Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 348–356
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 348–356
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-348-356, EDN: CZBAYY

Научная статья
УДК 517.98

К вопросу об остаточности сильных показателей колеблемости на множестве решений дифференциальных уравнений третьего порядка

А. Х. Сташ✉, Н. А. Лобода

Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета, Россия, 385000, г. Майкоп, ул. Первомайская, д. 208

Сташ Айдамир Хазретович, кандидат физико-математических наук, декан факультета математики и компьютерных наук, aidamir.stash@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-3008-7859, AuthorID: 956099

Лобода Надежда Алексеевна, старший преподаватель кафедры математического анализа и методики преподавания математики, n-loboda@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-6249-6158, AuthorID: 1051724

Аннотация. В работе исследуются различные разновидности показателей колеблемости (верхние или нижние, сильные или слабые) нестрогих знаков, нулей и корней ненулевых решений линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка с непрерывными и ограниченными на положительной полуоси коэффициентами. Ненулевое решение линейного однородного уравнения не может обнуляться в силу теоремы существования и единственности. Поэтому спектры всех перечисленных показателей колеблемости (т. е. их множества значений на ненулевых решениях) состоят из одного нулевого значения. Известно, что спектры показателей колеблемости линейных однородных уравнений второго порядка также состоят из одного значения. Следовательно, на множестве решений уравнений до второго порядка наблюдается остаточность всех характеристик колеблемости. На множестве решений уравнений третьего порядка сильные показатели колеблемости гиперкорней не являются остаточными, т. е. не являются инвариантными относительно изменения решения на любом конечном участке полуоси времени. Доказано, что на множестве решений уравнений третьего порядка сильные показатели колеблемости нестрогих знаков, нулей и корней не являются остаточными. Параллельно доказано существование функции из указанного множества, обладающей следующими свойствами: все перечисленные показатели колеблемости являются точными, но не абсолютными. При этом все сильные показатели, как и все слабые, равны между собой.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, колеблемость, число нулей, частота Сергеева, показатель колеблемости, остаточный функционал

Благодарности: Авторы выражают глубокую благодарность профессору И. Н. Сергееву за обсуждение результатов статьи.

Для цитирования: *Сташ А. Х., Лобода Н. А.* К вопросу об остаточности сильных показателей колеблемости на множестве решений дифференциальных уравнений третьего порядка //

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 348–356. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-348-356, EDN: CZBAYY

Article

On the question of the residual of strong exponents of oscillation on the set of solutions of third-order differential equations

A. Kh. Stash✉, **N. A. Loboda**

Caucasus Mathematical Center Adyghe State University, 208 Pervomayskaya St., Maykop 385000, Russia

Aydamir Kh. Stash, aidamir.stash@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-3008-7859, AuthorID: 956099
Nadezhda A. Loboda, n-loboda@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-6249-6158, AuthorID: 1051724

Abstract. In this paper, we study various types of exponents of oscillation (upper or lower, strong or weak) of non-strict signs, zeros, and roots of non-zero solutions of linear homogeneous differential equations of the third order with continuous and bounded coefficients on the positive semi-axis. A nonzero solution of a linear homogeneous equation cannot be zeroed due to the existence and uniqueness theorem. Therefore, the spectra of all the listed exponents of oscillation (i.e. their sets of values on nonzero solutions) consist of one zero value. In addition, it is known that the spectra of the oscillation exponents of linear homogeneous equations of the second order also consist of a single value. Consequently, on the set of solutions of equations up to the second order there is a residual of all exponents of oscillation. On the set of solutions of third-order equations, strong exponents vibrations of hyper roots are not residual, i.e. are not invariant with respect to the change in the solution at any finite section of the half-axis of time. In this article, it is proved that on the set of solutions of third-order equations, strong oscillation indices of non-strict signs, zeros, and roots are not residual. In parallel, the existence of a function from the specified set with the following properties is proved: all listed exponents of oscillation are accurate, but not absolute. At the same time, all strong exponents like all weak ones, are equal to each other.
Keywords: differential equations, oscillation, number of zeros, Sergeev's frequency, exponent of oscillation, residual functional
Acknowledgements: The authors express their deep gratitude to Professor I. N. Sergeev for discussing the results of the article.
For citation: Stash A. Kh., Loboda N. A. On the question of the residual of strong exponents of oscillation on the set of solutions of third-order differential equations. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 348–356 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-348-356, EDN: CZBAYY

Введение

Ляпуновские характеристики колеблемости решений линейных однородных дифференциальных уравнений и систем впервые были введены И. Н. Сергеевым в работах [1–4]. Новое направление успешно развивается не только учениками И. Н. Сергеева и его российскими коллегами, но и белорусскими [5–10].

В настоящей работе будем рассматривать следующие их разновидности:

– показатели колеблемости *нулей*, *смен знаков* (*строгих* или *нестрогих*), *корней* или *гиперкорней*;

– *верхние* или *нижние* показатели колеблемости (в случае их совпадения — *точные*);

– *сильные* или *слабые* показатели колеблемости (в случае их совпадения — *абсолютные*).

Подсчет последних происходит путем усреднения числа нулей (или смен знаков, или корней, или гиперкорней) проекции решения x дифференциальной системы на какую-либо прямую, причем эта прямая выбирается так, чтобы полученное среднее значение оказалось минимальным: если указанная минимизация производится перед усреднением, то получаются слабые показатели колеблемости, а если после, то — сильные показатели колеблемости. При этом для вычисления этих характеристик решения y линейного уравнения n-го порядка осуществляется переход к вектор-функции $x = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$.

Важным свойством ляпуновских характеристик, призванным облегчить их исследование, является *остаточность* [11], т. е. инвариантность относительно изменения решения на любом конечном участке полуоси времени. Свойство остаточности на множестве решений линейных однородных дифференциальных уравнений произвольного порядка сначала для скалярных частот строгих смен знаков и нулей было установлено И. Н. Сергеевым в [1] (аналогично доказывается и остаточность частот корней). Слабые показатели колеблемости гиперкорней любых решений, как оказалось [3], всегда совпадают с их показателями блуждаемости, которые являются остаточными.

Далее, для решений линейных однородных уравнений первого порядка все характеристики колеблемости равны нулю, так как эти решения попросту не имеют нулей, а для всех решений любого уравнения второго порядка все верхние (как и все нижние) частоты равны между собой, поскольку нули его решений чередуются и в принципе не могут быть кратными [12]. Следовательно, на множестве решений уравнений первого и второго порядков наблюдается остаточность всех характеристик колеблемости.

Отсутствие свойства остаточности у всех сильных показателей колеблемости решений дифференциальных систем доказано в работах [13, 14], а у сильных показателей колеблемости гиперкорней на множестве решений уравнений третьего порядка — в [15]. В настоящей статье обсуждаются вопросы остаточности у сильных показателей колеблемости нестрогих знаков, нулей и корней на множестве решений линейных однородных уравнений третьего порядка.

1. Основные обозначения и определения

Для заданного натурального n рассмотрим множество $\mathcal{E}^n$ линейных однородных уравнений n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty),$$

задаваемых ограниченными непрерывными функциями

$$a \equiv (a_1, \ldots, a_n)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n,$$

с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения.

Множество всех ненулевых решений уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(a)$. Далее, звездочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Положим $\mathcal{S}_*^n = \bigcup\limits_{a\in\mathcal{E}^n} \mathcal{S}_*(a)$.

Определение 1 ([1]). Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *нестрогая смена знака* функции $y \in \mathcal{S}^n_*$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как неположительные, так и неотрицательные значения.

Определение 2 ([1–3]). Для момента $t > 0$ и функции $y \in \mathcal{S}^n_*$ введем следующие обозначения:

$\nu^{\sim}(y,t)$ — число ее точек *нестрогих смен знаков* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^{0}(y,t)$ — число ее *нулей* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^{+}(y,t)$ — число ее *корней* (т. е. нулей с учетом их *кратности*) на промежутке $(0,t]$;

$\nu^{*}(y,t)$ — число ее *гиперкорней* (т. е. нулей с учетом их *кратности*) на промежутке $(0,t]$, где в процессе подсчета этого количества:

— каждый некратный корень берется ровно один раз;

— любой кратный корень берется бесконечно много раз независимо от его фактической кратности.

Далее, для вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$ и вектор-функции $\psi y = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$ введем обозначение $\nu^s(y,m,t) \equiv \nu^s(\langle \psi y, m\rangle, t)$, где $s \in \{\sim, 0, +, *\}$, $\langle \psi y(\cdot), m\rangle$ — скалярное произведение.

Определение 3 ([2–4]). *Верхние* (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости знаков, нулей* и *корней* функции $y \in \mathcal{S}^n_*$ при $s \in \{\sim, 0, +, *\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}^s_{\bullet}(y) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^s(y,m,t) \quad \left(\check{\nu}^s_{\bullet}(y) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^s(y,m,t)\right),$$
$$\hat{\nu}^s_{\circ}(y) \equiv \overline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^s(y,m,t) \quad \left(\check{\nu}^s_{\circ}(y) \equiv \underline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^s(y,m,t)\right).$$

В случае совпадения сильного или слабого верхнего показателя колеблемости решения y с одноименным нижним будем называть его *точным* и обозначать $\nu^s_{\bullet}(y)$ или $\nu^s_{\circ}(y)$.

Из сформулированных определений вытекают

Замечание 1. Для любого $y \in \mathcal{S}^n_*$ имеют место следующие соотношения:

$$\hat{\nu}^{\sim}_{\circ}(y) \leqslant \hat{\nu}^{0}_{\circ}(y) \leqslant \hat{\nu}^{+}_{\circ}(y) \leqslant \hat{\nu}^{*}_{\circ}(y), \quad \check{\nu}^{\sim}_{\circ}(y) \leqslant \check{\nu}^{0}_{\circ}(y) \leqslant \check{\nu}^{+}_{\circ}(y) \leqslant \check{\nu}^{*}_{\circ}(y),$$

$$\hat{\nu}^{\sim}_{\bullet}(y) \leqslant \hat{\nu}^{0}_{\bullet}(y) \leqslant \hat{\nu}^{+}_{\bullet}(y) \leqslant \hat{\nu}^{*}_{\bullet}(y), \quad \check{\nu}^{\sim}_{\bullet}(y) \leqslant \check{\nu}^{0}_{\bullet}(y) \leqslant \check{\nu}^{+}_{\bullet}(y) \leqslant \check{\nu}^{*}_{\bullet}(y).$$

Замечание 2. Для любых $y \in \mathcal{S}^n_*$ и $s \in \{\sim, 0, +, *\}$ справедливы неравенства

$$\hat{\nu}^s_{\circ}(y) \leqslant \hat{\nu}^s_{\bullet}(y), \quad \check{\nu}^s_{\circ}(y) \leqslant \check{\nu}^s_{\bullet}(y).$$

Определение 4 ([11]). Для заданных множеств M и $F = \{f : \mathbb{R}_+ \to M\}$ назовем функцию $\lambda : F \to \mathbb{R}$ *остаточной*, если для любых функций $f, g \in F$, удовлетворяющих хотя бы для одного $t_0 \in \mathbb{R}_+$ условию $f(t) = g(t)$ при всех $t \geqslant t_0$, имеет место равенство $\lambda(f) = \lambda(g)$.

2. Вспомогательные определения и факты

Для нормированного пространства $\mathcal{G}$ квадратных матриц порядка n с положительными определителями обозначим $\mathcal{B}_r(H_0) = \{H \in \mathcal{G} | \|H - H_0\| \leqslant r\}$ (нормы в пространствах строк, столбцов и матриц определим как максимум модулей их элементов).

Лемма 1 ([16]). *Для каждой пары уравнений $a, b \in \mathcal{E}^n$, произвольных $t_0, t_1 \in \mathbb{R}_+$ и пары фундаментальных систем решений $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{S}(a)$, $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{S}(b)$ с образованной ими парой фундаментальных матриц $X(t_0), Y(t_1) \in \mathcal{G}$ найдется уравнение $c \in \mathcal{E}^n$ с фундаментальной системой решений $z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{S}(c)$, удовлетворяющей условиям*

$$z_i(t) = \begin{cases} x_i(t), & 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ y_i(t), & t \geqslant t_1. \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n,$$

а если, кроме того, фиксирована пара матриц $H_0, H_1 \in \mathcal{G}$, то существует такое $\delta > 0$, что указанное уравнение можно выбрать еще и для каждой пары матриц $X(t_0) \in \mathcal{B}_\delta(H_0)$, $Y(t_1) \in \mathcal{B}_\delta(H_1)$, бесконечно дифференцируемым по ним (как по параметрам).

Замечание 3. Минимумы в определениях показателей колеблемости гиперкорней можно брать не по всем ненулевым векторам m, а лишь по единичным, поскольку справедливо

$$\nu^*(y, m, t) = \nu^*(y, m/|m|, t), \quad y \in \mathcal{S}^n_*, \quad m \in \mathbb{R}^n_*.$$

Определение 5 ([3]). Пусть $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n_*$ — непрерывно-дифференцируемая функция. Тогда вектор $m \in \mathbb{R}^n_*$ назовем:

а) *критической нормалью к функции x на отрезке* $[0; t]$, если для него хотя бы в один момент $\tau_0 \in [0; t]$ выполняются равенства $\langle x(\tau_0), m\rangle = \langle \dot{x}(\tau_0), m\rangle = 0$, — множество всех таких векторов обозначим через $C_x(t)$;

б) *критической нормалью к функции x* (на всей полупрямой $\mathbb{R}_+$, если для него хотя бы в один момент $\tau_0 \in \mathbb{R}_+$ выполняются равенства $\langle x(\tau_0), m\rangle = \langle \dot{x}(\tau_0), m\rangle = 0$, — множество всех таких векторов обозначим через C_x;

в) *концевой ортогональю к функции x на отрезке* $[0; t]$, если вектор m ортогонален хотя бы одному из векторов $x(0)$ или $x(t)$.

Замечание 4. Равенство $\nu^*(x, m, t) = \infty$ возможно только в случае, когда вектор $m \in \mathbb{R}^n_*$ является критической нормалью к функции x на отрезке $[0; t]$.

Можно рассматривать единичную сферу S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$ как самостоятельное топологическое пространство с индуцированной из $\mathbb{R}^n$ топологией и со стандартной мерой mes, являющейся $(n-1)$-мерной площадью поверхности.

Рассмотрим множество

$$G_x(t) \equiv S^{n-1} \setminus (C_x(t) \cup x^\perp(0) \cup x^\perp(t))$$

всех векторов $m \in S^{n-1}$, не являющихся для функции x на отрезке $[0; t]$ ни критическими нормалями, ни концевыми ортогоналями.

Лемма 2 ([3]). *Для любой непрерывно-дифференцируемой функции $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n_*$ и любого значения $t > 0$ множество $G_x(t)$ имеет на сфере S^{n-1} полную меру, открыто и всюду плотно, а на каждом его компоненте связности величина $\nu^*(x, m, t)$ принимает постоянное конечное значение.*

Замечание 5 ([3]). Лемма 1 утверждает, в частности, что для каждого значения $t > 0$ множество $G_x(t) \cap S^{n-1}$ единичных критических нормалей к функции x на отрезке $[0; t]$ имеет на сфере S^{n-1} меру нуль, замкнуто и нигде не плотно.

3. Формулировка и доказательство основных результатов

Теорема 1. *Существует функция $y \in \mathcal{S}_*^3$, удовлетворяющая соотношениям*

$$\nu_\bullet^\sim(y) = \nu_\bullet^0(y) = \nu_\bullet^+(y) > \nu_\circ^0(y) = \nu_\circ^+(y) = \nu_\circ^\sim(y).$$

Теорема 2. *Каждый из функционалов $\hat{\nu}_\bullet^\sim, \check{\nu}_\bullet^\sim, \hat{\nu}_\bullet^0, \check{\nu}_\bullet^0, \hat{\nu}_\bullet^+, \check{\nu}_\bullet^+, : \mathcal{S}_*^3 \to \mathbb{R}$ не является остаточным.*

Доказательство. 1. Выберем уравнение $a \in \mathcal{E}^3$ вида $\dddot{y} + 9\dot{y} = 0$ с фундаментальной системой решений

$$x_1 = \cos 3t, \quad x_2 = \sin 3t, \quad x_3 = 1, \tag{1}$$

определитель Вронского которой удовлетворяет неравенству

$$\begin{vmatrix} \cos 3t & \sin 3t & 1 \\ -3\sin 3t & 3\cos 3t & 0 \\ -9\cos 3t & -9\sin 3t & 0 \end{vmatrix} = 27\sin^2 t + 27\cos^2 t = 27 > 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

По выбранной системе из трех функций

$$y_1 = \sin 3t, \quad y_2 = e^{-t}, \quad y_3 = \cos 3t \tag{2}$$

с положительным определителем Вронского

$$\Delta(t) \equiv \begin{vmatrix} \sin 3t & e^{-t} & \cos 3t \\ 3\cos 3t & -e^{-t} & -3\sin 3t \\ -9\sin 3t & e^{-t} & -9\cos 3t \end{vmatrix} = 30e^{-t}$$

восстановим линейное однородное уравнение $b \in \mathcal{E}^n$ вида

$$\frac{1}{\Delta(t)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \dot{y}_3 & \dot{y} \\ \ddot{y}_1 & \ddot{y}_2 & \ddot{y}_3 & \ddot{y} \\ \dddot{y}_1 & \dddot{y}_2 & \dddot{y}_3 & \dddot{y} \end{vmatrix} = 0,$$

решениями которого они являются (см. [17]). Раскладывая определитель по элементам последнего столбца, убеждаемся, что коэффициенты построенного уравнения являются ограниченными функциями на $\mathbb{R}_+$.

2. Выберем такие числа t_1 и t_2, что $t_1 < t_2$. В соответствии с леммой 1 построим на участке $[t_1, t_2]$ уравнение $c \in \mathcal{E}^3$ (с гладкими коэффициентами), переводящее набор (1) решений, заданных на отрезке $[0, t_1]$, в набор (2) решений, заданных на луче $[t_2, +\infty)$: уравнение c слева от отрезка $[t_1, t_2]$ совпадает с уравнением a, а справа — с уравнением b. Здесь первое решение начального набора переходит в первое решение конечного набора, второе — во второе, а третье — в третье. Обозначим полученные кусочно составленные решения этого уравнения через z_1, z_2, z_3 соответственно, т. е.

$$z_i(t) = \begin{cases} x_i(t), & t \in [0, t_1], \\ y_i(t), & t \in [t_2, +\infty). \end{cases}$$

3. Рассмотрим два решения:

$$z = z_1 + z_2 \in \mathcal{S}_*(c), \quad y = y_1 + y_2 \in \mathcal{S}_*(b),$$

совпадающие друг с другом на луче $[t_2, +\infty)$. Для вектора $m_1 = (9, 0, 1)$ имеем представление

$$\langle \psi y(t), m_1 \rangle = 10e^{-t} > 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

$$\langle \psi z(t), m_1 \rangle = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_1], \\ \langle \psi y(t), m_1 \rangle, & t \in [t_2, +\infty). \end{cases}$$

Отсюда, с одной стороны, в силу неравенства (3) при любых $s \in \{\sim, 0, +\}$ и $t > 0$ имеем $\nu^s(y, m_1, t) = 0$, откуда

$$\hat{\nu}^s_\bullet(y) = \check{\nu}^s_\bullet(y) = 0. \tag{4}$$

С другой стороны, при любом $s \in \{\sim, 0, +, *\}$ имеем $\nu^s(z, m_1, t_1) = \infty$. Для любого вектора $m = (\alpha, \beta, \gamma)$ при $t \geqslant t_2$ имеем представление

$$\langle \psi z(t), m \rangle = A_1 \sin(3t) + A_2 \cos(3t) + A_3 e^{-t},$$

где $A_1 \to 0, A_2 \to 0, A_3 \to 10$ при $m \to m_1$. Поэтому скалярное произведение $\langle \psi z(t), m \rangle$ отделено от нуля на промежутке $[t_2, +\infty)$, при этом согласно теореме 2 из [3] выполнено $\nu^*(z, m, t_2) < \infty$. При каждом $s \in \{\sim, 0, +\}$ справедливы равенства

$$\check{\nu}^s_\circ(z) \equiv \lim_{t \to +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t} \nu^s(z, m, t) = 0. \tag{5}$$

4. При любом m, неколлинеарном m_1, скалярное произведение $\langle \psi z(t), m \rangle$, начиная с некоторого достаточно большого значения $t_3(m)$, на любом промежутке длины π будет иметь ровно три нуля. При этом для многих векторов m согласно лемме 2 выполнено неравенство $\nu^*(z, m, t_3(m)) < \infty$. Следовательно, при любом $s \in \{\sim, 0, +\}$ справедливо

$$\hat{\nu}^s_\bullet(z) = \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\pi}{t} \nu^s(z, m, t) = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\pi}{t} \left[\frac{3t}{\pi} \right] = 3,$$

где $[s]$ — целая часть числа s.

Для нижних сильных показателей колеблемости решения z имеют место аналогичные равенства, поэтому справедлива цепочка равенств

$$\hat{\nu}^s_\bullet(z) = \check{\nu}^s_\bullet(z) = 3. \tag{6}$$

Несовпадение друг с другом величин (5) и (6) завершает доказательство теоремы 1.

Несовпадение друг с другом величин (4) и (6) означает неостаточность рассматриваемых частот, тем самым завершается доказательство теоремы 2. $\square$

Список литературы

1. *Сергеев И. Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды Семинара им. И. Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294. http://mi.mathnet.ru/tsp65

2. *Сергеев И. Н.* Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2012. Т. 76, № 1. С. 149–172. https://doi.org/10.4213/im5035, EDN: RDNIDF
3. *Сергеев И. Н.* Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Математический сборник. 2013. Т. 204, № 1. С. 119–138. https://doi.org/10.4213/sm7928, EDN: QBGCJF
4. *Сергеев И. Н.* Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Математические заметки. 2016. Т. 99, № 5. С. 732–751. https://doi.org/10.4213/mzm10555, EDN: VUAJCH
5. *Бурлаков Д. С., Цой С. В.* Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Труды Семинара им. И. Г. Петровского. 2014. Вып. 30. С. 75–93. http://mi.mathnet.ru/tsp71
6. *Быков В. В.* О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 4. С. 419–425. https://doi.org/10.1134/S0374064116040026, EDN: VTOWHB
7. *Барабанов Е. А., Войделевич А. С.* К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I //Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 10. С. 1302–1320. https://doi.org/10.1134/S0374064116100034, EDN: WORTCF
8. *Барабанов Е. А., Войделевич А. С.* К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II //Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 12. С. 1595–1609. https://doi.org/10.1134/S0374064116120013, EDN: XGYBHD
9. *Барабанов Е. А., Войделевич А. С.* Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Доклады Национальной Академии наук Беларуси. 2016. Т. 60, № 1. С. 24–31. EDN: VSPOJR
10. *Войделевич А. С.* О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2019. № 1. С. 28–32. https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-28-32
11. *Сергеев И. Н.* К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111–166.
12. *Сергеев И. Н.* Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2011. № 6. С. 21–26. EDN: OJWOAZ
13. *Сташ А. Х.* Некоторые свойства показателей колеблемости решений двумерной системы // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2019. № 5. С. 48–51. EDN: TSAYXA
14. *Сташ А. Х.* Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости линейных систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31, вып. 1. С. 59–69. https://doi.org/10.35634/vm210105
15. *Сташ А. Х.* Об отсутствии свойства остаточности у полных гиперчастот решений дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2017. № 2. С. 65–68. EDN: YKGIIN
16. *Сергеев И. Н.* Об управлении решениями линейного дифференциального уравнения // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2009. № 3. С. 25–33. EDN: MKTYMH
17. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. Москва : Едиториал УРСС, 2004. 240 с. EDN: QJMGQF

References

1. Sergeev I. N. Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation. *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 135, iss. 1, pp. 2764–2793. https://doi.org/10.1007/s10958-006-0142-6

2. Sergeev I. N. Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential system. *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, iss. 1, pp. 139–162. https://doi.org/10.1070/IM2012v076n01ABEH002578
3. Sergeev I. N. The remarkable agreement between the oscillation and wandering characteristics of solutions of differential systems. *Sbornik: Mathematics*, 2013, vol. 204, iss. 1, pp. 114–132. https://doi.org/10.1070/SM2013v204n01ABEH004293
4. Sergeev I. N. Oscillation, rotation, and wandering exponents of solutions of differential systems. *Mathematical Notes*, 2016, vol. 99, iss. 5, pp. 729–746. https://doi.org/10.1134/S0001434616050114
5. Burlakov D. S., Tsoii S. V. Coincidence of complete and vector frequencies of solutions of a linear autonomous system. *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 210, iss. 2, pp. 155–167. https://doi.org/10.1007/s10958-015-2554-7
6. Bykov V. V. On the Baire classification of Sergeev frequencies of zeros and roots of solutions of linear differential equations. *Differential Equations*, 2016, vol. 52, iss. 4, pp. 413–420. https://doi.org/10.1134/S0012266116040029
7. Barabanov E. A., Voidelevich A. S. Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs, and roots for solutions of linear differential equations: I. *Differential Equations*, 2016, vol. 52, iss. 10, pp. 1249–1267. https://doi.org/10.1134/S0012266116100013
8. Barabanov E. A., Voidelevich A. S. Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs, and roots for solutions of linear differential equations: II. *Differential Equations*, 2016, vol. 52, iss. 12, pp. 1523–1538. https://doi.org/10.1134/S0012266116120016
9. Barabanov E. A., Vaidzelevich A. S. Spectra of the upper Sergeev frequencies of zeros and signs of linear differential equations. *Doklady NAN Belarusi*, 2016, vol. 60, iss. 1, pp. 24–31 (in Russian). EDN: VSPOJR
10. Vaidzelevich A. S. On spectra of upper Sergeev frequencies of linear differential equations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2019, iss. 1, pp. 28–32 (in Russian). https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-28-32
11. Sergeev I. N. A contribution to the theory of Lyapunov exponents for linear systems of differential equations. *Journal of Soviet Mathematics*, 1986, vol. 33, iss. 6, pp. 1245–1292. https://doi.org/10.1007/BF01084752
12. Sergeev I. N. Oscillation and wandering of solutions to a second order differential equation. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2011, vol. 66, pp. 250–254. https://doi.org/10.3103/S0027132211060052
13. Stash A. Kh. Some properties of oscillation indicators of solutions to a two-dimensional system. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2019, vol. 74, pp. 202–204. https://doi.org/10.3103/S0027132219050061
14. Stash A. Kh. The absence of residual property for strong exponents of oscillation of linear systems. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, iss. 1, pp. 59–69 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm210105
15. Stash A. Kh. The absence of residual property for total hyper-frequencies of solutions to third order differential equations. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2017, vol. 72, pp. 81–83. https://doi.org/10.3103/S0027132217020085
16. Sergeev I. N. Controlling solutions to a linear differential equation. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2009, vol. 64, pp. 113–120. https://doi.org/10.3103/S0027132209030048
17. Filippov A. F. *Vvedenie v teoriyu differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the Theory of Differential Equations]. Moscow, Editorial URSS, 2004. 240 p. (in Russian). EDN: QJMGQF

Поступила в редакцию / Received 12.03.2022
Принята к публикации / Accepted 08.12.2022
Опубликована / Published 31.08.2023