Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 526–535
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 526–535
https://mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-526-535, EDN: KYNPVY

Научная статья
УДК 512.542

О $\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторах и $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающих подгруппах конечных групп

М. М. Сорокина✉, **Д. Г. Новикова**

Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского, Россия, 241036, г. Брянск, ул. Бежицкая, д. 14

Сорокина Марина Михайловна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, mmsorokina@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-9516-626X, AuthorID: 441219
Новикова Диана Геннадьевна, аспирант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, novikovadg@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-5935-5397, AuthorID: 1132164

Аннотация. Рассматриваются только конечные группы. $\mathfrak{F}$-проекторы и $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы, где $\mathfrak{F}$ — некоторый класс групп, введены в рассмотрение В. Гашюцем в качестве естественного обобщения силовских и холловых подгрупп в конечных группах. Развивая идею В. Гашюца, В. А. Ведерниковым и М. М. Сорокиной были определены $\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторы и $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающие подгруппы, где ω — непустое множество простых чисел, и установлены их ключевые характеристики. Цель настоящей работы — изучение свойств $\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторов и $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающих подгрупп, устанавливающих их взаимосвязь с другими подгруппами в группах. Решены следующие задачи: для непустого ω-примитивно замкнутого гомоморфа $\mathfrak{F}$ и заданного множества π простых чисел установлены условия совпадения $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектора группы с ее π-холловой подгруппой; для заданной формации $\mathfrak{F}$ установлена взаимосвязь между $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающими подгруппами группы $G = A \rtimes B$ и $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающими подгруппами группы B. В работе используются классические методы доказательств теории конечных групп, а также методы теории классов групп.

Ключевые слова: группа, конечная группа, класс групп, гомоморф, формация, $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор, $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа

Для цитирования: *Сорокина М. М., Новикова Д. Г.* О $\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторах и $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающих подгруппах конечных групп // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 526–535. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-526-535, EDN: KYNPVY

Article

On $\mathfrak{F}^{\omega}$-projectors and $\mathfrak{F}^{\omega}$-covering subgroups of finite groups

M. M. Sorokina✉, **D. G. Novikova**

Bryansk State Academician I. G. Petrovski University, 14 Bezhitskaya St., Bryansk 241036, Russia

Marina M. Sorokina, mmsorokina@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-9516-626X, AuthorID: 441219
Diana G. Novikova, novikovadg@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-5935-5397, AuthorID: 1132164

Abstract. Only finite groups are considered. $\mathfrak{F}$-projectors and $\mathfrak{F}$-covering subgroups, where $\mathfrak{F}$ is a certain class of groups, were introduced into consideration by W. Gaschutz as a natural generalization of Sylow and

Hall subgroups in finite groups. Developing Gaschutz's idea, V. A. Vedernikov and M. M. Sorokina defined $\mathfrak{F}^\omega$-projectors and $\mathfrak{F}^\omega$-covering subgroups, where ω is a non-empty set of primes, and established their main characteristics. The purpose of this work is to study the properties of $\mathfrak{F}^\omega$-projectors and $\mathfrak{F}^\omega$-covering subgroups, establishing their relation with other subgroups in groups. The following tasks are solved: for a non-empty ω-primitively closed homomorph $\mathfrak{F}$ and a given set π of primes, the conditions under which an $\mathfrak{F}^\omega$-projector of a group coincides with its π-Hall subgroup are established; for a given formation $\mathfrak{F}$, a relation between $\mathfrak{F}^\omega$-covering subgroups of a group $G = A \rtimes B$ and $\mathfrak{F}^\omega$-covering subgroups of the group B is obtained. In the paper classical methods of the theory of finite groups, as well as methods of the theory of classes of groups are used.

Keywords: group, finite group, class of groups, homomorph, formation, $\mathfrak{F}^\omega$-projector, $\mathfrak{F}^\omega$-covering subgroup

For citation: Sorokina M. M., Novikova D. G. On $\mathfrak{F}^\omega$-projectors and $\mathfrak{F}^\omega$-covering subgroups of finite groups. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 526–535 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-526-535, EDN: KYNPVY

Посвящается светлой памяти
Виктора Александровича Ведерникова

Введение

Рассматриваются только конечные группы и классы конечных групп. Классом групп называется множество групп, содержащее вместе с каждой группой и все группы, ей изоморфные. Среди классов групп центральное место занимают формации, введенные в рассмотрение В. Гашюцем в работе [1].

С помощью функциональных методов В. Гашюц построил локальные формации, наиболее изученные в настоящее время и нашедшие многочисленные применения в теории групп. Обобщением понятия локальной формации является понятие примитивно замкнутого гомоморфа, а именно Г. Шунк в работе [2] доказал, что всякая локальная формация является примитивно замкнутым гомоморфом.

Другим естественным обобщением понятия локальной формации является введенное в рассмотрение Л.А. Шеметковым в [3] понятие ω-локальной формации, где ω — непустое множество простых чисел. В работе [4] были определены ω-примитивно замкнутые гомоморфы и установлено, что всякая ω-локальная формация является ω-примитивно замкнутым гомоморфом.

В. Гашюцем для локальной формации $\mathfrak{F}$ в разрешимой группе были введены в рассмотрение $\mathfrak{F}$-проекторы [5] и $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы [1]. Эти понятия являются естественным обобщением понятий холловой и картеровой подгрупп, а именно в разрешимой группе множество всех π-холловых (нильпотентных) подгрупп совпадает с совокупностью всех ее $\mathfrak{G}_\pi$-покрывающих ($\mathfrak{N}$-покрывающих) подгрупп, где $\mathfrak{G}_\pi$ и $\mathfrak{N}$ — классы всех π-групп и всех нильпотентных групп соответственно. Отметим, что в классе всех разрешимых групп понятия $\mathfrak{F}$-проектора и $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппы совпадают. Многие важные свойства данных видов подгрупп в случае, когда $\mathfrak{F}$ является локальной формацией, были установлены Р. Картером, Т. Хоуксом, К. Дерком, Б. Хуппертом, Л. А. Шеметковым, Э. Ф. Шмигиревым, П. Шмидом, В. А. Ведерниковым, С. Ф. Каморниковым, Т. И. Васильевой и др. (см., например, [6–8]). Свойства $\mathfrak{F}$-проекторов и $\mathfrak{F}$-покрывающих подгрупп в группах для примитивно замкнутого гомоморфа $\mathfrak{F}$ изучались в работах [9, 10] и др.

В работе [4] для непустого класса групп $\mathfrak{F}$ были определены $\mathfrak{F}^\omega$-проекторы и $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающие подгруппы и получен ряд их ключевых свойств (существование, сопряженность, вложение и др.) для случая, когда класс $\mathfrak{F}$ является ω-локальной формацией или ω-примитивно замкнутым гомоморфом. В работе [11] исследовалась взаимосвязь $\mathfrak{F}^\omega$-проекторов и нормальных ω-подгрупп в группах. Настоящая работа продолжает исследования в данном направлении: изучаются условия, при которых $\mathfrak{F}^\omega$-проекторы и $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающие подгруппы совпадают с другими подгруппами в группе. Решены следующие задачи: для наследственного гомоморфа

$\mathfrak{X}$ и непустого ω-примитивно замкнутого в $\mathfrak{X}$ гомоморфа $\mathfrak{F}$ получены условия совпадения $\mathfrak{F}^\omega$-проектора нильпотентной ω-группы G с ее π-холловой подгруппой, где $\pi = \chi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ (теорема 1); для непустой формации $\mathfrak{H}$ и формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\omega\mathfrak{H}$ установлены условия, при которых $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы $G = A \rtimes B$ совпадает с $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой группы B (теорема 2). В качестве следствий из теоремы 1 вытекают известные свойства $\mathfrak{F}$-проекторов [12, гл. 5]. Теорема 2 развивает результаты С. Ф. Каморникова из [13] о $\mathfrak{F}$-покрывающих подгруппах.

1. Предварительные сведения

Используемые определения и обозначения для групп стандартны (см., например, [6, 7, 12]). Приведем лишь некоторые из них.

Запись $A \leqslant G$ ($A < G$, $A \lhd G$, $A < \cdot\, G$) означает, что A — подгруппа (соответственно собственная, нормальная, максимальная подгруппа) группы G; $A \rtimes B$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B группы G; $Core_G(H)$ — ядро подгруппы H в группе G; $\Phi(G)$ и $F(G)$ — подгруппа Фраттини и подгруппа Фиттинга группы G соответственно [12]. Запись $A := B$ означает равенство $A = B$ по определению.

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, π — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$; $p \in \mathbb{P}$. Тогда $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$, $p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$. Группа G называется *π-группой*, если $\pi(G) \subseteq \pi$, где $\pi(G)$ — совокупность всех простых делителей порядка группы G; $\pi(\mathfrak{F}) = \cup_{G\in\mathfrak{F}}\pi(G)$. Группа G называется *π-отделимой*, если для каждого ее главного фактора H/K имеет место $|\pi \cap \pi(H/K)| \leqslant 1$. Пусть p — простое число. Группа G называется *p-нильпотентной*, если $G_{p'} \lhd G$, где $G_{p'}$ — p'-холлова подгруппа группы G [6, с. 248]. Через $\mathfrak{G}$ обозначается класс всех конечных групп; $\chi(\mathfrak{F})$ — характеристика класса групп $\mathfrak{F}$, т.е. множество всех простых чисел p, для которых в $\mathfrak{F}$ имеется неединичная p-группа [12, с. 165].

Класс $\mathfrak{F}$ называется *гомоморфом*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно гомоморфных образов, т.е. из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$ следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Гомоморф $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно подпрямых произведений, т. е. из $G/A \in \mathfrak{F}$ и $G/B \in \mathfrak{F}$ следует, что $G/(A \cap B) \in \mathfrak{F}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется *наследственным* (*нормально наследственным*), если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно подгрупп (нормальных подгрупп), т. е. из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \leqslant G$ ($N \lhd G$) следует, что $N \in \mathfrak{F}$. Нормально наследственный класс $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, т.е. из $G = AB$, где $A \lhd G$, $B \lhd G$, $A, B \in \mathfrak{F}$, следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется *формацией Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ является формацией и классом Фиттинга. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация Фиттинга. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. наименьшая нормальная подгруппа в G, фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$; $G_{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-радикал группы G, т.е. наибольшая нормальная подгруппа в G, принадлежащая $\mathfrak{F}$ [6, гл. 1, § 1].

Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. Подгруппа H группы G называется *$\mathfrak{F}$-максимальной в G*, если $H \in \mathfrak{F}$ и из $H \leqslant K \leqslant G$ и $K \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $K = H$ [12, с. 169].

Произведением классов групп $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ называется класс групп следующего вида:

$$\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = \{G \in \mathfrak{G} \mid \exists\ N \lhd G \text{ такая, что } N \in \mathfrak{F}_1 \text{ и } G/N \in \mathfrak{F}_2\}.$$

Если $\mathfrak{F}_2$ — непустая формация, то $\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_1\}$ — *корадикальное произведение* классов $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ [7, с. 337]; если $\mathfrak{F}_1$ — непустой класс Фиттинга, то $\mathfrak{F}_1 \diamond \mathfrak{F}_2 = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\mathfrak{F}_1} \in \mathfrak{F}_2\}$ — *радикальное произведение* классов $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ [7, с. 566].

В дальнейшем ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$; $\mathfrak{F}_\omega$ — класс всех ω-групп, принадлежащих классу $\mathfrak{F}$; $O_\omega(G)$ — наибольшая нормальная ω-подгруппа группы G. Формация $\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G) \cap \omega\}$ называется *ω-локальной формацией* с ω-спутником f, где f — отображение множества $\omega \cup \{\omega'\}$ во множество всех формаций групп, $F_p(G)$ — наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа группы G (см., например, [14, с. 46]).

Замечание 1. Всякая локальная формация является ω-локальной для любого ω. Если $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, то ω-локальная формация $\mathfrak{F}$ является локальной формацией (см., например, [14, следствия 3.2 и 4.2]).

Класс $\mathfrak{F}$ называется *насыщенным* (ω-*насыщенным*), если для любой $N \lhd G$ такой, что $N \leqslant \Phi(G)$ (соответственно $N \leqslant \Phi(G) \cap O_\omega(G)$), справедливо: из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$ [7, с. 272] (соответственно, [15, с. 118]).

Замечание 2. Согласно теореме Гашюца – Любезедер – Шмидта [7, (IV, 4.6)], непустая формация является насыщенной тогда и только тогда, когда она является локальной. В [15, теорема 1] установлена эквивалентность понятий ω-насыщенной и ω-локальной формаций.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — непустые классы групп, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется *примитивно замкнутым в* $\mathfrak{X}$ или, коротко, P-*замкнутым в* $\mathfrak{X}$, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ справедливо: из $G/Core_G(M) \in \mathfrak{F}$ для любой $M < \cdot\, G$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$ (см., например, [7, с. 285]). Класс $\mathfrak{F}$ называется ω-*примитивно замкнутым в* $\mathfrak{X}$ или, коротко, ωP-*замкнутым в* $\mathfrak{X}$, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ справедливо: из $G/(Core_G(M) \cap O_\omega(G)) \in \mathfrak{F}$ для любой $M < \cdot\, G$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$ [4, определение 2.5]. Класс $\mathfrak{F}$ называется *примитивно замкнутым* (ω-*примитивно замкнутым*), если $\mathfrak{F}$ является примитивно замкнутым (ω-примитивно замкнутым) в $\mathfrak{G}$. Примитивно замкнутый гомоморф называется *классом Шунка* [12, с. 163].

Замечание 3. Согласно [4, лемма 2.2] всякий примитивно замкнутый в $\mathfrak{X}$ гомоморф является ω-примитивно замкнутым в $\mathfrak{X}$ для любого ω. Если $\omega = \pi(\mathfrak{F})$, то ω-примитивно замкнутый в $\mathfrak{X}$ класс $\mathfrak{F}$ является примитивно замкнутым в $\mathfrak{X}$ [4, замечание 2.3]. Непустая формация $\mathfrak{F}$ ω-примитивно замкнута тогда и только тогда, когда она ω-насыщенна [4, лемма 2.4]).

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}^\omega$-*проектором* в G, если для любой нормальной ω-подгруппы N группы G подгруппа HN/N является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G/N [4, определение 3.1]. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}^\omega$-*покрывающей подгруппой* группы G, если $H \in \mathfrak{F}$, и из того, что $H \leqslant U \leqslant G$, V — нормальная ω-подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$, следует, что $U = HV$ [4, определение 3.2].

Замечание 4. Если $\pi(G) \subseteq \omega$, то понятия $\mathfrak{F}^\omega$-проектора и $\mathfrak{F}$-проектора ($\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппы и $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппы) совпадают [4, замечание 3.1].

При доказательстве основных результатов используются следующие леммы.

Лемма 1 ([4, лемма 3.2]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Если H — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G и N — нормальная ω-подгруппа в G, то HN/N является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором в G/N.*

Лемма 2 ([4, лемма 3.3]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — гомоморф. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой группы G тогда и только тогда, когда H является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором каждой подгруппы группы G, в которой H содержится.*

Лемма 3 ([4, лемма 3.4 (2)]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — гомоморф. Если H — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G и $H \leqslant K \leqslant G$, то H — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в K.*

Лемма 4 ([16, теорема 2]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация. Если $\mathfrak{F}$-корадикал группы G является $\pi(\mathfrak{F})$-отделимой ω-группой, то G имеет, по крайней мере, одну $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающую подгруппу ($\mathfrak{F}^\omega$-проектор) и любые две $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающие подгруппы (любые два $\mathfrak{F}^\omega$-проектора) из G сопряжены в G.*

Лемма 5 ([4, теорема 3.4]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ — непустой ω-примитивно замкнутый в $\mathfrak{X}$ гомоморф, $G \in \mathfrak{X}$, N — нильпотентная нормальная ω-подгруппа группы G. Если H — $\mathfrak{F}$-подгруппа в G такая, что $G = HN$, то H содержится в некоторой $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппе из G. В частности, если H — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G, то H является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в G.*

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ — классы групп.*

(1) [7, (IV.1.7)] *Если $\mathfrak{F}_1$ — нормальный наследственный класс и $\mathfrak{F}_2$ — формация, то $\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$.*

(2) [7, (IX.1.11)] *Если $\mathfrak{F}_1$ — класс Фиттинга и $\mathfrak{F}_2$ — гомоморф, то $\mathfrak{F}_1 \diamond \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$.*

(3) [7, (IV.1.8.c)] *Если $\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_3$ — формации, то $(\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2) \circ \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_1 \circ (\mathfrak{F}_2 \circ \mathfrak{F}_3)$.*

(4) [12, теорема 5.10 (2)] *Если $\mathfrak{F}_1$ — гомоморф и $\mathfrak{F}_2$ — формация, то $\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2$ — гомоморф.*

Лемма 7 ([17, с. 53])**.** *Всякая подгруппа π-отделимой группы π-отделима.*

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству теоремы 5.6 [12].

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ — непустой ω-примитивно замкнутый в $\mathfrak{X}$ гомоморф. Тогда $\mathfrak{F}_\omega \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{\chi(\mathfrak{F})\cap\omega}$.*

2. Основные результаты

2.1. $\mathfrak{F}^\omega$-проекторы и холловы подгруппы в группах

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ — непустой ω-примитивно замкнутый в $\mathfrak{X}$ гомоморф, $\pi = \chi(\mathfrak{F}) \cap \omega$, G — нильпотентная ω-группа из класса $\mathfrak{X}$. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором в G тогда и только тогда, когда H — π-холлова подгруппа в G.*

Доказательство. Пусть H — подгруппа группы G.

1. Предварительно установим, что H является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G в том и только в том случае, когда H — π-холлова подгруппа в G.

Пусть H — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G. Ввиду условия теоремы H является нильпотентной ω-группой. Тогда из $H \in \mathfrak{F}$ получаем $H \in \mathfrak{F}_\omega \cap \mathfrak{N}$. Согласно лемме 8 $\mathfrak{F}_\omega \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_\pi$. Следовательно, H является π-группой, и по теореме Холла подгруппа H содержится в некоторой π-холловой подгруппе P группы G. По условию теоремы подгруппа P является нильпотентной и поэтому $P \in \mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{F}_\omega \cap \mathfrak{N}$. Это означает, что $P \in \mathfrak{F}$. Тогда из $H \subseteq P$ в силу $\mathfrak{F}$-максимальности подгруппы H в G получаем, что $H = P$. Следовательно, подгруппа H является π-холловой в G.

Пусть теперь H — π-холлова подгруппа группы G. С учетом условия теоремы $H \in \mathfrak{N}_\pi$. Так как $\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{F}_\omega \cap \mathfrak{N}$, то $H \in \mathfrak{F}$. Тогда существует $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа K группы G, содержащая H. Поскольку K является нильпотентной ω-группой, принадлежащей $\mathfrak{F}$, то ввиду леммы 8 $K \in \mathfrak{N}_\pi$. Из того, что K — π-подгруппа группы G, H — π-холлова подгруппа группы G и $H \subseteq K$, получаем, что $H = K$. Тем самым установлено, что H является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы G.

2. Докажем, что подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором в G тогда и только тогда, когда H является π-холловой подгруппой в G.

Пусть H — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G. Тогда согласно определению $\mathfrak{F}^\omega$-проектора группы HN/N является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G/N для любой нормальной ω-подгруппы N группы G, и, в частности, при $N = 1$ получаем, что H является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G. По доказанному в пункте 1 данной теоремы заключаем, что H — π-холлова подгруппа группы G.

Пусть H является π-холловой подгруппой в G. Тогда, как следует из пункта 1 доказательства теоремы, H — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G. Так как $G = HG$, то по лемме 5 H — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G. Отсюда по лемме 2 получаем, что H является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором в G. □

Следствие 1 ([12, следствие 1 теоремы 5.23])**.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Шунка, G — нильпотентная группа. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}$-проектором в G тогда и только тогда, когда H — $\chi(\mathfrak{F})$-холлова подгруппа в G.*

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{F}$ — класс Шунка, т. е. примитивно замкнутый гомоморф в $\mathfrak{G}$, то по замечанию 3 $\mathfrak{F}$ — ω-примитивно замкнутый гомоморф в $\mathfrak{G}$ для любого ω. Пусть $\omega = \mathbb{P}$. Тогда G является ω-группой, $\chi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \chi(\mathfrak{F})$. Если $\mathfrak{F} \neq \varnothing$, то по теореме 1, с учетом замечания 4, утверждение верно. Если $\mathfrak{F} = \varnothing$, то справедливость утверждения очевидна. □

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация, $\pi = \chi(\mathfrak{F}) \cap \omega$, G — нильпотентная ω-группа. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором в G тогда и только тогда, когда H — π-холлова подгруппа группы G.*

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация, то $\mathfrak{F} \neq \varnothing$ и по замечанию 2 $\mathfrak{F}$ — ω-насыщенная формация. Тогда по замечанию 3 $\mathfrak{F}$ является ω-примитивно замкнутым гомоморфом в $\mathfrak{G}$ и по теореме 1 утверждение верно. □

Следствие 3 ([12, следствие 2 теоремы 5.23]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, G — нильпотентная группа. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}$-проектором в G тогда и только тогда, когда H — $\chi(\mathfrak{F})$-холлова подгруппа группы G.*

Доказательство. Если $\mathfrak{F} = \varnothing$, то справедливость утверждения очевидна. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация. Тогда по замечанию 2 $\mathfrak{F}$ — локальная формация и ввиду замечания 1 $\mathfrak{F}$ является ω-локальной формацией для любого ω. Пусть $\omega = \mathbb{P}$. Тогда G является ω-группой, $\chi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \chi(\mathfrak{F})$ и по следствию 2, с учетом замечания 4, утверждение верно. □

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация, $\pi = \chi(\mathfrak{F}) \cap \omega$, G — метанильпотентная ω-группа. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором в G тогда и только тогда, когда H — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G и $HF(G)/F(G)$ — π-холлова подгруппа группы $G/F(G)$.*

Доказательство. Пусть H — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G. Тогда по определению $\mathfrak{F}^\omega$-проектора группы H является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G. Поскольку $F(G)$ — нормальная ω-подгруппа в G, то по лемме 1 $HF(G)/F(G)$ — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы $G/F(G)$. Так как $G/F(G)$ — нильпотентная ω-группа, то по следствию 2 $HF(G)/F(G)$ — π-холлова подгруппа в $G/F(G)$.

Пусть теперь H — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G и $HF(G)/F(G)$ — π-холлова подгруппа в $G/F(G)$. Поскольку G — метанильпотентная ω-группа, то G является разрешимой, а значит, и $\pi(\mathfrak{F})$-отделимой ω-группой. Согласно лемме 7 $\mathfrak{F}$-корадикал группы G также является $\pi(\mathfrak{F})$-отделимой группой. Тогда по лемме 4 в G существует $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа. Пусть K — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G. Согласно лемме 2 K — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G и по лемме 1 $KF(G)/F(G)$ — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы $G/F(G)$. По следствию 2 $KF(G)/F(G)$ является π-холловой подгруппой в $G/F(G)$. Так как группа $G/F(G)$ нильпотентна, то $KF(G)/F(G) = HF(G)/F(G)$ и поэтому $KF(G) = HF(G) := G_1$. По лемме 5 подгруппа H является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой группы G_1, а значит, ввиду леммы 2 и $\mathfrak{F}^\omega$-проектором в G_1. Согласно леммам 2 и 3, K — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор в G_1.

Поскольку $\mathfrak{F}$-корадикал группы G_1 является $\pi(\mathfrak{F})$-отделимой ω-группой, то по лемме 4 H и K сопряжены в группе G_1, а следовательно, и в группе G, т.е. $H = K^g$ для некоторого $g \in G$. Так как K — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G, то H также является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в G и ввиду леммы 2 H есть $\mathfrak{F}^\omega$-проектор в G. □

Следствие 5 ([12, следствие 1 теоремы 5.24]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, G — метанильпотентная группа. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}$-проектором в G тогда и только тогда, когда H — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G и $HF(G)/F(G)$ — $\chi(\mathfrak{F})$-холлова подгруппа группы $G/F(G)$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{F} = \varnothing$, то утверждение верно. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация. Тогда по замечанию 2 $\mathfrak{F}$ — локальная формация и ввиду замечания 1 является ω-локальной формацией для любого ω. Пусть $\omega = \mathbb{P}$. Тогда $G/F(G)$ является нильпотентной ω-группой, $\chi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \chi(\mathfrak{F})$ и согласно следствию 4 и замечанию 4 утверждение верно. □

2.2. $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающие подгруппы в группах

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая формация, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\omega\mathfrak{H}$, $G = A \rtimes B$, A — ω-группа, $H \leqslant G$, $H \subseteq B$, $H_1 = HA$. Подгруппа H_1 группы G является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в G тогда и только тогда, когда H — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в B.*

Доказательство. Так как $A \lhd G$, то $H_1 \leqslant G$. Поскольку $A \lhd H_1$ и $A \cap H = 1$, то $H_1 = A \rtimes H$.

I. *Необходимость.* Пусть H_1 — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G. Установим, что H является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в B. Так как класс $\mathfrak{G}_\omega$ является нормально наследственным гомоморфом, то по лемме 6 (1, 4) класс $\mathfrak{F}$ также является гомоморфом. Тогда из $H_1 \in \mathfrak{F}$ следует, что $H \cong H_1/A \in \mathfrak{F}$.

Пусть $H \leqslant R \leqslant B$, L — нормальная ω-подгруппа в R и $R/L \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $R = HL$. Пусть $L_1 := AL, R_1 := AR$. Тогда $L_1 \subseteq R_1$. Поскольку $A \lhd G$, то $R_1 \leqslant G$ и $L_1 \leqslant G$, $H_1 \leqslant R_1 \leqslant G$. Из $R \subseteq B$ следует, что $A \cap L = 1$ и $A \cap R = 1$. Таким образом, $L_1 = A \rtimes L$, $R_1 = A \rtimes R$.

Установим, что L_1 — нормальная ω-подгруппа в R_1. Действительно, $|L_1| = |A| \cdot |L|$ — ω-число. Далее, для любого $x \in R_1$ справедливо $x = ra$, где $r \in R, a \in A$. Тогда ${L_1}^x = (AL)^x = AL^x = AL^{ra} = A(L^r)^a = AL = L_1$. Следовательно, $L_1 \lhd R_1$.

Проверим, что $R_1/L_1 \in \mathfrak{F}$. Так как по модулярному тождеству Дедекинда $R \cap AL = L(A \cap R) = L$, то $R_1/L_1 = RA/LA = RLA/LA \cong R/(R \cap LA) = R/L$. Поскольку $R/L \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — класс групп, то $R_1/L_1 \in \mathfrak{F}$.

Из того, что H_1 — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G, $H_1 \leqslant R_1 \leqslant G$, L_1 — нормальная ω-подгруппа в R_1 и $R_1/L_1 \in \mathfrak{F}$, согласно определению $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппы следует, что $R_1 = H_1L_1$. Тогда $R_1 = AHAL = AHL = A \rtimes HL$. Поскольку $R_1 = A \rtimes R$, то $|R| = |HL|$. Таким образом, $R = HL$. Это согласно определению $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппы означает, что H — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в B.

II. *Достаточность.* Пусть H — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы B. Покажем, что H_1 является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в G. Из $H_1 = A \rtimes H$, $A \in \mathfrak{G}_\omega$ и $H \in \mathfrak{F}$ по определению произведения классов групп следует, что $H_1 \in \mathfrak{G}_\omega\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{H}$ — формация и класс $\mathfrak{G}_\omega$ является нормально наследственной формацией, то ввиду леммы 6 (1, 3) $\mathfrak{G}_\omega\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\omega(\mathfrak{G}_\omega\mathfrak{H}) = \mathfrak{G}_\omega \circ (\mathfrak{G}_\omega \circ \mathfrak{H}) = (\mathfrak{G}_\omega \circ \mathfrak{G}_\omega) \circ \mathfrak{H} = \mathfrak{G}_\omega\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Таким образом, $H_1 \in \mathfrak{F}$.

Пусть $H_1 \leqslant U_1 \leqslant G$, V_1 — нормальная ω-подгруппа в U_1 такая, что $U_1/V_1 \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $U_1 = H_1V_1$. Пусть $K := B \cap U_1$. Установим, что $U_1 = A \rtimes K$. Действительно, согласно модулярному тождеству Дедекинда $U_1 = U_1 \cap G = U_1 \cap AB = A(U_1 \cap B) = AK$. Ввиду того, что $K \leqslant B$, получаем $K \cap A = 1$. Следовательно, $U_1 = A \rtimes K$.

Пусть $K_1 := V_1 \cap K, A_1 := V_1 \cap A$. Проверим, что $V_1 = A_1 \rtimes K_1$. Так как $A \lhd G$, то $A_1K_1 \leqslant V_1$. Поскольку $U_1 = A \rtimes K$, то

$$|U_1/V_1| = \frac{|A| \cdot |K|}{|V_1|}. \tag{1}$$

С другой стороны, $U_1/V_1 = AV_1/V_1 \cdot KV_1/V_1$. Пусть $X := AV_1/V_1$ и $Y := KV_1/V_1$. Тогда

$$|U_1/V_1| = \frac{|X| \cdot |Y|}{|X \cap Y|}.$$

Так как $X \cong A/A \cap V_1 = A/A_1, Y \cong K/K \cap V_1 = K/K_1, X \cap Y = (A \cap K)V_1/V_1 = V_1/V_1$, то $|U_1/V_1| = |X| \cdot |Y| = |A/A_1| \cdot |K/K_1|$. Следовательно, ввиду (1) приходим к равенству $|V_1| = |A_1| \cdot |K_1|$. Поскольку $A_1 \cap K_1 = 1$, то $|V_1| = |A_1K_1|$. Таким образом, $V_1 = A_1 \rtimes K_1$.

Поскольку $H \leqslant H_1 \leqslant U_1$ и $H \subseteq B$, то $H \subseteq U_1 \cap B = K$. Поэтому $H \leqslant K \leqslant B$. Так как V_1 — нормальная ω-подгруппа группы U_1, то K_1 — нормальная ω-подгруппа группы K. Установим, что $K/K_1 \in \mathfrak{F}$. Согласно лемме 6 (1, 4) класс $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\omega\mathfrak{H}$ является гомоморфом.

Тогда из $U_1/V_1 \in \mathfrak{F}$ следует, что $KV_1/V_1 \cong (U_1/V_1)/(AV_1/V_1) \in \mathfrak{F}$. Так как $KV_1/V_1 \cong K/K_1$, то $K/K_1 \in \mathfrak{F}$.

Таким образом, из того, что $H \leqslant K \leqslant B$, K_1 — нормальная ω-подгруппа в K и $K/K_1 \in \mathfrak{F}$, согласно определению $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппы получаем равенство $K = HK_1$. Тогда $U_1 = AK = AHK_1 = H_1K_1 = H_1K_1V_1 = H_1V_1$. Тем самым установлено, что H_1 — $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа группы G. $\square$

Следствие 6. *Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая формация, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\omega}\mathfrak{H}$, $G = A \rtimes B$, A — ω-холлова подгруппа в G, $H \leqslant G$, $H \subseteq B$, $H_1 = HA$. Подгруппа H_1 группы G является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой группы G тогда и только тогда, когда H — $\mathfrak{H}^{\omega}$-покрывающая подгруппа группы B.*

Доказательство. I. *Необходимость.* Пусть H_1 — $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа группы G. Тогда по теореме 2 H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в B. Установим, что H — $\mathfrak{H}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в B. Так как по лемме 6 (2) $H_1 = A \rtimes H \in \mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\omega}\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\omega} \diamond \mathfrak{H}$ и A — ω-холлова подгруппа в G, то по определению радикального произведения классов групп $H \cong H_1/A = H_1/O_{\omega}(H_1) \in \mathfrak{H}$, т.е. $H \in \mathfrak{H}$.

Пусть $H \leqslant R \leqslant B$, L — нормальная ω-подгруппа в R и $R/L \in \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, то $R/L \in \mathfrak{F}$. Поскольку H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в B, то $R = HL$. Это означает, что H — $\mathfrak{H}^{\omega}$-покрывающая подгруппа группы B.

II. *Достаточность.* Пусть H — $\mathfrak{H}^{\omega}$-покрывающая подгруппа группы B. Покажем, что H_1 является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в G. Из $H_1 = A \rtimes H$, $A \in \mathfrak{G}_{\omega}$ и $H \in \mathfrak{H}$ по определению произведения классов групп следует, что $H_1 \in \mathfrak{G}_{\omega}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$.

Пусть $H_1 \leqslant U_1 \leqslant G$, V_1 — нормальная ω-подгруппа в U_1 такая, что $U_1/V_1 \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $U_1 = H_1V_1$. Пусть $K := B \cap U_1$. $K_1 := V_1 \cap K$, $A_1 := V_1 \cap A$. Тогда, как и при доказательстве теоремы 2, $U_1 = A \rtimes K$ и $V_1 = A_1 \rtimes K_1$, $H \leqslant K \leqslant B$ и K_1 — нормальная ω-подгруппа группы K.

Установим, что $K/K_1 \in \mathfrak{H}$. Поскольку A — ω-холлова подгруппа группы G и $A \subseteq U_1$, то A — ω-холлова подгруппа в U_1. Тогда AV_1/V_1 — ω-холлова подгруппа в U_1/V_1 и, значит, $AV_1/V_1 = O_{\omega}(U_1/V_1)$. Из $U_1/V_1 \in \mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\omega} \diamond \mathfrak{H}$ по определению радикального произведения классов групп следует, что $K/K_1 \cong KV_1/V_1 \cong (U_1/V_1)/(AV_1/V_1) = (U_1/V_1)/O_{\omega}(U_1/V_1) \in \mathfrak{H}$.

Таким образом, из того, что H — $\mathfrak{H}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в B, $H \leqslant K \leqslant B$, K_1 — нормальная ω-подгруппа в K и $K/K_1 \in \mathfrak{H}$, согласно определению $\mathfrak{H}^{\omega}$-покрывающей подгруппы получаем равенство $K = HK_1$. Тогда, как и при доказательстве теоремы 2, $U_1 = AHK_1 = H_1V_1$. Тем самым установлено, что H_1 — $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа группы G. $\square$

Заключение

В работе решены две задачи:

1) для заданного класса групп $\mathfrak{F}$ и фиксированного множества π простых чисел установлена взаимосвязь $\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторов и π-холловых подгрупп нильпотентной ω-группы (теорема 1);

2) для заданного класса групп $\mathfrak{F}$ установлена взаимосвязь $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающих подгрупп группы $G = A \rtimes B$ и $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающих подгрупп ее подгруппы B (теорема 2).

Приведенные следствия теоремы 1 представляют известные результаты о $\mathfrak{F}$-проекторах групп (см., например, [12, гл. 5]). Теорема 2 развивает результаты С. Ф. Каморникова из [13] о $\mathfrak{F}$-покрывающих подгруппах групп (см. [13, лемма 2]).

Список литературы

1. *Gaschütz W.* Zur theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Mathematische Zeitschrift. 1962. Vol. 80, iss. 4. P. 300–305. https://doi.org/10.1007/BF01162386
2. *Schunck H.* $\mathfrak{H}$-Untergruppen in endlichen auflösbaren gruppen // Mathematische Zeitschrift. 1967. Vol. 97, iss. 4. P. 326–330. https://doi.org/10.1007/BF01112173
3. *Шеметков Л. А.* О произведении формаций // Доклады АН БССР. 1984. Т. 28, № 2. С. 101–103.
4. *Ведерников В. А., Сорокина М. М.* $\mathfrak{F}$-проекторы и $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы конечных групп // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, № 6. С. 1224–1239. https://doi.org/10.17377/smzh.2016.57.603, EDN: XBEDHB

5. *Gaschütz W.* Lectures on Subgroups of Sylow type in finite soluble groups. Canberra : Australian National University, 1979. 100 p. (Notes on pure mathematics, vol. 11).
6. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. Москва : Наука, 1978. 272 с.
7. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
8. *Васильева Т. И., Прокопенко А. И.* Проекторы и решетки нормальных подгрупп конечных групп // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2004. Т. 48, № 4. С. 34–37. EDN: YYBIBN
9. *Erickson R.* Projectors of finite groups // Communication in Algebra. 1982. Vol. 10, iss. 18. P. 1919–1938. https://doi.org/10.1080/00927878208822814
10. *Förster P.* Projektive Klassen endlicher Gruppen I. Schunck- und Gaschutzklassen // Mathematische Zeitschrift. 1984. Vol. 186. P. 149–178. https://doi.org/10.1007/BF01161802
11. *Васильева Т. И.* О пересечениях обобщенных проекторов с произведениями нормальных подгрупп конечных групп //Проблемы физики, математики и техники. 2019. № 2 (39). С. 61–65. EDN: ZBSSKX
12. *Монахов В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск : Вышэйшая школа, 2006. 207 с.
13. *Каморников С. Ф.* О формационных подгруппах конечных групп // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Труды Гомельского семинара / под. ред. М. И. Салука. Минск : Наука и техника. 1986. С. 69–74.
14. *Ведерников В. А., Сорокина М. М.* ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки. 2002. Т. 71, № 1. С. 43–60. https://doi.org/10.4213/mzm327, EDN: GJVNYM
15. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
16. *Ведерников В. А., Сорокина М. М.* On properties of $\mathfrak{F}^{\omega}$-projectors and $\mathfrak{F}^{\omega}$-covering subgroups of finite groups // Актуальные проблемы прикладной математики и физики : международная научная конференция, Нальчик – Терскол, 17–21 мая 2017 г. Нальчик : ИПМА КБНЦ РАН, 2017. С. 262–263.
17. *Чунихин С. А.* Подгруппы конечных групп. Минск : Наука и техника, 1964. 158 с.

References

1. Gaschütz W. Zur theorie der endlichen auflösbaren Gruppen. *Mathematische Zeitschrift*, 1962, vol. 80, iss. 4, pp. 300–305 (in German). https://doi.org/10.1007/BF01162386
2. Schunck H. $\mathfrak{H}$-Untergruppen in endlichen auflösbaren gruppen. *Mathematische Zeitschrift*, 1967, vol. 97, iss. 4, pp. 326–330 (in German). https://doi.org/10.1007/BF01112173
3. Shemetkov L. A. On the product of formations. *Doklady AN BSSR*, 1984, vol. 28, iss. 2. pp. 101–103 (in Russian).
4. Vedernikov V. A., Sorokina M. M. $\mathfrak{F}$-projectors and $\mathfrak{F}$-covering subgroups of finite groups. *Siberian Mathematical Journal*, 2016, vol. 57, iss. 6, pp. 957–968. https://doi.org/10.1134/S0037446616060033, EDN: XBEDHB
5. Gaschutz W. *Lectures on Subgroups of Sylow type in finite soluble groups*. Notes on pure mathematics, vol. 11. Canberra, Australian National University, 1979. 100 p.
6. Shemetkov L. A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of finite groups]. Moscow, Nauka, 1978. 272 p. (in Russian).
7. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups*. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
8. Vasil'eva T. I., Prokopenko A. I. Projectors and lattices of normal subgroups of finite groups. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2004, vol. 48, iss. 4, pp. 34–37 (in Russian). EDN: YYBIBN
9. Erickson R. P. Projectors of finite groups. *Communications in Algebra*, 1982, vol. 10, iss. 18, pp. 1919–1938. https://doi.org/10.1080/00927878208822814
10. Förster P. Projektive Klassen endlicher Gruppen I. Schunck- und Gaschützklassen. *Mathematische Zeitschrift*, 1984, vol. 186, pp. 149–178 (in German). https://doi.org/10.1007/BF01161802
11. Vasilyeva T. I. On the intersections of generalized projectors with the products of normal subgroups of finite groups. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2019, iss. 2 (39), pp. 61–65 (in Russian). EDN: ZBSSKX
12. Monakhov V. S. *Vvedenie v teoriyu konechnykh grupp i ikh klassov* [Introduction to the theory of finite groups and their classes]. Minsk, Vysheyshaya shkola, 2006. 207 p. (in Russian).
13. Kamornikov S. F. On formation subgroups of finite groups. In: Saluk M. I. (ed.) *Arifmeticheskoe i*

podgruppovoe stroenie konechnykh grupp. Trudy Gomel'skogo seminara [Arithmetic and Subgroup Structure of Finite Groups. Work of the Gomel Seminar]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1986, pp. 69–74 (in Russian).

14. Vedernikov V. A., Sorokina M. M. ω-fibered formations and Fitting classes of finite groups. *Mathematical Notes*, 2002, vol. 71, iss. 1, pp. 39–55. https://doi.org/10.1023/A:1013922206539, EDN: GJVNYM
15. Skiba A. N., Shemetkov L. A. Multiple ω-local formations and Fitting classes of finite groups. *Siberian Advances in Mathematics*, 2000, vol. 10, iss. 2, pp. 112–141.
16. Vedernikov V. A., Sorokina M. M. On properties of $\mathfrak{F}^{\omega}$-projectors and $\mathfrak{F}^{\omega}$-covering subgroups of finite groups. In: *Actual Problems of Applied Mathematics and Physics*, May 17–21, 2017, Nalchik – Terskol. Nalchik, IAMA KBSC RAS, 2017, pp. 262–263 (in Russian).
17. Chunikhin S. A. *Podgruppy konechnykh grupp* [Subgroups of finite groups]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1964. 158 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 19.05.2023
Принята к публикации / Accepted 03.07.2023
Опубликована / Published 29.11.2024