663

Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом. Часть I. Классическое решение смешанной задачи

В. П. Курдюмов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Курдюмов Виталий Павлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и математической экономики, Kurdyumov47@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0001-8534-7692, AuthorID: 9902

Аннотация. Резольвентным подходом и использованием идеи А. Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье исследуются свойства формального решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом и нулевой начальной функцией. Такой метод позволяет получать глубокие результаты о сходимости формального ряда с произвольными граничными условиями и без завышения требований гладкости исходных данных. Рассматриваемые в статье разнопорядковые граничные условия таковы, что у оператора соответствующей спектральной задачи возможно наличие бесконечного множества кратных собственных значений и соответствующих им присоединенных функций. Получено классическое решение без завышения требований на начальную скорость $u'_t(x,0) = \psi(x)$. Показано, что при $\psi(x) \in L[0,1]$ формальное решение, являясь равномерным пределом классических, есть обобщенное решение, а когда $\psi(x) \in L_p[0,1]$, $1 < p \leqslant 2$, формальное решение обладает значительно более гладкими свойствами по сравнению со случаем $\psi(x) \in L[0,1]$.

Ключевые слова: метод Фурье, формальное решение, волновое уравнение, резольвента

Для цитирования: *Курдюмов В. П.* Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом. Часть I. Классическое решение смешанной задачи // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 311–319. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-311-319, EDN: GUFKKJ

Article

Classic and generalized solutions of the mixed problem for wave equation with a summable potential. Part I. Classic solution of the mixed problem

V. P. Kurdyumov

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Vitalii P. Kurdyumov, Kurdyumov47@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0001-8534-7692, AuthorID: 9902

Abstract. The resolvent approach and the using of the idea of A. N. Krylov on the acceleration of convergence of Fourier series, the properties of a formal solution of a mixed problem for a homogeneous wave equation with a summable potential and a zero initial function are studied. This method makes it possible to obtain deep results on the convergence of a formal series with arbitrary boundary conditions and without overestimating the requirements for the smoothness of the initial data. The different-order boundary conditions considered in the article are such that the operator corresponding to the spectral problem may have an infinite set of multiple eigenvalues and their associated functions. A classical solution is obtained without overstating the requirements for the initial velocity $u'_t(x,0) = \psi(x)$. It is shown that for $\psi(x) \in L[0,1]$ the formal solution, being the uniform limit of the classical ones, is a generalized solution, and when $\psi(x) \in L_p[0,1],\ 1 < p \leqslant 2$, the formal solution has much smoother properties than the case $\psi(x) \in L[0,1]$.

Keywords: Fourier method, formal solution, wave equation, resolvent

For citation: Kurdyumov V. P. Classic and generalized solutions of the mixed problem for wave equation with a summable potential. Part I. Classic solution of the mixed problem. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 311–319 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-311-319, EDN: GUFKKJ

Введение

Рассматривается смешанная задача

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,\infty), \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

$$u'_x(0,t) + \beta u'_x(1,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = \alpha u(0,t) + u(1,t) = 0, \tag{3}$$

где $q(x) \in L[0,1]$, $q(x)$ и $\psi(x)$ — комплекснозначные функции, α, β, α_1, β_1 — комплексные числа.

К задаче (1)–(3) по методу Фурье привлекается оператор Штурма – Лиувилля $-y'' + q(x)y$ с регулярными при $1 + \alpha\beta \neq 0$ граничными условиями

$$y'(0) + \beta y'(1) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = \alpha y(0) + y(1) = 0,$$

который охватывает все линейные двухточечные разнопорядковые граничные условия (при необходимости заменой переменной x на $1 - x$). Он выделяется тем, что в силу асимптотических формул его собственных значений [1, с. 74]

$$\lambda_n = \rho_n^2, \quad \lambda_n'^2 = \rho_n'^2 \quad (\lambda = \rho^2, \quad \mathrm{Re}\rho \geqslant 0),$$

$$\rho_n = 2n\pi + b_1 + \varepsilon_n, \quad \rho'_n = 2n\pi + b_2 + \varepsilon'_n, \tag{4}$$

где $b_{1,2} = -i\ln(d \pm \sqrt{d^2-1})$, $d = -\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}$, $\varepsilon_n = o(1)$, $\varepsilon'_n = o(1)$. Только в нем при $b_1 = b_2$ возможно наличие бесконечного множества кратных собственных значений и им соответствующих присоединенных функций. Один из таких наиболее трудных случаев и рассматривается в статье. Считаем, что в задаче (1)–(3) $\alpha = 0$, $\beta = -1$:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \tag{5}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = \psi(x), \tag{6}$$

$$u'_x(0,t) - u'_x(1,t) + \alpha_1 u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0. \tag{7}$$

Отметим, что задача (5)–(7) содержит все трудности любой другой задачи, когда $b_1 = b_2$, а случай $b_1 \neq b_2$ изучается так же, как в [2, 3]. Исследование проводится методом Фурье с помощью резольвентного подхода [4–6] и идеи А. Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье. Такой подход позволяет получать глубокие результаты о сходимости формального ряда для смешанной задачи с произвольными граничными условиями без завышения требований гладкости исходных данных. Так в [6] для задачи (1), (3) с начальными условиями $u(x,0) = \varphi(x)$, $u'_t(x,0) = 0$ получено классическое решение без завышения требований гладкости на $\varphi(x)$, и с привлечением знаменитых теорем Карлесона [7] и Ханта [8] о сходимости тригонометрических рядов Фурье почти всюду (п.в.) также показано, что формальное решение сходится п.в. для $\varphi(x) \in L_p[0,1]$, $p > 1$, а его сумма является обобщенным решением. В [2, 3] аналогичные результаты получены для задачи (1), (2) с граничными условиями $u(0,t) = u(1,t) = 0$ или $u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0$. Наша задача также требует глубокого применения метода А. Н. Крылова. Так же, как, например, в [2, 3], разбиваем формальный ряд на несколько рядов и суммы некоторых из них точно вычисляем. В частности, вычисляется ряд $u_1(x,t)$ (формула (8)), определяемый резольвентой оператора $L_0 : -y''$, $y'(0) - y'(1) = y(1) = 0$. Этот оператор имеет бесконечное множество кратных собственных значений, каждому из которых соответствуют [9] одна собственная и одна присоединенная функции. В итоге мы получим классическое решение задачи (5)–(7) при минимальных требованиях на $\psi(x)$ и обобщенное решение и в крайнем случае $\psi(x) \in L[0,1]$.

1. Преобразование формального решения

При $q(x) \in C[0,1]$ вопрос о классическом решении задачи (5)–(7) при минимальных требованиях на $\psi(x)$ исследован в [10]. Теперь при $q(x) \in L[0,1]$ минимальными требованиями для существования классического решения являются: $\psi(x)$ абсолютно непрерывна, $\psi(1) = 0$ и $\psi'(x) \in L_p[0,1]$, $1 < p \leqslant 2$. А под классическим решением понимаем функцию $u(x,t)$, абсолютно непрерывную вместе с первой производной по x и t и удовлетворяющую условиям (5)–(7), когда уравнение (5) выполняется п.в. Для простоты будем считать, что $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$, т. е. $\psi(x)$ абсолютно непрерывна и $\psi'(x) \in L_2[0,1]$ (при $\psi'(x) \in L_p[0,1]$, $1 < p \leqslant 2$, теорема о классическом решении задачи (5)–(7) доказывается аналогично с привлечением теоремы Хаусдорфа – Юнга). Оператор Штурма – Лиувилля, связанный по методу Фурье с задачей (5)–(7), имеет вид

$$Ly = -y'' + q(x)y, \quad U_1(y) = y'(0) - y'(1) + \alpha_1 y(0) = 0, \quad U_2(y) = y(1) = 0.$$

Для его собственных значений справедливы асимптотические формулы (4) при $b_1 = b_2$. Обозначим $\widetilde{\gamma}_n = \{\rho|\ |\rho - 2n\pi| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, $n \geqslant n_0$, а n_0 таково, что при $n \geqslant n_0$ внутри $\widetilde{\gamma}_n$ находятся по одному ρ_n и ρ'_n (которые могут и совпадать). Пусть γ_n — образ $\widetilde{\gamma}_n$ в λ-плоскости ($\lambda = \rho^2$, $\mathrm{Re}\rho \geqslant 0$). Формальное решение задачи (5)–(7) возьмем в виде [11, 12]

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

где $r > 0$ таково, что внутри $|\lambda| = r$ находятся все собственные значения λ_n, λ'_n, для которых $n < n_0$, а $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L (E — единичный оператор, λ — спектральный параметр). Представляя $\psi(x)$ в виде, аналогичном [10, формула (10)], т. е. $\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$, где $\psi_1(x) \in W_2^1[0,1]$, $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$, $\psi_2(x) \in C^2[0,1],$, $\psi_2(x) \in D_L$ (D_L — область определения оператора L), для формального решения $u(x,t)$, учитывая [10, лемма 2], получим формулу

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{4} u_j(x,t),$$

где

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R^0_\lambda\psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda, \tag{8}$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi_1 - R^0_\lambda\psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

$$u_3(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R^0_\lambda g)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

$$u_4(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda g - R^0_\lambda g)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

R^0_λ — резольвента оператора L_0: $L_0 y = -y''$,

$$U_1^0(y) = y'(0) - y'(1) = 0, \quad U_2^0(y) = y(1) = 0,$$

μ_0 находится вне контуров $|\lambda| = r$ и γ_n при $n \geqslant n_0$, $g = (L - \mu_0 E)\psi_2$, поэтому $g(x) \in L[0,1]$.

Лемма 1 ([10, теорема 8]). *Для R_λ и R^0_λ имеют место формулы*

$$R_\lambda f = v_1(x,\rho)(f,z_1) + v_2(x,\rho)(f,z_2) + (M_\rho f)(x),$$
$$R^0_\lambda f = v^0_1(x,\rho)(f,z^0_1) + v^0_2(x,\rho)(f,z^0_2) + (M^0_\rho f)(x),$$

где $z_j(x,\rho)$ $(j=1,2)$ — *решения уравнения* $y''-q(x)y+\rho^2y=0$ *с начальными условиями* $z_1(0,\rho)=z_2'(0,\rho)=1$, $z_1'(0,\rho)=z_2(0,\rho)=0$,

$$v_1(x,\rho)=\frac{1}{\Delta(\rho)}\{[-u_2(z_2)z_2'(1,\rho)-u_1(z_2)z_2(1,\rho)]z_1(x,\rho)+$$
$$+[u_1(z_1)z_2(1,\rho)+u_2(z_1)z_2'(1,\rho)]z_2(x,\rho)\},$$
$$v_2(x,\rho)=\frac{1}{\Delta(\rho)}\{[u_2(z_2)z_1'(1,\rho)+u_1(z_2)z_1(1,\rho)]z_1(x,\rho)+$$
$$+[-u_1(z_1)z_1(1,\rho)-u_2(z_1)z_1'(1,\rho)]z_2(x,\rho)\},$$
$$\Delta(\rho)=U_1(z_1)U_2(z_2)-U_1(z_2)U_2(z_1),\quad (M_\rho f)(x)=\int\limits_0^x\begin{vmatrix}z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho)\\ z_1(t,\rho) & z_2(t,\rho)\end{vmatrix}f(t)dt,$$

z_1^0, z_2^0, v_1^0, v_2^0, M_ρ^0 — *те же, что и* z_1, z_2, v_1, v_2, M_ρ, *но взяты для оператора* L_0, *т. е.* $z_1^0(x,\rho)=\cos\rho x$, $z_2^0(x,\rho)=\frac{\sin\rho x}{\rho}$,

$$v_1^0(x,\rho)=\frac{1}{\Delta_0(\rho)}[-z_2^0(1,\rho)z_1^0(x,\rho)+z_2^0(x,\rho)],\quad v_2^0(x,\rho)=\frac{1}{\Delta_0(\rho)}[z_1^0(1,\rho)-1]z_1^0(x,\rho),$$
$$\Delta_0(\rho)=U_1^0(z_1^0)U_2^0(z_2^0)-U_1^0(z_2^0)U_2^0(z_1^0)=1-\cos\rho,\quad (f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Обозначим

$$J_1(x,\rho)=v_1^0(x,\rho)(\psi_1,z_1^0)+v_2^0(x,\rho)(\psi_1,z_2^0),$$
$$J_2(x,\rho)=v_1(x,\rho)(\psi_1,z_1)+v_2(x,\rho)(\psi_1,z_2)-v_1^0(x,\rho)(\psi_1,z_1^0)-v_2^0(x,\rho)(\psi_1,z_2^0),$$
$$J_3(x,\rho)=\frac{1}{\lambda-\mu_0}[v_1^0(x,\rho)(g,z_1^0)+v_2^0(x,\rho)(g,z_2^0)],$$
$$J_4(x,\rho)=\frac{1}{\lambda-\mu_0}[v_1(x,\rho)(g,z_1)+v_2(x,\rho)(g,z_2)-v_1^0(x,\rho)(g,z_1^0)-v_2^0(x,\rho)(g,z_2^0)].$$

Так как $(M_\rho f)(x)$, $(M_\rho^0 f)(x)$ — целые по λ, то по лемме 1

$$u(x,t)=\sum_{j=1}^4 u_j(x,t)=\sum_{j=1}^4\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\left(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)J_j(x,\rho)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda.$$

2. Исследование ряда $u_1(x,t)$

Будем исследовать ряды $u_j(x,t)$ $(j=1,2,3,4)$. Сначала исследуем ряд $u_1(x,t)$.

Лемма 2. *Имеет место формула*

$$u_1(x,t)=\sum_{n=0}^\infty u_n^{(1)}(x,t),\tag{9}$$

где $u_0^{(1)}(x,t)=2(1-x)t(\psi_1,1)$,

$$u_n^{(1)}(x,t)=\frac{2}{n\pi}a_n\sin\rho_n x\sin\rho_n t+\frac{1}{(n\pi)^2}b_n\sin\rho_n x\sin\rho_n t+$$

$$+\frac{2}{n\pi}b_n(1-x)\cos\rho_n x\sin\rho_n t-\frac{2}{n\pi}b_n t\sin\rho_n x\cos\rho_n t,\quad n=1,2,..., \tag{10}$$
$$a_n=(\xi\psi_1(\xi),\sin\rho_n\xi),\quad b_n=(\psi_1(\xi),\cos\rho_n\xi),\quad \rho_n=2n\pi.$$

Доказательство получается по теореме вычетов.

Лемма 3. *Имеет место формула*

$$u_1(x,t)=u_0^{(1)}(x,t)+V(x+t)-V(x-t), \tag{11}$$

где $V(x)=\sum\limits_{i=1}^{3}S_i(x)$, $S_1(x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}a_n\cos\rho_n x$, $S_2(x)=(1-x)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}b_n\sin\rho_n x$, $S_3(x)=-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^2}b_n\cos\rho_n x$.

Доказательство. По формулам умножения тригонометрических функций из (10) получаем
$$u_n^{(1)}(x,t)=V_n(x+t)-V_n(x-t),$$
где $V_n(x)=-\frac{a_n}{n\pi}\cos\rho_n x+\frac{b_n}{n\pi}(1-x)\sin\rho_n x-\frac{b_n}{2(n\pi)^2}\cos\rho_n x$. Отсюда и из (9) сразу следует (11). □

Лемма 4. *Ряд $V(x)$ сходится равномерно на любом отрезке и для его суммы имеет место формула*

$$V(x)=\int\limits_0^x d\tau\int\limits_0^\tau\left[\frac{1}{2}\widetilde{\psi_1}(\tau_1)-(\psi_1,1)\right]d\tau_1+(1-x)\int\limits_0^x\left[\frac{1}{2}\widetilde{\psi_1}(\tau)-(\psi_1,1)\right]d\tau-$$
$$-\frac{1}{2}\widetilde{W}(x)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^2}(\psi_1,\cos\rho_n\xi)+(W,1), \tag{12}$$

где $\widetilde{\psi_1}(x)(\widetilde{W}(x))$ есть четное 1-периодическое продолжение функции $\psi_1(x)+$ $+\psi_1(1-x)(W(x)+W(1-x))$, $x\in[0,\frac{1}{2}]$ и $W(x)=\int\limits_x^1\tau\psi_1(\tau)d\tau$.

Доказательство. Сначала найдем сумму ряда $S_1(x)$. Имеем $\frac{\sin\rho_n\xi}{n\pi}=2\int\limits_0^\xi\cos\rho_n\tau d\tau$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}a_n\cos\rho_n x=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(W,\cos\rho_n\xi)\cos\rho_n x$. Поскольку

$$(W,\cos\rho_n\xi)=(W(\xi)+W(1-\xi),\cos\rho_n\xi)_{\frac{1}{2}},$$

где $(f,g)_{\frac{1}{2}}=\int\limits_0^{1/2}f(\xi)g(\xi)d\xi$, то

$$-S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}a_n\cos\rho_n x=2\sum_{n=1}^{\infty}(W(\xi)+W(1-\xi),\cos\rho_n\xi)\cos\rho_n x.$$

Поэтому
$$S_1(x)=-\frac{1}{2}\widetilde{W}(x)+(W,1). \tag{13}$$

Для ряда $S_2(x)$ сначала рассмотрим

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\rho_n x = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_1(\xi) + \psi_1(1-\xi), \cos\rho_n\xi)_{\frac{1}{2}} \cos\rho_n x. \tag{14}$$

Этот ряд является рядом Фурье функции $\frac{1}{4}\widetilde{\psi_1}(x) - \frac{1}{2}(\psi_1, 1)$. Интегрируя (14), получаем

$$S_2(x) = (1-x)\int_0^x \left[\frac{1}{2}\widetilde{\psi_1}(\tau) - (\psi_1, 1)\right] d\tau. \tag{15}$$

А интегрируя (14) два раза, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} b_n \cos\rho_n x = -\int_0^x d\tau \int_0^\tau [\widetilde{\psi_1}(\tau_1) - 2(\psi_1, 1)]d\tau_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2}(\psi_1, \cos\rho_n\xi).$$

Поэтому

$$S_3(x) = \frac{1}{2}\int_0^x d\tau \int_0^\tau [\widetilde{\psi_1}(\tau_1) - 2(\psi_1, 1)]d\tau_1 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2}(\psi_1, \cos\rho_n\xi). \tag{16}$$

Из (13), (15) и (16) следует (12). □

Теорема 1. *Ряд $u_1(x,t)$ сходится равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [0,T]$ при любом $T > 0$, его сумма определяется формулой* (11)*, где $V(x)$ есть* (12)*, п.в. удовлетворяет уравнению* (5) *при $q(x) = 0$.*

Доказательство. Формула (11) сразу следует из лемм 3, 4, а доказательство последнего утверждения проводится, как и в [5, лемма 6], введением множества $M = \{x | x \in [-A, A], \widetilde{\psi_1'}(x), \widetilde{W(x)}'' \text{ конечны}\}$ и учетом того, что $\widetilde{\psi_1}(x) \in W_2^1[-A, A]$, $\widetilde{W}(x) \in W_2^2[-A, A]$ при любом $A > 0$. □

Продолжение следует.

Список литературы

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. Москва : Наука, 1969. 528 с.
2. *Хромов А. П.* Смешанная задача для однородного волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58, № 9. С. 1583–1596. https://doi.org/10.31857/S004446690002535-9, EDN: YYDVDF
3. *Курдюмов В. П., Хромов А. П., Халова В. А.* Смешанная задача для однородного волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью с суммируемым потенциалом // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 4. С. 444–456. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456, EDN: BEUDSC
4. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье // Доклады академии наук. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140. https://doi.org/10.7868/S0869565214260041, EDN: SJQEEN
5. *Хромов А. П.* Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 56, вып. 2. С. 239–251. https://doi.org/10.7868/S0044466916020149, EDN: VIPLNL

6. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Смешанная задача для волнового уравнения с суммируемым потенциалом в случае двух точечных условий разных порядков // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 4. С. 505–517. https://doi.org/10.1134/S0374064117040082, EDN: YIODUP
7. *Carleson L.* On convergence and growth of partial sums of Fourier series // Acta Mathematica. 1966. Vol. 116, iss. 1. P. 135–157. https://doi.org/10.1007/BF02392815
8. *Hunt R.* On the convergence of Fourier series // Orthogonal Expansious and Their Continuous Analogues: Proceedings of the Conference Held at Southern Illinois University, Edwardsville, April 27–29, 1967. Carbondale, JL : Southern Illinois University Press, 1968. P. 235–255.
9. *Ильин В. А.* О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1976. Т. 142. С. 148–155.
10. *Гуревич А. П., Курдюмов В. П., Хромов А. П.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 1. С. 13–29. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-1-13-29, EDN: VUSODD
11. *Расулов М. Л.* Метод контурного интеграла. Москва : Наука, 1964. 462 с.
12. *Вагабов А. И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д. : Изд-во Ростовского ун-та, 1994. 160 с.

References

1. Naymark M. A. *Lineynye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators]. Moscow, Nauka, 1969. 528 p. (in Russian).
2. Khromov A. P. Mixed problem for homogeneous wave equation with non-zero initial velocity. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2018, vol. 58, iss. 9, pp. 1531–1543. https://doi.org/10.1134/S0965542518090099
3. Kurdyumov V. P., Khromov A. P., Khalova V. A. Mixed problem for a homogeneous wave equation with a nonzero initial velocity with summable potential. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 4, pp. 444–456 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456, EDN: BEUDSC
4. Burlutskaya M. S., Khromov A. P. Resolvent approach in the Fourier method. *Doklady Mathematics*, 2014, vol. 90, iss. 2, pp. 545–548. https://doi.org/10.1134/S1064562414060076, EDN: UFVTOF
5. Khromov A. P. Behavior of the formal solution to a mixed problem for the wave equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, iss. 2, pp. 243–255. https://doi.org/10.1134/S0965542516020135, EDN: WSPZGX
6. Burlutskaya M. S., Khromov A. P. Mixed problem for the wave equation with integrable potential in the case of two-point boundary conditions of distinct orders. *Differential Equations*, 2017, vol. 53, iss. 4, pp. 497–508. https://doi.org/10.1134/S0012266117040085, EDN: XNEPDT
7. Carleson L. On convergence and growth of partial sums of Fourier series. *Acta Mathematica*, 1966, vol. 116, iss. 1, pp. 135–157. https://doi.org/10.1007/BF02392815
8. Hunt R. On the convergence of Fourier series. In: *Orthogonal Expansious and Their Continuous Analogues*. Proceedings of the Conference Held at Southern Illinois University, Edwardsville, April 27–29, 1967. Carbondale, JL, Southern Illinois University Press, 1968, pp. 235–255.
9. Il'in V. A. Existence of a reduced system of eigen- and associated functions for a nonselfadjoint ordinary differential operator. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1979, vol. 142, pp. 157–164. https://www.mathnet.ru/eng/tm2564

10. Gurevich A. P., Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Justification of the Fourier method in a mixed problem for a wave equation with a nonzero initial velocity. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, vol. 16, iss. 1, pp. 13–29 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-1-13-29, EDN: VUSODD
11. Rasulov M. L. *Metod konturnogo integrala* [Contour Integral Method]. Moscow, Nauka, 1964. 462 p. (in Russian).
12. Vagabov A. I. *Vvedeniye v spektral'nuyu chuvstvitel'nost' differentsial'nykh reaktsiy* [Introduction to the Spectral Theory of Differential Operators]. Rostov-on-Don, Rostov University Publ., 1994. 160 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 22.04.2022
Принята к публикации / Accepted 01.09.2022
Опубликована / Published 31.08.2023