МАТЕМАТИКА

УДК 517.968.23

ТРЕХЭЛЕМЕНТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТИПА РИМАНА ДЛЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

В.В. Алексеенков, К.М. Расулов

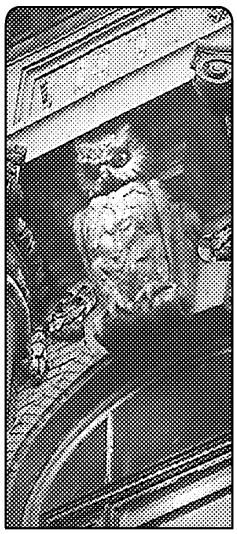
Смоленский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: vvalekseenkov@mail.ru, icspgu@sci.smolensk.ru (с пометкой «Для Расулова»)

Статья посвящена исследованию трехэлементной краевой задачи типа Римана для метааналитических функций. Получен конструктивный метод решения поставленной задачи в случае круга. Установлено, что решение рассматриваемой задачи в общем случае сводится к решению двух обобщенных и двух обычных скалярных задач Римана для аналитических функций в круге.

Three-Element Boundary Value Problem of Riemann Type for Metaanalytical Functions in a Circle

V.V. Alekseenkov, K.M. Rasulov

The article is devoted to the investigation of three-element boundary value problem of Riemann type for metaanalytical functions. A constructive method for solution of the problem in a circle was found. It is established that solution of the problem generally consists of solutions of two generalized and two usual scalar boundary value problems of Riemann for analytical functions in a circle.



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг на расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$, границей которого служит окружность $L = \{t : |t| = 1\}$, а $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$.

Всюду в дальнейшем в основном будем пользоваться обозначениями и терминами, принятыми в работе [1].

Напомним (см., например, [1], с. 139, или [2]), что функция $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ называется *метааналитической* в области T^+ (T^-), если она имеет в этой области непрерывные частные производные по x и y до второго порядка включительно и удовлетворяет там уравнению

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} + A_1(z)\frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}} + A_0(z)F(z) = 0, \qquad (1)$$

где $\partial/\partial\bar{z} = (\partial/\partial x + \partial/\partial y)/2$ — дифференциальный оператор Коши – Римана,

$$A_k(z) = \begin{cases} a_k, & \text{если } z \in T^+, \\ a_k/z^{2-k}, & \text{если } z \in T^-, \end{cases}$$

причем a_k $(k = 0,\ 1)$ — некоторые комплексные постоянные.

Известно (см., например, [1], с. 139), что если уравнение

$$\delta^2 + a_1\delta + a_0 = 0 \qquad (2)$$

имеет один (двукратный) корень δ_0, то общее решение уравнения (1) в областях $T^\pm$ можно задать в виде

© В.В. Алексеенков, К.М. Расулов, 2008

$$F(z)=\begin{cases}\left[\varphi_0^+(z)+\bar{z}\varphi_1^+(z)\right]\exp\left\{\delta_0\bar{z}\right\}, & z\in T^+,\\ \left[\varphi_0^-(z)+\bar{z}\varphi_1^-(z)\right]\exp\left\{\delta_0\bar{z}/z\right\}, & z\in T^-;\end{cases}\tag{3}$$

если же уравнение (2) имеет два различных корня δ_0 и δ_1, то общее решение уравнения (1) задается в виде

$$F(z)=\begin{cases}\varphi_0^+(z)\exp\left\{\delta_0\bar{z}\right\}+\varphi_1^+(z)\exp\left\{\delta_1\bar{z}\right\}, & z\in T^+,\\ \varphi_0^-(z)\exp\left\{\delta_0\bar{z}/z\right\}+\varphi_1^-(z)\exp\left\{\delta_1\bar{z}/z\right\}, & z\in T^-,\end{cases}\tag{4}$$

где $\varphi_0^+(z)$, $\varphi_1^+(z)$ ($\varphi_0^-(z)$, $\varphi_1^-(z)$) — произвольные аналитические в T^+ (T^-) функции.

В дальнейшем функции $F(z)$ вида (3) или (4) будем называть кусочно-метааналитическими функциями с линией скачков L, а функции $\varphi_0^\pm(z)$, $\varphi_1^\pm(z)$ — *аналитическими компонентами* кусочно-метааналитической функции $F(z)$.

Будем говорить, что кусочно-метааналитическая функция $F(z)$ принадлежит классу $M_2(T^\pm)\cap\cap H^{(1)}(L)$, если ее аналитические компоненты $\varphi_0^\pm(z)$, $\varphi_1^\pm(z)$ непрерывно продолжаются на границу L вместе со своими производными $\dfrac{d\varphi_0^\pm(z)}{dz}$, $\dfrac{d\varphi_1^\pm(z)}{dz}$, причем так, что граничные значения функций $\varphi_0^\pm(z)$, $\varphi_1^\pm(z)$ и указанных их производных удовлетворяют на L условию Гёльдера.

Кусочно-метааналитическую функцию $F(z)$, задаваемую формулой (3) или (4), назовем исчезающей на бесконечности, если $\Pi\left\{\varphi_k^-(z);\infty\right\}\geq k+1$ или $\Pi\left\{\varphi_k^-(z);\ \infty\right\}\geq 1$ соответственно (здесь $\Pi\left\{\varphi_k^-(z);\ \infty\right\}$ — порядок аналитической функции $\varphi_k^-(z)$ в точке $z=\infty$).

Трехэлементной краевой задачей типа Римана для метааналитических функций в круге, или, короче, задачей $\mathbf{GR}_{1,M}$ будем называть следующую задачу: *требуется найти все кусочно-метааналитические функции $F(z)=\{F^+(z),F^-(z)\}$ класса $M_2(T^\pm)\cap H^{(1)}(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на L граничным условиям:*

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial x}=G_{11}(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial x}+G_{12}(t)\overline{\frac{\partial F^-(t)}{\partial x}}+g_1(t),\tag{5}$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial y}=G_{21}(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial y}-G_{22}(t)\overline{\frac{\partial F^-(t)}{\partial y}}+ig_2(t),\tag{6}$$

где $G_{kj}(t)$, $g_k(t)$ ($k=1,\ 2;\ j=1,\ 2$) — заданные на L функции, удовлетворяющие условию $H(L)$ (Гельдера), причем $G_{k1}(t)\neq 0$ на L. Здесь, в равенстве (6), множители (–1) при $G_{22}(t)$ и i при $g_2(t)$ введены для удобства в дальнейших обозначениях.

Основной целью настоящей заметки является построение конструктивного алгоритма решения задачи $\mathbf{GR}_{1,M}$ в случае, когда характеристическое уравнение (2) имеет один (двукратный) корень δ_0, т.е. когда решения задачи $\mathbf{GR}_{1,M}$ ищутся в виде (3).

Учитывая представление (3), соотношения (см., например, [3], с. 304) $\dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial z}+\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}=i\left(\dfrac{\partial}{\partial z}-\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)$, а также то, что на окружности L имеет место тождество $\bar{t}=1/t$, краевые условия (5) и (6) можно переписать в виде:

$$\Phi_1^+(t)=\tilde{G}_{11}(t)\Phi_1^-(t)+\tilde{G}_{12}(t)\overline{\Phi_1^-(t)}+\tilde{g}_1(t),\tag{7}$$

$$\Phi_2^+(t)=\tilde{G}_{21}(t)\Phi_2^-(t)+\tilde{G}_{22}(t)\overline{\Phi_2^-(t)}+\tilde{g}_2(t),\tag{8}$$

где

$$\tilde{G}_{k1}(t)=G_{k1}(t)\exp\left\{\frac{\delta_0(1-t)}{t^2}\right\},\qquad \tilde{G}_{k2}(t)=t^2G_{k2}(t)\exp\left\{\bar{\delta}_0t^2-\delta_0/t\right\},$$

$$\tilde{g}_k(t)=tg_k(t)\exp\left\{-\delta_0/t\right\},\quad k=1,\ 2,$$

а функции $\Phi_k^+(z)$ и $\Phi_k^-(z)$ ($k=1,\ 2$), определенные по формулам

$$\Phi_1^+(z)=z\frac{d\varphi_0^+(z)}{dz}+\frac{d\varphi_1^+(z)}{dz}+\delta_0z\varphi_0^+(z)+(\delta_0+z)\varphi_1^+(z),\tag{9}$$

$$\Phi_2^+(z) = z\frac{d\varphi_0^+(z)}{dz} + \frac{d\varphi_1^+(z)}{dz} - \delta_0 z\varphi_0^+(z) - (\delta_0 + z)\varphi_1^+(z), \tag{10}$$

$$\Phi_1^-(z) = z\frac{d\varphi_0^-(z)}{dz} + \frac{d\varphi_1^-(z)}{dz} + \frac{\delta_0(z-1)}{z}\varphi_0^-(z) + \left(\frac{\delta_0(z-1)}{z^2} + z\right)\varphi_1^-(z), \tag{11}$$

$$\Phi_2^-(z) = z\frac{d\varphi_0^-(z)}{dz} + \frac{d\varphi_1^-(z)}{dz} - \frac{\delta_0(z+1)}{z}\varphi_0^-(z) - \left(\frac{\delta_0(z+1)}{z^2} + z\right)\varphi_1^-(z) \tag{12}$$

являются аналитическими в областях T^+ и T^- соответственно, причем $\Phi_k^-(z)$ $(k = 1,\ 2)$ исчезают на бесконечности.

Равенства (7) и (8) представляют собой граничные условия трехэлементных краевых задач типа Римана относительно исчезающих на бесконечности кусочно-аналитических функций $\Phi_1(z) = \left\{\Phi_1^+(z), \Phi_1^-(z)\right\}$ и $\Phi_2(z) = \left\{\Phi_2^+(z), \Phi_2^-(z)\right\}$ соответственно (см., например, [4], с. 222).

Таким образом, решение задачи $\mathbf{GR}_{1,M}$ по сути сводится к решению двух трехэлементных краевых задач Римана (7) и (8).

В свою очередь, хорошо известно (см., например, [4], с. 222), что каждую из задач (7) и (8) можно свести к определенной векторно-матричной задаче Римана для кусочно-аналитических функций. Для этого рассмотрим следующие системы равенств, состоящие из условия (7) (условия (8)) и краевого условия, полученного из (7) (из (8)) переходом к комплексно сопряженным значениям, т.е. системы вида

$$\begin{cases} \Phi_k^+(t) = \tilde{G}_{k1}(t)\Phi_k^-(t) + \tilde{G}_{k2}(t)\overline{\Phi_k^-(t)} + \tilde{g}_k(t), \\ \overline{\Phi_k^+(t)} = \overline{\tilde{G}_{k1}(t)}\overline{\Phi_k^-(t)} + \overline{\tilde{G}_{k2}(t)}\Phi_k^-(t) + \overline{\tilde{g}_k(t)}, \quad k = 1,\ 2. \end{cases} \tag{13}$$

Далее, введем в рассмотрение новые неизвестные функции $\psi_{k1}^+(z)$, $\psi_{k2}^+(z)$ и $\psi_{k1}^-(z)$, $\psi_{k2}^-(z)$, аналитические соответственно в T^+ и T^-, определяемые по формулам:

$$\psi_{k1}^+(z) = \Phi_k^+(z),\ \psi_{k2}^+(z) = \frac{1}{z}\overline{\Phi_k^-}\left(\frac{1}{z}\right),\ \psi_{k1}^-(z) = \Phi_k^-(z),\ \psi_{k2}^-(z) = \frac{1}{z}\overline{\Phi_k^+}\left(\frac{1}{z}\right), \tag{14}$$

$$k = \ 1,\ 2.$$

Замечание 1. Важно отметить, что в силу формул (14) граничные значения функций $\psi_{k1}^{\pm}(z)$, $\psi_{k2}^{\pm}(z)$ должны удовлетворять следующим условиям "симметрии":

$$\psi_{k2}^+(t) = \overline{t\psi_{k1}^-(t)}, \quad \psi_{k2}^-(t) = \overline{t\psi_{k1}^+(t)}, \quad t \in L, \quad k = 1,\ 2. \tag{15}$$

С учетом (14) и (15) из системы (13) будем иметь (см. также [4], с. 223):

$$\psi_k^+(t) = G_k(t)\psi_k^-(t) + Q_k(t), \quad k = 1,\ 2, \tag{16}$$

где

$$\psi_k^{\pm}(z) = \begin{pmatrix} \psi_{k1}^{\pm}(z) \\ \psi_{k2}^{\pm}(z) \end{pmatrix}, \quad G_k(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{|\tilde{G}_{k1}(t)|^2 - |\tilde{G}_{k2}(t)|^2}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}} & \dfrac{t\tilde{G}_{k2}(t)}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}} \\ -\dfrac{t\overline{\tilde{G}_{k2}(t)}}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}} & \dfrac{1}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$Q_k(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}\tilde{g}_k(t) - \tilde{G}_{k2}(t)\overline{\tilde{g}_k(t)}}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}} \\ -\dfrac{t\overline{\tilde{g}_k(t)}}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}} \end{pmatrix}.$$

Итак, решение трехэлементной задачи Римана (7) сводится к решению векторно-матричной задачи Римана вида (16) относительно кусочно-аналитического вектора $\psi_1^{\pm}(z) = \begin{pmatrix} \psi_{11}^{\pm}(z) \\ \psi_{12}^{\pm}(z) \end{pmatrix}$, а решение задачи (8) сводится к решению векторно-матричной задачи Римана вида (16) относительно кусочно-аналитического вектора $\psi_2^{\pm}(z) = \begin{pmatrix} \psi_{21}^{\pm}(z) \\ \psi_{22}^{\pm}(z) \end{pmatrix}$.

Из формул (17) видно, что если выполняются условия

$$|\tilde{G}_{k1}(t)| \equiv |\tilde{G}_{k2}(t)|, \quad t \in L, \quad k = 1, 2, \tag{18}$$

то каждая из векторно-матричных задач Римана вида (16) (при фиксированном значении параметра k) сводится к последовательному решению двух скалярных задач Римана:

$$\psi_{k1}^{+}(t) = A_{k1}(t)\psi_{k2}^{-}(t) + Q_{k1}(t), \tag{19}$$

$$\psi_{k2}^{+}(t) = A_{k2}(t)\psi_{k1}^{-}(t) + Q_{k2}(t), \tag{20}$$

где

$$A_{k1}(t) = \frac{t\tilde{G}_{k2}(t)}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}}, \quad Q_{k1}(t) = \frac{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}\tilde{g}_k(t) - \tilde{G}_{k2}(t)\overline{\tilde{g}_k(t)}}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}},$$

$$A_{k2}(t) = -\frac{\overline{t\tilde{G}_{k2}(t)}}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}}, \quad Q_{k2}(t) = \frac{1}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}}\psi_{k2}^{-}(t) - \frac{\overline{t\tilde{g}_k(t)}}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}}.$$

Если же выполняются условия

$$|\tilde{G}_{k1}(t)| \neq |\tilde{G}_{k2}(t)|, \quad t \in L, \quad k = 1, 2, \tag{21}$$

то нетрудно проверить, что все главные миноры матрицы $\tilde{G}_k(t)$ отличны от нуля на L. Следовательно (см. [1], с. 261), в этом случае для векторно-матричных задач вида (16) выполняются все условия теоремы 18.1 из монографии [1]. Поэтому для решения каждой из векторно-матричных задач Римана (16) (при фиксированном значении параметра k) пользуясь методом, предложенным в [1], получим следующий результат: решение векторно-матричной задачи Римана (16) (при фиксированном значении параметра k) сводится к последовательному решению обобщенной скалярной задачи Римана вида

$$\psi_{k2}^{+}(t) - \hat{G}_{k2}(t)\psi_{k2}^{-}(t) + \int\limits_L B_{k2}(t,\tau)\psi_{k2}^{-}(\tau)\,d\tau = Q_{k2}(t) \tag{22}$$

и обычной скалярной задачи Римана вида

$$\psi_{k1}^{+}(t) = \hat{G}_{k1}(t)\psi_{k1}^{-}(t) + Q_{k1}(t), \tag{23}$$

где

$$\hat{G}_{k1}(t) = \frac{|\tilde{G}_{k1}(t)|^2 - |\tilde{G}_{k2}(t)|^2}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}}, \qquad \hat{G}_{k2}(t) = \frac{\tilde{G}_{k1}(t)}{|\tilde{G}_{k1}(t)|^2 - |\tilde{G}_{k2}(t)|^2},$$

$$Q_{k1}(t) = \frac{t\tilde{G}_{k2}(t)}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}}\psi_{k2}^{-}(t) + \frac{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}\tilde{g}_k(t) - \tilde{G}_{k2}(t)\overline{\tilde{g}_k(t)}}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}},$$

$$B_{k2}(t,\tau) = \frac{\overline{t\tilde{G}_{k2}(t)}}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}}B_{k1}(t,\tau), \qquad Q_{k2}(t) = -\frac{\overline{t\tilde{G}_{k2}(t)}}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}}q_k(t) - \frac{\overline{t\tilde{g}_k(t)}}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}},$$

$$B_{k1}(t,\tau) = \frac{X_{k1}^{-}(t)}{2\pi i}\left[\frac{\tau\tilde{G}_{k2}(\tau)}{X_{k1}^{+}(\tau)\overline{\tilde{G}_{k1}(\tau)}} - \frac{t\tilde{G}_{k2}(t)}{X_{k1}^{+}(t)\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}}\right]\frac{1}{\tau - t},$$

$$q_k(t) = \frac{X_{k1}^{-}(t)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\tilde{G}_{k1}(\tau)}\tilde{g}_k(\tau) - \tilde{G}_{k2}(\tau)\overline{\tilde{g}_k(\tau)}}{X_{k1}^{+}(\tau)\overline{\tilde{G}_{k1}(\tau)}}\frac{d\tau}{\tau - t} - \frac{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}\tilde{g}_k(t) - \tilde{G}_{k2}(t)\overline{\tilde{g}_k(t)}}{2(|\tilde{G}_{k1}(t)|^2 - |\tilde{G}_{k2}(t)|^2)} + X_{k1}^{-}(t)P_{\chi_{k1}-1},$$

$\{X_{k1}^{+}(z), X_{k1}^{-}(z)\}$ — каноническая функция краевой задачи Римана (23), $P_{\chi_{k1}-1}(z)$ – многочлен степени не выше $\chi_{k1} - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами.

Наконец, если уже найдены аналитические функции $\psi_{k1}^{+}(z)$, $\psi_{k2}^{+}(z)$, $\psi_{k1}^{-}(z)$, $\psi_{k2}^{-}(z)$, то учитывая условия (15) и используя обозначения (14) находим решение задач (7) и (8), т.е. кусочно-аналитические функции $\Phi_1^{\pm}(z)$ и $\Phi_2^{\pm}(z)$.

Покажем теперь, как по найденным функциям $\Phi_1^{\pm}(z)$ и $\Phi_2^{\pm}(z)$ определяются аналитические компоненты $\varphi_0^{\pm}(z)$ и $\varphi_1^{\pm}(z)$ искомой кусочно-метааналитической функции $F(z)$. Для этого необходимо отдельно рассмотреть 2 случая.

Случай 1. Пусть $\delta_0 = 0$. В этом случае при выполнении условия

$$\Phi_1^{+}(0) = \Phi_2^{+}(0) \tag{24}$$

из равенств (9)–(12) имеем:

$$\varphi_1^{\pm}(z) = \frac{\Phi_1^{\pm}(z) - \Phi_2^{\pm}(z)}{2z}, \tag{25}$$

$$\varphi_0^{\pm}(z) = \int\limits_{\Gamma^{\pm}} \frac{1}{2\zeta}\left(\Phi_1^{\pm}(\zeta) + \Phi_2^{\pm}(\zeta) - 2\frac{d\varphi_1^{\pm}(\zeta)}{d\zeta}\right) d\zeta, \tag{26}$$

где Γ^{+} (Γ^{-}) — произвольная гладкая кривая, лежащая в T^{+} (T^{-}) и соединяющая точки 0 и z (∞ и z). Тогда решение исходной задачи $\mathbf{GR}_{1,M}$ можно найти по формуле (3), где $\varphi_0^{\pm}(z)$ и $\varphi_1^{\pm}(z)$ определяются по формулам (25) и (26).

Таким образом, в случае $\delta_0 = 0$ получаем следующий результат.

Теорема 1. *Если $\delta_0 = 0$ и $|\tilde{G}_{k1}(t)| \equiv |\tilde{G}_{k2}(t)|$ на L ($k = 1,\ 2$), то решение задачи $\mathbf{GR}_{1,M}$ сводится к решению в классах аналитических функций двух скалярных задач Римана вида* (19) *и двух скалярных задач Римана вида* (20).

Если же $\delta_0 = 0$ и $|\tilde{G}_{k1}(t)| \neq |\tilde{G}_{k2}(t)|$ на L ($k = 1,\ 2$), то решение задачи $\mathbf{GR}_{1,M}$ сводится к решению в классах аналитических функций двух обобщенных скалярных задач Римана вида (22) *и двух обычных скалярных задач Римана вида* (23).

При этом задача $\mathbf{GR}_{1,M}$ разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы указанные скалярные задачи Римана для аналитических функций и выполняется условие (24).

Случай 2. Пусть $\delta_0 \neq 0$. Тогда из равенств (9) и (10) получим

$$\frac{d\varphi_1^{+}(z)}{dz} - \frac{\delta_0}{z^2}\varphi_1^{+}(z) = \frac{1}{z^2}f^{+}(z), \tag{27}$$

$$\varphi_0^{+}(z) = \frac{\Phi_1^{+}(z) - \Phi_2^{+}(z)}{2\delta_0 z} - \frac{\delta_0 + z}{\delta_0 z}\varphi_1^{+}(z), \tag{28}$$

где

$$f^{+}(z) = \frac{z}{2}\left(\frac{d\Phi_1^{+}(z)}{dz} - \frac{d\Phi_2^{+}(z)}{dz}\right) - \frac{1}{2}\left(\Phi_1^{+}(z) - \Phi_2^{+}(z)\right) - \frac{\delta_0 z}{2}\left(\Phi_1^{+}(z) + \Phi_2^{+}(z)\right). \tag{29}$$

Равенство (27) есть линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка. Будем рещать уравнение (27) методом степенных рядов (см., например, [5]).

Разложим аналитическую в круге T^{+} функцию $f^{+}(z)$ в ряд Маклорена: $f^{+}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, где $a_n = \dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n f^{+}(0)}{dz^n}$. Тогда нетрудно проверить, что функция вида

$$\varphi_1^{+}(z) = -\frac{a_0}{\delta_0} - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{n}\frac{(n-1)!\cdot a_{n-q+1}}{(n-q)!\cdot \delta_0^q} z^n \tag{30}$$

будет аналитическим в $T^{+} = \{z : |z| < 1\}$ решением дифференциального уравнения (27), если ряд в правой части (30) сходится в этом круге.

Замечание 2. Для всякой аналитической в круге $T^{+} = \{z : |z| < 1\}$ функции $\varphi_1^{+}(z)$, определяемой по формуле (30), имеет место соотношение: $\varphi_1^{+}(0) = -a_0/\delta_0$ или (с учетом введенного обозначения (29)) $a_0 = f^{+}(0) = -\frac{1}{2}\left(\Phi_1^{+}(0) - \Phi_2^{+}(0)\right) = -\delta_0\varphi_1^{+}(0)$. Последнее соотношение гарантирует аналитичность в точке $z = 0$ функции $\varphi_0^{+}(z)$, определяемой по формуле (28).

Замечание 3. Поскольку решения исходной краевой задачи $\mathbf{GR}_{1,M}$ должны принадлежать классу $M_2(T^{\pm}) \cap H^{(1)}(L)$, то для того чтобы аналитическая в $T^{+} = \{z : |z| < 1\}$ функция $\varphi_1^{+}(z)$, определяемая

формулой (30), была аналитической компонентой искомого решения краевой задачи $\mathbf{GR}_{1,M}$, нужно еще выполнение следующих условий:

$$\left|\frac{d^p\varphi_1^+(z)}{dz^p}\right| \le \frac{M_p}{(1-r)^{1-\alpha_p}}, \quad r=|z|, \quad 0<\alpha_p\le 1, \quad p=\ 1,\ 2, \tag{31}$$

где M_p –конечные постоянные.

Как известно (см. [6], с. 397), согласно теореме Харди и Литтльвуда, условия (31) являются необходимыми и достаточными, для того чтобы аналитическая в круге $T^+=\{z:|z|<1\}$ функция $\varphi_1^+(z)$ и ее производная $\dfrac{d\varphi_1^\pm(z)}{dz}$ были непрерывными в замкнутом круге $\overline{T^+}=\{z:|z|\le 1\}$ и на окружности $L=\{t:|t|=1\}$ удовлетворяли условию Гёльдера.

Замечание 4. В дальнейшем ради удобства будем говорить, что дифференциальное уравнение (27) *разрешимо в круге* $T^+=\{z:|z|<1\}$, если оно имеет аналитические в этом круге решения, задаваемые формулой (30) и удовлетворяющие условиям (31). В противном случае его будем называть *неразрешимым в круге* $T^+=\{z:|z|<1\}$.

Далее предположим, что дифференциальное уравнение (27) разрешимо в круге $T^+=\{z:|z|<1\}$ и уже найдено его решение по формуле (30). Тогда подставляя в правую часть (28) вместо $\varphi_1^+(z)$ ее значения, найденные по формуле (30), определим аналитическую в круге $T^+=\{z:|z|<1\}$ функцию $\varphi_0^+(z)$.

Наконец, из равенств (11) и (12) будем иметь:

$$\frac{d\varphi_1^-(z)}{dz}+\left(\frac{1}{z}-\frac{\delta_0}{z^2}-\frac{\delta_0}{z^3}\right)\varphi_1^-(z)=f^-(z), \tag{32}$$

$$\varphi_0^-(z)=\frac{\Phi_1^-(z)-\Phi_2^-(z)}{2\delta_0}-\frac{\delta_0+z^2}{\delta_0 z}\varphi_1^-(z), \tag{33}$$

где

$$f^-(z)=\frac{1}{2z}\left(\frac{d\Phi_1^-(z)}{dz}-\frac{d\Phi_2^-(z)}{dz}\right)-\frac{\delta_0}{2z^3}\left(\Phi_1^-(z)-\Phi_2^-(z)\right)-\frac{\delta_0}{2z^2}\left(\Phi_1^-(z)+\Phi_2^-(z)\right).$$

Решим дифференциальное уравнение (32) методом интегрирующего множителя. С этой целью, умножив обе части равенства (32) на $z\exp\left(\dfrac{\delta_0}{z}+\dfrac{\delta_0}{2z^2}\right)$, получим

$$\frac{d}{dz}\left[z\varphi_1^-(z)\exp\left(\frac{\delta_0}{z}+\frac{\delta_0}{2z^2}\right)\right]=zf^-(z)\exp\left(\frac{\delta_0}{z}+\frac{\delta_0}{2z^2}\right).$$

Так как функция $f^-(z)$ является аналитической в области T^-, то для функции $zf^-(z)\exp\left(\dfrac{\delta_0}{z}+\dfrac{\delta_0}{2z^2}\right)$ интегрированием найдем первообразную в T^-, исчезающую на бесконечности (здесь поскольку $\Pi\{f^-(z);\ \infty\}\ge 3$, то при интегрировании не возникают выражения, содержащие логарифмы). Обозначим эту первообразную через $f_1^-(z)$. Тогда общее решение дифференциального уравнения (32) можно задавать в виде

$$\varphi_1^-(z)=\frac{1}{z}\exp\left(-\frac{\delta_0}{z^2}-\frac{\delta_0}{z^3}\right)[C+f_1^-(z)], \tag{34}$$

где C — произвольная постоянная. Но поскольку функция $\varphi_1^-(z)$ должна иметь на бесконечности нуль не ниже второго порядка, то в (34) нужно положить $C=0$. Итак, окончательно имеем:

$$\varphi_1^-(z)=\frac{1}{z}f_1^-(z)\exp\left(-\frac{\delta_0}{z^2}-\frac{\delta_0}{z^3}\right). \tag{35}$$

Следовательно, с учетом (35) из (33) получаем

$$\varphi_0^-(z)=\frac{\Phi_1^-(z)-\Phi_2^-(z)}{2\delta_0}-\frac{\delta_0+z^2}{\delta_0 z^2}f_1^-(z)\exp\left(-\frac{\delta_0}{z^2}-\frac{\delta_0}{z^3}\right). \tag{36}$$

Таким образом, в случае $\delta_0 \neq 0$ решение исходной задачи $\mathbf{GR}_{1,M}$ можно найти по формуле (3), где $\varphi_0^{\pm}(z)$ и $\varphi_1^{\pm}(z)$ определяются по формулам (28), (30), (35) и (36).

Резюмируя все сказанное выше, в случае $\delta_0 \neq 0$ можно сформулировать следующий основной результат.

Теорема 2. *Если* $\delta_0 \neq 0$ *и* $|\tilde{G}_{k1}(t)| \equiv |\tilde{G}_{k2}(t)|$ *на* L $(k = 1,\ 2)$, *то решение задачи* $\mathbf{GR}_{1,M}$ *сводится к решению в классах аналитических функций двух скалярных задач Римана вида* (19) *и двух скалярных задач Римана вида* (20).

Если же $\delta_0 \neq 0$ *и* $|\tilde{G}_{k1}(t)| \neq |\tilde{G}_{k2}(t)|$ *на* L $(k = 1,\ 2)$, *то решение задачи* $\mathbf{GR}_{1,M}$ *сводится к решению в классах аналитических функций двух обобщенных скалярных задачи Римана вида* (22) *и двух обычных скалярных задач Римана вида* (23).

Кроме того, задача $\mathbf{GR}_{1,M}$ *разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы указанные задачи Римана для аналитических функций и дифференциальное уравнение* (27).

Библиографический список

1. *Расулов К.М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. 344 с.
2. *Расулов К.М., Сенчилов В.В.* О решении одной видоизмененной краевой задачи типа Рикье для метааналитических функций в круге // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 43. С. 415–418.
3. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
4. *Литвинчук Г.С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.
5. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 436 с.
6. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.

УДК 517.984

О РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ НА ГРАФЕ

М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов*

Воронежский государственный университет,
кафедра математического анализа
*Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: bums@kma.vsu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

Для функционально-дифференциального оператора первого порядка, заданного на графе-цикле, устанавливается равносходимость разложений в ряд по собственным и присоединенным функциям и в тригонометрический ряд Фурье.

On the Equiconvergence of Expansions for the Certain Class of the Functional-Differential Operators with Involution on the Graph

M.Sh. Burlutskaya, A.P. Khromov

The equiconvergence of expansions in eigen- and adjoint functions and trigonometric Fourier series is established for a 1-st order functional-differential operator on the graph-cycle.

На связном геометрическом графе Γ, состоящем из трех ребер, образующих цикл, рассматривается функционально-дифференциальный оператор, порождающий следующий оператор L в пространстве вектор-функций $y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T$ (T — знак транспонирования), $x \in [0,1]$,

$$(Ly)(x) = (l_1(y_1), l_2(y_2), l_3(y_3))^T\,, \tag{1}$$

$$y_1(0) = y_3(1), \quad y_2(0) = y_1(1), \quad y_3(0) = y_2(1), \tag{2}$$

где $l_k(y_k) = \alpha_k y_k'(x) + \beta_k y_k'(1-x) + p_{k1}(x)y_k(x) + p_{k2}(x)y_k(1-x)$,
$\beta_k^2 - \alpha_k^2 > 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 \neq 0$, $p_{ij}(x) \in C^1[0,1]$. Краевые условия (2) — это условия непрерывности $y(x)$ во внутренних узлах Γ.

© М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов, 2008

В связи с интенсивным развитием теории краевых задач на ветвящихся многообразиях [1] возникает необходимость в переносе классических результатов спектральной теории операторов на случай операторов, заданных на графах. Компоненты оператора L есть функционально-дифференциальные операторы (ФДО) первого порядка с инволюцией $\nu(x) = 1 - x$. Исследование подобных операторов представляет собой активно развивающееся направление [2]–[6], в том числе и в задачах на графах [7], [8].

Будем рассматривать случай, когда один из коэффициентов при некоторой $y_k'(1-x)$ равен нулю. Пусть для определенности $\beta_3 = 0$, $(\beta_1\beta_2 \neq 0)$. Тогда считаем, что $\alpha_3 = 1$, $p_{32}(x) \equiv 0$, и полагаем $p_{31}(x) = p(x)$. В этом случае оператор (1) на третьем ребре примет вид $l_3(y_3) = y_3'(x) + p(x)y_3(x)$. Таким образом, на двух ребрах графа задан ФДО (который может быть приведен к известному оператору Дирака), а на третьем — обычный оператор дифференцирования. В [8] исследовались вопросы о равномерной сходимости на всем графе Γ обобщенных средних Рисса разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) оператора L. В данной работе для оператора L устанавливается равносходимость разложений в ряд по с.п.ф. и в тригонометрический ряд Фурье.

Отметим, что для корректного задания дифференциального и функционально-дифференциального оператора первого порядка необходимо, чтобы граф содержал цикл, причем единственный. Поэтому полученные в работе результаты могут быть распространены на случай произвольного графа такой структуры. При этом на ребрах, входящих в цикл, может быть задан как ФДО, так и оператор чистого дифференцирования, а на ребрах вне цикла — только ФДО (иначе нарушается регулярность краевых условий).

Сходимость разложений по с.п.ф. исследуется методом контурного интегрирования резольвенты $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ (λ — спектральный параметр, E — единичный оператор) по расширяющимся контурам комплексной плоскости.

1. Для построения и исследования краевой задачи для R_λ воспользуемся некоторыми результатами из [8]. Пусть $y(x) = (R_\lambda f)(x)$, где $y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$. Введем в рассмотрение следующую краевую задачу в пространстве вектор-функций размерности 5:

$$Qz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x) + m(x), \tag{3}$$

$$M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0, \tag{4}$$

где $Q = \operatorname{diag}(Q_1, Q_2, Q_3)$, $P(x) = \operatorname{diag}(P_1(x), P_2(x), P_3(x))$, $Q_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & -\beta_k \\ \beta_k & -\alpha_k \end{pmatrix}$, $k = 1, 2$, $Q_3 = (1)$, $P_k(x) = \begin{pmatrix} p_{k1}(x) & p_{k2}(x) \\ p_{k2}(1-x) & p_{k1}(1-x) \end{pmatrix}$, $k = 1, 2$, $P_3(x) = (p(x))$, $m(x) = (m_1(x), \ldots, m_5(x))^T$, $m_1(x) = f_1(x)$, $m_2(x) = f_1(1-x)$, $m_3(x) = f_2(x)$, $m_4(x) = f_2(1-x)$, $m_5(x) = f_3(x)$, M_0, M_1 — квадратные матрицы размерности 5, причем $(M_0)_{11} = (M_0)_{32} = (M_0)_{54} = -(M_0)_{33} = -(M_0)_{55} = 1$, $(M_1)_{22} = (M_1)_{41} = -(M_1)_{15} = -(M_1)_{25} = -(M_1)_{44} = 1$, остальные элементы $(M_k)_{ij} = 0$.

Лемма 1. *Если λ таково, что R_λ существует, и $y = R_\lambda f$, то $z(x) = (z_1(x), \ldots, z_5(x))^T$, где $z_1(x) = y_1(x), z_2(x) = y_1(1-x), z_3(x) = y_2(x), z_4(x) = y_2(1-x), z_5(x) = y_3(x)$, является решением* (3)–(4). *Обратно, если $z(x)$ удовлетворяет* (3)–(4) *и соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение, то R_λ существует, и $(R_\lambda f)(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T$, где $y_1(x) = z_1(x)$, $y_2(x) = z_3(x)$, $y_3(x) = z_5(x)$.*

Диагонализируя задачу (3)–(4), получим

$$u'(x) + \widetilde{P}(x)u(x) = \lambda Du(x) + \widetilde{m}(x), \tag{5}$$

$$\widetilde{M_0}u(0) + \widetilde{M_1}u(1) = 0, \tag{6}$$

где $\widetilde{P}(x) = \operatorname{diag}\left(\widetilde{P}_1(x),\ \widetilde{P}_2(x),\ \widetilde{P}_3(x)\right)$, $\widetilde{P}_k(x) = B_k^{-1}Q_k^{-1}P_k(x)B_k$, $D = \operatorname{diag}(D_1, D_2, D_3)$, $D_k = \operatorname{diag}\left(i/\sqrt{d_k}, -i/\sqrt{d_k}\right)$, $d_k = \beta_k^2 - \alpha_k^2$, $k = 1, 2$, $D_3 = (1)$, $\widetilde{m}(x) = \operatorname{diag}(B_1^{-1}Q_1^{-1}, B_2^{-1}Q_2^{-1}, B_3^{-1}Q_3^{-1})m(x)$, $\widetilde{M_k} = M_k B$, $B = \operatorname{diag}(B_1, B_2, B_3)$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 & b_k \\ b_k & 1 \end{pmatrix}$, $b_k = \frac{[i\sqrt{d_k} + \alpha_k]}{\beta_k}$, $k = 1, 2$, $B_3 = (1)$.

Для получения асимптотических оценок решения краевой задачи (5)–(6) проводится преобразование системы (5), заменяющее ненулевую матрицу $\widetilde{P}(x)$ на матрицу с элементами $O\left(\lambda^{-1}\right)$ ([9], с. 48–58).

Положим $H_0(x) = \operatorname{diag}\,(H_{01}(x), H_{02}(x), H_{03}(x))$, где $H_{01}(x) = \operatorname{diag}\,(h_1(x), h_2(x))$, $H_{02}(x) = \operatorname{diag}\,(h_3(x), h_4(x))$, $H_{03}(x) = (h_5(x))$, $h_i(x) = \exp\left\{-\int\limits_0^x \widetilde{p}_{ii}(t)\,dt\right\}$ и $\widetilde{p}_{ii}(x)$ — диагональные элементы матрицы $\widetilde{P}(x)$; $H_1(x) = \operatorname{diag}\,(H_{11}(x), H_{12}(x), H_{13}(x))$, где $H_{13}(x) \equiv 0$, а $H_{1k}(x)$ $(k = 1, 2)$ — кодиагональная матрица, являющаяся единственным решением матричного уравнения: $H'_{0k}(x) + \widetilde{P}_k(x)H_{0k}(x) + (H_{1k}(x)D_k - D_kH_{1k}(x)) = 0$. Так как элементы матрицы $P(x)$ и соответственно $\widetilde{P}(x)$ принадлежат пространству $C^1[0,1]$, то элементы $H_1(x)$ из пространства $C^1[0,1]$, а $H_0(x)$ — из $C^2[0,1]$.

Теорема 1. *Преобразование $z(x,\lambda) = BH(x,\lambda)v(x)$, где $H(x,\lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$, приводит систему* (3)–(4) *к виду*

$$v'(x) + P(x,\lambda)v(x) = \lambda Dv(x) + m(x,\lambda), \tag{7}$$

$$M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(1) = 0, \tag{8}$$

где $P(x,\lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x,\lambda)[H'_1(x) + \widetilde{P}(x)H_1(x)]$, $m(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)\widetilde{m}(x)$, $M_{0\lambda} = M_0BH(0,\lambda)$, $M_{1\lambda} = M_1BH(1,\lambda)$.

2. Рассмотрим сначала краевую задачу:

$$w'(x) = \mu\widehat{D}w(x) + m(x), \tag{9}$$

$$U(w) = M_{0\lambda}w(0) + M_{1\lambda}w(1) = 0, \tag{10}$$

где $m = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$, $m_i = m_i(x) \in L[0,1]$, $\mu = i\lambda/\sqrt{d_1}$, $\widehat{D} = \operatorname{diag}(1, -1, d, -d, \omega)$, $d = \sqrt{d_1/d_2} > 0$, $\omega = \sqrt{d_1}/i$, т. е. $\lambda D = \mu\widehat{D}$.

Общее решение системы (9) имеет вид

$$w(x,\mu) = V(x,\mu)c + \int\limits_0^1 g(x,t,\mu)m(t)\,dt,$$

где $V(x,\mu) = \operatorname{diag}\left(e^{\mu x}, e^{-\mu x}, e^{\mu dx}, e^{-\mu dx}, e^{\mu\omega x}\right)$, $g(x,t,\mu) = \operatorname{diag}(g_1(x,t,\mu), \ldots, g_5(x,t,\mu))$, $g_k(x,t,\mu) = \varepsilon(x,t)e^{\mu\omega_k(x-t)}$, если $\operatorname{Re}\mu\omega_k \le 0$, $g_k(x,t,\mu) = -\varepsilon(t,x)e^{\mu\omega_k(x-t)}$, если $\operatorname{Re}\mu\omega_k \ge 0$; $\varepsilon(x,t) = 1$, если $x \ge t$, $\varepsilon(x,t) = 0$, если $x \le t$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = -1$, $\omega_3 = d$, $\omega_4 = -d$, $\omega_5 = \omega$, c — произвольный вектор. Подчиняя его краевым условиям (10) получим следующий результат.

Лемма 2. *Если μ таково, что матрица $\Delta(\mu) = U(V(x,\mu))$ обратима, то краевая задача* (9)–(10) *однозначно разрешима при любой $m(x)$ с компонентами из $L[0,1]$, и ее решение имеет вид*

$$w(x,\mu) = R_{1\mu}m(x) = -V(x,\mu)\Delta^{-1}(\mu)U(g_\mu m(x)) + g_\mu m(x), \tag{11}$$

где $g_\mu m(x) = \int\limits_0^1 g(x,t,\mu)m(t)\,dt$, $U(g_\mu m(x)) = \int\limits_0^1 U_x(g(x,t,\mu))m(t)\,dt$, ($U_x$ означает, что U применяется к g по переменной x).

Из ограниченности компонент матрицы $g(x,t,\mu)$ следует

Лемма 3. *Имеют место оценки:*

$$\|g_\mu m\|_\infty = O(\|m\|_1), \qquad \|U(g_\mu m)\|_\infty = O(\|m\|_1),$$

где $\|\cdot\|_\infty$ ($\|\cdot\|_1$) — норма в пространстве вектор-функций размерности 5 с компонентами из L_∞ (L_1).

Так же как в [8] можно показать, что для определителя $\delta(\mu) = \det\Delta(\mu)$ справедливо следующее асимптотическое представление:

$$\det\Delta(\mu) = A_1(\mu)e^{\mu+\mu d+\mu\omega} + A_2(\mu)e^{\mu+\mu d} + A_3(\mu)e^{-\mu-\mu d} + A_4(\mu)e^{-\mu-\mu d+\mu\omega} + \sum_{k=5}^{20} A_k(\mu)e^{a_k\mu+b_k\mu d+c_k\mu\omega},$$

где $A_k(\mu) = \nu_k + O\left(\mu^{-1}\right)$, $k = \overline{1,4}$, $\nu_1 = b_1\, b_2\, h_1(1)h_3(1)h_5(1)$, $\nu_2 = -b_1^2\, b_2^2\, h_1(1)h_3(1)$, $\nu_3 = -h_2(1)h_4(1)$, $\nu_4 = -b_1\, b_2\, h_2(1)h_4(1)h_5(1)$, причем $\nu_k \neq 0$; $A_k(\mu) = O(1)$, $k = \overline{5,20}$, $a_k\mu + b_k\mu d + c_k\mu\omega$ — различные комбинации, отличные от показателей экспонент первых четырех слагаемых (числа a_k, b_k, c_k есть 0, 1 или -1).

Далее предполагаем, что $\operatorname{Re}\mu \geq 0$, $\operatorname{Re}\mu\omega \geq 0$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда $\det\Delta(\mu) = e^{\mu+\mu d+\mu\omega}\, T(\mu)$, где $T(\mu)$ есть квазиполином, который имеет счетное количество нулей (см. [10, с. 113, лемма 1]), все они находятся в полосах вдоль мнимой и действительной осей, причем в любых прямоугольниках $|\operatorname{Im}\mu - t| \leq 1$, $|\operatorname{Re}\mu - t| \leq 1$ соответствующих полос их число ограничено некоторой константой, не зависящей от t. Вырежем из комплексной плоскости эти нули вместе с круговыми окрестностями одного и того же радиуса δ_0. Полученную область обозначим S_{δ_0}. Тогда в S_{δ_0} при $\operatorname{Re}\mu \geq 0$, $\operatorname{Re}\mu\omega \geq 0$ справедлива оценка $|\delta(\mu)| \geq c\left|e^{\mu(1+d+\omega)}\right|$. Отсюда и из оценки элементов матриц $\Delta^{-1}(\mu)$ и $V(x,\mu)$ следует

Лемма 4. *Если $x \in [\delta, 1-\delta]$ ($\delta \in [0, 1/2)$), то компоненты матрицы $V(x,\mu)\Delta^{-1}(\mu) = (\eta_{ij}(x,\mu))_{i,j=1}^5$ в области S_{δ_0} имеют следующие оценки: $\eta_{ij}(x,\mu) = O\left(e^{-\mu\omega_k\delta}\right)$, $i = \overline{1,5}$, $j = \overline{1,5}$, где $\omega_{1,2} = 1$, $\omega_{3,4} = d$, $\omega_5 = \omega$.*

С помощью лемм 2, 3 и 4, так же как теорема 2 из [6], доказывается

Лемма 5. *В области S_{δ_0} при больших $|\mu|$ справедливы оценки*

$$\|R_{1\mu}m\|_\infty = O\left(\|m\|_1\right), \tag{12}$$

$$\|R_{1\mu}\varphi\|_\infty = O\left(\mu^{-1}\right), \tag{13}$$

где $\varphi(x)$ — вектор-функция, каждая компонента которой есть функция ограниченной вариации.

Лемма 6. *В области S_{δ_0} при больших $|\mu|$ краевая задача (7)–(8) однозначно разрешима, и для ее решения $v(x,\lambda)$ справедлива оценка*

$$\|v(x,\lambda) - R_{1\mu}H_0^{-1}\widetilde{m}\|_\infty = O\left(\mu^{-1}\|f\|_1\right).$$

Доказательство. Из (7) имеем $v(x,\lambda) = R_{1\mu}\left(m(x,\lambda) - P(x,\lambda)v(x,\lambda)\right)$, или

$$(E + R_{1\mu}P(x,\lambda))v(x,\lambda) = R_{1\mu}m(x,\lambda). \tag{14}$$

Так как ядро оператора $R_{1\mu}$ ограниченно, а $P(x,\lambda) = O\left(\lambda^{-1}\right) = O\left(\mu^{-1}\right)$, то оператор $E + R_{1\mu}P(x,\lambda)$ обратим в L_∞. Поэтому уравнение (14) однозначно разрешимо и $v(x,\lambda) = L_\mu R_{1\mu}m(x,\lambda)$, где $L_\mu = (E + R_{1\mu}P(x,\lambda))^{-1}$. Учитывая, что $L_\mu = E - L_\mu R_{1\mu}P(x,\lambda)$, получим $v(x,\lambda) = R_{1\mu}m(x,\lambda) - L_\mu R_{1\mu}P(x,\lambda)R_{1\mu}m(x,\lambda)$. Отсюда, используя представления $m(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)\widetilde{m}(x)$, $H^{-1}(x,\lambda) = H_0^{-1}(x) + O\left(\mu^{-1}\right)$, оценку (12) и ограниченность оператора L_μ, получим утверждение леммы. □

Аналогично, учитывая оценку (13), имеем

Лемма 7. *Если компоненты $\widetilde{m}(x)$ есть функции ограниченной вариации, то*

$$\|v(x,\lambda) - R_{1\mu}H_0^{-1}\widetilde{m}\|_\infty = O\left(\mu^{-2}\right).$$

Из лемм 6 и 7 по теореме Банаха – Штейнгауза следует

Лемма 8. *Если $\widetilde{m}(x)$ та же, что и в (5) для интегрируемой вектор-функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$, то*

$$\lim_{r\to\infty}\left\| \int\limits_{|\lambda|=r} H(x,\lambda)\left[v(x,\lambda) - R_{1\mu}H_0^{-1}\widetilde{m}\right]\, d\lambda \right\|_\infty = 0$$

(интегрирование проводится по контурам, целиком лежащим в S_{δ_0}).

3. Для получения основного результата статьи (теоремы равносходимости) рассмотрим следующую краевую задачу:

$$u'(x) = \mu\widehat{D}u(x) + m(x), \quad U_0(u) = u(0) - u(1) = 0. \tag{15}$$

Удалим из S_{δ_0} вместе с круговыми окрестностями радиуса δ_0 собственные значения краевых задач: $u_j'(x) = \mu\omega_j u_j(x)$, $u_j(0) - u_j(1) = 0$, $(j = \overline{1,5})$, где $\omega_1 = 1$; $\omega_2 = -1$; $\omega_3 = d$; $\omega_4 = -d$; $\omega_5 = \omega$, и получившуюся область снова обозначим S_{δ_0}. Тогда в S_{δ_0} задача (15) однозначно разрешима, и ее решение есть $R_{2\mu}m$, которое имеет тот же вид (11), что и $R_{1\mu}m$, с заменой U на U_0.

Лемма 9. *Если $\widetilde{m}(x)$ та же, что и в лемме 8, то*

$$\lim_{r\to\infty}\Big\| \int\limits_{|\lambda|=r} H(x,\lambda)\left[R_{1\mu}H_0^{-1}\widetilde{m} - R_{2\mu}H_0^{-1}\widetilde{m}\right]\, d\lambda \Big\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0,$$

где $\varepsilon \in (0,1/2)$, и $\|\cdot\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]}$ — норма в пространстве непрерывных вектор-функций на $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

Доказательство повторяет доказательство леммы 13 из [6].

Лемма 10. *Для любой функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$, $f_i(x) \in L[0,1]$,*

$$\lim_{r\to\infty}\Big\| \int\limits_{|\lambda|=r} \left[H(x,\lambda)v(x,\lambda) - H_0(x)R_{2\mu}H_0^{-1}\widetilde{m}\right]\, d\lambda \Big\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0, \tag{16}$$

где $v(x,\lambda)$ — решение задачи (7)–(8), и $\widetilde{m}(x)$ та же, что и в (5).

Доказательство. Обозначим интеграл в (16) через I. Представим его в виде суммы $I = I_1 + I_2 + I_3$, где $I_1 = \int\limits_{|\lambda|=r} H(x,\lambda)[v(x,\lambda) - R_{1\mu}H_0^{-1}\widetilde{m}]\, d\lambda$, $I_2 = \int\limits_{|\lambda|=r} H(x,\lambda)[R_{1\mu}H_0^{-1}\widetilde{m} - R_{2\mu}H_0^{-1}\widetilde{m}]\, d\lambda$, $I_3 = \int\limits_{|\lambda|=r} (H(x,\lambda) - H_0(x))R_{2\mu}H_0^{-1}\widetilde{m}\, d\lambda$. По леммам 8 и 9, $\|I_1\|_\infty \to 0$, $\|I_2\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]} \to 0$, при $r \to \infty$. Так как $H(x,\lambda) - H_0(x) = O\left(\lambda^{-1}\right)$, и $R_{2\mu}H_0^{-1}\widetilde{m} = O\left(\|f\|_1\right)$, то $\|I_3\|_\infty = O\left(\|f\|_1\right)$. Если $f_i(x)$ $(i = 1,2,3)$ есть непрерывные функции ограниченной вариации, то $R_{2\mu}H_0^{-1}\widetilde{m} = O\left(\mu^{-1}\right)$ и $\|I_3\|_\infty = O\left(r^{-1}\right)$. Тогда по теореме Банаха – Штейнгауза $\|I_3\|_\infty \to 0$, при $r \to \infty$. Отсюда следует утверждение леммы. □

Обозначим через $S_r(f,x)$ частичную сумму ряда Фурье функции f по с.п.ф. оператора L для собственных чисел λ_k, попадающих в круг $|\lambda_k| < r$; через $\sigma_{r_j}(f_j,x)$ частичную сумму ряда Фурье функции f_j по тригонометрической системе $\{e^{2k\pi ix}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, включающую слагаемые, для которых $|2\pi k| < r_j$.

Теорема 2. *Для любой вектор-функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$ с компонентами $f_i(x)$ из $L[0,1]$, и любого $\varepsilon \in (0,1/2)$*

$$\lim_{r\to\infty} \left\| S_r(f,x) - (\sigma_{r_1}(f_1,x), \sigma_{r_2}(f_2,x), \sigma_r(f_3,x))^T \right\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0,$$

где $r_1 = r/\sqrt{d_1}$, $r_2 = r/\sqrt{d_2}$.

Доказательство. Из леммы 1, $R_\lambda f = (z_1(x,\lambda), z_3(x,\lambda), z_5(x,\lambda))^T$, где z_i — компоненты решения задачи (3)–(4). Учитывая теорему 1 и лемму 10,

$$(S_r(f,x))_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} z_1(x,\lambda)\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} I_\lambda(x)\, d\lambda + o(1), \tag{17}$$

где I_λ есть первая компонента вектора $BH_0(x)R_{2\mu}H_0^{-1}(x)\widetilde{m}$, а $o(1) \to 0$ при $r \to \infty$ равномерно по $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Вычислим I_λ. Имеем

$$I_\lambda(x) = \left(BH_0(x)R_{2\mu}H_0^{-1}(x)B^{-1}Q^{-1}m(x)\right)_1,$$

где $m(x) = (f_1(x), f_1(1-x), f_2(x), f_2(1-x), f_3(x))^T$. Полагая $BH_0(x) = (\gamma_{ij}(x))_{i,j=1}^5$, $H_0^{-1}(x)B^{-1} = (\delta_{ij}(x))_{i,j=1}^5$, и учитывая, что $R_{2\mu} = \mathrm{diag}\,(R_\mu^0, R_{-\mu}^0, R_{\mu d}^0, R_{-\mu d}^0, R_{\mu\omega}^0)$ (R_λ^0 — резольвента скалярного оператора $L_0 y = y'$, $y(0) = y(1)$), найдем

$$I_\lambda = \gamma_{11}R_\mu^0\big(\delta_{11}g_1 + \delta_{12}g_2\big) + \gamma_{12}R_{-\mu}^0\big(\delta_{21}g_1 + \delta_{22}g_2\big),$$

где $\quad g_1(x) = d_1{}^{-1}[-\alpha_1 f_1(x) + \beta_1 f_1(1-x)], \quad g_2(x) = d_1{}^{-1}[-\beta_1 f_1(x) + \alpha_1 f_1(1-x)].$

Так как $\mu = i\lambda/\sqrt{d_1}$, то

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R^0_\mu f)(x)\,d\lambda = \frac{\sqrt{d_1}}{i}\,\sigma_{r_1}(f,x), \qquad -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R^0_{-\mu} f)(x)\,d\lambda = -\frac{\sqrt{d_1}}{i}\,\sigma_{r_1}(f,x),$$

где $r_1 = r/\sqrt{d_1}$. Поэтому

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} I_\lambda(x)\,d\lambda = \frac{\sqrt{d_1}}{i}\,\Big\{&\gamma_{11}(x)\big[\sigma_{r_1}(\delta_{11}g_1,x)+\sigma_{r_1}(\delta_{12}g_2,x)\big]-\\ &-\gamma_{12}(x)\big[\sigma_{r_1}(\delta_{21}g_1,x)+\sigma_{r_1}(\delta_{22}g_2,x)\big]\Big\}.\end{aligned} \tag{18}$$

Далее используя принцип локализации и теорему Штейнгауза ([11], с. 111), несложно получить, что если $a(x)$ удовлетворяет условию Липшица первого порядка, то $\|\sigma_r(af,x) - a(x)\sigma_r(f,x)\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]} \to 0$, при $r \to \infty$ для любой функции $f(x) \in L[0,1]$. Следовательно, (18) перейдет в

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} I_\lambda(x)\,d\lambda = \frac{1}{i\sqrt{d_1}}\,\big[\theta_1\sigma_{r_1}(f_1,x)+\theta_2\sigma_{r_1}(\widetilde{f_1},x)\big]+o(1), \tag{19}$$

где $\theta_1 = \alpha_1(\gamma_{12}\delta_{21} - \gamma_{11}\delta_{11}) + \beta_1(\gamma_{12}\delta_{22} - \gamma_{11}\delta_{12})$, $\theta_2 = \alpha_1(\gamma_{11}\delta_{12} - \gamma_{12}\delta_{22}) + \beta_1(\gamma_{11}\delta_{11} - \gamma_{12}\delta_{21})$, $\widetilde{f_1}(x) = f(1-x)$. Непосредственно вычислив элементы $\gamma_{ij}(x)$ и $\delta_{ij}(x)$, найдем, что $\theta_1 = i\sqrt{d_1}$, $\theta_2 = 0$. Таким образом, из (17) и (19) имеем $(S_r(f,x))_1 = \sigma_{r_1}(f_1,x) + o(1)$.

Аналогично доказывается, что $(S_r(f,x))_2 = \sigma_{r_2}(f_2,x) + o(1)$, где $r_2 = rd/\sqrt{d_1} = (r\sqrt{d_1})/(\sqrt{d_1}\sqrt{d_2}) = r/\sqrt{d_2}$, а $o(1) \to 0$ при $r \to \infty$ равномерно по $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Для третьей компоненты $S_r(f,x)$ имеем $(S_r(f,x))_3 = \sigma_r(f_3,x) + o(1)$. Отсюда следует утверждение теоремы. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проекты* 06-01-00003, 07-01-00397).

Библиографический список

1. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.:Физматлит, 2004. 272 с.

2. *Андреев А.А.* Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 5. С. 1126–1128.

3. *Dankl Ch.G.* Differential-Difference Operators Associated to Reflection Groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 311, № 1. P. 167–183.

4. *Платонов С.С.* Разложение по собственным функциям для некоторых функционально-дифференциальных операторов // Тр. Петрозавод. ун-та. Сер. Матем. 2004. Вып. 11. С. 15–35.

5. *Хромов А.П.* Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Мат. сборник. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378–405.

6. *Корнев В.В., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сборник. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.

7. *Бурлуцкая М.Ш., Курдюмов В.П., Луконина А.С., Хромов А.П.* Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией // Докл. АН. 2007. Т. 414, № 4. С. 443–446.

8. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* О сходимости средних Рисса разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора на графе-цикле //Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. Т. 7, вып. 1. С. 3–8.

9. *Рапопорт И.М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: Изд-во АН Укр. ССР, 1954. 287 с.

10. *Расулов М.Л.* Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964. 464 с.

11. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.

УДК 517.5

О СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ ЛАГЕРРА ЛИНЕЙНЫМИ МЕТОДАМИ

М.Д. Бурмистрова

ООО «Зирван»
E-mail: mburmistrova@yahoo.com

В статье рассматривается задача о суммируемости ряда Лагерра методами, задаваемыми треугольными матрицами. Получены условия на матрицу метода суммирования и разлагаемую функцию, гарантирующие сходимость соответствующих линейных средних в точке Лебега $t = 0$.

On Laguerre Expansions Summability by the Linear Methods

M.D. Burmistrova

This paper studies a problem of Laguerre expansions summability via methods defined by triangular matrices. The conditions on a matrix and an expandable function are obtained to guarantee the convergence of corresponding linear means at the Lebesgue point $t = 0$.

Пусть (см. [1]) $\hat{L}_m^\alpha(t)$, $\alpha > -1$, $m = 0, 1, \ldots$ — ортонормированные на $[0, \infty)$ с весом $\rho(t, \alpha) = e^{-t}t^\alpha$ многочлены Лагерра, $L_\rho(0, \infty) = \left\{f : \|f\| = \int_0^\infty |f(t)|\, \rho(t, \alpha)\, dt < \infty\right\}$ — пространство измеримых по Лебегу на положительной полуоси функций. Рассмотрим ряд Фурье – Лагерра функции $f \in L_\rho(0, \infty)$

$$f(t) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \hat{a}_m \hat{L}_m^\alpha(t), \hat{a}_m = \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} f(t)\, \hat{L}_m^\alpha(t)\, dt, \quad m = 0, 1, \ldots . \tag{1}$$

С помощью треугольной матрицы $\Lambda = \left\{\lambda_m^{(n)} : m, n = 0, 1, \ldots;\ \lambda_0^{(n)} = 1; \lambda_m^{(n)} = 0 \quad \text{при } m \geq n+1\right\}$ определим последовательность линейных средних

$$\tau_n^\alpha(f, t, \Lambda) = \sum_{m=0}^{n} \lambda_m^{(n)} \hat{a}_m \hat{L}_m^\alpha(t) \tag{2}$$

ряда (1). В случае сходимости этой последовательности ряд (1) называется Λ — суммируемым.

В силу специфики асимптотического поведения многочленов Лагерра в точке $t = 0$ наибольшую сложность при исследовании поточечной сходимости и суммируемости ряда Фурье – Лагерра представляет эта точка. В настоящей работе мы рассматриваем задачу о сходимости линейных средних (2) в точке $t = 0$ в случае, когда она является точкой Лебега функции f , то есть существует число A такое, что

$$\int_0^h |f(t) - A|\, dt = o(h), h \to +0.$$

Г. Сегё (см. [1]) доказал теорему о сходимости чезаровских средних порядка $k > \alpha + 1/2$ в точке непрерывности $t = 0$ функции f при выполнении дополнительного условия на поведение функции на бесконечности $\int_1^\infty |f(t)|\, e^{-t/2} t^{\alpha - k - 1/3} dt < \infty$. Это условие можно считать аналогом антиполярного условия в случае рядов Якоби. Нетрудно показать, что теорема Г. Сегё остаётся верной, если вместо непрерывности функции в точке $t = 0$ предположить, что точка $t = 0$ является точкой Лебега функции f.

Целью настоящей статьи является получение достаточных условий сходимости линейных средних (2) в точке Лебега $t = 0$ функции f для более широкого класса матриц Λ, чем матрицы, определяющие методы суммирования Чезаро.

Положим $\Delta\lambda_m^{(n)} = \lambda_m^{(n)} - \lambda_{m+1}^{(n)}$, $\Delta^2\lambda_m^{(n)} = \Delta\left(\Delta\lambda_m^{(n)}\right)$. Через C будем обозначать положительные постоянные, вообще говоря, различные в разных случаях.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть $-1/2 < \alpha < 1/2$ и матрица Λ с ограниченными коэффициентами удовлетворяет условиям:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_m^{(n)} = 1$ *для всякого фиксированного* m *;*

2) $\sum_{m=0}^{n-1} (m+1) \left(\frac{n-m}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} \left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right| \leq C$ *;*

кроме того, существует число $\delta < 0$ такое, что

© М.Д. Бурмистрова, 2008

3) $\sum_{m=0}^{n}(m+1)^{\alpha/2+3/4}\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|\le Cn^{\delta}$.

Если для некоторых $\mu>0$ *и* $p>1$ ($p\le\frac{12\alpha+12}{6\alpha-1+12\delta}$ *в случае* $1/6<\alpha<1/2$ *и* $\delta>1/12-\alpha/2$) *интеграл* $\int_{\mu}^{\infty}\left|f(t)e^{-t/2}\right|^p t^{\alpha}dt<\infty$, *то ряд Фурье – Лагерра функции* $f\in L_{\rho}(0,\infty)$ *является* Λ — *суммируемым в точке Лебега* $t=0$.

Перепишем линейные средние (2) в точке $t=0$ в виде

$$\tau_n^{\alpha}(f,0,\Lambda)=\int_0^{\infty}f(t)K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)\rho(t,\alpha)dt,$$

где $K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)=\sum_{m=0}^{n}\lambda_m^{(n)}\hat{L}_m^{\alpha}(t)\hat{L}_m^{\alpha}(0)$ — ядро метода суммирования, заданного матрицей Λ.

Ядро $K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)$ будем называть сингулярным, если $\int_0^{\infty}K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)\rho(t,\alpha)dt\to 1$ при $n\to\infty$ и $\int_z^{\infty}K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)\rho(t,\alpha)dt\to 0$ при $n\to\infty$ для любого $z>0$.

Доказательство теоремы основывается на теореме Д. К. Фаддеева о представлении функций в точках Лебега сингулярными интегралами (см. [2]). Согласно этой теореме, если точка $t=0$ является точкой Лебега интегрируемой на $(0,\mu)$ функции f ($\mu>0$), то для выполнения равенства $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\mu}f(t)K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)\rho(t,\alpha)dt=A$ достаточно, чтобы ядро $K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)$ было сингулярным и существовали на $(0,\mu)$ интегрируемые монотонные мажоранты $\Theta_n(t)$ для произведений $|K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)|\rho(t,\alpha)$ такие, что $\int_0^{\mu}\Theta_n(t)dt\le C$, где C не зависит от n.

В дальнейшем нам потребуется также теорема 8.91.2 из [1], согласно которой, если $t\ge a>0$, то при $n\to\infty$ справедливо соотношение

$$\max_{t\ge a}|L_n^{\alpha}(t)|e^{-t/2}t^{\lambda}\sim n^{Q},\tag{3}$$

где $Q=\max(\lambda-1/3,\alpha/2-1/4)$, λ — произвольное вещественное число, $L_n^{\alpha}(t)$ — стандартизованные многочлены Лагерра, связанные с ортонормированными многочленами соотношением $L_n^{\alpha}(t)=\hat{L}_n^{\alpha}(t)\sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}}$.

Лемма 1. *Пусть* $-1<\alpha<\frac{1}{2}$. *Тогда* $\int_z^{+\infty}L_n^{\alpha+1}(t)\rho(t,\alpha)dt\to 0$ *при* $n\to\infty$ *для любого* $z>0$.

Доказательство. Интегрируя по частям, используя равенство $\frac{d}{dt}L_{n+1}^{\alpha}(t)=-L_n^{\alpha+1}(t)$ ([1], стр.111) и соотношение (3), получаем

$$\left|\int_z^{\infty}L_n^{\alpha+1}(t)e^{-t}t^{\alpha}dt\right|=\left|\int_z^{\infty}e^{-t}t^{\alpha}dL_{n+1}^{\alpha}(t)\right|\le$$

$$\le\left|L_{n+1}^{\alpha}(t)e^{-t}t^{\alpha}\Big|_z^{\infty}\right|+\left|\int_z^{\infty}L_{n+1}^{\alpha}(t)e^{-t}t^{\alpha}dt\right|+\alpha\left|\int_z^{\infty}L_{n+1}^{\alpha}(t)e^{-t}t^{\alpha-1}dt\right|\le$$

$$\le Cn^{Q}\left(e^{-t/2}t^{\alpha}\Big|_z^{\infty}+\int_z^{\infty}e^{-t/2}t^{\alpha}dt+\alpha\int_z^{\infty}e^{-t/2}t^{\alpha-1}dt\right).$$

Так как $\int_z^{\infty}e^{-t/2}t^{\gamma}dt$ сходится для любого γ, а $Q<0$ при $\alpha<1/2$, то правая часть полученного неравенства стремится к нулю. □

Лемма 2. *При* $-1<\alpha<\frac{1}{2}$ *ядро Дирихле – Лагерра* $D_n^{\alpha}(t,0)=\sum_{k=0}^{n}\hat{L}_k^{\alpha}(0)\hat{L}_k^{\alpha}(t)$ *является сингулярным.*

Доказательство. Имеем

$$\int_0^{+\infty}D_n^{\alpha}(t,0)\rho(t,\alpha)dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{+\infty}L_k^{\alpha}(t)\rho(t,\alpha)dt=1.$$

Кроме того, так как

$$D_n^{\alpha}(t,0)=\sum_{k=0}^{n}\hat{L}_k^{\alpha}(0)\hat{L}_k^{\alpha}(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{k=0}^{n}L_k^{\alpha}(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}L_n^{\alpha+1}(t),$$

то из леммы 1 получаем, $\int_z^{+\infty}D_n^{\alpha}(t,0)\rho(t,\alpha)dt\to 0$ при $n\to\infty$ для любого $z>0$. □

Лемма 3. *Пусть* $-1 < \alpha < 1/2$, *а матрица* Λ *удовлетворяет условию 1) теоремы и* $\sum_{m=0}^{n} \left|\Delta\lambda_m^{(n)}\right| \le C$. *Тогда ядро* $K_n^\alpha(t,0,\Lambda)$ *сингулярно.*

Доказательство. Так как $\lambda_0^{(n)} = 1$, то, как и для ядра Дирихле, $\int_0^\infty K_n^\alpha(t,0,\Lambda)\,\rho(t,\alpha)\,dt = 1$. Треугольная матрица Λ при выполнении условий леммы является регулярной по Теплицу (см., например, [3, с. 126]) и $\int_z^\infty K_n^\alpha(t,0,\Lambda)\,\rho(t,\alpha)\,dt = \sum_{m=0}^{n} \Delta\lambda_m^{(n)} \int_z^\infty D_m^\alpha(t,0)\,\rho(t,\alpha)\,dt$. Поэтому в силу сингулярности ядра Дирихле получим $\int_z^\infty K_n^\alpha(t,0,\Lambda)\,\rho(t,\alpha)\,dt \to 0$ при $n \to \infty$ для всякого фиксированного z. $\square$

Доказательство теоремы. Положим $\nu = \left[\frac{n}{2}\right]$. Очевидно, $\left|\Delta\left|\Delta\lambda_m^{(n)}\right|\right| \le \left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|$. Тогда с помощью преобразования Абеля получим

$$\sum_{m=0}^{n} \left|\Delta\lambda_m^{(n)}\right| = \left|\sum_{m=0}^{\nu-1} (m+1)\,\Delta\left|\Delta\lambda_m^{(n)}\right| + (n+1)\left|\Delta\lambda_\nu^{(n)}\right| - \sum_{m=\nu}^{n-1} (n-m)\,\Delta\left|\Delta\lambda_m^{(n)}\right|\right| \le$$

$$\le \sum_{m=0}^{\nu-1} (m+1)\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right| + (n+1)\left|\Delta\lambda_\nu^{(n)}\right| + \sum_{m=\nu}^{n-1} (n-m)\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|,$$

$$\nu\left|\Delta\lambda_\nu^{(n)}\right| = \left|1 - \lambda_\nu^{(n)} - \sum_{i=0}^{\nu-1} (i+1)\,\Delta^2\lambda_i^{(n)}\right| \le 1 + \left|\lambda_\nu^{(n)}\right| + \sum_{m=0}^{\nu-1} (m+1)\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|. \tag{4}$$

Так как

$$\sum_{m=0}^{\nu-1} (m+1)\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right| \le C\sum_{m=0}^{\nu-1} (m+1)\left(\frac{n-m}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right| \le$$

$$\le C\sum_{m=0}^{n-1} (m+1)\left(\frac{n-m}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|$$

и

$$\sum_{m=\nu}^{n-1} (n-m)\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right| \le C\sum_{m=\nu}^{n-1} (m+1)\left(\frac{n-m}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right| \le$$

$$\le C\sum_{m=0}^{n-1} (m+1)\left(\frac{n-m}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|,$$

то из (4), ограниченности коэффициентов матрицы Λ и условия *2)* теоремы будем иметь $\sum_{m=0}^{n} \left|\Delta\lambda_m^{(n)}\right| \le C$. Значит, по лемме 3, при выполнении условий теоремы ядро $K_n^\alpha(t,0,\Lambda)$ сингулярно.

Построим интегрируемую монотонную мажоранту на интервале $(0,\mu)$ для произведений $\left|K_n^\alpha(t,0,\Lambda)\right|\rho(t,\alpha)$.

Сначала построим интегрируемую монотонную на $(0,\mu)$ мажоранту $\Phi_n^\alpha(t)$ для произведения $\left|F_n^\alpha(t,0)\right|\rho(t,\alpha)$, где

$$F_n^\alpha(t,0) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} D_m^\alpha(0,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)(n+1)} L_n^{\alpha+2}(t) \tag{5}$$

— ядро Фейера – Лагерра. Для многочленов Лагерра при $\alpha \ge -1/2$, $0 < t \le \mu$, и $n = 1,2,\ldots$ справедливы оценки (см. [1], теорема 7.6.4)

$$|L_n^\alpha(t)| \le C\begin{cases} t^{-\alpha/2-1/4}n^{\alpha/2-1/4}, \\ n^\alpha. \end{cases} \tag{6}$$

Положим $\Phi_0^\alpha(t) = C$, $0 < t$. Для $n = 1,2,\ldots$ положим $\Phi_n^\alpha(t) = C\max\left(n^{\alpha+1}t^\alpha e^{-t}, ne^{-t}\right)$, $0 < t \le \frac{1}{n}$, $\Phi_n^\alpha(t) = Cn^{\alpha/2-1/4}t^{\alpha/2-5/4}e^{-t}$, $\frac{1}{n} < t$. Здесь C выбрано в соответствии с оценкой (6), примененной для $L_n^{\alpha+2}(t)$.

Очевидно, что функции $\Phi_n^\alpha(t)$ не возрастают на $(0,\mu)$, а неравенства $|F_n^\alpha(t,0)|\,\rho(t,\alpha) \le \Phi_n^\alpha(t)$ следуют из оценок (6) и представления (5) ядра Фейера. Далее, при $\alpha < 1/2$, $n = 1,\ 2,...$ и $\mu > \frac{1}{n}$ получим

$$\int_0^\mu \Phi_n^\alpha(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{n}} \Phi_n^\alpha(t)\,dt + \int_{\frac{1}{n}}^\mu \Phi_n^\alpha(t)\,dt \le$$

$$\le Cn^{\alpha+1}\int_0^{\frac{1}{n}} t^\alpha dt + Cn^{\alpha/2-1/4}\int_{\frac{1}{n}}^\mu t^{\alpha/2-5/4}dt \le C.$$

При $\mu \le \frac{1}{n}$ будем иметь

$$\int_0^\mu \Phi_n^\alpha(t)\,dt \le \int_0^{\frac{1}{n}} \Phi_n^\alpha(t)\,dt \le C.$$

Аналогично построим на $(0,\mu)$ мажорирующие функции $\Psi_{n,k}^\alpha(t)$ для произведений $\left|V_{n,k}^\alpha(t,0)\right|\rho(t,\alpha)$ при $k \le \nu$, где

$$V_{n,k}^\alpha(t,0) = \frac{1}{k+1}\sum_{m=n-k}^{n} D_m^\alpha(0,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)(k+1)}\sum_{m=n-k}^{n} L_m^{\alpha+1}(t) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)(k+1)}\left(L_n^{\alpha+2}(t) - L_{n-k-1}^{\alpha+2}(t)\right) \tag{7}$$

— ядра Валле Пуссена. Строить будем так, чтобы

$$\int_0^\mu \Psi_{n,k}^\alpha(t)\,dt \le C\left(\frac{n+1}{k+1}\right)^{\alpha+1/2}.$$

Положим

$$\Psi_{n,k}^\alpha(t) = C\begin{cases} \max\left(n^{\alpha+1}t^\alpha e^{-t}, ne^{-t}\right) & 0 < t \le \frac{1}{n}, \\ n^{\alpha/2+1/4}t^{\alpha/2-3/4}e^{-t}, & \frac{1}{n} < t \le \frac{n+1}{(k+1)^2}, \\ \frac{n^{\alpha/2+3/4}}{(k+1)}t^{\alpha/2-5/4}e^{-t}, & \frac{n+1}{(k+1)^2} < t, \end{cases}$$

где $n = 1, 2, ...,\ k \le \nu$ и $-1/2 < \alpha < 1/2$.

Функции $\Psi_{n,k}^\alpha(t)$ не возрастают на $(0,\mu)$, а неравенства

$$\left|V_{n,k}^\alpha(t,0)\right|\rho(t,\alpha) \le \Psi_{n,k}^\alpha(t)$$

следуют из оценок (6), представлений ядра Валле Пуссена (7) и того факта, что $n-k-1 \sim n$ при $k \le \nu$. Далее, при $-1/2 < \alpha < 0$ и $\mu > \frac{n+1}{(k+1)^2}$ имеем

$$\int_0^\mu \Psi_{n,k}^\alpha(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{n}} \Psi_{n,k}^\alpha(t)\,dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{(k+1)^2}} \Psi_{n,k}^\alpha(t)\,dt + \int_{\frac{n+1}{(k+1)^2}}^\mu \Psi_{n,k}^\alpha(t)\,dt \le$$

$$\le Cn^{\alpha+1}\int_0^{\frac{1}{n}} t^\alpha dt + Cn^{\alpha/2+1/4}\int_{1/n}^{\frac{n+1}{(k+1)^2}} t^{\alpha/2-3/4}dt + C\frac{n^{\alpha/2+3/4}}{(k+1)}\int_{\frac{n+1}{(k+1)^2}}^\mu t^{\alpha/2-5/4}dt \le$$

$$\le C\left(\frac{n+1}{k+1}\right)^{\alpha+1/2}.$$

При $\mu \le \frac{n+1}{(k+1)^2}$ имеем

$$\int_0^\mu \Psi_{n,k}^\alpha(t)\,dt \le \int_0^{\frac{n+1}{(k+1)^2}} \Psi_{n,k}^\alpha(t)\,dt \le C\left(\frac{n+1}{k+1}\right)^{\alpha+1/2}.$$

Случай $0 \le \alpha < 1/2$ рассматривается аналогично.

Теперь перейдем к общему случаю ядер $K_n^\alpha(t,0,\Lambda)$.

Ядро $K_n^\alpha(t,0,\Lambda)$ представимо в виде

$$K_n^\alpha(t,0,\Lambda)=\sum_{m=0}^{\nu-1}(m+1)\,\Delta^2\lambda_m^{(n)}F_m^\alpha(t,0)+(\nu+1)\,\Delta\lambda_\nu^{(n)}F_\nu^\alpha(t,0)+$$

$$+(n-\nu)\,\Delta\lambda_{\nu+1}^{(n)}V_{n,n-\nu-1}^\alpha(t,0)-\sum_{m=\nu+1}^{n-1}(n-m)\,\Delta^2\lambda_m^{(n)}V_{n,n-m-1}^\alpha(t,0)\,.$$

Следовательно, последовательность

$$\Theta_n(t)=\sum_{m=0}^{\nu-1}(m+1)\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|\Phi_m^\alpha(t)+(\nu+1)\left|\Delta\lambda_\nu^{(n)}\right|\Phi_\nu^\alpha(t)+$$

$$+(n-\nu)\left|\Delta\lambda_{\nu+1}^{(n)}\right|\Psi_{n,n-\nu-1}^\alpha(t)+\sum_{m=\nu+1}^{n-1}(n-m)\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|\Psi_{n,n-m-1}^\alpha(t)$$

будет интегрируемой монотонной мажорантой для произведения $|K_n^\alpha(t,0,\Lambda)|\,\rho(t,\alpha)$ при $-1/2<\alpha<1/2$. Действительно, $\Theta_n(t)$ не возрастают на интервале $(0,\mu)$ и в силу условия *2)* теоремы и соотношения (4) получим

$$\int_0^\mu\Theta_n(t)\,dt\le C(\sum_{m=0}^{\nu-1}(m+1)\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|+(\nu+1)\left|\Delta\lambda_\nu^{(n)}\right|+(n-\nu)\left|\Delta\lambda_{\nu+1}^{(n)}\right|+$$

$$+\sum_{m=\nu+1}^{n-1}(n-m)\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|\left(\frac{n+1}{n-m}\right)^{\alpha+1/2})\le C.$$

Согласно теореме Д.К. Фаддеева получим

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\mu f(t)\,K_n^\alpha(t,0,\Lambda)\,\rho(t,\alpha)\,dt=A.$$

Теперь заметим, что так как ядро $K_n^\alpha(t,0,\Lambda)$ сингулярно, то

$$\int_{z_1}^{z_2}K_n^\alpha(t,0,\Lambda)\,e^{-t}t^\alpha dt\to 0\ \text{ при }\ n\to\infty$$

для любых $0<z_1<z_2$. Следовательно,

$$\int_\mu^\infty S(t)\,K_n^\alpha(t,0,\Lambda)\,e^{-t}t^\alpha dt\to 0\ \text{ при }\ n\to\infty$$

для любой ступенчатой функции $S(t)$. Поэтому, в силу критерия слабой сходимости линейных функционалов (см., например, [4, стр. 198]), предполагая, что

$$\int_\mu^\infty\left|K_n^\alpha(t,0,\Lambda)\,e^{-t/2}\right|^q t^\alpha dt\le C,$$

получим

$$\int_\mu^\infty f(t)\,K_n^\alpha(t,0,\Lambda)\,e^{-t}t^\alpha dt\to 0\ \text{ при }\ n\to\infty$$

для любой функции $f\in\left\{f:\int_\mu^\infty\left|f(t)\,e^{-t/2}\right|^p t^\alpha dt<\infty\right\}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\,(p>1)$. Значит, для доказательства теоремы достаточно показать, что $\int_\mu^\infty\left|K_n^\alpha(t,0,\Lambda)\,e^{-t/2}\right|^q t^\alpha dt<C$.

Согласно работе [5], при $t\ge(1+\lambda)\,\eta$ для всех m справедлива оценка

$$\left|L_m^{\alpha+2}(t)\right|e^{-t/2}\le C\,(m+1)^{\alpha/2+1}\,t^{-\alpha/2-1}e^{-\xi t}. \tag{8}$$

Здесь λ — достаточно малое положительное число, $\eta=4n+2\alpha+6$, $0<\xi<1/2$.

Разобьем интеграл на два:

$$\int_{\mu}^{\infty}\left|K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)\,e^{-t/2}\right|^q t^{\alpha}dt =$$

$$=\int_{\mu}^{(1+\lambda)\eta}\left|K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)\,e^{-t/2}\right|^q t^{\alpha}dt+\int_{(1+\lambda)\eta}^{\infty}\left|K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)\,e^{-t/2}\right|^q t^{\alpha}dt=I_1+I_2.$$

Оценим сначала интеграл I_1. Ядро $K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)$ представимо в виде

$$K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)=\sum_{m=0}^{n}(m+1)\,\Delta^2\lambda_m^{(n)}F_m^{\alpha}(t,0)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{m=0}^{n}\Delta^2\lambda_m^{(n)}L_m^{\alpha+2}(t).$$

Из соотношения (3) имеем $\max\left|L_m^{\alpha+2}(t)\right|e^{-t/2}t^{\alpha/2+13/12}\sim(m+1)^{\alpha/2+3/4}$. Тогда

$$t^{\alpha/2+13/12}\left|K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)\right|e^{-t/2}\le C\sum_{m=0}^{n}\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|(m+1)^{\alpha/2+3/4}\le Cn^{\delta}$$

и

$$I_1\le Cn^{q\delta}\int_{\mu}^{(1+\lambda)\eta}t^{\alpha-q(\alpha/2+13/12)}dt.$$

Если $\alpha\le 1/6$, то при любом $q>1$ будет иметь место неравенство $\alpha-q(\alpha/2+13/12)\le -1$. Поэтому $I_1\le Cn^{q\delta}\ln(n+1)\le C$, так как по условию теоремы $\delta<0$. Рассмотрим случай $\alpha>1/6$. Если q не меньше $\frac{12\alpha+12}{6\alpha+13}$, то снова $\alpha-q(\alpha/2+13/12)\le -1$ и $I_1\le C$. Если $1<q<\frac{12\alpha+12}{6\alpha+13}$, то $I_1\le Cn^{\alpha+1+q(\delta-\alpha/2-13/12)}\le C$ при $\tau=\alpha+1+q(\delta-\alpha/2-13/12)\le 0$. Запишем левую часть последнего условия в виде $\tau=(\alpha+1)(1-q)+q(\delta+\alpha/2-1/12)$. Отсюда, если $1/6<\alpha$ и $\delta\le 1/12-\alpha/2$, то $\tau\le 0$ при любом $q>1$. Если же $1/6<\alpha$, а $\delta>1/12-\alpha/2$, то $\tau\le 0$ при $q\ge\frac{12\alpha+12}{6\alpha+13-12\delta}$. Это неравенство выполняется при $p\le\frac{12\alpha+12}{6\alpha-1+12\delta}$.

Оценим теперь интеграл I_2 . Используя оценку (8), получим

$$\left|K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)\right|e^{-t/2}\le Ce^{-\xi t}t^{-\alpha/2-1}\sum_{m=0}^{n}\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|(m+1)^{\alpha/2+1}\le$$

$$\le Ce^{-\xi t}n^{1/4}t^{-\alpha/2-1}\sum_{m=0}^{n}\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|(m+1)^{\alpha/2+3/4}\le Cn^{\delta+1/4}t^{-\alpha/2-1}e^{-\xi t}.$$

Значит

$$I_2\le Cn^{q(1/4+\delta)}\int_{(1+\lambda)\eta}^{\infty}t^{\alpha-q(\alpha/2+1)}e^{-q\xi t}dt=Cn^{q(1/4+\delta)}\int_{(1+\lambda)\eta}^{\infty}t^{-1+q/3}t^{\alpha-q(\alpha/2+4/3)+1}e^{-q\xi t}dt.$$

Теперь заметим, что $\alpha-q(\alpha/2+4/3)+1<0$ при $q>1$ и $-1/2<\alpha<1/2$. Следовательно, $t^{\alpha-q(\alpha/2+4/3)+1}\le Cn^{\alpha-q(\alpha/2+4/3)+1}$ при $t\ge(1+\lambda)\eta$. Получаем

$$I_2\le Cn^{q(1/4+\delta)+\alpha+1-q(\alpha/2+4/3)}\int_{(1+\lambda)\eta}^{\infty}t^{-1+q/3}e^{-q\xi t}dt\le Cn^{\alpha+1-q(\alpha/2+13/12-\delta)}\le C.$$

Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
2. *Фаддеев Д.К.* О представлении суммируемых функций сингулярными интегралами в точках Lebesgue'a // Матем. сб. 1936. Т. 1/43, № 3. С. 351–368.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т.I.
4. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
5. *Askey R., Wainger S.* Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series // Amer. J. Math. 1965. V. 87. P. 695–708.

УДК 517.984

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ В СИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

Т.В. Мазур

Саратовский государственный университет,
кафедра математической физики и вычислительной математики
E-mail: Sternkind@mail.ru

В статье предоставлены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи восстановления оператора Штурма – Лиувилля по его спектру в случае симметричного относительно середины отрезка потенциала.

On the Solvability of the Inverse Sturm – Liouville Problem in the Central Symmetry Case

T.V. Mazur

Necessary and sufficient conditions are provided for the solvability of the inverse problem of recovering Sturm – Liouville operator from its spectrum in the central symmetry case.

1. Пусть $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ — собственные значения самосопряжённой краевой задачи $L = L(q(x), h)$ вида

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad q(x) \in L_2(0,\pi), \quad q(x) = q(\pi - x), \tag{1}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + hy(\pi) = 0, \tag{2}$$

где λ — спектральный параметр, $q(x)$, h вещественны. Функция $q(x)$ называется *потенциалом*. Краевая задача L имеет счётное множество собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$, причём (см. [1, гл. 1])

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{n} + \frac{\sigma_n}{n}, \quad \{\sigma_n\} \in l_2, \tag{3}$$

где

$$\omega = \frac{1}{\pi}\Big(2h + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt\Big).$$

Рассмотрим следующую обратную задачу:

Задача 1. *По заданному спектру $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ построить потенциал $q(x)$ и коэффициент h.*

Известно (см. [1, гл.1]), что задание спектра $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ однозначно определяет краевую задачу L. Другими словами, если решение этой обратной задачи существует, то оно единственно. Цель этой статьи заключается в описании необходимых и достаточных условий разрешимости данной обратной задачи. Основным результатом статьи является следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того, чтобы вещественные числа $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ были спектром некоторой краевой задачи $L(q(x), h)$ вида (1)-(2), необходимо и достаточно, чтобы имело место представление (3), где ω — вещественное число.*

Необходимость условий теоремы очевидна. Для доказательства достаточности нам потребуются некоторые факты из теории обратных задач Штурма – Лиувилля. Эта информация кратко будет изложена в п.2.

2. Пусть $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ — собственные значения самосопряжённой краевой задачи $L_1 = L_1(q(x), h, H)$ вида

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad q(x) \in L_2(0,\pi), \tag{4}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{5}$$

где $q(x)$, h, H вещественны. Ясно, что L — частный случай L_1 при $H = h$, и $q(x) = q(\pi - x)$ п.в. на $(0,\pi)$.

Пусть $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ — решения уравнения (4) при начальных условиях

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \quad \varphi'(0,\lambda) = h, \quad \psi(\pi,\lambda) = 1, \quad \psi'(\pi,\lambda) = -H. \tag{6}$$

Обозначим

$$\Delta(\lambda) = \langle \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda)\rangle, \tag{7}$$

© Т.В. Мазур, 2008

где $\langle y(x), z(x)\rangle := y(x)z'(x) - y'(x)z(x)$ — вронскиан функций y и z. Согласно теореме Остроградского – Лиувилля, $\langle \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda)\rangle$ не зависит от x. Функция $\Delta(\lambda)$ называется *характеристической функцией* краевой задачи L_1. Подставляя $x = 0$ и $x = \pi$ в (7), получаем

$$\Delta(\lambda) = V(\varphi) = -U(\psi). \tag{8}$$

Функция $\Delta(\lambda)$ является целой аналитической по λ порядка $1/2$. Собственные значения $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ краевой задачи L_1 совпадают с нулями $\Delta(\lambda)$ и имеют вид

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega_1}{n} + \frac{\sigma_{n1}}{n}, \quad \{\sigma_{n1}\} \in l_2, \tag{9}$$

где

$$\omega_1 = \frac{1}{\pi}\Big(h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt\Big).$$

Кроме того, из (6)–(8) следует, что функции $\varphi(x,\lambda_n)$ и $\psi(x,\lambda_n)$ являются собственными функциями, и существует последовательность $\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ такая, что

$$\psi(x,\lambda_n) = \beta_n\varphi(x,\lambda_n), \quad \beta_n \neq 0. \tag{10}$$

Лемма 1. *Задание спектра $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ однозначно определяет характеристическую функцию $\Delta(\lambda)$ по формуле*

$$\Delta(\lambda) = \pi(\lambda_0 - \lambda)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n - \lambda}{n^2}. \tag{11}$$

Доказательство. Поскольку $\Delta(\lambda)$ является целой по λ функцией порядка $1/2$, то по теореме Адамара $\Delta(\lambda)$ однозначно определяется своими нулями λ_n с точностью до постоянного множителя:

$$\Delta(\lambda) = C\prod_{n=0}^{\infty}\Big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\Big). \tag{12}$$

(Случай, когда $\lambda = 0$ является собственным значением, требует незначительных изменений.) Известно (см. [1, гл.1]), что имеет место асимптотическая формула:

$$\Delta(\lambda) = -\rho\sin\rho\pi + \omega_1\cos\rho\pi + \zeta(\rho), \quad |\lambda| \to \infty, \tag{13}$$

где

$$\zeta(\rho) = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\cos\rho(\pi - 2t)\,dt + O\Big(\frac{1}{\rho}\exp(|\tau|\pi)\Big), \quad \lambda = \rho^2, \quad \tau = \mathrm{Im}\rho.$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{\Delta}(\lambda) := -\rho\,\sin\rho\pi = -\lambda\pi\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{\lambda}{n^2}\Big).$$

Тогда

$$\frac{\Delta(\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} = C\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0\pi\lambda}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\lambda_n}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 + \frac{\lambda_n - n^2}{n^2 - \lambda}\Big).$$

Используя (9) и (13), вычисляем:

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\Delta(\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} = 1, \qquad \lim_{\lambda\to-\infty}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 + \frac{\lambda_n - n^2}{n^2 - \lambda}\Big) = 1$$

и, следовательно,

$$C = \pi\lambda_0\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n^2}.$$

Подставляя это в выражение (12), приходим к (11). □

Обозначим

$$\alpha_n := \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)\,dx, \quad \alpha_n^0 := \int_0^\pi \psi^2(x,\lambda_n)\,dx. \tag{14}$$

Из (10) следует, что

$$\alpha_n^0 = \beta_n^2 \alpha_n\,. \tag{15}$$

Лемма 2. *Справедливо соотношение*

$$\alpha_n = -\dot{\Delta}(\lambda_n)(\beta_n)^{-1}, \tag{16}$$

где числа β_n определяются формулой (10), и $\dot{\Delta}(\lambda) := \frac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)$.

Доказательство: Используя (4), вычисляем

$$\frac{d}{dx}\langle\psi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda_n)\rangle = (\lambda-\lambda_n)\psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)$$

и, следовательно, с учётом (8) имеем:

$$(\lambda-\lambda_n)\int_0^\pi \psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)dx = \langle\psi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda_n)\rangle\Big|_0^\pi = -\Delta(\lambda).$$

При $\lambda \to \lambda_n$ это даёт

$$\int_0^\pi \psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)dx = -\dot{\Delta}(\lambda).$$

Учитывая (10) и (14), приходим к (16). □

Для весовых чисел α_n справедливо представление

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\sigma_{n1}}{n}, \qquad \{\sigma_{n1}\} \in l_2, \qquad \alpha_n > 0. \tag{17}$$

В самом деле, известно (см. [1, гл.1]), что для функций $\varphi(x,\lambda_n)$ имеет место асимптотическая формула

$$\varphi(x,\lambda_n) = \cos nx + \frac{\xi_n(x)}{n}, \qquad n \to \infty, \tag{18}$$

где

$$\xi_n(x) = \Big(h + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt - x\omega - x\zeta_n\Big)\sin nx + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\sin n(x-2t)\,dt + O\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad \{\zeta_n\} \in l_2. \tag{19}$$

Следовательно,

$$|\xi_n(x)| \le C. \tag{20}$$

Подставляя это в (14), получаем:

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\int_0^\pi \Big(2\cos nx + \frac{\xi_n(x)}{n}\Big)\xi_n(x)\,dt.$$

Учитывая (20), приходим к (17).

Кроме того, в силу (10) при $x = \pi$ имеем: $\beta_n = (\varphi(\pi,\lambda_n))^{-1}$. Тогда, используя (18) и (19), вычисляем:

$$\beta_n = (-1)^n + \frac{\sigma_{n2}}{n}, \quad \{\sigma_{n2}\} \in l_2.$$

Вместе с (16) и (17) это даёт:

$$\dot{\Delta}(\lambda_n) = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2} + \frac{\sigma_{n3}}{n}, \quad \{\sigma_{n3}\} \in l_2. \tag{21}$$

Совокупность чисел $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\ge 0}$ называется *спектральные данные* краевой задачи L_1.

Заметим, что, если $H = h$ и $q(x) = q(\pi - x)$ п.в. на $(0,\pi)$, то $\psi(x,\lambda) = \varphi(\pi - x,\lambda)$. Используя (10), вычисляем

$$\psi(x,\lambda_n) = \beta_n\varphi(x,\lambda_n) = \beta_n\psi(\pi-x,\lambda_n) = \beta_n^2\varphi(\pi-x,\lambda_n) = \beta_n^2\psi(x,\lambda_n),$$

и, следовательно, $\beta_n^2 = 1$. Используя теорему Штурма об осцилляции [2, стр. 25], заключаем, что $\beta_n = (-1)^n$. Тогда (15) даёт $\alpha_n = \alpha_n^0$.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть заданы вещественные числа $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ вида (3). Введём числа $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ по формуле

$$\alpha_n := (-1)^{n+1}\dot{\Delta}(\lambda_n), \tag{22}$$

где $\Delta(\lambda)$ построена по (11). Подставляя вместо $\dot{\Delta}(\lambda_n)$ представление (21), получаем, что числа α_n имеют вид (17). Согласно теореме 1.3.1 из [1, стр. 45], существуют единственные вещественные $q(x)$, h и H ($q(x) \in L_2(0,\pi)$), такие, что $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ являются спектральными данными краевой задачи $L_1(q(x), h, H)$ вида (4)–(5). Кроме того, из (16) и (22) следует, что

$$\beta_n = (-1)^n.$$

Вместе с (15) это даёт

$$\alpha_n^0 = \alpha_n$$

для этой краевой задачи. Осталось показать, что $h = H$ и $q(x) = q(\pi - x)$ п.в. на $(0,\pi)$. С этой целью рассмотрим краевую задачу $\tilde{L}_1 = L_1(\tilde{q}(x), \tilde{h}, \tilde{H})$, где $\tilde{q}(x) := q(\pi - x)$, $\tilde{h} = H$, $\tilde{H} = h$.

Договоримся, что если некоторый символ γ обозначает объект, относящийся к задаче L_1, то символ $\tilde{\gamma}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к задаче $\tilde{L}_1$. В нашем случае ясно, что

$$\tilde{\lambda}_n = \lambda_n, \quad \tilde{\alpha}_n = \alpha_n^0, \quad \tilde{\alpha}_n^0 = \alpha_n.$$

Поскольку $\alpha_n^0 = \alpha_n$, следовательно, краевые задачи L_1 и $\tilde{L}_1$ имеют одинаковые спектральные данные. Согласно Теореме 1.2.2 из [1, стр.30], получаем $\tilde{h} = h$, $\tilde{H} = H$ и $\tilde{q}(x) = q(x)$ п.в. на $(0,\pi)$, т.е. $H = h$ и $q(x) = q(\pi - x)$ п.в. на $(0,\pi)$. Теорема 1 доказана. □

4. Аналогичным образом могут быть получены подобные результаты для краевых условий Дирихле. В [4] данные результаты были получены другим, более сложным методом. Сформулируем их здесь без доказательства. Пусть $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ — собственные значения самосопряжённой краевой задачи $L_0 = L_0(q(x))$ вида

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad q(x) \in L_2(0,\pi), \quad q(x) = q(\pi - x),$$
$$y(0) = y(\pi) = 0,$$

где потенциал $q(x)$ вещественнен. Тогда

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{\omega_0}{n} + \frac{\sigma_{n0}}{n}, \quad \{\sigma_{n0}\} \in l_2, \tag{23}$$

где

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi q(t)\,dt.$$

Задание спектра $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ однозначно определяет потенциал $q(x)$.

Теорема 2. *Для того, чтобы вещественные числа $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ были спектром некоторой краевой задачи $L_0(q(x))$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (23), где ω_1 — вещественное число.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проекты* 07-01-00003 *и* 07-01-92000-ННС-а).

Библиографический список

1. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
2. *Юрко В.А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов: Изд-во Сарат. пед. ин-та, 2001.
3. *Conway J.B.* Functions of One Complex Variable. 2nd ed. V. I. N.Y.: Springer-Verlag, 1995.
4. *Pöschel J., Trubowitz E.* Inverse Spectral Theory. N.Y.: Academic Press, 1987.

УДК 517.5

ОБ АСИМПТОТИКЕ МНОГОЧЛЕНОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЕТКАХ

А.А. Нурмагомедов

Дагестанский государственный педагогический университет,
кафедра математического анализа
E-mail: alimn@mail.ru

В этой работе исследуются асимптотические свойства многочленов $\hat{p}_n(x)$, ортогональных с весом Δt_j на произвольных сетках, состоящих из конечного числа N точек отрезка $[-1,1]$. А именно установлена асимптотическая формула, в которой при возрастании n вместе с N, асимптотическое поведение этих многочленов близко к асимптотическому поведению многочленов Лежандра.

About Approximation Multinominals, Orthogonal on Any Grids

A.A. Nurmagomedov

In this work are investigated approximation properties of multinominals $\hat{p}_n(x)$, orthogonal with weight Δt_j on the any grids consisting of final number of points of a piece $[-1,1]$. Namely the approximation formula, in which is established at increase n together with N, approximation behaviour of these multinominals close to approximation behaviour of multinominals Lasiandra.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $T_N = \{t_j\}_{j=0}^N$ — дискретное множество (сетка), состоящее из конечного числа различных точек отрезка $[-1,1]$: $-1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = 1$. Рассмотрим также еще одну сетку $X_N = \{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$, состоящую из N точек x_j, где

$$x_j = \frac{t_j + t_{j+1}}{2}, \qquad j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Через

$$\hat{p}_k(x) = \hat{p}_k(x; T_N) \qquad (k = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{1.1}$$

обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему на сетке X_N в следующем смысле $(0 \le n, m \le N-1)$:

$$(\hat{p}_n, \hat{p}_m) = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_n(x_j)\hat{p}_m(x_j)\Delta t_j = \delta_{nm}, \tag{1.2}$$

где $\triangle t_j = t_{j+1} - t_j, j = 0, 1, \ldots, N-1$. Для определенности будем считать, что старший коэффициент многочлена $\hat{p}_n(x)$положителен, т.е.

$$\hat{p}_n(x) = k_n x^n + k_{n-1}x^{n-1} + \cdots + k_0,\ k_n > 0. \tag{1.3}$$

В настоящей работе исследуются асимптотические свойства многочлена $\hat{p}_n(x)$ при $n, N \to \infty$.

Ниже нам понадобится обобщение на интегральные метрики известного неравенства В.А. Маркова для производных алгебраических многочленов. А именно пусть $q_n(x)$ — произвольный алгебраический многочлен степени $n, 0 \le r \le n$. Тогда имеет место [1, 4]оценка

$$\int_{-1}^{1} \left|q_n^{(r)}(x)\right| dx \le c(r) n^{2r} \int_{-1}^{1} |q_n(x)|\, dx, \tag{1.4}$$

где $c(r), c(\alpha,\beta), \ldots, c(\alpha,\beta,\ldots,\gamma)$ — положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров. Через $æ_r$ мы обозначим наименьшую константу в неравенстве (1.4), т.е.

$$æ_r = \inf_{q_n} \frac{\int_{-1}^{1} \left|q_n^{(r)}(x)\right| dx}{n^{2r} \int_{-1}^{1} |q_n(x)|\, dx}, \tag{1.5}$$

© А.А. Нурмагомедов, 2008

где нижняя грань берется по всем алгебраическим многочленам $q_n(x)$ степени n, не равными нулю тождественно.

Далее, пусть $\hat{P}_n(x)$ — ортонормированный многочлен Лежандра,

$$\delta_N = \max_{0\le j\le N-1} \Delta t_j. \tag{1.6}$$

В данной работе установлена асимптотическая формула:

$$\hat{p}_n(x) = \hat{P}_n(x) + \upsilon_n(x, T_N), \tag{1.7}$$

в которой для остаточного члена $\upsilon_n(x, T_N)$ при $1\le n\le \left(\frac{2}{æ_2}\right)^{1/4} \delta_N^{-1/2}$ имеет место оценка

$$\left|\upsilon_n(x, T_N)\right| \le c\delta_N n^{5/2} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{-1/2} \quad (-1\le x\le 1). \tag{1.8}$$

Последовательность многочленов, ортогональных на конечном множестве точек действительной прямой R, впервые была введена и исследована в целом ряде работ П.Л. Чебышева в связи с задачами математической статистики. В работах А.А. Маркова, Шарлье, М.Ф. Кравчука, Мейкснера, Хана и других изучались системы ортогональных многочленов дискретного переменного, различающиеся выбором сетки и веса. В частности, подробно исследовались разностные свойства дискретных аналогов классических многочленов Эрмита и Лагерра — многочленов соответственно Кравчука и Мейкснера.

Дальнейшее развитие теории многочленов, ортогональных на дискретных системах точек, связано с работами Хана, Вебер и Эрдеи, А.Ф. Никифорова, В.Б. Уварова, С.К. Суслова и многих других математиков и физиков. Были получены многочисленные приложения многочленов, ортогональных на дискретных системах точек в генетике, теории кодирования, квантовой механике, математической статистике и т.д.

В связи с приложениями указанных многочленов часто возникает вопрос об асимптотических свойствах в том случае, когда степень n растет (вместе с параметром N определяется числом точек сетки). Целенаправленное его изучение было проведено в работах Шарапудинова И.И. Задача состояла в том, чтобы получить такие оценки для остаточных членов асимптотических формул, из которых и известных весовых оценок для классических многочленов Якоби, Лагерра и Эрмита вытекали бы неулучшаемые по порядку при $n \to \infty$ весовые оценки для многочленов Чебышева, Мейкснера и Кравчука, стремясь одновременно к тому, чтобы эти оценки оставались верны при минимальных ограничениях на рост степени n в зависмости от N.

В работе [5, с. 56-61] И.И. Шарапудиновым для ортонормированных на равномерной сетке многочленов Чебышева $\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть α и β — целые неотрицательные числа, $a > 0$. Тогда имеет место асимптотическая формула:*

$$\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = \widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) + \upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(t),$$

для остаточного члена $\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ которой при $1 \le n \le aN^{1/2}$ справедлива оценка

$$|\ \upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\ | \le c(\alpha,\beta,a)\frac{n}{\sqrt{N}} \left[\sqrt{1-t} + \frac{1}{n}\right]^{-\alpha-1/2} \left[\sqrt{1+t} + \frac{1}{n}\right]^{-\beta-1/2},$$

где $\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)$ — ортонормированный многочлен Якоби.

При $\alpha = \beta = 0$ нам удалось перенести эту теорему на произвольный случай.

2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ ЯКОБИ

Мы здесь приведем некоторые сведения о многочленах Якоби и Лежандра. Определим многочлены Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)(n = 0, 1, 2, \dots)$ с помощью обобщенной формулы Родрига:

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{k(x)} \frac{d^n}{dx^n}\{k(x)\sigma^n(x)\}, \tag{2.1}$$

где α, β — произвольные действительные числа, $\sigma(x) = 1 - x^2$, $k(x) = k(x;\alpha,\beta) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$.

Ниже нам понадобятся следующие свойства многочленов Якоби [2, 3]:

производная

$$\frac{d^r}{dx^r}P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_r}{2^r}P_{n-r}^{\alpha+r,\beta+r}(x) \quad (0 \le r \le n), \tag{2.2}$$

где $(a)_0 = 1, (a)_\nu = a(a+1)\dots(a+\nu-1)$;

весовая оценка

$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(x)\right| \le c(\alpha,\beta)\left(\sqrt{1-x}+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+x}+\frac{1}{n}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}}. \tag{2.3}$$

Одним из частных случаев многочленов Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)(n = 0,1,2,\dots)$ при $\alpha = \beta = 0$ являются ортогональные многочлены Лежандра $P_n(x) = P_n^{0,0}(x)$ с единичным весом $k(x) = 1$ на сегменте $[-1,1]$:

$$\frac{2n+1}{2}\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \delta_{nm}. \tag{2.4}$$

3. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы здесь докажем некоторые утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 3.1. *Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[-1,1]$, $-1 = t_0 < < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = 1$, $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $x_j = (t_{j+1}+t_j)/2$, $j = 0,1,\dots,N-1$. Тогда имеет место следующее равенство:*

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\Delta t_j + r_N(f), \tag{3.1}$$

в котором для остаточного члена $r_N(f)$ имеет место оценка

$$|r_N(f)| \le \frac{1}{2}\delta_N^2\int\limits_{-1}^{1}|f''(t)|\,dt. \tag{3.2}$$

Доказательство. Мы имеем

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f(x)\,dx. \tag{3.3}$$

Далее, воспользовавшись формулой Тейлора, мы можем записать

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f(x)\,dx = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\left[f(x_j) + f'(x_j)(x-x_j) + \int\limits_{x_j}^{x}(x-t)f''(t)\,dt\right]dx =$$

$$= f(x_j)\Delta t_j + f'(x_j)\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}(x-x_j)\,dx + \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\int\limits_{x_j}^{x}(x-t)f''(t)\,dt\,dx =$$

$$= f(x_j)\Delta t_j + \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\int\limits_{x_j}^{x}(x-t)f''(t)\,dt\,dx. \tag{3.4}$$

Кратный интеграл в равенстве (3.4) запишем следующим образом:

$$J = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\int\limits_{x_j}^{x}(x-t)f''(t)\,dt\,dx = \int\limits_{t_j}^{x_j}\int\limits_{x_j}^{x}(x-t)f''(t)\,dt\,dx + \int\limits_{x_j}^{t_{j+1}}\int\limits_{x_j}^{x}(x-t)f''(t)\,dt\,dx = J_1 + J_2.$$

Рассмотрим сначала J_1:

$$J_1 = \int\limits_{t_j}^{x_j} \int\limits_{x_j}^{x} (x-t) f''(t)\, dt\, dx = -\int\limits_{t_j}^{x_j} f''(t)\, dt \int\limits_{t_j}^{t} (x-t)\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_{t_j}^{x_j} (t_j - t)^2 f''(t)\, dt. \tag{3.5}$$

Займемся теперь J_2:

$$J_2 = \int\limits_{x_j}^{t_{j+1}} \int\limits_{x_j}^{x} (x-t) f''(t)\, dt\, dx = \int\limits_{x_j}^{t_{j+1}} f''(t)\, dt \int\limits_{t}^{t_{j+1}} (x-t)\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_{x_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1} - t)^2 f''(t)\, dt. \tag{3.6}$$

Из (3.5), (3.6) и (1.6) имеем

$$|J| \le |J_1| + |J_2| \le \frac{1}{2}\delta_N^2 \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} |f''(t)|\, dt. \tag{3.7}$$

Тогда из (3.4) и (3.7), мы находим:

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\, dx = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\Delta t_j + r_N(f),$$

где

$$|r_N(f)| = \left| \sum_{j=0}^{N-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \int\limits_{x_j}^{x} (x-t) f''(t)\, dt\, dx \right| \le \frac{1}{2}\delta_N^2 \sum_{j=0}^{N-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} |f''(t)|\, dt = \frac{1}{2}\delta_N^2 \int\limits_{-1}^{1} |f''(t)|\, dt.$$

Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. *Для нормированного многочлена Лежандра* $\hat{P}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)$ *имеет место следующая формула:*

$$\sum_{j=0}^{N-1} \hat{P}_n^2(x)\Delta t_j = 1 - r_{n,N}, \tag{3.8}$$

в которой

$$|r_{n,N}| \le c\delta_N^2 n^3. \tag{3.9}$$

Доказательство. Полагая $f(x) = \hat{P}_n^2(x) = \frac{2n+1}{2} P_n^2(x)$, воспользуемся леммой 3.1. Тогда

$$1 = \int\limits_{-1}^{1} \hat{P}_n^2(x)\, dx = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{P}_n^2(x_j)\Delta t_j + r_{n,N}, \tag{3.10}$$

где $r_{n,N} = r_N(\hat{P}_n^2)$, и стало быть

$$|r_{n,N}| \le \frac{1}{2}\delta_N^2 \int\limits_{-1}^{1} \left| \{\hat{P}_n^2(x)\}'' \right| dx = \delta_N^2 \int\limits_{0}^{1} \left| \{\hat{P}_n^2(x)\}'' \right| dx. \tag{3.11}$$

Далее, в силу (2.2)

$$\left\{ \hat{P}_n^2(x) \right\}'' = \frac{2n+1}{2} \left\{ P_n^2(x) \right\}'' = (2n+1)\{P_n(x)P_n'(x)\}' =$$

$$= (2n+1) \left\{ \left(\frac{n+1}{2} P_{n-1}^{1,1}(x) \right)^2 + \frac{(n+1)_2}{2^2} P_{n-2}^{2,2}(x) P_n(x) \right\} =$$

$$= (2n+1)\left\{\left(\frac{n+1}{2}P_{n-1}^{1,1}(x)\right)^2 + \frac{(n+1)(n+2)}{4}P_{n-2}^{2,2}(x)P_n(x)\right\}.$$

Поэтому в силу весовой оценки (2.3) получим

$$\left|\{\hat{P}_n^2(x)\}''\right| \le cn^2\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-3}.$$

Отсюда,в свою очередь, имеем

$$\int\limits_0^1 \left|\{\hat{P}_n^2(x)\}''\right| \le cn^2\int\limits_0^1\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-3} \le cn^3. \tag{3.12}$$

Сопоставляя (3.10) – (3.12), приходим к оценке (3.9). Лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3. *Пусть* $\frac{1}{2}æ_2\delta_N^2 n^4 < 1$. *Тогда для ортонормированного многочлена* (1.3) *имеет место следующая формула:*

$$\int\limits_{-1}^1 \hat{p}_n^2(x)\,dx = 1 + R_{n,N}, \tag{3.13}$$

в которой

$$|R_{n,N}| \le \frac{æ_2\delta_N^2 n^4}{2-æ_2\delta_N^2 n^4}. \tag{3.14}$$

Доказательство. В силу леммы 3.1

$$\int\limits_{-1}^1 \hat{p}_n^2(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N-1}\hat{p}_n^2(x_j)\Delta t_j + R_{n,N}, \tag{3.15}$$

где $R_{n,N} = r_N(\hat{p_n^2})$ и стало быть в силу (3.2)

$$|R_{n,N}| \le \frac{1}{2}\delta_N^2\int\limits_{-1}^1 \left|\{\hat{p}_n^2(x)\}''\right|\,dx. \tag{3.16}$$

Далее, из неравенства (1.4) следует, что

$$\int\limits_{-1}^1 \left|\{\hat{p}_n^2(x)\}''\right|\,dx \le æ_2 n^4\int\limits_{-1}^1 \hat{p}_n^2(x)\,dx. \tag{3.17}$$

Сопоставляя (3.16) и (3.17), получим

$$|R_{n,N}| \le \frac{1}{2}æ_2\delta_N^2 n^4\int\limits_{-1}^1 \hat{p}_n^2(x)\,dx. \tag{3.18}$$

Кроме того, из (3.15) и (3.18) следует, что

$$\int\limits_{-1}^1 \hat{p}_n^2(x)\,dx \le 1 + \frac{1}{2}æ_2\delta_N^2 n^4\int\limits_{-1}^1 \hat{p}_n^2(x)\,dx. \tag{3.19}$$

Если теперь $\frac{1}{2}æ_2\delta_N^2 n^4 < 1$, то из (3.19) получаем

$$\int\limits_{-1}^1 \hat{p}_n^2(x)\,dx \le \frac{2}{2-æ_2\delta_N^2 n^4}. \tag{3.20}$$

Теперь из (3.18) и (3.20) непосредственно следует оценка (3.14). Лемма 3.3 доказана.

Лемма 3.4. *Пусть $k_n = k_n(T_n, V_n)$ — старший коэффициент многочлена $\hat{p}_n(x)$, а λ_n — старший коэффициент многочлена Лежандра $\hat{P}_n(x)$. Тогда*

$$\frac{k_n}{\lambda_n} \geq \frac{1}{1 + c\delta_n^2 n^3}. \tag{3.21}$$

Доказательство. Легко заметить, что

$$\lambda_n^2 = \frac{1}{\int\limits_{-1}^{1} \tilde{P}_n^2(x)\,dx}, \tag{3.22}$$

где $\tilde{P}_n(x)$ — многочлен Лежандра с единичным старшим коэффициентом. Если $\hat{p}_n(x)$ — многочлен из последовательности (1.1), то

$$k_n^2 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{N-1} p_n^2(x_j)\Delta t_j}, \tag{3.23}$$

где $p_n(x)$ — многочлен из последовательности (1.1) с единичным старшим коэффициентом. Далее, в силу (3.8), (3.9) и (3.23) получим

$$\frac{k_n^2}{\lambda_n^2} = \frac{1}{\lambda_n^2 \sum_{j=0}^{N-1} p_n^2(x_j)\Delta t_j} \geq \frac{1}{\sum_{j=0}^{N-1} \hat{P}_n^2(x_j)\Delta t_j} \geq \frac{1}{1 + c\delta_N^2 n^3}. \tag{3.24}$$

Отсюда, в свою очередь, непосредственно следует оценка (3.21). Лемма 3.4 доказана.

4. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ $\hat{p}_n(x)$

Здесь мы получим асимптотическую формулу для многочленов $\hat{p}_n(x)$, ортонормированных на X_N в смысле (1.2).

Теорема 4.1 *Пусть $\frac{æ_2}{2}\delta_N^2 n^4 < 1$. Тогда имеет место асимптотическая формула:*

$$\hat{p}_n(x) = \hat{P}_n(x) + \upsilon_n(x, T_N), \tag{4.1}$$

где для остаточного члена $\upsilon_n(x, X_N)$ которой справедлива оценка

$$\left|\upsilon_n(x, T_N)\right| \leq c\delta_N^2 n^{5/2} \left(\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Оценим следующий интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} \{\upsilon_n(x, T_N)\}^2\,dx = \int\limits_{-1}^{1} \left\{\hat{P}_n(x) - \hat{p}_n(x)\right\}^2 dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \hat{P}_n^2(x)\,dx - 2\int\limits_{-1}^{1} \hat{P}_n(x)\hat{p}_n(x)\,dx + \int\limits_{-1}^{1} \hat{p}_n^2(x)\,dx = I_1 + I_2 + I_3.$$

Ясно, что $I_1 = 1, \quad I_2 = -2\frac{k_n}{\lambda_n}, \quad I_3 = 1 + \frac{æ_2\delta_N^2 n^4}{2 - æ_2\delta_N^2 n^4}$. Тогда

$$\int\limits_{-1}^{1} \{\upsilon_n(x, T_N)\}^2\,dx \leq \frac{c\delta_N^2 n^3}{1 + c\delta_N^2 n^3} + \frac{æ_2\delta_N^2 n^4}{2 - æ_2\delta_N^2 n^4} < æ_2\delta_N^2 n^4. \tag{4.3}$$

Из неравенства (4.3), используя теорему 7.71.1 [2], легко получить утверждение теоремы 4.1.

Сопоставляя (4.1), (4.2) с (2.5), мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть* $a > 0$ *и* $\delta_N^2 n^4 \le a$. *Тогда существует постоянная* $c(a) > 0$ *такая, что*

$$|\hat{p}_n(x)| \le c(a)\left(\delta_N n^{5/2} + 1\right)\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{-1/2} \quad (-1 \le x \le 1).$$

В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю И.И. Шарапудинову за поставленную задачу, а также за ряд полезных замечаний.

Библиографический список

1. *Даугавет И.К., Рафальсон С.З.* О некоторых неравенствах для алгебраических многочленов // Вестник Ленингр. ун-та. 1974. № 19. С. 18–24.
2. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
3. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. С. 244–271.
4. *Конягин С.В.* О неравенстве В.А. Маркова для многочленов в метрике L // Труды Мат. ин-та АН СССР. 1980. № 145. С. 117–125.
5. *Шарапудинов И.И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Махачкала: Изд-во ДНЦ, 2004. С. 35–36.

УДК 517.984

ОБ ОБРАТНЫХ УЗЛОВЫХ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С УСЛОВИЯМИ РАЗРЫВА ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА

В.А. Юрко

Саратовский государственный университет,
кафедра математической физики и вычислительной математики
E-mail: YurkoVA@info.sgu.ru

Получено решение обратных узловых и обратных спектральных задач для дифференциальных операторов второго порядка на конечном интервале с условиями разрыва внутри интервала, выявлены связи между этими двумя классами обратных задач.

On Inverse Nodal and Spectral Problems for Boundary Value Problems with Discontinuity Conditions Inside the Interval

V.A. Yurko

The solution of inverse nodal and inverse spectral problems is presented for second-order differential operators on a finite interval with discontinuity conditions inside the interval. Connections between these two classes of inverse problems are established.

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье исследуются обратные узловые и обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов. Обратные спектральные задачи заключаются в восстановлении дифференциальных операторов по их спектральным характеристикам. Подобные задачи играют фундаментальную роль в различных разделах математики и имеют много приложений в естествознании и технике (см., например, [1]–[4] и список литературы в них). Обратные узловые задачи заключаются в построении операторов по заданным узлам (нулям) собственных функций [5]–[7]. В данной работе получены результаты по обратным спектральным и узловым задачам для дифференциальных операторов Штурма – Лиувилля на конечном интервале с условиями разрыва внутри интервала, а также выявлены тесные связи между этими двумя классами обратных задач.

Рассмотрим краевую задачу $B = B(q)$ для уравнения Штурма – Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \tag{1}$$

на конечном интервале $0 < x < T$ с краевыми условиями Дирихле

$$y(0) = y(T) = 0 \tag{2}$$

и с условиями разрыва

$$y(T/2+0) = a_1 y(T/2-0), \quad y'(T/2+0) = a_1^{-1} y'(T/2-0) + a_2 y(T/2-0). \tag{3}$$

© В.А. Юрко, 2008

Здесь λ – спектральный параметр, $q(x) \in L(0,T)$, a_1, a_2 – вещественны, $a_1 > 0$. Не нарушая общности, в дальнейшем считаем, что $\int_0^T q(x)\,dx = 0$.

Краевые задачи с условиями разрыва внутри интервала связаны с разрывными свойствами среды. Например, разрывные обратные задачи встречаются в радиоэлектронике при синтезе параметров неоднородных линий передач с заданными техническими характеристиками [8]–[9]. Спектральная информация может быть использована для восстановления коэффициентов, характеризующих свойства одномерных разрывных сред [10]–[11]. Краевые задачи с условиями разрыва во внутренней точке появляются также в геофизических моделях земного шара [12]–[13]. Разрывные обратные задачи в различных постановках рассматривались в [14]–[17] и других работах.

2. ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

В этом разделе исследуется так называемая неполная обратная задача восстановления потенциала $q(x)$ по заданной части спектра краевой задачи B вида (1)–(3). При этом предполагается, что потенциал известен априори на части интервала. Получены условия согласования искомой части спектра с величиной интервала восстановления потенциала. Отметим, что в общем случае для восстановления $q(x)$ на всем интервале $(0,T)$ необходимо задание двух спектров краевых задач с различными краевыми условиями на одном из концов интервала [17].

Лемма 1. *Краевая задача B имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$. Все собственные значения являются простыми вещественными и при $n \to \infty$*

$$\rho_n := \sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{T} + \frac{1}{2\pi n}\Big(\omega + (-1)^{n-1}\omega_1\Big) + o\Big(\frac{1}{n}\Big), \tag{4}$$

где $\omega = \displaystyle\int_0^T q(t)\,dt + \frac{a_2}{b_1}$, $\quad \omega_1 = \dfrac{b_2}{b_1}\Big(\displaystyle\int_0^T q(t)\,dt - 2\int_0^{T/2} q(t)\,dt\Big) + \dfrac{a_2}{b_1}$, $\quad b_1 = \dfrac{a_1 + a_1^{-1}}{2}$, $\quad b_2 = \dfrac{a_1 - a_1^{-1}}{2}$.

Доказательство. Пусть $S(x,\lambda)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ и условиям склейки (3). Пусть $\lambda = \rho^2$, $\tau := \operatorname{Im}\rho$. При $|\lambda| \to \infty$ равномерно по x имеют место асимптотические формулы [17]:

$$S(x,\lambda) = \frac{\sin\rho x}{\rho} - \frac{\cos\rho x}{2\rho^2}\int_0^x q(t)\,dt + o\Big(\frac{1}{\rho^2}\exp(|\tau|x)\Big), \quad x < \frac{T}{2}, \tag{5}$$

$$S(x,\lambda) = \Big(b_1\frac{\sin\rho x}{\rho} + b_2\frac{\sin\rho(T-x)}{\rho}\Big) + \Big(f_1(x)\frac{\cos\rho x}{2\rho^2} + f_2(x)\frac{\cos\rho(T-x)}{2\rho^2}\Big) + \\ + o\Big(\frac{1}{\rho^2}\exp(|\tau|x)\Big), \quad x > \frac{T}{2}, \tag{6}$$

где

$$f_1(x) = -b_1\int_0^x q(t)\,dt - a_2, \quad f_2(x) = b_2\Big(\int_0^x q(t)\,dt - 2\int_0^{T/2} q(t)\,dt\Big) + a_2.$$

Обозначим $\Delta(\lambda) := S(T,\lambda)$. Функция $\Delta(\lambda)$ является целой аналитической по λ порядка $1/2$, и ее нули $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ совпадают с собственными значениями краевой задачи B. Из (6) вытекает, что при $|\lambda| \to \infty$ справедлива асимптотика

$$\Delta(\lambda) = b_1\Big(\frac{\sin\rho T}{\rho} - \omega\frac{\cos\rho T}{2\rho^2} + \frac{\omega_1}{2\rho^2}\Big) + o\Big(\frac{1}{\rho^2}\exp(|\tau|T)\Big). \tag{7}$$

Используя (7) и теорему Руше [18], известным методом (см, например, [4]) получаем

$$\rho_n = \frac{\pi n}{T} + o(1), \quad n \to \infty.$$

Подставляя это выражение в (7), приходим к (4). Так как краевая задача B является самосопряженной, то все собственные значения $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ являются вещественными и простыми. □

Наряду с B рассмотрим краевую задачу $\tilde{B} = B(\tilde{q})$ того же вида, но с другим потенциалом $\tilde{q}$. Условимся, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к задаче B, то $\tilde{\alpha}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к задаче $\tilde{B}$.

Теорема 1. *Зафиксируем $b \in (0, T/2)$. Пусть $\Lambda \subset \mathbf{N}$– подмножество натуральных чисел, а $\Omega := \{\lambda_n\}_{n\in\Lambda}$– часть спектра задачи B такая, что система функций $\{\cos 2\rho_n x\}_{n\in\Lambda}$ полна в $L_2(0, b)$. Пусть $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на (b, T), $\Omega = \tilde{\Omega}$. Тогда $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $(0, T)$.*

Доказательство. Обозначим $\langle y, z\rangle := yz' - y'z$. Так как

$$-S''(x,\lambda) + q(x)S(x,\lambda) = \lambda S(x,\lambda), \quad -\tilde{S}''(x,\lambda) + \tilde{q}(x)\tilde{S}(x,\lambda) = \lambda\tilde{S}(x,\lambda),$$

$$S(0,\lambda) = \tilde{S}(0,\lambda) = 0, \quad \langle S(x,\lambda), \tilde{S}(x,\lambda)\rangle_{x=T/2+0} = \langle S(x,\lambda), \tilde{S}(x,\lambda)\rangle_{x=T/2-0},$$

то

$$\int_0^T r(x)S(x,\lambda)\tilde{S}(x,\lambda)\,dx = S'(T,\lambda)\tilde{S}(T,\lambda) - S(T,\lambda)\tilde{S}'(T,\lambda),$$

где $r(x) = q(x) - \tilde{q}(x)$. Используя условия теоремы, получаем

$$\int_0^b r(x)S(x,\lambda_n)\tilde{S}(x,\lambda_n)\,dx = 0, \quad n \in \Lambda. \tag{8}$$

При $x \le T/2$ справедливо представление (см. [1], [2], [4]):

$$S(x,\lambda) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \int_0^x K(x,t)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,dt,$$

где $K(x,t)$– непрерывная функция, не зависящая от λ. Следовательно,

$$2\rho^2 S(x,\lambda)\tilde{S}(x,\lambda) = 1 - \cos 2\rho x - \int_0^x V(x,t)\cos 2\rho t\,dt, \tag{9}$$

где $V(x,t)$– непрерывная функция, не зависящая от λ и выражающаяся через $K(x,t)$ и $\tilde{K}(x,t)$. Подставляя (9) в (8) и учитывая соотношение $\int_0^T r(x)\,dx = 0$, получаем

$$\int_0^b \Big(r(x) + \int_x^b V(t,x)r(t)\,dt\Big)\cos 2\rho_n x\,dx = 0, \quad n \in \Lambda,$$

и, следовательно,

$$r(x) + \int_x^b V(t,x)r(t)\,dt = 0 \quad \text{п.в. на} \quad (0,b).$$

Так как однородное интегральное уравнение Вольтерра второго рода имеет только нулевое решение, то отсюда заключаем, что $r(x) = 0$, п.в. на $(0,b)$, т.е. $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $(0,b)$. □

3. ОБРАТНАЯ УЗЛОВАЯ ЗАДАЧА

В первой части этого раздела получены теоремы единственности и процедура восстановления потенциала $q(x)$ на всем интервале $(0,T)$ по всюду плотному подмножеству узловых точек. Во второй части раздела выявлены связи между обратными спектральными и обратными узловыми задачами. С использованием этих связей, в частности, доказано, что при некоторых дополнительных условиях потенциал $q(x)$ может быть восстановлен *на всем отрезке* $(0,T)$ по подмножеству узловых точек, расположенных только *на части отрезка*. При исследовании этой неполной обратной узловой задачи используются результаты предыдущего параграфа по обратным спектральным задачам.

Собственные функции задачи B имеют вид $y_n(x) = S(x,\lambda_n)$. Отметим, что $y_n(x)$ являются вещественнозначными функциями. Подставляя (4) в (5)–(6), получаем асимптотические формулы при $n \to \infty$ равномерно по x:

$$\rho_n y_n(x) = \sin\frac{\pi n}{T}x + \frac{1}{2\pi n}\left(-T\int_0^x q(t)\,dt + \omega x + (-1)^{n-1}\omega_1 x\right)\cos\frac{\pi n}{T}x + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad x < \frac{T}{2}, \tag{10}$$

$$\rho_n y_n(x) = \left(b^+ + (-1)^{n-1}b^-\right)\sin\frac{\pi n}{T}x + \frac{1}{2\pi n}\Big(Tf_1(x) + (-1)^n Tf_2(x) +$$

$$+ b^+(\omega + (-1)^{n-1}\omega_1)x + b^-(\omega + (-1)^{n-1}\omega_1)(T-x)\Big)\cos\frac{\pi n}{T}x + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad x > \frac{T}{2}. \tag{11}$$

Для краевой задачи B справедлив аналог теоремы Штурма об осцилляции. Точнее, собственная функция $y_n(x)$ имеет ровно $n-1$ (простых) нулей внутри интервала $(0,T)$: $0 < x_n^1 < \cdots x_n^{n-1} < T$. Множество $X_B := \{x_n^j\}_{n\geq 2,\ j=\overline{1,n-1}}$ называется множеством узловых точек краевой задачи B. Доопределим $x_n^0 := 0,\ x_n^n := T$.

Обратная узловая задача заключается в построении потенциала $q(x)$ по заданному множеству X_B узловых точек или некоторой его части. Обозначим $X_B^k := \{x_{2m-k}^j\}_{m\geq 1,\ j=\overline{1,2m-k-1}}$, $k = 0,1$. Множества X_B^k являются всюду плотными на $(0,T)$ и $X_B^0 \cup X_B^1 = X_B$.

Учитывая (10)–(11), получаем асимптотические формулы для узловых точек при $n \to \infty$ равномерно по j:

$$x_n^j = \frac{jT}{n} + \frac{T}{2\pi^2 n^2}\Big(T\int_0^{jT/n} q(t)\,dt - \frac{(\omega-\omega_1)jT}{n}\Big) + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \quad x_n^j \in (0,T/2), \quad n = 2m,$$

$$x_n^j = \frac{jT}{n} + \frac{T}{2\pi^2 n^2}\Big(T\int_0^{jT/n} q(t)\,dt - \frac{(\omega+\omega_1)jT}{n}\Big) + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \quad x_n^j \in (0,T/2), \quad n = 2m-1,$$

$$x_n^j = \frac{jT}{n} + \frac{T}{2\pi^2 n^2}\Big(T\int_0^{jT/n} q(t)\,dt - \frac{(\omega-\omega_1)jT}{n} + c_0\Big) + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \quad x_n^j \in (T/2,T), \quad n = 2m,$$

$$x_n^j = \frac{jT}{n} + \frac{T}{2\pi^2 n^2}\Big(T\int_0^{jT/n} q(t)\,dt - \frac{(\omega+\omega_1)jT}{n} + c_1\Big) + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \quad x_n^j \in (T/2,T), \quad n = 2m-1,$$

где

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{2Tb_2}{b_1-b_2}\int_0^{T/2} q(t)\,dt - \frac{Tb_2(\omega-\omega_1)}{b_1-b_2}\ , \\ c_1 &= -\frac{2Tb_2}{b_1+b_2}\int_0^{T/2} q(t)\,dt + \frac{Tb_2(\omega+\omega_1)}{b_1+b_2} + \frac{2Ta_2}{b_1+b_2}\ . \end{aligned} \tag{12}$$

Используя вышеприведенные асимптотические формулы, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Зафиксируем $k = 0 \vee 1$ и $x \in [0,T]$. Пусть последовательность $\{x_n^{j_n}\} \in X_B^k$ выбрана так, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{j_n} = x$. Тогда существует конечный предел*

$$g_k(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi^2 n}{T^2}\Big(x_n^{j_n} n - j_n T\Big), \tag{13}$$

причем

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \int_0^x q(t)\,dt - \frac{\omega + (-1)^{k+1}\omega_1}{T}\,x, \quad x \leq \frac{T}{2}\ , \\ g_k(x) &= \int_0^x q(t)\,dt - \frac{\omega + (-1)^{k+1}\omega_1}{T}\,x + c_k, \quad x \geq \frac{T}{2}\ , \end{aligned} \tag{14}$$

где c_0 и c_1 определяются по формулам (12).

Приведем теперь теорему единственности и процедуру решения обратной узловой задачи.

Теорема 3. *Зафиксируем $k = 0 \vee 1$. Пусть $X \subset X_B^k$ – всюду плотное на $(0,T)$ подмножество узловых точек. Пусть $X = \tilde{X}$. Тогда $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $(0,T)$. Таким образом, задание множества X однозначно определяет потенциал $q(x)$ на $(0,T)$. При этом функция $q(x)$ может быть построена по формуле*

$$q(x) = g_k'(x) - \frac{1}{T}\Big(g_k(T) - g_k(0)\Big), \tag{15}$$

где $g_k(x)$ вычисляется по формуле (13).

Доказательство. Формула (15) следует из (14) и соотношения $\int_0^T q(x)\,dx = 0$. Если $X = \tilde{X}$, то из (13) вытекает, что $g_k(x) \equiv \tilde{g}_k(x),\ x \in [0,T]$. В силу (15) это дает $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $(0,T)$. □

Аналогичным образом доказывается следующее более общее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $X \subset X_B$– всюду плотное на $(0,T)$ подмножество узловых точек. Пусть $X = \tilde{X}$. Тогда $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $(0,T)$.*

Перейдем теперь к исследованию неполной узловой задачи, когда узловые точки заданы лишь на части интервала. Предварительно докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Зафиксируем n, j. Пусть $x_n^j = \tilde{x}_n^j$, $x_n^{j+1} = \tilde{x}_n^{j+1}$ и пусть $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на (x_n^j, x_n^{j+1}). Тогда $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$.*

Доказательство. На интервале $x \in (x_n^j, x_n^{j+1})$ рассмотрим краевую задачу B_{nj} для уравнения (1) с условиями склейки (3) (если $T/2 \in (x_n^j, x_n^{j+1})$) и краевыми условиями Дирихле $y(x_n^j) = y(x_n^{j+1}) = 0$. Функция $y_n(x) = S(x, \lambda_n)$ является собственной функцией краевой задачи B и одновременно является собственной функцией задачи B_{nj}. Так как $y_n(x)$ не имеет нулей при $x \in (x_n^j, x_n^{j+1})$, то λ_n является первым собственным значением задачи B_{nj}, а $y_n(x)$ – первой собственной функцией. Так как $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на (x_n^j, x_n^{j+1}), то $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$. □

Для $X \subset X_B$ обозначим $\Lambda_X := \{n : \exists j\ x_n^j \in X\}$.

Определение 1. Пусть $X \subset X_B$. Множество X называется сдвоенным, если вместе с любой своей точкой x_n^j множество X содержит по крайней мере одну из соседних узловых точек x_n^{j-1} и/или x_n^{j+1}.

Теорема 5. *Зафиксируем $k = 0 \vee 1$ и $b \in (0, T/2)$. Пусть $X \subset X_B^k \cap (b, T)$ — всюду плотное на (b, T) сдвоенное подмножество узловых точек такое, что система функций $\{\cos 2\rho_n x\}_{n \in \Lambda_X}$ полна в $L_2(0, b)$. Пусть $X = \tilde{X}$. Тогда $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $(0, T)$.*

Доказательство. Так как $X = \tilde{X}$, то по теореме 3 $g_k(x) \equiv \tilde{g}_k(x)$ при $x \in (b, T)$, и, следовательно, $g_k'(x) = \tilde{g}_k'(x)$ п.в.на (b, T). Вместе с (14) это дает $q(x) - \tilde{q}(x) = d$ п.в.на (b, T), где d константа. Обозначим $q_0(x) := \tilde{q}(x) + d,\ x \in (0, T)$. Тогда $q(x) = q_0(x)$ п.в. на (b, T). Пусть $\{\lambda_n^0\}_{n \geq 1}$ — спектр задачи $B(q_0)$. По лемме 2 $\lambda_n = \lambda_n^0$ при $n \in \Lambda_X$. Применяя теорему 1, получаем $q(x) = q_0(x)$ п.в. на $(0, T)$, т.е. $q(x) = \tilde{q}(x) + d$ п.в. на $(0, T)$. Учитывая соотношение $\int_0^T q(t)\, dt = \int_0^T \tilde{q}(t)\, dt = 0$, вычисляем $d = 0$, т.е. $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $(0, T)$. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 07-01-00003 *и* 07-01-92000-ННС-а).

Библиографический список

1. *Марченко В.А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977.
2. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М.: Наука, 1984.
3. *Yurko V.A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.
4. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
5. *McLaughlin J.R.* Inverse spectral theory using nodal points as data — a uniqueness result // J. Differ. Equat. 1988. V.73. P.354–362.
6. *Shen C.L., Tsai T.M.* On a uniform approximation of the density function of a string equation using EVs and nodal points and some related inverse nodal problems // Inverse Problems. 1995. V. 11, № 5. P. 1113–1123.
7. *Law C.K., Yang C.-F.* Reconstructing the potential function and its derivatives using nodal data // Inverse Problems. 1988. V. 14, № 2. P. 299–312.
8. *Литвиненко О.Н., Сошников В.И.* Теория неоднородных линий и их применение в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1964.
9. *Мещанов В.П., Фельдштейн А.Л.* Автоматизированное проектирование направленных ответвителей СВЧ. М.: Связь, 1980.
10. *Shepelsky D.G.* The inverse problem of reconstruction of the medium's conductivity in a class of discontinuous and increasing functions // Spectral operator theory and related topics. Advances in Soviet Math. 19, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994. P. 209–232.
11. *Krueger R.J.* Inverse problems for nonabsorbing media with discontinuous material properties // J. Math. Phys. 1982. V. 23, № 3. P. 396–404.
12. *Anderssen R.S.* The effect of discontinuities in density and shear velocity on the asymptotic overtone structure of tortional eigenfrequencies of the Earth // Geophys. J.R. Astr. Soc. 1997. V. 50. P. 303–309.
13. *Lapwood F.R., Usami T.* Free Oscillations of the Earth. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
14. *Hald O.H.* Discontinuous inverse eigenvalue problems // Comm. Pure Appl. Math. 1984. V. 37. P. 539–577.
15. *Freiling G., Yurko V.A.* Inverse spectral problems for singular non-selfadjoint differential operators with discontinuties in an interior point // Inverse Problems. 2002. V. 18. P. 757–773.
16. *Юрко В.А.* О краевых задачах с условиями разрыва внутри интервала // Диф. уравнения. 2000. Т. 36, № 8. С. 1139–1140.
17. *Yurko V.A.* Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems // Integral Transforms and Special Functions. 2000. V. 10, № 2. P. 141–164.
18. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1967.

МЕХАНИКА

УДК 531.39

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗГИБА ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН, ЛЕЖАЩИХ НА СЛОЖНОМ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

П.Г. Великанов

Казанский государственный университет,
кафедра теоретической механики
E-mail: pvelikanov@mail.ru

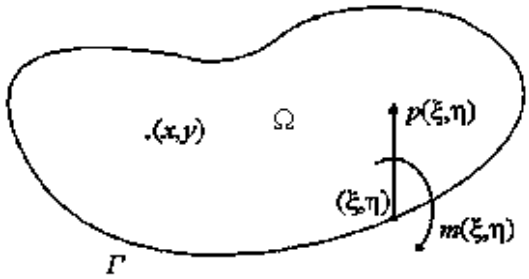
Данная работа посвящена решению задач линейного деформирования пластин непрямым методом граничных элементов, основанному на применении фундаментального решения задачи изгиба изотропной пластины, лежащей на сложном двухпараметрическом упругом основании. В результате анализа разрешающих уравнений показано, что задача изгиба изотропной пластины, лежащей на простом винклеровском упругом основании, является частым случаем задачи, заявленной в заголовке статьи.

Investigation of the Isotropic Plates Bending Lying on the Complex Two-parameter Elastic Foundation by Boundary Element Method

P.G. Velikanov

This work is dedicated to the investigation of the linear deformation problem of plates based on application of the fundamental decision of task of the isotropic plate bending lying on the complex two-parameter elastic foundation by an indirect method of boundary elements. In the issue of resolving system analysis was indicated that the task of isotropic plate bending lying on the simple elastic foundation is a special case of the task declared in the title of the article.

Рассмотрим тонкую линейно упругую пластину, ограниченную гладким кусочно-ляпуновским контуром. Дополним область пластины до бесконечной области. По контуру к бесконечной пластине приложим компенсирующие нагрузки $q(\zeta), m(\zeta)$. Нагрузка $q(\zeta)$ — распределенное по контуру Γ усилие, нормальное к поверхности пластины, $m(\zeta)$ — распределенный по контуру Γ момент вокруг касательной к контуру Γ [1] (рисунок).



Пластина с контурными компенсирующими нагрузками

Решение задачи изгиба пластины непрямым методом граничных элементов (НМГЭ) заключается в представлении решения как суммы основного и компенсирующего решений. Основное решение

© П.Г. Великанов, 2008

определяет деформацию бесконечной пластины от заданных нагрузок; компенсирующее решение определяет действие на бесконечную пластину системы сил, распределенных по контуру пластины (компенсирующих нагрузок), за счет которых выполняются краевые условия на контуре пластины. Сумма основного и компенсирующего решений должна удовлетворять дифференциальному уравнению изгиба изотропной пластины, лежащей на сложном двухпараметрическом упругом основании (по моделям проф. П.Л. Пастернака, проф. В.З. Власова и др.) [2]:

$$Lw\,(x,y) = \frac{q\,(x,y)}{D}, \tag{1}$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \qquad 2p^2 = \frac{k_t h^2}{4D}, \qquad \chi^4 = \frac{k_z}{D} = \frac{1}{l^4}, \tag{2}$$

$L = \Delta^2 - 2p^2\Delta + \chi^4$ — дифференциальный оператор; Δ — оператор Лапласа; k_t, k_z — параметры упругого основания (коэффициенты постели).

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$w(t) = w^r(t) + \int\limits_{\Gamma} [G(t,\zeta)q(\zeta) - \frac{\partial G(t,\zeta)}{\partial n_1(\zeta)} m(\zeta)]ds(\zeta); \tag{3}$$

$$w^r(t) = \iint\limits_{\Omega+} G(t,\zeta)P(\zeta)d\Omega(\zeta) + \sum_{i=1}^{n} G(t,\zeta_i)P_i(\zeta_i). \tag{4}$$

Здесь $t(x,y)$ — точка области; $\zeta(\xi,\eta)$ — точка контура; $w^r(t)$ — частное решение уравнения (1); P_i — модуль сосредоточенной силы, приложенной в точке $\zeta_i (i = 1, 2, ..., n)$. $G(t,\zeta)$ — фундаментальное решение.

Для получения фундаментального решения $G(x,y)$поставленной задачи в дифференциальном уравнении (1) интенсивность распределенной нагрузки моделируют единичной сосредоточенной силой P, приложенной в начале координат, которая математически описывается обобщенной дельта-функцией Дирака $\delta(x,y)$:

$$LG\,(x,y) = \frac{\delta\,(x,y)}{D}.$$

Для получения фундаментального решения применяется двумерное интегральное преобразование Фурье [3]. Трансформанты величин определяются следующим образом:

$$G\,(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G\,(x,y)\,e^{i(\xi x+\eta y)}dxdy; \quad F[\delta(x,y)] = \frac{1}{2\pi}; \quad F[L] = ((\xi^2+\eta^2)^2 + 2p^2(\xi^2+\eta^2) + \chi^4).$$

Тогда трансформанта фундаментального решения примет вид

$$G(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi D((\xi^2+\eta^2)^2 + 2p^2(\xi^2+\eta^2) + \chi^4)}.$$

Таким образом, последовательно применяя формулу обращения двумерного интегрального преобразования Фурье [3]

$$G\,(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G\,(\xi,\eta)\,e^{-i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta = \frac{1}{\pi^2 D}\int\limits_{0}^{\infty}\cos\eta y d\eta \int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos\xi x}{((\xi^2+\eta^2)^2 + 2p^2(\xi^2+\eta^2) + \chi^4)}d\xi,$$

свойства интегралов от четных и нечетных функций и аппарат теории вычетов в пространстве оригиналов, получим следующие представления для фундаментальных решений в зависимости от величины дискриминанта знаменателя трансформанты и соотношений между коэффициентами:

а) $p > \chi \Rightarrow G(x,y) = -\dfrac{1}{4\pi s^2 D}\{K_0(\sqrt{p^2+s^2}r) - K_0(\sqrt{p^2-s^2}r)\}$, $s^2 = \sqrt{p^4-\chi^4}$;

b)$p < \chi \Rightarrow G(x,y) = -\dfrac{1}{2\pi\beta^2 D} kei_0(r/l,\varphi), \beta^2 = \sqrt{\chi^4 - p^4},\ \varphi = \frac{1}{2}\arctan\frac{\beta^2}{p^2}$;

c) $\chi = 0 \Rightarrow G(x,y) = -\dfrac{1}{4\pi p^2 D}\{\ln r + K_0(\sqrt{2}pr)\}$;

d) $p = \chi \Rightarrow G(x,y) = -\dfrac{1}{4\pi D\chi^2} kei_0^{'}\ (r/l, 0)$ (осуществляется предельный переход при $\varphi \to 0$ и далее используется правило Лопиталя);

e) $p = 0 \Rightarrow G(x,y) = -\dfrac{l^2}{2\pi D} kei_0(r/l)$;

f) $p = \chi = 0 \Rightarrow G(x,y) = \dfrac{1}{8\pi D} r^2 \ln r$.

Как можно заметить, в этот перечень входят наряду с другими фундаментальное решение задачи изгиба изотропной пластины, лежащей на простом винклеровском упругом основании e) и фундаментальное решение задачи изгиба изотропной пластины f).

Случай e), впервые приводящийся в работе [4], является частным случаем b), так как при $p = 0$ выполняется следующая последовательность действий:

$$\beta = \chi = 1/l; \varphi = \pi/4; \quad kei_0\left(r/l, \pi/4\right) = kei_0\left(r/l\right).$$

Для реально существующих двухпараметрических упругих оснований выполняется случай b), поэтому именно его мы и будем далее рассматривать.

В случае b) $kei_0\left(r/l,\varphi\right)$ — обобщенная функция Томпсона – Кельвина (мнимая часть обобщенной модифицированной функции Бесселя второго рода нулевого порядка K_0).

Обобщенные функции Томпсона – Кельвина в рядах представляются следующими соотношениями [5]:

$$ber_0\left(x,\varphi\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(x/2\right)^{2k}\cos 2k\varphi}{(k!)^2}; bei_0\left(x,\varphi\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(x/2\right)^{2k}\sin 2k\varphi}{(k!)^2};$$

$$\ker_0\left(x,\varphi\right) = \left(\ln\frac{2}{x} - C\right) ber_0\left(x,\varphi\right) + \varphi\cdot bei_0\left(x,\varphi\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(x/2\right)^{2k}\cos 2k\varphi}{(k!)^2}\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{s};$$

$$kei_0\left(x,\varphi\right) = \left(\ln\frac{2}{x} - C\right) bei_0\left(x,\varphi\right) - \varphi\cdot ber_0\left(x,\varphi\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(x/2\right)^{2k}\sin 2k\varphi}{(k!)^2}\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{s},$$

где $C = 0,5772157...$ — постоянная Эйлера.

На контуре пластины рассмотрим следующие граничные условия:

$$w = 0, \quad w_{,n} = 0 \quad \text{— жесткая заделка,} \tag{5}$$

$$w = 0, \quad M_n = 0 \quad \text{— свободное опирание,} \tag{6}$$

$$V_n = k_1 w, \quad M_n = k_2 w_{,n} \quad \text{— упругое закрепление.} \tag{7}$$

Здесь M_n и V_n — изгибающий момент и обобщенная поперечная сила на контуре Γ; k_1, k_2 — постоянные, определяющие упругие свойства закрепления (при $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ получаются граничные условия свободного края).

Отметим, что выражение (3) точно удовлетворяет дифференциальному уравнению (1). Чтобы (3) было решением краевой задачи, необходимо из системы сингулярных интегральных уравнений, которая получается при подстановке (3) в краевые условия (5)–(7) на контуре пластины Γ, определить функции $q(\zeta), m(\zeta)$. При этом надо совершить предельный переход точки $t(x,y)$ из внутренней области Ω^+ на границу Γ. Тогда ядра интегральных уравнений будут определены во всех точках контура, за исключением точки, где $t(x,y) = \zeta(\xi,\eta)$. В этой точке $r = 0$, а следовательно, ядра потенциалов будут иметь особенности.

Для дальнейшего анализа воспользуемся тем фактом, что цилиндрические функции целых порядков, отличных от нулевого, всегда можно преобразовать посредством рекуррентных соотношений вида:

$$xK_n' = -nK_n - xK_{n-1}; \quad xK_n' = nK_n - xK_{n+1}; \quad K_{-n} = K_n; \quad K_0' = -K_1;$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n}K_n\right] = -x^{-n}K_{n+1}; \quad \frac{d}{dx}\left[x^{n}K_n\right] = -x^{n}K_{n-1}; \quad 2K_n' = K_{n-1} + K_{n+1};$$

$$K_2 = \frac{2}{x}K_1 + K_0; \quad 2nK_n = xK_{n+1} - xK_{n-1}.$$

Вторую производную функции K_0 найдем непосредственно из дифференциального уравнения Бесселя:

$$\frac{d^2K_0(x)}{dx^2} = K_0(x) - \frac{1}{x}\frac{dK_0(x)}{dx}.$$

Дифференцируя далее и используя рекуррентные соотношения, получим выражения для определения производных старших порядков:

$$\frac{d^3K_0(x)}{dx^3} = -\frac{1}{x}K_0(x) + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)\frac{dK_0(x)}{dx};$$

$$\frac{d^4K_0(x)}{dx^4} = \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)K_0(x) - \frac{2}{x}\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)\frac{dK_0(x)}{dx}.$$

Заменим в выражениях для производной переменную x на $xe^{i\varphi}$:

$$\frac{d^2K_0\left(xe^{i\varphi}\right)}{dx^2} = e^{2i\varphi}K_0\left(xe^{i\varphi}\right) - \frac{1}{x}\frac{dK_0\left(xe^{i\varphi}\right)}{dx};$$

$$\frac{d^3K_0\left(xe^{i\varphi}\right)}{dx^3} = -e^{2i\varphi}\frac{1}{x}K_0\left(xe^{i\varphi}\right) + \left(e^{2i\varphi} + \frac{2}{x^2}\right)\frac{dK_0\left(xe^{i\varphi}\right)}{dx} = -e^{2i\varphi}\frac{1}{x}K_2\left(xe^{i\varphi}\right) - e^{3i\varphi}K_1\left(xe^{i\varphi}\right);$$

$$\frac{d^4K_0\left(xe^{i\varphi}\right)}{dx^4} = e^{2i\varphi}\left(e^{2i\varphi} + \frac{3}{x^2}\right)K_0\left(xe^{i\varphi}\right) - \frac{2}{x}\left(e^{2i\varphi} + \frac{3}{x^2}\right)\frac{dK_0\left(xe^{i\varphi}\right)}{dx} = e^{2i\varphi}\left(e^{2i\varphi} + \frac{3}{x^2}\right)K_2\left(xe^{i\varphi}\right).$$

После разделения действительной и мнимой частей комплексного числа получим следующие выражения:

$$\frac{d^2\,\mathrm{ker}_0(x,\varphi)}{dx^2} = \cos 2\varphi \cdot \mathrm{ker}_0(x,\varphi) - \sin 2\varphi \cdot kei_0(x,\varphi) - \frac{1}{x}ker_0'(x,\varphi);$$

$$\frac{d^2kei_0(x,\varphi)}{dx^2} = \cos 2\varphi \cdot kei_0(x,\varphi) + \sin 2\varphi \cdot \mathrm{ker}_0(x,\varphi) - \frac{1}{x}kei_0'(x,\varphi);$$

$$\frac{d^3\,\mathrm{ker}_0(x,\varphi)}{dx^3} = -\frac{1}{x}(\cos 2\varphi \cdot \mathrm{ker}_2(x,\varphi) - \sin 2\varphi \cdot kei_2(x,\varphi)) + \cos 2\varphi \cdot ker_0'(x,\varphi) - \sin 2\varphi \cdot kei_0'(x,\varphi);$$

$$\frac{d^3kei_0(x,\varphi)}{dx^3} = -\frac{1}{x}(\cos 2\varphi \cdot kei_2(x,\varphi) + \sin 2\varphi \cdot \mathrm{ker}_2(x,\varphi)) + \cos 2\varphi \cdot kei_0'(x,\varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0'(x,\varphi);$$

$$\frac{d^4\,\mathrm{ker}_0(x,\varphi)}{dx^4} = (\cos 2\varphi(\cos 2\varphi + \frac{3}{x^2}) - \sin^2 2\varphi)\,\mathrm{ker}_2(x,\varphi) - \sin 2\varphi(2\cos 2\varphi + \frac{3}{x^2})kei_2(x,\varphi);$$

$$\frac{d^4kei_0(x,\varphi)}{dx^4} = (\cos 2\varphi(\cos 2\varphi + \frac{3}{x^2}) - \sin^2 2\varphi)kei_2(x,\varphi) + \sin 2\varphi(2\cos 2\varphi + \frac{3}{x^2})\,\mathrm{ker}_2(x,\varphi),$$

где

$$\mathrm{ker}_2(x,\varphi) = \mathrm{ker}_0(x,\varphi) - \frac{2}{x}(\cos 2\varphi \cdot ker_0'(x,\varphi) + \sin 2\varphi \cdot kei_0'(x,\varphi));$$

$$kei_2(x,\varphi) = kei_0(x,\varphi) - \frac{2}{x}(\cos 2\varphi \cdot kei_0'(x,\varphi) - \sin 2\varphi \cdot ker_0'(x,\varphi)).$$

Следует также привести следующие соотношения:

$$\Delta\,\mathrm{ker}_0(x,\varphi) = \cos 2\varphi \cdot \mathrm{ker}_0(x,\varphi) - \sin 2\varphi \cdot kei_0(x,\varphi);$$

$$\Delta kei_0(x,\varphi) = \cos 2\varphi \cdot kei_0(x,\varphi) + \sin 2\varphi \cdot \mathrm{ker}_0(x,\varphi).$$

Важное значение в практическом применении имеют следующие интегралы:

$$\int \frac{1}{x}\frac{dK_0\left(xe^{i\varphi}\right)}{dx}dx; \quad \int K_2\left(xe^{i\varphi}\right)dx; \quad \int \frac{1}{x}K_2\left(xe^{i\varphi}\right)dx; \quad \int \frac{3}{x^2}K_2\left(xe^{i\varphi}\right)dx.$$

Взятие этих интегралов осуществим с помощью рекуррентных соотношений и применяя интегрирование по частям:

$$\int \frac{1}{x}\frac{dK_0\left(xe^{i\varphi}\right)}{dx}dx = e^{2i\varphi}\int K_0\left(xe^{i\varphi}\right)dx - \frac{dK_0\left(xe^{i\varphi}\right)}{dx};$$

$$\int K_2\left(xe^{i\varphi}\right)dx = -\int K_0\left(xe^{i\varphi}\right)dx + 2e^{-2i\varphi}\frac{dK_0\left(xe^{i\varphi}\right)}{dx};$$

$$\int \frac{1}{x}K_2\left(xe^{i\varphi}\right)dx = e^{2i\varphi}\frac{1}{x}\frac{dK_0\left(xe^{i\varphi}\right)}{dx};$$

$$\int \frac{3}{x^2}K_2\left(xe^{i\varphi}\right)dx = e^{2i\varphi}\int K_0\left(xe^{i\varphi}\right)dx - \frac{1}{x}K_2\left(xe^{i\varphi}\right) - \frac{dK_0\left(xe^{i\varphi}\right)}{dx}.$$

После разделения действительной и мнимой частей получим:

$$\int \frac{1}{x}ker_0'(x,\varphi)\,dx = \cos 2\varphi\int \mathrm{ker}_0(x,\varphi)\,dx - \sin 2\varphi\int kei_0(x)\,dx - ker_0'(x,\varphi);$$

$$\int \frac{1}{x}kei_0'(x,\varphi)\,dx = \cos 2\varphi\int kei_0(x,\varphi)\,dx + \sin 2\varphi\int \mathrm{ker}_0(x)\,dx - kei_0'(x,\varphi);$$

$$\int \mathrm{ker}_2(x,\varphi)\,dx = -\int \mathrm{ker}_0(x,\varphi)\,dx + 2\cos 2\varphi\cdot ker_0'(x,\varphi) + 2\sin 2\varphi\cdot kei_0'(x,\varphi);$$

$$\int kei_2(x,\varphi)\,dx = -\int kei_0(x,\varphi)\,dx + 2\cos 2\varphi\cdot kei_0'(x,\varphi) - 2\sin 2\varphi\cdot ker_0'(x,\varphi);$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{ker}_2(x,\varphi)\,dx = \frac{1}{x}(\cos 2\varphi\cdot ker_0'(x,\varphi) + \sin 2\varphi\cdot kei_0'(x,\varphi));$$

$$\int \frac{1}{x}kei_2(x,\varphi)\,dx = \frac{1}{x}(\cos 2\varphi\cdot kei_0'(x,\varphi) - \sin 2\varphi\cdot ker_0'(x,\varphi));$$

$$\int \frac{3}{x^2}\,\mathrm{ker}_2(x,\varphi)\,dx = \cos 2\varphi\int \mathrm{ker}_0(x,\varphi)\,dx - \sin 2\varphi\int kei_0(x,\varphi)\,dx - \frac{1}{x}\,\mathrm{ker}_2(x,\varphi) - ker_0'(x,\varphi);$$

$$\int \frac{3}{x^2}kei_2(x,\varphi)\,dx = \cos 2\varphi\int kei_0(x,\varphi)\,dx + \sin 2\varphi\int \mathrm{ker}_0(x,\varphi)\,dx - \frac{1}{x}kei_2(x,\varphi) - kei_0'(x,\varphi).$$

Приведем необходимые для реализации алгоритма производные фундаментального решения в локальной системе координат:

$$G(t,\zeta) = A\,kei_0(r/l,\varphi), \quad \text{где} \quad A = -1/(2\pi D\beta^2),$$

$$\frac{\partial G(t,\zeta)}{\partial n} = \frac{A}{l}kei_0'(r/l,\varphi)\cos\gamma; \qquad \frac{\partial G(t,\zeta)}{\partial n_1} = -\frac{A}{l}kei_0'(r/l,\varphi)\cos\gamma_1;$$

$$\frac{\partial G(t,\zeta)}{\partial \tau} = -\frac{A}{l}kei_0'(r/l,\varphi)\sin\gamma; \qquad \frac{\partial G(t,\zeta)}{\partial \tau_1} = \frac{A}{l}kei_0'(r/l,\varphi)\sin\gamma_1;$$

$$\frac{\partial^2 G(t,\zeta)}{\partial n^2} = \frac{A}{l^2}\left[kei_0''(r/l,\varphi)\cos^2\gamma + \left(\frac{l}{r}\right)kei_0'(r/l,\varphi)\sin^2\gamma\right];$$

$$\frac{\partial^2 G(t,\zeta)}{\partial \tau^2} = \frac{A}{l^2}\left[kei_0''(r/l,\varphi)\sin^2\gamma + \left(\frac{l}{r}\right)kei_0'(r/l,\varphi)\cos^2\gamma\right];$$

$$\frac{\partial^2 G(t,\zeta)}{\partial n\partial \tau} = -\frac{A}{l^2}(\cos 2\varphi\cdot kei_2(r/l,\varphi) + \sin 2\varphi\cdot \mathrm{ker}_2(r/l,\varphi))\cos\gamma\sin\gamma;$$

$$\frac{\partial^2 G(t,\zeta)}{\partial n \partial n_1} = -\frac{A}{l^2}\left[kei_0''(r/l,\varphi)\cos\gamma\cos\gamma_1 + \left(\frac{l}{r}\right)kei_0'(r/l,\varphi)\sin\gamma\sin\gamma_1\right];$$

$$\Delta G(t,\zeta) = \frac{A}{l^2}(\cos 2\varphi \cdot kei_0(r/l,\varphi) + \sin 2\varphi \cdot \ker_0(r/l,\varphi));$$

$$\frac{\partial \Delta G(t,\zeta)}{\partial n} = \frac{A}{l^3}(\cos 2\varphi \cdot kei_0'(r/l,\varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0'(r/l,\varphi))\cos\gamma;$$

$$\frac{\partial \Delta G(t,\zeta)}{\partial n_1} = -\frac{A}{l^3}(\cos 2\varphi \cdot kei_0'(r/l,\varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0'(r/l,\varphi))\cos\gamma_1;$$

$$\frac{\partial^3 G(t,\zeta)}{\partial \tau^2 \partial n_1} = -\frac{A}{l^3}((\cos 2\varphi \cdot kei_0'(r/l,\varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0'(r/l,\varphi))\sin^2\gamma\cos\gamma_1 +$$
$$+\left(\frac{l}{r}\right)(\cos 2\varphi \cdot kei_2(r/l,\varphi) + \sin 2\varphi \cdot \ker_2(r/l,\varphi))\cos(2\gamma+\gamma_1));$$

$$\frac{\partial^3 G(t,\zeta)}{\partial n^2 \partial n_1} = -\frac{A}{l^3}((\cos 2\varphi \cdot kei_0'(r/l,\varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0'(r/l,\varphi))\cos^2\gamma\cos\gamma_1 -$$
$$-\left(\frac{l}{r}\right)(\cos 2\varphi \cdot kei_2(r/l,\varphi) + \sin 2\varphi \cdot \ker_2(r/l,\varphi))\cos(2\gamma+\gamma_1));$$

$$\frac{\partial^3 G(t,\zeta)}{\partial n \partial \tau^2} = \frac{A}{l^3}((\cos 2\varphi \cdot kei_0'(r/l,\varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0'(r/l,\varphi))\sin^2\gamma\cos\gamma -$$
$$-\left(\frac{l}{r}\right)(\cos 2\varphi \cdot kei_2(r/l,\varphi) + \sin 2\varphi \cdot \ker_2(r/l,\varphi))\cos\gamma(1-\cos 2\gamma));$$

$$\frac{\partial^2 \Delta G(t,\zeta)}{\partial n \partial n_1} = -\frac{A}{l^4}((\cos 2\varphi \cdot kei_0''(r/l,\varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0''(r/l,\varphi))\cos\gamma_1\cos\gamma +$$
$$+\left(\frac{l}{r}\right)(\cos 2\varphi \cdot kei_0'(r/l,\varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0'(r/l,\varphi))\sin\gamma_1\sin\gamma);$$

$$\frac{\partial^3 G(t,\zeta)}{\partial n \partial \tau \partial n_1} = \frac{A}{l^3}((\cos 2\varphi \cdot kei_0'(r/l,\varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0'(r/l,\varphi))\cos\gamma_1\sin\gamma\cos\gamma -$$
$$-\left(\frac{l}{r}\right)(\cos 2\varphi \cdot kei_2(r/l,\varphi) + \sin 2\varphi \cdot \ker_2(r/l,\varphi))\sin(2\gamma+\gamma_1));$$

$$\frac{\partial^4 G(t,\zeta)}{\partial n \partial \tau^2 \partial n_1} = -\frac{A}{l^4}(\cos 2\varphi \cdot kei_0''(r/l,\varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0''(r/l,\varphi))\sin^2\gamma\cos\gamma_1\cos\gamma +$$
$$+\left(\frac{l}{r}\right)(\cos 2\varphi \cdot kei_0'(r/l,\varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0'(r/l,\varphi))\cos^2\gamma\sin\gamma_1\sin\gamma -$$
$$-\left(\frac{l}{r}\right)(\cos 2\varphi \cdot kei_0'(r/l,\varphi) + \sin 2\varphi \cdot ker_0'(r/l,\varphi) - 3\left(\frac{l}{r}\right)(\cos 2\varphi \cdot kei_2(r/l,\varphi) +$$
$$+\sin 2\varphi \cdot \ker_2(r/l,\varphi)))(2\sin 2\gamma\sin(\gamma+\gamma_1) - \cos(\gamma-\gamma_1))).$$

Как показывает анализ ядер интегральных уравнений, применительно к асимптотике обобщенных функций Томпсона – Кельвина и их производных, для задачи изгиба изотропной пластины, выполненный по методике, изложенной в статье О.И. Панича [6], при переходе через гладкий контур обобщенная поперечная сила V_n и изгибающий момент M_n терпят разрывы первого рода:

$$M_n^{\pm}(t) = \pm\frac{1}{2}\cdot m(t) + M_n(t); V_n^{\pm}(t) = \pm\frac{1}{2}\cdot q(t) + V_n(t), t \in \Gamma. \tag{8}$$

Подставляя (3) в граничные условия (5)–(7), получаем систему сингулярных интегральных уравнений с неизвестными компенсирующими нагрузками $q(\zeta), m(\zeta)$, которая примет следующий вид.

Для жесткой заделки

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma} G(t,\zeta)\,q(\zeta)\,ds(\zeta) - \int\limits_{\Gamma}\frac{\partial G(t,\zeta)}{\partial n_1}m(\zeta)\,ds(\zeta) + w^r(t) = 0,\\ \int\limits_{\Gamma}\frac{\partial G(t,\zeta)}{\partial n}q(\zeta)\,ds(\zeta) - \int\limits_{\Gamma}\frac{\partial^2 G(t,\zeta)}{\partial n \partial n_1}m(\zeta)\,ds(\zeta) + \frac{\partial w^r(t)}{\partial n} = 0.\end{gathered} \tag{9}$$

Для свободного опирания

$$\int\limits_{\Gamma} G(t,\zeta)\, q(\zeta)\, ds(\zeta) - \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial G(t,\zeta)}{\partial n_1} m(\zeta)\, ds(\zeta) + w^r(t) = 0,$$
$$\frac{1}{2} m(t) - D \int\limits_{\Gamma} \left[\Delta G(t,\zeta) - (1-\nu) \frac{\partial^2 G(t,\zeta)}{\partial \tau^2} \right] q(\zeta)\, ds(\zeta) + \tag{10}$$
$$+D \int\limits_{\Gamma} \left[\frac{\partial \Delta G(t,\zeta)}{\partial n_1} - (1-\nu) \frac{\partial^3 G(t,\zeta)}{\partial \tau^2 \partial n_1} \right] m(\zeta)\, ds(\zeta) + M_n^r(t) = 0.$$

Для свободного края

$$\frac{1}{2} m(t) - D \int\limits_{\Gamma} \left[\Delta G(t,\zeta) - (1-\nu) \frac{\partial^2 G(t,\zeta)}{\partial \tau^2} \right] q(\zeta)\, ds(\zeta) +$$
$$+D \int\limits_{\Gamma} \left[\frac{\partial \Delta G(t,\zeta)}{\partial n_1} - (1-\nu) \frac{\partial^3 G(t,\zeta)}{\partial \tau^2 \partial n_1} \right] m(\zeta)\, ds(\zeta) + M_n^r(t) = 0, \tag{11}$$
$$\frac{1}{2} q(t) - D \int\limits_{\Gamma} \left[\frac{\partial \Delta G(t,\zeta)}{\partial n} + (1-\nu) \left[\frac{\partial^3 G(t,\zeta)}{\partial n \partial \tau^2} - \kappa(t) \left(\frac{\partial^2 G(t,\zeta)}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 G(t,\zeta)}{\partial \tau^2} \right) \right] \right] q(\zeta)\, ds(\zeta) +$$
$$+D \int\limits_{\Gamma} \left[\frac{\partial^2 \Delta G(t,\zeta)}{\partial n \partial n_1} + (1-\nu) \left[\frac{\partial^4 G(t,\zeta)}{\partial n \partial \tau^2 \partial n_1} - \kappa(t) \left(\frac{\partial^3 G(t,\zeta)}{\partial n^2 \partial n_1} - \frac{\partial^3 G(t,\zeta)}{\partial \tau^2 \partial n_1} \right) \right] \right] m(\zeta)\, ds(\zeta) + V_n^r(t) = 0.$$

Для приближенного решения одной из систем (9)–(11) контур разобьем на N граничных элементов. В пределах каждого элемента функции компенсирующих нагрузок $q(\zeta)$, $m(\zeta)$ будем считать постоянными. Для принятой аппроксимации $q(\zeta)$, $m(\zeta)$ точки коллокации располагаем в узлах элементов.

Контрольный пример: Прямоугольная пластина, находящаяся под действием равномерно распределенной внешней нагрузки, все стороны которой свободно оперты, лежит на двухпараметрическом упругом основании. Механические характеристики и размеры пластины следующие: $h = 1$(см), $a = 10$(см), $b = 5$(см), $E = 2 \cdot 10^6$ (кГ/см^2), $\nu = 0,3$, $k_z = 1540$ (кГ/см^3), $k_t = 1000$ (кГ/см^3). В таблице приведено сравнение численного решения МГЭ с точным решением, которое является обобщением решения Навье на случай двухпараметрического упругого основания [7]. Сравнение проводится для точки, являющейся центром тяжести пластины.

q(кг/см^2)	МГЭ (3)	Решение Навье
	w(см) *10^{-3}	w(см)*10^{-3}
100	0.7180	0.7179
250	1.7949	1.7947
500	3.5897	3.5895

Библиографический список

1. *Артюхин Ю.П., Грибов А.П.* Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов. Казань: Фэн, 2002. 199 с.

2. *Власов В.З., Леонтьев Н.Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 340 с.

3. *Шевченко В.П.* Интегральные преобразования в теории пластин и оболочек: Учеб. пособие. Донецк: Изд-во Донецк. ун-та, 1977. 115 с.

4. *Коренев Б.Г.* Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. М.: Физматгиз, 1960. 458 с.

5. *Кончковский З.* Плиты. Статические расчеты / Пер. с пол. М.В. Предтеченского; Под ред. А.И. Цейтлина. М.: Стройиздат, 1984. 480 с.

6. *Панич О.И.* О потенциалах полигармонического уравнения четвертого порядка // Мат. сборник. Одесса, 1960. Т. 50, вып. 3. С. 335–354.

7. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБА КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

П.Ф. Недорезов, *О.М. Ромакина

Саратовский государственный университет,
кафедра математической теории упругости и биомеханики,
* кафедра компьютерной алгебры и теории чисел
E-mail: romakinaom@hotbox.ru

В работе рассматривается задача изгиба кусочно-однородной прямоугольной пластинки из изотропного материала. На линии контакта задаются две группы условий: геометрические условия, отражающие непрерывность и гладкость срединной поверхности составной пластинки, и силовые условия, обеспечивающие равенство изгибающих моментов и обобщенных перерезывающих сил в левой и правой частях пластинки. Для решения задачи предлагается модифицированный метод сплайн-коллокации, согласно которому безразмерный прогиб различных частей пластинки может быть представлен в виде линейных комбинаций B-сплайнов пятой степени. Данные комбинации подобраны так, чтобы выполнялись как условия, заданные на вертикальных сторонах пластинки, так и условия на линии контакта. Приводятся различные типы краевых задач, которые решаются численно методом дискретной ортогонализации Годунова.

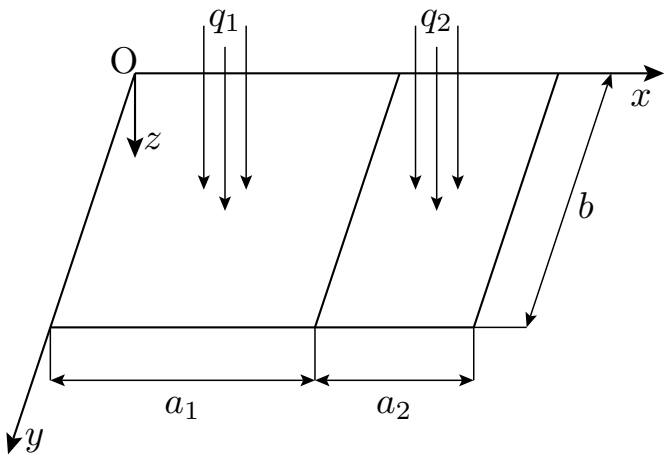
Numeric Investigation of a Curve Piecewise-Homogeneous Rectangular Plate from an Isotropic Material

P.F. Nedorezov, O.M. Romakina

In this paper we consider the problem of a curve piecewise-homogeneous rectangular plate from an isotropic material. There are two group of condition on the line of a contact: geometric conditions, describing the continuity and smoothness of midsurfase of composite plate and force conditions, which supply the equality of bending moments and generalized cutting forces in the left and in the right parts of the plate. To find a solution we suggest a modified spline-collocation method, according to which the nondimensional deflection of the different part of plate may be presented as a linear combination of B-splines of fifth power. These combination are selected so, that the condition on the vertical side of the plate and the condition on the contact line are fulfilled. Different types of boundary problems are presented, which are solved numerically by the method of discrete ortogonalization of Godunov.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим тонкую прямоугольную пластинку шириной b, составленную из двух частей одинаковой толщины h, но имеющих разную длину (рисунок). Части пластинки изготовлены из разных материалов и жестко скреплены (склеены или спаяны) между собой.



Составная изотропная пластинка

В дальнейшем индексом «k» ($k = 1, 2$) обозначаются характерные величины для k-й части пластинки: E_k, ν_k — модули Юнга и коэффициенты Пуассона; $u^{(k)}$, $v^{(k)}$, $w^{(k)}$ — проекции вектора смещения точки (x, y, z); $M_x^{(k)}$, $M_y^{(k)}$ — изгибающие моменты; $H_{xy}^{(k)}$ — крутящий момент; $Q_x^{(k)}$, $Q_y^{(k)}$ — поперечные силы; $q_k(x, y)$ — интенсивность распределенной при $z = -h/2$ нагрузки.

Считается, что пластинка испытывает малые деформации, подчиняющиеся закону Гука. Предполагаются справедливыми гипотезы классической теории Кирхгофа.

© П.Ф. Недорезов, О.М. Ромакина, 2008

Тогда [1]

$$w^{(k)} = w^{(k)}(x,y), \quad u^{(k)} = -z\frac{\partial w^{(k)}}{\partial x}, \qquad v^{(k)} = -z\frac{\partial w^{(k)}}{\partial y} \qquad (k=1,2), \tag{1}$$

а функции $w^{(k)}(x,y)$ должны удовлетворять уравнениям:

$$D_k\nabla^2\nabla^2 w^{(k)}(x,y) = q^{(k)}(x,y) \quad (k=1,2), \tag{2}$$

где

$$D_k = \frac{E_k h^3}{12(1-\nu_k^2)}, \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Внутренние усилия в пластинке выражаются через функции $w^{(k)}$ по известным формулам [1]:

$$M_x^{(k)} = -D_k\left(\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x^2} + \nu_k\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial y^2}\right), \qquad H_{xy}^{(k)} = -D_k(1-\nu_k)\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x\partial y},$$

$$Q_x^{(k)} = -D_k\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2 w^{(k)}\right), \qquad Q_x^{(k)*} = Q_x^{(k)} + \frac{\partial H_{xy}^{(k)}}{\partial y} \qquad (k=1,2;\ x\Leftrightarrow y). \tag{3}$$

Введем в рассмотрение безразмерные величины: геометрические параметры $c_k = a_k/b$, $h_k = h/a_k$, переменные $\xi^{(1)} = (a_1 - x)/a_1 \quad (0 \le x \le a_1)$, $\xi^{(2)} = (x-a_1)/a_2 \quad (a_1 \le x \le a_2)$, $\eta = y/b$, $\left(0 \le \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \eta \le 1\right)$, прогибы

$$W^{(k)}\left(\xi^{(k)},\eta\right) = w^{(k)}(x,y)/h. \tag{4}$$

Тогда для функций $W^{(k)}\left(\xi^{(k)},\eta\right)$ из (2) следует

$$\frac{\partial^4 W^{(k)}}{\partial {\xi^{(k)}}^4} + 2c_k^2\frac{\partial^4 W^{(k)}}{\partial {\xi^{(k)}}^2\partial\eta^2} + c_k^4\frac{\partial^4 W^{(k)}}{\partial\eta^4} = q_k\left(\xi^{(k)},\eta\right)/D_k^* \quad (k=1,2), \tag{5}$$

а вместо (3) получаются выражения

$$M_x^{(k)} = -D_k^* a_k^2\left(\frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial {\xi^{(k)}}^2} + \nu_k c_k^2\frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial\eta^2}\right) \quad \left(x\Leftrightarrow y;\ \xi^{(k)}\Leftrightarrow \eta/c_k\right),$$

$$H_{xy}^{(k)} = (-1)^{k-1}D_k^*(1-\nu_k)a_k^2 c_k\frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial\xi^{(k)}\partial\eta},$$

$$Q_x^{(k)} = (-1)^{k-1}D_k^* a_k\left(\frac{\partial^3 W^{(k)}}{\partial {\xi^{(k)}}^3} + c_k^2\frac{\partial^3 W^{(k)}}{\partial\xi^{(k)}\partial\eta^2}\right),$$

$$Q_y^{(k)} = -D_k^* a_k c_k\left(\frac{\partial^3 W^{(k)}}{\partial {\xi^{(k)}}^2\partial\eta} + c_k^2\frac{\partial^3 W^{(k)}}{\partial\eta^3}\right),$$

$$Q_x^{(k)*} = (-1)^{k-1}D_k^* a_k\left(\frac{\partial^3 W^{(k)}}{\partial {\xi^{(k)}}^3} + (2-\nu_k)c_k^2\frac{\partial^3 W^{(k)}}{\partial\xi^{(k)}\partial\eta^2}\right),$$

$$Q_y^{(k)*} = -D_k^* a_k c_k\left((2-\nu_k)\frac{\partial^3 W^{(k)}}{\partial {\xi^{(k)}}^2\partial\eta} + c_k^2\frac{\partial^3 W^{(k)}}{\partial\eta^3}\right) \quad (k=1,2). \tag{6}$$

В уравнениях (5) и формулах (6) обозначено:

$$D_k^* = \frac{E_k h_k^4}{12(1-\nu_k^2)}.$$

Отметим, что совокупности значений (ξ^*,η^*) при $\xi^* \ne 0$ соответствуют две разные точки: точка $(x^* = a_1(1-\xi^*),\ y^* = b\eta^*)$ в левой части пластинки и точка $(x^{**} = a_1 + \xi^* a_2,\ \ y^{**} = b\eta^*)$ в правой части.

Так как $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} \in [0,1]$, то в дальнейшем для упрощения записи индекс «P» у $\xi^{(p)}, (p=1,2)$ опущен.

Решения уравнений (5) должны быть подчинены условиям сопряжения на линии контакта $\xi = 0$ и граничным условиям на контуре пластинки.

2. СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ В НАПРАВЛЕНИИ ОСИ x И УСЛОВИЯ СОПРЯЖЕНИЯ

Приближенное решение краевой задачи для уравнений (5) будем искать модифицированным методом сплайн-коллокации [2], согласно которому функции $W^{(k)}(\xi,\eta)$ $(k=1,2)$представляются в виде

$$W^{(1)}(\xi,\eta)=\sum_{k=1}^{2}B_{5,-k}(\xi)U_k(\eta)+\sum_{j=0}^{N+2}B_{5,j}(\xi)\Phi_j(\eta),$$

$$W^{(2)}(\xi,\eta)=\sum_{k=1}^{2}B_{5,-k}(\xi)V_k(\eta)+\sum_{j=0}^{N+2}B_{5,j}(\xi)\Psi_j(\eta). \tag{7}$$

Здесь $B_{5,r}(\xi)$, $(r=\overline{-2,N+2})$ — нормализованные B-сплайны пятой степени [3], построенные на соответствующем расширении равномерной сетки, узлы которой определены по правилу $\xi_i=i/N$ $(i=\overline{0,N})$. Функции $U_k(\eta)$ и $V_k(\eta)$ $(k=1,2)$ определяются из условий сопряжения вдоль линии контакта $x=a_1$, а функции $\Phi_{N+k}(\eta)$и $\Psi_{N+k}(\eta)$ $(k=1,2)$ должны обеспечивать выполнение граничных условий на вертикальных сторонах пластинки.

Условия сопряжения решений для левой и правой частей пластинки распадаются на две группы: геометрические условия, отражающие непрерывность и гладкость изогнутой срединной поверхности составной пластинки при $x=a_1$

$$w^{(1)}(a_1,y)=w^{(2)}(a_1,y),\qquad \frac{\partial w^{(1)}(a_1,y)}{\partial x}=\frac{\partial w^{(2)}(a_1,y)}{\partial x},$$

и силовые условия, которые обеспечивают равенство на линии контакта изгибающих моментов M_x и обобщенных поперечных сил Q_x^* в левой и правой частях пластинки

$$M_x^{(1)}(a_1,y)=M_x^{(2)}(a_1,y),\quad {Q_x^{(1)}}^*(a_1,y)={Q_x^{(2)}}^*(a_1,y).$$

Геометрические условия после перехода к безразмерным величинам и подстановки выражений (7) дают два линейных алгебраических уравнения, связывающих функции $U_k(\eta)$, $V_k(\eta)$ $(k=1,2)$, $\Phi_j(\eta)$ и $\Psi_j(\eta)$ $\left(j=\overline{0,2}\right)$. Из этих уравнений, например функции $V_k(\eta)$ $(k=1,2)$, могут быть выражены через остальные. Тогда для $W^{(2)}(\xi,\eta)$ из второй формулы (7) следует

$$W^{(2)}(\xi,\eta)=\sum_{k=1}^{2}\alpha_k(\xi)U_k(\eta)+\sum_{j=0}^{2}\beta_j(\xi)\Phi_j(\eta)+\sum_{j=0}^{N+2}\chi_j(\xi)\Psi_j(\eta). \tag{8}$$

Здесь

$$\alpha_k(\xi)=\sum_{s=1}^{2}f_{k,s}B_{5,-s}(\xi)\quad(k=1,2);\quad \beta_j(\xi)=\sum_{k=1}^{2}g_{k,j}B_{5,-k}(\xi)\quad\left(j=\overline{0,2}\right);$$

$$\chi_j(\xi)=B_{5,j}(\xi)+\sum_{s=1}^{2}p_{s,j}B_{5,-s}(\xi)\ \left(j=\overline{0,2}\right);\quad \chi_j(\xi)=B_{5,j}(\xi)\quad\left(j=\overline{3,N+2}\right);$$

$f_{k,s},g_{k,j}$ и $p_{s,j}$ выражаются через значения функций $B_{5,r}(\xi)$ $\left(r=\overline{-2,N-2}\right)$ и их производных в точке $\xi=\xi_0$; соответствующие формулы из-за громоздкости не приводятся.

Силовые условия на линии контакта в безразмерных переменных с учетом выражений (6) после некоторых преобразований представляются в виде

$$D_1^*a_1^2\frac{\partial^2 W^{(1)}(\xi_0,\eta)}{\partial\xi^2}+\tilde{d}_1\frac{\partial^2 W^{(1)}(\xi_0,\eta)}{\partial\eta^2}-D_2^*\frac{\partial^2 W^{(2)}(\xi_0,\eta)}{\partial\xi^2}=0,$$

$$D_1^*a_1^2\frac{\partial^3 W^{(1)}(\xi_0,\eta)}{\partial\xi^3}+\tilde{d}_2\frac{\partial^3 W^{(1)}(\xi_0,\eta)}{\partial\xi\partial\eta^2}+D_2^*a_1a_2\frac{\partial^3 W^{(2)}(\xi_0,\eta)}{\partial\xi^3}=0 \tag{9}$$

с известными коэффициентами $\tilde{d}_1$ и $\tilde{d}_2$. В зависимости от значений механических характеристик материалов частей пластинки $\tilde{d}_1$ и $\tilde{d}_2$ могут обращаться в ноль или быть отличными от нуля.

Если $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = 0$, то при подстановке в (9) выражений $W^{(1)}$из (7) и $W^{(2)}$ из (8) получаются два линейных алгебраических уравнения, из которых функции $U_k(\eta)$ $(k = 1, 2)$ выражаются как комбинации функций $\Phi_j(\eta)$ и $\Psi_j(\eta)$ $(j = \overline{0, 2})$. Тогда для $W^{(1)}(\xi, \eta)$ и $W^{(2)}(\xi, \eta)$ получаются выражения вида

$$W^{(1)}(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{N+2} \varphi_j(\xi)\Phi_j(\eta) + \sum_{j=0}^{2} \gamma_j(\xi)\Psi_j(\eta),$$

$$W^{(2)}(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{2} \delta_j(\xi)\Phi_j(\eta) + \sum_{j=0}^{N+2} \psi_j(\xi)\Psi_j(\eta). \tag{10}$$

В случае, когда $\tilde{d}_1 = 0$, $\tilde{d}_2 \neq 0$ или $\tilde{d}_1 \neq 0$, $\tilde{d}_2 = 0$, одно из условий (9) сводится к линейному алгебраическому уравнению, из которого $U_2(\eta)$ выражается через $U_1(\eta)$ и $\Phi_j(\eta)$, $\Psi_j(\eta)$ $(j = \overline{0, 2})$. Тогда разложения $W^{(1)}(\xi, \eta)$ из (7) и $W^{(2)}(\xi, \eta)$ из (8) могут быть преобразованы к виду

$$W^{(1)}(\xi, \eta) = \alpha(\xi)U_1(\eta) + \sum_{j=0}^{N+2} \varphi_j(\xi)\Phi_j(\eta) + \sum_{j=0}^{2} \gamma_j(\xi)\Psi_j(\eta),$$

$$W^{(2)}(\xi, \eta) = \beta(\xi)U_1(\eta) + \sum_{j=0}^{2} \delta_j(\xi)\Phi_j(\eta) + \sum_{j=0}^{N+2} \psi_j(\xi)\Psi_j(\eta). \tag{11}$$

Оставшееся условие (9) устанавливает для функции $U_1(\eta)$ дифференциальную зависимость:

$$\frac{d^2 U_1}{d\eta^2} = AU_1(\eta) + \sum_{j=0}^{2} \left[B_j\Phi_j(\eta) + C_j\Psi_j(\eta) + G_j \frac{d^2 \Phi_j}{d\eta^2} + F_j \frac{d^2 \Psi_j}{d\eta^2} \right] \tag{12}$$

с известными коэффициентами A, B_j, C_j, G_j и F_j.

При отличных от нуля $\tilde{d}_1$ и $\tilde{d}_2$ из условий (9) после ряда преобразований получается система дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 U_k}{d\eta^2} = \sum_{s=1}^{2} A_{k,s}U_s(\eta) + \sum_{j=0}^{2} \left[B_{k,j}\Phi_j(\eta) + C_{k,j}\Psi_j(\eta) + p_{k,j} \frac{d^2 \Phi_j}{d\eta^2} \right] \quad (k = 1, 2), \tag{13}$$

в которой коэффициенты $A_{k,s}$, $B_{k,j}$, и $C_{k,j}$ известны.

В этом случае для $W^{(1)}(\xi, \eta)$ имеет место формула из (7), а для $W^{(2)}(\xi, \eta)$ — формула (8).

При выводе формул и уравнений п.2 учитывалось, что B-сплайн $B_{5,i}(\xi)$ и все его производные при $i \geq 3$ в точке $\xi = \xi_0$ обращаются в ноль.

3. УДОВЛЕТВОРЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ВЕРТИКАЛЬНЫХ СТОРОНАХ ПЛАСТИНКИ

Рассмотрим различные возможные варианты непротиворечивых граничных условий на левой вертикальной стороне пластинки $(x = 0, \xi^{(1)} = \xi_N)$:

I. Сторона деформирована заданным образом, т.е. известны безразмерный прогиб $w_1^*(\eta)$ и угол поворота $\theta_1^*(\eta)$.

II. Заданы условия смешанного типа, т.е. известны: а) безразмерный прогиб $w_1^*(\eta)$ и изгибающий момент интенсивности $m_1^*(\eta)$ или б) угол поворота $\theta_1^*(\eta)$ и поперечные усилия интенсивности $p_1^*(\eta)$.

III. Сторона нагружена известными изгибающими моментами $m_1^*(\eta)$ и поперечными усилиями $p_1^*(\eta)$.

Граничные условия для функции $W^{(1)}(\xi, \eta)$ принимают следующий вид:
для варианта I

$$W^{(1)}(\xi_N, \eta) = w_1^*, \quad \frac{\partial W^{(1)}(\xi_N, \eta)}{\partial \xi} = -h_1^{-1}\theta_1^*(\eta), \tag{14}$$

или

$$W^{(1)}(\xi_N, \eta) = w_1^*,$$

для варианта II, а)

$$\frac{\partial^2 W^{(1)}(\xi_N,\eta)}{\partial \xi^2} + \nu_1 c_1^2 \frac{\partial^2 W^{(1)}(\xi_N,\eta)}{\partial \eta^2} = -\left[D_1^* a_1^2\right]^{-1} m_1^*(\eta), \tag{15}$$

или

$$\frac{\partial W^{(1)}(\xi_N,\eta)}{\partial \xi} = -h_1^{-1}\theta_1^*(\eta),$$

для варианта II, б)

$$\frac{\partial^3 W^{(1)}(\xi_N,\eta)}{\partial \xi^3} + (2-\nu_1)c_1^2 \frac{\partial^3 W^{(1)}(\xi_N,\eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} = \left[D_1^* a_1\right]^{-1} p_1^*(\eta), \tag{16}$$

или

$$\frac{\partial^2 W^{(1)}(\xi_N,\eta)}{\partial \xi^2} + \nu_1 c_1^2 \frac{\partial^2 W^{(1)}(\xi_N,\eta)}{\partial \eta^2} = -\left[D_1^* a_1^2\right]^{-1} m_1^*(\eta),$$

для варианта III

$$\frac{\partial^3 W^{(1)}(\xi_N,\eta)}{\partial \xi^3} + (2-\nu_1)c_1^2 \frac{\partial^3 W^{(1)}(\xi_N,\eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} = \left[D_1^* a_1\right]^{-1} p_1^*(\eta). \tag{17}$$

Учитывая, что сплайн $B_{5,i}(\xi)$и его производные в точке $\xi = \xi_{i+3}$ равны нулю, выражения для функции $W^{(1)}(\xi,\eta)$, удовлетворяющие условиям сопряжения на линии $\xi = \xi_0$, при любых значениях $\tilde{d}_1$ и $\tilde{d}_2$ вдоль прямой $\xi = \xi_N$ можно записать в виде

$$\frac{d^r W^{(1)}(\xi_N,\eta)}{d\xi^r} = \sum_{s=-2}^{2} \frac{d^r B_{5,s}(\xi_N,\eta)}{d\xi^r} \Phi_{N+s}(\eta) \quad \left(r = \overline{0,3}\right). \tag{18}$$

Аналогично для функции $W^{(2)}(\xi,\eta)$ и ее производных

$$\frac{d^r W^{(2)}(\xi_N,\eta)}{d\xi^r} = \sum_{s=-2}^{2} \frac{d^r B_{5,s}(\xi_N,\eta)}{d\xi^r} \Psi_{N+s}(\eta) \quad \left(r = \overline{0,3}\right). \tag{19}$$

Тогда после подстановки выражений (18) в условия (14) или (15), (16) и ряда несложных преобразований получаются системы двух линейных алгебраических уравнений, из которых функции $\Phi_{N+k}(\eta)$ $(k = 1,2)$ представляются линейными комбинациями заданных функций $\xi = \xi_N$ и функций $\Phi_j(\eta)$ $(j = \overline{N-2,N})$

$$\Phi_{N+k}(\eta) = m_k(\eta) + \sum_{j=N-2}^{N} a_{k,j}^* \Phi_j(\eta) \ (k = 1,2). \tag{20}$$

При задании на стороне $x = 0$ моментов и усилий интенсивности $m_1^*(\eta)$ и $p_1^*(\eta)$ из (17) получаются не алгебраические, а дифференциальные зависимости, которые преобразуются к виду

$$\frac{d^2 \Phi_{N+k}}{d\eta^2} = m_k(\eta) + \sum_{j=N-2}^{N+2} \left[a_{k,j}^* \frac{d^2 \Phi_j}{d\eta^2} + b_{k,j}^* \Phi_j(\eta)\right] \quad (k = 1,2). \tag{21}$$

В соотношениях (20) и (21) постоянные $a_{k,j}^*$, $b_{k,j}^*$ выражаются через значения B-сплайна $B_{5,i}(\xi)$ и его производных в точке $\xi = \xi_N$, а функции $m_k(\eta)$ — через заданные $m_1^*(\eta)$ и $p_1^*(\eta)$.

Совершенно аналогично могут быть сформулированы граничные условия на стороне $x = a$ $\left(\xi^{(2)} = \xi_N\right)$ для функции $W^{(2)}(\xi,\eta)$. Тогда при заданных смещениях (т. е. известны прогиб $w_2^*(\eta)$ и угол поворота $\theta_2^*(\eta)$ — условия типа (14) или в случае смешанных условий типа (15), (16), когда задаются $w_2^*(\eta)$ и $m_2^*(\eta)$ или $\theta_2^*(\eta)$ и $p_2^*(\eta)$) функции $\Psi_{N+k}(\eta)$ с учетом (6) представляются линейными комбинациями величин $w_2^*(\eta)$, $\theta_2^*(\eta)$, $m_2^*(\eta)$ и $p_2^*(\eta)$ и функций $\Psi_j(\eta)$ $\left(j = \overline{N-2,N}\right)$

$$\Psi_{N+k}(\eta) = \widetilde{m}_k(\eta) + \sum_{j=N-2}^{N} \widetilde{a}_{k,j}^* \Psi_j(\eta) \quad (k = 1,2). \tag{22}$$

При условиях типа (17) — сторона $x = a$ загружена изгибающими моментами и поперечными усилиями заданной интенсивности $m_2^*(\eta)$ и $p_2^*(\eta)$ — для функций $\Psi_{N+k}(\eta)$ $(k = 1, 2)$ получается система дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2\,\Psi_{N+k}(\eta)}{d\,\eta^2} = \widetilde{m}_k(\eta) + \sum_{j=N-2}^{N+2} \left[\widetilde{a}_{k,j}^* \frac{d^2\,\Psi_j}{d\,\eta^2} + \widetilde{b}_{k,j}^* \Psi_j(\eta)\right] \quad (k = 1, 2). \tag{23}$$

Комбинируя в разных сочетаниях выражения, приведенные в п.2 и п.3, можно получить разложения функций $W^{(k)}(\xi, \eta)$, соответствующие разным значениям упругих постоянных материала частей, т.е. различным величинам $\tilde{d}_1$ и $\tilde{d}_2$. Эти разложения точно удовлетворяют условиям сопряжения вдоль линии контакта $x = a_1$ и граничным условиям на сторонах $x = 0$ и $x = a$. Число неизвестных функций в этих разложениях меняется в зависимости от значений $\tilde{d}_1$ и $\tilde{d}_2$ и вида внешнего воздействия при $x = 0$ и $x = a$. При $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = 0$ и условиях (14) или (15), (16) и им аналогичных при $x = a$ число неизвестных функций минимально и равно $2N + 2$ (неизвестными являются функции $\Phi_0, \ldots, \Phi_N, \Psi_0, \ldots, \Psi_N$). Максимальное число неизвестных функций получается при $\tilde{d}_1 \neq 0$, $\tilde{d}_2 \neq 0$ и заданных силовых воздействиях на сторонах $x = 0$ и $x = a$. В этом случае подлежат определению $2N + 8$ функций $\Phi_j(\eta), \Psi_j(\eta)$ $\left(j = \overline{0, N+2}\right)$ и $U_k(\eta)$ $(k = 1, 2)$.

4. МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Указанные в конце п.3 разложения функций $W^{(k)}(\xi, \eta)$ $(k = 1, 2)$ должны удовлетворять двумерным уравнениям (5) и граничным условиям на сторонах $y = 0\,(\eta = 0)$ и $y = b\,(\eta = 1)$. Для понижения размерности такой краевой задачи применяется метод коллокации. С этой целью вводится система точек коллокации $\xi = \xi_i^*$ $\left(i = \overline{0, N}\right)$ по правилу $\xi_i^* = \xi_i + t/N$ $\left(i = \overline{0, N/2 - 1}\right)$, $\xi_{N/2}^* = \xi_{N/2}$, $\xi_i^* = \xi_i - t/N$ $\left(i = \overline{N/2 + 1, N}\right)$, $0 < t < 1$. Разложения функций $W^{(k)}(\xi, \eta)$ $(k = 1, 2)$, соответствующие значениям $\tilde{d}_1$ и $\tilde{d}_2$ и удовлетворяющие граничным условиям при $\xi = \xi_N$, подставляются в уравнения (5) и требуется, чтобы результат такой подстановки выполнялся в точках коллокации $\xi = \xi_i^*$ $\left(i = \overline{0, N}\right)$. Это требование приводит к системе $2N+2$ обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно неизвестных функций в разложениях функций $W^{(k)}(\xi, \eta)$. Условно будем называть эту систему системой (А).

На сторонах $y = 0$ и $y = b$, согласно способам закрепления или нагружения этих сторон, могут быть сформулированы граничные условия, по два условия в каждой точке, каждой из сторон. После подстановки соответствующих разложений $W^{(k)}(\xi, \eta)$ в эти условия из требования, чтобы последние выполнялись в точках коллокации, получается система $8N + 8$ уравнений для граничных значений неизвестных функций. Эти уравнения условно называются условиями (Б).

В случае $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = 0$ при граничных условиях (14) или (15), (16) и им подобных при $x = a$ система уравнений (А) в совокупности с условиями (Б) составляет краевую задачу для определения всех неизвестных функций в разложениях $W^{(k)}(\xi, \eta)$.

Если при $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = 0$ граничные условия на стороне $x = 0$ имеют вид (17), то число неизвестных функций в разложении $W^{(1)}(\xi, \eta)$ увеличивается до $N + 3$. Тогда из (А) с учетом (21) следует исключить вторые, а после двукратного дифференцирования — и четвертые производные функций $\Phi_{N+k}(\eta)$ $(k = 1, 2)$. Преобразованная таким образом система (А) в совокупности с (21) составит полную систему разрешающих уравнений в этом случае. При этом к граничным условиям (Б) необходимо присоединить еще четыре условия, которые получаются из условий нагружения или деформирования сторон $y = 0$ и $y = b$ при $x = 0$.

Если на стороне $x = a$ также заданы условия типа (17), то из (А), используя (21) и (23), исключают производные функций $\Phi_{N+k}(\eta)$ и $\Psi_{N+k}(\eta)$ $(k = 1, 2)$. Полученные уравнения вместе с уравнениями (21) и (23) составят систему разрешающих уравнений, соответствующую такому варианту условий при $x = 0$ и $x = a$. К граничным условиям (Б) в этом случае, кроме условий на концах стороны $x = 0$ еще добавляются условия на концах стороны $x = a$.

Совершенно аналогично получаются краевые задачи, когда $\tilde{d}_1 \neq 0$, $\tilde{d}_2 \neq 0$. Например, если в этом случае на сторонах $x = 0$ и $x = a$ задано распределение нагрузки, то из (А) с помощью (13), (21) и (23) исключаются производные функций $U_k(\eta)$, $\Phi_{N+k}(\eta)$ и $\Psi_{N+k}(\eta)$ $(k = 1, 2)$. Результат

такого преобразования вместе с уравнениями (13), (21) и (23) дает систему разрешающих уравнений, граничные условия для которой состоят из условий (Б) и условий на концах отрезков $x = 0$, $x = a_1$ и $x = a$.

Несколько иначе строятся краевые задачи, когда один из коэффициентов $\tilde{d}_k$ равен нулю, а второй отличен от нуля. Наметим порядок решения в этом случае, например, при граничных условиях (14) или (15), (16) и им подобных на правой стороне пластинки. Тогда неизвестными функциями в разложениях $W^{(k)}(\xi, \eta)$ будут $U_1(\eta)$, $\Phi_j(\eta)$ и $\Psi_j(\eta)$ $(j = \overline{0, N})$. Если в качестве системы разрешающих уравнений для этих функций принять систему (А) и уравнение (12), которому должна удовлетворять функция $U_1(\eta)$, то для определения произволов интегрирования потребуется $8N + 10$ условий, из которых $8N + 8$ составляют условия (Б). Недостающие условия естественно формулировать в концевых точках отрезка $x = a_1$. Однако в каждой из этих точек можно записать по два условия, и вопрос о том, какие два из четырех условий выбрать, имеет неоднозначное решение. Чтобы избежать подобной ситуации, за систему разрешающих уравнений в этом случае примем систему (А), дополненную дважды продифференцированным по η уравнением (12). Число граничных условий для такой системы должно равняться $8N + 12$. В качестве этих условий примем условия (Б), к которым добавлены четыре условия в концевых точках линии контакта $x = a_1$. Такой подход делает постановку краевой задачи для указанной системы разрешающих уравнений математически корректной.

Построенные указанным выше способом краевые задачи решаются численно. Для этого система уравнений, входящая в краевую задачу, разрешается относительно старших производных от искомых функций. Возможность этой процедуры обеспечивается соответствующим выбором параметра t, определяющего взаимное расположение узлов ξ_i и точек коллокации ξ_i^* $\left(i = \overline{0, N}\right)$. Полученной системе ставится в соответствие эквивалентная система дифференциальных уравнений первого порядка, записанная в нормальной форме Коши. В общем случае эта система в векторной форме имеет вид

$$\frac{d\,Z}{d\,\eta} = S\overline{Z}(\eta) + \overline{R}(\eta). \tag{24}$$

Здесь $S = \{s_{p,q}\}$ и $\overline{R} = \{r_p(\eta)\}$ — известные квадратная матрица и вектор соответствующей размерности, $\overline{Z}(\eta)$ — вектор неизвестных, компонентами которого являются неизвестные функции в разложениях функций $W^{(k)}(\xi, \eta)$ и их производные. Например, если $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = 0$, а при $x = 0$ имеют место условия (14) или (15), (16) и им подобные при $x = a$, то

$$\overline{Z}(\eta) = \left(\Phi_i, \Psi_i, \frac{d\,\Phi_i}{d\,\eta}, \frac{d\,\Psi_i}{d\,\eta}, \frac{d^2\,\Phi_i}{d\,\eta^2}, \frac{d^2\,\Psi_i}{d\,\eta^2}, \frac{d^3\,\Phi_i}{d\,\eta^3}, \frac{d^3\,\Psi_i}{d\,\eta^3}\right) \quad \left(i = \overline{0, N}\right),$$

при $\tilde{d}_1 = 0$, $\tilde{d}_2 \neq 0$ или $\tilde{d}_1 \neq 0$, $\tilde{d}_2 = 0$ и условиях типа (17) на обеих вертикальных сторонах пластинки

$$\overline{Z}(\eta) = \left(\Phi_i, \Psi_i, \frac{d\,\Phi_i}{d\,\eta}, \frac{d\,\Psi_i}{d\,\eta}, \frac{d^2\,\Phi_i}{d\,\eta^2}, \frac{d^2\,\Psi_i}{d\,\eta^2}, \frac{d^3\,\Phi_i}{d\,\eta^3}, \frac{d^3\,\Psi_i}{d\,\eta^3}, U_1, \frac{d\,U_1}{d\,\eta}, \frac{d^2\,U_1}{d\,\eta^2}, \right.$$
$$\left. \frac{d^3\,U_1}{d\,\eta^3}, \Phi_{N+k}, \frac{d\,\Phi_{N+k}}{d\,\eta}, \Psi_{N+k}, \frac{d\,\Psi_{N+k}}{d\,\eta}\right) \qquad \left(i = \overline{0, N};\ k = 1, 2\right);$$

при $\tilde{d}_1 \neq 0$, $\tilde{d}_2 \neq 0$ и условиях (17) на левой и типа (14) на правой стороне

$$\overline{Z}(\eta) = \left(\Phi_i, \Psi_i, \frac{d\,\Phi_i}{d\,\eta}, \frac{d\,\Psi_i}{d\,\eta}, \frac{d^2\,\Phi_i}{d\,\eta^2}, \frac{d^2\,\Psi_i}{d\,\eta^2}, \frac{d^3\,\Phi_i}{d\,\eta^3}, \frac{d^3\,\Psi_i}{d\,\eta^3}, U_k, \frac{d\,U_k}{d\,\eta}, \Phi_{N+k}, \frac{d\,\Phi_{N+k}}{d\,\eta}\right) \quad (i = \overline{0, N}; k = 1, 2).$$

Граничные условия для вектора $\overline{Z}(\eta)$, построенного указанным выше способом, получаются из граничных условий на сторонах $\eta = 0$ и $\eta = 1$ и всегда могут быть представлены в виде

$$H_1\overline{Z}(0) = \overline{e}_1; \quad H_2\overline{Z}(1) = \overline{e}_2; \tag{25}$$

где прямоугольные матрицы H_1 и H_2 размерности $L/2 \times L$ и L-мерные векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ (L — размерность вектора $\overline{Z}$) имеют известные компоненты.

Краевая задача (24), (25) решается численно методом дискретной ортогонализации, который, как показывают решения многочисленных тестовых задач, обеспечивает получение практически точных результатов.

Примеры применения изложенного подхода для решения конкретных задач будут приведены в последующих публикациях.

В заключение отметим, что указанная методика без каких-либо принципиальных затруднений распространяется на случаи колебаний составных изотропных пластинок и аналогичные задачи для составных пластинок из ортотропного материала.

Библиографический список

1. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1975. 575 с.

2. *Недорезов П.Ф., Шевцова Ю.В., Ромакина О.М.* Модифицированный метод сплайн-коллокации в задачах изгиба прямоугольных пластинок // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. Второй Всерос. науч. конф. Самара: Самарск. техн. ун-та, 2005. Ч.1. С. 203–209.

3. *Завьялов Ю.С., Квасов Ю.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.95

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ВОССТАНОВЛЕНИЮ ПОВЕДЕНИЯ КОНЕЧНОГО АВТОМАТА С ЗАЦИКЛИВАНИЕМ ИЗМЕНЕНИЙ СОСТОЯНИЙ

О.С. Ермошина

Саратовский государственный социально-экономический университет,
кафедра теоретических основ информатики и информационных технологий
E-mail: ermoshinaos@list.ru

В работе рассматривается один из возможных подходов к решению задачи восстановления поведения конечного детерминированного автомата на основе знаний о текущем (неисправном) и заданном (исправном) законах функционирования с помощью периодических последовательностей. Для анализа поведения автомата в режиме зацикливания построена модель зацикливания автомата.

About One Approach to the Reconstruction of Behavior of Finite Automaton with Circularity of the Change of States

O.S. Ermoshina

The article deals with one of the possible approaches to the problem of reconstruction of determined finite automaton behavior, based on the information about the current (defective) and specified (correct) laws of functioning with the help of periodic sequences. A model of finite automaton circularity was built for the purpose of analyzing the behavior of a finite automaton in a circularity mode.

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

Рассматривается один из возможных подходов к решению задачи восстановления поведения конечного детерминированного автомата на основе знаний о текущем и заданном законах функционирования с помощью периодических последовательностей. Для анализа поведения автомата в режиме зацикливания строится модель зацикливания автомата. Эффективность эксплуатации современных дискретных систем в значительной мере зависит от их способности амортизировать возникающие в процессе работы нарушения. Быстрое и достоверное обнаружение неисправностей, устранение их последствий в максимально короткие сроки и с наименьшими затратами оптимизирует работоспособность технических объектов, что в конечном итоге эквивалентно наличию дополнительных аппаратурно-програмных ресурсов. Организация восстановления поведения сложных систем является комплексной проблемой, в решение которой входят:

- обеспечение восстанавливаемости поведения будущего объекта на этапе его проектирования;
- внедрение самодиагностирования и самовосстановления в процесс функционирования;
- применение спектра восстановительных процедур и приемов физического устранения последствий возникшего дефекта, его амортизации или маскирования, опирающихся на привлечение структурного (аппаратурного), функционального, временного, информационного резервирования;
- обоснование распределения исходной задачи между различными видами, формами и средствами восстановления.

© О.С. Ермошина, 2008

Современному состоянию общей теории восстановления характерно использование для амортизации неисправностей двух основных типов избыточностей технических систем: структурной (аппаратурной) и временной. В первом случае для устранения последствий возникших нарушений в состав (структуру) технического объекта вводятся дополнительные резервные модули. При выходе из строя основной части схемы на существующий структурный резерв возлагается задача реализации заданного исправного поведения. Во втором — имеющийся в данный конкретный момент или искусственно создаваемый резерв времени (временная избыточность) используется либо для организации «повторного счета», либо для повторного запуска логической операции, измененной в результате неисправности и т.д.

Выход из строя (или отсутствие в силу сложностных, ценностных и прочих ограничений) аппаратурного резервирования порождает вопрос: «Можно ли использовать свойства текущего (в условиях существования неисправностей) закона функционирования технической системы для формирования на ее выходах требуемой совокупности правильных исправных реакций?» Ответ на него предполагает изучение имевшейся в данный момент времени функциональной избыточности технической системы, а также возможных вариантов ее целенаправленного создания на этапе проектирования. Восстановление поведения технических объектов, осуществляемое на указанных принципах, назовем функциональным. Функциональное восстановление дополняет перечисленные выше традиционные концепции восстановления. Решение задачи функционального восстановления позволяет обоснованно ответить на вопрос о возможности дальнейшей эксплуатации технических систем после возникновения и обнаружения неисправностей в условиях, когда невозможно (нецелесообразно) немедленно провести ремонт дефекта или отсутствует (вышло из строя) аппаратурное резервирование. Разработка и реализация данного подхода и составляет круг исследований, представленных в данной статье, об актуальности которых говорят сделанные выше замечания.

В общем случае, как показано в работе [1], задача восстановления поведения конечного автомата алгоритмически неразрешима.

Теорема 1. *Задача построения математической модели средств (систем) самовосстановления относительно произвольного класса неисправностей алгоритмически неразрешима.*

Эта теорема имеет большое прикладное значение, так как из нее следует важный вывод: исследование задачи восстановления поведения возможно только в рамках построения решения для частных классов объектов. Существуют различные способы выделения классов автоматов, разрешимых относительно задачи восстановления. Рассмотрим восстановление поведения автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ относительно класса возможных неисправностей I. Каждой неисправности $i \in I$ сопоставим конечный автомат A_i – автомат A при неисправности i. Предполагается, что мы знаем законы функционирования каждого автомата из семейства $\{A_i\}$, $i \in I$. Путем сравнивания таблиц переходов и выходов (графов переходов) автомата A и автомата A_i определяем множество неисправных входных сигналов $X_{0i} \in X$. Необходимо найти такие восстанавливающие последовательности для «неисправных» входных сигналов x, после приложения которых мы получали бы требуемый «исправный» выходной сигнал y, вне зависимости от того состояния, в котором находится автомат. В итоге приложение к «исправному» автомату входного сигнала x должно быть равносильно приложению к «неисправному» автомату входной последовательности $p = x_1x_2 \ldots x_k$, причем «исправный» выходной сигнал y появится последним в цепочке $y_1y_2 \ldots y$, где $y_1 = \lambda^{'}(s, x_1), y_2 = \lambda^{'}(\delta^{'}(s),\ x_2), \ldots, y = \lambda^{'}(s, p)$ при любом текущем состоянии s. При этом структура переходов «неисправного» автомата под воздействием слова p должна быть такой же, как и для «исправного» автомата при приложении сигнала x.

Если в качестве восстанавливающих выбирать периодические последовательности, то возможно сокращение количества анализируемой информации до сравнения режимов функционирования «исправного» и «неисправного» автоматов на циклах.

Если на вход конечного детерминированного автомата подавать периодическую последовательность, то выходная последовательность, начиная с некоторого символа, становится также периодической. При этом переходы состояний автомата будут определяться перемещением по циклу. Метод периодических последовательностей впервые был применен для решения задачи распознавания автомата в работе А.М. Богомолова и В.А. Твердохлебова [2]. В этой работе (теорема 23) показана общая структура процесса функционирования конечного детерминированного автомата под воздей-

ствиями периодических последовательностей. Здесь же приводится пример исключения из анализа вершин, не входящих в циклы, порождаемых приложением периодических последовательностей. При этом переходы состояний автомата будут определяться перемещением по циклу. Обычный граф автомата удобно заменить графом зацикливания автомата по входной периодической последовательности с периодом p. В вышеуказанной работе этот граф определяется следующим образом:

$$GA(p) = (S, \varphi), (s, s^{'}) \square \varphi \square \delta(s, p) = s^{'}.$$

Имеет место следующая теорема [2].

Теорема 2. *Для любого конечного автомата A и входного слова p:*

- граф $G_A(p)$ состоит из конечного числа связных изолированных подграфов;

- каждый связный изолированный подграф содержит один и только один элементарный цикл с точностью до циклического сдвига последовательности вершин;

- каждая вершина может быть корнем дерева, причем из вершин дерева существуют пути только к корню.

Восстановление поведения конечного автомата именно с помощью периодических восстанавливающих последовательностей накладывает определенные ограничения на класс объектов, для которых он применим.

Будем считать, что слово p прикладывается к автомату как минимум такое число раз, что из любого состояния автомата происходит переход в одно из состояний цикла. Тогда очевидным является следующее замечание.

Замечание 1. С помощью периодических входных последовательностей можно восстановить только такие входные сигналы автомата, приложение которых переводит любое состояние автомата в одно из состояний какого-либо цикла, т.е. наибольшая длина пути в цикл должна равняться 1.

Искать решение задачи восстановления в виде периодических последовательностей целесообразно в том случае, когда мы хотим получить заданные выходные реакции автомата на некотором подмножестве множества состояний $S' \in S$, где S' — множество вершин циклов графа зацикливания автомата по входной периодической последовательности. Это имеет смысл в случае большого числа состояний автомата. Такой прием позволит сократить количество анализируемой информации и исключить из рассмотрения реакции автоматов (реализующих заданное и текущее поведение), выдаваемые под воздействием входного сигнала x и восстанавливающей периодической последовательности соответственно для состояний, не принадлежащих циклам. Следовательно, с помощью периодической последовательности предполагается перевести автомат из любого текущего состояния в состояние, принадлежащее одному из циклов графа зацикливания, а далее определять, является ли данная периодическая последовательность восстанавливающей для состояний цикла либо в общем случае нужно найти другую последовательность входных сигналов, которая будет восстанавливающей для состояний цикла.

Для анализа поведения автомата на циклах необходимо более детально рассмотреть функционирование системы под воздействием периодических последовательностей и построить математическую модель процесса зацикливания, опираясь на приведенную выше теорему о структуре графа зацикливания.

Рассмотрим конечный детерминированный автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где S — множество состояний автомата, X — множество входных сигналов, Y — множество выходных сигналов, с функциями переходов и выходов δ, λ. Выделим во множестве вариантов функционирования автомата режимы зацикливания автомата под воздействием различных периодических последовательностей с периодами $p_1, p_2, \ldots$, где p_i — слово в алфавите X^*. Для каждого слова p_i построим граф зацикливания автомата.

Согласно теореме 2 граф $GA(p_i)$ имеет конечное число изолированных связных подграфов $G_A^1(p_i), G_A^2(p_i), \ldots, G_A^j(p_i), G_A^n(p_i)$ $(1 < j < n)$, каждый из которых имеет один цикл, или петлю $C_A^j(p_i)$. Теперь необходимо определить, какое минимальное количество раз нужно приложить входное слово p_i, чтобы из любого состояния s автомата A был достигнут и пройден, по крайней мере, один раз соответствующий цикл $C_A^j(p_i)$. Наибольшую длину пути из висячей вершины графа $G_A^j(p_i)$

до ближайшей вершины цикла $C_A^j(p_i)$ обозначим m_{1i}^j, длину цикла $C_A^j(p_i)$ — m_{2i}^j. Тогда для любой вершины $s \in S$ (то есть любого состояния автомата) входное слово $p_i^{m_i}$, где $m_i = \max\limits_{1<j<n} m_{1i}^j + \max\limits_{1<j<n} m_{2i}^j$ переводит состояние s в состояние $\delta(s, p_i^{m_i}) \in \{C_{p_i}^j\}$ и при этом совершается обход цикла из $C_{p_i}^j$, по крайней мере, один раз.

Построим математическую модель зацикливания. Множество $W = \{p_1^{m_1}, p_2^{m_2}, \ldots, p_n^{m_n}\}$ входных слов, построенных для графов $G_{p_1}, G_{p_2}, \ldots, G_{p_n}$, полагаем множеством входных сигналов конструируемого автомата Ω. Выходное слово определим как проекцию слова $\lambda(\delta(s, p^{m_1}), p^{m_2})$. В общем случае будем анализировать только некоторые выходные сигналы автомата при изменении состояний в цикле, т.е. будем рассматривать

$$\mathrm{pr}_{i,i_2,\ldots,i_k} \lambda(\delta(s, p^{m_1}), p^{m_2}),$$

где $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le |p^{m_2}|$ и $1 \le k \le |p^{m_2}|$. Определим функции $\tilde{\delta}, \tilde{\lambda}$, автомата Ω. Рассмотрим входное слово p_i. Граф зацикливания по этому входному слову имеет n_i изолированных связных подграфов $G_{p_i}^j$ с циклами $C_{p_i}^j$, $1 \le j \le n_i$. Введем отношение эквивалентности на множестве состояний S. Для этого множеству $\{G_{p_i}^j\} = \{s_{p_i}^{j1}, s_{p_i}^{j2}, \ldots, s_{p_i}^{jk}, \ldots\}$, где $1 \le k \le m_{2_i}^j$, вершин цикла $C_{p_i}^j$ графа $G_{p_i}^j$ взаимно-однозначно сопоставим классы эквивалентных состояний $\{u_{p_i}^{j1}, u_{p_i}^{j2}, \ldots, u_{p_i}^{jm_{2i}^j}\}$, где $u_{p_i}^{jk}$ класс соответствует состоянию $s_{p_i}^{jk}$.

Полагаем

$$u_{p_i}^{jk} = \{s : \ \delta(s, p_i^{m_i}) = s_{p_i}^{jk}.$$

Множество состояний $u_{p_i}^{jk}$ образовано $p_i^{m_i}$ — преемниками состояний из множества $\{G_{p_i}^j\}$. Очевидно, что $\{u_{p_i}^{j1}, u_{p_i}^{j2}, \ldots, u_{p_i}^{jm_{2_i}^j}\}$ является разбиением множества $G_{p_i}^j$.

Определим функцию Ψ_i^1:

$$\Psi_i^1 = \bigcup_{1 \le j \le n_i} \bigcup_{1 \le k \le m_{2_i}^j} u_{p_i}^{jk} \times \{p_i^{m_i}\} \to \{C_{p_i}\}.$$

Эта функция сопоставляет каждому состоянию, являющемуся вершиной графа G_{p_i}, его $p_i^{m_i}$ — преемник. Приложение к автомату A, находящемуся в состоянии s, где $s \in \{G_{p_i}\}$, входной последовательности $p_i^{m_i}$ определяет выходную последовательность $q = \lambda(s, p_i^{m_i})$ с некоторым принимаемым расширением функции $\lambda : S \times X \to Y$ до функции вида $\lambda : S \times X^* \to Y^*$. Наиболее распространены следующие два способа расширения функции $\lambda : S \times X \to Y$:

1. $(\forall\ p \in X^*)(\forall\ x \in X)(\forall\ s \in S)\{\lambda(s, xp) = \lambda(s, x)\lambda(\delta(s, x), p)\}$.
2. $(\forall\ p \in X^*)(\forall\ x \in X)(\forall\ s \in S)\{\lambda(s, px) = \lambda(s, x)\lambda(\delta(s, p), x)\}$.

Определим функцию выходов автомата Ω — Ψ^2 по правилу: для любого $s \in S$ и некоторого выбранного целого положительного числа ν

$$\Psi^2(s, p_i^{m_i}) = \mathrm{pr}_\nu \lambda(s, p_i^{m_i - a}) \mathrm{pr}_\nu \lambda(\delta(s, pi^{m_i - a}), p_i^{m_i - a + 1}) \ldots \mathrm{pr}_\nu \lambda(\delta(s, p_i^{m_i - 1}), p^{m_i}).$$

Теперь можно полностью определить правило построения автомата Ω:

1. Для автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ строятся графы $G_{p_1}, G_{p_2}, \ldots, G_{p_p}$. Для каждого графа G_{p_i}, $1 \le i \le r$, определяются числа m_{1i}^j, m_{2i}^j и $m_i = \max\limits_{1<j<n} m_{1i}^j + \max\limits_{1<j<n} m_{2i}^j$.

2. Множество S состояний автомата A полагаем множеством состояний определяемого автомата.

3. Множество входных слов $\{p_1^{m_1}, p_2^{m_2}, \ldots, p_r n^{m_r}\}$, где $m_i = \max\limits_{1<j<n} m_{1i}^j + \max\limits_{1<j<n} m_{2i}^j$, автомата A полагаем множеством входных сигналов автомата Ω.

4. Пусть Ψ_i^1, $1 \le i \le r$ функции, соответствующие множеству периодических входных последовательностей $\{p_1^{m_1}, p_2^{m_2}, \ldots, p_r^{m_r}\}$. Функцию $\Psi^1 = \bigcup_{1 \le i \le r} \Psi_i^1$ полагаем функцией переходов определяемого автомата.

5. Пусть $\Psi^2 = \bigcup_{1 \le i \le r} \Psi_i^2$ для каждого i, $1 \le i \le r$, и определенной ранее функции Ψ_i^2. Функцию полагаем функцией выходов определяемого автомата.

6. Область значений функции Ψ^2 полагаем множеством выходных сигналов, определяемого автомата.

Определение. Конечный детерминированный автомат, определяемый пунктами 1–6 для автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, будем называть *моделью функционирования автомата* A *под воздействием входных последовательностей* $\{p_1^{m_1}, p_2^{m_2}, \ldots, p_r^{m_r}\}$ и обозначать $\Omega(A, p_i^{m_i}, 1 \le i \le r, v)$.

Предположим, что реакцией автомата на внешнее воздействие является пометка текущего состояния. Пусть также для всех входных сигналов выполняется условие, рассмотренное в замечании 1. Построенная модель функционирования автомата под воздействием периодических последовательностей позволяет заменить как «исправный» так и «неисправный» автомат их моделями зацикливания. В качестве входных сигналов для модели зацикливания исправного автомата нужно тогда рассматривать периодические последовательности с периодом x, где x — любой сигнал из множества входных сигналов X, а для неисправного автомата различные слова $\{p_1^{m_1}, p_2^{m_2}, \ldots, p_r^{m_r}\}$. Тогда по выходной реакции этих автоматов можно судить о совпадении поведений автоматов на циклах.

Теорема 3. *Пусть* $A_1 = (S, X, Y, \delta_1, \lambda_1)$ *— конечный детерминированный автомат, соответствующий поведению автомата до возникновения неисправности* $A_2 = (S, X, Y, \delta_2, \lambda_2)$ *— конечный детерминированный автомат, соответствующий поведению автомата после возникновения неисправности и* $\Omega_1(A, x_j^{m_j}, 1 \le j \le n)$ *и* $\Omega_2(A, p_i^{m_i}, 1 \le i \le r)$ *— модели зацикливания этих автоматов. Тогда любое решение* $p \in \{p_i^{m_i}, 1 \le i \le r\}$ *задачи восстановления, построенные для автоматов* Ω_1 *и* Ω_2*, является решением задачи восстановления для автоматов* A_1 *и* A_2.

Конкретный вид периодических последовательностей (набор периодов p_i) предполагается выбирать на основе свойств функций переходов и выходов, задающих поведение автомата до и после возникновения неисправности. При этом рассматривается структурный автомат, состоящий из комбинационной части и памяти. Комбинационная часть автомата задается набором функций алгебры логики.

Библиографический список

1. *Сытник А.А.* Восстановление поведения сложных систем. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1992.

2. *Богомолов А.М., Твердохлебов В.А.* Диагностика сложных систем. Киев: Наук. думка, 1974.

УДК 519.7

УСЛОВИЯ РЕАЛИЗУЕМОСТИ ФУНКЦИЙ НА ПОЛУРЕШЁТКАХ УСТОЙЧИВЫМИ К СОСТЯЗАНИЯМ СХЕМАМИ

И.А. Панкратова

Томский государственный университет,
кафедра защиты информации и криптографии
E-mail: pank@isc.tsu.ru

В статье рассматриваются схемы, реализующие функции на полурешётках. Даётся определение функциональной устойчивости таких схем к состязаниям, формулируются условия реализуемости функций на полурешётках функционально устойчивыми схемами в произвольном базисе и в любых RS (от Resistor, Switch)-базисах.

Conditions for Functions on Semilattices to be Realized by Networks with Stable Behaviour under Hazards

I.A. Pankratova

The notion of functional stability under hazards is introduced for networks realizing functions defined on finite upper semilattices. Some constructive conditions are established for such functions to be realized by stable networks composed of any elements or of transistors and switches.

ВВЕДЕНИЕ

Задача реализации функций на полурешётках возникает в связи с проблемой синтеза схем с заданным динамическим поведением [1]. Традиционно поведение комбинационной схемы задаётся в статике, как отображение входных состояний в выходные. Но входные состояния — это векторы, в асинхронных схемах их компоненты меняются в произвольном порядке, и эти изменения с разными скоростями распространяются по элементам и соединениям в схеме. Изменения, которые происходят при этом на выходах схемы, составляют суть динамического поведения. Статическое поведение схем описывается функциями конечно-значной логики; для описания динамического поведения этих средств недостаточно, применяются более сложные математические модели.

© И.А. Панкратова, 2008

Исторически первый и наиболее распространенный способ описания динамического поведения схем — описание через понятие состязаний. Неформально состязание заключается в более чем однократном изменении состояния выхода схемы при однократном изменении входного состояния (см., например, [2–5]). В статьях [6, 7] приводятся строгие определения состязаний, ставятся и решаются задачи синтеза свободной от состязаний на заданном множестве переходов схемы.

В 1993 году Г.П. Агибаловым предложено динамическое поведение схем описывать с помощью функций на полурешётках [1]. Для этого множество состояний схемы представляется как конечная верхняя полурешётка, где сумма состояний $a+b$ моделирует промежуточное состояние, возникающее в процессе асинхронного изменения a на b. Задача синтеза дискретного устройства с заданным динамическим поведением сводится к синтезу в некотором базисе схемы, реализующей на полурешётках функцию, описывающую это поведение.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Конечной верхней полурешёткой (далее просто полурешёткой) называется конечное частично упорядоченное множество, в котором каждая пара элементов x, y имеет точную верхнюю грань $sup\{x,\ y\}$, называемую суммой элементов x и y: $x+y\ = sup\{x,y\}$. Не для всякого подмножества A элементов полурешётки существует нижняя грань; если всё же она существует, то будем обозначать через $infA$ наибольшую из нижних граней (точную нижнюю грань) элементов множества A. *Точками полурешётки* будем называть минимальные по заданному на полурешётке отношению порядка элементы. Будем обозначать через $m(L)$ множество точек полурешётки L и через $m(a)$ — множество точек, содержащихся в элементе $a \in L$: $m(a) = \{t \in m(L) : t \leq a\}$, где $\leq$ — отношение порядка на полурешётке L.

Пусть L — произвольная полурешётка. n-местной *функцией на полурешётке* L называется отображение вида $f : L^n \to L$. Будем рассматривать также частичные функции $f : U_f \to L$, где $U_f \subset L^n$ — область определения функции f. Говорят, что *функция g реализует функцию f*, и пишут $g \leq f$, если $U_f \subseteq U_g$ и $g(a) \leq f(a)$ для любого $a \in U_f$. Функция на полурешётке L называется *монотонной*, если она сохраняет отношение порядка на L. Бинарное отношение $\Gamma \subseteq M \times L$ на полурешётках M, L называется *квазимонотонным*, если оно реализуется монотонной функцией, т. е. если для некоторой монотонной функции $g : M \to L$ верно следующее: $(a, b) \in \Gamma \Rightarrow g(a) \leq b$.

Будем рассматривать одновыходные комбинационные схемы, состояния узлов которых принимают значения в некоторой полурешётке L. Их динамическое поведение описывается функцией $f : L^n \to L$, где n — количество входных полюсов схемы. Функции на полурешётках реальных физических элементов монотонны, и суперпозиция монотонных функций есть функция монотонная, следовательно, функции схем монотонны. Схема с функцией f_C *реализует функцию на полурешётке* f (является её *реализацией*), если $f_C \leq f$. Функция, реализуемая схемой в некотором базисе, называется *реализуемой в этом базисе*.

Пусть даны полурешётка L, комбинационная схема C с функцией $f_C : L^n \to L$ и *переход* $(a, b) \in (L^n)^2$. В силу монотонности f_C имеем $f_C(a) + f_C(b) \leq f_C(a + b)$. Будем говорить, что *схема C функционально устойчива к состязанию на переходе* (a, b), если имеет место равенство $f_C(a + b) = f_C(a) + f_C(b)$. Содержательно это означает, что при любом распределении задержек элементов и любом порядке изменения компонент входного состояния выход схемы останется в пределах (не превзойдёт) минимально возможного значения $f_C(a)+f_C(b)$ в процессе изменения входного состояния с a на b.

Множество переходов $T \subseteq (L^n)^2$ назовём *совместимым для функции* f, если существует монотонная функция g такая, что $g \leq f$ и $g(a + b) \leq f(a) + f(b)$ для любого $(a, b) \in T$. Из определения следует, что невозможно обеспечить устойчивость схемы, реализующей f, к состязаниям на всех переходах из множества T одновременно, если T несовместимо для функции f.

2. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗУЕМОСТИ ФУНКЦИЙ НА ПОЛУРЕШЁТКАХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-УСТОЙЧИВЫМИ СХЕМАМИ В ПРОИЗВОЛЬНОМ БАЗИСЕ

Рассмотрим следующую ситуацию. Предположим, что функция f реализована некоторой схемой C, функционально неустойчивой к состязанию на переходе (a, b), т. е. имеет место строгое неравенство

$f_C(a)+f_C(b) < f_C(a+b)$, где f_C — функция схемы C. Вместе с тем, ввиду $f_C(a)+f_C(b) \le f(a)+f(b)$ возможно выполнение условия $f_C(a+b) \le f(a)+f(b)$, т. е. выходной сигнал схемы ни при каком распределении задержек не выходит за пределы предполагаемого значения $f(a)+f(b)$ при изменении входного состояния с a на b. Такое состязание в схеме считается несущественным для данной функции f. Будем называть схему C *f-устойчивой к состязанию на переходе* (a,b), если $f_C(a+b) \le f(a)+f(b)$. Заметим, что если функция f принимает только точечные значения, то все состязания в схеме C являются существенными, так как в этом случае ввиду $f_C(a) = f(a)$ и $f_C(b) = f(b)$ невозможна цепочка неравенств $f_C(a)+f_C(b) < f_C(a+b) \le f(a)+f(b)$.

Сформулируем условия реализуемости произвольной функции $f : U_f \to L$, где $U_f \subseteq L^n$, схемой в заданном базисе, f-устойчивой к состязаниям на всех переходах из заданного множества T. Для этого построим отношение $\Omega_{f,T} \subseteq L^n \times L$ следующим образом: $\Omega_{f,T} = \{(x, f(x)) : x \in U_f\} \cup \{(a+b, f(a)+f(b)) : (a,b) \in T\}$. (В общем случае это действительно отношение, а не функция, ввиду возможности равенства $a+b = c+d$ при $(a,b) \ne (c,d)$). Из определения совместимого множества переходов следует, что множество T совместимо для функции f, если и только если отношение $\Omega_{f,T}$ квазимонотонно. В этом случае по тесту квазимонотонности [1] для любого $(a,b) \in T$ существует нижняя грань множества $F_{ab} = \{f(c)+f(d) : (c,d) \in T \,\&\, c+d = a+b\}$, и можно построить расширение f_T функции f на множество $U_f \cup \{a+b : (a,b) \in T\}$, положив $f_T(a+b) = inf F_{ab}$.

Теорема 1. *Функция f реализуема в базисе B схемой, f-устойчивой к состязаниям на всех переходах из совместимого для f множества T, если и только если в базисе B реализуема функция f_T. В этом случае любая реализация f_T реализует f и является f-устойчивой к состязаниям на всех переходах из T.*

Доказательство. Достаточность проверяется непосредственно.

Необходимость. Пусть некоторая схема C в базисе B реализует f и f-устойчива к состязаниям на всех переходах из T. Тогда для её функции f_C выполняется: $f_C(x) \le f(x) = f_T(x)$ для любого $x \in U_f$ и $f_C(a+b) \le f(a)+f(b)$ для любого $(a,b) \in T$. Рассмотрим произвольный переход $(a,b) \in T$ и любой переход $(c,d) \in T$ такой, что $a+b = c+d$. Имеем: $f_C(a+b) = f_C(c+d) \le f(c)+f(d)$, что по определению F_{ab} и в силу произвольности выбора (c,d) равносильно условию $f_C(a+b) \le inf\ F_{ab} = f_T(a+b)$. Следовательно, $f_C \le f_T$. Теорема доказана.

Таким образом, установлено, что задача реализации функции на полурешётках функционально-устойчивой схемой есть задача реализации надлежащего расширения исходной функции. К сожалению, реально используемые при проектировании современных схем базисы не обладают полнотой в классе функций на полурешётках. В следующем разделе доказываются конструктивные (в отличие от теоремы 1) условия реализуемости функций на полурешётках функционально устойчивыми схемами для некоторых реальных базисов.

3. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗУЕМОСТИ ФУНКЦИЙ НА ПОЛУРЕШЁТКАХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-УСТОЙЧИВЫМИ СХЕМАМИ В RS-БАЗИСЕ

При проектировании реальных схем чаще всего используется элементный RS-базис, состоящий из элементов двух типов — резистора, представляющего собой двухполюсник с постоянной конечной проводимостью (обозначаемой X) между полюсами, и переключателей, являющихся многополюсниками, в которых проводимости между полюсами принимают значения в полурешётке $\widetilde{P_2}$ всех непустых подмножеств множества $\{0,1\}$ и являются функциями от состояний полюсов элемента. Проводимости цепей схемы в RS-базисе принимают значения в полурешётке проводимостей $\widetilde{P_3} = \{0,1,\mathrm{X},0',1',\mathrm{X}',\mathrm{E}\}$ — верхней полурешётке всех непустых подмножеств множества $P_3 = \{0,1,\mathrm{X}\}$. Здесь $0 = \{0\}$, $1 = \{1\}$, $\mathrm{X} = \{\mathrm{X}\}$ (эти значения являются точками полурешётки), $0' = \{1,\mathrm{X}\}$, $1' = \{0,\mathrm{X}\}$, $\mathrm{X}' = \{0,1\}$, $\mathrm{E} = \{0,1,\mathrm{X}\}$. Неточечные элементы этой полурешётки можно интерпретировать двояко: как значение проводимости в процессе её изменения или как в подходящей степени неопределённое значение. *Состояние* узла схемы определяется парой проводимостей от этого узла до полюсов источника питания и принимает значение в *полурешётке состояний* $(\widetilde{P_3})^2$.

Введём в рассмотрение бинарное отношение γ на $\widetilde{P_3}$ как

$$\overline{\gamma} = \{(1,0),(1,\mathrm{X}),(1,1'),(\mathrm{X},0),(0',0)\}$$

и распространим его покомпонентно на векторы с компонентами в $\widetilde{P_3}$, в том числе на элементы полурешётки состояний. Пусть далее для элементного базиса B через x_B обозначается вектор значений функций всех элементов из B на их аргументе x.

Теорема 2. *Пусть множество переходов T совместимо для функции f и RS-базис B содержит элемент, не сохраняющий отношения γ. Тогда f реализуется функционально устойчивой к состязаниям на всех переходах из множества T схемой в базисе B, если и только если для любого $y \in M = \bigcup_{x \in U_{f_T}} m(x_B)$ существует нижняя грань множества $T_y = \{f_T(x) : x \in U_{f_T} \,\&\, y \in m(x_B)\}$.*

Доказательство. По теореме 1 доказываемое утверждение равносильно реализуемости в базисе B расширения f_T. В свою очередь, в условиях теоремы необходимым и достаточным условием реализуемости f_T в базисе B является квазимонотонность отношения $\Gamma_{f_t,B}$, которое содержит пары $(x_B, f_T(x))$ для всех $x \in U_{f_T}$ [8, теорема 3]. Пусть отношение $\Gamma_{f_t,B}$ квазимонотонно. Тогда поскольку для любого $y \in M$ существует нижняя грань множества $\{x_B : y \in m(x_B)\}$ (например, y), то по тесту квазимонотонности [1] существует и нижняя грань множества T_y. Необходимость доказана.

Достаточность. Построим функцию $h : M \to L$, положив $h(y) = inf\ T_y$ для каждого $y \in M$, и ее расширение g по правилу точечного продолжения [1]: $g(a) = \sum_{t \in m(a)} g(t)$. Согласно [1, теорема 3.2], функция g является монотонной. Рассмотрим произвольное значение $x \in U_{f_T}$. Имеем: $g(x_B) = \sum_{y \in m(x_B)} g(y) = \sum_{y \in m(x_B)} h(y) \le f_T(x)$, что означает $g \le \Gamma_{f_t,B}$. Следовательно, отношение $\Gamma_{f_t,B}$ квазимонотонно, и f_T реализуется в базисе B. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Агибалов Г.П.* Дискретные автоматы на полурешетках. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1993.
2. *Eichelberger E.B.* Hazard Detection in Combinational and Sequential Switching Circuits // IBM Journal of Research and Development. 1965. V. 9, № 2. P. 90–99.
3. *Миллер Р.* Теория переключательных схем. М.: Наука, 1971. Т. 2.
4. *Яблонский С.В.* Основные понятия кибернетики // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1959. Вып.2. С. 7–38.
5. *Рогинский В.Н.* Основы дискретной автоматики. М.: Связь, 1975.
6. *Чеботарев А.Н.* Риск в асинхронных логических схемах // Кибернетика. 1976. № 4. С. 8–11.
7. *Агибалов Г.П., Комаров Ю.М., Липский В.Б.* Синтез комбинационных схем, свободных от статических состязаний // Автоматика и вычислительная техника. 1979. № 1. С. 1–6.
8. *Панкратова И.А.* Условия реализуемости функций на полурешётке в реальных базисах переключательных элементов // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 3. С. 40–61.

УДК 681.5:51-74

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ВНЕШНЕГО ТЕПЛООБМЕНА ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

В.Н. Ткаченко, А.А. Иванова, О.В. Шуба

Институт прикладной математики и механики НАНУ, Украина
E-mail: tkachenko@iamm.ac.donetsk.ua,
ivanova@iamm.ac.donetsk.ua

Предложены методы и алгоритмы идентификации параметров внешнего теплообмена на основе метода наименьших квадратов. Проведён сравнительный анализ методов идентификации распределенных параметров.

Methods and Algorithms of Identification of External Heat Exchange Parameters for Heat and Mass Tranfer Processes

V.N. Tkachenko, A.A. Ivanova, O.V. Shuba

The methods and algorithms of identification of external heat exchange parameters based on least square method are proposed. The comparative analysis of distributerd parameters identification methods is performed.

© В.Н. Ткаченко, А.А. Иванова, О.В. Шуба, 2008

ВВЕДЕНИЕ

Трудность практического использования математических моделей связана с отсутствием необходимых значений (физических констант или зависимостей) для коэффициентов уравнений модели. В связи с этим возникает задача идентификации параметров модели. Высокие требования к точности моделей вынуждают рассматривать неизвестные величины параметров распределенными в пространстве либо во времени. Одним из примеров может служить процесс тепломассопереноса в слитке, движущемся внутри машины непрерывного литья заготовок (МНЛЗ), математическая модель которого разработана в работе [1].

1. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ТЕПЛООБМЕНА МНЛЗ

Рассмотрим некоторый участок непрерывно движущегося стального слитка в системе координат привязанной к конструкции машины непрерывного литья (рис. 1).

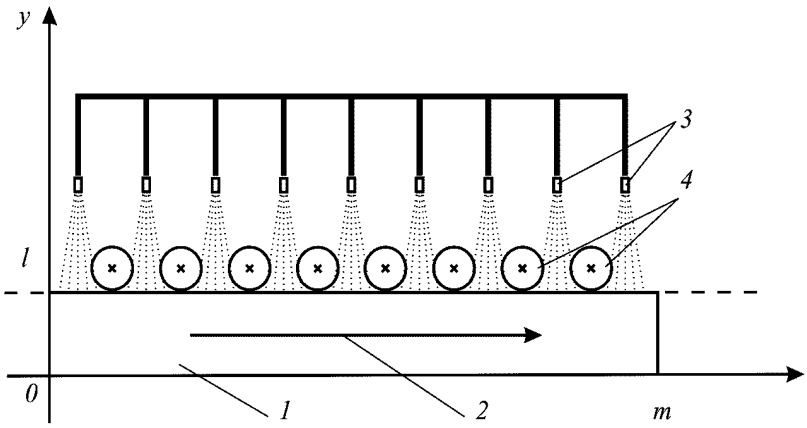


Рис. 1. Участок непрерывного слитка: *1* — слиток, *2* — направление движения слитка, *3* — форсунки, распыляющие охлаждающую водо-воздушную смесь, *4* — опорные и приводные ролики

Уравнение тепломассопереноса для двумерной модели в прямоугольнике $(0,l)\times(0,m)$ выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial T(\tau,x,y)}{\partial\tau}+v(\tau)\frac{\partial T(\tau,x,y)}{\partial x}=\frac{1}{c(T)\rho(T)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right]\right\},$$

где $v(\tau)$ — скорость движения среды, $T(\tau,x,y)$ — температура, $c(T)$ — удельная теплоёмкость, $r(T)$ — плотность, и $l(T)$ — теплопроводность сплошной среды. Заданы начальные условия:

$$T(0,x,y)=T_0(x,y)$$

и граничные условия:

$$\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0,\quad \lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=m}=0,\quad \lambda(T)\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=0}=0,$$

$$\lambda(T)\,\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=l}=\alpha(x)\cdot\left(T_{os}-T|_{y=l}\right). \tag{1}$$

Здесь α(x) — коэффициент конвективной теплоотдачи, T — температура внутри слитка, $\mathrm{T}_{y=l}$ — температура на поверхности слитка, T_{os} — температура окружающей среды.

Требуется определить коэффициент теплоотдачи α(x). В качестве дополнительной информации выступают данные измерений температуры на поверхности слитка.

Такие задачи называются граничными обратными задачами [2,3]. Они являются некорректными в классическом смысле. Чтобы получить представление о степени неустойчивости решения обратной

задачи, воспользуемся методом прямого обращения. Для этого из граничного условия (1) получим выражение для вычисления $\alpha(x)$:

$$\alpha_i = \frac{\lambda(T)\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=l}}{T_{os} - T_{i,N}}.$$

Для применения метода наименьших квадратов примем во внимание следующую информацию. Коэффициент $\alpha(x)$ имеет специальное распределение вдоль поверхности слитка. Известно, что на участке, накрываемом факелом форсунки, его можно приблизить параболической функцией, которая приобретает максимальное значение в точке, соответствующей координате сопла форсунки, а на остальных участках — константой. Будем искать $\alpha(x)$ в виде

$$\alpha(x) = \alpha_c - \frac{A}{h^2}x^2 + A.$$

Величина h определяется полушириной захвата факела форсунки. Следовательно, неизвестными являются всего два параметра — A и α_c.

Рассмотрим сначала участки, на которых $\alpha(x) = \alpha_{\text{c}} = \text{const}$. Обозначим K — множество узлов x_i, в которых мы считаем КТ постоянным. Множество остальных узлов, где КТ распределяется согласно параболическому закону, обозначим B.

После проведения конечно-разностной аппроксимации получаем формулу для невязки тепловых потоков на границе:

$$\delta = \lambda_{i,N}P_{1_i} - \alpha_c P_{2_i},$$

где $P_{1_i} = \lambda_{i,N}\dfrac{T_{i,N} - T_{i,N-1}}{q}$, $P_{2_i} = T_{os} - T_{i,N}$.

Требуется найти такое α_{c}, чтобы сумма квадратов невязок была минимальной, т.е. чтобы выполнялось условие

$$S = \sum_i (P_{1_i} - \alpha_c P_{2_i})^2 \to \min, \qquad \forall\, i:\ x_i \in K.$$

Из необходимого условия существования экстремума $S(\alpha)$ находим α_{c}

$$\alpha_c = \frac{\sum\limits_i P_{2_i}P_{1_i}}{\sum\limits_i P_{2_i}^2}.$$

Каждому узлу x_i из множества B поставим в соответствие точку y_i на отрезке $[-h, h]$ таким образом, чтобы $|y_i|$ равнялось расстоянию от соответствующего x_i до координаты ближайшей форсунки. Аналогичным способом находим

$$A = \frac{\alpha_c \sum\limits_i P_{2_i}^2\left(\dfrac{y_i^2}{h^2} - 1\right) - \sum\limits_i P_{1_i}P_{2_i}\left(\dfrac{y_i^2}{h^2} - 1\right)}{\sum\limits_i P_{2_i}^2\left(\dfrac{y_i^2}{h^2} - 1\right)^2}.$$

Необходимо также отметить, что для определённых при помощи МНК значений α_{c} и A выполняется достаточное условие существования минимума функции S. Легко проверить, что частные производные второго порядка S по каждому их этих параметров строго больше нуля.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Методом наименьших квадратов и методом прямого обращения были проведены численные расчёты. В качестве теплофизических параметров для модели были выбраны данные процесса непрерывной разливки стали (для марки ст 40), ширины сляба 1м, полутолщины сляба l = 0,1м и скорости движения слитка v = 1м/мин. Данные вычислений представлены на рис. 2. Здесь хорошо видно, что решение, полученное методом прямого обращения, является неустойчивым и непригодным для практического использования. Вторая кривая представляет сплайн аппроксимацию, которая является результатом решения той же задачи методом наименьших квадратов.

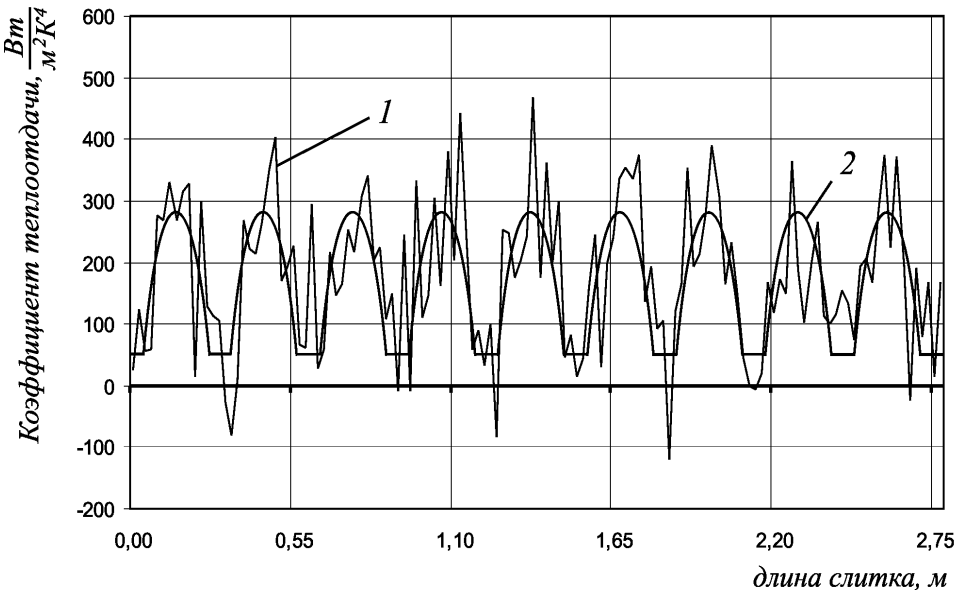


Рис. 2. Результаты определения коэффициента теплоотдачи: *1* — методом прямого обращения, *2* — методом наименьших квадратов

Таким образом, мы нашли сплайн-аппроксимацию распределённого в пространстве коэффициента теплоотдачи на поверхности движущегося слитка, которая даёт нам минимальное среднеквадратичное отклонение между температурой поверхности измеренной и вычисленной по модели в результате решения прямой задачи.

3. МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВА

Метод регуляризации Тихонова позволяет получить устойчивое решение без жестких ограничений на вид функций, описывающих изменение коэффициентов теплообмена по длине зоны теплообмена. Распределение коэффициентов $\alpha(x)$ отыскивается путем минимизации следующего регуляризирующего функционала:

$$I(\alpha\ ) = \int\limits_0^m [T_{\text{расч}}(x\ ) - T_{\text{изм}}(x\ )]^{\,2}\,dx\ + \beta\ \Omega\ [\alpha(x\ )],$$

где $\mathrm{T}_{\text{расч}}(x)$ — температура, получаемая в результате решения прямой задачи теплопроводности, $\mathrm{T}_{\text{изм}}(x)$ — измеряемая температура; $\Omega\ [\alpha(x)]$ — стабилизирующий функционал; β — параметр регуляризации, $\beta > 0$.

Структурно регуляризирующий функционал состоит из двух функционалов, первый из которых оценивает величину невязки между измеренной и расчетной температурами, второй предназначен для стабилизации получаемого решения. Величина вклада стабилизирующего функционала определяется параметром регуляризации β, значение которого предлагается определять в соответствии с «принципом невязки». Величина β должна быть такова, чтобы выполнялось следующее равенство:

$$\int\limits_0^m [T_{\text{расч}}(x\ ) - T_{\text{изм}}(x)]^{\,2}dx\ = \delta^2,$$

где δ^2 — интегральная характеристика среднеквадратической погрешности измерений температур.

Предполагая p-кратную дифференцируемость искомых функций, можно предложить в качестве стабилизирующего функционала следующий функционал достаточно общего вида:

$$\Omega\ [\alpha(x\ )] = \int\limits_0^m \sum_{i=1}^{p} \mu_i \left(\frac{\partial^i \alpha(x)}{\partial x^i}\right)^2 dx,$$

где μ_i — весовые коэффициенты, $i = 1, \ldots, p$; p — порядок стабилизации функционала.

Задача определения параметров путем минимизации регуляризирующего функционала со стабилизирующим функционалом становится «условно корректно поставленной».

Недостатком метода регуляризации является большой объем вычислений, связанный с процедурой поиска нужного значения параметра регуляризации, а также с овражностью регуляризирующего функционала. Другой существенный недостаток метода связан с самой идеей регуляризации: сглаживания решения в пределах погрешности измерений. Чем больше погрешность, тем можно получить более гладкую кривую, но при этом возрастает опасность получения хотя и более плавной кривой, но все в большей степени отклоняющейся от истинной. В этом смысле метод регуляризации принципиально отличается от ряда методов, которые обеспечивают получение достаточно точного решения при росте погрешности в исходных данных. К таким методам относится, например, метод наименьших квадратов.

4. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ПАРАМЕТРА

Наряду с регуляризацией Тихонова, для идентификации распределенных параметров модели теплофизического процесса предлагается применить идею метода наименьших квадратов (МНК).

Сформулируем обратную задачу нахождения коэффициентов конвективного теплообмена для одномерного уравнения теплопроводности с граничными условиями 3-го рода.

Для простоты изложения метода предполагаем нагрев симметричным, поэтому $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. В этом случае минимальный объем необходимой для решения задачи информации соответствует измерению температуры тела в какой-либо одной точке одномерной области $o \le x \le l$. Предположим, известна температура тела на границе с внешней средой:

$$T(\tau, 0) = f(\tau).$$

Задача состоит в нахождении $\alpha = \alpha(\tau)$ как функции, зависящей от времени. Предполагая функцию $\alpha(\tau)$ непрерывной, с целью аппроксимации искомой функции воспользуемся полиномом n-й степени

$$\alpha(\tau) = a_0 + a_1 \cdot \tau + \ldots + a_n \cdot \tau^n,$$

степень полинома будет определяться по принципу невязки.

Решив задачу Дирихле методом конечных разностей, получим температуры $T(\tau_i, x_j)$, которые будут необходимы для вычисления производной в граничном условии

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \alpha(\tau)\left[T_{\text{гр.}}(\tau) - T(\tau, 0)\right],$$

в котором неизвестной является только величина конвективного теплообмена $\alpha(\tau)$.

После замены конечными разностями теплового потока получаем систему уравнений граничных условий в r моментах времени:

$$\frac{\lambda}{\Delta x}(T(\tau_i, x_1) - T(\tau_i, x_0)) = \alpha_i[Tv - T(\tau_i, x_0)], \qquad i = \overline{1, r},$$

где α_k — значение полинома в момент времени k и $\alpha_k = a_0 + a_1 \cdot k \cdot \Delta\tau + \ldots + a_n k^n \Delta\tau^n$, $k = \overline{1, r}$, $r >> n$; или в матричной форме

$$\frac{\lambda}{\Delta x}\begin{pmatrix} T(\tau_1, x_1) - T(\tau_1, x_0) \\ T(\tau_2, x_1) - T(\tau_2, x_0) \\ \ldots \\ \ldots \\ T(\tau_r, x_1) - T(\tau_r, x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot (\mathrm{T}_{\text{о.с.}} - T(\tau_1, x_0)) \\ \alpha_2 \cdot (T_{\text{о.с.}} - T(\tau_2, x_0)) \\ \ldots \\ \alpha_r \cdot (T_{\text{о.с.}} - T(\tau_r, x_0)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_{\text{о.с.}} - T(\tau_1, x_0) \\ T_{\text{о.с.}} - T(\tau_2, x_0) \\ \ldots \\ T_{\text{о.с.}} - T(\tau_r, x_0) \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Выделим компоненты неизвестных параметров полинома, представленного в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \alpha_2 & ... & 0 \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & \alpha_r \end{pmatrix} = a_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} + a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1\Delta\tau & 0 & ... & 0 \\ 0 & 2\Delta\tau & ... & 0 \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & r\Delta\tau \end{pmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \ a_n \cdot \begin{pmatrix} 1\Delta\tau^n & 0 & ... & 0 \\ 0 & 2^n\Delta\tau^n & ... & 0 \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & r^n\Delta\tau^n \end{pmatrix}.$$

Для удобства записи преобразований введем следующие обозначения:

$$A^i = \begin{pmatrix} 1\Delta\tau^i & 0 & ... & 0 \\ 0 & 2^i\Delta\tau^i & ... & 0 \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & r^i\Delta\tau^i \end{pmatrix}, \qquad P = \frac{\lambda}{\Delta x} \begin{pmatrix} T(\tau_1, x_1) - T(\tau_1, x_0) \\ T(\tau_2, x_1) - T(\tau_2, x_0) \\ ... \\ T(\tau_r, x_1) - T(\tau_r, x_0) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \alpha_2 & ... & 0 \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & \alpha_r \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} T_{\text{o.c.}} - T(\tau_1, x_0) \\ T_{\text{o.c.}} - T(\tau_2, x_0) \\ ... \\ T_{\text{o.c.}} - T(\tau_r, x_0) \end{pmatrix}.$$

P_k и H_k — k-е элементы столбцов.

Тогда уравнение (2) в матричной форме будет иметь вид

$$P = \tilde{\alpha} H.$$

Для нахождения функции методом МНК введем меру отклонения в виде суммы квадратов разности измеренных температур от расчетных по модели

$$S(\alpha) = \sum_{k=1}^{r} (P_k - \alpha_k H_k)^2.$$

Используя введенные обозначения, параметр α можно записать как $\alpha(\tau) = a_0 \cdot A^0 + a_1 \cdot A^1 + \ldots$ $\ldots + a_n \cdot A^n$, тогда функционал $S(\alpha)$ будет иметь вид

$$S(\alpha) = \sum_{k=1}^{r} (P_k - \alpha_k H_k)^2 = (P - (a_0 \cdot A^0 + a_1 \cdot A^1 + ... + a_n \cdot A^n) \cdot H)^T,$$

$$(P - (a_0 \cdot A^0 + a_1 \cdot A^1 + ... + a_n A^n) \cdot H) = P^T P - 2\sum_{k=0}^{n} a_k H^T A^k P + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i a_j H^T A^{i+j} H.$$

Задача сводится к нахождению коэффициентов полинома, которые бы минимизировали функционал $S(\alpha)$. Пусть минимум достигается при $\alpha' = \alpha(\tau')$. Тогда для значений коэффициентов полинома должно быть выполнено условие

$$\frac{dS(\alpha')}{da_k} = 0, \qquad k = \overline{0, n}; \tag{3}$$

Вычислим векторы первых производных суммы квадратов отклонений по компонентам $a_0, a_1, \ldots, a_n$:

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = \frac{\partial \left[(P - \alpha H)^T (P - \alpha H)\right]}{\partial a_i} = 2a_0 H^T A^i H + 2a_1 H^T A^{i+1} H + ... + 2a_n H^T A^{i+n} H - 2H^T A^i P = 0,$$

Получили систему из $n+1$ линейных алгебраических уравнений с $n+1$ неизвестными

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k H^T A^k H = H^T A^0 P, \\ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k H^T A^{k+1} H = H^T A^1 P, \\ \ldots \\ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k H^T A^{k+n} H = H^T A^n P. \end{cases}$$

Из линейной независимости строк следует, что детерминант не обращается в ноль, и решение системы единственное.

Легко убедиться, что уравнения (3) определяют минимум, так как матрица вторых производных (матрица Гессе) положительно полуопределена [4].

При выборе степени аппроксимирующего полинома повышение его степени целесообразно до такого значения, при котором отклонение измеренных температур от расчетных по модели остается больше погрешности измерений. В противном случае (при более высоких степенях) погрешность измерений прямо редуцируется в погрешность определения распределенного параметра по методу МНК. И метод теряет свои фильтрующие и стабилизирующие свойства.

Библиографический список

1. *Ткаченко В.Н., Иванова А.А.* Анализ температурных полей криволинейной МНЛЗ на основе математического моделирования // Материалы 3-й междунар. науч.-практ. конф. «Прогресивні технології у металургії сталі: XXI сторіччя». Донецк: ДонНТУ, 2007. С. 242–249.
2. *Мацевитый Ю.М.* Обратные задачи теплопроводности. В 2 т. Т.2. Приложения. Киев: Наук. думка, 2003.
3. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
5. *Иванова А.А.* Математическая модель процесса затвердевания непрерывного слитка в зоне вторичного охлаждения. // Труды ИПММ НАН Украины. Донецк: ИПММ, 2006. Вып.12. С. 76-84.
6. *Ткаченко В.Н.* Моделирование тепловых процессов в автоматизированных системах обработки информации // Вісник Донецького національного університету. Сер. А. Природничі науки. 2002. №2. С. 379–383.

УДК 519.713:681.3

СИНТЕЗ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ КОНТРОЛИРУЮЩИХ ТЕСТОВ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО УСТРОЙСТВА

И.В. Уколов

Саратовский государственный университет,
кафедра математической кибернетики и компьютерных наук
E-mail: ukivan@yandex.ru

В статье рассматривается псевдослучайный метод построения контролирующих тестов для дискретных устройств, применимый как к комбинационным, так и к последовательностным устройствам. Используется энтропийный подход для отыскания оптимального распределения вероятностей входных наборов, что позволяет сокращать среднюю длину генерируемых тестов. Для определения упомянутых вероятностей решается многомерная задача поиска максимума выходной энтропии с применением генетического алгоритма. Рассмотрена задача моделирования исправного устройства и неисправных модификаций с использованием системы моделирования Active-HDL. Приведены результаты построения тестов для схем из международного каталога ISCAS'89. Выполнено их сравнение с данными, полученными другими авторами с использованием иных генетических алгоритмов.

© И.В. Уколов, 2008

Synthesis of Pseudorandom Test Patterns for the Discrete Device

I.V. Ukolov

In article the pseudorandom method of test patterns generation for discrete devices applicable for both to combinational devices and to sequential devices is considered. The entropy approach for search of optimum distribution of probabilities of input vectors is used that allows reducing average length of generated tests. For definition of the mentioned probabilities the multivariate problem of search of a maximum of output entropy with application of genetic algorithm is solved. The problem of simulation of the correct device and faulty devices is considered based on simulation system Active-HDL. Results of tests generation for circuits from international catalogue ISCAS'89 are produced. Their comparison with the data collected by other authors with use of other genetic algorithms is done.

ВВЕДЕНИЕ

В течение последних нескольких десятилетий произошло бурное развитие цифровой техники на сверхбольших интегральных схемах (СБИС). Согласно эмпирическому правилу, число транзисторов на кристалле СБИС для процессорных схем удваивается каждые 18 месяцев. Возрастание сложности СБИС, обусловленное развитием технологий производства интегральных схем, позволяет иметь в аппаратуре все большее число компонентов и реализовывать все более сложные функции. Наряду с этим происходит эволюция систем автоматизированного проектирования (САПР). Как альтернатива рисованию детализированных схем из низкоуровневых элементов появились языки описания аппаратуры высокого уровня (HDL). Используя современную САПР, один конструктор может создать сложный цифровой проект, для которого раньше бы потребовалось около десятка конструкторов. Все это создает благоприятные условия для разработки больших схем.

Однако увеличение размерности и сложности дискретных устройств (ДУ) влечет за собой усложнение проблемы тестирования и контроля этих устройств. Увеличение размерности и сложности схем на чипах, часто с сохранением количества внешних контактов, создает сложности при тестировании. Необходимо контролировать значительно больше логических элементов, используя то же самое количество контактов ввода-вывода. Как результат, затраты на тестирование составляют значительную долю стоимости производства. Поэтому появляется необходимость в создании новых методов тестирования или модификации методов, разработанных ранее.

Задача построения тестов является наиболее сложной для последовательностных логических схем, поскольку необходимо принимать во внимание начальные состояния элементов памяти, которые могут быть неизвестны, и явления состязания сигналов, вызванные временными задержками распространения сигналов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В общем случае тест — это эксперимент, позволяющий подтвердить или опровергнуть корректность работы ДУ. Далее под контролирующими тестами понимаются последовательности входных воздействий, анализ выходных реакций на которые позволяет проверить исправность испытуемого ДУ. Под диагностическими тестами понимаются последовательности входных воздействий, позволяющие определить место расположения неисправностей, присутствующих в нем.

Пусть $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_f\}$ — конечное множество неисправных модификаций исправного устройства A_0. Условимся, что функционирование A_0 отлично от функционирования любого $A_i \in A$.

Входную последовательность, выходные реакции на которую устройств A_0 и A_i $\left(i = \overline{1, f}\right)$ различны, назовем проверяющей данную неисправность. Будем называть тестом, проверяющим неисправности множества A, входную последовательность, которая является проверяющей для всех $A_i \in A$. Тест называется полным, если он проверяет все неисправности из заданного класса.

При решении задач анализа и диагностирования ДУ наиболее широко используется класс логических неисправностей, при наличии которых связи в логической сети не нарушаются, а могут изменяться только функции логических элементов. К таким неисправностям относятся дефекты типа короткого замыкания и перепутывания соединений схемы. Часто неисправности такого рода могут быть описаны константными неисправностями, поскольку для большинства логических элементов обрыв входа эквивалентен подаче на этот вход постоянного сигнала 0 или 1. По числу одновременно присутствующих в схеме логических неисправностей различают одиночные, эквивалентные изменению функции только одного логического элемента (константные неисправности на одной линии схемы), и кратные неисправности, которые являются произвольным сочетанием одиночных неисправностей.

В статье рассматривается задача построения контролирующего теста наименьшей длины, обеспечивающего заданную полноту обнаружения неисправностей. Класс рассматриваемых неисправностей составляют одиночные константные неисправности на всех входах и выходах составляющих ДУ элементов. Под полнотой обнаружения неисправностей понимается процент обнаруженных неисправностей ДУ по отношению ко всему множеству его неисправностей.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Ниже рассматривается вероятностный подход для решения задачи, который позволяет избежать анализа структуры тестируемого ДУ, но требует моделирования исправного устройства.

Основная проблема, возникающая при генерации псевдослучайного теста для достаточно сложных устройств, — его большая длина. В [1] был предложен один из возможных путей решения этой проблемы на основе применения центрального понятия теории информации — энтропии. Там же показано, что максимизация выходной энтропии ДУ позволяет минимизировать длину псевдослучайного теста.

Следовательно, способ сокращения длины псевдослучайного теста при вероятностном тестировании дискретных устройств состоит в выборе оптимального распределения вероятностей входных наборов. В данной статье решается многомерная задача поиска максимума выходной энтропии ДУ в предположении, что вероятности на его входах различны. Ниже исследуется возможность ее решения с применением генетического алгоритма. Это позволяет получить оптимальное или близкое к оптимальному распределение вероятностей входных наборов ДУ, а значит, и сократить длину псевдослучайного теста.

Рассмотрим некоторое ДУ с n первичными входами и m первичными выходами. Пусть первичные входы ДУ являются независимыми и имеют различные вероятности u_i поступления сигнала «1» $\left(i=\overline{1,n}\right)$. Совокупность таких вероятностей $\overline{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ назовем вектором входных вероятностей. Пусть все 2^m попарно различных двоичных кортежей длины m, представляющие все возможные выходные реакции рассматриваемого ЦУ, расположены и пронумерованы в лексикографическом порядке $(0,0,\ldots,0)$, $(0,0,\ldots,1)$, $\ldots$, $(1,1,\ldots,1)$. Обозначим $p_j\left(\overline{u}\right)$ — вероятность появления на выходах ДУ кортежа с номером j $\left(j=\overline{1,2^m}\right)$ и назовем ее выходной вероятностью. Тогда выходная энтропия может быть определена выражением:

$$H_0\left(\overline{u}\right)=-\sum_{j=1}^{2^m}p_j\left(\overline{u}\right)\log p_j\left(\overline{u}\right).$$

В [1] получено соотношение между вероятностью $P\left(T\right)$ обнаружения всех неисправностей на тесте T длины L и выходной энтропией $H_0\left(\overline{u}\right)$:

$$P\left(T\right)=1-\frac{1}{2^{H_0L/k}},$$

где k — коэффициент, определяемый структурой логической схемы ДУ.

Из этого соотношения следует, что максимизация выходной энтропии ДУ минимизирует число тестовых наборов, необходимых для выявления всех неисправностей. Кроме того, вектор входных вероятностей $\overline{u}_0$, при котором достигается максимальное значение энтропии $H_0\left(\overline{u}\right)$, обеспечивает наибольшее значение величины $P\left(T\right)$.

Выходные вероятности являются неизвестными величинами и получение их в явном виде даже для сравнительно простых ДУ является задачей, сравнимой по сложности с построением детерминированного теста.

Поэтому предлагается заменить их соответствующими частотами $p_j^*\left(\overline{u}\right)$ $\left(j=\overline{1,2^m}\right)$, вычисленными на некоторой случайной выборке достаточной длины из генеральной совокупности всех входных наборов мощности 2^n.

Итак, рассматривается следующая экстремальная задача: требуется найти точку $\overline{u}^*=(u_1^*,u_2^*,\ldots$ $\ldots,u_n^*)$, лежащую в области допустимых значений $\overline{u}^*\in U^n=\{\overline{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)\mid 0\le u_i\le 1\}$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$, в которой функция

$$H_0^*\left(\overline{u}\right)=-\sum_{j=1}^{2^m}p_j^*\left(\overline{u}\right)\log_2 p_j^*\left(\overline{u}\right) \tag{1}$$

имеет максимальное значение.

Особенность этой задачи заключается в том, что функция $H_0^*\left(\overline{u}\right)$ является случайной и ее явный вид, благодаря замене выходных вероятностей частотами, неизвестен. Поэтому непосредственное вычисление значений функции $H_0^*\left(\overline{u}\right)$ в различных точках $\overline{u}\in U^n$, а тем более ее производных,

невозможно. Однако для всякого $\overline{u} \in U^n$ с использованием результатов моделирования ДУ на тесте с заданным распределением вероятностей на входах можно получить значения $p_j^*(\overline{u})$ $\left(j = \overline{1, 2^m}\right)$ и вычислить $H_0^*(\overline{u})$ по формуле (1).

Поиск значений входных вероятностей, максимизирующих функцию (1), можно осуществить разными способами. Можно воспользоваться любым известным методом поиска экстремума. Как уже отмечалось выше, в данной работе для этого использовался генетический алгоритм.

3. ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ

Основные принципы генетических алгоритмов сформулировал John Holland [2]. Генетические алгоритмы (ГА) работают с совокупностью особей — популяцией, каждая из которых представляет возможное решение проблемы. Каждая особь оценивается фитнес-функцией, показывающей, насколько хорошо данная особь соответствует решению задачи. Наиболее приспособленные особи, т.е. особи, имеющие наибольшее значение фитнес-функции, получают возможность перейти в следующее поколение. Это приводит к появлению новых особей, которые сочетают в себе некоторые характеристики, наследуемые ими от родителей. Таким образом, исследуются наиболее перспективные участки пространства поиска. Наименее приспособленные особи с меньшей вероятностью смогут воспроизвести потомков, так что те свойства, которыми они обладали, будут постепенно исчезать из популяции в процессе эволюции.

Генетический алгоритм получает на вход начальную популяцию, равномерно покрывающую пространство поиска. Работа ГА представляет собой итерационный процесс, который продолжается до тех пор, пока не выполнится заданное число итераций. На каждой итерации производится построение следующего поколения особей — новой популяции. После завершения работы алгоритма решением будет являться особь с наибольшим значением фитнес-функции в последнем поколении.

В контексте данной статьи особи — это вектора входных вероятностей $\overline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, описанные выше. Критерием отбора в следующее поколение или фитнес-функцией является выходная энтропия, вычисляемая по формуле (1).

При построении следующей популяции из исходной последовательно выполняются основные операторы ГА — оператор селекции, кроссовера, мутации и редукции.

Оператор селекции производит пропорциональный отбор особей из исходной популяции. Реализация данного типа селекции основана на k запусках рулетки, содержащей по одному сектору для каждого члена популяции размером, пропорциональным величине фитнес-функции данной особи, где k — это количество особей в исходной популяции.

Отобранные k особей подвергаются равномерному кроссоверу. Особи случайным образом разбиваются на $k/2$ штук пар. Для каждой пары с заданной вероятностью может применяться оператор кроссовера. Равномерный кроссовер работает следующим образом. Производится случайная генерация бинарного вектора $\overline{v}$ длины n. Первый потомок получает сегменты первого родителя, соответствующие единичным разрядам вектора $\overline{v}$, и сегменты второго родителя, соответствующие нулевым разрядам вектора $\overline{v}$. Второй потомок строится аналогично — используются сегменты первого родителя, соответствующие нулевым разрядам $\overline{v}$, и сегменты второго родителя, соответствующие единичным разрядам $\overline{v}$.

К популяции, полученной на предыдущем этапе, с заданной вероятностью применяется оператор мутации. При этом производится изменение случайно выбранного гена особи.

Оператор редукции выполняет сокращение количества полученных особей до размера исходной популяции. В соответствии с ним в новую популяцию попадают k особей, имеющих наибольшее значение фитнес-функции — элитный тип оператора редукции.

Оценка эффективности программной реализации данного ГА приведена ниже.

4. ЛОГИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В технической диагностике ДУ широко применяется логическое моделирование. Логическое моделирование включает в себя построение модели ДУ — системы отношений, описывающей поведение исследуемого устройства с заданной точностью, и дальнейший анализ поведения этой модели на за-

данной последовательности входных воздействий. В данной статье логическое моделирование используется для вычисления фитнес-функции при оптимизации входных вероятностей с использованием ГА по формуле (1) во время построения контролирующего теста, а также для определения полноты полученного теста, получения списка проверенных и не проверенных неисправностей и другой диагностической информации.

На сегодняшний день очень широкое распространение получили языки описания аппаратуры. Наиболее распространенным языком этого класса, специфицированным международными стандартами, является язык VHDL [3], который разработан в рамках проекта создания нового поколения высокоскоростной элементной базы (VHSIC).

5. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

В рамках программного проекта DiagnosticSuite были разработаны и реализованы алгоритмы, описанные выше, и система логического моделирования ДУ с неисправностями, использующая для моделирования исправных и неисправных устройств среду проектирования и моделирования ДУ Active-HDL [http://www.aldec.com/]. Проект реализован на платформе Microsoft .NET framework [http://www.microsoft.com/].

Исходными данными для моделирования являются текстовые описания схем из международного каталога ISCAS'89, на которых принято производить тестирование новых методов моделирования и построения тестов.

Взаимодействие системы моделирования и Active-HDL реализовано через перенаправление потоков ввода/вывода в асинхронном режиме автономного инструмента моделирования VSimSA, спроектированного и оптимизированного для продолжительного моделирования и пакетной обработки, входящего в среду Active-HDL. Таким образом, все возможности, предоставляемые Active-HDL, как, например, просмотр временных диаграмм, списка значений сигналов, запись истории значений сигналов в базу данных asdb и др., остаются доступными.

Моделирование может проходить в двух режимах: последовательном и параллельном. Во втором случае поддерживается пул процессов моделирования VSimSA с очередью задач на выполнение.

При инициализации сессии моделирования каждого процесса VsimSA производится трансляция текстового описания ДУ в структурное описание схемы на языке VHDL. Функциональное описание базисных элементов собрано в отдельную библиотеку. При этом используется тип сигналов в схеме STD_LOGIC, что означает моделирование в 9-значном алфавите. Для синхронизации триггеров в схеме используется дополнительный первичный вход CLK. В описание ДУ на VHDL производится добавление служебного VHDL процесса, который собирает всю необходимую диагностическую информацию во время моделирования и по запросу выдает ее на стандартный вывод. Для подачи сигналов на первичные входы моделируемого устройства используется VSimSA команда «force <signal> <value> [<time>] [, <value> <time>]».

В каталоге схем ISCAS'89 также содержатся данные о множествах проверяемых неисправностей, которые используются при моделировании ДУ с неисправностями. Моделирование с неисправностями производится в параллельном режиме. Для каждой следующей неисправной модификации устройства в списке осуществляется переинициализация сессии моделирования командой VSimSA «restart» и производится вставка неисправности на требуемый вход или выход элемента схемы с помощью ключа «-freeze» команды «force».

6. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ

В этом разделе приведены результаты работы программы синтеза псевдослучайных контролирующих тестов для восьми схем s298, S386, S641, S713, S1196, S1238, S1488, S1494 из ISCAS'89 каталога.

Основные характеристики используемых схем приведены в табл. 1.

Таблица 1

Описания используемых схем

Схема	Описание
S298	3 первичных входа, 6 первичных выходов, 14 D-триггеров, 44 инвертера, 75 вентилей
S386	7 первичных входа, 7 первичных выходов, 6 D-триггеров, 41 инвертера, 118 вентилей
S641	35 первичных входа, 24 первичных выходов, 19 D-триггеров, 272 инвертера, 107 вентилей
S713	35 первичных входа, 23 первичных выходов, 19 D-триггеров, 254 инвертера, 139 вентилей
S1196	14 первичных входа, 14 первичных выходов, 18 D-триггеров, 141 инвертера, 388 вентилей
S1238	14 первичных входа, 14 первичных выходов, 18 D-триггеров, 80 инвертера, 428 вентилей
S1488	8 первичных входа, 19 первичных выходов, 6 D-триггеров, 103 инвертера, 550 вентилей
S1494	8 первичных входа, 19 первичных выходов, 6 D-триггеров, 89 инвертера, 558 вентилей

Результаты работы программы для названных схем приведены в табл. 2. Для каждой схемы указаны общее количество неисправностей, количество проверенных неисправностей, полнота и длина построенных тестов.

Таблица 2

Результаты численных экспериментов

Схема	Всего/Проверено	Полнота, %	Длина
S298	308/265	86,04	382
S386	384/234	60,94	374
S641	467/396	85,16	808
S713	581/467	80,38	428
S1196	1242/907	73,03	1637
S1238	1355/950	70,11	1118
S1488	1486/1433	96,43	1953
S1494	1506/1439	95,55	1699

В табл. 3 приведены результаты в сравнении с результатами, полученными другими авторами [4], и с результатами генерации теста с вероятностями 0,5 по всем входам, что обычно используется в качестве стандартного распределения.

Таблица 3

Сравнение результатов

Схема	Данные, полученные с помощью предложенного метода		Данные, полученные с помощью ГА из [4]		Данные по синтезу тестов со стандартным распределением	
	Полнота, %	Длина	Полнота, %	Длина	Полнота, %	Длина
S298	86,04	382	82,79	637	48,21	382
S386	60,94	374	68,49	606	55,47	875
S641	85,16	808	86,30	727	83,66	997
S713	80,38	428	80,38	677	75,90	641
S1196	73,03	1637	96,38	1642	87,44	1978
S1238	70,11	1118	90,18	1138	83,39	1982
S1488	96,43	1953	70,46	1975	58,81	1962
S1494	95,55	1699	70,58	1712	57,47	1843

Анализ экспериментальных данных, полученных для приведенных выше и других схем, и их сравнение с результатами, опубликованными в [4], говорит о достаточно высокой эффективности предложенного алгоритма синтеза случайных тестов.

Основным достоинством приведенного алгоритма является необходимость моделирования только исправного ДУ при достижении высокого уровня покрытия тестируемых схем тестовыми наборами. Моделирование с неисправностями используется исключительно для получения диагностической информации о построенном тесте.

Библиографический список

1. *Agrawal V.D.* An Information Theoretic Approach to Digital Fault Testing // IEEE Transactions on Computers. 1981. V. 30. P. 582–587.
2. *Holland J.H.* Adaptation in Natural and Artificial Systems. University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
3. *Суворова Е.А., Шейнин Ю.Е.* Проектирование цифровых систем на VHDL. СПб.: БХВ-Петербург, 2003.
4. *Скобцов Ю.А., Скобцов В.Ю.* Логическое моделирование и тестирование цифровых устройств. Донецк: Изд-во Донецк. техн. ун-та, 2005.

УДК 519.713:681.3

СИНТЕЗ КОНТРОЛИРУЮЩИХ ТЕСТОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

Е.В. Уколова

Саратовский государственный университет,
кафедра математической кибернетики и компьютерных наук
E-mail: b4456@yandex.ru

В статье предложен метод построения контролирующих тестов для дискретных устройств, основанный на генетическом алгоритме. Работоспособность и эффективность метода проверялись путем построения тестов для схем, приведенных в каталоге ISCAS'89. Для моделирования работы схем и генерации тестов была написана программа на C++, Visual Studio 2005. Неисправности эмулируются программной установкой соответствующего объекта в памяти в особое состояние, при котором он выполняет функцию неисправного элемента. Генерация тестов осуществлялась при различных значениях и конфигурациях параметров генетического алгоритма: изменялись вид селекции, мощность популяции, вероятность мутации, процент элитных особей, максимальное количество итераций. В статье приведены результаты построения тестов, а также сравнение с данными других авторов.

The Construction of Supervisory Test with the Use of the Genetic Algorithm

E.V. Ukolova

The article describes a control test generation method for discrete devices based on the genetic algorithm. The method operability and effectiveness have been checked by means of creating tests for circuits listed in the ISCAS' 89 catalogue. The C++(Visual Studio 2005) program has been implemented in order to simulate circuit and generate tests. Faults are simulated by programmatically setting an appropriate object in storage to a special state, in which it acts as a faulty component. Test generation has been executed using different values and configurations of the genetic algorithm parameters: selection, population capacity, mutation probability, percent of elite individuals, maximal amount of iterations were changed. The final results and comparison with results of other authors are included into the report.

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире бурно развиваются технологии производства, функции дискретных устройств становятся все более разнообразными, а их технические характеристики непрерывно улучшаются. В связи с этим происходит постоянное усложнение элементной базы дискретных устройств. Как следствие, растет вероятность появления неисправностей и сложность их обнаружения. Таким образом, весьма актуальной задачей является разработка методов обнаружения неисправностей. Один из таких методов заключается в подаче на устройство теста — специальной последовательности, особенность которой заключается в том, что реакции на нее исправного и неисправного устройств различаются. В качестве входных используются либо рабочие воздействия (то есть такие, которые поступают на устройство в процессе его функционирования по назначению), либо специально генерируемые тестовые воздействия. Сложность современных дискретных устройств приводит к необходимости автоматизации процесса построения тестов. Одним из способов достижения этого является применение генетического алгоритма (ГА).

© Е.В. Уколова, 2008

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Для автоматизации процесса построения тестов необходимо программно моделировать дискретные устройства (ДУ). Рассматривают несколько уровней и областей проектирования [1]. Области делятся на поведенческую, структурную и физическую. Для каждой из них рассматривают схемный, логический, системный уровни, а также уровень языков регистровых передач.

В данной работе рассматривается моделирование на логическом уровне. Логическое моделирование включает в себя построение математической модели дискретного устройства, а также анализ поведения построенной модели на заданной последовательности входов.

При этом элементы дискретного устройства описываются с помощью трехзначных функций, которые отражают их функционирование. Построение тестов осуществляется для последовательностных дискретных устройств (с памятью). Последовательностные дискретные устройства — это такие устройства, у которых значения их выходных сигналов в текущий момент времени зависит от значений входных сигналов в текущий момент времени, а также от внутреннего состояния устройства в предыдущий момент времени. Под внутренним состоянием дискретного устройства понимается совокупность состояний 0, 1 или u триггеров [2].

Для моделирования необходимо наличие структурной модели дискретного устройства, которая отражает не только логику функционирования, но также связи между компонентами и внешней средой. Такая модель представляется ориентированным графом с логическими элементами, входами, выходами и узлами разветвления в качестве вершин. Дугами являются соединения логической схемы. Логическая схема называется правильной, если выходы никаких двух элементов не соединены вместе и каждая из функций, реализуемых на выходах дискретного устройства, может быть представлена как функция выхода конечного автомата. Логические элементы могут быть двух типов:

1) элементы, функционирование которых описывается трехзначными функциями;

2) элементы памяти.

В статье структурная модель строилась на основе информации, извлекаемой из файлов международного каталога ISCAS'89. Здесь каждая схема задается входами, выходами, компонентами и связями между ними.

Для корректного моделирования схемы необходимо распределить вершины по уровням. В последовательностной схеме для вычисления уровней элементов сначала производится обрыв линий обратных связей, и полученным псевдовходам присваивается уровень 0. Нулевой уровень присваивается также внешним входам. Уровень l_i элемента e_i, на входы которого поступают сигналы с выходов элементов $e_1, \ldots, e_p$, уровни которых соответственно равны $l_1, \ldots, l_p$, определяется таким образом: $l_i = 1 + \max\limits_{1 \le j \le p}(l_j)$.

2. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Функционирование дискретных устройств моделировалось в троичном алфавите, что достаточно точно отражает поведение ДУ. Предполагается, что все триггеры ДУ перед началом моделирования находятся в неопределенном состоянии (u).

В разработанной программе синтеза тестов описание схемы транслируется в программную модель схемы. На каждом такте входной вектор проходит последовательно по уровням от первичных входов к первичным выходам. Неисправности эмулируются программной установкой соответствующего объекта в памяти в особое состояние, при котором он выполняет функцию неисправного элемента. При построении теста входная последовательность подается на исправную схему, а затем на схемы, в которые внесены неисправности, описанные в соответствующих файлах каталога ISCAS'89 (одиночные константные). Используя полученные выходные сигналы, производится анализ того, насколько «хорошей» является поданная входная последовательность, то есть насколько высоко ее качество как теста. Качество тестов можно оценивать по разным признакам: полнота, длина и др. Алгоритм генерации тестов также оценивается по различным критериям, таким как быстродействие, объем требуемой памяти, адекватность получаемых результатов и т. д.

Программа, с помощью которой производится генерация теста, написана на C++, Visual Studio 2005. Скорость моделирования зависит от размера схемы. Ниже приведены данные о быстродействии программы для некоторых из схем.

1. Для схемы s27 (три триггера, восемь логических элементов) понадобилось меньше 24 секунд для того, чтобы прошло 100 итераций генетического алгоритма, на каждой из которых происходит моделирование для исправного и 32 неисправных дискретных устройств для каждой из 20 особей в популяции.

2. Для схемы s713 (19 триггеров, 139 логических элементов, рассматривается 581 неисправность), где осуществляется всего 50 итераций с мощностью популяции, равной 15 особям, понадобилось около 150 минут. Такая разница во времени работы обусловлена тем, что длины векторов, при помощи которых происходит хранение данных, намного больше, чем для схемы s27.

Для того чтобы увеличить эффективность построения тестов, перед началом работы генетического алгоритма запускается случайный поиск, в процессе которого определяется частота появления во входной последовательности единиц, при которой, вероятно, будет получен достаточно короткий тест. Правда, при использовании троичного алфавита данный эвристический метод подбора частоты работает очень медленно и не всегда его применение оправдано.

Частота определяется простым эвристическим поиском. Для всех частот от 0 до 1 с шагом 0,1 строится случайная последовательность, при этом определяется, в каком случае получается наиболее короткий тест. Далее такой же поиск происходит в некоторой небольшой окрестности найденной ранее предполагаемой частоты.

Если все попытки найти такую «хорошую» частоту оказываются неудачными, то есть не удается построить тест, обеспечивающий заданную полноту покрытия, то частота единиц принимается равной 0.5.

Для ускорения работы программы используется как можно меньший объем памяти, то есть в памяти хранится только текущее состояние схемы, либо исправной, либо соответствующей некоторой неисправности.

3. ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ

В настоящее время достаточно бурно развиваются методы эволюционных вычислений, к которым относятся и генетические алгоритмы. Генетический алгоритм (ГА) представляет собой адаптивный поисковый метод [3], который основан на селекции лучших особей в популяции, подобно эволюционной теории Ч. Дарвина. Генетический алгоритм эффективно использует информацию, накопленную в процессе эволюции. В генетическом алгоритме также используется кроссовер, при помощи которого генерируются новые особи путем скрещивания уже существующих особей, и мутация, при помощи которой могут быть резко изменены свойства потомка.

В простом генетическом алгоритме присутствуют, таким образом, три основных оператора: репродукции, кроссовера и мутации.

Все эти операторы имеют различные реализации и виды. В нашей программе использованы турнирная и рулеточная виды селекции [4], а также два вида кроссовера, описанные ниже.

Возможна также вариация других параметров: вероятности мутации, процента элитных особей, требуемой полноты покрытия, максимального количества итераций и числа особей в популяции.

При решении практических задач с использованием эволюционных методов необходимо выполнить следующие четыре этапа:

1) выбрать способ представления решения;

2) разработать операторы случайных изменений, в частности, кроссовер и мутацию;

3) определить законы выживания решения;

4) создать начальную популяцию.

Каждому допустимому решению T сопоставляется вектор битовых строк, составляющий хромосому. Таким образом, хромосома задает входную последовательность, подаваемую на дискретное устройство. Если входная последовательность (хромосома) будет обладать таким свойством, что исправное

устройство и определенное количество неисправных модификаций устройства будут выдавать различные реакции на нее, то эту последовательность назовем тестом.

При подсчете фитнес-функции каждой хромосомы учитывается заданный заранее параметр — полнота покрытия. В этом случае значение фитнес-функции принимается равным номеру наименьшего шага, при котором количество неисправных модификаций, выдавших реакции, отличные от реакции исправной схемы, таково, что достигнута заданная полнота покрытия. В противном случае значение фитнес-функции принимается равным бесконечности.

Изначально все хромосомы в популяции имеют некоторую достаточно большую длину. Но уже после первой итерации, когда будет подсчитана фитнес-функция для каждой хромосомы, их длины могут заметно уменьшиться. Это происходит вследствие того, что если при подаче очередного входного сигнала количество неисправностей, которые обнаружились, обеспечивает заданную полноту покрытия, то оставшиеся входные сигналы из хромосомы удаляются. Вместе с тем в процессе работы ГА возможно и увеличение длин входных последовательностей, например, в результате применения кроссовера. Поэтому в следующей популяции будут представлены хромосомы с различными длинами.

Таким образом, длина входного вектора становится равным значению фитнес-функции, если это значение меньше бесконечности и остается тем же в противном случае.

После подсчета фитнес-функций хромосом происходит сортировка популяции по возрастанию значений фитнес-функций и далее производится отбор родителей для получения следующего поколения. Родители отбираются либо с помощью рулеточной, либо с помощью турнирной селекции — этот параметр задается извне. Число родителей равно мощности популяции.

В новую популяцию попадает заданное извне количество элитных особей, то есть таких, которые без изменений переносятся из существующей популяции в следующую. Далее, применяя кроссовер к выбранным случайным образом парам родителей, получаем особей, которых помещаем в новую популяцию. Это происходит до тех пор, пока количество особей в этой популяции не достигнет числа, равного мощности популяции. Для каждой выбранной пары родителей реализуется один из двух типов кроссовера:

1. Кроссовер, при котором деление хромосом происходит «перпендикулярно входам». В этом случае находим точки деления первого и второго родителей — m_1 и m_2 соответственно, где $0 \leq m_i \leq L_i, i = \overline{1,2}$, и L_i — длина i-ого родителя. К потомку отходит m_1 первых входных воздействий первого родителя и m_2 — последних входных воздействий второго родителя. Таким образом, длина входной последовательности, задаваемой потомком, равна $m_1 + m_2$.

2. Одноточечный кроссовер, при котором деление хромосом происходит «параллельно входам». Здесь случайным образом выбирается точка деления m, $0 \leq m \leq n$, где n — число первичных входов дискретного устройства. Далее к потомку отходят все входные воздействия первого родителя по первым m входам, а также входные воздействия второго родителя по оставшимся $n - m$ входам. Причем, если длина входной последовательности одного из родителей больше, то недостающие биты заполняются случайным образом.

Тип кроссовера определяется параметром извне.

Данная процедура выполняется столько раз, какова мощность популяции за вычетом числа элитных особей. К каждому потомку далее применяется оператор мутации с заданной заранее вероятностью.

После этого формирование новой популяции считается завершенным.

Работа генетического алгоритма завершается после выполнения заданного числа итераций.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Целью данной работы было проанализировать, при каких значениях параметров генетического алгоритма построение тестов происходит наиболее эффективно (наименьшее время и оптимальная длина для заданного покрытия).

Были протестированы несколько схем. Можно утверждать, что генетический алгоритм — более эффективный метод поиска, чем просто перебор.

Для того чтобы не потерять лучшие из найденных на данный момент времени решения, в процессе работы генетического алгоритма отбираются элитные особи.

Отметим, что тип кроссовера в проведенных экспериментах не оказывал заметного влияния, если моделирование осуществлялось в двоичном алфавите. Но при использовании троичного алфавита выбор различных типов селекции и кроссовера приводил к изменению средней длины получаемых тестов.

Кроме того, влияние изменений параметров генетического алгоритма для различных схем оказалось неодинаковым. Для многих схем наиболее короткие тесты генерировались, когда использовался турнирный тип селекции и кроссовер «перпендикулярно входам» (тип 1). В некоторых случаях после окончания работы ГА так и не удавалось получить входную последовательность, которая обнаруживала бы заданное количество неисправностей. При использовании кроссовера «параллельно входам» такая ситуация возникала более редко. Достаточно хорошие результаты были получены при использовании обоих типов кроссовера одновременно. Для некоторых схем, в частности для схемы s27, наилучший результат был получен при использовании рулеточной селекции.

При использовании одного и того же типа селекции более короткие тесты для большинства схем генерировались при использовании кроссовера типа 1. При этом полнота покрытия при построении тестов задавалась в диапазоне от 70 до 100%, количество особей — 15 или 25 (увеличение этого числа до 40 не привело к улучшению результата, а лишь увеличилось время работы программы), максимальное число итераций — 100, вероятность мутации — 1%, число элитных особей — 10% от мощности популяции. Результаты некоторых экспериментов приведены в таблице.

Результаты численных экспериментов

Название схемы	Полнота покрытия	Тип селекции/ тип кроссовера	Средняя длина теста
S27	100	roul/1	8.90
S27	100	tour/1	9.66
S27	100	roul/2	19.50
S27	100	tour/2	19.56
S298	86	roul/1	171.25
S298	86	tour/1	130.25
S298	86	roul/2	465.00
S298	86	tour/2	239.00
S713	81,5	roul/1	779.67
S713	81,5	tour/1	465.67
S713	81,5	roul/2	1081.50
S713	81,5	tour/2	1434.33
S386	70	roul/1	1172
S386	70	tour/1	885
S386	70	roul/2	2978.4
S386	70	tour/2	2262.33

Примечание. roul — рулеточный тип селекции, tour — турнирный.

Различные значения длин тестов получаются из-за неодинаковой сложности схем. Например, в схеме s27 содержится всего 3 триггера, 8 логических элементов и 2 инвертора, в схеме s298 — 14 триггеров, 44 инвертора и 75 логических элементов. Самая большая из рассмотренных схем — s713 — содержит 19 триггеров, 254 инвертора и 139 логических эелементов. Чем сложнее схема, тем дольше осуществляется моделирование схемы и обычно генерируется тест большей длины.

Отметим, что в процессе работы были получены тесты, которые могут обнаружить больше неисправностей, чем представлено в [1], причем длины тестов часто короче приведенных там же. Например, для схемы s298 построенный нами тест обнаруживает 265 неисправностей (против 254 в [1]), для схемы s713 наш тест обнаруживает 476 неисправностей (против 469 в [1]), для схемы 386 наш тест обнаруживает 269 – 271 неисправность (против 263 в [1]).

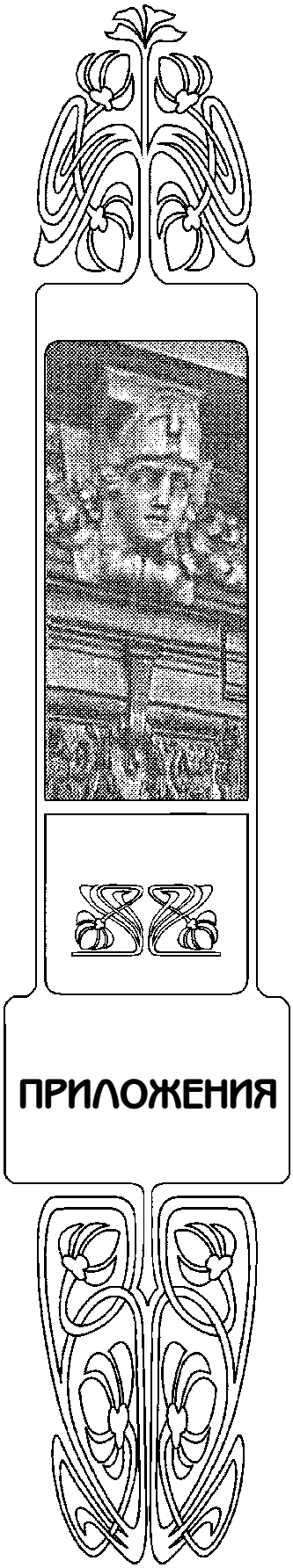
Библиографический список

1. *Скобцов Ю.А., Скобцов В.Ю.* Логическое моделирование и тестирование цифровых устройств. Донецк: Изд-во Донецк. техн. ун-та, 2005.

2. *Барашко А.С., Скобцов Ю.А., Сперанский Д.В.* Моделирование и тестирование дискретных устройств. Киев: Наук. думка, 1992.

3. *Goldberg D.E.* Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning. Reading: Addison-Wesley, 1989.

4. *Blickle T., Thiele L.* A Comparison of Selection Schemes used in Genetic Algorithms // TIK - Report. № 11, December. Zurich: ETH, 1995. P.65



ХРОНИКА

14-Я САРАТОВСКАЯ ЗИМНЯЯ ШКОЛА «СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ», ПОСВЯЩЕННАЯ ПАМЯТИ АКАДЕМИКА П.Л. УЛЬЯНОВА (1928–2006)

Л.Ю. Коссович, А.П. Хромов, С.П. Сидоров

Саратовский государственный университет,
механико-математический факультет,
E-mail: SidorovSP@info.sgu.ru

Информационное сообщение о 14-й Саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложения», посвященной памяти академика П.Л. Ульянова.

14 Saratov Winter School «Contemporary Problems of Function Theory and its Applications» Dedicated to the Memory of P.L. Ulyanov

L.Yu. Kossovich, A.P. Khromov, S.P. Sidorov

It is the information about 14 Saratov winter school «Contemporary Problems of function theory and its applications» dedicated to the memory of P.L. Ulyanov.

С 28 января по 4 февраля 2008 г. в Саратове проходила 14-я Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», посвященная памяти академика П.Л.Ульянова (1928–2006), организованная Саратовским государственным университетом имени Н.Г. Чернышевского, Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова и Математическим институтом имени В.А. Стеклова РАН при финансовой поддержке РФФИ (проект № 07-01-06119г).

Оргкомитет школы возглавил член-корреспондент РАН Б.С. Кашин; в состав оргкомитета вошли также ректор СГУ, профессор Л.Ю. Коссович (зам. председателя), профессор Б.И. Голубов (зам. председателя), профессор А.П. Хромов (зам. председателя), академик РАН С.М. Никольский, член-корреспондент РАН Ю.Н. Субботин, профессора А.В. Абанин, Е.П. Долженко, М.И. Дьяченко, С.И. Дудов, А.Л. Лукашев, Ю.В. Покорный, Е.С. Половинкин, Д.В. Прохоров, А.М. Седлецкий, доцент С.П. Сидоров (секретарь).

В работе школы приняли участие 164 человека, из них 4 член-корреспондента РАН и один член-корреспондент НАН Армении, 45 докторов физико-математических наук, 60 кандидатов физико-математических наук. Среди участников школы были представители разных городов: Анкары, Астаны, Владивостока, Волгограда, Вологды, Воронежа, Горно-Алтайска, Долгопрудного, Екатеринбурга, Еревана, Жуковского, Казани, Караганды, Карлстада (Швеция), Киева, Колумбии (США), Красноярска, Курска, Магнитогорска, Махачкалы, Минска, Москвы, Обнинска, Одессы, Озерска, Петрозаводска, Ростова-на-Дону, Самары, Санкт-Петербурга, Саратова, Смоленска, Твери, Томска, Тулы, Уфы, Харькова, Шуи. Самые многочисленные делегации были из Саратова и Московы — по 43 человека в каждой.

© Л.Ю. Коссович, А.П. Хромов, С.П. Сидоров, 2008

За время работы конференции было прочитано 17 лекций, в том числе 5 об академике П.Л.Ульянове и его работах, сделано 37 получасовых докладов и 90 коротких сообщений, посвященных различным вопросам теории функций, таким как теория приближений, ряды Фурье и др., а также их приложениям.

К началу работы школы был издан сборник тезисов докладов ее участников (Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 14-й Сарат. зимней школы, посвящ. памяти акад.П.Л.Ульянова. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. 220 с.).

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ», ПОСВЯЩЕННАЯ ПАМЯТИ ПРОФЕССОРА А.М. БОГОМОЛОВА

Д.В. Сперанский

Саратовский государственный университет,
факультет компьютерных наук и информационных технологий,
E-mail: SperanskiyDV@info.sgu.ru

Информационное сообщение о Международной конференции «Компьютерные науки и информационные технологии», посвященной памяти профессора А.М. Богомолова (Саратов, 2–4 июля 2007 г.).

International Conference «Computer Sciences and Information Technologies» Dedicated to the Memory of Prof. A.M. Bogomolov

D.V. Speransky

It is the information about International conference «Computer Sciences and Information Technologies» dedicated to the memory of prof. A.M. Bogomolov (Saratov, July 2–4, 2007)

Со 2 по 4 июля 2007 г. в Саратовском государственном университете прошла Международная конференция «Компьютерные науки и информационные технологии», посвященная памяти профессора А.М. Богомолова (1932-1994). С именем Анатолия Михайловича Богомолова связано начало подготовки кадров в СГУ в области программирования и математической кибернетики на базе Вычислительного центра университета, организованного при его активном участии в 1957 году. А.М. Богомолов первым в нашем университете начал читать курс программирования. В последующие годы, работая директором Института прикладной математики и механики АН УССР в г. Донецке (1965–1977), он стал основателем научной школы в области математической кибернетики и ее приложений. После возвращения А.М. Богомолова в Саратов, где он стал ректором СГУ и работал в этой должности в течение 17 лет (1977–1994), им была организована кафедра математической кибернетики. В этот период под руководством А.М. Богомолова возникла еще одна ветвь его научной школы, включающая учеников, подготовленных им в университете.

Из широкого круга проблем в области компьютерных наук и информационных технологий в рамках конференции основное внимание было уделено нескольким разделам, которыми интересовался А.М. Богомолов лично и его ученики. К числу таких разделов относятся прежде всего теория автоматов и ее приложения, в частности вопросы технической диагностики дискретных систем, включая их моделирование и тестирование, создание и исследование математических моделей производственных процессов различного типа, разработка программного обеспечения для автоматизации таких процессов и т.п. Кроме того, на конференции значительное внимание было уделено информационным технологиям в образовании и науке.

Всего в конференции приняло участие около 70 человек. Значительную часть участников составили преподаватели, аспиранты и научные сотрудники различных вузов и организаций г. Саратова. Кроме того, в конференции приняли участие представители других городов, включая Москву, Санкт-Петербург, Самару, Волгоград, Томск, Астрахань, Таганрог, Киев и Донецк (Украина) и др.

Заседания участников конференции проходили в рамках четырех секций:

1. Математическое моделирование и контролепригодное проектирование дискретных систем.
2. Контроль и диагностирование дискретных устройств.
3. Теория автоматов и ее приложения.
4. Информационные технологии в образовании, науке и культуре.

© Д.В. Сперанский, 2008

Среди участников конференции были ученики А.М. Богомолова, представляющие донецкую ветвь его научной школы (доктор техн. наук Ю.А. Скобцов, доктор техн. наук В.Г. Скобелев, доктор техн. наук, профессор В.Н.Ткаченко, кандидаты физ.-мат. наук, доценты В.А. Козловский, И.С Грунский, О.М. Копытова, А.С. Сенченко, В.Ю. Скобцов и др.). Саратовскую ветвь школы А.М. Богомолова на конференции представляли доктора наук, профессора Д.В. Сперанский, А.А. Сытник, В.А. Твердохлебов и многочисленные его ученики – кандидаты наук.

Среди докладов, представленных на конференции, многие рекомендованы к публикации в журнале «Известия Саратовского университета» (новая серия «Математика. Механика. Информатика»), так как в статьях содержатся новые и интересные научные результаты.