



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 138–149
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 138–149
mml.sgu.ru <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-138-149>, EDN: HАСАУF

Научная статья
УДК 534.1:539.3

Асимптотический анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки, сопряженной с кольцевыми пластинами

С. Б. Филиппов[✉], А. С. Козлова

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9

Филиппов Сергей Борисович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, s_b_filippov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1312-5705>, AuthorID: 7704

Козлова Анастасия Сергеевна, студент математико-механического факультета, st076954@student.spbu.ru

Аннотация. Низшие частоты и формы колебаний замкнутой круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми пластинами, найдены с помощью асимптотических методов. Проанализированы два основных типа колебаний, соответствующих узким и широким пластинам. Если ширина кольца является достаточно малой, то формы колебаний подкрепленной оболочки подобны формам колебаний гладкой оболочки. Для широких пластин формы колебаний локализованы на поверхности пластин, в то время как оболочка почти не деформируется. В обоих случаях решение краевой задачи ищется в виде суммы основного состояния и краевых эффектов. Для узких пластин в первом приближении получается задача о колебаниях балки, подкрепленной пружинами. Для широких пластин краевая задача сводится к задаче о колебаниях кольцевой пластины.

Ключевые слова: свободные колебания, цилиндрическая оболочка, сопряженная с пластинами, асимптотические методы

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00111, <https://rscf.ru/project/23-21-00111/>).

Для цитирования: Филиппов С. Б., Козлова А. С. Асимптотический анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки, сопряженной с кольцевыми пластинами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 138–149. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-138-149>, EDN: HАСАУF

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

The asymptotic analysis of free vibrations of a cylindrical shell joined with annular plates

S. B. Filippov[✉], A. S. Kozlova

St. Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg 199034, Russia

Sergei B. Filippov, s_b_filippov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1312-5705>, AuthorID: 7704

Anastasiya S. Kozlova, st076954@student.spbu.ru

Abstract. Low frequencies and vibration modes of a closed circular cylindrical shell joined with annular plates are obtained by means of asymptotic methods. Two types of vibrations, corresponding to narrow and wide plates, are analyzed. If the width of the ring is sufficiently small, then the vibration mode of the



stiffened shell is similar to the mode of the shell without rings. For wide plates joined with a cylindrical shell the vibration mode is localized on the surface of the ring, and the cylindrical shell itself does not actually deform. In both cases the solution of a boundary value problem is searched in the form of the sum of slowly varying functions and edge effect integrals. For narrow plates as a first approximation we obtain a problem about vibrations of the beam supported by springs. For wide plates the problem is reduced to a problem about vibrations of a ring plate.

Keywords: free vibrations, cylindrical shell, joined with annular plates, asymptotic methods

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00111, <https://rscf.ru/project/23-21-00111/>).

For citation: Filippov S. B., Kozlova A. S. The asymptotic analysis of free vibrations of a cylindrical shell joined with annular plates. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 138–149 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-138-149>, EDN: НАСАУФ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Подкрепленные шпангоутами (кольцами) оболочки широко используются в различных отраслях современной техники. Почти во всех многочисленных работах, в том числе в монографии [1], посвященных колебаниям подкрепленных оболочек, шпангоуты рассматриваются как круговые стержни. Однако для широких колец целесообразно использовать более сложную, но и более точную модель кольцевой пластины.

Во-первых, при большой ширине b кругового стержня жесткость на изгиб c в его плоскости значительно превосходит соответствующую жесткость на изгиб кольцевой пластины. Это связано с локализацией напряженно-деформируемого состояния пластины вблизи ее края, сопряженного с оболочкой. Жесткость c оказывает существенное влияние на частоты колебаний, поэтому стержневая модель шпангоута дает завышенные их значения [2].

Во-вторых, при увеличении b может произойти смена типа низкочастотных колебаний подкрепленной оболочки. Колебания первого типа, формы которых аналогичны формам колебаний гладких оболочек, переходят в колебания второго типа, при которых в основном деформируются кольца. Колебания первого типа можно описать при помощи стержневой модели, в то время как для моделирования колебаний второго типа необходимо рассматривать шпангоуты как кольцевые пластины.

Уравнения, описывающие колебания тонкой оболочки, содержат ее безразмерную толщину, которая является малым параметром. Следовательно, для решения этих уравнений можно использовать асимптотические методы [3]. Одним из таких методов является представление решения краевой задачи в виде суммы основного состояния и краевого эффекта [4]. Первое приближение к решению дает краевая задача для основного состояния. При асимптотическом анализе колебаний подкрепленной оболочки одной из главных проблем выступает определение граничных условий для этой краевой задачи. При колебаниях первого типа основное состояние является полубезмоментным, а при колебаниях второго типа — безмоментным.

Асимптотический анализ низкочастотных колебаний цилиндрической оболочки, подкрепленной снаружи кольцевыми пластинами, описан в работе [2]. В данной статье рассмотрен тот случай, когда пластины находятся внутри оболочки.

1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим малые свободные низкочастотные колебания тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной n одинаковыми кольцевыми пластинами. Пластины расположены на параллелях $s = s_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, где s — безразмерная продольная координата на срединной поверхности оболочки. За единицу длины выбран радиус R цилиндрической оболочки. Одна из пластин показана на рис. 1. Предположим, что пластины расположены внутри оболочки.

После разделения переменных безразмерные дифференциальные уравнения, описывающие малые свободные колебания цилиндрической оболочки, принимают вид [5]

$$\begin{aligned} T_1' + mS + \lambda u &= 0, & S' - mT_2 + Q_2 + 2H' + \lambda v &= 0, \\ Q_1' + mQ_2 - T_2 + \lambda w &= 0, & Q_1 &= M_1' + 2mH, & Q_2 &= -mM_2, \\ M_1 &= \mu^4(\vartheta_1' + \nu m\vartheta_2), & M_2 &= \mu^4(m\vartheta_2 + \nu\vartheta_1'), & H &= \mu^4(1 - \nu)\vartheta_2', \\ T_1 &= u' + \nu(w + mv), & T_2 &= w + mv + \nu u', & 2S &= (1 - \nu)(v' - mu), \\ \vartheta_1 &= -w', & \vartheta_2 &= mw + v, \end{aligned} \quad (1)$$

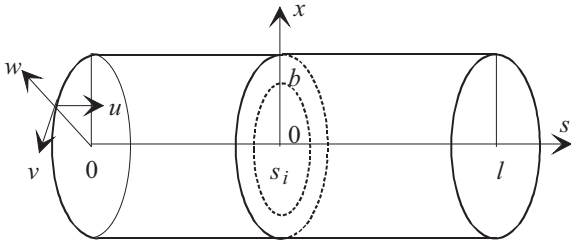


Рис. 1. Оболочка, подкреплённая пластиной
Fig. 1. Shell reinforced with a plate

где штрихом обозначена производная по безразмерной длине дуги меридиана $s \in [0, l]$, l — безразмерная длина оболочки, m — число волн по параллели, Q_1, Q_2, T_1, T_2, S — усилия, M_1, M_2, H — моменты, ϑ_1, ϑ_2 — углы поворота, u, v, w — проекции перемещений точек срединной поверхности, $\lambda = 4\pi^2\sigma\rho f^2 R^2 E^{-1}$ — искомый параметр частоты, $\sigma = 1 - \nu^2$, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, ρ — плотность, f — частота колебаний, $\mu^4 = h^2/12$ — малый параметр, h — безразмерная толщина оболочки.

Уравнения изгибных колебаний пластины [5] имеют вид

$$\begin{aligned} (xQ_{1p})' + mQ_{2p} + \lambda xw_p &= 0, \\ xQ_{1p} &= (xM_{1p})' - M_{2p} + 2mH_p, & xQ_{2p} &= -mM_{2p} + 2H_p, \\ xM_{1p} &= \mu_p^4[x\vartheta_{1p}' + \nu(m\vartheta_{2p} + \vartheta_{1p})], & xM_{2p} &= \mu_p^4(m\vartheta_{2p} + \vartheta_{1p} + \nu x\vartheta_{1p}'), \\ H_p &= \mu_p^4 x(1 - \nu)\vartheta_{2p}', & \vartheta_{1p} &= -w_p', & x\vartheta_{2p} &= mw_p. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь (\prime) означает производную по радиальной координате $x \in [1 - b, 1]$, b — безразмерная толщина пластины, w_p — прогиб, $Q_{1p}, Q_{2p}, M_{1p}, M_{2p}, H_p$ — безразмерные усилия и моменты, ϑ_{1p} и ϑ_{2p} — углы поворота нормали, $\mu_p^4 = a^2/12$ — малый параметр, a — безразмерная толщина пластины.

Для описания колебаний пластины в ее плоскости будем использовать уравнения [5]

$$\begin{aligned} (xT_{1p})' - T_{2p} + mS_p + \lambda xu_p &= 0, & xS_p' + 2S_p - mT_{2p} + \lambda v_p &= 0, \\ xT_{1p} &= xu_p' + \nu(mv_p + u_p), & xT_{2p} &= u_p + mv_p + \nu xu_p', \\ 2xS_p &= (1 - \nu)(xv_p' - mu_p - v_p), \end{aligned} \quad (3)$$

где u_p и v_p — тангенциальные компоненты перемещения, T_{1p}, T_{2p}, S_p — безразмерные усилия.

Обозначим $u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}, \dots$ решения уравнений (1) в интервалах $s \in [s_{k-1}, s_k]$, $k = 1, 2, \dots, n+1$, $s_0 = 0$, $s_{n+1} = l$. Если оболочка и пластина изготовлены из одного материала, то на параллели сопряжения выполняются 12 условий сопряжения:

$$\begin{aligned} u^{(i)} &= u^{(i+1)} = -w_p(1), & \vartheta_1^{(i)} &= \vartheta_1^{(i+1)} = \vartheta_{1p}(1), \\ w^{(i)} &= w^{(i+1)} = u_p(1), & v^{(i)} &= v^{(i+1)} = v_p(1), \\ h(T_1^{(i)} - T_1^{(i+1)}) &= aQ_{1p}(1), & h(Q_1^{(i)} - Q_1^{(i+1)}) &= -aT_{1p}(1), \\ h(M_1^{(i)} - M_1^{(i+1)}) &= -aM_{1p}(1), & h(S^{(i)} - S^{(i+1)}) &= -aS_p(1), \\ s &= s_i, & i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$



На внутренних краях пластин зададим условия свободного края, что соответствует подкреплению оболочки шпангоутами

$$T_{1p} = S_p = M_{1p} = Q_{1p} = 0, \quad x = 1 - b. \quad (5)$$

На краях оболочки $s = 0$ и $s = l$ могут быть введены любые однородные граничные условия. В качестве примера рассмотрим условия шарнирного опирания

$$v = w = T_1 = M_1 = 0, \quad s = 0, \quad s = l. \quad (6)$$

Если для $\lambda = \lambda_k$ уравнения (1)–(3) имеют нетривиальное решение, удовлетворяющее граничным условиям (4)–(6), то λ_k является собственным значением краевой задачи (1)–(6). Наименьшее положительное собственное значение λ_1 соответствует первой частоте колебаний.

2. Граничные условия для уравнений оболочки

Если ширина пластин не слишком велика, то низкочастотные колебания совершает цилиндрическая оболочка, а пластины играют роль подкрепляющих ее элементов. Пренебрежем жесткостью пластин на изгиб, учитывая, что она значительно меньше их тангенциальной жесткости. Условия сопряжения (4) в этом случае примут вид

$$v^{(i)} = v^{(i+1)}, \quad u^{(i)} = u^{(i+1)}, \quad T_1^{(i)} = T_1^{(i+1)}, \quad (7)$$

$$w^{(i)} = w^{(i+1)}, \quad \vartheta_1^{(i)} = \vartheta_1^{(i+1)}, \quad M_1^{(i)} = M_1^{(i+1)}, \quad (8)$$

$$w^{(i)} = u_p(1), \quad v^{(i)} = v_p(1), \quad (9)$$

$$h(Q_1^{(i)} - Q_1^{(i+1)}) = -aT_{1p}(1), \quad h(S^{(i)} - S^{(i+1)}) = -aS_p(1), \quad s = s_i. \quad (10)$$

Условия (7) и (8) являются граничными условиями для системы уравнений (1). Чтобы получить еще $2n$ граничных условий, исключим $u_p(1)$, $v_p(1)$, $T_{1p}(1)$ и $S_p(1)$ из условий сопряжения (9) и (10). Для этого найдем решение системы (3).

При низкочастотных колебаниях параметр λ является малым. Пренебрегая инерционными членами $\lambda x u_p$ и λv_p в уравнениях (3), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} (xT_{1p})' - T_{2p} + mS_p &= 0, & xS_p' + 2S_p - mT_{2p} &= 0, \\ xT_{1p} &= xu_p' + \nu(mv_p + u_p), & xT_{2p} &= u_p + mv_p + \nu xu_p', \\ 2xS_p &= (1 - \nu)(xv_p' - mu_p - v_p). \end{aligned} \quad (11)$$

Замена переменной $x = e^t$ превращает (11) в систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_p}{dt^2} - u_p - \gamma m^2 u_p + \delta m \frac{dv_p}{dt} - (1 + \gamma) m v_p &= 0, \\ \gamma \frac{d^2 v_p}{dt^2} - \gamma v_p - m^2 v_p - \delta m \frac{du}{dt} - (1 + \gamma) m u_p &= 0, \\ \gamma &= \frac{1 - \nu}{2}, \quad \delta = \frac{1 + \nu}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Общее решение системы (12) имеет вид

$$\begin{aligned} u_p &= C_1 x^{m-1} + a_1 C_2 x^{m+1} + C_3 x^{-m-1} + a_2 C_4 x^{-m+1}, \\ v_p &= -C_1 x^{m-1} + b_1 C_2 x^{m+1} + C_3 x^{-m-1} + b_2 C_4 x^{-m+1}. \end{aligned} \quad (13)$$

где C_i — произвольные постоянные, $i = 1, 2, 3, 4$,

$$a_1 = \frac{2\gamma}{\delta m} - 1, \quad a_2 = \frac{2\gamma}{\delta m} + 1, \quad b_1 = 1 + \frac{2}{\delta m}, \quad b_2 = 1 - \frac{2}{\delta m}.$$

Из уравнений (11) и (13) следуют формулы

$$T_{1p} = 2C_1\gamma(m-1)x^{m-2} - 2C_2\gamma(m+1)(m-2)m^{-1}x^m - 2\gamma(m+1)C_3x^{-m-2} - 2C_4\gamma(m-1)(m+2)m^{-1}x^{-m}, \quad (14)$$

$$S_p = -2C_1\gamma(m-1)x^{m-2} + 2C_2\gamma(m+1)x^m - 2\gamma(m+1)C_3x^{-m-2} - 2C_4\gamma(m-1)x^{-m}.$$

На свободном крае пластины $x = 1 - b$

$$T_{1p} = S_p = 0. \quad (15)$$

Подстановка решений (13) и (14) в условия (9) и (15) дает уравнения

$$\begin{aligned} C_1 + a_1C_2 + C_3 + a_2C_4 &= w^{(i)}(s_i), & -C_1 + b_1C_2 + C_3 + b_2C_4 &= v^{(i)}(s_i), \\ (m-1)[m\beta^m C_1 - (m+2)\beta C_4] - (m+1)[(m-2)\beta^{m+1}C_2 + mC_3] &= 0, \\ (m-1)(\beta^m C_1 + \beta C_4) - (m+1)(\beta^{m+1}C_2 - C_3) &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\beta = (1 - b)^2$.

Подставив в формулы (14) найденные из системы (16) выражения C_i через $w^{(k)}(s_k)$ и $v^{(k)}(s_k)$, получим

$$\begin{aligned} cS_p(1) &= -2\gamma\delta[(B_1 + mB_2)w^{(i)}(s_i) + (D_1 + mD_2)v^{(i)}(s_i)]/D, \\ T_{1p}(1) &= -2\gamma\delta[(mB_1 + B_2)w^{(i)}(s_i) + (mD_1 + D_2)v^{(i)}(s_i)]/D. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} cB_1 &= \beta(\beta^{2m} - 1) + 2mb(2 - b)\beta^m, \\ B_2 &= \beta(\beta^m + 1)^2 - 4\beta^m - \delta\beta(\beta^m - 1)^2 + \delta m^2 b^2 (2 - b)^2 \beta^m, \\ D_1 &= \gamma\beta(\beta^m - 1)^2 + \delta m^2 b^2 (2 - b)^2 \beta^m, & D_2 &= \beta(\beta^{2m} - 1) - 2mb(2 - b)\beta^m, \\ D &= \gamma[4\beta^m + \delta\beta(\beta^m - 1)^2] + \delta[\beta(\beta^m + 1)^2 + \delta m^2 b^2 (2 - b)^2 \beta^m]. \end{aligned} \quad (18)$$

Подстановка соотношений (17) в (10) дает следующие $2n$ условия сопряжения для решений системы уравнений (1):

$$\begin{aligned} cS^{(i)} - S^{(i+1)} &= 2a\gamma\delta[(B_1 + mB_2)w^{(i)} + (D_1 + mD_2)v^{(i)}]/(hD), \\ Q_1^{(i)} - Q_1^{(i+1)} &= 2a\gamma\delta[(mB_1 + B_2)w^{(i)} + (mD_1 + D_2)v^{(i)}]/(hD), \quad s = s_i. \end{aligned} \quad (19)$$

Собственные числа краевой задачи (1), (6)–(8), (19) являются приближенными значениями параметра частоты.

3. Колебания цилиндрической оболочки, подкрепленной пластинами малой ширины

Низкочастотные колебания цилиндрической оболочки, подкрепленной пластинами малой ширины, которые мы будем называть колебаниями первого типа, аналогичны колебаниям неподкрепленной оболочки. В обоих случаях число волн m по параллели оболочки является большим параметром. Будем искать приближенное решение краевой задачи (1), (6)–(8) и (19) в виде суммы основного полубезмоментного состояния и краевых эффектов [1]:

$$y^{(k)} = m^{I_0(y)} y_0^{(k)} + m^{I_1(y)} (y_1^{(k)} + y_2^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots, n + 1. \quad (20)$$

Здесь y обозначает любую неизвестную функцию из системы уравнений (1), $I(y)$ и $I_1(y)$ — коэффициенты интенсивности, приведенные в табл. 1.



Таблица 1 / Table 1

Показатели интенсивности для решения (20)
Intensity indicators for the solution (20)

Показатель	$u^{(k)}$	$v^{(k)}$	$w^{(k)}$	$\vartheta^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$S^{(k)}$	$M_1^{(k)}$	Q_1
I_0	-2	-1	0	0	-2	-3	-6	-6
I_1	-4	-5	-2	0	-4	-3	-6	-4

Функции $v_0^{(k)}$ удовлетворяют полубезмоментному уравнению

$$\frac{d^4 v_0^{(k)}}{ds^4} - \alpha^4 v_0^{(k)} = 0, \tag{21}$$

где

$$\alpha^4 = \frac{\lambda m^4 - \mu^4 m^8}{\sigma}, \tag{22}$$

и

$$w_0^{(k)} = -v_0^{(k)}, \quad u_0^{(k)} = \frac{dv_0^{(k)}}{ds}, \quad T_{10}^{(k)} = \frac{d^2 v_0^{(k)}}{ds^2}, \quad S_0^{(k)} = -\sigma \frac{d^3 v_0^{(k)}}{ds^3}. \tag{23}$$

Функции краевого эффекта имеют вид

$$y_1^{(k)} = \sum_{j=1}^2 \hat{D}_j^{(k)} \hat{y}_j \exp[r_j(s - s_{k-1})/\mu], \quad y_2^{(k)} = \sum_{j=3}^4 \hat{D}_j^{(k)} \hat{y}_j \exp[r_j(s - s_k)/\mu]. \tag{24}$$

Здесь $\hat{D}_j \sim 1$ — произвольные постоянные, $r_{1,2} = g(-1 \pm i)$, $r_{3,4} = g(1 \pm i)$, $g = \sigma^{1/4}/\sqrt{2}$, $i^2 = -1$. В частности, $\hat{w}_j = 1$, $j = 1, 2, 3, 4$. Функции $y_1^{(k)}$ и $y_2^{(k)}$ быстро убывают при увеличении s от s_{k-1} до s_k и при уменьшении s от s_k до s_{k-1} соответственно. Предположим, что $s_k - s_{k-1} \gg \mu$ для $k = 1, 2, \dots, n + 1$. Тогда $y_1^{(k)}(s_k) \ll 1$, $y_2^{(k+1)}(s_k) \ll 1$ и в первом приближении

$$y^{(k)} = m^{I_0(y)} y_0^{(k)} + m^{I_1(y)} y_2^{(k)}, \quad y^{(k+1)} = m^{I_0(y)} y_0^{(k+1)} + m^{I_1(y)} y_1^{(k+1)}, \quad s = s_k.$$

Граничные условия для уравнения (21) могут быть получены после разделения граничных условий на основные и дополнительные [3]. После отбрасывания малых членов основные условия превращаются в граничные условия для полубезмоментного уравнения.

Пусть Δ — разность между максимальным коэффициентом интенсивности полубезмоментного решения и крайевыми эффектами в граничном условии. Тогда:

1) для главного граничного условия величина Δ должна быть строго больше, чем для дополнительного условия;

2) полубезмоментные решения, входящие в главные граничные условия и крайевые эффекты, содержащиеся в дополнительных условиях, должны быть независимыми.

Как правило, для удовлетворения условиям 1 и 2 необходимо составлять линейные комбинации граничных условий.

На краю $s = 0$

$$\begin{aligned} v &= m^{-1}v_0 + m^{-5}v_2 = 0, & w &= w_0 + m^{-2}w_2 = 0, \\ T_1 &= m^{-2}T_{10} + m^{-4}T_{12} = 0, & M_1 &= m^{-6}(M_{10} + M_{12}) = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

и

$$\Delta_1 = 4, \quad \Delta_2 = 2, \quad \Delta_3 = 2, \quad \Delta_4 = 0,$$

где Δ_k соответствует k -му условию (25). Очевидно, что невозможно разделить граничные условия (25) на основные и дополнительные так, чтобы было выполнено условие 1. Однако



для линейной комбинации первого и второго условий $mv + w = 0$, принимая во внимание равенство $v_0 + w_0 = 0$, мы имеем $\Delta = 0$. Поэтому главными условиями являются $v = T_1 = 0$, а дополнительными — $w + mv = M_1 = 0$. Таким образом, граничными условиями для уравнения (21) на краях оболочки $s = 0$ и $s = l$ будут $v_0 = T_{10} = 0$. Следовательно,

$$v_0(0) = \frac{d^2 v_0}{ds^2}(0) = 0, \quad v_0(l) = \frac{d^2 v_0}{ds^2}(l) = 0. \quad (26)$$

На параллели $s = s_k$ главными являются граничные условия (7), а дополнительными — условия (8). Из условий (7) вытекают следующие $3n$ условий для уравнений (21):

$$v_0^{(k)} = v_0^{(k+1)}, \quad v_0^{(k)'} = v_0^{(k+1)'}, \quad v_0^{(k)''} = v_0^{(k+1)''}, \quad s = s_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (27)$$

Для того чтобы получить еще одно главное условие на параллели $s = s_k$, исключим функции краевого эффекта

$$\begin{aligned} w_2^{(k)} &= \hat{D}_3^{(k)} + \hat{D}_4^{(k)}, & w_1^{(k+1)} &= \hat{D}_1^{(k+1)} + \hat{D}_2^{(k+1)}, \\ \vartheta_2^{(k)} &= -gK^{-1} \left(r_3 \hat{D}_3^{(k)} + r_4 \hat{D}_4^{(k)} \right), & \vartheta_1^{(k+1)} &= -gK^{-1} \left(r_1 \hat{D}_1^{(k+1)} + r_2 \hat{D}_2^{(k+1)} \right), \\ M_{12}^{(k)} &= -g^2 K^2 \left(r_3^2 \hat{D}_3^{(k)} + r_4^2 \hat{D}_4^{(k)} \right), & M_{11}^{(k+1)} &= -g^2 K^2 \left(r_1^2 \hat{D}_1^{(k+1)} + r_2^2 \hat{D}_2^{(k+1)} \right), \\ S_2^{(k)} &= Q_{12}^{(k)} = -g^3 K \left(r_3^3 \hat{D}_3^{(k)} + r_4^3 \hat{D}_4^{(k)} \right), \\ S_1^{(k+1)} &= Q_{11}^{(k+1)} = -g^3 K \left(r_1^3 \hat{D}_1^{(k+1)} + r_2^3 \hat{D}_2^{(k+1)} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

из граничных условий (19). Здесь $K = \mu m^2$.

Подставив решение (20) в условия (8), с учетом формул

$$w_0^{(k)} = w_0^{(k+1)}, \quad \vartheta_0^{(k)'} = \vartheta_0^{(k+1)'}, \quad M_{10}^{(k)} = M_{10}^{(k+1)}, \quad s = s_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (29)$$

и соотношения (28) получим

$$\hat{D}_1^{(k+1)} = \hat{D}_3^{(k)}, \quad \hat{D}_2^{(k+1)} = \hat{D}_4^{(k)}, \quad r_1 \hat{D}_1^{(k+1)} + r_2 \hat{D}_2^{(k+1)} = r_3 \hat{D}_3^{(k)} + r_4 \hat{D}_4^{(k)}.$$

Последнюю формулу можно записать в виде

$$\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 0,$$

где $\hat{C}_1 = \hat{D}_1^{(k+1)} + \hat{D}_2^{(k+1)}$, $\hat{C}_2 = \hat{D}_1^{(k)} - i\hat{D}_2^{(k)}$.

Подставим теперь решение (20) в условия (19) и отбросим в них малые члены. С учетом равенств

$$S_2^{(k)} - S_1^{(k+1)} = Q_{12}^{(k)} - Q_{11}^{(k+1)} = 2g^3 K (r_1^3 \hat{D}_1 + r_2^3 \hat{D}_2) = 4g^3 K (\hat{C}_1 - \hat{C}_2) = 8g^3 K \hat{C}_1$$

получим следующие приближенные условия сопряжения:

$$\begin{aligned} A \left(8g^3 K \hat{C}_1 + S_0^{(k)} - S_0^{(k+1)} \right) &= m(mB_2 - D_2)v_0^{(k)} - B_2 \hat{C}_1, \\ A \left(S_0^{(k)} - S_0^{(k+1)} \right) &= m^2(D_1 - mB_1)v_0^{(k)} + mB_1 \hat{C}_1, \quad A = -\frac{hD}{2am^2\gamma\delta}. \end{aligned} \quad (30)$$

Линейная комбинация условий (30), не содержащая постоянной \hat{C}_1 , является четвертым условием на параллели $s = s_k$ для уравнения (21). Его можно представить в виде

$$S_0^{(k)} - S_0^{(k+1)} + cv_0^{(k)} = 0, \quad s = s_k, \quad (31)$$



где

$$c = \frac{8m^2g^3AK(mB_1 - D_1) + m^2(B_1D_2 - B_2D_1)}{A(8g^3AK + mB_1 + B_2)}. \quad (32)$$

Параметр c является приближенным значением жесткости пластины в ее плоскости.

Сравним значения жесткости c для пластины, находящейся внутри оболочки, с жесткостью пластины такой же ширины b , расположенной снаружи оболочки [2], в случае $a = h = 0.01$, $m = 4$, $\nu = 0.3$. На рис. 2 кривые 1 и 2 представляют зависимости жесткостей c для пластин, находящихся внутри и вне оболочки, от их ширины b .

Ввиду того что жесткость пластины, прикрепленной к оболочке изнутри, больше жесткости пластины, находящейся снаружи, частоты колебаний оболочки при внутреннем ее подкреплении будут выше частот оболочки при ее внешнем подкреплении пластинами одинаковой ширины.

Из формулы (22) следует, что параметры частоты для колебаний подкрепленной оболочки определяются по формуле

$$\lambda^{(1)}(m, n) = \frac{\sigma \alpha_n^4(m)}{m^4} + \mu^4 m^4, \quad (33)$$

где $\alpha_n(m)$, $n = 1, 2, \dots$ являются собственными числами краевой задачи для уравнения (21) с граничными условиями (26), (27) и (32). Эта краевая задача описывает также колебания шарнирно опертой балки, подкрепленной пружинами жесткостью c в точках $s = s_k$. К аналогичной краевой задаче сводится исследование низкочастотных колебаний цилиндрической оболочки, подкрепленной круговыми стержнями. Различные способы ее решения рассмотрены в [1].

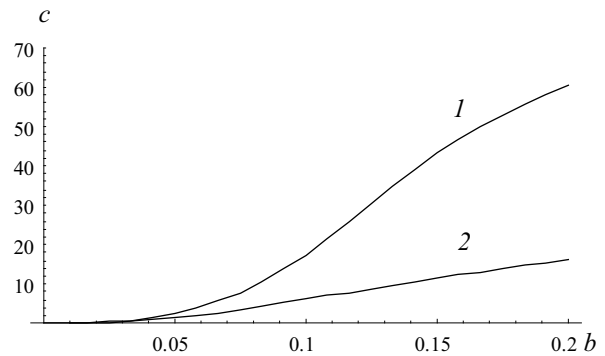


Рис. 2. Жесткости пластин, расположенных внутри (кривая 1) и вне оболочки (кривая 2), в зависимости от ширины пластины b

Fig. 2. The stiffness of the plates located inside (curve 1) and outside the shell (curve 2) depending on the width of plate b

4. Колебания цилиндрической оболочки, подкрепленной широкими пластинами

Если ширина пластины, подкрепляющей цилиндрическую оболочку, достаточно велика, то низшим частотам соответствуют формы колебаний, локализованные на поверхности пластины. Такие колебания мы будем называть колебаниями второго типа. Решение системы (1) будем искать в виде суммы безмоментного состояния и функций краевого эффекта:

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= \mu^{I_0(y)} y_0^{(k)} + \mu^{I_1(y)} (y_1^{(k)} + y_2^{(k)}), \quad k = 2, 3, \dots, n, \\ y^{(1)} &= \mu^{I_0(y)} y_0^{(1)} + \mu^{I_1(y)+1} y_1^{(1)} + \mu^{I_1(y)} y_2^{(1)}, \\ y^{(n+1)} &= \mu^{I_0(y)} y_0^{(n+1)} + \mu^{I_1(y)} y_1^{(n+1)} + \mu^{I_1(y)+1} y_2^{(n+1)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Функции u_0 , v_0 , T_{10} и S_0 удовлетворяют безмоментным уравнениям

$$T'_{10} + mS_0 = 0, \quad S'_0 = 0, \quad 2S_0 = (1 - \nu)(v'_0 - tu_0), \quad T_{10} = \sigma u'_0. \quad (35)$$

Безмоментные уравнения (35) получаются из уравнений (1), если положить в них $\mu = 0$ и отбросить малые члены λu , λv и λw . Функции краевого эффекта y_1 и y_2 имеют вид (24). Показатели интенсивности приведены в табл. 2.

Предположим, что

$$w_p \sim \vartheta_{1p} \sim 1, \quad M_{1p} \sim Q_{1p} \sim \mu^4, \quad u_p \sim v_p \sim T_{1p} \sim S_p \sim \mu^3. \quad (36)$$

Таблица 2 / Table 2

Показатели интенсивности для решения (35)
Intensity indicators for the solution (35)

Показатель	$u^{(k)}$	$v^{(k)}$	$w^{(k)}$	$\vartheta^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$S^{(k)}$	$M_1^{(k)}$	Q_1
I_0	3	3	3	3	3	3	7	7
I_1	3	4	2	1	4	3	4	3

После подстановки решений (34) и (36) в уравнения (1)–(3), условия сопряжения (4) и граничные условия (5), (6) краевая задача (1)–(6) в первом приближении распадается на пять следующих задач.

1. Краевая задача на собственные значения для системы уравнений (2), описывающая изгибные колебания пластины с граничными условиями

$$w_p = \vartheta_{1p} = 0, \quad x = 1, \quad M_{1p} = Q_{1p} = 0, \quad x = 1 - b. \quad (37)$$

2. Системы линейных алгебраических уравнений

$$w_2^{(k)}(s_k) = w_1^{(k+1)}(s_k), \quad h[M_{12}^{(k)}(s_k) - M_{11}^{(k+1)}(s_k)] = -aM_{1p}(1), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

для определения произвольных постоянных $\hat{D}_3^{(k)}$, $\hat{D}_4^{(k)}$, $\hat{D}_1^{(k+1)}$ и $\hat{D}_2^{(k+1)}$, которые входят в выражения для краевых эффектов вблизи параллели $s = s_k$.

3. Неоднородная краевая задача для безмоментной системы уравнений (41) с граничными условиями

$$u_0(0) = v_0(0) = u_0(l) = v_0(l) = 0, \quad T_{10}^{(k)}(s_k) = T_{10}^{(k+1)}(s_k), \\ h[S_0^{(k)}(s_k) + S_2^{(k)}(s_k) - S_0^{(k+1)}(s_k) + S_1^{(k+1)}(s_k)] = -aS_p(1), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

4. Системы линейных алгебраических уравнений

$$w_1^{(1)}(0) = w_0^{(1)}(0), \quad \vartheta_{11}^{(1)}(0) = 0, \quad w_2^{(n+1)}(l) = w_0^{(n+1)}(l), \quad \vartheta_{12}^{(n+1)}(l) = 0$$

для определения произвольных постоянных $\hat{D}_1^{(1)}$, $\hat{D}_2^{(1)}$ и $\hat{D}_3^{(n+1)}$, $\hat{D}_4^{(n+1)}$ в функциях краевого эффекта у краев оболочки.

5. Неоднородная краевая задача для системы уравнений (3) с граничными условиями

$$v_p(1) = v_0^{(k)}(s_k) - v_0^{(k+1)}(s_k), \quad aT_{1p}(1) = h[Q_{12}^{(k)}(s_k) - Q_{11}^{(k)}(s_k)], \quad T_{1p} = S_p = 0, \quad x = 1 - b.$$

Задачи 1–5 можно последовательно решить, начиная с первой. Рассмотрим только решение задачи 1, которое позволяет определить первое приближение для частоты и главную часть формы колебаний. Решения остальных задач дают только незначительные поправки для формы колебаний.

Система уравнения (2) сводится к следующему уравнению для определения прогиба пластины w :

$$\Delta^2 w - \beta^4 w = 0, \quad \beta^4 = \frac{\lambda}{\mu_p^4}, \quad \Delta = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \right) - \frac{m^2}{x^2}. \quad (38)$$

Точное общее решение уравнения (38) имеет вид [6]

$$w = C_1 J_m(\beta s) + C_2 Y_m(\beta s) + C_3 I_m(\beta s) + C_4 K_m(\beta s), \quad (39)$$

где C_j , $j = 1, 2, 3, 4$ – произвольные постоянные, J_m , Y_m – функции Бесселя, I_m , K_m – модифицированные функции Бесселя. Подстановка решения (39) в граничные условия (37) дает систему шести линейных алгебраических уравнений с неизвестными C_j . Равенство нулю



определителя этой системы $D(\beta, m)$, где m — число волн по параллели, является условием существования ее нетривиального решения. Параметры частоты находятся по формуле

$$\lambda_k^{(2)}(m) = \mu_p^4 \beta_k^4(m), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где β_k — положительные корни уравнения $D(\beta, m) = 0$. Первый параметр частот определяется по формуле

$$\lambda_1^{(2)} = \mu_p^4 \beta_1^4(0),$$

где β_1 — наименьший положительный корень уравнения $D(\beta, 0) = 0$.

Уравнение $D(\beta, m) = 0$ является довольно громоздким. В случае $b \ll 1$ можно получить простое приближенное уравнение для определения β . Предположим, что m не является большим числом. В этом случае замена переменной $x = 1 - b\xi$ в уравнении (38) и граничных условиях (37) и отбрасывание в них малых слагаемых приводит к приближенной краевой задаче на собственные значения

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} - \gamma^4 w = 0, \tag{40}$$

$$w(0) = w'(0) = w''(1) = w'''(1) = 0, \tag{41}$$

где $\gamma = b\beta$, $w' = dw/d\xi$.

Решение уравнения (40), совпадающего с уравнением (21), ищем в виде [7]

$$w = C_1 S(\gamma\xi) + C_2 T(\gamma\xi) + C_3 U(\gamma\xi) + C_4 V(\gamma\xi), \tag{42}$$

где C_j — произвольные постоянные, $S(z) = \cosh z + \cos z$, $T(z) = \sinh z + \sin z$, $U(x) = \cosh x - \cos x$, $V(x) = \sinh x - \sin x$.

Подставив решение (42) в граничные условия (41), получим систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными C_j . Равенство нулю определителя этой системы дает следующее уравнение для определения γ :

$$\cosh \gamma \cos \gamma = 1. \tag{43}$$

Положительные корни γ_k уравнения (43) являются собственными числами краевой задачи (40), (41). Наименьшим собственным значением будет $\gamma_1 = 1.875$.

Приближенное значение параметра частоты определяется по формуле

$$\lambda_k^{(2)} = \frac{\mu^{p_4} \gamma_k^4}{b^4} = \frac{a^2 \gamma_k^4}{12b^4}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{44}$$

Формула (44) показывает, что параметр частоты $\lambda^{(2)}$ при колебаниях второго типа быстро убывает при увеличении ширины пластины b .

5. Пример расчета

Рассмотрим шарнирно опертую цилиндрическую оболочку длиной l , подкрепленную кольцевой пластиной по параллели $s_1 = l/2$. Решение уравнений (21) можно представить в виде

$$v_0^{(k)} = A_k S(z_k) + B_k V(z_k) + C_k U(z_k) + D_k T(z_k), \quad z_k = \alpha(s - s_{k-1}), \\ s_{k-1} < s < s_k, \quad k = 1, 2, \quad s_0 = 0, \quad s_2 = l,$$

где A_k , B_k , C_k and D_k — произвольные постоянные. Подставив решения (46) в граничные условия (26), (27) и (31), получим систему из восьми линейных алгебраических уравнений с неизвестными A_k , B_k , C_k и D_k , $k = 1, 2$. Эта система имеет нетривиальное решение,

если ее определитель $G(\alpha)$ равен нулю. Равенство $G(\alpha) = 0$ представляет собой уравнение для определения параметра α . Это уравнение распадется на два следующих независимых уравнения:

$$\tanh x - \tan x = 32x^3/c, \quad \sin x = 0, \quad x = \alpha l/2. \tag{45}$$

Корни второго уравнения (45) не зависят от жесткости c . Обозначим x_1 и x_2 минимальные положительные корни первого и второго уравнений (45). Тогда

$$\pi/2 < x_1 < 3.927, \quad x_2 = \pi.$$

Пусть безразмерные параметры оболочки и пластины имеют значения $l = 4, h = a = 0.01, \nu = 0.3$. Из равенства (33) следует, что первый параметр частоты $\lambda_1^{(1)}$ для колебаний первого типа можно найти по приближенной формуле

$$\lambda_1^{(1)} = \min_m \left(\frac{16\sigma x_*^4(m)}{l^4 m^4} + \mu^4 m^4 \right), \tag{46}$$

где $x_* = \min(x_1, x_2)$. Минимум достигается при $m = 4$, причем $x_* = x_1$. Зависимость $\lambda_1^{(1)}$ от

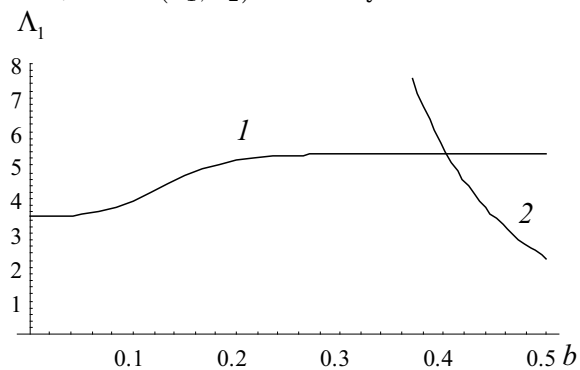


Рис. 3. Зависимость параметров частоты $\lambda_1^{(1)}$ (кривая 1) и $\lambda_1^{(2)}$ (кривая 2) от ширины пластины b

Fig. 3. Dependence of the frequency parameters $\lambda_1^{(1)}$ (curve 1) and $\lambda_1^{(2)}$ (curve 2) on the width of plate b

безразмерной ширины пластины b представлена кривой 1 на рис. 3. Первый параметр частоты $\lambda_1^{(2)}$ для колебаний второго типа вычислен по формуле (44) при $k = 1$. Его зависимость от b изображена кривой 2 на рис. 3.

Параметр частоты $\lambda_1^{(1)}$ возрастает при увеличении b , в то время как $\lambda_1^{(2)}$ при этом быстро убывает. Значение b , при котором $\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)}$, соответствует максимальному значению первой частоты колебаний. Учитывая приближенный характер полученных результатов, можно утверждать, что для рассматриваемого примера оптимальная безразмерная ширина пластины, соответствующая максимальному значению первой частоты, мало отличается от $b = 0.4$.

Заключение

Использование асимптотических методов для решения задачи о свободных низкочастотных колебаниях цилиндрической оболочки, подкрепленной изнутри кольцевыми пластинами, позволило получить простые приближенные формулы для вычисления частот и форм колебаний. Разные подходы применены для исследования колебаний первого типа (узкие пластины) и второго типа (широкие пластины). В случае узких пластин число волн по параллели оболочки m велико, а частоты возрастают с увеличением ширины пластины b . Для широких пластин нижней частоте соответствует $m = 0$, и она быстро убывает при увеличении b .

В качестве примера рассмотрены колебания оболочки, подкрепленной одной пластиной. Если все пластины одинаковы, то частоты колебаний второго типа будут такими же, как в случае одной пластины. Если пластины имеют разную ширину, то наименьшими будут частоты, соответствующие колебаниям пластины наибольшей ширины. Частоты колебаний первого типа при наличии нескольких пластин могут быть найдены с помощью метода осреднения [1].

Список литературы

1. Филиппов С. Б. Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. Санкт-Петербург : Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 1999. 196 с.



2. *Filippov S. B.* Asymptotic approximations for frequencies and vibration modes of cylindrical shell stiffened by annular plates // *Analysis of Shells, Plates, and Beams – A State of the Art Report*. 2020. P. 123–140. (Springer's Series Advanced Structured Materials, vol. 123). https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_7
3. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. Москва : Наука, 1979. 384 с.
4. *Bauer S. M., Filippov S. B., Smirnov A. L., Tovstik P. E., Vaillancourt R.* Asymptotic methods in mechanics of solids. Springer International Publishing, Switzerland, 2015. 325 p. (International Series of Numerical Mathematics, vol. 167).
5. *Filippov S. B.* Optimal design of stiffened cylindrical shells based on an asymptotic approach // *Technische Mechanik*. 2004. Bd. 24, Heft 3–4. S. 221–230. <https://journals.ub.ovgu.de/index.php/techmech/article/view/927>
6. Вибрации в технике / под ред. В. В. Болотина : в 6 т. Т. 1. Москва : Машиностроение, 1978. 352 с.
7. *Тимошенко С. П., Донован Х. Я., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. Москва : Машиностроение, 1985. 472 с.

References

1. *Filippov S. B.* *Teoriya sopryazhennykh i podkreplennykh obolochek* [Theory of Joint and Stiffened Shells]. St. Petersburg, St. Petersburg State University Press, 1999. 196 p. (in Russian).
2. *Filippov S. B.* Asymptotic approximations for frequencies and vibration modes of cylindrical shell stiffened by annular plates. *Analysis of Shells, Plates, and Beams – A State of the Art Report*. Springer's Series Advanced Structured Materials, vol. 123. 2020, pp. 123–140. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_7
3. *Gol'denveizer A. L., Lidskii V. B., Tovstik P. E.* *Svobodnye kolebaniya tonkikh uprugikh obolochek* [Free Vibrations of Thin Elastic Shells]. Moscow, Nauka, 1979. 384 p. (in Russian).
4. *Bauer S. M., Filippov S. B., Smirnov A. L., Tovstik P. E., Vaillancourt R.* *Asymptotic Methods in Mechanics of Solids*. International Series of Numerical Mathematics, vol. 167. Springer International Publishing, Switzerland, 2015. 325 p.
5. *Filippov S. B.* Optimal design of stiffened cylindrical shells based on an asymptotic approach. *Technische Mechanik*, 2004, vol. 24, iss. 3–4, pp. 221–230. <https://journals.ub.ovgu.de/index.php/techmech/article/view/927>
6. *Bolotin V. V.* (ed.) *Vibratsii v tekhnike* [Vibrations in Technique]. Vol. 1. Moscow, Mashinostroenie Publishers, 1978. 352 p. (in Russian).
7. *Timoshenko S. P., Donovan H. Y., Uiver U.* *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Vibration Problems in Engineering]. Moscow, Mashinostroenie Publishers, 1985. 472 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 04.12.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

Опубликована / Published 01.03.2024