



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 402–414
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 402–414
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-402-414>, EDN: HAUNCU

Научная статья

УДК 531.38

Управление качением динамически симметричного шара по наклонной вращающейся плоскости

Е. А. Микишанина

¹Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук, Россия, 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

²Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, Россия, 428015, г. Чебоксары, Московский пр-т, д. 15

Микишанина Евгения Арифжановна, кандидат физико-математических наук, ¹научный сотрудник отдела механики, ²доцент кафедры актуарной и финансовой математики, evaeva_84@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4408-1888>, AuthorID: 733691

Аннотация. В работе исследуется динамика качения динамически симметричного тяжелого шара (или тяжелой сферической оболочки) по наклонной шероховатой плоскости (платформе), вращающейся с постоянной или периодической скоростью вокруг перпендикулярной к плоскости оси, проходящей через некоторую фиксированную точку этой плоскости. В точке контакта шара с опорной плоскостью наложены кинематические (неголономные и голономные) ограничения. Построены уравнения движения шара и доказана ограниченность квадрата вектора скорости геометрического центра шара в случае постоянной скорости вращения плоскости при любом угле наклона и в случае периодической скорости вращения плоскости, расположенной горизонтально. Причем в случае постоянной скорости вращения плоскости решения найдены аналитически. На основе численного интегрирования показано, что для периодической скорости вращения плоскости и угле наклона, отличном от нуля, квадрат вектора скорости геометрического центра шара неограниченно возрастает. Предложены два управления углом наклона вращающейся плоскости пропорционально проекциям вектора скорости геометрического центра шара на координатные оси, лежащие в опорной плоскости. Для случая постоянной скорости вращения плоскости проведено качественное исследование уравнений движения, аналитически найдены параметры управления, при которых квадрат скорости геометрического центра шара будет ограничен и при которых будет неограниченно возрастать. Приведены результаты численного интегрирования для случая периодической скорости вращения плоскости и показана эффективность этого управления в контексте достижения ограниченности квадрата скорости геометрического центра шара. Полученные результаты проиллюстрированы, построены траектории точки контакта и графики искомых механических параметров.

Ключевые слова: динамика, управление, шар, вращающаяся плоскость, наклон, неголономная система

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-30012).

Для цитирования: Микишанина Е. А. Управление качением динамически симметричного шара по наклонной вращающейся плоскости // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 402–414. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-402-414>, EDN: HAUNCU

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Control of the rolling of a dynamically symmetrical sphere on an inclined rotating plane

E. A. Mikishanina

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, 8 Gubkina St., Moscow 119991, Russia

I. N. Ulianov Chuvash State University, 15 Moskovskiy Ave., Cheboksary 428015, Russia

Evgeniya A. Mikishanina, evaeva_84@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4408-1888>, AuthorID: 733691

Abstract. The work investigates the rolling dynamics of a dynamically symmetrical heavy sphere (or a heavy spherical shell) along an inclined rough plane (platform) rotating with constant or periodic angular velocity around an axis, which is perpendicular to the plane and passing through some fixed point of this plane. Nonholonomic and holonomic constraints are imposed at the point of contact of the sphere with the reference plane. The equations of motion of the sphere are constructed. In the case of the constant angular velocity of the plane at any slope and in the case of the periodic angular velocity of the plane located horizontally the boundedness of the velocities of the geometric center of the sphere is proved. Moreover, in the case of the constant angular velocity of the plane, solutions are found analytically. Based on numerical integration, it is shown that for the periodic angular velocity of the plane and for the nonzero slope the square of the velocity vector of the geometric center of the sphere increases indefinitely. Two controls for the slope of the plane proportional to the projections of the velocity vector of the sphere on the coordinate axes lying in the reference plane are introduced. In the case of the constant angular velocity of the plane, a qualitative analysis of the equations of motion has been carried out, the control parameters at which the square of the velocity vector of the geometric center of the sphere will be bounded and at which it will be unbounded have been analytically found. The results of this control are presented for the case of periodic angular velocity of the plane. It is shown that by controlling the slope of the plane, it is possible to achieve the boundedness of the square of the velocity vector of the geometric center of the sphere. The obtained results are illustrated, the trajectories of the contact point and graphs of the desired mechanical parameters are constructed.

Keywords: dynamics, control, sphere, rotating plane, slope, nonholonomic system

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-71-30012).

For citation: Mikishanina E. A. Control of the rolling of a dynamically symmetrical sphere on an inclined rotating plane. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 402–414 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-402-414>, EDN: HAUNCU This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Модель качения шара Чаплыгина по горизонтальной плоскости — одна из наиболее изученных неголономных моделей [1–4]. У истоков стоит исследование С. А. Чаплыгина [1]. В современном исследовании [3] автором проведено наиболее полное изучение динамики качения динамически несимметричного шара. Также в современной научной литературе можно встретить различные вариации классической модели шара Чаплыгина, например [5–7]. В [1] Чаплыгиным было показано, что большинство траекторий точки контакта динамически несимметричного шара на горизонтальной плоскости являются неограниченными, а в случае дополнительного неголономного ограничения, наложенного на качение шара в [5], делающим невозможным вращение шара в некотором направлении, большинство траекторий являются ограниченными, т. е. расположены на участке опорной плоскости конечной площади. В [7] исследуется так называемая модель «резинового качения», т. е. модель качения без

проскальзывания и верчения. В работах [8, 9] изучалась динамика динамически несимметричного уравновешенного шара на наклонной плоскости в поле силы тяжести. А в работе [10] исследуется качение шара на вращающейся плоскости.

Укажем ряд работ, посвященных вопросу управления шаром на горизонтальной плоскости. В работе [11] исследуется управление при помощи трех гиристов движением динамически несимметричного уравновешенного шара на плоскости, в [12] — также оптимальное управление шаром при помощи трех гиристов, только уравнения оптимальных траекторий сводятся к принципам вакономной механики [13].

Настоящая работа посвящена управлению качением уравновешенного динамически симметричного шара по наклонной вращающейся с постоянной или периодической угловой скоростью плоскости (платформе) посредством регулирования ее угла наклона. Достаточно вспомнить детскую игру, когда ребенок пытается управлять качением шарика от пинг-понга на какой-нибудь дощечке или ракетке, изменяя ее угол наклона. Рассматриваются два вида управления наклоном плоскости (платформы) пропорционально проекциям вектора скорости центра шара на координатные оси. Считаем, что угол наклона плоскости достаточно мал (этого можно добиться за счет выбора числового параметра в управлении), и качение шара происходит без отрыва от нее. В случае постоянной скорости вращения платформы на основе качественного анализа дифференциальных уравнений движения находятся параметры управления, при которых скорость геометрического центра шара ограничена и при которых неограничена. В случае неограниченного возрастания квадрата вектора скорости геометрического центра шара будем считать, что в системе присутствует ускорение. Показана эффективность данного управления для стабилизации движения в случае периодической угловой скорости.

1. Математическая модель

Рассмотрим неподвижную плоскость Π , находящуюся под некоторым заданным углом δ к горизонту, $\delta \in [0, \pi/2)$. Введем неподвижную систему координат на этой плоскости с центром в некоторой фиксированной точке O . Ось Oz с координатным вектором $\gamma = (0, 0, 1)^T$ направим перпендикулярно плоскости, ось Ox — вдоль наибольшего наклона плоскости, ось Oy — параллельно линии горизонта. Тяжелый динамически симметричный шар (или тяжелая сферическая оболочка) массой m и радиусом R катится по шероховатой платформе, которая

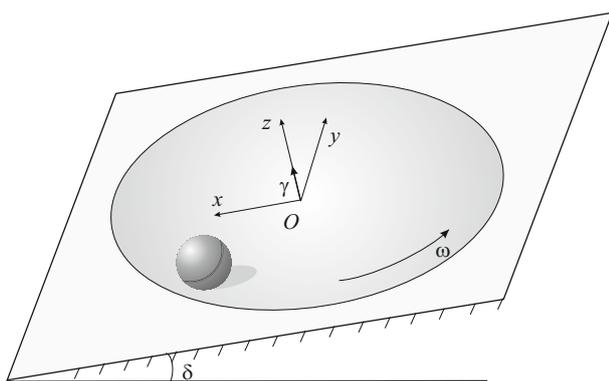


Рис. 1. Механическая конструкция
Fig. 1. Mechanical design

лежит в плоскости Oxy и вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью ω (рис. 1). Угловая скорость в общем случае является заданной функцией времени $\omega = \omega(t)$.

Введем обозначения и будем работать в неподвижной системе координат $Oxyz$:

- $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ — радиус-вектор геометрического центра шара;
- $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}} = (V_x, V_y, V_z)^T$ — вектор скорости геометрического центра шара;
- $\mathbf{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T$ — вектор угловой скорости шара;
- $\mathbf{I} = I\mathbf{E}$ — центральный тензор инерции шара, \mathbf{E} — единичная матрица третьего порядка.

Кинематические условия качения без проскальзывания шара принимают вид

$$\mathbf{V} = R\mathbf{\Omega} \times \gamma - \omega \mathbf{r} \times \gamma. \tag{1}$$

Эти уравнения являются комбинацией голономных и неголономных ограничений.



Для шара с кинетической энергией $T = \frac{1}{2}m\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}I\boldsymbol{\Omega}^2$ уравнения движения в общем виде с неопределенными множителями принимают вид [14]

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{V}} &= \lambda + m\mathbf{g}, \\ I\dot{\boldsymbol{\Omega}} &= R\lambda \times \boldsymbol{\gamma}, \end{aligned}$$

где λ – вектор реакций связей (1), $\mathbf{g} = (g \sin \delta, 0, -g \cos \delta)$, g – ускорение свободного падения. Исключая вектор реакций связей, получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{V}, \\ \dot{\mathbf{V}} &= -\frac{I}{J}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}) \times \boldsymbol{\gamma} + \frac{mR^2}{J}\boldsymbol{\gamma} \times (\mathbf{g} \times \boldsymbol{\gamma}), \end{aligned} \quad (2)$$

где $J = I + mR^2$. Система (2) автономна при $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$, неавтономна при $\boldsymbol{\omega} \neq \text{const}$ и обладает четырьмя первыми интегралами:

$$\begin{aligned} V_z &= 0, \quad z = R, \\ V_x + \frac{I}{J}\omega y - t\frac{mR^2}{J}g \sin \delta &= H_1, \quad V_y - \frac{I}{J}\omega x = H_2, \end{aligned}$$

где $H_1 = V_{x,0} + \frac{I}{J}\omega_0 y_0$, $H_2 = V_{y,0} - \frac{I}{J}\omega_0 x_0$.

Замечание. Здесь и далее индексом 0 будем обозначать начальное значение функции или вектора, например, $f(0) = f_0$.

Таким образом, на фиксированных уровнях указанных интегралов решение сводится к интегрированию двух уравнений:

$$\dot{x} = -\frac{I}{J}\omega y + t\frac{mR^2}{J}g \sin \delta + H_1, \quad \dot{y} = \frac{I}{J}\omega x + H_2. \quad (3)$$

2. Динамика системы

Постоянная скорость вращения платформы. Пусть $\boldsymbol{\omega} = \text{const} \neq 0$. Траектория точки контакта шара на плоскости Oxy находится аналитически:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(g \sin \delta mR^2 - I\omega V_{y,0})J}{(I\omega)^2} \left(1 - \cos \frac{I\omega t}{J}\right) + \frac{JV_{x,0}}{I\omega} \sin \frac{I\omega t}{J} + x_0, \\ y(t) &= -\frac{(g \sin \delta mR^2 - I\omega V_{y,0})J}{(I\omega)^2} \sin \frac{I\omega t}{J} + \frac{JV_{x,0}}{I\omega} \left(1 - \cos \frac{I\omega t}{J}\right) + \frac{g \sin \delta mR^2}{I\omega} t + y_0. \end{aligned}$$

На горизонтальной плоскости Π ($\delta = 0$) при нулевой начальной скорости геометрического центра шара $\mathbf{V}_0^2 = 0$ траекторией точки контакта на неподвижной плоскости Oxy будет точка, иначе при $\mathbf{V}_0^2 \neq 0$ качение шара в неподвижной системе координат $Oxyz$ будет происходить равномерно по окружности с центром в точке $\left(-\frac{JV_{y,0}}{I\omega} + x_0, \frac{JV_{x,0}}{I\omega} + y_0\right)$.

На наклонной плоскости Π ($\delta \neq 0$) траектория точки контакта представляет собой трохоиду, описываемую при качении окружности параллельно оси Oy . Компоненты вектора скорости в случае $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$ являются периодическими функциями времени и ограничены.

Периодическая скорость вращения платформы. Иной раз обеспечить постоянную скорость вращения платформы представляется сложным. Поэтому исследуем динамику системы, когда скорость вращения платформы является переменной.

Пусть платформа вращается вокруг оси Oz с периодической угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \sin^2 t$.

Тогда в случае $\delta = 0$ на нулевом уровне интегралов $H_1 = H_2 = 0$ (движение из состояния покоя $\mathbf{V}_0^2 = 0$) движение будет происходить неравномерно по окружности с центром в точке $(0, 0)$, так как $(x^2 + y^2) \dot{} = 0$, причем сама точка $(0, 0)$ является неподвижной точкой типа центр системы (3).

На рис. 2 представлены траектория точки контакта на плоскости Oxy и проекция типовой фазовой кривой системы (2) на плоскость (V_x, V_y) для случая $H_1^2 + H_2^2 \neq 0$, что эквивалентно $\mathbf{V}_0^2 \neq 0$.

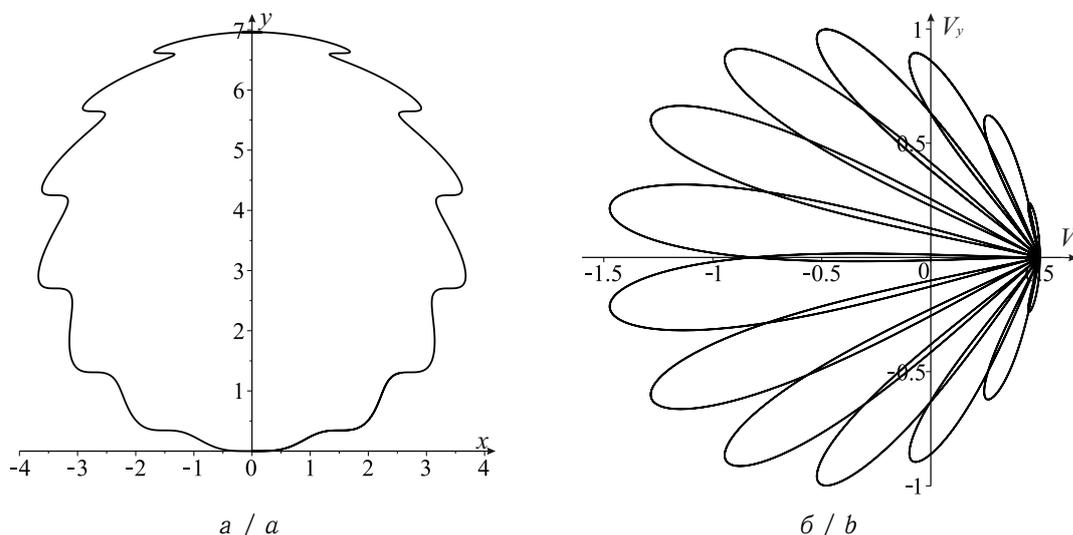


Рис. 2. Типовая траектория точки контакта (а) и проекция фазовой кривой на плоскость (V_x, V_y) (б) при начальных условиях $V_{x,0} = 0.5$ м/с, $V_{y,0} = 0$ м/с, $x_0 = 0$ м, $y_0 = 0$ м

Fig. 2. The typical trajectory of the contact point (a) and the projection of the phase curve on the plane (V_x, V_y) (b) at the initial conditions $V_{x,0} = 0.5$ m/s, $V_{y,0} = 0$ m/s, $x_0 = 0$ m, $y_0 = 0$ m

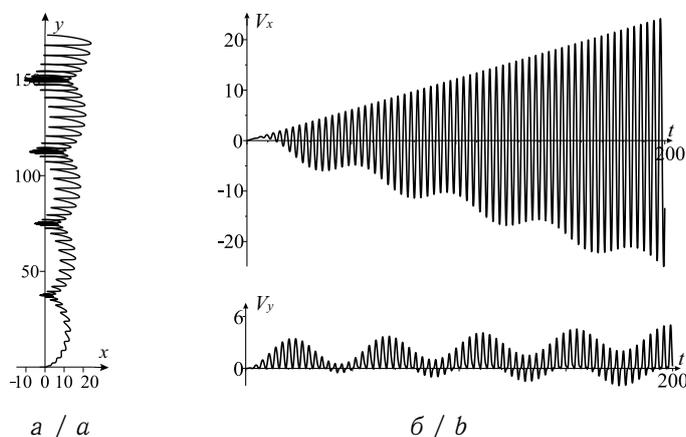


Рис. 3. Типовая траектория точки контакта (а) и графики скоростей V_x, V_y (б) при начальных условиях $V_{x,0} = 0$ м/с, $V_{y,0} = 0$ м/с, $x_0 = 0$ м, $y_0 = 0$ м и наклоне плоскости $\delta = \pi/180$

Fig. 3. The typical trajectory of the contact point (a) and graphs of V_x, V_y (b) at the initial conditions $V_{x,0} = 0$ m/s, $V_{y,0} = 0$ m/s, $x_0 = 0$ m, $y_0 = 0$ m and the slope of the plane $\delta = \pi/180$

Замечание. Здесь и далее в численных экспериментах считаем, что для полнотелого шара $I/J = 2/7$, $mR^2/J = 5/7$.

Компоненты вектора скорости являются периодическими функциями времени, следовательно, ограничены.

В случае $\delta \neq 0$ на рис. 3 построены типовая траектория точки контакта на плоскости Oxy и графики скоростей V_x, V_y .

Квадрат вектора скорости геометрического центра шара неограниченно возрастает, т. е. имеет место ускорение, а также можно наблюдать вековой уход траектории точки контакта.

Рассмотрим возможность управления углом наклона опорной плоскости с целью стабилизации движения шара или, наоборот, с целью разгона.



3. Управление наклоном вращающейся с постоянной угловой скоростью платформы

Пусть теперь плоскость Π зафиксирована вдоль оси Oy цилиндрическим шарниром на вертикальной опоре. И пусть некоторое устройство автоматически регулирует угол наклона δ плоскости Π , причем $\delta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Ось Oz направлена перпендикулярно плоскости Π , ось Ox проведена в плоскости Π перпендикулярно оси Oy . Для удобства будем считать, что угловая скорость платформы, вращающейся в плоскости Oxy , постоянна и $0 < \omega < g$. Для $-g < \omega < 0$ рассуждения аналогичны.

Работаем по-прежнему в системе координат $Oxyz$. Рассмотрим два способа управления углом наклона платформы:

- пропорционально проекции вектора скорости на ось Ox :

$$\sin \delta = \frac{aV_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + 1}}, \quad a = \text{const} \in [-1, 1], \quad (4)$$

причем при $a > 0$ проекция вектора скорости на ось Ox всегда направлена по ходу спуска, при $a < 0$ – в направлении подъема, при $a = 0$ плоскость всегда горизонтальна (этот случай уже был рассмотрен выше);

- пропорционально проекции вектора скорости на ось Oy :

$$\sin \delta = \frac{aV_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + 1}}, \quad a = \text{const} \in [-1, 1]. \quad (5)$$

Замечание. Слагаемое «1» в знаменателях выражений (4) и (5) добавлено исключительно для того, чтобы не допустить обращения знаменателя в нуль, например, при движении системы из состояния покоя.

Таким образом, управление шаром на наклонной вращающейся плоскости происходит за счет меняющейся вследствие изменения наклона плоскости силы тяжести, действующей на шар.

3.1. Управление углом наклона платформы пропорционально проекции вектора скорости на ось Ox

Система уравнений движения (2) в случае переменного угла наклона платформы, для которого имеет место (4), преобразуется к виду [14]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V_x, \quad \dot{y} = V_y, \\ \dot{V}_x &= -\frac{I}{J}\omega V_y + \frac{mR^2g}{J} \frac{aV_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + 1}}, \\ \dot{V}_y &= \frac{I}{J}\omega V_x \end{aligned} \quad (6)$$

и обладает первым интегралом

$$V_y = \frac{I}{J}\omega x + H.$$

Два последних уравнения системы (6) представляют замкнутую нелинейную автономную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= -\frac{I}{J}\omega V_y + \frac{mR^2g}{J} \frac{aV_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + 1}}, \\ \dot{V}_y &= \frac{I}{J}\omega V_x, \end{aligned} \quad (7)$$

которая задает двумерный поток в фазовом пространстве

$$\mathcal{M}^2 = \{(V_x, V_y) | V_x, V_y \in \mathbb{R}\}$$

и обладает неподвижной точкой $V_x = 0, V_y = 0$. Установим характер этой неподвижной точки.

Матрица линеаризованной системы в окрестности неподвижной точки имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2ga}{J} & -\frac{I\omega}{J} \\ \frac{I\omega}{J} & 0 \end{bmatrix},$$

ее собственные значения являются корнями квадратного уравнения

$$k^2 - \frac{mR^2ga}{J}k + \left(\frac{I\omega}{J}\right)^2 = 0.$$

В зависимости от параметра a неподвижная точка $V_x = 0, V_y = 0$ является:

- устойчивым узлом при $-1 \leq a \leq -\frac{2I\omega}{mR^2g}$;
- устойчивым фокусом при $-\frac{2I\omega}{mR^2g} < a < 0$;
- центром при $a = 0$ (случай горизонтально расположенной плоскости);
- неустойчивым фокусом при $0 < a < \frac{2I\omega}{mR^2g}$;
- неустойчивым узлом при $\frac{2I\omega}{mR^2g} \leq a \leq 1$.

Таким образом, поведение фазовых траекторий вблизи неподвижных точек очевидно. С другой стороны, из системы (7) следует

$$(V_x^2 + V_y^2)' = 2\frac{mR^2g}{J} \frac{aV_x^2}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + 1}}.$$

Откуда имеет место следующее

Предложение 1. При управлении (4) углом наклона вращающейся с постоянной угловой скоростью платформы квадрат вектора скорости геометрического центра шара:

- монотонно возрастает $\mathbf{V}^2 \rightarrow +\infty$ при $a > 0$ и $\mathbf{V}_0^2 \neq 0$ - имеет место ускорение;
- монотонно убывает $\mathbf{V}^2 \rightarrow 0$ при $a < 0$ и $\mathbf{V}_0^2 \neq 0$, значит, $x \rightarrow \tilde{x}, y \rightarrow \tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{y}$ - некоторые постоянные;
- остается постоянным $\mathbf{V}^2 = const$ при $a = 0$ и $\mathbf{V}_0^2 \neq 0$;
- тождественно равен нулю при $\mathbf{V}_0^2 = 0$.

Таким образом, управляя углом наклона платформы с параметром $a \leq 0$, можно стабилизировать движение шара.

На рис. 4 приведены траектории точки контакта, графики функции \mathbf{V}^2 и угла

$$\delta = \arcsin \left(\frac{aV_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + 1}} \right) \tag{8}$$

для $\omega = 2$ рад/с, начальных условий $V_{x,0} = 0$ м/с, $V_{y,0} = 2$ м/с, $x_0 = 1$ м, $y_0 = 0$ м и различных значений параметра a :

$$a = -\frac{4I\omega}{mR^2g}, \quad a = -\frac{0.5I\omega}{mR^2g}, \quad a = \frac{0.5I\omega}{mR^2g}, \quad a = \frac{4I\omega}{mR^2g}.$$

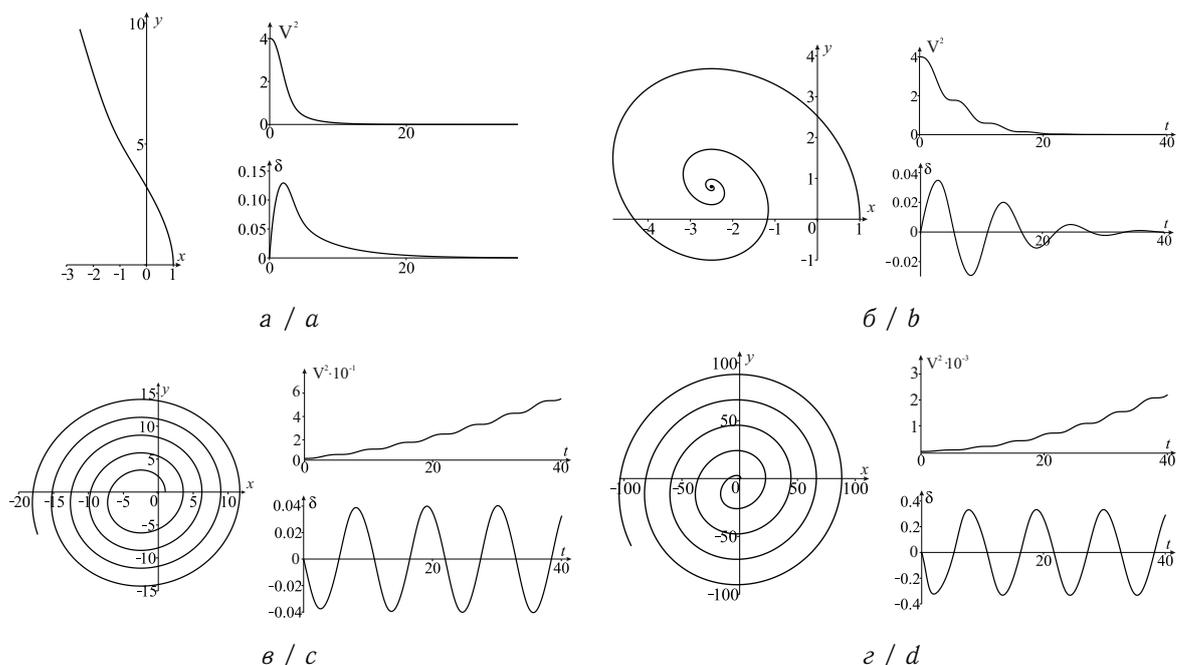


Рис. 4. Типовые траектории точки контакта, графики квадрата вектора скорости \mathbf{V}^2 и угла наклона δ для угловой скорости платформы $\omega = 2$ рад/с, начальных условий $V_{x,0} = 0$ м/с, $V_{y,0} = 2$ м/с, $x_0 = 1$ м, $y_0 = 0$ м и значений параметра a : $a - a = \frac{-4I\omega}{mR^2g}$; $b - a = -\frac{0.5I\omega}{mR^2g}$; $c - a = \frac{0.5I\omega}{mR^2g}$; $d - a = \frac{4I\omega}{mR^2g}$

Fig. 4. The typical trajectories of the contact point, graphs of the square of the velocity vector \mathbf{V}^2 and of the slope δ at the angular velocity of the platform $\omega = 2$ rad/s, the initial conditions $V_{x,0} = 0$ m/s, $V_{y,0} = 2$ m/s, $x_0 = 1$ m, $y_0 = 0$ m and the values: $a - a = \frac{-4I\omega}{mR^2g}$; $b - a = -\frac{0.5I\omega}{mR^2g}$; $c - a = \frac{0.5I\omega}{mR^2g}$; $d - a = \frac{4I\omega}{mR^2g}$

3.2. Управление углом наклона платформы пропорционально проекции вектора скорости на ось Oy

Система уравнений движения принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V_x, \quad \dot{y} = V_y, \\ \dot{V}_x &= -\frac{I}{J}\omega V_y + \frac{mR^2g}{J} \frac{aV_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + 1}}, \\ \dot{V}_y &= \frac{I}{J}\omega V_x \end{aligned} \tag{9}$$

и обладает первыми интегралами

$$\begin{aligned} V_y &= \frac{I}{J}\omega x + H, \\ 2I\omega (V_x^2 + V_y^2 + 1)^{3/2} - 3mR^2gaV_y^2 &= E. \end{aligned} \tag{10}$$

Два последних уравнения системы (9) представляют замкнутую нелинейную автономную систему уравнений, задающую двумерный поток в фазовом пространстве

$$\mathcal{M}^2 = \{(V_x, V_y) | V_x, V_y \in \mathbb{R}\}$$

и обладающую неподвижной точкой $V_x = 0, V_y = 0$. Установим характер этой неподвижной точки.

Матрица линеаризованной системы в окрестности неподвижной точки имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{mR^2ga}{J} - \frac{I\omega}{J} \\ \frac{I\omega}{J} & 0 \end{bmatrix},$$

собственные значения которой являются корнями квадратного уравнения

$$k^2 - \frac{I\omega}{J} \left(\frac{mR^2ga}{J} - \frac{I\omega}{J} \right) = 0.$$

В зависимости от параметра a неподвижная точка $V_x = 0, V_y = 0$ является:

- седлом при $\frac{I\omega}{mR^2g} < a \leq 1$;
- центром при $-1 \leq a < \frac{I\omega}{mR^2g}$;
- характеризует вырожденное состояние равновесия при $a = \frac{I\omega}{mR^2g}$.

Очевидно, что из второго интеграла (10) следует ограниченность квадрата скорости \mathbf{V}^2 . Иначе, если при $t \rightarrow +\infty \mathbf{V}^2 \rightarrow +\infty$, то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2I\omega (V_x^2 + V_y^2 + 1)^{3/2} - 3mR^2gaV_y^2}{(V_x^2 + V_y^2)^{3/2}} = 2I\omega \neq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E}{(V_x^2 + V_y^2)^{3/2}} = 0,$$

и второй интеграл не сохраняется.

Предложение 2. При управлении (5) углом наклона вращающейся с постоянной угловой скоростью платформы квадрат вектора скорости геометрического центра шара является ограниченной функцией при любом значении параметра a .

На рис. 5 приведены траектории точки контакта, графики квадрата вектора скорости \mathbf{V}^2 и угла

$$\delta = \arcsin \left(\frac{aV_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + 1}} \right) \tag{11}$$

для угловой скорости вращения платформы $\omega = 2$ рад/с, начальных условий $V_{x,0} = 2$ м/с, $V_{y,0} = 2$ м/с, $x_0 = 0$ м, $y_0 = -1$ м и значений параметра a :

$$a = -\frac{4I\omega}{mR^2g}, \quad a = \frac{4I\omega}{mR^2g}.$$

4. Управление углом наклона платформы, вращающейся с периодической угловой скоростью

Применим управления (4) и (5) для случая периодической скорости вращения платформы

$$\omega(t) = \sin^2 t.$$

Ранее было показано, что в случае постоянного угла наклона платформы $\delta \neq 0$ в системе присутствует ускорение. Управляя наклоном платформы, можно стабилизировать движение шара, в результате чего квадрат вектора скорости будет ограниченной функцией.

На основе численного интегрирования на рис. 6 построены траектория движения точки контакта, графики квадрата вектора скорости геометрического центра и угла наклона (8) для

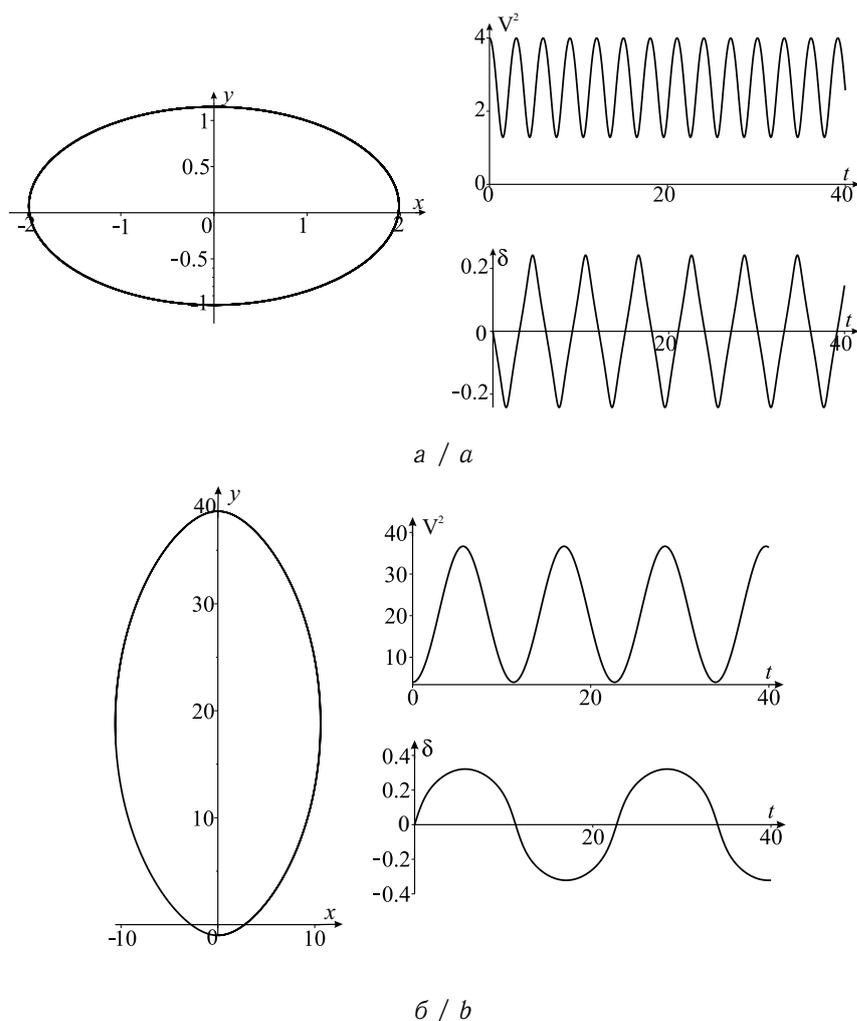


Рис. 5. Типовые траектории точки контакта, графики квадрата вектора скорости \mathbf{V}^2 и угла наклона δ для угловой скорости платформы $\omega = 2$ рад/с, начальных условий $V_{x,0} = 2$ м/с, $V_{y,0} = 2$ м/с, $x_0 = 0$ м, $y_0 = -1$ м и значений параметра a :

$$a - a = -\frac{4I\omega}{mR^2g}; \quad б - a = \frac{4I\omega}{mR^2g}$$

Fig. 5. The typical trajectories of the contact point, graphs of the square of the velocity vector \mathbf{V}^2 and of the slope δ at the angular velocity of the platform $\omega = 2$ rad/s, the initial conditions $V_{x,0} = 2$ m/s, $V_{y,0} = 2$ m/s, $x_0 = 0$ m, $y_0 = -1$ m and the values of a :

$$a - a = -\frac{4I\omega}{mR^2g}; \quad б - a = \frac{4I\omega}{mR^2g}$$

начальных условий $V_{x,0} = 1$ м/с, $V_{y,0} = -1$ м/с, $x_0 = 0$ м, $y_0 = 0$ м при управлении (4) с параметром $a = \frac{-4I}{mR^2g}$.

На основе численного интегрирования на рис. 7 построены траектория движения точки контакта, графики квадрата вектора скорости геометрического центра и угла наклона (11) для начальных условий $V_{x,0} = 0$ м/с, $V_{y,0} = -1$ м/с, $x_0 = 0$ м, $y_0 = 0$ м при управлении (5) с параметром $a = \frac{-4I}{mR^2g}$.

Стоит отметить, что в случае управления углом наклона δ отсутствует вековой уход траектории точки контакта, который присутствовал при постоянном наклоне.

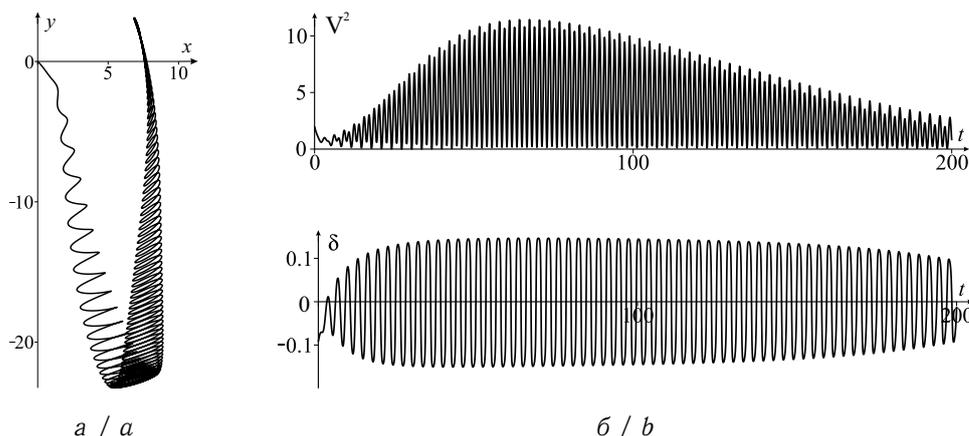


Рис. 6. Траектория точки контакта (а), графики квадрата вектора скорости \mathbf{V}^2 и угла наклона δ (б) для начальных условий $V_{x,0} = 1$ м/с, $V_{y,0} = -1$ м/с, $x_0 = 0$ м, $y_0 = 0$ м в случае периодической угловой скорости платформы $\omega = \sin^2 t$ при управлении (4) с параметром $a = \frac{-4I}{mR^2g}$

Fig. 6. The trajectory of the contact point (a), graphs of the square of the velocity \mathbf{V}^2 and the slope δ (b) at the initial conditions $V_{x,0} = 1$ m/s, $V_{y,0} = -1$ m/s, $x_0 = 0$ m, $y_0 = 0$ m, at the periodic angular velocity of the platform $\omega = \sin^2 t$ for control (4) with the parameter $a = \frac{-4I}{mR^2g}$

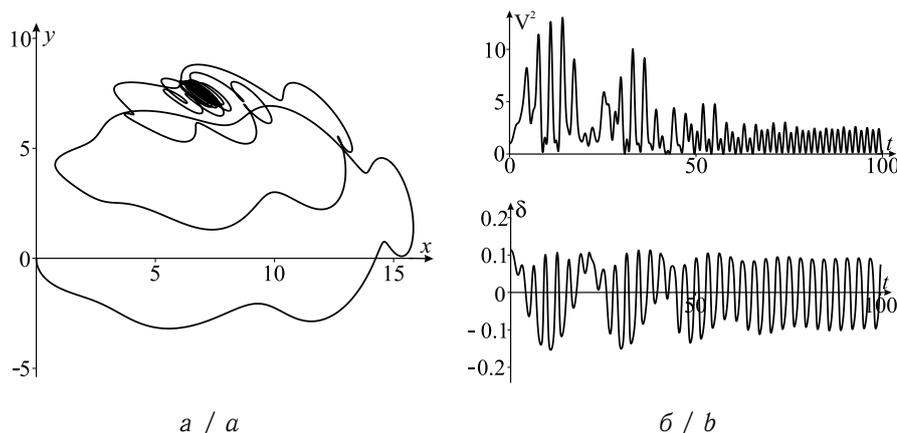


Рис. 7. Траектория точки контакта (а), графики квадрата скорости \mathbf{V}^2 и угла наклона δ (б) для начальных условий $V_{x,0} = 0$ м/с, $V_{y,0} = -1$ м/с, $x_0 = 0$ м, $y_0 = 0$ м в случае периодической угловой скорости платформы $\omega = \sin^2 t$ при управлении (5) с параметром $a = \frac{-4I}{mR^2g}$

Fig. 7. The trajectory of the contact point (a), graphs of the square of the velocity \mathbf{V}^2 and the slope δ (b) at the initial conditions $V_{x,0} = 0$ m/s, $V_{y,0} = -1$ m/s, $x_0 = 0$ m, $y_0 = 0$ m, at the periodic angular velocity of the platform $\omega = \sin^2 t$ for control (5) with the parameter $a = \frac{-4I}{mR^2g}$

Заключение

В работе было исследовано качение динамически симметричного шара по наклонной вращающейся шероховатой плоскости (платформе). В случае постоянной скорости вращения платформы и постоянном наклоне скорость геометрического центра шара является ограниченной функцией. Предложены два способа управления углом наклона платформы,



найлены значения числового параметра управления, при которых квадрат вектора скорости геометрического центра может быть постоянной функцией, ограниченной и неограниченной.

Показана эффективность введенного управления на примере качения шара по наклонной платформе, вращающейся с периодической угловой скоростью. В случае постоянного угла наклона, отличного от нуля, показано наличие в системе ускорения и векового ухода траектории точки контакта. Выбором подходящего числового параметра в управлении углом наклона платформы можно добиться качения шара с ограниченной скоростью. В этом случае и траектория точки контакта ограничена, т. е. вековой уход траектории отсутствует.

Конфликт интересов. Автор заявляет, что у нее нет конфликта интересов.

Список литературы

1. Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Математический сборник. 1903. Т. 24, № 1. С. 139–168.
2. Мощук Н. К. О движении шара Чаплыгина на горизонтальной плоскости // Прикладная математика и механика. 1983. Т. 47, вып. 6. С. 916–921.
3. Kilin A. A. The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2002. Vol. 6, iss. 3. P. 291–306. <https://doi.org/10.1070/RD2001v006n03ABEH000178>, EDN: LGXBPX
4. Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Проблема дрейфа и возвращаемости при качении шара Чаплыгина // *Нелинейная динамика*. 2013. Т. 9, № 4. С. 721–754. EDN: SAHBBR
5. Mikishanina E. A. Dynamics of the Chaplygin sphere with additional constraint // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2023. Vol. 117. Art. 106920. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106920>
6. Borisov A. V., Mikishanina E. A. Dynamics of the Chaplygin ball with variable parameters // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 16, iss. 3. P. 453–462. <https://doi.org/10.20537/nd200304>, EDN: DTQQDK
7. Борисов А. В., Мамаев И. С., Бизяев И. А. Иерархия динамики при качении твердого тела без проскальзывания и верчения по плоскости и сфере // *Нелинейная динамика*. 2013. Т. 9, № 2. С. 141–202. EDN: SAHAOF
8. Борисов А. В., Мамаев И. С. О движении шара Чаплыгина по наклонной плоскости // *Доклады Академии наук*. 2006. Т. 406, № 5. С. 620–623. EDN: HSYLNV
9. Харламова Е. И. Качение шара по наклонной плоскости // *Прикладная математика и механика*. 1958. Т. 22, вып. 4. С. 504–509.
10. Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. Dynamics of the Chaplygin ball on a rotating plane // *Russian Journal of Mathematical Physics*. 2018. Vol. 25. P. 423–433. <https://doi.org/10.1134/S1061920818040027>, EDN: KKREPJ
11. Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов // *Нелинейная динамика*. 2012. Т. 8, № 2. С. 289–307. EDN: OYPUBZ
12. Bolotin S. The problem of optimal control of a Chaplygin ball by internal rotors // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2012. Vol. 17, iss. 6. P. 559–570. <https://doi.org/10.1134/S156035471206007X>, EDN: RGBYKL
13. Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Динамические системы с неинтегрируемыми связями: вакономная механика, субриманова геометрия и неголономная механика // *Успехи математических наук*. 2017. Т. 72, вып. 5 (437). С. 3–62. <https://doi.org/10.4213/rm9783>, EDN: ZRSFRR
14. Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А., Бизяев И. А. Избранные задачи неголономной механики. Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2016. 883 с. EDN: YSHXAH

References

1. Chaplygin S. A. On a ball's rolling on a horizontal plane. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2002, vol. 7, iss. 2, pp. 131–148. <https://doi.org/10.1070/RD2002v007n02ABEH000200>
2. Moshchuk N. K. On the motion of Chaplygin ball on a horizontal plane. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1983, vol. 47, iss. 6, pp. 916–921 (in Russian).
3. Kilin A. A. The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2002, vol. 6, iss. 3, pp. 291–306. <https://doi.org/10.1070/RD2001v006n03ABEH000178>, EDN: LGXBPX
4. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. The problem of drift and recurrence for the rolling



- Chaplygin ball. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2013, vol. 18, iss. 6, pp. 832–859. <https://doi.org/10.1134/S1560354713060166>, EDN: SLIUOD
5. Mikishanina E. A. Dynamics of the Chaplygin sphere with additional constraint. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2023, vol. 117, art. 106920. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106920>
 6. Borisov A. V., Mikishanina E. A. Dynamics of the Chaplygin ball with variable parameters. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 16, iss. 3, pp. 453–462. <https://doi.org/10.20537/nd200304>, EDN: DTQQDK
 7. Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2013, vol. 18, iss. 3, pp. 277–328. <https://doi.org/10.1134/S1560354713030064>, EDN: RFHCDF
 8. Borisov A. V., Mamaev I. S. Motion of Chaplygin ball on an inclined plan. *Doklady Physics*, 2006, vol. 51, iss. 2, pp. 73–76. <https://doi.org/10.1134/S1028335806020078>, EDN: KGAVCU
 9. Kharlamova E. I. Rolling of the ball on an inclined plane. *Prikladnaya matematika i mekhanika*[Applied Mathematics and Mechanics], 1958, vol. 22, iss. 4, pp. 504–509 (in Russian).
 10. Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. Dynamics of the Chaplygin ball on a rotating plane. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2018, vol. 25, pp. 423–433. <https://doi.org/10.1134/S1061920818040027>, EDN: KKREPJ
 11. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2012, vol. 17, iss. 3–4, pp. 258–272. <https://doi.org/10.1134/S1560354712030045>, EDN: RFZXPJ
 12. Bolotin S. The problem of optimal control of a Chaplygin ball by internal rotors. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2012, vol. 17, iss. 6, pp. 559–570. <https://doi.org/10.1134/S156035471206007X>, EDN: RGBYKL
 13. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Dynamical systems with non-integrable constraints, vakonomic mechanics, sub-Riemannian geometry, and non-holonomic mechanics. *Russian Mathematical Surveys*, 2017, vol. 72, iss. 5, pp. 783–840. <https://doi.org/10.1070/RM9783>, EDN: QCNJWS
 14. Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A., Bizyaev I. A. *Izbrannye zadachi negolonomnoy mekhaniki* [Selected Problems of Nonholonomic Mechanics]. Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2016. 883 p. (in Russian) EDN: YSHXAH

Поступила в редакцию / Received 18.05.2023

Принята к публикации / Accepted 18.07.2023

Опубликована / Published 30.08.2024