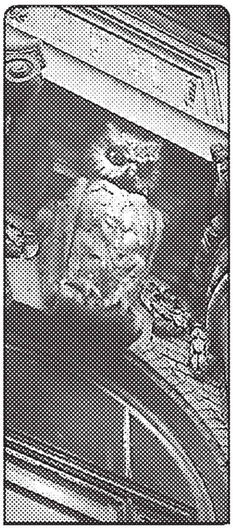
МАТЕМАТИКА



Научный отдел

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 476–487
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 476–487
https://mmi.sgu.ru
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-476-487
EDN: GMVNDF

Научная статья
УДК 519.644.5

Полуаналитическая аппроксимация нормальной производной теплового потенциала простого слоя вблизи границы двумерной области

Д. Ю. Иванов

Российский университет транспорта, Россия, 127994, г. Москва, ГСП-4, ул. Образцова, д. 9

Иванов Дмитрий Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, ivanovdyu@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-4551-469X, AuthorID: 9829

Аннотация. Предлагается полуаналитическая аппроксимация нормальной производной теплового потенциала простого слоя вблизи границы двумерной области с гладкостью C^5. Вычисление интегралов, возникающих после кусочно-квадратичной интерполяции функции плотности по переменной длины дуги s, осуществляется с помощью аналитического интегрирования по переменной $\rho = \sqrt{r^2 - d^2}$, где r и d — расстояния от точки наблюдения до точки интегрирования и до границы области соответственно. Для этого подынтегральная функция представляется в виде суммы двух произведений, каждое из которых состоит из двух множителей, а именно: гладкой в приграничной области функции, содержащей якобиан перехода от переменной интегрирования s к переменной ρ, и весовой функции, содержащей особенность при $r = 0$ и равномерно абсолютно интегрируемой в приграничной области. Гладкие функции аппроксимируются с помощью кусочно-квадратичной интерполяции по переменной ρ, и тогда аналитическое интегрирование становится возможно. Аналитическое интегрирование по ρ осуществляется на фиксированном по ширине участке границы, содержащем проекцию точки наблюдения, а на остальной части границы интегралы по s вычисляются с помощью формул Гаусса. Интегрирование по параметру C_0-полугруппы, образованной операторами сдвига по времени, также осуществляется аналитически. Для этого C_0-полугруппа аппроксимируется с помощью кусочно-квадратичной интерполяции по ее параметру. Доказано, что предлагаемые аппроксимации обладают устойчивой кубической сходимостью в банаховом пространстве непрерывных функций с равномерной нормой, причем такая сходимость равномерна в замкнутой приграничной области. Приведены результаты вычислительных экспериментов по нахождению нормальной производной решений второй начально-краевой задачи теплопроводности в единичном круге с нулевым начальным условием, подтверждающие равномерную кубическую сходимость предлагаемых аппроксимаций нормальной производной теплового потенциала простого слоя.

Ключевые слова: граничный элемент, потенциал, почти сингулярный интеграл, эффект пограничного слоя, равномерная сходимость

Для цитирования: *Иванов Д. Ю.* Полуаналитическая аппроксимация нормальной производной теплового потенциала простого слоя вблизи границы двумерной области // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 476–487. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-476-487, EDN: GMVNDF

Article

Semi-analytical approximation of the normal derivative of the heat simple layer potential near the boundary of a two-dimensional domain

D. Yu. Ivanov

Russian University of Transport, 9 Obraztsova St., GSP-4, Moscow 127994, Russia

Dmitrii Yu. Ivanov, ivanovdyu@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-4551-469X, AuthorID: 9829

Abstract. A semi-analytical approximation of the normal derivative of the simple layer heat potential near the boundary of a two-dimensional domain with C^5 smoothness is proposed. The calculation of the integrals that arise after piecewise quadratic interpolation of the density function with respect to the variable of arc length s, is carried out using analytical integration over the variable $\rho = \sqrt{r^2 - d^2}$, where r and d are the distances from the observation point to the integration point and to the boundary of the domain, respectively. To do this, the integrand is represented as the sum of two products, each of which consists of two factors, namely: a function smooth in a near-boundary domain containing the Jacobian of the transition from the integration variable s to the variable ρ, and a weight function containing a singularity at $r = 0$ and uniformly absolutely integrable in the near-boundary region. Smooth functions are approximated with the help of the piecewise quadratic interpolation over the variable ρ, and then analytical integration becomes possible. Analytical integration over ρ is carried out on a section of the boundary fixed in width, containing the projection of the observation point, and on the rest of the boundary, the integrals over s are calculated using the Gauss formulas. Integration over the parameter of C_0-semigroup formed by time shift operators is also carried out analytically. To do this, the C_0-semigroup is approximated using the piecewise quadratic interpolation over its parameter. It is proved that the proposed approximations have stable cubic convergence in the Banach space of continuous functions with the uniform norm, and such convergence is uniform in the closed near-boundary region. The results of computational experiments on finding of the normal derivative of solutions of the second initial-boundary problem of heat conduction in a unit circle with a zero initial condition are presented, confirming the uniform cubic convergence of the proposed approximations of the normal derivative of the simple layer heat potential.

Keywords: boundary element, potential, near singular integral, boundary layer effect, uniform convergence

For citation: Ivanov D. Yu. Semi-analytical approximation of the normal derivative of the heat simple layer potential near the boundary of a two-dimensional domain. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 476–487 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-476-487, EDN: GMVNDF

Введение

В рамках метода граничных элементов для аппроксимации потенциалов простого и двойного слоя в двумерной области, а также их производных граница области разбивается на дуги, называемые граничными элементами (ГЭ), на каждой из которых осуществляется полиномиальная интерполяция функции плотности [1, п. 2.5]. Возникающие после этого интегралы не могут быть в общем случае вычислены аналитически. Традиционно для их вычисления используются простые квадратурные формулы Гаусса (ПКФГ) [1, п. 2.6]. Если точка наблюдения, в которой вычисляются потенциалы, находится достаточно далеко от границы области, то их вычисление с помощью ПКФГ происходит с удовлетворительной точностью. Если точка наблюдения приближается к границе, то точность вычисления потенциалов с помощью ПКФГ уменьшается. Это явление называется эффектом пограничного слоя. Действительно, при приближении точки наблюдения к узлу ПКФГ погрешность возрастает катастрофически благодаря сингулярности подынтегральной функции. Но погрешность возрастает и в тех случаях, когда точка наблюдения проходит между узлами ПКФГ. При вычислении потенциала двойного слоя (ПДС) и нормальной производной (НП) потенциала простого слоя (ППС) это явление можно объяснить тем, что точные функции имеют конечные разрывы на границе [2, пп. 95, 97], а аппроксимации на основе ПКФГ непрерывны во всех точках, отличных от узлов ПКФГ. Так как при достаточной гладкости границы аппроксимации ПДС и НП ППС сходятся во всех точках плоскости, то такая сходимость не может быть равномерной.

Для достижения удовлетворительной точности применяются, в частности, полуаналитические методы, использующие в той или иной степени аналитическое интегрирование по длине дуги. Для того чтобы аналитическое интегрирование стало возможным, в большинстве методов осуществляется линейная, параболическая или более высокого порядка аппроксимация ГЭ, координатных функций или функции расстояния, причем переход к более точной аппроксимации сопряжен, как правило, с усложнением интегралов. Линейная аппроксимация ГЭ считается неудовлетворительной для вычисления потенциалов вблизи границы [3, 4], поэтому некоторые полуаналитические методы, реализованные вначале для линейных ГЭ [5], были осуществлены затем для квадратичных ГЭ [6]. В связи с этим представляет интерес полуаналитический метод, впервые описанный в работах [3, 4]. Хотя в этих работах он использовался для квадратичных ГЭ, его можно применить для любой аналитически заданной достаточно гладкой границы двумерной области. Аппроксимация границы для осуществления метода не требуется, и сложность интегралов не зависит от вида границы, что позволяет использовать метод при высокоточной аппроксимации границы с помощью сплайнов. В основе метода лежит аналитическое интегрирование по переменной $\rho = \sqrt{r^2 - d^2}$, где r и d — расстояния от точки наблюдения до точки интегрирования и до границы области соответственно. Для того чтобы аналитическое интегрирование стало возможным, подынтегральная функция представляется в виде произведения двух функций: весовой, содержащей особенность при $r = 0$, и гладкой функции, содержащей якобиан перехода к новой переменной интегрирования ρ. Гладкая функция интерполируется с помощью полиномов по переменной ρ, и тогда аналитическое интегрирование становится возможным.

На основе такого подхода в работе [4] получены аппроксимации производных двумерных ППС для уравнения Лапласа. Но интегралы от весовых функций при этом не являются равномерно сходящимися вблизи границы области, что снижает скорость равномерной сходимости таких аппроксимаций (см. [4, формула (28b)]). В настоящей работе для аппроксимации НП двумерных тепловых ППС (ТППС) подынтегральная функция представляется в виде суммы двух произведений указанного вида, причем таким образом, что весовые функции в каждом из произведений равномерно абсолютно интегрируемы по переменной ρ вблизи границы области (см. [4, формула (1)]). Аналогичное представление в рамках данного метода использовалось для аппроксимации двумерных тепловых ПДС [7].

1. Предварительные замечания

Пусть Ω_+ — двумерная открытая ограниченная односвязная область с границей $\partial\Omega$. В декартовых координатах (x_1, x_2) зададим параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$: $x_1 = \tilde{x}_1(s)$, $x_2 = \tilde{x}_2(s)$. Параметр s по модулю равен длине дуги, откладываемой от некоторой фиксированной точки и заканчивающейся в точке $\tilde{x}(s) \equiv (\tilde{x}_1(s), \tilde{x}_2(s))$, и увеличивается, когда область Ω_+ при обходе границы $\partial\Omega$ остается слева. Функции $\tilde{x}_1(s)$, $\tilde{x}_2(s)$ ($s \in \mathbb{R}$), периодические с периодом $2S$ (S — половина длины $\partial\Omega$), осуществляют взаимно однозначное отображение множества $I_S \equiv [-S, S)$ на множество $\partial\Omega$. Условимся далее писать $\partial\Omega \in C^n$, если существуют непрерывные на замкнутом множестве $\overline{I_S}$ производные $\tilde{x}_i^{(l)}(s)$ ($l = \overline{0,n}$, $i = 1,2$), причем $\tilde{x}_i^{(l)}(-S) = \tilde{x}_i^{(l)}(S)$. Будем считать, что $\partial\Omega \in C^2$, если не оговорено особо.

Обозначим через $\vec{e}(s)$ единичный вектор, направленный по касательной к кривой $\partial\Omega$ в точке $\tilde{x}(s)$ в сторону увеличения параметра s, а через $\vec{n}(s)$ — единичную нормаль к кривой $\partial\Omega$, проходящую через точку $\tilde{x}(s)$ и направленную внутрь области Ω_+. Векторы $\vec{e}(s)$, $\vec{n}(s)$ образуют правую систему, и их координаты (x_1, x_2) вычисляются с помощью формул $\vec{e}(s) \equiv (\tilde{x}_1'(s), \tilde{x}_2'(s))$, $\vec{n}(s) = (-\tilde{x}_2'(s), \tilde{x}_1'(s))$.

Пусть $I_T \equiv [0, T]$, $T > 0$. Обозначим через C_0^0 банахово пространство непрерывных на множестве I_T вещественных функций $f(t)$ с условием $f(0) = 0$ и нормой $\|f\|_{C_0^0} \equiv \sup\limits_{t \in I_T} |f(t)|$. Через C_n^0 ($n \in \mathbb{Z}_+$) обозначим банаховы пространства функций $f \in C_0^0$, имеющих производные $f^{(j)} \in C_0^0$ ($j = \overline{1,n}$), с нормой $\|f\|_{C_n^0} \equiv \sum\limits_{j=0}^{n} \sup\limits_{t \in I_T} \left|f^{(j)}(t)\right|$. В пространстве C_0^0 зададим оператор дифференцирования $\mathbf{D}$: $(\mathbf{D} f)(t) \equiv f'(t)$ ($f \in C_1^0$, $f' \in C_0^0$). Оператор $\mathbf{D}$ является генератором C_0-полугруппы [8, гл. VIII, п. 1] операторов правого сдвига $\mathbf{U}(\tau)$: $(\mathbf{U}(\tau) f)(t) \equiv f(t - \tau)$ при $\tau \leqslant t$, $(\mathbf{U}(\tau) f)(t) \equiv 0$ при $\tau > t$ ($f \in C_0^0$), $\mathbf{D}f = \lim\limits_{\tau \to +0} \tau^{-1} (f - \mathbf{U}(\tau) f)$ ($f \in C_1^0$). Заметим, что $\|\mathbf{U}(\tau)\| = 1$ при $\tau < T$, $\mathbf{U}(\tau) = \mathbf{O}$ при $\tau \geqslant T$ ($\mathbf{O}$ — нулевой оператор).

Через $C_{0,0}^0$ обозначим банахово пространство непрерывных на множестве $\mathbb{R} \times I_T$ вещественных функций $f(s,t)$ таких, что $f(s + 2S, t) = f(s,t)$ при $(s,t) \in \mathbb{R} \times I_T$ и $f(s,0) = 0$ при $s \in \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{C_{0,0}^0} \equiv \sup\limits_{s \in I_S, t \in I_T} |f(s,t)|$. Через $C_{k,0}^0$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) обозначим банаховы пространства функций $f \in C_{0,0}^0$, имеющих частные производные $\partial_s^l f \in C_{0,0}^0$ ($l = \overline{1,k}$), с нормой $\|f\|_{C_{k,0}^0} \equiv \sum\limits_{l=0}^{k} \sup\limits_{s \in I_S, t \in I_T} \left|\partial_s^l f(s,t)\right|$. Через $C_{0,n}^0$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) обозначим банаховы пространства функций $f \in C_{0,0}^0$, имеющих частные производные $\partial_t^j f \in C_{0,0}^0$ ($j = \overline{1,n}$), с нормой $\|f\|_{C_{0,n}^0} \equiv \sum\limits_{j=0}^{n} \sup\limits_{s \in I_S, t \in I_T} \left|\partial_t^j f(s,t)\right|$. Введем также в рассмотрение банаховы пространства $C_{k,n}^0 \equiv C_{k,0}^0 \cap C_{0,n}^0$ ($k, n \in \mathbb{Z}_+$) с нормой $\|f\|_{C_{k,n}^0} \equiv \|f\|_{C_{k,0}^0} + \|f\|_{C_{0,n}^0}$.

Обозначим через D треть радиуса круга Ляпунова [2, п. 94]. Введем в рассмотрение местные системы декартовых координат (ξ_s, η_s) с началами в точках $\tilde{x}(s)$ и осями ординат, сонаправленными с соответствующими векторами $\vec{e}(s)$, $\vec{n}(s)$. Точки $\tilde{x}_d(s)$ ($s \in I_S$) с местными координатами $(\xi_s, \eta_s) = (0, d)$ при фиксированном $d \in I_D \equiv [-D, 0) \cup (0, D]$ образуют замкнутую линию $\partial\Omega_d \in C^1$, при этом соответствие между точками $\tilde{x}_d(s)$ и $\tilde{x}(s)$ взаимно однозначное ($\tilde{x}_0(s) \equiv \tilde{x}(s)$), а нормали $\overrightarrow{\tilde{x}(s)\tilde{x}_d(s)}$ к кривой $\partial\Omega$ являются и нормалями к кривой $\partial\Omega_d$ [2, п. 102].

Обозначим через Ω_D множество, образованное точками $\tilde{x}_d(s)$ ($d \in I_D$, $s \in I_S$). На множестве $\overline{\Omega_D} \times I_T$ зададим функцию $u(x)$ со значениями в пространстве C_0^0: $u(x) \equiv \mathbf{G}(x)v$ ($v \in C_{0,0}^0$), где $\mathbf{G}(x)$ при каждом фиксированном $x \equiv (x_1, x_2) \in \overline{\Omega_D}$ — линейный оператор, отображающий пространство $C_{0,0}^0$ в пространство C_0^0:

$$\mathbf{G}(x)v \equiv \int\limits_{I_T} \mathbf{U}(\tau)\mathbf{A}(x,\tau)v \, d\tau, \quad \mathbf{A}(x,\tau)v \equiv \int\limits_{I_S} g(x, s', \tau) v(s') \, ds',$$

$$g(x, s', \tau) \equiv \partial_{\vec{n}(s)} a_0(r^2, \tau) = a(r^2, \tau) 2^{-1} \partial_{\vec{n}(s)} r^2 = a(r^2, \tau) \left(-\vec{n}(s), \vec{r}\right)_{\mathbb{R}^2}.$$

Здесь $a_0(r^2, \tau) \equiv (4\pi\tau)^{-1} \exp\left[-r^2 / (4\tau)\right]$, $a(r^2, \tau) \equiv r^{-1} \partial_r a_0$, $r(x, s') \equiv |\vec{r}|$, $\vec{r}(x, s') \equiv \overrightarrow{x\tilde{x}(s')}$, $x \neq \tilde{x}(s')$ (условимся, что мы можем иногда для краткости не писать аргументы функции, если они такие же, какие используются при определении функции); дифференцирование $\partial_{\vec{n}(s)}$ осуществляется по переменной $x = \tilde{x}_d(s)$ в направлении $\vec{n}(s)$; $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^2}$ — скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$; $v(s')$ — функция со значениями в C_0^0. Функция $u(x)$ при $x \in \Omega_D$ — НП двумерного ТППС с плотностью v, при $x \in \partial\Omega$ — прямое значение НП ТППС [2, п. 153].

Пусть $\vec{r}_0(s,s') \equiv \overrightarrow{\tilde{x}(s)\tilde{x}(s')}$, $r_0(s,s') \equiv |\vec{r}_0|$. Зададим на множестве $\Theta \equiv \{(s,s') : s \in \overline{I_S},\ s'-s \in \overline{I_S}\}$ функции $\psi_i(s,s')$ $(i=0,1)$: при $s' \neq s$ равенствами $\psi_i \equiv \varphi_i / (s'-s)^2$, где

$$\varphi_0(s,s') \equiv \left[\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)\right]^2 + \left[\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)\right]^2 = r_0^2,$$

$$\varphi_1(s,s') \equiv -\tilde{x}_2'(s)\left[\tilde{x}_1(s) - \tilde{x}_1(s')\right] + \tilde{x}_1'(s)\left[\tilde{x}_2(s) - \tilde{x}_2(s')\right] = 2^{-1}\partial_{\vec{n}(s)} r^2\big|_{x\in\partial\Omega} = -\left(\vec{n}(s),\vec{r}_0\right)_{\mathbb{R}^2},$$

а при $s' = s$ равенствами $\psi_0 \equiv 1$, $\psi_1 \equiv 2^{-1}\left[\tilde{x}_2'(s)\,\tilde{x}_1''(s) - \tilde{x}_1'(s)\,\tilde{x}_2''(s)\right]$. В силу [9, лемма] при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ существуют непрерывные на множестве Θ производные $\partial_{s'}^j \psi_i$ $(j = \overline{0,n},\ i = 0,1)$.

Местные координаты (ξ_s, η_s) точек $\tilde{x}(s')$ и $\tilde{x}_d(s)$ равны $\left((\vec{e}(s),\vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2}, (\vec{n}(s),\vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2}\right)$ и $(0,d)$ соответственно, поэтому $r^2 = \left|\overrightarrow{\tilde{x}_d(s)\tilde{x}(s')}\right|^2 = r_0^2 - 2d\,(\vec{n}(s),\vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2} + d^2$. На множестве $\Upsilon \equiv \overline{I_D} \times \Theta$ зададим функцию $\varphi(d,s,s') \equiv r^2 - d^2 = \varphi_0 + 2d\,\varphi_1$. Так как кривая $\partial\Omega$ и окружность радиуса $d \in I_D$ с центром $\tilde{x}_d(s)$ имеют только одну общую точку $\tilde{x}(s)$ (иначе нарушается взаимно однозначное соответствие между точками $\tilde{x}(s)$ и $\tilde{x}_d(s)$), то $2d\cos\alpha < r_0$, где α — угол между лучами $\tilde{x}(s)\tilde{x}(s')$ и $\tilde{x}(s)\tilde{x}_d(s)$. Следовательно, $\varphi \geqslant 0$ при $(d,s,s') \in \Upsilon$ ($\varphi > 0$ при $s \neq s'$, $\varphi = 0$ при $s = s'$). На множестве Υ зададим непрерывные функции $\rho(d,s,s')$, $\psi(d,s,s')$: $\rho = \sqrt{\varphi}$, если $s' \geqslant s$; $\rho = -\sqrt{\varphi}$, если $s' < s$; $\psi \equiv \psi_0 + 2d\,\psi_1$.

Так как контур $\partial\Omega$ не имеет точек самопересечения, то $c_r \equiv \inf\limits_{(s,s')\in\Theta} \psi_0 > 0$ $(c_r \leqslant 1)$. Справедлива оценка: $\vartheta \leqslant c_K\,|s'-s| \leqslant c_K c_r^{-1/2} r_0$, где ϑ — острый угол между нормалями, проходящими через точки $\tilde{x}(s)$ и $\tilde{x}(s')$; $c_K \equiv \sup\limits_{s\in\overline{I_S}} K(s,s)$ $(K(s,s) = 2\,|\psi_1(s,s)|$ — кривизна кривой $\partial\Omega$ в точке $\tilde{x}(s)$). Поэтому величина $3D$, где $D \equiv c_r^{1/2}\,(3c_K)^{-1}$, может быть взята в качестве радиуса круга Ляпунова (см. [2, п. 94, оценки (3), (5)]). Так как $\psi_0(s,s) = 1$, $|\psi_1(s,s)| = 2^{-1}K(s,s)$ и $D \leqslant (3c_K)^{-1}$, то при $(d,s) \in \overline{I_D} \times \overline{I_S}$ имеем оценки: $\psi(d,s,s) \geqslant 2/3$. Кроме того, $\psi = \varphi/(s'-s)^2 > 0$ при $(d,s,s') \in \Upsilon$, $s' \neq s$, поэтому $\psi > 0$ на множестве Υ.

Так как $r^2 = \varphi_0 + 2d\,\varphi_1 + d^2$, то $2^{-1}\partial_{\vec{n}(s)} r^2 = 2^{-1}\partial_d r^2 = \varphi_1 + d$, и $g(\tilde{x}_d(s), s', \tau) = a(\varphi + d^2, \tau)\,(\varphi_1 + d)$. Поэтому функция g при $x = \tilde{x}_d(s)$, $(d,s,s') \in \Upsilon$ (кроме $s'-s = d = 0$), $\tau > 0$ может быть записана в следующем виде:

$$g(\tilde{x}_d(s), s', \tau) = a_1(d,\rho,\tau)\delta_1(d,s,s') + a_2(d,\rho,\tau)\delta_2(d,s,s'), \tag{1}$$

где $a_1(d,\rho,\tau) \equiv \rho^2 a(\rho^2 + d^2, \tau)$, $a_2(d,\rho,\tau) \equiv d\,a(\rho^2 + d^2, \tau)$, $\delta_1(d,s,s') \equiv \psi_1/\psi$, $\delta_2(d,s,s') \equiv 1$. Так как $\psi > 0$ на множестве Υ, то при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ существуют непрерывные на множестве Υ производные $\partial_{s'}^j \delta_1$ $(j = \overline{0,n})$.

При фиксированном $s \in \overline{I_S}$ обозначим через E_s замкнутую дугу кривой $\partial\Omega$, ограниченную двумя параллельными прямыми, находящимися на расстоянии D от прямой $\tilde{x}(s)\tilde{x}_D(s)$, причем $\tilde{x}(s) \in \mathrm{E}_s$. Значения $s'-s$, соответствующие границам дуги E_s, обозначим через Σ_s', Σ_s'' $(\Sigma_s' < 0 < \Sigma_s'')$, и тогда $s'-s \in \Xi_s \equiv [\Sigma_s', \Sigma_s'']$, $\xi_s \in \overline{I_D}$, если $\tilde{x}(s') \in \mathrm{E}_s$.

Теорема 1 (см. [9, теорема 5]). *Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$. Тогда на множестве $\Upsilon' \equiv \left\{(d,s,s') : d \in \overline{I_D}, s \in \overline{I_S}, s'-s \in \Xi_s\right\}$ существуют положительная, ограниченная сверху функция $\delta_0(d,s,s') \equiv (\partial_{s'}\rho)^{-1}$ и непрерывные производные $\partial_{s'}^j \delta_0$ $(j = \overline{0,n})$.*

Следствие 1. *Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$. Тогда функции $\rho_{d,s}(\sigma) \equiv \rho(d,s,s+\sigma)$ при любых фиксированных $s \in I_S$, $d \in \overline{I_D}$ диффеоморфно с гладкостью C^{n+1} отображают множества Ξ_s на соответствующие множества $\rho_{d,s}(\Xi_s)$. Функции $\tilde{\delta}_0(d,s,\rho) \equiv \delta_0\left(d,s,s+\sigma_{d,s}(\rho)\right)$,*

$\tilde{\delta}_i(d,s,\rho) \equiv \delta_i\left(d,s,s+\sigma_{d,s}(\rho)\right)\tilde{\delta}_0$ $(i=1,2)$, *где* $\sigma_{d,s}(\rho)$ — *функция, обратная к функции* $\rho_{d,s}(\sigma)$, *имеют непрерывные на множестве* $\tilde{\Upsilon}' \equiv \left\{(d,s,\rho) : d\in\overline{I_D}, s\in\overline{I_S}, \rho\in\rho_{d,s}(\Xi_s)\right\}$ *производные* $\partial^j_\rho\tilde{\delta}_i$ $(j=\overline{0,n},\ i=\overline{0,2})$.

Обозначим через $\Lambda_m(z,\varsigma_1,\varsigma_2)$ $(z\in[\varsigma_1,\varsigma_2],\ m=\overline{0,2})$ квадратичные интерполяционные многочлены Лагранжа:

$$\Lambda_m(z,\varsigma_1,\varsigma_2)\equiv\prod_{j=0\ (j\neq m)}^{2}\frac{z-z_j}{z_m-z_j},\quad z_j\equiv\bar{\varsigma}+q_jh_z\quad (j=\overline{0,2}).$$

Здесь $h_z\equiv 2^{-1}(\varsigma_2-\varsigma_1)$, $\bar{\varsigma}\equiv 2^{-1}(\varsigma_1+\varsigma_2)$; $q_0\equiv -1$, $q_1\equiv 0$, $q_2\equiv 1$ [10, гл. 2, § 3, п. 2]. Пусть $C_j[\varsigma_1,\varsigma_2]$ $(j\in\mathbb{Z}_+)$ — банаховы пространства, образованные j раз непрерывно дифференцируемыми на промежутке $[\varsigma_1,\varsigma_2]$ функциями $f(z)$ со значениями в банаховом пространстве E. Тогда для функций $\tilde{f}(z)\equiv\sum\limits_{m=0}^{2}f(z_m)\Lambda_m(z,\varsigma_1,\varsigma_2)$, а также для их первых и вторых производных при $z\in[\varsigma_1,\varsigma_2]$ имеют место оценки:

$$\left\|\tilde{f}(z)-f(z)\right\|_E\leqslant c_\omega\sup_{z\in[\varsigma_1,\varsigma_2]}\left\|f^{(3)}(z)\right\|_E h_z^3\quad (f\in C_3[\varsigma_1,\varsigma_2]),\tag{2}$$

$$\left\|\tilde{f}(z)\right\|_E\leqslant c_{\Lambda,0}\max_{m=\overline{0,2}}\|f(z_m)\|_E\quad (f\in C_0[\varsigma_1,\varsigma_2]),\tag{3}$$

$$\left\|\tilde{f}^{(j)}(z)\right\|_E\leqslant c_{\Lambda,j}\sup_{z\in[\varsigma_1,\varsigma_2]}\left\|f^{(j)}(z)\right\|_E\quad (f\in C_j[\varsigma_1,\varsigma_2],\quad j=1,2).\tag{4}$$

Здесь $c_\omega\equiv 2\sqrt{3}/9$, $c_{\Lambda,0}=c_{\Lambda,1}\equiv 3$, $c_{\Lambda,2}=2^{-1}$.

2. Полуаналитические аппроксимации нормальной производной теплового потенциала простого слоя

В силу равенства (1) операторы $\mathbf{A}(x,\tau)$ $(x\in\overline{\Omega_D},\ \tau>0)$ могут быть представлены в виде суммы: $\mathbf{A}(x,\tau)=\sum\limits_{i=1}^{3}\mathbf{A}_i(x,\tau)$, где $\mathbf{A}_i(x,\tau)v\equiv\int\limits_{\rho_{d,s}(\Xi_s)}a_i(d,\rho,\tau)\,\mathbf{B}_i(d,s,\rho)v\,d\rho$ $(i=1,2)$, $\mathbf{A}_3(x,\tau)v\equiv\int\limits_{I_S\setminus\Xi_s}\mathbf{B}_3(d,s,s+\sigma,\tau)v\,d\sigma$, а операторы $\mathbf{G}(x)$, в свою очередь, в виде суммы $\mathbf{G}(x)=\sum\limits_{i=1}^{3}\mathbf{G}_i(x)$, где $\mathbf{G}_i(x)v\equiv\int\limits_{I_T}\mathbf{U}(\tau)\mathbf{A}_i(x,\tau)v\,d\tau$. Здесь $v\in C^0_{0,0}$, $x=\tilde{x}_d(s)$, $d\in\overline{I_D}$, $s\in I_S$, $\mathbf{B}_i(d,s,\rho)v\equiv\tilde{\delta}_i\,v(s+\sigma_{d,s}(\rho))$ $(i=1,2)$, $\mathbf{B}_3(d,s,s',\tau)v\equiv g\,v(s')$.

Условимся линейный оператор $\mathbf{F}$, отображающий банахово пространство X в банахово пространство Y, обозначать как $\mathbf{F}$ $[X\to Y]$, а если $X=Y$, то $\mathbf{F}$ $[X]$. Так как любая прямая, параллельная прямой $\tilde{x}(s)\tilde{x}_D(s)$, пересекает границу $\partial\Omega$ внутри круга Ляпунова с центром в $\tilde{x}(s)$ не более чем в одной точке, то $r\geqslant D$, если $(d,s,s')\in\Upsilon\setminus\Upsilon'$. Учитывая следствие 1, получаем оценки норм операторов $\mathbf{A}_i(x,\tau)$ $[C^0_{0,0}\to C^0_0]$:

$$\|\mathbf{A}_i(x,\tau)\|\leqslant\tilde{c}_i\check{c}_{i,0}\,y_i(d,\tau)\quad (x\in\overline{\Omega_D},\quad \tau>0,\quad i=\overline{1,3}),$$

где $\tilde{c}_1\equiv(8\pi)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\gamma^2\exp\left(-\gamma^2/4\right)d\gamma=\left(2\sqrt{\pi}\right)^{-1}$, $\tilde{c}_2\equiv(8\pi)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\gamma^2/4\right)d\gamma=\left(4\sqrt{\pi}\right)^{-1}$, $\tilde{c}_3\equiv 2S$, $\check{c}_{i,0}\equiv\sup\limits_{(d,s,\rho)\in\tilde{\Upsilon}'}\left|\tilde{\delta}_i\right|$ $(i=1,2)$, $\check{c}_{3,0}\equiv\sup\limits_{(d,s,s')\in\Upsilon\setminus\Upsilon',\,\tau>0}|g(\tilde{x}_d(s),s',\tau)|$, $y_1(d,\tau)\equiv\tau^{-1/2}$, $y_2(d,\tau)\equiv d\,\tau^{-3/2}\exp\left[-d^2/(4\,\tau)\right]$, $y_3(d,\tau)\equiv 1$. Отсюда вытекают оценки для норм операторов $\mathbf{G}_i(x)$ $[C^0_{0,0}\to C^0_0]$:

$$\|\mathbf{G}_i(x)\|\leqslant c_i\,\tilde{c}_i\check{c}_{i,0}\quad (x\in\overline{\Omega_D},\quad i=\overline{1,3}),\tag{5}$$

где $c_1 \equiv 2T^{1/2}$, $c_2 \equiv \int\limits_0^\infty y_2(d,\tau)\,d\tau = 2\sqrt{\pi}$, $c_3 \equiv T$. Поэтому операторы $\mathbf{G}(x)$ $[C^0_{0,0} \to C^0_0]$ равномерно ограничены на множестве $\overline{\Omega_D}$. Заметим, что оператор прямого значения НП ТППС на границе $\partial\Omega$ имеет вид $\mathbf{G}(\tilde{x}(s)) = \mathbf{G}_1(\tilde{x}(s)) + \mathbf{G}_3(\tilde{x}(s))$, так как $\mathbf{G}_2(\tilde{x}(s)) \equiv \mathbf{O}$.

Пусть $N/2 \in \mathbb{N}$, $\tau_n \equiv n h_\tau$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$, $h_\tau \equiv T/N$. Зададим операторную функцию $\tilde{\mathbf{U}}(\tau)$ $[C^0_0]$ $(\tau \geqslant 0)$:

$$\tilde{\mathbf{U}}(\tau) \equiv \sum_{m=0}^{2} \mathbf{U}\left(\tau_{2n+1} + q_m h_\tau\right) \Lambda_m(\tau, \tau_{2n}, \tau_{2n+2}) \quad \left(\tau \in \left[\tau_{2n}, \tau_{2n+2}\right], \quad n = \overline{0, N/2-1}\right).$$

В силу оценок (2), (3) и $\|\mathbf{U}(\tau)\| \leqslant 1$ имеют место оценки $\left\|\tilde{\mathbf{U}}(\tau)\right\| \leqslant c_{\Lambda,0}$ и

$$\left\|\tilde{\mathbf{U}}(\tau)f - \mathbf{U}(\tau)f\right\|_{C^0_0} \leqslant c_\omega \left\|\mathbf{D}^3 f\right\|_{C^0_0} h_\tau^3 \quad (f \in C^0_3). \tag{6}$$

Пусть $L/2 \in \mathbb{N}$, $s_l \equiv l h_s$, $l \in \mathbb{Z}$, $h_s \equiv S/(L+1)$. Введем в рассмотрение пространства H_L сеточных функций f со значениями $f_l \in C^0_0$, заданными в точках коллокации s_l $(f_{l+2L+2} = f_l)$, с нормой $\|f\|_{H_L} \equiv \max\limits_{-L-1\leqslant l\leqslant L} \|f_l\|_{C^0_0}$. Зададим проецирующие операторы $\mathbf{P}_L$ $[C^0_{0,0} \to H_L]$: $(\mathbf{P}_L f)_l(t) \equiv f(s_l, t)$ $(f \in C^0_{0,0}$, $t \in I_T)$, и интерполирующие операторы $\tilde{\mathbf{P}}_L$ $[H_L \to C^0_{0,0}]$:

$$\left(\tilde{\mathbf{P}}_L f\right)(s,t) \equiv \sum_{m=0}^{2} f_{2l-1+m}(t)\,\Lambda_m(s, s_{2l-1}, s_{2l+1}) \; \left(f \in H_L,\ s \in \left[s_{2l-1}, s_{2l+1}\right],\ l = \overline{-L/2, L/2}\right).$$

Очевидно, $\|\mathbf{P}_L\| \leqslant 1$. В силу оценок (2), (3) имеем также оценки $\left\|\tilde{\mathbf{P}}_L\right\| \leqslant c_{\Lambda,0}$ и

$$\left\|\tilde{\mathbf{P}}_L \mathbf{P}_L f - f\right\|_{C^0_{0,0}} \leqslant c_\omega \left\|\partial_s^3 f\right\|_{C^0_{0,0}} h_s^3 \quad (f \in C^0_{3,0}). \tag{7}$$

Зададим операторы $\ddot{\mathbf{G}}_i(x)$ $[H_L \to C^0_0]$: $\ddot{\mathbf{G}}_i(x) f \equiv \int\limits_{I_T} \tilde{\mathbf{U}}(\tau)\mathbf{A}_i(x,\tau)\tilde{\mathbf{P}}_L f\,d\tau$ $(f \in H_L$, $x \in \overline{\Omega_D}$, $i = \overline{1,3})$. С учетом оценок $\left\|\tilde{\mathbf{U}}(\tau)\right\| \leqslant c_{\Lambda,0}$, $\left\|\tilde{\mathbf{P}}_L\right\| \leqslant c_{\Lambda,0}$ и (6), (7) получаем при $f \in C^0_{3,3}$, $x \in \overline{\Omega_D}$, $i = \overline{1,3}$ неравенства $\left\|\ddot{\mathbf{G}}_i(x)\right\| \leqslant c_i\,\tilde{c}_i\,\breve{c}_{i,0}\,c^2_{\Lambda,0}$ и

$$\left\|\ddot{\mathbf{G}}_i(x)\mathbf{P}_L f - \mathbf{G}_i(x) f\right\|_{C^0_0} \leqslant c_i\,\tilde{c}_i\,\breve{c}_{i,0}\,c_\omega \left[\left\|\partial_t^3 f\right\|_{C^0_{0,0}} h_\tau^3 + c_{\Lambda,0}\left\|\partial_s^3 f\right\|_{C^0_{0,0}} h_s^3\right]. \tag{8}$$

Введем в рассмотрение операторы $\tilde{\mathbf{A}}_i(x,\tau)$, аппроксимирующие операторы $\mathbf{A}_i(x,\tau)\tilde{\mathbf{P}}_L$ $[H_L \to C^0_0]$ $(x \in \overline{\Omega_D}$, $\tau > 0$, $i = \overline{1,3})$. Для этого заменим функции $\mathbf{B}_i(d,s,\rho)\tilde{\mathbf{P}}_L f$ $(f \in H_L$, $(d,s,\rho) \in \tilde{\Upsilon}'$, $i = 1,2)$ их кусочно-квадратичными интерполянтами $\tilde{\mathbf{B}}_i(d,s,\rho) f$ по переменной ρ:

$$\tilde{\mathbf{A}}_i\left(\tilde{x}_d(s),\tau\right) f \equiv \int\limits_{\rho_{d,s}(\Xi_s)} a_i(d,\rho,\tau)\tilde{\mathbf{B}}_i(d,s,\rho)\,f\,d\rho \quad (i = 1,2),$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_i(d,s,\rho) f \equiv \tilde{\mathbf{B}}_{i,l}(d,s,\rho) f \quad \left(\rho \in \left[\rho_{d,s,l}, \rho_{d,s,l+1}\right], \quad l = \overline{-L-2, L}\right),$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{i,l}(d,s,\rho) f \equiv \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{2} \mathbf{B}_i(d,s,\rho_{d,s,l,m})\tilde{\mathbf{P}}_L f\,\Lambda_m(\rho, \rho_{d,s,l}, \rho_{d,s,l+1}) & (\rho_{d,s,l} < \rho_{d,s,l+1}) \\ \mathbf{B}_i(d,s,\rho_{d,s,l})\tilde{\mathbf{P}}_L f & (\rho_{d,s,l} = \rho_{d,s,l+1}) \end{cases},$$

$$\rho_{d,s,l,m} \equiv 2^{-1}\left(\rho_{d,s,l} + \rho_{d,s,l+1}\right) + q_m h'_{d,s,l}, \quad h'_{d,s,l} \equiv 2^{-1}\left(\rho_{d,s,l+1} - \rho_{d,s,l}\right).$$

Здесь $\rho_{d,s,l} \equiv \rho_{d,s}(\alpha_{s,l})$; $\alpha_{s,0} \equiv 0$; $\alpha_{s,l} \equiv \min\{s_{l+k} - s, \Sigma''_s\}$, если $s_{l+k} \geqslant s \in (s_k, s_{k+1}]$ и $l > 0$, и $\alpha_{s,l} \equiv \max\{s_{l+k+1} - s, \Sigma'_s\}$, если $s_{l+k+1} < s$ и $l < 0$. По определению $\bigcup\limits_{l=-L-2}^{L} [\alpha_{s,l}, \alpha_{s,l+1}] = \Xi_s$ $(s \in \overline{I_S})$.

Интегралы $\mathbf{A}_3(x,\tau)\tilde{\mathbf{P}}_L f$ $(f \in H_L)$ аппроксимируем с помощью ПКФГ с γ узлами:

$$\tilde{\mathbf{A}}_3(\tilde{x}_d(s),\tau)f \equiv \sum_{l=-L-1}^{L} h''_{s,l}\tilde{\mathbf{B}}_{3,l}(d,s,\tau)f, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{3,l}(d,s,\tau)f \equiv \sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j \mathbf{B}_3(d,s,s+\beta_{s,l,j},\tau)\tilde{\mathbf{P}}_L f,$$
$$\beta_{s,l,j} \equiv 2^{-1}(\beta_{s,l} + \beta_{s,l+1}) + h''_{s,l} z_j, \quad h''_{s,l} \equiv 2^{-1}(\beta_{s,l+1} - \beta_{s,l}),$$

где $\beta_{s,l} \equiv \max\{s_l, s + \Sigma''_s\}$, если $s_l \geqslant s$, и $\beta_{s,l} \equiv \min\{s_l, s+\Sigma'_s\}$, если $s_l < s$; z_j — корни многочлена $(d^\gamma/dz^\gamma)\left(z^2-1\right)^\gamma$ на интервале $(-1,1)$ [10, гл. 3, § 5, п. 2]; для весовых коэффициентов ω_j выполняются условия $\sum\limits_{j=1}^{\gamma} \omega_j = 2$, $\omega_j > 0$ [10, гл. 3, § 5, п. 1]. По определению $\bigcup\limits_{l=-L-2}^{L} [\beta_{s,l}, \beta_{s,l+1}] = \overline{I_S \setminus \Xi_s}$ $(s \in \overline{I_S})$.

Введем в рассмотрение операторы $\tilde{\mathbf{G}}_i(x)$ $[H_L \to C^0_0]$: $\tilde{\mathbf{G}}_i(x)f \equiv \int\limits_{I_T} \tilde{\mathbf{U}}(\tau)\tilde{\mathbf{A}}_i(x,\tau)f\,d\tau$ $(x \in \overline{\Omega_D},\ f \in H_L,\ i = \overline{1,3})$ и $\tilde{\mathbf{G}}(x) \equiv \sum\limits_{i=1}^{3} \tilde{\mathbf{G}}_i(x)$. В силу оценки (3) операторы $\tilde{\mathbf{B}}_i(d,s,\rho)$ $[H_L \to C^0_0]$ $(i = 1,2)$ ограничены равномерно по $(d,s,\rho) \in \tilde{\Upsilon}'$: $\left\|\tilde{\mathbf{B}}_i(d,s,\rho)\right\| \leqslant c^2_{\Lambda,0}\check{c}_{i,0}$, а операторы $\tilde{\mathbf{B}}_{3,l}(d,s,\tau)$ $[H_L \to C^0_0]$ ограничены равномерно по $(d,s) \in \overline{I_D} \times \overline{I_S}$, $\tau > 0$, $l = \overline{-L-1, L}$: $\left\|\tilde{\mathbf{B}}_{3,l}(d,s,\tau)\right\| \leqslant 2c_{\Lambda,0}\check{c}_{3,0}$. Поэтому по аналогии с оценками (5) имеем при $x = \tilde{x}_d(s)$, $d \in \overline{I_D}$, $s \in I_S$ оценки для норм операторов $\tilde{\mathbf{G}}_i(x)$ $[H_L \to C^0_0]$:

$$\left\|\tilde{\mathbf{G}}_i(x)\right\| \leqslant c_i\tilde{c}_i\,\check{c}_{i,0}c^3_{\Lambda,0} \quad (i = 1,2), \qquad \left\|\tilde{\mathbf{G}}_3(x)\right\|_{L_2} \leqslant c_3\tilde{c}_3\check{c}_{3,0}c^2_{\Lambda,0}. \tag{9}$$

Из оценок (9) следует утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\partial\Omega \in C^2$, $\gamma \in \mathbb{N}$. *Тогда операторы* $\tilde{\mathbf{G}}(x)$ $[H_L \to C^0_0]$ *ограничены равномерно по* $x \in \overline{\Omega_D}$, $N/2, L/2 \in \mathbb{N}$.

В силу следствия 1 и неравенства $r \geqslant D$, имеющего место, если $(d,s,s') \in \overline{\Upsilon \setminus \Upsilon'}$, при указанных гладкостях кривой $\partial\Omega$ и $j = \overline{0,n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ могут быть определены константы:

$$\check{c}_{i,j} \equiv \sup_{(d,s,\rho)\in\tilde{\Upsilon}'} \left|\partial^j_\rho \tilde{\delta}_i\right| \quad (i = \overline{0,2}, \quad \partial\Omega \in C^{n+2}),$$
$$\check{c}_{3,j} \equiv \sup_{(d,s,s')\in\overline{\Upsilon\setminus\Upsilon'},\,\tau>0} \left|\partial^j_{s'} g\left(\tilde{x}_d(s), s', \tau\right)\right| \quad (\partial\Omega \in C^{n+1}).$$

Используя неравенства (2)–(4) и $h'_{d,s,l} \leqslant 2^{-1}c_\rho h_s$ $(c_\rho \equiv \sup\limits_{(d,s,s')\in\Upsilon'} \partial_{s'}\rho)$, $\left\|\tilde{\mathbf{U}}(\tau)\right\| \leqslant c_{\Lambda,0}$, получаем при $f \in C^0_{2,0}$, $\tilde{f} \equiv \tilde{\mathbf{P}}_L\mathbf{P}_L f$, $x = \tilde{x}_d(s)$, $(d,s) \in \overline{I_D} \times \overline{I_S}$ и указанных гладкостях кривой $\partial\Omega$ следующие оценки:

$$\left\|\tilde{\mathbf{G}}_i(x)\mathbf{P}_L f - \ddot{\mathbf{G}}_i(x)\mathbf{P}_L f\right\|_{C^0_0} \leqslant 8^{-1}c_i c_{\Lambda,0}\tilde{c}_i c_\omega c^3_\rho \operatorname*{ess\,sup}_{(d,s,\rho)\in\tilde{\Upsilon}'} \left\|\partial^3_\rho \mathbf{B}_i(d,s,\rho)\tilde{f}\right\|_{C^0_0} h^3_s \leqslant$$
$$\leqslant 8^{-1}c_i c_{\Lambda,0}\tilde{c}_i c_\omega c^3_\rho \hat{c}_i \|f\|_{C^0_{2,0}} h^3_s \quad (\partial\Omega \in C^5), \tag{10}$$

$$\hat{c}_i \equiv \check{c}_{i,3}c_{\Lambda,0} + (3\check{c}_{i,2}\check{c}_{0,0} + 3\check{c}_{i,1}\check{c}_{0,1} + \check{c}_{i,0}\check{c}_{0,2})\,c_{\Lambda,1} + 3\left(\check{c}_{i,1}\check{c}^2_{0,0} + \check{c}_{i,0}\check{c}_{0,1}\check{c}_{0,0}\right)c_{\Lambda,2} \quad (i = 1,2);$$

$$\left\|\tilde{\mathbf{G}}_3(x)\mathbf{P}_L f - \ddot{\mathbf{G}}_3(x)\mathbf{P}_L f\right\|_{C_0^0} \leqslant c_3\, c_{\Lambda,0}\, \tilde{c}_3 \operatorname*{ess\,sup}_{(d,s,s')\in\overline{\Upsilon\setminus\Upsilon'},\,\tau>0} \left\|\partial_{s'}^{2\gamma}\mathbf{B}_3(d,s,s',\tau)\tilde{f}\right\|_{C_0^0} h_s^{2\gamma} \leqslant$$

$$\leqslant c_3\, c_{\Lambda,0}\, \tilde{c}_3\, \hat{c}_3\, \|f\|_{C_{2,0}^0}\, h_s^{2\gamma} \quad (\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}), \tag{11}$$

$$\hat{c}_3 \equiv [(2\gamma)!]^{-3}\,(2\gamma+1)^{-1}\,(\gamma!)^4\,[\breve{c}_{3,2\gamma}\, c_{\Lambda,0} + 2\gamma\, \breve{c}_{3,2\gamma-1}\, c_{\Lambda,1} + \gamma\,(2\gamma-1)\,\breve{c}_{3,2\gamma-2}\, c_{\Lambda,2}]\,.$$

Здесь $\operatorname{ess\,sup}$ — существенный супремум [8, гл. III, п. 1, подп. 11]. При получении оценки (11) используется оценка остаточного члена ПКФГ [10, гл. 3, § 5, п. 2].

Введем в рассмотрение банаховы пространства H'_N сеточных функций f с вещественными значениями f_n, заданными в точках коллокации τ_n $(n = \overline{0, N})$, с условием $f_0 = 0$ и нормой $\|f\|_{H'_N} \equiv \max\limits_{0\leqslant n\leqslant N} |f_n|$. Зададим проецирующий оператор $\mathbf{P}'_N$ $[C_0^0 \to H'_N]$: $(\mathbf{P}'_N f)_n \equiv f(\tau_n)$ $(n = \overline{0, N},\ f \in C_0^0)$, и интерполирующий оператор $\tilde{\mathbf{P}}'_N$ $[H'_N \to C_0^0]$:

$$\left(\tilde{\mathbf{P}}'_N f\right)(t) \equiv \sum_{m=0}^{2} f_{2n+m}\, \Lambda_m(t, \tau_{2n}, \tau_{2n+2}) \quad (f \in H'_N, \quad t \in [\tau_{2n}, \tau_{2n+2}]\,, \quad n = \overline{0, N/2-1}).$$

В силу неравенств $\|\mathbf{P}'_N\| \leqslant 1$ и (2), (3) справедливы оценки

$$\left\|\tilde{\mathbf{P}}'_N \mathbf{P}'_N\right\| \leqslant c_{\Lambda,0}, \quad \left\|\tilde{\mathbf{P}}'_N \mathbf{P}'_N f - f\right\|_{C_0^0} \leqslant c_\omega\, \|\mathbf{B}^3 f\|_{C_0^0}\, h_\tau^3 \quad (f \in C_3^0). \tag{12}$$

В силу замкнутости оператора $\mathbf{B}$ и равенств $\mathbf{U}(\tau)\mathbf{B}f = \mathbf{B}\mathbf{U}(\tau)f$ $(f \in C_1^0,\ \tau \geqslant 0)$ имеем $\mathbf{G}(x)f \in C_1^0$ при $f \in C_{0,1}^0$, $x \in \overline{\Omega_D}$. На основании оценок (8), (10)–(12) получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geqslant 2$; $\gamma, N/2, L/2 \in \mathbb{N}$. Тогда операторы $\tilde{\mathbf{P}}'_N \mathbf{P}'_N \tilde{\mathbf{G}}(x)\mathbf{P}_L$ $[C_{3,3}^0 \to C_0^0]$ сходятся при $L, N \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\mathbf{G}(x)$ $[C_{3,3}^0 \to C_0^0]$ равномерно по $x \in \overline{\Omega_D}$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3 + h_s^3\right)$.*

Согласно теореме 3 функции $\tilde{u}(x) \equiv \tilde{\mathbf{P}}'_N \mathbf{P}'_N \tilde{\mathbf{G}}(x)\mathbf{P}_L v$ являются аппроксимациями функции $u(x)$. В силу теоремы 2 и неравенств $\|\mathbf{P}_L\| \leqslant 1$, $\left\|\tilde{\mathbf{P}}'_N \mathbf{P}'_N\right\| \leqslant c_{\Lambda,0}$ операторы $\tilde{\mathbf{P}}'_N \mathbf{P}'_N \tilde{\mathbf{G}}(x)\mathbf{P}_L$ $[C_{0,0}^0 \to C_0^0]$ ограничены в совокупности, поэтому аппроксимации $\tilde{u}(x)$ устойчивы к возмущениям функции v в норме $C_{0,0}^0$. Сформулируем основной результат настоящей работы.

Следствие 2. *Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geqslant 2$; $\gamma, N/2, L/2 \in \mathbb{N}$; $R > 0$. Тогда функции $\tilde{u}(x,t)$ сходятся при $L, N \to \infty$ с кубической скоростью к функции $u(x,t)$ равномерно относительно $(x,t) \in \overline{\Omega_D} \times I_T$ и функций $v \in C_{3,3}^0$, удовлетворяющих неравенству $\|v\|_{C_{3,3}^0} \leqslant R$. Кроме того, функции $\tilde{u}_\delta(x,t)$: $\tilde{u}_\delta(x) \equiv \tilde{\mathbf{P}}'_N \mathbf{P}'_N \tilde{\mathbf{G}}(x)\mathbf{P}_L v_\delta$, сходятся к функции $u(x,t)$ при $L, N \to \infty$, $\delta \to +0$ равномерно относительно $(x,t) \in \overline{\Omega_D} \times I_T$ и функций $v \in C_{3,3}^0$, $v_\delta \in C_{0,0}^0$, удовлетворяющих условиям $\|v\|_{C_{3,3}^0} \leqslant R$, $\|v_\delta - v\|_{C_{0,0}^0} \leqslant \delta$.*

Заметим, что для вычисления функции $\tilde{u}(x,t)$ необходимы лишь значения $v(s_l, \tau_n)$ $(l = \overline{-L-1, L},\ n = \overline{0, N})$ функции v, т.е. оператор $\mathbf{P}'_N \tilde{\mathbf{G}}(x)\mathbf{P}_L$ является, по существу, сеточным. При вычислении операторов $\tilde{\mathbf{G}}(x)$ интегрирование по τ осуществляется аналитически. Затем в операторах $\tilde{\mathbf{G}}_i(x)$ $(i = 1, 2)$ вычисляются интегралы по ρ, но не все они могут быть вычислены аналитически. В таких случаях функции $\exp(-z_n)$ и $\operatorname{Ei}(-z_n)$ $(z_n \equiv \left(\rho^2 + d^2\right) / (4\tau_n)$, $n = \overline{1, N})$ заменяются многочленами, образованными первыми членами разложения этих функций в ряды Маклорена, а именно $K_M + 1$ членами со степенями $(z_n)^k$ $(k = \overline{0, K_M})$, а также логарифмическим членом $\ln(z_n)$ в случае $\operatorname{Ei}(-z_n)$.

3. Вычислительные эксперименты

Рассмотрим вторую начально-краевую задачу теплопроводности:

$$\begin{gathered}\partial_t\theta(x,t)+\partial^2_{xx}\theta(x,t)=0 \quad (x\in\Omega_+, \quad t\in(0,T]),\\ \partial_{\vec n(s)}\theta(\tilde x(s),t)=w(s,t) \quad (s\in I_S, \quad t\in I_T), \quad \theta(x,0)=0 \quad (x\in\overline{\Omega_+}).\end{gathered} \tag{13}$$

НП решения $\theta(x,t)$: $u_+(x,t)\equiv\partial_{\vec n(s)}\theta(x,t)$ $(x=\tilde x_d(s),\ d\in(0,D])$, имеет вид НП ТППС: $u_+(x)\equiv\mathbf{G}(x)v_+$, где $v_+=(\mathbf{G}_+)^{-1}w$, $\mathbf{G}_+$ — оператор граничного интегрального уравнения второго рода: $\mathbf{G}_+(\tilde x(s))\equiv-2^{-1}\mathbf{I}+\mathbf{G}(\tilde x(s))$, $\mathbf{I}$ — тождественный оператор [2, п. 153]. Задача (13) рассматривается при условиях, что $T=1$, Ω_+ — единичный круг, $w(\varphi,t)=t^4\cos\varphi$ $(R=1-d,\ \varphi=s$ — полярные радиус и угол соответственно с полюсом в центре круга), поэтому точная функция $u_+(R,\varphi,t)$ имеет вид

$$u_+=2\cos\varphi\left\{-2^{-1}f(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1'(\mu_kR)}{J_1(\mu_k)\left(\mu_k^2-1\right)}\sum_{l=1}^{4}\frac{(-1)^{l+1}\left[f^{(l)}(t)-f^{(l)}(0)e^{-\mu_k^2t}\right]}{\mu_k^{2l-1}}\right\},$$

где $f(t)\equiv t^4$, $J_1(z)$ — функция Бесселя, μ_k — положительные корни уравнения $J_1'(z)=0$. Для данной геометрии имеем $D=2/(3\pi)$, $\Sigma_s''=-\Sigma_s'=\arcsin\left(2/(3\pi)\right)$ $(s\in I_S)$. Вычисляем аппроксимации функции u_+: $\tilde u_+(x)\equiv\tilde{\mathbf{P}}_N'\mathbf{P}_N'\tilde{\mathbf{G}}(x)\left(\tilde{\mathbf{G}}_+\right)^{-1}\mathbf{P}_Lw$, $\hat u_i^+(x)\equiv\tilde{\mathbf{P}}_N'\mathbf{P}_N'\hat{\mathbf{G}}_i(x)\left(\tilde{\mathbf{G}}_+\right)^{-1}\mathbf{P}_Lw$ $(i=12,24,48)$. Здесь $\tilde{\mathbf{G}}_+$ — сеточная аппроксимация оператора $\mathbf{G}_+$: $\tilde{\mathbf{G}}_+(\tilde x(s_l))\equiv-2^{-1}\mathbf{I}+$ $+\tilde{\mathbf{G}}(\tilde x(s_l))$ $(l=\overline{-L-1,L})$. Операторы $\tilde{\mathbf{G}}(\tilde x_d(s))$ $(d\in[0,D])$ вычисляются с $\gamma=2$ узлами ПКФГ, $K_M=10$ членами разложения в ряды Маклорена. Операторы $\hat{\mathbf{G}}_i(x)$ отличаются от операторов $\tilde{\mathbf{G}}(x)$ только тем, что интегралы $\int\limits_{\alpha_{s,l}}^{\alpha_{s,l+1}}g(x,s',\tau)\left(\tilde{\mathbf{P}}_Lf\right)(s')\,ds'$ $(f\in H_L)$ вычисляются не с помощью аналитического интегрирования по переменной ρ, а с помощью ПКФГ с i узлами. Заметим, что точка $\tilde x(s)$ не совпадает ни с одним из узлов ПКФГ, так как $\alpha_{s,0}\equiv0$ и ПКФГ — открытые формулы. Поэтому функции $\hat u_i^+(x,t)$ непрерывны на множестве $\overline{\Omega_D}\times I_T$.

Максимумы модулей абсолютных погрешностей
Table. Maximum modules of absolute errors

d	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-15}
$h_\tau=1/8$, $h_s=\pi/3$	$5.46\cdot10^{-2}$	$5.59\cdot10^{-2}$	$5.60\cdot10^{-2}$	$5.60\cdot10^{-2}$	$5.60\cdot10^{-2}$
	$5.45\cdot10^{-2}$	$2.25\cdot10^{-1}$	$7.31\cdot10^{-1}$	$7.97\cdot10^{-1}$	$8.05\cdot10^{-1}$
	$5.46\cdot10^{-2}$	$5.79\cdot10^{-2}$	$5.39\cdot10^{-1}$	$7.76\cdot10^{-1}$	$8.05\cdot10^{-1}$
	$5.46\cdot10^{-2}$	$5.59\cdot10^{-2}$	$8.88\cdot10^{-2}$	$6.95\cdot10^{-1}$	$8.05\cdot10^{-1}$
$h_\tau=1/16$, $h_s=\pi/7$	$5.48\cdot10^{-3}$	$5.78\cdot10^{-3}$	$5.81\cdot10^{-3}$	$5.81\cdot10^{-3}$	$5.81\cdot10^{-3}$
	$5.97\cdot10^{-3}$	$2.47\cdot10^{-1}$	$9.38\cdot10^{-1}$	$1.02\cdot10^{0}$	$1.03\cdot10^{0}$
	$5.48\cdot10^{-3}$	$3.52\cdot10^{-2}$	$6.77\cdot10^{-1}$	$9.97\cdot10^{-1}$	$1.03\cdot10^{0}$
	$5.48\cdot10^{-3}$	$5.78\cdot10^{-3}$	$6.11\cdot10^{-2}$	$8.90\cdot10^{-1}$	$1.03\cdot10^{0}$
$h_\tau=1/32$, $h_s=\pi/15$	$5.65\cdot10^{-4}$	$6.37\cdot10^{-4}$	$6.45\cdot10^{-4}$	$6.46\cdot10^{-4}$	$6.46\cdot10^{-4}$
	$5.65\cdot10^{-4}$	$2.72\cdot10^{-2}$	$9.13\cdot10^{-1}$	$1.10\cdot10^{0}$	$1.13\cdot10^{0}$
	$5.65\cdot10^{-4}$	$2.22\cdot10^{-3}$	$4.03\cdot10^{-1}$	$1.04\cdot10^{0}$	$1.13\cdot10^{0}$
	$5.65\cdot10^{-4}$	$6.37\cdot10^{-4}$	$5.33\cdot10^{-2}$	$8.10\cdot10^{-1}$	$1.13\cdot10^{0}$
$h_\tau=1/64$, $h_s=\pi/31$	$5.70\cdot10^{-5}$	$7.38\cdot10^{-5}$	$7.57\cdot10^{-5}$	$7.59\cdot10^{-5}$	$7.59\cdot10^{-5}$
	$5.69\cdot10^{-5}$	$3.01\cdot10^{-2}$	$7.26\cdot10^{-1}$	$1.12\cdot10^{0}$	$1.17\cdot10^{0}$
	$5.70\cdot10^{-5}$	$1.01\cdot10^{-4}$	$3.76\cdot10^{-2}$	$9.92\cdot10^{-1}$	$1.17\cdot10^{0}$
	$5.70\cdot10^{-5}$	$7.38\cdot10^{-5}$	$2.32\cdot10^{-3}$	$5.35\cdot10^{-1}$	$1.17\cdot10^{0}$
$h_\tau=1/128$, $h_s=\pi/63$	$5.09\cdot10^{-6}$	$8.69\cdot10^{-6}$	$9.16\cdot10^{-6}$	$9.21\cdot10^{-6}$	$9.21\cdot10^{-6}$
	$5.09\cdot10^{-6}$	$2.41\cdot10^{-3}$	$3.72\cdot10^{-1}$	$1.09\cdot10^{0}$	$1.19\cdot10^{0}$
	$5.09\cdot10^{-6}$	$9.51\cdot10^{-6}$	$5.21\cdot10^{-2}$	$8.32\cdot10^{-1}$	$1.19\cdot10^{0}$
	$5.09\cdot10^{-6}$	$8.69\cdot10^{-6}$	$5.39\cdot10^{-4}$	$1.41\cdot10^{-1}$	$1.19\cdot10^{0}$

Функции u_+, $\tilde{u}_+$, $\hat{u}_i^+$ вычисляются с двойной точностью при фиксированных $d \in (0, D]$ в точках $\big(\tilde{x}_d(s_{l+1/2}), \tau_{n+1/2}\big)$ ($s_{l+1/2} \equiv (l + 2^{-1})h_s$, $l = \overline{-L-1, L}$; $\tau_{n+1/2} \equiv (n + 2^{-1})h_\tau$, $n = \overline{0, N-1}$). При фиксированных d находим максимумы модулей абсолютных погрешностей приближенных решений: $\Delta\tilde{u}_+ \equiv \max\limits_{l,n} |\tilde{u}_+ - u_+|$, $\Delta\hat{u}_i^+ \equiv \max\limits_{l,n} \big|\hat{u}_i^+ - u_+\big|$. В таблице в каждой основной ячейке представлены значения $\Delta\tilde{u}_+$, $\Delta\hat{u}_{12}^+$, $\Delta\hat{u}_{24}^+$, $\Delta\hat{u}_{48}^+$ в соответствующем порядке сверху вниз.

Можно заметить, что даже при очень малых расстояниях до границы $\partial\Omega$ сохраняется кубическая скорость сходимости аппроксимаций $\tilde{u}_+$, что хорошо согласуется со следствием 2. Скорость сходимости аппроксимаций $\hat{u}_i^+$ снижается от кубической до нулевой по мере приближения к границе $\partial\Omega$ при фиксированных шагах дискретизации h_τ, h_s и восстанавливается до кубической при $h_\tau, h_s \to +0$ и фиксированных d. Так как аппроксимации $\hat{u}_i^+$ и $\tilde{u}_+$ отличаются только способом вычисления НП ТППС в области Ω_D, это свидетельствует о том, что равномерная сходимость в Ω_D у традиционных аппроксимаций НП ППС отсутствует, хотя они и сходятся равномерно с кубической скоростью в любой замкнутой подобласти области Ω_D.

Заключение

На основе кусочно-квадратичной интерполяции получены полуаналитические аппроксимации НП ТППС, сходящиеся с кубической скоростью равномерно вблизи границы двумерной области. Такие аппроксимации практически и теоретически осуществимы для любой аналитически заданной границы класса C^5.

Список литературы

1. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. Москва : Мир, 1987. 524 с.
2. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики : в 5 т. Т. 4, ч. 2. Москва : Наука, 1981. 550 с.
3. *Zhang Y.-M., Gu Y., Chen J.-T.* Stress analysis for multilayered coating systems using semianalytical BEM with geometric non-linearities // Computational Mechanics. 2011. Vol. 47, iss. 5. P. 493–504. https://doi.org/10.1007/s00466-010-0559-0
4. *Gu Y., Chen W., Zhang B., Qu W.* Two general algorithms for nearly singular integrals in two dimensional anisotropic boundary element method // Computational Mechanics. 2014. Vol. 53, iss. 6. P. 1223–1234. https://doi.org/10.1007/s00466-013-0965-1
5. *Niu Z., Cheng Ch., Zhou H., Hu Z.* Analytic formulations for calculating nearly singular integrals in two-dimensional BEM // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2007. Vol. 31, iss. 12. P. 949–964. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.05.001
6. *Niu Z., Hu Z., Cheng Ch., Zhou H.* A novel semi-analytical algorithm of nearly singular integrals on higher order elements in two dimensional BEM // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2015. Vol. 61. P. 42–51. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.06.007
7. *Иванов Д. Ю.* Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы двумерной области с помощью полуаналитической аппроксимации теплового потенциала двойного слоя // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 30–52. https://doi.org/10.17223/19988621/65/3
8. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы : в 3 т. Т. 1: Общая теория. Москва : Изд-во иностранной литературы, 1962. 896 с.
9. *Иванов Д. Ю.* Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы области в случае двумерных задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями второго и третьего рода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 57. С. 5–25. https://doi.org/10.17223/19988621/57/1
10. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений : в 2 т. Т. 1. Москва : Физматгиз, 1962. 464 с.

References

1. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. *Boundary element techniques: Theory and applications in engineering*. Berlin, Springer-Verlag, 1984. 464 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-48860-3 (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1987. 524 p.).
2. Smirnov V. I. *Kurs vysshey matematiki* [A course of higher mathematics]. Vol. 4, pt. 2. Moscow, Nauka, 1981. 550 p. (in Russian).

3. Zhang Y.-M., Gu Y., Chen J.-T. Stress analysis for multilayered coating systems using semi-analytical BEM with geometric non-linearities. *Computational Mechanics*, 2011, vol. 47, iss. 5, pp. 493–504. https://doi.org/10.1007/s00466-010-0559-0
4. Gu Y., Chen W., Zhang B., Qu W. Two general algorithms for nearly singular integrals in two dimensional anisotropic boundary element method. *Computational Mechanics*, 2014, vol. 53, iss. 6, pp. 1223–1234. https://doi.org/10.1007/s00466-013-0965-1
5. Niu Z., Cheng C., Zhou H., Hu Z. Analytic formulations for calculating nearly singular integrals in two-dimensional BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2007, vol. 31, iss. 12, pp. 949–964. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.05.001
6. Niu Z., Hu Z., Cheng C., Zhou H. A novel semi-analytical algorithm of nearly singular integrals on higher order elements in two dimensional BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2015, vol. 61, pp. 42–51. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.06.007
7. Ivanov D. Yu. A refinement of the boundary element collocation method near the boundary of a two-dimensional domain using semianalytic approximation of the double layer heat potential. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2020, iss. 65, pp. 30–52 (in Russian). https://doi.org/10.17223/19988621/65/3
8. Dunford N., Schwartz J. T. *Linear operators. Part 1: General theory*. Hoboken, John Willey and Sons, 1988. 858 p. (Russ. ed.: Moscow, IL, 1962. 896 p.).
9. Ivanov D. Yu. A refinement of the boundary element collocation method near the boundary of domain in the case of two-dimensional problems of non-stationary heat conduction with boundary conditions of the second and third kind. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2019, iss. 57, pp. 5–25 (in Russian). https://doi.org/10.17223/19988621/57/1
10. Berezin I. S., Zhidkov N. P. *Metody vychisleniy* [Computing Methods]. Vol. 1. Moscow, Fizmatgiz, 1962. 464 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 12.04.2023
Принята к публикации / Accepted 03.05.2023
Опубликована / Published 29.11.2024