Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 339–347
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 339–347
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-339-347, EDN: BUXAKG

Научная статья
УДК 517.518.153

О функциях типа ван дер Вардена

А. И. Рубинштейн, Д. С. Теляковский✉

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Россия, 115409, г. Москва, Каширское ш., д. 31

Рубинштейн Александр Иосифович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, rubinshtein_aleksandr@mail.ru, htpps://orcid.org/0000-0001-8863-5438, AuthorID: 14669

Теляковский Дмитрий Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, dtelyakov@mail.ru, htpps://orcid.org/0000-0003-1579-2154, AuthorID: 14223

Аннотация. Пусть $\omega(t)$ — произвольная функция типа модуля непрерывности, у которой $\omega(t)/t \to +\infty$ при $t \to +0$. Для $\omega(t)$ на отрезке $[0;1]$ построена непрерывная нигде не дифференцирумая функция $V_\omega(x)$ типа ван дер Вардена, для которой выполнены следующие условия: 1) модуль непрерывности функции $V_\omega(x)$ удовлетворяет оценке $O(\omega(t))$ при $t \to +0$; 2) найдется число $c > 0$, для которого в каждой точке x_0 при $x \to x_0$ выполнено $\limsup |V_\omega(x) - V_\omega(x_0)|/\omega(|x-x_0|) > c$; 3) в каждой точке x_0 при $x \to x_0$ выполнено $\liminf |V_\omega(x) - V_\omega(x_0)|/\omega(|x-x_0|) = 0$.

Ключевые слова: модуль непрерывности, нигде не дифференцируемая функция, функция типа ван дер Вардена

Для цитирования: *Рубинштейн А. И., Теляковский Д. С.* О функциях типа ван дер Вардена // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 339–347. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-339-347, EDN: BUXAKG

Article

On functions of van der Waerden type

A. I. Rubinstein, D. S. Telyakovskii✉

National Research Nuclear University MEPhI, 31 Kashirskoe shosse, Moscow 115409, Russia

Aleksandr I. Rubinstein, rubinshtein_aleksandr@mail.ru, htpps://orcid.org/0000-0001-8863-5438, AuthorID: 14669

Dmitrii S. Telyakovskii, dtelyakov@mail.ru, htpps://orcid.org/0000-0003-1579-2154, AuthorID: 14223

Abstract. Let $\omega(t)$ be an arbitrary modulus of continuity type function, such that $\omega(t)/t \to +\infty$, as $t \to +0$. We construct a continuous nowhere-differentiable function $V_\omega(x)$, $x \in [0;1]$, that

satisfies the following conditions: 1) its modulus of continuity satisfies the estimate $O(\omega(t))$ as $t \to +0$; 2) for some positive c at each point x_0 holds $\limsup |V_\omega(x) - V_\omega(x_0)|/\omega(|x-x_0|) > c$ as $x \to x_0$; 3) at each point x_0 holds $\liminf |V_\omega(x) - V_\omega(x_0)|/\omega(|x-x_0|) = 0$ as $x \to x_0$.
Keywords: modulus of continuity, nowhere-differentiable function, van der Waerden type function
For citation: Rubinstein A. I., Telyakovskii D. S. On functions of van der Waerden type. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 339–347 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-339-347, EDN: BUXAKG

Пусть функция $\omega(t)$ на отрезке $[0;1]$ удовлетворяет критерию С. М. Никольского модуля непрерывности в пространстве непрерывных функций

$$\begin{gathered} 0 = \omega(0) < \omega(t) \quad \text{при } t > 0; \\ \omega(t_1) \leqslant \omega(t_2), \ \ \omega(t_1 + t_2) \leqslant \omega(t_1) + \omega(t_2) \qquad \text{при } t_2 \geqslant t_1 > 0; \end{gathered} \tag{1}$$

и

$$H^\omega = \Big\{ f(x) : \omega_f(\delta) = \sup_{\substack{0<h\leqslant\delta \\ 0\leqslant x<x+h\leqslant 1}} \big| f(x+h) - f(x) \big| = O(\omega(\delta)) \Big\}$$

— класс Никольского – Гельдера. Будем рассматривать только такие $\omega(t)$, что

$$\lim_{t\to+0} \frac{\omega(t)}{t} = \infty. \tag{2}$$

Как показал С. Б. Стечкин[1], для любого модуля непрерывности $\omega(t)$ существует выпуклая вверх функция $\hat{\omega}(t)$ такая, что $\omega(t) \leqslant \hat{\omega}(t) \leqslant 2\omega(t)$. Очевидно, что $\hat{\omega}(t)$ удовлетворяет условиям (1). Поэтому, не ограничивая общности, функцию $\omega(t)$ можно считать выпуклой вверх.

В настоящей работе строится пример функции $V_\omega(x) \in H^\omega$ типа функции ван дер Вардена[2], которая при некотором положительном значении c удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \displaystyle\limsup_{h\to0,\, x+h\in[0;1]} \frac{|V_\omega(x+h) - V_\omega(x)|}{\omega(|h|)} > c \quad \text{при всех } x \in [0;1]; \\ \displaystyle\liminf_{h\to0,\, x+h\in[0;1]} \frac{|V_\omega(x+h) - V_\omega(x)|}{\omega(|h|)} = 0 \quad \text{при всех } x \in [0;1]. \end{cases} \tag{3}$$

В работе А. И. Рубинштейна [5] был построен пример функции $f(x) \in H^\omega$, для которой в каждой точке выполнено первое из условий (3) и доказано, что при предположении (2) второе из условий (3) выполняется почти всюду для любой функции из H^ω. В работе [5] соответствующий пример, как и в классическом примере К. Вейерштрасса [6] непрерывной нигде не дифференцируемой функции, был получен как сумма равномерно сходящегося лакунарного тригонометрического ряда. Пример из

[1]Лемма С. Б. Стечкина с согласия ее автора была впервые опубликована в работе А. В. Ефимова [1, с. 78, лемма 4].

[2]Похоже, что первый пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции принадлежит Б. Больцано [2] (Boltsano, около 1830 г.). Используя ту же идею, что и Б. Больцано, но независимо от него и друг от друга, примеры непрерывных нигде не дифференцируемых функций дали Т. Такаги [3] (Takagi, 1903 г.) и ван дер Варден [4] (van der Waerden, 1930 г.). Наибольшую известность получил пример ван дер Вардена.

настоящей работы получен как сумма лакунарного ряда пилообразных функций и следует примеру ван дер Вардена. Аналог функции $V_\omega(x)$, построенной в настоящей работе, использовался в работе Д. С. Теляковского [7] по теории моногенности. Примеры функций, которые удовлетворяют условию, аналогичному первому из условий (3), были получены в работах А. С. Белова [8] и Ю. С. Мишуры, А. Шида [9], при этом у А. С. Белова соответствующий пример дает сумма лакунарного тригонометрического ряда, а в работе Ю. С. Мишуры и А. Шида — лакунарного ряда пилообразных функций типа Такаги – ван дер Вардена.

Для построения функции $V_\omega(x)$ покажем сначала, что существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$, для которой при каждом $k>1$ выполнены неравенства

$$\sum_{s=1}^{k-1} 2^{n_s}\omega\bigl(2^{-n_s}\bigr) < \frac{1}{k}\,\frac{\omega\bigl(2^{-n_k}\bigr)}{2^{-n_k}}, \qquad \sum_{s=k+1}^{\infty}\omega\bigl(2^{-n_s}\bigr) < \frac{1}{k}\,\omega\bigl(2^{-n_k}\bigr). \tag{4}$$

Последовательно определим числа n_k. Положим $n_1 := 1$. Пусть числа n_s при всех номерах $s<k$ уже определены. Определим величину n_k. Сумма $\sum\limits_{s=1}^{k-1} 2^{n_s}\omega\bigl(2^{-n_s}\bigr)$ имеет конечное значение, а величина $\dfrac{\omega\bigl(2^{-n_k}\bigr)}{2^{-n_k}} \to +\infty$ при $n_k\to\infty$. Поэтому для всех достаточно больших n_k выполнено первое неравенство (4).

При рассмотрении второго неравенства (4) надо иметь в виду, что стоящее в правой части неравенства (4) значение n_k должно быть определено до того, как определены величины n_s, стоящие в левой части (4). Это возможно, если номера n_k удовлетворяют некоторым дополнительным условиям. Определим эти условия.

При каждом натуральном $k>1$ второе неравенство (4) можно записать так:

$$\frac{1}{k}\,\omega(2^{-n_k}) = \frac{1}{k}\Biggl(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\Biggr)\omega(2^{-n_k}) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\omega(2^{-n_k})}{2^j} > \sum_{s=k+1}^{\infty}\omega(2^{-n_s}) = \sum_{j=1}^{\infty}\omega(2^{-n_{k+j}}),$$

т. е.

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\omega(2^{-n_k})}{2^j} > \sum_{j=1}^{\infty}\omega(2^{-n_{k+j}}).$$

Поэтому для выполнения при каждом k второго неравенства (4) достаточно, чтобы для всех k и j выполнялось

$$\frac{1}{k}\frac{\omega(2^{-n_k})}{2^j} > \omega(2^{-n_{k+j}}). \tag{5}$$

Номера n_k в левой части неравенства (5) меньше номеров n_{k+j} в правой части (5), поэтому, если обозначить $m := k+j$, то эти соотношения примут вид

$$\omega(2^{-n_m}) < \frac{1}{m-j}\,\frac{\omega(2^{-n_{m-j}})}{2^j}, \quad j=1,\dots,m-1, \quad k\in\mathbb{N},$$

а после замены m на k и $m-j$ на j эти соотношения запишутся так:

$$\omega(2^{-n_k}) < \frac{1}{j}\,\frac{\omega(2^{-n_j})}{2^{k-j}}, \quad j=1,\dots,k-1, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{6}$$

Для каждого номера k получено k неравенств, которым должны удовлетворять величины $\omega(2^{-n_k})$ для того, чтобы были выполнены условия (4). Это самое первое неравенство (4), которое выполнено при всех достаточно больших значениях n_k и система из $k-1$ неравенства (6), каждое из которых тоже выполнено при достаточно больших n_k. Поэтому, если выбрать n_k достаточно большими, то все неравенства (4) будут выполнены.

Существование строго возрастающей последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$, для которой при каждом $k>1$ выполнены неравенства (4), установлено.

Функцию $V_\omega(x)$ определим, используя последовательность $\{n_k\}$. Положим

$$V_\omega(x) := \sum_{k\in\mathbb{N}} v_k(x), \quad x\in[0;1],$$

где при $x\in[0;2\cdot 2^{-n_k}]$

$$\begin{gathered} v_k(x) := \omega\big(2^{-n_k}\big)2^{n_k}\Big(2^{-n_k} - \big|x-2^{-n_k}\big|\Big), \\ v_k\big(2^{-(n_k-1)}j+x\big) := v_k(x) \text{ при } j=1,\ldots,2^{n_k-1}, \end{gathered} \tag{7}$$

т. е. на отрезке $[0;2^{-(n_k-1)}]$ график функции $v_k(x)$ является равнобедренным треугольником высотой $\omega(2^{-n_k})$ и основанием $2^{-(n_k-1)}$, далее периодически продолженным на весь отрезок $[0;1]$ с периодом $2^{-(n_k-1)}$ (рис. 1, жирными линиями выделены первые периоды функций $v_1(x)$ и $v_2(x)$).

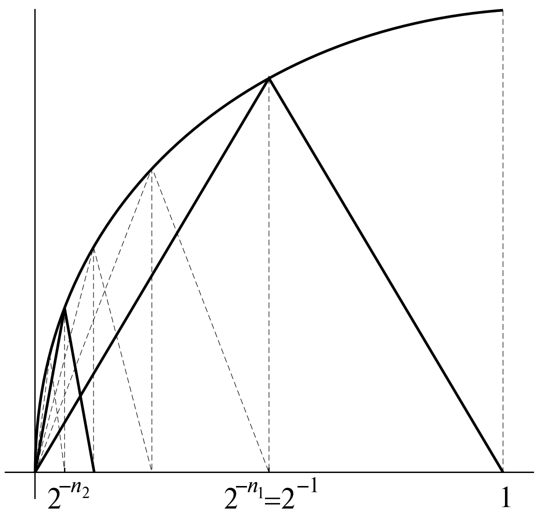

Рис. 1. Первые периоды функций $v_k(x)$

Fig. 1. The first periods of the functions $v_k(x)$

Сначала проверим, что так определенная функция $V_\omega(x)$ принадлежит классу H^ω. Для этого оценим модуль приращения $|V_\omega(x+h)-V_\omega(x)|$ при x, $x+h\in[0;1]$, будем считать, что $h>0$. Найдем номер k, при котором (рис. 2)

$$2^{-n_{k+1}} < h \leqslant 2^{-n_k}, \tag{8}$$

и представим приращение $V_\omega(x+h)-V_\omega(x)$ в следующем виде:

$$\begin{gathered} V_\omega(x+h)-V_\omega(x) = \sum_{s=1}^{k-1}\big(v_s(x+h)-v_s(x)\big) + \big(v_k(x+h)-v_k(x)\big) + \\ + \sum_{s=k+1}^{\infty}\big(v_s(x+h)-v_s(x)\big) \equiv \sum\nolimits_{(1),k} + \sum\nolimits_{(2),k} + \sum\nolimits_{(3),k}. \end{gathered} \tag{9}$$

Сначала оценим сумму $\sum_{(1),k}$. Имеем

$$\Big|\sum\nolimits_{(1),k}\Big| \leqslant \sum_{s=1}^{k-1}\big|(v_s(x+h)-v_s(x)\big|.$$

Каждая функция $v_s(x)$ является кусочно-линейной и угловые коэффициенты звеньев ее графика равны $\pm 2^{n_s}\omega(2^{-n_s})$. Поэтому

$$\big|(v_s(x+h)-v_s(x)\big| \leqslant 2^{n_s}\omega\big(2^{-n_s}\big)\cdot h.$$

Отсюда, по первому неравенству (4), получаем

$$\left|\sum\nolimits_{(1),k}\right| \leqslant \left(\sum_{s=1}^{k-1} 2^{n_s}\omega\left(2^{-n_s}\right)\right)\cdot h < \\ < \frac{1}{k}\,2^{n_k}\omega\left(2^{-n_k}\right)\cdot h.$$

Так как $2^{n_k}\omega\left(2^{-n_k}\right)$ — угловой коэффициент отрезка, вписанного в график функции $\omega(t)$ и лежащего над $\left[0;2^{-n_k}\right]$, и $h \leqslant 2^{-n_k}$, то в силу выпуклости $\omega(t)$ вверх выполняется неравенство $2^{n_k}\omega\left(2^{-n_k}\right)\cdot h \leqslant \omega(h)$ (см. рис. 2) и, значит,

$$\left|\sum\nolimits_{(1),k}\right| \leqslant \frac{1}{k}\,\omega(h). \tag{10}$$

Аналогично (см. рис. 2)

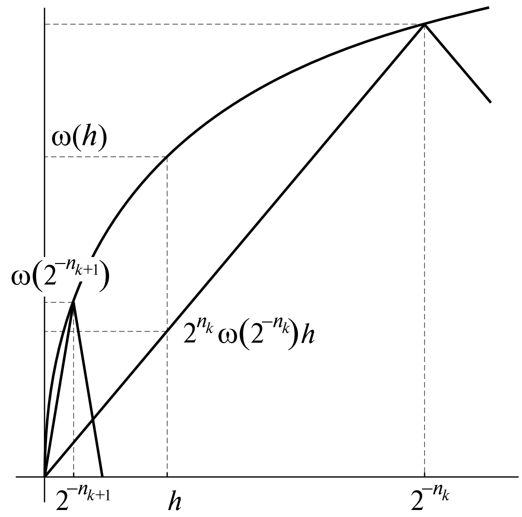

Рис. 2. Сравнение величины $\omega(h)$ со значениями $\sum_{(1),k}$, $\sum_{(2),k}$ и $\sum_{(3),k}$

Fig. 2. Comparing the value $\omega(h)$ with the values $\sum_{(1),k}$, $\sum_{(2),k}$, and $\sum_{(3),k}$

$$\left|\sum\nolimits_{(2),k}\right| = \left|v_k(x+h)-v_k(x)\right| \leqslant 2^{n_k}\omega\left(2^{-n_k}\right)\cdot h \leqslant \omega(h). \tag{11}$$

Теперь оценим сумму $\sum_{(3),k}$. Для этой суммы выполнены неравенства

$$\begin{gathered}\left|\sum\nolimits_{(3),k}\right| \leqslant \sum_{s=k+1}^{\infty} \left|v_s(x+h)-v_s(x)\right| \leqslant \sum_{s=k+1}^{\infty}\left(\left|v_s(x+h)\right|+\left|v_s(x)\right|\right) \leqslant \\ \leqslant 2\sum_{s=k+1}^{\infty}\max_{[0;1]}\left|v_s(x)\right| = 2\sum_{s=k+1}^{\infty}\omega\left(2^{-n_s}\right) = 2\left(\omega\left(2^{-n_{k+1}}\right)+\sum_{s=k+2}^{\infty}\omega\left(2^{-n_s}\right)\right).\end{gathered} \tag{12}$$

К сумме в последнем члене цепочки этих соотношений применим второе неравенство (4) при $k+1$. Учитывая, что $2^{-n_{k+1}} < h$, отсюда получаем (см. рис. 2)

$$\left|\sum\nolimits_{(3),k}\right| \leqslant 2\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\omega\left(2^{-n_{k+1}}\right) \leqslant 2\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\omega(h). \tag{13}$$

Таким образом, из соотношений (10), (11) и (13) для каждых $0 \leqslant x < x+h \leqslant 1$ при k, удовлетворяющем (8), следует оценка приращения

$$\left|V_\omega(x+h)-V_\omega(x)\right| \leqslant \left(\frac{1}{k}+1+2+\frac{2}{k+1}\right)\omega(h) \leqslant 5\,\omega(h). \tag{14}$$

Принадлежность функции $V_\omega(x)$ классу $H^\omega[0;1]$ установлена.

Теперь проверим, что для каждой точки $x \in [0;1]$ выполнено первое соотношение (3). Для этого покажем, что найдется такое $c > 0$, одно и то же для всех $x \in [0;1]$, что при каждом номере k на расстоянии не больше 2^{-n_k} и не меньше $2^{-(n_k+1)}$ от точки x найдется точка $x_k \in [0;1]$, в которой выполнено неравенство

$$\frac{\left|V_\omega(x_k)-V_\omega(x)\right|}{\omega(|x_k-x|)} > c. \tag{15}$$

Точку x_k определим по функции v_k. Графиком кусочно-линейной функции v_k является ломаная со звеньями равной длины и угловыми коэффициентами, равными $\pm 2^{n_k}\omega(2^{-n_k})$, знаки угловых коэффициентов чередуются. Каждое звено лежит над отрезком длины 2^{-n_k}. Обозначим $[c;d]$ тот из отрезков, который содержит точку x, если точка x лежит на границе двух отрезков, то отрезок $[c;d]$ — любой из них. В качестве точки x_k возьмем конец отрезка $[c;d]$, который лежит дальше от x, если x — середина $[c;d]$, то в качестве x_k берем любой из концов $[c;d]$.

По неравенству треугольника

$$\frac{|V_\omega(x_k)-V_\omega(x)|}{\omega(|x_k-x|)} \geqslant \frac{\left|\sum_{(2),k}\right| - \left|\sum_{(1),k}\right| - \left|\sum_{(3),k}\right|}{\omega(|x_k-x|)}.$$

Для получения нижней оценки $\dfrac{|V_\omega(x_k)-V_\omega(x)|}{\omega(|x_k-x|)}$ значение $\left|\sum_{(2),k}\right|$ оценим снизу, а значения $\left|\sum_{(1),k}\right|$ и $\left|\sum_{(3),k}\right|$ — сверху.

Точки x и x_k лежат под одним звеном ломаной, являющейся графиком функции $v_k(x)$, и для x и x_k точек выполнено $2^{-n_k} \geqslant |x-x_k| \geqslant 2^{-(n_k+1)}$, поэтому

$$\left|\sum\nolimits_{(2),k}\right| = \big|v_k(x_k)-v_k(x)\big| = 2^{n_k}\omega(2^{-n_k})|x_k-x| > \\ > 2^{n_k}\omega(|x_k-x|)2^{-(n_k+1)} = \frac{1}{2}\,\omega(|x_k-x|).$$

При $h = x_k - x$ из неравенства (10) следует оценка $\left|\sum_{(1),k}\right| \leqslant \dfrac{1}{k}\,\omega(|x_k-x|)$. При получении соотношений (12) была получена оценка $\left|\sum_{(3),k}\right| \leqslant 2\sum_{s=k+1}^{\infty}\omega(2^{-n_s})$, откуда, учитывая второе неравенство (4), при $h = x_k - x$ получаем, что

$$\left|\sum\nolimits_{(3),k}\right| \leqslant 2\sum_{s=k+1}^{\infty}\omega(2^{-n_s}) < \frac{2}{k}\omega(2^{-n_k}) \leqslant \frac{2}{k}\omega(2|x_k-x|) \leqslant \frac{4}{k}\omega(|x_k-x|).$$

Следовательно, на расстоянии не больше 2^{-n_k} и не меньше $2^{-(n_k+1)}$ от каждой точки $x \in [0;1]$ найдется точка $x_k \in [0;1]$, для которой

$$\frac{|V_\omega(x_k)-V_\omega(x)|}{\omega(|x_k-x|)} \geqslant \frac{\left|\sum_{(2),k}\right| - \left|\sum_{(1),k}\right| - \left|\sum_{(3),k}\right|}{\omega(|x''-x'|)} \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{k} - \frac{4}{k}.$$

Поскольку $x_k \to x$ при $k \to \infty$, то отсюда следует, что

$$\limsup_{h\to 0}\frac{|V_\omega(x+h)-V_\omega(x)|}{\omega(|h|)} \geqslant \frac{1}{2}$$

и первое из соотношений (3) выполнено при $c = \dfrac{1}{2}$.

Теперь проверим выполнение второго соотношения (3). Возьмем произвольную точку $x \in [0;1]$. Обозначим x_k какую-либо точку отрезка $[0;1]$, лежащую на расстоянии $2^{-(n_k-1)}$ от x. Поскольку период функции $v_k(x)$ равен $2^{-(n_k-1)}$, то

$$V_\omega(x_k)-V_\omega(x) = \sum_{s=1}^{k-1}\big(v_s(x_k)-v_s(x)\big) + \sum_{s=k+1}^{\infty}\big(v_s(x_k)-v_s(x)\big).$$

Отсюда, используя неравенства (4), получаем, что

$$\begin{aligned}\bigl|V_\omega(x_k)-V_\omega(x)\bigr| &\leqslant \sum_{s=1}^{k-1}\bigl|v_s(x_k)-v_s(x)\bigr| + 2\sum_{s=k+1}^{\infty}\max_{[0;1]} v_s(x) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{s=1}^{k-1} 2^{n_s}\omega(2^{-n_s})|x_k-x| + 2\sum_{s=k+1}^{\infty}\omega(2^{-n_s}) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{k}\,2^{n_k}\omega\bigl(2^{-n_k}\bigr)\cdot 2^{-(n_k-1)} &+ 2\,\frac{1}{k}\,\omega\bigl(2^{-n_k}\bigr) = \frac{4}{k}\,\omega\bigl(2^{-n_k}\bigr) < \frac{4}{k}\,\omega\bigl(x_k-x\bigr).\end{aligned}$$

Поскольку $h = x_k - x \to 0$ при $k\to\infty$, то отсюда получаем, что

$$\liminf_{h\to 0}\frac{|V_\omega(x+h)-V_\omega(x)|}{\omega(|h|)} = 0.$$

Второе соотношение (3) также доказано.

Так как $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\omega(t)}{t} = \infty$, то, если бы в некоторой точке x функция $V_\omega(x)$ имела производную, в этой точке выполнялось бы равенство $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|V_\omega(x+h)-V_\omega(x)|}{\omega(|h|)} = 0$, что противоречит первому соотношению (3). Следовательно, функция $V_\omega(x)$ не дифференцируема ни в одной точке.

Все анонсированные свойства функции $V_\omega(x)$ типа ван дер Вардена проверены.

Все сказанное остается справедливым для рядов, полученных следующим образом. Пусть

$$\psi_1(x) = \begin{cases} x & \text{на } [0,\frac14], \\ \frac12 - x & \text{на } [\frac14;\frac34], \\ x-1 & \text{на } [\frac34;1]. \end{cases}$$

График $\psi_1(x)$ есть ломаная с вершинами в точках $(0;0)$, $(\frac14;\frac14)$, $(\frac34;-\frac14)$, $(1;0)$ и $\varphi_1(x) := 4\sqrt{3}\psi_1(x)$, т. е. $\|\varphi_1(x)\|_{L_2(0;1)} = 1$.

Определим систему $\varphi_m(x) := \varphi_1(2^{m-1}x)$ как периодическую с периодом 1. Очевидно, что

$$\varphi_m(x) = 4\sqrt{2}\int_0^x r_{m+1}(t)\,dt,$$

где $r_j(x) = \operatorname{sign}(\sin 2^j\pi x)$ — система Радемахера (см. например [10]).

В работе [11] А. И. Рубинштейн, в частности, показал, что система $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^\infty$ слабо мультипликативна, т. е.

$$\int_0^1 \varphi_{k_1}(x)\ldots\varphi_{k_s}(x) = 0 \qquad \text{при } 1\leqslant k_1<\cdots<k_s$$

и [12] для нее при любом $p>2$

$$\left(\int_0^1\left|\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x)\right|^p dx\right)^{\frac1p} \leqslant A_p\left(\sum_{k=1}^n c_k^2\right)^{\frac12}$$

— S_p-система — неравенство Хинчина, установленное впервые для системы Радемахера, кроме того, S_p-система является системой Банаха

$$\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant B_p \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)\right| dx.$$

Как показал В. Ф. Гапошкин [12], ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ почти всюду безусловно сходится при $\{c_k\} \in l_2$ и почти всюду расходится при $\{c_k\} \notin l_2$.

Для системы Радемахера сходимость почти всюду при $\{c_k\} \in l_2$ доказал Радемахер в 1922 г., а расходимость почти всюду при $\{c_k\} \notin l_2$ — Хинчин и Колмогоров в 1925 г.

В настоящей работе речь идет как раз о рядах по системе $\{\varphi_m(x)\}$.

Список литературы

1. *Ефимов А. В.* Линейные методы приближения непрерывных периодических функций // Математический сборник. 1961. Т. 54 (96), вып. 1. С. 51–90.
2. *Bolzano B.* Functionenlehre // Bolzano B., Petr K., Rychlik K. Bernard Bolzano's Schriften. Band 1. Praha, Královská česka společnost nauk v Praze, 1930. P. 80–184.
3. *Takagi T.* A simple example of a continuos function without derivative // Tokyo Sugaku-Butsurigakkwai Hokoku. 1901. Vol. 1. P. 176–177. https://doi.org/10.11429/subutsuhokoku1901.1.F176
4. *van der Waerden B. L.* Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion // Mathematische Zeitschrift. 1930. Vol. 32. P. 474–475. https://doi.org/10.1007/BF01194647
5. *Рубинштейн А. И.* Об ω-лакунарных рядах и о функциях классов H^ω // Математический сборник. 1964. Т. 65 (107), вып. 2. С. 239–271.
6. *Weierstrass K.* Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzeren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen // Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre: Vorlesung, gehalten in Berlin 1886 Mit der akademischen Antrittsrede, Berlin 1857, und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86. Wiesbaden : Vieweg+Teubner Verlag, 1988. P. 190–193. https://doi.org/10.1007/978-3-322-91273-2_5
7. *Теляковский Д. С.* Об условиях моногенности // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы (Саратов, 31 января – 4 февраля 2022 г.). Саратов : Саратовский университет [Издание], 2022. Вып. 21. С. 289–293. EDN: CZHBTY
8. *Белов А. С.* О локальных свойствах некоторых функций из класса Гельдера // Известия вузов. Математика. 1992. № 8. С. 13–20.
9. *Mishura Y., Schied A.* On (signed) Takagi – Landsberg functions: pth variation, maximum, and modulus of continuity // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2019. Vol. 473, iss. 1. P. 258–272. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.12.047
10. *Качмаж С., Штейнгаус Г.* Теория ортогональных рядов. Москва : ГИФМЛ, 1958. 507 с.
11. *Рубинштейн А. И.* Об одном множестве слабо мультипликативных систем // Математические заметки. 2019. Т. 105, вып. 3. С. 471–475. https://doi.org/10.4213/mzm11856, EDN: VWDTVI
12. *Гапошкин В. Ф.* О сходимости рядов по слабо мультипликативным системам функций // Математический сборник. 1972. Т. 89 (131), вып. 3 (11). С. 355–365.

References

1. Efimov A. V. Linear methods of approximating continuous periodic functions. *Matematicheskii Sbornik. Novaya Seriya*, 1961, vol. 54 (96), iss. 1, pp. 51–90. (in Russian).
2. Bolzano B. Functionenlehre. In: Bolzano B., Petr K., Rychlik K. *Bernard Bolzano's Schriften*. Band 1. Praha, Královská česka společnost nauk v Praze, 1930, pp. 80–184.
3. Takagi T. A simple example of a continuos function without derivative. *Tokyo Sugaku-Butsurigakkwai Hokoku*, 1901, vol. 1, pp. 176–177. https://doi.org/10.11429/subutsuhokoku1901.1.F176
4. van der Waerden B. L. Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion. *Mathematische Zeitschrift*, 1930, vol. 32, pp. 474–475 (in German). https://doi.org/10.1007/BF01194647
5. Rubinshtein A. I. On ω-lacunary series and functions of the classes H^{ω}. *Matematicheskii Sbornik. Novaya Seriya*, 1964, vol. 65 (107), iss. 2, pp. 239–271 (in Russian).
6. Weierstrass K. Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzeren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen. In: *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre: Vorlesung, gehalten in Berlin 1886 Mit der akademischen Antrittsrede, Berlin 1857, und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86*. Wiesbaden, Vieweg+Teubner Verlag, 1988, pp. 190–193. https://doi.org/10.1007/978-3-322-91273-2_5 (in German).
7. Telyakovskij D. S. On monogeneity conditions. *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications*: Materials of the 21st International Saratov Winter School (Saratov, January 31 – February 4, 2022). Saratov, Saratov State University Publ., 2022, iss. 21, pp. 289–293 (in Russian). EDN: CZHBTY
8. Belov A. S. Local properties of some functions in the Hölder class. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1992, vol. 36, iss. 8, pp. 10–17.
9. Mishura Y., Schied A. On (signed) Takagi – Landsberg functions: pth variation, maximum, and modulus of continuity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2019, vol. 473, iss. 1, pp. 258–272. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.12.047
10. Kaczmarz S., Steinhaus H. *Theorie der Orthogonalreihen*. Chelsea Publishing Company, 1951. 296 p. (Russ. ed.: Moscow, GIFML, 1958. 507 p.).
11. Rubinshtein A. I. On a Set of Weakly Multiplicative Systems. *Mathematical Notes*, 2019, vol. 105, iss. 3, pp. 473–477. https://doi.org/10.1134/S0001434619030192
12. Gaposhkin V. F. On the convergence of series of weakly multiplicative systems of functions. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1972, vol. 18, iss. 3, pp. 361–372. https://doi.org/10.1070/SM1972v018n03ABEH001818

Поступила в редакцию / Received 26.04.2022
Принята к публикации / Accepted 04.11.2022
Опубликована / Published 31.08.2023