



СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

- Бутерин С.А.** Обратная спектральная задача восстановления одномерного возмущения интегрального вольтеррова оператора 3
- Выгодчикова И.Ю.** О единственности решения задачи наилучшего приближения многозначного отображения алгебраическим полиномом 11
- Курдюмов В.П.** Оценки собственных функций и собственных значений интегро-дифференциального оператора 20
- Поплавский В.Б.** Обертонные осцилляторных булевых матриц 29
- Сахо Л.В.** Многомерные q-интегральные p-модули и критерии обобщенной дифференцируемости 37
- Шишкова Е.В.** Точные порядки погрешностей аппроксимации гладких функций 45

Механика

- Недорезов П.Ф.** Применение метода сплайн-коллокации в задачах о колебаниях толстой вязкоупругой пластинки-полосы 58
- Шиндяпин Г.П., Матутин А.А.** Численное исследование нелинейной рефракции ударной волны на поверхности, разделяющей газовую и газожидкостную среды 67
- Шиндяпин Г.П., Сапунков Я.Г., Шевырёв С.П., Поршнева В.А., Федорец Н.В., Федорец В.Н.** Проблемы математического моделирования детонационных двигателей для перспективных летательных аппаратов 74

Информатика

- Абросимов М.Б.** Некоторые вопросы о минимальных расширениях графов 86
- Мирзаянов М.Р.** О минимальных сильно связанных конгруэнциях ориентированных цепей 91
- Молчанов В.А.** О распознавании языков произвольных слов конечными полугруппами 96
- Соловьев В.М.** Построение диагностических экспертных систем на основе нейронных сетей 108
- Тяпаев Л.Б.** Решение некоторых задач для конечных автоматов на основе анализа их поведения 121

РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич

Заместитель главного редактора

Усанов Дмитрий Александрович

Ответственный секретарь

Клоков Василий Тихонович

Члены редакционной коллегии

Аврус Анатолий Ильич

Белов Владимир Николаевич

Бучко Ирина Юрьевна

Вениг Сергей Борисович

Дыльнов Геннадий Васильевич

Захаров Андрей Михайлович

Кабанин Вячеслав Кузьмич

Лебедева Ирина Владимировна

Левин Юрий Иванович

Мирзеханов Велихан Салманханович

Монахов Сергей Юрьевич

Первушов Евгений Михайлович

Прозоров Валерий Владимирович

Прохоров Дмитрий Валентинович

Салий Игорь Николаевич

Сперанский Дмитрий Васильевич

Федотова Ольга Васильевна

Худяков Глеб Иванович

Чумаченко Алексей Николаевич

Шляхтин Геннадий Викторович

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
СЕРИИ

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич

Заместители главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович

Сперанский Дмитрий Васильевич

Ответственный секретарь

Сидоров Сергей Петрович

Члены редакционной коллегии:

Дудов Сергей Иванович

Кузнецов Валентин Николаевич

Лукашов Алексей Леонидович

Митрофанов Юрий Иванович

Розен Виктор Владимирович

Салий Вячеслав Николаевич

Сытник Александр Александрович

Твердохлебов Владимир Александрович

Федорова Антонина Гавриловна

Хромов Август Петрович

Шиндяпин Георгий Петрович

Юрко Вячеслав Анатольевич

Зарегистрировано

в Министерстве Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций



ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

Журнал принимает к публикации общетеоретические, методические, дискуссионные, критические статьи, результаты исследований по всем научным направлениям.

К статье прилагается сопроводительное письмо, внешняя рецензия и сведения об авторах: фамилии, имена и отчества (полностью), рабочий адрес, контактные телефоны, e-mail.

1. Рукописи объемом не более 1 печ. листа, не более 8 рисунков принимаются в редакцию в бумажном и электронном вариантах в 1 экз.:

а) бумажный вариант должен быть напечатан через один интервал шрифтом 14 пунктов. Рисунки выполняются на отдельных листах. Под рисунком указывается его номер, а внизу страницы – Ф.И.О. автора и название статьи. Подрисуночные подписи печатаются на отдельном листе и должны быть самодостаточными;

б) электронный вариант в формате Word представляется на дискете 3,5 или пересылается по электронной почте. Рисунки представляются в виде отдельных файлов в формате PCX, TIFF или GIF.

2. Требования к оформлению текста.

Последовательность предоставления материала: индекс УДК; название статьи, инициалы и фамилии авторов, аннотация (на русском и на английском языках); текст статьи; библиографический список; таблицы; рисунки; подписи к рисункам.

В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте.

Ведущий редактор

Бучко Ирина Юрьевна

Редактор

Ишмухаметова Инга Владимировна

Художник

Соколов Дмитрий Валерьевич

Верстка

Багаева Ольга Львовна

Технический редактор

Агальцова Людмила Владимировна

Корректор

Васильева Наталья Юрьевна

Адрес редакции

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Издательство Саратовского университета

Тел.: (845-2) 52-26-89, 52-26-85

E-mail: izdat@sgu.ru

Подписано в печать 18.10.06.

Формат 60x84 1/8.

Усл. печ. л. 15,58 (16,75)

Уч.-изд. л. 17,9

Тираж 500 экз. Заказ 166.

Отпечатано в типографии

Издательства Саратовского университета

© Саратовский государственный университет, 2006

CONTENTS

Scientific Part

Mathematic

Buterin S.A. Inverse Spectral Problem of Reconstructing One-dimensional Perturbation of Integral Volterra Operator	3
Vygodchikova I.Y. About the only Solution in the Problem of the Best Plural Reflection's Approximation by Algebraic Polynomial	11
Kurdyumov V.P. Estimates for Eigenfunctions and Eigenvalues of an Integral-differential Operator	20
Poplavski V.B. Overtones of Oscillatory Boolean Matrices	29
Sakhno L.V. Multivariate q-integral p-modules and Criterion of the Generalized Differentiability	37
Shishkova E.V. Exact Orders of Errors in Smooth Functions Approximations	45

Mechanics

Nedorezov P.F. Application of a Spline-Collocation Method to the Problems of Thick Viscoelastic Plate-Strip Vibrations	58
Shindyapin G.P., Matutin A.A. The Numerical Investigation of the Shock Wave Nonlinear Refraction on the Surface Which Separate Gaseous and Gas-liquid Mediums	67
Shindyapin G.P., Sapunkov Y.G., Shrvyrev S.P., Porchnev V.A., Fedorets N.V., Fedorets V.N. Problems of Mathematical Modeling of Knocking Engine for Perspective Aircrafts	74

Informatics

Abrosimov M.B. Some Questions on Minimal Extensions of Graphs	86
Mirzayanov M.R. On Minimal Strongly Connected Congruences of a Directed Path	91
Molchanov V. A. On Recognition of Languages of Arbitrary Words by Finite Semigroups	96
Solovyev V.M. Construction of Diagnostic Expert Systems on the Basis of Neural Networks	108
Тыраев L.B. Solving Some Problems of Automata Behaviour Analysis	121



МАТЕМАТИКА

УДК 517.984

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ОПЕРАТОРА

С. А. Бутерин

Саратовский государственный университет,
кафедра математической физики и вычислительной математики
E-mail: buterinsa@info.sgu.ru

Рассматривается интегральный оператор, представимый в виде суммы вольтеррова оператора и одномерного, причем обратным оператором к вольтеррову является интегро-дифференциальный оператор второго порядка. Исследуется обратная задача восстановления одномерного слагаемого по спектральным данным в предположении, что вольтеррова компонента известна априори. Доказана единственность решения обратной задачи и получены условия, необходимые и достаточные для ее разрешимости.

Inverse Spectral Problem of Reconstructing One-dimensional Perturbation of Integral Volterra Operator

S. A. Buterin

An integral operator representable as the sum of a Volterra operator and one-dimensional one is considered, when the inverse operator for Volterra one is an integro-differential operator of second order. The inverse problem of reconstruction of the one-dimensional item from spectral data provided that the Volterra component is known a priori is investigated. The uniqueness of the solution of the inverse problem is proved and conditions are obtained that are necessary and sufficient for its solvability.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим интегральный оператор $A = A(M, g, v)$ вида

$$Af = Mf + g(x) \int_0^x f(t)v(t)dt, \quad Mf = \int_0^x M(x,t)f(t)dt, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (1.1)$$

где $g(x), v(x) \in W_2^1[0, \pi]$, $g(0)v(\pi) \neq 0$. Пусть функции

$$\frac{\partial^{v+j}}{\partial x^v \partial t^j} M(x,t), \quad v, j = 0, 1, 2,$$

непрерывны при $0 \leq t \leq x \leq \pi$, причем

$$M(x,x) \equiv 0 \quad \frac{\partial}{\partial x} M(x,t) \Big|_{t=x} \equiv -1 \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} M(x,t) \Big|_{t=x} \equiv 0.$$

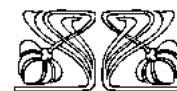
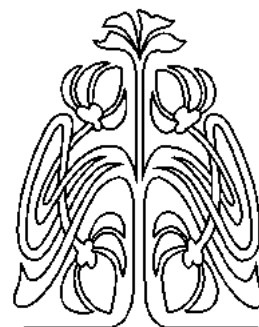
При этих условиях будем говорить, что функция $M(x, t)$ принадлежит классу M_2 .

Характеристические числа λ_k оператора A вида (1.1) совпадают с нулями характеристической функции

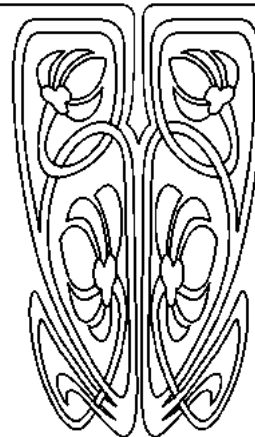
$$L(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^\pi v(x)g(x, \lambda)dx \quad (1.2)$$

с учетом кратности, где $g(x, \lambda) = (E - \lambda M)^{-1} g$, а E – тождественный оператор (см. [1]). Для краткости последовательность $\{\lambda_k\}$ будем называть спектром. При этом функции $g_k(x)$, определяемые формулой

$$g_{k+v}(x) = \frac{\partial^v}{\partial \lambda^v} g(x, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_k} \quad v = 0, 1, \dots, r_k - 1,$$



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





где r_k – кратность λ_k ($\lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+r_k-1}$), являются собственными и присоединенными функциями оператора. Обозначим $\beta_k = g_k(\pi)$. Совокупность чисел $\{\lambda_k, \beta_k\}$ назовем спектральными данными оператора A . В статье исследуются следующие обратные задачи.

Задача 1. По спектру $\{\lambda_k\}$ оператора $A(M, g, v)$ найти функцию $v(x)$ в предположении, что функции $M(x, t), g(x)$ известны априори.

Задача 2. По спектральным данным $\{\lambda_k, \beta_k\}$ оператора $A(M, g, v)$ найти функции $v(x), g(x)$ в предположении, что функция $M(x, t)$ известна априори.

Основные результаты теории обратных задач спектрального анализа получены для дифференциального оператора Штурма – Лиувилля, а позднее – и для дифференциальных операторов высших порядков (см., например, обзоры в [2], [3]). Что касается интегральных операторов, в [4] дано решение задач 1, 2 для случая, когда M^{-1} является интегро-дифференциальным оператором первого порядка, и показана связь задачи 1 с обратной задачей Штурма – Лиувилля. Принадлежность $M(x, t)$ классу M_2 означает, что оператор $D = M^{-1}$ имеет вид

$$Dy = -y'' + q(x)y + \int_0^x H(x, t)y(t)dt, \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

где функции $q(x), H(x, t)$ непрерывны¹ при $0 \leq t \leq x \leq \pi$. Заметим, что в наших условиях обратный оператор к оператору Штурма – Лиувилля (с краевыми условиями Неймана) является частным случаем оператора вида (1.1), и введенные спектральные данные $\{\lambda_k, \beta_k\}$ обобщают данные Левинсона [5] для оператора Штурма – Лиувилля. Отметим, что в [6], [7] исследовалась обратная задача восстановления оператора M , по спектру $\{\lambda_k\}$ оператора вида (1.1), когда функция $M(x, t)$ зависит только от разности аргументов, а функции $g(x), v(x)$ предполагаются известными. Прямые спектральные задачи для конечномерных возмущений вольтерровых операторов и, в частности, операторов вида (1.1) исследовались в работах А.П. Хромова (см., например, [1], [8]) и других математиков.

В разделе 2 приведены вспомогательные утверждения. Основные результаты статьи содержатся в разделе 3. Установлена единственность решения задач 1, 2 и получены условия, необходимые и достаточные для их разрешимости (теоремы 1 – 3).

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Построим оператор преобразования, связывающий ядро $M(x, t, \lambda)$ интегрального оператора

$$R_\lambda(M) = (E - \lambda M)^{-1} M \text{ с функцией } -\frac{\sin \rho(x-t)}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{\lambda},$$

которая, в свою очередь, является ядром оператора $R_\lambda(M)$, когда $M(x, t) = t-x$. Предварительно докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Интегральное уравнение

$$P(x, t, \alpha) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\frac{t}{2} + \alpha}^{x - \frac{t}{2} + \alpha} q(\tau) d\tau + \int_{2(x+\alpha)-t}^{2(x+\alpha)} d\tau \int_{\frac{\tau-t}{2}}^{\tau-x-\alpha} H(s, \tau-t-s) ds - \right. \\ \left. - \int_{2\alpha-t}^{2\alpha} d\tau \int_{\frac{\tau+t}{2}}^{\tau+t-\alpha} H(s, \tau+t-s) ds + \int_0^t d\tau \int_{t-\tau+\alpha}^{x-\tau-\alpha} H(s, \tau-t+s) ds + \right. \\ \left. + \int_{2(x+\alpha)-t}^{2(x+\alpha)} d\tau \int_{\frac{\tau-t}{2}}^{\tau-x-\alpha} q(s) P(s-\alpha, 2s-\tau+t, \alpha) ds - \right.$$

¹ Условия на $M(x, t)$ можно видоизменить так, чтобы охватывался и случай суммируемых с квадратом $g(x)$. $H(x, t)$ и основные результаты статьи остались верными.



$$\begin{aligned}
 & - \int_{2\alpha-t}^{2\alpha} d\tau \int_{\frac{\tau+t}{2}}^{\tau+t-\alpha} q(s) P(s-\alpha, 2s-\tau-t, \alpha) ds + \int_0^t d\tau \int_{t-\tau+\alpha}^{x-\tau+\alpha} q(s) P(s-\alpha, t-\tau, \alpha) ds + \\
 & + \int_{2(x+\alpha)-t}^{2(x+\alpha)} d\tau \int_{\frac{\tau-t}{2}}^{\tau-x-\alpha} ds \int_{\tau-t-s}^s H(s, \xi) P(\xi-\alpha, \xi+t-\tau+s, \alpha) d\xi - \\
 & + \int_{2\alpha-t}^{2\alpha} d\tau \int_{\frac{\tau+t}{2}}^{\tau+t-\alpha} ds \int_{\tau+t-s}^s H(s, \xi) P(\xi-\alpha, \xi-t-\tau+s, \alpha) d\xi + \\
 & \left. + \int_0^t d\tau \int_{t-\tau+\alpha}^{x-\tau+\alpha} ds \int_{s+\tau-t}^s H(s, \xi) P(\xi-\alpha, \xi+t-\tau-s, \alpha) d\xi \right\}, \tag{2.1}
 \end{aligned}$$

где $0 \leq t \leq x \leq \pi - \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, имеет единственное решение $P(x, t, \alpha)$, причем функции $P(x, t, \alpha)$, $\frac{\partial}{\partial x} P(x, t, \alpha)$, $\frac{\partial}{\partial \alpha} P(x, t, \alpha)$ непрерывны по всем переменным, и $P(x, x, \alpha) \equiv 0$.

Доказательство. Решаем уравнение (2.1) методом последовательных приближений. Для простоты ограничимся случаем $H(x, t) \equiv 0$. В общем случае доказательство проводится аналогично. Обозначим

$$P_0(x, t, \alpha) = \frac{1}{2} \int_{\frac{t+\alpha}{2}}^{x-\frac{t+\alpha}{2}} q(\tau) d\tau,$$

$$\begin{aligned}
 P_{j+1}(x, t, \alpha) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{2(x+\alpha)-t}^{2(x+\alpha)} d\tau \int_{\frac{\tau-t}{2}}^{\tau-x-\alpha} q(s) P_j(s-\alpha, 2s-\tau+t, \alpha) ds - \right. \\
 \left. - \int_{2\alpha-t}^{2\alpha} d\tau \int_{\frac{\tau+t}{2}}^{\tau+t-\alpha} q(s) P_j(s-\alpha, 2s-\tau-t, \alpha) ds + \int_0^t d\tau \int_{t-\tau+\alpha}^{x-\tau+\alpha} q(s) P_j(s-\alpha, t-\tau, \alpha) ds \right\}.
 \end{aligned}$$

Положим $q = \max_{0 \leq x \leq \pi} |q(x)|$. Тогда, очевидно, $|P_0(x, t, \alpha)| \leq \pi q / 2$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
 |P_{j+1}(x, t, \alpha)| \leq \frac{q}{2} \left\{ \int_0^\pi d\tau \int_0^t \left| P_j \left(\frac{s+\tau-t}{2} - \alpha, s, \alpha \right) \right| ds + \right. \\
 \left. + \int_0^\pi d\tau \int_0^t \left| P_j \left(\frac{s+\tau+t}{2} - \alpha, s, \alpha \right) \right| ds + \int_0^\pi d\tau \int_0^t \left| P_j(\tau - \alpha, s, \alpha) \right| ds \right\}.
 \end{aligned}$$

Отсюда по индукции получаем оценки

$$|P_j(x, t, \alpha)| \leq C^{j+1} \frac{t^j}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

где $C = 3\pi q / 2$. Таким образом, непрерывная функция

$$P(x, t, \alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(x, t, \alpha)$$



дает решение уравнения (2.1). Существование и непрерывность производных по x , α следует из возможности почленного дифференцирования ряда. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Справедливо соотношение

$$M(x, t, \lambda) = -\frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} - \int_0^{x-t} P(x-t, x-t-\tau, t) \frac{\sin \rho \tau}{\rho} d\tau, \quad (2.2)$$

где функция $P(x, t, \alpha)$ является решением уравнения (2.1).

Доказательство. Легко показать, что

$$M(x, x, \lambda) \equiv 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} M(x, t, \lambda) \right|_{t=x} \equiv -1.$$

Действуя оператором $(R_\lambda(M))^{-1} = D - \lambda E$ на функцию $y = R_\lambda(M)f$, где $f \in L_2(0, \pi)$, в силу произвольности f приходим к соотношению

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} M(x, t, \lambda) + q(x)M(x, t, \lambda) + \int_t^x H(x, \tau)M(\tau, t, \lambda) d\tau = \lambda M(x, t, \lambda).$$

Таким образом, при фиксированном $\alpha \in [0, \pi]$ функция $z(x) = M(x + \alpha, \alpha, \lambda)$ является решением задачи Коши

$$-z''(x) + q(x + \alpha)z(x) + \int_0^x H(x + \alpha, t + \alpha)z(t) dt = \lambda z(x), \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = -1,$$

где $0 \leq x \leq \pi - \alpha$. Она эквивалентна интегральному уравнению

$$z(x) = -\frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} \left\{ q(t + \alpha)z(t) + \int_0^t H(t + \alpha, \tau + \alpha)z(\tau) d\tau \right\} dt.$$

Подстановкой можно проверить, что его решение имеет вид

$$z(x) = -\frac{\sin \rho x}{\rho} - \int_0^x P(x, t, \alpha) \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} dt, \quad (2.3)$$

где функция $P(x, t, \alpha)$ является решением уравнения (2.1). Делая в (2.3) соответствующие замены переменных, приходим к (2.2). Лемма 2 доказана.

Перейдем к изучению функций $L(\lambda)$, $g(\pi, \lambda)$.

Лемма 3. 1) Для функции $L(\lambda)$ справедливо представление

$$L(\lambda) = 1 - \rho^2 \int_0^\pi m(x) \cos \rho(\pi - x) dx, \quad (2.4)$$

где

$$m(x) = g(0)u(x) + \int_0^x u(t)Q(x, t) dt. \quad (2.5)$$

Здесь $u(x) = v(\pi - x)$,

$$Q(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(g(x-t) + \int_0^{x-t} P(\pi - x + \tau, x-t-\tau) g(x-t-\tau) d\tau \right). \quad (2.6)$$

При этом $m(x) \in W_2^1[0, \pi]$.

2) Для функции $g(\pi, \lambda)$ справедливо представление

$$g(\pi, \lambda) = g(0) \cos \rho \pi + \int_0^\pi \chi(x) \cos \rho x dx, \quad (2.7)$$

где $\chi(x) = \sigma'(x) \in L_2(0, \pi)$,

$$\sigma(\pi - x) = -g(x) - \int_0^x P(\pi - t, x-t, t) g(t) dt. \quad (2.8)$$



Доказательство. Подставляя (2.2) в представление

$$g(x, \lambda) = g(x) + \lambda \int_0^x M(x, t, \lambda) g(t) dt,$$

будем иметь

$$g(x, \lambda) = g(x) - \rho \int_0^x \sin \rho t \left(g(x-t) + \int_0^{x-t} P(x-\tau, x-t-\tau, \tau) g(\tau) d\tau \right) dt. \quad (2.9)$$

При $x = \pi$ (2.9) дает

$$g(\pi, \lambda) = g(\pi) + \rho \int_0^\pi \sigma(t) \sin \rho t dt,$$

откуда, интегрируя по частям с учетом $\sigma(0) = -g(\pi)$, $\sigma(\pi) = -g(0)$, приходим к (2.7), и второе утверждение леммы доказано. Докажем первое утверждение. Подставляя (2.9) в (1.2), имеем

$$L(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^\pi g(x) v(x) dx + \rho^3 \int_0^\pi \sin \rho(\pi-x) dx \int_0^x \left(g(x-t) - \int_0^{x-t} P(\pi-x+\tau, \tau, x-t-\tau) g(x-t-\tau) d\tau \right) u(t) dt.$$

Интегрируя по частям, получаем (2.4), где функция $m(x)$ определяется по формулам (2.5), (2.6). Покажем, что $m(x) \in W_2^1[0, \pi]$. Для этого перепишем (2.5) в виде

$$m(x) = g(0)u(x) + \int_0^x u(x-t)T(x, t) dt,$$

где $T(x, t) = Q(x, x-t)$. Согласно (2.6) имеем

$$T(x, t) = g'(t) + P(\pi-x+t, t, 0)g(0) + \int_0^t P(\pi-x+\tau, \tau, t-\tau)g'(t-\tau)d\tau + \int_0^t \check{P}(\pi-x+\tau, \tau, s-\tau)g(t-\tau)d\tau,$$

$$\text{где } \check{P}(x, t, \alpha) = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial x} \right) P(x, t, \alpha).$$

Далее ограничимся для краткости рассмотрением случая $H(x, t) \equiv 0$. В общем случае рассуждения аналогичны. Учитывая (2.1), находим

$$\begin{aligned} \check{P}(x, t, \alpha) = & \frac{1}{2} \left\{ q \left(\frac{t}{2} + \alpha \right) + \int_0^t d\tau \int_{t-\tau+\alpha}^{x-\tau+\alpha} q(s) \check{P}(s-\alpha, t-\tau, \alpha) ds + \right. \\ & + 2 \int_{\alpha+\frac{t}{2}}^{\alpha+t} q(\tau) P(\tau-\alpha, 2\tau-2\alpha-t, \alpha) d\tau - \int_{2\alpha-t}^{2\alpha} d\tau \int_{\frac{\tau+t}{2}}^{\tau+t-\alpha} q(s) \check{P}(s-\alpha, 2s-\tau-t, \alpha) ds + \\ & \left. + \int_{2(x+\alpha)-t}^{2(x+\alpha)} d\tau \int_{\frac{\tau-t}{2}}^{\tau-x-\alpha} q(s) \check{P}(s-\alpha, 2s-\tau+t, \alpha) ds \right\}. \end{aligned}$$

Теперь вычисляем

$$\begin{aligned} \check{P}(\pi-x+\tau, \tau, t-\tau) = & \frac{1}{2} \left\{ q \left(t - \frac{\tau}{2} \right) + \int_0^\tau ds \int_{t-s}^{\pi-x+t-s} q(\xi) \check{P}(\xi-t+\tau, \tau-s, t-\tau) d\xi + \right. \\ & \left. + 2 \int_{t-\frac{\tau}{2}}^t q(s) P(s-t+\tau, 2s-2t+\tau, t-\tau) ds - \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & - \int_{2t-3\tau}^{2t-2\tau} ds \int_{\frac{s+\tau}{2}}^{s+2\tau-t} q(\xi) \check{P}(\xi-t+\tau, 2\xi-s-\tau, t-\tau) d\xi + \\
 & + \left. \int_{2(\pi-x+t)-\tau}^{2(\pi-x+t)} ds \int_{\frac{s-\tau}{2}}^{s-\pi+x-t} q(\xi) \check{P}(\xi-t+\tau, 2\xi-s+\tau, t-\tau) d\xi \right\}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, функция $T(x, t)$ имеет непрерывную частную производную по x и, следовательно, $m(x) \in W_2^1[0, \pi]$. Лемма 3 доказана.

Докажем еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 4. Даны числа $\lambda_k, k = 0, 1, 2, \dots$, вида $\rho_k = \sqrt{\lambda_k} = k + \kappa_k, \lambda_k \neq 0, \{\kappa_k\} \in l_2$. Тогда для функции

$$X(\lambda) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right) \quad (2.10)$$

имеет место представление

$$X(\lambda) = -\gamma \rho \sin \rho \pi + 1 + \rho \int_0^{\pi} w(x) \sin \rho x dx, \quad (2.11)$$

где $\rho = \sqrt{\lambda}, w(x) \in L_2(0, \pi)$,

$$\gamma = \frac{1}{\pi \lambda_0} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{\lambda_k}. \quad (2.12)$$

Доказательство. Функция $X_0(\lambda) = -\rho \sin \rho \pi$ имеет нули $k = 0, \pm 1 \pm 2, \dots$ и допускает представление

$$X_0(\lambda) = -\lambda \pi \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{k^2} \right). \quad (2.13)$$

Из (2.10), (2.12) и (2.13) вытекает соотношение

$$X(\lambda) = \lambda_0 \gamma X_0(\lambda) F(\lambda), F(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{k^2 - \lambda}. \quad (2.14)$$

Покажем, что в области $G_\delta = \{\rho : |\rho - k| \geq \delta, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ при фиксированном $\delta > 0$ верна оценка $|F(\lambda)| < C_\delta$. Обозначим $\kappa_{-k} = -\kappa_k, \rho_{-k} = -\rho_k, k = 1, 2, \dots$. Тогда

$$F(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right) \prod_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{\rho_k - \rho}{k - \rho} = \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right) \prod_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \left(1 + \frac{\kappa_k}{k - \rho} \right).$$

Выберем натуральное N так, чтобы при $k \geq N |\kappa_k| \leq \delta/2$. Имеем

$$F(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right) \exp(H_N(\rho)) \prod_{|k| < N, k \neq 0} \left(1 + \frac{\kappa_k}{k - \rho} \right), \quad (2.15)$$

где

$$H_N(\rho) = \sum_{|k| \geq N} \ln \left(1 + \frac{\kappa_k}{k - \rho} \right) = \sum_{|k| \geq N} \frac{\kappa_k}{k - \rho} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v+1} \left(\frac{\kappa_k}{k - \rho} \right)^v.$$

Так как

$$|H_N(\rho)| \leq \sum_{|k| \geq N} \frac{|\kappa_k|}{|k - \rho|} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v} \leq C \left(\sum_{|k| \geq N} \frac{1}{|k - \rho|^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

то из (2.15) следует, что $|F(\lambda)| < C_\delta$ при $\rho \in G_\delta$. Далее, из (2.14) получаем

$$X(\lambda) = -\lambda_0 \gamma \rho (\lambda_\nu - \lambda) \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{\sin \rho \pi}{\nu^2 - \rho^2} \prod_{k=1, k \neq \nu}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{k^2 - \lambda}.$$



Отсюда приходим к

$$X(v^2) = \lambda_0 \gamma (2\kappa_v v + \kappa_v^2) \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{v^2} \right) \frac{(-1)^v \pi}{2} \prod_{k=1, k \neq v}^{\infty} \frac{\lambda_k - v^2}{k^2 - v^2},$$

т. е. $\{X(v^2)/v\} \in l_2$. Рассмотрим функцию

$$\Delta(\rho) = \frac{X(\lambda) - \gamma X_0(\lambda) - 1}{\rho}, \quad (2.16)$$

которая после устранения особенности является целой аналитической по ρ . Обозначим $\theta_k = \Delta(k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Очевидно, что $\{\theta_k\} \in l_2$, $\theta_{-k} = -\theta_k$. Построим функцию $w(x) \in L_2(0, \pi)$ так, чтобы

$$\theta_k = \int_0^{\pi} w(x) \sin kx dx.$$

Рассмотрим функцию

$$\theta(\rho) = \int_0^{\pi} w(x) \sin \rho x dx$$

и обозначим

$$S(\rho) = \frac{\theta(\rho) - \Delta(\rho)}{\sin \rho \pi}.$$

Функция $S(\rho)$ после устранения особенностей является целой аналитической по ρ . Из (2.14), (2.16) следует, что $\Delta(\rho) = \gamma \sin \rho \pi (1 - \lambda_0 F(\lambda)) - 1/\rho$. Используя оценку $|\sin \rho \pi| \geq C_{\sigma} \exp(|\operatorname{Im} \rho| \pi) > 0$, $\rho \in G_{\delta}$ и принцип максимума модуля для аналитических функций, получаем, что функция $S(\rho)$ ограничена и, следовательно, по теореме Лиувилля (см. [9, с. 209]) $S(\rho) \equiv C$. А так как при $|\rho| \rightarrow \infty \lim S(\rho) = 0$, то $C = 0$, и приходим к соотношению (2.11). Лемма 4 доказана.

3. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Следующие теоремы дают условия, необходимые и достаточные для разрешимости задач 1, 2.

Теорема 1. Спектральные данные $\{\lambda_k, \beta_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, оператора A имеют вид

$$\rho_k = \sqrt{\lambda_k} = k + \kappa_k, \quad \lambda_k \neq 0, \quad \{\kappa_k\} \in l_2, \quad (3.1)$$

$$\beta_k = (-1)^k \alpha + \kappa_{k,1}, \quad \alpha \neq 0, \quad \{\kappa_{k,1}\} \in l_2. \quad (3.2)$$

Доказательство. В силу леммы 3 характеристическая функция $L(\lambda)$ оператора A имеет вид

$$L(\lambda) = -h\rho \sin \rho \pi + 1 + \rho \int_0^{\pi} w(x) \sin \rho x dx, \quad (3.3)$$

где $h = g(0)v(\pi)$, $w(x) = -m'(\pi - x)$. При фиксированном $\delta > 0$ для достаточно больших $|\rho|$, $\rho \in G_{\delta} = \{\rho : |\rho - k| \geq \delta, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ имеем

$$|h\rho \sin \rho \pi| > \left| 1 + \rho \int_0^{\pi} w(x) \sin \rho x dx \right|.$$

Тогда по теореме Руше (см. [9], с. 206) внутри контура $\Gamma_N = \{\lambda : |\lambda| = (N + 1/2)^2\}$ при достаточно больших N расположен в точности $N + 1$ нуль λ_k , $k = 0, 1, \dots, N$, функции $L(\lambda)$, а внутри контура $\gamma_k(\delta) = \{\rho : |\rho - k| = \delta\}$ при достаточно больших k лежит ровно один нуль ρ_k функции $L(\rho^2)$, т. е. $\rho_k = \sqrt{\lambda_k} = k + \kappa_k$, $\kappa_k = o(1)$. Подставляя это выражение в (3.3), уточняем, что $\{\kappa_k\} \in l_2$. Таким образом, представление (3.1) доказано. Далее, используя (2.7), получаем требуемую асимптотическую формулу (3.2) для чисел β_k . Теорема 1 доказана.

Свойства спектральных данных (3.1), (3.2) являются и достаточными условиями разрешимости задач 1, 2. При этом их решение единственно.

Теорема 2. Пусть задана функция $M(x, t)$ класса M_2 и функция $g(x) \in W_2^1[0, \pi]$, $g(0) \neq 0$. Пусть,



кроме того, заданы числа $\lambda_k, k = 0, 1, 2, \dots$, вида (3.1). Тогда существует единственный оператор $A(M, g, v)$ вида (1.1), для которого λ_k являются характеристическими числами.

Доказательство. По заданным числам λ_k строим функцию $X(\lambda)$ по формуле (2.10), причем согласно лемме 4 для $X(\lambda)$ имеет место представление (2.11) с некоторой функцией $w(x) \in L_2(0, \pi)$. Построим функцию

$$m(x) = \gamma - \int_0^x w(\pi - t) dt.$$

Далее, пусть функция $u(x)$ является решением уравнения (2.5). Ясно, что $u(x) \in W_2^1[0, \pi], u(0) \neq 0$. Обозначим $v(x) = u(\pi - x)$ и рассмотрим оператор $A = A(M, g, v)$ вида (1.1). Пусть $L(\lambda)$ – характеристическая функция оператора A . Тогда, как и при доказательстве леммы 3, получаем, что

$$L(\lambda) = 1 - \rho^2 \int_0^\pi m(x) \cos \rho(\pi - x) dx$$

или после интегрирования по частям

$$L(\lambda) = -\gamma \rho \sin \rho \pi + 1 + \rho \int_0^\pi w(x) \sin \rho x dx.$$

Сравнивая это равенство с соотношением (2.11), получаем $L(\lambda) \equiv X(\lambda)$, и, следовательно, оператор A имеет спектр $\{\lambda_k\}$. Если предположить, что существует также оператор $A(M, g, \tilde{v})$ вида (1.1) с таким же спектром $\{\lambda_k\}$, то из леммы 3 и единственности решения интегрального уравнения (2.5) будет следовать, что $v(x) = \tilde{v}(x), x \in [0, \pi]$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Если задана функция $M(x, t)$ класса M_2 и числа $\lambda_k, \beta_k, k = 0, 1, 2, \dots$, вида (3.1), (3.2), то существует единственный оператор $A(M, g, v)$ вида (1.1), для которого $\{\lambda_k, \beta_k\}$ являются спектральными данными.

Доказательство. Ограничимся для простоты случаев, когда все λ_k различны. Как и при доказательстве теоремы 2 по заданным числам λ_k и функции $M(x, t)$ строим функции $X(\lambda), m(x), P(x, t, \alpha)$. Обозначим $\beta_{k,1} = \beta_k - \alpha \cos \rho_k \pi$. Ясно, что $\{\beta_{k,1}\} \in l_2$. Система функций $\{\cos \rho_k x\}_{k=0}^\infty$ образует базис Рисса в пространстве $L_2(0, \pi)$, так как она полна и квадратично близка к ортогональному базису $\{\cos kx\}_{k=0}^\infty$ (см., например, [2], с. 131). Пусть $\chi(x) \in L_2(0, \pi)$ такова, что

$$\beta_{k,1} = \int_0^\pi \chi(x) \cos \rho_k x dx.$$

Положим

$$\sigma(x) = -\alpha - \int_x^\pi \chi(t) dt.$$

Пусть функция $g(x)$ является решением уравнения (2.8). Ясно, что $g(x) \in W_2^1[0, \pi], g(0) = \alpha \neq 0$. Как и в теореме 2, находим теперь функцию $v(x)$. Тем самым построили оператор $A(M, g, v)$ вида (1.1), причем числа $\{\lambda_k, \beta_k\}$ являются его спектральными данными. Как и в теореме 2, единственность очевидным образом следует из леммы 3. В случае кратных λ_k рассматриваемым базисом Рисса будет система функций

$$\left\{ \left. \frac{\partial^v}{\partial \lambda^v} \cos \rho x \right|_{\rho=\lambda_k} \right\}, v = 0, 1, \dots, r_k - 1, k = 0, 1, 2, \dots,$$

где r_k – кратность λ_k . Теорема 3 доказана.

Замечание. Доказательства теорем 2, 3 конструктивны и дают возможность построить алгоритм решения задач 1, 2. Отметим также, что аналогичные результаты имеют место и для случаев, когда функции $g(x), v(x)$ обладают более высокой степенью гладкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 04-01-00007).



Библиографический список

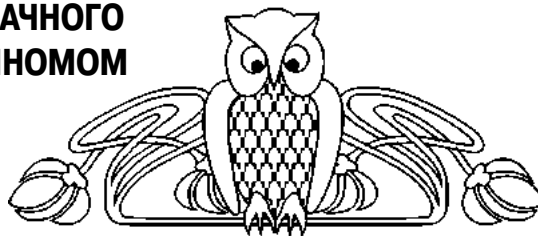
1. Хромов А.П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1973. Вып. 3. С. 3–23.
2. Юрко В.А. Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов: Изд-во Саратов. пед. ин-та, 2001.
3. Yurko V. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.
4. Юрко В.А. Обратная задача для интегральных операторов // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 5. С. 690–701.
5. Levinson N. The inverse Sturm-Liouville problem // Math. Tidsskr. 1949. Vol. 13. P. 25–30.
6. Бутерин С.А. О единственности восстановления одномерного возмущения оператора свертки // Математика. Механика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 15–18.
7. Бутерин С.А. Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для одномерного возмущения оператора свертки // Математика. Механика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 8–10.
8. Хромов А.П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. // Мат. заметки. 1974. Т. 16, № 4. С. 669–680.
9. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1977.

УДК 517.518.82

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

И.Ю. Выгодчикова

Саратовский государственный университет,
кафедра математической экономики
E-mail: VigodchikovaIY@info.sgu.ru



В настоящей статье рассмотрена задача о наилучшем приближении дискретного многозначного отображения, образами которого в узлах дискретной сетки являются фиксированные отрезки, алгебраическим полиномом заданной степени. Получены необходимые и достаточные условия единственности решения этой задачи. Доказательство основано на опубликованных ранее статьях о свойствах решения рассматриваемой задачи, а также на двух вспомогательных леммах. Используется теория минимаксных задач, теория приближений П.Л. Чебышева дискретных функций алгебраическими полиномами и многозначный анализ.

About the only Solution in the Problem of the Best Plural Reflection's Approximation by Algebraic Polynomial

I. Y. Vygodchikova

This paper is devoted to the proof of the theorem including necessary and sufficient conditions in the problem of the best plural reflection's approximation by algebraic polynomial. In the proof is used several author's were published results and two auxiliary lemmas. The proof is based on the minim ax's problems theory, the approximation's theory by algebraic polynomials of the P.L. Chebyshev and the plural's analysis.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Требуется получить необходимые и достаточные условия единственности решения следующей задачи:

$$\Phi(A, k) = \min_{y \in \Phi(A, k)} |y - p_n(A, t_k)|, \quad (1)$$

где $\Phi(A, k) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = \Phi(A, k), \Phi(A, k) = \bigcup_{s \in S} M(s, f(t_k), a), 0 \leq s \leq z\}$ – образы многозначного отображения (м.о.) $\Phi(\bullet)$ в узлах сетки $T = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N\}$, причём $y_{2,k} \geq y_{1,k}, k \in [0 : N], p_n(A, t_k) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ – алгебраический полином степени n с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Через $f(A, k) := \max \{y_{2,k} - p_n(A, t_k); p_n(A, t_k) - y_{1,k}\}$ обозначим отклонение образа м.о. от значения алгебраического полинома в точке $t_k \in T$. Функция $f(A, k)$ является непрерывной и выпуклой по A при каждом фиксированном $k \in [0 : N]$, но не является дифференцируемой по A на \mathbb{R}^{n+1} . Такими же свойствами обладает и целевая функция $\rho(A)$ задачи (1).

Положим $f_1(A, k) := p_n(A, t_k) - y_{1,k}, f_2(A, k) := y_{2,k} - p_n(A, t_k), k \in [0 : N]$. Обозначим через $\rho^* := \inf_{A \in \mathbb{R}^{n+1}} \rho(A), \mathfrak{R} := \{A \in \mathbb{R}^{n+1} : \rho(A) = \rho^*\}$. Доказано ([1]), что $\mathfrak{R} \neq \emptyset$. Несложно показать, что множество \mathfrak{R} выпукло и замкнуто, а при $N \geq n$ оно ещё и ограничено.

Если $N \leq n$, множество решений задачи (1) представимо в виде ([2]):



$$\mathfrak{X} = \left\{ A \in R^{n+1} : p_n(A, t_k) = \frac{y_{1,k} + y_{2,k}}{2} + \alpha_k \left(m - \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} \right), k \in [0 : N], \right. \\ \left. \max_{k \in [0 : N]} |\alpha_k| \leq 1 \right\},$$

где
$$m := \max_{k \in [0 : N]} \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2},$$

и в этом случае $\rho^* = m$. Несложно показать, что при $N \leq n$ задача (1) будет иметь единственное решение тогда и только тогда, когда $N = n$ и $m = \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2}, \forall k \in [0 : n]$.

Везде далее считаем $N \geq n + 1$.

Рассмотрим дискретный вариант задачи П.Л. Чебышёва о равномерном наилучшем приближении функции алгебраическим полиномом заданной степени:

$$\max_{k \in [0 : N]} |y_k - p_n(A, t_k)| \longrightarrow \min_{A \in R^{n+1}}, \tag{2}$$

где $y_k = y(t_k), k \in [0 : N]$ – значения некоторой функции на сетке T .
Базисом σ назовём $(n+2)$ – точечную подсистему узлов сетки T вида

$$\sigma = \{ t_{j_0} < t_{j_1} < \dots < t_{j_{n+1}} \} \subset T.$$

На каждом базисе определим две функции $\varphi_0(\cdot)$ и $\varphi_1(\cdot)$, положив

$$\varphi_0(\sigma, t_{j_k}) = \begin{cases} y_{2,j_k}, k - \text{четно}, \\ y_{1,j_k}, k - \text{нечетно}, \end{cases} \quad \varphi_1(\sigma, t_{j_k}) = \begin{cases} y_{1,j_k}, k - \text{четно}, \\ y_{2,j_k}, k - \text{нечетно}, \end{cases}$$

$$t_{j_k} \in \sigma, k \in [0 : n + 1],$$

и такие функции назовём *амплитудными*.

Если в качестве приближаемой функции в задаче П.Л.Чебышёва (2) взять амплитудную функцию, эта задача запишется в виде

$$\rho_i(A, \sigma) := \max_{k \in [0 : n+1]} |\varphi_i(\sigma, t_{j_k}) - p_n(A, t_{j_k})| \longrightarrow \min_{A \in R^{n+1}}, i \in 0 : 1. \tag{3}$$

Положим

$$\rho_i^*(\sigma) := \min_{A \in R^{n+1}} \rho_i(A, \sigma) = \rho_i(A_i(\sigma), \sigma), \quad i \in 0 : 1.$$

Пусть $\Omega \subset T$ – некоторое подмножество сетки T . Обозначим через $I(\Omega) := \{k \in [0 : N] : t_k \in \Omega\}$ – множество индексов множества Ω .

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В [2], [4] получены следующие факты.

Теорема 1 (необходимые и достаточные условия решения). Для того чтобы вектор $A^* \in R^{n+1}$ являлся решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

- (а) $\rho(A^*) = m$;
- (б) \exists базис $\sigma^* : \rho(A^*) = \rho_i^*(\sigma^*)$ для $i = 0$ или $i = 1$.

Замечание 1. Несложно показать, что равенство из (б) эквивалентно равенствам:

$$(-1)^{k+\beta} \rho(A^*) = \varphi_\beta(\sigma^*, \tau_{j_k}) - p_n(A^*, t_{j_k}), \forall k \in [0 : n + 1],$$

где $\beta = 0$ или $\beta = 1$, которые легко сравнимы с классическим результатом П.Л. Чебышёва ([3]).

Выборкой $(n+1)$ узлов сетки T назовём множество вида

$$\Delta = \{ t_{q_0} < t_{q_1} < \dots < t_{q_n} \} \subset T.$$



Теорема 2. Существует вектор $A^* \in \mathfrak{R}$, такой, что функция $f(A^*, k)$ принимает значение ρ^* не менее чем в $(n+1)$ различных точках $k \in [0: N]$, т. е.

$$\exists A^* \in \mathfrak{R}, \exists \text{ выборка } \Delta^* : f(A^*, k) = \rho^*, \forall k \in I(\Delta^*). \quad (4)$$

Докажем следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $n \geq 1$ и $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}$. Если для алгебраического полинома $p_n(A, x)$ выполняются условия

$$\begin{aligned} \text{(I)} & \quad A \neq 0_{n+1}, \\ \text{(II)} & \quad p_n(A, x_i) = 0, \quad \forall i \in [1: n], \\ \text{(III)} & \quad \exists s \in [1: n+1], \exists z \in (x_{s-1}; x_s) : (-1)^s p_n(A, z) < 0, \end{aligned}$$

то

$$(-1)^i p_n(A, x) < 0, \quad \forall x \in (x_{-1}; x_i), \quad \forall i \in [1: n+1]. \quad (5)$$

Доказательство. 1) Без потери общности в рассуждениях будем считать $s = 1$. В этом случае условие (III) запишется в виде

$$\exists z \in (x_0; x_1) : p_n(A, z) > 0. \quad (6)$$

Покажем, что

$$\forall x \in (x_0; x_1) : p_n(A, x) > 0. \quad (7)$$

Предположим, что (7) не выполняется, т. е.

$$\exists \tilde{x} \in (x_0; x_1) : p_n(A, \tilde{x}) \leq 0. \quad (8)$$

Из (6), (8) в силу непрерывности алгебраического полинома $p_n(A, t)$ вытекает, что

$$\exists x' \in (z; \tilde{x}) : p_n(A, x') = 0, \quad (9)$$

причём $x' \neq x_i, \forall i \in [1: n]$. Отсюда ввиду (II) получаем, что алгебраический полином степени n обращается в ноль в $(n+1)$ различных точках. А это возможно, только если $A \equiv 0_{n+1}$. Последнее противоречит (I). Тем самым (7) доказано.

2) Теперь покажем, что

$$\exists z \in (x_1; x_2) : p_n(A, z) < 0. \quad (10)$$

Если только при некотором значении $x \in (x_1; x_2)$ выполняется равенство $p_n(A, x) = 0$, то ввиду (II) получаем, что алгебраический полином степени n обращается в ноль в $(n+1)$ различных точках, и, значит, $A \equiv 0_{n+1}$. Последнее противоречит (I). Таким образом,

$$\forall x \in (x_1; x_2) : p_n(A, x) \neq 0.$$

Допустим, что

$$\forall x \in (x_1; x_2) : p_n(A, x) > 0. \quad (11)$$

По условию леммы, $p_n(A, x_1) = 0$. Тогда из (7), (11) следует, что

$$\forall x \in (x_0; x_1) \cup (x_1; x_2) : p_n(A, x) > p_n(A, x_1),$$

т. е. в точке x_1 полином $p_n(\cdot, x)$ имеет локальный минимум. По теореме Ферма,

$$\left(p_n(A, x) \right)'_{x=x_1} = 0. \quad (12)$$

В соответствии с (II) $p_n(A, x_1) = 0$ и $p_n(A, x_2) = 0$. Тогда по теореме Ролля,

$$\exists x_1 \in (x_1; x_2) : \left(p_n(A, x) \right)'_{x=x_1} = 0.$$



Аналогично получаем

$$\exists x_i \in (x_i; x_{i+1}): (p_n(A, x))'_{x=x_i} = 0, \forall i \in [1: n-1]. \quad (13)$$

Производная от полинома степени n является полиномом степени $(n-1)$. Равенства (12), (13) означают, что алгебраический полином степени $(n-1)$ в n различных точках обращается в ноль. Отсюда $(p_n(A, x))'_x \equiv 0$. Следовательно, $p_n(A, x)$ – это константа. Последнее противоречит (II)–(III). Таким образом, (10) доказано. Точно так же, как из (6), было получено (7), из (10) получаем, что

$$\forall x \in (x_1; x_2): p_n(A, x) < 0.$$

Продолжая аналогичные рассуждения на последующих интервалах $(x_{i-1}; x_i), i \in [3: n+1]$, получаем (5). Лемма доказана. Обозначим через

$$Z := \left\{ k \in [0: N]: \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} = \rho^* \right\},$$

а через $|Z|$ – число элементов множества Z .

Лемма 2. Пусть вектор $A^* \in R^{n+1}$ является единственным решением задачи (1). Тогда выполняется, по крайней мере, одно из условий:

$$|Z| \geq n+1; \quad (14)$$

$$\exists \text{ базис } \sigma^* \subset T: f(A^*, k) = \rho^*, \forall k \in I(\sigma^*). \quad (15)$$

Доказательство. Пусть A^* – единственное решение задачи (1) и $|Z| < n+1$. Покажем, что выполняется (15).

Несложно показать, что если $Z = \emptyset$, то для решения A^* задачи (1) выполняется условие (б) теоремы 1. Применяя теорему 2.1 [2, с.31], приходим к (15).

Пусть теперь $1 \leq |Z| < n+1$. По лемме 1 для единственного решения A^* задачи (1) существует выборка Δ^* такая, что

$$f(A^*, k) = \rho^*, \forall k \in I(\Delta^*). \quad (16)$$

Допустим условие (15) не выполняется. Тогда

$$\forall k \in [0: N] \setminus I(\Delta^*): f(A^*, k) < \rho^*, \quad (17)$$

при этом

$$Z \subset I(\Delta^*), Z \neq I(\Delta^*). \quad (18)$$

Возьмём индекс $k_0 \in I(\Delta^*) \setminus Z$.

Из (16) вытекает равенство $f(A^*, k_0) = \rho^*$. Поскольку $k_0 \notin Z$, то $f_1(A^*, k_0) \neq f_2(A^*, k_0)$. Для определённости будем считать, что $f_1(A^*, k_0) < f_2(A^*, k_0)$, т. е.

$$p_n(A^*, t_{k_0}) - y_{1,k_0} < y_{2,k_0} - p_n(A^*, t_{k_0}) = \rho^*. \quad (19)$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Найдём A_ε , решив систему

$$\begin{cases} p_n(A_\varepsilon, t_k) = p_n(A^*, t_k), k \in I(\Delta^*) \setminus \{k_0\}, \\ p_n(A_\varepsilon, t_{k_0}) = p_n(A^*, t_{k_0}) + \varepsilon. \end{cases} \quad (20)$$

Ясно, что $A_\varepsilon \neq A^*$ и решение системы (20) непрерывно по ε . Возьмём $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы для вектора A_ε выполнялись неравенства, аналогичные (17), (19), а именно

$$\forall k \in [0: N] \setminus I(\Delta^*): f(A_\varepsilon, k) < \rho^*, \quad (21)$$



$$p_n(A_\varepsilon, t_{k_0}) - y_{1,k_0} < y_{2,k_0} - p_n(A_\varepsilon, t_{k_0}). \quad (22)$$

Из (19), (20), (22) вытекает неравенство

$$f(A_\varepsilon, k_0) < \rho^*. \quad (23)$$

Из (16), (20) получаем равенства

$$f(A_\varepsilon, k) = \rho^*, \forall k \in I(\Delta^*) \setminus \{k_0\}.$$

Отсюда ввиду (21), (23) вытекает

$$\rho(A_\varepsilon) = \max_{k \in [0:N]} f(A_\varepsilon, k) = \rho^*.$$

Следовательно, вектор A_ε является решением задачи (1), причём $A_\varepsilon \neq A^*$, что противоречит единственности.

Лемма доказана.

Из леммы 2 для множества

$$\bar{S} := \{k \in [0:N] : \rho^* = f(A^*, k)\} \quad (24)$$

вытекает

Следствие 1. Если $|Z| < n+1$ и вектор $A^* \in \mathfrak{X}$ является единственным решением задачи (1), то

$$|\bar{S}| \geq n+2. \quad (25)$$

Введём некоторые вспомогательные обозначения. Пусть множество \bar{S} , определённое в (24), имеет вид

$$\bar{S} := \{w_1 < \dots < w_{|\bar{S}|}\}. \quad (26)$$

Разобьём множество \bar{S} на непустые подмножества

$$\begin{aligned} \bar{S}_l &= \{w_{v_l} < w_{v_l+1} < \dots < w_{v_l+u_l}\}, \quad l \in [1:r], \\ v_1 &= 1, \quad v_l = v_{l-1} + u_{l-1} + 1, \quad l \in [2:r], \end{aligned} \quad (27)$$

обладающие следующими свойствами:

$$1) \bar{S}_1 \cup \dots \cup \bar{S}_r = \bar{S};$$

$$2) \exists i_0 \in \{1, 2\};$$

$$f(A^*, k) = \begin{cases} f_{i_0}(A^*, k), & p - \text{нечетно}, \\ f_{3-i_0}(A^*, k), & p - \text{четно}, \end{cases} \quad \forall p \in [1:r], \forall k \in \bar{S}_p;$$

3) если $k \in \bar{S}_p \cap Z$, то $k = w_{v_p}$, $\forall p \in [1:r]$ (каждое множество разбиения \bar{S}_p содержит не более одного элемента множества Z и если такой имеется, то он будет минимальным среди элементов множества \bar{S}_p);

$$4) \text{ если } w_1 \in Z, \text{ то } \bar{S}_1 = \{w_1\}.$$

Замечание 2. Из (27) вытекает, что $\forall w_k \in \bar{S}_p, \forall w_l \in \bar{S}_{p+1}, \forall p \in [1:r-1]$, выполняется неравенство $w_l > w_k$, т. е. множества $\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_r$ «следуют друг за другом».

Замечание 3. Из свойства 4) следует, что r – максимально возможное число подмножеств разбиения, удовлетворяющих свойствам 1)–3).

3. КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ

Переходим к доказательству основного результата работы – критерия единственности решения задачи (1).

Теорема 3 (критерий единственности решения). Для того чтобы задача (1) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

$$(\alpha) |Z| \geq n+1;$$



(β) ∃ базис $\sigma^* : \rho^* = \rho_i^*(\sigma^*)$ для $i=0$ или $i=1$.

Доказательство. Достаточное условие получено в [2], [4].

Необходимость. Если $n = 0$, утверждение легко следует из теоремы 1. Считаем $n \geq 1$.

Пусть вектор A^* является единственным решением задачи (1). Предположим, что условие (α) не выполняется, т. е. $|Z| < n + 1$ (возможно $Z = \emptyset$). Покажем, что выполняется условие (β). В соответствии со следствием 1 $|\bar{S}| \geq n + 2$.

Произведём разбиение множества \bar{S} вида (26) на максимальное количество следующих друг за другом непустых непересекающихся подмножеств $\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_r$, удовлетворяющих свойствам 1) – 4).

1°. Сначала рассмотрим случай, когда $r \geq n + 2$. Возьмём в качестве базиса σ^* множество точек $\{t_{j_0} < t_{j_1} < \dots < t_{j_{n+1}}\}$ таких, что $j_k \in \bar{S}_{k+1}$, $k \in [0 : n + 1]$. Покажем, что из свойств разбиения вытекает (β).

Действительно, пусть, например в свойстве 2) $i_0 = 2$. Тогда выполняются равенства:

$$f(A^*, j_k) = \begin{cases} f_2(A^*, j_k), & k - \text{четно}, \\ f_1(A^*, j_k), & k - \text{нечетно}, \end{cases} \quad \forall k \in [0 : n + 1].$$

Поскольку $j_k \in \bar{S}$, $\forall k \in [0 : n + 1]$, то $f(A^*, j_k) = \rho^*$. Следовательно,

$$\begin{cases} \rho^* = y_{2,j_k} - p_n(A^*, t_{j_k}) = \varphi_0(\sigma^*, t_{j_k}) - p_n(A^*, t_{j_k}), & k - \text{четно}, \\ \rho^* = p_n(A^*, t_{j_k}) - y_{1,j_k} = p_n(A^*, t_{j_k}) - \varphi_0(\sigma^*, t_{j_k}), & k - \text{нечетно}, \end{cases} \quad \forall k \in [0 : n + 1],$$

откуда

$$(-1)^k \rho^* + p_n(A^*, t_{j_k}) = \varphi_0(\sigma^*, t_{j_k}), \quad \forall k \in [0 : n + 1].$$

Таким образом, для вектора A^* выполняется необходимое и достаточное условие решения задачи П.Л.Чебышёва (3) для $i = 0$ [3, с. 14], следовательно, вектор A^* является решением этой задачи и $\rho^* = \rho_0^*(\sigma^*)$. Случай $i_0 = 1$ рассматривается аналогично.

2°. Теперь допустим, что $r < n + 2$. Убедимся в противоречивости этого неравенства.

Так как $|\bar{S}| \geq n + 2$ и $|Z| < n + 1$, то

$$\exists p \in [1 : r], \exists k_0 \in \bar{S}_p \setminus Z. \quad (28)$$

Рассмотрим 3 случая.

(А). Пусть $r < n + 1$. Поскольку

$$\sum_{i=1}^r |\bar{S}_i| = |\bar{S}| \geq n + 2 \text{ и } \bar{S}_i \cap \bar{S}_j = \emptyset, i, j \in [1 : r], i \neq j,$$

то $\exists p \in [1 : r] : |\bar{S}_p| \geq 2$. Ввиду обозначений (27), $w_p, w_{p+1} \in \bar{S}_p$. Положим

$$k_0 := w_{p+1} \in \bar{S}_p.$$

Возьмём $x_0 < t_0$; $x_l := t_{w_l}, \forall l \in [1 : r]$; $x_{r+1} > x_r, \dots; x_{n+1} > x_n$.

С учётом принятых обозначений имеем следующее расположение точек сетки T с индексами из множества \bar{S} :

$$\begin{aligned} x_0 < x_1 = t_{w_1} < \dots < t_{w_{1+u_1}} < x_2 = t_{w_2} < \dots < t_{w_{2+u_2}} < \dots < x_p = t_{w_p} < \\ < t_{w_{p+1}} = t_{k_0} < \dots < t_{w_{p+u_p}} < \dots < x_r = t_{w_r} < \dots < t_{w_{r+u_r}} < x_{r+1} \dots < x_{n+1}. \end{aligned} \quad (29)$$

Определим вектор коэффициентов алгебраического полинома A_ε , удовлетворяющий условиям (I)–(III) леммы 1. Сначала построим вспомогательный вектор A_ε^* , решив для достаточно малого $\varepsilon > 0$ систему



$$\left\{ \begin{array}{l} p_n(A_\varepsilon^*, t_{w_l}) = p_n(A^*, t_{w_l}), \quad l \in [1:r], \\ p_n(A_\varepsilon^*, x_k) = p_n(A^*, x_k), \quad k \in [r+1:n], \\ p_n(A_\varepsilon^*, t_{k_0}) = \begin{cases} p_n(A^*, t_{k_0}) - \varepsilon, & \text{если } f(A^*, k_0) = f_1(A^*, k_0) \\ p_n(A^*, t_{k_0}) + \varepsilon, & \text{если } f(A^*, k_0) = f_2(A^*, k_0) \end{cases} \end{array} \right.$$

Эта система имеет единственное решение, поскольку определитель из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля ([3]), а число неизвестных совпадает с количеством уравнений. Обозначив $A_\varepsilon = A^* - A_\varepsilon^*$, запишем эту систему в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} p_n(A_\varepsilon, t_{w_l}) = 0, \quad l \in [1:r], \\ p_n(A_\varepsilon, x_k) = 0, \quad k \in [r+1:n], \\ p_n(A_\varepsilon, t_{k_0}) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{если } f(A^*, k_0) = f_1(A^*, k_0) \\ -\varepsilon, & \text{если } f(A^*, k_0) = f_2(A^*, k_0) \end{cases} \end{array} \right. \quad (30)$$

Ясно, что $A_\varepsilon \neq 0_{n+1}$ и $A_\varepsilon \longrightarrow 0_{n+1}$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

Пусть, например $p_n(A_\varepsilon, t_{k_0}) = \varepsilon > 0$, т. е. $f(A^*, k_0) = f_1(A^*, k_0)$. Ввиду свойства 2) разбиения, поскольку $k_0 \in \bar{S}_p$, то

$$f(A^*, k) = f_1(A^*, k) = p_n(A^*, t_k) - y_{1,k} = \rho^*, \quad \forall k \in \bar{S}_p. \quad (31)$$

Берём $A = A_\varepsilon$, в случае если p – чётно и $A = -A_\varepsilon$, в случае если p – нечётно, а $z = t_{k_0} \in (x_p; x_{p+1})$. Тогда, используя лемму 1, получаем

$$(-1)^{p-l} p_n(A_\varepsilon, t_k) \geq 0, \quad \forall k \in \bar{S}_l, \quad \forall l \in [1:r]. \quad (32)$$

В частности, учитывая свойство 3), выполняются равенства

$$p_n(A_\varepsilon, t_k) = 0, \quad \forall k \in Z. \quad (33)$$

Из (33) вытекают равенства

$$f(A_\varepsilon^*, k) = \rho^*, \quad \forall k \in Z. \quad (34)$$

Рассмотрим случай, когда $(p-l)$ – чётно. Тогда из (32) получаем $p_n(A_\varepsilon, t_k) \geq 0, \quad \forall k \in \bar{S}_l$, и, следовательно,

$$p_n(A_\varepsilon^*, t_k) \leq p_n(A^*, t_k), \quad \forall k \in \bar{S}_l. \quad (35)$$

Из (31) ввиду свойства 2) разбиения имеем

$$f(A^*, k) = f_1(A^*, k), \quad \forall k \in \bar{S}_p, \quad (36)$$

причём

$$f_1(A^*, k) > f_2(A^*, k), \quad \forall k \in \bar{S}_l \setminus Z.$$

Поскольку $A_\varepsilon^* \longrightarrow A^*$ при $\varepsilon \downarrow 0$, то из последнего неравенства при достаточно малом $\varepsilon > 0$ вытекают неравенства

$$f_1(A_\varepsilon^*, k) > f_2(A_\varepsilon^*, k), \quad \forall k \in \bar{S}_l \setminus Z.$$

Отсюда

$$f(A_\varepsilon^*, k) = f_1(A_\varepsilon^*, k), \quad \forall k \in \bar{S}_l \setminus Z. \quad (37)$$



Из (35) $f_1(A_\varepsilon^*, k) \leq f_1(A^*, k)$. Тогда ввиду (37), (36) получаем $f(A_\varepsilon^*, k) \leq f(A^*, k), \forall k \in \bar{S}_l \setminus Z$. Следовательно, ввиду (34)

$$f(A_\varepsilon^*, k) \leq \rho^*, \forall k \in \bar{S}_l. \quad (38)$$

Аналогично выводится неравенство (38) и для случая, когда $(p-l)$ – нечётно. Таким образом, (38) выполняется $\forall l \in [1:r]$.

Последнее означает, что

$$f(A_\varepsilon^*, k) \leq \rho^*, \forall k \in \bar{S}. \quad (39)$$

Наконец, рассмотрим индексы $k \in [0:N] \setminus \bar{S}$. Имеем $f(A^*, k) < \rho^*$. Уменьшая при необходимости величину $\varepsilon > 0$, добиваемся выполнения неравенства $f(A_\varepsilon^*, k) < \rho^*$.

Отсюда ввиду (34), (39) получаем при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\max_{k \in [0:N]} f(A_\varepsilon^*, k) = \rho^*, \forall k \in [0:N]. \quad (40)$$

Равенство (40) противоречит единственности решения задачи (1). Аналогичное противоречие получается в случае $p_n(A_\varepsilon, t_{k_0}) = -\varepsilon < 0$. Следовательно, ситуация (А) нереализуема.

Для следующих двух случаев принципиальное отличие от случая (А) состоит лишь в способе построения вектора коэффициентов полинома, удовлетворяющего условиям (I)–(III) леммы 1.

(Б). Пусть $r = n+1$ и $w_{v_l} \notin Z$ (ввиду (27) $w_{v_l} \in \bar{S}_l$). В этом случае полагаем $k_0 := w_{v_r}, z := t_{k_0}$. По свойству 3), $Z \cap \bar{S}_1 = \emptyset$. Возьмём $x_0 < t_0$. Далее имеем

$$\begin{aligned} x_0 < t_{k_0} = t_{w_{v_1}} < \dots < t_{w_{v_1+u_1}} < x_1 = t_{w_{v_2}} < \dots < t_{w_{v_2+u_2}} < \\ < \dots < x_n = t_{w_{v_{n+1}}} < t_{w_{v_{n+1}+u_{n+1}}} < x_{n+1}. \end{aligned} \quad (41)$$

Строим вектор $A_\varepsilon = A^* - A_\varepsilon^*$, где A_ε^* – решение системы:

$$\begin{cases} p_n(A_\varepsilon^*, t_{w_{v_l}}) = p_n(A^*, t_{w_{v_l}}), l \in [2:r], \\ p_n(A_\varepsilon^*, t_{k_0}) = \begin{cases} p_n(A^*, t_{k_0}) - \varepsilon, \text{ если } f(A^*, k_0) = f_1(A^*, k_0), \\ p_n(A^*, t_{k_0}) + \varepsilon, \text{ если } f(A^*, k_0) = f_2(A^*, k_0). \end{cases} \end{cases} \quad (42)$$

Пользуясь леммой 1 и свойствами разбиения, как и в случае (А), приходим к выводу о том, что A_ε^* будет решением задачи (1) при достаточно малом $\varepsilon > 0$, следовательно, ситуация (Б) также невозможна.

(В). Осталось рассмотреть случай, когда $r = n+1$ и $w_{v_l} \in Z$. Из свойства 4) следует, что разбиение имеет вид

$$\bar{S}_1 = \{w_{v_1}\} \subset Z, \dots, \bar{S}_{d-1} = \{w_{v_{d-1}}\} \subset Z, \bar{S}_d = \{w_{v_d}, \dots, w_{v_d+u_d}\}, \dots, \bar{S}_{n+1}$$

где $\bar{S}_d \cap Z = \emptyset, d > 1$.

Действительно, если бы для всех $i \in [1:r]$ выполнялось $\bar{S}_i \cap Z \neq \emptyset$, то множество Z содержало бы $n+1$ элементов, что противоречит предположению.

Полагаем $k_0 := w_{v_d}, z := t_{k_0}, x_0 < t_0$. Далее имеем

$$\begin{aligned} x_0 < x_1 = t_{w_{v_1}} < \dots < x_{d-1} = t_{w_{v_{d-1}}} < t_{w_{v_d}} = t_{k_0} < \dots < t_{w_{v_d+u_d}} < \\ < t_{w_{v_{d+1}}} = x_d < \dots < t_{w_{v_d+u_d}} < \dots < x_n = t_{w_{v_{n+1}}} < \dots < t_{w_{v_{n+1}+u_{n+1}}} < x_{n+1}. \end{aligned} \quad (43)$$

Возьмём $k_0 := w_{v_d}, \varepsilon > 0$ и рассмотрим систему



$$\begin{cases} p_n(A_\varepsilon^*, t_{w_l}) = p_n(A^*, t_{w_l}), \quad l = 1, \dots, d-1, d+1, \dots, r, \\ p_n(A_\varepsilon^*, t_{k_0}) = \begin{cases} p_n(A^*, t_{k_0}) - \varepsilon, & \text{если } f(A^*, k_0) = f_1(A^*, k_0), \\ p_n(A^*, t_{k_0}) + \varepsilon, & \text{если } f(A^*, k_0) = f_2(A^*, k_0). \end{cases} \end{cases} \quad (44)$$

Повторяя те же рассуждения, что и для случая (А), приходим к выводу о том, что A_ε^* будет решением задачи (1) при достаточно малом $\varepsilon < 0$, следовательно, ситуация (В) также невозможна.

Итак, неравенство $r < n + 2$ ложно, следовательно, $r \geq n + 2$.

Теорема доказана.

Из теорем 1, 3 вытекает

Следствие 2. Если решение задачи (1) не единственно, то $|\mathfrak{R}| = \infty$, при этом $1 \leq |Z| < n + 1$.

Доказательство. Пусть задача (1) имеет не единственное решение. Тогда ни одно из условий (а), (б) условия теоремы 3 не выполняется. Поскольку (а) не выполняется, то

$$|Z| < n + 1. \quad (45)$$

Поскольку (б) не выполняется, то

$$\forall \text{ базиса } \sigma^* : \rho^* < \rho_i^*(\sigma^*) \text{ для } i = 0, 1. \quad (46)$$

Пусть A^* – решение задачи (1). Имеем

$$\rho(A^*) = \rho^*. \quad (47)$$

Из (46), (47) вытекает, что для этого вектора не выполняется условие (б) теоремы 1. Из условия (а) теоремы 1 получаем, что $Z \neq \emptyset$. Отсюда ввиду (45) вытекает неравенство $1 \leq |Z| < n + 1$.

Пусть \bar{A}, \tilde{A} – решения задачи (1) и $\bar{A} \neq \tilde{A}$. В силу выпуклости множества \mathfrak{R} любой вектор $\alpha \bar{A} + (1 - \alpha) \tilde{A}$ при $\alpha \in [0; 1]$ также будет решением задачи (1). Следовательно, $|\mathfrak{R}| = \infty$.

Что и требовалось доказать.

Замечание 4. В общем случае из $1 \leq |Z| < n + 1$ не следует, что решение не единственно.

Пример 1. Пусть $n = 1$, $N = 4$, $T = \{0 < 1 < 2 < 3\}$, $\Phi(0) = [-1; 1]$, $\Phi(1) = [-1; 0]$, $\Phi(2) = [0; 1]$, $\Phi(3) = [-1; 0]$. Решение $p_1(t) \equiv 0$ единственно, $\rho^* = m = 1$, $Z = \{0\}$.

$$\text{Пусть } M := \left\{ k \in [0; N] : \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} = m \right\}.$$

Следствие 3. Если $|M| \geq n + 1$, то задача (1) имеет единственное решение.

Доказательство. Пусть $Z \neq \emptyset$. Тогда $Z = M$, следовательно, выполняется условие (а) теоремы 3 и решение задачи (1) будет единственным.

Если $Z = \emptyset$, то для решения задачи (1) будет выполняться условие (б) теоремы 1 и, следовательно, условие (б) теоремы 3.

Что и требовалось доказать.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ 1295.2003.1).

Библиографический список

1. Выгодчикова И.Ю. О наилучшем приближении дискретного мультиотображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 25–27.
2. Выгодчикова И.Ю. Об алгоритме решения задачи о наилучшем приближении дискретного многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 27–31.
3. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
4. Выгодчикова И.Ю. О крайних точках множества решений задачи о наилучшем приближении многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 15–18.

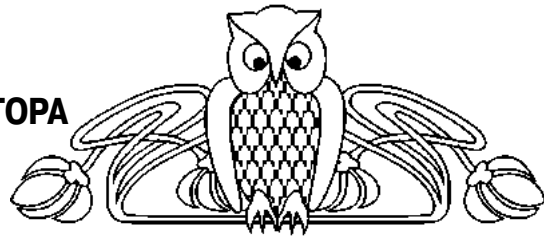


УДК 517.968

ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В.П. Курдюмов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики
e-mail: KhromovAP@info.sgu.ru



Estimates for Eigenfunctions and Eigenvalues of an Integral-differential Operator
V.P. Kurdyumov

Получены асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений интегро-дифференциального оператора.

Asymptotic formulas are obtained for eigenfunctions and eigenvalues of an integral-differential operator.

Рассматривается интегро-дифференциальный оператор

$$A = A(M, g, v)$$

где $Af = Mf + g(x) \int_0^\pi f(t)v(t) dt$, $Mf = \int_0^x M(x,t)f(t) dt$, $0 \leq x \leq \pi$.

Для случая $v = 2^n$ и $p(x), q(x) \in L_2[0,1]$ задача о нахождении оценок для собственных функций и собственных значений оператора L методом подобных операторов исследовалась в [1]. В настоящей работе методами классической спектральной теории уточняется и обобщается результат из [1].

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Введем оператор $L_0 : y^{(v)}, y^{(2s)}(0) = y^{(2s)}(1) = 0$, $s = 0, 1, \dots, v/2 - 1$, собственные функции и собственные значения которого имеют вид $e_k(x) = \sqrt{2} \sin k\pi x$, $\lambda_k = -(k\pi)^v$, $k = 1, 2, \dots$. Положим $\lambda = -\rho^v$ и обозначим через S_δ область, получающуюся из области $S = \{\rho : \text{Im } \rho \geq -\varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, удалением окрестностей, ограниченных круговыми контурами γ_k достаточно малого радиуса вокруг точек $\rho_k = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$,

для $v_1 = 0$, или область, получающуюся из области $S = \left\{ \rho : \arg \rho \in \left[-\frac{\pi}{v}, \frac{\pi}{v} \right] \right\}$ удалением окрестностей,

ограниченных такими же контурами вокруг точек $\rho_k = k\pi$, $k = 1, 2, \dots$, для $v_1 \geq 1$.

Пусть $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, где E – единичный оператор, есть резольвента оператора L и $R_{0,\lambda}$ – резольвента оператора L_0 . Приведем известный результат ([2], с. 388).

Для ядра $G_0(x, t, \lambda)$ резольвенты $R_{0,\lambda}$ в области S_δ справедливы оценки

$$\frac{\partial^s}{\partial x^s} G_0(x, t, \lambda) = O\left(\frac{1}{|\rho|^{v-1-s}}\right), \quad s = 0, \dots, v-1. \quad (1)$$

Лемма 1. В области S_δ при $|\rho|$ достаточно больших R_λ существует, справедлива формула

$$R_\lambda f = R_{0,\lambda} f + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k R_{0,\lambda} (ND^{n-1} R_{0,\lambda})^k f, \quad f \in L[0,1], \quad (2)$$

и ряд в (2) сходится равномерно по $x \in [0,1]$. Здесь D – оператор дифференцирования.

Доказательство. Пусть $y = R_\lambda f$. Тогда $y^{(v)} - \lambda y = f - Ny^{(v-1)}$.

Откуда

$$y = R_{0,\lambda} f - R_{0,\lambda} Ny^{(v-1)}. \quad (3)$$



Дифференцируя (3) $\nu - 1$ раз, получим

$$(E + D^{\nu-1}R_{0,\lambda}N)y^{(\nu-1)} = D^{\nu-1}R_{0,\lambda}f. \quad (4)$$

Пусть $\tilde{N}(x,t)$ – непрерывная на $[0,1] \times [0,1]$ функция такая, что

$$\|N(x,t) - \tilde{N}(x,t)\| < \varepsilon, \quad (5)$$

ε достаточно мало, и норма берется в $L([0,1] \times [0,1])$. Используя (1), (5) и лемму 6 из ([2], с. 390) для $\tilde{N}(x,t)$, нетрудно показать, что для ядра $N_1(x,t,\lambda)$ оператора $D^{\nu-1}R_{0,\lambda}N$ справедлива оценка

$$\|N_1(x,t,\lambda)\| = o(1), \quad (6)$$

где норма берется в $L[0,1]$ по переменной t и оценка $o(1)$ равномерна по x . Поэтому оператор $E + D^{\nu-1}R_{0,\lambda}N$

обратим в $L[0,1]$. Из (4) получаем $y^{(\nu-1)} = \left(E + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (D^{\nu-1}R_{0,\lambda}N)^k \right) D^{\nu-1}R_{0,\lambda}f$ и поэтому из (3) следует

(2). Обозначим через $N_2(x,t,\lambda)$ ядро оператора $ND^{\nu-1}R_{0,\lambda}f$. Так же, как и при получении оценки (6), найдем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\rho_\varepsilon > 0$, что для всех $|\rho| > \rho_\varepsilon, \rho \in S_\delta$,

$$\|N_2(x,t,\lambda)\| \leq C\varepsilon, \quad (7)$$

где норма берется в $L[0,1]$ по переменной x и постоянная C не зависит от t . Отсюда и из (1) следуют оценки: $|R_{0,\lambda}(ND^{\nu-1}R_{0,\lambda})^k f| \leq \frac{C}{|\rho|^{\nu-1}} \varepsilon^k \|f\|_{L^p}$, $k = 1, 2, \dots$, поэтому справедливо и второе утверждение леммы.

Следствие. Пусть $G(x,t,\lambda)$ – ядро R_λ и $G_k(x,t,\lambda)$ – ядро оператора $(-1)^k R_{0,\lambda}(ND^{\nu-1}R_{0,\lambda})^k, k = 1, 2, \dots$. Тогда в области S_δ при $|\rho|$ достаточно больших

$$G(x,t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k(x,t,\lambda), \quad (8)$$

ряд в (8) сходится равномерно по $x, t \in [0,1]$, и для любого $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$|G_k(x,t,\lambda)| \leq \frac{C\varepsilon^k}{|\rho|^{\nu-1}}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где постоянная C не зависит от x и t .

Обозначим через $\Gamma_k, k = 1, 2, \dots$ образы контуров γ_k при отображении $\lambda = -\rho^\nu$.

Лемма 2. При n достаточно больших собственные значения оператора L однократны и расположены внутри контуров Γ_n .

Доказательство. В силу (8) и (9) ядро оператора $R_\lambda - R_{0,\lambda}$ есть $o(\rho^{1-\nu})$ при $|\rho| \rightarrow \infty$. Но известно,

что если $R_\lambda f = \int_0^1 G(x,t,\lambda) f(t) dt$, то $-\frac{1}{2\pi i} \int \int_{\Gamma_n} G(x,x,\lambda) dx d\lambda$ равен кратности всех собственных значений оператора L , попавших внутрь Γ_n . А так как для всех $n - \frac{1}{2\pi i} \int \int_{\Gamma_n} G_0(x,x,\lambda) dx d\lambda = 1$, то при больших n и $-\frac{1}{2\pi i} \int \int_{\Gamma_n} G(x,x,\lambda) dx d\lambda = 1$.

Лемма доказана.

2. ОЦЕНКА ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Лемма 3. Обозначим через $\tilde{\varphi}_n(x)$ собственную функцию оператора L , соответствующую собственному значению \tilde{W}_n , и через ψ_n – собственную функцию сопряженного к нему оператора, соответствующую собственному значению \tilde{W}_n , и пусть



$$\varphi_n(x) = \frac{\tilde{\varphi}_n(x)(e_n, \psi_n)}{(\tilde{\varphi}_n, \psi_n)}. \quad (10)$$

Тогда при n достаточно больших и произвольном $m = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$\left| \varphi_n(x) - e_n(x) + \sum_{k=1}^m g_k(x, n) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |g_k(x, n)| \quad (11)$$

где $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, $g_k(x, n) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \int_{\Gamma_n} G(x, t, \lambda) d\lambda e_n(t) dt$.

Доказательство. Пользуясь известным представлением функции Грина в окрестности простого полюса и интегрируя (8) по Γ_n при n достаточно больших, найдем

$$-\frac{\tilde{\varphi}_n(x)\tilde{\psi}_n(t)}{(\tilde{\varphi}_n, \psi_n)} + e_n(x)e_n(t) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_n} G_k(x, t, \lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=m+1}^{\infty} \int_{\Gamma_n} G_k(x, t, \lambda) d\lambda. \quad (12)$$

Умножая (12) на $e_n(t)$ и интегрируя по t от 0 до 1, получим (11). Лемма доказана.

Обозначим через \tilde{S}_δ область, полученную из λ -плоскости удалением окрестностей, ограниченных Γ_k , $k = 1, 2, \dots$.

Лемма 4. В области \tilde{S}_δ справедливы формулы:

$$G_0(x, t, \lambda) = -\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{e_\mu(x)e_\mu(t)}{\lambda - \lambda_\mu}, \quad (13)$$

$$\int_0^1 G_1(x, t, \lambda) e_n(t) dt = -\frac{1}{\lambda - \lambda_n} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{e_\mu(x)(Ne_n^{(v-1)}, e_\mu)}{\lambda - \lambda_\mu}, \quad (14)$$

$$\int_0^1 G_k(x, t, \lambda) e_n(t) dt = -\frac{1}{\lambda - \lambda_n} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k=1}^{\infty} \frac{e_{\mu_1}(x)(Ne_n^{(v-1)}, e_{\mu_k}) \prod_{i=1}^{k-1} (Ne_{\mu_{i+1}}^{(v-1)}, e_{\mu_i})}{\prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_{\mu_i})}, \quad (15)$$

$k = 1, 2, \dots$

Кроме того, ряды (13)–(15) сходятся равномерно по всем аргументам.

Доказательство. Формула (13) получается так же, как и (22) из ([3], с. 98), а равномерная сходимость по $\lambda \in \tilde{S}_\delta$ ряда в (13) следует из его равномерной сходимости по $\lambda \in \tilde{S}_\delta \cap \text{Re } \lambda$. Для доказательства формул (14) и (15) отметим, что для $f(x) \in L_2[0, 1]$ из равномерной сходимости ряда $\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mu^{v-1}(f, e_\mu)}{\lambda - \mu}$ по $\lambda \in \tilde{S}_\delta \cap \text{Re } \lambda$ следует его равномерная сходимость по $\lambda \in \tilde{S}_\delta$ и поэтому справедливо

$$\int_0^1 G_{0_x}^{(v-1)}(x, t, \lambda) f(t) dt = -\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{e_\mu^{(v-1)}(x)(f, e_\mu)}{\lambda - \lambda_\mu}. \quad (16)$$

Представив теперь в $\int_0^1 G_k(x, t, \lambda) e_n(t) dt$, $k = 1, 2, \dots$, функции $G_k(x, t, \lambda)$ через ядра $N(x, t)$, $G_{0_x}^{(i)}(x, t, \lambda)$, $i = 0, 1, \dots, v-1$, операторов N и $D^i R_{0, \lambda}$, воспользовавшись формулами (13), (16) и ортонормированностью системы $e_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, получим (14) и (15). Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть μ_1, \dots, μ_k – набор k натуральных чисел, и

$$a_{\mu_1, \dots, \mu_k}(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \cdot \frac{e_{\mu_1}(x)(Ne_n^{(v-1)}, e_{\mu_k}) \prod_{i=1}^{k-1} (Ne_{\mu_{i+1}}^{(v-1)}, e_{\mu_i})}{\prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_{\mu_i})}.$$

Обозначим через (n^l, k) набор, полученный из предыдущего заменой l его элементов, $l = 0, 1, \dots, k$, натуральным числом n , в котором оставшиеся из чисел μ_i занумерованы через μ_{i_j} , $j = 1, \dots, k-l$.



Тогда справедлива формула

$$-\int_0^1 G_k(x, t, \lambda) e_n(t) dt \sum_{l=0}^k \sum_{(n^l, k)} \sum_{\mu_{ij} \in (n^l, k)} a_{(n^l, k)}(x, \lambda), \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь суммирование $\sum_{\mu_{ij} \in (n^l, k)}$ распространяется по всем μ_{ij} , которые входят в (n^l, k) и проводится для каждого из них от 1 до бесконечности, кроме значения, равного n , а суммирование $\sum_{(n^l, k)}$ – по всем указанным не совпадающим между собой наборам (n^l, k) .

Доказательство следует из леммы 4 и формулы

$$\sum_{\mu_i=1}^{\infty} a_{\mu_1, \dots, \mu_i, \dots, \mu_k} = \sum_{\mu_i \neq n} a_{\mu_1, \dots, \mu_i, \dots, \mu_k} + a_{\mu_1, \dots, n, \dots, \mu_k},$$

где во втором слагаемом справа индекс n стоит на i -м месте.

Лемма 6. Пусть $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ и $k, m \geq 1$. Тогда справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} (\lambda - \lambda_n)^{-m} \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-1} d\lambda = (-1)^{m-1} \sum_{(p_j, k, m, k+m-1)} \prod_{j=1}^k (\lambda_n - \lambda_j)^{-p_j}. \quad (17)$$

Здесь $\sum_{(p_j, s, m, k)}$ означает, что суммирование распространяется по всевозможным не равным между собой наборам натуральных чисел $p_j, j = 1, \dots, s$, удовлетворяющим соотношениям $p_j \leq m$ и $\sum_{j=1}^s p_j = k$. Кроме того, число слагаемых в правой части (17) равно C_{k+m-2}^{k-1} .

Доказательство. Сначала докажем справедливость формулы (17). По формуле Коши достаточно показать, что

$$\frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-1} = (-1)^{m-1} \sum_{(p_j, k, m, k+m-1)} \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-p_j}. \quad (18)$$

Для $m \geq 1$, используя формулу Лейбница, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} (\lambda - \lambda_1)^{-1} (\lambda - \lambda_2)^{-1} &= (-1)^{m-1} \sum_{p_1=1}^m (\lambda - \lambda_1)^{-p_1} (\lambda - \lambda_2)^{-(m+1-p_1)} = \\ &= (-1)^{m-1} \sum_{(p_j, 2, m, m+1)} (\lambda - \lambda_1)^{-p_1} (\lambda - \lambda_2)^{-p_2}. \end{aligned}$$

Проведем индукцию формулы (18) по m : предполагая, что справедливо

$$\frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-1} = (-1)^{m-1} \sum_{(p_j, k, m, k+m-1)} \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-p_j}. \quad (19)$$

Докажем, что

$$\frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-1} = (-1)^m \sum_{(p_j, k, m+1, k+m)} \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-p_j}. \quad (20)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-1} \right\} &= \frac{1}{m} \frac{d}{d\lambda} \times \left\{ (-1)^{m-1} \sum_{(p_j, k, m, k+m-1)} \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-p_j} \right\} = \frac{(-1)^m}{m} \times \\ &\times \left\{ \sum_{i=1}^k \sum_{(p_j, k, m, k+m-1)} p_i (\lambda - \lambda_i)^{-p_i-1} \prod_{j \neq i}^k (\lambda - \lambda_j)^{-p_j} \right\}, \end{aligned}$$

где произведение $\prod_{j \neq i}^k$ берется по всем $j = 1, \dots, k, j \neq i$. Последнее выражение запишем так:



$$\frac{(-1)^m}{m} \left\{ \sum_{i=1}^k \sum (p_i - 1) (\lambda - \lambda_i)^{-p_i} \prod_{j \neq i}^k (\lambda - \lambda_j)^{-p_j} \right\}, \quad (21)$$

где внутренняя сумма распространяется по всевозможным $p_s, s = 1, \dots, k$, для которых $\sum_{s=1}^k p_s = k + m$, причем $1 \leq p_s \leq m$ при $s \neq i$ и $2 \leq p_i \leq m + 1$. Поскольку каждое слагаемое внутренней суммы в (21) обращается в ноль при $p_i = 1$ и $\sum_{i=1}^k (p_i - 1) = m$, то (21) совпадает с

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^m}{m} \left\{ \sum_{i=1}^k \sum_{(p_s, k, m, k+m)} (p_i - 1) \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-p_j} + m \sum_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i)^{-(m+1)} \prod_{j \neq i}^k (\lambda - \lambda_j)^{-1} \right\} = \\ & = (-1)^m \left\{ \sum_{(p_s, k, m, k+m)} \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-p_j} + \sum_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i)^{-(m+1)} \prod_{j \neq i}^k (\lambda - \lambda_j)^{-1} \right\} = (-1)^m \sum_{(p_s, k, m+1, k+m)} \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-p_j}. \end{aligned}$$

Формула (20) доказана.

Теперь найдем индукцию для (18) по k : предполагая справедливость этой формулы для данного k , покажем, что справедливо

$$\frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} \prod_{j=1}^{k+1} (\lambda - \lambda_j)^{-1} = (-1)^{m-1} \sum_{(p_j, k+1, m, k+m)} \prod_{j=1}^{k+1} (\lambda - \lambda_j)^{-p_j}. \quad (22)$$

Из (20) при $s = 0, 1, \dots, m - 1$ имеем

$$\frac{d^s}{d\lambda^s} \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-1} = s! (-1)^s \sum_{(p_j, k, s+1, k+s)} \prod_{j=1}^{k+1} (\lambda - \lambda_j)^{-p_j}.$$

Отсюда и из очевидного равенства $\frac{d^s}{dx^s} (\lambda - \lambda_{k+1})^{-1} = (-1)^s s! (\lambda - \lambda_{k+1})^{-(s+1)}$, используя формулу Лейбница, находим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} \prod_{j=1}^{k+1} (\lambda - \lambda_j)^{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{s=0}^{m-1} C_{m-1}^s \left(\prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-1} \right)^{(s)} (\lambda - \lambda_{k+1})^{-(m-1-s)} = \\ & = (-1)^{m-1} \sum_{s=0}^{m-1} (\lambda - \lambda_{k+1})^{-m+s} \sum_{(p_j, k, s+1, k+s)} \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-p_j} = (-1)^{m-1} \sum_{s=1}^m (\lambda - \lambda_{k+1})^{-(m+1-s)} \sum_{(p_j, k, s, k+s-1)} \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-p_j}. \end{aligned}$$

Теперь, обозначая $m + 1 - s = p_{k+1}$, для последнего выражения получаем

$$(-1)^{m-1} \sum_{p_{k+1}=1}^m (\lambda - \lambda_{k+1})^{-p_{k+1}} \sum_{(p_j, k, m+1-p_{k+1}, k+m-p_{k+1})} \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-p_j} = (-1)^{m-1} \sum_{(p_j, k+1, m, k+m)} \prod_{j=1}^{k+1} (\lambda - \lambda_j)^{-p_j}.$$

Формула (22) доказана.

Второе утверждение леммы докажем для формулы (18). При $k = 1, m = 2$ оно очевидно. Проведем

сначала индукцию по m . Предполагаем, что $\frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-1}$ содержит C_{k+m-2}^{k-1} слагаемых вида

$(-1)^{m-1} \sum_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-p_j}$, где $\sum_{j=1}^k p_j = k + m - 1, p_j \leq m$. Поэтому выражение

$$\frac{1}{m} \frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-1} \right\}$$

содержит $\frac{1}{m} C_{k+m-2}^{k-1} (k + m - 1) = C_{k+m-1}^{k-1}$ слагаемых вида $(-1)^m \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-p_j}$, где теперь $\sum_{j=1}^k p_j = k + m, p_j \leq m + 1$.

Проведем индукцию по k . Пусть справедливо второе утверждение леммы для данного k . Покажем, что выражение $\frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} \prod_{j=1}^{k+1} (\lambda - \lambda_j)^{-1}$ содержит C_{k+m-1}^k слагаемых вида $(-1)^{m-1} \prod_{j=1}^{k+1} (\lambda - \lambda_j)^{-p_j}$, где



$$\sum_{j=1}^{k+1} p_j = k + m, \quad p_j \leq m. \text{ Обозначим } u = \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-1}, \quad v = (\lambda - \lambda_{k+1})^{-1}. \text{ Тогда имеем}$$

$$\frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} (uv) = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{l=0}^{m-1} C_{m-1}^l u^{(l)} v^{(m-1-l)}. \quad (23)$$

Поскольку при $0 \leq l \leq m-1$ выражение $\frac{1}{l!} u^{(l)}$ содержит C_{k+l-1}^{k-1} слагаемых вида $(-1)^l \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{-p_j}$, где $\sum_{j=1}^k p_j = k+l$, $p_j \leq l+1$, и $v^{(m-1-l)} = (-1)^{(m-1-l)} (m-1-l)! (\lambda - \lambda_{k+1})^{-m+l}$, то для числа слагаемых правой части (23) находим $\sum_{l=0}^{m-1} \frac{(k+l-1)!}{(k-1)!l!} = \sum_{l=0}^{m-1} C_{k+l-1}^l$. Из формулы $C_{n+1}^m - C_n^m = C_n^m$ следует, что $\sum_{l=0}^{m-1} C_{k+l-1}^l = C_{k+m-1}^{m-1} = C_{k+m-1}^k$.

Лемма доказана.

Лемма 7. Для $k \geq 1$ и $l = 0, 1, \dots, k-1$ справедливы формулы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} a_{(n^l, k)}(x, \lambda) d\lambda = (-1)^l C_{(n^l, k)}(x) \sum_{(p_{i_j, k-l, l+1, k})} \prod_{\mu_{i_j} \in (n^l, k)} (\lambda_n - \lambda_{\mu_{i_j}})^{-p_{i_j}}, \quad (24)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} a_{(n^k, k)}(x, \lambda) d\lambda = 0, \quad (25)$$

где

$$C_{\mu_1, \dots, \mu_k}(x, \lambda) = e_{\mu_1}(x) \left(Ne_n^{(v-1)}, e_{\mu_k} \right) \prod_{i=1}^{k-1} \left(Ne_{\mu_{i+1}}^{(v-1)}, e_{\mu_i} \right); \quad (26)$$

$\sum_{(p_{i_j, s, m, k})}$ означает, что суммирование распространяется по всевозможным не равным между собой наборам натуральных чисел p_{i_j} , $j = 1, \dots, s$, удовлетворяющих соотношениям $p_{i_j} \leq m$ и $\sum_{j=1}^s p_{i_j} = k$; произведение $\prod_{\mu_{i_j} \in (n^l, k)}$ распространяется по всем μ_{i_j} , входящим в (n^l, k) .

Доказательство. Формула (25) очевидна, а (24) следует из леммы 6.

Лемма 8. Для $k \geq 1$ справедлива формула

$$-g_k(x, n) = \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \sum_{(n^l, k)} \sum_{(p_{i_j, k-l, l+1, k})} \sum_{\mu_{i_j} \in (n^l, k)} C_{(n^l, k)}(x) \times \prod_{\mu_{i_j} \in (n^l, k)} (\lambda_n - \lambda_{\mu_{i_j}})^{-p_{i_j}}. \quad (27)$$

Доказательство следует из лемм 5 и 7, если изменить порядок суммирования в $\sum_{\mu_{i_j} \in (n^l, k)}$ и $\sum_{(p_{i_j, k-l, l+1, k})}$.

Обозначим через $f_k^{\sin} = \sqrt{2} \int_0^1 f(t) \sin k\pi t dt$, $f_k^{\cos} = \sqrt{2} \int_0^1 f(t) \cos k\pi t dt$ и пусть

$$\alpha(n) = \max \left\{ |q_n^{\sin}|, \sum_{\mu \neq n} \frac{|q_{\mu}^{\sin}|}{|n - \mu|} \right\}.$$

Лемма 9. Пусть натуральные числа p_{i_j} , $j = 1, \dots, k-l$, и числа $l = 0, 1, \dots, k-1$, $k \geq 1$ таковы, что

$$p_{i_j} \leq l+1, \quad \sum_{j=1}^{k-l} p_{i_j} = k. \quad (28)$$

Тогда справедливы оценки

$$\left| \sum_{\mu_{i_j} \in (n^l, k)} C_{(n^l, k)}(x) \prod_{\mu_{i_j} \in (n^l, k)} (\lambda_n - \lambda_{\mu_{i_j}})^{-p_{i_j}} \right| \leq \frac{(\sqrt{2})^{k+1}}{\pi^k} \|p\|^k \alpha^k(n),$$

где норма $\|\cdot\|$ берется в $L[0, 1]$.

Доказательство. Из (26) имеем

$$C_{(n^l, k)}(x) = e_{s_1}(x) \left(Ne_n^{(v-1)}, e_{s_k} \right) \prod_{i=1}^{k-1} \left(Ne_{s_{i+1}}^{(v-1)}, e_{s_i} \right), \quad (29)$$

где среди натуральных чисел s_i , $i = 1, \dots, k$ число n повторяется l раз, $l = 0, 1, \dots, k-1$, а остальные из



этих чисел совпадают с $\mu_{i_j}, j = 1, \dots, k-1$. Поскольку $\left| \left(N e_{s_i}^{(v-1)}, e_{s_j} \right) \right| \leq (\pi s_i)^{v-1} \left| p_{s_i}^{\cos} \right| \left| q_{s_j}^{\sin} \right|, \left| p_{s_i}^{\cos} \right| \leq \sqrt{2} \|p\|, \left| e_i \right| \leq \sqrt{2}$, то из (29) находим

$$\left| C_{(n^l, k)}^{(x)} \right| = (\sqrt{2})^{k+1} \pi^{(v-1)k} n^{v-1} \|p\|^k \left(\prod_{j=2}^k s_j^{v-1} \right) \left(\prod_{j=1}^k \left| q_{s_j}^{\sin} \right| \right). \quad (30)$$

Так как $n^v - \mu^v = (n - \mu) \sum_{k=0}^{v-1} n^{v-1-k} \mu^k$, то

$$\begin{aligned} \pi^{(v-1)k} n^{v-1} \left(\prod_{j=2}^k s_j^{v-1} \right) \prod_{\mu_{i_j} \in (n^l, k)} \left| \lambda_n - \lambda_{\mu_{i_j}} \right|^{-p_{i_j}} &= \frac{n^{v-1}}{\pi^k} \left(\prod_{j=2}^k s_j^{v-1} \right) \times \\ \times \prod_{j=1}^{k-l} \left| n^v - \mu_{i_j}^v \right|^{-p_{i_j}} &= \frac{n^{v-1}}{\pi^k} \left(\prod_{j=2}^k s_j^{v-1} \right) \left(\prod_{j=1}^{k-l} \left| n - \mu_{i_j} \right|^{-p_{i_j}} \right) \times \prod_{j=1}^{k-l} \left(\sum_{k=0}^{v-1} n^{v-1-k} \mu_{i_j}^k \right)^{-p_{i_j}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Поскольку $\sum_{j=1}^{k-l} p_{i_j} = k$, то, используя очевидное неравенство $n^{(v-1)k} \prod_{j=1}^{k-l} \mu_{i_j}^{v-1} < \prod_{j=1}^{k-l} \left(\sum_{k=0}^{v-1} n^{v-1-k} \mu_{i_j}^k \right)^{p_{i_j}}$, выражение (31) оценим сверху через

$$\frac{1}{\pi} \prod_{j=1}^{k-l} \left| n - \mu_{i_j} \right|^{-p_{i_j}}. \quad (32)$$

Поэтому из (30) и (32) следует

$$\begin{aligned} \left| C_{(n^l, k)}^{(x)} \right| \prod_{\mu_{i_j} \in (n^l, k)} \left(\lambda_n - \lambda_{\mu_{i_j}} \right)^{-p_{i_j}} &= \\ = \frac{(\sqrt{2})^{k+1}}{\pi^k} \|p\|^k \left| q_n^{\sin} \right|^l \prod_{j=1}^{k-l} \left| q_{\mu_{i_j}}^{\sin} \right| \left| n - \mu_{i_j} \right|^{-p_{i_j}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Поскольку при $p_{i_j} \geq 1$ $\sum_{\mu \neq n} \frac{\left| q_{\mu}^{\sin} \right|}{\left| n - \mu_{i_j} \right|^{p_{i_j}}} \leq \sum_{\mu \neq n} \frac{\left| q_{\mu}^{\sin} \right|}{\left| n - \mu \right|}$, то из (33) находим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\mu_{i_j} \in (n^l, k)} C_{(n^l, k)}^{(x)} \prod_{\mu_{i_j} \in (n^l, k)} \left(\lambda_n - \lambda_{\mu_{i_j}} \right)^{-p_{i_j}} \right| &\leq \frac{(\sqrt{2})^{k+1}}{\pi^k} \|p\|^k \left| q_n^{\sin} \right|^l \left(\sum_{\mu \neq n} \frac{\left| q_{\mu}^{\sin} \right|}{\left| n - \mu \right|} \right)^{k-l} \\ &\leq \frac{(\sqrt{2})^{k+1}}{\pi^k} \|p\|^k \alpha^k(n). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 10. Для $k \geq 1$ справедливы оценки

$$\left| g_k(x, n) \right| \leq \sqrt{2} a^k \|p\|^k \alpha^k(n),$$

где $a = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}$.

Доказательство. Для $l = 0, 1, \dots, k-1$ число слагаемых в сумме $\sum_{(n^l, k)}$ из (27) равно C_k^l , а по лемме 6 число слагаемых в сумме $\sum_{(p_{i_j}, k-l, l+1, k)}$ того же равенства равно C_{k-1}^l . Поэтому для числа слагаемых N_k в правой части (27) вида $\sum_{\mu_{i_j} \in (n^l, k)} C_{(n^l, k)}^{(x)} \prod_{\mu_{i_j} \in (n^l, k)} \left(\lambda_n - \lambda_{\mu_{i_j}} \right)^{-p_{i_j}}$ справедливо $N_k = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i C_{k-1}^i$. Так как для $k > r$ и $r = 0, 1, \dots, k-1$ $C_k^r \geq C_{k-1}^r$, то $N_k < \sum_{i=0}^k (C_k^i)^2 < \left(\sum_{i=0}^k C_k^i \right)^2 = 2^{2k}$. Поэтому из лемм 8 и 9 сразу следует

$$\left| g_k(x, n) \right| \leq \frac{2^{2k} (\sqrt{2})^{k+1}}{\pi^k} \|p\|^k \alpha^k(n) = \sqrt{2} a^k \|p\|^k \alpha^k(n).$$

Лемма доказана.



Теорема 1. При n достаточно больших и произвольном $m = 0, 1, \dots$ для нормированных собственных функций $\varphi_n(x)$ оператора L справедливы оценки

$$|\varphi_n(x) - e_n(x) + \sum_{k=1}^m g_k(x, n)| \leq 2a^{m+1} \|p\|^{m+1} \alpha^{m+1}(n).$$

Доказательство следует из лемм 3 и 10.

3. ОЦЕНКА ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Лемма 11. Для собственных значений W_n оператора L при любых $m = 1, 2, \dots$ справедливы формулы

$$W_n - \lambda_n - \frac{(Ne_n^{(v-1)}, e_n) - A_1^m(n)}{1 - B_2^m(n)} = -\frac{A_{m+1}(n)}{1 - B_2^m(n)} + \frac{(N\varphi_n^{(v-1)}, e_n)B_{m+1}(n)}{(1 - B_2^m(n))(1 - B_2(n))}. \quad (34)$$

Здесь $A_i(n) = \sum_{k=i}^{\infty} (Ng_k^{(v-1)}(x, n), e_n(x))$,

$$A_1^m(n) = \sum_{k=1}^m (Ng_k^{(v-1)}(x, n), e_n(x)), \quad B_i(n) = \sum_{k=i}^{\infty} (g_k(x, n), e_n(x)),$$

$$B_2^m(n) = \sum_{k=2}^m (g_k(x, n), e_n(x)).$$

Доказательство. Пусть $\varphi_n(x)$ есть собственная функция оператора L , соответствующая собственному значению W_n . Поскольку оператор L_0 является самосопряженным, то

$$\begin{aligned} W_n - \lambda_n &= \frac{1}{(\varphi_n, e_n)} ((w_n \varphi_n, e_n) - (w_n, \lambda_n e_n)) = \\ &= \frac{1}{(\varphi_n, e_n)} ((L_0 \varphi_n + N\varphi_n^{(v-1)}, e_n) - (\varphi_n, L_0 e_n)) = \frac{1}{(\varphi_n, e_n)} (N\varphi_n^{(v-1)}, e_n). \end{aligned} \quad (35)$$

Из (10) и (12) следует, что $\varphi_n(x) = e_n(x) - \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x, n)$. Отсюда получаем

$$(N\varphi_n^{(v-1)}, e_n) = (Ne_n^{(v-1)}, e_n) - A_1(n) \quad (36)$$

и, кроме того, учитывая (14), находим

$$(\varphi_n, e_n) = 1 - B_2(n). \quad (37)$$

Так как $A_1^m(n) + A_{m+1}(n) = A_1(n)$ и $B_2^m(n) + B_{m+1}(n) = B_2(n)$, то из (35)–(37) следует (34). Лемма доказана.

Лемма 12. Для $k = 1, 2, \dots$ справедливы оценки

$$|Ng_k^{(v-1)}(x, n), e_n(x)| \leq \frac{\pi^v}{4} n^{v-1} a^{k+1} \|p\|^{k+1} \alpha^{k+1}(n). \quad (38)$$

Доказательство. Из (29) находим

$$\left| C_{(n', k)}(x) \right| = \sqrt{2} \left| (Ne_n^{(v-1)}, e_{s_k}) \right| \left| \prod_{i=1}^{k-1} (Ne_{s_{i+1}}^{(v-1)}, e_{s_i}) \right|, \quad (39)$$

$$\left| (NC_{(n', k)}^{(v-1)}, e_n) \right| \leq \left| (Ne_{s_1}^{(v-1)}, e_n) \right| \left| (Ne_n^{(v-1)}, e_{s_k}) \right| \left| \prod_{i=1}^{k-1} (Ne_{s_{i+1}}^{(v-1)}, e_{s_i}) \right|. \quad (40)$$

Так как $\left| (Ne_{s_1}^{(v-1)}, e_n) \right| \leq \sqrt{2} (\pi s_1)^{v-1} \|p\| |q_n^{\sin}|$, то из (40) следует

$$\left| (NC_{(n', k)}^{(v-1)}, e_n) \right| \leq \sqrt{2} (\pi s_1)^{v-1} \|p\| |q_n^{\sin}| \left| (Ne_n^{(v-1)}, e_{s_k}) \right| \left| \prod_{i=1}^k (Ne_{s_{i+1}}^{(v-1)}, e_{s_i}) \right|. \quad (41)$$

Оценки (39) и (41) отличаются лишь множителем $(\pi s_1)^{v-1} \|p\| |q_n^{\sin}|$. Учитывая это и поступая, как и в доказательстве леммы 9 при p_i , удовлетворяющих условиям (28), получим



$$\left| \sum_{\mu_{ij} \in (n^l, k)} \left(NC_{(n^l, k)}^{(v-1)}(x), e_n(x) \right) \prod_{\mu_{ij} \in (n^l, k)} (\lambda_n - \lambda_{\mu_{ij}})^{-p_{ij}} \right| \leq \frac{\sqrt{2}^{k+1}}{\pi^{k+1-v}} \|p\|^{k+1} n^{v-1} \alpha^{k+1}(n). \quad (42)$$

Из леммы 8 следует

$$-(Ng_k^{(v-1)}(x, n), e_n(x)) = \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \sum_{(n^l, k)} \sum_{(p_{ij}, k-l, l+1, k)} \sum_{\mu_{ij} \in (n^l, k)} \left(NC_{(n^l, k)}^{(v-1)}(x), e_n(x) \right) \times \prod_{\mu_{ij} \in (n^l, k)} (\lambda_n - \lambda_{\mu_{ij}})^{-p_{ij}}. \quad (43)$$

Повторяя доказательство леммы 10 для правой части (43), обозначая в нем через N_k число слагаемых вида

$$\sum_{\mu_{ij} \in (n^l, k)} \left(NC_{(n^l, k)}^{(v-1)}(x), e_n(x) \right) \prod_{\mu_{ij} \in (n^l, k)} (\lambda_n - \lambda_{\mu_{ij}})^{-p_{ij}}$$

и используя (42), находим

$$\left| (Ng_k^{(v-1)}(x, n), e_n(x)) \right| \leq \frac{2^{2k} (\sqrt{2})^{k+1}}{\pi^{k+1-v}} \|p\|^{k+1} n^{v-1} \alpha^{k+1}(n) = \frac{\pi^v}{4} n^{v-1} \alpha^{k+1} \|p\|^{k+1} \alpha^{k+1}(n).$$

Лемма доказана.

Теорема 2. При n достаточно больших и произвольном $m = 1, 2, \dots$ для собственных значений оператора L справедливы оценки

$$\left| W_n - \lambda_n - \frac{(Ne_n^{(v-1)}, e_n) - \sum_{k=1}^m (Ng_k^{(v-1)}(x, n), e_n(x))}{1 - \sum_{k=2}^m (g_k(x, n), e_n(x))} \right| \leq 4\pi^v n^{v-1} a^{m+2} \|p\|^{m+2} \alpha^{m+2}(n), \quad (44)$$

причем

$$\left| \frac{(Ng_m^{(v-1)}(x, n), e_n(x))}{1 - \sum_{k=2}^m (g_k(x, n), e_n(x))} \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \pi^v n^{v-1} a^{m+1} \|p\|^{m+1} \alpha^{m+1}(n). \quad (45)$$

Доказательство. Из леммы 12 при n достаточно больших следуют оценки:

$$|A_1(n)| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \pi^v n^{v-1} a^2 \|p\|^2 \alpha^2(n), \quad (46)$$

$$|A_{m+1}(n)| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \pi^v n^{v-1} a^{m+2} \|p\|^{m+2} \alpha^{m+2}(n). \quad (47)$$

Так как $\left| (Ne_n^{(v-1)}, e_n) \right| \leq \sqrt{2} \pi^{v-1} n^{v-1} \|p\| |q_n^{\sin}|$, то при n достаточно больших из (36) и (46) получаем

$$\left| (N\varphi_n^{(v-1)}, e_n) \right| \leq 2n^{v-1} \pi^{v-1} \|p\| \alpha(n). \quad (48)$$

Из леммы 10 при n достаточно больших следует

$$|B_{m+1}(n)| \leq 2\sqrt{2} a^{m+1} \|p\|^{m+1} \alpha^{m+1}(n); \quad |1 - B_2^m(n)|^{-1}, |1 - B_2(n)|^{-1} \leq \sqrt{2}. \quad (49)$$

Из (34) и (47)–(49) следует (44), а из (38) и (49) следует (45).

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1), программы «Университеты России» (проект ур.04.01.041) и гранта РФФИ (проект 03-01-00169).



Библиографический список

1. Ульянова Е.Л. Спектральный анализ нормальных операторов, возмущенных относительно конечномерным: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 1998.
2. Хромов А.П. Теоремы равносходимости для интегро-

дифференциальных и интегральных операторов // Математ. сб. 1981. Вып. 114(156), № 3. С.375-405.

3. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

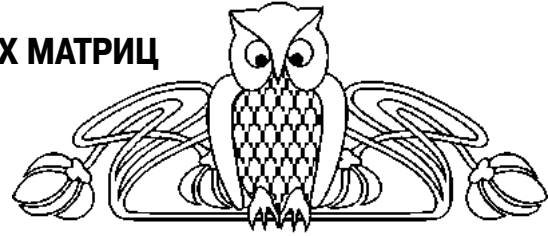
УДК 512.56

ОБЕРТОНЫ ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

В.Б. Поплавский

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
poplavskiv@mail.ru

Рассматриваются закономерности функционирования систем с конечным числом элементов, на которых заданы булевы бинарные отношения различных типов. Проводится построение квадратных матриц над произвольной булевой алгеброй, определяющих некоторое булево бинарное отношение, порождающее циклическую полугруппу с максимальным индексом и периодом. Циклирование системы с конечным числом элементов, называемой осциллятором, сопровождается появлением серии подпоследовательностей (обертонов) в последовательности булевых элементов, стоящих на главной диагонали степени соответствующей булевой матрицы. В работе указаны примеры таких обертонов для булевых матриц небольших размеров.



Overtones of Oscillatory Boolean Matrices

V. B. Poplavski

We consider a functioning property of a system with a finite set of elements and with different kinds of Boolean binary relations on it. We also construct the square matrices over arbitrary Boolean algebra which determine some Boolean binary relation and generate a cyclic semigroup with the maximum index and period. The looping of the system with a finite set of elements called an oscillator, is accompanied by appearing of subsequences (overtones) in a sequence of elements on the main diagonal of powers of a relevant Boolean matrix. Examples of such overtones of Boolean matrices of small sizes are shown in the paper.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $A = A(M, g, v)$ — произвольная булева алгебра с нулевым и единичным (универсальным) элементами \emptyset и I соответственно. Всякое отображение $\varphi : M \times M \rightarrow B$ упорядоченных пар элементов некоторого множества M в B называется *булевым бинарным* отношением на множестве M . Ясно, что булево бинарное отношение является обобщением известного понятия «бинарное отношение», которое сводится к выбору двухэлементной булевой алгебры $B_2 = \{\emptyset, I\}$.

В случае конечности множества M его элементы можно пронумеровать натуральными числами от 1 до n . Тогда элементы B , которые ставятся в соответствие паре элементов из M с номерами i и j ($i, j = 1, \dots, n$), образуют квадратную булеву матрицу. Совершенно ясно, что смена нумерации элементов в базовом множестве M приводит к одновременной перестановке строк и столбцов матрицы A . Таким образом, данное булево бинарное отношение определяет некоторую булеву матрицу A с точностью до таких перестановок.

То, что элементы некоторой булевой алгебры составляют некую матрицу A , будем записывать $A = (A_j^i)$. Верхний индекс элемента матрицы обозначает номер строки, а нижний — номер столбца.

Очевидно, что такие матрицы одного и того же размера вновь образуют булеву алгебру $\langle B_{n \times n}, \cup, \cap, ', O, J \rangle$, операции которой определяются для матриц поэлементно, поэтому отношение включения \subset (частичного порядка) также для матриц определяются поэлементно. Нулем и универсальным элементом такой вторичной булевой алгебры служат матрицы O и J , образованные только из нулей \emptyset и единиц I соответственно, то есть $O_j^i = \emptyset, J_j^i = I$ для всех i и j .

Произведение (конъюнктивное) матриц A и B определяется как матрица $C = A \prod B$ того же размера, элементы которой вычисляются по формуле $C_j^i = \bigcup_{k=1}^n (A_k^i \cap B_k^j)$. Можно дуальным образом определить дизъюнктивное произведение матриц $C = A \sqcup B = (A' \prod B')'$, но так как далее будут рассматриваться только конъю-



юнктные степени $A^k = \prod_{i=1}^k A = \overbrace{A \prod \dots \prod A}^{k \text{ раз}}$, то именно конъюнктное произведение и конъюнктную степень будем иметь в виду под терминами «произведение» и «степень» булевых матриц. Будем считать также, что $A^0 = E$.

Множество квадратных булевых матриц $B_{n \times n}$ относительно произведения образует структурно упорядоченную полугруппу с единицей $E = (\delta_j^i)$, где δ_j^i принимает значение 1, если $i=j$, и значение 0, если $i \neq j$. Чтобы не перечислять свойства этой полугрупповой операции с булевыми матрицами, сошлемся на работы [1,2].

Переставляя столбцы (или строки) в единичной матрице E некоторым образом получаем матрицу P , которую естественно назвать перестановкой. Так как матрица $P \prod A$ получается из матрицы A соответствующей перестановкой строк, а $A \prod P^T$ (T обозначает транспонирование матрицы) получается из матрицы A такой же перестановкой столбцов, то, как было замечено, булево бинарное отношение на конечном множестве определяет множество булевых матриц $P \prod A \prod P^T$, где матрицы P пробегают всю группу n -перестановок. В силу равенства $P \prod P^T = E$, отношение $(A \approx B) \leftrightarrow (\exists P)(P \prod A \prod P^T = B)$ является эквивалентностью булевых матриц из $B_{n \times n}$, каждый класс которой можно считать булевым отношением на M , определяемым некоторой булевой матрицей A .

Далее будут обсуждаться вопросы, связанные со степенями булевых матриц, которые, заметим, удовлетворяют $(P \prod A \prod P^T)^k = P \prod A^k \prod P^T$, что делает возможным разговор о степени булевой матрицы как о степени отношения, определяемого булевой матрицей A .

Назовем конечное множество M с заданным на нем булевым отношением, представляемым булевой матрицей A , *конечной системой элементов с отношением A* .

Степень A^k булевой матрицы A порядка k представляет отношение, появляющееся в результате «наложения» или влияния отношения A на себя, после его применения в этой системе k раз. Это, по-видимому, можно назвать результатом функционирования данной системы на k -м шаге. В данной работе рассматриваются закономерности функционирования произвольных конечных систем и возникновение волн в таких системах. Оказывается, что функционирование конечных систем начинается с некоторого этапа вхождения в цикл (хаоса!) с последующим возникновением волн в таких системах или стационарного состояния как частного случая волнового. Более того, такое вхождение и дальнейшее циклирование системы, называемой *осциллятором* [3,4], сопровождается появлением обертонов на главной диагонали степеней A^k . Здесь же указаны максимальные возможные значения показателя степени вхождения системы в цикл (циклическая глубина или индекс) и возможные значения длин этих циклов (периодов) для различных квадратных булевых матриц над произвольной булевой алгеброй. Рассматриваются закономерности функционирования конечных систем с рефлексивными, обратимыми, нильпотентными и другими отношениями. Проводится построение булевых отношений с максимальным индексом и периодом.

Важность этой темы обуславливается широким применением теории циклических полугрупп степеней булевых матриц (теории асимптотических форм булевых матриц) в методологии тестирования, кластеринге (разбиении совокупности на группы), диффузии информации, в исследовании коммуникационных сетей, контактных схем, конечных автоматов, теории чисел, математической статистики и пр. Это нашло место в социологии, биологии, медицине, физике и компьютерных науках. Перечень таких примеров применения и соответствующей литературы можно найти в [3]. Этим объясняется и большое количество работ математиков по теории асимптотических форм, на некоторые и важнейшие, на наш взгляд, мы ссылаемся в данной статье. Хороший обзор этой проблемы для булевых матриц над алгеброй B_2 и неотрицательных матриц можно найти в [5], [3].

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПОЛУГРУППЫ СТЕПЕНЕЙ БУЛЕВОЙ МАТРИЦЫ

В теории полугрупп множество степеней $\{A, A^2, A^3, \dots\}$ называют *циклической полугруппой* [6], порожденной элементом A . Имеются две возможности: (1) все степени для любого натурального k



различны между собой или (2) найдутся такие натуральные k_0 и k_1 ($k_0 < k_1$), что $A^{k_0} = A^{k_1}$. В первом случае говорят о бесконечном порядке в циклической полугруппе. Для нашего случая, когда A является булевой матрицей, он не имеет места. Это происходит в силу того что конечное число элементов образует данную матрицу и, следовательно, с помощью булевых операций из них можно образовать только конечное число матриц, в частности, степеней матрицы A . Таким образом, имеет место второй случай – случай *конечной циклической полугруппы*.

Пусть натуральные k_0 и k_1 ($k_0 < k_1$), для которых соответствующие степени удовлетворяют равенству $A^{k_0} = A^{k_1}$, выбраны наименьшими. Тогда, обозначая $k_1 - k_0 = C$, получаем $A^{k_0} = A^{k_0+C}$. Умножая последнее равенство на A^t , получаем

$$A^{k_0+t} = A^{k_0+C+t},$$

в частности

$$A^{k_0} = A^{k_0+C} = A^{k_0+2C} = A^{k_0+3C} = \dots = A^{k_0+mC} = \dots$$

для любого натурального m . Поэтому показатель s каждой степени матрицы A порядка, превышающего число $k_0 + C - 1$, может быть представлен как $s = k_0 + mC + s_0$, где $0 \leq s_0 \leq C - 1$, и m – некоторое положительное целое. Получаем

$$A^s = A^{k_0+mC+s_0} = A^{k_0+s_0}, \quad 0 \leq s_0 \leq C - 1,$$

то есть каждая степень матрицы A , начиная с k_0 и далее, есть матрица из множества матриц $\{A^{k_0}, \dots, A^{(k_0+C-1)}\}$.

Таким образом, конечная циклическая полугруппа степеней произвольной булевой матрицы A состоит из $(k_0 + C - 1)$ матриц:

$$\{A, A^2, \dots, A^{k_0}, \dots, A^{(k_0+C-1)}\}.$$

При этом очевидно, что матрицы $\{A^{k_0}, \dots, A^{(k_0+C-1)}\}$ образуют циклическую группу порядка C .

Число k_0 называется *индексом*, а число C – *периодом* булевой матрицы A и циклической полугруппы степеней этой матрицы.

В литературе вместо понятия «индекс» иногда употребляют термин «циклическая глубина» [7]. В случае, когда период равен единице, используют названия «индекс сходимости» и «характеристическая экспонента» [8], или просто «экспонента». При этом булева матрица A называется *сходящейся к пределу* A^{k_0} . Когда период булевой матрицы больше единицы, ее называют *осцилляторной*, или *периодической*.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

Прежде чем будут сформулированы предложения, которые проясняют некоторые замечательные свойства индексов периодов таких матриц, укажем на следующие свойства степеней произвольной булевой $n \times n$ -матрицы:

$$A^k \subset \bigcup_{p=0}^{n-1} A^p = E \cup A \cup A^2 \cup \dots \cup A^{n-1}, \quad \text{для всех } k \geq n; \tag{1}$$

$$A^k \subset A^{k+p \cdot n!}, \quad \text{для всех } k \geq n \text{ и } p \geq 1; \tag{2}$$

$$\bigcup_{p=0}^{\infty} A^p = E \cup A \cup A^2 \cup \dots \cup A^{n-1} = (E \cup A)^{n-1}; \tag{3}$$

$$A^k \subset A^r \cup A^{r+1} \cup \dots \cup A^{r+n-1} = A^r \prod (E \cup A)^{n-1}, \quad \text{для всех } k \geq r. \tag{4}$$

Доказательство справедливости этих формул можно найти, например в работах [2, 8]. Однако получим эти формулы, восполнив, на наш взгляд, некоторые рассуждения автора статьи [2]. Причем покажем, что (1), (3) и (4) есть эквивалентные свойства булевых матриц.

Элементы $n \times n$ -матрицы A^k определяются объединением $(A^k)_j^i = \bigcup_{(i_1, \dots, i_k)} (a_{i_1}^i \cap a_{i_2}^{i_1} \cap \dots \cap a_j^{i_{k-1}})$, в котором каждый одночлен $(a_{i_1}^i \cap a_{i_2}^{i_1} \cap \dots \cap a_j^{i_{k-1}})$ определяется набором индексов (i, j_1, \dots, j_k) . Среди индексов



$(i_0 j_1, \dots, i_k)$, где $i = i_0$, в случае $k \geq n$ должны встретиться одинаковые индексы. Допустим $i_s = i_t = r$ $0 \leq s \leq t \leq k$. Тогда

$$(a_{i_1}^{i_0} \cap a_{i_2}^{i_1} \cap \dots \cap a_j^{i_k}) = (a_{i_1}^{i_0} \cap \dots \cap a_{i_{s-1}}^{i_{s-2}} \cap a_r^{i_{s-1}}) \cap (a_{i_{s+1}}^r \cap \dots \cap a_r^{i_{t-1}}) \cap (a_{t+1}^r \cap a_{t+2}^{t+1} \cap \dots \cap a_j^{i_k}). \quad (5)$$

Удобно считать $(a_{i_1}^{i_0} \cap \dots \cap a_{i_{s-1}}^{i_{s-2}} \cap a_r^{i_{s-1}}) = I$ или $(a_{t+1}^r \cap a_{t+2}^{t+1} \cap \dots \cap a_j^{i_k}) = I$ в случаях значений $s = 0$, $t = k$.

Полученное равенство (5) дает, во-первых, включение

$$(a_{i_1}^i \cap \dots \cap a_j^{i_k}) \subset (a_{i_1}^i \cap \dots \cap a_{i_{s-1}}^{i_{s-2}} \cap a_r^{i_{s-1}}) \cap (a_{t+1}^r \cap a_{t+2}^{t+1} \cap \dots \cap a_j^{i_k}) \subset (A^{k-(t-s)})_j^i \subset \bigcup_{p=1}^k (A^{k-p})_j^i,$$

в котором мы избавились от зависимости t и s от выбранного одночлена $(a_{i_1}^{i_0} \cap a_{i_2}^{i_1} \cap \dots \cap a_j^{i_k})$, и, следовательно, получаем $(A^k)_j^i \subset \bigcup_{p=1}^k (A^{k-p})_j^i$, то есть $A^k \subset \bigcup_{p=1}^k A^{k-p} = E \cup A \cup A^2 \cup \dots \cup A^{k-1}$. Так как последнее справедливо для всех $k \geq n$, то можно записать

$$A^n \subset E \cup A \cup A^2 \cup \dots \cup A^{n-1},$$

$$A^{n+1} \subset E \cup A \cup \dots \cup A^{n-1} \cup A^n \subset E \cup A \cup A^2 \cup \dots \cup A^{n-1}$$

и так далее, что доказывает (1).

Во-вторых, равенство (5) дает выражение

$$(a_{i_1}^{i_0} \cap a_{i_2}^{i_1} \cap \dots \cap a_j^{i_k}) = (a_{i_1}^{i_0} \cap \dots \cap a_{i_{s-1}}^{i_{s-2}} \cap a_r^{i_{s-1}}) \cap (a_{i_{s+1}}^r \cap \dots \cap a_r^{i_{t-1}}) \cap \dots \cap (a_{t+1}^r \cap \dots \cap a_r^{i_{t-1}}) \cap (a_{t+1}^r \cap a_{t+2}^{t+1} \cap \dots \cap a_j^{i_k}),$$

в котором скобка $(a_{i_{s+1}}^r \cap \dots \cap a_r^{i_{t-1}})$ повторяется $m = \frac{p \cdot k!}{t-s}$ раз, причем $1 \leq t-s \leq k$ и p – произвольное натуральное число. Следовательно, для всех одночленов выполнено включение $(a_{i_1}^i \cap \dots \cap a_j^{i_k}) \subset (A^{k+m(t-s)})_j^i = (A^{k+pk!})_j^i$, не зависящее от t и s . Получаем $A^k \subset A^{k+pk!}$, что, в частности, дает $A^n \subset A^{n+pn!}$. Умножение последнего включения на A^{k-n} дает (2).

Очевидно, что $A^k \subset E \cup A \cup A^2 \cup \dots \cup A^{n-1}$ выполняется для всех $0 \leq k \leq n$. Добавляя к этому свойство (1) получаем формулы (3). Матрицу $(E \cup A)^{n-1} = \bigcup_{p=0}^{\infty} A^p$ над двухэлементной алгеброй принято называть матрицей достижимости графа, в качестве соответствующей матрицы инцидентий которого берется матрица A .

Формулы (4) дают (3) (при $r = 0$) и, следовательно, (1). С другой стороны, условие формулы (4) автоматически выполняется для $r \leq k \leq r + n - 1$. Покажем, что из (1) следует выполнение (4) для $k > r + n - 1$. Действительно, пусть $k = r + n + s$, $s \geq 0$. Тогда $A^k = A^{r+n+s} = A^r \prod A^{n+s} \subset A^r \prod (E \cup A)^{n-1}$ в силу условия (1). Получили, что (1), (3) и (4) – эквивалентные свойства степеней произвольной булевой $n \times n$ -матрицы.

Из формул (1) сразу же можно получить следующую теорему Лунца [9], показывающую, что все рефлексивные булевы отношения, то есть такие, что $E \subset A$, являются сходящимися и имеют индекс (экспоненту) не более чем $n - 1$.

Теорема 1. Если для произвольной $n \times n$ -матрицы A над произвольной булевой алгеброй выполнено $E \subset A$, тогда имеет место

$$E \subset A \subset A^2 \subset \dots \subset A^{n-1} = A^n = \dots$$

Доказательство. Из формулы (1) и условия теоремы получаем $A^k \subset (E \cup A)^{n-1} = A^{n-1}$ для всех $k \geq n$. С другой стороны, умножая последовательно на $A, A^2, \dots, A^{n-1}, \dots, A^{k-1}$ правую и левую части выражения $E \subset A$, получим обратное включение $A^{n-1} \subset A^k$ ($k \geq n$), что и доказывает теорему 1.



Далее рассматриваются, в частности матрицы, некоторые степени которых равны O , J и E соответственно. Если $A^p = O$ для некоторого $p \geq 1$, то булеву матрицу A называют *нильпотентной*, если $A^p = J$, то A называют *примитивной*, и если $A^p = E$, то A называют *корнем из единицы* E .

Теорема 2. Матрица A размера $n \times n$ nilьпотентна тогда и только тогда, когда $A^n = O$, то есть индекс любой nilьпотентной булевой матрицы не превосходит ее порядка n .

Докажем это. Сначала заметим, что если матрица A размера $n \times n$ nilьпотентна, то найдется такое наименьшее натуральное $k_0 \geq 1$, что $A^{k_0} = O$. Причем $A^t = O$ для всех $t > k_0$ и только таких t . Выберем такое натуральное p , чтобы $p \cdot n! \geq k_0$. Тогда (2) дает $A^k \subset A^{k+p \cdot n!} = O$, для всех $k \geq n$. Получаем $k_0 \leq n$. Достаточность очевидна.

ИНДЕКСЫ И ПЕРИОДЫ ОБРАТИМЫХ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

В полугруппе квадратных булевых матриц подгруппа всех обратимых матриц, т. е. таких матриц A , для которых существует матрица A^{-1} с условием $A \prod A^{-1} = A^{-1} \prod A = E$, состоит из ортогональных матриц. Сошлемся на статьи [1], [2], [10], в которых рассматриваются различные аспекты обратимости. Самой первой работой об обратных булевых матрицах следует, по-видимому, считать статью Веддерберна [11]. Требование ортогональности налагает на элементы обратимой матрицы определенные требования полноты и взаимной однозначности ее столбцов и строк: $\bigcup A_k^i = I$, $\bigcup A_j^k = I$ ($i, j = 1, \dots, n$), $A_k^i \cap A_k^i = \emptyset$, $A_j^k \cap A_i^k = \emptyset, j \neq i$. Таким образом, эти условия эквивалентны равенству $A^{k-1} = A^T$. Этим условиям, очевидно, удовлетворяют рассмотренные выше матрицы перестановок, образующие подгруппу в группе всех обратимых матриц. Следующая теорема показывает связь обратных матриц с корнями из единицы. Кроме этого она говорит о том, что все корни из единицы есть матрицы периодические, не имеющие предел (кроме единичной матрицы), и, очевидно, с индексом, равным 1.

Теорема 3. Матрица A с периодом, равным C , является корнем из единицы степени mC (m – натуральное) тогда и только тогда, когда она является ортогональной и, следовательно, обратимой. При этом обратная матрица имеет тот же период C и, следовательно, является корнем той же степени, что и A .

Нетрудно показать [2], что условие $E \subset D^T \prod D$ эквивалентно условию $J \prod D = J$, а из равенства $J \prod C \prod D = J$ следует $J \prod D = J$ для любых квадратных булевых матриц C, D и универсальной матрицы J . Воспользуемся этими свойствами произведения матриц, чтобы проверить необходимость теоремы 3.

Пусть существует такое натуральное $p \geq 1$, что $A^p = E$, кроме этого $(A^T)^p = (A^p)^T = E$. Тогда $J \prod A^p = J$, что дает $J \prod A^{p-1} \prod A = J$. Поэтому $J \prod A = J$. Следовательно, $E \subset A^T \prod A$. Умножая (7) слева и справа на $(A^T)^s$ и A^s , соответственно получим $(A^T)^s \prod A^s \subset (A^T)^{s+1} \prod A^{s+1}$ для любого s , т. е.

$$E \subset A^T \prod A \subset (A^T)^2 \prod A^2 \subset \dots \subset (A^T)^p \prod A^p = E.$$

Последнее доказывает ортогональность матрицы: $A^T \prod A = E$.

Покажем теперь, что из условия $A \prod B = B \prod A = E$ следует существование такого натурального $p \geq 1$, что $A^p = E$. Имеем $E = A^s \prod B^s$ для любого s . Пусть $A^{k_A} = A^{k_A+C_A}$ и $B^{k_B} = B^{k_B+C_B}$, где k_A, C_A, k_B, C_B есть индексы и периоды матриц A и B соответственно. С одной стороны, $E = A^{k_A} \prod B^{k_A} = A^{k_A+C_A} \prod B^{k_A} = A^{C_A}$, тогда с другой – $E = A^{C_A} \prod B^{C_A} = B^{C_A}$. Аналогично $B^{C_B} = E$ и $A^{C_B} = E$. Получаем, что периоды кратны друг другу, поэтому $C_A = C_B = C$. Причем C является наименьшим показателем p степени, для которой $A^p = E$. Кроме этого $A^1 = A^{1+C}$, то есть индекс равен 1.

Следовательно, матрицы A и A^{-1} с периодами, равными C , и индексом, равным 1, являются корнями из единицы степени mC . Таковыми являются матрицы-перестановки P , определенные во введении.

МАКСИМАЛЬНЫЕ ИНДЕКСЫ И ПЕРИОДЫ

Теоремы 1 и 2 показывают, что среди рефлексивных и nilьпотентных отношений не найти матриц с максимальным индексом k_{\max} поскольку имеет место утверждение Шварца [12], указывающее этот максимум для булевых (или неотрицательных) $n \times n$ -матриц:



$$k_{\max} = (n-1)^2 + 1.$$

Следует сказать, что Вейландт [13] ранее доказал, что этот предел достигается примитивными матрицами тогда и только тогда, когда они определяют булевы отношения, задаваемые матрицами вида

$$W_{1 \times 1} = (I), W_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} I & I \\ I & \emptyset \end{pmatrix}, W_{n \times n} = \begin{pmatrix} \emptyset & I & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & I & \cdots & \emptyset & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cdots & I & \emptyset \\ I & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset & I \\ I & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}, n \geq 3. \quad (6)$$

Отметим, что $W_{n \times n}^{(n-1)^2} \neq W_{n \times n}^{(n-1)^2+1} = W_{n \times n}^{(n-1)^2+2} = \dots = J$.

Существуют жесткие ограничения на матрицы с максимальным индексом, которые в общем зависят и от булевых рангов таких матриц, от их разложимости и пр., что отражено в многочисленных публикациях на эту тему (напр., см. [3,5, 14]).

Теорема 4. Период булевой матрицы размера $n \times n$ над произвольной булевой алгеброй является делителем $n!$.

Действительно, из свойства степеней (2) получается

$$A^k \subset A^{k+n!} \subset A^{k+2 \cdot n!} \dots \subset A^{k+p \cdot n!} \subset A^{k+p \cdot n!+n!} \dots$$

В конце концов, в этой цепочке включений наступит повторение и, следовательно, равенство $A^s = A^{s+n!}$ для некоторого s , что будет означать, что период S делит $n!$.

На самом деле, наибольший период равен наименьшему общему кратному чисел от 1 до n , то есть $C_{\max} = \text{НОК}(1,2,3,\dots,n)$. В некотором смысле это объясняется тем, что коммутативная полугруппа, каждый элемент которой имеет индекс, равный 1 (таковой является циклическая группа), является объединением непересекающихся периодических групп [6]. Порядок объединения циклических групп (непересекающихся) имеет, очевидно, порядок, равный наименьшему общему кратному их порядков.

Свойства периодов некоторых (0,1)-матриц можно найти в [3], а описание периодов в контексте теории графов в работе Розенблата [4]. О других свойствах степеней булевых матриц, связанных с понятиями булевых определителей и перманентов, можно найти в [15].

Дальнейшее рассуждение будет связано с поиском и построением примеров таких матриц с максимальным индексом и периодом. В итоге такие поиски следует вести среди так называемых циркулянтных матриц с наибольшим периодом (по возможности с наименьшим индексом) и примитивных матриц (с обязательным требованием сходимости), которые, несмотря на парадокс, связанный с их названием, обладают самым большим индексом среди матриц того же размера.

Для построения нашего примера, определим матрицу $a \cap A$ как матрицу с элементами $(a \cap A)_j^i = a \cap (A)_j^i$, где a – элемент булевой алгебры, а A есть матрица над этой алгеброй. Определим блочные матрицы P_m размера $n \times n$, дающие перестановки порядков $m = 1, 2, \dots, n$, с помощью нулевых $O_{r \times m}, O_{m \times r}$ блоков и единичного блока $E_{r \times r}$ с соответствующими размерами и удовлетворяющими условию $m + r = n$, следующим образом:

$$P_m = \begin{pmatrix} P_{m \times m} & O_{m \times r} \\ O_{r \times m} & E_{r \times r} \end{pmatrix}.$$

Блок $P_{m \times m}$ пусть определяется как

$$P_{1 \times 1} = (I), P_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \emptyset & I \\ I & \emptyset \end{pmatrix}, P_{m \times m} = \begin{pmatrix} \emptyset & I & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & I & \cdots & \emptyset & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cdots & I & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset & I \\ I & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}, 3 \leq m \leq n.$$



Заметим, что для дизъюнктивного набора $\{a^1, \dots, a^s : a^i \cap a^j = \emptyset, i \neq j\}$ элементов булевой алгебры линейная комбинация матриц с такими коэффициентами обладает свойством: степень такой линейной комбинации есть линейная комбинация степеней, то есть

$$((a^1 \cap A_1) \cup (a^2 \cap A_2) \cup \dots \cup (a^s \cap A_s))^p = (a^1 \cap A_1^p) \cup (a^2 \cap A_2^p) \cup \dots \cup (a^s \cap A_s^p).$$

Рассмотрим линейную комбинацию матрицы Вейландта $W_{m \times m}$ с перестановочными матрицами P_1, \dots, P_n и с дизъюнктивными коэффициентами a^0, a^1, \dots, a^n . Тогда

$$\begin{aligned} ((a^0 \cap W_{n \times n}) \cup (a^1 \cap P_1) \cup \dots \cup (a^n \cap P_n))^{(n-1)^2+1} &= (a^0 \cap J) \cup (a^1 \cap P_1^{(n-1)^2+1}) \cup \dots \cup (a^n \cap P_n^{(n-1)^2+1}) = \\ &= (a^0 \cap J) \cup (a^1 \cap \tilde{P}_1) \cup \dots \cup (a^n \cap \tilde{P}_n). \end{aligned}$$

Отметим, что степень $\tilde{P}_m = P_m^s$ есть опять циклическая перестановка порядка m , так как $\tilde{P}_m^m = (P_m^s)^m = P_m^{sm} = (P_m^m)^s = (P_m)^s = \tilde{P}_m$. Поэтому

$$((a^0 \cap J) \cup (a^1 \cap \tilde{P}_1) \cup \dots \cup (a^n \cap \tilde{P}_n))^{C_{\max}} = (a^0 \cap J) \cup (a^1 \cap \tilde{P}_1) \cup \dots \cup (a^n \cap \tilde{P}_n).$$

Причем C_{\max} является наименьшим среди таких показателей, так как $C_{\max} = \text{НОК}(1, 2, 3, \dots, n)$.

Приведем пример матрицы с наибольшим возможным индексом и периодом:

$$\begin{pmatrix} [1;2] & [0;1] \cup [2;6] & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ [2;3] & [1;2] & [0;1] \cup [2;6] & \emptyset & \emptyset \\ [3;4] & \emptyset & [1;3] & [0;1] \cup [4;6] & \emptyset \\ [0;1] \cup [4;5] & \emptyset & \emptyset & [1;4] & [0;1] \cup [5;6] \\ [0;1] \cup [5;6] & \emptyset & \emptyset & \emptyset & [1;5] \end{pmatrix}.$$

Индекс этой интервальной матрицы, построенной выше описанным способом, равен 17, а период – 60.

ОБЕРТОНЫ ДИАГОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СТЕПЕНЕЙ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

Приведенная ниже таблица показывает значения индексов и возможные значения периодов $n \times n$ -матриц ($n = 2, 3, 4, 5, 6$), которые должны делить максимальный период.

Размер матрицы	Индекс: наибольшая циклическая глубина	Наибольший возможный период	Возможные периоды
2×2	2	2	1,2
3×3	5	6	1,2,3,6
4×4	10	12	1,2,3,4,6,12
5×5	17	60	1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60
6×6	26	60	1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60

Результаты для наибольшей циклической глубины и наибольшего возможного периода в приведенной выше таблице были проверены с помощью достаточно мощной вычислительной техники и языка программирования C++. При этом условии вычисление занимало много времени. Нормальные дизъюнктивные формы элементов высоких степеней матрицы размера 7×7 , рассматриваемых как булевы функции, аргументы которых являются элементами этой матрицы, содержат многие сотни тысяч одночленов.

Следует отметить следующий примечательный факт. Как было уже сказано, каждый элемент $(A^k)_i^j$ булевой матрицы A^k , расположенный на пересечении i -й строки и j -го столбца и определяющий меру отношения (связи) i -го элемента с j -м конечного множества M , представляет собой булевы функции, аргументами которых являются элементы матрицы A . Сравнение соответствующих элементов различных степеней данной матрицы показывает, что для элементов $(A^k)_i^j$ имеет место более частая повторяемость значений, чем та, что получается из-за периодичности последовательности степеней данной матрицы. Причем у диагональных элементов $(A^k)_i^i$ эта повторяемость значений происходит гораздо чаще, чем у не диагональных, которые в общем-то не сравнимы между собой.



Так, например, для произвольной булевой матрицы A размера 3×3 выполняется всегда $A^5 = A^{11} = A^{17} = \dots$ (с периодом $C_{\max} = 6$, индексом не более $k_{\max} = 5$). Однако возможно для осцилляторных матриц $(A^5)_i^i = (A^7)_i^i = (A^{11})_i^i = \dots$, то есть повторяемость значений на диагонали проявляется по крайней мере через 2 и 4 шага.

Для $n = 4$ выполняется всегда $A^{10} = A^{22}$ (индекс $k_{\max} = 10$, период $C_{\max} = 12$), но существует уже четыре серии «обертонов»:

1. $(A^7)_i^i = (A^{11})_i^i = (A^{13})_i^i = (A^{17})_i^i = (A^{19})_i^i = \dots$
2. $(A^8)_i^i = (A^{16})_i^i = (A^{20})_i^i = \dots$
3. $(A^{10})_i^i = (A^{14})_i^i = (A^{22})_i^i = \dots$
4. $(A^{15})_i^i = (A^{21})_i^i = \dots$

(далее с периодичностью, равной 12) и два «одинокных» тона:

5. $(A^{12s})_i^i, s = 1, 2, \dots$
6. $(A^{18+12s})_i^i, s = 0, 1, 2, \dots$

Символом \vdots отмечены те места в цепочках равенств, которые соответствуют начальным номерам «одинокных» тонов – 12 и 18. Причем эти серии начинаются еще до начала вхождения в цикл, то есть до 10-й степени.

Для $n = 5$ (индекс $k_{\max} = 17$, период $C_{\max} = 60$) на каждом цикле можно обнаружить уже двенадцать серий «обертонов»:

1. $(A^{13})_i^i = (A^{17})_i^i = (A^{19})_i^i =$
 $= (A^{23})_i^i = (A^{29})_i^i = (A^{31})_i^i = (A^{37})_i^i = (A^{41})_i^i = (A^{43})_i^i = (A^{47})_i^i = (A^{49})_i^i = (A^{53})_i^i = (A^{59})_i^i = (A^{61})_i^i =$
 $= (A^{67})_i^i = (A^{71})_i^i = (A^{73})_i^i = (A^{77})_i^i = (A^{79})_i^i = (A^{83})_i^i = (A^{89})_i^i = \dots$
2. $(A^{14})_i^i = (A^{22})_i^i = (A^{26})_i^i = (A^{34})_i^i = (A^{38})_i^i = (A^{46})_i^i = (A^{58})_i^i = (A^{62})_i^i = (A^{74})_i^i = (A^{82})_i^i = (A^{86})_i^i = \dots$
3. $(A^{21})_i^i = (A^{27})_i^i = (A^{33})_i^i = (A^{39})_i^i = (A^{51})_i^i = (A^{57})_i^i = (A^{63})_i^i = (A^{69})_i^i = (A^{81})_i^i = (A^{87})_i^i = \dots$
4. $(A^{28})_i^i = (A^{32})_i^i = (A^{44})_i^i = (A^{52})_i^i = (A^{56})_i^i = (A^{64})_i^i = (A^{68})_i^i = (A^{76})_i^i = \dots$
5. $(A^{18})_i^i = (A^{42})_i^i = (A^{54})_i^i = (A^{66})_i^i = \dots$
6. $(A^{24})_i^i = (A^{36})_i^i = (A^{48})_i^i = (A^{72})_i^i = (A^{84})_i^i \dots$
7. $(A^{25})_i^i = (A^{35})_i^i = (A^{55})_i^i = (A^{65})_i^i = \dots$
8. $(A^{10})_i^i = (A^{50})_i^i = (A^{70})_i^i = \dots$
9. $(A^{15})_i^i = (A^{45})_i^i = (A^{75})_i^i = \dots$
10. $(A^{20})_i^i = (A^{40})_i^i = (A^{80})_i^i = \dots$

и два «одинокных» тона:

11. $(A^{30+60s})_i^i, s = 0, 1, 2, \dots$
12. $(A^{60+60s})_i^i, s = 0, 1, 2, \dots$

Символы \vdots в цепочках 1 – 10 соответствуют «одинокным» тонам с начальными показателями – 30 и 60.

Для $n = 6$ (индекс $k_{\max} = 26$, период $C_{\max} = 60$) обнаруживается также двенадцать серий «обертонов», очень схожих с указанными сериями в случае $n = 5$:

- в 1 серии нет только начала – $(A^{13})_i^i$ и $(A^{17})_i^i$;
- во 2 серии нет $(A^{14})_i^i$;
- в 7 серии нет $(A^{25})_i^i$;
- в 9 серии нет $(A^{15})_i^i$;
- в 10 серии нет $(A^{20})_i^i$.

Остальные серии, включая одиночные, точно такие же, как и в случае $n = 5$.



Отметим, что во всех разобранных случаях волна (цикл) как бы состоит из двух полуволн, симметричных относительно двух осей, приходящихся на номера «одиночных» тонов и соответствующих символу \equiv .

Таким образом, наблюдатель (находящийся в i -й точке), который не видит всю картину функционирования конечной системы в целом, однако видит последовательность биволн с двумя осями симметрии. Ему сложно уловить цикличность из-за «шумов». Лучше находиться на «пути», идущем от i -й точки к j -й точке ($i \neq j$), что соответствует элементам $(A^k)_j^i$ булевой матрицы A , определяющей некоторый осциллятор.

Замеченное наличие обертонов может оказаться весьма интересным, в частности для проблемы максимальной плотности элементов булевой матрицы, сформулированной в [5].

Библиографический список

1. Luce R.D. A note on Boolean matrix theory // Proc. Ammer Math. Soc. 1952. V. 3. P.382–388.
2. Give'on Y. Lattice matrices // Inform. And Control. 1964. V. 7, № 4. P. 477–484
3. Kim Ki Hang. Boolean matrix theory and applications. Pure and Applied Mathematics, 70. N. Y.; Basel: Marcel Dekker, Inc., 1982. XIV+ 425 p.
4. Rosenblatt D. On the graphs and asymptotic forms of finite Boolean relation matrices and stochastic matrices // Naval Res. Logist. Quart. 1957. V. 4. P. 151–167.
5. Li Q., Shao J. The index set problem for Boolean (or nonnegative) matrices // Discrete Math. 1993. V. 123, №1–3. P. 75–92.
6. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972. Т. 1. 286 с.
7. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир, 1985. 440 с.
8. Hammer P.L., Rudeanu S. Boolean methods in operations research and related areas. Berlin; N. Y.; Springer, 1968. XIX+ 329 p.
9. Луц А.Г. Приложение матричной булевой алгебры к анализу и синтезу релейно-контактных схем // Докл. АН СССР. 1950. Т. 70, №3. С. 421–423.
10. Rutherford D.E. Inverses of Boolean matrices // Proc. Glasg. Math. Assoc. 1963. V. 6. P. 49–53.
11. Wedderburn J.H.M. Boolean linear associative algebra // Ann. of Math. 1934. V. 35. P. 185–194.
12. Schwarz S. On the semigroup of binary relations on a finite set // Czech. Math. J. 1970. V. 20(95). P. 632–679.
13. Wielandt H. Unzerlegbare, nichtnegative Matrizen // Math. Z. 1950. V. 52. P. 642–648.
14. Gregory D.A., Kirkland S.J., Pullman N.J. A bound on the exponent of a primitive matrix using Boolean rank // Linear Algebra Appl. 1995. V. 217. P. 101–116.
15. Поплавский В.Б. Определители степеней булевых матриц // Чебышевский сборник: Труды VI Междунар. конф. «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения». 2004. Т. 5, вып. 3(11). С. 98–111.

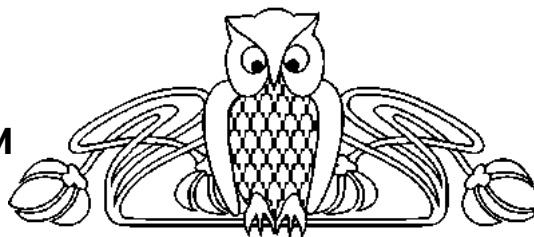
УДК 517.51

МНОГОМЕРНЫЕ q -ИНТЕГРАЛЬНЫЕ p -МОДУЛИ И КРИТЕРИИ ОБОБЩЕННОЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ

Л.В.Сахно

Саратовский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: SahnLV@mail.ru

В статье в терминах L_q -нормы дается характеристика анизотропных пространств С.Л. Соболева в пространстве L_p . Так как по одной части номеров возможно неравенство $p_i > 1$, а по другой – $p_i = 1$, то аналог теоремы Ф. Рисса и Hardy–Littlewood представляется в комбинированном виде. Рассматривается более общее дифференцирование, регулярное по М. Шварцу, которое лишь по части переменных является соболевским.



Multivariate q -integral p -modules and Criterion of the Generalized Differentiability

L.V. Sakhno

In the article in terms of L_q -norm the performance of anisotropic spaces of S.L. Sobolev in space L_p is given. As by one part of numbers probably inequality $p_i > 1$, and on another – $p_i = 1$ the analog of the theorem of F. Rissa and Hardy–Littlewood is represented in a combined aspect. More common derivation, regular by Schwarz which only in part of variables is Sobolev's also is considered.



ВВЕДЕНИЕ

Известен ряд критериев существования у функции обобщенных в смысле Соболева производных в L_p . Прежде всего для функции одной переменной – это критерий Ф.Рисса (см. [1], с.277) ($p > 1$), условие которого естественно трактовать как равномерное, а также критерий Харди–Литтлвуда [2] ($p > 1$), выраженный в терминах модулей непрерывности в L_p . Харди и Литтлвуд [2] доказали, что условие Гельдера в L_1 эквивалентно ограниченности вариации.

А.П. Терехин [3] обобщил теорему Ф. Рисса на производные порядка $r \in N$. Ю.А. Брудный [4] распространил теорему Харди–Литтлвуда на $r \in N$. А.П. Терехин [5] установил аналоги теорем Ф. Рисса и Харди–Литтлвуда в случае $r \in N$, условия которых выражены в терминах L_q -нормы $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Для функций многих переменных А.П. Терехин [6] получил аналог теоремы Ф. Рисса для обобщенных по Соболеву производных порядка $r \in N^n$, выразив условие в терминах L_q -нормы, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, p и q – скаляры. Он же [7] рассмотрел пространства со смешанными нормами. По части номеров $p_i > 1$, а по другой – $p_i = 1$, поэтому аналог теоремы Ф.Рисса и Харди–Литтлвуда для производных порядка $r \in N^n$ выступает в комбинированном виде. Автор статьи [8] получила L_q -характеристику анизотропных соболевских классов, которая является многомерным развитием критерия Ф. Рисса ($q = \infty$) и критерия Харди–Литтлвуда ($p = q$) на случай $1 \leq p \leq q \leq \infty$, p и q – вектора. Эта характеристика получена в условиях известного [9] вложения.

В данной статье также рассматриваются анизотропные пространства и случай, когда по части номеров $p_i > 1$ (возможно все $p_i > 1$), а по другой – $p_i = 1$ (возможно все $p_i = 1$). Аналог теорем Ф. Рисса и Харди–Литтлвуда выступает в комбинированном виде. По этой причине используется известное [7] слабое дифференцирование, которое по части переменных является соболевским.

Обозначения. $e \subset \{1, \dots, n\}$, $e' = \{1, \dots, n\} \setminus e$; x^e, d^e – точка и параллелепипед из $R^e \equiv \{x \in R^n \mid (\forall i \notin e) x_i = 0\}$, либо проекция на R^e точки x или параллелепипеда d из R^n , $d = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$; e_i – единичный вектор, направленный по оси x_i ; $\Delta_i^r(h)$ – r -я степень разностного одномерного оператора $\Delta(h)f(x) = f(x+h) - f(x)$, примененного к i -й переменной,

$$\Delta_i^r(h; G)f(x) = \begin{cases} \Delta_i^r(h)f(x) & \text{при } [x, x+rhe_i] \subset G; \\ 0 & \text{при } [x, x+rhe_i] \not\subset G; \end{cases} I_i^r(h)$$
 – r -я степень одномерного оператора Стеклова $I(h)f(x) = \int_0^1 f(x+hu)du$ (его область определения $D(I(h)f) = \{x : [x, x+h] \subset D(f)\}$), примененного к i -й переменной.

Для векторов $p = (p_1, \dots, p_n), q = (q_1, \dots, q_n) a \in R$ неравенство $p \geq a$ означает, что $p_i \geq a, i = 1, \dots, n$; неравенство $p \geq q - p_i \geq q_i, i = 1, \dots, n; (p, q) = \sum_{i=1}^n p_i q_i \mid p \mid = \sum_{i=1}^n p_i \frac{1}{p} = \left(\frac{1}{p_1}, \dots, \frac{1}{p_n} \right)$. Пусть $v > 0, x = (x_1, \dots, x_n), \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Тогда $v^\lambda = (v^{\lambda_1}, \dots, v^{\lambda_n}), x : v^\lambda = (x_1 v^{-\lambda_1}, \dots, x_n v^{-\lambda_n}), xv^\lambda = (x_1 v^{\lambda_1}, \dots, x_n v^{\lambda_n})$.

В одномерном случае

$$\|f(x)\|_{L_p(h)} = \left(\int_0^h |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|\cdot\|_{L_\infty(h)} = \text{ess sup}_{x \in (0, h)} |\cdot|, \quad h > 0,$$

$$\|a_v\|_{l_p} = \left(\sum |a_v|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|\cdot\|_{l_\infty} = \sup_v |\cdot|,$$

где $(a_v), v = 0, \pm 1, -$ двусторонняя последовательность.

$D_i f$ – обобщенная в смысле Соболева производная по i -му аргументу.

1. СЛАБОЕ ОБОБЩЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Следуя [7], введем определение слабой r -дифференцируемости, аналогичное известному определению С.Л. Соболева [9] обобщенной производной.



Определение 1. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Функцию f , локально суммируемую на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, назовем слабо r -дифференцируемой по i -й переменной, если в G существует обобщенная мера λ такая, что для любой бесконечно дифференцируемой финитной в G функции φ

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \lambda(dx) = (-1)^r \int_{\mathbb{R}^n} f(x) D_i^r \varphi(x) dx. \quad (1)$$

Слабое r -дифференцирование будем называть соболевским по x^e , если для каждого параллелепипеда $d^{e'} \subset G^{e'}$ обобщенная мера $\lambda(d^e \times d^{e'})$ является локально абсолютно непрерывной функцией параллелепипедов $d^e \subset G(d^{e'}) \equiv \{x^e \mid x^e \times d^{e'} \subset G\}$.

Согласно теореме Радона,

$$\lambda(d^e \times d^{e'}) = \int \chi(x^e, d^{e'}) dx^e, \quad (2)$$

где функция χ определена для всех $d^{e'} \subset G^{e'}$, почти всех $x^e \in G(d^{e'})$ и локально суммируема на $G(d^{e'})$.

Известно [7], что не нарушая равенства (2), функцию χ можно переопределить, задав ее для каждого $x^e \in G^e$ как обобщенную меру в сечении $G(x^e)$. Известно также [7], что слабое r -дифференцирование замкнуто по Хелли, т.е. если $f_\nu - r$ -дифференцируемые в G функции, $\lambda_\nu -$ соответствующие им по (1) обобщенные меры, $f_\nu \rightarrow f$ в $L^{loc}(G)$, $\lambda_\nu(d) \rightarrow \lambda(d)$ для счетного множества параллелепипедов, внутренних к G , и вариации ограничены в совокупности на каждом компакте $F \subset G$, то функция f слабо r -дифференцируема и ей соответствует по (1) обобщенная мера λ .

Определение 2. Пусть $G -$ открытое множество в \mathbb{R}^n , функция $\chi(x^e, d^{e'}) = \chi(x^e \times d^{e'})$ измерима по x^e и является обобщенной мерой в $G(x^e)$, а $\chi_0 -$ нулевое продолжение функции χ на все пространство \mathbb{R}^n , $p = (p_1, \dots, p_n)$ и $p_i = 1$ для $i \in e'$.

Полагаем

$$\|\chi\|_p = \left\| \dots \|\chi_0\|_{p_1} \dots \right\|_{p_n},$$

где $\|\cdot\|_{p_i} -$ норма в $L_{p_i}(R)$, если $i \in e$, и $\|\cdot\|_{p_i} = \|\cdot\|_1 -$ полная вариация, если $i \in e'$.

Если $e' = \emptyset$, то $\chi -$ функция точки $x \in \mathbb{R}^n$ и в этом случае $\|\chi\|_p -$ норма пространства L^p . Если $e \neq \emptyset$, то $\|\chi\|_1 = V(\chi)$.

2. МНОГОМЕРНЫЕ (p, q) -МОДУЛИ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Определение 3. Пусть $p = (p_1, \dots, p_n)$, $q = (q_1, \dots, q_n)$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $l = (l_1, \dots, l_n) -$ вектор с положительными компонентами, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ и $\nu_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, j = 1, \dots, n$. Полагаем

$$\mu_{p,q}^{r,i}(h; G, l; f) = \left\| \Delta_i^r(h; G) f(x + \nu h^{\frac{l}{l}}) \right\|_{(L_p L_q)(h^{\frac{l}{l}})} = \left\| \dots \left\| \Delta_i^r(h; G) f(x + \nu h^{\frac{l}{l}}) \right\|_{L_{p_1, \nu_1}} \left\| \dots \left\| \dots \left\| \dots \right\|_{L_{q_1, \nu_1}} \left\| \dots \left\| \dots \left\| \dots \right\|_{L_{p_n, \nu_n}} \left\| \dots \left\| \dots \left\| \dots \right\|_{L_{q_n, \nu_n}} \right\|_{L_{q_n}(h^{\frac{l}{l}})} \right\|_{L_{q_n}(h^{\frac{l}{l}})} \right\|_{L_{q_n}(h^{\frac{l}{l}})} \right\|_{L_{q_n}(h^{\frac{l}{l}})} \right\|_{L_{q_n}(h^{\frac{l}{l}})}.$$

Условимся, где это не вызовет недоумения, писать просто $\mu_{p,q}^{r,i}(h; f)$ и называть данную величину (p, q) -модулем непрерывности.

Кроме этого будем пользоваться также выровненными (p, q) -модулями

$$\omega_{p,q}^{r,i}(\delta; f) = \omega_{p,q}^{r,i}(\delta; G, l; f) = \sup_{0 < h \leq \delta} \mu_{p,q}^{r,i}(h; G, l; f).$$

Предложение 1. Имеет место равенство

$$\mu_{p,p}^{r,i}(h; f) = \left\| \Delta_i^r(h) f \right\|_{L_p}.$$

Данное соотношение вытекает из одномерного равенства

$$\int_0^{\frac{l}{h}} \sum_{\nu_1} \left| g(x_1 + \nu_1 h^{\frac{l}{l}}) \right|^{p_1} dx_1 = \sum_{\nu_1} \int_{(0, h^{\frac{l}{l}}) + \nu_1 h^{\frac{l}{l}}} |g(x_1)|^{p_1} dx_1 = \int_R |g(x_1)|^{p_1} dx_1,$$



которое следует применить по координатам по отношению к функции $g(x) = \Delta_i^r(h)f(x)$.

Предложение 2. Если $1 \leq p \leq q' \leq q \leq \infty$, то

$$\mu_{p,q}^{r,i}(h; f) \leq h^{l\left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{q}\right)} \mu_{p,q}^{r,i}(h; f).$$

Непосредственно вытекает из неравенства Гельдера

$$\left(\int_{(0, h^{\frac{1}{q'}})} |\cdot|^{q'} dx_1 \right)^{\frac{1}{q'}} \leq h^{\frac{l}{q'}\left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{q}\right)} \left(\int_{(0, h^{\frac{1}{q}})} |\cdot|^{q_1} dx_1 \right)^{\frac{1}{q_1}},$$

применяемого по координатам.

Предложение 3. Справедливо неравенство

$$\|\Delta_i^r(h; G)f\|_{L_p} \leq h^{lk} \mu_{p,q}^{r,i}(h; G, l; f), \quad \kappa = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{l}\right).$$

Для доказательства воспользуемся предложением 1 и предложением 2 с $q' = p$.

3. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА РИССА–ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА

Пусть $\lambda_{r,j}(f)$ – обобщенная мера, соответствующая слабо r -дифференцируемой по j -й переменной, функции f ; $\lambda_{r,j}^e(f)$ – производная Радона обобщенной меры $\lambda_{r,j}(f)$ по переменной x^e в случае r -дифференцирования соболевского по x^e , $D_j^r f$ – производная в смысле С.Л.Соболева r -го порядка по j -й переменной.

Теорема 1. Если

$$\sup_{0 < \delta < h_0} \omega_{p,q}^{r,j}(\delta; G, l; f) \delta^{-r+l\kappa} = M < +\infty, \quad \kappa = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{l}\right),$$

то функция f слабо r -дифференцируема, причем соболевски по переменной x^e с $e = \{i : p_i > 1\}$ и

$$\|\lambda_{r,j}^e(f)\|_p \leq M$$

($|\lambda_r^e|$ – полная вариация меры на параллелепипедах $d^{e'} \subset G(x^e)$).

В случае существования $D_j^r f$ ($e' \neq \emptyset$) последняя оценка принимает вид

$$\|D_j^r f\|_p \leq M.$$

Доказательство. Учитывая предложение 3, из условия теоремы получаем неравенство

$$h^{-r} \|\Delta_j^r(h; G)f\|_{L_p} \leq M, \quad h < h_0.$$

Для средних Стеклова $F_{h,j}^r f = I_j^r(h)f$ последнее неравенство означает оценку

$$\|D_j^r F_{h,j}^r f\|_p \leq M. \tag{3}$$

В случае существования производной $D_j^r f$ в силу теоремы Фату о предельном переходе ($D_j^r F_{h,j}^r f$ почти всюду сходятся к $D_j^r f$) из неравенства (3) получаем оценку

$$\|D_j^r f\|_p \leq M.$$

Пусть $e' \neq \emptyset$. Докажем существование $D_j^r f$. Неравенство (3) означает, что $D_j^r F_{h,j}^r f$ (значок « \circ » означает нулевое продолжение) образуют ограниченное в $L_p(R^n)$ семейство по h и, следовательно, слабо компактное, если $p < \infty$ (поскольку пространство L_p , $1 < p < \infty$ рефлексивно). Так как $F_{h,j}^r f$ сходятся к f в $L_{\text{лок}}(G)$, то f имеет производную $D_j^r f$.

Если среди координат вектора p есть равные ∞ , то приведенные выше рассуждения можно провести с произвольным вектором $\bar{p} < \infty$, $1 < \bar{p} \leq p$, и любой ограниченной подобластью $\Omega \subset G$. Поэтому $D_j^r f$ существует на Ω , а следовательно, и на всей области G .

Пусть $e' \neq \emptyset$. Определим семейство мер в R^n

$$\lambda_h(d) = \int_d D_j^r F_{h,j}^r f(x) dx, \tag{4}$$



и при каждом $x^e \in R^e$ семейство мер в $R^{e'}$

$$\chi_h(x^e, d^{e'}) = \int_{d^{e'}} D_j^r F_{h,j}^r f_\circ(x) dx^{e'}. \quad (5)$$

По теореме Фубини

$$\lambda_h(d) = \int_{d^e} \chi_h(x^e, d^{e'}) dx^e. \quad (6)$$

Формулы, аналогичные (4) и (5), имеют место для всех вариаций λ_h и χ_h : полных $|\lambda_h|$ и $|\chi_h|$, λ_h^\pm , χ_h^\pm .

Далее действуют общие известные факты. Из неравенства (3) вытекает ограниченность семейства $|\lambda_h|$ на любом компакте F и возможность применения второй теоремы Хелли: семейства λ_h , $|\lambda_h|$, λ_h^+ , λ_h^- по некоторой последовательности $h = h_k$ сходятся к мере λ и ее вариациям $|\lambda|$, λ^+ , λ^- . Из аналога (5) для $|\chi_h|$ с $|D_j^r F_{h,j}^r f_\circ|$ в правой части имеем

$$\| |\chi_h|(\cdot, d^{e'}) \|_{p^{e'}} \leq \| D_j^r F_{h,j}^r f \|_{p^{e'}, p^{e'}} \leq \| D_j^r F_{h,j}^r f \|_p$$

(так как $p^e > 1^e$, $p^{e'} = 1^{e'}$, то последняя оценка основана на неравенстве Минковского).

При $p < \infty$ в силу рефлексивности L_p^e оценка (3) и последнее неравенство влечет слабую компактность семейства χ_h и всех вариаций, т.е. существование у них слабо предельных функций χ с вариациями.

Поэтому в равенстве (6) можно перейти к пределу:

$$\lambda(d) = \int_{d^e} \chi(x^e, d^{e'}) dx^e. \quad (7)$$

Так как $F_{h,j}^r f \rightarrow f$ в $L_{\text{лок}}(G)$, то в силу замкнутости r -дифференцирования в смысле Хелли $\lambda = \lambda_{r,j}(f)$, а равенство (7) означает, что r -дифференцирование является соболевским по x^e и $\lambda_{r,j}^e(f) = \chi$.

Если при некоторых i $p_i = \infty$, то заменив их $1 < p_i < \infty$, мы докажем существование $\lambda_{r,j}^e(f)$ на любой ограниченной подобласти и тем самым на всей области G .

Осталось оценить p -норму функции $|\chi|$. Это можно сделать способом, предложенным А.П.Терехиным [7] в доказательстве теоремы 2, где речь идет о смешанном r -дифференцировании ($r \in N^n$). По сути наша ситуация та же. Теорема доказана.

Пусть функция f слабо l_i -дифференцируема по i -й переменной, $1 \leq i \leq n$.

Воспользуемся известным ([9], с. 83) представлением

$$f(x) = s^{-|\lambda|} \int_{R^n} f(x+y) \Omega(y: s^\lambda) dy + \sum_{i=1}^n \int_0^s v^{-|\lambda|} dv \int_{R^n} f(x+y) D_i^l \tilde{L}_i(y: v^\lambda) dy.$$

Функции Ω и \tilde{L}_i , $i = 1, \dots, n$, бесконечно дифференцируемы и финитны в R^n , а их носители таковы, что носителем представления служит роуг $x+V(l,s)$, $\lambda = 1:l$. С помощью равенства (1), заметив, что

$$D_i^l \tilde{L}_i(y: v^\lambda) = v D_{y_i}^l \tilde{L}_i(y: v^\lambda),$$

получим

$$f(x) = s^{-|\lambda|} \int_{R^n} f(x+y) \Omega(y: s^\lambda) dy + \sum_{i=1}^n \int_0^s v^{-|\lambda|} dv \int_{R^n} L_i((y-x): v^\lambda) \lambda_{l_i,i}^e(dy), \quad (8)$$

где $L_i(x) = (-1)^{l_i} \tilde{L}_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$).

При получении оценки (p,q) -модулей через нормы $\| \lambda_{l_i,i}^e \|_p$ будем пользоваться неравенством, аналогичным известному ([9], с. 24) неравенству Юнга.

Лемма (аналог неравенства Юнга). Пусть p, q, r – вещественные числа, удовлетворяющие условиям $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Пусть K – функция одной переменной, определенная на множестве Y , а f – функция двух переменных, определенная на множестве $X \times Y$, $I(x) = \int_Y f(x,y) K(y) dy$ при любом $x \in X$. Тогда

$$\| I \|_{L_q(X)} \leq \| K \|_{L_r(Y)} \sup_{x \in X} \| f(x,y) \|_{L_p(Y)}^{1-\frac{p}{q}} \sup_{y \in Y} \| f(x,y) \|_{L_p(X)}^{\frac{p}{q}}.$$



Доказательство незначительно отличается от доказательства неравенства Юнга, поэтому не будем его приводить в статье.

Пусть функция f определена на множестве $U + V$, где U – открытое множество в R^n , $V = V(l, h_0)$ – l -рог, и слабо l_i -дифференцируема по i -й переменной, $1 \leq i \leq n$, на этом множестве.

Лемма. Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\kappa = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{l}\right) \leq 1$ и при $\kappa = 1$ либо $1 < p_n < q_n < \infty$, либо $1 = p_n < q_n = \infty$. Тогда при $h \leq h_0^{\frac{1}{l_j}}$, $1 \leq j \leq n$

$$\mu_{p,q}^{l_j,j}(h; U, l; f) \leq h^{l_j - l_j \kappa} C \sum_{i=1}^n \|\lambda_{l_i,i}^e\|_{p,U+V}.$$

Доказательство. Представление $\Delta_j^{l_j}(h; U) f(x + \nu h^{\frac{l_j}{l}})$ получим из равенства (8), положив $s = h^{\frac{l_j}{l}}$, внося операцию разности в первом слагаемом правой части под интеграл, а к оставшимся n слагаемым применяя оценку

$$|\Delta_j^{l_j}(h)g(x)| \leq C \sum_{k=0}^{l_j} |g(x + k h e_j)|,$$

вытекающую из определения конечных разностей.

Для оценки $(l_p L_q(h^{\frac{l_j}{l}}))$ – нормы $\Delta_j^{l_j}(h; U) f(x + \nu h^{\frac{l_j}{l}})$ в силу неравенства Минковского достаточно оценить нормы слагаемых правой части.

Поскольку $\Delta_j^{l_j}(h) f = h^{l_j} D_j^{l_j} F_{h,j}^{l_j} f (F_{h,j}^{l_j} f = I_j^{l_j} h) f$, то первое слагаемое правой части

$$\begin{aligned} A_0(x, \nu) &= h^{-l_j |k|} \int_{R^n} \Omega(y : h^{\frac{l_j}{l}}) \Delta_j^{l_j}(h; U + V) f(x + y + \nu h^{\frac{l_j}{l}}) dy = \\ &= h^{l_j - l_j |k|} \int_{R^n} \Omega((y - x - \nu h^{\frac{l_j}{l}}) : h^{\frac{l_j}{l}}) D_j^{l_j} F_{h,j}^{l_j} f(y) dy = h^{l_j - l_j |k|} \int_{R^n} \Omega((y - x - \nu h^{\frac{l_j}{l}}) : h^{\frac{l_j}{l}}) \lambda_h(dy), \end{aligned}$$

где $\lambda_h(d) = \int_d D_j^{l_j} F_{h,j}^{l_j} f(y) dy$.

Представим ее в виде

$$\lambda_h(d) = \int_{d^e} \chi_h(y^e, d^{e'}) dy^e,$$

где $\chi_h(y^e, d^{e'}) = I_j^{l_j}(h) \chi(y^e, d^{e'})$, а $\chi(y^e, d^{e'})$ – производная Радона обобщенной меры $\lambda_{l_j,j}(f)$ по переменной x^e (т.е. $\lambda_{l_j,j}^e(f)$).

Пусть $\pi_i^m = \left\{ \left[\frac{(k-1)h^{\frac{l_j}{l}}}{2^m}, \frac{kh^{\frac{l_j}{l}}}{2^m} \right] \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – разбиение i -х осей, $i \in e'$; $\pi = \pi^m = \{d^{e'} = \prod_{i \in e'} d_i, d_i \in \pi_i^m\}$.

Для ступенчатой функции g , постоянной на $d^{e'} \in \pi$ и сосредоточенной в прямоугольнике $(0, h^{\frac{l_j}{l}})$ рассмотрим

$$A(x, \nu) = \int_{R^n} g(y - x - \nu h^{\frac{l_j}{l}}) \lambda_h(dy) = \int_{(0, h^{\frac{l_j}{l}})} g(y) \chi_h^\pi((y + x + \nu h^{\frac{l_j}{l}})^e, y^{e'}, (x + \nu h^{\frac{l_j}{l}})^{e'}) dy,$$

где $\chi_h^\pi((y + x + \nu h^{\frac{l_j}{l}})^e, y^{e'}, (x + \nu h^{\frac{l_j}{l}})^{e'}) = \frac{\chi_h[(y^e, d^{e'}) + x + \nu h^{\frac{l_j}{l}}]}{|d^{e'}|}$, $y^{e'} \in d^{e'}$.

Пусть $1 \in e$. Рассмотрим одномерный случай

$$\tilde{A}(x_1, \nu_1) = \int_{(0, h^{\frac{l_j}{l}})} \tilde{g}(y_1) \tilde{\chi}_h^\pi(y_1 + x_1 + \nu h^{\frac{l_j}{l}}) dy_1.$$

Пользуясь неравенством Минковского, а затем неравенством Юнга $\left(1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{r_1}\right)$, имеем

$$\|\tilde{A}(x_1, \nu_1)\|_{l_{p_1}} \leq \int_{(0, h^{\frac{l_j}{l}})} |\tilde{g}(y_1)| \|\tilde{\chi}_h^\pi(y_1 + x_1 + \nu h^{\frac{l_j}{l}})\|_{l_{q_1}} dy_1,$$



$$\|\tilde{A}(x_1, \nu_1)\|_{L_{p_1} L_{q_1}(h^{\frac{1}{j}})} \leq \|\tilde{g}\|_{L_{q_1}} \|\tilde{\chi}_h^\pi\|_{L_{p_1}}. \quad (9)$$

Пусть $1 \in e'$. Рассмотрим одномерный случай

$$\tilde{A}(x_1, \nu_1) = \int_{(0, h^{\frac{1}{j}})} \tilde{g}(y_1) \tilde{\chi}_h^\pi(y_1, x_1 + \nu_1 h^{\frac{1}{j}}) dy_1.$$

На основании неравенства Минковского имеем

$$\|\tilde{A}(x_1, \nu_1)\|_{L_{p_1}} \leq \int_{(0, h^{\frac{1}{j}})} |\tilde{g}(y_1)| \left\| \tilde{\chi}_h^\pi(y_1, x_1 + \nu_1 h^{\frac{1}{j}}) \right\|_{L_{p_1}} dy_1 = \int_{(0, h^{\frac{1}{j}})} |\tilde{g}(y_1)| \varphi(y_1, x_1) dy_1.$$

Тогда при $y_1 \in d, d \in \pi_1^m (|d| = h^{\frac{1}{j}} / 2^m)$,

$$\begin{aligned} \|\varphi(y_1, x_1)\|_{L_1(h^{\frac{1}{j}}, x_1)} &= \frac{1}{|d|} \int_{(0, h^{\frac{1}{j}})} \sum_{\nu_1} |\tilde{\chi}_h[d + x_1 + \nu_1 h^{\frac{1}{j}}]| dx_1 = \\ &= \frac{1}{|d|} \int_{(0, h^{\frac{1}{j}} / 2^m)} \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{\nu_1} |\tilde{\chi}_h(d + x_1 + (k-1)h^{\frac{1}{j}} / 2^m + \nu_1 h^{\frac{1}{j}})| dx_1 \leq \|\tilde{\chi}_h\|_1. \end{aligned}$$

Кроме того, очевидно

$$\|\varphi(y_1, x_1)\|_{L_1(h^{\frac{1}{j}}, x_1)} \leq \|\tilde{\chi}_h\|_1.$$

На основании аналога неравенства Юнга далее получим ($1 = e', p_1 = 1$)

$$\|\tilde{A}(x_1, \nu_1)\|_{L_{p_1} L_{q_1}(h^{\frac{1}{j}})} \leq \|\tilde{g}\|_{L_{q_1}} \|\tilde{\chi}_h\|_1. \quad (10)$$

В многомерном случае, применяя покоординатно оценки (9) или (10) в зависимости от принадлежности номера переменной множеству e или e' , получим оценку

$$\|A(x, \nu)\|_{(L_p L_q)(h^{\frac{1}{j}})} \leq \|g\|_{L_r} \|\chi_h\|_{p, U+\nu}.$$

С помощью последовательности ступенчатых функций g_m , постоянных на $d^{e'} \in \pi$, равномерно сходящейся к функции $\Omega(y : h^{\frac{1}{j}})$, перенесем оценку на $A_0(x, \nu)$. Учитывая, наконец, что

$$\left\| \Omega(y : h^{\frac{1}{j}}) \right\|_{L_r} = h^{l_j(\frac{1}{r}, \frac{1}{j})} \|\Omega\|_{L_r},$$

а также неравенство

$$\|\chi_h\|_p \leq \|\chi\|_p,$$

получим оценку

$$\|A_0(x, \nu)\|_{(L_p L_q)(h^{\frac{1}{j}})} \leq Ch^{l_j - l_j k} \left\| \lambda_{l_j, j}^e \right\|_{p, U+\nu}.$$

В остальных слагаемых

$$A_i(x, \nu) = \int_0^{h^{\frac{1}{j}}} v^{-k|} dv \int_{R^n} L_i((y - x - \nu h^{\frac{1}{j}}) : v^{\lambda}) \lambda_{l_i, i}(dy), \quad (i = 1, \dots, n)$$

при $k < 1 (L_p L_q(h^{\frac{1}{j}}))$ – нормы внутренних интегралов оценим аналогично $A_0(x, \nu)$, а затем проинтегрируем по v .

Таким образом, оценка леммы для случая $k < 1$ доказана.

Оценим нормы A_i при $k < 1$. Вместо ядра $L_i(y, v^{\lambda})$, носитель которого ограничен и удален от координатных плоскостей, возьмем ступенчатую функцию g с таким же носителем, модуль которой не превосходит модуля ядра, постоянную на $d^{e'} \in \pi$. Обозначим

$$\tilde{A}_i(x, \nu) = \int_0^{h^{\frac{1}{j}}} v^{-k|} dv \int_{R^n} g(y - x - \nu h^{\frac{1}{j}}) \lambda_{l_i, i}(dy).$$



Оценим $l_{p_1} L_{q_1} (h^{\frac{1}{l}}) \dots l_{p_{n-1}} L_{q_{n-1}} (h^{\frac{1}{l}}) l_{p_n}$ – норму \tilde{A}_i , как и в случае с $A(x, \nu)$, используя неравенство Минковского и оценки (9) и (10) по координатам. Положим $y = (\bar{y}, y_n)$, $r = (\bar{r}, r_n)$, $L(y_n) = \|L_i(y)\|_{L_{\bar{r}}}$. Если $\sup rL \subset [a, b] \subset [0, 1]$, то

$$\|g(y)\|_{L_{\bar{r}}} \leq \|L_i(y : v^{\lambda})\|_{L_{\bar{r}, \bar{y}}} = v^{\left(\frac{1}{\bar{r}}, \frac{1}{l}\right)} \|L_i(\bar{y}, y_n : v^{\lambda})\|_{L_{\bar{r}}} \leq v^{\left(\frac{1}{\bar{r}}, \frac{1}{l}\right)} \|L_i\|_{L_{\bar{r}} L_{\infty}} \varphi(y_n : v^{\lambda}),$$

где $\varphi(y_n)$ – характеристическая функция отрезка $[a, b]$.

Поскольку $-|\lambda| + \left(\frac{1}{\bar{r}}, \frac{1}{l}\right) = -1 - \frac{\lambda_n}{r_n}$, в результате получим оценку $(l_{\bar{p}} L_{\bar{q}} (h^{\frac{1}{l}})) l_{p_n}$ – нормы $\tilde{A}_i(x, \nu)$ интегралом вида

$$C_1 \int_0^{h^j} v^{-1 - \frac{\lambda_n}{r_n}} dv \int_R \varphi(y_n : v^{\lambda}) \left\| \tilde{\chi}(y_n, x_n + \nu_n h^{\frac{1}{l}}) \right\|_{l_{p_n}} dy_n,$$

если $n \in e$, или интегралом вида

$$C_1 \int_0^{h^j} v^{-1 - \frac{\lambda_n}{r_n}} dv \int_R \varphi(y_n : v^{\lambda}) \left\| \tilde{\chi}^{\pi}(y_n, x_n + \nu_n h^{\frac{1}{l}}) \right\|_{l_{p_n}} dy_n,$$

если $n \in e'$.

Рассмотрим случай $n \in e$. Так как

$$\int_0^h v^{-1 - \frac{\lambda_n}{r_n}} dv \varphi(y_n : v^{\lambda}) \leq C_2 |y_n|^{-\frac{1}{r_n}},$$

то остается оценить L_{q_n} – норму интеграла

$$\int_0^{\frac{1}{h^n}} |y_n|^{-\frac{1}{r_n}} \left\| \tilde{\chi}(y_n, x_n + \nu_n h^{\frac{1}{l}}) \right\|_{l_{p_n}} dy_n.$$

Для этого используем неравенство Харди–Литтлвуда при $1 < p_n < q_n < \infty$ ([9], с.31). В итоге имеем

$$\left\| \tilde{A}_i(x, \nu) \right\|_{(l_{\bar{p}} L_{\bar{q}} (h^{\frac{1}{l}})) l_{p_n}} \leq C \left\| \lambda_{l_i, i}^e \right\|_p.$$

Если $n \in e'$, то $1 = p_n < q_n = \infty$, $r_n = \infty$, и вместо неравенства Харди–Литтлвуда применяем аналог неравенства Юнга. В результате имеем ту же оценку. С помощью последовательности степенных функций переносим оценку на A_i . Таким образом, имеем

$$\left\| A_i(x, \nu) \right\|_{(l_{\bar{p}} L_{\bar{q}} (h^{\frac{1}{l}})) l_{p_n}} \leq C \left\| \lambda_{l_i, i}^e \right\|_p.$$

Собирая оценки, получаем неравенство леммы и при $\kappa = 1$.

Пусть функция определена на открытом множестве G , удовлетворяющем условию l -рога ([9], с. 117) и слабо l_i -дифференцируема по i -й переменной, $i = 1, \dots, n$, на этом множестве. Оценка леммы известным способом ([9], с. 264) распространяется на множество G .

Теорема 2. Пусть открытое множество G удовлетворяет условию l -рога, $1 \leq p \leq q \leq \infty$,

$\kappa = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{l}\right) \leq 1$ и при $\kappa = 1$ либо $1 < p_n < q_n < \infty$ либо $1 = p_n < q_n = \infty$. Тогда для $j = 1, \dots, n$.

$$\sup_{0 < \delta < h_0(G)} \omega_{p, q}^{l_j, j}(\delta; f) \delta^{-l_j + l \kappa} \leq C \sum_{i=1}^n \left\| \lambda_{l_i, i}^e \right\|_p.$$

Обобщенная теорема Рисса–Харди–Литтлвуда. Пусть открытое множество G удовлетворяет условию l -рога, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\kappa = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{l}\right) \leq 1$ и при $\kappa = 1$ либо $1 < p_n < q_n < \infty$ либо $1 = p_n < q_n = \infty$, $e = \{i : p_i > 1\}$. Тогда эквивалентны полунормы

$$\sum_{i=1}^n \left\| \lambda_{l_i, i}^e \right\|_p \text{ и } \sum_{i=1}^n \sup_{0 < \delta < h_0(G)} \omega_{p, q}^{l_i, i}(\delta; f) \delta^{-l_i + l \kappa}$$

(причем из конечности второй полунормы следует существование $\lambda_{l_i, i}^e$, $i = 1, \dots, n$).



Доказательство. Заключение теоремы следует из теорем 1 и 2.

Обобщенная теорема Ф.Рисса. Пусть открытое множество G удовлетворяет условию l -рога, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\kappa = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{l}\right) \leq 1$ и при $\kappa = 1$ $1 < p_n < q_n < \infty$. Тогда эквивалентны полунормы

$$\sum_{i=1}^n \|D_i^l f\|_p \text{ и } \sum_{i=1}^n \sup_{0 < \delta < h_0(G)} \omega_{p,q}^{l,i}(\delta; f) \delta^{-l_i + l_i \kappa}$$

(причем из конечности второй полунормы следует существование указанных производных).

Обобщенная теорема Харди–Литтлвуда. Пусть открытое множество G удовлетворяет условию l -рога, $1 \leq q \leq \infty$, $\kappa = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{l}\right) \leq 1$ и при $\kappa = 1$ $q_n = \infty$. Тогда эквивалентны полунормы

$$\sum_{i=1}^n V(\lambda_{l_i,i}(f)) \text{ и } \sum_{i=1}^n \sup_{0 < \delta < h_0(G)} \omega_{1,q}^{l_i,i}(\delta; f) \delta^{-l_i + l_i \kappa}$$

(причем из конечности второй полунормы следует существование $\lambda_{l_i,i}(f)$, $i = 1, \dots, n$).

Библиографический список

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Гостехиздат, 1957.
2. Hardy G., Littlewood J. Some properties of fractional integrals // Math. 1932. № 34. P. 403-409.
3. Терехин А.П. Приближение функций ограниченной p -вариации // Известия вузов. Сер. Математика. 1965. № 2. С. 171–187.
4. Брудный Ю.А. Критерий существования производных в L^p // Математический сборник. 1967. Т. 73, № 1. С. 42–64.
5. Терехин А.П. Функции ограниченной q -интегральной p -вариации и теоремы вложения // Математический сборник. 1972. Т. 88, № 2. С.42–64.
6. Терехин А.П. Многомерная q -интегральная p -вариация и обобщенная по Соболеву дифференцируемость в L_p функции из L_p // Сибирский математический журн. 1972. Т. 13, № 6. С. 1358–1373.
7. Терехин А.П. Смешанная q -интегральная p -вариация и смешанная дифференцируемость в L_p функции из L_p // Математические заметки. 1982. Т. 25, № 3. С. 151–166.
8. Сахно Л.В. Многомерная q -интегральная p -вариация и теоремы вложения // Саратов, 1981. 20 с. Деп. в ВИНТИ 19.03.81. № 1220-81.
9. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.

УДК 517.51-518

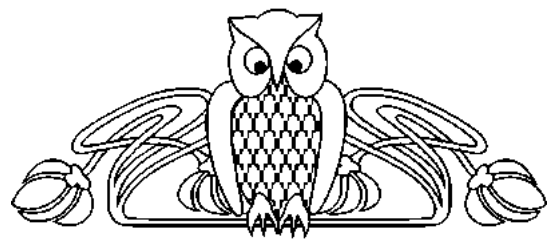
ТОЧНЫЕ ПОРЯДКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ АППРОКСИМАЦИИ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Е.В. Шишкова

Саратовский государственный университет,
кафедра математической физики и вычислительной математики
E-mail: ShishkovaEV@info.sgu.ru

В данной работе получены точные по порядку оценки погрешностей приближений к функции вместе с ее производными в равномерной метрике на некоторых классах в случаях, когда функция задана точно, и когда она задана ее δ -приближением $f_\delta(x)$ в метрике пространства $L_2[a, b]$. В качестве приближающих операторов берутся интегральные операторы с полиномиальными финитными ядрами.

В данной работе получены точные по порядку оценки погрешностей приближений к функции вместе с ее производными в равномерной метрике на некоторых классах в случаях, когда функция задана точно и когда она задана ее δ -приближением $f_\delta(x)$ в метрике пространства $L_2[a, b]$. В качестве приближающих операторов берутся интегральные операторы с полиномиальными финитными ядрами.



Exact Orders of Errors in Smooth Functions Approximations

E.V. Shishkova

In this paper exact order estimations of errors in uniform metric approximation of smooth function and its derivatives over several classes are obtained in cases when the function is defined precisely or using its δ -approximation $f_\delta(x)$ in $L_2[a, b]$ metric. Integral operators with polynomial finite kernels are considered as approximate one.



Рассмотрим семейство интегральных операторов [1]:

$$A = A(\alpha, \alpha_k) \tag{1}$$

где $\alpha > 0$ – параметр, α_k выбираются из условия $\alpha_k > 0$ и имеют вид

$$\alpha_k = A_k \alpha^{-(2k+1)}, \quad A_k = \left(2 \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n C_k^n}{2(k-n)+1} \right)^{-1}.$$

Обозначим через $T_{\alpha k}^p$ ($p = \overline{0, k}$) оператор

$$T_{\alpha k}^p f = \int_a^b \frac{\partial^p K_{\alpha k}(x, t)}{\partial x^p} f(t) dt. \tag{2}$$

1. Рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ задана точно. Известно [1], что если $f(x) \in C^k[a, b]$, то $\|T_{\alpha k}^p f - f^{(p)}\|_{C_\varepsilon} \rightarrow 0$ ($p = \overline{0, k}$) при $\alpha \rightarrow 0$, где $C_\varepsilon[a, b] = C[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, $\varepsilon > \alpha$.

Рассмотрим при $k = 1, 2, \dots$, $p = \overline{0, k}$ классы:

$M_2^{k+1}[a, b] = \{f(x) \in W_2^{k+1}[a, b] : \|f\|_{W_2^{k+1}} \leq 1\}$, где $W_2^{k+1}[a, b]$ – одномерные пространства Соболева с нормой

$$\|f\|_{W_2^{k+1}} = \left(\int_a^b \left[(f(t))^2 + (f^{(k+1)}(t))^2 \right] dt \right)^{1/2}, \text{ и величины:}$$

$$\Delta_1^{(p)}(T_{\alpha k}, M_2^{k+1}) = \sup \left\{ \|T_{\alpha k}^p f - f^{(p)}\|_{C_\varepsilon} : f(x) \in M_2^{k+1}[a, b] \right\}, \tag{3}$$

характеризующие скорость аппроксимации $f^{(p)}(x)$ с помощью операторов $T_{\alpha k}^p$ на классе $M_2^{k+1}[a, b]$. Поставим задачу (задачу Колмогорова – Никольского [2], [3]) получения для величин $\Delta_1^{(p)}(T_{\alpha k}, M_2^{k+1})$ ($k = 1, 2, \dots$, $p = \overline{0, k}$) асимптотических представлений вида

$$\Delta_1^{(p)}(T_{\alpha k}, M_2^{k+1}) = \varphi_{1k}^{(p)}(\alpha) + \psi_{1k}^{(p)}(\alpha), \quad \psi_{1k}^{(p)}(\alpha) = o(\varphi_{1k}^{(p)}(\alpha)) \text{ при } \alpha \rightarrow 0. \tag{4}$$

В [4] получены (4) для $k = 1, p = 0, 1$.

ТЕОРЕМА (Хромовой [2]). Имеют место представления

$$\Delta_1^{(p)}(T_{\alpha k}, M_2^{k+1}) = \sup_{a \leq x \leq b} \left(\int_a^b \frac{\partial^p K_{\alpha k}(x, \xi)}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial^p g(x, \xi, \alpha)}{\partial x^p} d\xi - \frac{\partial^{2p} g(x, \xi, \alpha)}{\partial x^p \partial \xi^p} \Big|_{\xi=x} \right)^{1/2}, \tag{5}$$

где
$$g(x, \xi, \alpha) = \int_a^b K_{\alpha k}(x, \eta) G(\xi, \eta) d\eta - G(\xi, x), \tag{6}$$

$G(\xi, \eta)$ – функция Грина дифференциального оператора, порожденного дифференциальным выражением $l(y) = (-1)^{k+1} y^{2k+2}(t) + y(t)$ и краевыми условиями: $y^{(r)}(a) = y^{(r)}(b) = 0$, $r = k + 1, \dots, 2k + 1$.

Для функции Грина справедливо выражение

$$G(\xi, \eta) = \frac{1}{4(k+1)} \sum_{l=1}^{2(k+1)} \lambda_l e^{-\lambda_l \eta} \left(\pm e^{\lambda_l \xi} + \sum_{m=1}^{2(k+1)} c_{ml} e^{\lambda_m \xi} \right), \tag{7}$$

где $\lambda_l = \sqrt{2(k+1)} \sqrt{(-1)^k}$, c_{ml} – некоторые константы, зависящие от краевых условий; знак «+» соответствует $\xi < \eta$; знак «-» – $\xi > \eta$ [2].

Лемма 1. Пусть $k = 1, 2, \dots$, $t = 0, \left[\frac{k}{2} \right]$, тогда при $h = \overline{0, k-t-1}$

$$\sum_{s=0}^{[k-t]} (-1)^s \frac{k! s^h}{s!(k-s-t)!} = 0. \tag{8}$$

Доказательство. Обозначим левую часть (8) через S . При $h = 0$ (8) очевидно. При $h \geq 1$
$$S = \sum_{s=1}^{k-t} \frac{k(k-1) \dots (k-t)(k-t-1)! s^{h-1}}{(s-1)!(k-s-t)!}. \text{ Если } h = 1, \text{ то}$$



$$S = k \cdot \dots \cdot (k-t) \sum_{s=1}^{k-t} (-1)^s C_{k-t-1}^{s-1} = -k \cdot \dots \cdot (k-t) \sum_{s=0}^{k-t-1} (-1)^s C_{k-t-1}^{s-1} = 0,$$

при $h > 1$ имеем

$$\begin{aligned} S &= \sum_{s=1}^{k-t} (-1)^s \frac{k \cdot \dots \cdot (k-t) (k-t-1)! s^{h-2} (s-1+1)}{(s-1)!(k-s-t)!} = \\ &= \sum_{s=2}^{k-t} \frac{(-1)^s k \cdot \dots \cdot (k-t-1) (k-t-2)! s^{h-2}}{(s-2)!(k-s-t)!} + \sum_{s=1}^{k-t} \frac{(-1)^s k \cdot \dots \cdot (k-t) (k-t-1)! s^{h-2}}{(s-1)!(k-s-t)!}. \end{aligned}$$

Положив в последнем выражении для S $h = 2$, получим:

$$\begin{aligned} S &= k \cdot \dots \cdot (k-t-1) \sum_{s=2}^{k-t} (-1)^s C_{k-t-2}^{s-2} + k \cdot \dots \cdot (k-t) \sum_{s=1}^{k-t} (-1)^s C_{k-t-1}^{s-1} = \\ &= k \cdot \dots \cdot (k-t-1) \sum_{s=0}^{k-t-2} (-1)^s C_{k-t-2}^s - k \cdot \dots \cdot (k-t) \sum_{s=0}^{k-t-1} (-1)^s C_{k-t-1}^s = 0, \end{aligned}$$

а при $h > 2$

$$\begin{aligned} S &= \sum_{s=2}^{k-t} (-1)^s \frac{k \cdot \dots \cdot (k-t-1) (k-t-2)! s^{h-3} (s-2+2)}{(s-2)!(k-s-t)!} + \\ &+ \sum_{s=1}^{k-t} (-1)^s \frac{k \cdot \dots \cdot (k-t) (k-t-1)! s^{h-3} (s-1+1)}{(s-1)!(k-s-t)!}. \end{aligned}$$

Проводя дальнейшие рассуждения по этой схеме для произвольного h , получим

$$S = B_h \sum_{s=0}^{k-t-h} (-1)^s C_{k-t-h}^s + \dots + B_1 \sum_{s=0}^{k-t-1} (-1)^s C_{k-t-1}^s,$$

где B_h, \dots, B_0 – некоторые константы. Так как $h \leq k-t-1$, то $S = 0$.

Лемма доказана.

Лемма 2. Для любого натурального числа k и $p = \overline{0, k}$

$$\sum_{j=0}^{p-1} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p (1 + (-1)^{j-p})}{j!(j+2(k-s)-p+1)} = 0. \quad (9)$$

Доказательство. Если $p = 0$, то $\sum_{j=0}^{-1} = 0$. Пусть $p \neq 0$.

Пусть $p = 2t$, $t \geq 1$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} F_{kt} &\equiv \sum_{j=0}^{2t-1} \sum_{s=0}^{k-t} (-1)^s C_k^s \frac{(2(k-s))!(1 + (-1)^{j-2t})}{(2(k-s)-2t)! j!(j+2(k-s)-2t+1)} = \\ &= 2 \sum_{j=0}^{t-1} \sum_{s=0}^{k-t} (-1)^s \frac{2^t k!(2(k-s)-1)(2(k-s)-3) \dots (2(k-s)-2t+1)}{s!(k-s-t)!(2j+2(k-s)-2t+1)(2j)!} \equiv 2 \sum_{j=0}^{t-1} \frac{f_j}{(2j)!}. \end{aligned}$$

Преобразуем f_j . Заметим, что при $j = \overline{0, t-1}$ множитель $(2j+2(k-s)-2t+1)$ в знаменателе сократится с одной из скобок в числителе (в каждом слагаемом при соответствующем значении j). Таким образом, в числителе останется многочлен степени $(t-1)$. Тогда по лемме 1

$$f_j = \sum_{s=0}^{k-t} (-1)^s \frac{k!(D_{t-1}s^{t-1} + \dots + D_1s + D_0)}{s!(k-s-t)!} = 0,$$

где D_{t-1}, \dots, D_1, D_0 – некоторые константы. Следовательно, $F_{kt} = 0$.

Аналогично (9) получается для p нечетного.

Лемма доказана.

Лемма 3. Для любого натурального числа k и $p = \overline{0, k-1}$ справедливо равенство



$$\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} (-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p = 0. \quad (10)$$

Доказательство. Если $p = 2t < k$ тогда

$$\sum_{s=0}^{k-t} (-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{2t} = \sum_{s=0}^{k-t} (-1)^s \frac{k! 2^t (2(k-s)-1)(2(k-s)-3) \dots (2(k-s)-2t+1)}{s!(k-s-t)!(2t)!}.$$

В числителе стоит произведение t скобок, то есть многочлен степени t : $B_t s^t + \dots + B_1 s + B_0$, где B_p, \dots, B_1, B_0 – некоторые константы, поэтому

$$\sum_{s=0}^{k-t} (-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{2t} = B_t \sum_{s=0}^{k-t} \frac{(-1)^s k! s^t}{s!(k-s-t)!} + \dots + B_0 \sum_{s=0}^{k-t} \frac{(-1)^s k!}{s!(k-s-t)!} = 0,$$

так как по лемме 1 $\sum_{s=0}^{k-t} \frac{(-1)^s k! s^h}{s!(k-s-t)!} = 0$ при $k-t-h > 0$, а у нас $h = \overline{0}, t$ и $k-t-h \geq k-2t > 0$. При p нечетном доказательство аналогичное.

Лемма доказана.

Лемма 4. Для любого натурального k и $p = \overline{0, k}$ справедливо

$$(-1)^p \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2(k-s)+1} = \sum_{s=0}^k \frac{(-1)^s C_k^s}{2(k-s)+1}. \quad (11)$$

Доказательство проведем индукцией по p . При $p = 0$ (11) верно. Предположим, что оно верно для некоторого $p < k$. Докажем для $p+1 \leq k$. Пусть $p = 2t$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} & (-1)^{p+1} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-p+1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{p+1}}{2(k-s)+1} - (-1)^p \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2(k-s)+1} = \\ & = (-1)^{2t+1} \left(\sum_{s=0}^{k-t-1} \frac{(-1)^s C_k^s (2(k-s))!}{(2(k-s)+1)(2(k-s)-2t-1)!(2t)!} \left(\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{2(k-s)-2t} \right) + \right. \\ & \quad \left. + (-1)^{k-t} \frac{C_k^{k-t}}{2t+1} \right) = -\frac{1}{(2t+1)} \sum_{s=0}^{k-t} (-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{2t} = 0 \end{aligned}$$

по лемме 3. Учитывая предположение индукции, для $p < k$ получаем

$$(-1)^{p+1} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-p+1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{p+1}}{2(k-s)+1} = (-1)^p \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2(k-s)+1} = \sum_{s=0}^k \frac{(-1)^s C_k^s}{2(k-s)+1}.$$

Аналогичное равенство получается при $p = 2t+1$. Следовательно, равенство (11) верно для любого $p = \overline{0, k}$.

Лемма доказана.

Лемма 5. Для любых натуральных чисел k и m выполняется равенство:

$$\frac{(k+1) \dots (k+m)}{(m-1)!} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n C_k^n}{k-n+m} = (-1)^k. \quad (12)$$

Доказательство проведем индукцией по k . Обозначим левую часть равенства (12) через f_k . При $k = 1$ (12) очевидно. Предположим, что при произвольном k : $(-1)^k f_k = 1$. Рассмотрим:

$$\begin{aligned} & (-1)^k f_k - (-1)^{k+1} f_{k+1} = (-1)^k \frac{(k+1) \dots (k+m)}{(m-1)!} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n C_k^n}{k-n+m} - (-1)^{k+1} \frac{(k+2) \dots (k+m+1)}{(m-1)!} \sum_{n=0}^{k+1} \frac{(-1)^n C_{k+1}^n}{k-n+m+1} = \\ & = (-1)^k \frac{(k+2) \dots (k+m)}{(m-1)!} \left((k+1) \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n C_k^n}{k-n+m} + \frac{(k+1) C_{k+1}^0}{k+1+m} + (k+1) \sum_{n=1}^{k+1} \frac{(-1)^n C_{k+1}^n}{k-n+m+1} + m \sum_{n=0}^{k+1} \frac{(-1)^n C_{k+1}^n}{k-n+m+1} \right). \end{aligned}$$



Обозначив $D_{km} = (-1)^k \frac{(k+2) \cdot \dots \cdot (k+m)}{(m-1)!}$ и применив формулу $C_k^s - C_{k+1}^{s+1} = -C_k^{s+1}$, получим

$$\begin{aligned} (-1)^k f_k - (-1)^{k+1} f_{k+1} &= D_{km} \left((k+1) \sum_{s=0}^k \frac{(-1)^s (C_k^s - C_{k+1}^{s+1})}{k-s+m} + \frac{(k+1)C_{k+1}^0}{k+m+1} + \right. \\ &+ m \sum_{n=0}^{k+1} \frac{(-1)^n C_{k+1}^n}{k-n+m+1} \left. \right) = D_{km} \left((k+1) \sum_{n=1}^{k+1} \frac{(-1)^n C_k^n}{k-n+m+1} + \frac{(k+1)C_k^0}{k+m+1} + \right. \\ &\left. + m \sum_{n=0}^{k+1} \frac{(-1)^n C_{k+1}^n}{k-n+m+1} \right) = D_{km} \sum_{n=0}^{k+1} (-1)^n C_{k+1}^n = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $(-1)^{k+1} f_{k+1} = (-1)^k f_k = 1$.

Лемма доказана.

Лемма 6. Для любых натуральных чисел k и m , $p = \overline{0, k}$

$$\frac{(-1)^p}{(p+1) \cdot \dots \cdot (p+2m-1)} \sum_{s=0}^{\left[\frac{k-p}{2} \right]} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{k-s+m} = \frac{1}{(2m-1)!} \sum_{s=0}^k \frac{(-1)^s C_k^s}{k-s+m}. \quad (13)$$

Доказательство проведем методом математической индукции по p . При $p = 0$ равенство очевидно. Допустим равенство (13) доказано для произвольного $p < k$, докажем для $p+1$. Обозначим левую часть (13) через f_p . Пусть $p = 2t$, рассмотрим

$$\begin{aligned} &(-1)^{2t+1} (2t+1)(2t+2) \cdot \dots \cdot (2t+2m)(f_{p+1} - f_p) = \\ &= \sum_{s=0}^{k-t-1} \frac{(-1)^s C_k^s (2(k-s))!}{(k-s+m)(2t)!(2(k-s)-2t-1)!} \left(1 + \frac{2(t+m)}{2(k-s)-2t} \right) + 2(-1)^{k-t} C_k^{k-t} = \\ &= 2 \sum_{s=0}^{k-t} (-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{2t} = 2 \sum_{s=0}^{\left[\frac{k-p}{2} \right]} (-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p = 0 \end{aligned}$$

по лемме 3. Следовательно, по предположению индукции $f_{p+1} = f_p = \frac{1}{(2m-1)!} \sum_{s=0}^k \frac{(-1)^s C_k^s}{k-s+m}$. Аналогично

это равенство получается для $p = 2t + 1$. Таким образом, (13) верно для любого $p = \overline{0, k}$.

Лемма доказана.

Лемма 7. Для любого натурального числа k $\sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n C_k^n}{2(k-n)+3} \neq 0$. (14)

Доказательство. Используя формулу бинома Ньютона и свойство биномиальных коэффициентов $C_k^n = C_k^{k-n}$, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n C_k^n}{2(k-n)+3} &= (-1)^k \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n C_k^n}{2n+3} = \frac{(-1)^k}{2} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n C_k^n}{n+\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{(-1)^k}{2} \sum_{n=0}^k (-1)^n C_k^n \int_0^1 t^{n+\frac{1}{2}} dt = \frac{(-1)^k}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^k dt \neq 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 8. Для любого натурального числа k и $p = \overline{0, k-2}$ справедливо

$$\sum_{s=0}^{\left[\frac{k-p}{2} \right]} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2(k-s)+3} \neq 0. \quad (15)$$

Доказательство. Покажем, что среди знаменателей слагаемых суммы в (15), то есть во множестве $M = \{2 \left(k - \left[k - \frac{p}{2} \right] \right) + 3, \dots, 2k+1, 2k+3\}$, содержится, по крайней мере, одно простое число.



Согласно постулату Берграна [5], для любого натурального числа $n > 3$ существует простое число q такое, что $n < q < 2(n-1)$. Возьмем $n = k + 3$, тогда $2(n-1) = 2k + 4 > 2k + 3$. Следовательно, среди нечетных чисел множества $M_0 = \{n+1, n+2, \dots, 2k+3\}$ есть простое число q . Заметим, что при любых $p = 0, k-2$ все нечетные числа M_0 содержатся во множестве M . Тогда $q \in M$ и существует число s_0 , позволяющее представление вида $q = 2(k-s_0) + 3$. Заметим также, что $2q \notin M$.

Рассмотрим $A \equiv (-1)^{s_0} C_k^{s_0} C_{2(k-s_0)}^p$. Так как $2(k-s_0) < q$ и $k < n < q$, то

$$C_{2(k-s_0)}^p = \frac{2(k-s_0)(2(k-s_0)-1) \dots (2(k-s_0)-p+1)}{p!} \text{ и } C_k^{s_0} = \frac{k(k+1) \dots (k-s_0+1)}{s_0!}$$

не делятся на q , то НОД $(A, q) = 1$. Обозначим:

$$D = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq s_0}}^k (2(k-i) + 3) = (2k+3) \dots (2(k-s_0)+5)(2(k-s_0)+1) \dots 3,$$

тогда, так как $2q \notin M$, НОД $(D, q) = 1$.

Предположим, что $S = \sum_{\substack{s=0 \\ s \neq s_0}}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2(k-s)+3} = 0 \in \mathbb{Z}$, тогда $D \cdot S = 0 \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} D \cdot S &= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq s_0}}^k (2(k-i) + 3) \cdot \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2(k-s)+3} = \\ &= \sum_{\substack{s=0 \\ s \neq s_0}}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p (2k+3) \dots (2(k-s_0)+5)(2(k-s_0)+1) \dots 3}{2(k-s)+3} + \\ &+ \frac{(-1)^{s_0} C_k^{s_0} C_{2(k-s_0)}^p (2k+3) \dots (2(k-s_0)+5)(2(k-s_0)+1) \dots 3}{2(k-s)+3}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое (сумма) есть целое число, так как знаменатель каждого слагаемого этой суммы сократится с соответствующей скобкой числителя, а второе слагаемое есть $\frac{AD}{q} \notin \mathbb{Z}$ (так как НОД $(AD, q) = 1$ и $2q \notin M$), то есть $D \cdot S \notin \mathbb{Z}$, что противоречит предположению $D \cdot S = 0 \in \mathbb{Z}$, следовательно, $S \neq 0$.

Лемма доказана.

Лемма 9. Если $G(\xi, \eta)$ – функция Грина дифференциального оператора, порожденного дифференциальным выражением $l(y) = (-1)^{k+1} y^{2k+2}(t) + y(t)$ и краевыми условиями: $y^{(r)}(a) = y^{(r)}(b) = 0$,

$r = k+1, \dots, 2k+1$, тогда при $p = \overline{0, k-2} \left\| \left(G_{\xi}^{(p+2)} \right)_{\eta}^{(p+2)}(x, x) \right\|_C \neq 0$.

Доказательство следует из соотношения

$$\left\| \left(G_{\xi}^{(p)} \right)_{\eta}^{(p)}(x, x) \right\|_C^{1/2} = \sup \left\{ \left\| u^{(p)}(x) \right\|_C : u(x) \in M_2^{k+1}[a, b] \right\}, \quad p = 0, 1, \dots, k,$$

полученного в [6]. Для произвольного k рассмотрим функцию $u(x) = x^k \in M_2^{k+1}$. Заметим, что $\left\| u^{(p)} \right\|_C \neq 0$,

следовательно, $\left\| \left(G_{\xi}^{(p)} \right)_{\eta}^{(p)}(x, x) \right\|_C \neq 0, \quad p = \overline{0, k}$. Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма доказана.

Следующая теорема даёт решение задачи Колмогорова–Никольского.

Теорема 1. Имеют место асимптотические по α при $\alpha \rightarrow 0$ представления:

$$\Delta_1^{(k)}(T_{\alpha k}, M_2^{k+1}) = \sqrt{R_{kk}} \alpha^{1/2} + O(\alpha^{7/2}), \quad (16)$$

$$\Delta_1^{(k-1)}(T_{\alpha k}, M_2^{k+1}) = \sqrt{R_{kk-1}} \alpha^{3/2} + O(\alpha^{5/2}), \quad (17)$$

$$\Delta_1^{(k-2)}(T_{\alpha k}, M_2^{k+1}) = \sqrt{Q_{kk-2}} \alpha^2 + O(\alpha^3), \quad (18)$$



$$\Delta_1^{(p)}(T_{\alpha k}, M_2^{k+1}) = \sqrt{Q_{kp}} \alpha^2 + O(\alpha^4), \quad p = \overline{0, k-3}, \quad (19)$$

где

$$R_{kk} = \frac{(-1)^k A_k}{2(k+1)} - 2(k!)^2 A_k^2 \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} (-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^k \times$$

$$\times \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^{n+k} C_k^n C_{4k-2n+2}^k}{(4k-2n-2s+3)} \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{(-1)^i}{(2k+1-i)! (2(k-n)+i+1)}, \quad (20)$$

$$R_{kk-1} = \frac{(-1)^{k+1} A_k}{12(k+1)(k+2)} - \frac{A_k^2}{k(k+1)^2} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{k-1}}{2(k-s)+3} -$$

$$- 2((k-1)!)^2 A_k^2 \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} (-1)^{s+k} C_k^s C_{2(k-s)}^{k-1} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n C_k^n C_{4k-2n+2}^{k-1}}{4k-2n-2s+5} \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{(-1)^i}{(2k+1-i)! (2(k-n)+i+1)}, \quad (21)$$

$$Q_{kp} = \frac{(-1)^p 2A_k^2}{(p+1)(p+2)} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2(k-s)+3} \cdot \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n C_k^n}{2(k-n)+3} \cdot \left\| \left(G_{\xi}^{(p+2)} \right)_\eta^{(p+2)}(x, x) \right\|, \quad (22)$$

R_{kk}, R_{kk-1}, Q_{kp} отличны от нуля.

Доказательство основано на представлениях (5), (6) и (7).

Применив формулу бинорма Ньютона, запишем ядро оператора $T_{\alpha k}$ в виде $p = \overline{0, k-2}$,

$$K_{\alpha k}(x, \xi) = \begin{cases} a_k \sum_{n=0}^k (-1)^n C_k^n \alpha^{2n} (\xi - x)^{2(k-n)}, & \xi \in [x - \alpha, x + \alpha] \\ 0, & \xi \in [a, x - \alpha] \cup [x + \alpha, b], \end{cases} \quad (23)$$

тогда

$$\frac{\partial^p K_{\alpha k}(x, \xi)}{\partial x^p} = \begin{cases} a_k p! \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} (-1)^{n+p} C_k^n C_{2(k-n)}^p \alpha^{2n} (\xi - x)^{2(k-n)-p}, & \xi \in [x - \alpha, x + \alpha] \\ 0, & \xi \in [a, x - \alpha] \cup [x + \alpha, b]. \end{cases} \quad (24)$$

Заметим, что

$$\sum_{l=1}^{2(k+1)} \lambda_l^s = \begin{cases} 0, & s = 0, 1, \dots, 2k+1, 2k+3, \dots, 4k+3, \\ (-1)^k \cdot 2(k+1), & s = 2k+2, \\ 2(k+1), & s = 4k+4. \end{cases} \quad (25)$$

Подставляя (23) и (7) в (6), разлагая экспоненциальные функции в ряды, подсчитывая интегралы, учитывая (25) и выделяя главные части асимптотик по α , получаем

$$g(x, \xi, \alpha) = (-1)^{k+1} \left(\frac{A_k}{2} \sum_{n=0}^k (-1)^n C_k^n \sum_{i=0}^k \frac{(\xi - x)^{2(k-i)} \alpha^{2i+1}}{(2(k-i))! (2i+1)! (k-n+i+1)} + \right.$$

$$+ \frac{A_k (-1)^{k+1}}{2(k+1)} \sum_{l=1}^{2(k+1)} \sum_{m=1}^{2(k+1)} c_{ml} \sum_{n=0}^k (-1)^n C_k^n e^{\lambda_m \xi - \lambda_l x} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_l^{2i+1} \alpha^{2i}}{(2i)! (2(k-n)+2i+1)} +$$

$$+ A_k \sum_{n=0}^k (-1)^n C_k^n \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{(-1)^i (\xi - x)^{2(k-n)+2(k+1)} \alpha^{2n}}{(2k+1-i)! (2(k-n)+i+1) \alpha^{2k+1}} \pm \frac{(\xi - x)^{2k+1}}{2(2k+1)!} \Bigg) +$$

$$+ O((\xi - x)^{4k+3}) + O((\xi - x)^{4k+1} \alpha^2) + \dots + O(\alpha^{4k+3}),$$

знак «+» соответствует $\zeta < x$; знак «-» — $\zeta > x$; тогда

$$\frac{\partial^p g(x, \xi, \alpha)}{\partial x^p} = (-1)^{k+1} \left(\frac{A_k}{2} \sum_{n=0}^k (-1)^n C_k^n \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i p! (\xi - x)^{2(k-i)-p} C_{2(k-i)}^p \alpha^{2i+1}}{(2(k-i))! (2i+1)! (k-n+i+1)} + \right.$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{A_k (-1)^{k+1}}{2(k+1)} \sum_{l=1}^{2(k+1)} \sum_{m=1}^{2(k+1)} c_{ml} \sum_{n=0}^k (-1)^n C_k^n e^{\lambda_m \xi - \lambda_l x} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \lambda_l^{2i+1+p} \alpha^{2i}}{(2i)!(2(k-n)+2i+1)} + \\
 & + A_k \sum_{n=0}^k (-1)^n C_k^n \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{(-1)^{i+p} p! (\xi-x)^{2(k-n)+2(k+1)-p} C_{4k-2n+2}^p \alpha^{2n}}{(2k+1-i)! i! (2(k-n)+i+1) \alpha^{2k+1}} \pm \\
 & \pm \frac{(-1)^p (\xi-x)^{2k+1-p}}{2(2k+1-p)!} + O((\xi-x)^{4k+3-p}) + O((\xi-x)^{4k+1-p} \alpha^2) + \dots + O(\alpha^{4k+3-p}),
 \end{aligned} \tag{27}$$

a

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial^{2p} g(x, \xi, \alpha)}{\partial x^p \partial \xi^p} \right|_{\xi=x} & = \frac{(-1)^{k+1} A_k}{2} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^{n+p} C_k^n \alpha^{2(k-p)+1}}{(2(k-p)+1)!(2k-n-p+1)} + \\
 & + \frac{A_k}{2(k+1)} \sum_{l=1}^{2(k+1)} \sum_{m=1}^{2(k+1)} c_{ml} \sum_{n=0}^k (-1)^n C_k^n e^{(\lambda_m - \lambda_l)x} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \lambda_m^p \lambda_l^{2i+1+p} \alpha^{2i}}{(2i)!(2(k-n)+2i+1)} + \\
 & + O(\alpha^{2(2k-p)+3}).
 \end{aligned} \tag{28}$$

Раскладывая в ряд Тейлора экспоненциальную функцию, получим

$$\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} e^{\lambda_m \xi - \lambda_l x} (\xi-x)^{2(k-s)-p} d\xi = e^{x(\lambda_m - \lambda_l)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_m^j \alpha^{j+2(k-s)-p+1} (1+(-1)^{j-p})}{j!(j+2(k-s)-p+1)}. \tag{29}$$

Подставляя (24), (27) и (28) в (5) и учитывая (29), имеем:

$$(\Delta_1^{(p)})^2 = R_{k,p} \alpha^{2k-2p+1} + \max_{a \leq x \leq b} H_{k,p\alpha}(x) + O(\alpha^{4k-2p+3}), \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned}
 R_{k,p} & = (-1)^{k+1} \left(2(p!)^2 A_k^2 \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} (-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n C_k^n C_{4k-2n+2}^p}{6k-2n-2s-2p+3} \times \right. \\
 & \times \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{(-1)^i}{(2k+1-i)! i! (2(k-n)+i+1)} + p! A_k^2 \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} (-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p \sum_{n=0}^k (-1)^n C_k^n \times \\
 & \times \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} \frac{1}{(2i+1)!(k-n+i+1)(2(k-i)-p)!(4k-2s-2i-2p+1)} - \\
 & \left. - \frac{p! A_k}{2(2k+1-p)!} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2k-s-p+1} - \frac{A_k}{2(2(k-p)+1)!} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^{n+p} C_k^n}{2k-n-p+1} \right) \equiv \\
 & \equiv (-1)^{k+1} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4),
 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
 H_{k,p\alpha}(x) & = (-1)^{k+1} \left(\frac{p! A_k^2}{2(k+1)} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} (-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p \sum_{l=1}^{2(k+1)} \sum_{m=1}^{2(k+1)} c_{ml} e^{x(\lambda_m - \lambda_l)} \times \right. \\
 & \times \sum_{n=0}^k (-1)^n C_k^n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_l^{2i+1+p}}{(2i)!(2(k-n)+2i+1)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_m^j \alpha^{2i+j-p}}{j!(j+2(k-s)-p+1)} \times \\
 & \times (1+(-1)^{j-p}) - \frac{A_k}{2(k+1)} \sum_{l=1}^{2(k+1)} \sum_{m=1}^{2(k+1)} c_{ml} e^{x(\lambda_m - \lambda_l)} \times \\
 & \left. \times \sum_{n=0}^k (-1)^{n+p} C_k^n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_l^{2i+1+p} \lambda_m^p \alpha^{2i}}{(2i)!(2(k-n)+2i+1)} \right) \equiv (-1)^{k+1} (J_1 + J_2).
 \end{aligned} \tag{32}$$



Заметим, что по лемме 6 при $m = k - p + 1$ в (31)

$$I_3 = -\frac{p! A_k}{2(2k+1-p)!} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2k-s-p+1} = -\frac{p! A_k (p+1) \dots (2k-p+1) (-1)^p}{2(2k+1-p)! (2k-2p+1)!} \times \\ \times \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n C_k^n}{2k-n-p+1} = \frac{A_k}{2(2(k-p)+1)!} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^{n+p} C_k^n}{2k-n-p+1} = I_4.$$

Учитывая это, рассмотрим в (31) R_{k_p} при $p = k$ и $p = k - 1$.

Пусть $p = k$. По лемме 4 $I_3 = I_4 = -\frac{A_k}{2(k+1)}$.

$$I_2 = A_k^2 \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-k}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2(k-s)+1} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n C_k^n}{k-n+1} + k! A_k^2 \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-k}{2} \rfloor} (-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p \times \\ \times \sum_{n=0}^k (-1)^n C_k^n \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k-k}{2} \rfloor} \frac{1}{(2i+1)!(k-n+i+1)(k-2i)!(2k-2s-2i+1)} \equiv I_{21} + I_{22}.$$

В I_{21} сумма по s по лемме 4 равна $\frac{(-1)^k}{2A_k}$, а сумма по n по лемме 5 при $m = 1$ равна $\frac{(-1)^k}{2A_k}$, следовательно, $I_{21} = \frac{A_k}{2(k+1)}$. Рассмотрим I_{22} . Пусть $k = 2t$, а $j = t - i$, тогда при $i = 1, \dots, t, j = t - 1, \dots, 0$ и $\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-k}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^k}{2(k-s)-2i+1} = \sum_{s=0}^t \frac{(-1)^s C_{2t}^s C_{2(2t-s)}^{2t}}{2t-2s+2j+1} = 0$. Это вытекает из доказательства леммы 2 при $p = k$. Ана-

логично при $k = 2t - 1$ сумма по s равна нулю. Следовательно, $I_{22} = 0$ и $I_2 = I_{21} = \frac{A_k}{2(k+1)} = -I_3$ по лемме 4, то есть $R_{kk} = I_1 + I_2 - 2I_2 = I_1 - I_2$, откуда следует (20).

Пусть $p = k - 1$. По лемме 4 $I_3 = I_4 = \frac{A_k}{3!(k+1)(k+2)}$. Рассмотрим $I_2 = \sum_{i=0}^0 + \sum_{i=1}^1 + \sum_{i=2}^{\lfloor \frac{k-k-1}{2} \rfloor}$. По лемме 5

$$\sum_{i=0}^0 = \frac{A_k^2}{k(k+1)} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-k-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{k-1}}{2(k-s)+3} \times \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n C_k^n}{k-n+1} = \frac{(-1)^k A_k^2}{k(k+1)^2} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-k-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{k-1}}{2(k-s)+3}.$$

В $\sum_{i=1}^1 = \frac{A_k^2}{3!} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-k-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{k-1}}{2(k-s)+1} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n C_k^n}{k-n+2}$ сумма по s по лемме 4 и по определению A_k равна $\frac{(-1)^{k+1}}{2A_k}$,

а сумма по n по лемме 5 равна $\frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)}$, то есть $\sum_{i=1}^1 = -\frac{A_k}{2 \cdot 3!(k+1)(k+2)} = -I_3 = -I_4$. Аналогично,

как и $\sum_{i=2}^{\lfloor \frac{k-k}{2} \rfloor}$ при $p = k$ $\sum_{i=2}^{\lfloor \frac{k-k-1}{2} \rfloor} = 0$. Следовательно, $I_2 = \frac{(-1)^k A_k^2}{k(k+1)^2} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-k-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{k-1}}{2(k-s)+3} - I_3$.

Таким образом, $R_{k,k-1} = I_1 + \frac{(-1)^k A_k^2}{k(k+1)^2} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-k-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{k-1}}{2(k-s)+3} + I_3$, откуда следует (21).

Преобразуем $H_{kpa}(x)$ из (32). Рассмотрим отдельно первое слагаемое J_1 . Все слагаемые суммы по j при $j < p$ равны нулю по лемме 2. При $j = p$ по лемме 4 и определению A_k имеем:

$$\frac{A_k^2 \cdot 2}{2(k+1)} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2(k-s)+1} \sum_{l=1}^{2(k+1)} \sum_{m=1}^{2(k+1)} c_{ml} e^{x(\lambda_m - \lambda_l)} \sum_{n=0}^k (-1)^n C_k^n \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_l^{2i+1+p} \lambda_m^p \alpha^{2i}}{(2i)!(2(k-n)+2i+1)} = \\ = \frac{(-1)^p A_k}{2(k+1)} \sum_{l=1}^{2(k+1)} \sum_{m=1}^{2(k+1)} c_{ml} e^{x(\lambda_m - \lambda_l)} \times \sum_{n=0}^k (-1)^n C_k^n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_l^{2i+1+p} \lambda_m^p \alpha^{2i}}{(2i)!(2(k-n)+2i+1)} = -J_2.$$



Слагаемые при $j = p + 2q - 1$, где q – натуральное число, равны нулю, так как $(1 + (-1)^{j-p}) = 1 + (-1)^{p+2q-1-p} = 0$, поэтому

$$\sum_{j=p+1}^{\infty} \frac{\lambda_m^j \alpha^{2i+j-p} (1 + (-1)^{j-p})}{j!(j+2(k-s)-p+1)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_m^{p+2j} \alpha^{2i+2j}}{(2j+p)!(2j+2(k-s)+1)} = \frac{\lambda_m^{p+2} \alpha^{2i+2}}{(2+p)!(2(k-s)+3)} + O(\alpha^{2i+4}).$$

Заметим также, что из вида функции $G(\xi, \eta)$ (7) имеем:

$$(G_{\xi}^{p+2})_{\eta}^{p+2}(\xi, \eta) \Big|_{\substack{\xi=x \\ \eta=x}} = \frac{(-1)^p}{4(k+1)} \left(\sum_{l=1}^{2(k+1)} \sum_{m=1}^{2(k+1)} c_{ml} e^{x(\lambda_m - \lambda_l)} \lambda_l^{p+3} \lambda_m^{p+2} \pm \sum_{l=1}^{2(k+1)} \lambda_l^{2p+5} \right),$$

причем в последней сумме степень λ_1 нечетная, следовательно, по (25) эта сумма равна нулю, то есть

$$(G_{\xi}^{p+2})_{\eta}^{p+2}(\xi, \eta) \Big|_{\substack{\xi=x \\ \eta=x}} = \frac{(-1)^p}{4(k+1)} \sum_{l=1}^{2(k+1)} \sum_{m=1}^{2(k+1)} c_{ml} \cdot e^{x(\lambda_m - \lambda_l)} \lambda_l^{p+3} \lambda_m^{p+2}. \quad (33)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} H_{k,p}(x) &= \frac{(-1)^{k+1} p! A_k^2}{k+1} \sum_{s=0}^{[k-\frac{p}{2}]} (-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p \sum_{l=1}^{2(k+1)} \sum_{m=1}^{2(k+1)} c_{ml} e^{x(\lambda_m - \lambda_l)} \times \\ &\times \sum_{n=0}^k (-1)^n C_k^n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^{2i+1+p}}{(2i)!(2(k-n)+2i+1)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_m^{p+2j} \alpha^{2i+2j}}{(2j+p)!(2j+2(k-s)+1)} = \\ &= \frac{(-1)^{k+1} A_k^2}{2(k+1)} \sum_{s=0}^{[k-\frac{p}{2}]} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{(p+1)(p+2)(2(k-s)+3)} \sum_{l=1}^{2(k+1)} \sum_{m=1}^{2(k+1)} c_{ml} e^{x(\lambda_m - \lambda_l)} \times \\ &\times \lambda_l^{p+3} \lambda_m^{p+2} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n C_k^n}{2(k-n)+3} \alpha^4 + O(\alpha^6) = \frac{2(-1)^{k+p+1} A_k^2}{(p+1)(p+2)} \sum_{s=0}^{[k-\frac{p}{2}]} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2(k-s)+3} \times \\ &\times \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n C_k^n}{2(k-n)+3} \left((G_{\xi}^{p+2})_{\eta}^{p+2}(\xi, \eta) \Big|_{\substack{\xi=x \\ \eta=x}} \right) \cdot \alpha^4 + O(\alpha^6) \equiv \tilde{Q}_{k,p}(x) \alpha^4 + O(\alpha^6). \end{aligned} \quad (34)$$

Обозначим

$$Q_{k,p} = \max_{a \leq x \leq b} \tilde{Q}_{k,p}(x) = \frac{2(-1)^{k+p+1} A_k^2}{(p+1)(p+2)} \sum_{s=0}^{[k-\frac{p}{2}]} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^p}{2(k-s)+3} \times \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n C_k^n}{2(k-n)+3} \left\| \left((G_{\xi}^{p+2})_{\eta}^{p+2}(x, x) \right) \right\|_C.$$

Отсюда и из (31) при достаточно малых α получаем

$$(\Delta_1^{(p)})^2 = R_{k,p} \alpha^{2k-2p+1} + Q_{k,p} \alpha^4 + O(\alpha^6) + O(\alpha^{4k-2p+3}). \quad (35)$$

В (35) первое слагаемое будет главным при $p = k$ и $p = k - 1$, в остальных случаях ($p = \overline{0, k-2}, k = 2, 3, \dots$) главным является второе слагаемое, откуда следуют представления (16) – (19).

Из лемм 7, 8 и 9 следует, что $Q_{k,p} \neq 0$. Доказательство отличия от нуля констант R_{kk} и R_{kk-1} приведем позже, поскольку оно опирается на теорию некорректных задач.

2. Пусть теперь функция $f(x)$ задана своим δ -приближением в среднеквадратичной метрике, то есть вместо $f(x)$ нам дана $f_{\delta}(x)$: $\|f - f_{\delta}\|_{L_2} < \delta$. Известно [1], что если $f(x) \in C^k[a, b]$, то можно так выбирать согласования параметра регуляризации α с погрешностью δ , что $\|T_{\alpha(\delta)k}^p f_{\delta} - f^{(p)}\|_{C_{\epsilon}} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ ($p = \overline{0, k}$).

Рассмотрим при $k = 1, 2, \dots, p = \overline{0, k}$ величины

$$\Delta(\delta, T_{\alpha k}^p, M_2^{k+1}) = \sup \left\{ \|T_{\alpha k}^p f_{\delta} - f^{(p)}\|_{C_{\epsilon}} : f(x) \in M_2^{k+1}[a, b], \|f - f_{\delta}\|_{L_2} < \delta \right\} \quad (36)$$

характеризующие погрешность приближения к $f^{(p)}(x)$ при неточном задании функции $f(x)$. Поставим задачу получения точных по порядку оценок величин $\Delta(\delta, T_{\alpha k}^p, M_2^{k+1})$. В [7] эта задача решена для случаев $k = 1, p = 0, 1$.

Г.В. Хромовой [8] предложен метод нахождения таких оценок, поскольку задачу восстановления функции по среднеквадратичному приближению можно интерпретировать как задачу решения урав-



нения первого рода с оператором вложения из $C^k[a, b]$ в $L_2[a, b]$ [9]. Согласно этому методу, сначала нужно получить асимптотические представления (4) для $\Delta_1^{(p)}(T_{\alpha k}, M_2^{k+1})$ и аналогичные представления для $\|T_{\alpha k}^p\|_{L_2 \rightarrow C_\varepsilon}$ ($p = 0, k$):

$$\|T_{\alpha k}^p\|_{L_2 \rightarrow C_\varepsilon} = \varphi_{2k}^{(p)}(\alpha) + \psi_{2k}^{(p)}(\alpha), \quad \psi_{2k}^{(p)}(\alpha) = o(\varphi_{2k}^{(p)}(\alpha)) \text{ при } \alpha \rightarrow 0. \quad (37)$$

После следует найти согласования $\alpha = \alpha(\delta)$ из условий:

$$\varphi_{1k}^{(p)}(\alpha) + \delta \varphi_{2k}^{(p)}(\alpha) \rightarrow \inf_{\alpha}. \quad (38)$$

Найденные выражения $\alpha = \alpha(\delta)$ и представления (4), (37) необходимо подставить в двусторонние оценки:

$$\frac{1}{2} \Phi \leq \Delta(\delta, T_{\alpha k}^p, M_2^{k+1}) \leq \Phi, \text{ где } \Phi = \Delta_1^{(p)}(T_{\alpha k}, M_2^{k+1}) + \delta \|T_{\alpha k}^p\|_{L_2 \rightarrow C_\varepsilon}, \quad (39)$$

результатом чего будут точные по порядку δ оценки погрешностей задачи восстановления, имеющие тот же порядок, что и величины $\inf_{\alpha} \Delta(\delta, T_{\alpha k}^p, M_2^{k+1})$ [8].

Теорема 2. Справедливы равенства:

$$\|T_{\alpha k}^k\|_{L_2 \rightarrow C_\varepsilon} = P_{kk} \alpha^{\frac{-2k-1}{2}}, \quad \|T_{\alpha k}^{k-1}\|_{L_2 \rightarrow C_\varepsilon} = P_{kk-1} \alpha^{\frac{-2k+1}{2}}, \quad (40)$$

$$\|T_{\alpha k}^p\|_{L_2 \rightarrow C_\varepsilon} = P_{kp} \alpha^{\frac{-2p-1}{2}}, \quad p = \overline{0, k-2}, \quad (41)$$

где

$$P_{kk} = \sqrt{(-1)^k (2k)! A_k},$$

$$P_{kk-1} = \left((-1)^k A_k k (2k-2)! + \frac{4(2k-1)! A_k^2}{k+1} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-k-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{k-1}}{2(k-s)+3} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$P_{kp} = \left(2(p! A_k)^2 \sum_{n=0}^{k-p} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{n+s} C_k^n C_k^s C_{2(k-s)}^p C_{2(k-n)}^p}{2(k-n)+2(k-s)-2p+1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad p = \overline{0, k-2}.$$

Доказательство. Известно [1], что

$$\|T_{\alpha k}^p\|_{L_2 \rightarrow C_\varepsilon} = \max_{a+\varepsilon \leq x \leq b-\varepsilon} \left(\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \left(\frac{d^p K_{\alpha k}(x, t)}{dx^p} \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя (24), получаем

$$\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \left((K_{\alpha k}(x, t))_x^{(p)} \right)^2 dt = 2 A_k^2 (p!)^2 \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{n+s} C_k^n C_k^s C_{2(k-s)}^p C_{2(k-n)}^p}{2(k-n)+2(k-s)-2p+1} \alpha^{-2p-1}.$$

Пусть $p = 2t, t \geq 1$, тогда

$$\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{n+s} C_k^n C_k^s C_{2(k-s)}^p C_{2(k-n)}^p}{2(k-n)+2(k-s)-2p+1} = \sum_{n=0}^{k-t} \sum_{s=0}^{k-t} \frac{(-1)^{n+s} C_k^n C_k^s C_{2(k-s)}^{2t} C_{2(k-n)}^{2t}}{2(k-n)+2(k-s)-4t+1}.$$

Слагаемые при $n = k - t: (-1)^{k-t} C_k^t \sum_{s=0}^{k-t} \frac{(-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^{2t}}{2(k-s)-2t+1} = 0$, так как эта сумма соответствует случаю $j = 0$ в доказательстве леммы 2. Аналогично обращаются в нуль все суммы слагаемых при $n = k - t - 1, \dots, n = k - 2t + 1$, соответствующие $j = 1, \dots, j = t - 1$ в доказательстве леммы 2. Следовательно, $\sum_{n=k-2t+1}^{k-t} = 0$, то $\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} = \sum_{n=0}^{k-2t} = \sum_{n=0}^{k-p}$. Таким образом, при $p = 2t, t \geq 1$:

$$\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{n+s} C_k^n C_k^s C_{2(k-s)}^p C_{2(k-n)}^p}{2(k-n)+2(k-s)-2p+1} = \sum_{n=0}^{k-p} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{n+s} C_k^n C_k^s C_{2(k-s)}^p C_{2(k-n)}^p}{2(k-n)+2(k-s)-2p+1}. \quad (42)$$



Аналогично (42) получается для $p = 2t - 1, t \geq 1$. При $p = 0$ равенство очевидно. Получаем

$$\|T_{\alpha k}^p\|_{L_2 \rightarrow C_\varepsilon} = \left(2A_k^2 (p!)^2 \sum_{n=0}^{k-p} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-p}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{n+s} C_k^n C_k^{2s} C_{2(k-s)}^p C_{2(k-n)}^p}{2(k-n) + 2(k-s) - 2p + 1} \alpha^{-2p-1} \right)^{\frac{1}{2}},$$

откуда следует (41). Подставляя в это выражение $p = k$ и $p = k - 1$ и применяя лемму 4, получаем (40). Теорема доказана.

Теорема 3. Справедливы следующие двусторонние оценки:

$$\frac{1}{2}(F_{kp} \delta^{\beta_p} + \Theta_p) \leq \Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)k}^p, M_2^{k+1}) \leq F_{kp} \delta^{\beta_p} + \Theta_p, \quad p = \overline{0, k}, \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(\delta) &= C(k, p) \delta^{\nu_p} \\ C(k, k) &= \frac{(2k+1)P_{kk}}{\sqrt{R_{kk}}}, \quad C(k, k-1) = \frac{(2k-1)P_{kk-1}}{3\sqrt{R_{kk-1}}}, \quad \nu_k = \nu_{k-1} = \frac{1}{k+1}, \\ C(k, p) &= \frac{(2p+1)P_{kp}}{4\sqrt{Q_{kp}}}, \quad \nu_p = \frac{2}{2p+5}, \quad p = \overline{0, k-2}, \\ \beta_k &= \frac{1}{2k+2}, \quad \beta_{k-1} = \frac{3}{2k+2}, \quad \beta_p = \frac{4}{2p+5}, \quad p = \overline{0, k-2}, \\ F_{kk} &= (2k+2)P_{kk}^{\beta_k} \left(\frac{\sqrt{R_{kk}}}{2k+1} \right)^{\frac{2k+1}{2k+2}}, \quad F_{kk-1} = (2k+2) \left(\frac{P_{kk-1}}{3} \right)^{\beta_k} \left(\frac{\sqrt{R_{kk-1}}}{2k-1} \right)^{\frac{3(2k-1)}{2k+2}}, \\ F_{kp} &= (2p+5) \left(\frac{P_{kp}}{4} \right)^{\beta_p} \left(\frac{\sqrt{Q_{kp}}}{2p+1} \right)^{\frac{2p+1}{2p+5}}, \quad p = \overline{0, k-2}, \\ \Theta_p &= O(\delta^{\gamma_p}), \quad p = \overline{0, k} \\ \gamma_k &= \frac{7}{2k+2}, \quad \gamma_{k-1} = \frac{5}{2k+2}, \quad \gamma_{k-2} = \frac{6}{2k+1}, \quad \gamma_p = \frac{8}{2p+5}, \quad p = \overline{0, k-3}, \end{aligned}$$

R_{kk}, R_{kk-1}, Q_{kp} ($p = \overline{0, k-2}$), P_{kp} ($p = \overline{0, k}$) определены в теоремах 1 и 2. Оценки $\Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)k}^k, M_2^{k+1})$ и $\Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)k}^{k-1}, M_2^{k+1})$ являются оптимальными по порядку.

Доказательство. При получении оценок в утверждении теоремы применяется метод Хромовой. Асимптотические представления (4) и (37) для величин $\Delta_1^{(p)}(T_{\alpha k}, M_2^{k+1})$ и $\|T_{\alpha k}^p\|_{L_2 \rightarrow C_\varepsilon}$ ($p = \overline{0, k}$) даются в теоремах 1 и 2. Из условия (38) получаем согласования параметра регуляризации α с погрешностью исходных данных δ : при $p = k$:

$$\alpha(\delta) = \left(\frac{(2k+1)P_{kk}\delta}{\sqrt{R_{kk}}} \right)^{\frac{1}{k+1}}, \quad p = k-1: \alpha(\delta) = \left(\frac{(2k-1)P_{kk-1}\delta}{3\sqrt{R_{kk-1}}} \right)^{\frac{1}{k+1}}, \quad p = \overline{0, k-2}: \alpha(\delta) = \left(\frac{(2p+1)P_{kp}\delta}{4\sqrt{Q_{kp}}} \right)^{\frac{2}{2p+5}}.$$

Подставляя полученные выражения в (39), имеем (43).

Известно, что метод регуляризации А.Н. Тихонова на классах, задаваемых в виде $M = BS_R$, где B – вполне непрерывный оператор, S_R – шар в некотором гильбертовом пространстве с радиусом R , является оптимальным по порядку [10]. Поскольку класс функций $M_2^{k+1}[a, b]$ указанного вида, где B – оператор вложения из $W_2^{k+1}[a, b]$ в $C_\varepsilon^k[a, b]$, а $R = 1$, то утверждение справедливо и в нашем случае.

Сравнивая оценки, полученные в задаче восстановления функции и ее производных методом Тихонова [8], с оценками (43) получаем утверждение теоремы.

Теорема доказана.



Теперь покажем, что константы R_{kk} и R_{kk-1} из теоремы 1 отличны от нуля. Предположим противное: $R_{kk} = R_{kk-1} = 0$. Тогда величины $\Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)k}^k, M_2^{k+1})$ и $\Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)k}^{k-1}, M_2^{k+1})$ будут иметь порядок меньший, чем $\alpha^{1/2}$ в первом и $\alpha^{3/2}$ во втором случаях. Аналогично, как и в доказательстве теоремы 3, выбирая соответствующие согласования $\alpha = \alpha(\delta)$ и подставляя их в двусторонние оценки (39), придем к порядкам $\Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)k}^p, M_2^{k+1})$ ($p = k, k-1$), меньшим оптимальных, что противоречит определению оптимальности и последнему утверждению теоремы 3.

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1).

Библиографический список

1. Хромова Г.В. О дифференцировании функций, заданных с погрешностью // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 1984. Вып. 6. С. 53–58.
2. Хромова Г.В. Об оценках погрешности приближенных решений уравнений первого рода // Докл. АН. 2001. Т. 378, № 5. С. 605–609.
3. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций. М.: Наука, 1977. 508 с.
4. Хромова Г.В., Шишкова Е.В. О скорости сходимости приближений функции вместе с её производной // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 2003. Вып. 5. С. 136–138.
5. Чебышев П.Л. Полн. собр. соч. М.; Л., Изд-во Академии Наук СССР 1946. Т. 1. С. 433.
6. Хромова Г.В. О верхних гранях норм функций и их производных // Вестн. Моск. ун-та. 1998. № 2. С. 45–47.
7. Шишкова Е.В. О точных по порядку оценках погрешностей в задаче восстановления функции вместе с ее производной // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 2003. Вып. 2. С. 99–102.
8. Хромова Г.В. Оценки погрешностей приближенных решений уравнений первого рода в равномерной метрике // Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Саратов. 1998. 237 с.
9. Хромова Г.В. Задача восстановления и уравнения первого рода // Дифференциальные уравнения и вычисл. математика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 1976. Вып. 6, ч. 1. С. 83–87.
10. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория нелинейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.



МЕХАНИКА

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ В ЗАДАЧАХ О КОЛЕБАНИЯХ ТОЛСТОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ–ПОЛОСЫ

П.Ф. Недорезов

Саратовский государственный университет,
кафедра математической теории упругости и биомеханики

Рассматривается вибрационный изгиб толстой пластинки-полосы при произвольном закреплении краев. В качестве исходных приняты уравнения трехмерной теории вязкоупругости, записанные в перемещениях. Понижение размерности краевой задачи выполняется методом сплайн-коллокации. Одномерная краевая задача решается численно методом дискретной ортогонализации. Отмечены некоторые новые эффекты, которые не могут быть описаны в рамках классической теории Кирхгофа.

Application of a Spline-Collocation Method to the Problems of Thick Viscoelastic Plate-Strip Vibrations

P.F. Nedorezov

Vibratory bend of a thick plate-strip with arbitrary edge fixing is considered. The equations of 3D viscoelastic theory in displacements are accepted as governing equations. Boundary problem dimensions reduction is realized with spline-collocation method. 1D boundary problem is solved numerically using discrete orthogonalization method. New effects that cannot be explained with the classic Kirhgof theory are mentioned.

Рассматриваются установившиеся колебания бесконечной в направлении y пластинки конечной ширины a и толщины h под действием распределенной по плоскости $z = -h/2$ нагрузки интенсивности $q(x, t)$

$$M = Mf + g(x) \int f(t) \nu(t) dt, \quad Mf = \int M(x, t) f(t) dt, \quad 0 \leq x \leq a \quad (1)$$

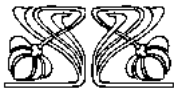
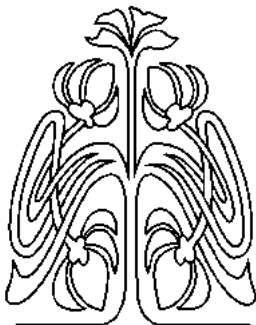
Предполагается, что способы закрепления краев $x = 0$ и $x = a$ в направлении оси y остаются неизменными. Тогда $\nu = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$, а остальные компоненты напряженно-деформированного состояния (НДС) не зависят от y .

Зависимости между ненулевыми компонентами напряжений и малых деформаций (механические свойства материала считаются не зависящими от температуры) определяются соотношениями линейного закона вязкоупругости

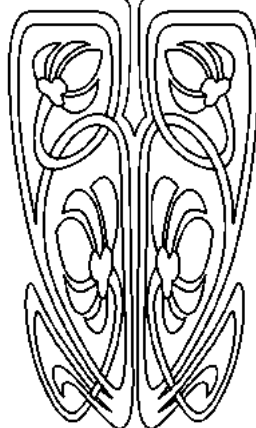
$$\begin{aligned} \sigma_x &= A \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \left((1-\nu) \frac{\partial u(x, z, \tau)}{\partial x} + \nu \frac{\partial w(x, z, \tau)}{\partial z} \right) d\tau \\ &\quad (x \Leftrightarrow z; u \Leftrightarrow w; \nu = \text{const}), \\ \tau_{xz} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \left(\frac{\partial u(x, z, \tau)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z, \tau)}{\partial x} \right) d\tau, \\ \sigma_y &= \nu(\sigma_x + \sigma_z), \end{aligned} \quad (2)$$

где обозначено $A = 1/(1+\nu)(1-2\nu)$.

Все характеристики НДС пластинки, соответствующие нагрузке (1), представляются в виде



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





$$V(x, z, t) = V^{(1)}(x, z) \cos \omega t + V^{(2)}(x, z) \sin \omega t.$$

Для составляющих $u^{(k)}(x, z)$ и $w^{(k)}(x, z)$ ($k = 1, 2$) проекций вектора смещения в работе [1] получена система уравнений, которая после введения безразмерных величин преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_k}{\partial \zeta^2} + 2h_0^2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_k}{\partial \xi^2} + \frac{h_0}{1-2\nu} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi \partial \zeta} - (-1)^k 2 \sum_{n=1}^2 \delta_{k+n-1} u_n = 0, \\ \frac{\partial^2 w_k}{\partial \zeta^2} + h_0^2 \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi^2} + \frac{h_0}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial \xi \partial \zeta} - (-1)^k \frac{1-2\nu}{1-\nu} \sum_{n=1}^2 \delta_{k+n-1} w_n = 0 \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\xi = x/a$, $\zeta = z/h$ – безразмерные переменные, $u_k(\xi, \zeta) = u^{(k)}(x, z)/h$ и $w_k(\xi, \zeta) = w^{(k)}(x, z)/h$ ($k = 1, 2$) – безразмерные составляющие проекций вектора смещения,

$$d_j = \frac{(1+\nu)E_j}{E_1^2 + E_2^2}, \delta_j = \rho \omega^2 h^2 d_j \quad (j = 1, 2), E_1 + iE_2 = \int_{-\infty}^t K(s) \exp(i\omega s) ds, E_3 = -E_1, \\ d_3 = -d_1, \delta_3 = -\delta_1.$$

В случае свободно опертых краев пластинки и нагрузки

$$q_0(x) = p_0 \sin \pi x, p_0 = \text{const} \quad (4)$$

рассмотренном в [1], [2], понижение размерности краевой задачи для системы (3) выполняется методом разделения переменных. Полученная одномерная задача решается численно методом дискретной ортогонализации. При более сложных, чем (4), законах изменения нагрузки или других способах закрепления переход от двумерных уравнений к одномерным можно осуществить методом сплайн-коллокации. Обзор работ, где применяется такой подход для решения разнообразных задач статики упругих пластинок и оболочек, приведен в [3].

Считая, что края пластинки закреплены, будем искать функции $u_k(\xi, \zeta)$ и $w_k(\xi, \zeta)$ ($k = 1, 2$) в виде

$$\begin{aligned} u_1(\xi, \zeta) = \sum_{j=0}^N \varphi_j(\xi) U_j(\zeta), \quad u_2(\xi, \zeta) = \sum_{j=0}^N \varphi_j(\xi) U_{j+N+1}(\zeta), \\ w_1(\xi, \zeta) = \sum_{j=0}^N \psi_j(\xi) W_j(\zeta), \quad w_2(\xi, \zeta) = \sum_{j=0}^N \psi_j(\xi) W_{j+N+1}(\zeta), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\varphi_j(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ подобраны так, чтобы тождественно выполнялись условия закрепления краев $\zeta = 0$ и $\zeta = 1$.

Например, если при $\zeta = 0, \zeta = 1$ должны выполняться условия $u = w = 0$ (жесткое закрепление), то функции $\varphi_j(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ выбираются в виде

$$\begin{aligned} \varphi_0(\xi) = \psi_0(\xi) = -4B_{3,-1}(\xi) + B_{3,0}(\xi), \quad \varphi_1(\xi) = \psi_1(\xi) = -B_{3,-1}(\xi) + B_{3,1}(\xi), \\ \varphi_j(\xi) = \psi_j(\xi) = B_{3,j}(\xi) \quad (j = 2, N-2), \quad \varphi_{N-1}(\xi) = \psi_{N-1}(\xi) = B_{3,N}(\xi) - B_{3,N+1}(\xi), \\ \varphi_N(\xi) = \psi_N(\xi) = B_{3,N}(\xi) - 4B_{3,N+1}(\xi). \end{aligned} \quad (6)$$

Если край $\zeta = 1$ свободно оперт ($\sigma_x = w = 0$ при $\zeta = 1$) при жестком закреплении края $\zeta = 0$, то в качестве $\varphi_n(\xi)$ ($n = N-1, N$) следует принять

$$\varphi_{N-1}(\xi) = B_{3,N-1}(\xi) + B_{3,N+1}(\xi), \quad \varphi_N(\xi) = B_{3,N}(\xi),$$

а для остальных $\varphi_n(\xi)$ ($n = 0, N-2$) и для всех $\psi_m(\xi)$ ($m = 0, N$) остаются в силе соответствующие выражения из (6). Здесь через $B_{3,p}(\xi)$ ($p = -1, N+1$) обозначены кубические B-сплайны [4], построенные по системе узлов $\xi = \xi_q = qh_x$ ($q = -3, N+3$; $h_x = 1/N$).

После подстановки (5) в (3) из требования, чтобы полученные соотношения выполнялись в точках коллокации $\xi = x_r$ ($r = 0, N$), следует система $4N+4$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_k(\xi), W_k(\xi)$ ($k = 0, 2N+1$). Последняя преобразуется в систему $8N+8$ дифференциальных уравнений первого порядка и в векторной форме может быть записана в виде



$$\frac{d\bar{Y}}{d\zeta} = D\bar{Y}(\zeta), \tag{7}$$

где $\bar{Y}(\zeta) = \{y_p(\zeta)\} = \{U_0, \dots, U_{2n+1}, W_0, \dots, W_{2n+1}, U'_0, \dots, U'_{2n+1}, W'_0, \dots, W'_{2n+1}\}$ – вектор неизвестных. Отличные от нуля компоненты $d_{i,j}$ ($i, j = \overline{0, 8N+7}$) матрицы D определяются формулами

$$\begin{aligned} i = \overline{0, 4N+3} \quad d_{i,i+4N+4} &= 1; \\ j = \overline{0, N}; i = \overline{4N+4, 5N+4} \quad s = i - 4N - 4 \quad d_{i,j} &= c_{s,j}^{(1)}, d_{i,j+N+1} = c_{s,j}^{(2)}, \\ d_{i,j+6N+6} &= c_{s,j}^{(5)}; \\ i = \overline{5N+5, 6N+5} \quad s = i - 5N - 5 \quad d_{i,j} &= -c_{s,j}^{(2)}, d_{i,j+N+1} = c_{s,j}^{(1)}, d_{i,j+7N+7} = c_{s,j}^{(5)}; \\ i = \overline{6N+6, 7N+6} \quad s = i - 6N - 6 \quad d_{i,j+2N+2} &= c_{s,j}^{(3)}, d_{i,j+3N+3} = c_{s,j}^{(4)}, d_{i,j+4N+4} = c_{s,j}^{(6)}; \\ i = \overline{7N+7, 8N+7} \quad s = i - 7N - 7 \quad d_{i,j+2N+2} &= -c_{s,j}^{(3)}, d_{i,j+3N+3} = c_{s,j}^{(3)}, \\ d_{i,j+5N+5} &= c_{s,j}^{(6)}; c_{i,j}^{(k)} - \text{компоненты матриц} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= -2 \left[h_0^2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} A_0^{-1} A_2 + \delta_1 E \right], C_2 = -2\delta_2 E, C_3 = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \left[\frac{h_0^2}{2} B_0^{-1} B_2 + \delta_1 E \right], \\ C_4 &= -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \delta_2 E, C_5 = -\frac{h_0}{1-2\nu} A_0^{-1} B_1, C_6 = -\frac{h_0}{2(1-\nu)} B_0^{-1} A_1, A_0 = \{\varphi_j(x_i)\}, \\ A_1 &= \{\varphi_j(x_i)\}, A_2 = \{\varphi_j''(x_i)\}, B_0 = \{\psi_j(x_i)\}, B_1 = \{\psi_j'(x_i)\}, B_2 = \{\psi_j''(x_i)\}, \end{aligned}$$

E – единичная матрица размерности $(N+1) \times (N+1)$.

Условия для составляющих напряжений $\sigma_z^{(k)}$ и $\tau_{xz}^{(k)}$ при $\zeta = \pm 1/2$, записанные в перемещениях,

$$\text{при } \zeta = -1/2 \quad \nu h_0 \frac{\partial u_k}{\partial \xi} + (1-\nu) \frac{\partial w_k}{\partial \zeta} = (-1)^{k-1} d_k q_0(\xi), \quad \frac{\partial u_k}{\partial \zeta} + \frac{\partial w_k}{\partial \xi} = 0;$$

$$\text{при } \zeta = 1/2 \quad \nu h_0 \frac{\partial u_k}{\partial \xi} + (1-\nu) \frac{\partial w_k}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial u_k}{\partial \zeta} + \frac{\partial w_k}{\partial \xi} = 0 \quad (k = 1, 2)$$

после подстановки выражений (5) и поточечного удовлетворения в точках коллокации $\xi = x_r$ дают граничные условия для функции $\bar{Y}(\zeta)$. Эти условия в векторной форме имеют вид

$$H_1 \bar{Y}(-1/2) = \bar{e}_1, \quad H_2 \bar{Y}(1/2) = \bar{e}_2, \tag{8}$$

где $H_1 = \{h_{i,j}\}$, $H_2 = \{h_{i+4N+4,j}\}$, $\bar{e}_1 = \{e_i\}$, $\bar{e}_2 = \{e_{i+4N+4}\}$ ($i = \overline{0, 4N+3}$; $j = \overline{0, 8N+7}$) – известные матрицы и векторы.

Краевые задачи (7), (8) решаются численно методом дискретной ортогонализации, который, как показывают решения многочисленных тестовых задач, обеспечивает получение практически точных результатов.

После определения значений функции $\bar{Y}(\zeta)$ для фиксированных $\zeta = \zeta_m$ составляющие проекций вектора смещения вдоль прямых $\zeta = \zeta_m$ вычисляются по формулам (5), а для составляющих напряжений имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)} &= A \sum_{j=0}^N \sum_{p=0,1} (-1)^p E_{k+p} \left[(1-\nu) h_0 \varphi_j'(\xi) Y_{j+p(N+1)}(\zeta) + \nu \psi_j(\zeta) Y_{j+(p+6)(N+1)}(\zeta) \right] \\ &\quad (x \Leftrightarrow z; \nu \Leftrightarrow 1-\nu); \end{aligned}$$

$$\tau_{xz}^{(k)} = \frac{1}{2(1+\nu)} \sum_{j=0}^N \sum_{p=0,1} (-1)^p E_{k+p} \left[\varphi_j(\xi) Y_{j+(p+4)(N+1)}(\zeta) + h_0 \psi_j'(\zeta) Y_{j+(p+2)(N+1)}(\zeta) \right].$$

Оценка достоверности результатов, получаемых при изложенном подходе, проводилась на примере задачи о колебаниях пластинки со свободно опертыми краями под действием нагрузки (4). При расчетах принято $a = 1.0$ м, $h_0 = 0.15$, $p_0 = 1.0$ Па, $\nu = 0.4$, $E_1 = 2.7 \cdot 10^9$ Па, $E_2/E_1 = \text{tg } \delta = 0.015$, $\rho = 1250$ кг/м³ (ма-



териал ЭД-6 МА), $\omega = 5034c^{-1}$, $N = 40$, $M = 20$. Отличие полученных результатов от соответствующих результатов вычислений по методике работы [2] составляет менее 1%, что подтверждает эффективность предлагаемого подхода.

Были исследованы также колебания пластинок с относительной толщиной $h_0 = 0.025 \div 0.25$ под действием нагрузки (1) при $q_0(\xi) = p_0 = \text{const}$ для свободно опёртых или жестко заделанных обоим краев. В табл. 1 (свободное опирание) и 2 (жесткая заделка) приведены значения первых трех критических частот ω_k и (с учетом симметрии) максимальных амплитуд $\max w$ прогиба точек срединной плоскости. В этих же таблицах даны помеченные звездочкой (*) значения указанных величин, вычисленные по методике работы [5], когда в качестве исходных приняты уравнения, основанные на гипотезах Кирхгоффа, с учетом инерции вращения. Для величин $\max w(\zeta, 0)$ и $\max w^*(\zeta, 0)$ в скобках указаны значения ζ , при которых эти величины получаются.

Таблица 1

h_0	ω_k, c^{-1}	$\max w(\zeta, 0)$	ω_k^*, c^{-1}	$\max w^*(\zeta, 0)$
0.025	114	8.231-3 (0.500)	114	8.246-3 (0.500)
	1020	3.367-5 (0.175); 3.345-5 (0.500)	1025	3.401-5 (0.175); 3.432-5 (0.500);
	2789	2.681-6 (0.100); 2.551-6 (0.300); 2.499-6(0.500)	2838	2.670-6 (0.100); 2.664-6 (0.300); 2.671-6 (0.500)
0.050	228	5.017-4 (0.500)	228	5.169-4 (0.500)
	1974	2.240-6 (0.175); 2.241-6 (0.500)	2037	2.135-6 (0.175); 2.145-6 (0.500)
	5148	1.908-7 (0.100); 1.872-7 (0.300); 1.865-7 (0.500)	5567	1.660-7 (0.100); 1.674-7 (0.300); 1.659-7 (0.500)
0.075	339	1.041-4 (0.500)	342	1.027-4 (0.500)
	2826	4.738-7 (0.175); 4.764-7 (0.500)	3021	4.215-7 (0.175); 4.239-7 (0.500)
	6973	4.429 -8 (0.100); 4.363-8 (0.300); 4.370-8 (0.500)	8113	3.298 -8 (0.100); 3.285-8(0.300); 3.300-8 (0.500)
0.100	448	3.315-5 (0.500)	455	3.253-5 (0.500)
	3559	1.632-7 (0.175); 1.644-7 (0.500)	3967	1.334-7 (0.175); 1.341-7 (0.500)
	8325	1.691-8 (0.100); 1.672-8 (0.300); 1.674-8 (0.500)	10407	1.044-8 (0.100); 1.038-8 (0.300); 1.045-8 (0.500)
0.125	555	1.383-5 (0.500)	567	1.325-5 (0.500)
	4178	7.413-8 (0.175); 7.461-8(0.500);	4867	5.470-8 (0.175); 5.482-8(0.500);
	9323	8.439-9 (0.100); 8.342-9 (0.300); 8.371-9 (0.500)	12427	4.277-9 (0.100); 4.246-9(0.300); 4.282-9 (0.500)
0.150	658	6.779-6 (0.500)	679	6.426-6 (0.500)
	4695	4.002-8 (0.175); 4.024-8 (0.500)	5711	2.638-8 (0.175); 2.646-8 (0.500)
	10065	4.957-9 (0.100); 4.901-9 (0.300); 4.929-9 (0.500)	14173	2.064-9 (0.100); 2.050-9(0.300); 2.067-9 (0.500)



Окончание табл. 1

h_0	ω_k, c^{-1}	$\max w(\xi, 0)$	ω_k^*, c^{-1}	$\max w^*(\xi, 0)$
0.175	757	3.738-6 (0.500)	791	3.381-6 (0.500)
	5125	2.430-8 (0.175); 2.442-8 (0.500)	6498	1.424-8 (0.175); 1.427-8 (0.500)
	10624	3.240-9 (0.100); 3.209-9 (0.300); 3.219-9 (0.500)	15665	1.115-9 (0.100); 1.106-9(0.300); 1.117-9 (0.500)
0.200	851	2.246-6 (0.500)	899	2.033-6 (0.500)
	5484	1.606-8 (0.175); 1.611-8 (0.500)	7225	8.349-8 (0.175); 8.365-8 (0.500)
	11051	2.278-9 (0.100); 2.265-9 (0.300); 2.264-9 (0.500)	16931	6.541-10 (0.100); 6.475-10 (0.300); 6.560-10 (0.500)
0.225	941	1.341-6 (0.500)	1007	1.269-6 (0.500)
	5783	1.130-8 (0.175); 1.134-8 (0.500)	7892	5.212-9 (0.175); 5.224-9 (0.500)
	11388	1.691-9 (0.100); 1.674-9 (0.300); 1.682-9 (0.500)	18000	4.088-10 (0.100); 4.039-10(0.300); 4.104-10 (0.500)
0.250	1028	9.721-7 (0.500)	1114	8.328-7 (0.500)
	6035	8.343-9 (0.175); 8.366-9 (0.500)	8502	3.420-9 (0.175); 3.425-9 (0.500)
	11649	1.307-9 (0.100); 1.292-9 (0.300); 1.302-9 (0.500)	18902	2.685-10 (0.100); 2.649-10 (0.300); 2.700-10 (0.500)

Таблица 2

h_0	ω_k^*, c^{-1}	$\max w$	ω_k^*, c^{-1}	$\max w^*$
0.025	272	1.353-3 (0.500)	259	1.674-3 (0.500)
	1391	2.376-5 (0.200); 2.171-5 (0.500)	1395	2.388-5 (0.200); 2.234-5 (0.500);
	3360	2.598-6 (0.125); 2.227-6 (0.325); 2.238-6(0.500)	3433	2.495-6 (0.125); 2.316-6 (0.325); 2.349-6 (0.500)
0.050	515	1.059-4 (0.500)	517	1.049-4 (0.500)
	2624	1.710-6 (0.200); 1.570-6 (0.500)	2769	1.499-6 (0.200); 1.399-6 (0.500)
	5992	2.133-7 (0.125); 1.893-7 (0.325); 1.911-7 (0.500)	6730	1.577-7 (0.125); 1.460-7 (0.325); 1.480-7 (0.500)
0.075	754	2.193-5 (0.500)	775	2.067-5 (0.500)
	3627	4.031-7 (0.200); 3.674-7 (0.500)	4102	2.977-7 (0.200); 2.771-7 (0.500)
	7816	5.681 -8 (0.125); 4.982-8 (0.325); 5.105-8 (0.500)	9781	3.168 -8 (0.125); 2.921-8 (0.325); 2.959-8 (0.500)
0.100	973	7.383-6 (0.500)	1030	6.552-6 (0.500)
	4403	1.556-7 (0.200); 1.405-7 (0.500)	5378	9.502-8 (0.200); 8.805-8 (0.500)
	9044	2.372-8 (0.125); 2.096-8 (0.300); 2.157-8 (0.500)	12516	1.026-8 (0.125); 9.395-9 (0.325); 9.523-9 (0.500)



Окончание табл.2

h_0	ω_k^*, c^{-1}	max w	ω_k^*, c^{-1}	max w*
0.125	1171	3.263-5 (0.500)	1284	2.686-6 (0.500)
	4992	7.792-8 (0.200); 6.993-8 (0.500);	6582	3.927-8 (0.200); 3.625-8 (0.500);
	9887	1.236-8 (0.125); 1.120-8 (0.300); 1.149-8 (0.500)	14908	4.322-9 (0.125); 3.921-9 (0.325); 3.982-9 (0.500)
0.150	1347	1.713-6 (0.500)	1536	1.296-6 (0.500)
	5439	4.551-8 (0.200); 4.078-8 (0.500)	7708	1.918-8 (0.200); 1.759-8 (0.500)
	10495	7.463-9 (0.100); 6.803-9 (0.300); 7.016-9 (0.500)	16961	2.153-9 (0.100); 1.933-9 (0.325); 1.968-9 (0.500)
0.175	1500	1.013-6 (0.500)	1785	6.994-7 (0.500)
	5783	2.945-8 (0.175); 2.637-8 (0.500)	8748	1.049-8 (0.200); 9.558-9 (0.500)
	10942	4.911-9 (0.100); 4.536-9 (0.300); 4.678-9 (0.500)	18699	1.206-9 (0.125); 1.072-9 (0.325); 1.091-9 (0.500)
0.200	1634	6.536-7 (0.500)	2030	4.102-7 (0.500)
	6054	2.048-8 (0.175); 1.832-8 (0.500)	9702	6.246-9 (0.200); 5.644-9 (0.500)
	11286	3.433-9 (0.100); 3.205-9 (0.300); 3.317-9 (0.500)	20171	7.366-10 (0.150); 6.416-10 (0.325); 6.594-10 (0.500)
0.225	1749	4.504-7 (0.500)	2272	2.561-7 (0.500)
	6272	1.496-8 (0.175); 1.340-8 (0.500)	10572	3.968-9 (0.200); 3.552-9 (0.500)
	11553	2.464-9 (0.100); 2.381-9 (0.300); 2.419-9 (0.500)	21405	4.825-10 (0.150); 4.107-10 (0.325); 4.252-10 (0.500)
0.250	1848	3.264-7 (0.500)	2510	1.680-7 (0.500)
	6451	1.1433-8 (0.175); 1.019-8 (0.500)	11360	2.651-9 (0.200); 2.349-9 (0.500)
	11764	1.912-9 (0.100); 1.816-9 (0.300); 1.884-9 (0.500)	22442	3.327-10 (0.150); 2.765-10 (0.325); 2.887-10 (0.500)

Форму деформированной срединной плоскости свободно опертой пластинки при различных значениях ω иллюстрируют графики, изображенные на рис.1 и 2. На рис.1 для $h_0 = 0.100$ показаны графики функций $W_i^{(1)}(\xi) = k_i w_1(\xi, 0) (i = \overline{1,5})$, где кривая 1 соответствует значениям $\omega = \omega_1, k_1 = 10^6$; кривая 2 – $\omega = \omega_2, k_2 = 10^8$; кривая 3 – $\omega = \omega_3, k_3 = 10^9$; кривая 4 – $\omega = 13000c^{-1}, k_4 = 10^9$ и кривая 5 – $\omega = 20000c^{-1}, k_5 = 10^9$.

Аналогичные графики функций $W_i^{(2)}(\xi) = n_i w_2(\xi, 0)$ изображены на рис. 2. Эти графики построены для тех же значений h_0 и ω , что и на рис. 1; $n_1 = 10^5, n_2 = 10^7, n_3 = 10^8, n_4 = n_5 = 10^{10}$.

Колебания пластинки под действием нагрузки (1) с достаточной степенью условности подразделяются на следующие виды:

- чисто изгибные, когда сечения, перпендикулярные оси x , перемещаются вдоль оси z и поворачиваются, оставаясь плоскими или искривляясь;
- планарные, при которых точки сечения, перпендикулярного оси x , получают одинаковые перемещения в направлении x ;



- изгибно-планарные с преобладанием изгибной составляющей,
- планарно-изгибные с преобладанием планарной составляющей.

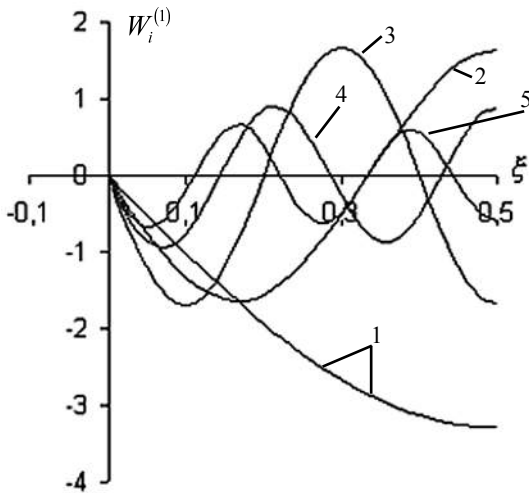


Рис.1

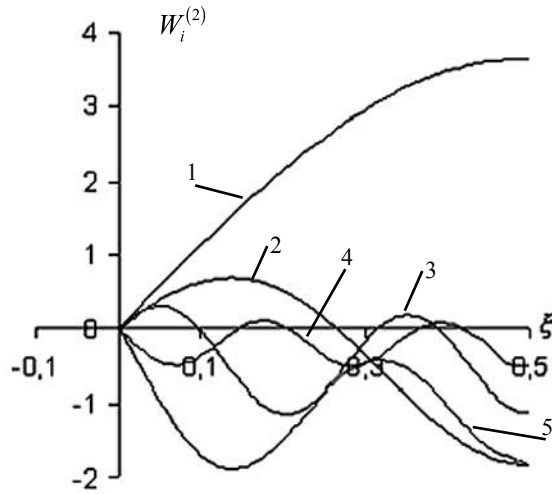


Рис.2

Вид колебаний пластинки определяется значениями толщины h_0 и частоты ω . В свободно опертой пластинке при $\omega = \omega_1$ и $h_0 \leq 0.250$ колебания будут чисто изгибными, причем при $h_0 \leq 0.250$ сечения $\xi = \text{const}$ остаются плоскими и незначительно искривляются при больших значениях h_0 ; величины w_i при $h_0 \leq 0.150$ с высокой точностью можно считать постоянными. Составляющие нормального напряжения σ_x линейно меняются по толщине, линейность составляющей $\sigma_x^{(2)}$ сохраняется до $h_0 \leq 0.250$ и незначительно нарушается для $\sigma_x^{(1)}$ (при $h_0 \leq 0.125$).

Иная картина колебаний наблюдается при $\omega = \omega_2$. В тонких пластинках ($h_0 \leq 0.075$) колебания в любой момент времени t будут чисто изгибными при линейном изменении по толщине составляющих тангенциального смещения и напряжения σ_x .

При $h_0 = 0.075$ в моменты времени $t_i^{(1)}$ ($\cos \omega t_i^{(1)} = 1$) точка, в которой $u_1 = 0$, смещается со срединной плоскости, занимая разные положения для разных сечений ($\zeta = -0.30$ при $\xi = 0.00$, $\zeta = 0.15$ при $\xi = 0.175$, $\zeta = 0.05$ при $\xi = 0.25$, $\zeta = 0.0$ при $\xi = 0.30$), что соответствует планарно-изгибной форме колебаний. В моменты времени $t_i^{(2)}$ ($\sin \omega t_i^{(2)} = 1$) распределение по толщине составляющей u_2 симметрично (для w_2 и $\sigma_x^{(2)}$ антисимметрично) относительно срединной плоскости, причем закон изменения u_2 и $\sigma_x^{(2)}$ близок к линейному. Составляющая w_2 незначительно меняется по толщине, закон изменения w_1 более неравномерный. Аналогичные закономерности имеют место и для $h_0 = 0.100$ и $h_0 = 0.125$ при нелинейном законе изменения по толщине величин u_2 и $\sigma_x^{(2)}$ в моменты времени $t = t_i^{(2)}$.

В толстых пластинках ($h_0 \geq 0.150$) при второй критической частоте колебания можно идентифицировать как планарно-изгибные при $t = t_i^{(1)}$ и изгибно-планарные при $t = t_i^{(2)}$.

При $\omega = \omega_3$ картина колебаний ещё более усложняется. В тонкой пластинке ($h_0 = 0.025$) точки срединной плоскости в моменты времени $t = t_i^{(1)}$ получают ненулевые тангенциальные смещения, которые, как и $\sigma_x^{(1)}$, меняются по толщине по линейному закону, составляющая $w_1 = \text{const}$, что соответствует изгибно-планарной форме колебаний; при $t = t_i^{(2)}$ колебания будут чисто изгибными.

При $h_0 = 0.05$ составляющие прогиба w_i по толщине сечения постоянны, законы изменения величин u_i и $\sigma_x^{(i)}$ в моменты времени $t = t_i^{(1)}$ соответствуют планарно-изгибным, а в моменты времени $t = t_i^{(2)}$ в отдельных сечениях чисто изгибным.

В более толстых пластинках ($h_0 = 0.075 \div 0.150$) колебания будут планарно-изгибными при $t = t_i^{(1)}$ и изгибно-планарными при $t = t_i^{(2)}$. Дальнейшее увеличение толщины пластинки приводит к уменьшению



планарной составляющей в моменты времени $t = t_i^{(1)}$ и изгибной составляющей при $t = t_i^{(2)}$. Отметим также, что в пластинках с толщиной $h_0 = 0.175 \div 0.225$ при $t = t_i^{(1)}$ все точки пластинки смещаются по вертикали в направлении, противоположном направлению действия нагрузки.

Аналогичные закономерности, естественно, при иных, более низких значениях h_0 наблюдаются и при жестком закреплении краев пластинки.

Кроме указанных особенностей, в рассматриваемом случае, как и при нагрузке (4) [2], в моменты времени $t_i^{(1)}$ наблюдается «подтягивание», при котором отдельные точки нагруженной поверхности $\zeta = -1/2$ смещаются по направлению действия нагрузки, а смещение точек поверхности $\zeta = 1/2$ происходит в противоположном направлении. При этом в отличие от [2] «подтягивание» происходит не для всех $0 < \zeta < 1$, а только в некоторых окрестностях отдельных значений ζ . Например, в свободно опертой пластинке с толщиной $h_0 = 0.100$ «подтягивание» имеет место в окрестности сечения $\zeta = 0.500$ при $4950c^{-1} < \omega < 5010c^{-1}$ и $14855c^{-1} < \omega < 16335c^{-1}$. При $12865c^{-1} < \omega < 13195c^{-1}$ «подтягивание» наблюдается вблизи $\zeta = 0.100$, а при $14025c^{-1} < \omega < 14825c^{-1}$ – вблизи $\zeta = 0.175$. Для $h_0 = 0.125$ «подтягивание» происходит в окрестности сечения $\zeta = 0.250$ при $\omega = \omega_2$, а для $h_0 = 0.250$ и $\omega = \omega_3$ – при $0.095 \leq \zeta \leq 0.260$. Графики изменения по толщине пластинки составляющих смещения w при «подтягивание» для $h_0 = 0.100$ и $\omega = 14500c^{-1}$ показаны на рис. 3, где кривая 1 соответствует значениям $kw_1(0.175; \zeta)$, а кривая 2 – $kw_2(0.175; \zeta)$; кривые 3 и 4 изображают изменение функций $kw_1(0.500; \zeta)$ и $kw_2(0.500; \zeta)$, $k = 10^{10}$.

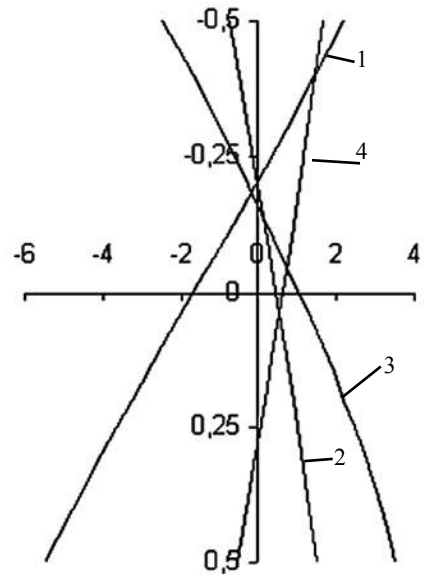


Рис. 3

Аналогичное явление имеет место и при жестком закреплении краев, причем диапазон частот и протяженность зон «подтягивания» по ширине пластинки увеличиваются по сравнению со случаем свободно опертых краев.

Отметим также, что при некоторых значениях частоты ω и $h_0 \geq 0.05$ в отдельных сечениях (при достаточно узком интервале значений ζ) функция $w_1(\zeta, \zeta)$ может дважды менять знак. В качестве примера на рис. 4 приведены графики $w_1(\zeta, \zeta)$ в пластинках с относительной толщиной $h_0 = 0.100$ при шарнирном опирании ($\omega = 7800c^{-1}, \xi = 0.150$) и при жестком защемлении краев ($\omega = 10550c^{-1}, \xi = 0.100$). Графики величин u_1 для тех же значений h_0, ω и ζ показаны на рис. 5. Кривые 1 на рис. 4,5 соответствуют случаю шарнирного закрепления, а кривые 2 – жестко заделанным краям пластинки.

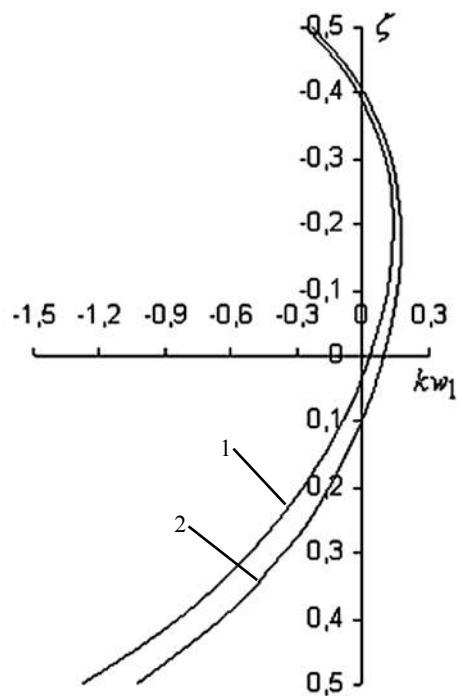


Рис. 4

Анализ данных таблиц показывает, что классическая теория качественно верно описывает искривление срединной плоскости пластинки во всем диапазоне рассмотренных частот. При этом значения ω_k^* получаются

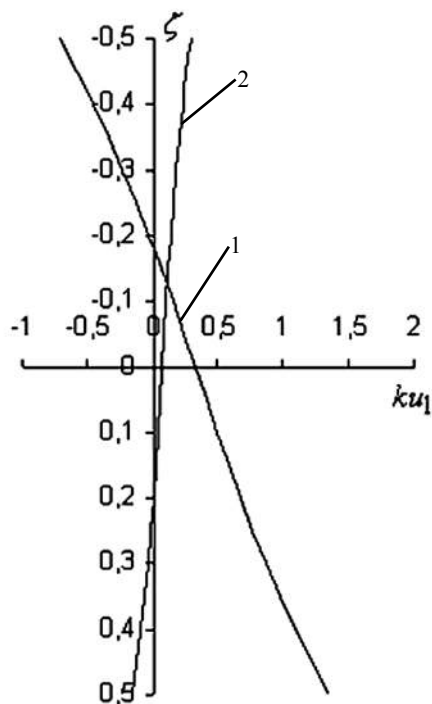


Рис. 5

больше, а $\max w^*$ – меньше соответствующих точных значений.

Погрешность приближенных результатов существенно зависит от толщины h_0 и частоты ω , а также способа закрепления краев. Например, в случае свободно опертых краев погрешность определения по классической теории первой критической частоты и соответствующей ей максимальной амплитуды прогиба не превосходит 5% при $h_0 \leq 0.15$. Такая же погрешность для значения ω_2^* получается при $h_0 \leq 0.05$, а для ω_3^* – только при $h_0 \leq 0.025$. В случае жесткой заделки погрешность «классического» значения ω_1^* составляет 2.8% при $h_0 = 0.075$, но повышается до 5.8% при $h_0 = 0.100$.

Поэтому, так как расчет на прочность обычно проводится только при первой критической частоте, которой соответствуют наибольшие значения амплитуд характеристик НДС, можно считать, что классическая теория Кирхгофа для рассматриваемого класса задач обеспечивает высокую точность решения при относительной толщине полосы $h_0 < 0.100$.

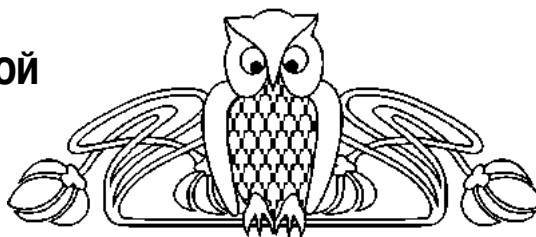
Библиографический список

1. Недорезов П.Ф. Установившиеся поперечные колебания вязкоупругой пластинки-полосы // Теоретическая и прикладная механика. Харьков: Изд-во «Основа», 2002. Вып. 35. С.139–146.
2. Недорезов П.Ф. О колебаниях толстой вязкоупругой пластинки-полосы, свободно опертой по краям // Нелинейная динамика механических и биологических систем: Межвуз. науч. сб. / Сарат. техн. ун-т, Саратов, 2004. Вып. 2. С. 20–27.
3. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (Обзор) // Прикл. механика. 1995. Т. 31, №6. С.3–26.
4. Завьялов Ю.С., Квасов Ю.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
5. Недорезов П.Ф. Об учете поперечных сдвигов и инерции вращения при вибрационном изгибе вязкоупругой пластинки-полосы // Механика деформируемых сред. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып.14. С. 144–151.



УДК 533.6.0116:532.529

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕФРАКЦИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ, РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ ГАЗОВУЮ И ГАЗОЖИДКОСТНУЮ СРЕДЫ



Г.П. Шиндяпин, А.А. Матутин

Саратовский государственный университет,
кафедра вычислительного эксперимента в механике
E-mail: matutinaa@mail.ru

The Numerical Investigation of the Shock Wave Nonlinear Refraction on the Surface Which Separate Gaseous and Gas-liquid Mediums

G.P. Shindyapin, A.A. Matutin

В работе рассматривается класс задач нелинейной рефракции ударных волн. Исследование сводится к решению краевых задач рефракции. Для решения полученных краевых задач построена асимптотическая теория взаимодействия ударных волн в газожидкостных средах (двухфазных), обобщающая теорию взаимодействия в однофазных средах. Построен численный метод решения краевых задач для областей со значительными градиентами параметров (областей коротких волн).

In work the class of tasks of a nonlinear refraction of shock waves is examined. Research is reduced to the decision of regional tasks of refraction. For the decision of the received regional tasks the theory of interaction of shock waves in gas-liquids environments (biphasic), generalizing the theory of interaction in single-phase environments is constructed asymptotic. The numerical method of the decision of regional tasks for areas with significant gradients of parameters (areas of short waves) is constructed.

Последние годы характеризуются интенсивным развитием теории взаимодействия ударных волн (УВ) в двухфазных газожидкостных средах (ГЖС) [5, 6, 8]. Проблема состоит в том, что скорость распространения малых возмущений (c_0) в газожидкостных пузырьковых средах (жидкости с пузырьками газа) может быть на порядок меньше, чем в газе, и почти на два порядка, – чем в чистой жидкости, вследствие этого ударные волны в ГЖС возникают при сравнительно малых скоростях, чем в газе или чистой жидкости. Указанные обстоятельства имеют важное значение для развития теории взаимодействия УВ, практических приложений при конструировании подводных аппаратов и при транспортировке газожидкостных смесей по трубам и каналам. Как показывает теория [1, 2] и эксперимент [4, 5], исследования процессов взаимодействия УВ в высокодиспергированной (пузырьковой) среде для волн умеренной и малой интенсивности можно провести с помощью равновесной модели газожидкостной среды [2]. При достаточно больших величинах масштаба давления (α_1) газожидкостной смеси УВ могут оставаться достаточно слабыми, и, например, перепады давления могут достигать 10^3 атмосфер в водовоздушной среде.

КЛАСС ЗАДАЧ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЕФРАКЦИИ

Различные ударно-волновые структуры возникают (рис. 1) при падении плоской ударной волны AR (BR) интенсивности $P_{10} = (p_1 - p_0)/p_0$ под углом α со свободной поверхностью OA, которая разделяет газовую и газожидкостную среды с давлением p_0 и массовыми газосодержаниями γ^+ сверху и γ^- снизу от OA. При этом возникает преломленный фронт ADQ, распространяющийся под некоторым углом β в верхней области, и фронт отраженной волны ABS (BNS) в нижней области. За фронтами УВ возникают в общем случае области возмущений G^+ , G^- , границами которых, кроме указанных фронтов являются линии слабого разрыва DK, CE, AFE или фронт ударной волны CB. Частным случаем рефракции является случай отражения УВ от свободной поверхности (рис. 1, c), когда в верхней области, за фронтом преломленной ударной волны (AD) изменениями параметров можно пренебречь.

В зависимости от конкретных значений параметров P_{10} , α , γ^+ , γ^- возникают различные ударно-волновые структуры: нерегулярная (рис. 1, a) ($\alpha_1^* < \alpha < \alpha_2^*$), регулярная (рис. 1, б) ($\alpha_1^* \leq \alpha \leq \alpha_2^*$) и регулярная рефракция с образованием ударной волны замыкающей зону разряжения (рис. 1, c).



Границы областей существования различных ударноволновых структур обычно определяются при решении локальных задач рефракции в окрестности точки А (выполнение условий динамической совместности [1]), однако в случае нерегулярной рефракции (рис. 1, а) анализ усложняется ввиду отхода точки В от фронта Маха.

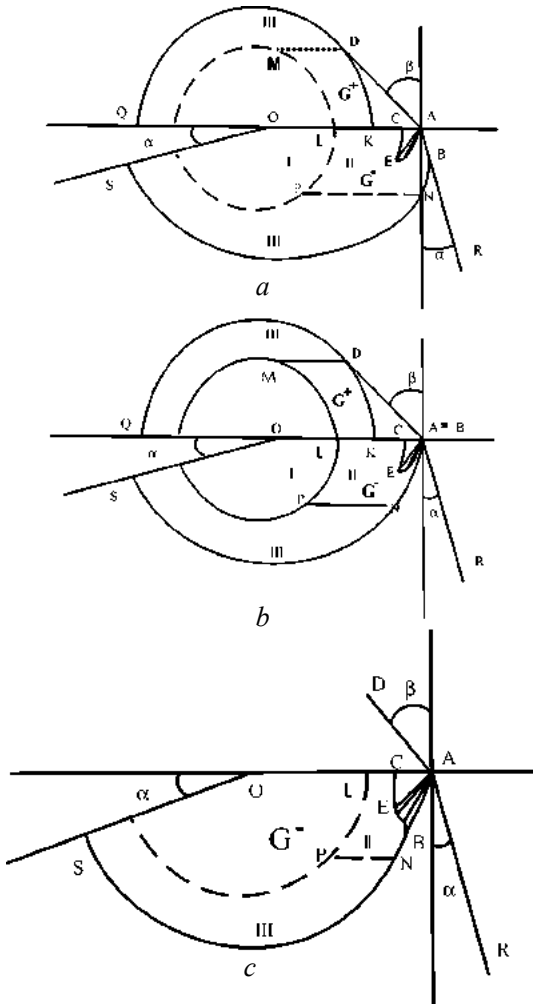


Рис. 1

Математическое моделирование процессов рефракции связано с рассмотрением движения газожидкостной среды в областях возмущения G^+ , G^- , где параметры течения удовлетворяют основным уравнениям динамики (законам сохранения массы, импульса, энергии и дифференциальному уравнению состояния).

Уравнения движения ГЖС в автомодельных переменных $\xi = x/c_0t$, $\eta = y/c_0t$ имеют вид [2]

$$\begin{aligned} (u - c_0\xi) \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + (v - c_0\xi) \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) &= 0 \\ (u - c_0\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (v - c_0\xi) \frac{\partial u}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ (u - c_0\xi) \frac{\partial v}{\partial \xi} + (v - c_0\xi) \frac{\partial v}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \\ (u - c_0\xi) \frac{\partial s}{\partial \xi} + (v - c_0\xi) \frac{\partial s}{\partial \eta} &= 0, \quad dp = c^2 d\rho + A ds, \\ \gamma &= \text{const.} \end{aligned} \quad (1)$$

Используя уравнение состояния для жидкости $\rho_1 = f(p) = \rho^*(1 + p/k)$ и газа $p = R\rho_1 T$, получают уравнение состояния двухфазной смеси в виде [2]

$$\begin{aligned} p \left[\frac{a}{\rho} - \frac{b}{\rho^*(1 + p/k)} \right] &= c_v T, \\ a &= (1 + \gamma)b, \quad b = \frac{c_v}{\gamma R}, \quad c_v = \frac{c_{v1} + c_{v2}\gamma}{1 + \gamma}. \end{aligned}$$

Используя уравнение состояния, получают выражение для квадрата адиабатической скорости звука c^2 и коэффициента А

$$c^2 = \frac{(1 + a)(k + p)^2}{a(k + p)^2 - bk^2} \frac{\rho}{\rho^*}, \quad A = \frac{T\rho^2 c^2}{(1 + a)p}.$$

На фронте ударной волны $\xi = \xi(\eta)$ условия динамической совместности ($P = (p - p_1)/B$, $B = \rho_0 c_0^2$) имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{[(\xi - \eta\xi') - (\frac{u_1}{c_0} - \xi' \frac{v_1}{c_0})]^2}{1 + \xi'^2} &= N(P), \quad \frac{\rho}{\rho_1} = \frac{N(P)}{N(P) - P}, \quad \xi' = \frac{d\xi}{d\eta}, \\ P &= \frac{\rho_1}{\rho_0} [(\xi - \eta\xi') - (\frac{u_1}{c_0} - \xi' \frac{v_1}{c_0})] (\frac{u}{c_0} - \frac{u_1}{c_0}), \quad \frac{v}{c_0} - \frac{v_1}{c_0} = -\xi' (\frac{u}{c_0} - \frac{u_1}{c_0}). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь u_1, v_1, ρ_1 параметры перед фронтом ударной волны.

Первое условие представляет собой дифференциальное уравнение для нахождения фронта $\xi = \xi(\eta)$ ударной волны.



На линиях слабого разрыва DK, CE, AFE, где параметры непрерывны, имеем условия

$$u = u_1, v = v_1, \rho = \rho_1, p = p_1 \text{ т. е. } P = 0. \quad (3)$$

На свободной поверхности OA $\xi = \xi(\eta)$ или $F(\xi, \eta) = 0$

$$u_n^{(+)} = u_n^{(-)} = u_n, p^{(+)} = p^{(-)}. \quad (4)$$

Решение системы (1) описывающее волну разрежения, имеет вид ($tg\theta = (\eta - \eta_A)/(\xi - \xi_A)$)

$$\frac{u}{c_0} = \alpha \beta \sin \theta \sin \alpha (\theta + c) + \beta \cos \theta \cos \alpha (\theta + c) + \xi_A, \quad (5)$$

$$\frac{v}{c_0} = -\alpha \beta \cos \theta \sin \alpha (\theta + c) + \beta \sin \theta \cos \alpha (\theta + c) + \eta_A.$$

Здесь $\beta = \pm \sqrt{D/(R_0 - 1)}$, $\alpha = \sqrt{(R_0 - 1)/R_0}$. Постоянные c, D в решении (5) находятся при задании условий на переднем фронте централизованной волны, представляющем границу с однородным потоком $u = u_1, v = v_1, tg\theta = tg\theta_1$.

Параметры (5) могут использоваться при записи граничных условий на «звуковой линии» AFE $W^2 = (u - c_0\xi)^2 + (v - c_0\eta)^2 = c^2$, а также при определении параметров фронта СЕВ, замыкающего зону разрежения. В случае возникновения ударной волны, возникающей за зоной разрежения, положение фронта ударной волны определяется в соответствии с условием (2), где параметры u_1, v_1 перед фронтом на участке BE задаются решением (5).

ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМОВ РЕФРАКЦИИ

Существующие различные ударно-волновые режимы рефракции (см. рис. 1) и соответствующие области существования (в пространстве $P_{10}, \alpha, \gamma^+, \gamma^-$) устанавливаются при решении локальных задач в окрестности точки А [2]. Границы областей существования различных ударно-волновых структур определяются с помощью критериев перехода из одной области в другую, которые имеют физический смысл.

Так, границу типа А существования регулярной рефракции (см. рис. 2) получим при $W = c_1 (P_{10} = \varepsilon_{10} P_0 / B_0, \varepsilon_{10} = (p_1 - p_0) / p_0)$, т. е. когда скорость за падающим фронтом (рис. 1, с) равна скорости звука

$$\alpha = \alpha_1^*, \cos \alpha_1 = N^{1/2}(P_{10}, \gamma^-) \left(\left(\frac{c_1}{c_0} \right)^2 + 2P_{10} - \frac{P_{10}^2}{N(P_{10}, \gamma^-)} \right), \quad (6)$$

границу типа В (см. рис. 2) получим при условии $\beta = 0$ (для области существования $\cos \leq 1$):

$$\alpha = \alpha_2^*, \cos \alpha_2 = \frac{c_0^- N^{1/2}(P_{10}, \gamma^-)}{c_0^+ N^{1/2}(P_{30}, \gamma^+)}, \quad (7)$$

границу типа С, когда решение рефракции с волной разрежения существует в определенном диапазоне газосодержаний $\gamma^- (0 \leq \gamma^- \leq \gamma^{*-})$. Верхний предел значений $\gamma^- = \gamma^{*-}$ соответствует минимально возможному разрежению ε_{20} при фиксированной интенсивности падающей волны P_{10} (см. рис. 2) получим (исключая ε_{20} из системы уравнений [2] $H = 0, \partial H / \partial \gamma^- = 0$)

$$\alpha = \alpha_3^*, \alpha_3 = \alpha_3(\varepsilon_{10}, \gamma^+). \quad (8)$$

Как показывает локальный анализ задачи рефракции и дальнейший анализ, в случае раздела газ и ГЖС в широком диапазоне газосодержаний γ^+, γ^- и интенсивностей ударной волны P_{10} интенсивность преломленной волны P_{30} и изменение давления за ней в верхней области G^+ оказывается незначительным по сравнению с интенсивностью P_{10} и изменением давления в нижней области (т.е. $P = 0$ в области G^+). Это обстоятельство позволяет решения задач рефракции в этом случае сводить к решению задач отражения ударной волны от свободной поверхности для G^- и не рассматривать течение в верхней области.

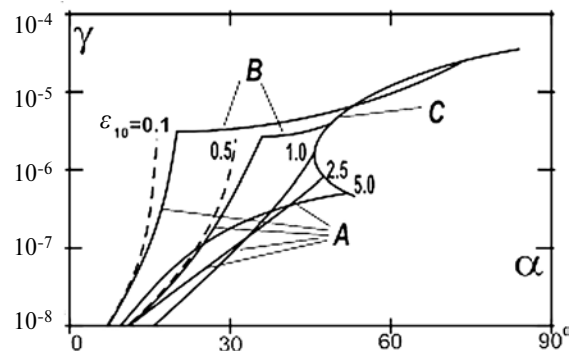


Рис. 2



ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ РЕФРАКЦИИ АСИМПТОТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Для решения задач рефракции (см. рис. 1) ударной волны можно использовать метод асимптотических разложений, основанный на выделении областей значительных градиентов – областей коротких волн [1, 6, 7]. Это позволяет расчленить области течения G^+ , G^- на ряд подобластей:

- область I – со сравнительно малыми градиентами параметров, где течение описывается с помощью линейной теории и решение находится аналитически;
- область III – значительных градиентов, примыкающих к фронту ударной волны, где течение описывается системой нелинейных квазиодномерных уравнений, которые интегрируются аналитически;
- область II – нелинейных двумерных течений со значительными градиентами параметров в окрестности точек взаимодействия ударных волн, где течение описывается системой нелинейных уравнений и соответственная краевая задача решается численно.

В дальнейшем ограничимся при изучении задач рефракции на разделе газ и газожидкостная среда задачами отражения. В этом случае при асимптотическом анализе, когда в верхней области G^+ параметры изменяются незначительно по сравнению с P_{10} , их изменения можно пренебречь, считая течения однородными и рассматривать в общем случае задачи рефракции как задачи отражения ударной волны от свободной поверхности [1, 2, 7]. В рамках асимптотической теории [1, 2] в этом случае свободная поверхность не деформируется. Таким образом, на свободной поверхности имеем условия $P = 0$, $Y = 0$.

Как было отмечено выше, асимптотический анализ позволяет свести рассмотрение задач рефракции (отражения) к решению краевых задач для области II нелинейной рефракции, граничными условиями для которых будут выступать условия сращивания с решениями в областях I и III.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ОТРАЖЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Область II, примыкающая к точке взаимодействия УВ, характеризуется большими градиентами параметров. При малых углах взаимодействия α – величина угла входит в решение краевой задачи через параметр подобия α^v :

$$\alpha^v = \frac{tg\alpha}{P_{10}^{1/2} R_0^{1/2}(\gamma)} = \frac{tg\alpha}{\varepsilon_{10}^{1/2} L_0^{1/2}(\gamma)}, \quad L_0(\gamma) = \frac{P_0}{\rho_0 c_0^2} R_0(\gamma), \quad \varepsilon_{10} = \frac{P_1 - P_0}{P_0}. \quad (9)$$

Введем асимптотическое разложение в области II в виде [1]:

$$r = \frac{R}{c_0 t} = 1 - P_{10} R_0(\gamma) \delta, \quad \theta = P_{10}^{1/2} R_0^{1/2}(\gamma) Y, \quad \frac{\nu}{c_0} = P_0^{3/2} R_0^{1/2} \nu + \dots, \quad (10)$$

$$\frac{u}{c_0} = P_{10} \mu + \dots, \quad H = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = P_{10} H^{(1)} + \dots, \quad P^* = \frac{P - P_0}{\rho_0 c_0^2} = P_{10}^* P^{(1)} + \dots$$

Подставляя (10) в систему (1) получим систему уравнений коротких волн:

$$2(\mu - \delta)\mu_\delta + \nu_y + \mu = 0, \quad \mu_y = \nu_\delta, \quad \mu = P^{*(1)}. \quad (11)$$

Условия на фронтах УВ $\delta = \delta^*(Y)$ имеют вид (μ_1, ν_1 – параметры перед фронтом УВ)

$$\left(\frac{d\delta}{dY}\right)^2 = 2\delta - (\mu - \mu_1), \quad (\mu - \mu_1) \frac{d\delta}{dY} + (\nu - \nu_1) = 0. \quad (12)$$

Первое уравнение (12) является дифференциальным уравнением для определения фронта ударной волны.

На линии слабого разрыва

$$\mu = \mu_1, \quad \nu = \nu_1. \quad (13)$$

Условия сращивания с решениями в областях I и III имеют соответственно вид [2]

$$\mu = -\frac{1}{\pi} \arctg \frac{Y - \alpha^v}{\sqrt{-2\delta}} - \frac{1}{\pi} \arctg \frac{Y + \alpha^v}{\sqrt{-2\delta}}, \quad \delta \rightarrow -\infty, \quad -\infty \leq Y \leq 0, \quad (14)$$

$$\mu = 1 + \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{1}{Y + \alpha^n}\right)^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\pi^2 (\delta - 1)(Y + \alpha^v)^2}{2}}\right), \quad Y \rightarrow -\infty, \quad -\infty \leq \delta \leq 1. \quad (15)$$



На свободной поверхности

$$\mu = P^{*(1)} = 0, \quad Y = 0. \quad (16)$$

Для решения краевой задачи (11)–(16) в области II удобно свести систему (11) к одному уравнению второго порядка для функции $\mu(\delta, Y)$:

$$(\mu^2 - 2\delta\mu)_{\delta\delta} + \mu_{YY} + 3\mu_{\delta} = 0, \quad \mu = P^{*(1)}. \quad (17)$$

Дифференциальное уравнение фронта УВ и условие на фронте (12) можно, используя уравнения (11) и (12), записать в виде

$$(5\delta'^2 - 2\delta + 2\mu_1)\delta'' - (5 + \mu_{\delta} - 3\mu_{1\delta})\delta'^2 + (3\mu_{1Y} + \nu_{1\delta})\delta' + 2(\mu_{\delta} + 1)\delta - (2\mu_{\delta} + 1)\mu_1 + \nu_{1Y} = 0. \quad (18)$$

Окончательно задача свелась к решению уравнения (17) в области II для функции $\mu(\delta, Y)$, удовлетворяющей условиям (14), (15), (16), (12), (13) и (18). В каждом конкретном случае постановка краевой задачи конкретизируется. Например, в задаче отражения, соответствующей рис. 1, а, вместе с решением краевой задачи определяется положение фронта ударной волны АВ, а в задаче, соответствующей рис. 1, с, – фронта ударной волны СВ.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Для решения краевых задач (11)–(16) применяется метод последовательных приближений, который сводит исходную краевую задачу для уравнений коротких волн с неизвестной границей, к серии краевых задач с фиксированной границей. Проиллюстрируем этот метод на примере задачи отражения с образованием УВ замыкающей зону разрезания. Процесс начинается с задания начального поля $\mu(\delta, Y)$ фронт CDA (рис. 3) и начального положения фронта УВ. Начальное поле $\mu(\delta, Y)$ находится по методу прямых; начальное положение ударных фронтов устанавливается с использованием условий в характерных точках С, D, А [9].

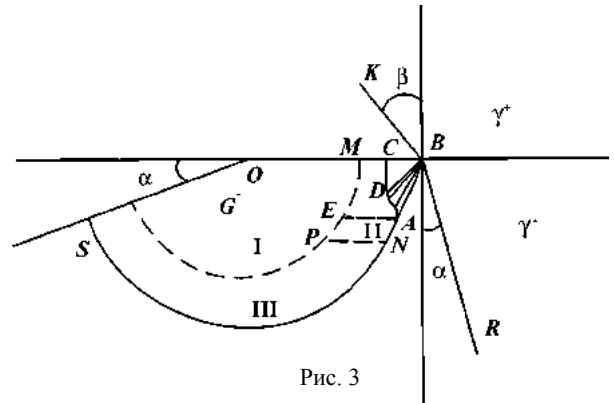


Рис. 3

При решении задач применяют метод конечных разностей [1] второго порядка точности, приводящий первое уравнение (17) к виду

$$4(\mu_{i,j} - \delta_j)(\mu_{i+1,j} - 2\mu_{i,j} + \mu_{i-1,j}) + (\mu_{i+1,j}^2 - 2\mu_{i+1,j}\mu_{i-1,j} + \mu_{i-1,j}^2) + 2\frac{\Delta_i^2}{\Delta_j^2}(\mu_{i,j+1} - 2\mu_{i,j} + \mu_{i,j-1}) - \Delta_i(\mu_{i+1,j} - \mu_{i-1,j}) = 0. \quad (19)$$

Значения искомой функции в приграничных узлах к фронту CDA (см. рис. 3) берутся по формуле квадратичной интерполяции, учитывающей значение в двух внутренних узлах и на фронте (μ^*) (d – расстояние от приграничного узла до фронта)

$$\mu_{i,j} = \frac{2h^2\mu^*}{(d+h)(d+2h)} + \frac{2d\mu_{i-1,j}}{(d+h)} - \frac{d\mu_{i-2,j}}{(d+2h)}. \quad (20)$$

Соответственно другие граничные условия (14), (15) примут вид

$$\mu_{1,j} = -\frac{1}{\pi} \arctg \frac{Y_j - \alpha''}{\sqrt{2\delta_0}} - \frac{1}{\rho} \arctg \frac{Y_j + \alpha''}{\sqrt{2\delta_0}};$$

$$\mu_{i,1} = 1 + K^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\delta_i - 1}{K^2}}\right), \quad K^2 = \frac{2}{\pi^2 (H + \alpha'')^2}.$$



Дифференциальное уравнение фронта и условия на нем примут вид

$$(5\delta_j'^2 - 2\delta_j + 2\mu_{1,i})\delta_j'' - [5 + \frac{\mu_{i+1,j} - \mu_{i-1,j}}{\Delta_j} - 3(\mu_{1d})_{i,j}]\delta_j'^2 + [3(\mu_{1y})_{i,j} + (\nu_{1d})_{i,j}]\delta_j' + 2(\frac{\mu_{i+1,j} - \mu_{i-1,j}}{\Delta_j} + 1)\delta_j - (2\frac{\mu_{i+1,j} - \mu_{i-1,j}}{\Delta_j} + 1)\mu_{1,j} + (\nu_{1y})_{i,j} = 0, \mu_j^* = 2\delta_j - \delta_j'^2 - \mu_1. \tag{21}$$

На линии слабого разрыва получим

$$\delta_j = 1, \mu_j = 1. \tag{22}$$

Задача (14)–(19) решается методом секущих (f – левая часть уравнения (19)) [2]:

$$\mu_{i,j}^{(k+1)} = \mu_{i,j}^{(k)} - \frac{f(\mu_{i-1,j}^{(k)}, \mu_{i+1,j}^{(k)}, \mu_{i,j}^{(k)}, \mu_{i,j-1}^{(k)}, \mu_{i,j+1}^{(k)})}{f'_{\mu_{i,j}}(\mu_{i-1,j}^{(k)}, \mu_{i+1,j}^{(k)}, \mu_{i,j}^{(k)}, \mu_{i,j-1}^{(k)}, \mu_{i,j+1}^{(k)})} \tag{23}$$

где $f'_{\mu_{i,j}} = 4(\mu_{i+1,j} - 2\mu_{i,j} + \mu_{i-1,j}) - 8(\mu_{i,j} - \delta_j) - 4\left(\frac{\Delta i}{\Delta j}\right)^2$.

Таким образом, решение краевой задачи для внутренних узлов состоит в применении алгоритма (23) совместно с условиями для граничных узлов (20). Уточнение фронта ударной волны (21) также производится по методу секущих.

Начальное приближение для поля давления строится по методу прямых ($Y = 0, Y = Y_A, Y = -H, (H \gg 1)$) [1, 2]:

$$\mu(\delta, Y) = \left[\frac{Y^2(3H + Y)}{2H^3} - \frac{Y_A(3H + Y_A)Y(2H^2 + 3HY + Y^2)}{2H^3(2H^2 + 3HY_A + Y_A^2)} \right] \mu_- + \frac{Y(2H^2 + 3HY + Y^2)}{Y_A(2H^2 + 3HY_A + Y_A^2)} \mu_0, \mu_- = 1 - K^2(-H) \left(\sqrt{1 - \frac{\delta - 1}{K^2(-H)}} - 1 \right). \tag{24}$$

Функция $\mu_0 = \mu_0(\delta)$ вычисляется при подстановке (24) в (17) на прямой $Y = Y_A$ (при удовлетворении условий в точке A ($\mu = \mu_0, \delta = 1, Y = Y_A$) и в точке E ($\delta = -\delta_0, \mu = \mu_1, Y = Y_A$)):

$$\mu_0 = \mu_A - (\mu_A - \mu^*) \sqrt{(\delta_A - \delta)(\mu_A - \mu^*)^{-1}}. \tag{25}$$

Ударный фронт CDA замыкает область разрежения DBA, в которой давление падает от $\mu = 1$ до $\mu = 0$. Начальное положение фронта находится в полиномиальном виде [1], при построении которого учитываются условия в характерных точках (C, D, A).

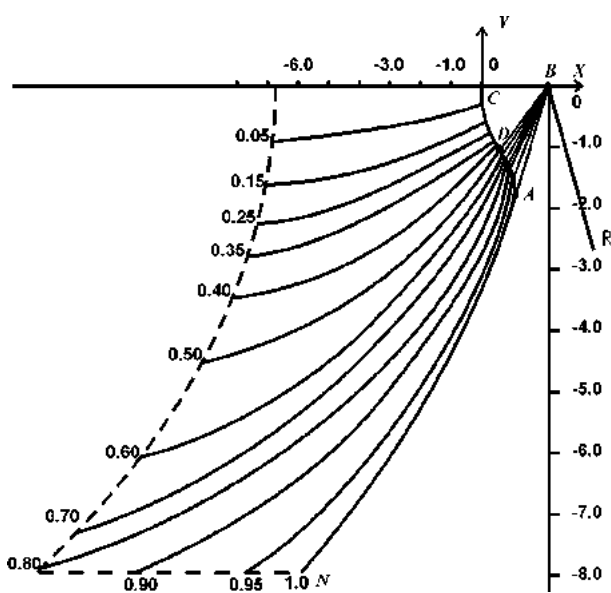


Рис. 4

На рис. 4 построены ударно-волновая структура и поле давления, соответствующие случаю отражения от свободной поверхности, разделяющей газ и ГЖС с образованием ударной волны, замыкающей зону разрежения при $\alpha^v = 2.147$. Приведенные результаты (см. рис. 4) соответствуют классу задач отражения УВ от свободной поверхности, разделяющей газ и ГЖС с образованием ударной волны, замыкающей зону разрежения, с различными интенсивностями ϵ_{10} , углами наклона α в средах с различными газосодержаниями γ , для которых параметр подобия α^v фиксирован.

Результаты расчета показывают, что в потоке за волной разрежения формируется «висячая» УВ CDA. Впервые, как показал анализ, указанный эффект возникает при $\alpha^v = 2,098$. Протяженность УВ возрастает при возрастании параметра α^v ($\alpha^v \geq 2.098$).



При решении краевой задачи для получения окончательной точности ($\varepsilon = 0,005$) потребовалось решение серии из двух краевых задач. В каждой серии итерационный процесс по полю потребовал 12 итераций. При реализации итерационного процесса по полю и фронту потребовал порядка 15 итераций.

Полученные результаты качественно соответствуют экспериментальным данным [3–5]. Отмечено также, что установленные при локальном анализе границы перехода $\alpha^v = \alpha_1^{v*} = 1,0$ – от нерегулярного отражения к регулярному и $\alpha^v = \alpha_2^{v*} = 2,098$ от регулярного к регулярному с образованием ударной волны, замыкающей зону разрежения, соотносятся с экспериментальными данными [4, 5]. Построенные поля давления качественно соответствуют данным, полученным в эксперименте, и позволяют провести детальный анализ полей давления и скоростей и исследовать возникающие особенности в случае отражения с образованием ударной волны, замыкающей зону разрежения.

Библиографический список

1. Шиндяпин Г.П., Ковалев А.Д. Математическое моделирование в задачах динамики многофазных сред. Пособие. Саратов, Изд-во Саратов. ун-та, 1990. Ч.2.
2. Шиндяпин Г.П. Нелинейные взаимодействия ударных волн в газах и газожидкостных средах: Учеб. пособие. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1997.
3. Паркин Б.П., Гилмор Ф.Р., Броуд Г.Л. Ударные волны в воде с пузырьками воздуха. Подводные и подземные взрывы. М.: Мир, 1974. С. 152–258.
4. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г. и др. Экспериментальные исследования ударных волн в жидкости с пузырьками газа // Волновые процессы в двухфазных системах / ИТФ СОАН СССР. Новосибирск, 1975.
5. Кедринский В.К., Вишков В.А., Дудникова Г.И., Шокин Ю.И. Усиление ударных волн при столкновении и фокусировке в пузырьковых средах // Докл. АН. 1998. Т. 361, № 1. С. 41–44.
6. Шиндяпин Г.П. Аналитическое исследование ударно-волновых структур и потоков при отражении и взаимодействии относительно слабых ударных волн // Аэродинамика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2001. Вып. 15 (18).
7. Вельмисов П.А., Шиндяпин Г.П. Асимптотическое исследование взаимодействий слабых ударных волн // Аэродинамика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1972. Вып. 1 (4).
8. Шиндяпин Г.П., Матутин А.А. Анализ ударно-волновых структур и потоков при нелинейной рефракции ударных волн // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2003. С. 162–165.
9. Шиндяпин Г.П. Об особенностях «сверхзвукового» взаимодействия слабых ударных волн и задаче преломления слабой ударной волны в воде на свободной поверхности // Аэродинамика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1974. Вып. 3(6).



УДК 533.6.011

ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЕТОНАЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ДЛЯ ПЕРСПЕКТИВНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Г.П. Шиндяпин, Я.Г. Сапунков, С.П. Шевырѐв,
В.А. Поршневу, Н.В. Федорец, В. Н. Федорец

Саратовский государственный университет,
кафедра вычислительного эксперимента в механике,
кафедра прикладной информатики
E-mail: shev@sgu.ssn.runnet.ru

В работе приводится одна из разработанных авторами методик по расчёту газодинамических параметров в импульсном детонационном двигателе с диффузором, которая не уступает мировому уровню. Построенная математическая модель и вычислительный эксперимент с этой моделью показывают, что диффузор увеличивает КПД детонационного двигателя.

Развитие авиационной и ракетно-космической техники определяется в основном энергетическими возможностями силовых установок, в качестве которых выступают реактивные двигатели. Современные реактивные двигатели достигли своего совершенства и дальнейшее их развитие будет осуществляться эволюционным путѐм, т.е. за счёт доработок отдельных конструкторских решений. Для революционного развития двигателей необходимо решить принципиально новые научные задачи.

Одним из возможных путей улучшения экономичности двигателей является переход от цикла с подводом тепла при постоянном давлении ($p=\text{const}$) к циклу с подводом тепла при постоянном объѐме ($V=\text{const}$). Доказано [4, 8], что при таком переходе можно обеспечить повышение термического КПД цикла в 1,3 – 1,5 раза.

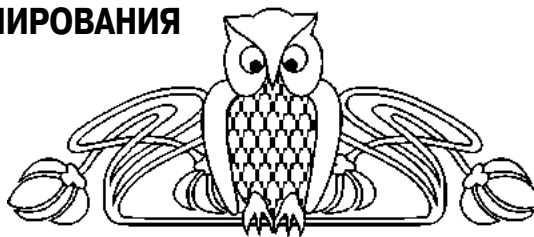
Однако попытки практической реализации двигателей, использующих цикл $V=\text{const}$, предпринимавшиеся неоднократно на протяжении многих десятилетий, неизменно заканчивались неудачей. Это объясняется как сложностью процессов, проходящих в детонационной камере и в основных узлах и системах двигателя, так и сложностью устройств, инерционностью и низкой пропускной способностью механизмов этих двигателей, организацией газодинамического управления и др.

В работах [6, 10, 26] поставлены проблемы, которые необходимо решить при разработке энергосиловых детонационных установок, и намечены пути их решения. Особое внимание уделено разработке этих установок применительно к летательным аппаратам (детонационные двигатели).

В настоящей работе: 1) рассматриваются математические и физические аспекты проблемы детонационных двигателей; 2) обсуждается разработанная авторами модель детонационного двигателя, а также методики расчёта газодинамических параметров в импульсном детонационном двигателе с диффузором; 3) оцениваются перспективы развития и применения детонационных двигателей.

РАЗРАБОТКА ДЕТОНАЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ – ПЕРСПЕКТИВНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ В РАЗВИТИИ ТЕПЛОВЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ НОВОГО ПОКОЛЕНИЯ

Тепловые двигатели – значительный и разнообразный по способам технической реализации преобразования энергии класс двигателей, в которых энергия первичных источников вначале преобразуется в тепловую энергию рабочего тела, а затем в механическую или кинетическую энергию направленного движения струи.



**Problems of Mathematical Modeling of Knocking Engine for
Perspective Aircrafts**

**G.P. Shindyapin, Y.G. Sapunkov, S.P. Shevyrev,
V.A. Porphnev, N.V. Fedorets, V.N. Fedorets**

This research contains one of the world-class developed authorized approaches of computing gas-dynamic properties for pulse knocking engine with diffuser. Constructed mathematical model and computational experiment on it demonstrates that diffuser is increasing knocking engine efficiency.



Использование ракетных двигателей в плотных слоях атмосферы из-за чрезвычайно высоких удельных расходов топлива не может обеспечить большой продолжительности их работы, поэтому как ЖРД, так и РДТТ с успехом используются только на активном участке траектории в качестве маршевого двигателя. Этот недостаток практически отсутствует у ВРД. Используемый в качестве одного из компонентов топлива воздух (окислитель) делает ЛА с ВРД весьма экономичными при достаточно большой дальности полёта.

Однако основными трудностями при разработке таких двигателей являются:

- подача топлива в сверхзвуковой воздушный поток;
- реализация смешения топлива с воздухом на коротком отрезке движения потока;
- зажигание смеси и обеспечение её стабильного горения.

Эти трудности заставляют исследователей искать альтернативные пути развития нового типа реактивного двигателя.

Дальнейший прогресс в улучшении экономичности силовых установок и их габаритно-массовых характеристик возможен, в частности за счет использования *газовой детонации* в качестве рабочего процесса. Одним из таких путей является разработка двигателей с детонационным горением.

Детонационные реактивные двигатели (ДРД) – это новый класс двигательных установок, создающих тягу за счёт детонационного сгорания рабочей смеси. Принцип их работы заключается в использовании детонационной волны, распространяющейся со сверхзвуковой скоростью по заранее смешанной топливоздушной смеси и вызывающей большие давления в камере сгорания, и вследствие этого большой импульс тяги. Для ДРД характерно большое разнообразие используемых компонент топлива как по агрегатному состоянию, так и по структуре. Наиболее целесообразной топливной парой является природный газ или керосин + кислород. В качестве окислителя для полета в пределах атмосферы целесообразно использовать воздух.

ДРД могут относиться к ракетным и к реактивным двигателям, непрерывно работающим, пульсирующим двигателям, работа которых основана на принципе детонационного (сверхзвукового) горения.

ПРЕИМУЩЕСТВА ДЕТОНАЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ПО СРАВНЕНИЮ С ДРУГИМИ ТИПАМИ РЕАКТИВНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

1. Более высокое значение термодинамического КПД при детонации по сравнению с аналогичным КПД при горении. На рис. 1 приводятся взятые из [39] результаты вычислений термических КПД циклов горения при $p=\text{const}$ и детонации при $V=\text{const}$ как функции от степени повышения давления $B = p_2/p_1$.

Процесс детонации при постоянном объёме предполагает значительное улучшение эффективности по сравнению с изобарическим циклом.

Приведём формулы для КПД.

КПД цикла $p=\text{const}$

$$A = A(M, g, v) ;$$

КПД цикла $V=\text{const}$

$$A_f = Mf + g(x) \int_0^{\pi} f(t)v(t)dt, Mf = \int_0^{\pi} M(x,t)f(t)dt, 0 \leq x \leq \pi$$

Разница между КПД приведённых выше циклов – в множителе $\frac{k(\lambda^{1/k} - 1)}{(\lambda - 1)}$. Величина

последнего выражения всегда меньше единицы, следовательно, КПД цикла процесса детонации больше КПД цикла процесса горения.

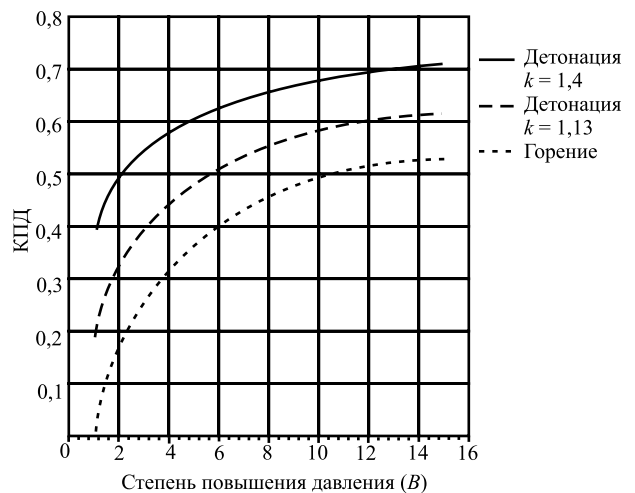


Рис. 1. Зависимость КПД циклов горения и детонации от степени повышения давления B



Выполненные расчёты показали [8], что термический КПД цикла с подводом тепла при $V=const$ возрастает с ростом степени повышения давления B и степени изохорного повышения давления λ .

Например, при степени повышения давления $B=12$ процесс при постоянном объёме, в зависимости от показателя адиабаты, предполагает увеличение КПД от 18 до 37% по сравнению с циклом постоянного давления. Следовательно, замена процесса горения при постоянном давлении детонацией даст экономию в расходе топлива. К тому же замена дефлаграционного горения на детонационное может дать экономию в расходе топлива.

2. Более высокое значение удельного импульса при скоростях полёта до $4M$ по сравнению с другими типами реактивных двигателей. На рис. 2 приведены данные из [40]. Это преимущество объясняется более полным использованием энергии топлива за счет подвода тепла к газовому потоку при постоянном объёме (с использованием цикла $V=const$) и, значит, при более высоких степенях повышения давления в цикле, недостижимых для ВРД традиционных схем [10].

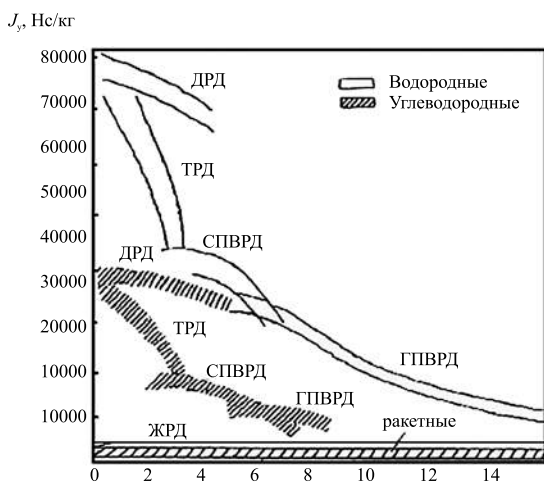


Рис. 2. Зависимости удельного импульса (J_y) от числа Маха (M)

Дальнейшие исследования позволяют сделать вывод о том, что ДРД также будут иметь высокий удельный импульс при диапазоне числа Маха $7 \leq M \leq 10$ за счёт разработки принципиально нового типа двигателя с организацией непрерывного детонационного процесса с образованием стационарной детонационной волны.

3. Для ДРД характерно *большое разнообразие используемых компонент топлива как по агрегатному состоянию, так и по структуре*. ДРД может работать на компонентах топлива любого агрегатного состояния (твёрдое, жидкое, газообразное, псевдосжиженное) с их обязательной последующей газификацией [18]. Это позволяет подобрать нетоксичные и дешёвые компоненты топлива с широкой сырьевой базой. В качестве окислителя для ДРД при полете в пределах атмосферы целесообразно использовать заборный воздух.

4. *Скорость преобразования химической энергии топлива в продуктах детонации значительно выше, чем в продуктах сгорания*, поэтому скорость детонации в отличие от скорости горения не зависит от изменения параметров окружающей среды. Более полное преобразование химической энергии топлива позволит получить экологически более чистые конечные продукты реакции, что частично может затруднить работу средств ПРО и ПВО.

5. ДРД являются работоспособными при малом давлении на входе. Детонационный процесс возможен даже при атмосферном давлении.

6. В ДРД за малое время в небольшом объёме сжигается большое количество топливно-воздушной смеси, что позволяет несколько уменьшить массовые или геометрические характеристики ЛА.

Выполненный анализ двигателей показал, что интерес к теоретическим и экспериментальным исследованиям, направленным на разработку ДРД, непрерывно растёт. Высокоразвитые в техническом отношении страны считают, что развитие ДРД наряду с СПВРД и ГПВРД является одним из перспективных направлений в развитии ракетодвигателестроения и становится задачей ближайшего будущего. Этот интерес объясняется, с одной стороны, возможным широким внедрением данного типа двигателя, а с другой – совершенствованием аналитических методов расчета и проведения экспериментальных исследований.

РАЗРАБОТКА ДЕТОНАЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ. СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ.

Первые предложения об использовании двигателей с неустойчивым горением были впервые оценены в самом начале и повторно предложены в 40-х гг. XX в. Разработать и оптимизировать их



конструкцию было крайне трудно, из-за того что они работают в «прерывающемся», или «пульсирующем», режиме. Двигатели с непрерывным горением при постоянном давлении (ракетный двигатель, турбореактивный и т.д.) обеспечивали более простое управление и оптимизацию характеристик.

Первые экспериментальные попытки по возможности использования детонационных процессов для разработки двигателей были проведены в 1941 г., а затем продолжены Nicholls с соавторами в 1957 г. [36] применительно к водородно-воздушной смеси.

На основании выполненных теоретических расчетов и экспериментальных исследований Nicholls получил сопоставительный анализ возникновения и развития детонации в водородно-кислородных и ацетилено-кислородных смесях. В середине 60-х гг. Nichols выполнил эксперименты на двигателе с вращающейся детонационной волной.

Дальнейшие исследования были выполнены Helman с соавторами [32] с использованием этилен-кислородных и этиленвоздушных смесей, а затем Eidelman с соавторами (1994 г.). Они использовали разнообразные как по устройству, так и по принципу действия ударные детонационные трубы.

С целью разработки детонационных двигателей Bussing и Hinkey с соавторами [33, 37] в 1995 г. приступают к фундаментальным исследованиям механизмов возникновения и развития детонационных процессов. Bussing предложил схему детонационного двигателя с использованием инициатора, размещенного в передней части детонационной трубы. Выполненные исследования помогли выявить основные составные части и системы детонационного двигателя, а также довести их модели до конструктивного решения.

Проведенные эксперименты продемонстрировали возможность разработки одно- и многоциклических детонационных двигателей. Они легли в основу конструкции модели детонационного двигателя с ротационным клапаном и подготовили условия для дальнейших исследований в области разработки данного класса двигателей.

Американские учёные Кэмбер (1988 г.), Эйдельман (1990 г.) с соавторами [31, 32] методом численного моделирования проанализировали работу ДРД. Отмечено, что проблема применения и использования детонации в двигательных установках объединяет много сложных явлений, до конца ещё полностью не понятых. Не была подтверждена возможность существования ДРД как жизнеспособной и эффективной модели двигателя.

Тем не менее эти исследования помогли США обеспечить в настоящее время лидерство в вопросах разработки ДРД.

Модели детонационных двигателей различных зарубежных фирм как и ударные детонационные трубы отличаются друг от друга и по устройству, и по принципу действия.

Испытатели и промышленные партнёры космического центра Marshall сконструировали небольшую модель ДРД для наземных испытаний. После двух лет лабораторных испытаний было установлено, что можно разработать данный тип двигателя на водородно-кислородной топливной смеси с частотой 100 Гц. В свою очередь NASA со своими промышленными партнёрами также доказали, что ДРД может обеспечить тягу в условиях космоса.

Технология ДРД в космическом центре Marshall разрабатывается для верхних ступеней ракет-носителей, которые выводят спутники на высокие орбиты. Усовершенствованную технологию двигателя можно также использовать для космических целей, требующих широкий диапазон изменения тяги.

В настоящее время разработкой ДРД занимаются многие научные центры и вузы США: ASI, NPS, NRL, APRI, MURI, Stanford, USAF RL, NASA Glenn, DARPA-GE C&RD, Combustion Dynamics Ltd, Defense Research Establishments, Suffield and Valcartier, University of Poitiers, University of Texas at Arlington, University of Poitiers, McGill University, Pennsylvania State University, Princeton University.

Для разработки ДРД в ряде стран созданы программы, над реализацией которых работают ведущие организации. Например, в США над этой проблемой уже в течение семи лет работают Министерство обороны США и NASA, а также 5 аэрокосмических фирм, объединённых в группу NASP. Ближе всех к конечной разработке детонационных двигателей подошёл концерн ASI, который считает, что **разработка**



детонационных двигателей направлена на обеспечение технического прорыва в ряде отраслей: космической, авиационной, на транспорте, а также в военной сфере. ASI считает, что разработка таких двигателей обеспечит скачок в области создания ВРД для коммерческих и военных целей. Такие двигатели могут быть разработаны за счёт интеграции различных типов двигателей (например, ДРД + ПВРД) и обеспечения многорежимного цикла работы.

По мнению специалистов центра Marchall, экспериментальный вариант детонационного двигателя для ракетно-космических систем будет отработан к 2005 г., а полномасштабный двигатель – к 2009 г.

Первые отечественные экспериментальные исследования относятся к 70-м гг., и к настоящему времени создан определённый научно-технический задел по конструктивному оформлению ДРД, особенностям организации рабочего процесса и термодинамическим расчётам.

В настоящее время в нашей стране над этой актуальной проблемой в теоретическом плане работают следующие коллективы: Институт химической физики РАН, Институт машиноведения РАН, Институт высоких температур РАН, Новосибирский институт гидродинамики, Московский государственный университет, Московский государственный авиационный институт, Новосибирский государственный университет, Чебоксарский государственный университет, Саратовский государственный университет и др. Ряд организаций страны приступил к интенсивным исследованиям, направленным на разработку детонационных двигателей.

Решением научного совета по горению и взрыву, созданного при Президиуме РАН РФ в 2002 г., отмечено, что развитие детонационных ЭСУ является актуальной и перспективной задачей.

Определённый вклад в разработку ДРД внёс Саратовский государственный университет (СГУ). В рамках проекта «Разработка детонационных двигателей для воздушных транспортных средств на основе вычислительного и натурного экспериментов» по программе Министерства образования Российской Федерации «Научные исследования высшей школы по приоритетным направлениям науки и техники» были получены следующие научные результаты:

- разработаны математические модели детонации и распространения ударных волн, адекватно описывающие сложные газодинамические процессы, протекающие в детонационных двигателях. Математические модели позволяют в ряде случаев упростить анализ краевых задач и учесть с помощью класса точных решений характер течений за детонационными и ударными фронтами [8, 17, 19, 22];
- рассмотрены оригинальные схемы течений, допускающие расчёт как прямоточных камер сгорания, так и камер с расширяющейся диффузорной частью [15, 16, 21, 25];
- разработана методика расчёта основных параметров и основных газодинамических характеристик детонационных двигателей на различных стадиях возникновения и распространения детонационных и ударных волн [13, 16, 20, 21, 28]. Расчёты с помощью разработанных математических моделей конкретных детонационных камер показали весьма высокую степень достоверности результатов при сравнении с экспериментальными данными;
- разработана методика испытаний детонационных камер и обработки экспериментальных данных действующих моделей детонационных двигателей [5, 7, 9, 23];
- разработаны конструктивно-компоновочные схемы ДРД, его основных узлов, систем управления и регулирования его работы, а также двигателей на основе генератора Гартмана [11, 12, 14, 23, 24, 25, 27, 29].

Изготовленные макеты детонационных камер и основных узлов детонационных двигателей для экспериментальных исследований демонстрировались на отчётной конференции-выставке «Транспорт» научно-технической программы Минобрнауки России [30].

Ниже приводится одна из разработанных методик по расчёту газодинамических параметров в импульсном детонационном двигателе с диффузором, которая не уступает мировому уровню, о чём свидетельствуют отзывы многих специалистов, высказанные на различных научно-технических конференциях и семинарах [25].



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИМПУЛЬСНОГО ДЕТОНАЦИОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

В настоящей работе предлагается метод расчета движения продуктов детонации в цилиндрической детонационной камере длиной l_1 , соединенной с коническим диффузором с углом отклонения образующей конуса от оси симметрии β и длиной l_0 . Приведены результаты расчетов движения продуктов детонации и воздуха в детонационном двигателе при отсутствии диффузора и с диффузором.

Постановка задачи. Ось Ox направляется вдоль оси детонационной камеры и диффузора. Сечение $x=0$ соответствует закрытому концу камеры, сечение $x=l_1$ разделяет в начальный момент взрывчатую смесь, находящуюся в детонационной камере левее этого сечения, и воздух в диффузоре. Сечение $x=l_1+l_0$ соответствует открытому концу диффузора. У закрытого конца камеры создается детонационная волна Чепмена–Жуге, которая движется по камере в положительном направлении оси Ox . На рис. 3 изображена картина течения продуктов детонации и воздуха на плоскости Oxt . Указаны основные линии сильных и слабых разрывов.

В момент t_1 , когда детонационная волна D достигнет сечения $x = l_1$, возникает произвольный разрыв, который распадается на ударную волну S , которая движется по воздуху, находящемуся в диффузоре, и приводит его в движение, контактный разрыв C , который разделяет воздух и продукты детонации, и волну разрежения в продуктах детонации, фронт которой F_2 .

На рис. 3 область 0 соответствует диффузору, который в начальный момент времени заполнен воздухом, область 1 – камере с взрывчатой смесью, область 2 – центрированной волне разрежения в продуктах детонации за фронтом детонации. Линия F_1 – задний фронт центрированной волны разрежения, он отделяет ее от области покоя 3 в продуктах детонации. Область 4 соответствует возмущенному движению продуктов детонации, а область 5 – воздуху, прошедшему через ударную волну S .

В момент времени t_2 ударная волна достигает открытого сечения диффузора и воздух начинает вытекать из диффузора. В момент времени t_3 контактный разрыв достигает открытого сечения диффузора. В этот момент времени весь воздух вытеснен из диффузора и продукты детонации начинают вытекать в пространство из диффузора.

Уравнения движения, начальные и граничные условия. Обозначим через $S(x)$ площадь сечения камеры и диффузора. Через p_3, ρ_3, a_3 обозначим давление, плотность и скорость звука в области покоя 3 соответственно. Движение продуктов детонации в камере и диффузоре оказывается изэнтропическим и в одномерном приближении описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v S)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{v^2}{2} + \frac{1}{\gamma_2 - 1} \rho_3^2 \left(\frac{\rho}{\rho_3} \right)^{\gamma_2 - 1} \right] = 0, \quad p = p_3 \left(\frac{\rho}{\rho_3} \right)^{\gamma_2}. \quad (1)$$

В системе уравнений (1) через ρ, p, v, γ_2 обозначены плотность, давление, скорость и отношение теплоемкостей продуктов детонации соответственно.

Движение воздуха в диффузоре в одномерном приближении описывается уравнениями:

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v S)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\gamma_0 p}{S} \frac{\partial}{\partial x} (v S) = 0. \quad (2)$$

В системе уравнений (2) ρ, p, v, γ_0 – плотность, давление, скорость и отношение теплоемкостей воздуха соответственно.

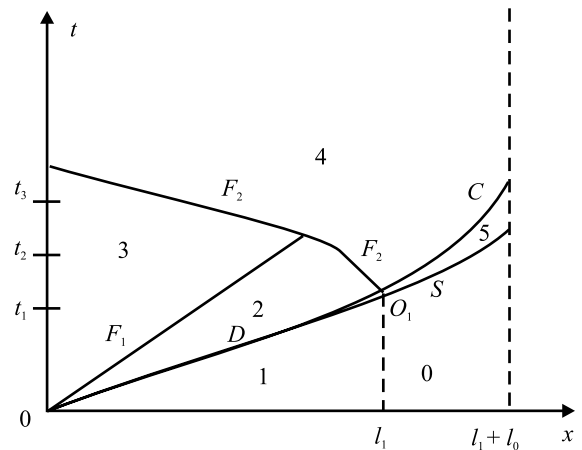


Рис. 3. Диаграмма движения фронтов в камере и в диффузоре детонационного двигателя



Движение детонационной волны и продуктов детонации на промежутке времени $0 \leq t \leq t_1$ является автомодельным, и аналитическое решение задачи для этого промежутка времени описано ниже в следующем пункте. Состояние продуктов детонации в момент времени $t = t_1$ является начальным состоянием для расчета их дальнейшего движения. Начальные условия для воздуха при $t = t_1$ имеют вид

$$\text{при } l_1 \leq x \leq l_1 + l_0 \quad p = p_0, \quad \rho = \rho_0, \quad v = 0, \quad (3)$$

где p_0, ρ_0 – атмосферное давление и плотность воздуха при атмосферном давлении соответственно.

Решение систем дифференциальных уравнений (1), (2) после момента времени t_1 должно удовлетворять граничным условиям: на закрытом конце камеры, на контактном разрыве, на ударной волне и на выходном сечении диффузора. На дне камеры выполняются условия:

$$x = 0, \quad t > t_1, \quad v = 0. \quad (4)$$

Скорость движения контактного разрыва обозначим через U_c , через v_{c4}, p_{c4} – скорость и давление в области 4 в продуктах детонации непосредственно перед контактном разрывом, а через v_{c5}, p_{c5} – скорость и давление воздуха в области 5 непосредственно за контактном разрывом. Тогда условия на контактном разрыве при $t > t_1$ $x = x_c$, где $x = x_c(t)$ – закон движения контактного разрыва, запишутся в виде

$$v_{c4} = v_{c5} = U_c; \quad p_{c4} = p_{c5}. \quad (5)$$

Скорость движения ударной волны S обозначим через U_s , скорость звука в области 0 перед ударной волной обозначим через a_0 . Обозначив через $v_{s5}, p_{s5}, \rho_{s5}$ – скорость, давление и плотность в воздухе в области 5, непосредственно за ударной волной получим:

$$\begin{aligned} v_{s5} &= U_s \frac{2}{\gamma_0 + 1} (1 - M_0^{-2}), \quad p_{s5} = p_0 \left(\frac{2\gamma_0}{\gamma_0 + 1} M_0^2 - \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1} \right), \\ \rho_{s5} &= \rho_0 \frac{(\gamma_0 + 1) M_0^2}{(\gamma_0 - 1) M_0^2 + 2}, \quad M_0^2 = \frac{U_s^2}{a_0^2}, \quad a_0 = \sqrt{\gamma_0 \frac{p_0}{\rho_0}}. \end{aligned} \quad (6)$$

В выходном сечении диффузора выполняется условие для давления

$$t > 0, \quad x = l_1 + l_0, \quad p = p_0. \quad (7)$$

При этом проверяется выполнение ограничения на скорость: скорость течения газов в выходном сечении меньше или равна скорости звука. Если это условие нарушается, то давление в выходном сечении диффузора определяется из условия, что скорость течения газов в выходном сечении равна скорости звука. Таким образом, параметры течения продуктов детонации и воздуха в детонационном двигателе определяются в результате решения краевой задачи для систем дифференциальных уравнений (1) и (2) для продуктов детонации и воздуха соответственно с начальными условиями (3) и граничными условиями (4)–(7).

Определение параметров течения продуктов детонации в камере на этапе распространения фронта детонации. На этом этапе в камере возникают три области. Область 1 – область исходной взрывчатой смеси, расположена между сечением, отделяющим детонационную камеру от диффузора, и фронтом детонации. Область 2 – область центрированной волны разрежения в продуктах детонации. Её передний фронт расположен непосредственно за фронтом детонации, а задний фронт определяет подвижную правую границу области 3 – области покоя в продуктах детонации, которая прилегает к закрытому концу камеры. В области 2 происходит непрерывное изменение параметров течения от их значений за фронтом детонации до значений в области покоя 3. Введем обозначения γ_1, ρ_1, p_0 – отношение теплоёмкостей, плотность и давление в области исходной взрывчатой смеси; γ_2 – отношение теплоёмкостей в продуктах детонации, q – количество тепла, которое выделяется при сгорании единицы массы взрывчатой смеси, давление вне камеры p_0 . Для удобства расчётов вводится безразмерная величина h^2 , которая определяется согласно выражению

$$h^2 = 2q \frac{\rho_1}{p_0}. \quad (8)$$



Скорость звука a_1 во взрывчатой смеси определяется из соотношения

$$a_1 = \sqrt{\gamma_1 \frac{p_0}{\rho_1}}. \quad (9)$$

По камере с постоянной скоростью U распространяется фронт детонации Чепмена–Жуге. В этом случае число Маха M_1 , связанное с U и a_1 выражением

$$M_1 = \frac{U}{a_1} = U \sqrt{\frac{\rho_1}{\gamma_1 p_0}} \quad (10)$$

определяется по формуле

$$M_1 = \sqrt{\frac{1}{\gamma_1} \left[\frac{1}{2} h^2 (\gamma_2^2 - 1) + \frac{\gamma_2^2 - \gamma_1}{\gamma_1 - 1} + \sqrt{\left[\frac{1}{2} h^2 (\gamma_2^2 - 1) + \frac{\gamma_2^2 - \gamma_1}{\gamma_1 - 1} \right]^2 - \gamma_2^2} \right]}. \quad (11)$$

Формула (11) получена из законов сохранения массы, количества движения и энергии на фронте волны детонации Чепмена–Жуге [2].

Давление p_d , плотность ρ_d , скорость звука a_d и скорость движения продуктов детонации v_d непосредственно за фронтом детонации в режиме Чепмена–Жуге определяются соотношениями:

$$p_d = \frac{p_0}{\gamma_2 + 1} (1 + \gamma_1 M_1^2), \quad \rho_d = \rho_1 \frac{\gamma_1 (\gamma_2 + 1) M_1^2}{\gamma_2 + 1 + \gamma_1 M_1^2}, \quad a_d = \sqrt{\gamma_2 \frac{p_d}{\rho_d}}, \quad v_d = U - a_d. \quad (12)$$

Движение продуктов детонации на этапе распространения детонационной волны является автомоделным. Расстояние x отсчитывается вдоль камеры от ее закрытого конца. Моменту возникновения детонации в камере соответствует момент времени $t = 0$. Распределение параметров продуктов детонации в областях 2 и 3 в автомоделных переменных определяется по формулам:

$$\frac{p}{p_d} = \begin{cases} [f(\xi)]^{\frac{2\gamma_2}{\gamma_2-1}}, & \text{если } \xi_* \leq \xi \leq 1; \\ b^{\frac{2\gamma_2}{\gamma_2-1}}, & \text{если } 0 \leq \xi < \xi_*; \end{cases}, \quad \frac{\rho}{\rho_d} = \begin{cases} [f(\xi)]^{\frac{2}{\gamma_2-1}}, & \text{если } \xi_* \leq \xi \leq 1; \\ b^{\frac{2}{\gamma_2-1}}, & \text{если } 0 \leq \xi < \xi_*; \end{cases},$$

$$\frac{v}{v_d} = \begin{cases} \frac{2}{\gamma_2 + 1} \left[\frac{U}{v_d} \xi + \frac{\gamma_2 - 1}{2} - \frac{a_d}{v_d} \right], & \text{если } \xi_* \leq \xi \leq 1; \\ 0, & \text{если } 0 \leq \xi < \xi_*; \end{cases} \quad (13)$$

где

$$f(\xi) = 1 + \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1} \left[\frac{U}{a_d} \xi - \frac{v_d}{a_d} - 1 \right]; \quad \xi = \frac{x}{Ut}; \quad \xi_* = \frac{1}{U} \left[a_d - \frac{\gamma_2 - 1}{2} v_d \right]; \quad b = f(\xi_*) = 1 - \frac{\gamma_2 - 1}{2} \frac{v_d}{a_d}. \quad (14)$$

В соотношениях (13) и (14) значение автомоделной переменной $\xi = 0$ соответствует дну камеры, $\xi = \xi_*$ – заднему фронту волны разрежения, который отделяет область покоя в продуктах детонации от области централизованной волны разрежения, $\xi = 1$ – фронту детонации.

Определение параметров течения продуктов детонации после прихода детонационной волны к открытому концу камеры в случае отсутствия диффузора. В этом случае после прихода фронта детонации к открытому концу камеры начинается истечение продуктов детонации из камеры. Параметры течения продуктов детонации в камере на этом этапе определяются с помощью численного интегрирования уравнений одномерного нестационарного течения идеального газа (1) методом Лакса–Вендроффа. Начальные условия для этого этапа определяются по формулам (13) и (14) для момента окончания предыдущего этапа. На концах камеры выполняются соответствующие граничные условия (4) при $x = 0$ и (7) при $x = l_1$. Для решения краевой задачи с помощью ЭВМ составлена программа на языке PASCAL.

Теоретическое значение суммарного импульса давления I_1^t на дно камеры определяется по формуле

$$I_1^t = S \int_0^{t_k} [p(0, t) - p_0] dt, \quad (15)$$



где $p(0,t)$ – давление на дне камеры у закрытого конца, t_k – момент времени, при котором скорость продуктов детонации на выходе из камеры обращается в нуль.

Реальное значение импульса тяги I_1 определяется из зависимости

$$I_1 = K_{\Pi} \cdot K_3 \cdot \alpha \cdot I_1'$$

где K_{Π} – коэффициент качества продувки камеры; K_3 – коэффициент качества заполнения камеры; α – коэффициент избытка окислителя.

Коэффициенты K_{Π} , K_3 , α определены экспериментально.

Расчёты проводились для компонентов топлива и конкретной детонационной камеры, на которых проводился натурный эксперимент, включающий 106 детонационных циклов.

Расчет параметров течения продуктов детонации и воздуха в случае наличия диффузора. Для решения краевой задачи в случае наличия диффузора, который в начальный момент заполнен воздухом, были составлены две программы на языке *PASCAL*, в которых были реализованы разные методы расчета движения воздуха в диффузоре. В первой программе движение воздуха между контактным разрывом и открытым концом диффузора вычислялось по формулам, которые определяют движение идеального газа под действием поршня в трубе переменного сечения. Для расчета движения продуктов детонации в камере и диффузоре использовался метод Лакса–Вендроффа. Во второй программе для определения параметров движения продуктов детонации и воздуха также использовался метод Лакса–Вендроффа. При этом явно выделялся только контактный разрыв, который разделяет продукты детонации и воздух. Сравнение результатов расчета по первому и второму методам, реализованным в описанных выше программах, показывает на их хорошее соответствие друг другу. Это связано с тем, что воздух быстро вытесняется из диффузора продуктами детонации и основной вклад в суммарный импульс детонационного двигателя вносит движение продуктов детонации в камере и диффузоре и распределение давления в них. Расчеты и проведенные эксперименты показывают, что наличие диффузора существенно увеличивает суммарный импульс давления детонационного двигателя.

Расчеты по определению суммарного импульса давления. Расчеты движения продуктов детонации и воздуха в детонационном двигателе с диффузором проводились для различных значений угла β и длины диффузора l_0 , чтобы оценить влияние размеров диффузора на суммарный импульс.

Расчеты проводились для тех же исходных данных, что и в п. 4 со следующими значениями для отношений теплоемкостей: $\gamma_0 = 1.4$, $\gamma_1 = 1.38$, $\gamma_2 = 1.28$. Суммарный импульс в случае камеры с диффузором определялся по формуле, аналогичной (15), т.е. с учетом атмосферного давления в окружающей среде и с учетом геометрии диффузора. Результаты расчетов представлены в табл. 1 и 2.

В табл. 1 приведены значения отношений суммарного импульса при наличии диффузора к суммарному импульсу двигателя без диффузора.

В табл. 2 для тех же значений l_0 и β приведены длительности процессов внутри двигателя между моментом возникновения детонации у закрытого конца камеры и моментом обращения в нуль скорости движения продуктов детонации на открытом конце диффузора. Длительности указаны в 10^{-2} сек.

Таблица 1

β (град) l_0 (м)	0.0	2.5	5.0	7.5	10.0	12.5	15.0
0.05	1.0733	1.0870	1.1003	1.1134	1.1246	1.1350	1.1411
0.075	1.1105	1.1306	1.1506	1.1683	1.1844	1.1967	1.2120
0.1	1.1445	1.1730	1.1994	1.2238	1.2459	1.2639	1.2832
0.125	1.1739	1.2092	1.2431	1.2730	1.2999	1.3230	1.3383
0.15	1.2001	1.2446	1.2849	1.3230	1.3567	1.3856	1.4113
0.175	1.2256	1.2777	1.3246	1.3684	1.4086	1.4459	1.4775
0.2	1.2545	1.3158	1.3716	1.4215	1.4680	1.5126	1.5619
0.225	1.2886	1.3594	1.4237	1.4816	1.5345	1.5833	1.6289



Таблица 2

β (град) l_0 (м)	0.0	2.5	5.0	7.5	10.0	12.5	15.0
0.05	0.1581	0.1572	0.1562	0.1552	0.1547	0.1537	0.1537
0.075	0.1685	0.1668	0.1650	0.1637	0.1623	0.1617	0.1567
0.1	0.1790	0.1761	0.1738	0.1717	0.1695	0.1682	0.1626
0.125	0.1893	0.1856	0.1825	0.1790	0.1770	0.1745	0.1718
0.15	0.2002	0.1958	0.1919	0.1885	0.1848	0.1817	0.1759
0.175	0.2117	0.2066	0.2021	0.1980	0.1939	0.1889	0.1840
0.2	0.2236	0.2182	0.2134	0.2091	0.2054	0.2004	0.1915
0.225	0.2361	0.2301	0.2250	0.2207	0.2168	0.2135	0.2100

Из данных, приведенных в табл. 1, видно, что с увеличением длины диффузора и с увеличением угла его раскрытия суммарная величина импульса увеличивается. Как видно из табл. 2, с увеличением длины диффузора длительность промежутка времени, в течение которого воздух и продукты детонации истекают через выходное сечение диффузора, увеличивается, а с увеличением угла раскрытия диффузора уменьшается.

Пример расчета параметров течения в камере и диффузоре. Ниже приведены некоторые результаты расчета при тех же исходных данных для случая, когда $l_0 = 0.15$ м, $\beta = 10^\circ$. В этом случае число Маха для детонационной волны относительно взрывчатой смеси равно 5.36, скорость ее движения 1778 м/с, и она проходит через всю камеру, заполненную взрывчатой смесью, за 0.00016 с. Давление в продуктах детонации непосредственно за фронтом повышается в 17.82 раза и скорость их движения 755 м/с. В момент завершения детонации область покоя в продуктах детонации имеет протяженность 0.146 м и давление в ней в 6.58 раз выше атмосферного. В этот момент времени в сечении, в котором цилиндрическая камера соединяется с диффузором, возникает произвольный разрыв, в результате чего образуются ударная волна, контактный разрыв и волна разрежения. Начальная скорость движения ударной волны по воздуху равна 1184 м/с, в этот момент времени давление за ней повышается в 14.67 раза. Давление на дне камеры в продуктах детонации не изменяется в течение 0.00043 с. В момент времени 0.00035 с ударная волна достигает выходного сечения диффузора, и воздух начинает вытекать через него в окружающее пространство. В этот момент времени контактный разрыв находится в сечении диффузора с $x = 0.408$ м. В момент времени 0.0043 с контактный разрыв достигает выходного сечения диффузора. В этот момент времени весь воздух вытеснен из диффузора и начинается истечение продуктов детонации.

В табл. 3 для некоторых моментов времени, указанных в первой строке, во второй строке представлено отношение давления на дне камеры к атмосферному давлению, а в третьей строке – такая же величина в среднем сечении диффузора. Моменты времени указаны в 10^{-2} сек.

Таблица 3

0.0431	0.0663	0.0856	0.1050	0.1243	0.1436	0.1668	0.1823
6.579	3.815	2.711	1.978	1.351	0.912	0.584	0.443
3.815	1.825	1.841	1.002	1.000	0.653	0.950	0.903

В момент времени 0.001848с в выходном сечении диффузора скорость движения продуктов детонации становится отрицательной, т. е. воздух начинает поступать через это сечение в двигатель. Расчет проводился до этого момента времени. Из табл. 3 видно, что давление на дне камеры в этом промежутке времени монотонно уменьшается, давление в среднем сечении диффузора сначала уменьшается, затем его изменение принимает колебательный характер.



В случае обработки ДРД могут быть решены следующие задачи:

- 1) придание максимально возможной скорости полета ЛА, использующего химические компоненты топлива, за счет реализации непрерывного детонационного процесса;
- 2) возможность полета ЛА в широком диапазоне изменения высот и скоростей за счет разработки комбинированных детонационных двигателей;
- 3) улучшение маневренных свойств ЛА при подлёте к цели (причаливании, стыковке, коррекции на орбите и т.д.) за счет использования высокоточных, стабильных и быстродействующих ($\tau_{\text{имп}} = 10^{-4}\text{C}$) детонационных импульсов в реактивных системах управления повышенной точности.

Материалы исследований опубликованы в списке используемых источников, а также защищены патентами и свидетельствами РФ (№ 2066778, 2142058, 2106511, 34005, 34006, 34007, 6838, 20548, 20549, 27164). В настоящее время проводятся исследования по возможности использования генератора Гартмана в качестве элемента детонационного ДРД, что не имеет аналогов технического решения в мировой практике, а также выполняется НИР по разработке ДРД на основании решения Правительства РФ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ, Проект 205.01.01.030; а также по Гос. контракту №5144, по гранту Президента РФ № МК-2871.2005.10.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Войцеховский Б.В., Митрофанов В.В., Топчий М.Е.* Структура фронта детонации в газах. Новосибирск, 1963. 168 с.
2. *Льюис Б., Эльбе Г.* Горение, пламя и взрывы в газах: Пер. с англ. М.: Мир, 1968. 592 с.
3. *Ляхов В.Н., Подлубный В.В., Титаренко В.В.* Воздействие ударных волн и струй на элементы конструкции. М.: Машиностроение, 1989. 391 с.
4. *Поршнев В.А., Федорец О.Н.* Обоснование разработки ПДРДГ с замкнутым циклом работы // Труды 31 ПДНТС. Саратов: СФВАУ, 1999. С. 44–45.
5. *Поршнев В.А., Федорец О.Н.* Теоретико-экспериментальная методика расчета основных параметров детонационных реактивных двигателей. // Аэродинамика. Ударно-волновые процессы: Труды 15 Межвуз. конф. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. С. 82–88.
6. *Поршнев В.А., Федорец О.Н.* Принцип работы энергосиловой установки, выполненной на основе генератора Гартмана // Труды 13-й Всерос. науч.-техн. конф. Казань: КФВАУ, 2001.
7. *Поршнев В.А., Федорец О.Н.* Алгоритм методики расчета основных параметров пульсирующих детонационных двигателей // Труды 13-й Всерос. науч.-техн. конф. Казань: КФВАУ, 2001.
8. *Поршнев В.А., Федорец О.Н., Шиндяпин Г.П.* Расчет и разработка модели энергосиловой установки, работающей на принципе преобразования химической энергии рабочей смеси детонационным способом // Материалы 2-го Междунар. совещ. по использованию энергоаккумулирующих веществ ЭАВ в экологии, машиностроении, энергетике и на транспорте / М.: ИМАШ РАН, 2001. С. 165–170.
9. *Поршнев В.А., Федорец О.Н.* Результаты испытаний многосекционной детонационной камеры // Труды 13-й Всерос. науч.-техн. конф. Казань: КФВАУ, 2001.
10. *Поршнев В.А., Федорец Н.В.* Анализ работ, выполненных по детонации // Труды 34 ПДНТС. Саратов: АВН СФВАУ, 2002.
11. *Поршнев В.А., Федорец О.Н.* Система управления пульсирующим детонационным двигателем // Проблемы экономичности и эксплуатации двигателей внутреннего сгорания в АПК СНГ: Материалы Межгос. НТС. Саратов: СГАУ, 2002. Вып. 14. С.144–147.
12. *Поршнев В.А., Федорец О.Н.* Вариант системы управления пульсирующим детонационным двигателем на основе газодинамического контура // Проблемы экономичности и эксплуатации двигателей внутреннего сгорания в АПК СНГ: Материалы Межгос. НТС. Саратов: СГАУ, 2002. Вып. 14. С.147–150.
13. *Поршнев В.А., Сапунков Я.Г., Шиндяпин Г.П., Федорец В.Н.* Методика расчета тяговых характеристик пульсирующих детонационных двигателей // Труды 35 ПДНТС. Саратов: АВН, СФВАУ, 2003. С.21–23.
14. *Поршнев В.А., Сапунков Я.Г., Шиндяпин Г.П., Федорец В.Н.* Разработка комбинированных детонационных двигателей для перспективных летательных аппаратов // Труды 35 ПДНТС. Саратов: АВН, СФВАУ, 2003. С.23–26.
15. *Сапунков Я.Г., Шиндяпин Г.П., Поршнев В.А., Федорец О.Н.* Математическая модель детонационного двигателя // Математика. Механика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С.178–181.
16. *Шиндяпин Г.П., Сапунков Я.Г., Поршнев В.А., Федорец В.Н., Сорокин В.Н.* Модель импульсного детонационного двигателя // Информационные технологии в естественных науках, экономике и образовании: Труды Междунар. конф. Саратов: Энгельс, 2002. С. 421–422.
17. *Шиндяпин Г.П., Сапунков Я. Г., Поршнев В. А., Федорец В.Н.* Расчет параметров течения продуктов детонации и воздуха в детонационном двигателе // Сб. науч. докл. 1-го Междунар. совещ. по использованию



энергоаккумулирующих веществ ЭАВ в экологии, машиностроении, энергетике и на транспорте. М.: ИМАШ РАН, 2002.

18. Шиндяпин Г.П., Сапунков Я.Г., Поршнев В.А., Федорец В.Н. Перспективы использования ультразвуковых колебаний для смешения и распыла неньютоновских жидкостей // Сб. науч. докл. 2-го Междунар. совещ. по использованию энергоаккумулирующих веществ ЭАВ в экологии, машиностроении, энергетике и на транспорте. М.: ИМАШ РАН, 2002.

19. Шиндяпин Г.П., Сапунков Я.Г., Поршнев В.А., Федорец В.Н. Вычислительный эксперимент по исследованию ударно-волновых процессов в импульсном детонационном двигателе // Информационные технологии в естественных науках, экономике и образовании: Тр. Междунар. конф. Саратов; Энгельс, 2002. С.422–423.

20. Шиндяпин Г.П., Сапунков Я.Г., Поршнев В.А., Федорец О.Н. Методика расчета основных параметров детонационного двигателя // Аэродинамика: Ударно-волновые процессы: Тр. 16-й Межвуз. конф. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2002. С.56–58.

21. Шиндяпин Г.П., Сапунков Я.Г., Поршнев В.А., Федорец В.Н. Модель детонационного двигателя для расчёта его параметров // Аэрокосмическая техника и высокие технологии-2002: Тр. Всерос. науч.-теор. конф. / ПГТУ. Пермь, 2002. С. 291.

22. Шиндяпин Г.П., Сапунков Я.Г., Поршнев В.А., Федорец В.Н. Системы уравнений для расчёта параметров газового потока в детонационном двигателе // Аэрокосмическая техника и высокие технологии-2002: Тр. Всерос. науч.-теор. конф. / ПГТУ. Пермь, 2002. С.292.

23. Шиндяпин Г.П., Сапунков Я.Г., Поршнев В.А., Федорец В.Н. Некоторые результаты конструктивных разработок основных частей и систем пульсирующих детонационных двигателей // Проблемы обеспечения эффективности и устойчивости функционирования сложных технических систем: Сб. тр. 21-й межведомств. науч.-техн. конф. / СВИРВ. Серпухов, 2002. С.94–98.

24. Шиндяпин Г.П., Сапунков Я.Г., Поршнев В.А., Федорец В.Н. Методика расчёта энергосилового блока ПДРД // Сб. науч. докл. 3-го Междунар. совещ. по использованию энергоаккумулирующих веществ ЭАВ в экологии, машиностроении, энергетике и на транспорте. М.: ИМАШ РАН, 2003. С.72–83.

25. Шиндяпин Г.П., Сапунков Я.Г., Поршнев В.А., Федорец В.Н. Импульсный детонационный двигатель с диффузором // Тяжёлое машиностроение. 2003. № 11.

26. Шиндяпин Г.П., Сапунков Я.Г., Поршнев В.А., Федорец В.Н. Разработка комбинированных детонационных двигателей для перспективных летательных аппаратов // АВН. Труды ПДНТС. СФ ВАУ. Саратов, 2003. Вып.35. С.23–26.

27. Шиндяпин Г.П., Сапунков Я.Г., Поршнев В.А., Федорец В.Н. Разработка схемы комбинированного детонационного двигателя // Внутрикамерные процессы в энергетических установках, акустика, диагностика: Материалы 14-й Всерос. межвуз. науч.-техн. конф. / КФ ВАУ. Казань, 2002. С.50–52.

28. Шиндяпин Г.П., Сапунков Я.Г., Поршнев В.А., Федорец В.Н. Расчёт импульса тяги пульсирующих детонаци-

онных двигателей // Внутрикамерные процессы в энергетических установках, акустика, диагностика: Материалы 14-й Всерос. межвуз. науч.-техн. конф. / КФ ВАУ. Казань, 2002. С.53–55.

29. Шиндяпин Г.П., Сапунков Я.Г., Поршнев В.А., Федорец В.Н. Разработка конструктивно-компоновочной схемы комбинированного детонационного двигателя для РСЗО // Внутрикамерные процессы в энергетических установках, акустика, диагностика: Материалы 15-й Всерос. межвуз. науч.-техн. конф. / КФ ВАУ. Казань, 2003.

30. Шиндяпин Г.П., Сапунков Я.Г., Поршнев В.А., Федорец В.Н. Разработка детонационных двигателей для воздушных транспортных средств на основе вычислительного и натурного экспериментов // Научные исследования науки и техники: Отчётная конф.-выставка по подпрогр. «Транспорт» науч.-техн. программы Минобразования РФ Москва; Звенигород, 2002. С.71–72.

31. Eidelman S., Grossmann W. Pulsed Detonation Engines Experimental and Theoretical Review. AIAA 92-3168. July, 1992.

32. Helman D., Shreeve R.P., Eidelman S. Detonation Pulse Engine. AIAA 86-1683. 1986.

33. Hinkey J.B., Bussing T.R.A., Kaye L. Shock Tube Experiments for the Development of a Hydrogen-Fueled Pulse Detonation Engine. AIAA 95-2578, 31st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, San Diego, CA, July 10-12, 1995.

34. Hoffman H. Reaction Propulsion by Intermittent Detonative Combustion, Ministry of Supply, Volkenrode translation. 1941.

35. Kailasanath K., Patriaik G. Performance Estimates of Pulsed Detonation Engines. Proceedings of the 28th International Symposium on Combustion, The Combustion Institute, July 2000, Edinburgh, Scotland.

36. Nicholls J.A., Wilkmon H.R., Morrison R. B. Intermittent Detonation as a Thrust-Producing Mechanism. Jet Propulsion, 21, 1957. P. 534–541.

37. Ting J.M., Bussing T.R.A., Hinkey J.B. Experimental Characterization of the Detonation Properties of Hydrocarbon Fuels for the Development of a Pulse Detonation Engine. AIAA 95-3154, 31st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, San Diego, CA, July 10–12, 1995.

38. Wintenberger E., Austin J., Cooper M., Jackson S., Shepherd J. E. Impulse of a pulse detonation engine: single-cycle model. GALCIT Report FMOO-8, Pasadena, CA 91125, 2001.

39. Левин В.Д., Смехов Г.Д., Тарасов А.И. и др. Расчетно-экспериментальные исследования модели пульсирующего детонационного двигателя // Препринт № 42-98 / Институт механики МГУ. М., 1998.

40. Поршнев В.А., Федорец В.Н. Обоснование необходимости разработки двигателей с непрерывным детонационным горением // Труды 27 ПДНТС. Саратов: СВВКИУРВ, 1995. С.70–71.

41. Поршнев В.А. Обоснование облика энергосиловых установок на основе пульсирующих детонационных двигателей для летательных аппаратов: Дис. ... канд. техн. наук. Саратов, 2000. 179 с.



ИНФОРМАТИКА

УДК 519.4

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ О МИНИМАЛЬНЫХ РАСШИРЕНИЯХ ГРАФОВ

М.Б. Абросимов

Саратовский государственный университет,
кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии
E-mail: mic@rambler.ru

Рассматриваются некоторые утверждения о минимальных расширениях графов, интуитивно представляющиеся очевидными, однако на самом деле не являющиеся истинными без дополнительных условий.

Some Questions on Minimal Extensions of Graphs

M.B. Abrosimov

Some statements concerning minimal extensions of graphs are presented that seem to be quite evident at first sight but are not so simple under closer inspection.

Неориентированным графом (далее – *графом*) называется пара $G = (V, \alpha)$, где α (отношение смежности) – симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V . *Степенью вершины* v в графе будем называть количество вершин в G , смежных с данной, и обозначать через $d(v)$. Здесь и далее определения даются по [7].

Подграфом графа $G = (V, \alpha)$ называется пара $G' = (V', \alpha')$, где $V' \subseteq V$ и $\alpha' = \alpha \cap (V' \times V')$.

Вложением графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ в граф $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называется такое взаимно однозначное отображение $f: V_1 \rightarrow V_2$, что для любых вершин $u, v \in V_1$ выполняется следующее условие: $(u, v) \in \alpha_1 \Rightarrow (f(u), f(v)) \in \alpha_2$.

Два графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называются *изоморфными*, если можно установить взаимно однозначное соответствие $f: V_1 \rightarrow V_2$, сохраняющее отношение смежности:

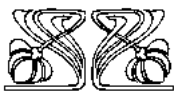
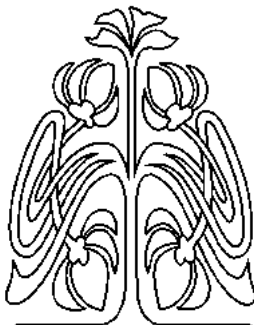
$$(u, v) \in \alpha_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in \alpha_2, \text{ для любых } u, v \in V_1.$$

Назовем граф $G_R = (V_R, \alpha_R)$ *вершинным k -расширением* графа $G = (V, \alpha)$, если граф G можно вложить в каждый подграф графа G_R , получающийся удалением любых его k вершин и всех связанных с ними ребер.

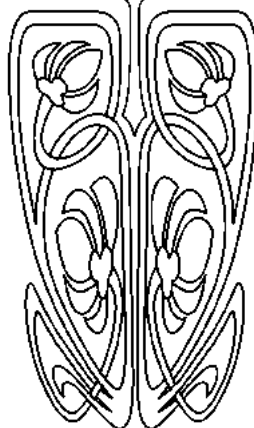
Назовем граф $G_R = (V_R, \alpha_R)$ *реберным k -расширением* графа $G = (V, \alpha)$, если граф G можно вложить в каждый подграф графа G_R , получающийся удалением любых его k ребер.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k -расширением* (далее – *МВ- k P*) n -вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

- 1) G^* является вершинным k -расширением G , то есть граф G вложим в каждый подграф графа G^* , получающийся удалением любых его k вершин;
- 2) G^* содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;
- 3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).



**НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ**





Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным реберным k -расширением* (далее – МР- k P) n -вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

- 1) G^* является реберным k -расширением G , то есть граф G вложим в каждый подграф графа G^* , получающийся удалением любых его k ребер;
- 2) G^* содержит n вершин, то есть $|V^*| = |V|$;
- 3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).

Также мы будем говорить «минимальное k -расширение» или « k -расширение», если сказанное относится к вершинным и реберным расширениям.

При исследовании минимальных расширений графов выявляется ряд интуитивно очевидных утверждений, которые при ближайшем рассмотрении оказываются не столь простыми. Рассмотрим, например, следующее высказывание.

Пусть G^* является реберным k -расширением графа G . Если минимальная степень вершины графа G есть d , то каждая вершина x^* графа G^* должна иметь степень d^* , такую что $d^* \geq d + k$.

Утверждение столь очевидно, сколь и его доказательство, занимающее 4 строки (см.: [10], теорема 3). Тем не менее, это утверждение является ложным для некоторых графов, имеющих изолированные вершины (например, для графа $C_{2n+1} \cup O_m$ из следующего далее пункта 1.2. Следует заметить, что утверждение является истинным для графов без изолированных вершин).

В данной работе рассматривается ряд подобных утверждений, представляющих некоторый интерес.

1. О МИНИМАЛЬНОМ k -РАСШИРЕНИИ ГРАФА

Рассмотрим задачу нахождения минимального k -расширения графа. Можем ли мы использовать для решения этой задачи знание минимальных расширений графа при значениях меньших k ? Представляется интуитивно очевидным, что минимальное 1-расширение минимального $(k-1)$ -расширения будет являться минимальным k -расширением.

1.1. «Всякое МВ- k P графа есть МВ-1P его МВ- $(k-1)$ P»

Очевидно, что МВ-1P любого МВ- $(k-1)$ P графа является и его вершинным k -расширением. Более того, для некоторых классов графов доказано, что оно является и МВ- k P. Например, для цепей, циклов (см. [9]), предполных графов (см. [5]) и некоторых других связанных и несвязных графов утверждение имеет место при всех значениях k .

Далее будет предложено семейство графов, опровергающее исследуемое утверждение.

Рассмотрим граф G вида $P_n \cup P_n \cup O_m$, где $m \geq 2n - 2$. Покажем, что МВ-1P графа G при $n > 3$ будет граф G^* вида $C_{2n+1} \cup O_m$, причем при $n > 4$ единственным с точностью до изоморфизма (при $n = 2, 3$ МВ-1P графа G будет граф вида $P_n \cup P_n \cup P_n \cup O_{m-n+1}$). В самом деле граф $C_{2n+1} \cup O_m$ отличается от графа G на три дополнительных ребра. МВ-1P не может иметь менее двух дополнительных ребер (заметим, что при $n = 2$ МВ-1P графа G будет граф $P_2 \cup P_2 \cup P_2 \cup O_{m-1}$, отличающийся на одно дополнительное ребро), поскольку степень хотя бы одной вершины будет не ниже двух. Таким образом, нужно показать, что не существует МВ-1P, отличающегося на два ребра. Предположим, что такой граф существует. Тогда степень любой его вершины не более двух. Рассмотрим, какие графы получаются из графа G добавлением одной вершины и двух ребер (и степень вершин ни в каком из этих графов не больше двух):

$$\begin{aligned}
 &P_n \cup P_n \cup P_2 \cup P_2 \cup O_{m-3}, \\
 &P_n \cup P_n \cup P_3 \cup O_{m-2}, \\
 &P_{n+1} \cup P_{n+1} \cup O_{m-1}, \\
 &P_n \cup P_{n+2} \cup O_{m-1}, \\
 &P_n \cup C_{n+1} \cup O_m, \\
 &C_{2n} \cup O_m.
 \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что ни один из перечисленных графов при $n > 3$ не является вершинным 1-расширением графа G (заметим, что при $n = 3$ граф $P_3 \cup P_3 \cup P_3 \cup O_{m-2}$ является МВ-1P графа G).



МВ-1Р графа G^* (см. [2, 4]) имеет вид $C_{2n+1}^* \cup O_m$, где C_{2n+1}^* – некоторое минимальное расширение цикла C_{2n+1} – однородный граф порядка 3 (см. [1, 9]). Покажем, что при некоторых значениях n никакой такой граф не является МВ-2Р графа G .

Граф $C_{2n+1}^* \cup O_m$ имеет $\frac{1}{2}(3*(2n+2)) = 3n+3$ ребра. Рассмотрим граф вида $P_n \cup P_n \cup P_n \cup P_n \cup O_{m-2n+2}$. Нетрудно видеть, что такой граф является вершинным 2-расширением графа G и имеет $4n-4$ ребра. Найдем значения n , при которых он будет являться и МВ-2Р графа G : $4n-4 < 3n+3$, откуда $n < 7$. Таким образом, при $n=5$ или $n=6$ граф $P_n \cup P_n \cup O_m$ имеет единственное с точностью до изоморфизма МВ-1Р – граф вида $C_{2n+1}^* \cup O_m$, – и единственное МВ-2Р – граф вида $P_n \cup P_n \cup P_n \cup P_n \cup O_{m-2n+2}$, который не является МВ-1Р графа $C_{2n+1}^* \cup O_m$. На рис. 1 приводится иллюстрация данного примера при $n=5$ и $m=8$. При $n=7$ граф $P_n \cup P_n \cup O_m$ имеет единственное МВ-1Р и два неизоморфных МВ-2Р, одно из которых является МВ-1Р его МВ-1Р, а другое нет. \square

Рассматривая большие значения n можно указать графы, которые имеют МВ- k Р, не являющиеся МВ-1Р их МВ- $(k-1)$ Р при больших значениях k (например, при $7 < n < 11$ это будет справедливо для $k=3$ и т.д.).

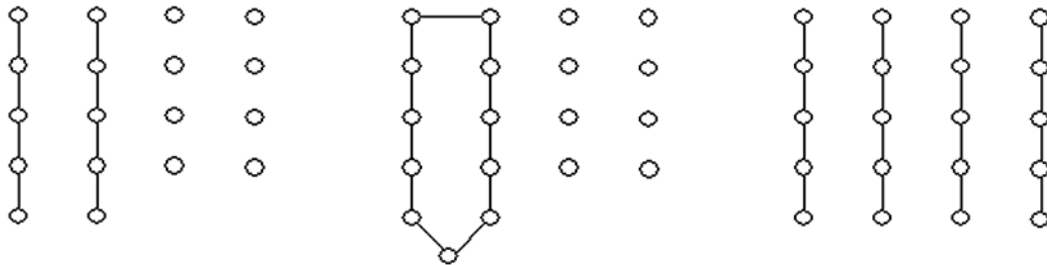


Рис. 1. Граф, его МВ-1Р и МВ-1Р

1.2. «Всякое МР- k Р графа есть МР-1Р его МР- $(k-1)$ Р»

Рассмотрим граф $P_2 \cup O_2$ (рис. 2, а). Этот граф имеет одно ребро; очевидно, что любым МР- k Р этого графа будет 4-вершинный граф с $k+1$ ребром. Так, на рис. 2, б изображены два МР-2Р, а на рис. 2, в – МР-3Р. На рис. 2, г изображены МР-1Р для графов на рис. 2, б. Видно, что один из этих графов является МР-2Р графа $P_2 \cup O_2$, а другой нет.

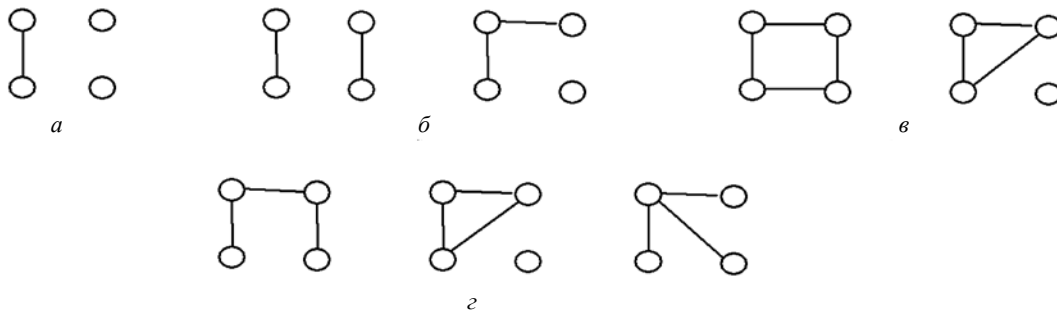


Рис. 1. Граф, его МВ-1Р и МВ-2Р

Предложенные примеры показывают, что ответ на поставленный вопрос является в общем случае отрицательным для вершинных и реберных расширений. Интерес представляет описание классов графов, для которых исследуемое утверждение является истинным. В частности, на данный момент неизвестно связанных графов и несвязных графов без изолированных вершин, для которых утверждение было бы ложным.



2. О ТОЧНЫХ РАСШИРЕНИЯХ

Если в п. 1 определений МВ- k Р и МР- k Р заменить требование вложения графа G в оставшуюся часть графа G^* требованием их изоморфизма, то получим определения *точного вершинного k -расширения* (далее – ТВ- k Р) и *точного реберного k -расширения* (далее – ТР- k Р). Приведем ряд дополнительных определений по [8].

Автоморфизмом графа G называется изоморфизм графа G на себя.

Две вершины u и v графа G называются подобными, если для некоторого автоморфизма f этого графа $f(u) = v$. Два ребра $e_1 = \{u_1, v_1\}$ и $e_2 = \{u_2, v_2\}$ называются подобными, если существует такой автоморфизм f графа G , что $f(\{u_1, v_1\}) = \{u_2, v_2\}$.

Граф называется *вершинно-симметрическим*, если любая пара его вершин подобна, и *реберно-симметрическим*, если любая пара его ребер подобна. Граф называется *симметрическим*, если он вершинно- и реберно-симметрический.

2.1. «Всякое ТВ-1Р графа есть и ТР-1Р некоторого графа»

В работе [3] показывается, что ТВ-1Р является всегда однородным графом. ТР-1Р в общем случае не является однородным графом. Некоторые ТВ-1Р являются и ТР-1Р. Например, полный граф K_n или цикл C_n . Более того, объединение любого числа одинаковых полных графов или циклов C_n также является как ТВ-1Р, так и ТР-1Р.

Оказывается, имеет место следующая

Теорема. Граф G является ТВ-1Р тогда и только тогда, когда он является вершинно-симметрическим.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть граф G является вершинно-симметрическим. Любые две его вершины u и v подобны, откуда очевидным образом следует, что $G - u$ будет изоморфен $G - v$.

Достаточность.

Пусть граф G является ТВ-1Р. Тогда для любых двух вершин u и v графы $G - u$ и $G - v$ изоморфны. В общем случае из того что $G - u$ изоморфен $G - v$, не следует, что вершины u и v подобны (см. [8]). Покажем, что в случае ТВ-1Р это выполняется.

Пусть $G = (V, \alpha)$ – ТВ-1Р, а u и v – произвольные его вершины. Тогда граф G однородный некоторого порядка d . Граф $G - u$ изоморфен $G - v$, и пусть f – подходящий изоморфизм. Пусть u_1, \dots, u_d – вершины степени $d - 1$ графа $G - u$, а v_1, \dots, v_d соответственно подобные им вершины в графе $G - v$. Вершина u смежна с вершинами u_1, \dots, u_d в графе G и только с ними, а вершина v смежна с вершинами v_1, \dots, v_d и только с ними. Обозначим множество вершин u_1, \dots, u_d через $\alpha(u)$, а множество вершин v_1, \dots, v_d через $\alpha(v)$.

Покажем, что вершины u и v подобны. Рассмотрим отображение $f^*(x) = \begin{cases} v, & x = u \\ f(x), & x \neq u \end{cases}$. Нетрудно

видеть, что f^* является взаимно однозначным отображением. Покажем, что f^* – автоморфизм графа G . Рассмотрим пару вершин w_1 и w_2 графа G . Рассмотрим три случая.

1) w_1 и w_2 отличны от u . Тогда $(w_1, w_2) \in \alpha \Leftrightarrow (f^*(w_1), f^*(w_2)) \in \alpha$.

2) Одна из вершин – u (пусть для определенности $w_1 = u$), а другая (то есть w_2) – смежная с ней в графе G вершина, то есть $w_2 \in \alpha(u)$. Тогда $(w_1, w_2) \in \alpha$, однако $f^*(u) = v$, а $f^*(u_i) = v_i$, а поскольку $(v, v_i) \in \alpha$, то и в этом случае выполняется $(w_1, w_2) \in \alpha \Leftrightarrow (f^*(w_1), f^*(w_2)) \in \alpha$.

3) Одна из вершин – u (пусть опять для определенности $w_1 = u$), а другая (то есть w_2) – не смежная с ней в графе G вершина, то есть $w_2 \notin \alpha(u)$. Тогда $(w_1, w_2) \notin \alpha$, однако $f^*(u) = v$, а $f^*(w_2) \notin \alpha(v)$, а поскольку в этом случае $(v, f^*(w_2)) \notin \alpha$, то опять выполняется $(w_1, w_2) \in \alpha \Leftrightarrow (f^*(w_1), f^*(w_2)) \in \alpha$.

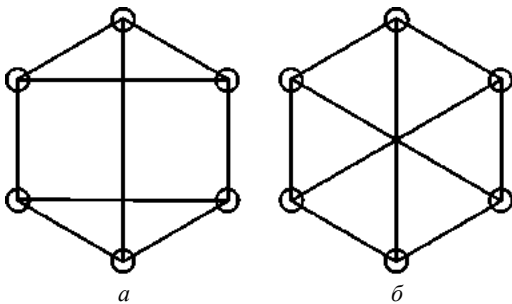


Рис. 3. Два ТВ-1Р, одно из которых не является ТР-1Р

Таким образом, f^* является изоморфизмом, следовательно, вершины u и v подобны. □

Таким образом, всякий вершинно-симметрический граф является ТВ-1Р, однако не всякий такой граф является ТР-1Р. На рис. 3, а приведен минимальный по числу вершин вершинно-симметрический граф, не являющийся ТР-1Р. Интересно, что этот граф также является МВ-1Р цикла C_5 и МР-1Р цикла C_6 (см. [1, 6, 9, 10]). На рис. 3, б изображено еще одно ТВ-1Р, которое является и ТР-1Р. Интересно, что граф на рис. 3, б является МР-1Р цикла C_6 , однако не является МВ-1Р цикла C_5 .

2.2. «Всякое однородное ТР-1Р графа есть и ТВ-1Р некоторого графа»

В отличие от вершинных точные реберные 1-расширения не обязательно являются однородными графами. Так, например, полный двудольный граф $K_{n,m}$ является ТР-1Р при любых значениях $n > 1, m > 0$.

Оказывается, имеет место следующая

Теорема. Всякий однородный граф G является ТР-1Р тогда и только тогда, когда он является реберно-симметрическим.

Доказательство

Необходимость

Пусть граф G является реберно-симметрическим. Любые два его ребра e_1 и e_2 подобны, откуда очевидным образом следует, что граф $G - e_1$ изоморфен графу $G - e_2$.

Достаточность

Пусть однородный граф G является ТР-1Р. Обозначим через k степень вершин графа G . Тогда для любых двух ребер $e_1 = \{u_1, v_1\}$ и $e_2 = \{u_2, v_2\}$ графы $G - e_1$ и $G - e_2$ изоморфны. В графе $G - e_1$ вершины u_1 и v_1 имеют степень $k - 1$, а все остальные вершины имеют степень k . Аналогично в графе $G - e_2$ вершины u_2 и v_2 имеют степень $k - 1$, а все остальные вершины имеют степень k . Следовательно, при изоморфизме образом вершин u_1 и v_1 могут быть только вершины u_2 и v_2 , а это и означает, что ребра e_1 и e_2 подобны. □

Следующая известная теорема (см. [8]) устанавливает связь между реберно-симметрическими и вершинно-симметрическими графами.

Теорема. Реберно-симметрический граф без изолированных вершин является или вершинно-симметрическим, или двудольным.

Из этой теоремы с учетом доказанного ранее очевидным образом следует следующая

Теорема. Пусть однородный граф G является ТР-1Р, тогда он является или ТВ-1Р, или двудольным графом.

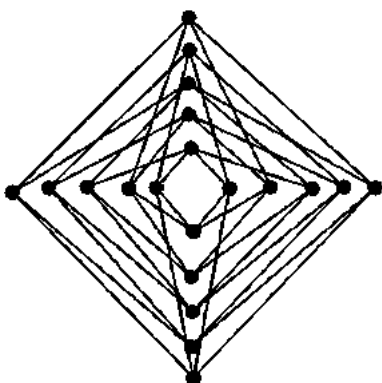


Рис. 4. Граф Фолкмана

Реберно-симметрический граф, не являющийся вершинно-симметрическим называется полусимметрическим. В [11] доказано, что минимальным по числу вершин полусимметрическим графом (а следовательно, и минимальным ТР-1Р, которое не является ТВ-1Р) является 20-вершинный граф Фолкмана (рис. 4).

В [8] приводится ряд утверждений о свойствах симметрических графов, которые с учетом установленных соответствий могут быть сформулированы следующим образом.

Теорема (ср. следствие 14.12). а) Если G – однородное n -вершинное ТР-1Р и степень d каждой вершины нечетна, то граф G является ТВ-1Р.

б) Если граф G – однородное n -вершинное ТР-1Р и степень каждой вершины четна, причем $d \geq n/2$, то граф G является ТВ-1Р.



И, наконец, имеет место следующая

Теорема (ср. теорему 14.13). Для каждого $n \geq 20$, кратного 4, существует однородное n -вершинное TP-1P, не являющееся ТВ-1P.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 05-08-18082.

Библиографический список

1. *Абросимов М.Б.* О неизоморфных оптимальных 1-отказоустойчивых реализациях некоторых графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2000. Вып.3. С. 3–10.
2. *Абросимов М.Б.* Минимальные расширения объединений некоторых графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2001. Вып.4. С. 3–11.
3. *Абросимов М.Б.* Минимальные расширения дополнений графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2001. Вып. 4. С. 11–19.
4. *Абросимов М.Б.* О минимальных расширениях графов, содержащих изолированные вершины // Вестник ТГУ. Приложение. Томск, 2002. №1(II). С.24–29.
5. *Абросимов М.Б.* Минимальные k -расширения пред-полных графов // Известия вузов: Математика. 2003. № 6(493). С. 3–11.
6. *Абросимов М.Б.* О неизоморфных минимальных реберных 1-расширениях некоторых графов // Теоретические задачи информатики и ее приложений. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2004 (в печати).
7. *Богомолов А.М., Салий В.Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997.
8. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Едиториал УРСС, 2003.
9. *Hayes J.P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. Vol. C. 25, №9. P.875–884.
10. *Harary F., Hayes J.P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. Vol. 23. P. 135–142.
11. *Skiena S.* Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica. Reading, MA: Addison-Wesley, 1990.

УДК 512.5

О МИНИМАЛЬНЫХ СИЛЬНО СВЯЗНЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЦЕПЕЙ

М.Р. Мирзаянов

Саратовский государственный университет,
кафедра теоретических основ компьютерной
безопасности и криптографии
E-mail: mirzayanovmr@gmail.com

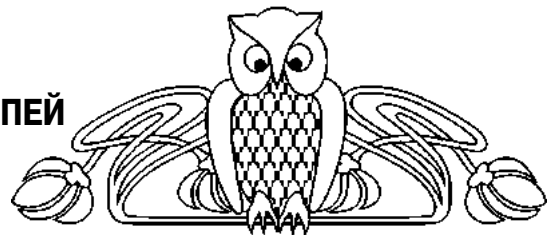
Пусть $G = (V, \alpha)$ – ориентированный граф. Эквивалентность $\theta \subseteq V \times V$ называется его сильно связной конгруэнцией, если факторграф G/θ – сильно связной. Описываются минимальные по включению сильно связанные конгруэнции ориентированной цепи и подсчитывается их количество: 2^{n-3} , если цепь имеет n вершин.

Пусть K – некоторый класс орграфов. Если G является K -графом, а отношение эквивалентности θ на множестве его вершин таково, что факторграф G/θ также принадлежит классу K , то θ называется конгруэнцией K -графа G .

Если K – некоторый класс орграфов и G – произвольный орграф, то K -конгруэнцией орграфа G называется отношение эквивалентности θ на множестве его вершин такое, что факторграф G/θ принадлежит классу K .

В [1, 2] ставятся задачи изучения K -конгруэнций орграфов, а также конгруэнций K -графов.

Конгруэнции корневых деревьев и турниров рассмотрела А.В. Киреева в [3, 4]. В работе М.А. Кабанова [5] изучаются функциональные конгруэнции орграфов. Сообщение об алгоритме построения минимальной в смысле количества вершин в факторграфе сильно связной конгруэнции произвольного орграфа содержится в работе М.Р. Мирзаянова [6].



On Minimal Strongly Connected Congruences of a Directed Path

M.R. Mirzayanov

Let $G = (V, \alpha)$ be a directed graph. An equivalence relation $\theta \subseteq V \times V$ is called a strongly connected congruence of G if the quotient graph G/θ is strongly connected. Minimal (under inclusion) strongly connected congruences of a directed path are described and the total amount of them is found (2^{n-3} if the path has n vertices).



В данной работе под минимальностью K -конгруэнции орграфа понимается ее минимальность в смысле теоретико-множественного включения. Формально K -конгруэнция π орграфа G минимальна, если не существует такой его K -конгруэнции θ , что $\theta \subset \pi$.

Ниже решаются задачи описания и перечисления минимальных сильно связанных конгруэнций ориентированных цепей, то есть минимальных по включению эквивалентностей, факторизация по которым превращает ориентированную цепь в сильно связанный орграф.

Под ориентированным графом (далее – орграф) понимается пара $G = (V, \alpha)$, где V – конечное непустое множество (вершины орграфа), а $\alpha \subseteq V \times V$ – отношение на множестве V (пара $(u, w) \in \alpha$ называется дугой орграфа с началом u и концом w).

Вершина u достижима из вершины v в орграфе $G = (V, \alpha)$, если

Достижимость вершины u из вершины v будем обозначать символом $v \rightarrow u$. В частности, любая вершина достижима из себя.

Орграф $G = (V, \alpha)$ называется сильно связным, если $\int_{M(x)} f(t)v(t)dt, M = \int_{M(x,t)} f(t)dt, 0 \leq x \leq \pi$.

Факторграфом орграфа $G = (V, \alpha)$ по эквивалентности $\pi \subseteq V \times V$ называется орграф $G/\pi = (V/\pi, \alpha/\pi)$, где V/π – множество классов эквивалентности π , а

$$\alpha/\pi = \{(\pi(u), \pi(v)) \mid (\exists u' \in \pi(u), v' \in \pi(v))((u', v') \in \alpha)\}.$$

Орграф $G = (V, \alpha)$ называется ориентированной цепью, если $\alpha = \{(v_i, v_{i+1}) \mid i = \overline{1, n-1}\}$, где $n = |V|$. Так как в работе речь идет только об ориентированных графах, ориентированную цепь будем иногда называть просто цепью. Цепь, содержащую n вершин, обозначим символом P_n .

Для упрощения записей будем считать, что на множестве V введено отношение порядка $v_i < v_j \Leftrightarrow v_i \rightarrow v_j$. Очевидно, что для любого отношения эквивалентности $\pi \subseteq V \times V$ и орграфа P_n/π верна импликация $(u < w) \Rightarrow (\pi(u) \rightarrow \pi(w))$.

Лемма 1 (о разбиении). Пусть π сильно связанная конгруэнция орграфа G , а отношение эквивалентности π^* таково, что $\pi^* \subset \pi$. Если $(\forall u, w \in V)[((u, w) \in \pi) \Rightarrow (\pi^*(u) \rightarrow \pi^*(w))]$, то π^* – сильно связанная конгруэнция.

Доказательство. Рассмотрим произвольную пару блоков $\pi^*(u), \pi^*(w)$. В факторграфе G/π существует путь $\pi(u) = \pi(u_1), \pi(u_2), \dots, \pi(u_k) = \pi(w)$. Его наличие означает, что

$$\begin{aligned} &(\exists s_1, t_2 \in V)(s_1 \in \pi(u_1) \& t_2 \in \pi(u_2) \& (s_1, t_2) \in \alpha), \\ &(\exists s_2, t_3 \in V)(s_2 \in \pi(u_2) \& t_3 \in \pi(u_3) \& (s_2, t_3) \in \alpha), \dots, \\ &(\exists s_{k-1}, t_k \in V)(s_{k-1} \in \pi(u_{k-1}) \& t_k \in \pi(u_k) \& (s_{k-1}, t_k) \in \alpha). \end{aligned}$$

Так как $(u, s_1) \in \pi$, то $\pi^*(u) \rightarrow \pi^*(s_1)$, а из $(t_k, w) \in \pi$ следует $\pi^*(t_k) \rightarrow \pi^*(w)$. Аналогично $\pi^*(t_i) \rightarrow \pi^*(s_i)$ для всех $i = \overline{2, k-1}$. Таким образом, $\pi^*(u) \rightarrow \pi^*(s_1) \rightarrow \pi^*(t_2) \rightarrow \pi^*(s_2) \rightarrow \dots \rightarrow \pi^*(t_k) \rightarrow \pi^*(w)$. В силу транзитивности отношения достижимости $\pi^*(u) \rightarrow \pi^*(w)$.

Так как для произвольной пары вершин $\pi^*(u), \pi^*(w)$ в орграфе G/π^* верно $\pi^*(u) \rightarrow \pi^*(w)$, факторграф G/π^* является сильно связным. \square

Заметим, что для практического применения леммы о разбиении достаточно доказывать импликации $((u, v) \in \pi) \Rightarrow (\pi^*(u) \rightarrow \pi^*(v))$ для пар вершин u, w , лежащих только в тех блоках отношения эквивалентности π , которые подверглись разбиению.

Теорема 1. Пусть π – некоторая минимальная сильно связанная конгруэнция цепи P_n , тогда любой π -блок состоит не более чем из двух элементов.

Доказательство. Предположим противное. Пусть для некоторой минимальной сильно связанной конгруэнции π утверждение теоремы не верно. Рассмотрим вершины u_1, u_2, u_3 , принадлежащие одному блоку отношения эквивалентности π . Будем считать, что $u_1 \rightarrow u_2$ и $u_2 \rightarrow u_3$. Покажем, что отношение эквивалентности π^* , получающееся из π выделением вершины u_2 в отдельный блок, тоже является сильно связанной конгруэнцией. Очевидно, вершины $\pi^*(u_2)$ и $\pi^*(u_1)$ принадлежат одной компоненте сильной



связности, а отношение эквивалентности π^* содержится в π . Следовательно, по лемме о разбиении, π^* – сильно связная конгруэнция. Так как верно включение $\pi^* \subset \pi$, получаем противоречие. \square

Всюду ниже при использовании обозначений двухэлементных блоков $\{u, w\}$ будем полагать, что $u < w$.

Теорема 2. Пусть π – произвольная минимальная сильно связная конгруэнция цепи P_n . Тогда для любой пары ее двухэлементных блоков $\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}$ верно одно из следующих утверждений:

1. $(u_1 < u_2) \& (w_1 < w_2)$;
2. $(u_2 < u_1) \& (w_2 < w_1)$.

Доказательство. Положим, $u_1 < u_2$. Надо показать, что $w_1 < w_2$. По теореме 1 равенство $w_1 = w_2$ невозможно. Предположим, что $w_1 > w_2$. Рассмотрим отношение эквивалентности $\pi^* = \pi \setminus \{(u_2, w_2), (w_2, u_2)\}$. Верна достижимость $\pi^*(u_2) \rightarrow \pi^*(w_2)$ в факторграфе P_n/π^* , так как $u_2 < w_2$. Обратная достижимость $\pi^*(w_2) \rightarrow \pi^*(u_2)$ верна, так как $(\pi^*(w_2) \rightarrow \pi^*(w_1)) \& (\pi^*(u_1) \rightarrow \pi^*(u_2)) \& (\pi^*(u_1) = \pi^*(w_1))$. Отношение эквивалентности π^* таково, что $\pi^* \subset \pi$. По лемме о разбиении отношение эквивалентности π^* – сильно связная конгруэнция. Так как $\pi^* \subset \pi$, получаем противоречие с минимальностью сильно связной конгруэнции π .

Итак, $w_1 < w_2$. Случай $u_2 < u_1$ разбирается аналогично. \square

Теорема 3. Пусть π произвольная сильно связная конгруэнция цепи P_n . Не существует такой вершины цепи $v_1 < v_n$, что для любого блока $\pi(u)$ верно одно из двух утверждений:

1. $\max(\pi(u)) \leq v_i$;
2. $v_i < \min(\pi(u))$.

Доказательство. Допустим, что такая вершина v_i существует. Покажем, что вершина $\pi(v_i)$ не достижима из вершины $\pi(v_n)$.

Разобьем все вершины факторграфа P_n/π на две группы. К первой группе отнесем такие блоки $\pi(v)$, что $\max(\pi(v)) \leq v_i$. Вторая группа будет содержать блоки $\pi(v)$ такие, что $v_i < \min(\pi(v))$. Заметим, что в орграфе P_n/π не найдется дуги, ведущей из второй группы в первую группу. Таким образом, любая вершина первой группы недостижима из вершины второй группы. В частности, вершина $\pi(v_i)$ недостижима из вершины $\pi(v_n)$.

Следовательно, отношение эквивалентности π не является сильно связной конгруэнцией. Получаем противоречие, значит допущение не верно. \square

Заметим, что теорема 3 не требует минимальности сильно связной конгруэнции π для своего применения.

Пара двухэлементных блоков $\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}$ отношения эквивалентности на вершинах цепи называется конфликтующей, если $(u_1 < u_2 < w_1) \text{ OR } (u_2 < u_1 < w_2)$.

Теорема 4. Произвольная минимальная сильно связная конгруэнция π цепи P_n не содержит тройки попарно конфликтующих двухэлементных блоков.

Доказательство. Допустим, такая тройка попарно конфликтующих двухэлементных блоков $\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}, \{u_3, w_3\}$ существует. Пусть $u_1 = \min(u_1, u_2, u_3)$, $v_3 = \max(v_1, v_2, v_3)$. Рассмотрим отношение эквивалентности $\pi^* = \pi \setminus \{(u_2, w_2) \cup (w_2, u_2)\}$. Так как $u_2 < w_2$, то $\pi^*(u_2) \rightarrow \pi^*(w_2)$. В силу конфликта $\{u_1, w_1\}$ и $\{u_3, w_3\}$ верно $u_3 < w_1$. Заметим, что $\pi^*(w_2) \rightarrow \pi^*(w_3)$, $\pi^*(w_3) = \pi^*(u_3)$, $\pi^*(u_3) \rightarrow \pi^*(w_1)$, $\pi^*(w_1) = \pi^*(u_1)$, $\pi^*(u_1) \rightarrow \pi^*(u_2)$. Следовательно, $\pi^*(w_2) \rightarrow \pi^*(u_2)$. По лемме о разбиении, π^* – сильно связная конгруэнция цепи. Получаем противоречие с минимальностью сильно связной конгруэнции π . \square

Теорема 5 (характеризация минимальных сильно связных конгруэнций цепи). Для того чтобы отношение эквивалентности $\pi \subseteq V^2$ являлось минимальной сильно связной конгруэнцией цепи, необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий:

- 1) $\max_{v \in V} (|\pi(v)|) \leq 2$;
- 2) для любой пары двухэлементных блоков $\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}$ справедливо утверждение $((u_1 < u_2) \& (w_1 < w_2)) \text{ OR } ((u_2 < u_1) \& (w_2 < w_1))$;
- 3) не существует такой вершины $v_i < v_n$ цепи, что для любого двухэлементного блока $\{u, w\}$ верно одно из двух утверждений: $w \leq v_i$ или $v_i < u$;



4) не существует тройки попарно конфликтующих двухэлементных блоков.

Доказательство. Теоремы 1–4 устанавливают необходимость выполнения условий 1)–4). Покажем достаточность.

Пусть условия 1)–4) выполняются для отношения эквивалентности π . Занумеруем все двухэлементные блоки $\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}, \dots, \{u_k, w_k\}$ таким образом, что $u_1 < u_2 < \dots < u_k$. Блоков большей мощности не существует по условию 1). По условию 2) справедливы неравенства $w_1 < w_2 < \dots < w_k$. В силу условия 3) $u_1 = v_1, w_k = v_n$. Если $k = 1$, то, очевидно, условия 1)–4) являются достаточными.

Пусть $k > 1$. По условию 3) верно неравенство $u_j < w_{j-1}$ для $j = \overline{2, k}$. Из этого следует, что $\pi(v_n) \rightarrow \pi(v_0)$, так как $\pi(u_j) \rightarrow \pi(w_{j-1})$ для $j = \overline{2, k}$ и $\pi(u_j) = \pi(w_j)$ для $j = \overline{1, k}$. Следовательно, для любой пары $u > w$ верно $\pi(u) \rightarrow \pi(w)$, так как $\pi(u) \rightarrow \pi(v_n) \rightarrow \pi(v_0) \rightarrow \pi(w)$. Итак, π является сильно связной конгруэнцией.

Покажем ее минимальность. Любое отношение эквивалентности $\pi^* \subset \pi$ отличается от π тем, что некоторая часть двухэлементных блоков из π не представлена в π^* . Очевидно, $\pi \setminus \{(u_1, w_1), (w_1, u_1)\}$ и $\pi \setminus \{(u_k, w_k), (w_k, u_k)\}$ не являются сильно связными конгруэнциями. Докажем, что $\pi \setminus \{(u_j, w_j), (w_j, u_j)\}$ для $j = \overline{2, k-1}$ тоже не являются сильно связными конгруэнциями. Так как пары $\{u_{j-1}, w_{j-1}\}, \{u_j, w_j\}$ и $\{u_j, w_j\}, \{u_{j+1}, w_{j+1}\}$ конфликтуют, то в силу 4) пара блоков $\{u_{j-1}, w_{j-1}\}, \{u_{j+1}, w_{j+1}\}$ конфликтующей не является. Следовательно, верно $w_{j-1} < u_{j+1}$. Так как $u_1 < u_2 < \dots < u_k$ и $w_1 < w_2 < \dots < w_k$, то для любого блока $\pi^*(u)$ верны неравенства $\max(\pi^*(u)) \leq w_{j-1}, w_{j-1} < \min(\pi^*(u))$, то есть отношение эквивалентности $\pi^* = \pi \setminus \{(u_j, w_j), (w_j, u_j)\}$ не удовлетворяет условиям теоремы 3.

Таким образом, отношения эквивалентности $\pi \setminus \{(u_j, w_j), (w_j, u_j)\}$ не являются сильно связными конгруэнциями для любых $j = \overline{1, k}$. Следовательно, π – минимальная сильно связная конгруэнция. \square

Пусть $v \in V \setminus \{v_n\}$, тогда символом $next(v)$ будем обозначать вершину, непосредственно следующую за вершиной v в цепи P_n .

Аналогично, если $v \in V \setminus \{v_1\}$, символом $prev(v)$ обозначим вершину, непосредственно предшествующую вершине v в цепи P_n .

В силу теоремы 5 любая минимальная сильно связная конгруэнция цепи и только такая конгруэнция может быть построена по следующим правилам.

1. Положим $\pi = \{(v, v) \mid v \in V\}$.
2. Пусть $u_{up} = u_l = u_r = v_n$.
3. Пока $v_1 < u_{up}$, будем выполнять шаги 4–6.
4. Выберем некоторые вершины u и w , где $u < u_{up}$ и $u_i \leq w \leq u_r$. Если $u \neq v_1$, то должно выполняться неравенство $u < prev(u_{up})$.
5. $\pi := \pi \cup \{(u, w), (w, u)\}$.
6. Положим $u_l = next(u)$, $u_r = prev(u_{up})$, $u_{up} = u$.

Следующая таблица представляет все минимальные сильно связные конгруэнции цепи P .

№	Нетривиальные блоки
1	$\{v_1, v_6\}$
2	$\{v_1, v_5\}, \{v_2, v_6\}$
3	$\{v_1, v_5\}, \{v_3, v_6\}$
4	$\{v_1, v_5\}, \{v_4, v_6\}$
5	$\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_6\}$
6	$\{v_1, v_4\}, \{v_3, v_6\}$
7	$\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_6\}$
8	$\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_4, v_6\}$



Теорема 6. Пусть $R(n)$ – количество минимальных сильно связанных конгруэнций цепи P_n . Для $n > 2$ верна формула

$$R(n) = 2^{n-3}.$$

Доказательство. Покажем для $n > 2$ справедливость рекуррентной формулы:

$$R(n) = 1 + \sum_{i=2}^{n-2} (n-i-1) \cdot R(i).$$

Существует одна минимальная сильно связанная конгруэнция, которая содержит только один двухэлементный блок $\{v_1, v_n\}$, и некоторое количество других минимальных сильно связанных конгруэнций. Определим их количество. Рассмотрим вершину v_n . Она может находиться в одном блоке с одной из вершин v_2, v_3, \dots, v_{n-2} .

Найдем количество таких минимальных сильно связанных конгруэнций, в которых вершина v_n попадает в один блок с вершиной v_i , где $2 \leq i \leq n-2$. Рассмотрим произвольную конгруэнцию описанного выше вида. Занумеруем все ее двухэлементные блоки $\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}, \dots, \{u_k, w_k\}$ таким образом, что $u_1 < u_2 < \dots < u_k$. Тогда верны утверждения: $u_k = v_i, w_k = v_n$ и $v_i < w_{k-1} < v_n$. Пусть π^* такое отношение эквивалентности на $\{v_1, v_2, \dots, v_i\}$, что его двухэлементные блоки имеют вид $\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}, \dots, \{u_{k-2}, w_{k-2}\}, \{u_{k-1}, v_i\}$. По теореме 5 отношение эквивалентности π^* – минимальная сильно связанная конгруэнция цепи P_i . Обратно, из любой минимальной сильно связанной конгруэнции цепи P_i , где $2 \leq i \leq n-2$, можно построить некоторое количество минимальных сильно связанных конгруэнций цепи P_n таких, что вершина v_n попадает в один блок с вершиной v_i , обратив описанный выше процесс получения минимальной сильно связанной конгруэнции цепи P_i из минимальной сильно связанной конгруэнции цепи P_n . Каждая такая конгруэнция отличается от других значением w_{k-1} , которое удовлетворяет неравенству $v_i < w_{k-1} < v_n$. Таким образом, количество минимальных сильно связанных конгруэнций, в которых вершина v_n попадает в один блок с вершиной v_i , равно $(n-i-1) \cdot R(i)$.

Просуммировав по всем вариантам, получаем $R(n) = 1 + \sum_{i=2}^{n-2} (n-i-1) \cdot R(i)$.

Докажем теперь по индукции равенство $R(n) = 2^{n-3}$ для $n > 2$. Заметим, что $R(1)=R(2)=R(3)=1$. Предположим, что для всех $i \leq n_0$ справедливо соотношение $R(i) = 2^{i-3}$. Докажем, что $R(n_0+1) = 2^{n_0-2}$. Имеем

$$\begin{aligned} R(n_0+1) - R(n_0) &= 1 + \sum_{i=2}^{n_0-1} (n_0-i) \cdot R(i) - 1 - \sum_{i=2}^{n_0-2} (n_0-i-1) \cdot R(i) = \\ &= R(n_0-1) + \sum_{i=2}^{n_0-2} (n_0-i-n_0+i+1) \cdot R(i) = \sum_{i=2}^{n_0-1} R(i) = 1 + \sum_{i=3}^{n_0-1} R(i) = \\ &= 1 + \sum_{i=3}^{n_0-1} 2^{i-3} = 1 + (2^{n_0-3} - 1) = 2^{n_0-2}. \end{aligned}$$

Таким образом, $R(n_0+1) = 2^{n_0-3} + R(n_0) = 2^{n_0-3} + 2^{n_0-3} = 2^{n_0-2}$.

В силу метода математической индукции равенство $R(n) = 2^{n-3}$ верно для всех $n > 2$. \square

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (05-08-18082).

Библиографический список

1. Богомолов А.М., Салий В.Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М., 1997.
2. Богомолов А.М., Салий В.Н. Несколько задач из алгебры дискретных систем // Методы и системы технической диагностики: Материалы X Междунар. конф. по проблемам теоретич. кибернетики. Саратов, 1993. Вып. 18. С.32–34.
3. Киреева А.В. О конгруэнциях корневых деревьев // XI Всесоюз. конф. по проблемам теоретической кибернетики: Тез. докл. Волгоград, 1990. Ч. 1. С. 23.
4. Киреева А.В. Решетка конгруэнций турнира // Студенты – ускорению научного прогресса. Саратов, 1991. Вып. 3. С. 3–7.
5. Кабанов М.А. Функциональные конгруэнции ориентированных графов // Упорядоч. множества и решетки. Саратов, 1995. Вып. 11. С. 15–23.
6. Мирзаянов М.Р. Построение минимальной сильно связанной конгруэнции ориентированного графа // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. Тез. докл. VI Междунар. конф. Саратов, 2004. С. 80.



УДК 519.4

О РАСПОЗНАВАНИИ ЯЗЫКОВ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЛОВ КОНЕЧНЫМИ ПОЛУГРУППАМИ

В.А. Молчанов

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: v.molchanov@inbox.ru

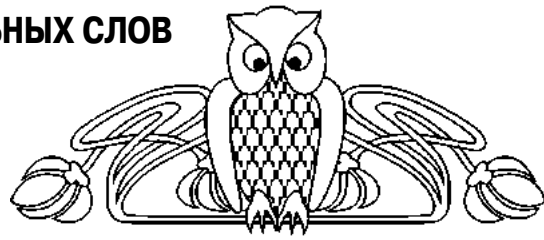
В настоящей работе на основе методов нестандартного анализа разрабатывается новый подход к теории бесконечных произведений в конечных полугруппах. Основные результаты работы показывают, что бесконечные произведения элементов стандартных последовательностей в конечных полугруппах могут рассматриваться как двухсторонние алгебраические дубликаты конечных произведений специального вида. С помощью этих результатов строится универсальный функтор категории конечных полугрупп в категорию конечных четырехсортовых алгебр специального вида и вводится понятие языка произвольных слов, распознаваемого конечными полугруппами. Рассматриваются приложения этих методов к теории распознаваемых языков на конечных полугруппах.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящается развитию теории формальных языков произвольных слов на конечных полугруппах.

Как известно (см., например, обзор [1]), начало теории формальных языков было положено Н. Хомским [2], который ввел понятие слова в виде конечной последовательности букв алфавита, понятие языка в виде произвольного множества слов и понятие грамматики в виде совокупности правил, порождающих язык из алфавита. На основе такого подхода Н. Хомский построил и исследовал первую иерархию формальных языков. Позже С. Гинзбург [3] показал, что так называемые праволинейные грамматики порождают класс языков, которые подходящим образом обрабатываются конечными автоматами и называются распознаваемыми языками. Тесная взаимосвязь между конечными автоматами и полугруппами их переходов естественным образом привела к понятию распознаваемого конечной полугруппой языка. С точки зрения теории формальных языков этот факт устанавливает эквивалентность между конечными автоматами и конечными полугруппами. В то же время алгебраический подход к теории формальных языков, разработанный М. Шютценберге и С. Эйленбергом [4, 5] на основе распознавания таких языков конечными полугруппами, открыл новые возможности для более глубокого исследования теоретико-модельными методами комбинаторных аспектов теории распознаваемых языков. Один из главных результатов теории формальных языков – известная теорема С. Клини [6] показывает, что класс распознаваемых языков совпадает с классом рациональных языков, которые задаются рациональными выражениями в форме обобщенных полиномов с тремя специальными операциями (объединение, произведение и итерация языков).

В связи с широким применением в компьютерных науках (например, при моделировании компьютерных программ или вычислительных схем) не только конечных, но и бесконечных слов, естественно возникает задача исследования языков произвольных слов, содержащих конечные и бесконечные в любую сторону слова. Первые исследования в этом направлении были посвящены главным образом языкам бесконечных вправо слов (см., например, обзор [7]). Показательно, что при переносе основных понятий теории языков конечных слов на бесконечные слова исследователи получали базисные определения, которые, с одной стороны, были вполне естественными и перспективными, но, с другой стороны, интерпретировались весьма неоднозначно и, как правило, приводили к разнообразным техническим



On Recognition of Languages of Arbitrary Words by Finite Semigroups

V. A. Molchanov

Based on methods of nonstandard analysis we elaborate in this paper a new approach to the theory of infinite products in finite semigroups. The main theorems of the paper show that infinite products of elements of standard sequences in finite semigroups can be viewed as a two-sided algebraic counterpart of finite products of a special kind. Using these results we construct a universal functor of the category of finite semigroups to the category of finite four-sorted algebras of a special kind and introduce a notion of a language of arbitrary words recognized by finite semigroups. Applications of these methods to the theory of recognizable languages on finite semigroups are considered.



проблемам. Так, в работе [8] Буши ввел понятие конечного автомата, действующего на бесконечные вправо слова, и доказал для языков таких слов аналог теоремы Клини, который утверждает, что класс распознаваемых языков бесконечных вправо слов совпадает с классом языков, которые задаются рациональными выражениями в форме обобщенных полиномов с тремя ранее уже известными стандартными рациональными операциями (объединение, произведение и итерация языков) и принципиально новой операцией бесконечной итерации. При этом оказалось, что в отличие от случая языков конечных слов при распознавании языков бесконечных слов детерминистские и недетерминистские автоматы Буши уже не эквивалентны между собой: сложная взаимосвязь между такими автоматами устанавливается в известной теореме МакНатона [9]. Что касается вопроса о распознаваемости языков бесконечных вправо слов конечными полугруппами, то первые попытки найти алгебраический эквивалент конечного автомата, распознающего такие языки, убедительно показали невозможность его решения в рамках теории конечных полугрупп. Позже эта проблема была успешно решена Уилки [10] на основе конечных полугрупп с дополнительным бесконечным произведением, алгебраическая структура которых (в силу теоремы Рамсея [11]) полностью определяется операциями конечной сигнатуры – операциями двухсортной алгебры Уилки. Таким образом, с точки зрения теории языков бесконечных слов конечные автоматы Буши оказываются эквивалентными конечным двухсортным алгебрам Уилки.

С другой стороны, в работе [12] было положено начало унифицированному подходу к теории языков произвольных слов, в основе которого лежат теоретико-модельные принципы нестандартного анализа [13], позволяющие переносить определенные свойства конечных математических объектов на бесконечные математические объекты. Такой подход не только позволяет естественно переносить на языки произвольных слов базисные понятия теории формальных языков, но и эффективно получать в этом направлении новые результаты с помощью универсальных методов нестандартного анализа. Так, в работе [12] на основе нестандартного подхода для конечного автомата естественно введено понятие распознаваемого им языка произвольных слов и показано, что класс таких языков совпадает с классом так называемых обобщенно рациональных языков, которые задаются рациональными выражениями в форме обобщенных полиномов с тремя специальными операциями (объединение, тернарное произведение и бесконечная итерация). В то же время в работе [14] показано, как с помощью методов нестандартного анализа и нестандартной топологии [15] можно по непрерывности канонически продолжить любое отображение φ алфавита A в произвольную конечную полугруппу S на множество всех слов над этим алфавитом (как конечных, так и бесконечных в любую сторону). Согласно этим результатам, реализация такого продолжения отображения $\varphi: A \rightarrow S$ на множество всех слов приводит к каноническому расширению исходной полугруппы S до четырехсортной алгебры \bar{S} , элементами которой интерпретируются все слова над алфавитом A . Этот результат позволяет естественно ввести понятие языка произвольных слов, распознаваемого конечными полугруппами.

В настоящей работе приводится обоснование изложенной выше программы построения теории распознавания языков произвольных слов конечными полугруппами. В первом разделе работы изучаются бесконечные произведения элементов конечных полугрупп и показывается (теорема 1.4), как взаимосвязаны бесконечные произведения членов одной и той же последовательности элементов конечной полугруппы. Во втором разделе для конечной полугруппы вводится каноническая конструкция четырехсортной алгебры (теорема 2.3), которая определяет функтор категории конечных полугрупп в категорию конечных (четырёхсортных) алгебр Уилки (теорема 2.6). В третьем разделе приводится конструкция канонического продолжения произвольного отображения алфавита A в произвольную конечную полугруппу S до гомоморфизма алгебры всех слов над алфавитом A в соответствующую алгебру Уилки \bar{S} (теорема 3.1). На основании этого результата вводится понятие языка произвольных слов, распознаваемого конечной полугруппой, и описывается класс таких языков.

В работе используются общепринятая терминология теории формальных языков [7] и теории полугрупп [16], а также ряд основополагающих понятий нестандартного анализа из [13]. Образно говоря, нестандартный анализ является теоретико-модельной техникой, которая позволяет конструи-



ровать нестандартные расширения рассматриваемых математических структур (таких как полугруппы, топологические пространства и др.) с точно такими же элементарными свойствами. При этом обычно предполагается, что каждый математический объект A рассматривается как элемент теоретико-множественного универсума $U = V(\mathcal{S})$ с множеством базисных элементов (атомов) \mathcal{S} . Тогда нестандартное расширение $*A$ объекта A является математическим объектом, конструируемым подобным образом над расширенным множеством атомов $*\mathcal{S}$. В результате этой конструкции получается вложение $*$ универсума U в собственную подструктуру $*U$ нового теоретико-множественного универсума $V(*\mathcal{S})$, так что выполняются, в частности, следующие принципы нестандартного анализа.

Принцип расширения. Для любого объекта $A \in U$ $*$ -образ $*A$ содержит множество $A^\sigma = \{*a : a \in A\}$, которое в том и только том случае является собственным подмножеством $*A$, если A бесконечно.

Принцип переноса. Для произвольных $A_1, \dots, A_n \in U$ любое утверждение $\Phi = \Phi(x_1, \dots, x_n)$ логики первого порядка с ограниченными кванторами истинно в U тогда и только тогда, когда это утверждение Φ истинно в $*U$ для $*$ -образов $*A_1, \dots, *A_n$.

Множество $A \in V(*\mathcal{S})$ принято называть *внутренним*, если $A \in *U$.

Заметим, что по построению отображения $*$, для любого $a \in \mathcal{S}$ выполняется $*a = a$ и для каждого математического объекта $a \in U$, сконструированного над множеством атомов \mathcal{S} , $*$ -образ $*A$ является математическим объектом над $*\mathcal{S}$, сконструированным подобным образом. Более того, из принципа переноса следует, что для произвольных подмножества $A \subset \mathcal{S}$, отображения $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ и n -арного отношения $\sigma \subset \mathcal{S} \times \dots \times \mathcal{S}$ соответствующие $*$ -образы являются подмножеством $*A \subset *\mathcal{S}$, отображением $*f : *\mathcal{S} \rightarrow *\mathcal{S}$ и n -арным отношением $*\sigma \subset *\mathcal{S} \times \dots \times *\mathcal{S}$, причем ограничения этих $*$ -образов на \mathcal{S} равны A, f и σ соответственно. Следовательно, символ « $*$ » в обозначениях расширений таких отображений и отношений может быть опущен. Поэтому с целью упрощения применения методов нестандартного анализа обычно считают, что основные множества всех изучаемых математических структур являются подмножествами множества атомов \mathcal{S} .

Пример 1. Пусть $F(A, B)$ обозначает множество всех отображений A в B . Такая операция F имеет нестандартный дубликат $*F$, действующий на внутренние множества так, что, если A, B – внутренние множества, то условие $f \in *F(A, B)$ по принципу переноса означает, что f отображает A в B и $f \in *U$. Таким образом, $*F(A, B)$ есть множество всех внутренних отображений A в B .

Пример 2. Пусть $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}, +, \leq)$ – линейно упорядоченная полугруппа целых чисел. Тогда, по принципу переноса, нестандартное расширение $*\mathbf{Z}$ также является линейно упорядоченной полугруппой. Кроме того, по принципу расширения $*\mathbf{Z} \neq \mathbf{Z}$. Легко видеть, что элементы $m \in *\mathbf{Z} \setminus \mathbf{Z}$ удовлетворяют условию $|m| > n$ для любого натурального числа $n \in \mathbf{N}$. Такие элементы $m \in *\mathbf{Z} \setminus \mathbf{Z}$ будем называть *бесконечными числами* и символически обозначать $m \approx +\infty$, если m – положительное бесконечное число, и $m \approx -\infty$, если m – отрицательное бесконечное число.

Пример 3. Пусть A – конечное множество и $W_{fin}(A)$ – полугруппа слов над алфавитом A , которая может быть определена по формуле

$$W_{fin}(A) = \{f : (\exists m, n \in \mathbf{Z}) (n \leq m \wedge f \in F([n, m], A))\}.$$

Тогда по принципу переноса множество

$$*W_{fin}(A) = \{f : (\exists m, n \in *\mathbf{Z}) (n \leq m \wedge f \in *F([n, m], A))\}$$

с операцией конкатенации образует полугруппу нестандартных слов над A .

Пример 4. Пусть A – конечное множество и $W(A)$ – множество всех слов над алфавитом A (содержащее конечные и бесконечные в любую сторону слова), которое по аналогии с множеством $W_{fin}(A)$ может быть определено по формуле

$$W(A) = \{f : (\exists m, n \in \mathbf{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}) ((n, m) \neq \emptyset \wedge f \in F((n, m), A))\}.$$

Значит $W(A)$ является подмножеством множества X всех частичных отображений \mathbf{Z} в A , на котором в силу результатов [5] нестандартно определяется равномерно непрерывная сходимости частичных отображений $\gamma \subset X \times *X$, так что справедливы следующие утверждения:



1) для любого $h \in {}^*W_{fin}(A)$ условие $(f, h) \in \gamma$ равносильно тому, что $f \in W(A)$ и $h = {}^*f|[n, m]$ для некоторых $m, n \in {}^*\mathbf{Z}, n \leq m$;

2) замыкание множества $W_{fin}(A)$ в пространстве сходимости X равно множеству всех слов $W(A)$ над алфавитом A .

Как известно [16], любое отображение φ множества A в конечную полугруппу S канонически расширяется до гомоморфизма $\varphi: W_{fin}(A) \rightarrow S$, которое для слов $w = a_1 \dots a_k$ из множества $W_{fin}(A)$ определяется по правилу: $\varphi(w) = \varphi(a_1) \dots \varphi(a_k)$. В силу принципа переноса этот гомоморфизм φ по такому же правилу расширяется до гомоморфизма ${}^*\varphi: {}^*W_{fin}(A) \rightarrow S$. Следовательно (исходя из принципа продолжения гомоморфизма φ по непрерывности), для канонического расширения отображения φ на множество всех слов над алфавитом A необходимо отождествить все образы ${}^*\varphi(w_1), {}^*\varphi(w_2)$ бесконечно близких слов $w_1, w_2 \in {}^*W_{fin}(A)$, которые в силу вышеизложенного являются бесконечными произведениями членов одной и той же стандартной последовательности элементов полугруппы S . Это построение последовательно реализуется ниже в настоящей работе.

1. БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ ПОЛУГРУППАХ

Этот раздел посвящается изучению бесконечных произведений в конечных полугруппах с помощью методов нестандартного анализа.

Лемма 1.1. Пусть A – конечное множество, $a \in A$ и $x \in \dots$. Тогда равенство $x_{(m,n)} = a$ в том и только том случае выполняется для некоторых $m, n \approx +\infty$, если существуют такие последовательности натуральных чисел $k_1 < k_2 < \dots$ и $l_1 < l_2 < \dots$, что при любых $i \in \mathbf{N}$ выполняется равенство $x_{(k_i, l_i)} = a$.

Доказательство. Пусть $x_{(m,n)} = a$ для некоторых $m, n \approx +\infty$. Тогда для любых $p, q \in \mathbf{N}$ в нестандартном универсуме *U истинно следующее утверждение:

$$(\exists k, l \in {}^*\mathbf{N}) (k > p \wedge l > q \wedge x_{(k,l)} = a)$$

(так как, например, мы можем выбрать $k = m, l = n$). Значит, по принципу переноса в стандартном универсуме U истинно следующее утверждение:

$$(\exists k, l \in \mathbf{N}) (k > p \wedge l > q \wedge x_{(k,l)} = a).$$

Положим: $k_0 = l_0 = 1$. Тогда для любого $i \in \mathbf{N}$ найдутся такие значения $k_i, l_i \in \mathbf{N}$, что $k_i > k_{i-1}, l_i > l_{i-1}$ и $x_{(k_i, l_i)} = a$. По построению этих последовательностей натуральных чисел $k_1 < k_2 < \dots$ и $l_1 < l_2 < \dots$ при любых $i \in \mathbf{N}$ выполняется равенство $x_{(k_i, l_i)} = a$.

С другой стороны, предположим, что существуют такие последовательности натуральных чисел $k_1 < k_2 < \dots$ и $l_1 < l_2 < \dots$, что равенство $x_{(k_i, l_i)} = a$ выполняется при любых $i \in \mathbf{N}$. Тогда в стандартном универсуме U истинно следующее утверждение:

$$(\forall p \in \mathbf{N}) (\exists m, n \in \mathbf{N}) (m, n > p \wedge x_{(m,n)} = a).$$

Значит, по принципу переноса в нестандартном универсуме *U истинно следующее утверждение:

$$(\forall p \in {}^*\mathbf{N}) (\exists m, n \in {}^*\mathbf{N}) (m, n > p \wedge x_{(m,n)} = a).$$

В частности, для любого бесконечного числа $p \in {}^*\mathbf{N}$ найдутся такие $m, n \in {}^*\mathbf{N}$, что $m, n > p$ и $x_{(m,n)} = a$. Очевидно, что в этом случае $m, n \approx +\infty$.

Теорема 1.2. Пусть S – конечная полугруппа, $s \in S^Z$ и для некоторых элементов $a \in S, m, n \approx +\infty$ выполняется равенство

$$s_{-n} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_m = a.$$

Тогда найдутся такие идемпотенты $e, f \in S$ и последовательности натуральных чисел $k_1 < k_2 < \dots, l_1 < l_2 < \dots$, что для любых $i \in \mathbf{N}$ выполняются следующие равенства:

$$s_{-n} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_m = s_{-k_i} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_{l_i} = eaf,$$

$$e = s_{-k_{i+1}} \dots s_{-k_i} \text{ и } f = s_{l_i+1} \dots s_{l_{i+1}}.$$

В этом случае упорядоченную тройку (e, a, f) будем называть *конечным представлением бесконечного в обе стороны произведения* $s_{-n} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_m$.



Доказательство. Для любых $k, l \in N$ положим

$$x_{(k,l)} = s_{-k} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_l.$$

Если $x_{(m,n)} = a$ для некоторых $m, n \approx +\infty$, то по лемме 1.1 найдутся такие последовательности натуральных чисел $k_1 < k_2 < \dots$ и $l_1 < l_2 < \dots$, что для всех $i \in N$ выполняется равенство $x_{(k_i, l_i)} = a$. Рассмотрим полный граф G с множеством вершин N и для всех $i, j \in N$, удовлетворяющих условию $i < j$, ребро, соединяющее вершины i и j , пометим упорядоченной парой $(s_{-k_j} \dots s_{-k_{j-1}}, s_{l_{i+1}} \dots s_{l_i})$. Так как мощность множества $|S^2| = r$ конечна, то в результате получаем реберную r -раскраску графа G . По бесконечной версии теоремы Рамсея (см., например, [11]) граф G имеет в качестве подграфа свою монохроматическую копию G' , каждое ребро которой помечено одной и той же парой $(e, f) \in S^2$. Не нарушая общности, для простоты рассуждений можно предполагать, что таким монохроматическим графом является сам исходный граф G . Тогда для любых натуральных чисел $i, j, q \in N$, удовлетворяющих условию $i < j < q$, выполняются следующие равенства:

$$e = s_{-k_j} \dots s_{-k_{j-1}} = s_{-k_q} \dots s_{-k_{j-1}} = s_{-k_q} \dots s_{-k_{i-1}}.$$

Так как

$$e^2 = (s_{-k_q} \dots s_{-k_{j-1}})(s_{-k_j} \dots s_{-k_{i-1}}) = s_{-k_q} \dots s_{-k_{i-1}} = e,$$

то элемент e – идемпотент полугруппы S . Аналогично легко проверить, что элемент f также является идемпотентом этой полугруппы. Следовательно, для любого натурального числа $i \in N$ выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} s_{-n} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_m &= x_{(n,m)} = x_{(k_{i+1}, l_{i+1})} = s_{-k_{i+1}} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_{l_{i+1}} = \\ &= (s_{-k_{i+1}} \dots s_{-k_{i-1}})(s_{-k_i} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_{l_{i+1}} s_{-1} s_0 s_1 \dots s_{l_i})(s_{l_i} \dots s_{l_{i+1}}) = eaf. \end{aligned}$$

Следствие 1.3. Пусть S – конечная полугруппа, $s \in S^Z$ и для некоторых элементов $a \in S$, $n \approx +\infty$ выполняется равенство

$$s_1 \dots s_n = a \text{ (соответственно } s_{-n} \dots s_{-1} = a).$$

Тогда найдется такой идемпотент $e \in S$ и такая последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \dots$, что для любых $i \in N$ выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} s_1 \dots s_n &= s_1 \dots s_{k_i} = ae, \quad e = s_{k_{i+1}} \dots s_{k_{i+1}}, \\ \text{(соответственно } s_{-n} \dots s_{-1} &= s_{-k_i} \dots s_{-1} = ea, \quad e = s_{-k_{i+1}} \dots s_{-k_{i+1}}). \end{aligned}$$

В этом случае упорядоченную тройку $(1, a, e)$ (соответственно $(e, a, 1)$) будем называть *конечным представлением бесконечного вправо произведения* $s_1 \dots s_n$ (соответственно *бесконечного влево произведения* $s_{-n} \dots s_{-1}$).

Теорема 1.4. Пусть S – конечная полугруппа, $s \in S^Z$ и для некоторых элементов $a, a' \in S$, $m, n, m', n' \approx +\infty$ выполняются равенства:

$$s_{-n} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_m = a, \quad s_{-n'} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_{m'} = a'.$$

Тогда найдутся такие идемпотенты $e, e', f, f' \in S$, элементы $x, y, u, v \in S$ и такие последовательности натуральных чисел

$$k_1 < k'_1 < k_2 < k'_2 < \dots, \quad l_1 < l'_1 < l_2 < l'_2 < \dots,$$

что для любых $i \in N$ выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} s_{-n} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_m &= s_{-k_i} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_{l_i} = eaf, \\ s_{-n'} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_{m'} &= s_{-k'_i} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_{l'_i} = e'a'f', \\ x &= s_{l_{i+1}} \dots s_{l'_{i+1}}, \quad y = s_{l'_i} \dots s_{l_{i+1}}, \quad u = s_{-k_{i+1}} \dots s_{-k'_{i+1}}, \quad v = s_{-k'_i} \dots s_{-k_{i-1}}, \\ e &= uv, f = xy, e' = vu, f' = yx, a = ua'y, a' = vax. \end{aligned}$$

Доказательство. По теореме 1.2 бесконечные произведения $s_{-n} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_m$ и $s_{-n'} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_{m'}$,



имеют конечные представления (e, a, f) и (e', a', f') соответственно. Это означает, что существуют такие последовательности натуральных чисел

$$k_1 < k_2 < \dots, l_1 < l_2 < \dots, k'_1 < k'_2 < \dots, l'_1 < l'_2 < \dots,$$

что для любых значений $i \in N$ выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} s_{-n} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_m &= s_{-k_i} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_{l_i} = eaf, \\ s_{-n'} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_{m'} &= s_{-k'_i} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_{l'_i} = e'a'f', \\ e &= s_{-k_{i+1}} \dots s_{-k_i-1}, \quad f = s_{l_{i+1}} \dots s_{l_i+1}, \\ e' &= s_{-k'_{i+1}} \dots s_{-k'_i-1}, \quad f' = s_{l'_{i+1}} \dots s_{l'_i+1}. \end{aligned}$$

Так как элементы e, f, e', f' являются идемпотентами полугруппы S , то без нарушения общности можно считать, что при любых значениях $i \in N$ выполняются условия

$$k_1 < k'_1 < k_2 < k'_2 < \dots \text{ и } l_1 < l'_1 < l_2 < l'_2 < \dots$$

Рассмотрим полный граф G с множеством вершин N и для всех $i, j \in N$, удовлетворяющих условию $i < j$, ребро, соединяющее вершины i и j , пометим упорядоченной последовательностью (g_1, \dots, g_8) из следующих восьми элементов:

$$\begin{aligned} g_1 &= s_{l_{i+1}} \dots s_{l_j}, \quad g_2 = s_{l'_{i+1}} \dots s_{l'_j}, \quad g_3 = s_{l_{i+1}} \dots s_{l'_j}, \quad g_4 = s_{l'_{i+1}} \dots s_{l_j}, \\ g_5 &= s_{-k_j} \dots s_{-k_i-1}, \quad g_6 = s_{-k'_j} \dots s_{-k'_i-1}, \quad g_7 = s_{-k_j} \dots s_{-k'_i-1}, \quad g_8 = s_{-k'_j} \dots s_{-k_i-1}. \end{aligned}$$

Так как мощность множества $|S^2| = r$ конечна, то в результате получаем реберную r -раскраску графа G . По бесконечной версии теоремы Рамсея (см., например, [11]), граф G имеет в качестве подграфа свою монохроматическую копию G' , каждое ребро которой помечено одним и тем же элементом $(\bar{f}, \bar{f}', x, y, \bar{e}, \bar{e}', u, v)$ конечного множества S^8 . Легко видеть, что выполняются следующие равенства:

$$f = \bar{f}, \quad f' = \bar{f}', \quad e = \bar{e}, \quad e' = \bar{e}'.$$

Не нарушая общности, для простоты рассуждений можно предполагать, что таким монохроматическим графом является сам исходный граф G . Тогда для любых натуральных чисел $i, j \in N$, удовлетворяющих условию $i < j$, выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} f &= s_{l_{i+1}} \dots s_{l_j}, \quad f' = s_{l'_{i+1}} \dots s_{l'_j}, \quad x = s_{l_{i+1}} \dots s_{l'_j}, \quad y = s_{l'_{i+1}} \dots s_{l_j}, \\ e &= s_{-k_j} \dots s_{-k_i-1}, \quad e' = s_{-k'_j} \dots s_{-k'_i-1}, \quad u = s_{-k_j} \dots s_{-k'_i-1}, \quad v = s_{-k'_j} \dots s_{-k_i-1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что выполняются равенства:

$$\begin{aligned} f &= s_{l_{i+1}} \dots s_{l_j} = (s_{l_{i+1}} \dots s_{l'_j})(s_{l'_j} \dots s_{l_j}) = xy, \\ f' &= s_{l'_{i+1}} \dots s_{l'_j} = (s_{l'_{i+1}} \dots s_{l_j})(s_{l_j} \dots s_{l'_j}) = yx, \\ e &= s_{-k_j} \dots s_{-k_i-1} = (s_{-k_j} \dots s_{-k'_i-1})(s_{-k'_i-1} \dots s_{-k_i-1}) = uv, \\ e' &= s_{-k'_j} \dots s_{-k'_i-1} = (s_{-k'_j} \dots s_{-k_j-1})(s_{-k_j-1} \dots s_{-k'_i-1}) = vu. \end{aligned}$$

Всюду далее для произвольной полугруппы S символом E_S будем обозначать множество всех идемпотентов этой полугруппы.

Лемма 1.5. Пусть S – конечная полугруппа и $(e, a, f) \in E_S \times S \times E_S$. Тогда равенство $eaf = a$ выполняется в том и только в том случае, если существует такая последовательность $s \in S^Z$, что (e, a, f) есть конечное представление бесконечного в обе стороны произведения $s_{-n} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_m$ для некоторых $m, n \approx +\infty$.

Доказательство. Достаточность утверждения леммы следует из теоремы 1.2. Для доказательства необходимости рассмотрим последовательность $s \in S^Z$, определенную по правилу

$$s_0 = a \text{ и } s_{-n} = e, \quad s_n = f \text{ для любых } n \in N.$$



Легко видеть, что в этом случае упорядоченная тройка (e, a, f) является конечным представлением бесконечного в обе стороны произведения $s_{-n} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_m$ для любых $m, n \approx +\infty$.

Для произвольных подмножеств A, B, C полугруппы S символом $A \dot{\times} B \dot{\times} C$ обозначим следующее множество:

$$A \dot{\times} B \dot{\times} C = \{(a, b, c) \in A \times B \times C : abc = b\}.$$

Лемма 1.6. Пусть S – конечная полугруппа и $(e, a, f), (e', a', f')$ – элементы множества $E_S \dot{\times} S \dot{\times} E_S$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) найдутся такие элементы $s \in S^Z$ и $m, n, m', n' \approx +\infty$, что упорядоченные тройки (e, a, f) и (e', a', f') являются конечными представлениями бесконечных в обе стороны произведений

$$s_{-n} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_m \text{ и } s_{-n'} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_{m'},$$

соответственно;

2) найдутся элементы $u, v, x, y \in S$, удовлетворяющие следующим равенствам:

$$e = uv, e' = vu, f = xy, f' = yx \text{ и } a' = vax.$$

Доказательство этого результата следует из теоремы 1.4 и леммы 1.5.

Из результатов работы [7] следует, что для канонического расширения произвольного отображения φ конечного множества A в конечную полугруппу S на множество всех слов над алфавитом A необходимо сначала канонически продолжить [16] это отображение φ до гомоморфизма $\varphi: W_{fin}(A) \rightarrow S$, который нестандартно расширяется до гомоморфизма ${}^*\varphi: {}^*W_{fin}(A) \rightarrow S$, и затем (исходя из принципа продолжения гомоморфизма φ по непрерывности) необходимо для всех бесконечно близких слов $w_1, w_2 \in {}^*W_{fin}(A)$ отождествить их образы ${}^*\varphi(w_1), {}^*\varphi(w_2)$, которые по лемме 1 [7] и теореме 1.4 являются бесконечными в обе стороны произведениями членов одной и той же стандартной последовательности элементов полугруппы S . С этой целью ввиду леммы 1.6 для полугруппы S введем следующее отношение эквивалентности \equiv_S на множестве $E_S \dot{\times} S \dot{\times} E_S$:

$$(e, a, f) \equiv_S (e', a', f') \Leftrightarrow (\exists u, v, x, y \in S) (e = uv \wedge e' = vu \wedge f = xy \wedge f' = yx \wedge a' = vax).$$

Другими словами, упорядоченные тройки $(e, a, f), (e', a', f')$ в том и только том случае будут \equiv_S -эквивалентны, если найдется такая последовательность $s \in S^Z$, что эти тройки для некоторых $m, n, m', n' \approx +\infty$ являются конечными представлениями бесконечных в обе стороны произведений $s_{-n} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_m$ и $s_{-n'} \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots s_{m'}$ соответственно.

Для упорядоченной тройки $(e, a, f) \in E_S \dot{\times} S \dot{\times} E_S$ обозначим символом $\langle e, a, f \rangle_S$ (кратко, $\langle e, a, f \rangle$) класс отношения эквивалентности \equiv_S , содержащий элемент (e, a, f) .

Лемма 1.7. Пусть S, T – конечные полугруппы и $\varphi: S \rightarrow T$ – гомоморфизм. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) для любых $(e, a, f), (e', a', f') \in E_S \dot{\times} S \dot{\times} E_S$ выполняется свойство

$$(e, a, f) \equiv_S (e', a', f') \Rightarrow (\varphi(e), \varphi(a), \varphi(f)) \equiv_T (\varphi(e'), \varphi(a'), \varphi(f'));$$

2) отображение φ канонически расширяется до отображения $\tilde{\varphi}$ фактор-множества $E_S \dot{\times} S \dot{\times} E_S / \equiv_S$ в фактор-множество $E_T \dot{\times} T \dot{\times} E_T / \equiv_T$, значение которого для элементов $(e, a, f) \in E_S \dot{\times} S \dot{\times} E_S$ определяется по формуле

$$\tilde{\varphi}(\langle e, a, f \rangle_S) = \langle \varphi(e), \varphi(a), \varphi(f) \rangle_T.$$

Доказательство этого результата следует из свойств гомоморфизма и определения для конечной полугруппы S отношения эквивалентности \equiv_S .

2. БЕСКОНЕЧНЫЕ КОМПОНЕНТЫ КОНЕЧНЫХ ПОЛУГРУПП

В этом разделе показывается, как произвольная конечная полугруппа S может быть канонически расширена до четырехсортной алгебры $\bar{}$, в которой вычисляются не только конечные, но и бесконечные степени элементов исходной полугруппы. Более того, из результатов предыдущего раздела следует, что в алгебре могут также вычисляться бесконечные произведения элементов исходной полугруппы.



Для произвольной полугруппы S обозначим символом $S^1 = S \cup \{1\}$ моноид с внешне присоединенной единицей 1 и рассмотрим множество $S' = E_{S^1} \times S^1 \times E_{S^1} \setminus \{(1,1,1)\}$. Введем также следующие обозначения:

$$S'_1 = \{1\} \times S \times \{1\}, \quad S'_2 = E_S \times S \times \{1\}, \quad S'_3 = \{1\} \times S \times E_S, \quad S'_4 = E_S \times S \times E_S.$$

Легко видеть, что эти множества не пересекаются и при объединении дают множество S' . Поэтому множество S' можно рассматривать как четырехсортное множество $S' = (S'_1, S'_2, S'_3, S'_4)$ с четырьмя компонентами S'_1, S'_2, S'_3, S'_4 .

Рассмотрим на множестве S' частичную бинарную операцию, которая для элементов $(e, a, f), (e', a', f') \in E_{S^1} \times S^1 \times E_{S^1}$ определяется по формуле

$$(e, a, f)(e', a', f') = (e, aa', f'f) \text{ в том и только том случае, если } f = e' = 1.$$

Легко видеть, что множество S' является частичным ассоциативным группоидом, т.е. в алгебре S' выполняется равенство $(xy)z = x(yz)$, если определено произведение хотя бы в одной из сторон этого равенства. В результате проведенных рассуждений получаем следующие результаты.

Лемма 2.1. Для любой конечной полугруппы S частичная операция группоида S' индуцирует следующие четыре операции на четырехсортном множестве $S' = (S'_1, S'_2, S'_3, S'_4)$:

- 1) бинарное умножение на множестве S'_1 , которое для любых $(1, a, 1), (1, b, 1) \in S'_1$ определяется по формуле $(1, a, 1)(1, b, 1) = (1, ab, 1)$;
- 2) смешанное умножение $S'_2 \times S'_1 \rightarrow S'_2$, которое для любых $(e, a, 1) \in S'_2, (1, b, 1) \in S'_1$ определяется по формуле $(e, a, 1)(1, b, 1) = (e, ab, 1)$;
- 3) смешанное умножение $S'_1 \times S'_3 \rightarrow S'_3$, которое для любых $(1, a, 1) \in S'_1, (1, b, f) \in S'_3$ определяется по формуле $(1, a, 1)(1, b, f) = (1, ab, f)$;
- 4) смешанное умножение $S'_2 \times S'_3 \rightarrow S'_4$, которое для любых $(e, a, 1) \in S'_2, (1, b, f) \in S'_3$ определяется по формуле $(e, a, 1)(1, b, f) = (e, ab, f)$.

При этом в четырехсортной алгебре S' для любых элементов $a, b, c \in S'_1, x \in S'_2$ и $y \in S'_3$ выполняются следующие равенства:

$$a(bc) = (ab)c, \quad x(ab) = (xa)b, \quad (ab)y = a(by), \quad (xa)y = x(ay).$$

Лемма 2.2. Пусть S – конечная полугруппа, и \equiv_{S^1} – определенное в предыдущем разделе отношение эквивалентности на моноиде S^1 . Тогда выполняются следующие свойства:

- 1) если $(1, a', 1) \in S'_1$ и $(e, a, f) \in S'$, то условие $(1, a', 1) \equiv_{S^1} (e, a, f)$ выполняется в том и только том случае, если $(1, a', 1) = (e, a, f)$;
- 2) если $(e', a', 1) \in S'_2$ и $(e, a, f) \in S'$, то условие $(e', a', 1) \equiv_{S^1} (e, a, f)$ выполняется в том и только том случае, если $f=1$ и существуют такие элементы $u, v \in S$, что $e = uv, e' = vu, a' = va$;
- 3) если $(1, a', f') \in S'_3$ и $(e, a, f) \in S'$, то условие $(1, a', f') \equiv_{S^1} (e, a, f)$ выполняется в том и только том случае, если $e = 1$ и существуют такие элементы $x, y \in S$, что $f = xy, f' = yx, a' = ax$;
- 4) отношение \equiv_{S^1} индуцирует на четырехсортной алгебре S' четырехсортное отношение эквивалентности $\equiv_{S'} = (\equiv_{S'_1}^1, \equiv_{S'_2}^2, \equiv_{S'_3}^3, \equiv_{S'_4}^4)$, компоненты которого $\equiv_{S'} (i = \overline{1,4})$ равны ограничениям отношения \equiv_{S^1} на соответствующих компонентах S'_i алгебры S' .

Таким образом, все компоненты четырехсортной алгебры S' насыщены относительно отношения эквивалентности \equiv_{S^1} . Из пункта 1) леммы 2.2 следует, что ограничение отношения эквивалентности \equiv_{S^1} на компоненте S'_i является тождественным отношением. Это позволяет отождествить фактор-множество $S'_i / \equiv_{S^1}^i$ с множеством S . Фактор-множества остальных компонент алгебры S' будем называть *бесконечными компонентами полугруппы S* и обозначать их следующими символами:

$$S'_2 / \equiv_{S^1}^2 = S^{\leftarrow}, \quad S'_3 / \equiv_{S^1}^3 = S^{\rightarrow}, \quad S'_4 / \equiv_{S^1}^4 = S^{\leftrightarrow}.$$

Пусть $W = (W_1, W_2, W_3, W_4)$ – четырехсортная алгебра, на которой заданы шесть операций: одно бинарное умножение на множестве W_1 , три смешанных бинарных умножения

$$W_2 \times W_1 \rightarrow W_2, \quad W_1 \times W_3 \rightarrow W_3, \quad W_2 \times W_3 \rightarrow W_4$$



и две унарные операции $W_1 \rightarrow W_3, W_1 \rightarrow W_2$ (обозначаемые символами $a \mapsto a^{+\omega}, a \mapsto a^{-\omega}$). Следуя работе [10], алгебру W будем называть *алгеброй Уилки*, если при любых $a, b, c \in W_1, x \in W_2, y \in W_3$ и $n \in N$ она удовлетворяет следующим равенствам:

$$a(bc) = (ab)c, x(ab) = (xa)b, (ab)y = a(by), (xa)y = x(ay),$$

$$a(ba)^{+\omega} = (ab)^{+\omega}, (a^n)^{+\omega} = a^{+\omega}, (ba)^{-\omega} = (ab)^{-\omega}, (a^n)^{-\omega} = a^{-\omega}.$$

При этом алгебра Уилки $W = (W_1, W_2, W_3, W_4)$ называется *полной*, если выполняются равенства:

$$W_2 = W_1^{-\omega}W_1, W_3 = W_1W_1^{+\omega}, W_4 = W_2W_3.$$

Теорема 2.3. Для любой конечной полугруппы S частичная операция на группоиде S' индуцирует следующие шесть операций на четырехсортной алгебре $\bar{} = (S, S^{\leftarrow}, S^{\rightarrow}, S^{\leftrightarrow})$:

1) ассоциативное умножение на множестве S ;

2) смешанное умножение $S^{\leftarrow} \times S \rightarrow S^{\leftarrow}$, которое для любых элементов $(e, a, 1) \in E_S \times S \times \{1\}, b \in S$ определяется по формуле

$$\langle e, a, 1 \rangle b = \langle e, ab, 1 \rangle;$$

3) смешанное умножение $S \times S^{\rightarrow} \rightarrow S^{\rightarrow}$, которое для любых элементов $a \in S, (1, b, f) \in \{1\} \times S \times E_S$ определяется по формуле

$$a \langle 1, b, f \rangle = \langle 1, ab, f \rangle;$$

4) смешанное умножение $S^{\leftarrow} \times S^{\rightarrow} \rightarrow S^{\leftrightarrow}$, которое для любых элементов $(e, a, 1) \in E_S \times S \times \{1\}, (1, b, f) \in \{1\} \times S \times E_S$ определяется по формуле: $\langle e, a, 1 \rangle \langle 1, b, f \rangle = \langle e, ab, f \rangle$;

5) унарная операция $S \rightarrow S^{\rightarrow}$, результат действия которой на любой элемент $a \in S$ обозначается символом $a^{+\omega}$ и определяется с помощью произвольного числа $k \approx +\infty$ по формуле $a^{+\omega} = \langle 1, a^{k!}, a^{k!} \rangle$;

6) унарная операция $S \rightarrow S^{\leftarrow}$, результат действия которой на любой элемент $a \in S$ обозначается символом $a^{-\omega}$ и определяется с помощью произвольного числа $k \approx +\infty$ по формуле $a^{-\omega} = \langle a^{k!}, a^{k!}, 1 \rangle$.

При этом $\bar{}$ является полной алгеброй Уилки.

Доказательство. Покажем, что четырехсортное отношение эквивалентности $\equiv_{S'} = (\equiv_{S'}^1, \equiv_{S'}^2, \equiv_{S'}^3, \equiv_{S'}^4)$ является конгруэнцией на четырехсортной алгебре S' , т.е. согласовано со всеми операциями этой алгебры.

Если для элементов $(e, a, 1), (e', a', 1) \in S'_2$ выполняется условие $(e, a, 1) \equiv_{S'}^2 (e', a', 1)$, то по лемме 2.2 найдутся такие элементы $u, v \in S$, что выполняются следующие равенства: $e = uv, e' = vu$ и $a' = va$. Отсюда следует, что для любого элемента $b \in S$ справедливы следующие утверждения:

$$a'b = vab, (e, ab, 1) \equiv_{S'}^2 (e', a'b, 1) \text{ и } \langle e, ab, 1 \rangle = \langle e', a'b, 1 \rangle.$$

Значит, эквивалентность $\equiv_{S'}$ согласована с операцией $S^{\leftarrow} \times S \rightarrow S^{\leftarrow}$.

Аналогично доказывается, что эквивалентность $\equiv_{S'}$ согласована с операцией $S \times S^{\rightarrow} \rightarrow S^{\rightarrow}$.

Пусть для элементов $(e, a, 1), (e', a', 1) \in S'_2; (1, b, f), (1, b', f') \in S'_3$ выполняются условия $(e, a, 1) \equiv_{S'}^2 (e', a', 1), (1, b, f) \equiv_{S'}^3 (1, b', f')$. Тогда по лемме 2.2 найдутся такие элементы $u, v, x, y \in S$, что выполняются следующие равенства:

$$e = uv, e' = vu, f = xy, f' = yx, a' = va, b' = bx.$$

Отсюда следует справедливость следующих утверждений:

$$a'b' = vabx, (e, ab, f) \equiv_{S'}^4 (e', a'b', f') \text{ и } \langle e, ab, f \rangle = \langle e', a'b', f' \rangle.$$

Значит, эквивалентность $\equiv_{S'}$ согласована с операцией $S^{\leftarrow} \times S^{\rightarrow} \rightarrow S^{\leftrightarrow}$.

Таким образом, четырехсортная алгебра $\bar{}$ является фактор-алгеброй четырехсортной алгебры S' и выполняются первые четыре утверждения теоремы. В силу того что гомоморфизмы сохраняют тождества [17], фактор-алгебра $\bar{}$ при любых значениях $a, b, c \in S, x \in S^{\leftarrow}$ и $y \in S^{\rightarrow}$ удовлетворяет следующим равенствам:

$$a(bc) = (ab)c, x(ab) = (xa)b, (ab)y = a(by), (xa)y = x(ay).$$



Рассмотрим теперь произвольные элементы $a \in S$ и $k \approx +\infty$. Так как полугруппа S конечна, то найдется такое натуральное число $m \in \mathbb{N}$, для которого элемент $e = a^m$ является идемпотентом полугруппы S . Следовательно, справедливы равенства:

$$a^{k!} = (a^m)^{k!/m} = e^{k!/m} = e \text{ и } (a^n)^{k!} = (a^{k!})^n = a^{k!}.$$

Отсюда следует, что $\langle 1, a^{k!}, a^{k!} \rangle \in S^{\rightarrow}$ и для любого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ выполняются следующие равенства:

$$(a^n)^{+\omega} = \langle 1, (a^n)^{k!}, (a^n)^{k!} \rangle = \langle 1, a^{k!}, a^{k!} \rangle = a^{+\omega}.$$

Аналогично показывается, что $\langle a^{k!}, a^{k!}, 1 \rangle \in S^{\leftarrow}$ и для любого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $(a^n)^{-\omega} = a^{-\omega}$. Отсюда следует справедливость утверждений 5), 6) теоремы.

Более того, для любых элементов $a, b \in S$ упорядоченные тройки $(1, (ab)^{k!}, (ab)^{k!})$, $(1, a(ba)^{k!}, (ba)^{k!})$ по лемме 2.2 $\equiv_{S^{\rightarrow}}$ -эквивалентны, так как элементы $x = a, y = b(ab)^{k!-1}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$xy = ab(ab)^{k!-1} = (ab)^{k!}, yx = b(ab)^{k!-1}a = (ba)^{k!}, (ab)^{k!}x = (ab)^{k!}a = a(ba)^{k!}.$$

Это означает, что выполняются следующие равенства:

$$a(ba)^{+\omega} = a \langle 1, (ba)^{k!}, (ba)^{k!} \rangle = \langle 1, a(ba)^{k!}, (ba)^{k!} \rangle = \langle 1, (ab)^{k!}, (ab)^{k!} \rangle = (ab)^{+\omega}.$$

Аналогично доказывается справедливость равенства: $(ba)^{-\omega} b = (ab)^{-\omega}$.

Легко убедиться в справедливости следующих результатов.

Лемма 2.4. Пусть S, T – конечные полугруппы. Тогда любой гомоморфизм $\varphi : S \rightarrow T$ имеет однозначно определенное продолжение до гомоморфизма $\bar{\varphi}$ алгебры $\bar{}$ в алгебру $\bar{}$, ограничение которого $\bar{\varphi}|_S$ на множестве S совпадает с гомоморфизмом φ .

Лемма 2.5. Пусть S – конечная полугруппа, $W = (W_1, W_2, W_3, W_4)$ – конечная алгебра Уилки и φ – гомоморфизм полугруппы S в полугруппу W_1 . Тогда существует такой однозначно определенный гомоморфизм $\bar{\varphi} : \bar{} \rightarrow W$, ограничение которого $\bar{\varphi}|_S$ на множестве S совпадает с гомоморфизмом φ .

Лемма 2.6. Пусть \mathbf{Sg} – категория конечных полугрупп (с гомоморфизмами полугрупп), \mathbf{K} – категория конечных алгебр Уилки (с гомоморфизмами четырехсортных алгебр) и для любых $S \in \text{Obj } \mathbf{Sg}$, $W \in \text{Obj } \mathbf{K}$ множество $F(S, W)$ состоит из всех гомоморфизмов полугруппы S в полугруппу W_1 . Тогда пара отображений

$$S \mapsto \bar{S}, \varphi \mapsto \bar{\varphi} \text{ (где } S \in \text{Obj } \mathbf{Sg}, \varphi \in \text{Hom } \mathbf{Sg})$$

определяет универсальный функтор представления F категории \mathbf{Sg} в категории \mathbf{K} (см. терминологию в [17]).

3. ЯЗЫКИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЛОВ НА КОНЕЧНЫХ ПОЛУГРУППАХ

В этом разделе приводятся приложения полученных выше результатов к теории распознавания языков произвольных слов конечными полугруппами.

Пусть A – конечное множество, $W_{fin}(A)$ – полугруппа слов над алфавитом A , $W^{\rightarrow}(A)$ (соответственно $W^{\leftarrow}(A)$) – множество бесконечных вправо (соответственно влево) слов, $W^{\leftrightarrow}(A)$ – множество бесконечных в обе стороны слов и $W(A) = W_{fin}(A) \cup W^{\rightarrow}(A) \cup W^{\leftarrow}(A) \cup W^{\leftrightarrow}(A)$ – множество всех слов над алфавитом A . Подмножества $W(A)$ называются языками произвольных слов (кратко – языками) над алфавитом A .

Ясно, что $W(A)$ можно рассматривать как четырехсортную алгебру

$$W(A) = (W_{fin}(A), W^{\leftarrow}(A), W^{\rightarrow}(A), W^{\leftrightarrow}(A))$$

с шестью операциями: умножение (операция конкатенации) в полугруппе $W_{fin}(A)$, смешанные умножения $W^{\leftarrow}(A) \times W_{fin}(A) \rightarrow W^{\leftarrow}(A)$, $W_{fin}(A) \times W^{\rightarrow}(A) \rightarrow W^{\rightarrow}(A)$, $W^{\leftarrow}(A) \times W^{\rightarrow}(A) \rightarrow W^{\leftrightarrow}(A)$ и две унарные операции $W_{fin}(A) \rightarrow W^{\rightarrow}(A)$, $W_{fin}(A) \rightarrow W^{\leftarrow}(A)$, которые для любого слова $u \in W_{fin}(A)$ определяются по формулам $u^{+\omega} = uu\dots$, $u^{-\omega} = \dots uu$. При этом для любых $x, y, z \in W_{fin}(A)$, $u \in W^{\leftarrow}(A)$, $v \in W^{\rightarrow}(A)$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняются свойства:



$$(xy)z = x(yz), u(xy) = (ux)y, (xy)v = x(yv), (ux)v = u(xv), \\ x(yx)^{+\omega} = (xy)^{+\omega}, (x^n)^{+\omega} = x^{+\omega}, (yx)^{-\omega} y = (xy)^{-\omega}, (x^n)^{-\omega} = x^{-\omega}.$$

Следовательно, алгебра $W(A)$ является алгеброй Уилки. Легко видеть, что эта алгебра неполная.

Результаты предыдущего раздела позволяют нам канонически продолжить любое отображение φ множества A в конечную полугруппу S до гомоморфизма $\bar{\varphi} : W(A) \rightarrow \bar{}$, в результате чего каждое слово $w \in W(A)$ может интерпретироваться элементом $\bar{\varphi}(w)$ алгебры $\bar{}$.

Теорема 3.1. Пусть A – конечный алфавит и S – конечная полугруппа. Тогда для любого отображения $\varphi : A \rightarrow S$ существует такой однозначно определенный гомоморфизм $\bar{\varphi} : W(A) \rightarrow \bar{}$, ограничение которого $\bar{\varphi}|_A$ на множестве A совпадает с гомоморфизмом φ .

Доказательство. Как уже отмечалось выше в примере 4, любое отображение φ множества A в конечную полугруппу S в силу [16] канонически расширяется до гомоморфизма $\varphi : W_{fin}(A) \rightarrow S$, который по принципу переноса расширяется до гомоморфизма $*\varphi : *W_{fin}(A) \rightarrow S$. Так как по лемме 1 [14] образы $*\varphi(w_1), *\varphi(w_2)$ любых бесконечно близких слов $w_1, w_2 \in *W_{fin}(A)$ являются бесконечными произведениями членов одной и той же стандартной последовательности элементов полугруппы S , то для продолжения по непрерывности гомоморфизма φ на множество всех слов над алфавитом A необходимо отождествить такие образы. Следовательно, в силу теоремы 1.2 и следствия 1.3 расширение отображения φ до отображения $\bar{\varphi} : W(A) \rightarrow \bar{}$ канонически реализуется по следующему правилу:

- 1) $\bar{\varphi}(w) = \varphi(a_1) \dots \varphi(a_k)$, если $w = a_1 \dots a_k$ – конечное слово;
- 2) $\bar{\varphi}(w) = \langle e, a, 1 \rangle$, если $w = \dots a_{-2} a_{-1}$ и $(e, a, 1)$ – конечное представление бесконечного влево произведения $\varphi(a_{-n}) \dots \varphi(a_{-1})$ для некоторого $n \approx +\infty$;
- 3) $\bar{\varphi}(w) = \langle 1, a, f \rangle$, если $w = a_1 a_2 \dots$ и $(1, a, f)$ – конечное представление бесконечного вправо произведения $\varphi(a_1) \dots \varphi(a_n)$ для некоторого $n \approx +\infty$;
- 4) $\bar{\varphi}(w) = \langle e, a, f \rangle$, если $w = \dots a_{-1} a_0 a_1 \dots$ и (e, a, f) – конечное представление бесконечного в обе стороны произведения $\varphi(a_{-n}) \dots \varphi(a_m)$ для некоторых $m, n \approx +\infty$.

Корректность этого определения следует из леммы 1.6. Для доказательства того, что $\bar{\varphi}$ является гомоморфизмом алгебры $W(A)$ в алгебру $\bar{}$ рассмотрим произвольный элемент $w \in W_{fin}(A)$. Предположим, что $w = a_1 \dots a_k$ и обозначим $s = \bar{\varphi}(w)$. Тогда найдется такое натуральное число $m \in \mathbf{N}$, для которого значение $e = s^m$ является идемпотентом полугруппы S . Так как для любого значения $n \approx +\infty$ выполняется равенство $\bar{\varphi}(w)^{nm} = e$, то по определению $\bar{\varphi}(w^{-\omega}) = \langle e, e, 1 \rangle$. С другой стороны, по определению операций в алгебре $\bar{}$ выполняются следующие равенства:

$$\bar{\varphi}(w)^{-\omega} = s^{-\omega} = \langle s^{k!}, s^{k!}, 1 \rangle = \langle e, e, 1 \rangle.$$

Значит, справедливо равенство: $\bar{\varphi}(w^{-\omega}) = \bar{\varphi}(w)^{-\omega}$.

По аналогии легко доказать, что также выполняется равенство: $\bar{\varphi}(w^{+\omega}) = \bar{\varphi}(w)^{+\omega}$. Следовательно, отображение $\bar{\varphi}$ сохраняет унарные операции $^{-\omega}$ и $^{+\omega}$.

Пусть теперь $u = \dots a_{-2} a_{-1}$ и $w = a_{-m} \dots a_{-1}$, $v = \dots a_{-m-2} a_{-m-1}$ для некоторого $m \in \mathbf{N}$. Тогда $u = vw$ и $\bar{\varphi}(w) = t$ для некоторого $t \in S$. По следствию 1.3 для любого значения $n \approx +\infty$ бесконечное влево произведение $\varphi(a_{-n}) \dots \varphi(a_{-m-1})$ имеет конечное представление $(e, s, 1)$. Так как

$$\varphi(a_{-n}) \dots \varphi(a_{-1}) = (\varphi(a_{-n}) \dots \varphi(a_{-m-1}))(\varphi(a_{-m}) \dots \varphi(a_{-1})) = (es)t = e(st),$$

то упорядоченная тройка $(e, st, 1)$ является конечным представлением бесконечного влево произведения $\varphi(a_{-n}) \dots \varphi(a_{-1})$. Следовательно, справедливы условия:

$$\bar{\varphi}(v) = \langle e, s, 1 \rangle \text{ и } \bar{\varphi}(u) = \langle e, st, 1 \rangle.$$

Отсюда следует, что выполняются следующие равенства:

$$\bar{\varphi}(vw) = \bar{\varphi}(u) = \langle e, st, 1 \rangle = \langle e, s, 1 \rangle t = \bar{\varphi}(v) \bar{\varphi}(w).$$

По аналогии легко доказать, что при любом значении $m \in \mathbf{N}$ для любых слов $u = a_1 a_2 \dots$, $w = a_1 \dots a_m$ и $v = a_{m+1} a_{m+2} \dots$ справедливо равенство:

$$\bar{\varphi}(wv) = \bar{\varphi}(w) \bar{\varphi}(v).$$



Рассмотрим теперь следующие бесконечные слова:

$$w = \dots a_{-1} a_0 a_1 \dots, u = \dots a_{-2} a_{-1} \text{ и } v = a_0 a_1 \dots$$

В этом случае очевидно, что $w = uv$, и по следствию 1.3 для любого значения $n \approx +\infty$ бесконечные произведения

$$\varphi(a_{-n}) \dots \varphi(a_{-1}), \varphi(a_0) \varphi(a_1) \dots \varphi(a_n)$$

имеют конечные представления $(e, s, 1)$, $(1, t, f)$ соответственно. Так как выполняются равенства:

$$\begin{aligned} & \varphi(a_{-n}) \dots \varphi(a_{-1}) \varphi(a_0) \varphi(a_1) \dots \varphi(a_n) = \\ & = (\varphi(a_{-n}) \dots \varphi(a_{-1})) (\varphi(a_0) \varphi(a_1) \dots \varphi(a_n)) = (es)(tf) = e(st)f, \end{aligned}$$

то по определению упорядоченная тройка (e, st, f) является конечным представлением бесконечного в обе стороны произведения $\varphi(a_{-n}) \dots \varphi(a_n)$. Следовательно, справедливы следующие условия:

$$\bar{\varphi}(u) = \langle e, s, 1 \rangle, \bar{\varphi}(v) = \langle 1, t, f \rangle \text{ и } \bar{\varphi}(w) = \langle e, st, f \rangle.$$

Отсюда следует, что выполняются равенства:

$$\bar{\varphi}(uv) = \bar{\varphi}(w) = \langle e, st, f \rangle = \langle e, s, 1 \rangle \langle 1, t, f \rangle = \bar{\varphi}(u) \bar{\varphi}(v).$$

Последний результат дает возможность ввести следующее понятие языка, распознаваемого на конечной полугруппе. Пусть $L \subset W(A)$ – язык произвольных слов над конечным алфавитом A , S – конечная полугруппа и φ – отображение множества A в полугруппу S . Будем говорить, что отображение φ распознает язык L , если существует такое (четырёхсортное) подмножество $P \subset \bar{}$, что для канонического гомоморфизма $\bar{\varphi} : W(A) \rightarrow \bar{}$ выполняется следующее равенство:

$$L = \{ x \in W(A) : \bar{\varphi} \in P \}.$$

Язык $L \subset W(A)$ будем называть *расознаваемым конечной полугруппой*, если для некоторой конечной полугруппы S найдется такое отображение $\varphi : A \rightarrow S$, которое распознает язык L .

Основной результат работы [12] утверждает, что язык произвольных слов $L \subset W(A)$ в том и только том случае распознаваем конечным автоматом Буши, если он *обобщенно рационален*, т.е. этот язык L принадлежит наименьшему множеству языков произвольных слов над алфавитом A , которое содержит конечные языки конечных слов и замкнуто относительно трех специальных операций (объединение, тернарное произведение и бесконечная итерация). С помощью полученных выше результатов можно доказать следующий принципиально важный факт.

Теорема 3.2. Любой обобщенно рациональный язык $L \subset W(A)$ распознаваем конечной полугруппой.

Полученные результаты позволяют описать класс всех языков произвольных слов, распознаваемых конечными полугруппами.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (проект 99-1224).

Библиографический список

1. Pin J.E. Finite semigroups and recognizable languages: an introduction // Semigroups, Formal Languages and Groups, NATO ASI Series C: Mathematical and Physical Sciences, 1993. Vol. 466. P. 1–32.
2. Хомский Н. Синтаксические структуры: Новое в лингвистике. М.: Прогресс, 1962. Вып. 2. С. 412–527.
3. Гинзбург С. Математическая теория контекстно-свободных языков. М.: Мир, 1970.
4. Eilenberg S., Schützenberger P. On pseudovarieties // Advances in Math. 1976. Vol. 19, № 3. P. 413–418.
5. Eilenberg S. Automata, Languages and Machines. Academic Press. N.Y., 1976. Vol. B.
6. Kleene S.C. Representation of events in nerve nets and finite automata, in "Automata Studies" / Eds C. E. Shannon, J. McCarthy. Princeton University Press. Princeton, New Jersey, 1956. P. 3–42.
7. Perrin D., Pin J.E. Semigroups and automata on infinite words // Semigroups, Formal Languages and Groups, NATO ASI Series C: Mathematical and Physical Sciences, 1993. Vol. 466. P. 49–72.
8. Büchi J.R. On a decision method in restricted second-order arithmetic, in Proc. 1960 Int. Congr. For Logic, Methodology and Philosophy of Science, Stanford Univ. Press. Stanford, 1962. P. 1–11.



9. McNaughton R. Testing and generating infinite sequences by a finite automaton// Information and Control. 1966. Vol. 9. P. 521–530.
10. Wilke T. An algebraic theory for regular languages of finite and infinite words// Inter. J. of Algebra and Computation. 1993. Vol. 3. P. 447–489.
11. Ramsey F.D. On a problem of formal logic// Proc. London Math. Soc. 1929. Vol.30. P. 338–384.
12. Molchanov V.A. Nonstandard approach to general rational languages // Contributions to General Algebra 13, Proceedings of the Dresden Conference 2000 (AAA60) and the Summer School 1999, Verlag Johannes Heyn, Klagenfurt. 2001. P. 233–244.

УДК 681.322:681.5

ПОСТРОЕНИЕ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ЭКСПЕРТНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

В. М. Соловьев

Саратовский государственный университет,
кафедра математической кибернетики и компьютерных наук
E-mail: SolovyevVM@info.sgu.ru

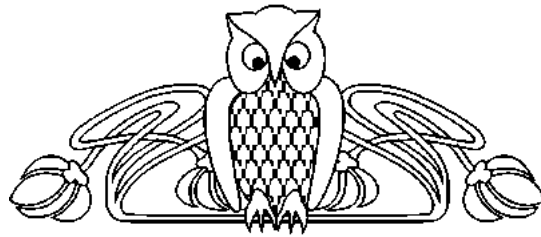
В работе рассмотрены вопросы построения диагностических экспертных систем (ДЭС) на основе нейронных сетей (НС) с латеральным торможением. Предложены методы обучения таких сетей. Проанализированы вопросы получения диагностической информации в гетерогенной вычислительной сети и использования априорной информации о значимости диагностических признаков. Результаты работы могут быть использованы при построении нейросетевых диагностических систем (кластеризаторов).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Традиционно для определения технического состояния сложных систем применяются статистические и эвристические методы диагностирования. В них используется небольшое число диагностических параметров, большие размеры выборок значений параметров (генеральные совокупности), техническое состояние легко определяется только по этим параметрам [7]. Если же техническое состояние трудно определимо и число диагностических параметров становится большим, то применяются диагностические экспертные системы (ДЭС). Однако если размеры выборок значений параметров малы, то ДЭС на основе статистических и эвристических методов не позволяют решить задачу определения технического состояния с достаточной достоверностью [4]. Обладая лишь информацией о симптомах дефекта по нескольким случайно выбранным диагностическим параметрам, невозможно построить приемлемую диагностическую модель. Поэтому возникла необходимость в построении новых ДЭС, использующих технологию добычи знаний (*Data Mining*) из больших массивов диагностических данных по малым выборкам. Необходимо разработать методы построения таких ДЭС на основе интеллектуальной технологии *Data Mining*, используемой для нахождения диагностических моделей и отношений, скрытых в сетевых базах диагностических данных.

Современные диагностические средства гетерогенных вычислительных сетей для определения технического состояния используют отобранные из базы диагностических данных X ограниченные выборки параметров вычислительной сети $\{x^S\} \in X$. При этом техническое состояние сети состоит из m категории $A = A(M, g, v)$ и характеризуется конечным числом симптомов S , определяемым по значениям диагностических параметров $\bar{\quad}$. Необходимо найти оператор (установить диагноз), удовлет-

13. Альбеверио С., Фенстад Й., Хезг-Крон Р., Линдстрем Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М.: Мир, 1990. 616 с.
14. Молчанов В.А. О естественном продолжении теории рациональных языков на языки произвольных слов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 90–93.
15. Молчанов В.А. Нестандартные сходимости в пространствах отображений // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 6. С. 141–153.
16. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир, 1985.
17. Кон П. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.



Construction of Diagnostic Expert Systems on the Basis of Neural Networks

V.M. Solovyev

In work questions of construction of diagnostic expert systems (DES) on the basis of neural networks (NN) with lateral braking are considered. Methods of training of such networks are offered. Questions of reception of the diagnostic information in the heterogeneous computer network and uses of the aprioristic information on the importance of diagnostic attributes are analyses. Results of work can be used at construction NN diagnostic systems (clustering).



воряющий заданной глубине и достоверности определения технического состояния вычислительной сети, позволяющий на основании значений диагностических параметров найти соответствующее им техническое состояние Y_j .

2. НЕЙРОННАЯ СЕТЬ С ЛАТЕРАЛЬНЫМ ТОРМОЖЕНИЕМ

В настоящее время наиболее массовое применение нейронных сетей (НС) отмечается в задачах классификации и кластеризации (категоризации) данных [5, 6]. Эти две задачи интеллектуальных вычислений существенно отличаются друг от друга. Задачей классификаторов является установление принадлежности образа к одному из формально определенных классов. Формальные признаки класса могут быть определены посредством правил логического вывода типа «если... – то ...» и эти правила стали основой построения традиционных экспертных систем. Термин «класс» определяется в них как совокупность предметов или понятий (образов), выделенных и сгруппированных в определенном признаковом пространстве или по определенным правилам. Под классификацией понимается отнесение некоторого образа к классу, выполняемое по этим формальным правилам и по совокупности признаков. Кластер (категория) определяет лишь некоторые общие свойства образов и связи между ними. Задача кластеризации как задача определения отношения данного образа к некоторой категории гораздо менее определена, чем задача отношения к классу. Границы различных категорий являются нечеткими, расплывчатыми и обычно сама категория понимается не через формальное определение, а только в сравнении с другими категориями. Границы классов, напротив, определены достаточно точно. Образ относится к данному классу, если известно, что он обладает необходимым числом признаков, характерных для этого класса.

Проблема кластеризации более сложная в сравнении с классификацией [1, 2]. Особенность ее заключается в том, что помимо отнесения образа к какой-либо группе требуется определить сами эти группы, т.е. сформировать категории. В случае обучения с учителем формирование категорий происходит методом проб и ошибок на основе примеров с известными ответами, предоставляемыми экспертом. Формирование категорий весьма напоминает процесс обучения у живых организмов, поэтому обычно эксперта называют «супервизором» или учителем. Учитель управляет обучением при помощи изменения параметров связей и реже – самой архитектуры сети. Задачей кластеризации является формирование обобщающих признаков в совокупности примеров. При увеличении числа примеров несущественные, случайные признаки сглаживаются, а часто встречающиеся – усиливаются, при этом происходит постепенное уточнение границ кластеров. Хорошо обученная НС способна извлекать признаки из новых примеров, ранее неизвестных диагностической системе, и принимать на их основе решения [3]. Обучаемые нейронные сети могут производить из данных скрытые знания, т.е. создавать навык формирования категорий, но его логическая структура обычно остается скрытой от пользователя. Производство знаний из накопленных данных – одна из особенностей самоорганизующихся сетей (карт) Кохонена (*Kohonen Self-organizing Map, SOM*), ориентированных на кластерный анализ.

Нейрофизиологи доказали, что в мозге нейроны располагаются в определенном порядке. Внешние физические воздействия вызывают отклик нейронов только из определенной области мозга. Самоорганизующиеся карты Кохонена в некоторой степени напоминают процессы, происходящие в мозге. Пусть для определения технического состояния вычислительной сети выбраны три параметра: утилизация сети, число искаженных пакетов и число широкоэвещательных пакетов в сети (их может быть любое количество). Эти три параметра являются координатами в трехмерном пространстве и с определенной достоверностью описывают техническое состояние вычислительной сети (выбрано признаковое пространство). Тогда каждой точке в этом пространстве будет соответствовать определенное техническое состояние сети, рис. 1, а. Так как диагностические параметры имеют разную физическую природу и размерность, их необходимо пронормировать в интервал $[0,1]$, в результате чего все точки попадут в единичный куб. Из рис. 1, а видно, как расположены в нормированном признаковом пространстве векторы, представляющие техническое состояние сети, причем легко заметить участки (кластеры),



где они группируются, т.е. у них схожие значения признаков-симптомов, а значит, и кластеры с большой долей вероятности могут определить техническое состояние. Но так можно поступить только в случае, когда параметров немного и пространство легко визуализировать. В примере пространство трехмерное, а как можно изобразить четырехмерное пространство или n -мерное? Необходимо найти способ, которым можно преобразовать n -мерное признаковое пространство в простую для анализа, желательно двумерную систему. Для этого можно использовать самоорганизующуюся карту Кохонена (SOM) – карту особенностей. В первом приближении ее можно представить в виде сети, изготовленной из резины (рис. 1, б).

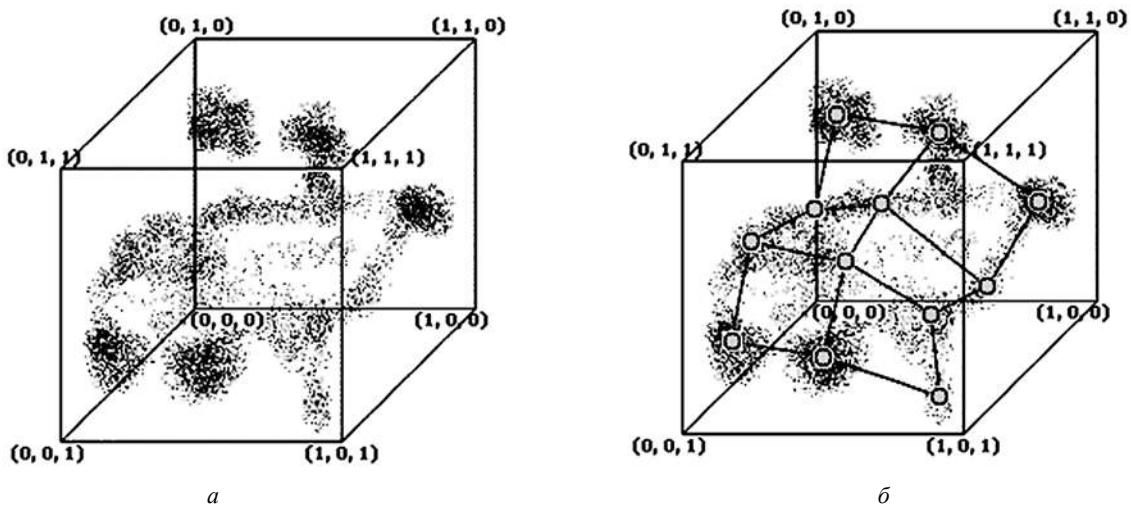


Рис. 1. Признаковое пространство технического состояния вычислительной сети (а), состояния вычислительной сети после наложения SOM (б)

Предварительно «скомкав», набрасывают эту сеть на признаковое пространство, а далее берут один вектор технического состояния (точку в этом пространстве) и находят ближайший к нему узел сети. После этого узел подтягивают к выбранной точке, а так как сетка «резиновая», вместе с этим узлом, но в меньшей степени, подтягиваются и соседние узлы. Затем выбирают другую точку, и процедура повторяется. В результате получают карту, расположение узлов которой совпадает с расположением основных кластеров в исходном признаковом пространстве. Полученная таким образом самоорганизующаяся карта обладает рядом замечательных свойств. Узлы ее располагаются так, что симптомам, похожим между собой, соответствуют соседние узлы карты в заданном метрическом пространстве (рис. 1, б). Таким образом, сеть выполняет отображение входного многомерного пространства на двумерную решетку с сохранением топологической упорядоченности входных данных. Симптомы со схожими наборами параметров попадут в один узел или в соседние узлы, т.е. решается задача поиска похожих состояний сети и формирование категорий.

Карта особенностей позволяет также представить диагностическую информацию в простой и удобной для анализа форме путем нанесения раскраски. Для этого раскрашивают узлы полученной карты цветами, соответствующими интересующим признакам. После нанесения раскраски получают зоны, которые соответствуют зонам определенного технического состояния, в том числе и зонам, отнесенным к отказам сети. Попадание параметров в эти зоны или приближение к ним позволяет принять решение на устранение дефектов или реконфигурацию сети. Можно также получить информацию о зависимостях между «независимыми» параметрами. Нанеся на карту раскраску, соответствующую различным симптомам, можно получить так называемый «атлас», хранящий в себе информацию о состоянии вычислительной сети. При анализе состояния сети, сравнивая расположение цветов в «атласе», порожденных различными симптомами, можно получить полную информацию о причинно-следственных связях в сети. Таким образом, самоорганизующаяся карта может быть представлена в



виде слоеного пирога, каждый слой которого имеет соответствующую раскраску, порожденную симптомами. Полученный «атлас» может использоваться для анализа закономерностей, имеющих место среди исследуемого набора диагностических данных. Процесс анализа при помощи SOM сводится к получению проекций признаков пространств соответствующих метрик (свертки пространств) и анализу образующихся кластеров. Таким образом, имея самоорганизующуюся карту вычислительной сети (обученную сеть Кохонена) и зная информацию о некоторых симптомах (признаках), можно достаточно достоверно судить о состояниях вычислительной сети, с которыми до этого диагностическая система была незнакома. Если нужно узнать что-либо, даже о произвольных диагностических параметрах, то необходимо отобразить их на карте и проанализировать соседей. Такая НС позволяет извлекать информацию из диагностической базы данных, основываясь на нечетких характеристиках, на боковом (латеральном) анализе соседей.

Самоорганизующиеся карты Кохонена состоят из слоя M нейронов (слоя Кохонена), образующего решетку на плоскости из прямоугольных или гексагональных ячеек, и входного сенсорного слоя из N нейронов, предназначенного для распределения входных данных между M нейронами, работающими одновременно. Нейроны в SOM латерально связаны, и каждая связь имеет определенный вес w_{ji} , характер которой описывается топологической зависимостью (рис. 2, а). Причем каждому нейрону слоя Кохонена сопоставляется множество состояний входного признакового пространства, обладающих близкими свойствами. Нейроны связаны с ближайшими к нему нейронами сильными возбуждающими связями. Затем на некотором расстоянии возбуждение сменяется латеральным торможением, а далее вновь проявляются слабые возбуждающие связи.

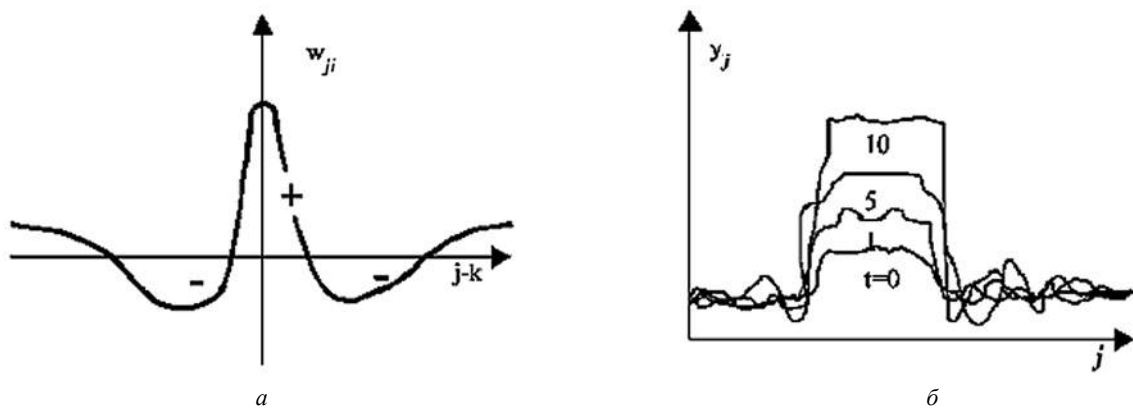


Рис. 2. График топологической зависимости между нейронами (а), изменения контрастности активности нейрона (б)

При предъявлении на входе сети вектора диагностических параметров результатом работы сети будет один наиболее возбужденный нейрон (нейрон-победитель):

$$i(x) = k, \text{ причем } \|w_k - X\| < \|w_j - X\|, j = 1, 2, \dots, M,$$

где $i(x)$ – индекс «нейрона-победителя», X – входной вектор диагностических параметров, w_k , w_j – векторы весов «нейрона победителя» и j -го «соседнего» нейрона соответственно. Нейрон-победитель определяет кластер, к которому принадлежит входной вектор диагностических параметров. Таким образом, каждый нейрон соответствует определенному кластеру. Каждый нейрон слоя Кохонена связан с каждым нейроном из входного слоя, число которых равно размерности анализируемых векторов диагностических параметров. Веса связей полагают равными нормированным значениям входных векторов:

$$w_{ji} = \frac{x_i^j}{\sum_i x_i^s}$$



где w_{ji} – значение веса связи от i -го входного нейрона на j -му нейрону сети Кохонена, x_i^j, x_i^S – соответственно нормируемый вектор и все возможные вектора из множества входных векторов $x_i^S \subseteq X$. Тогда активность j -го нейрона будет:

$$y^j = f\left(\frac{1}{2} \sum_n x_i^j w_{ji} - \Theta\right),$$

где f – функция активации нейрона (обычно сигмоида), Θ – порог активации нейрона (обычно вначале равный нулю).

При поступлении на вход вектора диагностического параметра начальное возбуждение получают все нейроны SOM, скалярное произведение которых с входным вектором превышает порог. В дальнейшем среди них выбирается один, для которого возбуждение максимально. Это достигается за счет обратных связей между нейронами по принципу латерального торможения. Каждый нейрон получает тормозящее (отрицательное) воздействие со стороны всех остальных нейронов, пропорционально степени их возбуждения, и испытывает возбуждающее (положительное) воздействие самого на себя. Вес латеральных связей в нейронном слое нормируется таким образом, что суммарный вес является возбуждающим только для нейрона с максимальной исходной активностью, а остальные нейроны испытывают торможение:

$$y^k(t+1) = f\left[y^k(t) - \frac{1}{(M+1)} \sum_{j \neq k} y^j(t)\right].$$

Для всех нейронов, кроме одного, значение аргумента функции активации становится отрицательным, что обращает их активность y^j в нуль. В своем взаимодействии самопроизвольно нейроны в слое Кохонена за счет увеличения числа итерации t могут усилить возбуждение нейрона-победителя (рис. 2, б). Процесс прекращается при установлении стабильного состояния, когда вектор диагностических параметров станет искомым отображением на карту признаков. Он и указывает на тот кластер, к которому принадлежит введенный диагностический параметр. Такой механизм определяется как «победитель забирает все» (*Winner Take All, WTA*). Суть работы сетей с латеральным торможением – применение механизма *WTA*.

2.1. Модель нейронной сети

Существует множество алгоритмов кластеризации, основанных на использовании мер близости между типичными объектами. Типичные объекты в них определяются через среднее арифметическое значение признаков по выборке, представляющей кластер. Каждый из алгоритмов имеет свою область применения и степень проработки, но распространенным недостатком всех их является отсутствие четкой формализации задачи. В большинстве своем совершается прямой переход от идеи кластеризации к алгоритму, в результате неизвестно, что хотят найти [3]. Поэтому формализации задач кластерного анализа с помощью НС придается большое значение.

Алгоритмы кластеризации строятся на основе итерационного метода динамических ядер, когда задана выборка векторов данных $\{x^S\}$ в пространство векторов диагностических признаков X , $\{x^S\} \in X$. Каждому кластеру будет соответствовать некоторое ядро y^j в пространстве кластеров Y_j , $y^j \in Y_j$. Для каждого $x_i^S \in X$ и $y^j \in Y_j$ определяется мера близости d_j . Для каждого набора из M ядер y^1, y^2, \dots, y^m и любого разбиения $\{x^S\}$ на кластеры $\{x^S\} = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_m$ определяется критерий качества:

$$D = D(y^1, y^2, \dots, y^m, Y_1, Y_2, \dots, Y_m) = \sum_{j=1}^m \sum_{x_i^S \in Y_j} d_j.$$

Требуется найти набор ядер y^1, y^2, \dots, y^m и разбиение $\{x^S\} = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_m$, минимизирующие D .

Задача кластеризации разбивается на две. Во-первых, для фиксированного набора ядер y^1, y^2, \dots, y^m находят разбиение $\{x^S\} = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_m$, минимизирующее критерий качества D . При этом действует дополнительное решающее правило: если для $x_i^S \in X$ минимальное значение d_j достигается при нескольких значениях i , выбор между ними может быть сделан произвольно. Во-вторых, для каждого



кластера $Y_j, j = 1, 2, \dots, m$, полученного на первом этапе, находят ядра $y^j \in Y_j$, минимизирующие критерий качества D_i для каждого i :

$$D_i = \sum_{x_i^s \in Y_j} d_j.$$

Начальные значения набора ядер и кластеры могут выбираться произвольно, либо по эвристическому правилу. На каждом шаге итерационных вычислений меры близости критерий качества D уменьшается, а отсюда следует сходимость процесса разбиения, т.е. после конечного числа шагов разбиение $\{x^s\} = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_m$ устанавливается.

Если ядру y^j сопоставляется элемент НС, вычисляющий по входному вектору x_i^s меру близости d_j , то решающее правило кластеризации, основанное на механизме *WTA*, будет следующим: элемент НС принадлежит кластеру Y_j , если выходной сигнал элемента больше всех остальных, т.е. мера близости d_j наименьшая.

Пространство кластеров технического состояния сети Y_j совпадает с пространством диагностических параметров X (техническое состояние определяется диагностическими признаками), а мера близости d_j – положительно определенная квадратичная форма от $x_i^s = y^j$ – обычно квадрат евклидова расстояния. Это одна из простейших задач кластеризации. Тогда ядро y^j , минимизирующее D_i , есть центр тяжести кластера Y_j :

$$y^j = \frac{1}{|Y_j|} \sum_{x_i^s \in Y_j} x_i,$$

где $|Y_j|$ – число элементов, составляющих кластер Y_j . В этом случае также упрощается и разделяющее правило. Мера близости d_j векторов диагностических признаков x_i^s и ядра кластера технического состояния y^j определяется коэффициентом корреляции:

$$d_j = \sum_j \frac{(x_i^s - M_x)(y^j - M_y)}{\sigma_x \sigma_y},$$

$M_x = \frac{1}{n} \sum_i x_i^s$, n – размерность пространства данных; $M_y = \frac{1}{m} \sum_j y^j$, m – число кластеров; $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i (x_i^s - M_x)^2}$; $\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_j (y^j - M_y)^2}$. Диагностические данные предварительно обрабатываются (нормируются и центрируются) по правилу $x \rightarrow \frac{x_i^s - M_x}{\sigma_x}$.

Точно также будут нормированы и центрированы векторы ядер y^j . Поэтому все обрабатываемые векторы и ядра принадлежат сечению единичной евклидовой сферы $\|X\| = 1$ гиперплоскостью $\sum_i x_i^s = 0$. Задача поиска ядра заданного кластера Y_j имеет следующее решение:

$$y^j = \frac{\sum_{x_i^s \in Y_j} x_i^s}{\left\| \sum_{x_i^s \in Y_j} x_i^s \right\|}.$$

В рассмотренной задаче кластеризации, когда ядро кластера определяются как нормированное среднее арифметическое диагностических параметров вычислительной сети, а решающее правило основано на вычислении меры близости как корреляции векторов диагностических признаков и ядер кластеров технического состояния, нейронная сеть, реализующая такой метод динамических ядер, является самоорганизующейся сетью Кохонена. В определении ядер y^j для SOM, как видно, входят суммы

$$\sum_{x_i^s \in Y_j} x_i^s,$$



что позволяет накапливать (суммировать) новые динамические ядра, обрабатывая один из примеров $\{x^S\}$ и пересчитывая y^j после появления нового примера.

Карта признаков самоорганизации Кохонена (SOM) является типичной нейронной сетью с латеральным торможением. Она может выполнять функции кластеризатора, для обучения которого используются выборки данных с заранее не заданной классификацией – несупервизорное обучение [8]. Задача НС – определить принадлежность входного вектора диагностических параметров s -го экземпляра $x^S = \{x_1^S, x_2^S, \dots, x_N^S\}^T$ к одному из M возможных кластеров технического состояния вычислительной сети, представленных векторными центрами (ядрами) y^1, y^2, \dots, y^m латеральных связей $w_j = \{w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{jN}\}^T$, $j = 1, 2, \dots, M$, где T – символ транспонирования. При этом каждый нейрон представляет собой N -мерный вектор-столбец $\{w_1, w_2, \dots, w_N\}^T$. Экземпляр i -й компоненты входного набора векторов x^S в момент времени t будет $x_i^S(t)$, а вес i -го входа j -го узла НС – $w_{ji}(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, M$. При соответствующих значениях порогов активации Θ каждый нейрон-победитель с заданной точностью будет определяться мерой близости d_j – квадратом евклидова расстояния между векторами, задаваемым входным вектором x_i^S и ядром j -го кластера y^j . Чем меньше это расстояние, тем больше мера близости входного вектора к типичному объекту кластера. Считается, что вектор x_i^S принадлежит j -му кластеру, если расстояние d_j до центра j -го кластера минимально. Кроме того, требуется определить набор из M ядер кластеров y^1, y^2, \dots, y^m и разбиение $\{x^S\}$ на кластеры:

$$\{x^S\} = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_m.$$

Причем разбиение должно удовлетворять критерию минимизации суммы расстояний от принадлежащих ему точек до ядра кластера:

$$Q = \sum_{j=1}^m D_j \rightarrow \min,$$

где для каждого кластера Y_j

$$D_j = \sum_{x_i^S \in Y_j} d_j.$$

Таким образом, минимизируется мера близости d_j по всем положениям ядер кластеров y^j и всем разбиениям пространства диагностических признаков $\{x^S\}$ на m кластеров Y_j технического состояния вычислительной сети.

Число кластеров m заранее не определяется, поэтому возможна ситуация слияния кластеров Y_j , если их ядра ближе, чем расстояние от типичного объекта до ядра в одном из них. Использовать критерий слияния кластеров можно для синтеза НС. Вначале принимают эмпирическую гипотезу о достаточном числе кластеров, строят их, минимизируя Q , затем некоторые кластеры Y_j объединяют и повторяют минимизацию Q с новым числом кластеров.

2.2. Синтез диагностического кластеризатора

Для реализации описанной выше модели необходимо определить меру соседства нейронов в сети. Меру их близости отображают зоны топологического соседства нейронов на карте признаков в различные моменты времени – $NE_j(t)$, множество нейронов, которые считаются соседями нейрона j в момент времени t . В процессе синтеза зоны соседства уменьшаются с течением времени. Алгоритм формирования диагностического кластеризатора на основе карт признаков можно представить в следующем виде.

1. Инициализация сети. Весовым коэффициентам сети присваиваются малые случайные значения. Общее число синаптических весов w_{ji} – $M \cdot N$. Начальная зона соседства задается размером поля NE .
2. Предъявление сети новых диагностических данных x^S .
3. Вычисление расстояния (метрики) до всех нейронов сети. Расстояния между предъявленным входным вектором диагностических признаков и каждым j -м нейроном является мерой близости d_j , вычисляемой как квадрат евклидова расстояния между векторами:



$$d_j = \sum_{i=0}^{N-1} [x_i^S(t) - w_{ji}(t)]^2,$$

где $x_i^S(t)$ – экземпляр i -й компоненты входного набора векторов в момент времени t , $w_{ji}(t)$ – вес связи i -го входа j -го нейрона в момент времени t .

4. Выбор нейрона с наименьшим расстоянием. Выбирается нейрон j^* , для которого расстояние d_j наименьшее.

5. Коррекция весов нейрона j^* и его соседей. Производится подстройка весов для нейрона j^* и всех нейронов из его кластера NE . Новые значения весов будут определяться из следующего выражения:

$$w_{ji}(t+1) = \begin{cases} w_{ji}(t) + r(t)[x_i^S(t) - w_{ji}(t)], j \in NE_j(t), i = 1, 2, \dots, N \\ w_{ji}, j \notin NE_j(t), i = 1, 2, \dots, N, \end{cases}$$

где $r(t)$ – шаг обучения, уменьшающийся с течением времени [$0 < r(t) < 1$].

6. Возвращение к п. 2, если не достигнута сходимость. Сходимость считается достигнутой, если вес латеральных связей стабилизировался и шаг обучения в п. 5 уменьшился до нуля.

Если число входных векторов в обучающей выборке достаточно велико по отношению к выбранному числу кластеров, то после обучения вес будут определять центры кластеров, распределенные в пространстве диагностических параметров таким образом, что функция плотности этих центров будет аппроксимировать функцию плотности вероятности входных векторов. Кроме того, вес будет организован таким образом, что топологически близкие узлы НС будут соответствовать физически близким входным векторам в смысле евклидова расстояния. Такая самоорганизующаяся сеть Кохонена способна функционировать в условиях помех, когда зафиксировано в ходе обучения определенное число кластеров. Веса латеральных связей будут модифицироваться медленно и подстройка весов закончится после обучения НС.

2.3. Обучение нейронной сети

Упорядоченность нейронов на решетке достигается в процессе обучения сети за счет механизма латерального взаимодействия *WTA*. В основу алгоритма обучения положены процессы, происходящие в коре головного мозга. В процессе обучения векторы подаются на входы всех нейронов сети и подстраивают синаптический вес нейронов. Обучающая выборка представлена лишь входными векторами, и нейронной сети предлагается самой найти скрытые закономерности в массиве данных. В процессе обучения самоорганизующаяся карта Кохонена определяет такие значения весов, чтобы при отображении входного пространства диагностических параметров на двухмерную решетку в выходном пространстве максимально сохранялась топологическая упорядоченность. Такой алгоритм обучения состоит из двух фаз. В первой фазе имеет место глобальное топологическое упорядочивание векторов весов. Множество подвергаемых обучению нейронов первоначально включают все нейроны слоя Кохонена, определяемые первоначально заданной зоной топологического соседства $NE_j(t)_{\max}$. Эта зона ограничивается в конце первой фазы ближайшими нейронами вплоть до нейрона победителя $NE_j(t) \rightarrow 0$. Во второй фазе вектора весов сходятся к точному значению центров кластеров y^1, y^2, \dots, y^m .

Входные векторы – это предварительно пронормированные векторы, которые последовательно предъявляются НС. Желаемые векторы не определяются. После того как было предъявлено достаточное число входных векторов, синаптические веса сети определяют кластеры. Кроме того, веса организуются так, что топологически близкие узлы НС чувствительны к похожим диагностическим параметрам. На каждом шаге обучения из исходного набора диагностических данным случайно выбирается один из векторов, а затем производится поиск наиболее похожего на него вектора весов нейронов. При этом выбирается нейрон-победитель, который наиболее похож на вектор входов. Под похожестью понимается расстояние между векторами, вычисляемое в евклидовом пространстве. После того как найден нейрон-победитель, производится корректировка весов НС. При этом вектор, описывающий нейрон-



победитель, и векторы, описывающие его соседей, перемещаются в направлении входного вектора. Исходная НС «деформируется», как показано на рис. 1, б. При этом для модификации весовых коэффициентов используется выражение

$$w_{ji}(t+1) = w_{ji}(t) + r(t)[x_i^S(t) - w_{ji}(t)],$$

где t – дискретное время итерационного процесса обучения (эпохи обучения). Обычно вектор $x_i^S(t)$ выбирается случайно из обучающей выборки на итерации t . Шаг обучения $r(t)$ – это функция, характеризующая латеральные свойства нейронов. Эта функция разбивается на две части, собственно функцию расстояния (соседства) и функцию скорости обучения:

$$r(t) = f(\|r_c - r_i\|, t) \cdot a(t),$$

где $f(\|r_c - r_i\|, t)$ – функция расстояния между обучаемым j -м нейроном и его соседом, $a(t)$ – функция скорости обучения. Обычно применяют одну из двух функций от расстояния, простую константу:

$$r(d, t) = \begin{cases} \text{const}, & d \leq \sigma(t) \\ 0, & d > \sigma(t) \end{cases},$$

или Гауссову функцию:

$$r(d, t) = e^{-\frac{d^2}{2\sigma^2(t)}}.$$

Лучшее качество обучения получается при использовании более сложной Гауссовой функции расстояния. Величину $\sigma(t)$ называют радиусом обучения. Она выбирается достаточно большой на начальном этапе обучения и постепенно уменьшается так, что в конечном итоге обучается один нейрон-победитель. Наиболее часто используется функция, линейно убывающая от времени. Функция скорости обучения $a(t)$ – это функция, убывающая во времени. Наиболее часто используется также два варианта функции, линейную и обратно пропорциональную времени:

$$a(t) = \frac{A}{t + B},$$

где A и B – константы. Применение этой функции приводит к тому, что все векторы из обучающей выборки вносят примерно равный вклад в результат обучения. Теперь двухфазный процесс обучения выглядит так: на первоначальном этапе выбирается достаточно большое значение скорости обучения и радиуса обучения, что позволяет расположить векторы в соответствии с распределением в выборке, а затем производится точная подстройка весов, когда значения параметров скорости обучения много меньше начальных. В случае использования при обучении линейных зависимостей первоначальный этап грубой подстройки может быть пропущен.

Алгоритм действий при обучении диагностического кластеризатора можно представить в следующем виде:

1. Выбрать и настроить параметры обучения. Выбрать функцию расстояния $f(\|r_c - r_i\|, t)$ и функцию скорости $a(t)$, установить значение параметров $\sigma(t)$, $NE_j(t)$ и констант A и B , количество эпох t и начальные веса связей $w_{ji}(t)$.

2. Выбор и просмотр обучающих выборок. Выбирается источник обучающих данных, в котором поля диагностических данных будут использованы для обучения карты. Диагностические данные предварительно нормируются, т.е. входной вектор преобразуется к единичному.

3. Настройка параметров визуализации и анализа. Настраиваются параметры визуализации построенных карт. Под визуализацией понимают метод представления полученной карты в виде, удобном для анализа. Визуализация определяется топологической матрицей расстояний, представляющей структуру кластеров полученной карты. Кроме того, при визуализации выбирается окраска, порождаемая компонентами диагностических данных, позволяющая представить связи отдельных диагностических параметров. К параметрам визуализации относят размеры карты и ячеек, цвета и форма ячеек



(четырёх- или шестиугольная), режим назначения границ кластеров, принципы сглаживания цветов, максимальное количество кластеров, максимальное количество слоев (размер атласа).

4. Процесс обучения карты Кохонена. Вычисляются весовые коэффициенты нейронов путем подачи на вход полученной карты множества входных диагностических данных из обучающей выборки. В ходе вычислений определяется нейрон-победитель, используя механизм *WTA*. В результате вектор весов нейрона и его соседей смещается в направлении вектора входных данных. Время обучения задается количеством эпох и останавливается автоматически по прохождению заданного числа итераций.

5. Визуализация обученных карт. В результате обучения формируется набор узлов НС, отображаемый в виде двумерной решетки. Каждая карта, входящая в НС, представляет собой проекцию компонент многомерных диагностических данных на плоскость. Визуализация и заключается в получении этих проекций и анализу образующихся кластеров. Для визуализации структуры кластеров, полученных в ходе обучения, используется матрица расстояний. Элементы матрицы определяют расстояния между весовыми коэффициентами нейрона и его ближайшими соседями. К визуализации также относится и анализ статистики по построенным и обученным картам: минимальное значение по кластеру, максимальное значение по кластеру, среднее значение по кластеру, стандартное отклонение (дисперсия) в кластере, минимальное значение по ячейке, максимальное значение по ячейке, среднее значение по ячейке, стандартное отклонение (дисперсия) по ячейке.

2.4. Работа с нейронной сетью и интерпретация результатов анализа

Если процесс обучения самоорганизующейся карты Кохонена по результатам визуализации дал приемлемые результаты, то НС готова к диагностированию вычислительной сети. Для этого на ее вход подаются рабочие выборки из множества диагностических данных. Результатом работы НС будет проверка гипотез и определение, к какому кластеру технического состояния ближе всего входные данные. В одном сеансе работы с нейронной сетью может быть создано и проанализировано несколько рабочих выборок. Рабочая выборка $x_i^s \in X_s$ по своей структуре похожа на обучающую выборку, а отличается только значениями предъявляемых векторов. Рабочую выборку можно сформировать вручную, набрав значения диагностических параметров. Это используется в основном для тестирования НС. Во время работы с нейронной сетью обычно рабочая выборка импортируется из диагностической базы данных и предварительно нормируется, как и обучающая выборка. Перед началом процесса анализа рабочая выборка может быть просмотрена. В нейронной сети с рабочей выборкой можно проводить анализ (расчет), эксперимент, сортировку, получать статистику, вести поиск определенных массивов данных, редактировать и выполнять другие операции. Основная операция анализа – это пересчет карты. При пересчете переобучение карты не происходит, т.е. новая матрица расстояний не создается, а лишь выясняется, в какие ячейки на карте Кохонена попадают векторы из рабочей выборки. Процесс пересчета может быть длительным, зависящим от размеров карты и рабочей выборки. Результат анализа можно либо визуализировать аналогично обучающей выборке и принять решение, либо импортировать в ДЭС для получения логического вывода. При визуализации в атлас будут включены карты по обучающим и рабочим выборкам, путем совмещения которых можно анализировать результат. Для выполнения визуальных процедур анализа в карты можно устанавливать метки, которые позволяют выводить все параметры ячеек и тем самым вести более подробный анализ в численных значениях. Эти же численные данные могут передаваться и в ДЭС. Необходимо помнить, что большое количество меток усложняет анализ карт. По картам, построенным на рабочих выборках, также можно провести статистический анализ, аналогичный описанному выше. При визуализации можно посмотреть и результат эксперимента – это ячейка на построенной карте, соответствующая диагностическому набору данных.

При использовании ДЭС, созданных на основе SOM, важно отметить, что кластеризация с помощью самоорганизующихся карт отличается от визуального анализа. В них номер узла НС (диагноз), к которому отнесен экземпляр диагностических данных, и фактический номер кластера в общем случае не всегда совпадают. Разделяя экземпляры данных, ДЭС производит субъективную кластеризацию,



не имеющую того реального физического смысла в вычислительной сети, которыми администратор сети наделяет классы технического состояния. Результаты кластеризации могут быть наделены фактическим смыслом путем постановки в соответствие номеру каждого узла номера того фактического класса технического состояния вычислительной сети, к которому относится большая часть экземпляров данных обучающей выборки, отнесенных ДЭС к данному узлу. Для этого может быть использована дополнительная карта Кохонена (классификатор), обученная по следующему алгоритму.

1. Реализуется обучающий эксперимент, где определяются по экземплярам соответствующих данных фактические классы технических состояний. Решается задача классификации. Производится обучение ДЭС для всех экземпляров обучающей выборки.

2. Для каждого узла карты Кохонена подсчитывается число экземпляров диагностических данных, относящихся к каждому из фактических классов технических состояний.

3. Каждому узлу карты ставится в соответствие тот фактический класс, к которому относится большая часть экземпляров данных, отнесенных к данному узлу. Определение соответствия производится путем записи пары (кортежа) «номер узла – номер класса».

Алгоритм можно рекомендовать для использования в диагностических экспертных системах в случае, когда реальный принцип деления экземпляров данных на кластеры совпадает или близок к методам классификации или когда размер обучающей выборки, т.е. совокупности значений диагностических параметров и сопоставленных им номеров кластеров, недостаточен для кластеризации. При этом экземпляры одного и того же кластера имеют близкие значения диагностических параметров, т.е. кластеры хорошо разделяются и имеют явно выраженные центры, вокруг которых достаточно плотно сосредоточены экземпляры диагностических параметров, относящихся к данному классу технического состояния.

3. ВЫБОР МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА ПРИЗНАКОВ

Качество предложенных алгоритмов несупервизорного обучения и методы кластеризации сильно зависят от метрики – меры расстояния между разделяемыми объектами. Существенное различие результатов работы алгоритмов в разных метриках убеждает в важности и необходимости правильного выбора метрики в пространстве диагностических данных [3]. Метрика, в свою очередь, зависит от того, какие переменные выбраны для описания технического состояния объектов, т.е. от выбора переменных и выделения диагностических параметров. Проблема выбора и масштабирования переменных – это в общем случае задача нелинейного отображения исходного пространства переменных в более удобное для дальнейшего анализа пространство. Выбор наиболее «информативных» диагностических параметров обычно производится с помощью эвристических правил на основании априорной информации. Проблема выбора метрики в диагностических нейросетевых моделях возникает из-за «неевклидовости» пространств диагностических параметров в силу их многомерности. Метрика трансформирует меру расстояния в многомерном пространстве диагностических параметров, выявляя существенные различия между значениями переменных. При распознавании технического состояния вычислительной сети предполагается, что есть дополнительная априорная информация, определяющая важность или несущественность диагностических данных.

Пусть $p(x_i^S, c)$ есть функция плотности вероятности совместного распределения параметра x_i^S в пространстве диагностических данных и дополнительной информации c , где переменная $x_i^S \in X$ – случайная величина. Условное распределение $p(c | x_i^S)$ определяет важность диагностического параметра. Разность распределений диагностических параметров может быть измерена расхождением Кульбака–Лейблера:

$$D[p(c | x_i^S) \| p(c | x_i^S + dx)] = dx^T J(x) dx,$$

где $J(x) = E_{p(c|x_i^S)} \left\{ \left[\frac{d}{dx} \log p(c | x_i^S) \right] \left[\frac{d}{dx} \log p(c | x_i^S) \right]^T \right\}$ – информационная матрица Фишера, $E_{p(c|x_i^S)}$ – условное математическое ожидание дополнительной информации c о диагностическом параметре x_i^S .



Информационная матрица Фишера $J(x)$ представляет собой тензор новой метрики в исходных евклидовых координатах. Новая локальная метрика $d_F^2(x, x + dx)$ в пространстве диагностических параметров определяется соотношением

$$d_F^2(x, x + dx) \in D[p(c | x_i^S) \| p(c | x_i^S + dx)] = dx^T J(x) dx.$$

Для многомерных признаков пространств $x^S = \{x_1^S, x_2^S, \dots, x_N^S\}^T$ и $w_j = \{w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{jN}\}^T$ расстояние между точками определяется на основании неравенства Г. Минковского [4]:

$$d_j = \left(\sum_{i=1}^N |x_i^S(t) - w_{ji}(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $p > 1$ – целое неотрицательное число.

Евклидово расстояние является частным простым случаем метрики Г. Минковского. Изменяя p , можно получить неограниченное число других метрик. Однако на практике ограничиваются легко вычисляемыми метриками, топологически близкими к фактическому признаковому пространству. Очевидно, чем ближе выбранная метрика к реальному признаковому пространству, тем точнее будет производиться кластеризация.

При построении ДЭС возникает задача автоматического выбора наилучшей метрики из множества заданных для каждого конкретного кластера технического состояния вычислительной сети.

Пусть $P = \{p\}$ – множество заданных метрик d^p , $p = 1, 2, \dots, L_p$, L_p – число метрик. Тогда, очевидно, метрика d^p для заданных кластеров является наилучшей, если число принимаемых ошибочных решений ДЭС при этой метрике минимально. Алгоритм итеративного подбора метрик может иметь следующий вид.

1. Установить счетчик метрик: $p = 1$.
2. Принять в качестве текущей метрики d метрику d^p .
3. Произвести обучение НС на выбранной обучающей выборке $x_i^S \subseteq X$.
4. Методом тестирования $x_i^K \subseteq X$ определить число ошибочных решений для p -й метрики в отношении категорий технического состояния, для которых известен K -й фактический кластер и диагностический параметр x_i^K .
5. Если $p \geq L_p$ – перейти к п. 6, иначе увеличить счетчик метрик $p : p = p + 1$: и перейти к п. 2.
6. В качестве лучшей принимается та метрика d^p , для которой число ошибочных решений минимально.

Таким образом, подобранные метрики предполагают, что все признаки, по которым производится кластеризация, являются одинаково значимыми (информативными). Однако из практики диагностирования вычислительной сети известно, что диагностические параметры разделяются на информативные и неинформативные. В отношении некоторых параметров может быть заранее известно или предполагается, что они являются наиболее информативными, но степень их значимости точно неизвестна и не позволяет производить кластеризацию только на основе данного параметра или исключить данный параметр в случае его малозначимости. Если использовать такую априорную информацию при обучении НС, то, очевидно, кластеризация будет производиться с меньшим числом ошибок. Для самоорганизующихся карт Кохонена задача состоит в том, чтобы использовать априорную информацию о значимости диагностических параметров при подборе метрики.

Пусть в качестве метрики выбрано евклидово расстояние. Априорная информация о значимости признаков в SOM может быть использована путем введения в выражение метрики положительно определенной коэффициентной функции $k(i)$. В этом случае метрика может быть задана в одной из следующих форм:

$$d_j = \sum_{i=1}^N [k(i)x_i^S(t) - w_{ji}(t)]^2 \text{ или } d_j = \sum_{i=1}^N k(i) - [x_i^S(t) - w_{ji}(t)]^2.$$



Чем информативнее i -й признак, тем меньшее значение должна принимать функция $k(i)$ и, наоборот, чем менее значимый диагностический параметр – тем большее. Вариантов задания таких функции может быть много, рассмотрим наиболее практически значимые. Во-первых, если априорно известно об информативности только некоторых диагностических параметров, то для параметров, которые предположительно значимее других, $k(i)$ полагают равными значению k , $0 \leq k < 1$. Если о некотором диагностическом параметре известно или предполагается, что он неинформативный или малозначимый, то такой параметр либо вообще исключается, либо функцию $k(i)$ полагают равной значению $k < 1$. Для параметров, о которых неизвестна априорная информация о значимости, функцию $k(i)$ полагают равной 1. Во-вторых, значимость диагностических параметров определяется степенью их влияния на фактический номер кластера, к которому относится экземпляр диагностических данных. В этом случае, функцию $k(i)$ можно положить равной дополнению до единицы модуля коэффициента корреляции i -го диагностического параметра и фактического кластера:

$$\forall x_i^s \in X : k(i) = 1 - \left| \sum_j \frac{(x_i^s - M_x)(y^j - M_y)}{\sigma_x \sigma_y} \right|.$$

4. ВЫВОДЫ

Использование НС Кохонена в качестве кластеризатора технического состояния вычислительной сети при соответствующем выборе метрики признакового пространства позволяет достичь приемлемых результатов диагностирования даже для небольших обучающих выборок. В этом основное преимущество предлагаемого метода при решении задач диагностирования вычислительных сетей над эвристическими алгоритмами, лежащими в основе традиционных ДЭС и требующими большого объема статистических данных. Описанный метод кластеризации позволяет рекомендовать предложенные модели и алгоритмы для использования в диагностических экспертных системах, для гетерогенных вычислительных сетей нового поколения. Однако следует отметить, что результаты работы таких кластеризаторов критичны к степени близости используемой метрики к реальному разделению диагностических параметров на кластеры, а выбор наилучшей метрики может быть достаточно долгим и трудоемким.

Библиографический список

1. Kohonen T. Self-organizing maps. Berlin etc: Springer, 1995. XV. 362 p.
2. Бовель Е.И., Паршин В.В. Нейронные сети в системах автоматического распознавания речи // Зарубежная радиоэлектроника. 1998. №4. С. 50–57.
3. Горбань А.Н., Дунин-Барковский В.Л., Кирдин А.Н. и др. Нейроинформатика. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение РАН, 1998. 296 с.
4. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ: Справ. пособие. Киев: Наук. думка, 1986. 584 с.
5. Кузусль Э.М. Ассоциативные нейроразнобные структуры. Киев: Наук. думка, 1990.
6. Нейрокомпьютеры и интеллектуальные роботы. /Под ред. Н.М. Амосова. Киев: Наук. думка, 1991. 272 с.
7. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. 2-е изд., стереотип. Киев: Техніка, 1977. 768 с.
8. Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника: Теория и практика. М.: Мир, 1992. 237 с.



УДК 519.21

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ИХ ПОВЕДЕНИЯ

Л.Б. Тяпаев

Саратовский государственный университет,
кафедра теоретических основ информатики
и информационных технологий
E-mail: tiapaevlb@info.sgu.ru

В рамках геометрического подхода предлагается изучать поведение автоматов в виде кривых на плоскости с привлечением геометрических методов. Для конечного детерминированного автомата предлагается новый способ задания в виде функциональной кривой на плоскости. Рассматриваются задачи анализа, синтеза, эквивалентности и распознавания автоматов в рамках геометрического подхода.

Автоматы, безусловно, являются наиболее простыми математическими моделями сложных систем в различных прикладных областях науки и техники, таких, например, как теория управления, техническое диагностирование, вычисления в нейронных сетях. В связи с этим изучение поведения автоматов как моделей некоторых систем неизменно возрастает. Методы решения задач анализа, синтеза, управления, распознавания автоматов и многих других ориентированы на традиционные способы задания автоматов в виде таблиц, графов, матриц, систем логических уравнений. Все эти перечисленные способы не отражают тенденции функционирования автомата в больших промежутках абстрактного времени. Кроме того, для решения той или иной задачи зачастую приходится “разворачивать” порождающие процедуры задания автоматов. В 1994 году В.А. Твердохлебовым был предложен новый геометрический подход к изучению поведения автоматов [1]. В рамках этого подхода предлагается систематизировать поведение автоматов в геометрические фигуры. В.А. Твердохлебов построил дискретную словарную геометрию для рассмотрения поведения автоматов с целью привлечения мощных геометрических идей и методов для анализа функционирования автоматов. Геометрический подход способствует поиску удобной классификации автоматов на основе классификации геометрических фигур, позволяет применить геометрические методы к построению, преобразованию и анализу фигур. В рамках геометрического подхода в данной статье предлагается рассматривать и изучать поведение автоматов в виде кривых на плоскости.

Итак, объектом исследования является конечный детерминированный автомат (КДА). Такой автомат определяется как пятерка $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где S, X, Y – конечные непустые множества, называемые соответственно множеством состояний, множеством входных сигналов и множеством выходных сигналов автомата, а δ, λ – функции вида $A = A(M, \varrho, \nu)$, $M = \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 1\}$, $\varrho = \{ \varrho_{ij} \mid i, j \in M \}$, $\nu = \{ \nu_{ij} \mid i, j \in M \}$, называемые функциями переходов и выходов соответственно. Через X^* и Y^* обозначим множества слов конечной длины над алфавитом X и над алфавитом Y соответственно.

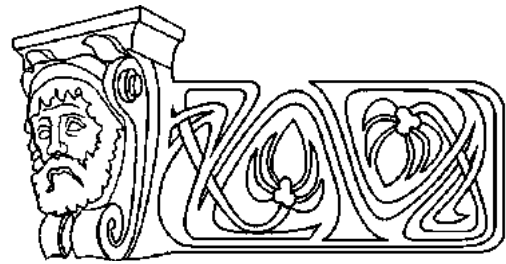
1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ АВТОМАТОВ

Рассмотрим произвольный КДА $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$. Поведение автомата A определяется множеством:

$$\Lambda_A = \{ (p, q) \mid (\exists s \in S) p \in X^* \ \& \ \lambda(s, p) = q \}.$$

Выделим начальное состояние $s_0 \in S$ автомата A . Тогда поведение инициального автомата (A, s_0) будет определяться множеством

$$\Lambda_A^{s_0} \stackrel{df}{=} \{ (p, q) \mid (p \in X^* \ \& \ q = \lambda(s_0, p)) \}. \text{ Пусть } |X| = n, |Y| = m.$$



Solving Some Problems of Automata Behaviour Analysis

Л.В. Тураев

In the context of the geometrical approach and by means of geometrical methods automaton behaviour is studied as curves on the plane. The attention is called to a new way of setting the finite-state machines as a functional curve on the plane. Also within the limits of the geometrical approach problems of automaton analysis, synthesis, diagnosis and transformation have been also investigated.



Геометрическое пространство Γ для автомата (A, s) , строится следующим образом.

Алгоритм [2].

1. Перенумеруем все буквы в множестве X следующим образом. Сопоставим символам алфавита X некоторые номера $n \in \mathbb{N}$ в $n + 1$ -ричной системе счисления, то есть осуществим взаимно однозначное отображение $f : \mathbb{N} \rightarrow X$, так что

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists ! (x \in X)) : f(n) = x.$$

2. Определим координатную ось \tilde{X} (ось абсцисс) для пространства Γ как отрезок числовой оси R длины $d = |X| + 1$ с началом в нуле.

3. Каждому слову $p = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$, $(x_{i_j} \in X, i_j \in \mathbb{N})$ посредством взаимно однозначного соответствия $g : X^* \rightarrow V_N$, где V_N — пространство конечномерных векторов, элементами которых являются натуральные числа, т.е. $V_N = \bigcup_k V_N^k, V_N^k = \{\omega (\omega = (i_1, i_2, \dots, i_k), i_j \in \{1, 2, 3, \dots\})\}$, сопоставим вектор $\omega = (i_1, i_2, \dots, i_k)$. Тогда каждому слову $p \in X^*$ будет однозначно соответствовать вектор ω , координатами которого будут элементы натурального ряда $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Пустому слову e сопоставим нуль-вектор.

4. Каждому такому вектору $\omega = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ взаимно однозначно сопоставим точку $\tilde{x} \in R$ на оси абсцисс, а именно $\tilde{x} = \frac{i_1}{d^0} + \frac{i_2}{d^1} + \frac{i_3}{d^2} + \dots + \frac{i_k}{d^{k-1}}$.

Аналогично, последовательно выполняя шаги 1–4, определяется ось ординат \tilde{Y} пространства Γ и точки вида $\frac{j_1}{l^0} + \frac{j_2}{l^1} + \dots + \frac{j_k}{l^{k-1}}$, где $l = |Y| + 1$, а j_i — координаты вектора $\xi = h(q), q \in Y^*$ и $h : Y^* \rightarrow V_N$ — так же как и отображение g , взаимно однозначное. Каждой паре $(p, q) \in \Lambda_A^s$ в пространстве Γ сопоставляется точка с координатами (\tilde{x}, \tilde{y}) , где $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{|p|} \frac{c_i}{d^{i-1}}, (c_1, c_2, \dots, c_{|p|}) = g(p), d = |X| + 1$, а $\tilde{y} = \sum_{i=1}^{|q|} \frac{b_i}{l^{i-1}}, (b_1, b_2, \dots, b_{|q|}) = h(q), l = |Y| + 1$.

В качестве построенного пространства $\Gamma = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) (\tilde{x} \in [1, n+1], \tilde{y} \in [1, m+1])\}, n, m \in \mathbb{Z}^+$ можно рассматривать ограниченное подмножество двумерного евклидова пространства. Считается, что точки пространства изображаются в декартовой системе координат с обычными представлениями о точках, кривых на плоскости и расстоянии между точками.

Обозначим через $K_{[1, n+1]}$ множество всех таких $\tilde{x} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(n+1)^{i-1}}$, где $c_i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ для всех значений $i \neq 1$, причем $c_1 \neq 0$ и $c_2, c_3, \dots, c_k, \dots$, могут обращаться в нуль только одновременно.

В [3] был рассмотрен пример построения совершенного канторова множества, где рассматривается сегмент числовой оси $[0, 1]$, который последовательно разбивается на три равных сегмента, а средний сегмент удаляется. Затем эта процедура повторяется до бесконечности для оставшихся после удаления сегментов. Рассмотрим сегмент $[1, 2]$ числовой оси и обозначим его через Δ , т.е. $\Delta \stackrel{df}{=} [1, 2]$. Проведем процедуры разбиения сегмента и удаления крайних левых интервалов (а не средних, как это проделано в [3]), полученных в результате процедуры разбиения. Итак, разделим сегмент Δ на $n+1$ равных частей точками $1 + \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{2}{n+1}, 1 + \frac{3}{n+1}, \dots, 1 + \frac{n}{n+1}$. Вычтем из сегмента Δ первый слева интервал $(1, 1 + \frac{1}{n+1})$, который мы обозначим U («первое вычитание»). Оставшиеся после этого вычитания множество состоит

из n сегментов: $[1 + \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{2}{n+1}] \stackrel{df}{=} \Delta_1, [1 + \frac{2}{n+1}, 1 + \frac{3}{n+1}] \stackrel{df}{=} \Delta_2, \dots, [1 + \frac{n}{n+1}, 2] \stackrel{df}{=} \Delta_n$.

С каждым из сегментов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ проделываем то же самое, что с основным сегментом Δ , т.е. делим каждый из сегментов Δ_{i1} на $n+1$ равные части точками

$$1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}, 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2}, \dots, 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{n}{(n+1)^2} \text{ (для } \Delta_1),$$



$$1 + \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}, 1 + \frac{2}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2}, \dots, 1 + \frac{2}{n+1} + \frac{n}{(n+1)^2} \text{ (для } \Delta_2), \dots$$

$$1 + \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}, 1 + \frac{n}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2}, \dots, 1 + \frac{n}{n+1} + \frac{n}{(n+1)^2} \text{ (для } \Delta_n)$$

и вычтем первые слева интервалы:

$$U_1 = \left(1 + \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \right),$$

$$U_2 = \left(1 + \frac{2}{n+1}, 1 + \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \right), \dots$$

$$U_n = \left(1 + \frac{n}{n+1}, 1 + \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \right) \text{ («второе вычитание»)}.$$

Интервалы U, U_1, U_2, \dots, U_m очевидно, без общих точек, а U_1, U_2, \dots, U_n и без общих концов.

Мы получаем в результате n^2 сегментов, каждый длины $\frac{1}{(n+1)^2}$:

$$\Delta_{11} = \left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}, 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2} \right],$$

$$\Delta_{12} = \left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2}, 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{3}{(n+1)^2} \right], \dots$$

$$\Delta_{1n} = \left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{n}{(n+1)^2}, 1 + \frac{2}{n+1} \right],$$

$$\Delta_{21} = \left[1 + \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}, 1 + \frac{2}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2} \right], \dots$$

$$\Delta_{2n} = \left[1 + \frac{2}{n+1} + \frac{n}{(n+1)^2}, 1 + \frac{3}{n+1} \right], \dots$$

$$\Delta_{n1} = \left[1 + \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}, 1 + \frac{n}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2} \right], \dots$$

$$\Delta_{nn} = \left[1 + \frac{n}{n+1} + \frac{n}{(n+1)^2}, 2 \right].$$

Имеем $\Delta = [1, 2]$, а также $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ – назовем их сегментами 1-го ранга, $\Delta_{11}, \dots, \Delta_{1n}$ – сегментами 2-го ранга.

С каждым из этих сегментов (2-го ранга) поступаем также, а именно вычитаем первые слева части («третье вычитание»), т.е. вычитаем из Δ_{11} интервал

$$U_{11} = \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}, 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} \right),$$

$$\text{из } \Delta_{12} \ U_{12} = \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2}, 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} \right), \dots$$

$$\text{из } \Delta_{21} \ U_{21} = \left(1 + \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}, 1 + \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} \right), \dots$$



$$\begin{aligned} \text{из } \Delta_{n1} U_{n1} &\stackrel{df}{=} \left(1 + \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}, 1 + \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} \right), \dots \\ \text{из } \Delta_{nm} U_{nm} &\stackrel{df}{=} \left(1 + \frac{n}{n+1} + \frac{n}{(n+1)^2}, 1 + \frac{n}{n+1} + \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} \right). \end{aligned}$$

Интервалы U_{11}, \dots, U_{nm} не имеют общих концов и общих точек. Таким образом, можно сказать, что из каждого сегмента $\Delta_{i_1 i_2}$ ($i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$) вычитаем интервал $U_{i_1 i_2}$, получаем сегменты $\Delta_{i_1 i_2 1}, \Delta_{i_1 i_2 2}, \dots, \Delta_{i_1 i_2 n}$ – каждый длины $\frac{1}{(n+1)^3}$. Обозначим эти сегменты $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$, где i_1, i_2, \dots, i_{k-1} принимают независимо друг от друга значения $1, 2, \dots, n$.

Пусть после $(k-1)$ -го вычитания мы получим n^{k-1} сегментов $(k-1)$ -го ранга $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$ где i_1, i_2, \dots, i_{k-1} суть всевозможные комбинации их $k-1$ цифр, каждая из которых есть либо 1, либо 2, ..., либо n .

Каждый из сегментов $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$ имеет длину $\frac{1}{(n+1)^{k-1}}$. Вычитаем из каждого сегмента $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$ его первую слева часть – интервал $U_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$ (« k -е вычитание»). Получим вместо каждого сегмента $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$ n сегментов $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 1}, \Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 2}, \dots, \Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} n}$ каждый длины $\frac{1}{(n+1)^k}$.

Проделав это с каждым сегментом $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$ получаем n^k сегментов k -го ранга $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k}$, причем k цифр i_1, i_2, \dots, i_k принимают в произвольных комбинациях значения $1, 2, \dots, n$.

Наш процесс определен, таким образом, для каждого $k = 1, 2, \dots$ до бесконечности. Пусть ξ есть произвольная точка сегмента $[1, 2]$; возможны лишь два случая: либо ξ попала в один из интервалов $U_{i_1 i_2 \dots i_k}$, т.е. в один из вычтенных интервалов, либо ξ не попала ни в какой из этих интервалов. Во втором случае ξ содержится в множестве

$$K_{[1, 2]} \stackrel{df}{=} [1, 2] - \{U + (U_1 + U_2 + \dots + U_n) + (U_{11} + U_{12} + \dots + U_{nn}) + \dots\},$$

т.е. в множестве точек, не оказавшихся вычтенными ни при каком из наших вычитаний.

Посмотрим, какие именно точки мы каждый раз вычитали из сегмента $[1, 2]$. Первый раз мы вычли все точки интервала $\left(1, 1 + \frac{1}{n+1}\right)$, т.е. все точки сегмента $[1, 2]$, которые при разложении в бесконечную $n+1$ -ичную дробь имеют первым $n+1$ -ичным знаком непременно 0. Сегменты же $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ состоят из точек, $n+1$ -ичное разложение которых может быть записано так, чтобы на первом месте было всегда либо 1, либо 2, ..., либо n .

При втором вычитании мы вычли интервалы U_1, \dots, U_n . Все точки первого интервала принадлежат сегменту Δ_1 , поэтому их первый $n+1$ -ичный знак есть 1; их второй $n+1$ -ичный знак есть необходимо 0.

Точно также интервалы U_2, \dots, U_n состоят из точек, у которых первый $n+1$ -ичный знак есть соответственно 2, ..., n , а второй – 0.

Итак, при втором вычитании мы вычли из сегмента $[1, 2]$ все те точки, у которых первый $n+1$ -ичный знак отличен от 0, а второй $n+1$ -ичный знак непременно равен 0.

Замечая, что точки, у которых первый знак необходимо равен 0, были вычтены при первом вычитании, мы можем сказать, что после второго вычитания из сегмента $[1, 2]$ оказались удаленными все те точки, в $n+1$ -ичном разложении которых по крайней мере один из первых двух $n+1$ -ичных знаков необходимо равен 0, причем точки оставшихся сегментов $\Delta_{i_1 i_2}$ имеют первыми двумя $n+1$ -ичными знаками i_1 и i_2 . Из точек, уцелевших после первых двух вычитаний, третье вычитание удаляет интервалы, состоящие из точек, $n+1$ -ичное разложение которых необходимо имеет своим третьим знаком 0, так что после первых трех вычитаний оказываются удаленными все те и только те точки сегмента $[1, 2]$, $n+1$ -ичном разложении которых по крайней мере один из первых трех $n+1$ -ичных знаков необходимо равен 0.



Продолжая это рассуждение, мы убедимся, что после первых m вычитаний удаленными оказываются все те и только те точки сегмента $[1,2]$, в $n+1$ -ичном разложении которых хоть одна из первых m цифр необходимо равна 0, причем $n+1$ -ичные разложения точек сегмента $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_m}$ начинаются с цифр $1, i_1 i_2 \dots i_m$.

Таким образом, уцелевшими при всяком из наших вычитаний окажутся лишь те точки, которые могут быть записаны в бесконечную $n+1$ -ичную дробь, ни один $n+1$ -ичный знак которой не 0; с другой стороны, все такие точки на основании только что сделанных рассуждений уцелеют, т.е. не будут удалены из сегмента ни при каком из наших вычитаний. Именно эти точки образуют интересующее нас множество. На основании сделанных рассуждений можно сформулировать следующее утверждение.

Предложение 1. Множество $K_{[1,2]}$ есть множество всех точек сегмента $[1,2]$, которые могут быть записаны в виде бесконечной $n+1$ -ичной дроби, состоящей из $n+1$ -ичных знаков, кроме 0.

Лемма 1. Пусть $p, p' \in X^*$ и $p \neq p'$. Тогда в пространстве Γ им будут соответствовать числа \tilde{x}, \tilde{x}' , причем $\tilde{x} \neq \tilde{x}'$.

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и пусть $p = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$, $p' = x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_l}$, где $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Рассмотрим пространство V_N конечномерных векторов, компонентами которых являются натуральные числа, т.е. $V_N = \bigcup_k V_N^k$, $V_N^k = \{\omega (\omega = (i_1, i_2, \dots, i_k), i_j \in \{1, 2, 3, \dots\})\}$. Взаимно однозначно сопоставим словам $p, p' \in X^*$ векторы $\omega, \omega' \in V_N$, т.е. сопоставим слову $p = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ вектор $\omega = (i_1, i_2, \dots, i_k)$, а слову $p' = x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_l}$ — соответственно вектор $\omega' = (j_1, j_2, \dots, j_l)$. Ясно, что такое соответствие является взаимно однозначным. Рассмотрим взаимно однозначное соответствие между векторами $\omega, \omega' \in V_N$ и элементами числовой оси в пространстве Γ , т.е. сопоставим вектору

$$\omega = (i_1, i_2, \dots, i_k) \text{ число вида } \tilde{x} = i_1 + \frac{i_2}{n+1} + \frac{i_3}{(n+1)^2} + \dots + \frac{i_k}{(n+1)^{k-1}} \text{ и вектору } \omega' = (j_1, j_2, \dots, j_l) - \text{ число } \tilde{x}' = j_1 + \frac{j_2}{n+1} + \frac{j_3}{(n+1)^{k-1}} + \dots + \frac{j_l}{(n+1)^{l-1}} \text{ соответственно.}$$

Допустим, что $i = \max_{r=1,2,\dots,k} i_r, j = \max_{s=1,2,\dots,l} j_s$. Утверждаем, что $\tilde{x}, \tilde{x}' \in [1, n+1]$. Действительно, $\tilde{x} < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i}{(n+1)^{m-1}}$ и $\tilde{x}' < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{j}{(n+1)^{m-1}}$. Ряды $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{i}{(n+1)^{m-1}} = i + i \frac{1}{n+1} + i \frac{1}{(n+1)^2} + \dots, \sum_{m=1}^{\infty} \frac{j}{(n+1)^{m-1}} = j + j \frac{1}{n+1} + j \frac{1}{(n+1)^2} + \dots$ сходящиеся. Действительно, каждый из этих рядов является бесконечно убывающей геометрической прогрессией со знаменателем прогрессии $\frac{1}{n+1}$, причем известно, что суммой бесконечно убывающей прогрессии, знаменатель которой по абсолютной величине меньше единицы, называется предел последовательности ее частных сумм, и он равен частному от деления первого члена на разность между единицей и знаменателем, т.е.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{i}{(n+1)^{m-1}} = i + i \frac{1}{n+1} + i \frac{1}{(n+1)^2} + \dots = \frac{i}{1 - \frac{1}{n+1}} = i \frac{n+1}{n},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{j}{(n+1)^{m-1}} = j + j \frac{1}{n+1} + j \frac{1}{(n+1)^2} + \dots = j \frac{n+1}{n}$$

Даже если предположить, что $i, j = n$, сумма этих рядов будет равна $n+1$. Таким образом, имеем $\tilde{x}, \tilde{x}' < n+1$.

Перейдем к доказательству неравенства $\tilde{x} \neq \tilde{x}'$. Допустим, что $\tilde{x} = \tilde{x}'$, т.е. что $i_1 + \frac{i_2}{n+1} + \frac{i_3}{(n+1)^2} + \dots + \frac{i_k}{(n+1)^{k-1}} = j_1 + \frac{j_2}{n+1} + \dots + \frac{j_l}{(n+1)^{l-1}}$. Сопоставим множеству $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ некоторые номера в $n+1$ -ичной системе счисления. Для простоты будем обозначать числа, записанные в $n+1$ -ичной системе счисления, символами i_1, \dots, i_k .



Рассмотрим замкнутый промежуток $[1, n+1]$ числовой оси. Выберем некоторый произвольный элемент \tilde{x} интервала $[1, n+1]$, $\tilde{x} \in [1, n+1]$. Если $\tilde{x} \in Z^+$, то запишем число \tilde{x} в виде бесконечной дроби в $n+1$ -ричной системе счисления, т.е. $\tilde{x} = \alpha, 00\dots 0\dots$, $\alpha \in Z^+$. Если $\tilde{x} \notin Z^+$, то оно заключено между двумя целыми числами α и $\alpha + 1$. Допустим, что $\tilde{x} \neq \alpha + \frac{\beta}{(n+1)^r}$ (где $\beta, r \in N$). Разделим сегмент $[\alpha, \alpha + 1]$ на $n+1$ сегментов:

$$\left[\alpha, \alpha + \frac{1}{n+1} \right], \left[\alpha + \frac{1}{n+1}, \alpha + \frac{2}{n+1} \right], \dots, \left[\alpha + \frac{n}{n+1}, \alpha + 1 \right],$$

которые мы обозначим через $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n$. Длина каждого сегмента равна $\frac{1}{n+1}$. Точка \tilde{x} попала лишь в один из этих сегментов (так как если бы она принадлежала двум сегментам, то была бы и общим концом и имела бы, следовательно, вид $\tilde{x} = \alpha + \frac{\beta}{(n+1)^r}$).

Пусть $\tilde{x} \in \Delta_{i_1}$. Числа i_1 назовем первым $n+1$ -ричным знаком числа \tilde{x} . Рассмотрим сегмент $\Delta_{i_1} = \left[\alpha + \frac{i_1}{n+1}, \alpha + \frac{i_1+1}{n+1} \right]$. Разбиваем его на $n+1$ сегментов

$$\Delta_{i_1 0} = \left[\alpha + \frac{i_1}{n+1}, \alpha + \frac{i_1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \right], \dots, \Delta_{i_1 n+1} = \left[\alpha + \frac{i_1}{n+1} + \frac{n}{(n+1)^2}, \alpha + \frac{i_1+1}{n+1} \right].$$

Длина каждого сегмента равна $\frac{1}{(n+1)^2}$. Точка \tilde{x} принадлежит только одному из наших сегментов.

Пусть $\tilde{x} \in \Delta_{i_1 i_2}$. Целое число i_2 назовем вторым $n+1$ -ричным знаком числа \tilde{x} . Этот процесс, очевидно, можно продолжать до бесконечности, и мы получим бесконечную последовательность чисел i_1, i_2, \dots, i_k , каждое из которых равно или 0, или 1, ..., или n (в $n+1$ -ричной системе счисления). Число α является целой частью числа \tilde{x} , числа i_1, i_2, \dots, i_k — $n+1$ -ричными знаками числа \tilde{x} . Таким образом, имеем запись числа \tilde{x} в виде бесконечной $n+1$ -ричной дроби, т.е. $\tilde{x} = \alpha, i_1 i_2 \dots i_k \dots$

Пусть теперь $\tilde{x} = \alpha + \frac{\beta}{(n+1)^r}$, другими словами, \tilde{x} разлагается в конечную $n+1$ -ричную дробь:

$$\tilde{x} = \alpha + \frac{\beta_1}{n+1} + \frac{\beta_2}{(n+1)^2} + \dots + \frac{\beta_k}{(n+1)^k}.$$

Это означает, что \tilde{x} попадает внутрь сегментов

$$\left[\alpha, \alpha + 1 \right], \left[\alpha + \frac{\beta_1}{n+1}, \alpha + \frac{\beta_1+1}{n+1} \right], \dots, \left[\alpha + \frac{\beta_1}{n+1} + \dots + \frac{\beta_{k-1}}{(n+1)^{k-1}}, \alpha + \frac{\beta_1}{n+1} + \dots + \frac{\beta_{k-1}+1}{(n+1)^{k-1}} \right].$$

При разбиении же последнего из сегментов на $n+1$ частей точка \tilde{x} окажется одной из точек деления, а именно будет правым концом сегмента

$$\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{k-1} \beta_k - 1} = \left[\alpha + \frac{\beta_1}{n+1} + \dots + \frac{\beta_{k-1}}{(n+1)^{k-1}} + \frac{\beta_k - 1}{(n+1)^k}, \alpha + \frac{\beta_1}{n+1} + \dots + \frac{\beta_{k-1}}{(n+1)^{k-1}} + \frac{\beta_k}{(n+1)^k} \right]$$

и левым концом сегмента

$$\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{k-1} \beta_k} = \left[\alpha + \frac{\beta_1}{n+1} + \dots + \frac{\beta_{k-1}}{(n+1)^{k-1}} + \frac{\beta_k}{(n+1)^k}, \alpha + \frac{\beta_1}{n+1} + \dots + \frac{\beta_{k-1}}{(n+1)^{k-1}} + \frac{\beta_k + 1}{(n+1)^k} \right].$$

Таким образом, для k -го $n+1$ -ричного знака числа \tilde{x} получаем не одно, а два значения: β_{k-1} и β_k . При дальнейших подразделениях сегментов $\Delta_{\beta_1 \dots \beta_{k-1}}$ и $\Delta_{\beta_1 \dots \beta_k}$ на $n+1$ меньших сегментов точка \tilde{x} будет все время оказываться в самом правом из подразделений сегмента $\Delta_{\beta_1 \dots \beta_{k-1}}$ и в самом левом из подразделений сегмента $\Delta_{\beta_1 \dots \beta_k}$. Сообразно с этим получаем для \tilde{x} два разложения в бесконечную $n+1$ -ричную дробь, а именно



$$\tilde{x} = \alpha, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{k-1} \beta_k 000\dots, \tilde{x} = \alpha, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{k-1} \beta_k - 1nnn\dots,$$

из которых первое состоит начиная с некоторого места из одних чисел вида n , второе – из одних нулей.

Это выражает известный факт, что всякая конечная $n+1$ -ричная дробь (т.е. дробь, все $n+1$ -ричные знаки которой, начиная с некоторого места, суть нули) может быть записана также в виде бесконечной (вообще говоря) периодической дроби, имеющей в периоде $n+1$ -ричный знак n .

Проделанные рассуждения иллюстрируют тот факт, что всякому действительному числу $\tilde{x} \neq \alpha + \frac{\beta}{(n+1)^r}$ соответствует одно разложение в бесконечную $n+1$ -ричную дробь: $\tilde{x} = \alpha, i_1 i_2 \dots i_k \dots$, т.е. $\tilde{x} = \alpha + \frac{i_1}{n+1} + \frac{i_2}{(n+1)^2} + \dots + \frac{i_k}{(n+1)^k} + \dots$, если же $\tilde{x} = \alpha + \frac{\beta}{(n+1)^k}$, то ему соответствует два разложения, из которых одно содержит, начиная с некоторого места, одни нули, второе — одни числа вида n . Для того чтобы достигнуть однозначности изображения каждого действительного числа бесконечной $n+1$ -ричной дробью, необходимо, очевидно, условиться, какое из двух разложений одного и того же числа брать. Условимся брать всегда то разложение, которое содержит бесконечное число нулей.

Вернемся к нашему предположению, что $\tilde{x} = \tilde{x}'$. Это означает, что $i_1 + \frac{i_2}{n+1} + \frac{i_3}{(n+1)^2} + \dots + \frac{i_k}{(n+1)^{k-1}} = j_1 + \frac{j_2}{n+1} + \dots + \frac{j_l}{(n+1)^{l-1}}$. Конечной сумме в левой части равенства, в соответствии с проведенными выше рассуждениями, можно сопоставить разложение в бесконечную $n+1$ -ричную дробь $i_1, i_2 i_3 \dots i_k 000\dots$. Аналогично, конечной сумме в правой части равенства можно сопоставить разложение вида $j_1, j_2 j_3 \dots j_l 000\dots$. Таким образом, имеем $i_1, i_2 i_3 \dots i_k 000\dots = j_1, j_2 j_3 \dots j_l 000\dots$. Известно [3], что всякой бесконечной $n+1$ -ричной дроби соответствует единственное вполне определенное действительное число. На основании этого и равенства $i_1, i_2 i_3 \dots i_k 000\dots = j_1, j_2 j_3 \dots j_l 000\dots$, разложения $i_1, i_2 i_3 \dots i_k 000\dots$ и $j_1, j_2 j_3 \dots j_l 000\dots$ определяют одно единственное действительное число, причем $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_k = j_l$ и $k = l$. Сопоставим взаимно однозначно разложению $i_1, i_2 i_3 \dots i_k 000\dots$ вектор $\omega = (i_1, i_2, \dots, i_k)$, аналогично разложению $j_1, j_2 j_3 \dots j_l 000\dots$ — вектор $\omega' = (j_1, j_2, \dots, j_l)$. Сопоставим каждому из векторов ω, ω' взаимно однозначно последовательности $p = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}, p' = x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_l}$ соответственно. Последовательности p, p' — слова над алфавитом $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Из равенства компонент векторов ω, ω' и равенства их размерностей следует совпадение слов p, p' , что противоречит условию.

Лемма 2. Пусть $\tilde{x}, \tilde{x}' \in [1, n+1)$ и пусть $\tilde{x} = \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{(n+1)^{i-1}}, \tilde{x}' = \sum_{i=1}^s \frac{c'_i}{(n+1)^{i-1}}$, где $c_i, c'_j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ для всех значений $i, j \neq 1$, причем $c_1, c'_1 \neq 0$ и $c_2, c_3, \dots, c_k, c'_2, c'_3, \dots, c'_s$ могут обращаться в нуль только одновременно. Пусть $\tilde{x} \neq \tilde{x}'$.

Тогда числам \tilde{x}, \tilde{x}' можно сопоставить некоторые слова p, p' над алфавитом $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, причем $p \neq p'$.

Доказательство. Используя технику доказательства предыдущей леммы, сопоставим числам \tilde{x}, \tilde{x}' векторы $\omega = (c_1, c_2, \dots, c_k), \omega' = (c'_1, c'_2, \dots, c'_s)$, а им в свою очередь последовательности $p = x_{c_1} x_{c_2} \dots x_{c_k}, p' = x_{c'_1} x_{c'_2} \dots x_{c'_s}$. По условию $c_i, c'_j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ для всех значений i, j , причем $c_1, c'_1 \neq 0$ и $c_2, c_3, \dots, c_k, c'_2, c'_3, \dots, c'_s$ могут обращаться в нуль только одновременно, а следовательно, последовательности p, p' состоят из букв, принадлежащих алфавиту $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, а значит, p, p' — слова над этим алфавитом, т.е. $p, p' \in X^*$.

Перейдем к доказательству неравенства $p \neq p'$. Допустим противное, т.е. что $p = p'$. Это в точности означает, что размерности векторов ω, ω' совпадают. Сопоставим этим векторам взаимно однозначно числа $\tilde{x} = c_1 + \frac{c_2}{n+1} + \dots + \frac{c_k}{(n+1)^{k-1}}, \tilde{x}' = c'_1 + \frac{c'_2}{n+1} + \dots + \frac{c'_s}{(n+1)^{s-1}}$. Каждое из этих разложений определяет изображение этих чисел в виде бесконечных $n+1$ -ричных дробей $c_1, c_2 \dots c_k 00\dots$ и $c'_1, c'_2 \dots c'_s 00\dots$ соответственно. В свою очередь, каждая из этих дробей определяет некоторое действительное число, причем единственное.



Поскольку размерности векторов $\omega = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ и $\omega' = (c'_1, c'_2, \dots, c'_s)$ совпадают, т.е. $k = s$ и каждый из векторов — есть код слов p, p' соответственно, то совпадают и компоненты векторов ω, ω' . Таким образом, дроби $c_1, c_2, \dots, c_k, 00, \dots, c'_1, c'_2, \dots, c'_s, 00, \dots$ определяют одно и то же действительное число, что противоречит условию. Следовательно, наше предположение оказалось неверным.

Доказанные леммы позволяют сделать вывод в виде следующей теоремы, подтверждающей корректность алгоритма.

Теорема 1. Пусть $p, p' \in X^*$, т.е. слова над алфавитом $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Этим словам можно сопоставить некоторые числа $\tilde{x}, \tilde{x}' \in [1, n+1)$, причем $\tilde{x} = \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{(n+1)^{i-1}}, \tilde{x}' = \sum_{i=1}^s \frac{c'_i}{(n+1)^{i-1}}$, где $c_i, c'_j \in \{1, 2, \dots, n\}$ для всех значений i, j .

Тогда $\tilde{x} \neq \tilde{x}'$ тогда и только тогда, когда $p \neq p'$.

Под *геометрическим образом* автомата (A, s) понимается множество

$$\begin{aligned} \Omega_A^s \stackrel{df}{=} \{(\tilde{x}, \tilde{y}) : & \left((\exists p \in X^*) (\exists q \in Y^*) (\exists \omega = (c_1, c_2, \dots, c_{|p|}) \in V_N) : \right. \\ & \left. (\exists \xi = (b_1, \dots, b_{|p|}) \in V_N) : \lambda(s, p) = q \ \& \ \omega = g(p) \ \& \ \xi = h(q) \ \& \right. \\ & \left. \tilde{x} = \sum_{i=1}^{|p|} \frac{c_i}{(n+1)^{i-1}} \ \& \ \tilde{y} = \sum_{i=1}^{|p|} \frac{b_i}{(m+1)^{i-1}} \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Это множество с помощью предложенного алгоритма порождается множеством Λ_A^s и определяет поведение автомата (A, s) в пространстве Γ , которое представляет собой некоторый точечный образ. Отметим, что множество Ω_A^s , как и Λ_A^s , бесконечно.

Введем в рассмотрение следующее множество:

$$\begin{aligned} \Omega_A^{r,s} \stackrel{df}{=} \{(\tilde{x}, \tilde{y}) : & (\exists r \in Z^+) \left(\exists p \in \bigcup_{j=1}^r X^j \right) \left(\exists q \in \bigcup_{j=1}^r Y^j \right) \\ & \left(\exists \omega = (c_1, \dots, c_{|p|}) \in V_N \right) \left(\exists \xi = (b_1, \dots, b_{|p|}) \in V_N \right) : \\ & \lambda(s, p) = q \ \& \ \omega = g(p) \ \& \ \xi = h(q) \ \& \ \tilde{x} = \sum_{i=1}^{|p|} \frac{c_i}{(n+1)^{i-1}}, \tilde{y} = \sum_{i=1}^{|p|} \frac{b_i}{(m+1)^{i-1}} \} \end{aligned}$$

Отметим, что величина r определяется в зависимости от рассматриваемого автомата, его свойств и задач, рассматриваемых для данного автомата.

Кривой f , задающей поведение автомата (A, s) в пространстве Γ на словах до длины r , назовем всякую непрерывную кривую, такую, что любая точка $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega_A^{r,s}$ принадлежит и кривой f , т.е. кривая f содержит все точки множества Ω_A^s .

Кривая f называется *функциональной кривой*, если f есть график некоторой непрерывной функции. отождествим понятие функции, определяющей функциональную кривую, с самой кривой.

Функциональная кривая f *определяет поведение* автомата (A, s) в пространстве Γ , если $f \supset \Omega_A^s$.

Поведение автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ с l состояниями в пространстве Γ будет определяться семейством кривых $\{f_s\}_{s \in S}, |S| = l$. Такие кривые будем называть *автоматными*. Уточним это понятие.

Пусть кривая f есть функциональная кривая, определенная в пространстве Γ . Тогда кривую f будем называть *автоматной*, если найдутся автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ и состояние $s \in S$ такие, что $f = f_s$.

После того как в пространстве Γ определен геометрический (точечный) образ автомата, возникает задача интерполирования точечного образа конечного автомата в этом пространстве. В качестве интерполирующего многочлена можно взять интерполяционный многочлен Лагранжа $L_k(\tilde{x})$, поскольку этот многочлен является наиболее удобным при интерполяции не равноотстоящих узлов интерполяции [4]. Как правило, интерполяционный многочлен как бы «выскакивает» за пределы пространства Γ . В таком случае можно прибегнуть к интерполяции с помощью сплайнов.



В связи с этим возникает задача идентификации автоматных кривых. Необходим критерий, по которому можно было бы различать автоматные кривые.

Рассмотрим произвольный отрезок числовой оси $[a, a + 1]$, где $a \in Z^+$, $1 \leq a \leq n$. Разобьем его на n равных частей точками $a + \frac{1}{n+1}, a + \frac{2}{n+1}, \dots, a + \frac{n}{n+1}$. Полученные сегменты отрезка $[a, a + 1]$ обозначим соответственно $\Delta_1 \stackrel{df}{=} \left[a, a + \frac{1}{n+1} \right], \Delta_2 \stackrel{df}{=} \left[a + \frac{1}{n+1}, a + \frac{2}{n+1} \right], \dots, \Delta_n \stackrel{df}{=} \left[a + \frac{n}{n+1}, a + 1 \right]$. Полученные

сегменты назовем *сегментами 1-го ранга*. Затем сделаем ту же процедуру разбиения для сегментов 1-го ранга, в результате получим *сегменты 2-го ранга*, которые обозначим через $\Delta_{i_1 i_2}$, где $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$. Продолжая процесс до бесконечности, будем получать сегменты 3-го, 4-го и т.д. рангов.

Используя введенные обозначения, сформулируем следующий критерий.

Теорема 2. Пусть f – функциональная кривая, заданная на открытом промежутке $[1, n+1)$, где $n \in Z^+$. Тогда f является автоматной кривой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$1) \left(\forall \tilde{x} \in K_{[1, n+1)} \right) : f(\tilde{x}) \in K_{[1, m+1)}, m \in Z^+;$$

$$2) \text{ если } \tilde{x} = \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{(n+1)^{i-1}}, \text{ то } f(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^k \frac{b_i}{(m+1)^{i-1}}, \text{ где } c_i \in \{1, 2, \dots, n\}, b_i \in \{1, 2, \dots, m\}, k \in Z^+;$$

3) пусть точка \tilde{x} является левым концом сегмента $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$ промежутка $[1, n+1)$, тогда для любой точки \tilde{x}' , являющейся левым концом сегмента $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}$ промежутка $[1, n+1)$, причем сегмент $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}$ лежит внутри сегмента $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$, справедливо неравенство $f(\tilde{x}') > f(\tilde{x})$.

Следующая теорема позволяет получить аналитическое задание геометрических образов автономных автоматов.

Теорема 3. Пусть – автономный автомат, где $|Y| = m$, $|S| = k$. Тогда поведение автомата (A, s) в пространстве Γ можно определить непрерывной возрастающей кривой f , которая может быть задана следующим уравнением:

$$f(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^m \left(j \cdot \sum_{i=1}^{l_j} (m+1)^{\Delta_i^{(j)} - \log_2 \frac{1}{2-\tilde{x}}} \right), \quad (2)$$

где $l_j \in Z, 0 \leq l_j \leq k$, а $\Delta_i^{(j)} = (k-1) - r_i^{(j)}, r_i^{(j)} \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Доказательство. Рассмотрим поведение автомата (A, s) . Его поведение определяется парами (p, q) , где p и q периодические последовательности. В пространстве $\Gamma = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) | \tilde{x} \in [1, 2), \tilde{y} \in [1, m+1)\}$ они принимают следующий вид:

$$\tilde{x}_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}, \quad (3)$$

$$\tilde{y}_k = i_1 + \frac{i_1}{m+1} + \dots + \frac{i_k}{(m+1)^{k-1}}. \quad (4)$$

Равенство (3) суть конечная сумма из элементов убывающей геометрической прогрессии $C_n = a_1 + aq + \dots + aq^{n-1}$, где знаменатель прогрессии $|q| < 1$. Известно, что сумма n первых членов геометрической прогрессии выражается формулой

$$C_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}. \quad (5)$$

Таким образом, имеем

$$\tilde{x}_k = \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^k \right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{2}{2^k}. \quad (6)$$



Выразим из соотношения (6) k через \tilde{x}_k . Имеем $2^k = \frac{2}{2 - \tilde{x}_k}$. Логарифмируя это равенство, получаем

$$k = \log_2 \frac{2}{2 - \tilde{x}_k}. \quad (7)$$

Рассмотрим сумму (4). Имеем, что $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Пусть среди i_1, i_2, \dots, i_k единиц l_1 штук, двоек l_2 штук и т.д., а m -ок l_m штук. Ясно, что $0 \leq l_i \leq k$. Рассмотрим все степени числа $m+1$. Допустим, что в дробях с числителем, равным единице, список степеней выглядит следующим образом:

$$r_1^{(1)}, r_2^{(1)}, \dots, r_{l_1}^{(1)}$$

(верхний индекс указывает на то, что рассматриваются дроби с числителем, равным единице).

Допустим также, что в дробях с числителем, равным двум, список степеней числа $m+1$:

$$r_1^{(2)}, r_2^{(2)}, \dots, r_{l_2}^{(2)}.$$

Аналогичным образом строим списки степеней для числителей, равных трем, четырем и т.д. Выпишем список степеней для дробей с числителем, равным m :

$$r_1^{(m)}, r_2^{(m)}, \dots, r_{l_m}^{(m)}.$$

В связи с нашими предположениями $r_j^{(i)} \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Сгруппируем слагаемые в (4) так, чтобы сначала шли только слагаемые с числителем, равным единице, затем слагаемые с числителем, равным двум и т.д., т.е.

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k = i_1 + \frac{i_1}{m+1} + \dots + \frac{i_k}{(m+1)^{k-1}} &= \left[\frac{1}{(m+1)^{r_1^{(1)}}} + \frac{1}{(m+1)^{r_2^{(1)}}} + \dots + \frac{1}{(m+1)^{r_{l_1}^{(1)}}} \right] + \\ &+ \left[\frac{2}{(m+1)^{r_1^{(2)}}} + \dots + \frac{2}{(m+1)^{r_{l_2}^{(2)}}} \right] + \dots + \left[\frac{m}{(m+1)^{r_1^{(m)}}} + \dots + \frac{m}{(m+1)^{r_{l_m}^{(m)}}} \right]. \end{aligned}$$

Обозначим первую скобку через $F(1)$, вынесем за скобки из оставшихся скобок $2, 3, \dots, m$ и обозначим эти скобки соответственно через $F(2), \dots, F(m)$. После введенных обозначений (4) принимает вид

$$\tilde{y}_k = i_1 + \frac{i_1}{m+1} + \dots + \frac{i_k}{(m+1)^{k-1}} = F(1) + 2 \cdot F(2) + \dots + m \cdot F(m) = \sum_{j=1}^m j \cdot F(j).$$

Общий член данной суммы выглядит следующим образом:

$$F(t) = \frac{1}{(m+1)^{r_1^{(t)}}} + \dots + \frac{1}{(m+1)^{r_{l_t}^{(t)}}} = \sum_{i=1}^{l_t} (m+1)^{-r_i^{(t)}}.$$

Не уменьшая общности, договоримся считать, что

$$r_1^{(t)} < r_2^{(t)} < \dots < r_{l_t}^{(t)}.$$

Таким образом, $r_{l_t}^{(t)} = \max \{r_i^{(t)}\}_{i=1}^{l_t}$.

Введем в рассмотрение числа $\Delta_i^{(t)}$ такие, что

$$\Delta_1^{(t)} = (k-1) - r_1^{(t)}, \dots, \Delta_{l_t}^{(t)} = (k-1) - r_{l_t}^{(t)}.$$

Имеем $\Delta_i^{(t)} = (k-1) - r_i^{(t)} = (|S| - 1) - r_i^{(t)}$.

Применяя новые обозначения, $F(t)$ можно записать следующим образом:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{l_t} (m+1)^{-((k-1) - \Delta_i^{(t)})}.$$

Выразим $F(t)$ через \tilde{x} , подставляя вместо k выражение (7), и вновь полученное соотношение обозначим $F(t, \tilde{x})$.



$$F(t) = \sum_{i=1}^{l_i} (m+1)^{-((k-1)-\Delta_i^{(i)})} = \sum_{i=1}^{l_i} (m+1)^{-\left(\log_2 \frac{2}{2-\tilde{x}} - 1 - \Delta_i^{(i)}\right)} = F(t, \tilde{x}).$$

Теперь, возвращаясь к сумме \tilde{y}_k и выразив ее через \tilde{x} , можно записать:

$$\tilde{y}(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^m j \cdot F(j, \tilde{x}) = \sum_{j=1}^m \left(j \cdot \sum_{i=1}^{l_j} (m+1)^{-\left(\log_2 \frac{2}{2-\tilde{x}} - 1 - \Delta_i^{(j)}\right)} \right) = \sum_{j=1}^m \left(j \cdot \sum_{i=1}^{l_j} (m+1)^{\Delta_i^{(j)} - \log_2 \frac{1}{2-\tilde{x}}} \right).$$

Покажем теперь, что $\tilde{y}(\tilde{x})$ возрастает. Функция возрастает, если при увеличении ее аргумента увеличивается значение функции. Действительно, если расписать $\tilde{y}(\tilde{x})$ как это было сделано, когда мы группировали на слагаемые с единицами в числителях, затем с двойками в числителях и т.д., то при росте \tilde{x} некоторые суммы в этом разложении будут увеличиваться, т.е. будет расти значение l_j , а это будет означать увеличение всей суммы слагаемых.

2. ПОСТРОЕНИЕ АВТОМАТОВ ПО АВТОМАТНЫМ КРИВЫМ

Поведение автомата A можно задать семейством кривых $\{f_s\}_{s \in S}$, где каждая из кривых f_s суть функциональная кривая, определенная в пространстве Γ и удовлетворяющая критерию автоматности кривой (теорема 2). Сформулируем задачу построения автомата по его геометрическому образу. Требуется по любой заданной кривой f в пространстве Γ выяснить

- существует ли конечный автомат, для которого f есть кривая, определяющая его поведение;
- если да, то это означает, что можно построить какой-нибудь конечный автомат.

Решить задачу а) можно с помощью теоремы 2, которая определяет те кривые, которые могут описывать поведение конечных автоматов.

Решение проблемы б) обеспечивает следующая теорема.

Теорема 4. Пусть f есть автоматная кривая, определенная в пространстве $\Gamma = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \mid \tilde{x} \in [1, n+1], \tilde{y} \in [1, m+1]\}$, $n, m \in \mathbb{Z}^+$. Тогда существует конечный автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s)$, $s \in S$, где $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ такой, что f задает поведение (A, s) в Γ .

3. РАСПОЗНАВАНИЕ АВТОМАТОВ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Задача распознавания конечного автомата в конечном семействе конечных автоматов в терминах кривых, определяющих поведение автоматов формулируется следующим образом. Пусть задано конечное семейство $\{A_i\}_{i \in I}$ конечных автоматов, где каждый автомат из семейства определяется множеством кривых $\{f_s^i\}_{s \in S_i}$. Семейство $\{A_i\}_{i \in I}$ определяется множеством кривых $\left\{ \left\{ f_j^i \right\}_{j \in \bigcup_i S_i} \right\}_{i \in I}$. Требуется

определить такое значение $\tilde{x}_0 \in K_{[1, n+1]}$, чтобы

$$(\forall i \in I) (\forall k \in I) (\forall j \in S_i) (\forall r \in S_k) (i \neq k \Rightarrow f_j^i(\tilde{x}_0) \neq f_r^k(\tilde{x}_0)).$$

Геометрическая интерпретация данной задачи дает неоспоримое преимущество, поскольку геометрическая наглядность кривых позволяет искать решение $\tilde{x}_0 \in K_{[1, n+1]}$ без использования существенного перебора. Кроме того, можно найти оптимальное решение (по длине входного слова). Разработаны алгоритмы распознавания в геометрической интерпретации [4].

4. КОНГРУЭНТНЫЕ И АФФИННО-ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ КРИВЫЕ

Рассмотрим задачу эквивалентности автоматов, используя их геометрическую модель поведения. Введем необходимые определения.

Пусть даны автоматы $A = (S_A, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$ и $B = (S_B, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$. Состояние $s \in S_A$ *r-остаточно неотлично* от состояния $s' \in S_B$, если для любого $p \in X^{2r}$ (X^{2r} – множество слов длины не менее r) вы-



полняется $pr_{r...|p|}(\lambda_A(s, p)) = pr_{r...|p|}(\lambda_B(s', p))$. Неотличимость в этом смысле состояний s и s' обозначим $s \approx s'$. Предположим, что для любого состояния $s \in S_A$ существует r -остаточно неотличимое состояние $s' \in S_B$, и обратно, для любого состояния $s' \in S_B$ существует r -остаточно неотличимое состояние $s \in S_A$. Говорим в указанной ситуации, что автоматы A и B r -остаточно неотличимы. Неотличимость автоматов A и B обозначаем $A \approx B$.

Две кривые называются *конгруэнтными*, если они могут быть получены одна из другой с помощью ортогонального преобразования. Конгруэнтные кривые мы будем называть также *метрически эквивалентными*.

Справедливо следующее утверждение [5].

Теорема 5. Пусть $\{f_s^A\}_{s \in S_A}, \{f_s^B\}_{s \in S_B}$ — семейства автоматных кривых, определяющих поведение автоматов $A = (S_A, X, Y, \delta_A, \lambda_A), B = (S_B, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$ в Γ . Если для любой кривой $f_s^A, s \in S_A$ существует метрически эквивалентная в Γ кривая $f_{s'}^B, s' \in S_B$, и обратно, для любой кривой $f_{s'}^B$ существует метрически эквивалентная кривая f_s^A , то $A \approx B$.

Доказательство. Ортогональные преобразования подразделяются на два класса преобразований: ортогональные преобразования первого и второго рода. На плоскости каждое ортогональное преобразование первого рода есть либо чистый параллельный перенос, либо чистый поворот вокруг некоторой точки; каждое ортогональное преобразование второго рода есть произведение отражения в некоторой прямой на параллельный перенос в направлении этой прямой (причем этот параллельный перенос может сходиться к тождественному преобразованию).

Если автоматная кривая полностью определена в Γ , то в результате применения к ней ортогонального преобразования получим вновь кривую, полностью лежащую в Γ лишь в случае параллельного переноса исходной кривой вдоль оси ординат, либо поворота на 360° вокруг начала координат, либо отражения в прямой $\tilde{y} = 0$ с последующим параллельным переносом. Все иные ортогональные преобразования приведут к тому, что образ кривой окажется вне Γ , а следовательно, этот образ перестанет быть образом автоматной кривой.

При преобразовании параллельного переноса вдоль оси ординат кривой, выражаемой уравнением $\tilde{y} = f(\tilde{x})$, получаем кривую, выражаемую уравнением $\tilde{y}' = f(\tilde{x}) + k$, где $k = \text{const}$. В случае поворота данное преобразование можно представить матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \text{ где } \varphi \text{ — угол поворота.}$$

При $\varphi = 360^\circ$ матрица преобразования получает вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

При указанных преобразованиях точка (\tilde{x}, \tilde{y}) перейдет в точку (\tilde{x}', \tilde{y}') , так что в случае переноса $\tilde{x}' = \tilde{x}, \tilde{y}' = \tilde{y} + k$, в случае поворота $\tilde{x}' = \tilde{x}, \tilde{y}' = \tilde{y}$, а при отражении $\tilde{x}' = \tilde{x}, \tilde{y}' = -\tilde{y}$. Как было отмечено выше, при отражении кривой f_s^A в прямой $\tilde{y} = 0$ образ преобразования окажется вне Γ . Однако применение преобразования параллельного переноса к полученному образу приведет к тому, что образ кривой f_s^A вновь окажется в Γ .

Поскольку случай поворота является тривиальным, а случай чистого отражения не может привести к образу автоматной кривой, достаточно рассмотреть случай параллельного переноса. Пусть (\tilde{x}, \tilde{y}) — произвольная точка кривой $(\tilde{x}, \tilde{y}), s \in S_A$, такая что $\tilde{x} = \sum_{i=1}^l \frac{c_i}{(n+1)^{i-1}}, \tilde{y} = \sum_{i=1}^l \frac{b_i}{(m+1)^{i-1}}$, где $l \in Z^+, c_i \in \{1, 2, \dots, n\}, b_i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Если образ преобразования кривой f_s^A метрически эквивалентен кривой $f_{s'}^B, s' \in S_B$, то $\tilde{y}' = \sum_{i=1}^l \frac{b'_i}{(m+1)^{i-1}}$ и $\tilde{y}' = \tilde{y} + k$, где $k \in Z^+$, причем $\tilde{y}' \in [1, m+1)$ (в случае $k \notin Z^+$ точка (\tilde{x}', \tilde{y}') перестает быть точкой геометрического образа автомата).

Имеем $\tilde{y} = \sum_{i=1}^l \frac{b_i}{(m+1)^{i-1}}$. Из равенства $\tilde{y}' = \tilde{y} + k$ следует, что $b'_1 = b_1 + k, b'_i = b_i$ для $i = 2, 3, \dots, l$. Со-



поставим числу \tilde{y}' слово q над алфавитом Y так, что $\tilde{y}' \mapsto q'$, $q' = y_{b_{1+k}} y_{b_2} \dots y_{b_l}$ где $y_{v_i} \in Y$. Из $\tilde{y} \mapsto q$ получаем $q = y_{b_1} y_{b_2} \dots y_{b_l}$. Сравнивая слова q, q' приходим к выводу, что $pr_{2..|q|} q = pr_{2..|q|} q'$.

Проведя все необходимые рассуждения с кривой $f_{s'}^B$, $s' \in S_B$, окончательно получаем, что для любого состояния $s \in S_A$ существует 2-остаточно неотличимое состояние $s' \in S_B$, и наоборот, для любого состояния $s' \in S_B$ существует 2-остаточно неотличимое состояние $s \in S_A$. Непосредственно из определения неотличимости следует, что $A \stackrel{2}{\approx} B$.

Если кривые f, f' являются автоматными кривыми, задающими поведение автоматов (A, s) , (B, s') , и при этом являются метрически эквивалентными, то автоматы (A, s) и (B, s') назовем *конгруэнтными*. Распространив определение конгруэнтности инициальных автоматов на автоматы неинициальные, приходим к понятию конгруэнтности автоматов A и B .

Две кривые называются *аффинно-эквивалентными*, если они могут быть получены одна из другой с помощью аффинного преобразования. Кривая f' называется аффинно-эквивалентной кривой f , если f' является образом f при каком-нибудь аффинном преобразовании. Совокупность всех кривых, аффинно эквивалентных какой-нибудь определенной кривой f , называется *аффинным классом* кривой f . Понятно, что если кривые f и f' аффинно эквивалентны, то их аффинные классы совпадают. Из геометрии известно, что всякое аффинное отображение задается формулами

$$\begin{aligned} \tilde{x}' &= c_{11}\tilde{x} + c_{12}\tilde{y} + r_1 \\ \tilde{y}' &= c_{21}\tilde{x} + c_{22}\tilde{y} + r_2 \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

выражающими для каждой данной точки $M(\tilde{x}, \tilde{y})$ координаты \tilde{x}', \tilde{y}' преобразованной точки M' (в той же системе координат). Следующая теорема формулирует критерий аффинной эквивалентности автоматных кривых, определяющих поведение автоматов с равномоными алфавитами входных и выходных символов [6].

Теорема 6. Для того чтобы кривая f' была аффинно-эквивалентна кривой f в пространстве Γ , необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $M'(\tilde{x}', \tilde{y}')$ кривой f' , такой что $\tilde{x}' = \sum_{i=1}^l \frac{c_i}{(n+1)^{i-1}}$, $\tilde{y}' = \sum_{i=1}^l \frac{b_i}{(n+1)^{i-1}}$, выполнялись соотношения $c_{j1} \leq \left\lfloor \frac{n}{c_i} \right\rfloor$, $c_{j2} \leq \left\lfloor \frac{n}{b_i} \right\rfloor$, $c_{j1} \cdot c_i \leq n - c_{j2} \cdot b_i$, $r_j \leq n - c_1 \cdot c_{j1} - b_1 \cdot c_{j2}$ при $j = 1, 2$ и $1 \leq i \leq l$.

Изучение конгруэнтных автоматов и аффинных классов автоматных кривых открывает перспективу новой классификации автоматов.

Библиографический список

1. *Твердохлебов В.А.* Техническое диагностирование в геометрической интерпретации задач, моделей, методов // Автоматизация проектирования дискретных систем: Материалы междунар. конф. Минск, 1995. С. 97.
2. *Тяпаев Л.Б.* О задании конечных автоматов функциями, определенными на открытом промежутке // Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении: Материалы междунар. конф. Саратов, 1997. С. 48–49.
3. *Александров П.С., Колмогоров А.Н.* Введение в теорию функций действительного переменного. М.; Л., 1938. 268 с.
4. *Тяпаев Л.Б.* Распознавание математических автоматов на основе геометрической модели поведения. Саратов, 1998. Деп. в ВИНТИ №1327В98. 46 с.
5. *Тяпаев Л.Б.* Геометрические модели и методы при решении задач теории автоматов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов, 1999. Вып. 3. С. 131–136.
6. *Тяпаев Л.Б.* Аффинные классы автоматов и их преобразования // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов, 2001. Вып. 4. С. 133–135.