



Научная статья  
УДК 531.383

## Несовершенства кварцевого стекла и их влияние на динамику резонатора ВТГ

С. А. Шевченко✉, Б. Е. Мельников

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия, 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29

**Шевченко Сергей Александрович**, инженер Высшей школы механики и процессов управления, shevchenko.sergei.a@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3367-416X>, AuthorID: 1009774

**Мельников Борис Евгеньевич**, доктор технических наук, профессор Высшей школы механики и процессов управления, melnikov\_be@spbstu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7889-1996>, AuthorID: 2861

**Аннотация.** В работе представлена инженерная оценка уровня разброса значений таких физико-механических свойств кварцевого стекла, как плотность и модуль упругости. Наличие разброса значений рассматриваемых параметров по объему материала приводит к появлению негативного эффекта — расщеплению рабочей собственной частоты резонатора гироскопа. Оценка проводится на основе рассмотрения микроструктуры кварцевого стекла и переменности ее параметров. Как результат, представлены значения расщепления частоты резонатора от расчетных уровней разброса свойств конструкционного материала.

**Ключевые слова:** кварцевое стекло, волновой твердотельный гироскоп, аморфное состояние, кристаллическая структура, расщепление частоты

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-71-10009).

**Для цитирования:** Шевченко С. А., Мельников Б. Е. Несовершенства кварцевого стекла и их влияние на динамику резонатора ВТГ // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 611–618. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-611-618>, EDN: UCIQBF

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Fused quartz imperfections and their influence on the CVG resonator dynamics

S. A. Shevchenko✉, B. E. Melnikov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 29 Polytechnicheskaya St., St. Petersburg 195251, Russia

**Sergei A. Shevchenko**, shevchenko.sergei.a@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3367-416X>, AuthorID: 1009774

**Boris E. Melnikov**, melnikov\_be@spbstu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7889-1996>, AuthorID: 2861

**Abstract.** The paper presents the engineering estimate of the dispersion level of the values of such fused quartz glass physical and mechanical properties as density and elasticity modulus. The value scatter of the considered parameters over material volume leads to negative effect appearance — working natural frequency splitting of gyroscope resonator. Evaluation is carried out on the basis of the consideration of the fused quartz glass micro-structure and variability of its parameters. As a result, resonator frequency splitting values from calculated scattering levels of the structural material properties are presented.



**Keywords:** fused quartz glass, Coriolis vibratory gyroscope, amorphous state, crystalline substance, frequency split

**Acknowledgements:** The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 21-71-10009).

**For citation:** Shevchenko S. A., Melnikov B. E. Fused quartz imperfections and their influence on the CVG resonator dynamics. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 611–618 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-611-618>, EDN: UCIQBF

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Физико-механические (и пр.) свойства конструкционных материалов, используемых при изготовлении изделий, напрямую определяют их технические характеристики, поэтому еще на этапе проектирования необходимо не просто знать справочные значения данных материалов, а еще и уметь оценивать их зависимость от различных факторов или определять величину отклонения от стандартной величины.

В приборостроении в целом и в гироскопии в частности, где проектируются приборы, предназначенные для определения положения объектов в инерциальном пространстве [1–3], ввиду малости измеряемых величин любое несовершенство (неидеальность) конструкции, в том числе проявленное в виде переменных по объему физико-механических свойств, существенно сказывается на работе. В настоящей статье рассматривается один из наиболее перспективных в настоящее время измерительных приборов инерциальной навигации — волновой твердотельный гироскоп (ВТГ) [4, 5], а именно инженерная оценка разброса таких параметров, как плотность и модуль упругости, основанная на информации о структуре применяемого материала, с последующей оценкой влияния на работу прибора.

Принцип работы ВТГ основан на эффекте инертности упругих волн [6], возбуждаемых в твердом теле, поэтому к рассмотрению принимается чувствительный элемент ВТГ — его резонатор. Резонатор ВТГ представляет собой тонкостенную оболочку, как правило, цилиндрической или полусферической формы, в которой возбуждается стоячая волна упругих колебаний, используемая в дальнейшем, например, для измерения угла поворота объекта вокруг оси чувствительности ВТГ [7]. Непостоянство плотности и модуля упругости по объему резонатора (в силу его осевой симметрии) приводит к возникновению двух близких по значению собственных частот, разница по модулю которых называется расщеплением рабочей собственной частоты. Расщепление частот негативно сказывается на работе ВТГ, что приводит к необходимости его прогнозирования и устранения на этапе проектирования и изготовления.

В качестве конструкционных материалов резонаторов ВТГ целесообразно использовать материалы с низким внутренним трением, так как чувствительность прибора напрямую зависит от добротности его резонатора. Резонаторы приборов малого и среднего класса точности могут быть изготовлены из прецизионных сплавов, таких как 32НКД, 44НХТЮ, 21НКМТ-ВИ [8, 9]. Наибольшее распространение среди материала резонаторов для высокоточных приборов получило кварцевое стекло [6, 10]. Оно и будет рассматриваться в дальнейшем. Необходимо отметить, что наилучшими характеристиками в части минимизации внутреннего трения, безусловно, обладают монокристаллические структуры, например синтетический сапфир, однако ввиду своей анизотропии и высокой твердости данный класс материалов почти не нашел применения в рассматриваемой области.

Кварцевое стекло как конструкционный материал хорошо известен и описан как в отечественной, так и зарубежной литературе [11–13]. Однако в силу его применения, в первую очередь как оптического конструкционного материала, трудно найти информацию по разбросу значений его физико-механических характеристик — модулю упругости или

плотности. Например, в ГОСТ 15130-86 «Стекло кварцевое оптическое. Общие технические условия» для указанных параметров представлены постоянные значения без каких-либо технологических допусков на отклонение от измеряемой величины. При этом с точки зрения работы ВТГ разброс этих значений имеет одно из ключевых значений.

## 1. Материалы и методы

Кварцевое стекло, как известно [14, 15], имеет аморфную структуру, характеризующуюся отсутствием дальнего порядка и наличием большого количества пустот (рис. 1) [16]. Ввиду хаотичности расположения пустот по объему, а также непостоянства их размера трудно сформировать зависимость, позволяющую определить пределы колебаний значений плотности и модуля упругости от справочных значений. Однако если допустить постоянство суммарного объема пустот, то можно провести инженерную оценку колебаний рассматриваемых значений, используя данные по параметрам базового соединения кварцевого стекла — оксида кремния.

Основной структурной единицей кварцевого стекла (как и кристаллического кварца) является кремнекислородный тетраэдр  $\text{SiO}_4$ , в котором атом кремния окружен четырьмя атомами кислорода. На рис. 2 [16] показаны значения межатомных расстояний (длин связей), определяющих геометрические размеры тетраэдра. При этом результаты экспериментов [17, 18] говорят о возможном изменении длины связей в пределах 1%, что может быть использовано для расчета колебаний значений плотности и модуля упругости.

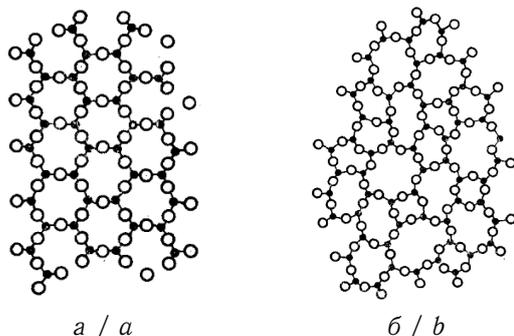


Рис. 1. Структура кристаллического (а) и аморфного (б) кварца по Захариасену  
Fig. 1. The structure of crystalline (a) and amorphous (b) quartz according to Zahariasen

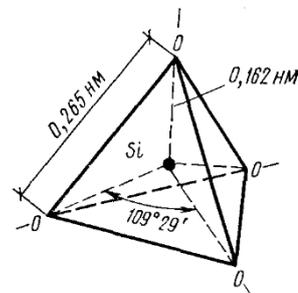


Рис. 2. Структурная единица кварцевого стекла  $\text{SiO}_4$   
Fig. 2. The structural unit of quartz glass is  $\text{SiO}_4$

### 1.1. Метод определения разброса значений плотности

Для определения расчетного значения плотности кварцевого стекла воспользуемся выражением для плотности кристаллических структур [19]

$$\rho = \frac{m \cdot M \cdot 10^{-3}}{N_a \cdot V},$$

где  $m$  [ед.] — число молекул в рассматриваемой элементарной ячейке;  $M$  [а.е.м.] — молекулярная масса;  $N_a$  [1/моль] — число Авогадро;  $V$  [ $\text{м}^3$ ] — объем элементарной ячейки. Принимая допущение о постоянстве суммарного объема пустот в стекле, модифицируем представленное выражение путем домножения на коэффициент  $\delta$ , являющегося аналогом коэффициента пористости материала, для получения целевого значения плотности по [19]. При этом в качестве элементарной ячейки выбираем представленный на рис. 2 тетраэдр, тем самым получая максимально плотное расположение атомов.

Разброс значений плотности получим путем варьирования объема элементарной ячейки, вызванного колебаниями значений длины связи Si–O (на основе [17, 18]). Объем элементарной ячейки определялся для фигуры, представляющей собой пять пересекающихся сфер

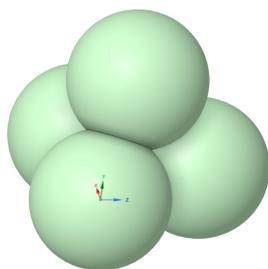


Рис. 3. Геометрическая модель структурной единицы кварцевого стекла  
Fig. 3. Geometric model of the structural unit of quartz glass

(рис. 3) с радиусами, соответствующими ионным радиусам атомов соединения [20] (ионный радиус кислорода и кремния 140 пм и 41 пм соответственно).

Необходимо отметить, что похожий подход использовался в [21] для определения значений плотности различных минералов.

### 1.2. Метод определения разброса значений модуля упругости

Для определения расчетного значения модуля упругости кварцевого стекла воспользуемся выражением для модуля упругости кристаллических структур [22, 23]

$$E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2 a_0^2},$$

где  $e$  [Кл] — элементарный заряд, равный заряду электрона;  $\epsilon_0$  [Кл<sup>2</sup>/Н · м<sup>2</sup>] — электрическая постоянная;  $r$  [м] — расстояние между взаимодействующими зарядами (половина длины связи Si–O);  $a_0$  [м] — период кристаллической решетки (размер элементарной ячейки). Аналогично расчету разброса плотности домножим полученное выражение на корректирующий коэффициент  $\gamma$  для получения целевого значения модуля упругости по ГОСТ 15130-86. Разброс значений модуля упругости также получим за счет колебаний длины связи Si–O (на основе [17, 18]).

### 1.3. Метод определения расщепления частоты резонатора ВТГ

Расщепление частоты резонатора ВТГ определяется с использованием модели, построенной на основе определяющих соотношений теории тонких оболочек по В. В. Новожилову [24]. Соответствующие выражения для потенциальной энергии упругой деформации растяжимой оболочки и выражение для кинетической энергии элементарного объема оболочки представлены в [7, 24]:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho h v^2 A_1 A_2 d\theta d\phi,$$

$$W = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - 2(1-\nu) \left( \epsilon_1 \epsilon_2 - \frac{\omega^2}{4} \right) \right] A_1 A_2 d\theta d\phi +$$

$$+ \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ (\kappa_1 + \kappa_2)^2 - 2(1-\nu) (\kappa_1 \kappa_2 - \tau^2) \right] A_1 A_2 d\theta d\phi,$$

где  $h$  [м] — толщина полусферической оболочки;  $A_1, A_2$  — параметры Ляме;  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала;  $E$  [МПа] — модуль упругости материала;  $\epsilon_1, \epsilon_2$  — параметры, характеризующие удлинение срединной поверхности;  $\kappa_1, \kappa_2$  — параметры, характеризующие изгибные деформации срединной поверхности;  $\omega, \tau$  — параметры, характеризующие деформации сдвига и кручения соответственно;  $\theta, \phi$  [град] — зенитный и азимутальный углы соответственно;  $\mathbf{v}$  [м/с] — вектор скорости.

Применяя вариационный принцип Гамильтона [25] совместно с методом Ритца [26], возможно свести задачу по определению собственных частот к классической постановке задачи на собственные значения:

$$(A - \lambda^2 B)\mathbf{C} = 0,$$

где  $A, B$  — матрицы, связанные с кинетической и потенциальной энергиями, а также координатными функциями;  $\mathbf{C}$  — вектор-столбец неизвестных коэффициентов;  $\lambda$  — вектор-столбец значений собственных частот.



Учет колебаний значений физико-механических характеристик ( $q$ ) проводится путем внесения соответствующих гармоник в выражения для кинетической и потенциальной энергий

$$q(\phi) = q_0 + X \sin(m\phi + \beta),$$

где  $q_0$  — номинальное значение рассматриваемого параметра,  $X$  — амплитуда гармоники,  $\phi$  [град], — угловая координата, соответствующая азимутальному углу. Расщепление частот вычисляется как разность по модулю двух близких по значению (парных) собственных частот осесимметричной оболочки.

## 2. Результаты и обсуждения

На основе представленных выше методов получена инженерная оценка предельных значений (разброса) плотности и модуля упругости материала резонатора, а также значения расщепления его собственной частоты, ими вызванного. Разброс в 1% длины связи Si–O соответствует экспериментальным значениям [17, 18] для низкотемпературной модификации кремнезема — ( $\alpha$ ) модификации, часто используемой для изготовления кварцевого стекла. В силу того что для изготовления резонаторов используется высококачественное кварцевое стекло, содержащее минимальное количество примесей, влиянием их на разброс плотности пренебрегается. Массовая доля примесей металлов (Al, Fe и пр.), а также гидроксильных групп оценивается в 0.02% [27]. Значение расщепления определялось для четвертой гармоники распределения несовершенства как для гармоники, вносящей определяющий вклад в рассматриваемую величину [10]. Полученные результаты представлены в таблице.

Результаты расчетной оценки  
Table. The results of the estimated assessment

Параметр	Min	Max	Расщепление, Гц
Плотность, кг/м <sup>3</sup>	2.133	2.263	37.3
Модуль упругости, Па	$7.053 \cdot 10^{10}$	$7.64 \cdot 10^{10}$	1.2

Учитывая полученные результаты, а также необходимость достижения значений расщепления на уровне не менее 0.1 Гц, можно отметить существенность полученных результатов в части влияния переменного значения характеристик материала на параметры прибора. Следствием этого является необходимость дополнительного контроля разброса физико-механических характеристик на этапе получения заготовок из кварцевого стекла, предназначенных для изготовления резонаторов. Необходимо сказать и о вероятно предельных значениях разброса значений плотности и модуля упругости (с учетом принятых допущений), а также значений расщепления, им вызванных. Отмечается и то, что при сопоставимом разбросе значений ( $\pm 4\%$ ) вклад разнотности на порядок выше вклада разнотности упругости, что было показано в [28]. В дополнение, разброс допустимых значений для коэффициента Пуассона по ГОСТ 15130-86 приводит к расщеплению на уровне 0.54 Гц, что меньше рассмотренных значений, но также требующему внимания.

## Заключение

В представленной работе приведена расчетная инженерная оценка, позволяющая определить разброс значений таких физико-механических свойств кварцевого стекла, как плотность и модуль упругости. Оценка построена на выражениях для расчета значений свойств кристаллических структур с учетом поправки на аморфную структуру стекла. Принято допущение о постоянстве среднего значения пустот по объему. В качестве переменной использованы экспериментальные данные по определению длины связи Si–O. Полученные возможные максимальные колебания плотности и модуля упругости приводят к существенному влиянию на такую характеристику, как расщепление рабочей собственной частоты волнового твердотельного гироскопа, что требует дополнительного контроля рассматриваемых характеристик при выборе и изготовлении заготовок для резонаторов.



### Список литературы

1. *Woodman O. J.* An introduction to inertial navigation. Cambridge : University of Cambridge, Computer Laboratory, 2007. 37 p. (Technical Report, № 696).
2. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. Москва : Наука, 1976. 670 с.
3. Инерциальная навигация. Анализ и проектирование / под ред. К. Ф. О’Доннела. Москва : Наука, 1969. 592 с.
4. *Delhaye F.* HRG by SAFRAN: The game-changing technology // 2018 IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems (INEKTIAL). Lake Como, Italy, 2018. P. 1–4. <https://doi.org/10.1109/ISISS.2018.8358163>
5. *Пешехонов В. Г.* Перспективы гироскопии // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019 : сб. тр. Москва : Ин-т проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2019. С. 36–38. <https://doi.org/10.25728/vspu.2019.0036>, EDN: **PXERVB**
6. *Климов Д. М., Журавлев В. Ф., Жбанов Ю. К.* Кварцевый полусферический резонатор (волновой твердотельный гироскоп). Москва : Ким Л. А., 2017. 193 с. EDN: **YNIIZR**
7. *Меркурьев И. В., Подалков В. В.* Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. Москва : Физматлит, 2009. 226 с.
8. *Распопов В. Я., Алалуев Р. В., Ладонкин А. В., Лихошерст В. В., Шепилов С. И.* Настройка и калибровка волнового твердотельного гироскопа с металлическим резонатором, работающего в режиме датчика угловой скорости // Гироскопия и навигация. 2020. Т. 28, № 1. С. 31–41. <https://doi.org/10.17285/0869-7035.0019>
9. *Басараб М. А., Лунин Б. С., Матвеев В. А., Фомичев А. В., Чуманкин Е. А., Юрин А. В.* Миниатюрные волновые твердотельные гироскопы для малых космических аппаратов // Вестник МГТУ имени Н. Э. Баумана. Серия: Приборостроение. 2014. № 4. С. 80–95. EDN: **SNFDUF**
10. *Лунин Б. С., Матвеев В. А., Басараб М. А.* Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технология. Москва : Радиотехника, 2014. 176 с.
11. *Bourhis E.* Glass: Mechanics and technology. 2nd ed. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2014. 416 p. <https://doi.org/10.1002/9783527679461>
12. *Hulsenberg D., Harnisch A., Bismarck A.* Microstructuring of glasses. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. 348 p. (Springer Series in Materials Science, vol. 87). <https://doi.org/10.1007/978-3-540-49888-9>
13. *Ботвинкин О. К., Запорожский А. И.* Кварцевое стекло. Москва : Стройиздат, 1965. 260 с.
14. *Бартнев Г. М.* Строение и механические свойства неорганических стекол. Москва : Стройиздат, 1966. 216 с.
15. *Rao K. J.* Structural chemistry of glasses. Amsterdam : Elsevier, 2002. 568 p.
16. Химическая технология стекла и ситаллов / под ред. Н. М. Павлушкина. Москва : Стройиздат, 1983. 432 с.
17. *Helms R., Poindexter E.* The silicon-silicon dioxide system: Its microstructure and imperfection // Reports on Progress in Physics. 1994. Vol. 57, iss. 8. P. 791–852. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/57/8/002>, EDN: **AZJNTD**
18. *Шелби Дж.* Структура, свойства и технология стекла. Москва : Мир, 2006. 288 с.
19. *Шаскольская М. П.* Кристаллография : 2-е изд., перераб. и доп. Москва : Высшая школа, 1984. 376 с.
20. Краткий справочник физико-химических величин / под ред. К. П. Мищенко, А. А. Равделя. 2-е изд., доп. Ленинград : Госхимиздат, 1957. 112 с.
21. *Зуев В. В.* Остовно-электронная кристаллохимия и свойства минералов. С.-Петербург : Наука, 2009. 270 с.
22. *Зуев Л. Б., Данилов В. И.* Физические основы прочности материалов. С.-Петербург : Интеллект, 2013. 376 с.
23. *Бадамшин И. Х.* От четырех к одному. Силы внутриаомного взаимодействия и прочность материалов. Москва : ИД Академия Естествознания, 2014. 89 с.
24. *Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И.* Линейная теория тонких оболочек. Ленинград : Политехника, 1991. 656 с.
25. *Голдстейн Г.* Классическая механика : пер. с англ. Москва : Наука, 1975. 415 с.
26. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. 2-е изд., перераб. и доп. Москва : Наука, 1970. 512 с.
27. *Леко В. К., Мазурин О. В.* Свойства кварцевого стекла. Ленинград : Наука, Ленингр. отд-ние, 1985. 165 с.



28. Shevchenko S. A., Konotopov O. I. The dynamic characteristics of a resonator of the gyroscope based on elastic waves in solids: finite-element modeling // St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 2021. Vol. 14, iss. 2. P. 65–80. <https://doi.org/10.18721/JPM.14206>

### References

1. Woodman O. J. *An introduction to inertial navigation*. Technical Report, No. 696. Cambridge, University of Cambridge, Computer Laboratory, 2007. 37 p.
2. Ishlinskiy A. Yu. *Oriyentatsiya, giroskopy i inertsiyal'naya navigatsiya* [Orientation, gyroscopes and inertial navigation]. Moscow, Nauka, 1976. 670 p. (in Russian).
3. O'Donnell C. F. (ed.) *Inertial navigation. Analysis and design*. New York, McGraw-Hill Education, 1964. 442 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1969. 592 p.).
4. Delhay F. HRG by SAFRAN: The game-changing technology. *2018 IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems (INEKTIAL)*. Lake Como, Italy, 2018, pp. 1–4. <https://doi.org/10.1109/ISISS.2018.8358163>
5. Peshekhonov V. G. Gyroscopy perspectives. *XIII Vserossiyskoe soveshchanie po problemam upravleniya VSPU-2019* [XIII All-Russian Conference on Management Problems VSPU-2019]. Moscow, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS Publ., 2019, pp. 36–38 (in Russian). <https://doi.org/10.25728/vspu.2019.0036>, EDN: PXERVB
6. Klimov D. M., Zhuravlev V. F., Zhanov Yu. K. *Kvartsevyy polusfericheskiy rezonator (volnovoy tverdotel'nyy giroskop)* [Fused quartz hemispherical resonator (coriolis vibratory gyroscope)]. Moscow, Kim L. A., 2017. 193 p. (in Russian). EDN: YNIIZR
7. Merkur'ev I. V., Podalkov V. V. *Dinamika mikromekhanicheskogo i volnovogo tverdotel'nogo giroskopov* [Dynamics of micromechanical and wave solid-state gyroscopes]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 226 p. (in Russian).
8. Raspopov V. Ya., Alaluev R. V., Ladonkin A. V., Likhosherst V. V., Shepilov S. I. Tuning and calibration of a hemispherical resonator gyroscope with a metal resonator to operate in angular rate sensor mode. *Gyroscopy and Navigation*, 2020, vol. 11, pp. 34–40. <https://doi.org/10.1134/S2075108720010113>
9. Basarab M. A., Lunin B. S., Matveev V. A., Fomichev A. V., Chumankin E. A., Yurin A. V. Miniature gyroscope based on elastic waves in solids for small spacecraft. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Instrument Engineering*, 2014, vol. 4, pp. 80–95 (in Russian). EDN: SNFDUF
10. Lunin B. S., Matveev V. A., Basarab M. A. *Volnovoy tverdotel'nyy giroskop. Teoriya i tekhnologiya* [Coriolis vibratory gyroscope. Theory and Technology]. Moscow, Radiotekhnika, 2014. 176 p. (in Russian).
11. Bourhis E. *Glass: Mechanics and technology*. 2nd ed. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2014. 416 p. <https://doi.org/10.1002/9783527679461>
12. Hulsberg D., Harnisch A., Bismarck A. *Microstructuring of glasses*. Springer Series in Materials Science, vol. 87. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. 348 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-49888-9>
13. Botvinkin O. K., Zaporozhskiy A. I. *Kvartsevoe steklo* [Fused quartz glass]. Moscow, Stroyizdat, 1965. 260 p. (in Russian).
14. Bartenev G. M. *Stroyenie i mekhanicheskie svoystva neorganicheskikh stekol* [Structure and mechanical properties of inorganic glasses]. Moscow, Stroyizdat, 1966. 216 p. (in Russian).
15. Rao K. J. *Structural chemistry of glasses*. Amsterdam, Elsevier, 2002. 568 p.
16. Pavlushkin N. M. (ed.) *Khimicheskaya tekhnologiya stekla i sitallov* [Chemical technology of glass and crystalline glass]. Moscow, Stroyizdat, 1983. 432 p. (in Russian).
17. Helms R., Poindexter E. The silicon-silicon dioxide system: Its microstructure and imperfection. *Reports on Progress in Physics*, 1994, vol. 57, iss. 8, pp. 791–852. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/57/8/002>, EDN: AZJNTD
18. Shelby J. E. *Introduction to glass science and technology*. 2nd ed. Royal Society of Chemistry, 2005. 308 p. <https://doi.org/10.1039/9781847551160> (Russ. ed.: Moscow, Mir, 2006. 288 p.).
19. Shaskol'skaya M. P. *Kristallografiya* [Crystallography]. 2nd ed., rev. and suppl. Moscow, Vysshaya shkola, 1984. 376 p. (in Russian).
20. Mishchenko K. P., Ravdel' A. A. (eds.) *Kratkiy spravochnik fiziko-khimicheskikh velichin* [Brief reference book of physical and chemical quantities]. 2nd ed., suppl. Leningrad, Goskhimizdat, 1957. 112 p. (in Russian).



21. Zuev V. V. *Ostovno-elektronnaya kristallokhimiya i svoystva mineralov* [Residual-electron crystallochemistry and properties of minerals]. St. Petersburg, Nauka, 2009. 270 p. (in Russian).
22. Zuev L. B., Danilov V. I. *Fizicheskie osnovy prochnosti materialov* [Physical foundations of the strength of materials]. St. Petersburg, Intellekt, 2013. 376 p. (in Russian).
23. Badamshin I. Kh. *Ot chetyrekh k odnomu. Sily vnutriatomnogo vzaimodeystviya i prochnost' materialov* [From four to one. Forces of Intra-atomic interaction and strength of materials]. Moscow, Publisher House Akademiya Estestvoznaniya, 2014. 89 p. (in Russian).
24. Novozhilov V. V., Chernykh K. F., Mikhaylovskiy E. I. *Lineynaya teoriya tonkikh obolochek* [Linear theory of thin shells]. Leningrad, Politekhnik, 1991. 656 p. (in Russian).
25. Goldstein H., Poole Ch., Safko J. *Classical mechanics*. Addison Wesley, 2002. 638 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1975. 415 p.).
26. Mikhlin S. G. *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variation methods in mathematical physics]. 2nd ed. rev. and suppl. Moscow, Nauka, 1970. 512 p. (in Russian).
27. Leko V. K., Mazurin O. V. *Svoystva kvartsevogo stekla* [Properties of the fused quartz glass]. Leningrad, Nauka, 1985. 165 p. (in Russian).
28. Shevchenko S. A., Konotopov O. I. The dynamic characteristics of a resonator of the gyroscope based on elastic waves in solids: Finite-element modeling. *St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics*, 2021, vol. 14, iss. 2, pp. 65–80. <https://doi.org/10.18721/JPM.14206>

Поступила в редакцию / Received 13.05.2023

Принята к публикации / Accepted 15.01.2024

Опубликована / Published 29.11.2024