Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 351–358
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 351–358
https://mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-351-358, EDN: HWFUYG

Научная статья
УДК 517.927.96+517.984

Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения

А. П. Хромов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Хромов Август Петрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и математической экономики, KhromovAP@sgu.ru, https://orcid.org/0000-0002-2454-8009, AuthorID: 3428

Аннотация. На основе законности перестановки операций суммирования и интегрирования тригонометрического ряда Фурье дается решение обобщенной смешанной задачи по методу Фурье для однородного волнового уравнения с нулевой начальной скоростью и условиями закрепления на концах. Решение дается в виде ряда, сходящегося с экспоненциальной скоростью. В случае классического решения этот ряд является таким решением. Результаты статьи усиливают полученные ранее.

Ключевые слова: расходящиеся ряды, волновое уравнение, смешанная задача

Для цитирования: *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 351–358. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-351-358, EDN: HWFUYG

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Divergent series and generalized mixed problem for wave equation

A. P. Khromov

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Avgust P. Khromov, KhromovAP@sgu.ru, https://orcid.org/0000-0002-2454-8009, AuthorID: 3428

Abstract. Allowing the inversion of the operations of summation and integration for trigonometric Fourier series we present the solution by Fourier method of the generalized mixed problem for the homogeneous wave equation with zero initial velocity and fixed ends boundary conditions. The solution has the form of a series converging at an exponential rate. This series converges the classical solution if the latter equists. The results of the article reinforce the previously obtained results.

Keywords: divergent series, wave equation, mixed problem

For citation: Khromov A. P. Divergent series and generalized mixed problem for wave equation. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 351–358 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-351-358, EDN: HWFUYG

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

© *Хромов А. П., 2024*

Введение

Обоснование метода Фурье в задачах математической физики традиционно опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, получающихся из него почленным дифференцированием нужное число раз. В. А. Стеклов, впервые давший строгое обоснование метода Фурье, придерживался этой точки зрения [1, с. 224], которая сделала метод Фурье очень популярным. Было проведено большое количество исследований и достигнуты значительные успехи. Недостатком такого подхода является то, что он требует завышения гладкости начальных данных.

Выход из этого положения намечен А. Н. Крыловым [2] в его исследованиях по ускорению сходимости рядов Фурье и им подобных. Суть его приема состоит в том, что изучаемый вопрос о дифференцировании ряда решается путем разбиения его на два ряда, один из которых точно суммируется (и тем самым здесь не нужно прибегать к почленному дифференцированию), а второй ряд сходится настолько быстро, что его можно дифференцировать. Им были успешно преодолены трудности, связанные с невозможностью почленного дифференцирования, на ряде конкретных задач.

В. А. Чернятин [3] приемом А. Н. Крылова с применением уточненных асимптотик для собственных значений и собственных функций успешно исследовал ряд задач методом Фурье и значительно ослабил условия гладкости исходных данных, а в ряде случаев эти условия стали минимально возможными.

Это направление получило развитие в работах [4, 5]. Там, в смешанной задаче для волнового уравнения, был предложен резольвентный подход, состоящий в привлечении метода Коши – Пуанкаре контурного интегрирования по спектральному параметру резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей метода Фурье. В результате удалось получить решения смешанных задач при минимальных условиях гладкости начальных даннных, не используя при этом уточненных асимптотик для собственных значений и никакой информации о собственных функциях. Кроме того, важно то, что резольвентный подход позволил привлечь ряды Фурье по тригонометрической системе вместо рядов по собственным функциям.

Обобщенная смешанная задача для волнового уравнения является одним из наиболее сильных обобщений смешанной задачи. Она впервые появилась в [6]. Внешний вид ее такой же, как и у исходной смешанной задачи, и характеризуется тем, что в формальном решении ее по методу Фурье потенциал и начальные данные считаются произвольными суммируемыми функциями, а возмущение в случае неоднородной задачи — произвольной локально суммируемой функцией.

Ряд формального решения может быть и расходящимся. Следуя рекомендациям Л. Эйлера [7, с. 101], для нахождения его суммы привлекаем еще аксиому о перестановке в ряде операций интегрирования и суммирования.

В настоящей работе дается решение следующей обобщенной смешанной задачи:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,o) = 0, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$, $q(x)$ из $L[0,1]$.

1. Обобщенная смешанная задача и ее формальное решение

Рассмотрим здесь более общую следующую обобщенную смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty), \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{5}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u'_t(x,o)=\psi(x). \tag{6}$$

Считаем, что все функции, входящие в (4)–(6), комплекснозначные, причем $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)\in L[0,1]$ и $f(x,t)$ класса Q, т. е. $f(x,t)\in L[Q_T]$ при любом $T>0$ и $Q_T=[0,1]\times[0,T]$.

Задача (4)–(6) при таких исходных данных чисто формальная, т.е. имеет лишь внешний вид. Несмотря на это, можно дать (см. [6]) формальное решение по методу Фурье в следующем виде:

$$u(x,t)=(\cdot)\left[(R_\lambda\varphi)\cos\varrho t+(R_\lambda\psi)\frac{\sin\varrho t}{\varrho}+\int_0^t R_\lambda(f(\cdot,\tau))\frac{\sin\varrho(t-\tau)}{\varrho}d\tau\right]d\lambda, \tag{7}$$

где

$$(\cdot)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right),$$

$R_\lambda=(L-\lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L: $Ly=-y''(x)+q(x)y(x)$, $y(0)=y(1)=0$, λ — спектральный параметр, E — единичный оператор, $R_\lambda(f(\cdot,\tau))$ означает, что R_λ применяется к $f(x,t)$ по переменной x (τ — параметр), $\lambda=\varrho^2$, $\operatorname{Re}\varrho\geqslant 0$, γ_n — образ в λ-плоскости окружности $\tilde\gamma_n=\{\varrho|\ |\varrho-\pi n|=\delta\}$, $\delta>0$ и достаточно мало, $r>0$ достаточно велико и фиксированно, n_0 — такой номер, что при $n\geqslant n_0$ внутри γ_n находится по одному собственному значению оператора L и все γ_n при $n\geqslant n_0$ находятся вне $|\lambda|=r$, а остальные собственные значения — внутри.

Считаем, что задача (4)–(6) и ее формальное решение тесно связаны. Это навеяно тем, что в случае классического решения задачи (4)–(6) оно представляется формальным решением, которое в этом случае является сходящимся рядом.

В нашем же случае ряд (7) может быть и расходящимся. Таким образом, в нашей обобщенной смешанной задаче сама задача имеет чисто формальный вид, а формальное решение является конкретным рядом, который может быть и расходящимся. И все это создает трудности при решении обобщенной смешанной задачи.

2. Преобразование формального решения

При действиях с расходящимися рядами будем пользоваться следующей аксиомой:

$$\int\sum=\sum\int, \tag{8}$$

где $\int$ — определенный интеграл.

С помощью (8) формальное решение (7) приведем к виду

$$u(x,t)=Z(x,t;\varphi)+\int_0^t Z(x,\tau;\psi)d\tau+\int_0^t d\tau\int_0^{t-\tau}Z(x,\eta;f(\cdot,\tau)d\eta, \tag{9}$$

где $Z(x,t;\varphi)$ есть формальное решение задачи (1)–(3). Значение формулы (9) в том, что хорошо объясняется роль смешанной задачи (1)–(3), и поэтому мы ограничимся в дальнейшем лишь задачей (1)–(3).

3. Об интегрировании тригонометрического ряда Фурье

При решении обобщенной смешанной задачи (1)–(3) потребуются следующие факты, относящиеся к тригонометрическим рядам Фурье [8].

Рассмотрим на отрезке $[-1,1]$ тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) \in L[-1,1]$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\pi x + b_k \sin k\pi x), \tag{10}$$

где $a_k = \int\limits_{-1}^{1} f(t) \cos k\pi t dt$, $k = 0, 1, \ldots$, $b_k = \int\limits_{-1}^{1} f(t) \sin k\pi t dt$, $k = 1, 2, \ldots$.

Рассматриваем ряд (10) как расходящийся. К нахождению его суммы привлечем аксиому (8), где $\int = \int\limits_{-1}^{x}$.

Теорема 1. *Сумма расходящегося ряда* (10) *почти всюду равна* $f(x)$.

Доказательство. Пусть сумма ряда (10), рассматриваемого как расходящийся, есть некоторая функция $g(x) \in L[-1,1]$. Тогда в силу (8) имеем

$$\int\limits_{-1}^{x} g(t)dt = \int\limits_{-1}^{x} \frac{a_0}{2} dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int\limits_{-1}^{x} \cos k\pi t \, dt + b_k \int\limits_{-1}^{x} \sin k\pi t \, dt \right). \tag{11}$$

По теореме 3 из [9, с. 320] ряд (11) сходится в каждой точке $x \in [-1,1]$ и его сумма есть $\int\limits_{-1}^{x} f(t)dt$. Поэтому из (11) получаем

$$\int\limits_{-1}^{x} g(t)dt = \int\limits_{-1}^{x} f(t)dt.$$

Отсюда $g(x) = f(x)$ почти всюду. Теорема доказана. □

Приведем теперь теорему Фейера – Лебега о сходимости средних Фейера ряда (10).

Теорема 2 (Фейер – Лебег [9, с. 312])**.** *Если* $\sigma_n(x)$ *средние Фейера ряда* (10) *функции* $f(x) \in L[-1,1]$*, то почти всюду на* $[-1,1]$ *будет*

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n(x) = f(x).$$

Это соотношение выполняется во всех точках Лебега и тем более во всех точках непрерывности функции $f(x)$*, лежащих внутри* $[-1,1]$.

Таким образом, за исключением последней фразы теоремы 2, теоремы 1 и 2 приводят к одному и тому же результату: сумма ряда (10), рассматриваемого как расходящийся, с применением аксиомы (8) совпадает почти всюду с пределом частичных сумм Фейера.

Для случая тригонометрических рядов по синусам данный результат содержится в [10].

4. Решение обобщенной смешанной задачи (1)–(3)

Опираясь на тесную связь обобщенной смешанной задачи с рядом ее формального решения [6, с. 217], получим решение обобщенной смешанной задачи (1)–(3) в виде ряда, сходящегося с экспоненциальной скоростью.

Приступаем к процедуре нахождения этого решения. Представим формальное решение $u(x,t) = Z(x,t;\varphi)$ задачи (1)–(3) в виде

$$u(x,t) = u_{01}(x,t) + u_1(x,t), \tag{12}$$

где $u_{01}(x,t)$ есть ряд $Z(x,t;\varphi)$ при $q(x) = 0$. Обозначим $u_{01}(x,t) = Z_0(x,t;\varphi)$. Тогда из (12) получаем $u_1(x,t) = Z(x,t;\varphi) - Z_0(x,t;\varphi)$.

Лемма 1. *Сумма ряда* $u_{01}(x,t)$ *есть*

$$a_0(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)],$$

где $\tilde{\varphi}(x)$ *нечетна и* 2*-периодична при* $x \in (-\infty, \infty)$ *и* $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ *при* $x \in [0,1]$.

В [11] эта лемма фигурирует как теорема 2.

Функция $a_0(x,t)$ будет первым членом ряда, представляющего решение задачи (1)–(3).

Приступим к исследованию ряда $u_1(x,t)$.

Так как $u_{01}(x,t)$ есть ряд формального решения задачи

$$\frac{\partial^2 u_{01}(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_{01}(x,t)}{\partial x^2},$$
$$u_{01}(0,t) = u_{01}(1,t) = 0,$$
$$u_{01}(x,0) = \varphi(x), \quad u'_{01,t}(x,o) = 0,$$

то ряду $u_1(x,t)$ соответствует смешанная задача

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u_1(x,t) + f_0(x,t), \tag{13}$$
$$u_1(0,t) = u_1(1,t) = 0, \tag{14}$$
$$u_1(x,0) = u'_{1t}(x,0) = 0, \tag{15}$$

где $f_0(x,t) = -q(x)a_0(x,t)$.

Но ряд $u_1(x,t)$ не является рядом формального решения по методу Фурье этой задачи. Поэтому мы, следуя нашей установке о связи смешанной задачи с рядом ее формального решения, ряд $u_1(x,t)$ заменим на ряд формального решения задачи (13)–(15). Теперь ряд $u_1(x,t)$ есть ряд

$$u_1(x,t) = (\cdot)\left[\int_0^t R_\lambda\left(f_0(\cdot,\tau)\right)\frac{\sin\varrho(t-\tau)}{\varrho}\,d\tau\right]d\lambda. \tag{16}$$

Этот переход является основным моментом нашей процедуры.

Отметим, что в случае классического решения этот переход законен [12].

Повторяем вышепроведенную процедуру с рядом $u(x,t)$ теперь с рядом $u_1(x,t)$ из (16), т.е. представим ряд $u_1(x,t)$ в виде

$$u_1(x,t) = u_{02}(x,t) + u_2(x,t), \tag{17}$$

где $u_{02}(x,t)$ есть ряд формального решения обобщенной смешанной задачи

$$\frac{\partial^2 u_{02}(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_{02}(x,t)}{\partial x^2} + f_0(x,t),$$
$$u_{02}(0,t) = u_{02}(1,t) = 0,$$
$$u_{02}(x,0) = u'_{02,t}(x,0) = 0.$$

Лемма 2. *Сумма ряда* $u_{02}(x,t)$ *есть*

$$u_{02}(x,t) = a_1(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_0(\eta,\tau)\,d\eta,$$

где $\tilde{f}_0(\eta,\tau)$ *нечетна,* 2*-периодична по* η *и* $\tilde{f}_0(\eta,\tau) = f_0(\eta,\tau)$ *при* $\eta \in [0,1]$.

Доказательство содержится в [6, с. 219].

Функция $a_1(x,t)$ будет вторым членом ряда, представляющего решение обобщенной смешанной задачи (1)–(3).

Как и выше, получаем, что ряд $u_2(x,t)$ в силу (17) соответствует задаче (13)–(15), где вместо $f_0(x,t)$ берется теперь функция $f_1(x,t) = -q(x)a_1(x,t)$, и мы от ряда $u_2(x,t)$ приходим к ряду

$$u_2(x,t) = (\cdot)\left[\int_0^t R_\lambda\left(f_1(\cdot,\tau)\right)\frac{\sin\varrho(t-\tau)}{\varrho}\,d\tau\right]d\lambda.$$

Продолжаем указанный процесс. Придем на m-ом шаге к формуле

$$u(x,t) = A_m(x,t) + \Omega_m(x,t),$$

где

$$A_m(x,t) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x,t), \quad a_k(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{k-1}(\eta,\tau)\,d\eta, \quad k \geqslant 1,$$

$$f_k(\eta,\tau) = -q(\eta)a_k(\eta,\tau), \quad a_0(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)],$$

$$\Omega_m(x,t) = (\cdot)\left[\int_0^t (R_\lambda - R_\lambda^0)\left(f_{m-1}(\cdot,\tau)\right)\frac{\sin\varrho(t-\tau)}{\varrho}\,d\tau\right]d\lambda.$$

Лемма 3 ([6, лемма 1]). *Пусть T — произвольное положительное число, s — наименьшее натуральное число такое, что $T \leqslant s$. Тогда справедлива оценка*

$$\|a_n(x,t)\|_{C[Q_T]} \leqslant M_1\left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1}\frac{T^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n \geqslant 1,$$

где $M_1 = \|a_1(x,t)\|_{C[Q_T]}$, $M_2 = (2s+1)\|q\|_1$ ($\|\cdot\|_1$ — норма в $L[0,1]$). Кроме того, $M_1 \leqslant c_T\|\varphi\|_1$ и постоянная c_T не зависит от $\varphi(x)$, $Q_T = [0,1]\times[0,T]$.

Лемма 4 ([6, лемма 12, теорема 15]). *Имеет место оценка*

$$\Omega_m(x,t) = O\left(\iint_{Q_T}|f_{m-1}(x,t)|\,dx\,dt\right), \quad m \geqslant 1,$$

равномерная по x и t из Q_T.

На основании лемм 3 и 4 получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Если $\varphi(x) \in L[0,1]$, то ряд $A(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T при любом $T > 0$ с экспоненциальной скоростью и его сумма представляет собой решение обобщенной смешанной задачи* (1)–(3).

Отметим также [12, теорема 6]:

Теорема 4. *Если $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны на $[0,1]$ и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, то сумма ряда $A(x,t)$ представляет собой классическое решение смешанной задачи* (1)–(3) *(уравнение* (1) *удовлетворяется почти всюду).*

Замечание. Условия на $\varphi(x)$ в теореме 4 являются необходимыми и достаточными для классического решения задачи (1)–(3).

Теорема 4 с замечанием служит основанием считать сумму ряда $A(x,t)$ при $\varphi(x) \in L[0,1]$ решением обобщенной смешанной задачи (1)–(3).

Таким образом, аксиома о перестановочности операций интегрирования и суммирования функциональных рядов приводит в случае тригонометрического ряда Фурье к методу суммирования с таким же результатом, что и метод Фейера. В случае обобщеной смешанной задачи эта аксиома приводит к построению ряда $A(x,t)$ явного вида, сходящегося с экспоненциальной скоростью. Этот ряд следует считать новым методом суммирования ряда формального решения. Теорема 4 говорит о регулярности предлагаемого метода.

Список литературы

1. *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. Москва : Наука, 1983. 432 с.
2. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1950. 368 с.
3. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. Москва : Изд-во Московского ун-та, 1991. 112 с.
4. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье // Доклады Академии наук. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140. https://doi.org/10.7868/S0869565214260041, EDN: SJQEEN
5. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход для волнового уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 2. С. 51–63. https://doi.org/10.7868/S0044466915020052, EDN: THHYQB
6. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения // Труды Института математики и механаники УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. С. 215–238. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238, EDN: YJLRTL
7. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. Москва ; Ленинград : ГИТТЛ. 1949. 580 с.
8. *Хромов А. П.* О почленном интегрировании тригонометрического ряда Фурье и теореме Фейера – Лебега // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 66: Материалы XVI Международной Казанской школы-конференции (Казань, 22–27 августа 2023 г.). Казань : Казанский (Приволжский) федеральный ун-т, 2023. С. 261–262.
9. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1957. 522 с.
10. *Хромов А. П.* О почленном интегрировании функциональных рядов // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения – XXXIV : материалы международной Воронежской весенней математической школы, посвящённой 115-летию со дня рождения академика Л. С. Понтрягина (Воронеж, 3–9 мая 2023 г.). Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2023. С. 424–425. EDN: JJXOCG
11. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 3. С. 322–331. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-322-331, EDN: PTNPTE
12. *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 5. С. 717–731. https://doi.org/10.1134/S0374064119050121, EDN: ZFWIBF

References

1. Steklov V. A. *Osnovnye zadachi matematicheskoy fiziki* [The bases problems of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1983. 432 p. (in Russian).
2. Krylov A. N. *O nekotorykh differentsial'nykh uravneniyakh matematicheskoy fiziki, imeyushchikh prilozheniya v tekhnicheskikh voprosakh* [On some differential equations of mathematical physics that have applications in technical matters]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1950. 368 p. (in Russian).
3. Chernyatin V. A. *Obosnovanie metoda Fur'e v smeshannoy zadache dlya uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [Substantiation of the Fourier method in a mixed problem for partial differential equations]. Moscow, Moscow University Press, 1991. 112 p. (in Russian).
4. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Resolvent approach in the Fourier method. *Doklady Mathematics*,

2014, vol. 90, iss. 2, pp. 545–548. https://doi.org/10.1134/S1064562414060076, EDN: UFVTOF
5. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. The resolvent approach for the wave equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, iss. 2, pp. 227–239. https://doi.org/10.1134/S0965542515020050, EDN: UFLLVV
6. Khromov A. P., Kornev V. V. Divergent series in the Fourier method for the wave equation. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 2021, vol. 27, iss.4, pp. 215–238 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238, EDN: YJLRTL
7. Euler L. *Differentsial'noe ischislenie* [Differential calculus]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1949. 580 p. (in Russian).
8. Khromov A. P. On the slow integration of the trigonometric Fourier series and Fejer – Lebesgue theorem. *Trudy Matematicheskogo tsentra imeni N. I. Lobachevskogo*. Vol. 66: Proceedings of the XVI International Kazan School-conference “Theory of Functions, Its Applications and Related Issues” (Kazan, August 22–27, 2023). Kazan, Kazan (Volga region) Federal University Publ., 2023, pp. 261–262 (in Russian).
9. Natanson I. P. *Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy* [Theory of Functions of a Real Variable]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1957. 522 p. (in Russian).
10. Khromov A. P. On the slow integration of functional series. *Sovremennye metody teorii kraevykh zadach* [Modern Methods of the Theory of Boundary Value Problems: Proceedings of the International Conference “Pontryaginsky Readings–XXXIV” (Voronezh, May 3–9, 2023)]. Voronezh, Voronezh State University Publ., 2023, pp. 424–425 (in Russian). EDN: JJXOCG
11. Khromov A. P. Divergent series and generalized mixed problem for a wave equation of the simplest type. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 3, pp. 322–331 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-322-331, EDN: PTNPTE
12. Khromov A. P. Necessary and sufficient conditions for the existence of a classical solution of the mixed problem for the homogeneous wave equation with an integrable potential. *Differential Equations*, 2019, vol. 55, iss. 5, pp. 703–717. https://doi.org/10.1134/S0012266119050112, EDN: IMUUIG

Поступила в редакцию / Received 22.02.2024
Принята к публикации / Accepted 17.05.2024
Опубликована / Published 30.08.2024