Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 443–455
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 443–455
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-443-455, EDN: FNPHQP

Научная статья
УДК 517.5

Орторекурсивные разложения, порожденные ядром Сеге

П. А. Терехин

[1]Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83
[2]Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1

Терехин Павел Александрович, доктор физико-математических наук, [1]заведующий кафедрой математического анализа; [2]ведущий научный сотрудник лаборатории «Многомерная аппроксимация и приложения», terekhinpa@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-7874-9324, AuthorID: 13326

Аннотация. В статье рассматриваются системы подпространств пространства Харди, порожденные ядром Сеге. Основной результат работы заключается в установлении сходимости орторекурсивных разложений по рассматриваемым системам подпространств. Заметим, что условия сходимости орторекурсивных разложений оказываются несколько более ограничительными по сравнению с ранее полученными условиями сходимости порядкосохраняющих слабых жадных алгоритмов и фреймовых разложений.
Ключевые слова: гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, пространство Харди, ядро Сеге, орторекурсивное разложение, фрейм
Благодарности: Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-71-30001) в МГУ им. М. В. Ломоносова.
Для цитирования: *Терехин П. А.* Орторекурсивные разложения, порожденные ядром Сеге // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 443–455. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-443-455, EDN: FNPHQP

Article

Orthorecursive expansions generated by the Szegö kernel

P. A. Terekhin

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia
Lomonosov Moscow State University, Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, GSP-1, Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia

Pavel A. Terekhin, terekhinpa@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-7874-9324, AuthorID: 13326

Abstract. This article considers systems of subspaces of the Hardy space generated by the Szegö kernel. The main result of the work is to establish the convergence of orthorecursive expansions with respect to the considered systems of subspaces. Note that the conditions for the convergence of orthorecursive expansions prove to be somewhat more restrictive compared to the previously obtained conditions for the convergence of order-preserving weak greedy algorithms and frame expansions.

Keywords: reproducing kernel Hilbert space, Hardy space, Szegö kernel, orthorecursive expansion, frame

Acknowledgements: This research was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-71-30001) at Lomonosov Moscow State University.

For citation: Terekhin P. A. Orthorecursive expansion generated by the Szegö kernel. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 443–455 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-443-455, EDN: FNPHQP

Введение

Хорошо известно, что геометрия функционального гильбертова пространства в значительной степени определяется свойствами его воспроизводящего ядра. Такие различные задачи, как распределение нулей и интерполяция функций, приближение функций и представление рядами, мультипликативная структура пространства и описание ассоциированных с ней пространств и алгебр, а также целый ряд других задач получают свое решение на основе исследования поведения воспроизводящего ядра данного функционального пространства. С точки зрения теории функций и функционального анализа представляет интерес следующий вопрос:

Какими аппроксимативными и представляющими свойствами (полнота, базисность и т. п.) обладает последовательность $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *дискретизированных значений воспроизводящего ядра?*

Естественно, что ответ на этот вопрос в его «глобальной» постановке не может быть универсальным, т. е. ситуация существенным образом зависит от конкретного функционального гильбертова пространства, которое будет рассматриваться. В данной работе мы будем иметь дело исключительно с пространством Харди $H^2(\mathbb{D})$ в единичном круге $\mathbb{D}$ и его воспроизводящим ядром

$$K_\lambda(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}, \qquad \lambda, z \in \mathbb{D},$$

которое называется ядром Сеге (или ядром Коши). Основной вопрос заключается в нахождении условий сходимости орторекурсивных разложений по системам подпространств пространства Харди, порожденных ядром Сеге. Ответ на этот вопрос (теорема 2 из разд. 4) получен на основе изучения аппроксимативных свойств подпространств специального вида $\mathcal{K}_{r,n} = [K_{r,n,j}]_{j=0}^{n-1}$, натянутых на значения ядра Сеге $K_{r,n,j}$, соответствующих перемещенным на радиус r корням n-ой степени из единицы $\lambda_{r,n,j} = re^{2\pi ij/n}$, $j = 0, \dots, n-1$.

1. Предварительные сведения

Функциональные гильбертовы пространства. Гильбертово пространство H, состоящее из функций $f : \Omega \to \mathbb{C}$, называется *функциональным*, если для каждого

$\lambda \in \Omega$ корректно определен и ограничен *оценочный функционал* $f \mapsto f(\lambda)$, т. е. существует положительная постоянная C_λ такая, что для всех $f \in H$ выполняется неравенство $|f(\lambda)| \leqslant C_\lambda \|f\|$. По теореме Рисса о представлении ограниченного линейного функционала в гильбертовом пространстве для каждого $\lambda \in \Omega$ существует единственный элемент $K_\lambda \in H$ такой, что $f(\lambda) = \langle f, K_\lambda \rangle$. *Воспроизводящим ядром* функционального гильбертова пространства H называется функция $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$, определяемая посредством

$$K(\lambda, \omega) := \langle K_\lambda, K_\omega \rangle = K_\lambda(\omega), \qquad \lambda, \omega \in \Omega.$$

Пространство Харди и ядро Сеге. Пространство Харди $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ состоит из всех аналитических в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций $f(z)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{H^2} = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{D}$ — счетное множество точек и $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — последовательность значений ядра Сеге. Как следует из классической теоремы Сеге о нулях, подпространство $[K_\lambda : \lambda \in \Lambda]$ (замыкание линейной оболочки последовательности) совпадает с пространством $H^2(\mathbb{D})$ в том и только том случае, когда

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (1 - |\lambda|) = \infty. \tag{1}$$

Напротив, существование биортогональной системы $\{L_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset H^2(\mathbb{D})$ (т. е. $\langle K_\lambda, L_\mu \rangle_{H^2} = \delta_{\lambda\mu}$, где $\delta_{\lambda\mu}$ — символ Кронекера) эквивалентно выполнению условия Бляшке

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (1 - |\lambda|) < \infty. \tag{2}$$

Несовместность условий полноты и минимальности показывает, что система $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ не может быть базисом пространства $H^2(\mathbb{D})$ ни при каком Λ. Тем не менее, система $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ образует базисную последовательность (т. е. базис в замыкании своей линейной оболочки) тогда и только тогда, когда наряду с условием Бляшке выполняется условие Карлесона (см. [1], а также [2, гл. 10])

$$\prod_{\mu \in \Lambda, \mu \neq \lambda} \left| \frac{\mu - \lambda}{1 - \bar{\lambda}\mu} \right| \geqslant c, \qquad \lambda \in \Lambda, \tag{3}$$

с некоторой постоянной $c > 0$. При этом (собственное) подпространство $K = [K_\lambda : \lambda \in \Lambda]$ удовлетворяет равенству $K^\perp = BH^2$, где B — произведение Бляшке с нулями Λ и $K^\perp$ — ортогональное дополнение.

Рассмотрим нормированное ядро Сеге

$$\widehat{K}_\lambda(z) = \frac{(1 - |\lambda|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \bar{\lambda}z}, \qquad \lambda, z \in \mathbb{D}.$$

Заметим, что система $\{\widehat{K}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ не только не может быть базисом пространства Харди, но также не образует фрейм Даффина – Шеффера в $H^2(\mathbb{D})$. В самом деле, нижнее и верхнее фреймовые неравенства

$$A\|f\|^2_{H^2} \leqslant \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle f, \widehat{K}_\lambda \rangle_{H^2}|^2 \leqslant B\|f\|^2_{H^2}, \quad f \in H^2,$$

вступают в противоречие друг с другом, поскольку первое из них влечет за собой полноту системы и тем самым условие (1), а второе, известное также как условие Ньюмана

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}(1-|\lambda|^2)|f(\lambda)|^2 \leqslant B\|f\|^2_{H^2}, \tag{4}$$

имеет следствием условие (2) (достаточно положить $f\equiv 1$ в условии (4)). При этом (3)⇒(4) и, наоборот, каждое множество, удовлетворяющее условию (4), является конечным объединением множеств, удовлетворяющих условию (3) [3, Ch. 2, § 5]. Последнее утверждение является частным случаем гипотезы Фейхтингера, доказанной Маркусом, Шпильманом и Шриваставой [4] и эквивалентной гипотезе Кадисона – Зингера.

В противоположность вышеупомянутым результатам о несуществовании базисов и фреймов Даффина – Шеффера вида $\{\widehat{K}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ результат Тотика [5] в эквивалентной формулировке утверждает справедливость формулы восстановления

$$f=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle f,p_{n,k}\rangle_{H^2}K_{\lambda_k}, \qquad f\in H^2,$$

для каждой последовательности $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\Lambda=(\lambda_n)$, удовлетворяющей условию (1), где $p_{n,k}$ — алгебраические полиномы, не зависящие от f. Тем не менее, формула восстановления Тотика не предоставляет ряда по системе значений ядра Сеге. В статье Фрикейна, Хоя и Лефевра [6] был поставлен следующий вопрос:

Существует ли последовательность точек $\Lambda=(\lambda_n)\subset\mathbb{D}$ такая, что $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является представляющей системой в пространстве H^2?

Напомним, что последовательность $\{K_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ называется *представляющей системой* в пространстве H^2, если для всех $f\in H^2$ существует последовательность коэффициентов $(c_n)\subset\mathbb{C}$ такая, что справедливо представление

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}c_nK_{\lambda_n}.$$

Здесь, в отличие от понятия базиса, не требуется единственности представляющего функцию f ряда. Положительный ответ на вопрос Фрикейна, Хоя и Лефевра получен в статье [7] с использованием понятия фрейма [8], более общего, нежели фрейм Даффина – Шеффера. Заметим, что фреймовый подход позволяет лишь утверждать существование коэффициентов (c_n) представляющего ряда, но не дает эффективного способа вычисления этих коэффициентов. В связи с этим в статье [9] были найдены условия сходимости порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма по системе подпространств пространства Харди, порожденных ядром Сеге. В настоящей работе изучаются орторекурсивные разложения по подпространствам так же, как и жадные алгоритмы, указывающие эффективный метод нахождения коэффициентов ряда.

Орторекурсивное разложение по последовательности элементов. Орторекурсивное разложение, определение которого предложено Т. П. Лукашенко в 1999 г., представляет собой конструктивную процедуру решения задачи представления функций рядами по элементам заданной последовательности функций (см. [10]).

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство и $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathcal{H}$ — последовательность его элементов, которую для удобства будем считать нормированной, т. е. $\|e_k\|=1$,

$k = 1, 2, \ldots$. Для элемента $f \in \mathcal{H}$ построим по индукции его рекурсивные коэффициенты Фурье $\hat{f}_k$. Предположим, что коэффициенты $\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_{n-1}$ уже построены. Тогда полагаем $R_{n-1}f = f - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \hat{f}_k e_k$ и $\hat{f}_n = \langle R_{n-1}f, e_n \rangle$. Ряд

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k e_k$$

называется *рекурсивным рядом Фурье* элемента $f \in \mathcal{H}$.

2. Орторекурсивные разложения по системе подпространств

Пусть задана система подпространств

$$H_k, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

гильбертова пространства H. Обозначим через P_k оператор ортогонального проектирования из H на H_k и рассмотрим операторные произведения

$$Q_k = P_k(I - P_{k-1}) \ldots (I - P_1), \qquad R_k = (I - P_k) \ldots (I - P_1), \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Для произвольного $h \in H$ имеем $Q_k h \in H_k$ и $R_k h$ ортогонально $Q_k h$, причем $Q_k h + R_k h = R_{k-1} h$ (полагаем, что пустое произведение $R_0 = I$). Отсюда для сумм

$$S_n h = \sum_{k=1}^{n} Q_k h, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

по индукции получаем соотношения

$$h = S_n h + R_n h, \qquad \|h\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|Q_k h\|^2 + \|R_n h\|^2, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Формальный ряд

$$h \sim \sum_{k=1}^{\infty} Q_k h, \qquad Q_k h \in H_k,$$

называется *орторекурсивным разложением* $h \in H$ по системе подпространств $\{H_k\}_{k=1}^{\infty}$. Орторекурсивное разложение сходится к h, т. е.

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k h = \lim_{n \to \infty} S_n h,$$

если и только если $R_n h \to 0$ при $n \to \infty$ или, что равносильно, если и только если выполняется равенство Парсеваля

$$\|h\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|Q_k h\|^2.$$

Последовательность подпространств $\{H_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *системой орторекурсивного разложения* в том случае, когда для каждого $h \in H$ орторекурсивное разложение сходится к h. Свойства орторекурсивных разложений по подпространствам рассматривались в работах [11] и [12].

Достаточное условие системы орторекурсивного разложения получено в статьях [13, 14] и основано на идее кросс-аппроксимации, т. е. на изучении поведения величин наилучшего приближения, с одной стороны, элементов $h \in H_k$ полиномами по некоторой специально выбранной системе элементов гильбертова пространства H и, с другой стороны, полинома по такой вспомогательной системе посредством подпространств H_k. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ — полная система элементов гильбертова пространства H. Рассмотрим величину наилучшего приближения порядка N

$$E_N(h) = \inf_{p\,:\,\deg p<N} \|h-p\|$$

элемента $h \in H$ полиномами $p = \sum\limits_{n=0}^{N-1} a_n e_n$ степени $\deg p < N$.

Далее, во избежание путаницы будем обозначать

$$\operatorname{dist}(p, H_k) = \inf_{h\in H_k} \|p-h\|$$

величину наилучшего приближения элемента (в частности, полинома) p посредством подпространства H_k.

Наконец, выберем строго возрастающую последовательность натуральных (n_k) и предположим, что выполняются следующие неравенства для смешанных приближений: во-первых

$$E_{n_k}(h) \leqslant \tau_{k,j}\|h\|, \qquad h \in H_j, \qquad j = 1, \dots, k-1, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{5}$$

и, во-вторых, для полиномов p по системе $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$\operatorname{dist}(p, H_k) \leqslant \sigma\|p\|, \qquad \deg p < n_k, \qquad k = 1, 2, \dots. \tag{6}$$

Теорема 1 (достаточное условие системы орторекурсивного разложения [13, 14]). *Предположим, что последовательность натуральных (n_k) такова, что имеют место оценки (5) и (6) с постоянными $\sigma < 1$ и*

$$\sup_k \sum_{j=1}^{k-1} \tau_{k,j}^2 < \infty.$$

Тогда последовательность подпространств $\{H_k\}_{k=1}^{\infty}$ является системой орторекурсивного разложения в пространстве H.

3. Подпространства, порожденные ядром Сеге

Пусть $0 < r < 1$ и $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим семейство подпространств

$$\mathcal{K}_{r,n} = [K_{r,n,j}]_{j=0}^{n-1},$$

порожденных значениями ядра Сеге $K_\lambda(z)$, дискретизированного в корнях n-ой степени из единицы, перемещенных на окружность радиуса r:

$$\lambda_{r,n,j} = re^{2\pi ij/n}, \qquad j = 0, \dots, n-1.$$

Другими словами, функция $f \in \mathcal{K}_{r,n}$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \zeta_j K_{r,n,j}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\zeta_j}{1 - re^{-2\pi ij/n} z}, \qquad \zeta = (\zeta_j) \in \mathbb{C}^n.$$

Лемма 1. *Для всех $f \in \mathcal{K}_{r,n}$ имеет место равенство*

$$\|f\|_{H^2} = \left(\frac{1}{1 - r^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{\zeta}_k|^2 r^{2k} \right)^{1/2},$$

где $\hat{\zeta}_k = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \zeta_j e^{-2\pi ij/n}$, $k = 0, 1, \ldots,$ — дискретное преобразование Фурье (ДПФ) вектора $\zeta \in \mathbb{C}^n$.

Доказательство. По определению, для $f \in \mathcal{K}_{r,n}$ имеем

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\zeta_j}{1 - re^{-2\pi ij/n} z} = \sum_{j=0}^{n-1} \zeta_j \sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{-2\pi ijk/n} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\zeta}_k r^k z^k.$$

Учитывая, что последовательность $(\hat{\zeta}_k)$ является периодической с периодом n, получаем

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{\zeta}_k|^2 \sum_{l=0}^{\infty} r^{2(k+ln)} = \frac{1}{1 - r^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{\zeta}_k|^2 r^{2k}. \qquad \square$$

Оценим величину наилучшего приближения порядка N

$$E_N(f) = \inf_p \|f - p\|_{H^2}, \qquad \deg p < N,$$

функции $f \in \mathcal{K}_{r,n}$ алгебраическими полиномами $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} a_k z^k$ степени $\deg p < N$.

Лемма 2. *Для всех $f \in \mathcal{K}_{r,n}$ выполняется неравенство*

$$E_N(f) \leqslant r^{N - \langle N \rangle_n} \|f\|_{H^2}, \qquad N = 1, 2, \ldots,$$

где $\langle N \rangle_n = N \bmod n$ — остаток от деления N на n.

Доказательство. Обозначим через $Sh(z) = zh(z)$, $h \in H^2$, оператор сдвига. Заметим, что сопряженный оператор S^* имеет вид

$$S^* h(z) = S^* \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{k-1},$$

и поэтому для любого N справедливо равенство

$$\|S^{N*} h\|_{H_2} = \left(\sum_{k=N}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{1/2} = E_N(h).$$

Далее, нетрудно видеть, что значения ядра Сеге $K_\lambda(z)$ являются собственными функциями оператора S^*:

$$S^* K_\lambda = \overline{\lambda} K_\lambda.$$

Отсюда следует, что

$$S^{N*} f = S^{N*} \sum_{j=0}^{n-1} \zeta_j K_{r,n,j} = r^N \sum_{j=0}^{n-1} \zeta_j e^{-2\pi i j N/n} K_{r,n,j} = r^N \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j K_{r,n,j},$$

где $\eta_j = \zeta_j e^{-2\pi i j N/n}$, т. е. вектор η является модуляцией ζ. Видим, что $S^{N*} f$ принадлежит $\mathcal{K}_{r,n}$ вместе с f. По лемме 1

$$\|S^{N*} f\|_{H^2} = r^N \left(\frac{1}{1 - r^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{\eta}_k|^2 r^{2k} \right)^{1/2},$$

где ДПФ от модуляции является сдвигом ДПФ:

$$\hat{\eta}_k = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j e^{-2\pi i j k/n} = \sum_{j=0}^{n-1} \zeta_j e^{-2\pi i j (N+k)/n} = \hat{\zeta}_{N+k}.$$

Ясно, что $\hat{\zeta}_{N+k} = \hat{\zeta}_{\langle N \rangle_n + k}$ и

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\hat{\eta}_k|^2 r^{2k} = \sum_{k=0}^{n-\langle N \rangle_n - 1} |\hat{\zeta}_{\langle N \rangle_n + k}|^2 r^{2k} + \sum_{k=n-\langle N \rangle_n}^{n-1} |\hat{\zeta}_{\langle N \rangle_n + k}|^2 r^{2k} =$$

$$= \sum_{k=\langle N \rangle_n}^{n-1} |\hat{\zeta}_k|^2 r^{2(k - \langle N \rangle_n)} + \sum_{k=0}^{\langle N \rangle_n - 1} |\hat{\zeta}_k|^2 r^{2(k + n - \langle N \rangle_n)} \leqslant r^{-2\langle N \rangle_n} \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{\zeta}_k|^2 r^{2k}.$$

Окончательно находим

$$E_N(f) = \|S^{N*} f\|_{H^2} \leqslant r^{N - \langle N \rangle_n} \|f\|_{H^2}. \qquad \square$$

Теперь поменяем местами подпространства алгебраических полиномов с подпространствами $\mathcal{K}_{r,n}$ в задаче оценки величины наилучшего приближения

$$\operatorname{dist}(p, \mathcal{K}_{r,n}) = \inf_{f \in \mathcal{K}_{r,n}} \|p - f\|_{H^2}.$$

Лемма 3. *Для любого алгебраического полинома $p(z)$ степени $\deg p < n$ имеет место равенство*

$$dist\,(p, \mathcal{K}_{r,n}) = r^n \|p\|_{H^2}.$$

Доказательство. Воспользуемся хорошо известным равенством

$$\operatorname{dist}(p, \mathcal{K}_{r,n}) = \sup_{g \in \mathcal{K}_{r,n}^\perp : \|g\|_{H^2} = 1} |\langle p, g \rangle_{H^2}|.$$

Здесь принадлежность $g \in \mathcal{K}_{r,n}^\perp$ означает, что функция g ортогональна подпространству $\mathcal{K}_{r,n}$. Так как это подпространство порождено значениями воспроизводящего ядра, то $g(\lambda_j) = 0$, где $\lambda_j = re^{2\pi ij/n}$, $j = 0, \dots, n-1$. Последнее условие, в свою очередь, эквивалентно представлению $g = hB$, где $h \in H^2$ и

$$B(z) = \prod_{j=0}^{n-1} b_j(z), \qquad b_j(z) = \frac{\overline{\lambda_j}}{|\lambda_j|} \frac{\lambda_j - z}{1 - \overline{\lambda_j} z},$$

— произведение Бляшке. Для рассматриваемых нами точек λ_j имеем

$$B(z) = r^n \prod_{j=0}^{n-1} \frac{e^{2\pi ij/n} - z/r}{e^{2\pi ij/n} - rz} = r^n \frac{1-(z/r)^n}{1-(rz)^n} = r^n - \left(\frac{1}{r^n} - r^n\right) \sum_{k=1}^{\infty} r^{nk} z^{nk}.$$

Поэтому, если $h(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, то

$$h(z)B(z) = r^n \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k + \dots$$

(многоточие соотвествует степеням z^k при $k \geqslant n$), откуда

$$\langle p, g \rangle_{H^2} = \langle p, hB \rangle_{H^2} = r^n \langle p, h \rangle_{H^2}.$$

В итоге

$$\operatorname{dist}(p, \mathcal{K}_{r,n}) = \sup_{\|h\|_{H^2}=1} r^n |\langle p, h \rangle_{H^2}| = r^n \|p\|_{H^2},$$

так как $\|h\|_{H^2} = \|g\|_{H^2} = 1$ ввиду того, что $|B(z)| = 1$ при $|z| = 1$. $\square$

4. Сходимость орторекурсивных разложений по системе подпространств, порожденных ядром Сеге

Рассмотрим вместо семейства $\mathcal{K}_{r,n}$ с произвольными индексами r и n последовательность подпространств

$$\mathcal{K}_k = \mathcal{K}_{r_k, n_k}, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

где последовательность радиусов (r_k) и последовательность натуральных (n_k) строго возрастают и удовлетворяют условию согласования

$$\frac{a}{n_k} \leqslant 1 - r_k \leqslant \frac{b}{n_k}, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{7}$$

с некоторыми постоянными $0 < a \leqslant b < \infty$. Покажем, что в этом случае утверждения лемм 1, 2 и 3 допускают уточнение.

Следствие 1. *При выполнении условия согласования (7) существуют постоянные $0 < A \leqslant B < \infty$ такие, что для всех $k \in \mathbb{N}$ и всех $(\zeta_j) \in \mathbb{C}^{n_k}$ выполняются неравенства*

$$A \left(\sum_{j=0}^{n_k-1} |\zeta_j|^2 \right)^{1/2} \leqslant \left\| \sum_{j=0}^{n_k-1} \zeta_j \widehat{K}_{r_k, n_k, j} \right\|_{H^2} \leqslant B \left(\sum_{j=0}^{n_k-1} |\zeta_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что

$$\widehat{K}_{r_k,n_k,j} = (1-r_k^2)^{1/2} K_{r_k,n_k,j},$$

и по лемме 1 мы имеем

$$\left\| \sum_{j=0}^{n_k-1} \zeta_j \widehat{K}_{r_k,n_k,j} \right\|_{H^2}^2 = \frac{1-r_k^2}{1-r_k^{2n_k}} \sum_{j=0}^{n_k-1} |\hat{\zeta}_j|^2 r_k^{2j}.$$

Используя тривиальные оценки $r_k^{2n_k} < r_k^{2j} \leqslant 1$, получаем

$$\frac{r_k^{2n_k}(1-r_k^2)}{1-r_k^{2n_k}} \sum_{j=0}^{n_k-1} |\hat{\zeta}_j|^2 \leqslant \left\| \sum_{j=0}^{n_k-1} \zeta_j \widehat{K}_{r_k,n_k,j} \right\|_{H^2}^2 \leqslant \frac{(1-r_k^2)}{1-r_k^{2n_k}} \sum_{j=0}^{n_k-1} |\hat{\zeta}_j|^2.$$

С учетом равенства Парсеваля для ДПФ

$$\sum_{j=0}^{n_k-1} |\hat{\zeta}_j|^2 = n_k \sum_{j=0}^{n_k-1} |\zeta_j|^2$$

будем иметь

$$\frac{r_k^{2n_k} n_k(1-r_k^2)}{1-r_k^{2n_k}} \sum_{j=0}^{n_k-1} |\zeta_j|^2 \leqslant \left\| \sum_{j=0}^{n_k-1} \zeta_j \widehat{K}_{r_k,n_k,j} \right\|_{H^2}^2 \leqslant \frac{n_k(1-r_k^2)}{1-r_k^{2n_k}} \sum_{j=0}^{n_k-1} |\zeta_j|^2.$$

На основании условия согласования (7) заключаем, что

$$a \leqslant n_k(1-r_k^2) \leqslant 2b$$

и

$$e^{-b} = \lim_{k\to\infty} (1-\tfrac{b}{n_k})^{n_k} \leqslant \liminf_{k\to\infty} r_k^{n_k} \leqslant \limsup_{k\to\infty} r_k^{n_k} \leqslant \lim_{k\to\infty} (1-\tfrac{a}{n_k})^{n_k} = e^{-a},$$

откуда, ввиду того что $0 < r_k^{n_k} < 1$, находим

$$0 < \alpha \leqslant r_k^{n_k} \leqslant \beta < 1, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Окончательно получим

$$\frac{\alpha^2 a}{1-\alpha^2} \sum_{j=0}^{n_k-1} |\zeta_j|^2 \leqslant \left\| \sum_{j=0}^{n_k-1} \zeta_j \widehat{K}_{r_k,n_k,j} \right\|_{H^2}^2 \leqslant \frac{2b}{1-\beta^2} \sum_{j=0}^{n_k-1} |\zeta_j|^2. \qquad \square$$

Следствие 2. *При выполнении условия согласования* (7) *существует постоянная* C *такая, что для всех* $k \in \mathbb{N}$ *и всех* $f \in \mathcal{K}_k$ *справедливо неравенство*

$$E_N(f) \leqslant C r_k^N \|f\|_{H^2}, \qquad N = 1, 2, \ldots.$$

Доказательство. По лемме 2

$$E_N(f) \leqslant r_k^{N-\langle N\rangle_{n_k}} \|f\|_{H^2}.$$

Осталось заметить, что в силу (8)

$$r_k^{-\langle N\rangle_{n_k}} < r_k^{-n_k} \leqslant \alpha^{-1} = C. \qquad \square$$

Следствие 3. *При выполнении условия согласования* (7) *существует постоянная $\sigma < 1$ такая, что для всех $k \in \mathbb{N}$ и всех алгебраических полиномов p степени* $\deg p < n_k$ *выполняется неравенство*

$$\operatorname{dist}(p, \mathcal{K}_k) \leqslant \sigma \|p\|_{H^2}.$$

Доказательство. По лемме 3

$$\operatorname{dist}(p, \mathcal{K}_k) \leqslant r_k^{n_k} \|p\|_{H^2},$$

где в силу (8) для всех k имеем $r_k^{n_k} \leqslant \beta = \sigma < 1$. □

Теорема 2. *Пусть последовательность натуральных* (n_k) *является лакунарной*

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant q > 1, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

и вместе со строго возрастающей последовательностью радиусов (r_k) *удовлетворяет условию согласования* (7).

Тогда последовательность подпространств $\{\mathcal{K}_k = \mathcal{K}_{r_k, n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, *порожденных ядром Сеге, является системой орторекурсивного разложения в пространстве* H^2.

Доказательство. Проверим, что выполнены условия теоремы 1. Следствие 3 показывает, что имеет место (6). Следствие 2 при $k = 1, 2, \dots$ и $j = 1, \dots, k-1$ дает оценку

$$E_{n_k}(f) \leqslant C r_j^{n_k}, \qquad f \in \mathcal{K}_j,$$

т. е. имеет место (5) с постоянными $\tau_{k,j} = C r_j^{n_k}$. Осталось убедиться в конечности величины

$$\sup_k \sum_{j=1}^{k-1} \tau_{k,j}^2 = C \sup_k \sum_{j=1}^{k-1} r_j^{2n_k} \leqslant C \sup_k \sum_{j=1}^{k-1} r_j^{2n_j q^{k-j}}.$$

Из условия согласования (7) получаем $r_j \leqslant 1 - \frac{a}{n_j}$, и поэтому $r_j^{n_j} \leqslant e^{-a}$ при достаточно больших $j \geqslant j_0$ (заведомо начиная с $n_{j_0} > a$). В итоге имеем

$$\sup_k \sum_{j=1}^{k-1} \tau_{k,j}^2 \leqslant C j_0 + C \sup_{k > j_0} \sum_{j=j_0}^{k-1} e^{-2aq^{k-j}} \leqslant C j_0 + \sum_{j=1}^{\infty} e^{-2aq^j} < \infty.$$ □

Список литературы

1. *Carleson L.* On bounded analytic functions and closure problems // Arkiv för Matematik. 1952. Bd. 2, no. 2–3. S. 283–291. https://doi.org/10.1007/BF02590884
2. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. Москва : ИИЛ, 1963. 311 с.
3. *Partington J. R.* Interpolation, Identification, and Sampling. Oxford : Clarendon Press, 1997. 267 p.
4. *Marcus A. W., Spielman D. A., Srivastava N.* Interlacing families II: Mixed characteristic polynomials and the Kadison – Singer problem // Annals of Mathematics. 2015. Vol. 182, iss. 1. P. 327–350. https://doi.org/10.4007/annals.2015.182.1.8
5. *Totik V.* Recovery of H^p-functions // Proceedings of the American Mathematical Society. 1984. Vol. 90, iss. 4. P. 531–537. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1984-0733401-3

6. *Fricain E., Khoi L. H., Lefèvre P.* Representing systems generated by reproducing kernels // Indagationes Mathematicae. 2018. Vol. 29, iss. 3. P. 860–872. https://doi.org/10.1016/j.indag.2018.01.004
7. *Speransky K. S., Terekhin P. A.* A representing system generated by the Szegö kernel for the Hardy space // Indagationes Mathematicae. 2018. Vol. 29, iss. 5. P. 1318–1325. https://doi.org/10.1016/j.indag.2018.06.001
8. *Терехин П. А.* Фреймы в банаховом пространстве // Функциональный анализ и его приложения. 2010. Т. 44, вып. 3. С. 50–62. https://doi.org/10.4213/faa2994, EDN: RLQVMH
9. *Speransky K. S.* On the convergence of the order-preserving weak greedy algorithm for subspaces generated by the Szegö kernel in the Hardy space // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 3. С. 336–342. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-336-342, EDN: XUZAEH
10. *Лукашенко Т. П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2001. № 1. С. 6–10. http://mi.mathnet.ru/vmumm1436
11. *Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* Орторекурсивные разложения по подпространствам // Доклады Академии наук. 2012. Т. 445, № 2. С. 135–138. EDN: OZLEWD
12. *Галатенко В. В., Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* О свойствах орторекурсивных разложений по подпространствам // Труды МИАН. 2014. Т. 284. С. 138–141. https://doi.org/10.1134/S0371968514010075, EDN: RWZVWR
13. *Политов А. В.* Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2010. № 3. С. 3–7. https://www.mathnet.ru/rus/vmumm777
14. *Кудрявцев А. Ю.* О сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам // Математические заметки. 2012. Т. 92, № 5. С.707–720. https://doi.org/10.4213/mzm8933, EDN: PSHWUT

References

1. Carleson L. On bounded analytic functions and closure problems. *Arkiv för Matematik*, 1952, vol. 2, iss. 2–3, pp. 283–291. https://doi.org/10.1007/BF02590884
2. Hoffman K. *Banach Spaces of Analytic Functions*. New Jersey, Prentice Hall Inc., 1962. 242 p. (Russ. ed.: Moscow, IIL, 1963. 311 p.).
3. Partington J. R. *Interpolation, Identification, and Sampling*. Oxford, Clarendon Press, 1997. 267 p.
4. Marcus A. W., Spielman D. A., Srivastava N. Interlacing families II: Mixed characteristic polynomials and the Kadison – Singer problem. *Annals of Mathematics*, 2015, vol. 182, iss. 1, pp. 327–350. https://doi.org/10.4007/annals.2015.182.1.8
5. Totik V. Recovery of H^p-functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1984, vol. 90, iss. 4, pp. 531–537. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1984-0733401-3
6. Fricain E., Khoi L. H., Lefèvre P. Representing systems generated by reproducing kernels. *Indagationes Mathematicae*, 2018, vol. 29, iss. 3, pp. 860–872. https://doi.org/10.1016/j.indag.2018.01.004
7. Speransky K. S., Terekhin P. A. A representing system generated by the Szegö kernel for the Hardy space. *Indagationes Mathematicae*, 2018, vol. 29, iss. 5, pp. 1318–1325. https://doi.org/10.1016/j.indag.2018.06.001
8. Terekhin P. A. Frames in Banach space. *Functional Analysis and Its Applications*, 2010, vol. 44, iss. 3, pp. 199–208. https://doi.org/10.1007/s10688-010-0024-z
9. Speransky K. S. On the convergence of the order-preserving weak greedy algorithm for subspaces generated by the Szegö kernel in the Hardy space. *Izvestiya of Saratov*

University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 3, pp. 336–342. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-336-342

10. Lukashenko T. P. Properties of orthorecursive expansions in nonorthogonal systems. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*, 2001, iss. 1, pp. 6–10 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/vmumm1436
11. Lukashenko T. P., Sadovnichii V. A. Orthorecursive expansions with respect to subspaces. *Doklady Mathematics*, 2012, vol. 86, iss. 1, pp. 472–475. https://doi.org/10.1134/S1064562412040096
12. Galatenko V. V., Lukashenko T. P., Sadovnichii V. A. On the properties of orthorecursive expansions with respect to subspaces. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2014, vol. 284, pp. 129–132. https://doi.org/10.1134/S0081543814010076
13. Politov A. V. Orthorecursive expansions in Hilbert spaces. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*, 2010, iss. 3, pp. 3–7 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/vmumm777
14. Kudryavtsev A. Yu. On the convergence of orthorecursive expansions in nonorthogonal wavelets. *Mathematical Notes*, 2012, vol. 92, iss. 5, pp. 643–656. https://doi.org/10.1134/S0001434612110077

Поступила в редакцию / Received 24.07.2023
Принята к публикации / Accepted 28.08.2023
Опубликована / Published 30.11.2023