



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 222–230

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 222–230

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-222-230>, EDN: SFYWV

Научная статья
УДК 539.3

Асимптотическая теория гиперболического погранслоя в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях тангенциального типа

И. В. Кириллова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Кириллова Ирина Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, iv@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6745-4144>, AuthorID: 179980

Аннотация. Работа посвящена построению асимптотически оптимальных уравнений гиперболического погранслоя в тонких оболочках вращения в окрестности фронта волны расширения при ударных торцевых воздействиях тангенциального типа. Соотношения выводятся методом асимптотического интегрирования точных трехмерных уравнений теории упругости в пространстве специальной системы координат, явно выделяющей зону действия погранслоя. Для этого анализируется поведение переднего фронта волны расширения, имеющего сложную форму вследствие кривизны оболочки. Построенная асимптотическая модель геометрии переднего фронта дает его представление через повернутые нормали к срединной поверхности. Эти повернутые нормали и дают возможность определить геометрию узкой, порядка квадрата относительной толщины оболочки, области применимости рассматриваемого гиперболического погранслоя. Построенные асимптотически оптимальные уравнения сформированы для асимптотически главных компонент напряженно-деформированного состояния: продольного перемещения и нормальных напряжений. При этом разрешающее уравнение относительно продольного перемещения является гиперболическим уравнением второго порядка с переменными коэффициентами у слагаемых первого порядка малости по сравнению с его главной частью, определяющей гиперболический погранслой в пластине.

Ключевые слова: асимптотическая теория, гиперболический погранслой, ударные воздействия тангенциального типа, волна расширения, оболочка вращения, нестационарные волны

Для цитирования: Кириллова И. В. Асимптотическая теория гиперболического погранслоя в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях тангенциального типа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 222–230. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-222-230>, EDN: SFYWV

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Asymptotic theory of the hyperbolic boundary layer in shells of revolution at shock edge loading of the tangential type

I. V. Kirillova

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Irina V. Kirillova, iv@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6745-4144>, AuthorID: 179980

Abstract. The present work is devoted to the construction of asymptotically optimized equations of the hyperbolic boundary layer in thin shells of revolution in the vicinity of the dilation wave front at shock



edge loading of the tangential type. These equations are derived by asymptotically integrating of the exact three-dimensional theory elasticity equations in the special coordinate system. This system defines the boundary layer region. The wave front has a complicated form, dependent on the shell curvature and therefore its asymptotical model is constructed. This geometrical model of the front defines it via the turned normals to the middle surface. Also, these turned normals define the geometry of the hyperbolic boundary layer applicability region. Constructed asymptotically optimised equations are formulated for the asymptotically main components of the stress-strain state: the longitudinal displacement and the normal stresses. The governing equation for the longitudinal displacement is the hyperbolic equation of the second order with the variable coefficients. The asymptotically main part of this equation is defined as the hyperbolic boundary layer in plates.

Keywords: asymptotical theory, hyperbolic boundary layer, shock loading of the tangential type, dilatation wave, shell of revolution, transient waves

For citation: Kirillova I. V. Asymptotic theory of the hyperbolic boundary layer in shells of revolution at shock edge loading of the tangential type. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 222–230 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-222-230>, EDN: SFYW BV

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Работа посвящена построению асимптотически оптимальной теории гиперболического погранслоя в тонкостенных оболочках вращения произвольной формы с непрерывно изменяющейся срединной поверхностью при ударных торцевых воздействиях тангенциального типа, характеризующихся нулевыми значениями изгибающего момента и перерезывающей силы. Рассматриваемый в настоящей работе тип погранслоя соответствует одному из трех характерных видов ударных торцевых воздействий, которые, в соответствии с классификацией У. К. Нигула [1], приводят к принципиально разным типам нестационарного волнового напряженно-деформированного состояния (НДС), в частности, отличающихся принципиально разными свойствами в окрестностях передних фронтов волн расширения и сдвига. Отметим, что рассматриваемое продольное воздействие тангенциального типа, названное в [1] воздействием вида LT, приводит к особенностям решения в области переднего фронта волны расширения, соответствующим симметричному плоскому НДС для полуполосы.

В отличие от аналогичных НДС для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны, где передние фронты волн задаются нормальными к срединной поверхности оболочек, в нашем случае фронты волн искривляются и поворачиваются относительно нормали в зависимости от кривизны срединной поверхности. В данной статье показывается, что асимптотический анализ дает представление этих фронтовых поверхностей повернутыми нормальными к срединным поверхностям, что дает возможность определить геометрию узкой, порядка квадрата относительной толщины оболочки, области применимости рассматриваемого гиперболического погранслоя.

Асимптотическое представление искомым фронтовых поверхностей позволило ввести новую систему координат, позволяющую выделить явно зону действия гиперболического погранслоя и построить асимптотическое решение для этой составляющей. Выполнено асимптотическое интегрирование трехмерных уравнений динамической теории упругости в этих координатах при показателе изменчивости НДС по продольной координате (задающей в этом случае отклонение от волнового фронта), равной 2. Получены асимптотически оптимальные уравнения рассматриваемого погранслоя относительно асимптотически главных составляющих НДС (нормального напряжения и продольного перемещения). При этом нормальное напряжение выражается через продольное перемещение, а разрешающее уравнение относительно продольного перемещения является гиперболическим уравнением второго порядка и записывается с асимптотической точностью порядка относительной толщины оболочки.

Отметим также, что при переходе в полученном разрешающем уравнении искомого погранслоя к обычным криволинейным координатам, связанным со срединной поверхностью и нормалью к ней, получается упрощенная система уравнений, непосредственно выводимая методом асимптотического интегрирования из исходной трехмерной системы. Однако такая разрешающая система не позволяет в явном виде определить свойства погранслоя и построить в обычных координатах простое решение для узкой прифронтной области.

1. Постановка задачи

Рассмотрим распространение осесимметричных ударных волн в полубесконечной оболочке вращения, возбуждаемых в начальный момент времени торцевой ударной нагрузкой вида LT [1]. Общая схема расчленения такого нестационарного НДС на составляющие с различными показателями изменчивости и динамичности рассматривалась в монографиях [2, 3] и работах [4, 5].

Асимптотически оптимальные уравнения гиперболического погранслоя, имеющего место в окрестности фронта волны расширения, в оболочках вращения впервые были выведены в [6]. Там процесс асимптотического интегрирования проводился на базе уравнений теории упругости в координатах, связанных с областью порядка относительной толщины оболочки, соседней с нормалью, проходящей через точку срединной поверхности, определяемую передним фронтом волны расширения. Как показывают исследования, эта область содержит и фронт волны, и узкую, порядка квадрата относительной толщины, прифронтную область применимости уравнений погранслоя. Целью настоящей работы и является построение уравнений искомого погранслоя в координатах, связанных непосредственно с поверхностью переднего фронта. Сравнение этих двух типов уравнений позволит окончательно сделать выводы относительно возможности применения этих систем.

Выпишем трехмерные уравнения теории упругости для рассматриваемой оболочки вращения, изображенной на рис. 1, где (α, θ, z) — криволинейные координаты: α — длина дуги вдоль образующей, θ — угол в окружном направлении, z — координата внешней нормали к срединной поверхности:

$$\begin{aligned} & \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z} + \frac{z}{R_1} \left(-\varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \right) + \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial v_1}{\partial z} + \\ & \left. + \left(\frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} = 0, \right. \tag{1} \\ & \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \frac{z}{R_1} \left(-\frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \right. \\ & \left. + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \right) - \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{1}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial z} + \\ & \left. + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} + \varkappa^{-2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0, \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu} \left[k_2 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \frac{\partial v_3}{\partial z} - k_2 \frac{z}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \frac{B'}{B} v_1 + \left(\frac{k_2}{R_1} + \frac{k_1}{R_2} \right) v_3 \right], \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1+\nu} \left[k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \frac{\partial v_3}{\partial z} - k_1 \frac{z}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_2 \frac{B'}{B} v_1 + \left(\frac{k_1}{R_1} + \frac{k_2}{R_2} \right) v_3 \right], \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1+\nu} \left[k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_2 \frac{\partial v_3}{\partial z} - k_1 \frac{z}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \frac{B'}{B} v_1 + k_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_3 \right], \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} - \frac{z}{R_1} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} + \frac{1}{R_1} v_3 \right). \end{aligned} \tag{2}$$



Эти уравнения выписаны с асимптотической погрешностью $O(\varepsilon^2)$, необходимой для описания гиперболического погранслоя. Разрешающие уравнения движения в перемещениях и уравнения закона Гука имеют соответственно вид (1) и (2), где ε — малый параметр тонкостенности оболочки: $\varepsilon = h/R$, h — полутолщина, R — характерное значение радиусов кривизны, σ_{ij} — напряжения, v_i — перемещения, t — время, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала оболочки, R_i — радиусы кривизны срединной поверхности, $k_1 = \nu/(1 - 2\nu)$, $k_2 = (1 - \nu)/(1 - 2\nu)$, $\alpha^2 = (1 - 2\nu)/(2 - 2\nu)$, B — расстояние от срединной поверхности до оси вращения, c_1 и c_2 — скорости распространения волн расширения и сдвига.

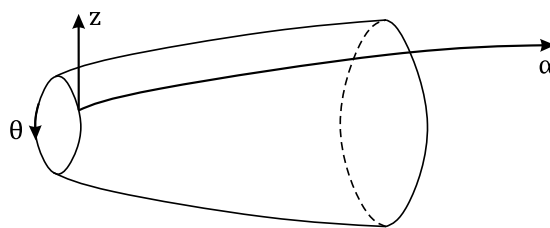


Рис. 1. Криволинейные координаты оболочки вращения

Fig. 1. Curvilinear coordinates of the shell of revolution

Рассмотрим следующий вид ударного ЛТ воздействия на торец оболочки вращения, когда ударная нагрузка зависит от времени как единичная функция Хевисайда $H(t)$:

$$\sigma_{11} = IH(t), \quad v_1 = 0, \quad \alpha = 0,$$

где I — амплитуда. Однородные начальные условия записываются в виде

$$v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2.$$

2. Асимптотическая геометрическая модель фронта волны расширения

Исследование решения для точных волновых уравнений в цилиндрической оболочке явилось базовым для анализа гиперболического погранслоя в оболочках вращения нулевой гауссовой кривизны [7]. В качестве базовой задачи для общего случая оболочек вращения выберем теперь задачу для сферической оболочки с радиусом срединной поверхности R .

Картина распространения возмущений для сферической оболочки в момент времени t_0 представлена на рис. 2. Здесь схематически изображено сечение рассматриваемой оболочки через центр O_3 . Считаем, что $\alpha_0 = c_1 t_0$; A_1 и B_2 — граничные точки распространения возмущений по верхней и нижней лицевым поверхностям; $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $O_1 O_2$ — нормали к срединной поверхности, проходящие через точки A_1 , B_2 и α_0 . Поскольку мы рассматриваем сферическую оболочку, то эти нормали лежат на радиусах окружности срединной поверхности, проходящих через эти же точки.

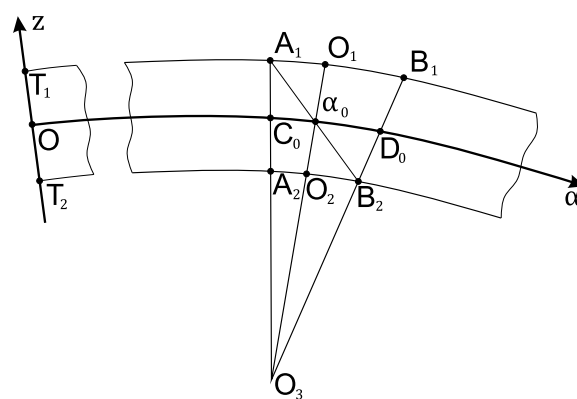


Рис. 2. Формирование фронта волны расширения в сферической оболочке

Fig. 2. Formation of an expansion wave front in a spherical shell

Соотношения между длинами дуг и радиусами концентрических окружностей позволяют определить координаты точек A_1 и B_2 :

$$\alpha = \alpha_0[1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2)], \quad \alpha = \alpha_0[1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2)], \quad (3)$$

которые являются точками фронта волны расширения на верхней и нижней лицевых поверхностях.

Аналогично (3) можно считать, что линии, проходящие через точки A_1, α_0 и B_2 , определяются следующим выражением:

$$\alpha = \alpha_0 \left[1 - \frac{z}{R} + O(\varepsilon^2) \right] = \alpha_0 \left[1 - \varepsilon \zeta + O(\varepsilon^2) \right]. \tag{4}$$

Будем теперь рассматривать поверхность, определяемую уравнением (4), как поверхность переднего фронта волны и α_0 как фронтовую точку на срединной линии. При этом с асимптотической погрешностью $O(\varepsilon^2)$ можно считать уравнение (4) уравнением прямой, а фронт волны можно считать поверхностью, образованной нормальными к срединной линии, повернутыми в точках $\alpha_0 = c_1 t_0$.

Перейдем к построению асимптотики фронта волны в оболочках вращения. Для определенности рассмотрим оболочку вращения положительной гауссовой кривизны, схематичное

изображение которой представлено на рис. 3. Обозначения на этой фигуре полностью соответствуют обозначениям на рис. 2. Так как первый коэффициент Ламе в рассматриваемой системе координат записывается в виде [8]

$$H_1 = 1 + \frac{z}{R_1},$$

где R_1 — главный радиус кривизны срединной поверхности, то искомые расстояния по лицевым поверхностям до волнового фронта определяются следующим образом:

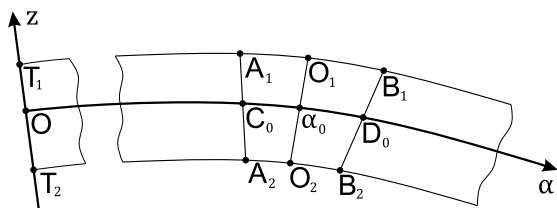


Рис. 3. Формирование фронта волны расширения в оболочке вращения

Fig. 3. Formation of an expansion wave front in a shell of revolution

$$T_1 O_1 = \alpha_0 + h \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{R_1}, \quad T_2 O_2 = \alpha_0 - h \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{R_1},$$

а отрезки кривых $A_1 O_1$ и $O_2 B_2$ определяются выражениями

$$A_1 O_1 = O_2 B_2 = h \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{R_1}. \tag{5}$$

Полученные результаты для сферической оболочки обобщим на случай оболочки вращения. Непосредственно из (5) следует, что поверхность, определяемую выражением

$$\alpha = \alpha_0 - zF(\alpha_0), \quad F(\alpha_0) = \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{R_1}, \tag{6}$$

будем рассматривать в качестве волнового фронта волны расширения, образованного повернутыми нормальными к срединной поверхности. Легко видеть, что при этом длина отрезка повернутой нормали z_F^0 задается следующим образом:

$$z_F^0 = z \sqrt{1 + F^2(\alpha_0)}. \tag{7}$$

3. Уравнения гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения

В соответствии с длиной отрезка повернутой нормали, задаваемой формулой (7), введем новую координату z_F : $z_F = z \sqrt{1 + F^2(\alpha)}$, которая при $\alpha = \alpha_0 = c_1 t$ отсчитывается вдоль координатной линии новой системы координат (α, z_F) , совпадающей с передним фронтом волны.

Для вывода асимптотически оптимальных уравнений рассматриваемого гиперболического погранслоя отметим, что в случае оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны он является



в асимптотическом смысле обобщением соответствующего погранслоя в полосе и отвечает плоскому типу НДС [6]. В рассматриваемом случае погранслоем имеет симметричный тип, когда с асимптотической погрешностью $O(\varepsilon)$ функции $v_1, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ по нормальной координате четны, а v_3, σ_{13} — нечетны.

В рассматриваемой новой системе координат (α, z_F) также можно выявить свойства четности и нечетности напряжений и перемещений по введенной координате z_F с асимптотической погрешностью $O(\varepsilon)$, что обусловлено одинаковой формой асимптотически главной части разрешающей системы как для простейшего случая цилиндрической оболочки, так и для общего случая оболочек вращения. С учетом этого свойства разрешающие уравнения (1), (2) записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 - 2\nu} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z_F} + \\ & + \frac{z_F F}{R_1} \left[\frac{2\varkappa^{-2}}{\sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} \right] + \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} = 0, \\ & \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \\ & + \frac{z_F}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \left[\frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} + \frac{2}{\sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z_F} \right] + \frac{B' \sqrt{1 + F^2}}{(1 - 2\nu) B} \frac{\partial v_1}{\partial z_F} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} = 0, \\ \sigma_{11} &= \frac{E}{1 + \nu} \left(k_2 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_3}{\partial z_F} \right), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1 + \nu} \left(k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_3}{\partial z_F} \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1 + \nu} \left(k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_2 \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_3}{\partial z_F} \right), \quad \sigma_{13} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left(\sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_1}{\partial z_F} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \tag{8}$$

Подобно случаю гиперболического погранслоя в оболочках вращения нулевой гауссовой кривизны введем безразмерные переменные, характеризующие НДС гиперболического погранслоя в малой, порядка $O(\varepsilon^2)$, окрестности фронта волны расширения (6):

$$x = \frac{1}{\varepsilon^2} (\tau_0 - \xi_0), \quad \tau_0 = c_1 t / R, \quad \xi_0 = \alpha / R, \quad \zeta_F = z_F / h, \tag{10}$$

где R — характерное значение радиусов кривизны. Примем, что дифференцирование по введенным переменным параметрам не изменяет порядка искомых функций. Эти переменные позволяют явно выделить области применимости искомого погранслоя, которые схематично представлены на рис. 4.

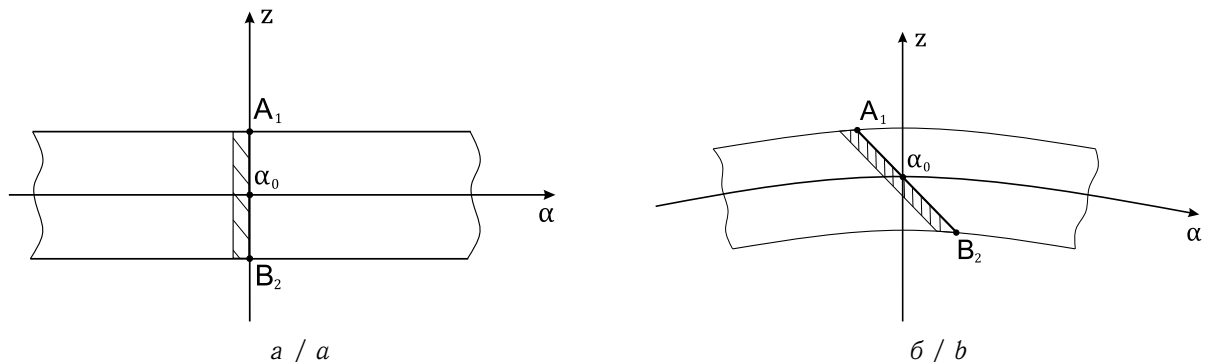


Рис. 4. Схемы областей применимости гиперболического погранслоя в цилиндрической оболочке (а) и оболочке вращения (б)

Fig. 4. Schemes of the domains of applicability of the hyperbolic boundary layer in a cylindrical shell (a) and a shell of revolution (b)

Здесь изображено расположение искоемых областей применимости для цилиндрической оболочки (рис. 4, а) и оболочки вращения (рис. 4, б) в момент времени t_0 с координатой фронта на срединной поверхности $\alpha_0 = c_1 t$; отрезки $A_1 B_2$ задают прямолинейные фронты, которые в случае оболочки вращения образуются путем поворота нормали вокруг точки α_0 .

Асимптотические величины компонент НДС зададим следующим образом:

$$v_1 = R\varepsilon v_1^*, \quad v_3 = R\varepsilon^2 v_3^*, \quad \sigma_{11} = E\varepsilon^{-1} \sigma_{11}^*, \quad \sigma_{33} = E\varepsilon^{-1} \sigma_{33}^*, \quad \sigma_{13} = E\sigma_{13}^*. \quad (11)$$

Считаем, что величины со звездочками имеют одинаковый асимптотический порядок; звездочки в дальнейшем опускаем. Перейдем в уравнениях (8), (9) к переменным (10) с учетом (11). Учитывая также зависимость производных по α от производных по x и ξ_0 , приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \varkappa^2(1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta_F^2} - \frac{2}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \zeta_F \frac{\partial v_1}{\partial x \partial \zeta} + 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \xi_0} - \frac{\sqrt{1 + F^2}}{2(1 - \nu)} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial \zeta_F} - \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \\ \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \zeta_F} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\sigma_{11} = -\frac{1}{2(1 + \nu)\varkappa^2} \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \sigma_{33} = -\frac{\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \sigma_{13} = \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 + \nu} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta_F}. \quad (13)$$

Полученные разрешающие уравнения (12), (13) являются уравнениями с медленно изменяющимися коэффициентами, зависящими от функции B и функции F , которая стремится к нулю при стремлении к бесконечности главного радиуса кривизны R_1 . При этом фронт волны переходит в положение нормали к срединной поверхности и оболочка становится оболочкой вращения нулевой гауссовой кривизны, а рассматриваемые уравнения переходят в уже полученные разрешающие уравнения для этих простейших оболочек.

Система уравнений (12) получена с погрешностью $O(\varepsilon)$, поэтому ее второе уравнение с медленно изменяющимся коэффициентом можно проинтегрировать по x , получая выражение для перемещения v_3 через v_1 :

$$\frac{\partial v_3}{\partial x} = -\sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta}. \quad (14)$$

Подставляя (14) в первое уравнение системы (12), приходим к одному разрешающему уравнению относительно асимптотически главной компоненты v_1 :

$$\begin{aligned} (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta_F^2} + 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \xi_0} - \frac{2}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \zeta_F \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \zeta_F} - \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \\ \sigma_{11} = -\frac{1}{2(1 + \nu)\varkappa^2} \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \sigma_{33} = -\frac{\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \sigma_{13} = \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 + \nu} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta_F}. \end{aligned}$$

В исходной размерной форме полученные разрешающие уравнения для асимптотически главных составляющих примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{2z_F}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} = 0, \\ \sigma_{11} = \frac{E}{2(1 + \nu)\varkappa^2} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}, \quad \sigma_{33} = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}, \quad \sigma_{13} = \frac{E}{1 + \nu} \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_1}{\partial z_F}. \end{aligned} \quad (15)$$

Полученные разрешающие уравнения (15) обобщают аналогичные уравнения погранслоя для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны, поскольку при стремлении R_1 к бесконечности функция $F(\alpha_0)$ стремится к нулю и полученные уравнения (15) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0, \\ \sigma_{11} = \frac{E}{2(1 + \nu)\varkappa^2} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}, \quad \sigma_{33} = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}, \quad \sigma_{13} = \frac{E}{1 + \nu} \frac{\partial v_1}{\partial z}, \end{aligned} \quad (16)$$



что является системой разрешающих уравнений гиперболического погранслоя, полученных в [6]. Отметим также, что при переходе в (15) к исходным координатам (α, z) также полностью приходим к уравнениям (16). Можно, таким образом, сделать вывод, что система (16) описывает гиперболический погранслой в рамках окрестности порядка $O(\varepsilon)$, внутри которой он и содержится с толщиной порядка $O(\varepsilon^2)$, а для его определения и требуются уравнения системы (15).

Построенные разрешающие уравнения движения свелись для асимптотически главных компонент НДС к одному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами, для удовлетворения которых требуется только по одному граничному условию как на торце, так и на лицевых поверхностях. Поэтому граничные условия на лицевых поверхностях запишутся в форме

$$\sigma_{33} = 0, \quad z_F = \pm h\sqrt{1 + F^2(\alpha)},$$

а для нагружений на торце — в следующей форме:

$$\sigma_{11} = IH(t), \quad \alpha = 0.$$

Вывод

Разработанная модель завершает построение асимптотической теории нестационарного НДС тонких оболочек вращения в плане вывода оптимальных уравнений, описывающих в простейшей форме его свойства в малой окрестности переднего фронта волны расширения. Также проведена привязка фронта к повороту нормали к срединной поверхности и выявление главных компонент НДС: продольного перемещения и нормальных напряжений. Полученное разрешающее гиперболическое уравнение второго порядка позволяет не только получить аналитическое решение, но и дать удобную форму для решения численного.

Список литературы

1. Nigul U. K. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // *International Journal of Solids and Structures*. 1969. Vol. 5, iss. 6. P. 607–627. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90031-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90031-6)
2. Коссович Л. Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1986. 176 с. EDN: VIOSWL
3. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. *Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies*. San Diego : Academic Press, 1998. 226 p. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-20923-8>, EDN: WNSAFB
4. Kossovich L. Yu, Kirillova I. V. Dynamics of shells under shock loading: An asymptotic approach // *Civil-Comp Proceedings*. 2008. Vol. 88. P. 1–20. EDN: QPMORG
5. Коссович Л. Ю., Кириллова И. В. Асимптотическая теория нестационарных процессов в тонких оболочках // *Актуальные проблемы механики сплошной среды : труды II междунар. конф. (Дилижан, 04–08 октября 2010 г.)*. Т. 1. Дилижан : ЕГУАС, 2010. С. 321–325.
6. Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Dynamic boundary layer at nonstationary elastic wave propagation in thin shells of revolution // *AiM'96: Proceedings of the Second International conference «Asymptotics in mechanics»*. Saint Petersburg State Marine Technical University, Saint Petersburg, Russia, October 13–16, 1996. Saint Petersburg, 1997. P. 121–128.
7. Кириллова И. В. Асимптотический вывод двух типов приближения динамических уравнений теории упругости для тонких оболочек : дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1998. 122 с.
8. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Москва : Наука, 1976. 512 с.

References

1. Nigul U. K. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates. *International Journal of Solids and Structures*, 1969, vol. 5, iss. 6, pp. 607–627. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90031-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90031-6)
2. Kossovich L. Yu. *Nestatsionarnye zadachi teorii uprugikh tonkikh obolochek* [Unsteady Problems in the Theory of Elastic Thin Shells]. Saratov, Saratov State University Publ., 1986. 176 p. (in Russian). EDN: VIOSWL
3. Kaplunov Y. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. *Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies*. San Diego, Academic Press, 1998. 226 p. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-20923-8>, EDN: WNSAFB



4. Kossovich L. Yu, Kirillova I. V. Dynamics of shells under shock loading: An asymptotic approach. *Civil-Comp Proceedings*, 2008, vol. 88, pp. 1–20. EDN: [QPMORG](#)
5. Kossovich L. Yu., Kirillova I. V. Asymptotic theory of nonstationary processes in thin shells. *Proceedings of the Second International Conference Topical Problems of Continuum Mechanics*. Dilijan, Armenia, 2010, vol. 1, pp. 321–325 (in Russian).
6. Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Dynamic boundary layer at nonstationary elastic wave propagation in thin shells of revolution. *AiM'96: Proceedings of the Second International Conference "Asymptotics in mechanics"*. Saint Petersburg State Marine Technical University, Saint Petersburg, Russia, October 13–16, 1996. Saint Petersburg, 1997, pp. 121–128.
7. Kirillova I. V. *Asymptotic derivation of two types of approximation of dynamic equations of the theory of elasticity for thin shells*. Diss. Cand. Sci. (Phys.-Math.). Saratov, 1998. 122 p. (in Russian).
8. Goldenweiser A. L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek* [Theory of Elastic Thin Shells]. Moscow, Nauka, 1976. 512 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 20.11.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

Опубликована / Published 31.05.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 231–244

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 231–244

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-231-244>, EDN: VLEBOS

Научная статья

УДК 539.3

Математическая модель колебаний ортотропных сетчатых микрополярных цилиндрических оболочек в условиях температурных воздействий

Е. Ю. Крылова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Крылова Екатерина Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, kat.krylova@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7593-0320>, AuthorID: 722982

Аннотация. В работе построена математическая модель колебаний микрополярных цилиндрических оболочек сетчатой структуры под действием вибрационных и температурных воздействий. Материал оболочки упругий, ортотропный, однородный, моделируемый псевдоконтинуумом Коссера, со стесненным вращением частиц. Принят закон Дюгамеля – Неймана. Сетчатая структура учтена по модели Г. И. Пшеничнова, геометрическая нелинейность — по теории Теодора фон Кармана. Уравнения движения, граничные и начальные условия получены из вариационного принципа Остроградского – Гамильтона на основе кинематической модели С. П. Тимошенко. Построенная математическая модель будет полезной, в том числе при исследовании поведения углеродных нанотрубок в различных условиях эксплуатации.

Ключевые слова: цилиндрические оболочки сетчатой структуры, математическое моделирование, термодинамика, углеродная нанотрубка

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00331).

Для цитирования: Крылова Е. Ю. Математическая модель колебаний ортотропных сетчатых микрополярных цилиндрических оболочек в условиях температурных воздействий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 231–244. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-231-244>, EDN: VLEBOS

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Mathematical model of orthotropic meshed micropolar cylindrical shells oscillations under temperature effects

E. Yu. Krylova

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Ekaterina Yu. Krylova, kat.krylova@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7593-0320>, AuthorID: 722982

Abstract. In the work the mathematical model of micropolar meshed cylindrical shells oscillations under the action of the vibrational and temperature effects is constructed. The shell material is an elastic orthotropic homogeneous Cosserat pseudocontinuum with constrained rotation of particles. The Duhamel – Neumann’s law was adopted. The mesh structure is taken into account according to the model of G. I. Pshenichnov, geometric nonlinearity according to Theodor von Karman theory. The equations of motion, boundary



and initial conditions are obtained from the Ostrogradsky – Hamilton variational principle based on the Timoshenko kinematic model. The constructed a mathematical model will be useful, among other things, in the study of the behavior of carbon nanotubes under various operating conditions.

Keywords: mesh structure cylindrical shells, mathematical modeling, thermodynamics, carbon nanotube

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-21-00331).

For citation: Krylova E. Yu. Mathematical model of orthotropic meshed micropolar cylindrical shells oscillations under temperature effects. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 231–244 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-231-244>, EDN: VLEBOS

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Научно-технический прогресс и развитие современных технологий неумолимо приводят к тому, что нано- и микроэлектромеханические системы (НЭМС и МЭМС) на углеродных нанотрубках (УНТ) начинают напрямую конкурировать и даже превосходить НЭМС и МЭМС, в которых используются традиционные материалы. Для использования УНТ в качестве конструктивных элементов НЭМС и МЭМС будущего необходимо хорошо разбираться в особенностях их поведения в зависимости от разного рода факторов (вибрационных, шумовых, тепловых, электростатических воздействий, влажности, диссипации внешней среды), что обуславливает необходимость создания максимально точных математических моделей и методов их расчета.

Анализ поведения УНТ лежит в плоскости научных интересов многих авторов и научных групп как в России, так и за рубежом. Для анализа поведения УНТ как механических объектов применялись балочные модели Эйлера – Бернулли [1], Тимошенко [2], Пелеха – Шереметьева [3], где учет размерно-зависимого поведения был связан с градиентной теорией упругости. Моментная теория упругости применялась к анализу УНТ в работе [4]. В [5] изучение динамики углеродных нанотрубок велось на основе градиентной теории упругости с учетом деформации сдвига. Модели поведения ортотропных микрополярных оболочек построены в работах [6, 7]. Большинство авторов для анализа статики и динамики УНТ используют линейные модели [8–11], в то время как экспериментальные данные указывают на необходимость учета нелинейности при моделировании поведения рассматриваемых объектов [12]. В работе [13] предложена континуальная модель сетчатой оболочки, образованной двумя семействами гибких нелинейно-упругих волокон, сохраняющих свою ортогональность в процессе деформирования. Анализ поведения размерно-зависимых геометрически нелинейных сетчатых оболочек модели Кирхгофа – Лява с различной геометрией сетки приводится в работе [14]. УНТ как элементы электроники, в частности полевых транзисторов, зачастую работают в широком диапазоне температур под действием вибрационных нагрузок. Модель балки Эйлера – Бернулли в сочетании с нелокальной теорией упругости Эрингена используется для анализа влияния температурных градиентов на поведение УНТ в работах [15, 16].

Теория колебаний УНТ как геометрически нелинейных ортотропных сетчатых цилиндрических оболочек с учетом сдвиговых деформаций, размерно-зависимого поведения, температурных и вибрационных нагрузок в известной автору литературе не встречалась. Математическая модель деформирования цилиндрической оболочки сетчатой структуры с учетом вышеописанных факторов построена в настоящей статье.

1. Обоснование методов и подходов

Следует отметить, что предложенная теория будет полезна при исследовании поведения любых конструктивных элементов в виде сетчатых цилиндрических оболочек в условиях температурных и вибрационных воздействий от макро- до наноразмера, в частности, таких как углеродная нанотрубка.



Углеродная нанотрубка является наноразмерным объектом, поэтому при исследовании ее поведения следует опираться на теории, учитывающие эффекты масштаба. В рамках данной работы используется моментная (микрополярная) теория со стесненным вращением частиц.

УНТ состоит из одной или нескольких свернутых в трубку графеновых плоскостей. Графен — кристаллический материал. В работе [17] экспериментально установлено, что в процессе деформации кристаллов важную роль играют сдвиги и повороты, а следовательно, обоснована необходимость использования при моделировании их поведения теорий типа С. П. Тимошенко.

Авторами работы [18] проведены квантово-химические исследования механических свойств графена и показано, что с уменьшением линейных размеров графенового листа разница между значениями модулей Юнга в двух взаимно перпендикулярных направлениях растет. Средствами молекулярной динамики в исследовании [19] получен аналогичный результат. Из этого следует необходимость построения общей теории колебаний УНТ с учетом анизотропии (ортотропии).

Углеродная нанотрубка как механический объект представляет собой замкнутую цилиндрическую оболочку сетчатой структуры. В рамках данной работы ее структуру предлагается учесть на основании теории Г. И. Пшеничного, которая предполагает, что регулярную систему густо расположенных ребер можно заменить сплошным слоем.

НЭМС и МЭМС, составными частями которых являются УНТ, приходится работать в условиях высоких температур, поэтому математическая модель строится с учетом стационарного уравнения теплопроводности.

Исследования особенностей нелинейной динамики конструкционных элементов НЭМС и МЭМС (сенсоров, транзисторов) в зависимости от условий их эксплуатации очень важны для понимания процессов, происходящих в приборах, для стабилизации режимов работы, нейтрализации пагубных внешних воздействий (тепловых, вибрационных и т. п.). Предложенная в данной работе теория позволяет проводить анализ нелинейной динамики сетчатых наноразмерных цилиндрических оболочек вследствие учета в ней геометрической нелинейности.

2. Математическая модель колебаний сплошной микрополярной оболочки в условиях температурных воздействий

Предположим, что замкнутая цилиндрическая оболочка занимает в пространстве \mathbf{R}^3 область $\Omega = \left\{ 0 \leq \alpha \leq b; 0 \leq \beta \leq 2\pi; -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right\}$. Введем в рассмотрение систему координат следующим образом:

- координата z отсчитывается от срединной поверхности оболочки вдоль ее наружной нормали;
- ось $O\alpha$ направлена вдоль образующей;
- ось $O\beta$ направлена вдоль окружности цилиндра, образованного срединной поверхностью оболочки (рис. 1).

Будем считать, что материал оболочки упругий, ортотропный, однородный, моделируемый псевдоконтинуумом Коссера (со стесненным вращением частиц). Определяющие соотношения для микрополярного ортотропного материала будут иметь вид [20]:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\alpha\alpha} &= a_{11}\sigma_{\alpha\alpha} + a_{12}\sigma_{\beta\beta} + a_{13}\sigma_{zz}; & \chi_{\alpha\alpha} &= b_{11}m_{\alpha\alpha} + b_{12}m_{\beta\beta} + b_{13}m_{zz}; \\
 \epsilon_{\beta\beta} &= a_{12}\sigma_{\alpha\alpha} + a_{22}\sigma_{\beta\beta} + a_{23}\sigma_{zz}; & \chi_{\beta\beta} &= b_{12}m_{\alpha\alpha} + b_{22}m_{\beta\beta} + b_{23}m_{zz}; \\
 \epsilon_{\alpha\alpha} &= a_{11}\sigma_{\alpha\alpha} + a_{12}\sigma_{\beta\beta} + a_{13}\sigma_{zz}; & \chi_{\alpha\alpha} &= b_{11}m_{\alpha\alpha} + b_{12}m_{\beta\beta} + b_{13}m_{zz}; \\
 \epsilon_{\beta\beta} &= a_{12}\sigma_{\alpha\alpha} + a_{22}\sigma_{\beta\beta} + a_{23}\sigma_{zz}; & \chi_{\beta\beta} &= b_{12}m_{\alpha\alpha} + b_{22}m_{\beta\beta} + b_{23}m_{zz}; \\
 \epsilon_{zz} &= a_{13}\sigma_{\alpha\alpha} + a_{23}\sigma_{\beta\beta} + a_{33}\sigma_{zz}; & \chi_{zz} &= b_{13}m_{\alpha\alpha} + b_{23}m_{\beta\beta} + b_{33}m_{zz};
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

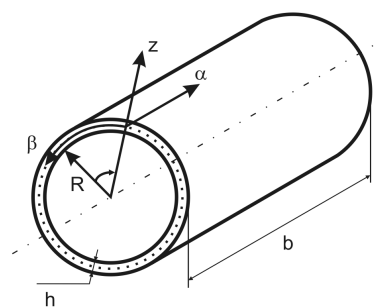


Рис. 1. Расчетная схема цилиндрической оболочки
 Fig. 1. Design diagram of a cylindrical shell

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\alpha\beta} &= a_{44}\sigma_{\alpha\beta} + a_{45}\sigma_{\beta\alpha}; & \epsilon_{\beta\alpha} &= a_{45}\sigma_{\alpha\beta} + a_{55}\sigma_{\beta\alpha}; & \epsilon_{\alpha z} &= a_{66}\sigma_{\alpha z} + a_{67}\sigma_{z\alpha}; \\
 \chi_{\alpha\beta} &= b_{44}m_{\alpha\beta} + b_{45}m_{\beta\alpha}; & \chi_{\beta\alpha} &= b_{45}m_{\alpha\beta} + b_{55}m_{\beta\alpha}; & \chi_{\alpha z} &= b_{66}m_{\alpha z} + b_{67}m_{z\alpha}; \\
 \epsilon_{z\alpha} &= a_{67}\sigma_{\alpha z} + a_{77}\sigma_{z\alpha}; & \epsilon_{z\beta} &= a_{89}\sigma_{\beta z} + a_{99}\sigma_{z\beta}; & \epsilon_{\beta z} &= a_{88}\sigma_{\beta z} + a_{89}\sigma_{z\beta}; \\
 \chi_{z\alpha} &= b_{67}m_{\alpha z} + b_{77}m_{z\alpha}; & \chi_{z\beta} &= b_{89}m_{\beta z} + b_{99}m_{z\beta}; & \chi_{\beta z} &= b_{88}m_{\beta z} + b_{89}m_{z\beta},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где a_{ij} и b_{ij} — упругие константы микрополярного ортотропного материала, σ_{ij} , m_{ij} — компоненты тензора силового и моментного напряжений соответственно, ϵ_{ij} и χ_{ij} — компоненты тензора деформации и тензора изгиба-кручения.

Приведенная ниже теория основана на кинематической модели С. П. Тимошенко. Компоненты вектора перемещений в таком случае примут вид [21]:

$$u_\alpha = u(\alpha, \beta, t) + z\gamma_\alpha(\alpha, \beta, t)u_\beta = v(\alpha, \beta, t) + z\gamma_\beta(\alpha, \beta, t)u_z = w(\alpha, \beta, t), \tag{3}$$

u, v, w — осевые смещения срединной поверхности оболочки в направлениях α, β, z соответственно, $\gamma_\alpha, \gamma_\beta$ — углы поворота поперечных сечений оболочки. Компоненты симметричного тензора деформаций цилиндрической оболочки с учетом принятых гипотез и геометрической нелинейности по теории Т. фон Кармана [22] примут вид

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + z \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha}, & \epsilon_{\beta\beta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{w}{R} + z \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \beta}, \\
 \epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{z}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \alpha} \right), \\
 \epsilon_{\beta z} &= \frac{1}{2} \left(\gamma_\beta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R} \right), & \epsilon_{\alpha z} &= \frac{1}{2} \left(\gamma_\alpha + \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right), & e_{zz} &= 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Компоненты вектора микроповоротов $\theta_\alpha, \theta_\beta, \theta_z$ в случае среды Коссера со стесненным вращением частиц (псевдоконтинуума Коссера) будут иметь вид

$$\theta_i = \frac{1}{2} (\text{rot} \mathbf{u})_i, \quad i = \{\alpha, \beta, z\}, \tag{5}$$

где \mathbf{u} — вектор перемещений. Компоненты симметричного тензора изгиба-кручения запишутся следующим образом [23]:

$$\begin{aligned}
 \chi_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \alpha} \right); & \chi_{\beta\beta} &= \frac{1}{2R} \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \beta} + z \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \alpha} \right); \\
 \chi_{zz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \alpha} \right); & \chi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \beta} \right); \\
 \chi_{\alpha z} &= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{v}{R^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{\gamma_\beta}{R} - \frac{z}{R} \frac{\partial^2 \gamma_\alpha}{\partial \alpha \partial \beta} + z \frac{\partial^2 \gamma_\beta}{\partial \alpha^2} \right); \\
 \chi_{\beta z} &= \frac{1}{2R} \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \beta^2} + \frac{\partial v}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \gamma_\alpha - \frac{z}{R} \frac{\partial^2 \gamma_\alpha}{\partial \beta^2} + z \frac{\partial^2 \gamma_\beta}{\partial \alpha \partial \beta} \right).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Следуя принятым гипотезам, пренебрегаем в законе Гука (1), (2) напряжениями σ_{zz} вследствие их малости по сравнению с другими напряжениями. Учитывая гипотезы Дюгамеля – Неймана, считаем, что тепловые деформации являются суперпозицией упругих деформаций и тепловых расширений. Принимая во внимание симметрию тензоров силовых и моментных напряжений ($a_{44} = a_{55}, a_{66} = a_{77}, a_{88} = a_{99}, b_{44} = b_{55}, b_{66} = b_{77}, b_{88} = b_{99}$), запишем определяющие соотношения для материала оболочки:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\alpha\alpha} &= \frac{a_{22}}{\Delta_0} \epsilon_{\alpha\alpha} - \frac{a_{12}}{\Delta_0} \epsilon_{\beta\beta} - \left[\frac{\alpha_\alpha a_{22} - \alpha_\beta a_{12}}{\Delta_0} \right] \Theta \sigma_{\beta\beta} = \\
 &= -\frac{a_{12}}{\Delta_0} \epsilon_{\alpha\alpha} - \frac{a_{12}}{\Delta_0} \epsilon_{\beta\beta} - \left[\frac{\alpha_\beta a_{11} - \alpha_\alpha a_{12}}{\Delta_0} \right] \Theta \sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{a_{45} + a_{44}} \epsilon_{\alpha\beta},
 \end{aligned}$$