Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 2

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918 и «Ученых записок СГУ» 1923–1962

Научный журнал
2017 Том 17
ISSN 1816-9791 (Print)
ISSN 2541-9005 (Online)
Издается с 2005 года

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

Антонов С. Ю., Антонова А. В. К теореме Ченга. II 127

Галаев С. В. Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий 138

Молчанов В. А., Хворостухина Е. В. О задаче абстрактной характеризации универсальных гиперграфических автоматов 148

Салимов Р. Б., Хасанова Э. Н. Решение однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка на луче новым методом 160

Струкова И. И. Гармонический анализ периодических на бесконечности функций в пространствах Степанова 172

Механика

Вильде М. В., Сергеева Н. В. Развитие асимптотических методов анализа дисперсионных соотношений для наследственно-упругого сплошного цилиндра 183

Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Переменный изгиб трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем в нейтронном потоке 196

Франус Д. В. Влияние толщины многослойной роговой оболочки на показатели внутриглазного давления 209

Информатика

Богомолов А. С. Анализ путей возникновения и предотвращения критических сочетаний событий в человекомашинных системах 219

Хамутова М. В., Кушников В. А. Модель прогнозирования характеристик наводнения, влияющих на величину причиняемого ущерба 231

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (журнал входит в международные базы данных MathSciNet, zbMATH)

Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-56162 от 15 ноября 2013 года

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов».
Журнал выходит 4 раза в год

Заведующий редакцией
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор
Митенёва Елена Анатольевна

Художник
Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист
Степанова Наталия Ивановна

Верстка
Багаева Ольга Львовна

Технический редактор
Ковалева Наталья Владимировна

Корректор
Юдина Инна Геннадиевна

Адрес учредителя, издателя и редакции:
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89
E-mail: izvestiya@sgu.ru

Подписано в печать 22.05.17.
Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 13,72(14,75).
Тираж 500 экз. Заказ 58-Т.

Отпечатано в типографии Саратовского университета.
Адрес типографии:
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2017

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу http://mmi.sgu.ru/ru/dlya-avtorov. Статьи бóльшего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования в журнале. В случае положительного решения об опубликовании статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: http://mmi.sgu.ru.

Адрес редколлегии серии:
410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@sgu.ru

Website: http://mmi.sgu.ru/

Ответственный секретарь серии:
Виктория Анатольевна Халова

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

Antonov S. Yu., Antonova A. V. To Chang Theorem. II 127

Galaev S. V. Extended Structures on Codistributions of Contact Metric Manifolds 138

Molchanov V. A., Khvorostukhina E. V. On Problem of Abstract Characterization of Universal Hypergraphic Automata 148

Salimov R. B., Khasanova E. N. The Solution of the Homogeneous Boundary Value Problem of Riemann with Infinite Index of Logarithmic Order on the Beam by a New Method 160

Strukova I. I. Harmonic Analysis of Periodic at Infinity Functions from Stepanov Spaces 172

Mechanics

Wilde M. V., Sergeeva N. V. Development of Asymptotic Methods for the Analysis of Dispersion Relations for a Viscoelastic Solid Cylinder 183

Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Variable Bending of a Three-layer Rod with a Compressed Filler in the Neutron Flux 196

Franus D. V. Thickness Influence of the Multylayer Corneal Shell on the Value of Intraocular Pressure 209

Computer Sciences

Bogomolov A. S. Analysis of the Ways of Occurrence and Prevention of Critical Combinations of Events in Man-machine Systems 219

Khamutova M. V., Kushnikov V. A. A Model for Forecasting Characteristics of Floods Affecting the Value of the Caused Damage 231

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛОВ «ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ»

Главный редактор
Чумаченко Алексей Николаевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)
Заместитель главного редактора
Короновский Алексей Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Ответственный секретарь
Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционного совета:

Балаш Ольга Сергеевна, кандидат экон. наук, доцент (Саратов, Россия)
Бучко Ирина Юрьевна, директор Издательства Саратовского университета (Саратов, Россия)
Данилов Виктор Николаевич, доктор ист. наук, профессор (Саратов, Россия)
Ивченков Сергей Григорьевич, доктор соц. наук, профессор (Саратов, Россия)
Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Макаров Владимир Зиновьевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)
Прозоров Валерий Владимирович, доктор филол. наук, профессор (Саратов, Россия)
Усанов Дмитрий Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Устьянцев Владимир Борисович, доктор филос. наук, профессор (Саратов, Россия)
Шамионов Раиль Мунирович, доктор психол. наук, профессор (Саратов, Россия)
Шляхтин Геннадий Викторович, доктор биол. наук, профессор (Саратов, Россия)

EDITORIAL COUNCIL OF THE JOURNALS «IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES»

Editor-in-Chief – Chumachenko A. N. (Saratov, Russia)
Deputy Editor-in-Chief – Koronovskii A. A. (Saratov, Russia)
Executive Secretary – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Council:

Balash O. S. (Saratov, Russia)
Buchko I. Yu. (Saratov, Russia)
Danilov V. N. (Saratov, Russia)
Ivchenkov S. G. (Saratov, Russia)
Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)
Makarov V. Z. (Saratov, Russia)
Prozorov V. V. (Saratov, Russia)
Usanov D. A. (Saratov, Russia)
Ustiantsev V. B. (Saratov, Russia)
Shamionov R. M. (Saratov, Russia)
Shlyakhtin G. V. (Saratov, Russia)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА «ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ. СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»

Главный редактор
Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Заместитель главного редактора
Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Ответственный секретарь
Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Васильев Александр Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Берген, Норвегия)
Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)
Индейцев Дмитрий Анатольевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)
Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)
Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)
Ломакин Евгений Викторович, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)
Манжиров Александр Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)
Матвеенко Валерий Павлович, акад. РАН, доктор техн. наук, профессор (Пермь, Россия)
Морозов Никита Фёдорович, акад. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)
Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)
Пархоменко Павел Павлович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)
Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)
Резчиков Александр Федорович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор (Саратов, Россия)
Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)
Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)
Субботин Юрий Николаевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор (Екатеринбург, Россия)
Харченко Вячеслав Сергеевич, доктор техн. наук, профессор (Харьков, Украина)
Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Шалыто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)
Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)
Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL «IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES. SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»

Editor-in-Chief – Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)
Deputy Editor-in-Chief – Prokhorov D. V. (Saratov, Russia)
Executive Secretary – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Andreichenko D. K. (Saratov, Russia)
Vasiliev A. Yu. (Bergen, Norway)
Vatulyan A. O. (Rostov-on-Don, Russia)
Indeitsev D. A. (St. Petersburg, Russia)
Kaplunov J. D. (Keele, United Kingdom)
Kovalev V. A. (Moscow, Russia)
Lomakin E. V. (Moscow, Russia)
Manzhirov A. V. (Moscow, Russia)
Matveenko V. P. (Perm, Russia)
Morozov N. F. (St. Petersburg, Russia)
Nasyrov S. R. (Kazan', Russia)
Parkhomenko P. P. (Moscow, Russia)
Radaev Yu. N. (Moscow, Russia)
Rezchikov A. F. (Saratov, Russia)
Rogerson Graham (Keele, United Kingdom)
Speranskii D. V. (Moscow, Russia)
Subbotin Yu. N. (Ekaterinburg, Russia)
Kharchenko V. S. (Kharkiv, Ukraine)
Khromov A. P. (Saratov, Russia)
Shalyto A. A. (St. Petersburg, Russia)
Shashkin A. I. (Voronezh, Russia)
Yurko V. A. (Saratov, Russia)

МАТЕМАТИКА

УДК 512

К ТЕОРЕМЕ ЧЕНГА. II

С. Ю. Антонов[1], **А. В. Антонова**[2]

[1]Антонов Степан Юрьевич, старший преподаватель кафедры высшей математики, Казанский государственный энергетический университет, 420066, Россия, Казань, Красносельская, 51, antonovstvm@rambler.ru

[2]Антонова Алина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Казанский государственный энергетический университет, 420066, Россия, Казань, Красносельская, 51, antonovakazan@rambler.ru

В данной работе введены полилинейные многочлены $\mathscr{H}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$, $\mathscr{H}^-(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) \in F\{X \cup Y\}$, сумма которых является многочленом Ченга $\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$, где $F\{X \cup Y\}$ — свободная ассоциативная алгебра над произвольным полем F характеристики не два, порожденная счетным множеством $X \cup Y$. Доказано, что каждый из них является следствием стандартного многочлена $S^-(\bar{x})$. В частности, показано, что квазимногочлены Капелли $b_{2m-1}(\bar{x}_m,\bar{y})$ и $h_{2m-1}(\bar{x}_m,\bar{y})$ также следуют из многочлена $S^-_m(\bar{x})$. Здесь же найдена минимальная степень многочленов $b_{2m-1}(\bar{x}_m,\bar{y})$, $h_{2m-1}(\bar{x}_m,\bar{y})$, при которой они являются полиномиальными тождествами матричной алгебры $M_n(F)$. Полученные результаты представляют собой перенос результатов Ченга на некоторые квазимногочлены Капелли нечетной степени.

Ключевые слова: T-идеал, стандартный многочлен, многочлен Капелли.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-127-137

Продолжение (2015. Т. 15, вып. 3. С. 247–251).

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ВВЕДЕНИЕ

Пусть F — произвольное поле, $F\{Z\}$ — свободная ассоциативная алгебра над F, порожденная счетным множеством $Z = \{z_n\}_{n\in N}$, которое представим в виде $Z = X \bigcup Y$, где $X = \{x_n\}_{n\in N}$, $Y = \{y_n\}_{n\in N}$ — непересекающиеся счетные множества, S_n — симметрическая группа степени n; f, g — произвольные многочлены алгебры $F\{Z\}$, $\{f\}^T$ — T-идеал алгебры $F\{Z\}$, порожденный многочленом f. Напомним, что двусторонний идеал I алгебры $F\{Z\}$ называется T-идеалом и обозначается

© Антонов С. Ю., Антонова А. В., 2017

символом $I \lhd_T F\{Z\}$, если для любого эндоморфизма φ алгебры $F\{Z\}$ справедливо включение $\varphi(I) \subseteq I$. Далее, будем говорить, что многочлен g является следствием многочлена f (следует из f), если $g \in \{f\}^T$. Кроме того, пусть t, u, m — любые натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам $t \geqslant u$, $m \geqslant u$, $m > 1$; $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \bigcup \{0\}$; $B = \{\bar{a} = (a_1 \ldots a_{u+1}) \in \mathbf{N}^u \times \mathbf{N}_0 \,|\, a_1 + \ldots + a_{u+1} = m\}$, $B_0 = \{\bar{a} = (a_1 \ldots a_{u+1}) \in B \,|\, a_{u+1} = 0\}$, $B_1 = \{\bar{n} = (n_1 \ldots n_{u+1}) \in B \,|\, n_{u+1} \neq 0\}$, $I_k = \{1, \ldots, k\}$, $w = y_1 y_2 \cdots y_t$. Представим слово w в виде $w = w_1 w_2 \cdots w_u$, где $w_1 = y_1 y_2 \cdots y_{i_2}$, $w_2 = y_{i_2+1} \cdots y_{i_3}$, …, $w_u = y_{i_u+1} \cdots y_t$, и определим многочлены

$$\mathscr{F}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \mathscr{F}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_t|w_1, \ldots, w_u) =$$
$$= \sum_{\bar{a} \in B} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \operatorname{sgn} \mu \, x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(a_1)} w_{\tau(1)} x_{\pi(a_1+1)} \cdots x_{\pi(a_1+a_2)} w_{\tau(2)} \times$$
$$\times x_{\pi(a_1+a_2+1)} \cdots x_{\pi(a_1+\ldots+a_u)} w_{\tau(u)} x_{\pi(a_1+\ldots+a_u+1)} \cdots x_{\pi(a_1+\ldots+a_{u+1})},$$
$$\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \mathscr{H}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_t|w_1, \ldots, w_u) =$$
$$= \sum_{\bar{n} \in B_1} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \operatorname{sgn} \mu \, x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n_1)} w_{\tau(1)} x_{\pi(n_1+1)} \cdots x_{\pi(n_1+n_2)} w_{\tau(2)} \times$$
$$\times x_{\pi(n_1+n_2+1)} \cdots x_{\pi(n_1+\ldots+n_u)} w_{\tau(u)} x_{\pi(n_1+\ldots+n_u+1)} \cdots x_{\pi(n_1+\ldots+n_{u+1})},$$
$$\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \mathscr{R}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_t|w_1, \ldots, w_u) =$$
$$= \sum_{\bar{a} \in B_0} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \operatorname{sgn} \mu \, x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(a_1)} w_{\tau(1)} x_{\pi(a_1+1)} \cdots x_{\pi(a_1+a_2)} w_{\tau(2)} \times$$
$$\times x_{\pi(a_1+a_2+1)} \cdots x_{\pi(a_1+\ldots+a_u)} w_{\tau(u)},$$

где μ — подстановка в мономе $M_\mu = z_{\mu(1)} \cdots z_{\mu(m)} z_{\mu(m+1)} \cdots z_{\mu(m+t)} \in F\{Z\}$, в котором $z_1 = x_1$, …, $z_m = x_m$, $z_{m+1} = y_1$, …, $z_{m+t} = y_t$. Очевидно, что $\mathscr{F}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) + \mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$. Наконец, пусть $S_n^-(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\mu \in S_n} \operatorname{sgn} \mu \, z_{\mu(1)} \cdots z_{\mu(n)}$ — стандартный многочлен степени n. Имеют место следующие результаты:

Теорема 1. *Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F многочлен $\mathscr{F}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$ [1].*

Теорема 2. *Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F многочлены $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$, $\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ следуют из $S_m^-(\bar{x})$ [2].*

Цель данной работы — провести дальнейшее разложение многочлена $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ и получить некоторые важные следствия. Обратим внимание на интересные следствия стандартного многочлена, полученные в работах [3–6].

1. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОЧЛЕНА $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$

Пусть $v = z_{i_{\pi(1)}} \cdots z_{i_{\pi(r)}}$, где $i_1 < \ldots < i_r$, $\pi \in S_r$, — произвольный моном алгебры $F\{Z\}$, $|v|$ — длина монома v, $sgn\, v = \operatorname{sgn} \pi$. Представим каким-либо образом слово v в виде произведения его непустых подслов $v_1 \cdots v_n$ $(n \leqslant r)$ и по определению положим $\bar{v} = (v_1 \ldots v_n)$, $\bar{v}' = (|v_1| \ldots |v_n|)$, $\sigma v = v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(n)}$, $\sigma \bar{v} = (v_{\sigma(1)} \ldots v_{\sigma(n)})$, $\sigma \bar{v}' = (|v_{\sigma(1)}| \ldots |v_{\sigma(n)}|)$, $\sigma \in S_n$. Далее, определим отображение $\mathscr{N} : B_1 \to M_u(\mathbf{Z})$,

где $M_u(\mathbf{Z})$ — кольцо матриц размера $u \times u$ с элементами из кольца целых чисел $\mathbf{Z}$, положив для любого $\bar{n} = (n_1 \dots n_{u+1}) \in B_1$

$$\mathscr{N}(\bar{n}) = \begin{pmatrix} n_{u+1} & n_{u+1} & n_{u+1} & \dots & n_{u+1} \\ 0 & n_u & n_u & \dots & n_u \\ 0 & 0 & n_{u-1} & \dots & n_{u-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n_2 \end{pmatrix}.$$

Определение 1. Всякая матрица размера $k \times k$ $(k \leqslant u)$, составленная из элементов матрицы $A \in M_u(\mathbf{Z})$, находящихся на пересечении ее строк и столбцов с номерами $i_1, \dots, i_k$ и $j_1, \dots, j_k$ соответственно называется *подматрицей* матрицы A и обозначается символом $A\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix}$.

Для подматриц $\mathscr{N}(\bar{n})\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}$ $(k \leqslant u)$, $\mathscr{N}(\bar{n})\begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & u \\ 2 & 3 & \dots & u \end{pmatrix}$ матрицы $\mathscr{N}(\bar{n})$ будем использовать более краткую запись $\mathscr{N}_k(\bar{n})$ и $D(\bar{n})$ соответственно.

Наконец, под нормой матрицы $A = (a_{ij}) \in M_u(\mathbf{Z})$ будем понимать число $\|A\| = \sum\limits_{i=1}^{u}\sum\limits_{j=1}^{u} |a_{ij}|$, под высотой элемента $\bar{p} = (p_1 \dots p_u)^T \in M_{u\times 1}(\mathbf{Z})$ — число $h(\bar{p}) = \sum\limits_{i=1}^{u} |p_i|$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & u \\ u & u-1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in S_u$.

Лемма 1. *Для любых элементов $\bar{n} \in B_1$, $\tau \in S_u$ справедливы равенства*

$$h(\mathscr{N}(\bar{n}) \cdot (\tau\alpha\bar{w}')^T) = \sum_{k=0}^{u-1} n_{u+1-k} \sum_{i=1}^{u-k} |w_{\tau(i)}| = \sum_{k=1}^{u} |w_{\tau(k)}| \sum_{i=k+1}^{u+1} n_i =$$
$$= \sum_{k=1}^{u} |w_{\tau(k)}| tr\, \mathscr{N}_{u+1-k}(\bar{n}) = n_{u+1}t + \sum_{k=1}^{u-1} |w_{\tau(k)}| \mathrm{tr}\, D_{u-k}(\bar{n}).$$

Доказательство. Имеем

$$\mathscr{N}(\bar{n}) \cdot (\tau\alpha\bar{w}')^T = (n_{u+1} \sum_{i=1}^{u} |w_{\tau(i)}|, n_u \sum_{i=1}^{u-1} |w_{\tau(i)}|, \dots, n_2 \sum_{i=1}^{1} |w_{\tau(i)}|)^T.$$

Следовательно,

$$h(\mathscr{N}(\bar{n}) \cdot (\tau\alpha\bar{w}')^T) = \sum_{k=0}^{u-1} n_{u+1-k} \sum_{i=1}^{u-k} |w_{\tau(i)}| = n_{u+1}|w_{\tau(u)}| + (n_{u+1}|w_{\tau(u-1)}| +$$
$$+ n_{u+1}|w_{\tau(u-2)}| + \dots + n_{u+1}|w_{\tau(1)}|) + (n_u|w_{\tau(u-1)}| + n_u|w_{\tau(u-2)}| + \dots +$$
$$+ n_u|w_{\tau(1)}|) + \dots + n_2|w_{\tau(1)}| = |w_{\tau(u)}|n_{u+1} + |w_{\tau(u-1)}|(n_{u+1} + n_u) +$$
$$+ |w_{\tau(u-2)}|(n_{u+1} + n_u + n_{u-1}) + \dots + |w_{\tau(1)}|(n_{u+1} + n_u + \dots + n_2) =$$

$$= \sum_{k=1}^{u} |w_{\tau(k)}| \sum_{i=k+1}^{u+1} n_i = \sum_{k=1}^{u} |w_{\tau(k)}| tr\, \mathscr{N}_{u+1-k}(\bar{n}) = \sum_{k=1}^{u-1} |w_{\tau(k)}|(n_{u+1} + \operatorname{tr} D_{u-k}(\bar{n}))+$$

$$+|w_{\tau(u)}|n_{u+1} = n_{u+1} \sum_{k=1}^{u} |w_{\tau(k)}| + \sum_{k=1}^{u-1} |w_{\tau(k)}| \operatorname{tr} D_{u-k}(\bar{n}) =$$

$$= n_{u+1}t + \sum_{k=1}^{u-1} |w_{\tau(k)}| \operatorname{tr} D_{u-k}(\bar{n}). \qquad \square$$

Следствие 1. *Пусть* $|w_1| = |w_2| = \ldots = |w_u| = 2s-1$, $s \in \mathbf{N}$. *Тогда для любых* $\bar{n} \in B_1$, $\tau \in S_u$, *справедливы равенства*

$$h(\mathscr{N}(\bar{n}) \cdot (\tau\alpha\bar{w}')^T) = (2s-1)\|\mathscr{N}(\bar{n})\| = (2s-1)\sum_{k=1}^{u} k n_{k+1}.$$

Если к тому же $n_{u+1} = n_u = \ldots = n_2 = r$, *то*

$$h(\mathscr{N}(\bar{n}) \cdot (\tau\alpha\bar{w}')^T) = (2s-1)r(u+1)u/2.$$

Следствие 2. *Если для всякого* $i \in I_u$ $|w_i| = 2k_i$, $k_i \in \mathbf{N}$, *то для любых* $\bar{n} \in B_1$, $\tau \in S_u$ *число* $h(\mathscr{N}(\bar{n}) \cdot (\tau\alpha\bar{w}')^T)$ *четное.*

Лемма 2. *Для любого монома* $M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w})$ *из многочлена* $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ *справедливо равенство* $\operatorname{sgn} M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}) = (-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})\cdot(\tau\alpha\bar{w}')^T)} \operatorname{sgn}\pi \operatorname{sgn}(\tau w)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{sgn} M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}) = (-1)^{|w_{\tau(u)}|n_{u+1} + |w_{\tau(u-1)}|(n_{u+1}+n_u) + \ldots + |w_{\tau(1)}|(n_{u+1}+n_u+\ldots+n_2)} \times$$

$$\times \operatorname{sgn}(x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(m)} w_{\tau(1)} \cdots w_{\tau(u)}) =$$

$$= (-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})\cdot(\tau\alpha\bar{w}')^T)} \operatorname{sgn}\pi \operatorname{sgn}(w_{\tau(1)} \cdots w_{\tau(u)}) = (-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})\cdot(\tau\alpha\bar{w}')^T)} \operatorname{sgn}\pi \operatorname{sgn}(\tau w). \qquad \square$$

Следствие 3. *Справедливо равенство*

$$\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{n}\in B_1} \sum_{\pi\in S_m} \sum_{\tau\in S_u} (-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})\cdot(\tau\alpha\bar{w}')^T)} \operatorname{sgn}\pi \operatorname{sgn}(\tau w) M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}).$$

Следствие 4. *Пусть* $|w_1| = |w_2| = \ldots = |w_u| = 2s-1$, $s \in \mathbf{N}$. *Тогда справедливо равенство*

$$\operatorname{sgn} M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}) = (-1)^{\|\mathscr{N}(\bar{n})\|} \operatorname{sgn}\pi \operatorname{sgn}\tau,$$

и значит,

$$\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{n}\in B_1} \sum_{\pi\in S_m} \sum_{\tau\in S_u} (-1)^{\|\mathscr{N}(\bar{n})\|} \operatorname{sgn}\pi \operatorname{sgn}\tau\, M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}).$$

Доказательство. Вытекает из леммы 2 и следствия 1. $\square$

Следствие 5. *Пусть* $|w_1| = |w_2| = \ldots = |w_u| = 2s$, $s \in \mathbf{N}$. *Тогда справедливо равенство* $\operatorname{sgn} M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}) = \operatorname{sgn}\pi$ *и, значит,*

$$\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{n}\in B_1} \sum_{\pi\in S_m} \sum_{\tau\in S_u} \operatorname{sgn}\pi\, M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}).$$

Доказательство. Вытекает из леммы 2 и следствия 2. □

Очевидно, что значение $(-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})\cdot(\tau\alpha\bar{w}')^T)}$ можно найти по любой формуле из леммы 1, однако работать с ними все же неудобно. В связи с этим определим отображения $\Phi : B_1 \to \mathbf{Z}^u$, $\Psi : \mathbf{Z}^u \to \mathbf{Z}^u$, положив для любого $\bar{n} = (n_1 \dots n_{u+1}) \in B_1$, $\bar{p} = (p_1 \dots p_u) \in \mathbf{Z}^u$

$$\Phi(\bar{n}) = (\Phi(\bar{n})_1 \dots \Phi(\bar{n})_u), \qquad \Psi(\bar{p}) = (\Psi(\bar{p})_1 \dots \Psi(\bar{p})_u),$$

где $\Phi(\bar{n})_s = \sum\limits_{i=s+1}^{u+1} n_i - 2\left[\frac{1}{2}\sum\limits_{i=s+1}^{u+1} n_i\right]$, $\Psi(\bar{p})_s = |p_s| - 2[|p_s|/2]$, $s \in I_u$, $[a]$ — целая часть числа a. Нетрудно видеть, что для произвольных $\tau \in S_u$, $\bar{n} \in B_1$, справедливы равенства

$$\Psi(\tau\bar{w}') = \tau\Psi(\bar{w}'), \qquad (-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})\cdot(\tau\alpha\bar{w}')^T)} = (-1)^{(\Phi(\bar{n}),\tau\Psi(\bar{w}'))},$$

где $(\Phi(\bar{n}), \tau\Psi(\bar{w}')) = \sum\limits_{s=1}^{u} \Phi(\bar{n})_s \cdot (\tau\Psi(\bar{w}'))_s$.

2. ДОПОЛНЕНИЕ К ТЕОРЕМЕ ЧЕНГА

Представим многочлен $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ в виде $\mathscr{H}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) + \mathscr{H}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$, где многочлен $\mathscr{H}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ $(\mathscr{H}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}))$ состоит из всех мономов многочлена $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$, для которых $(-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})\cdot(\tau\alpha\bar{w}')^T)}\operatorname{sgn}(\tau w) = 1(-1)$. Таким образом,

$$\mathscr{H}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{n}\in B_1}\sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in S_u} \delta_{1\,(-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})(\tau\alpha\bar{w}')^T)}\operatorname{sgn}(\tau w)} \operatorname{sgn}\pi M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}),$$

$$\mathscr{H}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{n}\in B_1}\sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in S_u} -\delta_{-1\,(-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})(\tau\alpha\bar{w}')^T)}\operatorname{sgn}(\tau w)} \operatorname{sgn}\pi M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}),$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

В частности, при $t = u = 1$, $w = w_1 = y_1$ имеет место равенство

$$\mathscr{H}(\bar{x}, y_1|w_1) = \sum_{n=1}^{m-1}\sum_{\pi\in S_m} (-1)^{m-n}\operatorname{sgn}\pi x_{\pi(1)}\cdots x_{\pi(n)} y_1 x_{\pi(n+1)}\cdots x_{\pi(m)},$$

тогда если $m = 2k$, то

$$\mathscr{H}^+(\bar{x}, y_1|w_1) = \sum_{n=1}^{k-1}\sum_{\pi\in S_m} \operatorname{sgn}\pi x_{\pi(1)}\cdots x_{\pi(2n)} y_1 x_{\pi(2n+1)}\cdots x_{\pi(m)},$$

если $m = 2k - 1$, то

$$\mathscr{H}^+(\bar{x}, y_1|w_1) = \sum_{n=1}^{k-1}\sum_{\pi\in S_m} \operatorname{sgn}\pi x_{\pi(1)}\cdots x_{\pi(2n-1)} y_1 x_{\pi(2n)}\cdots x_{\pi(m)}$$

(см. также [6, теорема 26]).

Пусть $t \in I_{m-1}$, $i_1, \dots, i_t \in I_m$, причем $i_1 < i_2 < \dots < i_t$, $\tau \in S_t$. Определим эндоморфизм $\varphi_{i_1,\dots,i_t,\tau}$ алгебры $F\{Z\}$, положив

$$\varphi_{i_1,\dots,i_t,\tau}(z) = \begin{cases} x_{i_j} y_{\tau(j)}, \text{ если } z = x_{i_j},\ j \in I_t, \\ z, \text{ если } z \notin \{x_{i_1}, \dots, x_{i_t}\}. \end{cases}$$

Далее, представим многочлен $\sum\limits_{1\leqslant i_1<\ldots<i_t\leqslant m}\sum\limits_{\tau\in S_t}\varphi_{i_1,\ldots,i_t,\tau}(S_m^-(\bar{x}))$ в виде суммы

$$\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})+\sum_{j=1}^{t}Q(\bar{x},\bar{y}_{\hat{j}}|\bar{w}_{\hat{j}})y_j,$$

где $\bar{w}=(w_1\ldots w_t)$, $w_j=y_j$ $(j\in I_t)$, $\bar{w}_{\hat{j}}=(w_1\ldots w_{j-1}w_{j+1}\ldots w_t)$, $\bar{y}_{\hat{j}}=(y_1\ldots y_{j-1}y_{j+1}\ldots y_t)$, а многочлен $\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ не имеет мономов, оканчивающихся на переменную y. Отсюда получаем, что

$$\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_t\leqslant m}\sum_{\tau\in S_t}\varphi_{i_1,\ldots,i_t,\tau}(S_m^-(\bar{x}))-\sum_{j=1}^{t}Q(\bar{x},\bar{y}_{\hat{j}}|\bar{w}_{\hat{j}})y_j=$$
$$=\sum_{\bar{n}\in B_1}\sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in S_t}\operatorname{sgn}\pi M(\bar{n},\pi\bar{x},\tau\bar{w}).$$

Теорема 3. *Для любого натурального числа $t\in I_{m-1}$ и произвольного поля F многочлен $\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})=\sum\limits_{\bar{n}\in B_1}\sum\limits_{\pi\in S_m}\sum\limits_{\tau\in S_t}\operatorname{sgn}\pi M(\bar{n},\pi\bar{x},\tau\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Доказательство. Проведем методом математической индукции по числу t. Пусть $t=1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(S_m^-(\bar{x}))=\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{\pi\in S_m}\operatorname{sgn}\pi x_{\pi(1)}\cdots x_{\pi(n)}y_1x_{\pi(n+1)}\cdots x_{\pi(m)}+S_m^-(\bar{x})y_1.$$

Отсюда получаем, что

$$\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x},y_1|w_1)=\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{\pi\in S_m}\operatorname{sgn}\pi x_{\pi(1)}\cdots x_{\pi(n)}y_1x_{\pi(n+1)}\cdots x_{\pi(m)}=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(S_m^-(\bar{x}))-S_m^-(\bar{x})y_1.$$

Поскольку $\{S_m^-(\bar{x})\}^T\lhd_T F\{Z\}$, то $\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi_i(S_m^-(\bar{x}))$, $S_m^-(\bar{x})y_1\in\{S_m^-(\bar{x})\}^T$ и, значит,

$$\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x},y_1|w_1)\in\{S_m^-(\bar{x})\}^T.$$

Пусть теперь $1<t\leqslant m-1$. Предположим, что для всякого $a<t$ теорема 3 верна. Покажем, что она будет верна и для числа t. Нетрудно видеть, что

$$\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_t\leqslant m}\sum_{\tau\in S_t}\varphi_{i_1,\ldots,i_t,\tau}(S_m^-(\bar{x}))-\sum_{j=1}^{t}\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x},\bar{y}_{\hat{j}}|\bar{w}_{\hat{j}})y_j=$$
$$=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_t\leqslant m}\sum_{\tau\in S_t}\varphi_{i_1,\ldots,i_t,\tau}(S_m^-(\bar{x}))-\sum_{j=1}^{t}\xi_j(\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x},\bar{y}_{\hat{t}}|\bar{w}_{\hat{t}}))y_j,$$

где ξ_j $(j\in I_t)$ — эндоморфизм алгебры $F\{Z\}$ такой, что

$$\xi_j(z)=\begin{cases}y_{j+s+1}, & \text{если } z=y_{j+s},\ s\in\{0,1,\ldots,t-1-j\},\\ z, & \text{если } z\notin\{y_j,\ldots,y_{t-1}\}.\end{cases}$$

Так как ассоциированное с многочленом $\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}_{\hat{t}}|\bar{w}_{\hat{t}})$ число $t-1<t$, то по индуктивному предположению он является следствием стандартного многочлена $S_m^-(\bar{x})$. Учитывая, что $\{S_m^-\}^T \lhd_T F\{Z\}$, получаем, что $\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$. Таким образом, теорема 3 верна для всякого $t \in I_{m-1}$. □

Следствие 6. *Для любого натурального числа $m>1$ и произвольного поля F многочлен $\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x}, y_1|w_1) = \sum\limits_{n=1}^{m-1} \sum\limits_{\pi \in S_m} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)} y_1 x_{\pi(n+1)} \cdots x_{\pi(m)}$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Доказательство. Полагая в теореме 3 $t=1$, получаем требуемый результат. □

Следствие 7. *Для любого натурального числа $m>1$ и произвольного поля F многочлен $\mathscr{H}_{2m-1,\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum\limits_{\pi \in S_m} \sum\limits_{\tau \in S_{m-1}} sgn\, \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(m-1)} x_{\pi(m)}$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Доказательство. Полагая в теореме 3 $t=m-1$, получаем требуемый результат. □

Замечание 1. Основные свойства многочлена $\mathscr{H}_{2m-1,\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ хорошо известны. Этот многочлен имеет специальное обозначение $C_{2m-1,\{2\}}(\bar{x}, \bar{y})$ и называется двойным многочленом Капелли типа $(2, m, 1; \{2\})$.

Предложение 1. *Для любых $t, u, m \in \mathbf{N}$ таких, что $u=t<m$, и произвольного поля F характеристики не два многочлен $\mathscr{H}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Доказательство. По теореме 2 $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$, по теореме 3

$$\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T,$$

но тогда и

$$\mathscr{H}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \frac{1}{2}(\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) + \mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T.$$ □

Теорема 4. *Для любого натурального числа $m>1$ и произвольного поля F характеристики не два многочлен $\mathscr{H}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Доказательство. Проведем методом математической индукции по парам $(t, u) \in A(\preceq) = \{(t, u) \in \mathbf{N}^2 \,|\, t \geqslant u, u < m\}$ с минимальными элементами (t, t), $t \in I_{m-1}$, где $\preceq$ — лексикографический порядок. В силу предложения 1 теорема 4 верна для любого минимального элемента $(t, t) \in A(\preceq)$.

Пусть (t, u) — произвольный элемент множества A, отличный от минимального. Предположим, что для любого $(t_1, u_1) \in A$ такого, что $(t_1, u_1) \prec (t, u)$, теорема 4 верна. Покажем, что она будет верной и для пары (t, u). Для элемента (t, u) возможны следующие случаи: 1) среди подслов $w_1, \ldots, w_u$ существует хотя бы одно w_s, для которого $|w_s| \geqslant 3$; 2) для любого $i \in I_u$ $|w_i| \leqslant 2$, при этом найдется w_r такое, что $|w_r| = 2$. Рассмотрим каждый из них по порядку.

Пусть $w_s = b_s y_{i_{s+1}-2} y_{i_{s+1}-1} y_{i_{s+1}}$ (если $|w_s| = 3$, то слово b_s полагаем пустым). Нетрудно видеть, что для любых $\bar{n} \in B_1$, $\tau \in S_u$ справедливо равенство

$$(-1)^{(\Phi(\bar{n}),\tau\Psi(\bar{w}'))}\operatorname{sgn}(\tau w) = (-1)^{\left(\Phi(\bar{n}),\tau\Psi\left(\bar{w}'_{\widehat{i_{s+1}-1},\hat{i}_{s+1}}\right)\right)}\operatorname{sgn}\left(\tau w_{\widehat{i_{s+1}-1},\hat{i}_{s+1}}\right),$$

здесь $w_{\widehat{i_{s+1}-1},\hat{i}_{s+1}} = w_1 \cdots w_{s-1}(b_s y_{i_{s+1}-2}) w_{s+1} \cdots w_u$. Отсюда следует, что

$$\mathscr{H}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) = \varphi\mathscr{H}^+\left(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{i_{s+1}-1},\hat{i}_{s+1}}|\bar{w}_{\widehat{i_{s+1}-1},\hat{i}_{s+1}}\right),$$

где φ — эндоморфизм алгебры $F\{Z\}$ такой, что $\varphi(y_{i_{s+1}-2}) = y_{i_{s+1}-2}y_{i_{s+1}-1}y_{i_{s+1}}$ и $\varphi(z) = z$, если $z \neq y_{i_{s+1}-2}$. Так как ассоциированная с многочленом $\mathscr{H}^+\left(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{i_{s+1}-1},\hat{i}_{s+1}}|\bar{w}_{\widehat{i_{s+1}-1},\hat{i}_{s+1}}\right)$ пара $(t-2,u) \prec (t,u)$, то по индуктивному предположению он следует из $S_m^-(\bar{x})$, но тогда и $\mathscr{H}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.

Во втором случае предположим, что $w_r = y_{i_r+1}y_{i_r+2}$. Рассмотрим эндоморфизмы $\varphi_1,\ldots,\varphi_m,\psi_{i_1+1},\ldots,\psi_{i_u+1}$ алгебры $F\{Z\}$, определенные следующим образом:

$$\varphi_i(z) = \begin{cases} x_i w_r, & \text{если } z = x_i, \\ z, & \text{если } z \neq x_i, \end{cases} \qquad \psi_{i_j+1}(z) = \begin{cases} w_r y_{i_j+1}, & \text{если } z = y_{i_j+1}, \\ z, & \text{если } z \neq y_{i_j+1}, \end{cases}$$

где $i \in I_m$, $j \in C = I_u \backslash \{r\}$, $i_1 = 0$. Нетрудно видеть, что

$$\mathscr{H}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \mathscr{H}^+(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{i_r+1},\widehat{i_r+2}}|\bar{w}_{\hat{r}}) - \sum_{j\in C} \psi_{i_j+1}\mathscr{H}^+(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{i_r+1},\widehat{i_r+2}}|\bar{w}_{\hat{r}}) -$$
$$-\mathscr{H}^+(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{i_r+1},\widehat{i_r+2}}|\bar{w}_{\hat{r}})w_r,$$

где $\bar{w}_{\hat{r}} = (w_1 \ldots w_{r-1}w_{r+1}\ldots w_u)$. Так как ассоциированная с многочленом $\mathscr{H}^+\left(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{i_r+1},\widehat{i_r+2}}|\bar{w}_{\hat{r}}\right)$ пара $(t-2,u-1) \prec (t,u)$, то по индуктивному предположению он является следствием $S_m^-(\bar{x})$, но тогда и $\mathscr{H}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$. □

Предложение 2. *Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F характеристики не два многочлен $\mathscr{H}^-(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Доказательство. По теореме 2 многочлен $\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$, а по теореме 4 $\mathscr{H}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$, но тогда $\mathscr{H}^-(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) = \mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) - \mathscr{H}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) \in$ $\in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$. □

Следствие 8. *Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F характеристики не два многочлены*

$$b_{2m-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in A_{m-1}^+} \operatorname{sgn}\pi x_{\pi(1)}y_{\tau(1)}x_{\pi(2)}\cdots y_{\tau(m-1)}x_{\pi(m)},$$
$$h_{2m-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in A_{m-1}^-} \operatorname{sgn}\pi x_{\pi(1)}y_{\tau(1)}x_{\pi(2)}\cdots y_{\tau(m-1)}x_{\pi(m)},$$

где $A_{m-1}^+ = \{\tau \in S_{m-1} |\ \operatorname{sgn}\tau = 1\}$, $A_{m-1}^- = \{\tau \in S_{m-1} |\ \operatorname{sgn}\tau = -1\}$, являются следствиями стандартного многочлена $S_m^-(\bar{x})$.

Доказательство. Полагая в следствии 1 $s = r = 1$, $u = m - 1$ и учитывая следствие 4, получаем, что

$$\mathscr{H}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in A_{m-1}^{sgn(-1)^{m(m-1)/2}}} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(m-1)} x_{\pi(m)},$$

$$-\mathscr{H}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in A_{m-1}^{-\operatorname{sgn}(-1)^{m(m-1)/2}}} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(m-1)} x_{\pi(m)}.$$

Нетрудно видеть, что в зависимости от числа m наши суммы совпадают либо с многочленом $b_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y})$, либо с многочленом $h_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y})$, но по теореме 4 и предложению 2 они следуют из $S_m^-(\bar{x})$. □

Замечание 2. Выше мы определили многочлен $\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ для случая, когда $(t, u) = (t, t)$, $t < m$, и доказали теорему 3. Оказывается, что она верна и для общего случая, когда $t \geqslant u$, $m > u$, при этом доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы 4 с заменой $\mathscr{H}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ на $\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ и соответствующих ссылок.

В заключении докажем одно предложение о некоторых тождествах матричной алгебры. Пусть A — произвольная ассоциативная алгебра над полем F.

Определение 2. Многочлен $d \in F\{Z\}$ называется *полиномиальным тождеством алгебры* A, если для любого гомоморфизма $\varphi \in Hom_F(F\{Z\}, A)$ справедливо равенство $\varphi(d) = 0$.

Нетрудно видеть, что множество всех полиномиальных тождеств алгебры A является T-идеалом алгебры $F\{Z\}$. Этот идеал называется идеалом тождеств алгебры A и обозначается символом $T[A]$. Заметим, что всякая конечномерная алгебра A обладает хотя бы одним полиномиальным тождеством, например, им является стандартный многочлен $S_n^-(\bar{z})$ при $n > \dim A$. В частности, если $A = M_m(F)$ — матричная алгебра над F, то в силу теоремы Амицура – Левицкого [7] наименьшее n, при котором $S_n^-(\bar{z}) \in T[M_m(F)]$, равно $2m$ (см. также [8, 9]), а наименьшее n, при котором двойные и кратные многочлены Капелли будут тождествами алгебры $M_m(F)$, найдено в работах [1, 10, 11]. Дополнением к этим результатам является приводимое ниже предложение.

Предложение 3. *Наименьшее* $n \in \mathbf{N}$, *при котором каждый из многочленов* $b_{2n-1}, h_{2n-1} \in T[M_m(F)]$, *равно* $2m$.

Доказательство. Проведем его для многочлена b_{2n-1}, поскольку для h_{2n-1} оно аналогично. Пусть $char\, F \neq 2$ и $d(m, F)$ означает наименьшее $n \in \mathbf{N}$, при котором $b_{2n-1} \in T[M_m(F)]$. Тогда из следствия 8 и теоремы Амицура – Левицкого заключаем, что $d(m, F) \leqslant 2m$, а из теоремы 4 работы [12] следует, что $d(m, F) > 2m - 1$. Отсюда $d(m, F) = 2m$. Так как коэффициенты многочлена b_{2n-1} равны ± 1, то ограничение $\operatorname{char} F \neq 2$ для матричной алгебры $M_m(F)$ становится несущественным и потому его можно снять. □

Продолжение следует.

Библиографический список

1. *Chang Q.* Some consequences of the standard polynomial // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 104, № 3. P. 707–710. DOI: 10.2307/2046778.
2. *Антонов С. Ю., Антонова А. В.* К теореме Ченга // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 247–251. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-247-251.
3. *Гатева Т. В.* Сложность произведения многообразий ассоциативных алгебр // УМН. 1981. Т. 36, вып. 1(217). С. 203–204.
4. *Кемер А. Р.* Замечание о стандартном тождестве // Матем. заметки. 1978. Т. 23, № 5. С. 753–757.
5. *Benanti F., Drensky V.* On the consequences of the standard polynomial // Comm. Algebra. 1998. Vol. 26. P. 4243–4275.
6. *Leron U.* Multilinear identities of the matrix ring // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. Vol. 183. P. 175–202.
7. *Amitsur S. A., Levitzki* J.Minimal identities for algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1950. Vol. 1, № 4. P. 449–463.
8. *Owens F. W.* Applications of graph theory to matrix theory // Amer. Math. Soc. 1975. Vol. 51, № 1. P. 242–249.
9. *Rosset S.* A new proof of the Amitsur – Levitzki identity // Israel J. Math. 1976. Vol. 23. P. 187–188.
10. *Szigeti J., Tuza Z., Revesz G.* Eulerian polynomial identities on matrix rings // J. of Algebra. 1993. Vol. 161, iss. 1. P. 90–101.
11. *Lee A., Revesz G., Szigeti J., Tuza Z.* Capelli polynomials, almost-permutation matrices and sparse Eulerian graphs // Descrete Math. 2001. Vol. 230, № 1–3. P. 49–61.
12. *Антонов С. Ю.* Наименьшая степень тождеств подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$ матричной супералгебры $M^{(m,k)}(F)$ // Изв. вузов. Матем. 2012. № 11. С. 3–19.

Образец для цитирования:
Антонов С. Ю., Антонова А. В. К теореме Ченга. II // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 127–137. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-127-137.

To Chang Theorem. II

S. Yu. Antonov[1], A. V. Antonova[2]

[1]Stepan Yu. Antonov, ORCID: 0000-0003-1705-3929, Kazan State Power Engineering University, 51, Krasnosel'skaya str., Kazan, Russia, 420066, antonovst-vm@rambler.ru

[2]Alina V. Antonova, ORCID: 0000-0001-7047-7275, Kazan State Power Engineering University, 51, Krasnosel'skaya str., Kazan, Russia, 420066, antonovakazan@rambler.ru

Multilinear polynomials $\mathscr{H}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$, $\mathscr{H}^-(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) \in F\{X \cup Y\}$, the sum of which is a polynomial $\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ Chang (where $F\{X \cup Y\}$ is a free associative algebra over an arbitrary field F of characteristic not equal two, generated by a countable set $X \cup Y$) have been introduced in this paper. It has been proved that each of them is a consequence of the standard polynomial $S^-(\bar{x})$. In particular it has been shown that the Capelli quasi-polynomials $b_{2m-1}(\bar{x}_m,\bar{y})$ and $h_{2m-1}(\bar{x}_m,\bar{y})$ are also consequences of the polynomial $S_m^-(\bar{x})$. The minimal degree of the polynomials $b_{2m-1}(\bar{x}_m,\bar{y})$, $h_{2m-1}(\bar{x}_m,\bar{y})$ in which they are a polynomial identity of matrix algebra $M_n(F)$ has been also found in the paper. The obtained results are the translation of Chang results to some Capelli quasi-polynomials of odd degree.

Key words: T-ideal, standard polynomial, Capelli polynomial.

References

1. Chang Q. Some consequences of the standard polynomial. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1988, vol. 104, no. 3, pp. 707–710. DOI: 10.2307/2046778.
2. Antonov S. Yu., Antonova A. V. To Chang theorem. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 3, pp. 247–251 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-247-251.
3. Gateva T. V. The complexity of a bundle of varieties of associative algebras. *Russian Math. Surveys*, 1981, vol. 36, no. 1, pp. 233. DOI: 10.1070/RM1981v036n01ABEH002548.
4. Kemer A. R. Remark on the standard identity. *Math. Notes*, 1978, vol. 23, no. 5, pp. 414–416. DOI: 10.1007/BF01789011.
5. Benanti F., Drensky V. On the consequences of the standard polynomial. *Comm. Algebra*, 1998, vol. 26, pp. 4243–4275.
6. Leron U. Multilinear identities of the matrix ring. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1973. vol. 183, pp. 175–202.
7. Amitsur S. A., Levitzki J. Minimal identities for algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, no. 4, pp. 449–463.
8. Owens F. W. Applications of graph theory to matrix theory. *Amer. Math. Soc.*, 1975, vol. 51, no. 1, pp. 242–249.
9. Rosset S. A new proof of the Amitsur – Levitzki identity. *Israel J. Math.*, 1976, vol. 23, pp. 187–188.
10. Szigeti J., Tuza Z., Revesz G. Eulerian polynomial identities on matrix rings. *J. of Algebra*, 1993, vol. 161, iss. 1, pp. 90–101. DOI: 10.1006/jabr.1993.1207.
11. Lee A., Revesz G., Szigeti J., Tuza Z. Capelli polynomials, almost-permutation matrices and sparse Eulerian graphs. *Descrete Math.*, 2001, vol. 230, no. 1–3, pp. 49–61.
12. Antonov S. Yu. The least degree identities subspace $M_1^{(m,k)}(F)$ of matrix superalgebra $M^{(m,k)}(F)$. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2012, vol. 56, no. 11, pp. 1–16. DOI: 10.3103/S1066369X12110011.

Cite this article as:

Antonov S. Yu., Antonova A. V. To Chang Theorem. II. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 127–137 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-127-137.

УДК 514.76

ПРОДОЛЖЕННЫЕ СТРУКТУРЫ НА КОРАСПРЕДЕЛЕНИЯХ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

С. В. Галаев

Галаев Сергей Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, sgalaev@mail.ru

В статье вводится понятие AP-многообразия –- почти контактного метрического многообразия, локально эквивалентного прямому произведению контактного метрического многообразия и почти эрмитова многообразия. Нормальное AP-многообразие с замкнутой фундаментальной формой является квазисасакиевым. Квазисасакиево AP-многообразие названо в статье специальным квазисасакиевым многообразием (SQS-многообразием). SQS-многообразие локально эквивалентно произведению сасакиева и кэлерова многообразий. В качестве вспомогательного результата доказывается предложение, утверждающее, что контактное метрическое многообразие с распределением нулевой кривизны является K-контактным метрическим пространством. Кораспределение D^* контактной метрической структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ определяется как подрасслоение кокасательного расслоения T^*M, состоящее из всех 1-форм, обращающихся в нуль на структурном векторе $\vec{\xi}$. На кораспределении D^* задается продолженная почти контактная метрическая структура $(D^*, \vec{u} = \partial_n, \mu = \eta \circ \pi_*, J, G, \tilde{D})$. Выводятся структурные уравнения, на основе которых доказывается, что продолженная почти контактная метрическая структура задает структуру AP-многообразия тогда и только тогда, когда тензор кривизны Схоутена контактного метрического многообразия M равен нулю. Статью завершает теорема, утверждающая, что продолженная почти контактная метрическая структура является SQS-структурой тогда и только тогда, когда в качестве исходного многообразия выбирается сасакиево многообразие с распределением нулевой кривизны.

Ключевые слова: квазисасакиево многообразие, внутренняя связность, ассоциированная связность, тензор кривизны Схоутена, распределение нулевой кривизны..

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-138-147

ВВЕДЕНИЕ

Пусть M — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$ с заданной на нем контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$. Кораспределение D^* почти контактного метрического многообразия M образовано всеми допустимыми 1-формами: $\lambda \in D^* \leftrightarrow \lambda(\vec{\xi}) = 0$ и является нечетномерным аналогом кокасательного расслоения T^*M. Геометрия кокасательного расслоения T^*M с метрикой Сасаки изучалась в работах [1–3]. Использованные в указанных работах методы получили свое развитие в исследованиях геометрии касательных расслоений TM (см., например, [3–9]). Нечетномерным аналогом касательного расслоения является распределение D почти контактной метрической структуры. В работе [10] с помощью внутренней и N-продолженной связностей на распределении D была определена почти контактная метрическая структура, названная продолженной почти контактной

© Галаев С. В., 2017

метрической структурой. Результаты дальнейших исследований продолженных почти контактных метрических структур и их обобщений отражены в работах [11–16]. Так, в частности, в [12] на распределении D задается геодезическая пульверизация связности над распределением, являющаяся аналогом геодезической пульверизации, заданной на пространстве касательного расслоения TM и имеющая ясную физическую интерпретацию: проекции интегральных кривых геодезической пульверизации связности над распределением совпадают с допустимыми геодезическими (траекториями движения механической системы со связями). В настоящей статье понятие продолженной почти контактной метрической структуры рассматривается применительно к кораспределению D^*. Основная задача предлагаемой работы сводится к нахождению условий, при которых продолженная почти контактная метрическая структура является структурой AP-многообразия. Предположим, что распределение D почти контактной метрической структуры разлагается в прямую сумму вида $D = L \oplus L^\perp$, где $L^\perp = K \cap D$ — ядро формы $\omega = d\eta$, распределение L ортогонально распределению $L^\perp$ и инвариантно относительно действия эндоморфизма φ. Таким образом, $\dim L = \operatorname{rk} d\eta = 2p \leqslant 2m$. Если дополнительно распределение $\tilde{L} = L \oplus D^\perp$ интегрируемо и имеет место равенство $d\eta(\vec{x}, \vec{y}) = \Omega(\vec{x}, \vec{y})$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(L)$, где $\Gamma(L)$ — модуль сечений распределения L, то многообразие M будем называть AP-многообразием. AP-многообразие локально эквивалентно прямому произведению контактного метрического многообразия и почти эрмитова многообразия. Квазисасакиево AP-многообразие названо в статье специальным квазисасакиевым многообразием (SQS-многообразием). SQS-многообразие локально эквивалентно произведению сасакиева и кэлерова многообразий.

1. ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Пусть M — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$, $\Gamma(TM)$ — модуль гладких векторных полей на M. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞. Предположим, что на M задана почти контактная метрическая структура $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$, где φ — тензор типа (1,1), называемый структурным эндоморфизмом или допустимой почти комплексной структурой, $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые соответственно структурным вектором и контактной формой, g — (псевдо) риманова метрика. При этом выполняются следующие условия:

1) $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}$;
2) $\eta(\vec{\xi}) = 1$;
3) $g(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y})$;
4) $d\eta(\vec{\xi}, \vec{x}) = 0$, где $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(TM)$.

Гладкое распределение $D = \ker \eta$ называется распределением почти контактной структуры.

В качестве следствия условий 1)–4) получаем:

5) $\varphi(\vec{\xi}) = 0$;
6) $\eta \circ \varphi = 0$;
7) $\eta(\vec{x}) = g(\vec{x}, \vec{\xi})$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$.

Если $\operatorname{rk}\omega = 2m$, где $\omega = d\eta$, вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\ker\omega = Span(\vec{\xi})$.

Кососимметрический тензор $\Omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \varphi\vec{y})$ называется фундаментальной формой структуры. Почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой, если выполняется равенство $\Omega = d\eta$. Гладкое распределение $D^{\perp} = Span(\vec{\xi})$, ортогональное распределению D, называется оснащением распределения D. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^{\perp}$.

Многообразие Сасаки — контактное метрическое пространство, удовлетворяющее дополнительному условию

$$N_{\varphi} + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0,$$

где $N_{\varphi}(\vec{x}, \vec{y}) = [\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}] + \varphi^2[\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\varphi\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\vec{x}, \varphi\vec{y}]$ — тензор Нейенхейса эндоморфизма φ. Выполнение условия $N_{\varphi} + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$ означает, что пространство Сасаки является нормальным пространством. Символы $\Gamma(E)$ будем использовать для обозначения модуля сечений распределения $E \subset TM$.

Предположим, что $\operatorname{rk} d\eta = 2p$, $0 \leqslant 2p \leqslant 2m$. Хорошо известно, что ядро формы $\omega = d\eta$ является интегрируемым распределением, которое в дальнейшем будем обозначать символом K. Пусть $P : TM \to D$, $Q : TM \to D^{\perp}$, $h : TM \to L$, $v : TM \to L^{\perp}$ — проекторы, определяемые разложением $TM = L \oplus L^{\perp} \oplus D^{\perp} = D \oplus D^{\perp}$, где $L^{\perp} = K \cap D$, а L — ортогональное ему распределение в D.

Имеет место

Предложение 1. *Распределение $L^{\perp}$ интегрируемо.*

Доказательство. Пусть $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(L^{\perp})$. Покажем, что $[\vec{x}, \vec{y}] \in \Gamma(L^{\perp})$. Имеем, $2d\eta(\vec{x}, \vec{y}) = -\eta([\vec{x}, \vec{y}]) = 0$. Отсюда следует, $[\vec{x}, \vec{y}] \in \Gamma(D)$. Далее, для произвольного $\vec{z} \in \Gamma(TM)$ получаем: $0 = 3d\omega(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = -\omega([\vec{x}, \vec{y}], \vec{z})$. Таким образом, $[\vec{x}, \vec{y}] \in \Gamma(L^{\perp})$, что и доказывает предложение. □

Многообразие M с почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ назовем AP-многообразием, если выполняются следующие три условия.

1. Распределение L инвариантно относительно действия эндоморфизма φ.
2. Распределение $\tilde{L} = L \oplus D^{\perp}$ — интегрируемо.
3. Имеет место равенство

$$d\eta(\vec{x}, \vec{y}) = \Omega(\vec{x}, \vec{y}), \ \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(L).$$

Квазисасакиево многообразие, являющееся одновременно AP-многообразием, назовем специальным квазисасакиевым многообразием (SQS-многообразием).

Используя интегрируемость распределения K, определим на многообразии M адаптированную карту $K(x^{\alpha})$ $(A, B, C = 1, ..., 2p;\ \alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n = 2m + 1;\ a, b, c = 1, ..., 2m;\ i, j, k = 2p + 1, ..., 2m)$, полагая $L^{\perp} = \operatorname{Span}(\partial_i)$, $\partial_n = \vec{\xi}$. Мы здесь использовали обозначение $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \partial_{\alpha}$.

Пусть $K(x^{\alpha})$ и $K'(x^{\alpha'})$ — адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат:

$$x^A = x^A(x^{A'}), \qquad x^i = x^i(x^{a'}), \qquad x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'}).$$

Векторные поля $h(\partial_A) = \vec{e}_A = \partial_A - \Gamma^i_A\partial_i - \Gamma^n_A\partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение L: $L = \mathrm{Span}(\vec{e}_A)$. Таким образом, мы имеем на многообразии M неголономное поле базисов $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_A, \partial_i, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов

$$(dx^A, dx^i + \Gamma^i_A dx^A, dx^n + \Gamma^n_A dx^A).$$

Непосредственно проверяется, что в случае AP-многообразия $[\vec{e}_A, \vec{e}_B] = 2\omega_{BA}\partial_n$, $\partial_n\Gamma^n_A = \partial_i\Gamma^n_A = 0$.

Используя интегрируемость распределения $\tilde{L}$, потребуем дополнительно выполнение равенства $\Gamma^i_A = 0$.

Пример SQS-многообразия. Пусть $M = \mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$, (∂_α) — стандартный базис арифметического пространства. Определим на M 1-форму η, полагая, что $\eta = dx^3 + x^2dx^1$. Очевидно, что $\eta(\partial_3) = 1$, $\eta(\partial_2) = \eta(\partial_4) = \eta(\partial_5) = \eta(\vec{e}_1) = 0$, где $\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2\partial_3$. Структуру риманова многообразия на M определим, считая базис $(\vec{e}_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4, \partial_5)$ ортонормированным. И наконец, положим $\varphi\vec{e}_1 = \partial_2$, $\varphi\partial_4 = \partial_5$, $\varphi\partial_2 = -\vec{e}_1$, $\varphi\partial_5 = -\partial_4$, $\varphi\partial_3 = 0$.

2. ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ СХОУТЕНА

Тензорное поле t типа (p, q), заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D), если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$ или η. Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид

$$t = t^{a_1\ldots a_p}_{b_1\ldots b_q}\vec{e}_{a_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \ldots \otimes dx^{b_q}.$$

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону:

$$t^a_b = A^a_{a'}A^{b'}_b t^{a'}_{b'},$$

где $A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$.

Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t^a_b$ компонент допустимого тензорного поля являются компонентами допустимого тензорного поля того же типа. Заметим, что обращение в нуль производных $\partial_n t^a_b$ не зависит от выбора адаптированных координат.

Внутренней линейной связностью ∇ [16] на многообразии с почти контактной структурой называется отображение

$$\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}}$;
2) $\nabla_{\vec{x}} f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}$;
3) $\nabla_{\vec{x}}(\vec{y} + \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z}$,

где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей.

Внутренняя связность определяет дифференцирования допустимых тензорных полей. Так, например, для допустимой почти комплексной структуры выполняется равенство

$$(\nabla_{\vec{x}}\varphi)\vec{y} = \nabla_{\vec{x}}(\varphi\vec{y}) - \varphi(\nabla_{\vec{x}}\vec{y}), \qquad \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D).$$

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c$. Из равенства $\vec{e}_a = A^{a'}_a \vec{e}_{a'}$, где $A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности:

$$\Gamma^c_{ab} = A^{a'}_a A^{b'}_b A^c_{c'} \Gamma^{c'}_{a'b'} + A^c_{c'} \vec{e}_a A^{c'}_b.$$

Кручением внутренней связности назовем допустимое тензорное поле

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}], \qquad \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D).$$

Внутреннюю связность будем называть симметричной, если ее кручение равно нулю. В случае симметричности внутренней связности в адаптированных координатах получаем:

$$S^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba}, \qquad \text{или} \qquad \Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba}.$$

Допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x},\vec{y}]}\vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}],$$

где $Q = I - P$, названо Вагнером тензором кривизны Схоутена [17, 18]. Тензор Схоутена будем называть тензором кривизны внутренней связности. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид

$$R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a||e||}\Gamma^e_{b]c}.$$

Тензор кривизны внутренней связности возникает в результате альтернирования вторых ковариантных производных:

$$2\nabla_{[a}\nabla_{b]}v^c = R^c_{abe}v^e + 4\omega_{ba}\partial_n v^c.$$

Назовем тензор кривизны внутренней связности тензором кривизны распределения D, а распределение D, в случае обращения в нуль тензора Схоутена, — распределением нулевой кривизны.

Аналогом связности Леви – Чивита является внутренняя симметричная связность ∇ такая, что $\nabla g = 0$, где g — допустимое тензорное поле, определяемое метрическим тензором исходной почти контактной метрической структуры. Назовем связность ∇ внутренней метрической связностью. Известно, что внутренняя симметричная метрическая связность существует и определена единственным образом. Ее коэффициенты задаются равенствами

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}).$$

Предложение 2. *Контактное метрическое многообразие размерности с распределением нулевой кривизны является K-контактным пространством.*

Доказательство. Пусть ∇ — внутренняя метрическая связность:

$$\vec{z}g(\vec{x},\vec{y}) = g(\nabla_{\vec{z}}\vec{x},\vec{y}) + g(\vec{x},\nabla_{\vec{z}}\vec{y}) = 0, \qquad \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(D).$$

Дифференцируя последнее равенство повторно и альтернируя полученный результат, получаем:

$$2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} - g_{dc}R^d_{eab} - g_{bd}R^d_{eac} = 0.$$

Учитывая невырожденность формы ω, заключаем, что равенство $R^d_{eac} = 0$ влечет равенство $\partial_n g_{bc} = 0$. Что и доказывает предложение. □

Используя равенство $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, получаем

Следствие. *Пусть M — многообразие, наделенное контактной метрической структурой, тогда обращение в нуль тензора кривизны Схоутена влечет равенство $P^a_{bc} = 0$.*

Следующая теорема позволяет сформулировать более сильный результат.

Теорема 1 (см. [14]). *Пусть $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi)$ — контактная метрическая структура, заданная на многообразии M. Тогда обращение в нуль тензора Схоутена эквивалентно существованию такого атласа, состоящего из адаптированных карт, для которого выполняются равенства $\Gamma^a_{bc} = 0$.*

3. ПРОДОЛЖЕННЫЕ ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Пусть M — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m+1$ с заданной на нем контактной метрической структурой $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g,D)$. Введем на кораспределении D^* структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ многообразия M сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha,p_a)$ на многообразии D^*, где p_a — координаты допустимого ковектора в кобазисе

$$(dx^a, \eta = dx^n + \Gamma^n_a dx^a),$$

сопряженном базису

$$(\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n, \partial_n).$$

Построенную сверхкарту также будем называть адаптированной. Поставим каждому допустимому векторному полю $\vec{x} \in \Gamma(D)$, $\vec{x} = x^a\vec{e}_a$, и каждому допустимому ковекторному полю $\lambda \in \Gamma(D^*)$, $\lambda = \lambda_a dx^a$, векторные поля $\vec{x}^h = x^a\vec{\varepsilon}_a$, $\lambda^v = \lambda_a\partial^a$ соответственно, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n + p_b\Gamma^b_{ac}\partial^c$, $\partial^a = \frac{\partial}{\partial p_a}$.

На тотальном пространстве D^* векторного расслоения (D^*,π,M), где $\pi : D^* \to M$ — естественная проекция, таким образом, возникает гладкое распределение $\tilde{D} = H \oplus V$, где $H = \mathrm{Span}(\vec{\varepsilon}_a)$, $V = \mathrm{Span}(\partial^a)$.

Замечание 1. Иногда мы не делаем различие между распределением и модулем сечений распределения, что не приводит к недоразумениям.

Определим на пространстве D^* метрический тензор G, полагая, что

$$G(\vec{\varepsilon}_a,\, \vec{\varepsilon}_b) = G(\partial^a, \partial^b) = g_{ab}, \qquad G(\partial_n, \partial_n) = 1,$$
$$G(\vec{\varepsilon}_a, \partial^b) = G(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n) = G(\partial^a, \partial_n) = 0,$$

и допустимую почти комплексную структуру J, таким образом,

$$J\vec{x}^h = -(\varphi\vec{x})^h, \qquad J\lambda^v = (\varphi\lambda)^v, \qquad J(\vec{u}) = \vec{0}.$$

Имеют место следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a,\, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\vec{u} + p_c R^c_{abe}\partial^e, \qquad [\vec{\varepsilon}_a, \partial^b] = -\Gamma^b_{ac}\partial^c, \qquad [\vec{\varepsilon}_a,\, \partial_n] = -p_b\partial_n\Gamma^b_{ac}\partial^c.$$

Здесь $R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a||e||}\Gamma^e_{b]c}$ — компоненты тензора Схоутена:

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x},\vec{y}]}\vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}].$$

Проводя необходимые рассуждения, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. *Система* $(D^*, \vec{u} = \partial_n, \mu = \eta \circ \pi_*, J, G, \tilde{D})$ *является почти контактной метрической структурой.*

Назовем полученную структуру продолженной (до распределения D^*) почти контактной метрической структурой.

Имеет место следующее

Предложение 3. *Почти контактная метрическая структура* $(D^*, \vec{u} = \partial_n, \mu = \eta \circ \pi_*, J, G, \tilde{D})$ *задает структуру AP-многообразия тогда и только тогда, когда тензор кривизны Схоутена равен нулю.*

Доказательство. 1. Распределение H инвариантно относительно действия эндоморфизма J в следствии с определением J: $J\vec{x}^h = -(\varphi\vec{x})^h$.

2. Как следует из равенств

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\vec{u} + p_c R^c_{abe}\partial^e, \qquad [\vec{\varepsilon}_a, \partial_n] = -p_b\partial_n\Gamma^b_{ac}\partial^c,$$

распределение $\tilde{L} = H \oplus D^\perp$, где $D^\perp = \mathrm{Span}(\partial_n)$, — интегрируемо тогда и только тогда, когда $R^c_{bae} = 0$, $\partial_n\Gamma^b_{ac} = 0$. Как следует из предложения 2, второе из последних двух равенств является следствием первого.

3. Справедливость равенства $d\mu(\vec{x}, \vec{y}) = \Omega(\vec{x}, \vec{y})$ следует из того, что исходное многообразие является контактным метрическим пространством. Тем самым, предложение доказано. □

Опираясь на предложение 3 и координатное представление тензора Нейенхейса эндоморфизма J, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 3. *Почти контактная метрическая структура* $(D^*, \vec{u} = \partial_n, \mu = \eta \circ \pi_*, J, G, \tilde{D})$ *определяет структуру SQS-многообразия тогда и только тогда, когда распределение D является распределением нулевой кривизны сасакиева многообразия.*

Библиографический список

1. *Salimov A. A., Agca F.* On para-Nordenian structures // Ann. Polon. Math. 2010. Vol. 99, № 2. P. 193–200. DOI: 10.4064/ap99-2-6.
2. *Salimov A. A., Agca F.* Some properties of Sasakian metrics in cotangent bundles // Mediterr. J. Math. 2011. Vol. 8, iss. 2. P. 243–255. DOI: 10.1007/s00009-010-0080-x.
3. *Yano K., Ishihara S.* Tangent and cotangent bundles. N. Y. : Marcel Dekker, 1973. 434 p.
4. *Aso K.* Notes on some properties of the sectional curvature of the tangent bundle // Yokohama Math. J. 1981. Vol. 5. P. 1–5.
5. *Gudmundsson S., Kappos E.* On the geometry of the tangent bundles // Expo. Math. 2002. Vol. 20, iss. 1. P. 1–41.
6. *Kowalski O.* Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of Riemannian manifold // J. Reine Angew. Math. 1971. Vol. 250. P. 124–129.
7. *Musso E., Tricerri F* Riemannian metric on tangent bundles // Ann. Math. Pura. Appl. 1988. Vol. 150, iss. 1. P. 1–19. DOI: 10.1007/BF01761461.
8. *Salimov A. A.* Tensor operators and their applications. N. Y. : Nova Science Publ., 2013. 692 p.
9. *Sasaki S.* On the Differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifols // Tohoku Math. J. 1958. Vol. 10, № 3. P. 338–358.
10. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 17–22.
11. *Букушева А. В.* Слоения на распределениях с финслеровой метрикой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 247–251.
12. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Связности над распределением и геодезические пульверизации // Изв. вузов. Матем. 2013. № 4. С. 10–18.
13. *Галаев С. В.* Геометрическая интерпретация тензора кривизны Вагнера для случая многообразия с контактной метрической структурой // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 3(337). С. 632–640. DOI: 10.17377/smzh.2016.57.310.
14. *Галаев С. В.* Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 263–272. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-263-272.
15. *Букушева А. В.* О геометрии контактных метрических пространств с φ-связностью // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2015. № 17(214), вып. 40. С. 20–24.
16. *Галаев С. В.* N-продолженные симплектические связности в почти контактных метрических пространствах // Изв. вузов. Матем. 2017. № 3. С. 15–23.
17. *Вагнер В. В.* Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып 5. С. 173–255.
18. *Вагнер В. В.* Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 301–327.

Образец для цитирования:

Галаев С. В. Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 138–147. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-138-147.

Extended Structures on Codistributions of Contact Metric Manifolds

S. V. Galaev

Sergei V. Galaev, ORCID: 0000-0002-1129-7159, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, Russia, 410012, sgalaev@mail.ru

In the paper, the notion of an AP-manifold is introduced. Such a manifold is an almost contact metric manifold that is locally equivalent to the direct product of a contact metric manifold and an Hermitian manifold. A normal AP-manifold with a closed fundamental form is a quasi-Sasakian manifold. A quasi-Sasakian AP-manifold is called in the paper a special quasi-Sasakian manifold (SQS-manifold). A SQS-manifold is locally equivalent to the product of a Sasakian manifold and a Kählerian manifold. As a subsidiary result, a proposition is proved stating that a contact metric space with a zero curvature distribution is a K–contact metric space. The codistribution D^* of a contact metric structure $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ is defined as the subbundle of the cotangent bundle T^*M, consisting of all 1-forms annihilating the structure vector $\vec{\xi}$. On the codistribution D^*, the extended almost contact metric structure $(D^*, \vec{u} = \partial_n, \mu = \eta \circ \pi_*, J, G, \tilde{D})$. is defined. Structural equations are introduced. These equations were used to prove the statement that the extended almost contact metric structure defines a structure of an AP-manifold if and only if the Schouten tensor of the contact metric manifold M is equal to zero. Finally we prove the theorem stating that the extended almost contact metric structure is a SQS-structure if and only if the initial manifold is a Sasakian manifold with a zero curvature distribution.

Key words: quasi-Sasakian manifold, interior connection, associated connection, Schouten curvature tensor, distribution of zero curvature.

References

1. Salimov A. A., Agca F. On para-Nordenian structures. *Ann. Polon. Math.*, 2010, vol. 99, no. 2, pp. 193–200. DOI: 10.4064/ap99-2-6.
2. Salimov A. A, Agca F. Some properties of Sasakian metrics in cotangent bundles. *Mediterr. J. Math.*, 2011, vol. 8, iss. 2, pp. 243–255. DOI: 10.1007/s00009-010-0080-x.
3. Yano K., Ishihara S. *Tangent and cotangent bundles*. New York, Marcel Dekker, 1973. 434 p.
4. Aso K. Notes on some properties of the sectional curvature of the tangent bundle. *Yokohama Math. J.*, 1981, vol. 5, pp. 1–5.
5. Gudmundsson S., Kappos E. On the geometry of the tangent bundles. *Expo. Math.*, 2002, vol. 20, iss. 1, pp. 1–41.
6. Kowalski O. Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of Riemannian manifold. *J. Reine Angew. Math.*, 1971, vol. 250, pp. 124–129.
7. Musso E., Tricerri F. Riemannian metric on tangent bundles. *Ann. Math. Pura. Appl.*, 1988, vol. 150, iss. 1, pp. 1–19. DOI: 10.1007/BF01761461.
8. Salimov A. A. *Tensor operators and their applications*. New York, Nova Science Publ., 2013. 692 p.
9. Sasaki S. On the Differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifols. *Tohoku Math. J.*, 1958, vol. 10, no. 3, pp. 338–358.
10. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution with admissible Finslerian metric. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 3, pp. 17–22 (in Russian).

11. Bukusheva A. V. Foliation on distribution with Finslerian metric. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 3, pp. 247—251 (in Russian).
12. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Connections on distributions and geodesic sprays. *Russian Math.*, 2013, vol. 57, iss. 4, pp. 7–13. DOI: 10.3103/S1066369X13040026.
13. Galaev S. V. Geometric interpretation of the Wagner curvature tensor in the case of a manifold with contact metric structure. *Sib. Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 3, pp. 498–504. DOI: 10.1134/S0037446616030101.
14. Galaev S. V. Admissible hypercomplex structures on distributions of Sasakian manifolds. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 263–272 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-263-272.
15. Bukusheva A. V. The geometry of the contact metric spaces φ-connection. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics*, 2015, no. 17 (214), iss. 40, pp. 20–24 (in Russian).
16. Galaev S. V. N-extended symplectic connections in almost contact metric spaces. *Russian Math.*, 2017, iss. 3, pp. 15–23.
17. Vagner V. V. The geometry of an $(n-1)$-dimensional nonholonomic manifold in an n-dimensional space. *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Analiza* [Proc. of the Seminar on Vector and Tensor Analysis]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1941, iss. 5, pp. 173–255 (in Russian).
18. Vagner V. V. Geometric interpretation of the motion of nonholonomic dynamical systems. *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Analiza* [Proc. of the Seminar on Vector and Tensor Analysis]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1941, iss. 5, pp. 301–327 (in Russian).

Cite this article as:
Galaev S. V. Extended Structures on Codistributions of Contact Metric Manifolds. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 138–147 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-138-147.

УДК 519.7

О ЗАДАЧЕ АБСТРАКТНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ГИПЕРГРАФИЧЕСКИХ АВТОМАТОВ

В. А. Молчанов[1], **Е. В. Хворостухина**[2]

[1]Молчанов Владимир Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, v.molchanov@inbox.ru

[2]Хворостухина Екатерина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационно-коммуникационных систем и программной инженерии, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., 410054, Россия, Саратов, Политехническая, 77, katyanew2007@rambler.ru

Гиперграфическими автоматами называются автоматы, у которых множества состояний и выходных символов наделены структурами гиперграфов, сохраняющимися функциями переходов и выходными функциями. Универсальные притягивающие объекты в категории таких автоматов представляются автоматами $\mathrm{Atm}\,(H_1, H_2)$ с гиперграфом состояний H_1, гиперграфом выходных символов H_2 и полугруппой входных символов $S = \mathrm{End}\, H_1 \times \mathrm{Hom}\,(H_1, H_2)$, которые называются универсальными гиперграфическими автоматами. Для такого автомата $\mathrm{Atm}\,(H_1, H_2)$ полугруппа входных символов S является производной алгеброй отображений, свойства которой взаимосвязаны со свойствами алгебраической структуры данного автомата. Это позволяет изучать универсальные гиперграфические автоматы с помощью исследования их полугрупп входных символов. В настоящей работе исследуется проблема абстрактной характеризации универсальных гиперграфических автоматов, суть которой заключается в нахождении условий изоморфности произвольного автомата некоторому универсальному гиперграфическому автомату. Основной результат работы дает решение этой задачи для универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с p-определимыми ребрами. Это достаточно широкий и весьма важный класс автоматов, так как он содержит, в частности, автоматы, у которых гиперграфы состояний и выходных символов являются плоскостями (например, проективными или аффинными) или разбиениями на классы нетривиальных эквивалентностей. Для решения основной задачи работы показано, что алгебраическая структура эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами полностью определяется отношением $(p+1)$-ограниченности его вершин и для универсальных гиперграфических автоматов над такими гиперграфами алгебраическая структура гиперграфов состояний и выходных символов полностью определяется каноническими отношениями полугруппы входных символов таких автоматов.

Ключевые слова: автомат, гиперграф, полугруппа, абстрактная характеризация.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-148-159

ВВЕДЕНИЕ

В последние 30 лет проявился заметный интерес к исследованию автоматов, у которых системы состояний и выходных символов являются объектами некоторой ка-

© Молчанов В. А., Хворостухина Е. В., 2017

тегории $\mathbf{K}$ (см., например, обзор в [1]). В категории таких автоматов для любых объектов $K_1, K_2 \in \mathbf{K}$ существует универсальный притягивающий объект $\mathrm{Atm}(K_1, K_2)$, который называется универсальным автоматом над объектами K_1, K_2 категории $\mathbf{K}$. Ввиду проблемы С. Улама [2] об определимости математических структур их эндоморфизмами и результатов Б. Йонсона (Jonsson) [3] об абстрактной характеризации алгебр отношений представляет интерес изучение следующей проблемы абстрактной характеризации таких универсальных автоматов над категорией $\mathbf{K}$: найти условия, при которых абстрактный автомат $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ будет изоморфен универсальному автомату $\mathrm{Atm}\,(K_1, K_2)$ над некоторыми объектами K_1, K_2 категории $\mathbf{K}$. В настоящей работе приводится решение данной задачи для категории $\mathbf{Hgr}$ эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами, которая охватывает, в частности, проективные плоскости, множества с нетривиальными разбиениями и многие другие гиперграфы.

Результаты работы докладывались на Международной научной конференции «Компьютерные науки и информационные технологии» в Саратовском университете (Саратов, 2016) [4].

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть X, Y — непустые множества. Всюду определенное однозначное бинарное отношение $\varphi \subset X \times Y$ называется отображением множества X в множество Y и обозначается символом $\varphi : X \to Y$. Через Δ_X обозначим тождественное отображение множества X в себя.

Обозначим через $T(X)$ множество всех преобразований X, через $F(X, Y)$ — множество всех отображений X в Y и $S(X, Y) = T(X) \times F(X, Y)$ — декартово произведение множеств $T(X)$, $F(X, Y)$. Элементами множества $S(X, Y)$ являются упорядоченные пары (f_1, f_2) отображений $f_1 : X \to X$, $f_2 : X \to Y$, которые могут рассматриваться как вектор-функции $f : X \to X \times Y$, определяющиеся по формуле $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ для $x \in X$. Отображения f_1, f_2 называются первой и второй компонентами вектор-функции f соответственно. Таким образом, вектор-функции могут отождествляться с упорядоченными парами их компонент.

Как известно [1], на множестве $S(X, Y)$ для вектор-функций $f, g \in S(X, Y)$ определяется ассоциативное умножение по правилу $f \cdot g = (f_1, f_2) \cdot (g_1, g_2) = (f_1 g_1, f_1 g_2)$. Множество $S(X, Y)$ с такой операцией умножения называется симметрической полугруппой вектор-функций на X со значениями в $X \times Y$. Подполугруппы такой симметрической полугруппы называются полугруппами вектор-функций на X со значениями в $X \times Y$.

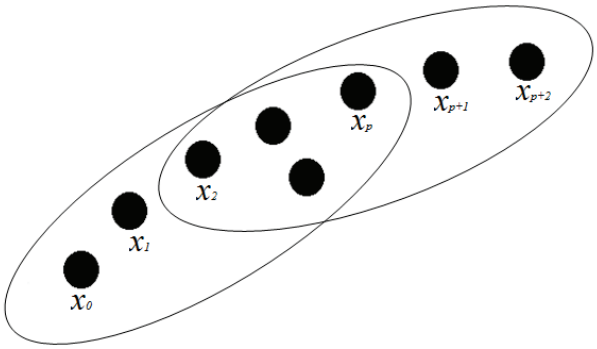
Согласно [5] гиперграфом называется алгебраическая система вида $H = (X, L)$, где X — непустое множество вершин гиперграфа и L — семейство некоторых подмножеств множества X, называемых ребрами гиперграфа. Множество вершин гиперграфа называется ограниченным, если оно содержится в некотором его ребре, и неограниченным, в противном случае. Вершины гиперграфа, принадлежащие некоторому его ребру, называются смежными. Гиперграф $H = (X, L)$ называется эффективным, если любая его вершина принадлежит некоторому ребру этого гиперграфа.

Пусть p — некоторое натуральное число. Гиперграф H будем называть гиперграфом с p-определимыми ребрами, если в каждом ребре этого гиперграфа найдется по крайней мере $p+1$ вершина и, с другой стороны, любые p вершин этого гиперграфа содержатся не более чем в одном ребре.

Например, если рассматривать плоскости [6] как гиперграфы, вершинами которых являются точки, а ребрами — прямые этих плоскостей, то любая проективная плоскость и любая аффинная плоскость с числом точек более четырех являются эффективными гиперграфами с 2-определимыми ребрами. Кроме того, эффективными гиперграфами с p-определимыми ребрами являются исследуемые в работе [7] слабые p-гиперграфы. Наконец, эффективными гиперграфами с p-определимыми ребрами являются гиперграфы, ребра которых образуют разбиения множества вершин на классы, содержащие более p вершин.

Помимо этих известных примеров, для любого натурального числа p имеется множество других нетривиальных эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами.

Пример. Для любого натурального числа p гиперграф $H = (X, L)$ с множеством вершин $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, x_{p+2}\}$ и множеством ребер $L = \{\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_p\}, \{x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, x_{p+2}\}\}$ является эффективным гиперграфом с p-определимыми ребрами (рисунок).



Эффективный гиперграф с p-определимыми ребрами H
An effective hypergraph with p-definable edges H

Пусть $H = (X, L)$, $H_1 = (X_1, L_1)$ — произвольные гиперграфы. Гомоморфизмом гиперграфа $H = (X, L)$ в гиперграф $H_1 = (X_1, L_1)$ называется отображение φ множества X в множество X_1, которое смежные в гиперграфе H вершины переводит в смежные вершины гиперграфа H_1, т. е. выполняется свойство

$$(\forall\, l \in L)(\exists\, l' \in L_1)(\varphi(l) \subset l').$$

Заметим, что для ребра $l \in L_1$ всякое отображение $\varphi : X \to l$ является гомоморфизмом гиперграфа H в гиперграф H_1.

Множество всех гомоморфизмов гиперграфа H в гиперграф H_1 обозначим $\mathrm{Hom}\,(H, H_1)$.

Гомоморфизм гиперграфов $f : H \to H_1$ называется изоморфизмом гиперграфа H на гиперграф H_1, если f — взаимно однозначное отображение множества X на множество X_1 и обратное отображение f^{-1} является гомоморфизмом гиперграфа H_1 на гиперграф H, т. е. выполняется условие

$$(\forall\, Y \subset X)(Y \in L \Longleftrightarrow f(Y) \in L_1).$$

Если существует изоморфизм $f : H \to H_1$, то гиперграфы H и H_1 называются изоморфными и записывают $H \cong H_1$. Гомоморфизм гиперграфа $H = (X, L)$ в себя называется эндоморфизмом гиперграфа H. Множество всех эндоморфизмов гиперграфа H с операцией композиции образует полугруппу $\operatorname{End} H$.

Для гиперграфов $H_X = (X, L_Y), H_Y = (Y, L_Y)$ через $S(H_X, H_Y)$ обозначим полугруппу $\operatorname{End} H_X \times \operatorname{Hom}(H_X, H_Y)$ с определенной выше операцией умножения вектор-функций по правилу [1]: $(\varphi, \psi) \cdot (\varphi_1, \psi_1) = (\varphi\varphi_1, \varphi\psi_1)$ для пар (φ, ψ), $(\varphi_1, \psi_1) \in \operatorname{End} H_X \times \operatorname{Hom}(H_X, H_Y)$.

Следуя [1], под автоматом будем понимать алгебраическую систему $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$, состоящую из множества состояний X, полугруппы входных символов S, множества выходных символов Y, функции переходов $\delta : X \times S \to X$ и выходной функции $\lambda : X \times S \to Y$ таких, что для любых $x \in X$ и $s, t \in S$ выполняются условия

$$\delta(x, st) = \delta(\delta(x, s), t), \qquad \lambda(x, st) = \lambda(\delta(x, s), t). \tag{1}$$

Для любого $s \in S$ определим отображения $\delta_s : X \to X$, $\lambda_s : X \to Y$ и вектор-функцию $f_s = (\delta_s, \lambda_s)$ по формулам $\delta_s(x) = \delta(x, s), \lambda_s(x) = \lambda(x, s)$, где $x \in X$. По определению автомата последовательное действие входных сигналов $s, t \in S$ в силу свойства (1) удовлетворяет следующим условиям:

$$(f_s f_t)(x) = f_t(f_s(x)) = (\delta(\delta(x, s), t), \lambda(\delta(x, s), t)) = (\delta(x, st), \lambda(x, st)) = f_{st}(x).$$

Это означает, что соответствие $s \longmapsto f_s \ \ (s \in S)$ является гомоморфизмом полугруппы S в симметрическую полугруппу вектор-функций $S(X, Y)$.

Автомат $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ называется автоматом без равнодействующих входных символов, если для произвольных $s, t \in S$, таких, что $s \neq t$, выполняется условие $f_s \neq f_t$. В этом случае соответствие $s \longmapsto f_s$ $(s \in S)$ является мономорфизмом полугруппы S в симметрическую полугруппу $S(X, Y)$, и действие каждого входного символа $s \in S$ полностью определяется действием пары отображений (δ_s, λ_s), т. е. входной символ s можно отождествить с вектор-функцией $f_s = (\delta_s, \lambda_s)$ и саму полугруппу входных символов S можно рассматривать как полугруппу вектор-функций на X со значениями в $X \times Y$.

В то же время любая полугруппа S вектор-функций на X со значениями в $X \times Y$ может рассматриваться как полугруппа входных символов автомата $A = (X, S, Y, \delta', \lambda')$ с множеством состояний X, множеством выходных символов Y, функцией переходов $\delta' : X \times S \to X$ и выходной функцией $\lambda' : X \times S \to Y$, значения которых для состояний $x \in X$ и вектор-функций $f = (f_1, f_2)$ из S определяются по формулам:

$$\delta'(x, f) = f_1(x), \qquad \lambda'(x, f) = f_2(x). \tag{2}$$

Изоморфизмом автомата $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ на автомат $A_1 = (X_1, S_1, Y_1, \delta_1, \lambda_1)$ называется упорядоченная тройка $\gamma = (f, \pi, g)$ биекций $f : X \to X_1, \pi : S \to S_1$ и $g : Y \to Y_1$, сохраняющих алгебраическую структуру таких автоматов, т. е. π является изоморфизмом полугруппы S на полугруппу S_1, и для любых значений $s, t \in S$, $x \in X$ выполняются условия $\pi(s \cdot t) = \pi(s) \cdot \pi(t)$, $f(\delta(x, s)) = \delta_1(f(x), \pi(s))$ и $g(\lambda(x, s)) = \lambda_1(f(x), \pi(s))$.

Автомат $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ будем называть гиперграфическим автоматом, если множество состояний X и множество выходных символов Y наделены такими структурами гиперграфов $H_X = (X, L_X)$ и $H_Y = (Y, L_Y)$, что при каждом фиксированном входном сигнале $s \in S$ преобразование $\delta_s : X \to X$ является эндоморфизмом гиперграфа H_X и отображение $\lambda_s : X \to Y$ — гомоморфизмом гиперграфа H_X в гиперграф H_Y. Такие автоматы будем также обозначать $A = (H_X, S, H_Y, \delta, \lambda)$.

Гомоморфизмом гиперграфического автомата $A = (H_X, S, H_Y, \delta, \lambda)$ в гиперграфический автомат $A_1 = (H_{X_1}, S_1, H_{Y_1}, \delta_1, \lambda_1)$ называется упорядоченная тройка $\gamma = (f, \pi, g)$ отображений $f : X \to X_1, \pi : S \to S_1$ и $g : Y \to Y_1$, сохраняющих алгебраическую структуру таких автоматов, т. е. f является гомоморфизмом гиперграфа H_X в гиперграф H_{X_1}, π — гомоморфизмом полугруппы S в полугруппу S_1, g — гомоморфизмом гиперграфа H_Y в гиперграф H_{Y_1} и для любых значений $x \in X, s \in S$ выполняются условия $f(\delta(x, s)) = \delta_1(f(x), \pi(s))$, $g(\lambda(x, s)) = \lambda_1(f(x), \pi(s))$.

Важный пример гиперграфического автомата дает алгебраическая система $\mathrm{Atm}\,(H_X, H_Y) = (H_X, S(H_X, H_Y), H_Y, \delta', \lambda')$, где $H_X = (X, L_X)$, $H_Y = (Y, L_Y)$ — некоторые гиперграфы, и для любых состояний $x \in X$ и вектор-функций $f = (f_1, f_2)$ из $S(H_X, H_Y)$ значения функции переходов $\delta'(x, f)$ и функции выходов $\lambda'(x, f)$ определяются по формулам (2). Легко проверить, что $\mathrm{Atm}\,(H_X, H_Y)$ удовлетворяет следующему универсальному свойству: для любого гиперграфического автомата $A = (H_X, S, H_Y, \delta, \lambda)$ существует такой гомоморфизм $\pi : S \to S(H_X, H_Y)$, что упорядоченная тройка $\gamma = (\Delta_X, \pi, \Delta_Y)$ является гомоморфизмом A в $\mathrm{Atm}\,(H_X, H_Y)$. По этой причине такой гиперграфический автомат $\mathrm{Atm}\,(H_X, H_Y)$ называется универсальным гиперграфическим автоматом над гиперграфами H_X, H_Y.

2. АБСТРАКТНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ГИПЕРГРАФИЧЕСКИХ АВТОМАТОВ

В работе исследуется проблема абстрактной характеризации универсальных гиперграфических автоматов, которая формулируется следующим образом: при каких условиях абстрактный автомат $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ будет изоморфен универсальному автомату $\mathrm{Atm}\,(H_1, H_2)$ над некоторыми гиперграфами H_1, H_2?

Для решения этой задачи понадобятся следующие понятия из работы [8].

Пусть X — произвольное непустое множество, p — натуральное число и R — $(p+1)$-арное отношение на множестве X. Согласно [8] отношение R называется p-эквивалентностью на множестве X, если оно удовлетворяет следующим условиям:
(T_1) $(x, \ldots, x, x) \in R$ для любого $x \in X$;

(T_2) для любых $1 \leqslant i_1, \ldots, i_p, i_{p+1} \leqslant p+1$,

$$(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}) \in R \Longrightarrow (x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}, x_{i_{p+1}}) \in R;$$

(T_3) для любых попарно различных элементов $x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p \in X$,

$$(x, x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p), (x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p, y) \in R \Longrightarrow (x, x_1, \ldots, x_{p-1}, y) \in R.$$

При этом p-эквивалентность R называется квазиполной, если выполняется условие

(T_4) для любых элементов $x_1, \ldots, x_p \in X$, удовлетворяющих условию $(x_1, \ldots, x_p, x_p) \in R$, найдется такой, отличный от всех них, элемент $x \in X$, что $(x_1, \ldots, x_p, x) \in R$. Пусть X — произвольное непустое множество и R — некоторое n-арное отношение на этом множестве. Тогда множество $Y \subset X$ называется R-связным, если $Y^n \subset R$.

Легко видеть, что множество M_R всех R-связных множеств так упорядочено отношением теоретико-множественного включения, что выполняются следующие условия:

1) любая цепь упорядоченного множества M_R имеет максимальный элемент;

2) любое R-связное множество включается в некоторое максимальное R-связное множество.

Для произвольного гиперграфа $H = (X, L)$ определим на множестве X отношение $B_p(H)$ $(p+1)$-ограниченности вершин по следующей формуле:

$$B_p(H) = \{(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}) \in X^{p+1} : x_1, \ldots, x_p, x_{p+1} \in l \text{ для некоторого } l \in L\}.$$

По аналогии с леммами 3.3, 3.5 из работы [8] получаем следующие результаты.

Лемма 1. *Пусть $H = (X, L)$ — произвольный эффективный гиперграф с p-определимыми ребрами и $B_p = B_p(H)$ — отношение $(p+1)$-ограниченности его вершин. Тогда отношение B_p является квазиполной p-эквивалентностью на множестве X.*

Предложение 1. *Пусть X — произвольное непустое множество, p — некоторое натуральное число и R — квазиполная p-эквивалентность на множестве X. Тогда для множества всех максимальных R-связных множеств M_R алгебраическая система $H = (X, M_R)$ является эффективным гиперграфом с p-определимыми ребрами, для отношения $B_p(H)$ $(p+1)$-ограниченности вершин которого выполняется равенство $B_p(H) = R$.*

Для автомата $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ на множествах X, Y определим канонические $(p+1)$-арные отношения R_X, R_Y по следующим формулам: упорядоченный набор $(a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}) \in X^{p+1}$ (соответственно $(a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}) \in Y^{p+1}$) в том и только том случае принадлежит отношению R_X (соответственно отношению R_Y), если для любых различных элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1} \in X$ найдется такой символ $s \in S$, что для каждого $i = \overline{1, p+1}$ выполняется равенство $\delta(x_i, s) = a_i$ (соответственно $\lambda(x_i, s) = a_i$).

Лемма 2. *Для любого автомата $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ канонические отношения R_X, R_Y обладают следующим свойством: $\delta_s^{p+1}(R_X) \subset R_X$, $\lambda_s^{p+1}(R_X) \subset R_Y$ для любого символа $s \in S$.*

Доказательство. Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}) \in R_X$ и для некоторого символа $s \in S$ выполняются равенства $\delta_s(a_i) = b_i$ (соответственно $\lambda_s(a_i) = c_i$) при всех $i = \overline{1, p+1}$. Тогда для любых различных элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1} \in X$ найдется такой входной символ $t \in S$, что для каждого $i = \overline{1, p+1}$ выполняется равенство $\delta_t(x_i) = a_i$. Так как для каждого $i = \overline{1, p+1}$ выполняются равенства $\delta_{ts}(x_i) = \delta_s(\delta_t(x_i)) = \delta_s(a_i) = b_i$ (соответственно $\lambda_{ts}(x_i) = \lambda_s(\delta_t(x_i)) = \lambda_s(a_i) = c_i$), то по определению R_X и R_Y получаем, что $(b_1, b_2, \ldots, b_{p+1}) \in R_X$, $(c_1, c_2, \ldots, c_{p+1}) \in R_Y$, т. е. $\delta_s^{p+1}(R_X) \subset R_X$, $\lambda_s^{p+1}(R_X) \subset R_Y$. □

Лемма 3. *Для любых эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами $H_X = (X, L_X), H_Y = (Y, L_Y)$ канонические отношения R_X, R_Y универсального гиперграфического автомата $\mathrm{Atm}\,(H_X, H_Y)$ обладают следующими свойствами:*

1) $R_X = B_p(H_X)$, $R_Y = B_p(H_Y)$;

2) отображение $\psi : X \to Y$ в том и только том случае будет гомоморфизмом гиперграфа H_X в гиперграф H_Y, если выполняется $\psi^{p+1}(R_X) \subset R_Y$.

Доказательство. По определению отношения $(p+1)$-ограниченности вершин B_p для любых точек $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1} \in X$ условие $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \in B_p(H)$ выполняется тогда и только тогда, когда вершины $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ смежны, т. е. принадлежат некоторому ребру $l \in L_X$. В этом случае любое отображение $\varphi : X \to l$ является эндоморфизмом гиперграфа H_X и по определению канонических отношений выполняется условие $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \in R_X$. Значит, имеет место: $B_p(H_X) \subset R_X$. Аналогичным образом доказывается, что $B_p(H_Y) \subset R_Y$. Поскольку H_X — эффективный гиперграф с p-определимыми ребрами, то найдутся такие вершины $z_1, z_2, \ldots, z_{p+1} \in X$, принадлежащие некоторому ребру $r \in L_X$, что $z_i \neq z_j$ для всех $1 \leqslant i \neq j \leqslant p+1$. Для любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1} \in X$ условие $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \in R_X$ означает, что найдется такой входной символ $s \in S$, что для всех $i = \overline{1, p+1}$ выполняется $\delta_s(z_i) = x_i$. Так как $z_1, z_2, \ldots, z_{p+1}$ — смежные вершины, то вершины $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ также смежны и, следовательно, $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \in B_p(H_X)$. Таким образом, выполняется $R_x \subset B_p(H_X)$, а значит, $R_X = B_p(H_X)$.

В то же время для любых элементов $y_1, y_2, \ldots, y_{p+1} \in Y$ условие $(y_1, y_2, \ldots, y_{p+1}) \in$ $\in R_Y$ означает, что найдется такой входной символ $s \in S$, что для всех $i = \overline{1, p+1}$ выполняется $\lambda_s(z_i) = y_i$. Следовательно, вершины $y_1, y_2, \ldots, y_{p+1}$ должны лежать в одном ребре гиперграфа H_Y, а значит, $(y_1, y_2, \ldots, y_{p+1}) \in B_p(H_Y)$. Таким образом, $R_Y \subset B_p(H_Y)$ и выполняется $R_Y = B_p(H_Y)$. Это доказывает пункт 1) леммы.

Пусть $\psi : X \to Y$ — гомоморфизм гиперграфа H_X в гиперграф H_Y и $(x_1, x_2, \ldots,$ $x_{p+1}) \in R_X$. Тогда в силу уже доказанного пункта 1) данной леммы имеет место $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \in B_p(H_X)$. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда вершины $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ принадлежат некоторому ребру $l \in L_X$. Поскольку ψ — гомоморфизм гиперграфа H_X в гиперграф H_Y, то в гиперграфе H_Y найдется ребро

$r \in L_Y$ такое, что $\psi(l) \subset r$. Значит, $\psi(x_1), \psi(x_2), \ldots, \psi(x_{p+1}) \in r$ и, следовательно, $(\psi(x_1), \psi(x_2), \ldots, \psi(x_{p+1})) \in B_p(H_Y)$. В силу пункта 1) этой леммы имеет место $(\psi(x_1), \psi(x_2), \ldots, \psi(x_{p+1})) \in R_Y$, т. е. $\psi^{p+1}(R_X) \subset R_Y$.

Обратно, пусть отображение $\psi : X \to Y$ удовлетворяет условию $\psi^{p+1}(R_X) \subset R_Y$. Рассмотрим произвольное ребро $l \in L_X$ в силу p-определимости ребер гиперграфа H_X найдутся попарно различные вершины $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$, принадлежащие l. По определению отношения B_p получаем $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \in B_p(H)$, а в силу пункта 1) данной леммы имеем $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \in R_X$. Тогда из условия $\psi^{p+1}(R_X) \subset R_Y$ получаем, что $(\psi(x_1), \psi(x_2), \ldots, \psi(x_{p+1})) \in R_Y$. Из пункта 1) данной леммы следует, что $(\psi(x_1), \psi(x_2), \ldots, \psi(x_{p+1})) \in B_p(H_Y)$. А это означает, что вершины $\psi(x_1), \psi(x_2), \ldots, \psi(x_{p+1})$ смежные, т. е. принадлежат некоторому ребру $r \in L_Y$ гиперграфа H_Y. Следовательно, $\psi(l) \subset r$. Таким образом, отображение ψ является гомоморфизмом гиперграфа H_X в гиперграф H_Y. □

Теорема 1. *Автомат $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ в том и только том случае будет изоморфен универсальному гиперграфическому автомату $\mathrm{Atm}\,(H_1, H_2)$ над некоторыми эффективными гиперграфами с p-определимыми ребрами H_1 и H_2, если выполняются следующие условия:*

1) *для различных $s, t \in S$ найдется такой элемент $x \in X$, что либо $\delta(x, s) \neq \neq \delta(x, t)$, либо $\lambda(x, s) \neq \lambda(x, t)$;*
2) *канонические отношения R_X и R_Y автомата A являются квазиполными p-эквивалентностями соответственно на множествах X и Y;*
3) *если для отображений $f_1 : X \to X$, $f_2 : X \to Y$ при любых значениях $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1} \in X$, удовлетворяющих условию $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \in R_X$, существуют такие символы $s, t \in S$, что $f_1(x_i) = \delta(x_i, s)$ и $f_2(x_i) = \lambda(x_i, t)$ для всех $i = \overline{1, p+1}$, то найдется такой символ $a \in S$, что $f_1(x) = \delta(x, a)$ и $f_2(x) = \lambda(x, a)$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Пусть $A = \mathrm{Atm}\,(H_X, H_Y)$ для некоторых эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами $H_X = (X, L_X)$ и $H_Y = (Y, L_Y)$. Покажем, что для такого автомата выполняются условия 1)–3).

Пусть $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2)$ — вектор-функции из полугруппы входных сигналов $S = S(H_X, H_Y)$, удовлетворяющие условию $f \neq g$. Тогда либо $f_1 \neq g_1$, либо $f_2 \neq g_2$. Значит, либо для некоторого $x \in X$ выполняется $f_1(x) \neq g_1(x)$ и в силу $\delta'(x, f) = f_1(x), \delta'(x, g) = g_1(x)$ получаем $\delta'(x, f) \neq \delta'(x, g)$, либо для некоторого $x \in X$ выполняется $f_2(x) \neq g_2(x)$ и в силу $\lambda'(x, f) = f_2(x), \lambda'(x, g) = g_2(x)$ получаем $\lambda'(x, f) \neq \lambda'(x, g)$. Следовательно, для автомата $A = \mathrm{Atm}\,(H_X, H_Y)$ выполняется условие 1).

Согласно лемме 1 для универсального гиперграфического автомата $\mathrm{Atm}\,(H_1, H_2)$ выполняются равенства: $R_X = B_p(H_X)$, $R_Y = B_p(H_Y)$. Так как отношения $B_p(H_X), B_p(H_Y)$ удовлетворяют условиям 1)–4) леммы 1, то для канонических отношений R_X, R_Y выполняются условия $(T_1) - (T_4)$. Значит, R_X, R_Y являются квазиполными p-эквивалентностями на множествах X, Y соответственно, т. е. для автомата $A = \mathrm{Atm}\,(H_X, H_Y)$ выполняется условие 2).

Пусть для отображений $f_1 : X \to X$, $f_2 : X \to Y$ при любых значениях $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1} \in X$, удовлетворяющих условию $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \in R_X$, существуют такие символы $s, t \in S$, что $f_1(x_i) = \delta'(x_i, s)$ и $f_2(x_i) = \lambda'(x_i, t)$ для всех $i = \overline{1, p+1}$. По лемме 2 $\delta_s'^{p+1}(R_X) \subset R_X$, $\lambda_t'^{p+1}(R_X) \subset R_Y$. Тогда $(f_1(x_1), f_1(x_2), \ldots, f_1(x_{p+1})) \in R_X$, $(f_2(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_2(x_{p+1})) \in R_Y$. Значит, $f_1^{p+1}(R_X) \subset R_X, f_2^{p+1}(R_X) \subset R_Y$. В силу леммы 3 отображение f_1 является эндоморфизмом гиперграфа H_X, а отображение f_2 является гомоморфизмом гипергафа H_X в гиперграф H_Y. Тогда из определения автомата $A = \mathrm{Atm}\,(H_X, H_Y)$ получаем, что вектор-функция $a = (f_1, f_2)$ принадлежит полугруппе входных сигналов S, при этом по формулам (2) выполняется $f_1(x) = \delta'(x, a)$ и $f_2(x) = \lambda'(x, a)$ для всех $x \in X$. Таким образом, для автомата $A = \mathrm{Atm}\,(H_X, H_Y)$ выполняется условие 3).

Обратно, предположим, что абстрактный автомат $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ удовлетворяет условиям 1)–3). Тогда из условия 1) следует, что A является автоматом без равнодействующих входных символов. Значит, соответствие $f : s \longmapsto f_s = (\delta_s, \lambda_s)$ $(s \in S)$ является мономорфизмом полугруппы S в симметрическую полугруппу $S(X, Y)$ и действие каждого входного символа $s \in S$ полностью определяется действием вектор-функции $f_s = (\delta_s, \lambda_s)$. Рассмотрим автомат $A' = (X, f(S), Y, \delta', \lambda')$, у которого полугруппа входных символов $f(S)$ является полугруппой вектор-функций на X со значениями в $X \times Y$ и действия функции переходов $\delta' : X \times f(S) \to X$ и выходной функции $\lambda' : X \times f(S) \to Y$ определяются по формулам (2). Легко убедиться, что упорядоченная тройка биекций $\gamma = (\Delta_X, f, \Delta_Y)$ является изоморфизмом автомата A на автомат A'. В самом деле для любых $x \in X, s \in S$ по формулам (2) выполняются равенства:

$$\delta'(x, f(s)) = \delta'(x, (\delta_s, \lambda_s)) = \delta_s(x) = \delta(x, s),$$
$$\lambda'(x, f(s)) = \lambda'(x, (\delta_s, \lambda_s)) = \lambda_s(x) = \lambda(x, s),$$

т. е. $\gamma = (\Delta_X, f, \Delta_Y)$ — изоморфизм автомата A на автомат A'. Очевидно, что автомат A' определяет на множествах X, Y такие же канонические отношения R_X, R_Y, что и автомат A.

По построению автомата $A' = (X, f(S), Y, \delta', \lambda')$ полугруппа входных символов $f(S)$ является полугруппой вектор-функций на X со значениями в $X \times Y$, действия функции переходов $\delta' : X \times S \to X$ и выходной функции $\lambda' : X \times S \to Y$ определяются по формулам (2) и канонические отношения R_X, R_Y этого автомата являются квазиполными p-эквивалентностями соответственно на множествах X, Y. По предложению 1 найдутся такие эффективные гиперграфы с p-определимыми ребрами $H_X = (X, L_X)$, $H_Y = (Y, L_Y)$, что $R_X = B_p(H_X)$, $R_Y = B_p(H_Y)$. Покажем, что $f(S) = S(H_X, H_Y)$. Для любой вектор-функции $f = (f_1, f_2)$ из $f(S)$ по формулам (2) выполняется $\delta'_f = f_1, \lambda'_f = f_2$ и согласно лемме 2 $f_1^{p+1}(R_X) \subset R_X$, $f_2^{p+1}(R_X) \subset R_Y$. Тогда по лемме 3 отображение f_1 является эндоморфизмом гиперграфа H_X, а отображение f_2 является гомоморфизмом гиперграфа H_X в гиперграф H_Y. Значит, вектор-функция $f = (f_1, f_2)$ принадлежит множеству $S(H_X, H_Y)$ и выполняется $f(S) \subset S(H_X, H_Y)$. С другой стороны, если вектор-функция $f = (f_1, f_2)$ принадлежит полугруппе $S(H_X, H_Y)$, то по лемме 2 выполняются условия $f_1^{p+1}(R_X) \subset R_X$,

$f_2^{p+1}(R_X) \subset R_Y$. Это означает, что для любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ таких, что $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \in R_X$ имеет место $(f_1(x_1), f_1(x_2), \ldots, f_1(x_{p+1})) \in R_X$, $(f_2(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_2(x_{p+1})) \in R_Y$. По определению канонических отношений R_X, R_Y найдутся такие символы $s, t \in S$,что для каждого $i = \overline{1, p+1}$ выполняются равенства $f_1(x_i) = \delta(x_i, s)$ и $f_2(x_i) = \lambda(x_i, t)$. По условию теоремы 3) найдется такой символ $a \in S$, что $f_1(x) = \delta(x, a)$ и $f_2(x) = \lambda(x, a)$ для всех $x \in X$. Это означает, что $f_1 = \delta_a, f_2 = \lambda_a$ и по определению $f_a = (\delta_a, \lambda_a) = (f_1, f_2) = f$. Следовательно, вектор-функция $f \in f(S)$ и выполняется $S(H_X, H_Y) \subset f(S)$. Таким образом, $S(H_X, H_Y) = f(S)$ и упорядоченная тройка биекций $\gamma = (\Delta_X, f, \Delta_Y)$ является изоморфизмом автомата A на автомат $\mathrm{Atm}\,(H_X, H_Y)$. □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью полученных результатов можно доказать, что универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с p-определимыми ребрами задаются с точностью до изоморфизма своими полугруппами входных символов, и исследовать взаимосвязь между абстрактными свойствами таких автоматов и их полугрупп входных символов.

Библиографический список

1. *Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М. : Высш. шк., 1994. 192 с.
2. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. М. : Наука, 1964. 168 с.
3. *Jonsson B.* Topics in universal algebra. Lecture Notes in Math. Berlin ; Heidelberg ; N. Y. : Springer-Verlag, 1972. 220 p.
4. *Молчанов В. А., Хворостухина Е. В.* О задаче конкретной характеризации универсальных гиперграфических автоматов // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунар. науч. конф. Саратов : ИЦ Наука, 2016. С. 284–285.
5. *Bretto A.* Hypergraph theory. An Introduction. Cham ; Heidelberg ; N. Y. ; Dordrecht ; London : Springer, 2013. 133 p. DOI: 10.1007/978-3-319-00080-0.
6. *Хартсхорн Р.* Основы проективной геометрии. М. : Мир, 1970. 161 с.
7. *Молчанов А. В.* Полугруппы эндоморфизмов слабых p-гиперграфов // Изв. вузов. Матем. 2000. № 3. С. 80–83.
8. *Молчанов А. В.* Об определяемости гиперграфических автоматов их выходными функциями // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. 1998. Вып. 2. С. 74–84.

Образец для цитирования:

Молчанов В. А., Хворостухина Е. В. О задаче абстрактной характеризации универсальных гиперграфических автоматов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 148–159. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-148-159.

On Problem of Abstract Characterization of Universal Hypergraphic Automata

V. A. Molchanov[1], **E. V. Khvorostukhina**[2]

[1]Vladimir A. Molchanov, ORCID: 0000-0001-6509-3090, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, Russia, 410012, v.molchanov@inbox.ru

[2]Ekaterina V. Khvorostukhina, ORCID: 0000-0002-2775-5732, Yuri Gagarin Saratov State Technical University, 77, Politechnicheskaya str., 410054, Saratov, Russia, katyanew2007@rambler.ru

Hypergraphic automata are automata whose state sets and sets of output symbols are endowed with algebraic structures of hypergraphs preserving by transition and exit functions. Universally attracting objects in the category of hypergraphic automata are automata $\mathrm{Atm}\,(H_1, H_2)$, where H_1 is a hypergraph of the state set, H_2 is a hypergraph of the set of output symbols and $S = \mathrm{End}\, H_1 \times \mathrm{Hom}\,(H_1, H_2)$ is a semigroup of input symbols. Such automata are called universal hypergraphic automata. The semigroup of input symbols S of such automaton $\mathrm{Atm}\,(H_1, H_2)$ is a derivative algebra of mappings for such automaton. So its properties are interconnected with properties of the algebraic structure of the automaton. Thus we can study universal hypergraphic automata by investigation of their semigroups of input symbols. In this paper we study the problem of abstract characterization of universal hypergraphic automata. The problem is to find the conditions of existence of isomorpism of arbitrary automaton to the universal hypergraphic automaton. The main result of the paper is solving of this problem for universal hypergraphic automata over effective hypergraphs with p-definable edges. It's a wide and a very important class of automata because such algebraic systems contain automata whose state hypergraphs and hypergraphs of output symbols are projective or affine planes. Also they include automata whose state hypergraphs and hypergraphs of output symbols are divided into equivalence classes. To solve the main problem we also proved that the algebraic structure of effective hypergraps with p-definable edges were determined by a relation of $(p+1)$-boundedness of vertices of this hypergraph and for automata under consideration, algebraic structures of state hypergraphs and hypergraphs of output symbols are determined by canonical relations of the semigroup of input symbols of the automata.

Key words: automaton, hypergraph, abstract characterization.

References

1. Plotkin B. I., Geenglaz L. Ja., Gvaramija A. A. *Algebraic structures in automata and databases theory*. Singapore, River Edge, NJ, World Scientific, 1992. 192 p. (Russ. ed. : Plotkin B. I., Geenglaz L. Ja., Gvaramija A. A. *Elementy algebraicheskoi teorii avtomatov*. Moscow, Vysshaia shkola, 1994. 192 p.)
2. Ulam S. *A Collection of Mathematical Problems*. New York, Interscience Publ., 1960. 150 p. (Russ. ed. : Ulam S. *Nereshennye matematicheskie zadachi*. Moscow, Nauka, 1964. 168 p.)
3. Jonsson B. *Topics in universal algebra. Lecture Notes in Math.* Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1972. 220 p.
4. Molchanov V. A., Khvorostukhina E. V. On problem of concrete characterization of universal hypergraphic automata. *Proc. VII Intern. Sci. Conf. „Computer Science and Information Technologies“*. Saratov, 2016, pp. 284–285 (in Russian).
5. Bretto A. *Hypergraph theory. An Introduction*. Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, Springer, 2013. 133 p. DOI: 10.1007/978-3-319-00080-0.

6. Hartshorne R. *Foundations of Projective Geometry*. New York, ISHI Press, 2009. 190 p. (Russ. ed. : Hartshorne R. *Osnovy proektivnoi geometrii*. Moscow, Mir, 1970. 161 p.)
7. Molchanov A. V. Endomorphism semigroups of weak p-hypergraphs. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2000, vol. 44, no. 3, pp. 77–80.
8. Molchanov A. V. Ob opredeljaemosti gipergraficheskih avtomatov ih vyhodnymi funkcijami [On definability of hypergraphic automata by their exist functions]. *Teoreticheskie problemy informatiki* [Theoretical Problems of Informatics], 1998, iss. 2, pp. 74–84 (in Russian).

Cite this article as:
Molchanov V. A., Khvorostukhina E. V. On Problem of Abstract Characterization of Universal Hypergraphic Automata. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 148–159 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-148-159.

УДК 501.1

РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОРЯДКА НА ЛУЧЕ НОВЫМ МЕТОДОМ

Р. Б. Салимов[1], **Э. Н. Хасанова**[2]

[1]Салимов Расих Бахтигареевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 420043, Россия, Казань, Зеленая, 1, salimov.rsb@gmail.com

[2]Хасанова Энже Назиповна, ассистент кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 420043, Россия, Казань, Зеленая, 1, enkarabasheva@bk.ru

Рассматривается однородная краевая задача Римана с краевым условием на луче — положительной действительной оси с началом в точке с координатой, равной единице, для функции, аналитической в комплексной плоскости с разрезом по указанному лучу. В краевом условии значение искомой аналитической функции в любой точке левого (при движении в положительном направлении) берега разреза представляется как произведение значения заданной функции, называемой коэффициентом, и значения искомой функции в указанной точке правого берега разреза. Предполагая, что модуль коэффициента удовлетворяет условию Гельдера всюду на луче, включая бесконечно удаленную точку, а аргумент коэффициента удовлетворяет условию Гельдера на любой конечной части луча и неограниченно растет как степень логарифма координаты точки луча при неограниченном удалении этой точки от начала луча. Выводится формула, определяющая аналитическую в верхней полуплоскости функцию, мнимая часть которой при стремлении координаты точки луча к бесконечности является бесконечно большой того же порядка, что и аргумент коэффициента краевого условия. Далее строится соответствующая функция в нижней полуплоскости. Использование указанных двух функций позволяет устранить бесконечный разрыв аргумента коэффициента краевого условия аналогично тому, как это делается в случае конечных разрывов этого коэффициента. На основе приемов, применяемых Ф. Д. Гаховым, задача с условием на луче приводится к задаче с краевым условием на всей действительной оси, для точек которой, нележащих на указанном луче, коэффициент краевого условия равен единице. Для решения последней задачи используется метод Ф. Д. Гахова. Найденное решение зависит от произвольной целой функции нулевого порядка, модуль которой подчинен одному условию, в то время как в случае конечного индекса решение задачи зависит от произвольного многочлена степени не выше индекса задачи.

Ключевые слова: краевая задача Римана, аналитическая функция, бесконечный индекс, логарифмический порядок.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-160-171

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть D — область в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, границей которой служит L^* — положительная действительная ось с началом в точке $x = 1$:

© Салимов Р. Б., Хасанова Э. Н., 2017

$1 \leqslant x < \infty$. Требуется определить функцию $\Phi(z)$, аналитическую и ограниченную в области D, если её граничные значения удовлетворяют условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \qquad t \in L^*, \tag{1}$$

где $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ — предельные значения функции $\Phi(t)$ при $z \to t$ слева и справа, когда $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$ соответственно, коэффициент $G(t)$ — заданная функция, удовлетворяющая условиям:

1) $\ln|G(t)|$ удовлетворяет условию Гельдера на L^* — условию $H_{L^*}(\ln|G(t)| \in H_{L^*})$;

2) для $\arg G(t)$ справедливо представление

$$\arg G(t) = \nu^-(\ln t)^\alpha + \nu(t), \qquad t \in L^*, \tag{2}$$

где ν^-, α — заданные числа, $\nu^- > 0$, $\alpha > 0$, $(\ln t)^\alpha > 0$, $\nu(t)$ — заданная функция, $\nu(t) \in H_{L^*}$.

Рассматриваемая задача является задачей с бесконечным индексом, так как $\arg\ G(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

Эта задача впервые была исследована П. Г. Юровым [1] путём построения канонической функции непосредственно из задачи (1), случай, когда условие (1) задано на всей действительной оси рассмотрен в работе П. Ю. Алекны [2] аналогичным способом.

Для решения поставленной задачи применяется основанный на построении вспомогательной аналитической функции, имеющей тот же разрыв, что и $i \arg G(t)$, метод, аналогичный использованному в работах [3,4], в последней из которых рассмотрена задача (1) с бесконечным индексом степенного порядка, в первой — эта задача в случае, когда краевое условие (1) выполняется на всей действительной оси при индексе того же порядка.

В статье [3] указаны основные этапы развития изучаемого научного направления. Ключевая роль в развитии теории краевых задач Римана для аналитических функций принадлежит Ф. Д. Гахову [5], Н. И. Мусхелишвили [6], а также Н. В. Говорову [7], рассмотревшему впервые случай бесконечного индекса.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$, есть функция, непрерывная в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, кроме точек $z = 0$, $z = \infty$.

Взяв произвольное положительное число α, под $(\ln z - i\pi)^\alpha$ будем понимать непрерывную однозначную ветвь, аналитическую в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, кроме точек $z = 0$, $z = \infty$ и точки $z = e^{i\pi}$ в случае, когда число α отличается от натурального, считая, что указанная ветвь принимает положительное значение $(\ln|x|)^\alpha$ при $z = |x|e^{i\pi}$, $|x| > 1$ $(\arg(\ln|x|)^\alpha = 0)$ и $\arg(\ln z - i\pi)^\alpha \to 0$ при $z \to x \to +\infty$.

В дальнейшем нам понадобится представление функции $(\ln z - i\pi)^{\alpha+1}$ для больших положительных значений $z = x$.

При $z = x > e^\pi$ будем иметь

$$(\ln x - i\pi)^{\alpha+1} = (\ln x)^{\alpha+1}\left(1 - \frac{i\pi}{\ln x}\right)^{\alpha+1}, \tag{3}$$

считая, что $(\ln x)^{\alpha+1} > 0$, $\left(1 - \dfrac{i\pi}{\ln x}\right)^{\alpha+1} \to 1$ при $x \to +\infty$.

Пользуясь разложением [8, с. 302]

$$(1+z)^{\alpha_*} = \sum_{j_*=0}^{\infty} \binom{\alpha_*}{j_*} z^{j_*}, \qquad |z| < 1, \tag{4}$$

где α_* — произвольное комплексное число, $\dbinom{\alpha_*}{j_*} = \dfrac{\alpha_*(\alpha_*-1)(\alpha_*-2)\ldots(\alpha_*-j_*+1)}{j_*!}$ при $j_* > 0$, $\dbinom{\alpha_*}{j_*} = 1$ при $j_* = 0$, получим представление второго множителя правой части формулы (3) для $x > e^{\pi}$. Учитывая последнее, для мнимой части функции (3) при $x > e^{\pi}$ получим выражение

$$\operatorname{Im}(\ln x - i\pi)^{\alpha+1} = (\ln x)^{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha+1}{2j+1} \pi\,(-1)^{j+1} \left(\frac{\pi}{\ln x}\right)^{2j}. \tag{5}$$

Будем считать пока $\alpha > 1$. Выберем натуральное число k так, чтобы выполнялось соотношение

$$-3 < \alpha - 2k \leqslant -1 \tag{6}$$

(когда $k \geqslant 2$). В разложении (5) выделим первые k слагаемых и запишем его так

$$\operatorname{Im}(\ln x - i\pi)^{\alpha+1} = -\pi(\alpha+1)(\ln x)^{\alpha} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k-1} \binom{\alpha+1}{2j+1} \pi^{2j+1} (-1)^{j+1} (\ln x)^{\alpha-2j} + r_{\alpha-2k}(x,\alpha), \qquad x > e^{\pi}, \tag{7}$$

где

$$r_{\alpha-2k}(x,\alpha) = (\ln x)^{\alpha-2k} \pi^{2k+1} \sum_{j=k}^{\infty} \binom{\alpha+1}{2j+1} (-1)^{j+1} \left(\frac{\pi}{\ln x}\right)^{2j-2k}. \tag{8}$$

В формуле (7) число α заменим на $\alpha - 2m$, число k — на $k - m$, считая, что m принимает значения $1, 2, \ldots, k-1$. Тогда сумме первых k слагаемых правой части формулы (7) будет соответствовать сумма $k - m$ слагаемых:

$$\sum_{j_1=0}^{k-m-1} \binom{\alpha-2m+1}{2j_1+1} \pi^{j_1+1} (-1)^{j_1+1} (\ln x)^{\alpha-2m-2j_1},$$

в которой будем считать, что $j_1 = j - m$, $j = \overline{m, k-1}$, поэтому формула (7) перейдет в следующую

$$\sum_{j=m}^{k-1} \binom{\alpha-2m+1}{2(j-m)+1} \pi^{2(j-m)+1} (-1)^{j-m+1} (\ln x)^{\alpha-2j} =$$
$$= \operatorname{Im}(\ln x - i\pi)^{\alpha-2m+1} - r_{\alpha-2k}(x, \alpha-2m), \qquad m = \overline{1, k-1}, \qquad x > e^{\pi}, \tag{9}$$

где

$$r_{\alpha-2k}(x,\alpha-2m)=(\ln x)^{\alpha-2k}\,\pi^{2(k-m)+1}\sum_{j=k}^{\infty}\binom{\alpha-2m+1}{2(j-m)+1}(-1)^{j-m+1}\left(\frac{\pi}{\ln x}\right)^{2j-2k} \quad (10)$$

при $j=j_1+m$.

Соотношения (9) будем рассматривать как систему $(k-1)$ уравнений с неизвестными $(\ln x)^{\alpha-2j}$, $j=\overline{1,k-1}$, с треугольной матрицей коэффициентов системы, элементы определителя Δ которой обозначим a_{mj}. Согласно (9) имеем, в частности, $a_{mj}=0$ при $j<m$, $a_{mm}=(\alpha-2m+1)(-\pi)$, $m=\overline{1,k-1}$. Поэтому

$$\Delta=(-\pi)^{k-1}\prod_{m=1}^{k-1}(\alpha-2m+1)\,,$$

причём $\Delta\neq 0$, так как согласно (6) имеем $-3<\alpha-2k$ и $0<\alpha-2(k-1)+1$ (при $k>1$).

Пусть A_{mj} — алгебраическое дополнение для элемента a_{mj} определителя Δ.

Обозначим Δ_j определитель, получаемый из Δ, заменой элементов j-го столбца на соответствующие свободные члены системы (9). Тогда по формулам Крамера выражаем

$$(\ln x)^{\alpha-2j}=\frac{\Delta_j}{\Delta},\qquad j=\overline{1,k-1},\qquad x>e^{\pi},$$

поэтому

$$(\ln x)^{\alpha-2j}=\frac{1}{\Delta}\sum_{m=1}^{k-1}A_{mj}\left[\operatorname{Im}\,(\ln x-i\pi)^{\alpha-2m+1}-r_{\alpha-2k}(x,\alpha-2m)\right],$$
$$j=\overline{1,k-1},\qquad x>e^{\pi}.$$

Последнее выражение подставим в формулу (7), обозначая

$$B_m=\frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{k-1}A_{mj}\binom{\alpha+1}{2j+1}\pi^{2j+1}(-1)^{j+1}\,,$$

получим

$$\operatorname{Im}\left[(\ln x-i\pi)^{\alpha+1}-\sum_{m=1}^{k-1}B_m(\ln x-i\pi)^{\alpha-2m+1}\right]=$$
$$=-\pi(\alpha+1)(\ln x)^{\alpha}+r_{\alpha-2k}(x,\alpha)-\sum_{m=1}^{k-1}B_m r_{\alpha-2k}(x,\alpha-2m),\qquad x>e^{\pi}. \quad (11)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$T_0(z)=(\ln z-i\pi)^{\alpha+1}-\sum_{m=1}^{k-1}B_m(\ln z-i\pi)^{\alpha-2m+1}\,, \quad (12)$$

каждое слагаемое которой есть однозначная ветвь в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, определяемая как указано выше.

Мнимая часть этой функции при $z = |x|e^{i\pi}$, $|x| > 1$, обращается в нуль, а при $z = x$, $x > e^{\pi}$ имеет представление, определяемое формулой (11), в которой все слагаемые правой части, кроме первого, стремятся к нулю при $x \to +\infty$ в силу (6), (8), (10).

Функция (12) здесь играет вспомогательную роль, так как в точке $z = 0$ она имеет особенность. В дальнейшем нам понадобится функция с аналогичными свойствами для точек $z = x$ при достаточно больших значениях $|x|$, которая является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и непрерывной во всех конечных точках действительной оси. В качестве такой функции возьмём

$$T(z) = (\ln(z+i) - i\pi)^{\alpha+1} - \sum_{m=1}^{k-1} B_m \left(\ln(z+i) - i\pi\right)^{\alpha-2m+1}, \tag{13}$$

считая, что $T(z) = T_0(z+i)$, $\operatorname{Im} z > 0$.

Для $\operatorname{Im} T(x)$ при $x > e^{\pi}$ можно получить представление, аналогичное (11). Но проще воспользоваться представлением (11) и учесть, что $\operatorname{Im}\left(T(x) - T_0(x)\right) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Чтобы установить последнее, заметим, что при любом числе $\alpha_1 > 0$ имеем

$$(\ln(x+i) - i\pi)^{\alpha_1} - (\ln x - i\pi)^{\alpha_1} = (\ln x - i\pi)^{\alpha_1} \left[\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{i}{x}\right)}{\ln x - i\pi}\right)^{\alpha_1} - 1\right], \tag{14}$$

здесь в правой части первое слагаемое в квадратных скобках разложим по формуле (4), считая $x > e^{\pi}$, и придём к соотношению

$$[(\ln(x+i) - i\pi)^{\alpha_1} - (\ln x - i\pi)^{\alpha_1}] \sim \frac{i\alpha_1}{x} (\ln x)^{\alpha_1 - 1} \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{15}$$

Аналогично, дифференцируя равенство (14) и учитывая формулу (4), получим соотношение

$$[(\ln(x+i) - i\pi)^{\alpha_1} - (\ln x - i\pi)^{\alpha_1}]'_x \sim -\frac{i\alpha_1}{x^2} (\ln x)^{\alpha_1 - 1} \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{16}$$

Обозначим

$$V(z) = \operatorname{Im}\left(T(z) - T_0(z)\right). \tag{17}$$

Подставим сюда выражения (12), (13). При $z = x > e^{\pi}$ разности одинаковых степеней вида левой части формулы (15) заменим по последней формуле, полагая $\alpha_1 = \alpha - 2m + 1$, $m = \overline{0, k-1}$, и придем к соотношению

$$V(x) \sim \left(\frac{\alpha+1}{x} (\ln x)^{\alpha} - \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\alpha - 2m + 1}{x} (\ln x)^{\alpha - 2m}\right) \sim \frac{\alpha+1}{x} (\ln x)^{\alpha}, \quad x \to +\infty. \tag{18}$$

Используя (16), аналогично получим

$$V'(x) \sim -\frac{\alpha+1}{x^2} (\ln x)^{\alpha}, \qquad x \to +\infty.$$

Отсюда видно, что отношение $\frac{V'(x)}{\left[\frac{\alpha+1}{x^2}(\ln x)^\alpha\right]}$ при $x > e^\pi$ есть непрерывная функция, имеющая конечный предел при $x \to +\infty$. Используя последнее, заключаем [7, с. 127], что $V(x)$ — функция, удовлетворяющая условию Гёльдера в окрестности точки $x = +\infty$ (дифференцируемая в любой конечной точке $x > e^\pi$).

При $z = x = |x|e^{i\pi} < 0$, $|x| > e^\pi$ на основании соотношений, аналогичных (15), (16), получим

$$\begin{aligned} V(x) &\sim -\frac{\alpha+1}{|x|}(\ln|x|)^\alpha, \qquad x \to -\infty, \\ V'(x) &\sim -\frac{\alpha+1}{|x|^2}\left(\ln|x|\right)^\alpha, \qquad x \to -\infty, \end{aligned} \tag{19}$$

и убедимся в том, что функция $V(x)$ удовлетворяет условию Гельдера в окрестности точки $x = -\infty$ (и дифференцируема в любой конечной точке $x < -e^\pi$).

Сумму функций $r_{\alpha-2k}(x,\alpha)$ формулы (11) обозначим

$$R_{\alpha-2k}(x,\alpha) = r_{\alpha-2k}(x,\alpha) - \sum_{m=1}^{k-1} B_m r_{\alpha-2k}(x,\alpha-2m).$$

Эту формулу с учётом (8), (10) запишем так:

$$R_{\alpha-2k}(x,\alpha) = (\ln x)^{\alpha-2k}\sum_{j=k}^{\infty} N_j\left(\frac{\pi}{\ln x}\right)^{2j-2k}, \qquad x > e^\pi, \tag{20}$$

где

$$N_j = -\left(-1\right)^j \pi^{2k+1}\left[\binom{\alpha+1}{2j+1} - \sum_{m=1}^{k-1} B_m \binom{\alpha-2m+1}{2(j-m)+1}(-1)^m \pi^{-2m}\right].$$

При $0 < \alpha \leqslant 1$ мы должны взять $k = 1$, и в предыдущих формулах будут отсутствовать конечные суммы, в которых $m = \overline{1, k-1}$, при $\alpha = 1$ дополнительно будем иметь $r_{\alpha-2k}(x,\alpha) = 0$ и $R_{\alpha-2k}(x,\alpha) = 0$, причём последние два равенства выполняются и в случае $\alpha = 2k-1 > 1$. В дальнейшем будем считать, что $\alpha-2k < -1$, при $\alpha = 2k-1$ надо положить $r_{\alpha-2k}(x,\alpha-2m) = 0$, $m = \overline{0, k-1}$.

В силу (20) получаем

$$R_{\alpha-2k}(x,\alpha) = \frac{1}{(\ln x)^{2k-\alpha}} M(x), \qquad x > e^\pi, \tag{21}$$

где $M(x)$ — сумма ряда правой части формулы (20),

$$M'(x) = -\frac{\pi}{x\left(\ln x\right)^2}\sum_{j=k+1}^{\infty} N_j\left(2j-2k\right)\left(\frac{\pi}{\ln x}\right)^{2j-2k-1}.$$

С учётом (12), (20) формулу (11) можно представить в виде

$$\operatorname{Im} T_0(x) = -\pi(\alpha+1)\left(\ln x\right)^\alpha + R_{\alpha-2k}(x,\alpha), \qquad x > e^\pi.$$

Поэтому, принимая во внимание (17), будем иметь

$$\operatorname{Im} T(x) = V(x) - \pi(\alpha+1)\left(\ln x\right)^\alpha + R_{\alpha-2k}(x,\alpha), \qquad x > e^\pi. \tag{22}$$

При $z = x = |x|e^{i\pi} < 0$, $|x| > e^{\pi}$ согласно (12) получаем $\operatorname{Im} T_0(x) = 0$ и с учётом (17) приходим к равенству

$$\operatorname{Im} T(x) = V(x), \qquad x < -e^{\pi}. \tag{23}$$

Таким образом, в случае $\alpha > 0$ приходим к следующей лемме.

Лемма 1. *Для значений мнимой части аналитической в полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$ *функции* $T(z)$ *формулы* (13) *при* $z = x$, $|x| > e^{\pi}$ *справедливы представления* (22), (23), *в которых* $V(x)$ *— функция, удовлетворяющая условию Гельдера и обращающаяся в нуль на бесконечности,* $R_{\alpha-2k}$ *выражается формулой* (21) *и исчезает при натуральном числе* α.

Наряду с функцией $T(x)$ формулы (13) в дальнейшем нами будет использована аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ функция, определяемая формулой [6, с. 140, 141]

$$\overline{T}(z) = \overline{T(\overline{z})}. \tag{24}$$

Для точек действительной оси $z = \overline{z} = x$ здесь имеем $\overline{T}(x) = \overline{T(x)}$, поэтому

$$\operatorname{Im} \overline{T}(x) = -\operatorname{Im} T(x). \tag{25}$$

Полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$ будем обозначать D^+, D^- соответственно.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Значения искомой функции $\Phi(z)$ будем обозначать $\Phi^+(z) = \Phi(z)$ при $\operatorname{Im} z > 0$, $\Phi^-(z) = \Phi(z)$ при $\operatorname{Im} z < 0$. Для предельных значений этих функций при $z \to t < 1$ будем иметь $\Phi^+(t) = \Phi^-(t)$, следовательно, как и в [5, с. 440], с учётом (1) приходим к заключению, что искомые функции $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ удовлетворяют краевому условию. заданному на всей действительной оси L

$$\Phi^+(t) = G_0(t)\Phi^-(t), \qquad t \in L, \tag{26}$$

где

$$G_0(t) = G(t), \qquad t \in L^*,$$
$$G_0(t) = 1, \qquad t \in L' = L \setminus L^*.$$

Здесь будем считать, что

$$\arg G_0(t) = \arg G(t), \qquad t \in L^*, \tag{27}$$
$$\arg G_0(t) = 0, \qquad t \in L'. \tag{28}$$

Для простоты предположим, что слагаемое $\nu(t)$ формулы (2) удовлетворяет условиям

$$\nu(1) = \nu(1+0) = 0, \qquad \nu(+\infty) = 0, \tag{29}$$

кроме того,

$$|G(1)| = |G(1+0)| = 1, \qquad |G(+\infty)| = 1. \tag{30}$$

Используя функции $T(z)$, $\overline{T}(z)$, определяемые формулами (13), (24) соответственно, с учётом (25) краевое условие (26) представим следующим образом:

$$\Phi^+(t)e^{\beta T(t)} = G_1(t)\Phi^-(t)e^{\beta\overline{T}(t)}, \qquad t \in L, \tag{31}$$

где

$$G_1(t) = G_0(t)\frac{e^{\beta T(t)}}{e^{\beta\overline{T}(t)}} = |G_0(t)|e^{i(\arg G_0(t)+2\beta\operatorname{Im}T(t))},$$

β — действительная постоянная.

Принимая во внимание (2), (22), (27), выберем постоянную β так, чтобы

$$\nu^- - 2\beta(\alpha+1)\pi = 0,$$

тогда в силу вышеуказанных формул для $\arg G_1(t) = \arg G_0(t) + 2\beta\operatorname{Im}T(t)$, $t \in L$, получим выражение

$$\arg G_1(t) = \nu(t) + 2\beta V(t) + 2\beta R_{\alpha-2k}(t,\alpha), \qquad t > e^{\pi}, \tag{32}$$

и на основании (23), (28) будем иметь

$$\arg G_1(t) = 2\beta V(t), \qquad t < -e^{\pi}. \tag{33}$$

Далее по известным значениям $\arg G_1(t)$, как и в книге [5, с. 119], находим функцию

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln G_1(\tau)\frac{d\tau}{\tau - z}, \tag{34}$$

учитывая, что при $\operatorname{Im} z \neq 0$ несобственный интеграл правой части сходится, так как имеют место соотношения (21), (32), (33), (18), (19) и $\alpha - 2k < -1$.

Переходя в последней формуле к пределу при $z \to t \in L$, $t \neq \infty$, получим

$$\Gamma^{\pm}(t) = \pm\frac{1}{2}\ln G_1(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln G_1(\tau)\frac{d\tau}{\tau - t}. \tag{35}$$

Здесь верхние знаки относятся к случаю $\operatorname{Im} z > 0$, нижние – к случаю $\operatorname{Im} z < 0$, сингулярный интеграл последней формулы удовлетворяет условию Гельдера на любом конечном интервале действительной оси L, так как этим свойством обладает его плотность $\ln G_1(\tau)$ [6, с. 61]. Принимая во внимание формулы (32), (33) и представление (21), можно показать, что сингулярный интеграл формулы (35) есть функция непрерывная в окрестности точки $t = \infty$ и имеющая конечный предел при $t \to \infty$. (При $\alpha = 2k - 1 \geqslant 1$ сказанное является следствием того, что $\ln G_1(t) \in H_L$, так как $R_{\alpha-2k}(t,\alpha)$=0.) Поэтому функции $\Gamma^{\pm}(t)$ формулы (35) являются непрерывными, ограниченными на L функциями, а $\Gamma^+(z)$, $\Gamma^-(z)$, определяемые по формуле (34) соответственно при $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$, представляют собой аналитические функции, ограниченные в соответствующих полуплоскостях.

Согласно (35) имеем

$$\Gamma^+(t) - \Gamma^-(t) = \ln G_1(t), \qquad \frac{e^{\Gamma^+(t)}}{e^{\Gamma^-(t)}} = G_1(t).$$

Отсюда, обозначая $X(z) = e^{\Gamma(z)}$, $X^{\pm}(z) = e^{\Gamma^{\pm}(z)}$, получим $X^{+}(t) = G_1(t)X^{-}(t)$.

Учитывая последнее, краевое условие (31) запишем в виде

$$\frac{\Phi^{+}(t)e^{\beta T(t)}}{X^{+}(t)} = \frac{\Phi^{-}(t)e^{\beta \overline{T}(t)}}{X^{-}(t)}, \qquad t \in L.$$

Отсюда, обозначая

$$T_*(z) = \begin{cases} T(z), & \operatorname{Im} z \geqslant 0, \\ \overline{T}(z), & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

приходим к заключению, что выражение

$$\frac{\Phi(z)e^{\beta T_*(z)}}{X(z)} = F(z) \tag{36}$$

является целой функцией, причём

$$F(t) = \frac{\Phi^{+}(t)e^{\beta T(t)}}{X^{+}(t)}, \qquad t \in L^*. \tag{37}$$

Если задача (1) имеет ограниченное решение $\Phi(z)$ в области D, то, замечая, что функции $\Gamma^{+}(z)$, $\Gamma^{-}(z)$ являются ограниченными в областях соответственно D^{+}, D^{-} функциями, заключаем, что функция $[X(z)]^{-1} = e^{-\Gamma(z)}$ будет ограниченной в области D, следовательно, существует постоянная $C > 0$, для которой справедливо неравенство

$$\left|\frac{\Phi(z)}{X(z)}\right| < C, \qquad z \in D.$$

При этом согласно (36) будем иметь

$$|F(z)| < Ce^{\beta \operatorname{Re} T_*(z)}, \qquad z \in D, \tag{38}$$

а из формулы (37) получим

$$|F(t)| < Ce^{\beta \operatorname{Re} T(t)}, \qquad t \in L^*. \tag{39}$$

На основании формулы (38) с учётом (13) приходим к выводу, что порядок целой функции $F(z)$ равен нулю [9, с. 245; 10, с. 11]. Эта функция удовлетворяет условию (39). В силу (36) решение рассматриваемой задачи выражается формулой

$$\Phi(z) = e^{-\beta T_*(z)}X(z)F(z). \tag{40}$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Если краевая задача* (1) *имеет ограниченное решение, то оно представляется формулой* (40)*, в которой* $F(z)$ *есть произвольная целая функция нулевого порядка, удовлетворяющая условию* (39).

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2. *Если $F(z)$ — любая целая функция нулевого порядка, удовлетворяющая условию* (39)*, то ограниченное решение краевой задачи* (1) *определяется формулой* (40).

Последняя теорема доказывается аналогично тому, как это сделано в работе [7, с. 121] и статье [3].

Полученные результаты остаются в силе и в случае, когда α — натуральное число, при этом в них произойдут очевидные изменения, о которых было сказано выше.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, рассматриваемая задача (1) имеет решение, определяемое теоремой 2. Это решение содержит произвольную целую функцию нулевого порядка, удовлетворяющую единственному действительному условию (39).

Следовательно, задача имеет бесконечное множество различных решений.

Замечание. Условие (29), (30) не ограничивают общности решения задачи. При их невыполнении решение задачи (1) с помощью методов, аналогичных указанным в книге [5, с. 428–436], можно привести к рассмотренному в данной статье случаю с новой искомой функцией, для которой точка $z = 1$ может оказаться особой и в ней функция может обращаться в бесконечность степенного порядка при «неудачном» задании $\nu(t)$ в окрестности точки $t = 1$ [7, с. 114, условие $-1 < \varphi(t_0) \leqslant 0$].

В случае, когда для точки $t = 1$ условия (29), (30) не выполняются, решение (40) остаётся в силе, его поведение вблизи точки $z = 1$ легко установить непосредственно, учитывая, что функция $X(z) = e^{\Gamma(z)}$ выражается через интеграл типа Коши, плотность которого $\ln G_1(t)$ в точке $t = 1$ имеет разрыв первого рода и для указанного интеграла справедливо известное представление вблизи точки $z = 1$ [5, с. 68].

Библиографический список

1. *Юров П. Г.* Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического типа // Изв. вузов. Матем. 1966. № 2. С. 158–163.
2. *Алекна П. Ю.* Об однородной краевой задаче Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости // Литовский матем. сб. 1973. Т. XIII, № 3. С. 5–13.
3. *Салимов Р. Б., Карабашева Э. Н.* Новый подход к решению краевой задачи Римана с бесконечным индексом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 2. С. 155–165.
4. *Салимов Р. Б.* О новом подходе к решению краевой задачи Римана с условием на луче в случае бесконечного индекса // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 1. С. 29–33. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-29-33.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968. 511 с.
7. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М. : Наука, 1986. 289 с.

8. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций : в 2 т. М. : Наука, 1968. Т. 1. 486 с.
9. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций : в 2 т. М. : Наука, 1968. Т. 2. 624 с.
10. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М. : Гостехиздат, 1956. 632 с.

Образец для цитирования:
Салимов Р. Б., Хасанова Э. Н. Решение однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка на луче новым методом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 160–171. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-160-171.

The Solution of the Homogeneous Boundary Value Problem of Riemann with Infinite Index of Logarithmic Order on the Beam by a New Method

R. B. Salimov[1], E. N. Khasanova[2]

[1]Rasih B. Salimov, ORCID: 0000-0002-4717-3676, Kazan State Architecture and Building University, 1, Zelenaya str., Kazan, Russia, 420043, salimov.rsb@gmail.com
[2]Enzhe N. Khasanova, ORCID: 0000-0002-0067-2224, Kazan State Architecture and Building University, 1, Zelenaya str., Kazan, Russia, 420043, enkarabasheva@bk.ru

In this paper we consider the homogeneous Riemann boundary value problem with infinite index of logarithmic order and boundary condition on the unlimited ray. This ray goes by the positive real axis and has a vertex at $(1, 0)$. We solve the problem for analytic function with the cut along the ray. The value of the function at any point of the left bank equals the product of the coefficient and the value of the function at the corresponding point of the right bank of the cut. Let the modulus of the coefficient meet the Holder condition at each point of the ray. Let the argument of the coefficient meet the Holder condition at each point of the finite part of the ray. Let the argument of the coefficient come arbitrarily close to infinity with the logarithmic order. We obtain the formula of analytic on the upper half-plane function. The imaginary component of this function is infinitely large when the point of the ray tends to infinity. The order of the imaginary component of this function at infinity is equal to the order of the coefficient. Then we obtain the formula of analytic on the lower half-plane function. These two functions permit us to eliminate the infinite discontinuity of the argument of the coefficient of the boundary condition exactly as in the case of finite discontinuities of coefficient. The problem with the condition on the ray is reduced to the problem with the boundary condition on the real axis. We solve the latter problem by the Gakhov method. The solution depends on an arbitrary entire function with zero order. The modulus of the solution meet one and only one condition.

Key words: Riemann boundary value problem, analytic function, infinite index of logarithmic order.

References

1. Yurov P. G. The homogeneous Riemann boundary value problem with an infinite index of logarithmic type. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1966, no. 2, pp. 158–163 (in Russian).
2. Alekna P. Ju. The homogeneous Riemann boundary value problem with infinite index of logarithmic order for the half-plane. *Litovsk. Mat. Sb.*, 1973, vol. 13, no. 3, pp. 5–13 (in Russian).

3. Salimov R. B., Karabasheva E. N. The new approach to solving the Riemann boundary value problem with infinite index. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 2, pp. 155–165 (in Russian).
4. Salimov R. B. About new approach to solution of Riemann's boundary value problem with condition on the half-line in case of infinite index. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 1, pp. 29–33 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-29-33.
5. Gakhov F. D. *Boundary value problems*. Moscow, Nauka, 1977. 640 p. (in Russian).
6. Muskhelishvili N. I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow, Nauka, 1968. 511 p. (in Russian).
7. Govorov N. V. *Riemann's boundary problem with infinite index*. Moscow, Nauka, 1986. 289 p. (in Russian).
8. Markushevich A. I. *The theory of analytic functions* : in 2 vol. Moscow, Nauka, 1968, vol. 1. 486 p. (in Russian).
9. Markushevich A. I. *The theory of analytic functions* : in 2 vol. Moscow, Nauka, 1968, vol. 2. 624 p. (in Russian).
10. Levin B. Ya. *Distribution of zeros of entire functions*. Moscow, Gostechizdat, 1956. 632 p. (in Russian).

Cite this article as:
Salimov R. B., Khasanova E. N. The Solution of the Homogeneous Boundary Value Problem of Riemann with Infinite Index of Logarithmic Order on the Beam by a New Method. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 160–171 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-160-171.

УДК 517.9

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ СТЕПАНОВА

И. И. Струкова

Струкова Ирина Игоревна, кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный университет, 394036, Россия, Воронеж, Университетская пл., 1, irina.k.post@yandex.ru

В статье рассматриваются пространства Степанова функций, определенных на $\mathbb{R}$ со значениями в комплексном банаховом пространстве. Вводятся понятия медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций из пространства Степанова. Основные результаты статьи связаны с гармоническим анализом периодических на бесконечности функций из пространства Степанова. Вводится понятие обобщенного ряда Фурье, коэффициенты которого являются медленно меняющимися на бесконечности функциями (не обязательно постоянными). Получен ряд аналогов классических результатов о суммируемости ряда Фурье методом Чезаро (теоремы 2 и 3). Результаты статьи получены с использованием теории изометрических представлений.

Ключевые слова: банахово пространство, $L^1(\mathbb{R})$-модуль, пространство Степанова, медленно меняющаяся на бесконечности функция, периодическая на бесконечности функция, ряд Фурье.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-172-182

1. ОСНОВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть X — комплексное банахово пространство, $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X. Символом $L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$ обозначим пространство локально суммируемых (измеримых по Бохнеру) на $\mathbb{R}$ функций со значениями в банаховом пространстве X. Через $L^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty]$, обозначим банахово пространство функций $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$, для которых конечна величина (принимаемая за норму в соответствующем пространстве)

$$\|x\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \|x(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty), \qquad \|x\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|_X, \quad p = \infty.$$

Если $X = \mathbb{C}$, то символ X в обозначениях этих пространств будет опускаться.

Через $S^p(\mathbb{R}, X)$, где $p \in [1, \infty)$, будет обозначаться пространство Степанова [1], состоящее из функций $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$, для которых конечна величина

$$\|x\|_{S^p} = \sup_{s \in \mathbb{R}} \left(\int\limits_0^1 \|x(s+t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, \qquad p \in [1, \infty).$$

Пространства Степанова играют важную роль при изучении дифференциальных уравнений в банаховом пространстве [2, 3].

© Струкова И. И., 2017

Также рассматриваются подпространства $C_b(\mathbb{R}, X)$ и $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ пространства $L^\infty(\mathbb{R}, X)$ соответственно непрерывных ограниченных и равномерно непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_X$.

В $S^p(\mathbb{R}, X)$ определена и ограничена группа $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, операторов сдвигов функций

$$(S(t)x)(s) = x(s+t), \qquad s, t \in \mathbb{R}, \qquad x \in S^p(\mathbb{R}, X).$$

Для любых функций $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in S^p(\mathbb{R}, X)$ их свертка

$$(f * x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)(S(-\tau)x)(t)d\tau, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

принадлежит $S^p(\mathbb{R}, X)$. Через $S^p_c(\mathbb{R}, X)$ обозначим замкнутое подпространство из $S^p(\mathbb{R}, X)$ вида $\{x \in S^p(\mathbb{R}, X)$: функция $t \mapsto S(t)x : \mathbb{R} \to S^p(\mathbb{R}, X)$ непрерывна$\}$. Через $S^p_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим наименьшее замкнутое подпространство из $S^p(\mathbb{R}, X)$, содержащее все функции φx, $x \in S^p(\mathbb{R}, X)$, $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, X)$, $\operatorname{supp}\varphi$ — компакт.

Если $X = \mathbb{C}$, то вместо $S^p(\mathbb{R}, X)$ будем писать просто $S^p(\mathbb{R})$.

2. О ГАРМОНИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВЕКТОРОВ

Пусть $\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство и $\operatorname{End}\mathscr{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathscr{X}$. Будем считать, что $\mathscr{X}$ является невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем [4, 5], структура которого ассоциирована с некоторым ограниченным изометрическим представлением $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}$. Это означает, что выполняются два свойства следующего предположения:

Предположение 1. *Для банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathscr{X}$ выполняются следующие условия:*

1) *из равенства $fx = 0$, справедливого для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, следует, что вектор $x \in \mathscr{X}$ — нулевой (свойство невырожденности банахова модуля $\mathscr{X}$);*
2) *для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathscr{X}$, $t \in \mathbb{R}$, имеют место равенства (свойство ассоциированности модульной структуры на $\mathscr{X}$ с представлением $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}$):*

$$T(t)(fx) = (T(t)f)x = f(T(t)x).$$

Далее символом $T(f) \in \operatorname{End}\mathscr{X}$ обозначается оператор свертки $T(f)x = fx$ вектора $x \in \mathscr{X}$ с функцией $f \in L^1(\mathbb{R})$. Если $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}$ — сильно непрерывное ограниченное представление, то формула

$$T(f)x = fx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)xdt, \qquad f \in L^1(\mathbb{R}), \qquad x \in \mathscr{X}, \tag{2}$$

определяет на $\mathscr{X}$ структуру банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля, удовлетворяющего условиям предположения 2, причем эта модульная структура ассоциирована с представлением T [6].

Замечание 1. С каждым невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем $\mathscr{X}$ ассоциировано единственное представление $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$ [2, 4, 6–9]. Чтобы это подчеркнуть, иногда используется обозначение $(\mathscr{X}, T)$.

Определение 1. Вектор из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathscr{X}$ назовем *T-непрерывным*, если функция $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathscr{X}$, $\varphi_x(t) = T(t)x$, $t \in \mathbb{R}$, непрерывна в нуле (и, значит, непрерывна на $\mathbb{R}$).

Совокупность всех T-непрерывных векторов из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathscr{X}$ обозначим через $\mathscr{X}_c$. Непосредственно из последнего определения следует, что $\mathscr{X}_c$ — замкнутый подмодуль из $\mathscr{X}$, причем представление T на нем сильно непрерывно.

Пространства $S^p(\mathbb{R}, X)$ являются банаховыми $L^1(\mathbb{R})$-модулями с модульной структурой, определяемой равенствами (1), и эта структура ассоциирована с представлением (группой сдвигов функций) $S : \mathbb{R} \to \operatorname{End} S^p(\mathbb{R}, X)$. Далее через $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье

$$\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

функции $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Определение 2. Пусть $\omega > 0$. Вектор $x_0 \in \mathscr{X}$ назовем *ω-периодическим* (относительно представления T), если $T(\omega)x_0 = x_0$.

Множество ω-периодических векторов обозначим через $\mathscr{X}_\omega = \mathscr{X}_\omega(T)$. Оно образует замкнутое подпространство в $\mathscr{X}$, инвариантное относительно операторов $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Из равенств $T(t+\omega)x - T(t)x = T(t)(T(\omega)x - x) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, для любого $x \in \mathscr{X}_\omega$ следует, что функция $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathscr{X}$, $\varphi_x(t) = T(t)x$, является непрерывной периодической функцией. Рассмотрим ее ряд Фурье $\varphi_x(t) \sim \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}$, где $x_n = \frac{1}{\omega} \int\limits_0^\omega T(\tau) x e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau} d\tau$, $n \in \mathbb{Z}$.

Определение 3. Ряд

$$x \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \tag{4}$$

назовем *рядом Фурье вектора* $x \in \mathscr{X}_\omega$, а векторы x_n, $n \in \mathbb{Z}$, — *коэффициентами Фурье вектора* x.

Лемма 1. *Для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathscr{X}_\omega$ вектор $fx \in \mathscr{X}_\omega$ и имеет ряд Фурье вида $fx \sim \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) x_k$.*

Доказательство. Непосредственно из формулы (2) следует, что $fx \in \mathscr{X}_\omega$. Далее вектор fx обозначим через y. Для коэффициентов Фурье периодического вектора y

справедлива формула $y_k = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\tau)(fx)e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}\tau}d\tau$. Используя формулы (2) и (3) и меняя порядок интегрирования, получаем следующую цепочку равенств:

$$y_k = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\tau)\left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(s)T(-s)xds\right)e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}\tau}d\tau =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(s)T(\tau-s)xds\right)e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}\tau}d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(s)\left(\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\tau-s)xe^{-i\frac{2\pi k}{\omega}\tau}d\tau\right)ds =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(s)\left(\frac{-e^{i\frac{2\pi k}{\omega}s}}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)xe^{-i\frac{2\pi k}{\omega}t}dt\right)ds = \int\limits_{\mathbb{R}} f(s)x_k e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}s}ds = \widehat{f}\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right)x_k.$$

□

Отметим работы [8, 9], в которых многие классические результаты теории рядов Фурье для периодических функций обобщались на векторы из банаховых пространств, в которых действует однопараметрическая группа операторов. Подпространство $\mathscr{X}_\omega$ периодических векторов и следующая лемма фактически рассматривались в [10, теорема 16.7.2]. Из указанных источников следует

Лемма 2. *Пусть $x \in \mathscr{X}_\omega$. Тогда операторы*

$$P_n x = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\tau)xe^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}d\tau,\ n \in \mathbb{Z},$$

являются проекторами, $x_n = P_n x$, $n \in \mathbb{Z}$, — коэффициенты Фурье вектора x, $T(t)P_n = e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}P_n$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, и $\|P_n\| = 1$, если $P_n \neq 0$.

Лемма 3. *Для любого $x \in \mathscr{X}_\omega$ справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = 0,$$

где x_n, $n \in \mathbb{Z}$, — коэффициенты Фурье вектора x.

Доказательство. Возьмем произвольный вектор x из области определения $D(A)$ генератора A («infinitesimal generator» в [11]) полугруппы операторов T. Справедлива следующая оценка:

$$\|x_n\| = \|\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\tau)xe^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}d\tau\| = \|\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\tau)Ax\frac{1}{-i\frac{2\pi n}{\omega}}e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}d\tau\| \leqslant \frac{\|Ax\|}{|n|},\quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = 0$. Поскольку $D(A)$ плотно в $\mathscr{X}_\omega$, то свойство $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = 0$ верно для любого $x \in \mathscr{X}_\omega$. □

Определение 4. Функция $\omega(\cdot, x) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\omega(\delta, x) = \sup_{|t|\leqslant\delta}\|T(t)x - x\|$, называется *модулем непрерывности* вектора x.

Теорема 1. *Для любого $x \in \mathscr{X}_\omega$ с рядом Фурье вида* (4) *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) x_k\| = 0.$$

Доказательство. Возьмем произвольный периодический вектор $x \in \mathscr{X}_\omega$. Рассмотрим функции $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ следующего вида:

$$f_n(t) = \frac{\omega \sin^2 \frac{(n+1)\pi t}{\omega}}{4\pi^4 t^2 (n+1)}, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что преобразование Фурье данных функций имеет вид

$$\widehat{f}_n(\lambda) = \begin{cases} 1 - \frac{\omega|\lambda|}{2\pi(n+1)}, & |\lambda| \leqslant \frac{2\pi(n+1)}{\omega}, \\ 0, & |\lambda| > \frac{2\pi(n+1)}{\omega}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тогда

$$\widehat{f}_n\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{n+1}, & |k| \leqslant n+1, \\ 0, & |k| > n+1, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

и из леммы 1 следует, что свертка функции f_n с вектором x определяется равенством

$$f_n x = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) x_k, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда имеет место оценка

$$\left\| x - \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) x_k \right\| = \|x - f_n x\| = \left\| \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(\tau) x \, d\tau - \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(\tau) T(-\tau) x \, d\tau \right\| =$$

$$= \left\| \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(\tau) \left(x - T(-\tau)x\right) d\tau \right\| \leqslant \left\| \int\limits_{-\delta_n}^{\delta_n} f_n(\tau) \omega(\delta_n, x) d\tau \| + 2\|x\| \| \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta_n,\delta_n)} f_n(\tau) d\tau \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\delta_n, x) \int\limits_{-\delta_n}^{\delta_n} f_n(\tau) d\tau + 2\|x\| \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta_n,\delta_n)} f_n(\tau) \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\delta_n, x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(\tau) \, d\tau + \frac{\omega\|x\|}{2\pi^4(n+1)} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta_n,\delta_n)} \frac{\sin^2 \frac{(n+1)\pi\tau}{\omega}}{\tau^2} \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\delta_n, x) + \frac{\omega\|x\|}{\pi^4(n+1)} \int\limits_{\delta_n}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^2} \leqslant \omega(\delta_n, x) + \frac{\omega\|x\|}{\pi^4(n+1)\delta_n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

для любой последовательности $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющей условиям $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)\delta_n = \infty$. □

3. МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИЕСЯ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ ИЗ ПРОСТРАНСТВ СТЕПАНОВА

Определение 5. Функция $x \in S_c^p(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности,* если $(S(t)x - x) \in S_0^p(\mathbb{R}, X)$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Например, медленно меняющейся на бесконечности является функция $x \in \in S_c^p(\mathbb{R}, X)$ вида $x(t) = c + x_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где c — вектор из банахова пространства X и x_0 — любая функция из $S_0^p(\mathbb{R}, X)$. В теории дифференциальных уравнений [12, п. 3.6.3] использовалось эквивалентное (если рассматривать функции из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$) определение, при этом функции назывались *стационарными на бесконечности.* Медленно меняющиеся функции находят свое применение в теории тригонометрических рядов [13], в теории вероятности [14], а также в теории целых функций [15].

Определение 6. Функция $x \in S_c^p(\mathbb{R}, X)$ называется *периодической на бесконечности периода* $\omega > 0$ *(ω-периодической на бесконечности)*, если $(S(\omega)x - x) \in \in S_0^p(\mathbb{R}, X)$ или, что эквивалентно, $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t+\omega) - x(t)\|_X = 0$.

Таким образом, каждая ω-периодическая на бесконечности функция x является решением разностного уравнения вида $x(t+\omega) - x(t) = y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $y \in S_0^p(\mathbb{R}, X)$, а каждая медленно меняющаяся на бесконечности функция является периодической на бесконечности любого периода. В [16,17] получены аналоги теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье для непрерывных периодических на бесконечности функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье и с рядами Фурье, суммируемыми с весом. В работах [18,19] изучаются вопросы гармонического анализа непрерывных периодических на бесконечности функций нескольких переменных. В [20] описан спектр алгебры непрерывных периодических на бесконечности функций, определенных на полуоси.

Множества медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций из $S_c^p(\mathbb{R}, X)$ обозначим через $S_{sl,\infty}^p = S_{sl,\infty}^p(\mathbb{R}, X)$ и $S_{\omega,\infty}^p = S_{\omega,\infty}^p(\mathbb{R}, X)$ соответственно. Отметим,что они оба образуют линейные замкнутые подпространства банахова пространства $S_c^p(\mathbb{R}, X)$. Таким образом, имеют место включения $S_{sl,\infty}^p(\mathbb{R}, X) \subset \subset S_{\omega,\infty}^p(\mathbb{R}, X) \subset S_c^p(\mathbb{R}, X)$, при этом все указанные пространства инвариантны относительно операторов $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Символом $S_\omega^p(\mathbb{R}, X)$ обозначим подпространство банахова пространства $S_c^p(\mathbb{R}, X)$, состоящее из ω-периодических функций, т. е. функций $x \in S_c^p(\mathbb{R}, X)$, для которых выполнено условие $S(\omega)x = x$. Примерами периодических на бесконечности функций из $S_c^p(\mathbb{R}, X)$ являются:

1) предельно периодические функции, т. е. функции $x : \mathbb{R} \to X$, представимые в виде $x = y + y_0$, где $y \in S_\omega^p(\mathbb{R}, X)$, $y_0 \in S_0^p(\mathbb{R}, X)$;

2) функция $\overline{x} \in S_c^p(\mathbb{R}, X)$ такая, что она совпадает с $x \in S_\omega^p(\mathbb{R}, X)$ на $\mathbb{R}_+$ и $\lim\limits_{t\to-\infty} \|\overline{x}(t)\|_X = 0$;

3) любая функция из $S_{sl,\infty}^p(\mathbb{R}, X)$;

4) любая функция $x \in S_c^p(\mathbb{R}, X)$, представимая в виде $x = \sum\limits_{k=-n}^{n} x_k(t) e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}$, $t \in \mathbb{R}$,

$n \in \mathbb{N}$, где $x_k \in S^p_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $k \in \mathbb{Z}$. Далее введем определение рядов Фурье функций из $S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

Определение 7. *Каноническим рядом Фурье функции* $x \in S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ будем называть ряд вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n(t) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t \in \mathbb{R},$$

где функции $x_n : \mathbb{R} \to X$, $n \in \mathbb{Z}$, определяются формулами

$$x_n(t) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega x(t+\tau) e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)} d\tau,\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

и называются *каноническими коэффициентами Фурье функции* x.

Ясно, что если $x \in C_\omega(\mathbb{R}, X)$, то $x_k(t) \equiv x_k = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega x(\tau) e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}\tau} d\tau$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, — обычные коэффициенты Фурье непрерывной периодической функции x.

Определение 8. *Обобщенным рядом Фурье функции* $x \in S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ называется любой ряд вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n(t) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

где y_n, $n \in \mathbb{Z}$, — такие функции из $S^p(\mathbb{R}, X)$, для которых $y_n - x_n \in S^p_0(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, а функции x_n, $n \in \mathbb{Z}$, определяются формулой (5).

Лемма 4. *Канонические коэффициенты Фурье* x_n, $n \in \mathbb{Z}$ (*определенные формулой* (5)) *являются медленно меняющимися на бесконечности функциями из* $S^p_c(\mathbb{R}, X)$, *т. е.* $x_n \in S^p_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Утверждение леммы следует из равенств

$$x_n(t+\omega) - x_n(t) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega (S(\omega)x - x)(t+\tau) e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)}\, d\tau, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Непосредственно из определения 8 и леммы 4 следует, что коэффициенты любого обобщенного ряда Фурье обладают свойством: $y_n \in S^p_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Введем в рассмотрение функции e_k, $k \in \mathbb{Z}$, вида $e_k(t) = e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}$, $t \in \mathbb{R}$. Основными результатами данной статьи являются следующие две теоремы:

Теорема 2. *Для любой функции* $x \in S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ *существует последовательность функций* (x^0_n) *из* $S^p_0(\mathbb{R}, X)$ *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) x_k e_k + x^0_n\|_{S^p} = 0,$$

где x_k, $k \in \mathbb{Z}$, — *канонические коэффициенты Фурье функции* x.

Теорема 3. *Для любой функции $x \in S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность функций (x^0_n) из $S^p_0(\mathbb{R}, X)$ и последовательность функций (y_n) из $S^p_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ такие, что*

$$\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) y_k e_k + x^0_n\|_{S^p} = 0.$$

При этом каждая из функций y_k ($k \in \mathbb{Z}$) эквивалентна функции x_k, определяемой формулой (5)*, и допускает продолжение на всю комплексную плоскость до целой функции экспоненциального типа не выше ε.*

Определение 9. Будем говорить, что обобщенный ряд Фурье (6) периодической на бесконечности функции $x \in S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ *сходится* к x *относительно подпространства* $S^p_0(\mathbb{R}, X)$, если существует последовательность функций (x^0_n) из $S^p_0(\mathbb{R}, X)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| x - \sum\limits_{k=-n}^{n} y_k e_k + x^0_n \right\|_{S^p} = 0.$

Важно отметить, что данное определение корректно, т. е. сходимость не зависит от выбора обобщенного ряда Фурье функции x. Это объясняется тем, что $y_n - x_n \in S^p_0(\mathbb{R}, X)$, где x_n, $n \in \mathbb{Z}$, — канонические коэффициенты Фурье функции x, определяемые по формуле (5).

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Рассмотрим фактор-пространство $\mathscr{X} = S^p_c(\mathbb{R}, X)/S^p_0(\mathbb{R}, X)$, которое является банаховым пространством с нормой $\|\widetilde{x}\| = \inf\limits_{y \in x + S^p_0(\mathbb{R}, X)} \|y\|$, где $\widetilde{x} = x + S^p_0(\mathbb{R}, X)$ — класс эквивалентности, содержащий функцию $x \in S^p_c(\mathbb{R}, X)$. Отметим, что банахово пространство $\mathscr{X}$ становится банаховой алгеброй, если умножение вводится следующим образом: $\widetilde{x}\widetilde{y} = \widetilde{xy}$, $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathscr{X}$. В $\mathscr{X}$ действует сильно непрерывная изометрическая группа операторов $\widetilde{S} : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$, действующая по правилу $\widetilde{S}(t)\widetilde{x} = \widetilde{S(t)x} = S(t)x + S^p_0(\mathbb{R}, X)$, $x \in S^p_c(\mathbb{R}, X)$, $t \in \mathbb{R}$. Фактор-пространство $\mathscr{X}$ наделяется структурой банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля с помощью формулы $f\widetilde{x} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)\widetilde{S}(-\tau)\widetilde{x}d\tau$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widetilde{x} \in \mathscr{X}$. Подпространство $\mathscr{X}_{\omega,\infty} = S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)/S^p_0(\mathbb{R}, X)$ является замкнутым подмодулем из $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathscr{X}$. Непосредственно из определения представления $\widetilde{S} : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$ следует, что $\widetilde{S}(\omega)\widetilde{x} = \widetilde{x}$, $\widetilde{x} \in \mathscr{X}$. Таким образом, функция $t \mapsto \widetilde{S}(t)\widetilde{x} : \mathbb{R} \to \mathscr{X}_{\omega,\infty}$, $\widetilde{x} \in \mathscr{X}_{\omega,\infty}$, является непрерывной ω-периодической функцией, т. е. она принадлежит банахову пространству $C_\omega(\mathbb{R}, \mathscr{X}_{\omega,\infty})$. Следовательно, имеет место

Теорема 4. *Функция $x \in S^p_c(\mathbb{R}, X)$ является ω-периодической на бесконечности тогда и только тогда, когда класс эквивалентности $\widetilde{x} = x + S^p_0(\mathbb{R}, X)$ является ω-периодическим вектором относительно представления $\widetilde{S} \in \operatorname{End} \mathscr{X}$.*

Доказательства теорем 2 и 3 следуют из теорем 4 и 1, где в качестве пространства $\mathscr{X}_\omega$ взято пространство $S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)/S^p_0(\mathbb{R}, X)$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00197, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

Библиографический список

1. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. 206 с.
2. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // УМН. 2013. Т. 68, № 1. С. 77–128. DOI: 10.4213/rm9505.
3. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Изв. РАН. Сер. матем. 2009. Т. 73, № 2. С. 3–68. DOI: 10.4213/im2643.
4. *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // СМФН. 2004. Т. 9. С. 3–151.
5. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1987. 165 с.
6. *Баскаков А. Г., Криштал И. А.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, № 3. С. 3–54. DOI: 10.4213/im639.
7. *Баскаков А. Г.* Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве // Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 2. С. 174–190. DOI: 10.4213/mzm10285.
8. *Баскаков А. Г.* Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений // Матем. заметки. 1978. Т. 24, № 2. С. 195–206.
9. *Баскаков А. Г.* Неравенства бернштейновского типа в абстрактном гармоническом анализе // Сиб. матем. журн. 1979. Т. 20, № 5. С. 942–952.
10. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М. : Изд-во иностр. лит., 1962. 829 с.
11. *Engel K.-J., Nagel R.* A short course on operator semigroups. N. Y. : Universitext, Springer, 2006. 247 p.
12. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М. : Наука, 1970. 535 с.
13. *Hardy G. H.* A theorem concerning trigonometrical series // J. London Math. Soc. 1928. iss. 3. P. 12–13.
14. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М. : Наука, 1985. 144 с.
15. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М. : Гостехиздат, 1956. 632 с.
16. *Струкова И. И.* Теорема Винера для периодических на бесконечности функций // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 4. С. 34–41.
17. *Струкова И. И.* О теореме Винера для периодических на бесконечности функций // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 186–198.
18. *Струкова И. И.* О гармоническом анализе периодических на бесконечности функций // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 28–38.
19. *Струкова И. И.* Гармонический анализ периодических векторов и периодических на бесконечности функций // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. 2014. Т. 14, № 1. С. 98–111.

20. *Струкова И. И.* Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы // Вестн. ВГУ. Сер. Физика. Математика. 2015. № 3. С. 161–165.

Образец для цитирования:
Струкова И. И. Гармонический анализ периодических на бесконечности функций в пространствах Степанова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 172–182. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-172-182.

Harmonic Analysis of Periodic at Infinity Functions from Stepanov Spaces

I. I. Strukova

Irina I. Strukova, Voronezh State University, 1, Universitetskaya pl., Voronezh, Russia, 394036, irina.k.post@yandex.ru

We consider Stepanov spaces of functions defined on $\mathbb{R}$ with their values in a complex Banach space. We introduce the notions of slowly varying and periodic at infinity functions from Stepanov space. The main results of the article are concerned with harmonic analysis of periodic at infinity functions from Stepanov space. For this class of functions we introduce the notion of a generalized Fourier series; the Fourier coefficients in this case may not be constants, they are functions that are slowly varying at infinity. We prove analogs of the classical results on Ćesaro summability. Basic results are derived with the use of isometric representations theory.

Key words: Banach space, $L^1(\mathbb{R})$-module, Stepanov space, slowly varying at infinity function, periodic at infinity function, Fourier series.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00197 performed in Voronezh State University).

References

1. Levitan B. M., Zhikov V. V. *Almost periodic functions and differential equations*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1983. 224 p. (Russ. ed. : Levitan B. M., Zhikov V. V. *Pochti-periodicheskye funkcii i differencialnye uravneniya*. Moscow, Moscow. Univ. Press, 1978. 206 p.)
2. Baskakov A. G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. *Russian Math. Surveys*, 2013, vol. 68, no. 1, pp. 69–116. DOI: 10.4213/rm9505.
3. Baskakov A. G. Spectral analysis of differential operators with unbounded operator-valued coefficients, difference relations and semigroups of difference relations. *Izv. Math.* 2009. vol. 73, no. 2, pp. 215–278. DOI: 10.4213/im2643.
4. Baskakov A. G. Theory of representations of Banach algebras, and abelian groups and semigroups in the spectral analysis of linear operators. *J. Math. Sci.*, 2006, vol. 137, iss. 4, pp. 4885–5036. DOI: 10.1007/s10958-006-0286-4.
5. Baskakov A. G. *Harmonic analysis of linear operators*. Voronezh, Voronezh Univ. Press, 1987. 165 p. (in Russian).

6. Baskakov A. G., Krishtal I. A. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 439–486. DOI: 10.4213/im639.
7. Baskakov A. G. Harmonic and spectral analysis of power bounded operators and bounded semigroups of operators on Banach spaces. *Math. Notes*, 2015, vol. 97, no. 2, pp. 164–178. DOI: 10.4213/mzm10285.
8. Baskakov A. G. Spectral tests for the almost periodicity of the solutions of functional equations. *Math. Notes*, 1978, vol. 24, no. 1–2, pp. 606–612.
9. Baskakov A. G. Bernšteĭn-type inequalities in abstract harmonic analysis. *Siberian Math. J.*, 1979, vol. 20, no. 5, pp. 665–672.
10. Hille E., Phillips R. *Functional analysis and semi-groups.* Amer. Math. Soc. Colloquim Publ., vol. 31. R. I., Amer. Math. Soc., 1957. 808 p.
11. Engel K.-J., Nagel R. *A short course on operator semigroups.* New York, Universitext, Springer, 2006. 247 p.
12. Daletsky Yu. L., Krein M. G. *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space.* Moscow, Nauka, 1970. 535 p. (in Russian)
13. Hardy G. H. A theorem concerning trigonometrical series. *J. London Math. Soc.*, 1928, iss. 3, pp. 12–13.
14. Seneta E. *Regularly varying functions.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 508, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1976. 112 p. DOI: 10.1007/BFb0079658.
15. Levin B. Ya. *Distribution of zeros of entire functions*. Moscow, Gostekhizdat, 1956. 632 p. (in Russian).
16. Strukova I. I. Wiener's theorem for periodic at infinity functions. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 4, pp. 34–41 (in Russian).
17. Strukova I. I. About Wiener theorem for periodic at infinity functions. *Siberian Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 1, pp. 186–198 (in Russian).
18. Strukova I. I. About harmonic analysis of periodic at infinity functions. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 1, pp. 28–38 (in Russian).
19. Strukova I. I. Harmonic analysis of periodic vectors and functions periodic at infinity. *J. Math. Sci.*, 2015, vol. 211, no. 6, pp. 874–885.
20. Strukova I. I. Spectra of algebras of slowly varying and periodic at infinity functions and Banach limits. *Proc. Voronezh State Univ. Ser. Physics. Mathematics*, 2015, no. 3, pp. 161–165 (in Russian).

Cite this article as:
Strukova I. I. Harmonic Analysis of Periodic at Infinity Functions from Stepanov Spaces. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 172–182 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-172-182.

МЕХАНИКА

УДК 539.3

РАЗВИТИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ АНАЛИЗА ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОГО СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРА

М. В. Вильде[1], Н. В. Сергеева[2]

[1]Вильде Мария Владимировна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, mv_wilde@mail.ru

[2]Сергеева Надежда Викторовна, старший преподаватель кафедры теории функций и стохастического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, knickknack@bk.ru

Рассматривается задача о распространении гармонических по времени волн в вязкоупругом сплошном цилиндре. Для описания колебаний цилиндра применяются трехмерные уравнения вязкоупругости в цилиндрической системе координат. Поверхность цилиндра считается свободной от напряжений. Для описания вязкоупругих свойств применяются интегральные операторы с дробно-экспоненциальным ядром. Для случая рационального значения параметра сингулярности предложен метод асимптотического анализа дисперсионных соотношений, основанный на разложении в обобщенный степенной ряд. Для случая осесимметричных волн получены асимптотики корней дисперсионного уравнения при малых и больших значениях частоты. Приведены численные результаты, подтверждающие применимость предложенного метода.

Ключевые слова: дисперсионное уравнение, сплошной цилиндр, вязкоупругость, асимптотика, параметр сингулярности, параметр дробности, дробно-экспоненциальная функция.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-183-195

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ВВЕДЕНИЕ

Проблема исследования корней дисперсионных уравнений является необходимым этапом решения целого ряда практических важных задач. В частности, исследова-

© Вильде М. В., Сергеева Н. В., 2017

ние асимптотического поведения корней при стремлении волновых параметров к нулю либо бесконечности играет важную роль в анализе распространения нестационарных волн при действии ударной нагрузки [1], в задачах акустической спектроскопии [2], при изучении краевых колебаний упругих тел [3] и во многих других теоретических и прикладных задачах динамики деформируемых тел.

В отличие от упругих волноводов, особенности дисперсии волн деформации в наследственно-упругих телах изучены недостаточно. Первые исследования по данной проблеме принадлежат А. Ю. Ишлинскому, А. Н. Герасимову, А. Р. Ржаницыну [4], Ю. Н. Работнову [5]. Дисперсия волн, требующих для своего описания постановки двумерных и трехмерных задач (волны в плоском слое, распространяющиеся вдоль срединной поверхности, или волны в сплошном или полом цилиндре, распространяющиеся вдоль оси), исследовалась до сих пор только на основе численного решения [6–9]. Асимптотический анализ применяется, как правило, для случая стандартного вязкоупругого тела [10]. В недавних работах [11–13] асимптотические методы развиваются для наследственно-упругих тел, описываемых дробно-экспоненциальной функцией Работнова с параметром сингулярности $\alpha = -0.5$. Между тем обработка экспериментальных данных для реальных материалов дает различные значения из интервала $-1 < \alpha < 0$ [14–17]. Таким образом, требуется разработать метод построения асимптотик дисперсионных кривых для произвольного значения параметра α.

Данная работа посвящена обобщению асимптотических методов исследования дисперсионных соотношений для наследственно-упругого сплошного цилиндра на случай произвольного рационального значения параметра сингулярности ядра релаксации при использовании дробно-экспоненциальной функции Работнова [14].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о колебаниях бесконечного сплошного кругового цилиндра радиуса R из наследственно-упругого материала. В цилиндрической системе координат (r, φ, z) (рис. 1) динамическое напряженно-деформированное состояние цилиндра описывается следующей системой уравнений:

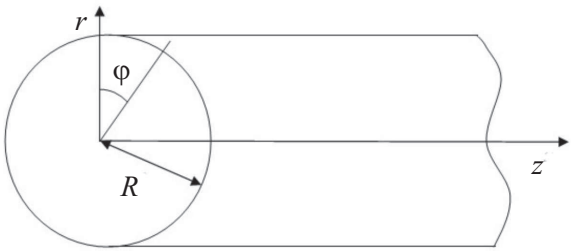


Рис. 1. Бесконечный сплошной круговой цилиндр радиуса R

Fig. 1. An infinite solid circular cylinder of radius R

уравнения движения:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr}}{r} - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{\varphi r}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{1}$$

уравнения состояния:

$$\tilde{E}\frac{\partial u_r}{\partial r} = \sigma_{rr} - \tilde{\nu}(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}), \qquad \frac{1}{r}\tilde{E}\left(u_r + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right) = \sigma_{\varphi\varphi} - \tilde{\nu}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz}), \tag{2}$$

$$\tilde{E}\frac{\partial u_z}{\partial z} = \sigma_{zz} - \tilde{\nu}(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}), \qquad \frac{1}{2}\tilde{E}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right)\right) = (1+\tilde{\nu})\,\sigma_{r\varphi}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}\tilde{E}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)=(1+\tilde{\nu})\,\sigma_{rz},\qquad \frac{1}{2}\tilde{E}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}\right)=(1+\tilde{\nu})\,\sigma_{\varphi z},\tag{4}$$

где σ_{rr}, $\sigma_{r\varphi}$, σ_{rz}, $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{\varphi z}$, σ_{zz} — компоненты тензора напряжений, u_r, u_φ, u_z — компоненты вектора перемещений, ρ — плотность материала, t — время, $\tilde{E}$, $\tilde{\nu}$ — интегральные операторы, определяемые формулами

$$\tilde{E}=E(1-\Gamma^*),\qquad \tilde{\nu}=\nu+\frac{1-2\nu}{2}\Gamma^*,\qquad \Gamma^* f(t)=k\int_{-\infty}^{t}\text{Э}_\alpha(-\beta,t-\tau)f(\tau)d\tau,\tag{5}$$

E, ν — мгновенные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона, k, β — параметры материала, α — параметр сингулярности, $-1<\alpha\leqslant 0$ ($\alpha=0$ соответствует модели стандартного вязкоупругого тела). Объемная деформация считается упругой.

В качестве ядра релаксации будем использовать дробно-экспоненциальную функцию Работнова [14]:

$$\text{Э}_\alpha(-\beta,t)=t^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma\left((n+1)(1+\alpha)\right)},$$

где $\Gamma(n)=\int_0^\infty y^{n-1}\exp(-y)dy$ — гамма-функция.

При таком выборе ядра отношения длительных и мгновенных модулей упругости и сдвига определяются следующими формулами:

$$e=\frac{E_\infty}{E}=\frac{\beta-k}{\beta},\qquad g=\frac{G_\infty}{G}=\frac{2\,(1+\nu)\,(\beta-k)}{2\beta\,(1+\nu)+k\,(1-2\nu)}.$$

Изучим распространение волн, гармонических по времени. Тогда решение для перемещений $\overline{u}$ следует представить в виде

$$\overline{u}=\left(\operatorname{grad}\Phi+\operatorname{rot}\overline{\mathrm{H}}\right)\exp\left(i\omega t\right),\tag{6}$$

где Φ, $\overline{\mathrm{H}}$ — потенциалы, ω — частота.

Применяя операторы (5) к функциям (6), приходим к уравнениям состояния вида (2)–(4), в которых операторы $\tilde{E}$ и $\tilde{\nu}$ заменяются соответственно на константы EE^F и ν^F, выражающиеся следующими формулами:

$$E^F=1-\frac{k}{\beta+(i\omega)^{1+\alpha}},\qquad \nu^F=\nu+\frac{1-2\nu}{2}\frac{k}{\beta+(i\omega)^{1+\alpha}},\tag{7}$$

при этом однозначная ветвь степенной функции выделяется условием $-\pi<\arg(i\omega)<\pi$.

Введем безразмерные переменные:

$$\xi=\frac{r}{R},\qquad \zeta=\frac{z}{R},\qquad t_*=\frac{tc_2}{R}\tag{8}$$

и безразмерные величины

$$u_\eta^*=\frac{u_\eta}{R},\qquad \sigma_{\eta\gamma}^*=\frac{\sigma_{\eta\gamma}}{E},\qquad \{\beta_*,k_*\}=\left(\frac{R}{c_2}\right)^{1+\alpha}\{\beta,k\},\qquad \omega_*=\frac{R}{c_2}\omega,\tag{9}$$

где $c_2 = \sqrt{\dfrac{E}{2(1+\nu)\rho}}$, $\eta, \gamma = r, \varphi, z$. В дальнейшем звездочки будут опущены.

Выражая напряжения через перемещения из полученных уравнений состояния и подставляя их в уравнения движения (1), с учетом (8) и (9) получаем уравнения движения в перемещениях:

$$\nabla^2 \overline{u} + \left(k_F^{-2} - 1\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \overline{u} - \Omega^2 \overline{u} = 0, \tag{10}$$

где

$$k_F^{-2} = \frac{2 - 2\nu^F}{1 - 2\nu^F}, \qquad \Omega^2 = \omega^2 \frac{1 + \nu^F}{(1+\nu)E^F}.$$

На поверхности цилиндра будем требовать выполнения условий

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = 0.$$

2. ВЫВОД ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим осесимметричную задачу. Тогда для нахождения решения в случае продольно-радиальных колебаний потенциалы Φ и $\overline{\mathrm{H}}$ можно взять в виде

$$\Phi = f(\xi) \exp(-i\tilde{\chi}\zeta), \qquad \mathrm{H}_\varphi = q_\varphi(\xi) \exp(-i\tilde{\chi}\zeta), \qquad \mathrm{H}_r = \mathrm{H}_z = 0, \tag{11}$$

где $\tilde{\chi} = \chi - i\delta$, χ — волновое число, $\delta > 0$ — коэффициент затухания, определяющий убывание амплитуды волны с увеличением координаты ζ. В случае крутильных колебаний

$$\mathrm{H}_z = q_z(\xi) \exp(-i\tilde{\chi}\zeta), \qquad \Phi = \mathrm{H}_r = \mathrm{H}_\varphi = 0. \tag{12}$$

Получим сначала дисперсионное уравнение для случая продольно-радиальных колебаний. Подставляя выражения (11) в (10), будем иметь для функций $f(\xi)$ и $q_\varphi(\xi)$ следующие уравнения:

$$f''(\xi) + \frac{1}{\xi} f'(\xi) + a^2 f(\xi) = 0, \quad q''_\varphi(\xi) + \frac{1}{\xi} q'_\varphi(\xi) - \left(\frac{1}{\xi^2} - b^2\right) q_\varphi(\xi) = 0,$$

где $a^2 = k_F^2 \Omega^2 - \tilde{\chi}^2$, $b^2 = \Omega^2 - \tilde{\chi}^2$.

Последние два уравнения для случая сплошного цилиндра имеют следующие решения:

$$f(\xi) = A_1 J_0(a\xi), \qquad q_\varphi(\xi) = A_2 J_1(b\xi), \tag{13}$$

где $J_n(\bullet)$ — функции Бесселя n-го порядка, A_1, A_2 — неизвестные постоянные.

Подставляя (13) в (11) и удовлетворяя граничным условиям, приходим к дисперсионному уравнению:

$$\left(\Omega^2 - 2\tilde{\chi}^2\right)^2 J_0(a) J_1(b) + 4\tilde{\chi}^2 a b J_0(b) J_1(a) - 2\Omega^2 a J_1(a) J_1(b) = 0. \tag{14}$$

Используя представление (12) для функций Φ и $\overline{\mathrm{H}}$ и выполняя аналогичные действия, получим в случае крутильных колебаний дисперсионное уравнение:

$$b J_0(b) - 2 J_1(b) = 0. \tag{15}$$

Уравнения (14), (15) имеют бесконечное счетное множество корней $\tilde{\chi}_n(\omega)$. Введем фазовую скорость n-й моды, вычисляемую по формуле $c_n^{ph} = \omega/\chi$.

3. АСИМПТОТИКИ КОРНЕЙ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Дисперсионные уравнения (14) и (15), совпадающие по форме с соответствующими дисперсионными уравнениями для упругого сплошного цилиндра [18], содержат функции (7). В случае дробного значения α стандартная техника получения асимптотических разложений корней дисперсионного уравнения [19, 20], основанная на представлении искомой величины в виде асимптотического степенного ряда, оказывается неприменимой из-за наличия точек ветвления $\omega = 0$ и $\omega = \infty$. Рассмотрим обобщение этой техники для случая рационального значения параметра сингулярности $\alpha = -\frac{l}{m}$, где l, m $(l < m)$ — натуральные числа. В этом случае $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ являются алгебраическими точками ветвления конечного порядка m. В окрестности таких точек ветвления функция допускает разложение в обобщенный степенной ряд [21].

Примем далее для простоты, что параметр сингулярности имеет вид $\alpha = -\frac{m-1}{m}$. Анализ, аналогичный случаю упругого цилиндра, показывает, что при $\omega \to 0$ уравнение (14) имеет один корень $\chi \sim \omega$ и бесконечное множество корней $\chi \sim 1$. То же самое верно для уравнения (15). Таким образом, асимптотики корней при $\omega \to 0$ следует искать в виде

$$\tilde{\chi} = \sum_{p=p_0}^{\infty} c_p \omega^{p(1+\alpha)}, \tag{16}$$

где $p_0 = m$ для первого корня и $p_0 = 0$ для остальных корней. Для нахождения коэффициентов разложения (16) подставим его в соответствующее дисперсионное уравнение и разложим все функции, входящие в него, в обобщенные степенные ряды по степеням $\omega^{1+\alpha}$. Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ω, получим бесконечную систему зацепляющихся уравнений для определения искомых коэффициентов разложения. Решая полученную систему, находим коэффициенты разложения (16). Для выполнения описанных выкладок удобно использовать средства компьютерной алгебры пакета Maple.

В случае продольно-радиальных колебаний для первого корня получена асимптотика

$$\tilde{\chi}_1^s = c_0^s \omega \left[1 + \frac{k}{2\beta} \sum_{j=1}^{4m-1} \frac{(-1)^j i^{\frac{j}{m}}}{(\beta - k)^j} d_j^{(0)} \omega^{\frac{j}{m}} + \omega^2 \sum_{j=0}^{2m-1} i^{\frac{j}{m}} d_j^{(1)} \omega^{\frac{j}{m}} + O\left(\omega^4\right) \right], \tag{17}$$

где $c_0^s = \dfrac{1}{\sqrt{2(1+\nu)e}}$, $d_1^{(0)} = 1$, $d_2^{(0)} = 1 - \dfrac{1}{4}\dfrac{k}{\beta}$, $d_3^{(0)} = 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{k}{\beta} + \dfrac{1}{8}\dfrac{k^2}{\beta^2}$, $d_0^{(1)} = \dfrac{(2\beta\nu + k(1-2\nu))^2}{32\beta(\beta-k)(1+\nu)}$, $d_j^{(0)}$ $(j > 3)$ — коэффициенты, зависящие только от параметров k и β, $d_j^{(1)}$ $(j > 3)$ — коэффициенты, зависящие от параметров k, β, ν.

Асимптотики корней дисперсионного уравнения (13) для мод с номерами $n = 2, 3, \ldots$ имеют вид

$$\tilde{\chi}_n^s = \frac{1}{2} \ln\left(4\pi\left(n-1\right)\right) + i\pi\left(n-1\right) + O\left(\omega^{1+\alpha}\right). \tag{18}$$

Для нахождения коэффициентов разложений (16) в случае крутильных колебаний, подставляем (16) в уравнение (15). Действуя аналогичным образом, получим

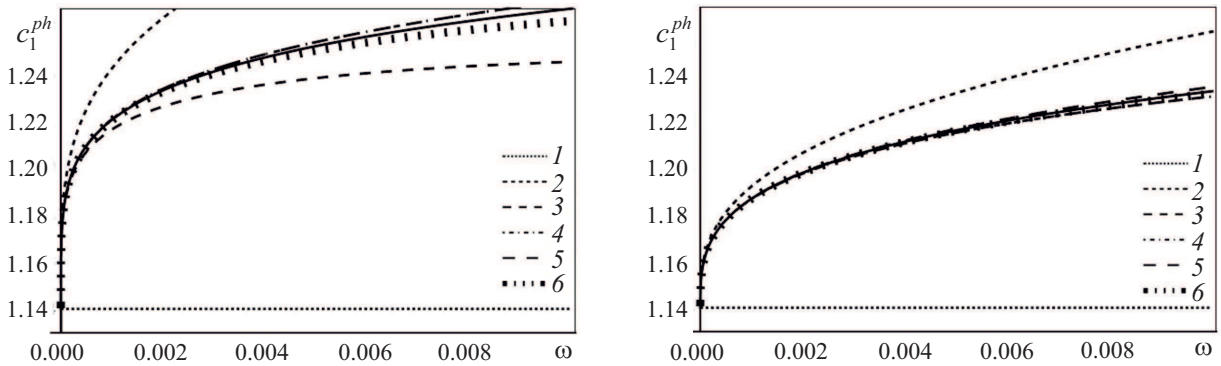
асимптотики корней дисперсионного уравнения (15) в виде

$$\tilde{\chi}_1^t = \frac{1}{\sqrt{g}}\omega - \frac{3k\left(-1\right)^{\frac{1+\alpha}{2}}}{4}\frac{\sqrt{g}}{\left(1+\nu\right)\left(\beta-k\right)^2}\omega^{2+\alpha} -$$

$$-\left(\frac{1}{2\sqrt{g}} - \frac{3k\left(-1\right)^{1+\alpha}\sqrt{g}}{4\left(1+\nu\right)\left(\beta-k\right)^3}\right)\omega^{3+2\alpha} + O\left(\omega^{4+3\alpha}\right), \tag{19}$$

$$\tilde{\chi}_n^t = o\left(1\right) + i\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right) + O\left(\omega^{1+\alpha}\right), \quad n = 2, 3, \ldots . \tag{20}$$

На рис. 2 представлены графики фазовой скорости для первой моды в случае продольно-радиальных колебаний при $k = 0.5$, $\beta = 1$.

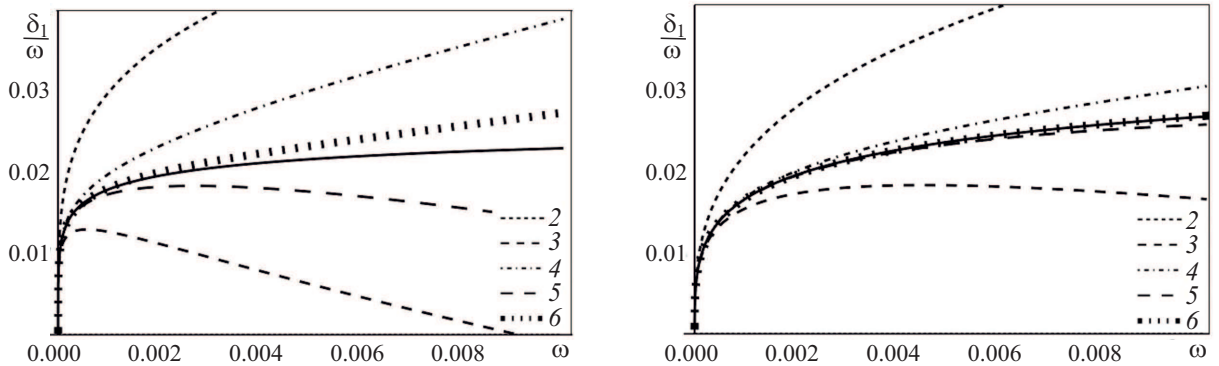


а / a *б / b*

Рис. 2. Фазовая скорость первой моды: *а* — $\alpha = -3/4$; *б* — $\alpha = -2/3$
Fig. 2. Phase velocity of the first mode: *a* — $\alpha = -3/4$; *b* — $\alpha = -2/3$

Кривые *1–6* построены по асимптотике (17), номер кривой соответствует числу членов разложения. Сплошной линией представлено численное решение дисперсионного уравнения (14).

На рис. 3 представлены графики величин δ_1/ω для той же моды при тех же значениях параметров материала.



а / a *б / b*

Рис 3. Мнимая часть первого корня: *а* — $\alpha = -3/4$; *б* — $\alpha = -2/3$
Fig. 3. Imaginary part of the first root: *a* — $\alpha = -3/4$; *b* — $\alpha = -2/3$

Из графиков видно, что при небольшом числе членов разложения асимптотики по дробным степеням применимы только при весьма малых значениях ω.

Сравнение рис. 2, *а* и 2, *б*, 3, *а* и 3, *б* показывает, что при увеличении $|\alpha|$ для сохранения заданной точности требуется увеличить число членов разложения.

Первые члены разложений (18), (20) не зависят от параметров материала и совпадают с соответствующими членами разложения для упругого сплошного цилиндра [3]. Соответствующие им моды описывают статический погранслой, не представляющий большого интереса в динамических задачах.

Аналогичные выводы справедливы и в случае крутильных колебаний.

Ограничиваясь только первым членом разложения и возвращаясь к размерным переменным, получим предельные значения фазовой скорости фундаментальной моды $c_\infty^s = \sqrt{\frac{E_\infty}{\rho}}$ для продольно-радиальных колебаний и $c_\infty^t = \sqrt{\frac{G_\infty}{\rho}}$ для крутильных колебаний. Величина c_∞^s соответствует длительной скорости по теории стержней [22], что подтверждает правильность полученной асимптотики.

Свойства корней дисперсионных уравнений (14) и (15) таковы, что при $\omega \to \infty$ корень $\tilde{\chi}_n(\omega)$ имеет порядок $O(\omega)$. Следовательно, асимптотики корней дисперсионных уравнений (14) и (15) при больших ω следует искать в виде

$$\tilde{\chi}_n^{(\infty)} = d_{n1}^{(\infty)}\omega + d_{n2}^{(\infty)}\omega^{-\alpha} + d_{n3}^{(\infty)}\omega^{-1-2\alpha} + O\left(\omega^{-2-3\alpha}\right). \tag{21}$$

Если коэффициент $d_{n1} > 1$, то a и b, введенные в параграфе 2, становятся чисто мнимыми. Используя асимптотики модифицированных функций Бесселя, запишем дисперсионное уравнение (14) в виде

$$\left(\Omega^2 - 2\tilde{\chi}^2\right)^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right)\left(1 + O\left(e^{-2b}\right)\right) - 4\tilde{\chi}^2 ab \left(1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right)\left(1 + O\left(e^{-2b}\right)\right) - \\ -2\Omega^2 a \left(1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right)\left(1 + O\left(e^{-2b}\right)\right) = 0. \tag{22}$$

Подставим разложение (21) в уравнение (22) и разложим все функции, входящие в него, в обобщенные степенные ряды по степеням $\omega^{-(1+\alpha)}$, пренебрегая при этом экспоненциально убывающими членами. Приравнивая нулю коэффициенты при каждой из степеней, получим бесконечную систему зацепляющихся уравнений для определения искомых коэффициентов разложения. Решая полученную систему, находим коэффициенты разложения (21). Таким образом, асимптотика корней уравнения (14) для первой моды имеет вид

$$\tilde{\chi}_1^{s(\infty)} = \frac{1}{c_R}\omega + d_{12}^{s(\infty)}\omega^{-\alpha} + d_{13}^{s(\infty)}\omega^{-1-2\alpha} + O\left(\omega^{-2-3\alpha}\right), \tag{23}$$

где

$$d_{12}^{s(\infty)} = \frac{k(-i)^{1+\alpha}}{4c_R}\left[\frac{3}{1+\nu} - \frac{(1-2\nu)\left(1-c_R^2\right)}{(1-\nu)\left[3\left(1-c_R^2\right) - (1-2\nu)c_R^2 + (1-\nu)c_R^4\right]}\right],$$

c_R — скорость волны Рэлея, отнесенная к мгновенной скорости волны сдвига c_2, $d_{13}^{s(\infty)}$ — комплексный коэффициент, зависящий от параметров материала k, β, ν.

Если коэффициент $d_{n1} = 1$, то a является мнимой величиной, а b — действительной. Дисперсионное уравнение (14) в этом случае можно заменить уравнением

$$J_1(b) + O\left(\frac{1}{\omega}\right) = 0.$$

Тогда асимптотики корней уравнения (14) для мод с номерами $n = 2, 3, \ldots$ имеют вид

$$\tilde{\chi}_n^{s(\infty)} = \omega - \frac{3k}{4(1+\nu)}(-1)^{\frac{1-\alpha}{2}}\omega^{-\alpha} + \frac{3k}{4}\left(\frac{\beta-k}{1+\nu} + \frac{3k}{8(1+\nu)^2}\right)(-1)^{-\alpha}\omega^{-1-2\alpha} +$$
$$+\frac{3k}{4}\left(\frac{(\beta-k)^2}{1+\nu} - \frac{3k(\beta-k)}{4(1+\nu)^2} - \frac{9k^2}{32(1+\nu)^3}\right)(-1)^{\frac{-1-3\alpha}{2}}\omega^{-2-3\alpha} + O\left(\omega^{-3-4\alpha}\right), \qquad (24)$$

где b_n — корни уравнения $J_1(b) = 0$.

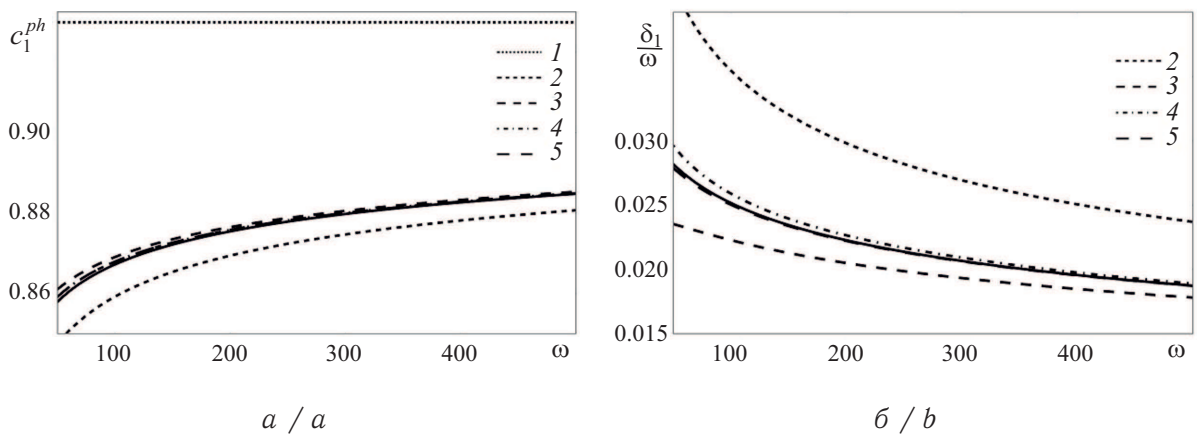
Следует отметить, что при любых значениях α слагаемое, содержащее b_n, появляется в коэффициенте при ω^{-1}.

Асимптотики корней дисперсионного уравнения (15) для больших значений частот также имеют вид (24), но теперь b_n — корни уравнения

$$b_n J_0(b_n) - 2J_1(b_n) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

На рис. 4, *а* изображена фазовая скорость для первой моды в случае продольно-радиальных колебаний для больших значений частот при $\alpha = -3/4$, $k = 0.5$, $\beta = 1$ и её асимптотики, построенные по формуле (23), при этом номер кривой в легенде соответствует числу учитываемых членов разложения. Сплошной линией показано численное решение.

На рис. 4, *б* представлены графики величин δ_1/ω для той же моды. Из графиков видно, что хорошее приближение достигается при трех членах разложения (23) для действительной части волновой постоянной и четырех — для мнимой части волновой постоянной.



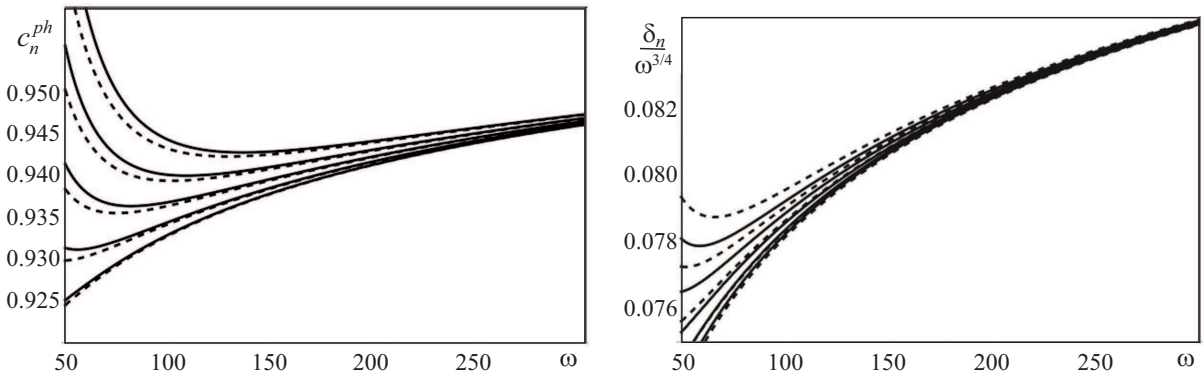
а / a *б / b*

Рис. 4. Фазовая скорость первой моды (*а*) и мнимая часть первого корня (*б*) при $\alpha = -3/4$, $k = 0.5$, $\beta = 1$

Fig. 4. Phase velocity of the first mode (*a*) and imaginary part of the first root (*b*) for $\alpha = -3/4$, $k = 0.5$, $\beta = 1$

На рис. 5, *а* изображены фазовые скорости для случая продольно-радиальных колебаний при $\alpha = -3/4$, $k = 0.5$, $\beta = 1$, $n = 2, 3, \ldots$ Сплошные линии соответствуют численному решению, пунктирные — асимптотикам, построенным по формулам (24).

На рис. 5, *б* представлены графики величин $\dfrac{\delta_n}{\omega^{3/4}}$ для того же случая. Для построения асимптотик было получено 8 членов разложения. Из графиков видно хорошее согласование численного и асимптотического решений.



а / a *б / b*

Рис 5. Фазовые скорости (*а*) и коэффициенты затухания (*б*) высших мод в случае продольно-радиальных колебаний

Fig. 5. Phase velocities (*a*) and attenuation coefficients (*b*) of higher modes in the case of longitudinal-radial oscillations

Первые коэффициенты разложений (17)–(20), (23), (24) не зависят от α.

Отметим, что мгновенная скорость сдвига c_2 является предельной для мод продольно-радиальных колебаний высшего порядка и всех мод крутильных колебаний.

Сравнительный анализ асимптотик показывает, что действительная часть для больших значений частот при различных значениях α имеет порядок $O(\omega)$, а мнимая часть имеет порядок $O\left(\omega^{-\alpha}\right)$. Таким образом, поведение мнимой части волновой постоянной существенно зависит от параметра сингулярности α.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в данной работе асимптотики можно применить для изучения влияния вязкоупругости на характер НДС в окрестности фронтов волн в тонких стержнях и оценки возможностей приближенных теорий стержней при описании распространения ударных волн. Их также можно использовать для определения параметра α из экспериментальных данных. Представляется очевидным, что предложенная методика построения асимптотик может быть распространена на случай произвольного рационального значения параметра сингулярности $\alpha = -l/m$.

В работах [23, 24] показано, что интегральные операторы с ядром в виде дробно-экспоненциальной функции Ю. Н. Работнова взаимосвязаны с оператором дробного дифференцирования, широко применяемым для описания свойств вязкоупругих сред различной природы (см. обзор [25]). В частности, такие операторы применяются в

задачах о соударении упругих тел, при этом параметр дробности моделирует изменения в микроструктуре материала после удара. Поскольку предложенная в данной работе методика может быть легко распространена на случай моделей с дробными производными при рациональных значениях параметра дробности, она может найти применение в этом практически важном классе задач.

Библиографический список

1. *Айнола Л. Я., Нигул У. К.* Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук. 1965. Т. 14, № 1. С. 3–63.
2. *Kaplunov J. D., Kovalev V. A., Wilde M. V.* Matching of asymptotic models in scattering of a plane acoustic waves by an elastic cylindrical shell // J. Sound and Vibration. 2003. Vol. 264, iss. 3. P. 639–655. DOI: 10.1016/S0022-460X(02)01212-9.
3. *Вильде М. В., Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю.* Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М. : Физматлит, 2010. 280 с.
4. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. М. : Стройиздат, 1968. 418 с.
5. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М. : Наука, 1966. 752 с.
6. *Червинко О. П., Сенченков И. К.* Гармонические волны в слое и бесконечном цилиндре // Прикладная механика. 1986. Т. 22, № 12. С. 31–37.
7. *Tanaka K., Kon-No A.* Harmonic Waves in Lenear Viscoelastic Plate // Bull. JSME. 1980. Vol. 23, № 176. P. 185–193. DOI: 10.1299/jsme1958.23.185.
8. *Воропаев Г. А., Попков В. И.* Распространение осесимметричных волн в вязкоупругом полом цилиндре // Прикладная механика. 1989. Т. 25, № 10. С. 19–23.
9. *Анофрикова Н. С., Сергеева Н. В.* Численный анализ дисперсионных уравнений в случае наследственно-упругого сплошного цилиндра // Современные проблемы механики сплошной среды : тр. XVII Междунар. конф. (14–17 окт. 2014 г.) : в 2 т. Ростов н/Д : Изд-во Южн. федер. ун-та, 2014. Т. 1. С. 44–48.
10. *Ватульян А. О., Юров В. О.* О дисперсионных соотношениях для неоднородного волновода при наличии затухания // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 5. С. 85–93.
11. *Анофрикова Н. С., Коссович Л. Ю., Черненко В. П.* Асимптотические методы построения решений в окрестностях фронтов волн в вязкоупругом стержне при больших значениях времени // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 5, вып. 1. С. 82–88.
12. *Анофрикова Н. С., Сергеева Н. В.* Исследование гармонических волн в наследственно-упругом слое // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 321–328.
13. *Вильде М. В., Сергеева Н. В.* Асимптотический анализ влияния вязкоупругих свойств материала на дисперсию гармонических волн в сплошном цилиндре // Современные проблемы механики сплошной среды : тр. XVIII Междунар. конф. (7–10 нояб. 2016 г) : в 2 т. Ростов н/Д : Изд-во Южн. федер. ун-та, 2014. Т. 1. С. 135–139.
14. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М. : Наука, 1977. 384 с.
15. *Маньковский В. А., Сапунов В. Т.* Номографические свойства дробно-экспоненциальной Э-функции при описании линейной вязкоупругости // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2000. Т. 66, № 3. С 47–50.
16. *Бадалов Ф. Б., Абдукаримов А., Худаяров Б. А.* Численное исследование влияния реологических параметров на характер колебаний наследственно-деформируемых систем // Вычислительные технологии. 2007. Т. 12, № 4. С. 17–26.

17. *Ерохин С. В.* Моделирование ползучести и релаксации с использованием производных дробного порядка // Интернет-вестн. ВолгГАСУ. 2015. Вып. 4(40). URL: http://vestnik.vgasu.ru/attachments/8Erokhin.pdf (дата обращения: 03.03.2017).
18. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев : Наук. думка, 1981. 284 с.
19. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. М. : Мир, 1976. 454 с.
20. *Кожанова Т. В., Коссович Л. Ю.* Дисперсионные уравнения Релея – Лэмба. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1990. 21 с.
21. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М. : Наука, 1973. 736 с.
22. *Работнов Ю. И.* Механика деформируемого твердого тела : учеб. пособие для вузов. М. : Наука; Гл. ред. физ.-матем. лит., 1988. 712 с.
23. *Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V.* Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics : Novel trends and recent results // Appl. Mech. Rev. 2010. Vol. 63, № 1, 010801. DOI: 10.1115/1.4000563.
24. *Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V.* Comparative analysis of viscoelastic models involving fractional derivatives of different orders // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2007. Vol. 10, iss. 2. P. 111–121.
25. *Zhuravkov M. A., Romanova N.S.* Review of methods and approaches for mechanical problem solutions based on fractional calculus // Math. Mech. Solids. 2016. Vol. 21, iss. 5. P. 595–620. DOI: 10.1177/1081286514532934.

Образец для цитирования:
Вильде М. В., Сергеева Н. В. Развитие асимптотических методов анализа дисперсионных соотношений для наследственно-упругого сплошного цилиндра // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 183–195. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-183-195.

Development of Asymptotic Methods for the Analysis of Dispersion Relations for a Viscoelastic Solid Cylinder

M. V. Wilde[1], N. V. Sergeeva[2]

[1]Maria V. Wilde, ORCID: 0000-0001-8198-3368, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, Russia, 410012, mv_wilde@mail.ru

[2]Nadezhda V. Sergeeva, ORCID: 0000-0001-6125-7078, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, Russia, 410012, knickknack@bk.ru

Propagation of time-harmonic waves in a viscoelastic solid cylinder is considered. Vibrations of the cylinder are described by three-dimensional viscoelasticity equations in cylindrical coordinates. The stress-free surface boundary conditions are imposed. Viscoelastic properties are described by integral operators with a fractional-exponential kernel. For the case of a rational singularity parameter the method of asymptotic analysis of dispersion relations is proposed, which is based on the generalized power series expansion. For the axisymmetric waves the asymptotic expansions of the dispersion equation roots are obtained for low and high frequencies. The numerical results are presented to confirm the applicability of the proposed method.

Key words: dispersion equation, solid cylinder, viscoelasticity, asymptotics, singularity parameter, fractional parameter, fractional exponential function.

References

1. Ainola L. J., Nigul U. K. Stress waves in elastic plates and shells. *Trans. Estonian SSR Acad. Sci., Ser. of Phis.-Math. Tech. Sci.*, 1965, vol. 14, no. 1, pp. 3–63 (in Russian).
2. Kaplunov J. D., Kovalev V. A., Wilde M. V. Matching of asymptotic models in scattering of a plane acoustic waves by an elastic cylindrical shell. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, vol. 264, iss. 3, pp. 639–655. DOI: 10.1016/S0022-460X(02)01212-9.
3. Wilde M. V., Kaplunov Yu. D., Kossovich L. Yu. *Kraevye i interfejsnye rezonansnye javlenija v uprugih telah* [Edge and interfacial resonance phenomena in elastic bodies]. Moscow, Fizmatlit, 2010. 280 p. (in Russian).
4. Rzhanicin A. R. *Teorija polzuchesti* [Creep theory]. Moscow, Stroyizdat, 1968. 418 p. (in Russian).
5. Rabotnov Yu. N. *Polzuchest jelementov konstrukcij* [Creep of structural elements]. Moscow, Nauka, 1966. 752 p. (in Russian).
6. Chervinko O. P., Senchenkov I. K. Garmonicheskie volny v sloe i beskonechnom cilindre [Harmonic waves in a layer and in an infinite cylinder]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics], 1986, vol. 22, no. 12, pp. 31–37 (in Russian).
7. Tanaka K., Kon-No A. Harmonic Waves in Lenear Viscoelastic Plate. *Bull. JSME*, 1980, vol. 23, no. 176, pp. 185–193. DOI: 10.1299/jsme1958.23.185.
8. Voropaev G. A., Popkov V. I. Rasprostranenie osesimmetrichnyh voln v vjazkouprugom polom cilindre [Propagation of axisymmetric waves in a viscoelastic hollow cylinder]. *Prikladnaja mehanika* [Applied Mechanics], 1989, vol. 25, no. 10, pp. 19–23 (in Russian).
9. Anofrikova N. S., Sergeeva N. V. Chislennyj analiz dispersionnyh uravnenij v sluchae nasledstvenno-uprugogo sploshnogo cilindra [Numerical analysis of dispersion equations for viscoelastic solid cylinder]. *Sovremennye problemy mehaniki sploshnoj sredy: trudy XVII Mezhdunarodnoj konferencii* [Proc. XVII Intern. Conf. „Modern Problems of continuum mechanics“]. Rostov-on-Don, South. Fed. Univ. Press, 2014, vol. 1, pp. 44–48 (in Russian).
10. Vatul'yan A. O., Yurlov V. O. On the dispersion relations for an inhomogeneous waveguide with attenuation. *Mech. Solids*, 2016, iss. 5, pp. 576–582. DOI: 10.3103/S0025654416050101.
11. Anofrikova N. S., Kossovich L. Yu., Chernenko V. P. Asymptotic methods for constructing solutions in the neighborhood of wave fronts in a viscoelastic rod for large values of time. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2005, vol. 5, iss. 1, pp. 82–88 (in Russian).
12. Anofrikova N. S., Sergeeva N. V. Investigation of harmonic waves in the viscoelastic layer. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 3, pp. 321–328 (in Russian).
13. Wilde M. V., Sergeeva N. V. Asymptotic analysis of the viscoelastic material properties effect on the dispersion of harmonic waves in a solid cylinder. *Sovremennye problemy mehaniki sploshnoj sredy: trudy XVIII Mezhdunarodnoj konferencii* [Proc. XVIII Intern. Conf. „Modern Problems of continuum mechanics“]. Rostov-on-Don, South. Fed. Univ. Press, 2016, vol. 1, pp. 135–139 (in Russian).
14. Rabotnov Yu. N. *Elements of Hereditary Solid Mechanics*. Moscow, Nauka, 1977. 384 p. (Engl. transl. by Mir Publ., Moscow, 1980.)
15. Man'kovskii V. A., Sapunov V. T. Nomographic properties of the exponential fractional e-function used for the description of linear viscoelasticity. *Industrial laboratory*, 2000, vol. 66, iss. 3, pp. 188–191.

16. Badalov F. B., Abdukarimov A., Khudayarov B. A. A numerical investigation of the influence of rheological parameters on the character of vibrations in heredity-defortable systems. *Computational Technologies*, 2007, vol. 12, no. 4, pp. 17–26 (in Russian).
17. Erokhin S. V. Modelling of creep and relaxation with the use of fractional derivatives. *Internet-Vestnik VolgGASU*, 2015, iss. 4(40). Available at: http://vestnik. vgasu.ru/attachments/8Erokhin.pdf (accessed 03, March, 2017) (in Russian).
18. Grinchenko V. T, Meleshko V. V. *Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugih telah* [Harmonic oscillations and waves in elastic bodies]. Kiev, Nauk. Dumka, 1981. 284 p. (in Russian).
19. Nayfe A. H. *Metody vozmushhenij* [Perturbation methods]. Moscow, Mir, 1976. 454 p. (in Russian).
20. Kozhanova T. V., Kossovich L. Yu. *Dispersionnye uravneniya Releya – Lemba* [Rayleigh – Lamb dispersion equations]. Saratov, Saratov. Univ. Press, 1990. 21 p. (in Russian).
21. Lavrentev M. A., Shabat B. V. *Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo* [Methods of the complex variable functions theory]. Moscow, Nauka, 1973. 736 p. (in Russian).
22. Rabotnov Yu. I. Mehanika deformiruemogo tverdogo tela : Ucheb. posobie dlja vuzov [Mechanics of deformable solids]. Moscow, Nauka, 1988. 712 p. (in Russian).
23. Rossikhin Yu. A., Shitikova M.V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results. *Applied Mechanics Reviews*, 2010, vol. 63, no. 1, 010801. DOI: 10.1115/1.4000563.
24. Rossikhin Yu. A., Shitikova M.V. Comparative analysis of viscoelastic models involving fractional derivatives of different orders. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2007, vol. 10, iss. 2, pp. 111–121.
25. Zhuravkov M. A., Romanova N. S. Review of methods and approaches for mechanical problem solutions based on fractional calculus. *Math. Mech. Solids*, 2016, vol. 21, iss. 5, pp. 595–620. DOI: 10.1177/1081286514532934.

Cite this article as:
Wilde M. V., Sergeeva N. V. Development of Asymptotic Methods for the Analysis of Dispersion Relations for a Viscoelastic Solid Cylinder. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 183–195 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-183-195.

УДК 539.374

ПЕРЕМЕННЫЙ ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ В НЕЙТРОННОМ ПОТОКЕ

Э. И. Старовойтов[1], Д. В. Леоненко[2]

[1]Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой строительной механики Белорусского государственного университета транспорта, 246653, Беларусь, Гомель, Кирова, 34, edstar0@yandex.by

[2]Леоненко Денис Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры строительной механики Белорусского государственного университета транспорта, 246653, Беларусь, Гомель, Кирова, 34, leoden@tut.by

Рассмотрен переменный изгиб трехслойного упругопластического стержня со сжимаемым заполнителем в нейтронном потоке. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета приняты гипотезы ломаной линии: в тонких несущих слоях справедливы гипотезы Бернулли; в сжимаемом по толщине заполнителе выполняется гипотеза Тимошенко с линейной аппроксимацией перемещений по толщине слоя. Учитывается работа заполнителя в тангенциальном направлении. Физические соотношения связи напряжений и деформаций соответствуют теории малых упругопластических деформаций. Система дифференциальных уравнений равновесия получена вариационным методом. На границе предполагаются кинематические условия свободного опирания торцов стержня на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Решение краевой задачи сведено к нахождению четырех искомых функций — прогибов и продольных перемещений срединных поверхностей несущих слоев. Аналитическое решение получено методом упругих решений с помощью теоремы о переменных нагружениях Москвитина. Проведен его численный анализ в случае непрерывных и локально распределенных нагрузок.

Ключевые слова: трехслойный стержень, пластичность, повторный изгиб, сжимаемый заполнитель, нейтронный поток.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-196-208

ВВЕДЕНИЕ

В связи с широким применением в промышленности и строительстве неоднородных элементов конструкций при квазистатических и динамических нагрузках в различных физико-механических средах актуальной становится проблема создания адекватных математических моделей для описания их деформирования. В монографиях [1, 2] рассмотрены различные математические модели квазистатического и динамического деформирования слоистых элементов конструкций, приведены постановки краевых задач, изложены методы их решения. В статьях [3–10] исследованы свободные и вынужденные колебания неоднородных оболочек, а также рассмотрены вопросы распространения волн и деформирования оболочек и пластин с термочувствительной толщиной. Публикации [11–15] посвящены теоретическому и экспериментальному исследованию параметров свободных колебаний трехслойных панелей и квазистатическому деформированию трехслойных упругих и упругопластических пластин при однократных и переменных нагрузках.

© Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., 2017

Здесь теория переменного нагружения Москвитина [15] применена к трехслойным упругопластическим стержням прямоугольного поперечного сечения со сжимаемым заполнителем, находящимся в нейтронном потоке.

1. НАГРУЖЕНИЕ ИЗ ЕСТЕСТВЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Рассматривается несимметричный по толщине трехслойный стержень (рис. 1). Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном направлении, в заполнителе учитывается его обжатие, деформации малые. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя. На стержень действуют поверхностная нагрузка $q(x)$ и подводится нейтронный поток плотностью φ_0 в направлении, противоположном внешней нормали. Через $w_k(x)$ и $u_k(x)$ обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв, h_k — толщина k-го слоя, $h_3 = 2$ ($k = 1, 2, 3$ — номер слоя), b_0 — ширина стержня.

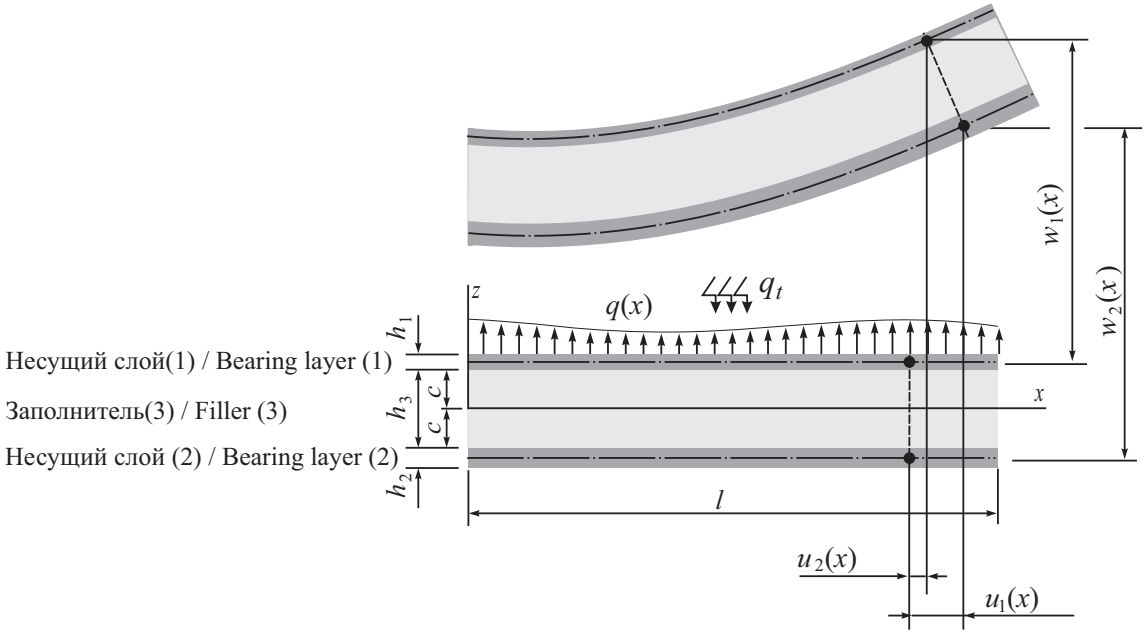


Рис. 1. Расчетная схема трехслойного стержня
Fig. 1. The design scheme of a three-layer rod

Радиационное облучение твердых тел сопровождается многочисленными эффектами, в результате которых возникает объемная деформация θ_I, изменяются упругие и особенно пластические характеристики материала. Согласно известным экспериментальным данным [16], рост величины нейтронного потока

$$I(t) = \varphi t \tag{1}$$

в пределах малых деформаций, как правило, приводит к радиационному упрочнению материала, вызванному ростом предела текучести (φ — интенсивность потока, нейтрон/(м^{2}с), t — время), и возникновению объемной деформации, которую в линейном приближении можно считать прямо пропорционально потоку (см. [16]):

$$\theta_I = BI(z), \tag{2}$$

где B — константа, получаемая из опыта.

Пусть на границу тела, занимающего полупространство $z \geqslant 0$, параллельно оси z падают нейтроны с одинаковой интенсивностью φ_0. Тогда интенсивность потока нейтронов, доходящих до плоскости параллельной границы $z = \mathrm{const}$, будет (см. [16]):

$$\varphi(z) = \varphi_0 e^{-\mu z}, \qquad \mu = \sigma n_0 = \sigma \frac{A_0 \rho}{A}, \tag{3}$$

где μ — величина макроскопического эффективного сечения (1/см), σ — эффективное сечение, отнесенное к одному ядру, n_0 — число ядер в 1 см^3, A_0 — число Авогадро, ρ — плотность, A — атомный вес.

Для алюминия $\sigma = 0.21 \cdot 10^{-24}$ см^2, $A_0 = 6.022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, плотность $\rho = 2.7$ г/см^3, $A = 27$ а.е.м., подставляя в (3), получим $\mu = 1.26$ м$^{-1}$.

Если в (1) интенсивность $\varphi = \varphi_0$ не зависит от времени, то к моменту t через сечение с координатой z пройдет интегральный поток

$$I(z,t) = \varphi_0 t e^{-\mu z}. \tag{4}$$

В реакторах φ_0 имеет порядок $10^{17} - 10^{18}$ нейтрон/(м^{2}с), а I_0 достигает значений $10^{23} - 10^{27}$ нейтрон/м^2, причем θ_I достигает значений порядка 0.1. Следовательно, величина B может быть порядка $10^{-28} - 10^{-23}$ м^2/нейтрон.

Предположим, что в процессе деформирования материалы несущих слоев стержня проявляют упругопластические свойства, заполнитель — нелинейно упругий. Для описания их деформирования с учетом объемной деформации (2) принимаем физические уравнения состояния теории малых упругопластических деформаций [17]:

$$\begin{gathered} s_{xx}^{(k)} = 2G_k(1 - \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, I))e_{xx}^{(k)}, \qquad \sigma^{(k)} = K_k\,(3\varepsilon^{(k)} - B_k I) \qquad (k = 1,\ 2,\ 3), \\ s_{zz}^{(3)} = 2G_k(1 - \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)}, I))e_{zz}^{(3)}, \qquad s_{xz}^{(3)} = 2G_3(1 - \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)}, I))e_{xz}^{(3)}, \end{gathered} \tag{5}$$

где $s_i^{(k)}$, $e_i^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ — девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций, $s_{xz}^{(3)}$, $e_{xz}^{(3)}$ — тангенциальное напряжение и сдвиговая деформация в заполнителе, G_k, K_k — модули сдвига и объемного деформирования материала k-го слоя, $\omega^{(k)}$ — универсальные функции нелинейности материалов несущих слоев ($k = 1, 2$) и заполнителя ($k = 3$) при нагружении из естественного состояния, например, для сплава Д16Т:

$$\begin{gathered} \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, I) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(k)} \leqslant \varepsilon_y^{(k)}(I), \\ A_k\left(1 - \frac{\varepsilon_y^{(k)}(I)}{\varepsilon_u^{(k)}}\right)^{\alpha_k}, & \varepsilon_u^{(k)} > \varepsilon_y^{(k)}(I), \end{cases} \\ \varepsilon_y^{(k)}(I) = \varepsilon_{y0}\left[1 + A(1 - \exp(-\xi I))^{1/2}\right], \end{gathered} \tag{6}$$

где $\varepsilon_u^{(k)}$ — интенсивность деформаций, $\varepsilon_y^{(k)}$ — деформационный предел текучести материала несущего слоя, I — интегральный нейтронный поток (4), B_k — константы материалов, получаемые экспериментально.

Перемещения в слоях $u^{(k)}(x,z)$ и $w^{(k)}(x,z)$ можно выразить через четыре искомые функции $w_1(x)$, $u_1(x)$, $w_2(x)$ и $u_2(x)$ — прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоев:

- в несущих слоях

$$u^{(1)} = u_1 - \left(z - c - \frac{h_1}{2}\right) w_{1,x}, \qquad w^{(1)} = w_1 \ (c \leqslant z \leqslant c + h_1),$$
$$u^{(2)} = u_2 - \left(z + c + \frac{h_2}{2}\right) w_{2,x}, \qquad w^{(2)} = w_2 \ (-c - h_2 \leqslant z \leqslant -c);$$

- в заполнителе

$$\begin{gathered} u^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_1 + \frac{h_1}{4}w_{1,x}\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_2 - \frac{h_2}{4}w_{2,x}\right), \\ w^{(3)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{c}\right) w_1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{c}\right) w_2 \ (-c \leqslant z \leqslant c), \end{gathered} \tag{7}$$

где z — координата рассматриваемого волокна, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций следуют из (7) и соотношений Коши [2]. Внутренние усилия в слоях вводятся соотношениями

$$\begin{gathered} N_x^{(k)} = b_0 \int\limits_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} \, \mathrm{d}\, z, \qquad M_x^{(k)} = b_0 \int\limits_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} z \, \mathrm{d}\, z, \qquad Q^{(3)} = b_0 \int\limits_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \, \mathrm{d}\, z, \\ N_z^{(3)} = b_0 \int\limits_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)} \, \mathrm{d}\, z, \qquad M_{xz}^{(3)} = b_0 \int\limits_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} z \, \mathrm{d}\, z, \end{gathered} \tag{8}$$

где $\sigma_{xx}^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$, $\sigma_{zz}^{(3)}$ — компоненты тензора напряжений.

Уравнения равновесия в усилиях для рассматриваемого стержня получены вариационным методом Лагранжа:

$$\begin{cases} H_1 - P_{1,x} = 0, \\ H_1 + P_{2,x} = 0, \\ S_{1,xx} + H_2 - T_{1,x} = b_0 q, \\ S_{2,xx} - H_2 - T_{2,x} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Обобщенные внутренние усилия в (9) выражаются через усилия (8)

$$\begin{gathered} H_1 = \frac{Q^{(3)}}{2c}, \quad H_2 = \frac{N_z^{(3)}}{2c}, \quad P_1 = \frac{N_x^{(3)}}{2} + \frac{M_x^{(3)}}{2c} + N_x^{(1)}, \quad P_2 = \frac{N_x^{(3)}}{2} - \frac{M_x^{(3)}}{2c} + N_x^{(2)}, \\ T_1 = \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right)\frac{Q^{(3)}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)}}{2c}, \quad S_1 = \left(c + \frac{h_1}{2}\right) N_x^{(1)} - M_x^{(1)} + \frac{h_1}{4} N_x^{(3)} + \frac{h_1}{4c} M_x^{(3)}, \\ T_2 = \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right)\frac{Q^{(3)}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)}}{2c}, \quad S_2 = -\left(c + \frac{h_2}{2}\right) N_x^{(2)} - M_x^{(2)} - \frac{h_2}{4} N_x^{(3)} + \frac{h_2}{4c} M_x^{(3)}. \end{gathered} \tag{10}$$

В дальнейшем принимаются кинематические граничные условия свободного опирания торцов стержня на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Тогда в поперечных сечениях $x = 0, l$ (l — длина стержня) должны выполняться требования

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \qquad (k = 1, 2). \tag{11}$$

Используя соотношения (5), выделим в тензоре напряжений упругие (индекс e) и нелинейные (индекс ω) слагаемые, которые будут включать и радиационные добавки ($k = 1, 2$):

$$\sigma_{xx}^{(k)} = \sigma_{xx}^{(k)e} - \sigma_{xx}^{(k)\omega}, \qquad \sigma_{xx}^{(k)e} = 2G_k e_{xx}^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_{xx}^{(k)},$$
$$\sigma_{xx}^{(k)\omega} = \frac{4}{3} G_k \varepsilon_{xx}^{(k)} \omega^{(k)} + K_k B_k I, \qquad \sigma_{xx}^{(3)} = \sigma_{xx}^{(3)e} - \sigma_{xx}^{(3)\omega},$$
$$\sigma_{xx}^{(3)e} = K_3^+ \varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{zz}^{(3)}, \qquad \sigma_{xx}^{(3)\omega} = \frac{2}{3} G_3 (2\varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{zz}^{(3)}) \omega^{(3)} + K_3 B_3 I,$$
$$\sigma_{zz}^{(3)} = \sigma_{zz}^{(3)e} - \sigma_{zz}^{(3)\omega}, \quad \sigma_{zz}^{(3)e} = K_3^+ \varepsilon_{zz}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{xx}^{(3)}, \quad \sigma_{zz}^{(3)\omega} = \frac{2}{3} G_3 (2\varepsilon_{zz}^{(3)} - \varepsilon_{xx}^{(3)}) \omega^{(3)} + K_3 B_3 I,$$
$$\sigma_{xz}^{(3)} = \sigma_{xz}^{(3)e} - \sigma_{xz}^{(3)\omega}, \qquad \sigma_{xz}^{(3)e} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)}, \qquad \sigma_{xz}^{(3)\omega} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} \omega^{(3)},$$
$$K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k, \qquad K_k^- = K_k - \frac{2}{3} G_k.$$

Проведя подобную операцию с внутренними усилиями (8), получим

$$N_x^{(k)} = N_x^{(k)e} - N_x^{(k)\omega}, \qquad M_x^{(k)} = M_x^{(k)e} - M_x^{(k)\omega} \qquad (k = 1, 2, 3),$$
$$N_z^{(3)} = N_z^{(3)e} - N_z^{(3)\omega}, \qquad M_z^{(3)} = M_z^{(3)e} - M_z^{(3)\omega}, \qquad M_{xz}^{(3)} = M_{xz}^{(3)e} - M_{xz}^{(3)\omega}, \tag{12}$$
$$Q^{(3)} = Q^{(3)e} - Q^{(3)\omega}.$$

Линейные (индекс e) и нелинейные слагаемых (индекс ω) в (12) будут вычисляться по формулам типа (8) , в которых подынтегральные выражения принимаются из (12) с соответствующими индексами.

Подставив в обобщенные усилия (10) внутренние усилия (12), в которых деформации выражены через перемещения (7), и отправив полученное в уравнения (9), придем к системе нелинейных дифференциальных уравнений, описывающей деформирование упругопластического стержня в нейтронном потоке. Для решения этой системы применим метод упругих решений Ильюшина [17]. В этом случае получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений в итерациях:

$$\begin{gathered}
a_1 u_1^n - a_1 u_2^n - a_4 u_{1,xx}^n - a_5 u_{2,xx}^n + a_2 w_{1,x}^n + a_3 w_{2,x}^n - 2a_6 w_{1,xxx}^n + \\
+ a_7 w_{2,xxx}^n = p + p_\omega^{(n-1)}, \\
-a_1 u_1^n + a_1 u_2^n - a_5 u_{1,xx}^n - a_9 u_{2,xx}^n - a_{10} w_{1,x}^n - a_{17} w_{2,x}^n - a_6 w_{1,xxx}^n + \\
+ 2a_7 w_{2,xxx}^n = h_\omega^{(n-1)}, \\
-a_2 u_{1,x}^n + a_{10} u_{2,x}^n + 2a_6 u_{1,xxx}^n + a_6 u_{2,xxx}^n + a_{11} w_{1,xx}^n - a_{12} w_{2,xx}^n + \\
+ a_{15} w_{1,xxxx}^n - a_{16} w_{2,xxxx}^n + a_8 w_1^n - a_8 w_2^n = q + q_\omega^{(n-1)}, \\
-a_3 u_{1,x}^n + a_{17} u_{2,x}^n - a_7 u_{1,xxx}^n - 2a_7 u_{2,xxx}^n - a_{12} w_{1,xx}^n + a_{14} w_{2,xx}^n - \\
- a_{16} w_{1,xxxx}^n + a_{13} w_{2,xxxx}^n - a_8 w_1^n + a_8 w_2^n = g_\omega^{(n-1)},
\end{gathered} \tag{13}$$

где n — номер линейного приближения, u_k^n, w_k^n — линейные приближения искомых перемещений, коэффициенты

$$a_1 = \frac{G_3}{2c}, \qquad a_2 = \frac{G_3}{2}\left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) - \frac{K_3^-}{2}, \qquad a_3 = \frac{G_3}{2}\left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) + \frac{K_3^-}{2},$$

$$a_4 = K_1^+ h_1 + \frac{2K_3^+ c}{3}, \qquad a_5 = \frac{K_3^+ c}{3}, \qquad a_6 = \frac{K_3^+ c h_1}{6}, \qquad a_7 = \frac{K_3^+ c h_2}{6},$$

$$a_8 = \frac{K_3^+}{2c}, \qquad a_9 = K_2^+ h_2 + \frac{2K_3^+ c}{3}, \qquad a_{10} = \frac{G_3}{2}\left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) + \frac{K_3^-}{2},$$

$$a_{11} = \frac{K_3^- h_1}{2} - \frac{G_3 c}{2}\left(1 + \frac{h_1}{2c}\right)^2 - \frac{G_3 c}{6},$$

$$a_{12} = \frac{K_3^-(h_1 + h_2)}{4} + \frac{G_3 c}{2}\left(1 + \frac{h_1}{2c}\right)\left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) - \frac{G_3 c}{6},$$

$$a_{13} = \frac{K_2^+ h_2^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_2^2}{6}, \qquad a_{14} = \frac{K_3^- h_2}{2} - \frac{G_3 c}{2}\left(1 + \frac{h_2}{2c}\right)^2 - \frac{G_3 c}{6},$$

$$a_{15} = \frac{K_1^+ h_1^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_1^2}{6}, \qquad a_{16} = \frac{K_3^+ c h_2 h_1}{12}, \qquad a_{17} = \frac{G_3}{2}\left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) - \frac{K_3^-}{2}.$$

В дополнительных нагрузках $p_\omega^{(n-1)}$, $h_\omega^{(n-1)}$, $q_\omega^{(n-1)}$, $g_\omega^{(n-1)}$ на первом шаге приближения нелинейные слагаемые принимаются равными нулю ($\omega_k^{(1)} = 0$), а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущей итерации:

$$\begin{aligned} p_\omega^{(n-1)} &= \frac{1}{b_0}\left(H_1^{\omega(n-1)} - P_1^{\omega(n-1)}{}_{,x}\right), \\ q_\omega^{(n-1)} &= \frac{1}{b_0}\left(S_1^{\omega(n-1)}{}_{,xx} + H_2^{\omega(n-1)} - T_1^{\omega(n-1)}{}_{,x}\right), \\ h_\omega^{(n-1)} &= \frac{1}{b_0}\left(H_1^{\omega(n-1)} + P_2^{\omega(n-1)}{}_{,x}\right), \\ g_\omega^{(n-1)} &= \frac{1}{b_0}\left(S_2^{\omega(n-1)}{}_{,xx} - H_2^{\omega(n-1)} - T_2^{\omega(n-1)}{}_{,x}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Обобщенные усилия в (14) вычисляются по формулам типа (10), в которых нужно добавить в верхний индекс знак нелинейности ω и номер приближения $(n-1)$. Граничные условия (11) должны выполняться на каждом шаге приближения.

Применение метода упругих решений позволяет на каждом шаге приближения задачу об упругопластическом изгибе рассматриваемого трехслойного стержня в нейтронном потоке поле сводить к соответствующей линейной задаче упругости с дополнительными нагрузками.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Решение системы дифференциальных уравнений (13) принимается в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям (11):

$$u_1^n = \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}^n \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \qquad u_2^n = \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m}^n \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right),$$

$$w_1^n = \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}^n \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \qquad w_2^n = \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m}^n \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right),$$

где U_{1m}^n, U_{2m}^n, W_{1m}^n, W_{2m}^n — искомые амплитуды перемещений.

Поперечная нагрузка и дополнительные усилия в слоях стержня также представляются в виде разложений в тригонометрические ряды:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \qquad q_m = \frac{2}{l}\int_0^l q(x)\,\sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right)\,\mathrm{d}\,x,$$

$$q_\omega^{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} q_{\omega m}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \qquad q_{\omega m}^{n-1} = \frac{2}{l}\int_0^l q_\omega^{n-1}(x)\,\sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right)\,\mathrm{d}\,x,$$

$$g_\omega^{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} g_{\omega m}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \qquad g_{\omega m}^{n-1} = \frac{2}{l}\int_0^l g_\omega^{n-1}(x)\,\sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right)\,\mathrm{d}\,x,$$

$$h_\omega^{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} h_{\omega m}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \qquad h_{\omega m}^{n-1} = \frac{2}{l}\int_0^l h_\omega^{n-1}(x)\,\cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right)\,\mathrm{d}\,x,$$

$$p_\omega^{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} p_{\omega m}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \qquad p_{\omega m}^{n-1} = \frac{2}{l}\int_0^l p_\omega^{n-1}(x)\,\cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right)\,\mathrm{d}\,x.$$

Пусть поверхностная нагрузка равномерно распределена в интервале $a \leqslant x \leqslant b$, тогда

$$q_m = -\frac{2q_0}{\pi m}\left(\cos\frac{\pi m b}{l} - \cos\frac{\pi m a}{l}\right). \tag{15}$$

После подстановки перемещений (15), дополнительных усилий (15) и коэффициентов (15) в уравнения равновесия (13) получим систему линейных алгебраических уравнений для определения искомых амплитуд перемещений U_{1m}^n, U_{2m}^n, W_{1m}^n, W_{2m}^n:

$$\begin{cases} b_1 U_{1m}^n + b_2 U_{2m}^n + b_3 W_{1m}^n + b_4 W_{2m}^n = p_{\omega m}^{n-1}, \\ b_2 U_{1m}^n + b_5 U_{2m}^n + b_6 W_{1m}^n - b_7 W_{2m}^n = h_{\omega m}^{n-1}, \\ b_3 U_{1m}^n + b_6 U_{2m}^n + b_8 W_{1m}^n + b_9 W_{2m}^n = q_m + q_{\omega m}^{n-1}, \\ b_4 U_{1m}^n - b_7 U_{2m}^n + b_9 W_{1m}^n + b_{10} W_{2m}^n = g_{\omega m}^{n-1}, \end{cases} \tag{16}$$

где коэффициенты b_i зависят от параметра m и от температуры через коэффициенты a_n, определенные в (13).

Решение системы (16) можно выписать в определителях, либо решать численно. Далее по формулам (15) вычисляются искомые функции. Перемещения в несущих слоях и заполнителе следуют из соотношений (7), деформации — из соотношений Коши, напряжения — из (5).

3. ПОВТОРНОЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННОЕ НАГРУЖЕНИЕ

Пусть, начиная с момента $t = t_1$, осуществляется мгновенная разгрузка и повторное нагружение усилиями обратного знака q''. Они создадут в k-м слое стержня поле перемещений $u_k''(x)$, $w_k''(x)$, деформаций $\varepsilon''^{(k)}_{ij}(x,z)$ и напряжений $\sigma''^{(k)}_{ij}(x,z)$, $i,j = x,y$. При этом будем предполагать, что за время разгрузки и последующего переменного нагружения воздействие нейтронного потока прекратилось, интегральный нейтронный поток зафиксирован и совпадает с уровнем к моменту начала разгрузки.

Пределы текучести материалов $\varepsilon''^{(k)}_y$, $\sigma''^{(k)}_y$ в каждой точке стержня зависят, вообще говоря, от величин $\varepsilon'^{(k)}_u$, $\sigma'^{(k)}_u$ и $I_1(z,t_1)$, существовавших непосредственно перед началом разгрузки — конкретно от того, происходило ли в данной точке тела пластическое деформирование или нет. Следовательно, материалы слоев после нагружения из естественного состояния становятся деформационно анизотропными.

Введем параметры со звездочками, в которых величины с одним штрихом — напряжения, деформации и перемещения в стержне перед разгрузкой, двумя штрихами помечены аналогичные параметры в процессе второго полуцикла:

$$\begin{gathered}\sigma^{(k)*}_{ij} = \sigma'^{(k)}_{ij} - \sigma''^{(k)}_{ij}, \qquad \varepsilon^{(k)*}_{ij} = \varepsilon'^{(k)}_{ij} - \varepsilon''^{(k)}_{ij}, \qquad q^* = q' - q'' \qquad (k=1,2,3),\\ u_1{}^* = u_1' - u_1'', \qquad w_1{}^* = w_1' - w_1'', \qquad u_2{}^* = u_2' - u_2'', \qquad w_2{}^* = w_2' - w_2'.\end{gathered} \tag{17}$$

Для введенных напряжений и деформаций со звездочками примем физические уравнения состояния типа (5):

$$\begin{gathered}s^{(k)*}_{xx} = 2G_k(1-\omega^{(k)*}(\varepsilon^{(k)*}_u, I_1))e^{(k)*}_{xx}, \qquad \sigma^{(k)*} = 3K_k\,\varepsilon^{(k)*} \qquad (k=1,\ 2,\ 3),\\ s^{(3)*}_{zz} = 2G_k(1-\omega^{(3)*}(\varepsilon^{(3)*}_u, I_1))e^{(3)*}_{zz}, \qquad s^{(3)*}_{xz} = 2G_3(1-\omega^{(3)*}(\varepsilon^{(3)*}_u, I_1))e^{(3)*}_{xz}.\end{gathered} \tag{18}$$

Отличие соотношений (18) в том, что в связь шаровых частей тензоров интегральный нейтронный поток не входит.

Следует отметить, что выражения (7)–(11) и соотношения Коши в силу их линейности будут выполняться и для величин со звездочками. После проведения аналогичных преобразований получим систему нелинейных дифференциальных уравнений равновесия в итерациях для перемещений со звездочками, которая будет подобна системе (13). Дополнительные «внешние» нагрузки $p^{*(n-1)}_\omega$, $h^{*(n-1)}_\omega$, $q^{*(n-1)}_\omega$, $g^{*(n-1)}_\omega$ в ней вычисляются по формулам (14), в которых нелинейные составляющие будут иметь вид

$$N^{(k)\omega*(n-1)}_x = \frac{4}{3}b_0\int\limits_{h_k} G_k\varepsilon^{(k)*(n-1)}_x\omega^{(k)*}(\varepsilon^{(k)*(n-1)}_u,\, I_1)\mathrm{d}z,$$

$$M^{(k)\omega*(n-1)}_x = \frac{4}{3}b_0\int\limits_{h_k} G_k\varepsilon^{(k)*(n-1)}_x\omega^{(k)*}(\varepsilon^{(k)*(n-1)}_u,\, I_1)z\mathrm{d}z,$$

$$N^{(3)\omega*(n-1)}_x = \frac{2}{3}b_0\int\limits_{h_3} G_3(2\varepsilon^{(3)*(n-1)}_x - \varepsilon^{(3)*(n-1)}_z)\omega^{(3)*}(\varepsilon^{(3)*(n-1)}_u,\, I_1)\mathrm{d}z,$$

$$N^{(3)\omega*(n-1)}_z = \frac{2}{3}b_0\int\limits_{h_3} G_3(2\varepsilon^{(3)*(n-1)}_z - \varepsilon^{(3)*(n-1)}_x)\omega^{(3)*}(\varepsilon^{(3)*(n-1)}_u,\, I_1)\mathrm{d}z,$$

$$M^{(3)\omega*(n-1)}_x = \frac{2}{3}b_0\int\limits_{h_3} G_3(2\varepsilon^{(3)*(n-1)}_x - \varepsilon^{(3)*(n-1)}_z)\omega^{(3)*}(\varepsilon^{(3)*(n-1)}_u,\, I_1)z\mathrm{d}z,$$

$$M^{(3)\omega*(n-1)}_{xz} = 2b_0\int\limits_{h_3} G_3\varepsilon^{(3)*(n-1)}_{xz}\omega^{(3)*(n-1)}(\varepsilon^{(3)*(n-1)}_u,\, I_1)z\mathrm{d}z,$$

$$Q^{(3)\omega*(n-1)} = 2b_0\int\limits_{h_3} G_3\varepsilon^{(3)*(n-1)}_{xz}\omega^{(3)*(n-1)}(\varepsilon^{(3)*(n-1)}_u,\, I_1)\mathrm{d}z \qquad (k=1,2).$$

Входящая в них функция нелинейности со звездочкой $\omega^{(k)*(n-1)}(\varepsilon_u^{(k)*(n-1)}, I_1)$, согласно гипотезе Москвитина, может быть выражена через соответствующую функцию нелинейности при нагружении из естественного состояния (6):

$$\omega^{(k)*}(\varepsilon_u^{(k)*}, I_1) = \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)*}, I_1),$$

но с другими константами A_k^*, α_k^*.

В случае граничных условий свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры краевая задача для величин со звездочками с точностью до обозначений совпадает с задачей о нагружении стержня из естественного состояния. Поэтому искомое аналитическое решение краевой задачи для величин со звездочками можно принять в тригонометрических рядах по типу (15). Входящие в них искомые амплитуды перемещений U_{1m}^{*n}, U_{2m}^{*n}, W_{1m}^{*n}, W_{2m}^{*n} определяются по рассмотренной ранее схеме. Искомые перемещения на втором полуцикле следуют из (17).

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численно исследованы перемещения стержня, слои которого составлены из материалов Д16Т-фторопласт–Д16Т. Относительные толщины слоев $h_1 = h_2 = 0.03$, $c = 0.09$; упругие и радиационные параметры материалов приведены в [2]. Кроме этого принималось: $B = 10^{-23}$ м^2/нейтрон, что обеспечивает объемную деформацию в слоях рассматриваемого стержня 3–3.5 %; для дюралюминия — $\mu = 1.26$ см, для фторопласта $\mu = 3.21$ см. Воздействие нейтронного потока моделировалось увеличением предела текучести материала внешнего слоя на 20 %, предела физической нелинейности заполнителя — на 10 %.

На рис. 2 показано изменение прогибов первого слоя по середине стержня ($x = 0,5$) в зависимости от координат краев интервала нагрузки: *1* — упругий, *2′*, *2″* — упругопластический при прямом и обратном нагружениях в нейтронном потоке.

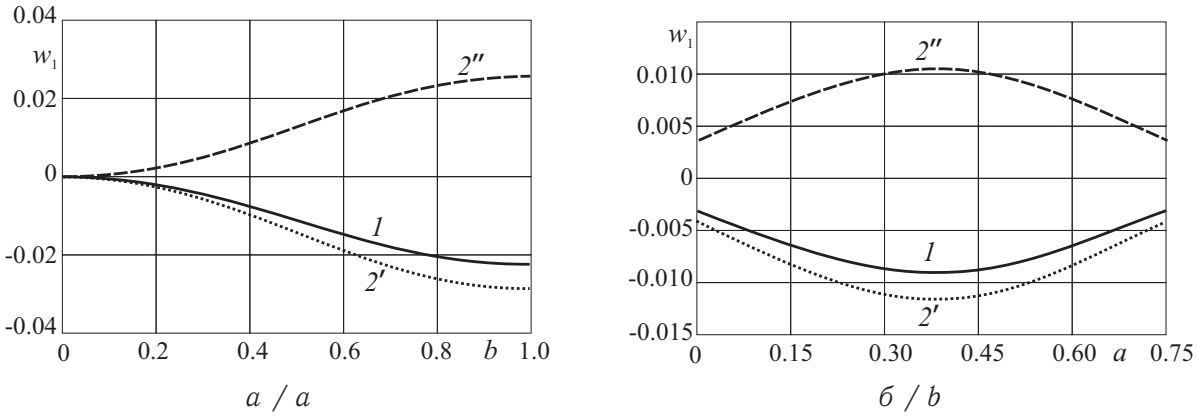


Рис. 2. Изменение прогиба вдоль оси стержня в зависимости от длины интервала нагрузки
Fig. 2. Change in deflection along the axis of the rod, depending on the length of the load interval

Рис. 2, *а* иллюстрирует зависимость прогиба от длины интервала нагрузки b ($a = 0$); рис. 2, *б* — зависимость прогиба от координаты a левого края интервала нагрузки ($b - a = 0.25$).

Следует отметить, что за счет воздействия нейтронного потока на первом полуцикле нагружения происходит увеличение пределов текучести и жесткости материалов слоев. Это приводит к уменьшению упругопластического прогиба на 3–4 %. При повторном знакопеременном нагружении и равномерно распределенной и локальной прямоугольной нагрузками предел текучести материала несущих слоев изменяется только за счет силового упрочнения материала, так как воздействие нейтронного потока прекращается. Поэтому максимальное значение прогибов при повторных нагружениях в нейтронном потоке уменьшается на 1–2 %, однако в случае последующих циклических изменениях нагрузки это расхождение будет накапливаться.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная методика исследования переменного деформирования трехслойных стержней со сжимаемым заполнителем может быть применена при любом количестве циклов нагружения. Она позволяет учитывать в инженерных расчетах воздействие нейтронного облучения и физическую нелинейность материалов слоев. Численные расчеты показали их существенное влияние на перемещения в стержне.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-49-00091-П).

Библиографический список

1. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М. : Машиностроение, 1980. 375 с.
2. *Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Тарлаковский Д. В.* Теория упругости и пластичности. М. : Физматлит, 2011. 416 с.
3. *Kuznetsova E. L., Leonenko D. V., Starovoitov E. I.* Natural Vibrations of Three-layer Circular Cylindrical Shells in an Elastic Medium // Mech. Solids. 2015. Vol. 50, № 3. P. 359–366. DOI: 10.3103/S0025654415030127.
4. *Леоненко Д. В., Старовойтов Э. И.* Импульсные воздействия на трехслойные круговые цилиндрические оболочки в упругой среде // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 202–209. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-202-209.
5. *Мочалин А. А.* Параметрические колебания неоднородной круговой цилиндрической оболочки переменной плотности при различных краевых условиях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 210–214. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-210-215.
6. *Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В.* Пространственное нестационарное движение упругой сферической оболочки // Изв. РАН. МТТ. 2015. Т. 50, № 2. С. 118–128.
7. *Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V.* Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells // J. Machinery Manufacture and Reliability. 2014. Vol. 43, № 2. P. 145–152. DOI: 10.3103/S1052618814010178.
8. *Kuznetsova E. L., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V.* Propagation of Unsteady Waves in an Elastic Layer // Mech. Solids. 2011. Vol. 46, № 5. P. 779–787. DOI: 10.3103/S0025654411050128.
9. *Fedotenkov G. V., Tarlakovskiy D. V.* Analytic Investigation of Features of Stresses in Plane Nonstationary Contact Problems With Moving Boundaries // J. Math. Sci. 2009. Vol. 162, № 2. P. 246–253. DOI: 10.1007/s10958-009-9635-4.
10. *Белосточный Г. Н., Русина Е. А.* Оболочки и геометрически нерегулярные пластинки с термочувствительной толщиной // Докл. Рос. акад. естественных наук. Поволжское межрегион. отд-ние. 1999. № 1. С. 28–37.

11. *Rabboh S., Bondok N., Mahmoud T., El Kholy H.* The Effect of Functionally Graded Materials into the Sandwich Beam Dynamic Performance // Materials Sciences and Applications. 2013. Vol. 4. P. 751–760. DOI: 10.4236/msa.2013.411095.
12. *Havaldar S., Sharma R.* Experimental Investigation of Dynamic Characteristics of Multilayer PU Foam Sandwich Panels // J. Minerals and Materials Characterization and Engineering. 2013. Vol. 1, № 5. P. 201–206. DOI: 10.4236/jmmce.2013.15031.
13. *Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D. A.* Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels // Materials Sciences and Applications. 2013. Vol. 4, № 8. P. 471–477. DOI: 10.4236/msa.2013.48057.
14. *Москвитин В. В.* Циклическое нагружение элементов конструкций. М. : Наука, 1981. 344 с.
15. *Москвитин В. В., Старовойтов Э. И.* К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 116–121.
16. *Ильюшин А. А., Огибалов П. М.* Упругопластические деформации полых цилиндров. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1960. 224 с.
17. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. М. : Гостехиздат, 1948. 376 с.

Образец для цитирования:
Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Переменный изгиб трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем в нейтронном потоке // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 196–208. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-196-208.

Variable Bending of a Three-layer Rod with a Compressed Filler in the Neutron Flux

E. I. Starovoitov[1], D. V. Leonenko[2]

[1]Eduard I. Starovoitov, ORCID: 0000-0002-2550-5377, Belarusian State University of Transport, 34, Kirova str., Gomel, Belarus, 246653, edstar0@yandex.by

[2]Denis V. Leonenko, ORCID: 0000-0001-8003-9279, Belarusian State University of Transport, 34, Kirova str., Gomel, Belarus, 246653, leoden@tut.by

The present paper considers variable bending of a three-layer elastoplastic bar with a compressible filler in the neutron flux. To describe kinematic properties of an asymmetric through thickness pack we have accepted the hypotheses of a broken line as follows: Bernoulli's hypothesis is true in the thin bearing layers; Timoshenko's hypothesis is true in the compressible through thickness filler with a linear approximation of displacements through the layer thickness. The filler's work is taken into account in the tangential direction. The physical stress-strain relations correspond to the theory of small elastoplastic deformations. By the variational method a system of differential equilibrium equations has been derived. The kinematic conditions of simply supported faces of the bar on the immovable in space rigid bases are presumed on the boundary. The solution of the boundary problem is reduced to the search for four functions, namely: deflections and longitudinal displacements of the medial surfaces of the bearing layers. An analytical solution has been derived by the method of elastic solutions by using the Moskvitin's theorem about variable loadings. Its numerical analysis has been performed for the case of the uniform distribution of the continuous and local loads.

Key words: three-layer rod, plastic, variable bending, compressible filler, neutron flux.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 14-49-00091-П).

References

1. Bolotin V. V., Novichkov Yu. N. *Mekhanika mnogosloinykh konstruktsii* [Mechanics of Multilayer Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1980. 375 p. (in Russian).
2. Gorshkov A. G., Starovoitov E. I., Tarlakovskii D. V. *Teoriia uprugosti i plastichnosti* [Foundations of the Theory of Elasticity and Plasticity]. Moscow, Fizmatlit, 2011. 416 p. (in Russian).
3. Kuznetsova E. L., Leonenko D. V., Starovoitov E. I. Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium. *Mech. Solids*, 2015, vol. 50, no. 3, pp. 359–366. DOI: 10.3103/S0025654415030127.
4. Leonenko D. V., Starovoitov E. I. Impulsive action on the three-layered circular cylindrical shells in elastic media. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 1, pp. 202–209. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-202-209 (in Russian).
5. Mochalin A. A. Parametric Oscillations of a Non-uniform Circular Cylindrical Shell of Variable Density under Different Boundary Conditions. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 210–214. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-210-215 (in Russian).
6. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Nonstationary 3D Motion of an Elastic Spherical Shell. *Mech. Solids*, 2015, vol. 50, no. 2, pp. 118–128. DOI: 10.3103/S0025654415020107.
7. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, no. 2, pp. 145–152. DOI: 10.3103/S1052618814010178.
8. Kuznetsova E. L., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Propagation of Unsteady Waves in an Elastic Layer. *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 779–787. DOI: 10.3103/S0025654411050128.
9. Fedotenkov G. V., Tarlakovskiy D. V. Analytic Investigation of Features of Stresses in Plane Nonstationary Contact Problems With Moving Boundaries. *J. Math. Sci.*, 2009, vol. 162, no. 2, pp. 246–253. DOI: 10.1007/s10958-009-9635-4.
10. Belostochny G. N., Rusina E. A. Obolochki and Geometrically Irregular Plates with a Temperature-Sensitive Thickness. *Dokl. Ross. Akad. estestvennykh nauk. Povolzhskoe mezhregional'noe otdelenie* , 1999, no. 1, pp. 28–37 (in Russian).
11. Rabboh S., Bondok N., Mahmoud T., El Kholy H. The Effect of Functionally Graded Materials into the Sandwich Beam Dynamic Performance. *Materials Sciences and Applications*, 2013, vol. 4, pp. 751–760. DOI: 10.4236/msa.2013.411095.
12. Havaldar S., Sharma R. Experimental Investigation of Dynamic Characteristics of Multilayer PU Foam Sandwich Panels. *Journal of Minerals and Materials Characterization and Engineering*, 2013, vol. 1, no. 5, pp. 201–206. DOI: 10.4236/jmmce.2013.15031.
13. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D. A. Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels. *Materials Sciences and Applications*, 2013, vol. 4, no. 8, pp. 471–477. DOI: 10.4236/msa.2013.48057.
14. Moskvitin V. V. *Tsiklicheskoe nagruzhenie elementov konstruktsii* [Cyclic Loading of Elements of Designs]. Moscow, Nauka, 1981. 344 p. (in Russian).
15. Moskvitin V. V., Starovoitov E. I. To the Study of the Stress-Strain State of Two-Layer Metal-Polymer Plates under Cyclic Loading. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1986, no. 1, pp. 116–121 (in Russian).

16. Il'iushin A. A., Ogibalov P. M. *Uprugoplasticheskie deformatsii polykh tsilindrov* [Elastic-Plastic Deformations of Hollow Cylinders]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1960. 224 p. (in Russian).
17. Il'iushin A. A. *Plastichnost'. Ch. 1. Uprugoplasticheskie deformatsii* [Plastic. Ch. 1. Elastic-Plastic Deformation]. Moscow, Gostekhizdat, 1948. 376 p. (in Russian).

Cite this article as:
Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Variable Bending of a Three-layer Rod with a Compressed Filler in the Neutron Flux. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 196–208 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-196-208.

УДК 539.3/51-76

ВЛИЯНИЕ ТОЛЩИНЫ МНОГОСЛОЙНОЙ РОГОВОЙ ОБОЛОЧКИ НА ПОКАЗАТЕЛИ ВНУТРИГЛАЗНОГО ДАВЛЕНИЯ

Д. В. Франус

Франус Дмитрий Валерьевич, аспирант кафедры теоретической и прикладной механики, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9, franus@mavis.ru

Проводится исследование изменения напряжённо-деформированного состояния роговой оболочки при нагружении плоским штампом. Представлено трёхмерное конечно-элементное моделирование контактной задачи нагружения роговой оболочки в программном математическом пакете ANSYS. Роговица моделируется как трансверсально-изотропная сферическая оболочка переменной толщины, состоящая из четырёх слоёв: эпителий роговицы, боуменова мембрана, строма роговицы и десцеметова оболочка. Причем все слои имеют свои упругие характеристики, которые существенно отличаются в тангенциальном направлении и в направлении толщины роговой оболочки. Проводится расчёт диаметра зоны контакта роговицы и штампа. Рассчитываются значения поправочных коэффициентов внутриглазного давления в зависимости от толщины роговой оболочки в центре, позволяющие точнее определить истинное внутриглазное давление.

Ключевые слова: внутриглазное давление, роговая оболочка, толщина роговицы.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-209-218

1. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ

Для оценки риска возникновения различных глазных заболеваний, в том числе развития и прогрессирования глаукомы, важно точнее определять внутриглазное давление (ВГД) [1] и, значит, понимать, как толщина роговицы в центре может влиять на показатели ВГД. Несмотря на то что до сих пор не найдена взаимосвязь между истинным внутриглазным давлением, толщиной роговой оболочки в центре и аппланационным внутриглазным давлением, полученным при помощи измерения соответствующим тонометром, ряд авторов [2] считают, что давление необходимо корректировать на 1 мм рт.ст. при каждом изменении толщины роговой оболочки на 20 мкм отличающегося от среднего значения (540 мкм).

Для оценки предлагаемой корректировки строится трёхмерная конечно-элементная (КЭ) модель контактной задачи нагружения корнеосклеральной оболочки штампом с плоским основанием в математическом программном пакете ANSYS. Роговая оболочка моделируется сферическим сегментом внешним радиусом R_0 переменной толщины, который разбивается на четыре слоя: эпителий, боуменову мембрану, строму роговицы и десцеметову оболочку. Толщина основного слоя роговой оболочки — стромы — изменяется с шагом в 20 мкм таким образом, что общая толщина меняется в диапазоне от 405 до 705 мкм; остальные слои задаются с постоянными толщинами. Дополнительно сторится склеральная оболочка сферической

© Франус Д. В., 2017

формы с внешним радиусом 12 мм [3], имеющая переменную толщину, изменяющуюся от 1 мм у основания роговой оболочки до 0.8 мм [4] и далее до 0.6 мм в экваториальной зоне склеральной оболочки, как указано на рис. 1, 2.

При генерации КЭ сетки элементы всех оболочек и штампа создаются методом «Tetrahedrons», то есть тетраэдрической формы. При этом размеры элементов штампа и оболочки эпителия на соприкасающихся поверхностях ограничиваются величиной 0.3 мм.

Общее количество узлов в конечно-элементной модели 125 667 штук, а самих элементов — 56 526 штук. Количество конечных элементов выбирается таким образом, что при увеличении их числа точность проводимого расчёта не имеет существенного улучшения (менее 0.1%), при этом сокращение количества конечных элементов приводит к заметному понижению точности проводимых вычислений вплоть до пересечения сеток конечных элементов различных тел и/или оболочек.

По данным [5] роговицу и склеру можно рассматривать как трансверсально-изотропные оболочки. Коэффициенты упругости должны удовлетворять следующей системе неравенств [6]:

$$|\nu_i'| < \left(\frac{E_i'}{E_i}\right)^{1/2}, \qquad -1 < \nu_i < 1 - 2\left(\nu_i'\right)^2 \frac{E_i'}{E_i}, \qquad \left(E_i > 0, E_i' > 0\right), \qquad i = 1, ..., 4,$$

где E_i и E_i' — модули упругости при растяжении – сжатии на поверхности изотропии и в направлении, перпендикулярном к ней; ν_i и ν_i' — коэффициенты Пуассона. Модуль сдвига для поверхности изотропии определяется соотношением

$$G_i = \frac{E_i}{2\left(1 + \nu_i\right)}.$$

В табл. 1 указаны толщины слоёв роговицы и значения их модулей упругости и коэффициентов Пуассона в тангенциальном направлении и в направлении толщины, использованные при решении задачи. Предполагается, что ткани роговой и склеральной оболочек близки к несжимаемым, поэтому в расчётах коэффициент Пуассона ν_i принят равным 0.48, а $\nu_i' = 0.02$. Для построения конечно-элементной модели прилагаемого плоского штампа используется изотропный материал со значением модуля Юнга равным $2 * 10^{11}$ Па и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$ (сталь).

Таблица 1 / Table 1

Значения толщин и упругих коэффициентов

Values of thicknesses and elastic coefficients

Параметр Parameter	Эпителий Epithelium	Боуменова мембрана Bowman's membrane	Строма Stroma	Десцеметова оболочка Descemet's membrane	Склера Sclera
h_i, мм	0.043	0.012	0.5–1.1	0.01	0.6–1.2
E_i, МПа	0.06	0.6	0.3	0.9	5
E_i', МПа	0.003	0.03	0.015	0.045	0,5
G_i, МПа	0.03	0.3	0.15	0.45	2.48
G_i', МПа	0.001	0.01	0.005	0.015	0.17

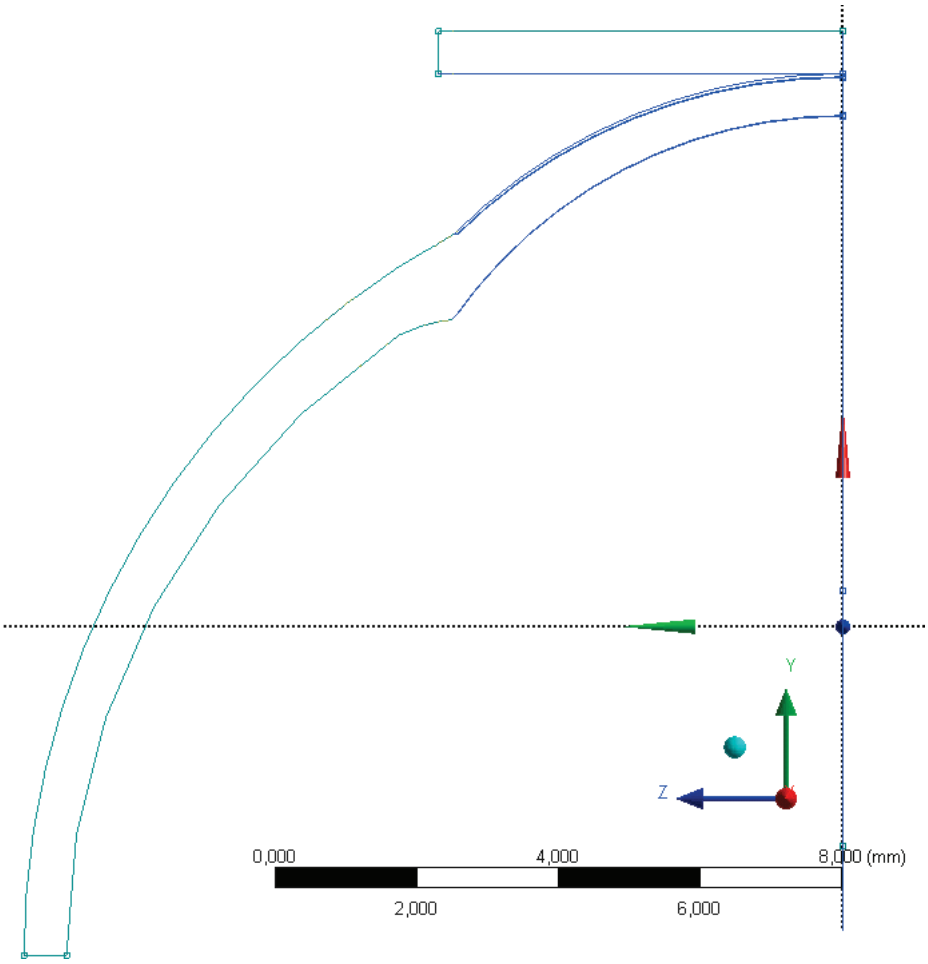


Рис. 1. Элемент вращения, используемый для построения модели
Fig. 1. The rotation element used to build the model

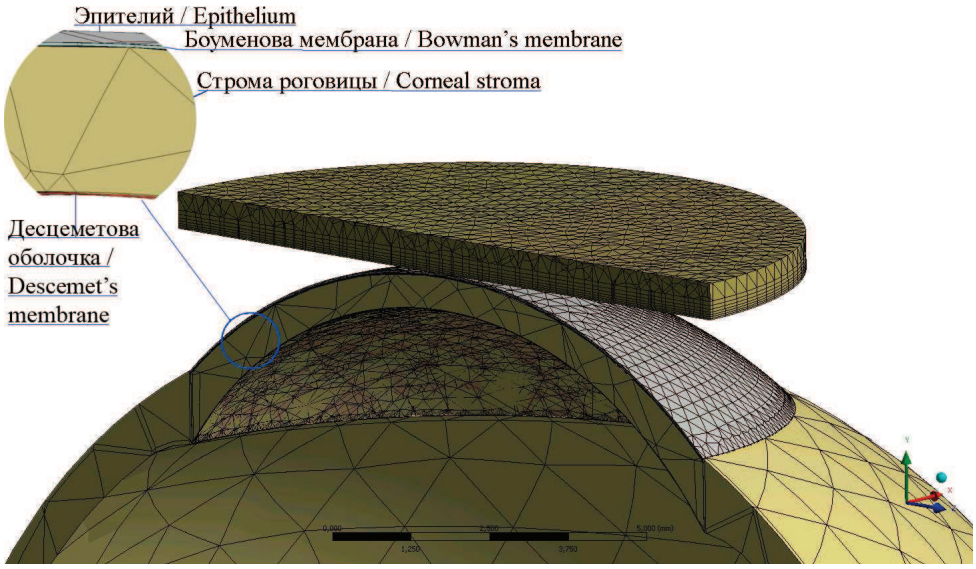
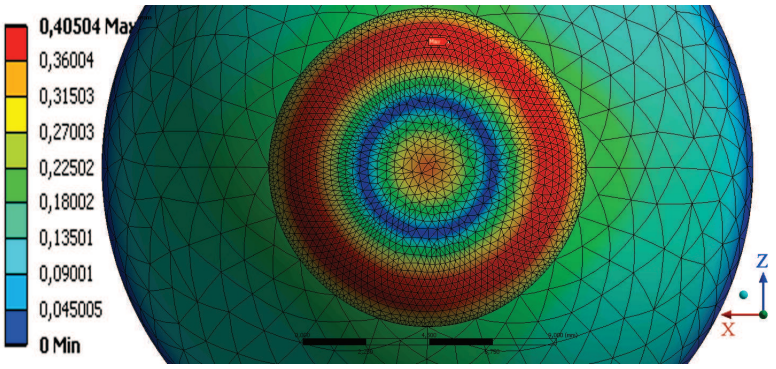
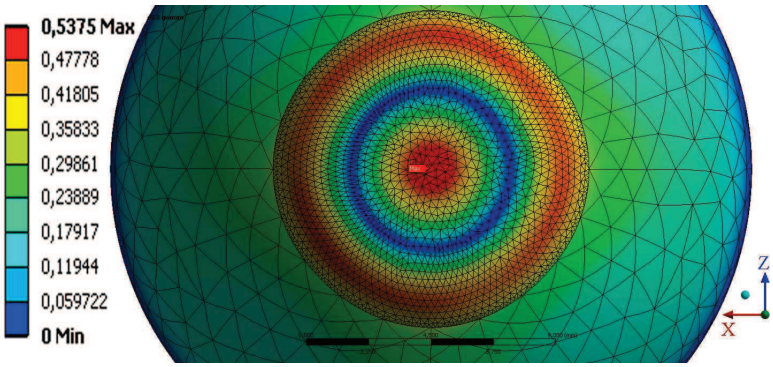


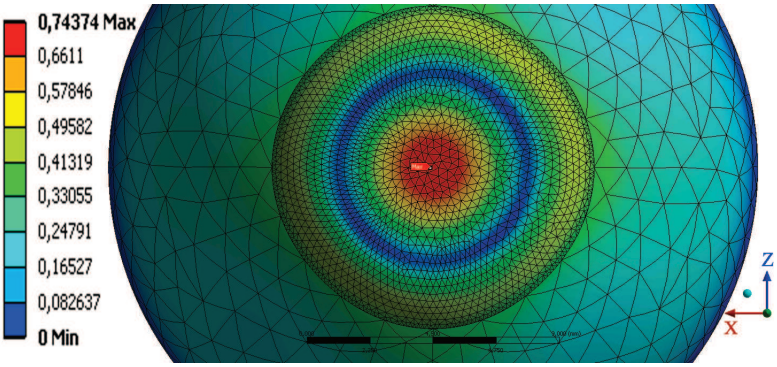
Рис. 2. Сечение конечно-элементной модели плоскостью YZ с нанесённой сеткой КЭ
Fig. 2. The cross-section of the finite element model by the YZ plane with a mesh of FE



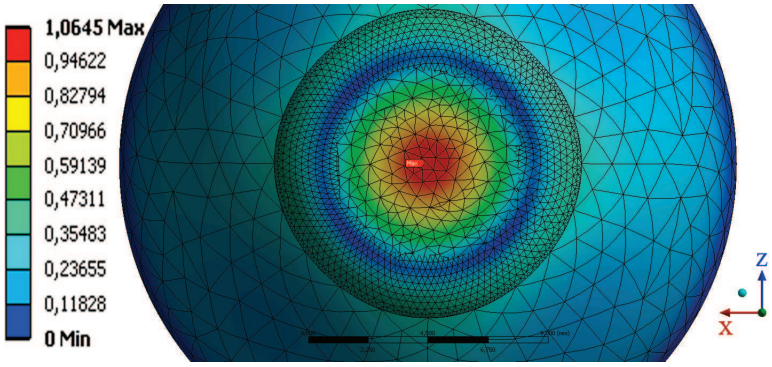
а / a



б / b



в / c



г / d

Рис. 3. Перемещения роговой оболочки (вид сверху) при нагружении плоским штампом весом, г: *а* — 5, *б* — 7.5, *в* — 10, *г* — 15

Fig. 3. Deformation of the cornea (top view) loaded with a flat base stamp with weight of: *a* — 5 g, *b* — 7.5 g, *c* — 10 g, *d* — 15 g

При построении модели сила приложения штампа к поверхности роговой оболочки направлена по вектору нормали к поверхности штампа. Корнеосклеральная оболочка нагружается внутренним давлением, которое задается в направлении, перпендикулярном к внутренней поверхности.

Для построения компьютерной конечно-элементной модели существенным является корректная постановка граничных условий. Предлагаются такие граничные условия, которые отвечают осесимметричному нагружению оболочки, позволяя ей равномерное раздувание, но препятствующие сдвигам, кручению и смещению оболочки как жёсткого целого. Применяется жёсткая фиксация сечения внешней поверхности склеры в экваториальной зоне глазного яблока в перпендикулярном направлении, а также жёсткая фиксация сечения внешней поверхности плоскости XY в направлении оси Z, плоскости YZ — в направлении оси X. Такой выбор граничных условий связан с предположением, что корнеосклеральная оболочка является осесимметричным телом вращения и при её нагружении плоскости, проходящие через ось вращения (симметрии), не могут смещаться в перпендикулярном направлении.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Проводится серия расчётов, соответствующая приложению плоских штампов различной массы — 5, 7.5, 10 и 15 г, имитирующих процесс измерения внутриглазного давления аппланационным тонометром Маклакова с использованием стандартных грузов.

На рис. 3 представлены распределения перемещений при нагружении плоским штампом различной массы (вид сверху).

Следует отметить, что при нагружении плоским штампом весом 5 г в зоне контакта на самом краю имеется ярко выраженное «кольцо», соответствующее минимальным перемещениям, близким по значению к нулю. Причём эти минимальные перемещения переходят в максимальные перемещения (порядка 0.4 мм) роговой оболочки вне зоны контакта также в форме кольца. При увеличении массы плоского штампа до 7.5 г диаметр зоны контакта увеличивается и появляется другая область деформаций, соответствующая максимальным перемещениям — в центре роговой оболочки. Последующее увеличение массы штампа до 10 г приводит к усилению деформаций в центре и увеличению диаметра зоны контакта. Этот эффект усиливается при нагружении плоским штампом массой 15 г, в итоге перемещения в центре роговой оболочки на внешней поверхности достигают 1.06 мм, превышая тем самым почти в 2 раза величину максимальных перемещений вне зоны контакта. По сути, на рис. 3 за счёт кольца минимальных перемещений на внешней поверхности роговой оболочки, обозначенного синим цветом, который находится на «краю» зоны контакта с прилагаемым плоским штампом, отчётливо виден увеличивающийся диаметр зоны контакта при увеличении массы штампа.

Площадь зоны контакта между тонометром и роговой оболочкой рассчитывается по формуле $S = \pi d^2/4$. Выражая диаметр d зоны контакта, получим соотношение

$$d = 2\sqrt{\frac{W}{\pi P_t}}. \tag{1}$$

Полученные по (1) результаты, модифицированные на основе клинических данных, были систематизированы и занесены в калибровочные таблицы [7].

На основе проведённого конечно-элементного моделирования построен график (рис. 4) зависимости изменения диаметра зоны контакта при изменении внутриглазного давления и при нагружении плоским штампом различных весов.

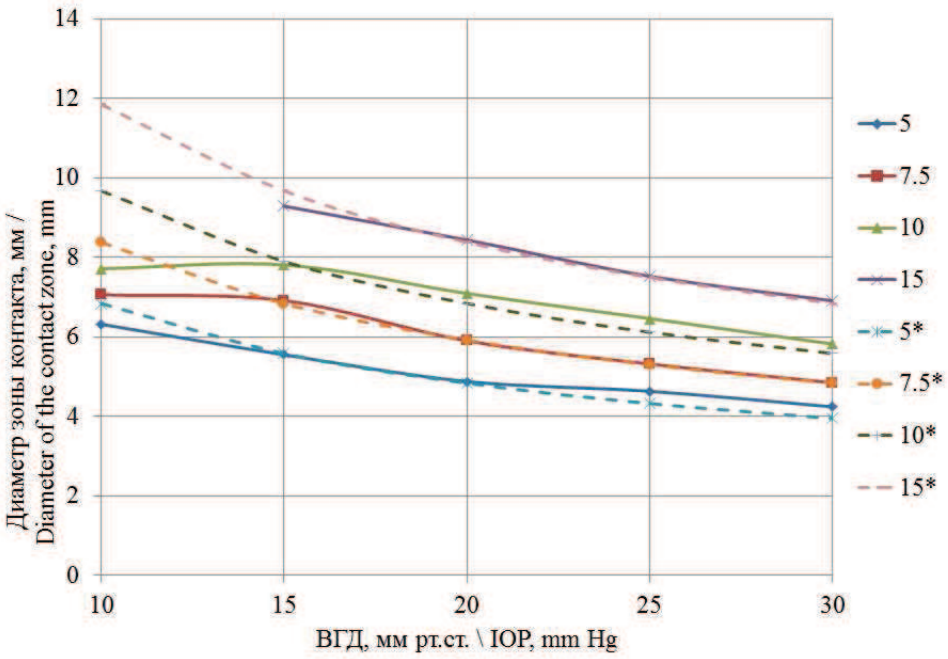


Рис. 4. График зависимости диаметра зоны контакта от ВГД при приложении различных по весу штампов к роговице
Fig. 4. Dependence of the contact zone diameter on IOP when flat base stamp different by weight is applied

На графике (см. рис. 4) пунктирными параболическими линиями обозначены расчётные данные, соответствующие формуле (1), для каждого веса штампа. Из полученного графика видно хорошее совпадение результатов конечно-элементного моделирования при значениях внутриглазного давления выше нормального, то есть более 15 мм рт.ст., при этом для области пониженного давления (менее 15 мм рт.ст.), как видно из графика на рис. 4, необходимо дополнительное исследование.

На основе проведённого КЭ моделирования получены данные, которые аппроксимируются с помощью метода наименьших квадратов, и соотношение для расчёта значения истинного внутриглазного давления в зависимости от полученного диаметра отпечатка при использовании тонометра Маклакова для толщины роговой оболочки в центре 600 мкм [8]:

$$\begin{aligned} P_5 &= 4.59d^2 - 56.68d + 188.15, \qquad & P_{7.5} &= 2.18d^2 - 32.94d + 138.45, \\ P_{10} &= 0.087d^2 - 9.09d + 79.64, \qquad & P_{15} &= -0.004d^2 - 8.13d + 86.39. \end{aligned} \tag{2}$$

Проводя серию расчётов КЭ моделирования получены значения диаметра зон контакта между эпителием роговой оболочки и прикладываемым штампом, соответствующие различным значениям толщины роговой оболочки в её центре h_i, но при постоянном ВГД $P_0 = 2000$ Па. Расчёты, проведённые для тонометров разного веса, показывают, что чем меньше вес тонометра, тем больше зависимость получаемых при измерении показателей ВГД от толщины роговицы. Однако в клинической практике для уточнения измерения ВГД наиболее часто используют тонометр весом 10 г.

В связи с этим данные, характеризующие поправочные коэффициенты для тонометра весом 10 г, можно представить в следующем виде:

$$P_{i_corr} = P_0 - P_{10i},$$

где P_{10i} — внутриглазное давление, полученное по формуле (2) для соответствующей толщины роговой оболочки. В табл. 2 приведены значения полученных поправочных коэффициентов.

Таблица 2 / Table 2

Поправочные коэффициенты ВГД при различной толщине роговой оболочки в центре
IOP correction coefficients for different thickness of the corneal shell in the center

h, мкм μm	P_{i_corr}, мм рт.ст. mm Hg	h, мкм μm	P_{i_corr}, мм рт.ст. mm Hg	h, мкм μm	P_{i_corr}, мм рт.ст. mm Hg	h, мкм μm	P_{i_corr}, мм рт.ст. mm Hg
405	+3.339	485	+1.298	565	+0.352	645	−0.550
425	+2.499	505	+1.006	585	+0.115	665	−0.614
445	+2.118	525	+0.756	605	−0.059	685	−0.721
465	+1.697	545	+0.457	625	−0.353	705	−0.981

На основании полученных значений можно построить график (рис. 5), который в последующем аппроксимируется полиномом 2-й степени и получается следующее соотношение:

$$P_{i_corr} = 33.26h^2 - 49.85h + 17.79, \quad (3)$$

где h — это толщина роговой оболочки в её центре (в диапазоне от 405 до 705 мкм), выраженная в микрометрах. Получаемое значение корректировочного коэффициента P_{i_corr} измеряется в мм рт.ст.

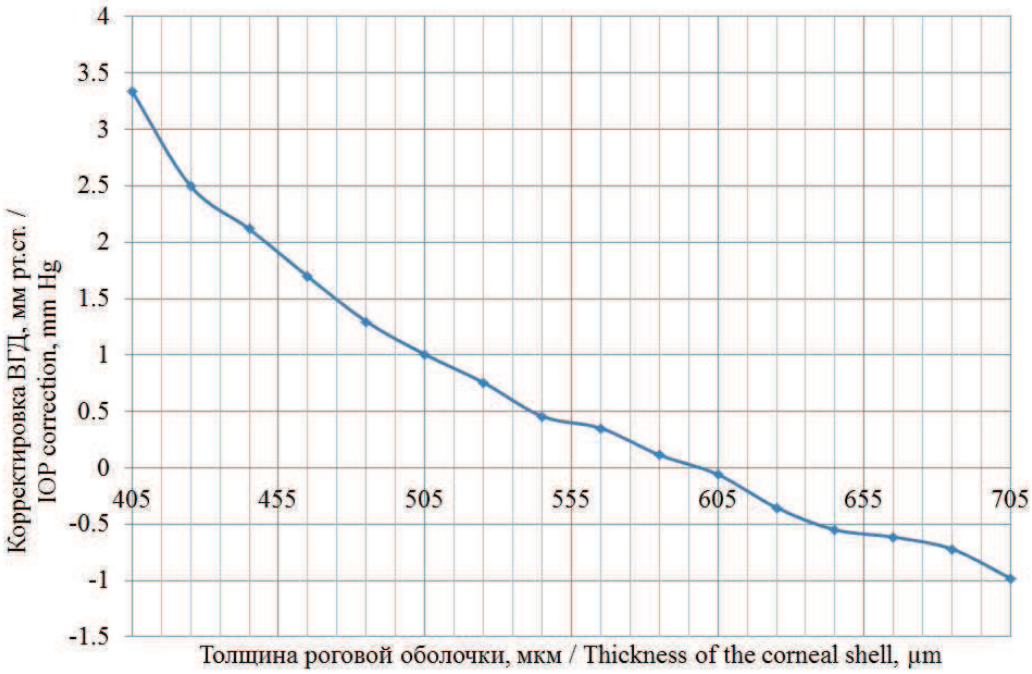


Рис. 5. Величина корректировочного коэффициента ВГД в зависимости от толщины роговицы
Fig. 5. Dependence of IOP correction coefficients on corneal thickness

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, получены значения поправочных коэффициентов в табличном виде для определения внутриглазного давления в зависимости от толщины роговой оболочки в её центре. Определено соотношение (3) для расчёта поправочного коэффициента в зависимости от толщины оболочки в центре.

Построенная конечно-элементная модель нагружения роговой оболочки плоским штампом позволяет проводить расчёт внутриглазного давления в зависимости от веса прикладываемого штампа, внутреннего и внешнего радиусов кривизны и толщины роговой оболочки глаза в её центре. А также КЭ модель позволяет провести больше расчётов для дальнейших исследований в части эластотонометрии и поправочных коэффициентов при различных показателях ВГД, измеряемых тонометром Маклакова, в зависимости от толщины роговицы, которые могут помочь в оценке биомеханических свойств роговицы и склеры.

Полученные результаты подтверждают клинические наблюдения [9, 10] о существенном влиянии толщины роговой оболочки в её центре на показатели внутриглазного давления. Причём это влияние тем больше, чем меньше груз прикладываемого тонометра, что представляет большой практический интерес [10, 11].

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-06311-а).

Библиографический список

1. *Аветисов Э. С.* Близорукость. М. : Медицина, 1999. 285 с.
2. *Чоплин Н. Т., Ланди Д. С.* Глаукома. Иллюстрированное руководство. М. : Логосфера, 2011. 372 с.
3. *Вит В. В.* Строение зрительной системы человека. Одесса : Астропринт, 2003. 664 с.
4. *Захаров В. Д.* Витреоретинальная хирургия. М. : Москва, 2003. 173 с.
5. *Иомдина Е. Н.* Механические свойства тканей глаза человека // Современные проблемы биомеханики. М. : Изд-во Моск. ун-та, 2006. Вып. 11. С. 184–201.
6. *Родионова В. А., Титаев Б. Ф., Черных К. Ф.* Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб. : Изд-во СПбГУ, 1996. 278 с.
7. *Нестеров А. П., Вургафт М. Б.* Калибровочные таблицы для эластонометра Филатова – Кальфа // Вестн. офтальмологии. 1972. № 2. С. 20–25.
8. *Franus D. V.* Finite-element model of intraocular pressure measurement by Maklakov applanation tonometer // Proc. VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS Congress 2016). 2016. Vol. 4. P. 6631–6636.
9. *Шевченко М. В., Братко О. В.* Оценка биомеханических особенностей фиброзной оболочки глаза при миопии и глаукоме // РМЖ. Клиническая офтальмология. 2011. Т. 12, № 4. С. 124–125.
10. *Аветисов Э. С., Бубнова И. А.* Исследование биомеханических свойств роговицы in vivo // Биомеханика глаза – 2007 : сб. тр. конф. М. : Изд-во НИИ глазных болезней РАМН, 2007. С. 76–80.

11. *Аветисов Э. С.* Диагностические возможности эластотонометрии // Глаукома : Реальность, перспективы : сб. науч. ст. М. : Изд-во НИИ глазных болезней РАМН, 2008. С. 81–85.

Образец для цитирования:
Франус Д. В. Влияние толщины многослойной роговой оболочки на показатели внутриглазного давления // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 209–218. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-209-218.

Thickness Influence of the Multylayer Corneal Shell on the Value of Intraocular Pressure

D. V. Franus

Dmitry V. Franus, ORCID: 0000-0002-2720-0948, Saint Petersburg State University, 7–9, Unevrsitetskaya nab., Saint Petersburg, Russia, 199034, Franus@mavis.ru

A research of changes in the stress-strain state of the corneoscleral shell of the human eye under loading by a flat base stamp is made. In this paper a three-dimentional finite-element model of contact problem under loading of multilayer corneal shell with flat base stamp is presented. This mathematical model is made in software package ANSYS. Cornea is modeled as a transversely isotropic spherical shell of variable thickness composed of four layers: epithelium, Bowman's membrane, stroma of the cornea, and Descement's membrane. Moreover, all layers have individual elastic properties, which are significantly different in tangential direction and in thickness direction. Detailed description of the contact interaction of the corneal shell and flat stamp is presented. Since the thickness of the corneal shell changes in the center, the attached flat stamp deforms the corneal shell in different ways. The paper describes the numerical calculation of the diameter of the contact zone between the shell and the stamp, on the basis of which it is judged in clinical practice about the value of intraocular pressure. Values of correction coefficients of intraocular pressure are obtained depending on the thickness of the corneal shell in its center.

Key words: intraocular pressure, corneal shell, corneal thickness.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-01-06311-a).

References

1. Avetisov E. S. *Blizorukost'* [Myopia]. Moscow, Meditsina Publ., 1999. 285 p. (in Russian).
2. Choplin N. T., Lundy D. S. *Atlas of Glaucoma*. Moscow, Logosfera, 2011. 372 p. (in Russian).
3. Vit V. V. *Stroenie zritel'noi sistemy cheloveka* [The structure of the human visual system]. Odessa, Astroprint, 2003. 664 p. (in Russian).
4. Zakharov V. D. *Vitreoretinal'naia khirurgiia* [Vitreoretinal surgery]. Moscow, Moskva Publ., 2003. 173 p. (in Russian).
5. Iomdina E. N. Mechanical properties of the human eye tissues. *Modern Problems of Biomechanics*, Moscow, Moscow Univ. Press, 2006, vol. 11, pp. 184–201 (in Russian).

6. Rodionova V. A., Titaev B. F., Chernykh K. F. *Prikladnaia teoriia anizotropnykh plastin i obolochek* [Applied theory of anisotropic plates and shells]. St. Petrsburg, St. Petrsburg Univ. Press, 1996. 278 p. (in Russian).
7. Nesterov A. P., Vurgaft. M. B. Kalibrovochnye tablitsy dlia elastonometra Filatova — Kalfa [Calibration tables for elastomer Filatov – Kalfa]. *Vestn. oftal'mol.* [Bulletin of ophthalmology], 1972, no. 2, pp. 20–25 (in Russian).
8. Franus D. V. Finite-element model of intraocular pressure measurement by Maklakov applanation tonometer. *Proc. VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS Congress 2016)*, 2016, vol. 4, pp. 6631–6636.
9. Shevchenko M. V., Bratko O. V. Evaluation of biomechanical peculiarities of fibrous eye layer in myopia and glaucoma. *RMJ Clinical Ophthalmology*, 2011, vol. 12, no. 4, pp. 124–125 (in Russian).
10. Avetisov E. S., Bubnova I. A. Issledovanie biomekhanicheskikh svoistv rogovitsy in vivo [Reseach of biomechanical properties of cornea in vivo]. *Biomekhanika glaza–2007 : Sb. tr. konf.* [Biomechanics of the eye : Coll. of conf. works]. Moscow, State Research Institute of Eye Diseases of Russian Academy of Medical Sciences Publ., 2007, pp. 76–80 (in Russian).
11. Avetisov E. S. Diagnosticheskie vozmozhnosti elastotonometrii [Diagnostic possibilities of elastotonometry]. *Glaukoma: Real'nost' perspektivy: sb. nauchn. st.* [Glaucoma: Reality, prospects: Sat. sci. article]. Moscow, State Research Institute of Eye Diseases of Russian Academy of Medical Sciences Publ., 2008, pp. 81–85 (in Russian).

Cite this article as:
Franus D. V. Thickness Influence of the Multylayer Corneal Shell on the Value of Intraocular Pressure. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 209–218 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-209-218.

ИНФОРМАТИКА

УДК 501.1

АНАЛИЗ ПУТЕЙ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ СОЧЕТАНИЙ СОБЫТИЙ В ЧЕЛОВЕКОМАШИННЫХ СИСТЕМАХ

А. С. Богомолов

Богомолов Алексей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики и компьютерных наук, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83; старший научный сотрудник, Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410024, Саратов, Рабочая, 24, alexbogomolov@ya.ru

Предлагаются модели, методы и алгоритмы для анализа процессов развития и предотвращения критических сочетаний событий различного рода, приводящих к авариям и катастрофам в человекомашинных и организационных системах. Критические сочетания представляют собой комбинации событий, которые по отдельности относительно неопасны, но в совокупности приводят к аварии. В техногенных системах такими событиями являются отдельные ошибки операторов, отказы техники и неблагоприятные воздействия внешней среды. Для исследования таких сочетаний и определения мер по их предотвращению используются подходы вероятностного анализа безопасности, строятся логические деревья, минимальные сечения которых рассматриваются как модели критических сочетаний событий. Для минимальных сечений строятся графы событий и системы дифференциальных уравнений, из решений которых можно определить вероятность реализации того или иного минимального сечения, а также интенсивность мер по снижению этих вероятностей, которые следует предпринимать на различных интервалах времени для данной системы. В качестве примера анализируются ситуации, связанные с возникновением критических сочетаний событий, приводящих к пожарам в двигателе двухмоторного воздушного судна и его последующей аварийной посадке.

Ключевые слова: авиационная транспортная система, критическое сочетание событий, авария, вероятностный анализ безопасности, дерево отказов, минимальное сечение.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-219-230

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

© Богомолов А. С., 2017

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время одним из центральных вопросов безопасности техногенных систем является транспортная безопасность (Федеральный закон 16–ФЗ: «О транспортной безопасности»), в которой важную роль играет задача обеспечения безопасности авиационных транспортных систем (АТС).

Современные воздушные суда (ВС) обладают высокой устойчивостью к неблагоприятным воздействиям среды, к проявлениям дефектов аппаратного и программного обеспечения, ошибкам персонала в случаях, когда эти неблагоприятные события проявляются по отдельности. Это означает, что система успевает парировать очередное неблагоприятное событие до возникновения следующего, действует «принцип единичного отказа» [1]. Поэтому причиной большинства авиационных аварий и катастроф, как правило, являются сочетания неблагоприятных воздействий, которые по отдельности не фатальны и могут не выделяться из ряда устранимых отказов, ошибок и внешних воздействий. Аварию вызывает появление нескольких разнородных неблагоприятных событий, некоторым образом распределенных по времени и порядку проявления. Такие сочетания названы критическими сочетаниям событий [2, 3].

Возникновение критических сочетаний событий — проблема, снижающая безопасность объектов различного масштаба и назначения, в том числе безопасность АТС. Решение этой проблемы требует математического обеспечения в виде моделей, методов и комплексов программ анализа критических сочетаний событий.

Предлагаемый подход к решению проблемы критических сочетаний событий основан на математическом аппарате, который используется при анализе надежности техники, видов, последствий и критичности отказов [4]. Научная и практическая новизна предлагаемого подхода заключается в том, что разрабатываемые модели, методы и алгоритмы предназначаются для применения в процессе функционирования системы, тогда как аппарат теории надежности, позволяющий получить численные рекомендации относительно множественных отказов, традиционно применяется в основном на стадиях разработки, производства и модернизации технических объектов, в частности, атомной энергетики [5]. По нашему мнению, сфера применения данных методов и алгоритмов имеет значительные перспективы расширения.

В известных системах предупреждения критических режимов полетов воздушных судов в реальном времени возможности аппарата теории надежности не раскрыты полностью и такие системы не ориентированы на анализ критических сочетаний взаимодействующих неблагоприятных событий и вычисление их вероятностей. Кроме того, предлагаемое математическое обеспечение направлено на определение мер, которые может осуществить персонал (экипаж, диспетчер) для снижения вероятности критических сочетаний событий, если эта вероятность превышает допустимый предел.

1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ СОЧЕТАНИЙ СОБЫТИЙ

Пусть задана S — подсистема АТС, $\bar{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ — множество аварий, возможных при выполнении S заданных функций, $E = \{e_1, \ldots, e_k\}$ — множество собы-

тий в системе S и внешней среде, составляющих критические сочетания, которые приводят к авариям $A_1, \ldots, A_n$, $\bar{\lambda}(t) = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_k(t))$, $\bar{\mu}(t) = (\mu_1(t), \ldots, \mu_k(t))$ — интенсивности потоков возникновения и парирования событий из множества E. При этом каждому значению $\mu_i(t)$, $i \in 1, \ldots, k$, соответствует комплекс инструкций $Q(\mu_i(t))$, выполняемых экипажем для обеспечения данного значения интенсивности парирования события e_i.

Кроме того, задан отрезок $[t_0, t_1]$ и множество событий $E_{t_0} \subseteq E$, произошедших к моменту t_0. Требуется для всех допустимых внешних воздействий $x(t) \in X(t)$ определить на отрезке $[t_0, t_1]$

- вероятности $P_i(S, A, E_{t_0}, \bar{x}(t), \bar{\lambda}(t), \bar{\mu}(t), t)$ аварий из множества $\bar{A}$, $i \in 1, \ldots, n$;
- интенсивности $\bar{\mu}(t) = (\mu_1(t), \ldots, \mu_k(t))$ парирования событий $e_1, \ldots, e_k$ такие, при которых $P_i(S, A, E_{t_0}, \bar{x}(t), \bar{\lambda}(t), \bar{\mu}(t), t) \leqslant p_i$, $i \in 1, \ldots, n$, где $p_i \geqslant 0$ — заданные числа, и при этом $F(S, \bar{A}, \bar{x}(t), \bar{\lambda}(t), \bar{\mu}(t), t) \to \min$, где $F(S, \bar{A}, \bar{x}(t), \bar{\lambda}(t), \bar{\mu}(t), t)$ — заданный функционал с заданными ограничениями и начальными условиями.

2. ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ПРОБЛЕМЫ ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ СОЧЕТАНИЙ СОБЫТИЙ

Предлагаемый подход к проблеме предотвращения критических сочетаний событий состоит из двух этапов, первый из которых проводится при подготовке к функционированию АТС, второй осуществляется на основе результатов первого в процессе функционирования АТС. Этапы предлагаемого решения состоят из следующих основных шагов.

Этап 1. Разработка информационно-управляющей системы для решения задачи.

1. Определить множество аварий $\bar{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.
2. Для каждой аварии $A \in \bar{A}$ построить множество элементарных событий и множество $D(A)$ деревьев отказов, приводящих к этой аварии. Пусть $\bar{D} = \bigcup\limits_{A \in \bar{A}} D(A), E = \{e_1, \ldots, e_k\}$ — множество элементарных событий деревьев из $\bar{D}$.
3. Для каждого дерева $D \in \bar{D}$ определить все минимальные сечения.
4. Для каждого события e_i, $i \in 1, \ldots, k$, определить список действий экипажа по парированию e_i и соответствие между значениями интенсивности парирования $\mu_i(t)$ и действиями экипажа $Q(\mu_i(t))$ для обеспечения такой интенсивности.
5. Разработать комплекс алгоритмов для решения поставленной выше задачи определения вероятностей критических сочетаний событий и действий по снижению этих вероятностей.
6. Разработать математическое и программно-аппаратное обеспечение информационно-управляющей системы для применения полученных алгоритмов решения поставленной выше задачи.

Этап 2. Предотвращение критических сочетаний событий в процессе функционирования АТС.

1. Исходя из текущего состояния ВС, информационно-управляющая система решает поставленную выше задачу и находит в качестве решения интенсивности восстановления $\mu_j^*(t)$, $i \in 1, \ldots, k$.
2. Найденным значениям $\mu_j^*(t)$, $i \in 1, \ldots, k$, информационно-управляющая система ставит в соответствие комплексы инструкций $Q(\mu_i^*(t))$, $j = 1, \ldots, m$, содержащие регламентированные действия экипажа по восстановлению работоспособности подсистем ВС, управлению режимами функционирования и парированию внешних воздействий. Эти действия система предлагает осуществить экипажу.
3. Руководствуясь полученными рекомендациями, экипаж выполняет соответствующие действия с целью снижения вероятностей критических сочетаний событий до значений, не превышающих допустимых пределов.

Во время функционирования АТС этап 2 повторяется с необходимой частотой наблюдения, получаемая при этом информация используется для коррекции моделей и методов, разрабатываемых на этапе 1. Каждый из приведенных выше шагов предполагает решение ряда нетривиальных подзадач, в частности, определения множества элементарных событий и причинно-следственных связей, которые, вообще говоря, являются переменными и зависят от времени, действий внешней среды и других факторов.

Пример решения задачи предотвращения критических сочетаний событий.

Проиллюстрируем предлагаемый подход в применении к конкретному виду сложных ситуаций — возникновению пожара при посадке воздушного судна.

Рассматривается ситуация частичного разрушения двухмоторного ВС при посадке вследствие возникновения и развития пожара в мотогондоле. Мотогондола — отсек летательного аппарата, предназначенный для монтажа двигателя и выступающий за пределы фюзеляжа или крыла, на котором установлен двигатель. Мотогондолы — наиболее пожароопасные подсистемы ВС, ликвидация пожаров в них осложнена тем, что набегающий поток воздуха в полёте значительно снижает концентрацию подаваемого огнегасящего состава. При возникновении пожара на этапе посадки ситуация дополнительно осложняется рядом факторов, в частности, небольшое располагаемое время и резкое снижение управляемости воздушного судна.

Требуется определить критические сочетания событий, приводящих к указанной ситуации, их вероятность и меры по предотвращению аварии в процессе полета.

Ключевые события, участвующие в процессах возникновения и развития подобных ситуаций, и сведения о причинно-следственных связях между этими событиями взяты из нормативной документации и результатов расследования причин, которые имели место при развитии происшедших аварий и катастроф [6–8]. В каждый момент времени пространство событий с их причинно-следственными связями представляет собой сложную причинно-следственную сеть, разновидность причинно-следственного комплекса [9, 10]. Анализу подвергаются фрагменты этой сети, которые выбираются исходя из актуальности элементарных событий с использованием разработанного программного обеспечения [11]. В данном случае в качестве такого фрагмента рассматривается дерево с 30 элементарными событиями, изображенное на рис. 1.

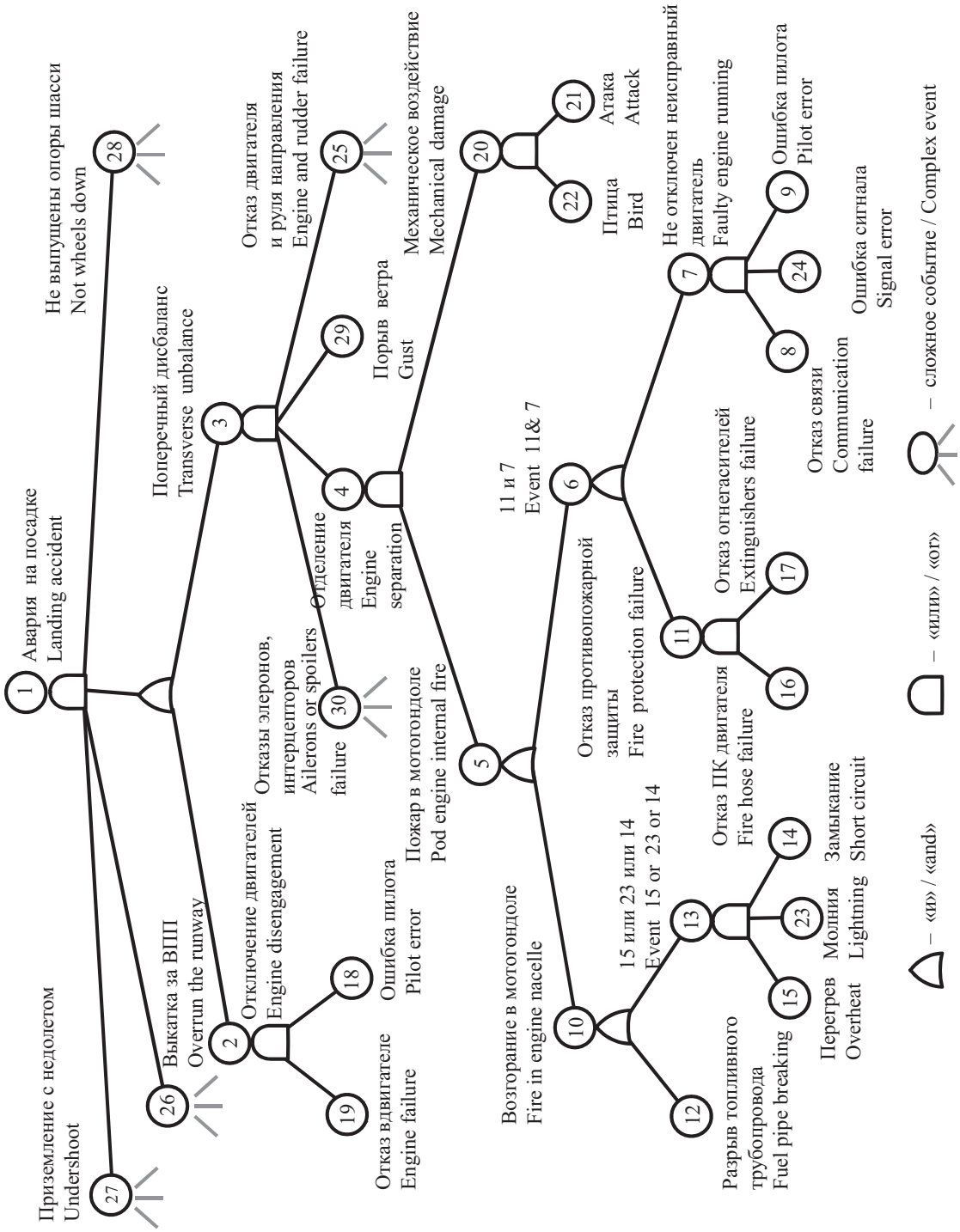


Рис. 1. Фрагмент дерева событий, связанных с пожаром в одном из двигателей на этапе снижения

Fig. 1. Fragment of the event tree associated with a fire in one of the engines during the descent phase

Под «сложными событиями» на рис. 1 понимаются вершины, которым соответствуют свои поддеревья аналогичных размеров, не рассматривающиеся в докладе из-за его ограниченного объема.

Один из возможных сценариев развития критического сочетания событий выглядит следующим образом. На этапе снижения в одной из мотогондол разрывается топливный трубопровод (событие 12) и из-за перегрева поверхностей (событие 15) вытекшее топливо воспламеняется. При этом отказывает пожарный кран двигателя (событие 16), а подача топлива продолжается, что усиливает пожар (огнегасители в таких ситуациях, как правило, его не устраняют). Поступает сигнал экипажу, но экипаж ошибается (событие 9) и задействует стоп-кран другого двигателя, тот останавливается. В это время в первом двигателе продолжается пожар, пассажиры замечают шлейф дыма и экипаж получает сообщение об этом. Экипаж задействует стоп-кран горящего двигателя, тот останавливается, оба двигателя оказываются отключенными. В результате длительного и сильного пожара в первом двигателе прогорает и разрушается пилон, двигатель отделяется от самолета, из-за чего при этом возникает поперечный дисбаланс. В этих условиях на запуск отключенного ранее исправного двигателя не хватает времени и реализуется событие (событие 2) — ситуация отключения обоих двигателей (фактически, вершина 18 реализуется как последствие события 9). Возникает необходимость экстренной посадки, условия которой усложняются паникой в салоне, сниженной скоростью, потерей основных источников электро- и гидропитания вследствие выключения двигателей. Посадка заканчивается частичным разрушением самолета и эвакуацией пассажиров и экипажа.

В приведенном выше сценарии реализуется одно из возможных минимальных сечений дерева отказов. С использованием разработанного программного обеспечения [11] показано, что в приведенном выше фрагменте насчитывается 6 минимальных сечений из 2 событий и 30 минимальных сечений из 4 событий каждое.

Определим вероятность критических сочетаний событий на примере приведенного выше сценария для событий 9, 12, 15, 16. Будем предполагать, что рассматриваемые неблагоприятные события независимы, и их интенсивности представляют собой постоянные величины, что традиционно допускается для периодов нормальной работы сложных объектов. Эти допущения позволяют представить исследуемые процессы с использованием марковских систем и для определения вероятностей критических сочетаний событий воспользоваться решением систем дифференциальных уравнений Колмогорова – Чепмена. Модель Маркова традиционно используется в теории надежности, а в области авиации она рекомендована [7].

При использовании модели Маркова неблагоприятные события рассматриваем как «отказы», а действия по их парированию/профилактике — как «восстановления». Для сечения из n событий строится граф с вершинами, которые обозначают состояния $s_0, \ldots, s_{2^n-1}$ системы, соответствующие всевозможным комбинациям из $0, \ldots, n$ рассматриваемых событий.

Переходы между вершинами графа соответствуют «отказам» и их «восстановлениям». По графу строится система линейных дифференциальных уравнений, решение которой при заданных интенсивностях «отказов» и «восстановлений» представляет собой вероятности $P_0(t), \ldots, P_{2^n-1}(t)$ нахождения системы в состояниях $s_0, \ldots, s_{2^n-1}$ соответственно. Вероятность $P_{2^n-1}(t)$ состояния s_{2^n-1}, в котором реали-

зуются все рассматриваемые события, соответствует вероятности реализации критического сочетания событий. При известных интенсивностях «отказов» интенсивности «восстановлений» могут быть подобраны путем численного эксперимента таким образом, чтобы значение вероятности $P_{2^n-1}(t)$ (максимум этой функции на рассматриваемом отрезке) не превосходила допустимого предела. На основании найденной минимальной интенсивности «восстановления», при которой вероятность $P_{2^n-1}(t)$ оказывается в допустимых пределах, подбираются меры, позволяющие достичь такой интенсивности.

Приведем примеры расчета. Рассмотрим ситуацию, когда интенсивности событий 9, 12, 15, 16 равны 1 1/ч, причем разрыв топливного трубопровода (событие 12) и отказ пожарного крана двигателя (событие 16) не восстанавливаются, а интенсивность восстановления «отказа» в виде ошибки пилота при переключении рычагов равна: раз в полчаса происходит взаимодействие с другим членом экипажа. Беря в качестве начальных условий $P_1(0) = 0.0003$, $P_2(0) = 0.001$, $P_3(0) = 0.00005$, $P_4(0) = 0.005$, что соответствует накопленной статистике нарушений в работе топливного трубопровода, перегревам поверхностей мотогондолы, отказам пожарного крана двигателя и ошибок пилотов при работе с органами управления ВС, $P_5(0) = \ldots = P_{15}(0) = 0$, $P_0(0) = 0.99365$. Цель численного эксперимента — выяснить, при каком значении интенсивности μ_2 мероприятий по устранению перегрева поверхностей мотогондолы вероятность критического сочетания событий не будет превышать 5×10^{-5}. Решая систему дифференциальных уравнений Колмогорова – Чепмена при μ_2 от 10 до 50 с шагом 2 методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности находим из результатов численного решения (рис. 2), что при $\mu_2 > 40$ 1/ч вероятность критического сочетания событий (авария при посадке в результате возгорания в мотогондоле) будет меньше 5×10^{-5}.

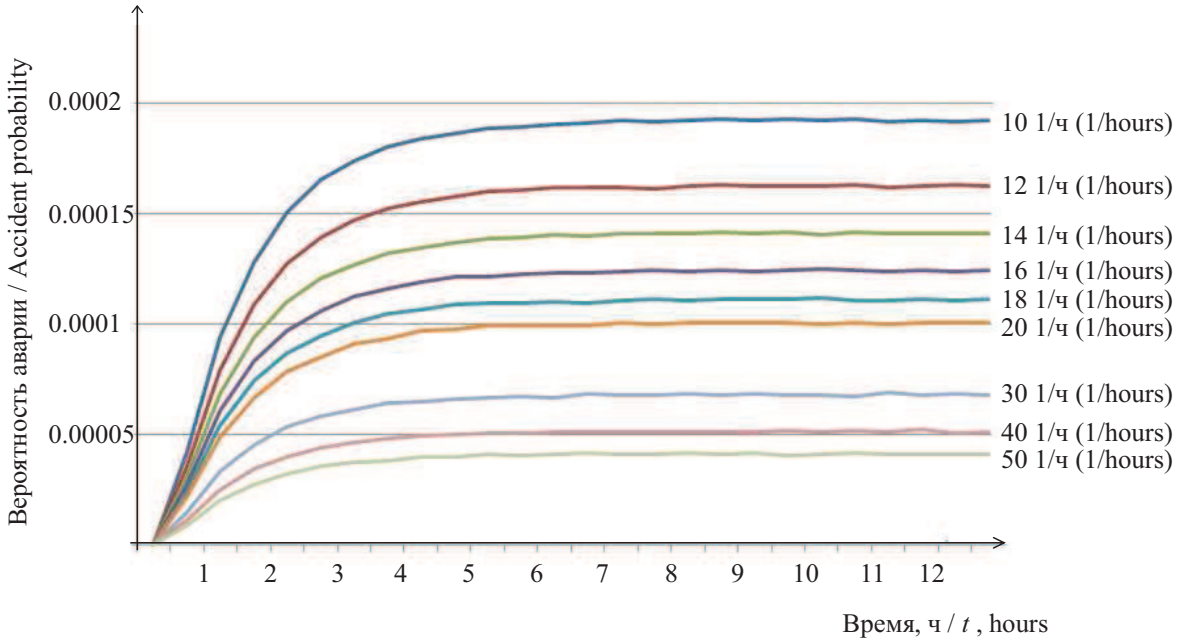


Рис. 2. Вероятность наступления критического сочетания событий при различных значениях интенсивности устранения перегрева поверхностей мотогондолы

Fig. 2. The probability of the onset of a critical combination of events for different values of the intensity of eliminating the overheating of nacelle surfaces

В следующем численном примере рассмотрим ситуацию вхождения воздушного судна в область повышенной атмосферной активности, что означает повышенное значение для начальной вероятности перегрева поверхностей мотогондолы: $P_2(0) = 0.5$. Остальные начальные условия: $P_1(0) = 0.0001$, $P_3(0) = 0.001$, $P_4(0) = 0.001$ соответственно для разрывов топливного трубопровода, отказов пожарного крана и ошибок пилота. Частоты возникновения «отказов» по прежнему равны 1 1/ч.

Цель численного эксперимента — изучение областей, в которые должна попасть интенсивность восстановления отказа «ошибка пилота» для того, чтобы вероятность рассматриваемого критического сочетания событий была достаточно низкой при условии, что восстановление отказов «разрыв топливного трубопровода», «перегрев поверхностей мотогондолы», «отказ пожарного крана двигателя» не производится.

На рис. 3 представлен ряд результатов численного эксперимента, частота восстановления варьируется от 0 до 20 с шагом 2.

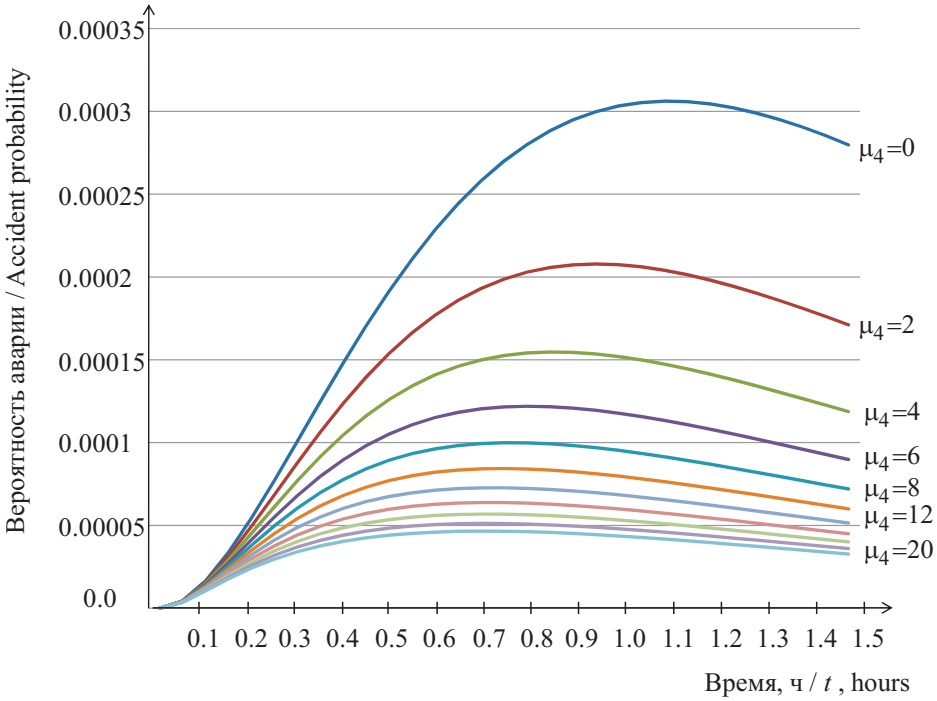


Рис. 3. Вероятность наступления критического сочетания событий при различных значениях интенсивности предупреждения ошибок пилота
Fig. 3. The probability of the onset of a critical combination of events for different values of the pilot error warning intensity

Как показывают результаты численного эксперимента, значение μ_4 (частота восстановления отказа «ошибка пилота») должно быть достаточно высоким для того, чтобы вероятность критического сочетания событий в рассматриваемой ситуации не превышала 0.001: необходимо выполнение условия $\mu_4 \geqslant 8$ 1/ч. Это значение показывает необходимую интенсивность взаимодействия между членами экипажа, смены пилота, проведения дополнительного контроля над его действиями.

Таким образом, предлагаемые методы, модели и алгоритмы позволяют определить составляющие комплекса ресурсов и частей техногенной системы [12–15], которые

могут быть использованы для предотвращения вероятных критических сочетаний событий, приводящих к авариям.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлены некоторые результаты, полученные при исследовании проблемы критических сочетаний событий, вызывающих аварии и катастрофы в человекомашинных системах. Сформулирована задача предотвращения критических сочетаний событий. При решении этой задачи анализ критических сочетаний осуществляется на базе математического аппарата теории надежности. Полученные результаты будут использованы в концепции перспективной информационно-управляющей системы, которая исходя из реальной ситуации определяет вероятности критических сочетаний событий и возможные меры по снижению этой вероятности в случае, если она превышает допустимые пределы. Приводится пример анализа возникновения и путей предотвращения критических сочетаний событий в процессе аварийной посадки воздушного судна.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00536).

Библиографический список

1. *Новожилов Г. В., Неймарк М. С., Цесарский Л. Г.* Безопасность полета самолета. Концепция и технология. М. : Машиностроение, 2003. 144 с.
2. *Резчиков А. Ф., Богомолов А. С.* Критические сочетания событий — причины аварий в человеко-машинных системах // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2015) : тр. 8-й междунар. конф. : в 2 т. М. : ИПУ РАН, 2015. Т. 1. С. 130–135.
3. *Новожилов Г. В., Резчиков А. Ф., Неймарк М. С., Богомолов А. С., Цесарский Л. Г., Филимонюк Л. Ю.* Проблема критических сочетаний событий в системе «экипаж — воздушное судно — диспетчер» // Полет. 2015. Вып. 2. С. 10–16.
4. ГОСТ 27.31-95 (МЭК 812-1985). Надежность в технике. Анализ видов, последствий и критичности отказов. Основные положения. М. : Изд-во стандартов, 1997. 12 с.
5. *Острейковский В. А., Швыряев Ю. В.* Безопасность атомных станций. Вероятностный анализ. М. : Физматлит, 2008. 352 с.
6. Руководство по управлению безопасностью полётов (РУБП). Документ ИКАО Doc 9859 AN/474. Изд. третье / Международная организация гражданской авиации, 2013. URL: http://www.aviadocs.net/icaodocs/docs/9859_cons_ru.pdf (дата обращения: 15.02.2017).
7. Руководство Р-4761 по методам оценки безопасности систем и бортового оборудования самолетов гражданской авиации / Авиационный регистр. Межгосударственный Авиационный Комитет. М. : Авиаиздат, 2010. 265 с.
8. Расследования Межгосударственного авиационного комитета (МАК). URL: http://www.mak-iac.org/rassledovaniya/ (дата обращения: 23.10.2016).
9. *Резчиков А. Ф., Твердохлебов В. А.* Причинно-следственные комплексы как модели процессов в сложных системах // Мехатроника, автоматизация, управление. 2007. Вып. 7. С. 1–9.
10. *Резчиков А. Ф., Твердохлебов В. А.* Причинно-следственные комплексы взаимодействий в производственных процессах // Проблемы управления. 2010. Вып. 3. С. 51–59.
11. *Шоломов К. И.* Комплекс программ моделирования и анализа критических сочетаний событий на основе построения и обработки динамических причинно-следственных дере-

вьев // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-28. Саратов : Изд-во СГТУ им. Гагарина Ю. А., 2015. С. 300–304.
12. *Rezchikov A., Kushnikov V., Ivaschenko V., Bogomolov A., Filimonyuk L., Kachur K.* Control of the air transportation system with flight safety as the criterion // Automation control theory perspectives in intelligent systems : Proc. 5th Computer Science On-line Conference 2016 (CSOC2016). Vol. 3. Shpringer Intern. Publ., 2016. P. 423–432. DOI: 10.1007/978-3-319-33389-2_40.
13. *Rezchikov A., Dolinina O., Kushnikov V., Ivaschenko V., Kachur K., Bogomolov A., Filimonyuk L.* The Problem of a Human Factor in Aviation Transport Systems // Indian Journal of Science & Technology. 2016. Vol. 9, iss. 46. P. 16–20. DOI: 10.17485/ijst/2016/v9i46/107351.
14. *Kushnikov V. A., Rezchikov A. F., Tsvirkun A. D.* Control in man-machine systems with automated correction of objectives // Meitan Kexue Jishu. 1998. Vol. 26, № 11. P. 168–175.
15. *Адамович К. Ю.* Математическая модель для прогнозирования значений показателей безопасности транспортной системы // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ. Саратов : Изд-во СГТУ им. Гагарина Ю. А., 2015. № 6 (76). С. 146–151.

Образец для цитирования:
Богомолов А. С. Анализ путей возникновения и предотвращения критических сочетаний событий в человекомашинных системах // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 219–230. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-219-230.

Analysis of the Ways of Occurrence and Prevention of Critical Combinations of Events in Man-machine Systems

A. S. Bogomolov

Aleksey S. Bogomolov, ORCID: 0000-0002-6972-3181, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia; Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24, Rabochaya str., 410028, Saratov, Russia, alexbogomolov@ya.ru

Models, methods and algorithms are proposed for analyzing the processes of development and preventing critical combinations of events of various kinds that lead to accidents and catastrophes in man-machine and organizational systems. Critical combinations are combinations of events that are individually relatively harmless, but in combination lead to an accident. In technogenic systems, such events are individual operator errors, equipment failures and adverse environmental effects. To investigate such combinations and identify measures to prevent them, the approaches of probabilistic safety analysis are used. Logical trees are constructed, the minimum sections of which are considered as models of critical combinations of events. For minimal sections, graphs of events and systems of differential equations are constructed, from the solutions of which one can determine the probability of realizing a particular minimum section, and also the intensity of measures to reduce these probabilities, which should be undertaken at different time intervals for the given system. As an example, situations associated with the emergence of critical combinations of events leading to fires in the engine of a twin-engine aircraft and its subsequent emergency landing are analyzed.

Key words: aviation transport system, critical combination of events, accident, probabilistic safety analysis, fault tree, minimum section.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 16-01-00536).

References

1. Novozhilov G. V., Neymark M. S., Tsesarskiy L.G. *Bezopasnost' poleta samoleta. Koncepciya i tekhnologiya* [The Aircraft flight safety. The concept and technology]. Moscow, Mashinostroenie, 2003. 144 p. (in Russian).
2. Rezchikov A. F., Bogomolov A. S. The Critical Combinations of events are a causes of accidents in Man-Machine Systems. *Management of Large-Scale System Development MLSD'2015 : Proc. Seventh Intern. Conf.* Moscow, ICS RAS, 2015, vol. 1, pp. 130–135 (in Russian).
3. Novozhilov G. V., Rezchikov A. F., Neymark M. S., Bogomolov A. S., Tsesarskiy L. G., Filimonyuk L. Yu. The Problem of Events Critical Combination. „Crew – Airplane-Air – Traffic Controller" Systems. *Polet*, 2015, no. 2, pp. 10–16 (in Russian).
4. *State Standard 27.31-95 (IEC 812-1985)*. Dependability in technics. Failure mode, effects and criticality analisys. Basic principles. Moscow, Standartinform, 1997. 12 p. (in Russian).
5. Ostreykovsky V. A., Shvyryaev Yu. V. *Bezopasnost' atomnyh stancij. Veroyatnostnyj analiz* [Safety of nuclear power stations. Probabilistic analysis]. Moscow, Fizmatlit, 2008, 352 p. (in Russian).
6. *Safety Management Manual (SMM). Document ICAO 9859 AN/474*. Third Edition / International Civil Aviation Organization, 2013. Available at: https://www.icao.int/safety/SafetyManagement/Documents/Doc.9859.3rd%20Edition.alltext.en.pdf (accessed 15, February, 2017).
7. *The management and implementation of safety assessment methods for airborne systems and equipment ARP-4761*. SAE International. Aerospace Sector. Moscow, Aviaizdat, 2010. 265 p. (in Russian).
8. *The Interstate Aviation Committee (IAC)*. Available at: http://www.mak-iac.org/rassledovaniya/ (accessed 23, October, 2016) (in Russian).
9. Rezchikov A. F., Tverdohlebov V. A. Cause-and-Effect Complexes for Modeling of Processes in Complicated Systems. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2007, iss. 7, pp. 1–9. (in Russian).
10. Rezchikov A. F., Tverdohlebov V. A. Cause-and-Effect Complexes of Interaction in Production Processes. *Control Sciences*, 2010, iss. 3, pp. 51–59 (in Russian).
11. Sholomov K. I. The complex of simulation programs and analysis of critical combinations of events based on construction and processing of dynamic Cause-And-Effect Trees. *Mathematical Methods in Technics and Technologies – MMTT-28*. Saratov, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov Publ., 2015, pp. 300–304 (in Russian).
12. Rezchikov A., Kushnikov V., Ivaschenko V., Bogomolov A., Filimonyuk L., Kachur K. Control of the air transportation system with flight safety as the criterion. *Automation control theory perspectives in intelligent systems : Proc. 5th Computer Science On-line Conference, 2016 (CSOC2016), vol. 3*. Shpringer Intern. Publ., 2016, pp. 423–432. DOI: 10.1007/978-3-319-33389-2_40.
13. Rezchikov A., Dolinina O., Kushnikov V., Ivaschenko V., Kachur K., Bogomolov A., Filimonyuk L. The Problem of a Human Factor in Aviation Transport Systems. *Indian Journal of Science & Technology*, 2016, vol. 9, iss. 46, pp. 16–20. DOI: 10.17485/ijst/2016/v9i46/107351.
14. Kushnikov V. A., Rezchikov A. F., Tsvirkun A. D. Control in man-machine systems with automated correction of objectives. *Meitan Kexue Jishu*, 1998, vol. 26, no. 11, pp. 168–175.

15. Adamovich K. Yu. Matematicheskaia model' dlia prognozirovaniia znachenii pokazatelei bezopasnosti transportnoi sistemy [A mathematical model for predicting the values of safety indicators of the transport system]. *Mathematical Methods in Technics and Technologies – MMTT*. Saratov, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov Publ., 2015, no. 6 (76), pp. 146–151 (in Russian).

Cite this article as:
Bogomolov A. S. Analysis of the Ways of Occurrence and Prevention of Critical Combinations of Events in Man-machine Systems. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 219–230 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-219-230.

УДК 004.942

МОДЕЛЬ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК НАВОДНЕНИЯ, ВЛИЯЮЩИХ НА ВЕЛИЧИНУ ПРИЧИНЯЕМОГО УЩЕРБА

М. В. Хамутова[1], **В. А. Кушников**[2]

[1]Хамутова Мария Васильевна, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, mariuka7d@rambler.ru

[2]Кушников Вадим Алексеевич, доктор технических наук, директор, Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410024, Саратов, Рабочая, 24, kushnikoff@yandex.ru

В соответствии с ГОСТ выбраны характеристики наводнений, влияющие на величину причиняемого им ущерба, прогнозирование которых позволит повысить эффективность ликвидации последствий наводнений. На основе формального аппарата системной динамики, который учитывает причинно-следственные связи между моделируемыми переменными, разработана математическая модель, позволяющая прогнозировать характеристики наводнений. Построен граф причинно-следственных связей, существующих между моделируемыми характеристиками наводнений. Математическая модель для прогнозирования характеристик наводнений описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Представлены функциональные зависимости правых частей системы уравнений, описывающие математическую модель. Численное решение системы уравнений получено с помощью метода Рунге – Кутты. Проведены вычислительные эксперименты, позволяющие на различных временных интервалах и с учетом изменяющихся параметров внешней среды определить моделируемые характеристики. Сравнение прогнозируемых характеристик, рассчитанных по модели с реальными значениями наводнения, произошедшего в Приморье в августе 2001 г., подтверждает адекватность математической модели. Полученные результаты могут быть использованы при разработке информационных систем прогнозирования последствий наводнения для оперативно-диспетчерского персонала МЧС.

Ключевые слова: математическая модель, системная динамика, прогнозирование характеристик наводнений.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-231-238

ВВЕДЕНИЕ

Наводнения встречаются практически по всей территории России, причиняют материальный ущерб, наносят вред здоровью населения и приводят к гибели людей. Для повышения эффективности ликвидации последствий наводнений необходимо спрогнозировать в режиме чрезвычайной ситуации характеристики наводнения, влияющие на величину ущерба. Существующие модели прогнозирования не позволяют определить совокупность характеристик наводнения с учетом большого количества нелинейных обратных связей между ними [1, 2]. Данное обстоятельство проводит к

© Хамутова М. В., Кушников В. А., 2017

уменьшению точности прогнозирования, что негативно влияет на процессы ликвидации последствий наводнений в условиях чрезвычайной ситуации.

В статье приведена математическая модель для прогнозирования характеристик наводнений, влияющих на величину ущерба. Предложен и обоснован ориентированный граф причинно-следственных связей, существующий между прогнозируемыми характеристиками наводнения. При разработке математической модели использован формальный аппарат системной динамики, учитывающий причинно-следственные связи между моделируемыми переменными. Результаты вычислительного эксперимента подтверждают адекватность математической модели.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В соответствии с ГОСТ[1] в качестве прогнозируемых характеристик наводнения были выбраны: X_1 — численность группировки сил, участвующих в аварийно-спасательных работах; X_2 — количество жилых домов, разрушенных и поврежденных в результате наводнения; X_3 — численность населения, эвакуированного из зоны затопления; X_4 — количество погибших; X_5 — протяженность железных и автомобильных дорог, оказавшихся в зоне затопления; X_6 — количество промышленных предприятий в зоне наводнения; X_7 — количество транспортных средств, участвующих в аварийно-спасательных работах; X_8 — численность населения в зоне затопления; X_9 — площадь сельскохозяйственных угодий, охваченных наводнением; X_{10} — количество погибших сельскохозяйственных животных.

Математическая модель прогнозирования характеристик наводнения, влияющих на величину ущерба, разрабатывается на основе аппарата системной динамики, где при описании моделируемых переменных используется система нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\frac{dX_i}{dt} = X_i^+ + X_i^-, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где X_i^+, X_i^-, $i = \overline{1,n}$ — непрерывные или кусочно-непрерывные функции, определяющие положительную и отрицательную скорость изменения переменной X_i [3]. В свою очередь, $X_i^+ = f_i^+(F_1, F_2, \ldots, F_m)$, $X_i^- = f_i^-(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ — функции от факторов F_j, $j = \overline{1,m}$, влияющих на скорость изменения переменной, при этом факторы F_j могут быть функциями от прогнозируемых переменных X_i, $i = \overline{1,n}$ [4, 5].

На основании анализа причинно-следственных связей, существующих между прогнозируемыми характеристиками наводнений, разработан ориентированный граф, представленный на рис. 1. Моделируемые характеристики X_i являются вершинами графа, а исходящие и входящие ребра характеризуют функциональные связи между ними.

[1]ГОСТ 22.0.06-97/ГОСТ Р 22.0.06-95. Безопасность в чрезвычайных ситуациях. Источники природных чрезвычайных ситуаций. Поражающие факторы. Номенклатура параметров поражающих воздействий. Принят постановлением Госстандарта РФ № 308 от 20.06.1995 г.

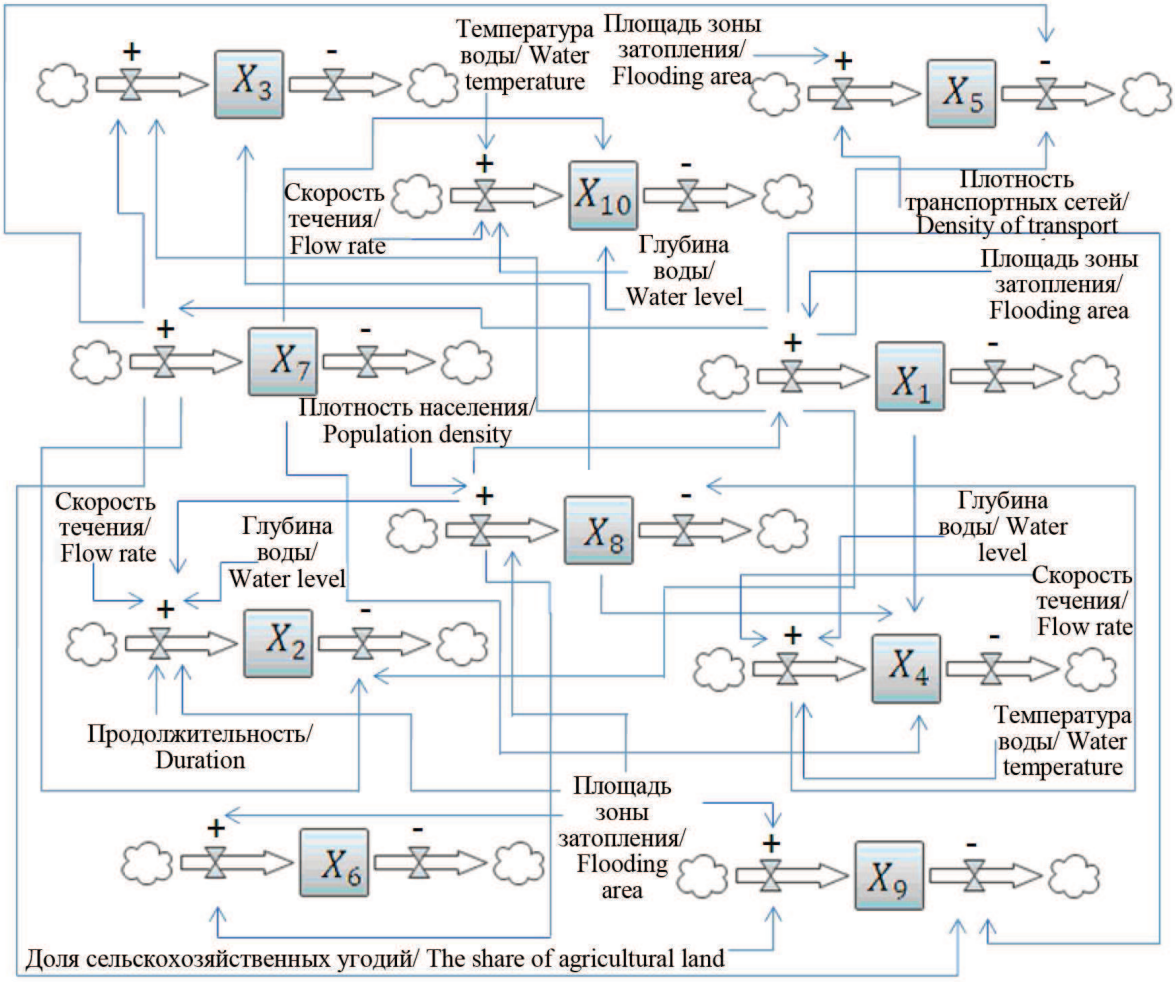


Рис. 1. Граф причинно-следственных связей
Fig. 1. The graph of cause-effect relations

Учитывая ориентированный граф причинно-следственных связей между прогнозируемыми характеристиками и параметрами внешней среды, разработанная математическая модель имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dX_1(t)}{dt} = f_1{}^+(S(t), X_8(t)), \\ \frac{dX_2(t)}{dt} = f_2{}^+(F(t), G(t), S(t), X_8(t), t) - f_2^-(X_1(t), X_7(t)), \\ \frac{dX_3(t)}{dt} = f_3{}^+(X_8(t), X_1(t), X_7(t)), \\ \frac{dX_4(t)}{dt} = f_4{}^+(F(t), G(t), T(t), X_8(t), X_7(t), X_1(t)), \\ \frac{dX_5(t)}{dt} = f_5{}^+(A(t), S(t)) - f_5^-(X_1(t), X_7(t)), \\ \frac{dX_6(t)}{dt} = f_6{}^+(S(t), X_8(t)), \\ \frac{dX_7(t)}{dt} = f_7{}^+(X_1(t)), \\ \frac{dX_8(t)}{dt} = f_8{}^+(D(t), S(t)) - f_8^-(X_4), \\ \frac{dX_9(t)}{dt} = f_9{}^+(I(t), S(t)) - f_9^-(X_1(t), X_7(t)), \\ \frac{dX_{10}(t)}{dt} = f_{10}{}^+(F(t), G(t), T(t), S(t), X_1(t), X_7(t)), \end{cases} \quad (2)$$

где $A(t)$ — плотность транспортных сетей в зоне затопления, $D(t)$ — плотность населения, $F(t)$, $G(t)$, $T(t)$ — средняя скорость течения, глубина и температура воды соответственно, $I(t)$ — доля площади сельскохозяйственных угодий, $S(t)$ — площадь зоны затопления.

Зависимости f_i^- и f_i^+ определяются на основе анализа статистических данных и аппроксимируются полиномами. При отсутствии или недостоверности статистических данных, используемых при построении модели (2), эти зависимости могут быть определены исходя из физического смысла моделируемого процесса [6, 7]. Площадь зоны затопления $S(t)$, средняя скорость течения $F(t)$, средняя глубина воды $G(t)$ и средняя температура воды $T(t)$ рассчитываются экспертами по известным методикам. В частности, для определения площади зоны затопления могут использоваться методы, позволяющие моделировать динамику поверхностных вод на произвольном рельефе местности.

2. ПРОВЕРКА АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ

Проверка адекватности модели осуществляется посредством сравнения характеристик, определенных по модели (2), с реальными характеристиками наводнения, происшедшего в августе 2001 г. в Приморье. В таблице представлены функции f_i^- и f_i^+ системы (2), построенные для данного наводнения по методикам, представленным в [6, 7].

Аналитический вид функций f_i^- и f_i^+

The analytic form of the functions f_i^- and f_i^+

${f_1}^+$	$\begin{cases} k_1\sqrt{S(t)X_8}, & S(t) > \varepsilon, \\ 0, & S(t) \leqslant \varepsilon, \end{cases}$	${f_6}^+$	$\begin{cases} k_6 S(t)^{0.5} {X_8}^{0.1}, & S(t) > \varepsilon, \\ 0, & S(t) \leqslant \varepsilon, \end{cases}$
${f_2}^+$	$\begin{cases} k_2 F(t)G(t)t\sqrt[3]{S(t)X_8}, & S(t) > \varepsilon, \\ 0, & S(t) \leqslant \varepsilon, \end{cases}$	${f_7}^+$	$k_7 X_1$
${f_3}^+$	$k_3 \frac{X_8 X_1}{X_7}$	${f_8}^+$	$\begin{cases} k_8 D(t)S(t), & S(t) > \varepsilon, \\ 0, & S(t) \leqslant \varepsilon, \end{cases}$
${f_4}^+$	$k_4 \frac{F(t)G(t)T(t)X_8}{X_7 X_1}$	${f_9}^+$	$\begin{cases} k_9 I(t)S(t), & S(t) > \varepsilon, \\ 0, & S(t) \leqslant \varepsilon, \end{cases}$
${f_5}^+$	$\begin{cases} k_5 A(t)S(t), S(t) > \varepsilon, \\ 0, S(t) \leqslant \varepsilon, \end{cases}$	${f_{10}}^+$	$\begin{cases} k_{10} \frac{F(t)G(t)T(t)S(t)}{X_1 X_7}, & S(t) > \varepsilon, \\ 0, & S(t) \leqslant \varepsilon, \end{cases}$
${f_2}^-$	$k_{11} X_1 X_7$	${f_5}^-$	$k_{12} X_1 X_7$
${f_8}^-$	$k_{13} X_4$	${f_9}^-$	$k_{14} X_1 X_7$

В частности, функция $f_1^+(S(t), X_8(t))$, характеризующая скорость изменения переменной X_1, выбрана прямо пропорционально площади зоны затопления и численности населения в зоне затопления, что соответствует экспериментальным данным.

Для нормирования произведения факторов $S(t)$ и $X_8(t)$ используется возведение в степень 0.5, что обеспечивает наиболее точное совпадение с реальными результатами. Таким образом, искомая зависимость имеет вид

$$f_1{}^+(S(t), X_8(t)) = \begin{cases} k_1\sqrt{S(t)X_8}, & S(t) > \varepsilon, \\ 0, & S(t) \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Коэффициенты k_i, $i = \overline{1, 14}$, определяются посредством вычислительного эксперимента на этапе адаптации модели к объекту исследования. Система дифференциальных уравнений (2) с учетом данных, приведенных в таблице, была решена численным методом Рунге – Кутты 4-го порядка при начальных условиях $t_0 = 1$, $X_i(t_0) = X_{i0}$, $i = \overline{1, 10}$.

На рис. 2 представлено решение системы уравнений (2), нормированное относительно максимальных значений моделируемых характеристик: $X_i^N = X_i/X_i^{\max}$.

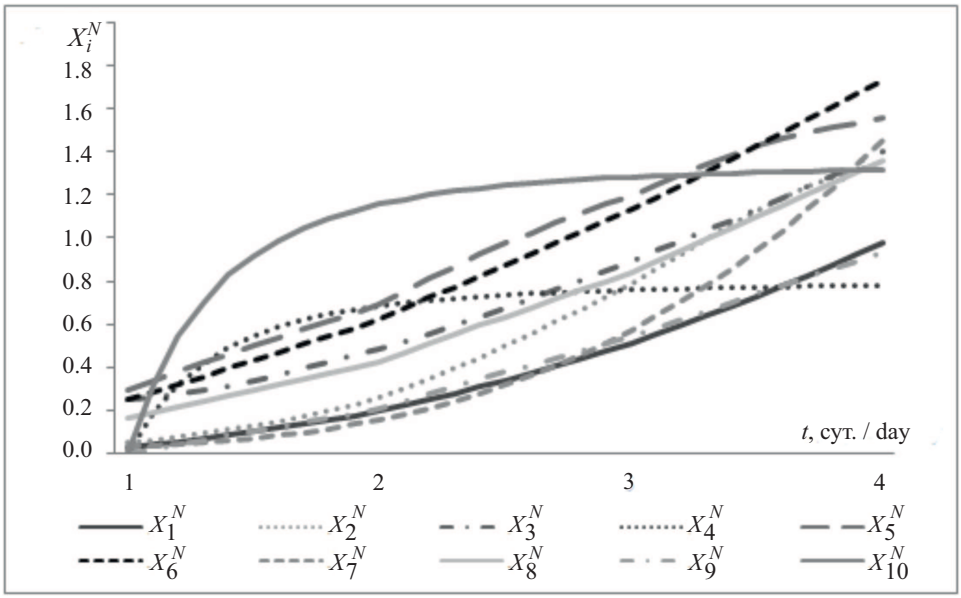


Рис. 2. Результаты прогнозирования характеристик наводнения
Fig. 2. Results of forecasting flood characteristics

В частности, анализ зависимости $X_4^N(t)$ позволяет сделать вывод, что максимальные потери среди населения приходятся на первые сутки наводнения и в дальнейшем их рост незначителен, что подтверждается экспертами. Увеличение остальных прогнозируемых характеристик обусловлено ростом площади зоны затопления, пик которого приходится на 4-й день наводнения.

На рис. 3 выполнено сравнение характеристики $X_4^N(t)$, определенной по модели (2), с реальными статистическими данными, интерполированными многочленом Лагранжа $Y_4(t)$.

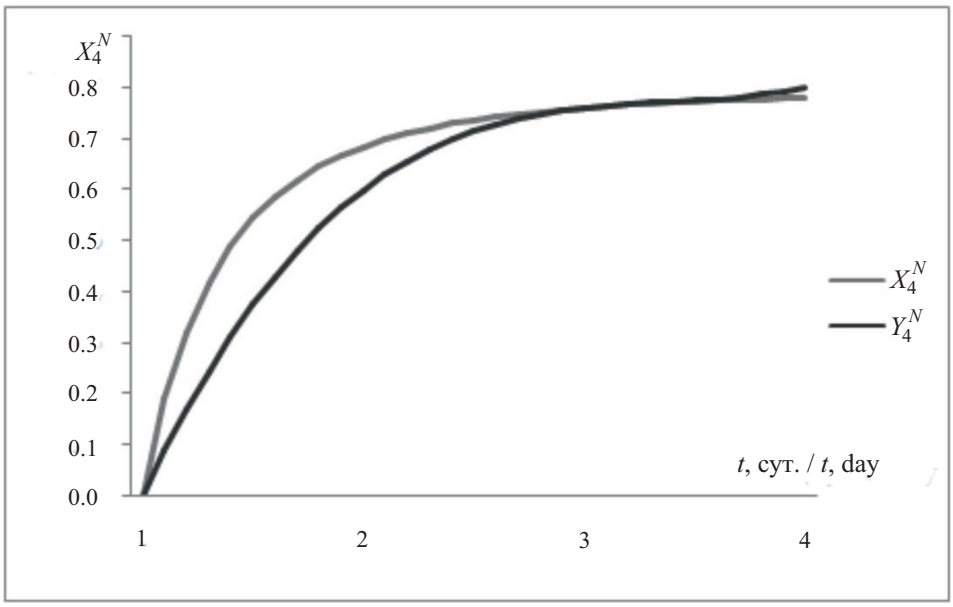


Рис. 3. Сравнение значений моделируемой характеристики $X_4^N(t)$ с реальными данными

Fig. 3. Comparison of the values of the simulated characteristic $X_4^N(t)$ with real data

Анализ полученных графиков позволяет утверждать, что значения $X_4^N(t)$ лишь незначительно отличаются от реальных данных в узлах $t = \overline{1,4}$ $\Delta_{\text{ср}}^{X_4^N} \approx 3\%$. При сравнении остальных моделируемых характеристик модели (2) с их реальными значениями, среднее значение относительных погрешностей в узлах моделирования для каждой характеристики не превышает 10%, что позволяет утверждать, что разработанная математическая модель является адекватной [8, 9].

Библиографический список

1. *Авакян А. Б.* Наводнения. Концепция защиты // Изв. РАН. Сер. географическая. 2000. № 5. С. 40–46.
2. *Воронин А. А., Васильченко А. А., Храпов С. С., Агафонникова Е. О.* Анализ эффективности природовосстановительных проектов в эколого-экономической системе «Волжская ГЭС — Волго-Ахтубинская пойма» // Управление большими системами. М. : ИПУ РАН, 2014. Вып. 52. С. 133–147.
3. *Садовничий В. А., Акаев А. А., Коротаев А. В., Малков С. Ю.* Моделирование и прогнозирование мировой динамики / Научный совет по Программе фунд. исслед. Президиума РАН. М. : ИСПИ РАН, 2012. 360 с. Экономика и социология знания.
4. *Бродский Ю. И.* Лекции по математическому и имитационному моделированию. М. ; Берлин : Директ-Медиа, 2015. 240 с.
5. *Белотелов Н. В., Бродский Ю. И., Павловский Ю. Н.* Сложность. Математическое моделирование. Гуманитарный анализ : Исследование исторических, военных, социально-экономических и политических процессов. М. : Кн. дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 320 с.
6. *Федянин В. И., Проскурников Ю. Е.* Организация и ведение аварийно-спасательных и других неотложных работ при ликвидации чрезвычайных ситуаций природного характера : учеб. пособие. Воронеж : Воронеж. гос. техн. ун-т, 2006. Ч. 1. 469 с.

7. РД 153-34.2-002-01. Временная методика оценки ущерба, возможного вследствие аварии гидротехнического сооружения (приказ Минэнерго России № 130 от 26.04.2001 г.). URL: https://znaytovar.ru/gost/2/RD_15334200201_Vremennaya_meto.html (дата обращения: 01.02.2017).
8. *Хамутова М. В., Кушников В. А.* Математическая модель прогнозирования последствий наводнений // Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 3. С. 109–114.
9. *Клюев В. В., Резчиков А. Ф., Кушников В. А., Богомолов А. С., Иващенко В. А., Филимонюк Л. Ю., Хамутова М. В.* Информационно-управляющая система для поддержки принятия решения по ликвидации последствий наводнения // Вестн. компьютерных и информационных технологий. 2016. № 11 (149). С. 39–45.

Образец для цитирования:
Хамутова М. В., Кушников В. А. Модель прогнозирования характеристик наводнения, влияющих на величину причиняемого ущерба // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 231–238. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-231-238.

A Model for Forecasting Characteristics of Floods Affecting the Value of the Caused Damage

M. V. Khamutova[1], **V. A. Kushnikov**[2]

[1]Maria V. Khamutova, ORCID: 0000-0002-7926-1347, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, mariuka7d@rambler.ru
[2]Vadim A. Kushnikov, Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24, Rabochaya str., 410028, Saratov, Russia, iptmuran@san.ru

According to GOST (State Standard) characteristics of floods are selected that have influence on the extent of damage. Forecasting of such characteristics will improve the efficiency of liquidation of floods effects. On the basis of formal apparatus of system dynamics that takes into account the casual relationships between modeled variables a mathematical model is developed to forecast characteristics of floods. A graph of cause-effect relations that exist between modeled characteristics is constructed. The mathematical model is described by a system of first order nonlinear differential equations. The numerical solution of the system was obtained with the aid of Runge – Kutta method. Computational experiments were conducted that allowed to determine the modeled characteristics for different time intervals. Comparison of the characteristics calculated according to the model with their real values during the Primorski Krai's flood in August 2001 confirms the adequacy of the mathematical model. The results obtained can be used in the development of information systems of forecasting the flood effects for operative and dispatching personnel of the EMERCOM.

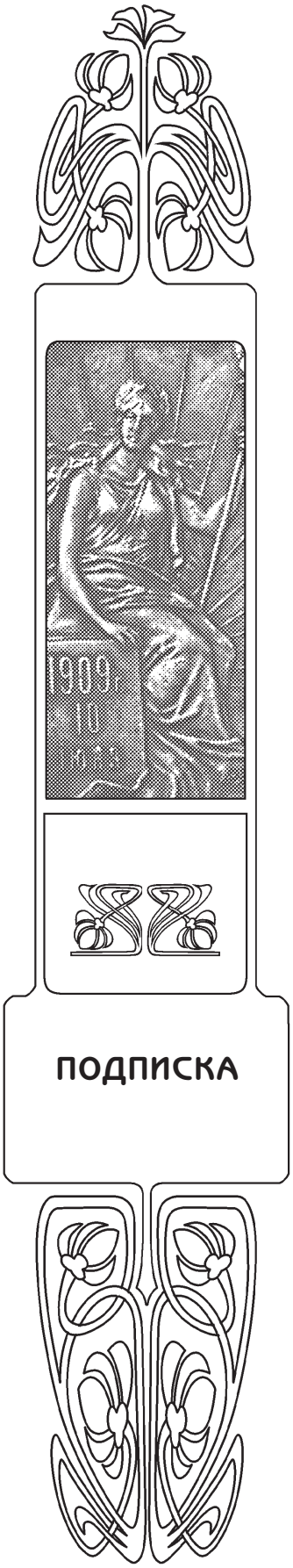
Key words: mathematical model, system dynamics, forecasting the characteristics of floods.

References

1. Avakjan A. B. Navodnenija. Koncepcija zashhity [Floods. The concept of protection]. *Izvestiya RAN. Ser. Geograficheskaya* [Izvestiya RAS. Ser. Geographic], 2000, no. 5, pp. 40–46 (in Russian).

2. Voronin A., Vasilchenko A., Chrapov S., Agafonnikova E. Efficiency analysis for nature restoration projects in ecologo-economic system of Volga HPP and Volga-Akhtuba Floodplain. *Large-scale Systems Control*. Moscow, IPU RAN, 2014, iss. 52, pp. 133–147 (in Russian).
3. Sadovnichiy V. A., Akayev A. A., Korotayev A. V., Malkov S. Yu. Modelling and Forecasting World Dynamics. *Scientific Council for "Economics and Sociology of Knowledge" Fundamental Research Programme of the Presidium of the RAS*. Moscow, RAS ISPR, 2012.
4. Brodskij Ju. I. Lekcii po matematicheskomu i imitacionnomu modelirovaniju [Lectures on mathematical and simulation modeling]. Moscow, Berlin, Direkt-Media, 2015. 240 p. (in Russian).
5. Belotelov N. V., Brodskij Ju. I., Pavlovskij Ju. N. Complexity. Mathematical modeling. Humanitarian analysis: the Study of the historical, military, socio-economic and political processes. Mosow, LIBROKOM Publ., 2009. 320 p. (in Russian).
6. Fedianin V. I., Proskurnikov Yu. E. Organization and imple-mentation of rescue and other emergency operations when liquidating the emergent situations of natural origin. Voronezh, Voronezh Techn. Univ. Press, 2006, pt. 1. 469 p. (in Russian).
7. RD 153-34.2-002-01. Temporary methods of assessment of damage, possible due to an accident waterworks (the Order of the Ministry of Energy of Russia no. 130, 26, April, 2001) (in Russian). Available at: https://znaytovar.ru/gost/2/RD_15334200201_Vremennaya_meto.html (accessed 01, February, 2017)
8. Khamutova M. V., Kushnikov V. A. Mathematical model for forecasting of flood effects. *Vestnik Astrakhan State Technical Univ. Ser. Management, Computer Sciences and Informatics*, 2016, no. 3, pp. 109–114 (in Russian).
9. Klyuev V. V., Rezchikov A. F., Kushnikov V. A., Bogomolov A. S., Ivashchenko V. A., Filimonyuk L. Yu., Khamutova M. V. Informational-control system for decision-making supply during elimination of floods' consequences. *Vestnik komp'iuternykh i informatsionnykh tekhnologii* [Herald of computer and information technologies], 2016, no. 11(149), pp. 39–45 (in Russian). DOI: 10.14489/vkit.2016.11.pp.039-045.

Cite this article as:
Khamutova M. V., Kushnikov V. A. A Model for Forecasting Characteristics of Floods Affecting the Value of the Caused Damage. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 231–238 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-231-238.



Подписка на II полугодие 2017 года

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год.

Цена свободная.

Оформить подписку онлайн можно
в Интернет-каталоге «Пресса по подписке» (www.akc.ru).

Адрес редакции:
410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89
Факс: +7(845-2) 27-85-29
E-mail: izvestiya@sgu.ru

Адрес редколлегии серии:
410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет
Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54
E-mail: mmi@sgu.ru
Website: http://mmi.sgu.ru/