Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 342–350
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 342–350
https://mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-342-350, EDN: FNMHYW

Научная статья
УДК 517.53:517.54

Новое доказательство гипотезы Кшижа при $n = 3$

Д. Л. Ступин

Тверской государственный университет, Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33

Ступин Денис Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, dstupin@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-9183-9543, AuthorID: 151820

Аннотация. Цель статьи — решение задачи о точной оценке модуля третьего тейлоровского коэффициента на классе голоморфных ограниченных не обращающихся в нуль в единичном круге функций (далее класс ограниченных не обращающихся в нуль функций). Задачу о точной оценке модулей всех тейлоровских коэффициентов в зависимости от номера коэффициента на этом классе обычно называют проблемой Кшижа. Рассмотрим класс нормированных голоморфных ограниченных в единичном круге функций (далее класс ограниченных функций). Проблема коэффициентов на этом классе ставится так: найти необходимые и достаточные условия, которые нужно наложить на последовательность комплексных чисел для того, чтобы степенной ряд с коэффициентами из этой последовательности был рядом Тейлора некоторой функции из класса ограниченных функций. В данной работе на основе решения проблемы коэффициентов для класса ограниченных функций решается задача получения точных оценок модулей первых трех тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных функций. Указано на возможность визуализации первых трех тел коэффициентов подкласса класса ограниченных функций, состоящего из функций с действительными коэффициентами. Далее решается задача получения точной верхней оценки модуля третьего тейлоровского коэффициента на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций путем перехода к функционалу над классом ограниченных функций. На основе упомянутых выше оценок на классе ограниченных функций удалось получить функционал, мажорирующий исходный. После чего задача сведена к поиску условного максимума функции трех действительных переменных с ограничениями типа неравенств, что позволило применить стандартные методы дифференциального исчисления для получения этого основного результата.

Ключевые слова: гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченные не обращающиеся в нуль функции, тело коэффициентов, ограниченные функции, оценки модулей тейлоровских коэффициентов
Для цитирования: *Ступин Д. Л.* Новое доказательство гипотезы Кшижа при $n = 3$ // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 342–350. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-342-350, EDN: FNMHYW

Article

A new proof of the Krzyz conjecture for $n = 3$

D. L. Stupin

Tver State University, 33 Zhelyabova St., Tver 170100, Russia

Denis L. Stupin, dstupin@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-9183-9543, AuthorID: 151820

Abstract. The purpose of this paper is to solve the problem of the sharp estimation of the modulus of the third Taylor coefficient on the class of holomorphic bounded nonvanishing in the unit disk functions (hereafter referred to as the class of bounded nonvanishing functions). The problem of sharp estimation of the moduli of all Taylor coefficients depending on the coefficient number on this class is usually called the Krzyz problem. Consider the class of normalized holomorphic bounded functions in the unit disk (hereafter referred to as the class of bounded functions). The coefficient problem on this class is posed as follows: find the necessary and sufficient conditions to impose on a sequence of complex numbers so that the power series with coefficients from this sequence is the Taylor series of some function from the class of bounded functions. In this paper, by means of the solution of the coefficient problem for the class of bounded functions, we solve the problem of obtaining the sharp estimates of moduli of the first three Taylor coefficients on the class of bounded functions. It is pointed out that it is possible to visualize the first three coefficient bodies of the subclass of the class of bounded functions, consisting of functions with real coefficients. Next, we solve the problem of obtaining the sharp upper estimation of the modulus of the third Taylor coefficient on the class of bounded nonvanishing functions, by reducing it to the functional over the class of bounded functions. On the basis of the above-mentioned estimates on the class of bounded functions, it was possible to obtain a functional that majorizes the original one. The problem is then reduced to the problem of finding the conditional maximum of the function of three real variables with inequality-type constraints, which made it possible to apply standard methods of differential calculus to obtain this main result.

Keywords: Krzyz hypothesis, Krzyz problem, bounded nonvanishing functions, body of coefficients, bounded functions, Taylor coefficient modulus estimates

For citation: Stupin D. L. A new proof of the Krzyz conjecture for $n = 3$. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 342–350 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-342-350, EDN: FNMHYW

Введение

Тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$ будем обозначать $\{f\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Класс B состоит из голоморфных в единичном круге Δ функций f таких, что $0 < |f(z)| \leqslant 1$, $z \in \Delta$.

В 1968 г. Ян Кшиж предположил [1], что если $f \in B$, то

$$|\{f\}_n| \leqslant 2/e, \quad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается только на функциях вида $e^{i\psi} F(e^{i\varphi} z^n, 1)$, где

$$F(z,t) \coloneqq e^{-t\frac{1-z}{1+z}}, \quad \varphi, \psi \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Это предположение мы будем называть *гипотезой Кшижа*, а задачу об оценке $|\{f\}_n|$, $n \in \mathbb{N}$, на классе B — *проблемой Кшижа*.

Гипотеза Кшижа привлекает внимание ряда математиков. В настоящее время она доказана до пятого тейлоровского коэффициента включительно [2]. Существование экстремалей в этой задаче очевидно, поскольку после присоединения к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное в топологии локально равномерной сходимости семейство функций.

Поскольку класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$), то можно ограничиться изучением функций, для которых $f(0) > 0$. Так как $0 < \{f\}_0 \leqslant 1$, то можно положить $\{f\}_0 = e^{-t}$, где параметр $t \in [0, +\infty)$. Эти подклассы обозначим через B_t. Как известно из теории подчиненных функций [3], каждую функцию класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-t\frac{1-\omega(z)}{1+\omega(z)}}, \quad \omega \in \Omega_0, \tag{1}$$

где Ω_0 — класс, состоящий из голоморфных в Δ функций ω таких, что

$$|\omega(z)| < 1, \quad \omega(0) = 0, \quad z \in \Delta.$$

Отметим, что при каждом $t > 0$ эта формула устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами Ω_0 и B_t.

1. Тела коэффициентов класса Ω_0

Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, точками которого являются наборы из n комплексных чисел $\omega^{(n)} := (\{\omega\}_1, \ldots, \{\omega\}_n)$.

Множество, состоящее из точек $\omega^{(n)} \in \mathbb{C}^n$ таких, что числа $\{\omega\}_1, \ldots, \{\omega\}_n$ являются первыми n коэффициентами некоторой функции класса Ω_0, будем обозначать через $\Omega_0^{(n)}$ и называть n-ым телом коэффициентов класса Ω_0.

Проблема коэффициентов на классе Ω_0 ставится так: найти необходимые и достаточные условия, которые нужно наложить на комплексные числа $\{\omega\}_1, \{\omega\}_2, \ldots$ для того, чтобы ряд $\{\omega\}_1 z + \{\omega\}_1 z^2 + \ldots$ был рядом Тейлора некоторой функции класса Ω_0.

Таким образом, задача о получении точных оценок модулей этих коэффициентов на классе Ω_0 есть частный случай проблемы коэффициентов. Подробное изложение решения проблемы коэффициентов для класса ограниченных функций имеется в работе [4]. В упомянутой статье также есть краткий исторический обзор.

2. Третье тело коэффициентов класса Ω_0

Имеет место точное неравенство [5]

$$\left|\{\omega\}_3 + \frac{\overline{\{\omega\}_1}\{\omega\}_2^2}{1 - |\{\omega\}_1|^2}\right| \leqslant \frac{(1 - |\{\omega\}_1|^2)^2 - |\{\omega\}_2|^2}{1 - |\{\omega\}_1|^2}. \tag{2}$$

Третье тело коэффициентов на Ω_0 полностью характеризуется неравенством (2). Заметим, что из неравенства (2) сразу следует неравенство [5]

$$|\{\omega\}_2| \leqslant 1 - |\{\omega\}_1|^2, \tag{3}$$

определяющее второе тело коэффициентов, а из неравенства (3) сразу следует неравенство Шварца [6, с. 29]

$$|\{\omega\}_1| \leqslant 1, \tag{4}$$

определяющее первое тело коэффициентов. Чтобы убедиться в этом, достаточно преобразовать неравенства $r_3 \geqslant 0$ и $r_2 \geqslant 0$, где r_3 и r_2 — правые части неравенств (2) и (3) соответственно.

Один из методов получения бесконечной последовательности коэффициентных неравенств типа (2), характеризующих класс Ω_0, описан в работе [5]. С ростом n эти вычисления становятся все более громоздкими.

Неравенство (4) описывает круг с центром c_1, находящимся в начале координат, и радиусом $r_1 := 1$, неравенство (3) при фиксированном $\{\omega\}_1$ описывает круг с центром c_2, находящимся в начале координат, и радиусом $r_2(\{\omega\}_1) := 1 - |\{\omega\}_1|^2$, а неравенство (2) при фиксированных $\{\omega\}_1$ и $\{\omega\}_2$ описывает круг с центром в

$$c_3(\{\omega\}_1, \{\omega\}_2) := -\frac{\overline{\{\omega\}_1}\{\omega\}_2^2}{1 - |\{\omega\}_1|^2}$$

и радиусом

$$r_3(\{\omega\}_1, \{\omega\}_2) := \frac{(1 - |\{\omega\}_1|^2)^2 - |\{\omega\}_2|^2}{1 - |\{\omega\}_1|^2}.$$

Учитывая тот факт, что разность модулей не превосходит модуля разности, из формулы (2) получаем

Утверждение 1. *Если $\omega \in \Omega_0$, то имеют место точные неравенства*

$$\frac{|\{\omega\}_2|^2}{1-|\{\omega\}_1|} - (1-|\{\omega\}_1|^2) \leqslant |\{\omega\}_3| \leqslant 1-|\{\omega\}_1|^2 - \frac{|\{\omega\}_2|^2}{1+|\{\omega\}_1|}. \quad (5)$$

Равенства в неравенствах (5) достигаются на границе $\partial\Omega_0^{(3)}$ третьего тела коэффициентов $\Omega_0^{(3)}$: в первом неравенстве (с оговоркой $|c_3| \geqslant r_3$) при $\{\omega\}_3 = c_3 - r_3 e^{i\arg c_3}$, а во втором неравенстве при $\{\omega\}_3 = c_3 + r_3 e^{i\arg c_3}$.

Доказательство. Неравенство (2) влечет $\big||\{\omega\}_3| - |c_3|\big| \leqslant r_3$, что эквивалентно двум неравенствам $-(|\{\omega\}_3| - |c_3|) \leqslant r_3$ и $|\{\omega\}_3| - |c_3| \leqslant r_3$, преобразовав которые, мы получим требуемое. Случаи достижения равенства ясны из геометрических соображений о кругах на комплексной плоскости. $\square$

Из неравенств (5) сразу следует, что при фиксированных $|\{\omega\}_1|$ и $|\{\omega\}_2|$ таких, что $|c_3(\{\omega\}_1, \{\omega\}_2)| > r_3(\{\omega\}_1, \{\omega\}_2)$, коэффициент $\{\omega\}_3$ заметает кольцо с центром в начале координат и радиусами $|c_3| - r_3$ и $|c_3| + r_3$.

Из неравенств (3), (4) и (5) немедленно следует, что $|\{\omega\}_n| \leqslant 1$, причем равенства здесь достигаются только на вращениях функций $\omega(z) = z^n$, $n = 1, 2, 3$. Пользуясь неравенством (2), мы доказали, что $|\{\omega\}_n| \leqslant 1$, $n = 1, 2, 3$.

Итак, мы описали границу третьего тела коэффициентов и пришли к закономерному выводу о том, что своего максимума $|\{\omega\}_3|$ достигает на $\partial\Omega_0^{(3)}$.

Множество A называется абсолютно выпуклым, если оно выпуклое и сбалансированное, т. е. $aA \subset A$, $|a| \leqslant 1$.

Отметим, что класс Ω_0 есть абсолютно выпуклое множество. Кроме того, все тела $\Omega_0^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, есть абсолютно выпуклые компакты.

3. О визуализации тел коэффициентов класса Ω_0

Первое тело коэффициентов — это просто единичный круг на комплексной плоскости или отрезок $[-1, 1]$ оси x, если коэффициенты действительные.

Второе тело коэффициентов уже лежит в четырехмерном действительном пространстве, однако его можно изобразить на плоскости xy, если ограничиться функциями с действительными коэффициентами. Второе тело коэффициентов определяется неравенством (3) и в случае действительных коэффициентов является абсолютно выпуклым компактом, заключенным между параболами $y = -1 + x^2$ и $1 - x^2$. Проекция второго тела на ось x есть первое тело.

Третье тело коэффициентов определяется неравенством (2) и в общем случае лежит в $\mathbb{C}^3$ или в $\mathbb{R}^6$ и т. д.

Утверждение 2. *В случае действительных коэффициентов третье тело есть абсолютно выпуклый компакт, ограниченный поверхностями*

$$z = \frac{y^2}{1+x} - (1-x^2) \quad \text{и} \quad z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{1-x}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 - (1-x^2) \leqslant y \leqslant 1 - x^2.$$

Проекция третьего тела на плоскость xy есть второе тело.

Доказательство. Обозначим $x \coloneqq \{\omega\}_1$, $y \coloneqq \{\omega\}_2$, $z \coloneqq \{\omega\}_3$. Неравенство (2) упростим, избавившись от лишних в данном случае сопряжений и модулей. Раскрыв последний оставшийся модуль, в левой части упрощенного неравенства, получим два неравенства: $-(z - c_3(x,y)) \leqslant r_3(x,y)$ и $z - c_3(x,y) \leqslant r_3(x,y)$. $\square$

Проецирование обсуждалось при получении неравенств (3) и (4) из неравенства (2). Абсолютная выпуклость наследуется телами коэффициентов от Ω_0.

4. Оценка $|\{f\}_3|$ на классах $f \in B_t$, $t \geqslant 0$

4.1. Предварительный анализ задачи

Пользуясь связью (1), из неравенства (2) можно получить неравенство, связывающее $\{f\}_1$, $\{f\}_2$, $\{f\}_3$ и характеризующее третье тело коэффициентов на классе B_t. В этом случае задача сводится к оценке простого функционала $|\{f\}_3|$ на сложно устроенном множестве $B_t^{(3)}$.

Второй вариант — выразить $\{f\}_3$ через $\{\omega\}_1$, $\{\omega\}_2$, $\{\omega\}_3$, используя связь (1), и оценивать более сложный функционал, но на достаточно простом множестве.

Здесь мы будем использовать второй подход. Имеем

$$F(z,t) = \{F\}_0 + \{F\}_1 z + \{F\}_2 z^2 + \{F\}_3 z^3 + \ldots = \frac{1}{e^t} + \frac{2t}{e^t}\left(z + \alpha z^2 + \beta z^3 + \ldots\right),$$

где $\alpha \coloneqq (t-1)$, $\beta \coloneqq \dfrac{1}{3}(2t^2 - 6t + 3)$. Легко показать, что

$$\{f\}_3 = \{F\}_1\{\omega\}_3 + \{F\}_2 2\{\omega\}_1\{\omega\}_2 + \{F\}_3\{\omega\}_1^3 = 2te^{-t}\left(\{\omega\}_3 + 2\alpha\{\omega\}_1\{\omega\}_2 + \beta\{\omega\}_1^3\right).$$

4.2. Сведение к задаче о максимизации функции

Здесь будет показан один из способов сведения задачи на экстремум функционала к задаче на экстремум действительнозначной функции трех действительных переменных.

Из второго из неравенств (5) следует, что

$$\frac{|\{f\}_3|}{2te^{-t}} = \left|\{\omega\}_3 + 2\alpha\{\omega\}_1\{\omega\}_2 + \beta\{\omega\}_1^3\right| \leqslant |\{\omega\}_3| + \left|2\alpha\{\omega\}_1\{\omega\}_2 + \beta\{\omega\}_1^3\right| \leqslant$$
$$\leqslant 1 - |\{\omega\}_1|^2 - \frac{|\{\omega\}_2|^2}{1 + |\{\omega\}_1|} + \left|2\alpha\{\omega\}_1\{\omega\}_2 + \beta\{\omega\}_1^3\right|. \tag{6}$$

Без потери общности можно считать, что $\{\omega\}_1 > 0$. Принимая во внимание неравенства (4) и (3), введем обозначения $x \coloneqq \{\omega\}_1$, $y \coloneqq |\{\omega\}_2|$, $\varphi \coloneqq \arg\{\omega\}_2$. Итак, наша задача свелась к поиску условного максимума функции трех действительных аргументов

$$h(x,y,\varphi) \coloneqq 1 - x^2 - \frac{y^2}{1+x} + x|2\alpha y e^{i\varphi} + \beta x^2|$$

при ограничениях $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1 - x^2$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

4.3. Исследование $h(x,y,\varphi)$ на максимум по φ

Исследуем $h(x,y,\varphi)$ на максимум по φ. Так как неравенство (3) никак не ограничивает φ, то $|2\alpha y e^{i\varphi} + \beta x^2|$ принимает максимальное значение при $e^{i\varphi} = \pm 1$ в зависимости от того, совпадают знаки α и β или нет. Окончательно

$$\max_{\varphi}|2\alpha y e^{i\varphi} + \beta x^2| = \begin{cases} -2\alpha y + \beta x^2, & t \in [0, t_1^\beta), \\ -2\alpha y - \beta x^2, & t \in [t_1^\beta, 1), \\ 2\alpha y - \beta x^2, & t \in [1, t_2^\beta), \\ 2\alpha y + \beta x^2, & t \geqslant t_2^\beta, \end{cases}$$

т. е. $\max\limits_{\varphi}|2\alpha y e^{i\varphi} + \beta x^2| = 2|\alpha|y + |\beta|x^2$, и

$$h(x,y) \coloneqq \max_{\varphi} h(x,y,\varphi) = 1 - x^2 - \frac{y^2}{1+x} + 2|\alpha|xy + |\beta|x^3, \tag{7}$$

где $t_1^\beta \coloneqq (3-\sqrt{3})/2 \approx 0.63$ и $t_2^\beta \coloneqq (3+\sqrt{3})/2 \approx 2.37$ — корни уравнения $\beta(t) = 0$.

4.4. Исследование $h(x,y)$ на максимум по y и x

Исследуем $h(x,y)$ на максимум по y. Имеем

$$\big(h(x,y)\big)'_y = 2\left(-\frac{y}{1+x} + |\alpha|x\right), \quad \big(h(x,y)\big)''_{yy} = -\frac{2}{1+x} < 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Таким образом,

$$y = y_1 \coloneqq |\alpha|x(1+x)$$

есть точка максимума. Точка $y = y_1$ всегда находится в области определения, так как $y_1 \leqslant 1 - x^2 =: y_4$ равносильно $x \leqslant (1+|\alpha|)^{-1} =: x_1$, причем $x_1 \in (0,1]$ при $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.5. Исследование $h(x,0)$ на максимум по x

Рассмотрим граничную точку $y = 0$. Имеем

$$h(x,0) = 1 - x^2 + |\beta|x^3, \quad \big(h(x,0)\big)'_x = -2x + 3|\beta|x^2, \quad \big(h(x,0)\big)''_{xx} = -2 + 6|\beta|x.$$

Стационарная точка $x = 0$, очевидно, есть точка максимума и

$$h(0,0) = 1, \quad t \geqslant 0.$$

Стационарная же точка $x = x_2 \coloneqq 2/(3|\beta|)$ является точкой минимума, так как

$$\big(h(x,0)\big)''_{xx}\big|_{x=x_2} = 2.$$

В граничной точке $x = 1$ имеем

$$h(1,0) = |\beta|, \quad t \geqslant 0.$$

4.6. Исследование $h(x,y_1)$ на максимум по x

Далее рассмотрим точку максимума $y = y_1$. Имеем

$$\begin{gathered} h(x,y_1) = 1 - (1-\alpha^2)x^2 + (\alpha^2 + |\beta|)x^3, \\ \big(h(x,y_1)\big)'_x = -2(1-\alpha^2)x + 3(\alpha^2+|\beta|)x^2, \\ \big(h(x,y_1)\big)''_{xx} = -2(1-\alpha^2) + 6(\alpha^2+|\beta|)x. \end{gathered}$$

Стационарная точка $x = 0$ является точкой максимума при $t \in (0,2)$ и точкой минимума при $t > 2$, так как $\big(h(x,y_1)\big)''_{xx}\big|_{x=0} = -2(1-\alpha^2) = 2t(t-2)$. Значение в точке максимума

$$h(0, y_1(0)) = 1, \quad t \in (0,2).$$

Наоборот, стационарная точка

$$x = x_3 \coloneqq \frac{2}{3}\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2+|\beta|}$$

является точкой минимума при $t \in (0,2)$ и точкой максимума при $t > 2$, так как

$$\big(h(x,y_1)\big)''_{xx}\big|_{x=x_3} = -\big(h(x,y_1)\big)''_{xx}\big|_{x=0}.$$

Однако $x_3 < 0$ при $t > 2$, поэтому исключаем эту точку из рассмотрения.

В граничной точке $x = 1$ имеем, что $h(1, y_1(1)) = 2\alpha^2 + |\beta| = |\beta|$. Действительно, $y_1 \leqslant y_4$ равносильно $x \leqslant x_1$, но $x_1 = 1$ только при $t = 1$, когда $\alpha = 0$.

4.7. Исследование $h(x, y_4)$ на максимум по x

Наконец рассмотрим граничную точку $y = y_4$. Имеем

$$h(x, y_4) = (2|\alpha| + 1)x - (2|\alpha| + 1 - |\beta|)x^3,$$
$$\big(h(x, y_4)\big)'_x = (2|\alpha| + 1) - 3(2|\alpha| + 1 - |\beta|)x^2,$$
$$\big(h(x, y_4)\big)''_{xx} = -6(2|\alpha| + 1 - |\beta|)x.$$

В граничной точке $x = 0$ имеем $h(0, y_4(0)) = 0$.

Стационарная точка

$$x = x_4 \coloneqq \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{2|\alpha| + 1}{2|\alpha| + 1 - |\beta|}}$$

является точкой максимума при $t \in [0, 3 + \sqrt{6})$, так как

$$\big(h(x, y_4)\big)''_{xx}\big|_{x=x_4} = -2\sqrt{3}\sqrt{2|\alpha| + 1 - |\beta|}\sqrt{2|\alpha| + 1} < 0,$$

а $2|\alpha| + 1 - |\beta| < 0$ при $t > 3 + \sqrt{6} \approx 5.45$. При этом $0 \leqslant x_4 \leqslant 1$ только при $t \in [0, t_3]$, где $t_3 \coloneqq (5 + \sqrt{15})/2 \approx 4.44$. Значение в точке максимума

$$h(x_4, y_4(x_4)) = 2\frac{\sqrt{3}}{9}\sqrt{\frac{(2|\alpha| + 1)^3}{2|\alpha| + 1 - |\beta|}}, \quad t \in [0, t_3].$$

В граничной точке $x = 1$ имеем $h(1, y_4(1)) = |\beta|$, $t \geqslant 0$.

4.8. Анализ результатов

Итак, при каждом $t \geqslant 0$ нам нужно найти максимум среди $h(0, 0)$, $h(1, 0)$ и $h(x_4, y_4(x_4))$. Обозначим $M(t) \coloneqq \max\{h_t(0, 0), h_t(1, 0), h_t(x_4, y_4(x_4))\}$. Уравнение $h(x_4, y_4(x_4)) = h(0, 0)$ имеет два решения: $t_1 \coloneqq (33 - 3\sqrt{57})/32 \approx 0.32$ и

$$t_2 \coloneqq \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{\sqrt[3]{26\sqrt{2} + 8\sqrt{21}}}{4} + \frac{1}{2\sqrt[3]{26\sqrt{2} + 8\sqrt{21}}} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\right) \approx 1.65.$$

Уравнение $h(x_4, y_4(x_4)) = h(1, 0)$ имеет одно решение — число $t = t_3 \approx 4.44$, уже встречавшееся нам чуть выше. Выше мы ввели число $t_2^\beta \coloneqq (3 + \sqrt{3})/2 \approx 2.37$ — наибольший корень уравнения $\beta(t) = 0$.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Если $f \in B_t$, то имеет место оценка*

$$|\{f\}_3| \leqslant 2te^{-t}M(t) = 2te^{-t}\begin{cases} g(t), & t \in [0, t_1), \\ 1, & t \in [t_1, t_2), \\ g(t), & t \in [t_2, t_3), \\ \beta(t), & t \geqslant t_3, \end{cases}$$

где $g(t) \coloneqq 2\frac{\sqrt{3}}{9}\sqrt{\frac{(2|t-1|+1)^3}{2|t-1|+1-|2t^2-6t+3|/3}}$, точная при $t \notin (0, t_1) \cup (t_2^\beta, t_3)$.

Ясно, что при некоторых t первое из неравенств (6) может быть строгим, вследствие чего полученная оценка будет грубой. В нашем случае это так при $t \in (0, t_1) \cup (t_2^\beta, t_3)$. Тем не менее, и этого результата достаточно для доказательства гипотезы Кшижа при $n = 3$, так как

$$\max_{t \geqslant 0}\left(\frac{2t}{e^t}M(t)\right) = \frac{2}{e} \quad \text{и} \quad \frac{2t}{e^t}M(t) = \frac{2}{e} \iff t = 1.$$

Для доказательства нужно решить неравенство $2t/e^tM(t) < 2/e$ при $t \geqslant 0$.

Следствие 1. *Гипотеза Кшижа справедлива при $n = 3$, т.е. если $f \in B$, то $|\{f\}_3| \leqslant 2/e$. Причем равенство достигается только на вращениях функции $F(z^3, t)$ в плоскостях переменных z и w.*

4.9. Краткий обзор результатов по начальным коэффициентам

По геометрическим соображениям очевидно, что $|\{f\}_0| \leqslant 1$. Точная оценка $|\{f\}_1|$ впервые появилась в 1934 г. [7–9]. Я. Кшиж, располагая точными оценками $|\{f\}_1|$ и $|\{f\}_2|$, высказал свою гипотезу в 1968 г. [1].

В статье [10] при помощи вариационного метода была получена формула (7) и на ее основе впервые получен результат, изложенный в настоящей работе. В [5] приведена формула (7), исследование на максимум отсутствует, но указано, что результат совпадает с аналогичным результатом из [10].

Сравним только что полученную оценку и оценку, точную для всех $t \geqslant 0$, полученную Д. В. Прохоровым и Я. Шиналем в работе [11].

Теорема 2 (Прохоров, Шиналь)**.** *Если $f \in B_t$, то*

$$\Psi(t) \coloneqq \sup_{f \in B_t} |\{f\}_3|(t) = 2e^{-t} \begin{cases} t, & t \in [0,\, 1.65\ldots), \\ \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(2t-1)^3}, & t \in [1.65\ldots,\, 3.22\ldots), \\ \frac{\sqrt{2}}{3}(2t^2 - 6t + 3)\sqrt{\frac{(t-2)^3}{t-3}}, & t \in [3.22\ldots,\, 3.47\ldots), \\ \frac{\sqrt{2}}{3}t\sqrt{\frac{(2t-3)^3}{-t^2+6t-6}}, & t \in [3.47\ldots,\, 3.82\ldots), \\ \frac{1}{3}t(2t^2 - 6t + 3), & t \geqslant 3.82\ldots \end{cases}$$

Графики функций $2te^{-t}M(t)$ и $\Psi(t)$ совпадают при $t \in [t_1, t_2^{\beta}]$ и при $t \geqslant t_3$. В остальных точках первый график лежит над вторым.

Как отмечается в обзоре [12], наиболее убедительным доказательством того, что $|\{f\}_4| \leqslant 2/e$, стало доказательство В. Шапеля [13]. Оценка пятого коэффициента методом В. Шапеля появилась в работе Н. Самариса [2].

Список литературы

1. *Krzyz J. G.* Coefficient problem for bounded nonvanishing functions // Annales Polonici Mathematici. 1968. Vol. 20. P. 314.
2. *Samaris N.* A proof of Krzyz's conjecture for the fifth coefficient // Complex Variables, Theory and Application: An International Journal. 2003. Vol. 48, iss. 9. P. 753–766. https://doi.org/10.1080/0278107031000152616
3. *Rogosinski W.* On the coefficients of subordinate functions // Proceedings of the London Mathematical Society. 1945. Vol. s2-48, iss. 1. P. 48–82. https://doi.org/10.1112/plms/s2-48.1.48
4. *Ступин Д. Л.* Проблема коэффициентов для функций, отображающих круг в обобщенный круг и задача Каратеодори – Фейера // Применение функционального анализа в теории приближений. 2012. № 33. С. 45–74. EDN: QZHWUT
5. *Brown J. E.* Iterations of functions subordinate to schlicht functions // Complex Variables, Theory and Application: An International Journal. 1987. Vol. 9, iss. 2–3. P. 143–152. https://doi.org/10.1080/17476938708814258
6. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. Москва : Наука, 1966. 628 с.
7. *Levin V. I.* Lösing der Aufgabe 163 // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1934. Vol. 44. P. 80–81.
8. *Fenchel W.* Lösing der Aufgabe 163 // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1934. Vol. 44. P. 81–82.
9. *Reissner E.* Lösing der Aufgabe 163 // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1934. Vol. 44. P. 83.
10. *Hummel J. A., Scheinberg S., Zalcman L. A.* A coefficient problem for bounded nonvanishing functions // Journal d'Analyse Mathématique. 1977. Vol. 31. P. 169–190. https://doi.org/10.1007/BF02813302

11. *Prokhorov D. V., Szynal J.* Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions // Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sciences Mathématiques. 1981. Vol. 29, iss. 5–6. P. 223–230.
12. *Prokhorov D. V.* Coefficients of holomorphic functions // Journal of Mathematical Sciences. 2001. Vol. 106, iss. 6. P. 3518–3544. https://doi.org/10.1023/A:1011975914158
13. *Szapiel W.* A new approach to the Krzyz conjecture // Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska, Sectio A. 1994. Vol. 48. P. 169–192.

References

1. Krzyz J. G. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions. *Annales Polonici Mathematici*, 1968, vol. 20, pp. 314.
2. Samaris N. A proof of Krzyz's conjecture for the fifth coefficient. *Complex Variables, Theory and Application: An International Journal*, 2003, vol. 48, iss. 9, pp. 753–766. https://doi.org/10.1080/0278107031000152616
3. Rogosinski W. On the coefficients of subordinate functions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1945, vol. s2-48, iss. 1, pp. 48–82. https://doi.org/10.1112/plms/s2-48.1.48
4. Stupin D. L. The problem of coefficients for functions mapping a circle into a generalized circle and the Carateodori – Feyer problem. *Primenenie funktsional'nogo analiza v teorii priblizheniy* [Application of Functional Analysis in Approximation Theory], 2012, iss. 33, pp. 45–74 (in Russian). EDN: QZHWUT
5. Brown J. E. Iterations of functions subordinate to schlicht functions. *Complex Variables, Theory and Application: An International Journal*, 1987, vol. 9, iss. 2–3, pp. 143–152. https://doi.org/10.1080/17476938708814258
6. Goluzin G. M. *Geometricheskaya teoriya funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Geometric Theory of Functions of a Complex Variable]. Moscow, Nauka, 1966. 628 p. (in Russian).
7. Levin V. I. Lösing der Aufgabe 163. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1934, vol. 44, pp. 80–81.
8. Fenchel W. Lösing der Aufgabe 163. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1934, vol. 44, pp. 81–82.
9. Reissner E. Lösing der Aufgabe 163. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1934, vol. 44, pp. 83.
10. Hummel J. A., Scheinberg S., Zalcman L. A. A coefficient problem for bounded nonvanishing functions. *Journal d'Analyse Mathématique*, 1977, vol. 31, pp. 169–190. https://doi.org/10.1007/BF02813302
11. Prokhorov D. V., Szynal J. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions. *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sciences Mathématiques*, 1981, vol. 29, iss. 5–6, pp. 223–230.
12. Prokhorov D. V. Coefficients of holomorphic functions. *Journal of Mathematical Sciences*, 2001, vol. 106, iss. 6, pp. 3518–3544. https://doi.org/10.1023/A:1011975914158
13. Szapiel W. A new approach to the Krzyz conjecture. *Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska, Sectio A*, 1994, vol. 48, pp. 169–192.

Поступила в редакцию / Received 23.03.2023
Принята к публикации / Accepted 04.04.2023
Опубликована / Published 30.08.2024