Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 320–338
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 320–338
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-320-338, EDN: AKZMKQ

Научная статья
УДК 517.51

Принцип унитарного расширения в нульмерных локально компактных группах

С. Ф. Лукомский, Ю. С. Крусс

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83
Лукомский Сергей Федорович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, lukomskiisf@info.sgu.ru, https://orcid.org/0000-0003-3038-2698, AuthorID: 17323
Крусс Юлия Сергеевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, krussus@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-2146-5985, AuthorID: 848294

Аннотация. Цель статьи — разработка алгоритмов построения ступенчатых жестких фреймов в произвольной локально компактной нульмерной группе. Вначале указываем способ построения ступенчатой масштабирующей функции. Для построения масштабирующей функции используем ориентированное дерево и указываем условия на дерево, при котором оно порождает маску m_0 масштабирующей функции. Затем находим условия на маски $m_0, m_1, \ldots, m_q$, при которых соответствующие вейвлет функции $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_q$ порождают жесткий фрейм. Для этого используем принцип унитарного расширения. Используя найденные условия, указываем конструктивный способ построения таких масок. В заключение приводим примеры построения жестких фреймов.

Ключевые слова: жесткие вейвлет фреймы, нульмерные группы, масштабирующие функции, деревья, принцип унитарного расширения
Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00037, https://rscf.ru/project/22-21-00037/).
Для цитирования: *Лукомский С. Ф., Крусс Ю. С.* Принцип унитарного расширения в нульмерных локально компактных группах // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 320–338. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-320-338, EDN: AKZMKQ

Article

Unitary extension principle on zero-dimensional locally compact groups

S. F. Lukomskii, Iu. S. Kruss

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia
Sergei F. Lukomskii, lukomskiisf@info.sgu.ru, https://orcid.org/0000-0003-3038-2698, AuthorID: 17323
Iuliia S. Kruss, krussus@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-2146-5985, AuthorID: 848294

Abstract. In this article, we obtain methods for constructing step tight frames on an arbitrary locally compact zero-dimensional group. To do this, we use the principle of unitary extension. First, we indicate a method for constructing a step scaling function on an arbitrary zero-dimensional group. To construct the scaling function, we use an oriented tree and specify the conditions on the tree under which the tree generates the mask m_0 of a scaling function. Then we find conditions on the masks $m_0, m_1, \ldots, m_q$ under which the corresponding wavelet functions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_q$ generate a tight frame. Using these conditions, we indicate a way of constructing such masks. In conclusion, we give examples of the construction of tight frames.

Keywords: tight wavelet frames, zero-dimensional groups, refinable functions, trees, unitary extension principle

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-21-00037, https://rscf.ru/project/22-21-00037/).

For citation: Lukomskii S. F., Kruss Iu. S. Unitary extension principle on zero-dimensional locally compact groups. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 320–338 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-320-338, EDN: AKZMKQ

Введение

Жесткие вейвлет фреймы (их часто называют фреймами Парсеваля) на прямой являются важным инструментов в обработке изображений [1]. Жесткие вейвлет фреймы, основанные на кратномасштабном анализе (КМА), можно рассматривать как обобщение ортогональных вейвлетов, полученных из КМА. Основным инструментом их построения является принцип унитарного расширения и некоторые его модификации. В 1997 г. публикация [2] принципа унитарного расширения для построения жестких вейвлет фреймов в $\mathbb{R}$ повлекла новую волну как теоретических исследований, так и приложений к обработке информации. Полученные таким образом фреймы имеют быстрые алгоритмы как разложения, так и восстановления, чем и обусловлена их привлекательность. В качестве примера можно привести жесткие фреймы, построенные по центрированным B-сплайнам порядка m. Большой список публикаций на эту тему можно найти в [1].

Используя принцип унитарного расширения, удалось построить жесткие вейвлет фреймы в группах Виленкина [3] и в полях положительной характеристики [4, 5]. В поле $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел указан метод нахождения вейвлет фреймов по заданному КМА (V_n) с масштабирующей функцией φ и маской m_0 [6]. Доказывается, что вейвлеты $\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(r)} \in V_1$ порождают фрейм (с различными границами), если φ имеет компактный носитель и

$$\overline{\operatorname{span}\{\psi^{(j)}(x\dot{-}h) : j, h\}} = W_0,$$

где W_0 — ортогональное дополнение V_0 до V_1, т. е. $V_1 = V_0 \bigoplus W_0$. При построении этих фреймов не использовался принцип унитарного расширения, и полученные фреймы не являются жесткими. В случае произвольной нульмерной группы ортогональный КМА и соответствующие вейвлеты построены в [7], но методов построения жестких фреймов и даже примеров (кроме ортонормированных базисов) нет.

В этой статье предлагается метод построения жестких фреймов в произвольной локально компактной нульмерной группе, основанный на принципе унитарного расширения.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 приведены основные понятия и факты из теории нульмерных групп. В разд. 2 обсуждается вопрос построения масштабирующей функции φ и ее маски m_0. Для построения маски используется дерево, в вершинах которого стоят значения маски. В конструкции жестких вейвлет фреймов, основанных на КМА, функции $\psi^{(\ell)}$, порождающие жесткий вейвлет фрейм, ищутся из соотношения

$$\hat{\psi}^{(\ell)}(\chi) = \hat{\varphi}(\chi A^{-1}) m_\ell(\chi), \quad (\ell = 1, 2, \dots, q),$$

и задача построения вейвлетов $\psi^{(\ell)}$ сводится к нахождению масок m_ℓ. В теореме 3 (разд. 3) принцип унитарного расширения адаптирован для произвольной нульмерной группы. Указываются условия на маски m_ℓ, при которых система сжатий и сдвигов $p^{\frac{n}{2}}\psi^{(\ell)}(\mathcal{A}^n x \dot{-} h)$ образует жесткий фрейм, и дана конструкция таких масок. Приводятся примеры.

1. Нульмерные группы и их характеры

Пусть $(G, \dot{+})$ — локально компактная нульмерная абелева группа, топология в которой порождена системой открытых подгрупп [8]

$$\dots \supset G_{-n} \supset \dots \supset G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n \supset \dots ,$$

где $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = G$, $\bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = \{0\}$. p — порядок смежных классов G_n/G_{n+1} при всех $n \in \mathbb{Z}$. Будем всегда предполагать, что p — простое число. Последовательность подгрупп G_n обычно называют *базисной цепочкой*.

В этом случае база топологии образована всевозможными смежными классами $G_n \dot{+} g$, $g \in G$. При каждом $n \in \mathbb{Z}$ выбираем элемент $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ и фиксируем его. Тогда любой элемент $g \in G$ однозначно представим в виде

$$g = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n, \quad a_n = \overline{0, p-1}. \tag{1}$$

Сумма (1) содержит конечное число слагаемых с отрицательными номерами. Систему $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ будем называть *базисной*. Отображение $\lambda : G \to [0, +\infty)$, определенное равенством $\lambda(g) = \sum\limits_{n=m}^{+\infty} a_n p^{-n-1}$, называют отображением Монна [9]. Очевидно $\lambda(G_n) = [0, p^{-n}]$.

Классическим примером нульмерной группы является группа Виленкина и группа p-адических чисел (см. [8, ч. 1, § 2]). Через X будем обозначать набор характеров группы $(G, \dot{+})$, который есть группа относительно умножения. Пусть далее $G_n^\perp = \{\chi \in X : \forall x \in G_n\ , \chi(x) = 1\}$ — аннулятор подгруппы G_n. Каждый аннулятор $G_n^\perp$ является группой относительно умножения, и подгруппы $G_n^\perp$ образуют возрастающую последовательность

$$\dots \subset G_{-n}^\perp \subset \dots \subset G_0^\perp \subset G_1^\perp \subset \dots \subset G_n^\perp \subset \dots \tag{2}$$

с условиями $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^\perp = X$, $\bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^\perp = \{1\}$.

Смежные классы $G_{n+1}^\perp / G_n^\perp$ имеют порядок p. Группа характеров X есть нульмерная с базисной цепочкой (2). Эта группа может быть снабжена топологией, использующей базисную цепочку (2). Семейство смежных классов $G_n^\perp \cdot \chi$, $\chi \in X$

можно выбрать в качестве базы топологии. Семейство таких смежных классов вместе с пустым множеством образует полукольцо $\mathscr{X}$. Используя смежные классы $G_n^{\perp} \cdot \chi$, можно определить меру ν посредством равенств $\nu(G_n^{\perp} \cdot \chi) = \nu(G_n^{\perp}) = p^n$. Мера ν может быть продолжена на σ-алгебру измеримых множеств стандартным способом. Используя эту меру, можно построить абсолютно сходящийся интеграл $\int\limits_X F(\chi)\, d\nu(\chi)$. Интеграл $\int\limits_G f(x)\, d\mu(x)$ определяется аналогично.

Значение $\chi(g)$ характера χ на элементе $g \in G$ будем обозначать (χ, g). Преобразование Фурье $\widehat{f}$ функции $f \in L_2(G)$ определяется равенством

$$\widehat{f}(\chi) = \int_G f(x)\overline{(\chi, x)}\, d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_{G_{-n}} f(x)\overline{(\chi, x)}\, d\mu(x),$$

где предел понимается по норме $L_2(X)$. Для любой $f \in L_2(G)$ справедлива формула обращения

$$f(x) = \int_X \widehat{f}(\chi)(\chi, x)\, d\nu(\chi) = \lim_{n\to+\infty} \int_{G_n^{\perp}} \widehat{f}(\chi)(\chi, x)\, d\nu(\chi),$$

где предел также понимается по норме $L_2(G)$. Если $f, g \in L_2(G)$, то справедлива формула Планшереля [8]

$$\int_G f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x) = \int_X \widehat{f}(\chi)\overline{\widehat{g}(\chi)}\, d\nu(\chi).$$

С введенной топологией группа X характеров также будет локально компактной нульмерной группой. Кроме того, имеется двойственная ситуация: каждый элемент $x \in G$ есть характер группы X, и G_n есть аннулятор подгруппы $G_n^{\perp}$. В дальнейшем объединение дизъюнктных множеств E_j будем обозначать через $\bigsqcup E_j$.

Для произвольного $n \in \mathbb{Z}$ выберем характер $r_n \in G_{n+1}^{\perp} \setminus G_n^{\perp}$ и зафиксируем его. Совокупность функций $(r_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ называется системой Радемахера. Любой характер χ может быть записан в виде произведения $\chi = \prod_{j=-m}^{+\infty} r_j^{\alpha_j}$, $\alpha_j = \overline{0, p-1}$.

Обозначим

$$H_0 = \{h \in G : h = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \ldots \dot{+} a_{-s}g_{-s},\ s \in \mathbb{N},\ a_j = \overline{0, p-1}\},$$
$$H_0^{(s)} = \{h \in G : h = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \ldots \dot{+} a_{-s}g_{-s},\ a_j = \overline{0, p-1}\}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

При отображении Монна $\lambda(H_0) = \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigsqcup \{0\}$ и $\lambda(H_0^{(s)}) = \mathbb{N}_0 \bigcap [0, p^{s-1}]$. Это означает, что H_0 есть аналог множества $\mathbb{N}_0$ целых неотрицательных чисел.

Определение 1. Определим отображение $\mathcal{A}\colon G \to G$ равенством $\mathcal{A}x := \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_{n-1}$, где $x = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n \in G$. Так как каждый элемент $x \in G$ однозначно представляется в виде $x = \sum a_n g_n$, то отображение $\mathcal{A}\colon G \to G$ взаимно однозначно. Отображение $\mathcal{A}$ называется *оператором растяжения*, если $\mathcal{A}(x \dot{+} y) = \mathcal{A}x \dot{+} \mathcal{A}y$ для всех $x, y \in G$.

Отметим, что если G — группа Виленкина ($p \cdot g_n = 0$) или группа всех p-адических чисел ($p \cdot g_n = g_{n+1}$), то $\mathcal{A}$ есть аддитивный оператор и, следовательно, оператор растяжения. Более того, если существуют фиксированные числа $c_1, c_2, \ldots, c_\tau = \overline{0, p-1}$ такие, что $pg_n = c_1 g_{n+1} \dot{+} c_2 g_{n+2} \dot{+} \cdots \dot{+} c_\tau g_{n+\tau}$, тогда оператор $\mathcal{A}$ будет аддитивным. Будем предполагать, что это условие выполнено. По определению положим $(\chi\mathcal{A}, x) = (\chi, \mathcal{A}x)$. Ясно, что $\mathcal{A}g_n = g_{n-1}, r_n\mathcal{A} = r_{n+1}$, $\mathcal{A}G_n = G_{n-1}, G_n^{\perp}\mathcal{A} = G_{n+1}^{\perp}$.

Лемма 1 ([10]). *Для любой нульмерной группы:*
1) $\int\limits_{G_0^\perp} (\chi, x)\, d\nu(\chi) = \mathbf{1}_{G_0}(x)$; 2) $\int\limits_{G_0} (\chi, x)\, d\mu(x) = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$;
3) $\int\limits_{G_n^\perp} (\chi, x)\, d\nu(\chi) = p^n \mathbf{1}_{G_n}(x)$; 4) $\int\limits_{G_n} (\chi, x)\, d\mu(x) = \frac{1}{p^n}\mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi)$.

Лемма 2 ([10]). *Пусть* $\chi_{n,s} = r_n^{\alpha_n} r_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \dots r_{n+s}^{\alpha_{n+s}}$ *есть характер, не принадлежащий* $G_n^\perp$. *Тогда* $\int\limits_{G_n^\perp \chi_{n,s}} (\chi, x)\, d\nu(\chi) = p^n (\chi_{n,s}, x)\mathbf{1}_{G_n}(x)$.

Лемма 3 ([10]). *Пусть* $h_{n,s} = a_{n-1}g_{n-1} \dot{+} a_{n-2}g_{n-2} \dot{+} \dots \dot{+} a_{n-s}g_{n-s} \notin G_n$. *Тогда* $\int\limits_{G_n \dot{+} h_{n,s}} (\chi, x)\, d\mu(x) = \frac{1}{p^n}(\chi, h_{n,s})\mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi)$.

Определение 2 ([10]). Пусть $M, N \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$ множество функций $f \in L_2(G)$ таких, что: 1) $\operatorname{supp} f \subset G_{-N}$; 2) f постоянна на смежных классах $G_M \dot{+} g$. Класс $\mathfrak{D}_{G_{-N}}(G_M^\perp)$ определяется аналогично.

Лемма 4 ([11]). *Для любых фиксированных* $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s = 0, 1, \dots, p-1$ *множество* H_0 *есть ортонормированный базис в* $L_2(G_0^\perp r_0^{\alpha_0} r_1^{\alpha_1} \dots r_s^{\alpha_s})$.

Лемма 5 ([11]). *Пусть* $s \in \mathbb{N}$. *Для любых фиксированных* $\alpha_{-1}, \dots, \alpha_{-s} = \overline{0, p-1}$ *семейство* $p^{\frac{s}{2}} \mathcal{A}^s H_0$ *есть ортонормированный базис в* $L_2(G_{-s}^\perp r_{-s}^{\alpha_{-s}} \dots r_{-1}^{\alpha_{-1}})$.

Лемма 6. *Если* $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_0}(G_{-N})$, *то* φ *периодична с любым периодом* $g \in G_0$.

Это очевидно.

Для данной функции $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$ определяем подпространства

$$V_n = \overline{\operatorname{span}\{\varphi(\mathcal{A}^n \cdot \dot{-} h), h \in H_0\}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Будем говорить, что подпространства $\{V_n\}$ образуют КМА в $L_2(G)$, если выполнены условия

$$V_n \subset V_{n+1}, n \in \mathbb{Z}, \quad \overline{\cup_n V_n} = L_2(G), \quad \cap_n V_n = \{0\}.$$

Функцию $\varphi \in L_2(G)$ называют *масштабирующей*, если

$$\varphi(x) = p \sum_{h \in H_0} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h) \tag{3}$$

для некоторой последовательности $(\beta_h) \in l^2$. Равенство (3) называют *масштабирующим уравнением*. В частотной форме равенство (3) имеет вид

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}), \quad m_0(\chi) = \sum_{h \in H_0} \beta_h \overline{(\chi\mathcal{A}^{-1}, h)},$$

где m_0 — маска для (3).

Лемма 7 ([11]). *Если масштабирующая функция* $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$, $M, N \in \mathbb{N}$, *то масштабирующее уравнение имеет вид*

$$\varphi(x) = p \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h).$$

Если система сдвигов $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ образует ортонормированный базис в V_0, то КМА (V_n) называют ортогональным. Ортогональный КМА используют для построения ортогональных аффинных систем, которые образуют базис $L_2(\mathbb{G})$.

Теорема 1 ([7]). *Пусть $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_0}(G_{-N})$ — масштабирующая функция и $|\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$. Тогда φ порождает ортогональный КМА .*

Условие $|\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$ можно заменить на более слабое.

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_0}(G_{-N})$ — масштабирующая функция, для которой $\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp) = 1$ и $|\hat{\varphi}(\chi)| \leqslant 1$. Тогда φ порождает КМА.*

Доказательство. 1. Покажем, что $V_0 \subset V_1$. Заметим, что φ периодична с любым периодом $a_0g_0\dot{+}a_1g_1\dot{+}\ldots\dot{+}a_\nu g_\nu$. В частности, если $x \in G_0\dot{+}a_{-1}g_{-1}\dot{+}\ldots\dot{+}a_{-s}g_{-s}$, то $(x\dot{+}a_0g_0\dot{+}a_1g_1\dot{+}\ldots\dot{+}a_\nu g_\nu) \in G_0\dot{+}a_{-1}g_{-1}\dot{+}a_{-2}g_{-2}\dot{+}\ldots\dot{+}a_{-s}g_{-s}$. Это означает, что

$$\varphi(x\dot{\pm}(a_0g_0\dot{+}a_1g_1\dot{+}\ldots\dot{+}a_\nu g_\nu)) = \varphi(x).$$

Пусть $f \in V_0$. По определению подпространства V_0 для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $c_{0,\tilde{h}}$ такие, что

$$\|f(\cdot) - \sum_{\tilde{h}\in h_0^{(m)}} c_{0,\tilde{h}}\varphi(\cdot\dot{-}\tilde{h})\|_2 < \varepsilon. \tag{4}$$

Так как φ масштабирующая, то

$$\varphi(x\dot{-}\tilde{h}) = \sum_{h\in H_0^{(N+1)}} \beta_h\varphi(\mathcal{A}x\dot{-}\mathcal{A}\tilde{h}\dot{-}h). \tag{5}$$

Ввиду периодичности

$$\varphi(\mathcal{A}x\dot{-}\mathcal{A}\tilde{h}\dot{-}h) = \varphi(\mathcal{A}x\dot{-}\alpha_{-1}g_{-1}\dot{-}\alpha_{-2}g_{-2}\dot{-}\cdot\dot{-}\alpha_{-t}g_{-t})$$

для некоторых α_j. Поэтому из (4) и (5) следует $f \in V_1$.

2. Покажем, что $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \{0\}$. Если $f \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V_n$, то $f(x) = \mathrm{const}$ на G_n для всех n. Из этого следует, что $f(x) = 0$.

3. Равенство $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n} = L_2(G)$ следует из леммы 13. Теорема доказана. □

Можно выбрать маску $m_0(\chi) \in \mathfrak{D}_{G_{-N}^\perp}(G_0^\perp)$ так, что $m_0(G_{-N}^\perp) = 1$, $|m_0(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$. Тогда соответствующая масштабирующая функция φ порождает ортогональный КМА. В этом случае ортогональные вейвлеты $\psi_\ell(x)$ определяются равенствами

$$\psi_\ell(x) = \sum_{h\in H_0} \beta_h^{(\ell)}\varphi(\mathcal{A}x\dot{-}h). \tag{6}$$

В частотной форме (6) записывается в виде

$$\hat{\psi}_\ell(\chi) = \hat{\varphi}(\chi A^{-1})m_\ell(\chi), \quad \ell = 1, 2, \ldots, p-1,$$

где $m_\ell(\chi) = m_0(\chi r_0^{-\ell})$.

Система $(\psi_\ell(x\dot{-}h))_{h\in H_0, \ell=1,2,\ldots,p-1}$ есть ортогональный базис ортогонального дополнения $V_1 \ominus V_0 = \{x \in V_1 : x \perp V_0\}$ [7].

Если сдвиги $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ не ортогональны, то можно пытаться выбрать функции $\psi_\ell(x)$ так, чтобы для любой $f\in L_2(G)$

$$f(x)=\sum_{\ell=1}^{r}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{h\in H_0}(f,\psi_\ell(\mathcal{A}^n\cdot\dot{-}h))\psi_\ell(\mathcal{A}^n x\dot{-}h).$$

В этом случае аффинная система $\psi_\ell(\mathcal{A}^n x\dot{-}h)$ называется *фреймом Парсеваля* или *жестким вейвлет фреймом*.

В статье построены жесткие вейвлет фреймы на произвольной нульмерной локально компактной группе. Поскольку в произвольной нульмерной группе неизвестно, как ведет себя маска за пределами подгруппы $G_1^\perp$, рассматривается случай, когда масштабирующая функция $\varphi(x)\in\mathfrak{D}_{G_0}(G_{-N})$, что эквивалентно $\hat{\varphi}(\chi)\in\mathfrak{D}_{G_{-N}^\perp}(G_0^\perp)$.

2. Масштабирующие функции в нульмерных группах

В этом параграфе предложен способ построения масштабирующих функций $\varphi\in\mathfrak{D}_{G_0}(G_{-N})$, т.е. $\hat{\varphi}\in\mathfrak{D}_{G_{-N}^\perp}(G_0^\perp)$.

Очевидно, что маска

$$m_0(\chi)=\sum_{h\in H_0^{(N+1)}}\beta_h\overline{(\chi,A^{-1}h)}\tag{7}$$

постоянна на смежных классах $G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}}\dots r_{-N+s}^{\alpha_{-N+s}}$.

Пусть $m_0(G_0^\perp\mathcal{A}^{-N})=1$. Тогда $\hat{\varphi}(\chi)=m_0(\chi)m_0(\chi\mathcal{A}^{-1})\dots m_0(\chi\mathcal{A}^{-N})$.

Обозначим значения маски на $G_{-N}^\perp$ через

$$\lambda_j=\lambda_{\alpha_{-N}\alpha_{-N+1}\dots\alpha_0}:=m_0(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}}r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}}\dots r_0^{\alpha_0}).$$

Здесь $j=\alpha_{-N}+\alpha_{-N+1}p+\ldots+\alpha_0p^N$.

Матрица $p^{-\frac{N+1}{2}}\overline{(\chi,\mathcal{A}^{-1}h)}$ унитарна. Поэтому маска m_0 определяется своими значениями на смежных классах

$$G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}}r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}}\dots r_0^{\alpha_0}.\tag{8}$$

Так как $(\chi\mathcal{A}^{-1},h)$ постоянна на смежных классах (8), имеем

$$(\chi\mathcal{A}^{-1},h)=(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}}\dots r_0^{\alpha_0},a_{-1}g_0\dot{+}a_{-2}g_{-1}\dot{+}\ldots+a_{-N-1}g_{-N})=A_{m,n},$$

где $m=\alpha_{-N}+\alpha_{-N+1}p+\ldots+\alpha_0p^N,\ n=a_{-1}+a_{-2}p+\ldots+a_{-N-1}p^N$.

Запишем равенство (7) в виде

$$\begin{pmatrix}A_{0,0}&A_{0,1}&\dots&A_{0,p^{N+1}-1}\\A_{1,0}&A_{1,1}&\dots&A_{1,p^{N+1}-1}\\A_{2,0}&A_{2,1}&\dots&A_{2,p^{N+1}-1}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\A_{p^{N+1}-1,0}&A_{p^{N+1}-1,1}&\dots&A_{p^{N+1}-1,p^{N+1}-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_0\\\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_{p^{N+1}-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_0\\\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_{p^{N+1}-1}\end{pmatrix}.$$

Для нахождения λ_j строим дерево T (рис. 1).

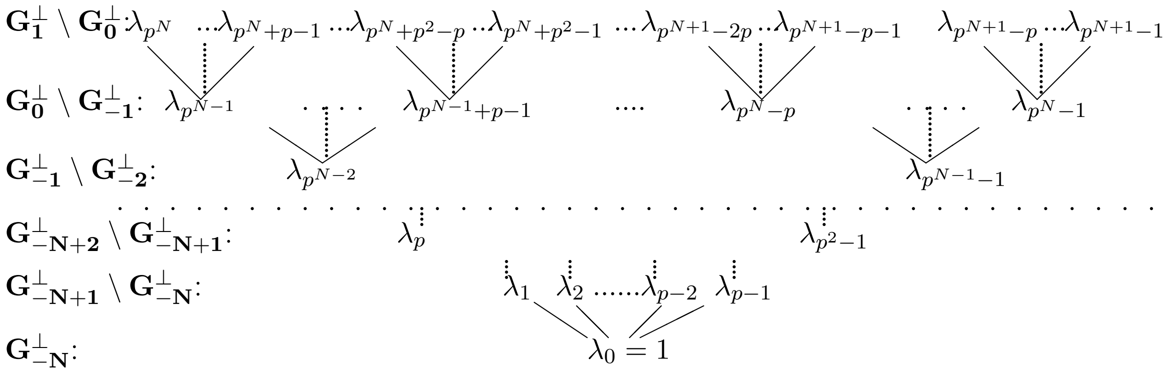

Рис. 1. Дерево T / Fig. 1. A tree T

В этом дереве числа $\lambda_{j_s} : p^{s-1} \leqslant j_s \leqslant p^s - 1$, $s \geqslant 0$ образуют s-й уровень. Для фиксированного числа $s \in \mathbb{N}$ рассмотрим все пути $\lambda_{j_s} \to \lambda_{j_{s-1}} \to \ldots \to \lambda_{j_0} = \lambda_0$ от λ_{j_s} к корню λ_0. Множество всех произведений $\lambda_{j_s}\lambda_{j_{s-1}} \ldots \lambda_{j_0}$ состоит из всех значений функции $\hat{\varphi}(\chi)$ на множестве $G_{-N+s}^\perp \setminus G_{-N+s-1}^\perp$.

1. Выберем числа λ_j так, что на каждом пути есть, по крайней мере, один ноль. Тогда $\hat{\varphi}(G_1^\perp \setminus G_0^\perp) = 0$.

2. Пусть $M < N$ — фиксированные числа. Если все произведения $\lambda_{j_{N-M+1}}\lambda_{j_{N-M}} \ldots \times \times \lambda_{j_1}\lambda_{j_0} = 0$, но существуют произведения $\lambda_{j_{N-M}}\lambda_{j_{N-M-1}} \ldots \lambda_{j_1}\lambda_{j_0} \neq 0$, то $\hat{\varphi}(G_{-M+1}^\perp \setminus G_{-M}^\perp) = 0$. Это означает, что $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{G_{-N}^\perp}(G_{-M}^\perp)$ но $\hat{\varphi} \notin \mathfrak{D}_{G_{-N}^\perp}(G_{-M-1}^\perp)$. В частности, для $M = 0$ имеем $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{G_{-N}^\perp}(G_0^\perp)$.

Таким образом, имеем некоторый способ построения ступенчатых масштабирующих функций $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_{-M}}(G_{-N})$.

Пример 1. В дереве T положим $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{p^N-1} = 1$ и $\lambda_j = 0$ для $p^N \leqslant j \leqslant p^{N+1} - 1$. В этом случае маска $m_0(\chi) = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$ и соответствующая масштабирующая функция $\varphi(x) = \mathbf{1}_{G_0}(x)$ порождают ортогональный КМА. Вейвлеты $\psi_\ell(x)$ определяются равенством [7]

$$\hat{\psi}_\ell(\chi) = \hat{\varphi}(\chi A^{-1}) m_\ell(\chi), \quad \ell = 1, 2, \ldots, p-1,$$

где $m_\ell(\chi) = m_0(\chi r_0^{-\ell})$.

Пример 2. Пусть $p = 3, N = 1$. Построим дерево (рис. 2).

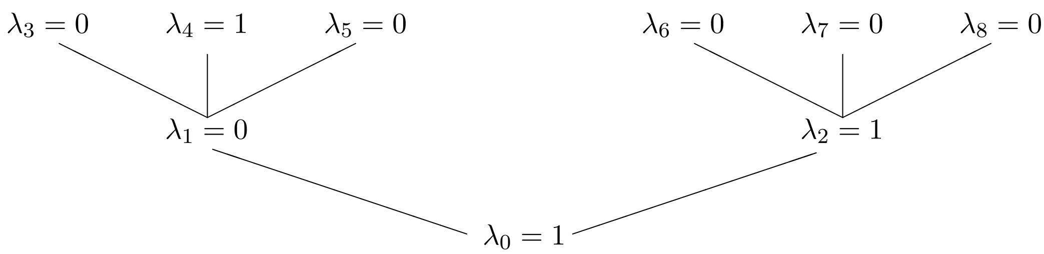

Рис. 2. Дерево T при $p = 3$, $N = 1$
Fig. 2. A tree T for $p = 3$, $N = 1$

Это дерево порождает маску $m_0(\chi) = \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp} + \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp r_{-1}^2} + \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp r_{-1}^1 r_0^1}$ и масштабирующую функцию $\hat{\varphi}(\chi) = \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp}(\chi) + \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp r_{-1}^2}(\chi) \neq \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$. В разд. 3 покажем, что φ порождает неортогональный КМА и жесткий вейвлет фрейм.

3. Жесткие фреймы в нульмерных группах

Для функции $\varphi \in L_2(G)$ используется стандартное обозначение

$$\varphi_{n,h} = p^{\frac{n}{2}}\varphi(\mathcal{A}^n \cdot \dot{-} h), \quad h \in H_0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Лемма 8. *Имеет место равенство*

$$\hat{\varphi}_{n,h}(\chi) = \frac{1}{p^{\frac{n}{2}}}\overline{(\chi\mathcal{A}^{-n}, h)}\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-n}).$$

Лемма 9. *Пусть* $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$ — *масштабирующая функция, для которой* $\hat{\varphi}(G_{-N}^{\perp}) = 1$. *Тогда*

$$\liminf_{n\to+\infty}\Big(\sum_{h\in H_0}|(f,\varphi_{n,h})|^2\Big) \geqslant \|f\|_2^2, \tag{9}$$

$$\lim_{n\to-\infty}\Big(\sum_{h\in H_0}|(f,\varphi_{n,h})|^2\Big) = 0. \tag{10}$$

Если $|\hat{\varphi}| \leqslant 1$, *то*

$$\sum_{h\in H_0}|(f,\varphi_{n,h})|^2 \leqslant \|f\|_2^2, \tag{11}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{h\in H_0}|(f,\varphi_{n,h})|^2\Big) = \|f\|_2^2.$$

Доказательство. Обозначим

$$E_1 = \{\chi \in G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \ldots r_{-1}^{\alpha_{-1}} : \hat{\varphi}(\chi) \neq 0\},$$
$$E_0 = \{\chi \in G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}} : \hat{\varphi}(\chi) \neq 0, \alpha_0 + \ldots + \alpha_{M-1} \neq 0\}.$$

Для скалярного произведения $(f,\varphi_{n,h})$ имеем

$$\left(\sum_{h\in H_0}|(f,\varphi_{n,h})|^2\right)^{1/2} = p^{\frac{n}{2}}\left(\sum_{h\in H_0}|\int_G f(x)\overline{\varphi(\mathcal{A}^n x \dot{-} h)}d\mu(x)|^2\right)^{1/2} =$$
$$= p^{\frac{n}{2}}\left(\sum_{h\in H_0}|\int_X \hat{f}(\chi)\frac{1}{p^n}(\chi\mathcal{A}^{-n}, h)\overline{\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-n})}d\nu(\chi)|^2\right)^{1/2} =$$
$$= p^{\frac{n}{2}}\left(\sum_{h\in H_0}|\int_X p^n\hat{f}(\chi\mathcal{A}^n)\frac{1}{p^n}(\chi, h)\overline{\hat{\varphi}(\chi)}d\nu(\chi)|^2\right)^{1/2} =$$
$$= p^{\frac{n}{2}}\left(\sum_{h\in H_0}|\int_X \hat{f}(\chi\mathcal{A}^n)(\chi, h)\overline{\hat{\varphi}(\chi)}d\nu(\chi)|^2\right)^{1/2} \geqslant$$
$$\geqslant p^{\frac{n}{2}}\left(\sum_{h\in H_0}|\int_{E_1} \hat{f}(\chi\mathcal{A}^n)(\chi, h)\overline{\hat{\varphi}(\chi)}d\nu(\chi)|^2\right)^{1/2} -$$
$$-p^{\frac{n}{2}}\Big(\sum_{h\in H_0}|\int_{E_0} \hat{f}(\chi\mathcal{A}^n)(\chi, h)\overline{\hat{\varphi}(\chi)}d\nu(\chi)|^2\Big)^{1/2} = \sum_1 - \sum_0.$$

Используя равенство Парсеваля, вычисляем $\sum\limits_1$:

$$\sum_1 = p^{\frac{n}{2}}\Big(\sum_{h\in H_0}|\int_{E_1}\hat f(\chi\mathcal{A}^n)(\chi,h)\overline{\hat\varphi(\chi)}d\nu(\chi)|^2\Big)^{1/2} =$$

$$= p^{\frac{n}{2}}\Big(\sum_{h\in H_0}|\int_{G_0^\perp}\hat f(\chi\mathcal{A}^n)\overline{\hat\varphi(\chi)}(\chi,h)d\nu(\chi)|^2\Big)^{1/2} =$$

$$= p^{\frac{n}{2}}\Big(\int_{G_0^\perp}|\hat f(\chi\mathcal{A}^n)\overline{\hat\varphi(\chi)}|^2d\nu(\chi)\Big)^{1/2} \geqslant p^{\frac{n}{2}}\Big(\int_{G_{-N}^\perp}|\hat f(\chi\mathcal{A}^n)|^2d\nu(\chi)\Big)^{1/2} =$$

$$= \Big(\int_{G_{-N}^\perp\mathcal{A}^n}|\hat f(\chi)|^2d\nu(\chi)\Big)^{1/2} \to \|\hat f\|_2 \tag{12}$$

при $n\to+\infty$.

Теперь вычисляем сумму $\sum\limits_0$. Используя инвариантность интеграла относительно сдвига и равенство $\mathbf{1}_{G_0^\perp r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}}(\chi r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}) = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$, получаем

$$\sum_0 = p^{\frac{n}{2}}\Big(\sum_{h\in H_0}\Big|\int_{E_0}\hat f(\chi\mathcal{A}^n)(\chi,h)\overline{\hat\varphi(\chi)}d\nu(\chi)\Big|^2\Big)^{1/2} =$$

$$= p^{\frac{n}{2}}\Big(\sum_{h\in H_0}\Big|\int_{G_M^\perp\setminus G_0^\perp}\hat f(\chi\mathcal{A}^n)(\chi,h)\overline{\hat\varphi(\chi)}d\nu(\chi)\Big|^2\Big)^{1/2} =$$

$$= p^{\frac{n}{2}}\Big(\sum_{h\in H_0}\Big|\int_X\mathbf{1}_{G_M^\perp\setminus G_0^\perp}(\chi)\hat f(\chi\mathcal{A}^n)(\chi,h)\overline{\hat\varphi(\chi)}d\nu(\chi)\Big|^2\Big)^{1/2} =$$

$$= p^{\frac{n}{2}}\Big(\sum_{h\in H_0}|\sum_{\alpha_0,\dots,\alpha_{M-1},}\int_X\mathbf{1}_{G_0^\perp r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}}(\chi)\hat f(\chi\mathcal{A}^n)(\chi,h)\overline{\hat\varphi(\chi)}d\nu(\chi)\Big|^2\Big)^{1/2} =$$

$$= p^{\frac{n}{2}}\Big(\sum_{h\in H_0}\Big|\sum_{\alpha_0,\dots,\alpha_{M-1},}\int_X\mathbf{1}_{G_0^\perp r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}}(\chi r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})\times$$

$$\times\hat f(\chi r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}\mathcal{A}^n)(\chi r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}},h)\overline{\hat\varphi(\chi r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})}d\nu(\chi)\Big|^2\Big)^{1/2} =$$

$$= p^{\frac{n}{2}}\Big(\sum_{h\in H_0}\Big|\sum_{\alpha_0,\dots,\alpha_{M-1},}\int_{G_0^\perp}\hat f(\chi r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}\mathcal{A}^n)(\chi r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}},h)\times$$

$$\times\overline{\hat\varphi(\chi r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})}d\nu(\chi)\Big|^2\Big)^{1/2}.$$

Применяя неравенство Минковского в правой части и учитывая равенство

$$|(r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}},h)| = 1,$$

имеем

$$\sum_0 \leqslant p^{\frac{n}{2}}\sum_{\alpha_0,\dots,\alpha_{M-1},}\Big(\sum_{h\in H_0}\Big|\int_{G_0^\perp}\hat f(\chi r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}\mathcal{A}^n)(\chi r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}},h)\times$$

$$\times\overline{\hat{\varphi}(\chi r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})}d\nu(\chi)\Big|^2\Bigg)^{1/2} =$$

$$= p^{\frac{n}{2}}\sum_{\alpha_0,\dots,\alpha_{M-1},}\Bigg(\sum_{h\in H_0}\Big|\int_{G_0^\perp}\hat{f}(\chi r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}\mathcal{A}^n)\overline{\hat{\varphi}(\chi r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})}(\chi,h)d\nu(\chi)\Big|^2\Bigg)^{1/2}.$$

Используя равенство Парсеваля для системы H_0 на $G_0^\perp$ и инвариантность интеграла, получаем окончательно

$$\sum_0 \leqslant p^{\frac{n}{2}}\sum_{\alpha_0,\dots,\alpha_{M-1},}\Bigg(\int_{G_0^\perp}|\hat{f}(\chi r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}\mathcal{A}^n)\overline{\hat{\varphi}(\chi r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})}|^2 d\nu(\chi)\Bigg)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant p^{\frac{n}{2}}\max|\hat{\varphi}|\sum_{\alpha_0,\dots,\alpha_{M-1},}\big(\int_{G_0^\perp}|\hat{f}(\chi r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}\mathcal{A}^n)|^2 d\nu(\chi)\big)^{1/2} = p^{\frac{n}{2}}\max|\hat{\varphi}|\times$$

$$\times\sum_{\alpha_0,\dots,\alpha_{M-1},}\big(\int_X \mathbf{1}_{G_0^\perp r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}}(\chi r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|\hat{f}(\chi r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}\mathcal{A}^n)|^2 d\nu(\chi)\big)^{1/2} =$$

$$= p^{\frac{n}{2}}\max|\hat{\varphi}|\sum_{\alpha_0,\dots,\alpha_{M-1},}\big(\int_X \mathbf{1}_{G_0^\perp r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}}(\chi)|\hat{f}(\chi\mathcal{A}^n)|^2 d\nu(\chi)\big)^{1/2} =$$

$$= p^{\frac{n}{2}}\max|\hat{\varphi}|\sum_{\alpha_0,\dots,\alpha_{M-1},}\big(\frac{1}{p^n}\int_X \mathbf{1}_{G_0^\perp r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}}(\chi\mathcal{A}^{-n})|\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi)\big)^{1/2} =$$

$$= \max|\hat{\varphi}|\sum_{\alpha_0,\dots,\alpha_{M-1},}\big(\int_X \mathbf{1}_{G_0^\perp r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}}(\chi\mathcal{A}^{-n})|\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi)\big)^{1/2} =: \max|\hat{\varphi}|S(n). \qquad (13)$$

Так как $G_0^\perp r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}} \subset X\setminus G_0^\perp$, то $S(n)\to 0$ при $n\to+\infty$. В то же время

$$S(n) \leqslant \int_X \mathbf{1}_{G_0^\perp r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}}(\chi\mathcal{A}^{-n})|\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) \leqslant \int_{G_M^\perp\mathcal{A}^n}|\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi)\to 0$$

при $n\to-\infty$. Используя (12) и (13), получаем (9), (10).

Если $|\hat{\varphi}|\leqslant 1$, то по аналогии с (12) имеем

$$\sum_1 \leqslant p^{\frac{n}{2}}\big(\int_{G_0^\perp}|\hat{f}(\chi\mathcal{A}^n)|^2 d\nu(\chi)\big)^{1/2} = \Big(\int_{G_0^\perp\mathcal{A}^n}|\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi)\Big)^{1/2}\to\|\hat{f}\|_2.$$

при $n\to+\infty$, и лемма доказана. □

Определение 3. Пусть $\varphi\in\mathfrak{D}_{G_0}(G_{-N})$ — масштабирующая функция, $\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp)=1$ и $|\hat{\varphi}|\leqslant 1$. *Квазиинтерполяционный многочлен* определяется равенством

$$\mathcal{P}_n : f\mapsto\sum_{h\in H_0}(f,\varphi_{n,h})\varphi_{n,h}$$

для произвольной $f\in L_2(G)$.

Лемма 10. *Для любой функции* $f\in L_2(G)$ $\lim\limits_{n\to-\infty}\mathcal{P}_n f = 0$.

Доказательство. Так как $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_0}(G_{-N})$ и $|\hat{\varphi}| \leqslant 1$, то

$$\| \sum_{h\in H_0} b_h \varphi(x \dot{-} h)\|_2^2 = \| \sum_{h\in H_0} b_h \hat{\varphi}(\chi)\overline{(\chi,h)}\|_2^2 = \int_X |\sum_{h\in H_0} b_h \hat{\varphi}(\chi)\overline{(\chi,h)}|^2 d\nu(\chi) =$$
$$= \int_{G_0^\perp} |\hat{\varphi}(\chi)\sum_{h\in H_0} b_h(\chi,h)|^2 d\nu(\chi) \leqslant \int_{G_0^\perp} |\sum_{h\in H_0} b_h(\chi,h)|^2 d\nu(\chi) = \sum_{h\in H_0}|b_h|^2$$

и

$$\| \sum_{h\in H_0} b_h \varphi_{n,h}\|_2 \leqslant (\sum_h |b_h|^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

Это означает, что $\varphi_{n,h}$ — бесселева система. Используя (10), получаем, что

$$\| \sum_{h\in H_0} (f,\varphi_{n,h})\varphi_{n,h}\|_2 \leqslant \Big(\sum_{h\in H_0} |(f,\varphi_{n,h})|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \to 0$$

при $n \to -\infty$. □

Лемма 11. *Имеет место оценка* $\|\mathcal{P}_n\| \leqslant 1$.

Доказательство. Из (14) и (11) очевидно получаем

$$\|\mathcal{P}_n f\|_2 = \| \sum_{h\in H_0} (f,\varphi_{n,h})\varphi_{n,h}\|_2 \leqslant \Big(\sum_{h\in H_0} |(f,\varphi_{n,h})|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|f\|_2.$$

□

Лемма 12. *Имеет место оценка* $\lim\limits_{n\to+\infty}(\mathcal{P}_n f, f) = \|f\|^2$.

Доказательство. Используя лемму 8, имеем

$$\widehat{\mathcal{P}_n(f)} = \frac{1}{p^{\frac{n}{2}}} \sum_{h\in H_0} (f,\varphi_{n,h})\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-n})\overline{(\chi\mathcal{A}^{-n},h)}. \tag{15}$$

Подставляя (15) в равенство

$$(\mathcal{P}_n f, f) = \int_X \widehat{\mathcal{P}_n(f)}\overline{\hat{f}} d\nu(\chi),$$

получаем

$$(\mathcal{P}_n f, f) = \frac{1}{p^{\frac{n}{2}}} \int_X \sum_{h\in H_0} (f,\varphi_{n,h})\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-n})\overline{(\chi\mathcal{A}^{-n},h)}\overline{\hat{f}} d\nu(\chi).$$

Используя равенство

$$(f,\varphi_{n,h}) = p^{\frac{n}{2}} \int_G f(x)\overline{\varphi(\mathcal{A}^n x \dot{-} h)} d\mu(x) = \frac{1}{p^{\frac{n}{2}}} \int_X \hat{f}(\xi)\overline{\hat{\varphi}(\xi\mathcal{A}^{-n})}(\xi\mathcal{A}^{-n},h) d\nu(\xi),$$

получаем $(\mathcal{P}_n f, f) =$

$$= \frac{1}{p^n} \int_X \sum_{h\in H_0} \int_X \hat{f}(\xi)\overline{\hat{\varphi}(\xi\mathcal{A}^{-n})}(\xi\mathcal{A}^{-n},h) d\nu(\xi) \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-n})\overline{(\chi\mathcal{A}^{-n},h)}\overline{\hat{f}} d\nu(\chi) =$$

$$= \frac{1}{p^n} \sum_{h\in H_0} \int_X \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-n})\overline{(\chi\mathcal{A}^{-n}, h)}\overline{\hat{f}(\chi)}d\nu(\chi) \int_X \hat{f}(\xi)\overline{\hat{\varphi}(\xi\mathcal{A}^{-n})}(\xi\mathcal{A}^{-n}, h)d\nu(\xi) =$$

$$= \frac{1}{p^n} \sum_{h\in H_0} \Big| \int_X \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-n})\overline{(\chi\mathcal{A}^{-n}, h)}\overline{\hat{f}(\chi)}d\nu(\chi)\Big|^2 =$$

$$= p^n \sum_{h\in H_0} \Big| \int_X \hat{\varphi}(\chi)\overline{(\chi, h)}\overline{\hat{f}(\chi\mathcal{A}^n)}d\nu(\chi)\Big|^2 =$$

$$= p^n \sum_{h\in H_0} \Big| \int_{G_0^\perp} \hat{\varphi}(\chi)\overline{(\chi, h)}\overline{\hat{f}(\chi\mathcal{A}^n)}d\nu(\chi)\Big|^2.$$

Используя равенство Парсеваля для системы H_0 на $G_0^\perp$, имеем

$$(\mathcal{P}_n f, f) = p^n \int_{G_0^\perp} |\hat{\varphi}(\chi)\overline{\hat{f}(\chi\mathcal{A}^n)}|^2 d\nu(\chi) = p^n \int_X \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)|\hat{\varphi}(\chi)\hat{f}(\chi\mathcal{A}^n)|^2 d\nu(\chi) =$$

$$= \int_X \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi\mathcal{A}^{-n})|\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-n})\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) = \int_{G_0^\perp\mathcal{A}^n} |\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-n})\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) =$$

$$= \int_{G_n^\perp} |\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-n})\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) = \int_{G_{n-N}^\perp} |\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-n})|^2|\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) +$$

$$+ \int_{G_n^\perp\setminus G_{n-N}^\perp} |\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-n})|^2|\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi).$$

Так как $\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp) = 1$ и $|\hat{\varphi}| \leqslant 1$, то

$$\int_{G_{n-N}^\perp} |\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-n})|^2|\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) = \int_{G_{n-N}^\perp} |\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) \to \|\hat{f}\|^2_{L_2(X)} = \|f\|^2_{L_2(G)}$$

и

$$\int_{G_n^\perp\setminus G_{n-N}^\perp} |\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-n})|^2|\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) \leqslant \int_{G_n^\perp\setminus G_{n-N}^\perp} |\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) \to 0$$

при $n \to +\infty$. Это завершает доказательство леммы 12. □

Лемма 13. $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{P}_n f = f$.

Доказательство. Используя леммы 11 и 12, получаем

$$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} \|\mathcal{P}_n f - f\|^2_{L_2(G)} = \lim_{n\to+\infty} \Big(\|\mathcal{P}_n f\|^2_{L_2(G)} - 2(\mathcal{P}_n f, f) + \|f\|^2 \Big) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \Big(\|\mathcal{P}_n f\|^2_{L_2(G)} - \|f\|^2_{L_2(G)} \Big) \leqslant 0.$$

Лемма доказана. □

Адаптируем унитарный принцип расширения для произвольной нульмерной группы. Запишем масштабирующее уравнение

$$\varphi(x) = p \sum_{h\in H_0^{(N+1)}} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h)$$

в частотной форме

$$\hat{\varphi}(\chi) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)} = \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) m_0(\chi)$$

и определим функции

$$\psi_\ell(x) = p \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h^{(\ell)} \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h); \quad \ell = 1, 2, \ldots, q-1, \quad q \geqslant p.$$

Имеем в частотной форме

$$\hat{\psi}_\ell(\chi) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h^{(\ell)} \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)} = \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) m_\ell(\chi),$$

где

$$\sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h^{(\ell)} \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)} = m_\ell(\chi).$$

Обозначим

$$\psi_{\ell,n,h}(x) = p^{\frac{n}{2}} \psi_\ell(\mathcal{A}^n x \dot{-} h), \quad \mathcal{P}_{n,\ell}(f) = \sum_{h \in H_0} (f, \psi_{\ell,n,h}) \psi_{\ell,n,h}.$$

Лемма 14. *Пусть $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_0}(G_{-N})$ — масштабирующая функция с маской m_0, $|\hat{\varphi}| \leqslant 1$ и $\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp) = 1$. Пусть $(m_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$ — совокупность масок, удовлетворяющих условиям:*

1) $\sum\limits_{\ell=0}^{q-1} |m_\ell(\chi)|^2 = 1$ *в тех точках χ, где $\hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \neq 0$;*

2) $\sum\limits_{\ell=0}^{q-1} \overline{m_\ell(\xi)} m_\ell(\chi) = 0$ *в тех точках $\chi \in G_0^\perp r_0^k$, $\xi \in G_0^\perp r_0^j$, $k \neq j$, где $\hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \times$ $\times \hat{\varphi}(\xi \mathcal{A}^{-1}) \neq 0$.*

Тогда

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n-1} + \sum_{\ell=1}^{q-1} \sum_{h \in H_0} (f, \psi_{\ell,n-1,h}) \psi_{\ell,n-1,h}. \tag{16}$$

Доказательство. Обозначим $\psi_0 = \varphi$ и запишем равенство (16) в виде

$$\mathcal{P}_n(f) = \sum_{\ell=0}^{q-1} \mathcal{P}_{n-1,\ell}(f)$$

и в частотной форме

$$\widehat{\mathcal{P}_n(f)} = \sum_{\ell=0}^{q-1} \widehat{\mathcal{P}_{n-1,\ell}(f)}. \tag{17}$$

Так как $\mathcal{P}_{n,\ell} = \mathcal{D}^n \mathcal{P}_{0,\ell} \mathcal{D}^{-n}$, нам достаточно доказать (17) только для $n = 1$, т. е.

$$\widehat{\mathcal{P}_1(f)} = \sum_{l=0}^{q-1} \widehat{\mathcal{P}_{0,\ell}(f)}.$$

Напомним, что

$$\mathcal{P}_1(f) = \sum_{h\in H_0} (f, \varphi_{1,h})\varphi_{1,h} = \sum_{h\in H_0} (f, \varphi_{1,h}) p^{\frac{1}{2}} \varphi(\mathcal{A}x\dot{-}h).$$

Найдем преобразование Фурье для $\mathcal{P}_1(f)$ (здесь $\chi \in G_1^{\perp}$)

$$\widehat{\mathcal{P}_1(f)} = p^{\frac{1}{2}} \sum_{h\in H_0} (f, \varphi_{1,h}) \hat{\varphi}_{(\mathcal{A}\cdot\dot{-}h)}(\chi) = p^{\frac{1}{2}} \sum_{h\in H_0} (f, \varphi_{1,h}) \frac{1}{p} \overline{(\chi\mathcal{A}^{-1}, h)} \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) =$$

$$= \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) \sum_{h\in H_0} \overline{(\chi\mathcal{A}^{-1}, h)} \int_G f(x)\overline{\varphi(\mathcal{A}x\dot{-}h)} d\mu(x) =$$

$$= \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) \sum_{h\in H_0} \overline{(\chi\mathcal{A}^{-1}, h)} \int_X \hat{f}(\xi)\overline{\hat{\varphi}_{\mathcal{A}\cdot\dot{-}h}(\xi)} d\nu(\xi) =$$

$$= \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) \sum_{h\in H_0} \overline{(\chi\mathcal{A}^{-1}, h)} \int_X \hat{f}(\xi)\frac{1}{p}\overline{\hat{\varphi}(\xi\mathcal{A}^{-1})}(\xi\mathcal{A}^{-1}, h) d\nu(\xi) =$$

$$= \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) \sum_{h\in H_0} \overline{(\chi\mathcal{A}^{-1}, h)} \int_X \hat{f}(\xi\mathcal{A})\overline{\hat{\varphi}(\xi)}(\xi, h) d\nu(\xi) =$$

$$= \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) \sum_{h\in H_0} \overline{(\chi\mathcal{A}^{-1}, h)} \int_{G_0^{\perp}} \hat{f}(\xi\mathcal{A})\overline{\hat{\varphi}(\xi)}(\xi, h) d\nu(\xi) =$$

$$= \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})\hat{f}(\chi\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A})\overline{\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})} = |\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})|^2 \hat{f}(\chi).$$

В предпоследнем равенстве использовали тот факт, что H_0 есть ортонормированный базис в $L_2(G_0^{\perp})$. Найдем преобразование Фурье для $\mathcal{P}_{0,\ell}(f) = \sum\limits_{h\in H_0} (f, \psi_{\ell,0,h})\psi_{\ell,0,h}$.

По определению ψ_ℓ имеем

$$\widehat{\mathcal{P}_{0,\ell}(f)} = \sum_{h\in H_0} (f, \psi_{\ell,0,h})\hat{\psi}_{\ell,0,h} = \sum_{h\in H_0} (f, \psi_{\ell,0,h}) \int_G \psi_\ell(x\dot{-}h)\overline{(\chi, x)} d\mu(x) =$$

$$= \hat{\psi}_\ell(\chi) \sum_{h\in H_0} (f, \psi_{\ell,0,h})\overline{(\chi, h)} = \hat{\psi}_\ell(\chi) \sum_{h\in H_0} \overline{(\chi, h)} \int_G f(x)\psi_\ell\overline{(x\dot{-}h)} d\mu(x) =$$

$$= \hat{\psi}_\ell(\chi) \sum_{h\in H_0} \overline{(\chi, h)} \int_X \hat{f}(\xi)\overline{\hat{\psi}_\ell(\xi)}(\xi, h) d\nu(\xi) =$$

$$= \hat{\psi}_\ell(\chi) \sum_{h\in H_0} \overline{(\chi, h)} \int_X \hat{f}(\xi)\overline{\hat{\varphi}(\xi\mathcal{A}^{-1})m_\ell(\xi)}(\xi, h) d\nu(\xi) =$$

$$= \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})m_\ell(\chi) \sum_{h\in H_0} \overline{(\chi, h)} \int_X \hat{f}(\xi)\overline{\hat{\varphi}(\xi\mathcal{A}^{-1})m_\ell(\xi)}(\xi, h) d\nu(\xi).$$

Пусть $\chi \in G_0^{\perp} r_0^j$, $j = \overline{0, p-1}$. Тогда

$$\sum_\ell \widehat{\mathcal{P}_{0,\ell}(f)} =$$

$$= \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) \sum_{h\in H_0} \overline{(\chi, h)} \int_X (\xi, h)\hat{f}(\xi)\overline{\hat{\varphi}(\xi\mathcal{A}^{-1})} \sum_{\ell=0}^{q-1} \overline{m_\ell(\xi)} m_\ell(\chi) d\nu(\xi) =$$

$$= \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})\sum_{h\in H_0}\overline{(\chi,h)}\int_{G_1^\perp}(\xi,h)\hat{f}(\xi)\overline{\hat{\varphi}(\xi\mathcal{A}^{-1})}\sum_{\ell=0}^{q-1}\overline{m_\ell(\xi)}m_\ell(\chi)d\nu(\xi) =$$

$$= \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})\sum_{h\in H_0}\sum_{k=0}^{p-1}\overline{(\chi,h)}\int_{G_0^\perp r_0^k}(\xi,h)\hat{f}(\xi)\overline{\hat{\varphi}(\xi\mathcal{A}^{-1})}\sum_{\ell=0}^{q-1}\overline{m_\ell(\xi)}m_\ell(\chi)d\nu(\xi) =$$

$$= \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})\sum_{h\in H_0}\overline{(\chi,h)}\int_{G_0^\perp r_0^j}(\xi,h)\hat{f}(\xi)\overline{\hat{\varphi}(\xi\mathcal{A}^{-1})}\sum_{\ell=0}^{q-1}\overline{m_\ell(\xi)}m_\ell(\chi)d\nu(\xi)+$$

$$+\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})\sum_{h\in H_0}\sum_{k\neq j}\overline{(\chi,h)}\int_{G_0^\perp r_0^k}(\xi,h)\hat{f}(\xi)\overline{\hat{\varphi}(\xi\mathcal{A}^{-1})}\sum_{l=0}^{q-1}\overline{m_\ell(\xi)}m_\ell(\chi)d\nu(\xi).$$

Так как H_0 есть ортонормированный базис в $L_2(G_0^\perp r_0^j)$, то

$$\sum_{h\in H_0}\overline{(\chi,h)}\int_{G_0^\perp r_0^j}(\xi,h)\hat{f}(\xi)\overline{\hat{\varphi}(\xi\mathcal{A}^{-1})}\sum_{\ell=0}^{q-1}\overline{m_\ell(\xi)}m_\ell(\chi)d\nu(\xi) = \hat{f}(\chi)\overline{\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})}\sum_{\ell=0}^{q-1}\overline{m_\ell(\chi)}m_\ell(\chi).$$

Используя второе условие леммы, имеем

$$\sum_{h\in H_0}\sum_{k\neq j}\overline{(\chi,h)}\int_{G_0^\perp r_0^k}(\xi,h)\hat{f}(\xi)\overline{\hat{\varphi}(\xi\mathcal{A}^{-1})}\sum_{\ell=0}^{q-1}\overline{m_\ell(\xi)}m_\ell(\chi)d\nu(\xi) = 0.$$

Используя первое условие леммы, получаем окончательно

$$\sum_{\ell}\widehat{\mathcal{P}_{0,\ell}(f)} = \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})\hat{f}(\chi)\overline{\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})}\sum_{\ell=0}^{q-1}\overline{m_\ell(\chi)}m_\ell(\chi) = |\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})|^2\hat{f}(\xi).$$

Таким образом, равенство

$$\widehat{\mathcal{P}_1(f)} = \sum_{\ell=0}^{q-1}\widehat{\mathcal{P}_{0,\ell}(f)}$$

доказано. □

Теорема 3. *Пусть маска* m_0 *и масштабирующая функция* φ *построены по порождающему дереву* T. *Пусть* $(m_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$ *— семейство масок, удовлетворяющих условиям:*

1) $\sum\limits_{\ell=0}^{q-1}|m_\ell(\chi)|^2 = 1$ *в тех точках* χ, *где* $\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) \neq 0$;

2) $\sum\limits_{\ell=0}^{q-1}\overline{m_\ell(\xi)}m_\ell(\chi) = 0$ *в тех точках* $\chi \in G_0^\perp r_0^k$, $\xi \in G_0^\perp r_0^j$, $k \neq j$, *где* $\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) \times$ $\times\hat{\varphi}(\xi\mathcal{A}^{-1}) \neq 0$.

Используя эти маски, определим функции $\psi_\ell(x)$, $\ell = 1, \ldots, q-1$ *равенствами*

$$\hat{\psi}_\ell(\chi) = \sum_{h\in H_0^{(N+1)}}\beta_h^{(\ell)}\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})\overline{(\chi\mathcal{A}^{-1},h)} = \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})m_\ell(\chi).$$

Тогда аффинная система

$$\psi_{\ell,n,h}(x) = p^{\frac{n}{2}}\psi_\ell(\mathcal{A}^n x\dot{-}h), \quad \ell = 1,\ldots,q-1, \quad n\in\mathbb{Z}, \quad h\in H_0,$$

образует жесткий фрейм в $L_2(G)$.

Доказательство. Применяя (16) последовательно, имеем

$$\mathcal{P}_n f = \mathcal{P}_{n'} f + \sum_{\ell=1}^{q-1} \sum_{j=n'}^{n-1} \sum_{h \in H_0} (f, \phi_{\ell,j,h}) \phi_{\ell,j,h}.$$

Устремляя $n' \to -\infty$ и используя лемму 10, имеем

$$\mathcal{P}_n f = \sum_{\ell=1}^{q-1} \sum_{j<n} \sum_{h \in H_0} (f, \phi_{\ell,j,h}) \phi_{\ell,j,h}. \qquad (18)$$

Устремляя $n \to +\infty$ в обеих частях равенства (18), имеем для любой $f \in L_2(G)$

$$f = \sum_{\ell=1}^{q-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{h \in H_0} (f, \phi_{\ell,n-1,h}) \phi_{\ell,n-1,h}.$$

Это доказывает, что система $(\psi_{\ell,n,h}(x))_{\ell=1,..,q-1}$ есть жесткий фрейм. $\square$

Следствие 1. *Пусть* $G_{-N}^{\perp} \chi_\ell$ $(\ell = \overline{1, q-1})$ *смежные классы, для которых* $m_0(G_{-N}^{\perp} \chi_\ell) = 0$ *и* $\hat{\varphi}(G_{-N}^{\perp} \chi_\ell \mathcal{A}^{-1}) \neq 0$. *Определим маски* m_ℓ *и вейвлеты* ψ_ℓ *равенствами*

$$m_\ell(\chi) = \mathbf{1}_{G_{-N}^{\perp} \chi_\ell}(\chi) \quad (\ell = \overline{1, q-1}), \qquad \hat{\psi}_\ell(\chi) = m_\ell(\chi) \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}).$$

Тогда вейвлеты (ψ_ℓ) $(\ell = \overline{1, q-1})$ *порождают жесткий фрейм.*

Вернемся к примеру 2 из разд. 3, в котором построены маска

$$m_0(\chi) = \mathbf{1}_{G_{-1}^{\perp}}(\chi) + \mathbf{1}_{G_{-1}^{\perp} r_{-1}^2}(\chi) + \mathbf{1}_{G_{-1}^{\perp} r_{-1}^1 r_0^1}(\chi)$$

и преобразование Фурье масштабирующей функции

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi) m_0(\chi \mathcal{A}^{-1}) = \mathbf{1}_{G_{-1}^{\perp}}(\chi) + \mathbf{1}_{G_{-1}^{\perp} r_{-1}^2}(\chi).$$

Нарисуем графики для m_0 и $\hat{\varphi}$ (рис. 3–5).

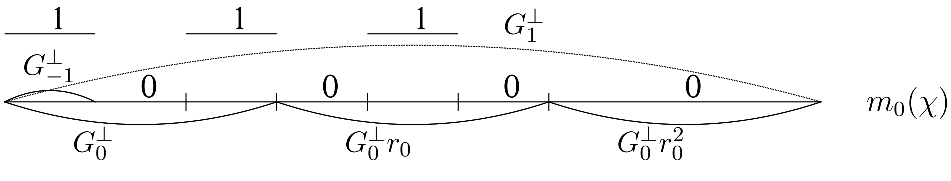

Рис. 3. Маска $m_0(\chi)$ / Fig. 3. The mask $m_0(\chi)$

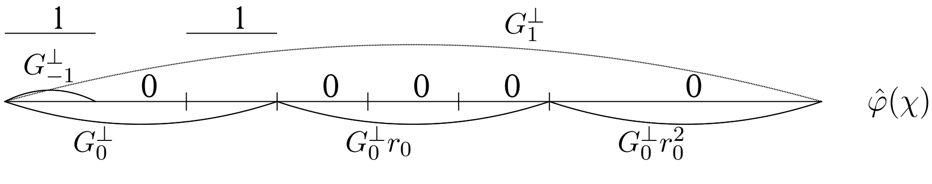

Рис. 4. Преобразование Фурье $\hat{\varphi}(\chi)$ / Fig. 4. The Fourier transform $\hat{\varphi}(\chi)$

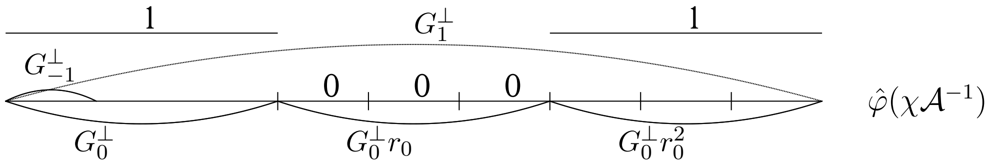

Рис. 5. Преобразование Фурье $\hat\varphi(\chi\mathcal{A}^{-1})$
Fig. 5. The Fourier transform $\hat\varphi(\chi\mathcal{A}^{-1})$

Воспользуемся следствием и определим маски следующим образом:

$$m_1(\chi) = \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp r_{-1}}(\chi), \quad m_2(\chi) = \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp r_0^2}(\chi),$$
$$m_3(\chi) = \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp r_0^2 r_{-1}}(\chi), \quad m_4(\chi) = \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp r_0^2 r_{-1}^2}(\chi).$$

Соответствующие вейвлеты ψ_ℓ, $\ell = \overline{1,4}$ порождают жесткий фрейм.

Заключение

В статье изложен метод построения жестких фреймов в произвольной локально компактной нульмерной группе, основанный на принципе унитарного расширения (теорема 3).

Список литературы

1. Mathematics in Image Processing / ed. by H. Zhao. 2013. 245 p. (IAS/Park City Mathematics Series. Vol. 19). https://doi.org/10.1090/pcms/019
2. *Ron A., Shen Z.* Affine systems in $L_2(\mathbb{R}^d)$: The analysis of the analysis operator // Journal of Functional Analysis. 1997. Vol. 148, iss. 2. P. 408–447. https://doi.org/10.1006/jfan.1996.3079
3. *Farkov Y., Lebedeva E., Skopina M.* Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties // International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing. 2015. Vol. 13, iss. 5. 1550036 (19 p.) https://doi.org/10.1142/S0219691315500368
4. *Shah F. A., Debnath L.* Tight wavelet frames on local fields // Analysis. 2013. Vol. 33, iss. 3. P. 293–307. https://doi.org/10.1524/anly.2013.1217
5. *Ahmad O., Bhat M. Y., Sheikh N. A.* Construction of Parseval framelets associated with GMRA on local fields of positive characteristic // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2021. Vol. 42, iss. 3. P. 344–370. https://doi.org/10.1080/01630563.2021.1878370
6. *Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M.* p-adic multiresolution analysis and wavelet frames // Journal of Fourier Analysis and Applications. 2010. Vol. 16. P. 693–714. https://doi.org/10.1007/s00041-009-9118-5
7. *Лукомский С. Ф.* Кратномасштабный анализ на нульмерных группах и всплесковые базисы // Математическй сборник. 2010. Т. 201, № 5. С. 41–64. https://doi.org/10.4213/sm7580
8. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. Баку : Элм, 1981. 180 с.
9. *Albeverio S., Khrennikov A. Yu, Shelkovich V. M.* Theory of p-adic Distributions: Linear and Nonlinear Models. Cambridge : Cambridge University Press, 2010. 351 p. https://doi.org/10.1017/CBO9781139107167

10. *Lukomskii S. F.* Step refinable functions and orthogonal MRA on p-adic Vilenkin groups // Journal of Fourier Analysis and Applications. 2014. Vol. 20, iss. 1. P. 42–65. https://doi.org/10.1007/s00041-013-9301-6
11. *Lukomskii S., Vodolazov A.* p-adic tight wavelet frames. 12 mar 2022. https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.06352

References

1. Zhao H. (ed.). *Mathematics in Image Processing*. IAS/Park City Mathematics Series, 2013. Vol. 19. 245 p. https://doi.org/10.1090/pcms/019
2. Ron A., Shen Z. Affine systems $L_2(\mathbb{R}^d)$: The analysis of the analysis operator. *Journal of Functional Analysis*, 1997, vol. 148, iss. 2, pp. 408–447. https://doi.org/10.1006/jfan.1996.3079
3. Farkov Y., Lebedeva E., Skopina M. Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 2015, vol. 13, iss. 5, 1550036 (19 p). https://doi.org/10.1142/S0219691315500368
4. Shah F. A., Debnath L. Tight wavelet frames on local fields. *Analysis*, 2013, vol. 33, iss. 3, pp. 293–307. https://doi.org/10.1524/anly.2013.1217
5. Ahmad O., Bhat M. Y., Sheikh N. A. Construction of Parseval framelets associated with GMRA on local fields of positive characteristic. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2021, vol. 42, iss. 3, pp. 344–370. https://doi.org/10.1080/01630563.2021.1878370
6. Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M. p-adic multiresolution analysis and wavelet frames. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2010, vol. 16, pp. 693–714. https://doi.org/10.1007/s00041-009-9118-5
7. Lukomskii S. F. Multiresolution analysis on zero-dimensional Abelian groups and wavelets bases. *Sbornik: Mathematics*, 2010, vol. 201, iss. 5, pp. 669–691. https://doi.org/10.1070/SM2010v201n05ABEH004088
8. Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzafarli G. M., Rubinstein A. I. *Mul'tiplikativnye sistemy funkcij i garmonicheskij analiz na nul'mernykh gruppakh* [Multiplicative Systems of Functions and Harmonic Analysis on Zero-Dimensional Groups]. Baku, Elm, 1981. 180 p. (in Russian).
9. Albeverio S., Khrennikov A. Yu, Shelkovich V. M. *Theory of p-adic Distributions: Linear and Nonlinear Models*. Cambridge, Cambridge University Press, 2010. 351 p. https://doi.org/10.1017/CBO9781139107167
10. Lukomskii S. F. Step refinable functions and orthogonal MRA on p-adic Vilenkin groups. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2014, vol. 20, iss. 1, pp. 42–65. https://doi.org/10.1007/s00041-013-9301-6
11. Lukomskii S., Vodolazov A. *P-adic tight wavelet frames*. 12 mar 2022. https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.06352

Поступила в редакцию / Received 16.06.2022
Принята к публикации / Accepted 22.11.2022
Опубликована / Published 31.08.2023