МАТЕМАТИКА

УДК 517.518

О СХОДИМОСТИ В $\mathbf{L^p[0,1)}$, $\mathbf{0 < p \le 1}$, РЯДОВ ФУРЬЕ – ВИЛЕНКИНА

С.С. Волосивец

Саратовский государственный университет,
кафедра теории функций и приближений
E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

В статье изучается сходимость п.в. и L^p-сходимость ($0 < p \le 1$) рядов Фурье – Виленкина при некоторых тауберовых условиях на коэффициенты Фурье функции. В случае рядов Фурье – Уолша эти результаты были получены Ф. Морицем.

On Convergence of Fourier – Vilenkin Series in $\mathbf{L^p[0,1)}$, $\mathbf{0 < p \le 1}$

S.S. Volosivets

In this paper we study convergence a.e. and L^p-convergence ($0 < p \le 1$) of Fourier – Vilenkin series under some tauberian conditions on Fourier coefficients of a function. In the case of Fourier – Walsh series these results are obtained by F. Moricz.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \le p_n \le N$ при $n \in \mathbb{N}$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/m_n, \quad x_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le x_n < p_n. \tag{1}$$

Представление (1) единственно, если для $x = k/m_j$, $0 < k < m_j$, $k, j \in \mathbb{N}$, брать разложение с конечным числом $x_n \ne 0$. Для $x, y \in [0,1)$ вида (1) положим $x \oplus y = z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n/m_n$, $z_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n)$, $z_n = x_n + y_n \pmod{p_n}$. Аналогично определяется $x \ominus y$.

Если $k \in \mathbb{Z}_+$ записано в виде

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}, \quad k_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le k_i < p_i, \tag{2}$$

и $x \in [0,1)$ имеет разложение (1), то по определению $\chi_k(x) = \exp(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j/p_j)$. Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, называемая системой Виленкина, ортонормирована и полна в $L[0,1)$. Кроме того, при фиксированном $x \in [0,1)$ для почти всех $y \in [0,1)$ и всех $k \in \mathbb{Z}_+$ имеют место равенства $\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y)$, $\chi_k(x \ominus y) = \chi_k(x)\overline{\chi_k(y)}$. Эти свойства можно найти в [1, § 1.5]. Ряд других свойств будет указан в леммах ниже. Пусть $f \in L^1[0,1)$. Коэффициенты Фурье, частная сумма Фурье и ядро Дирихле по системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ задаются формулами $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_n(t)}\,dt$, $n \in \mathbb{Z}_+$; $S_n(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$; $D_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. В работе будут также рассматри-

© С.С. Волосивец, 2008

ваться средние Фейера и ядро Фейера по системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$: $\sigma_n(f)(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} S_k(f)(x)/n$, $F_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} D_k(x)/n$, $n \in \mathbb{N}$. Далее $\Delta a_k = \Delta^1 a_k = a_k - a_{k+1}$, $\Delta^2 a_k = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}$ и $\|f\|_p = (\int_0^1 |f(t)|^p\,dt)^{1/p}$, $0 < p < \infty$.

В настоящей работе для $f \in L^1[0,1)$ изучается сходимость к нулю (квази)норм $\|f - S_n(f)\|_p$ при $0 < p \le 1$ и некоторых условиях тауберова типа на $\{\hat{f}(n)\}_{n=0}^{\infty}$. Ф. Мориц доказал следующие две теоремы для системы Уолша (частного случая нашей системы при $p_i \equiv 2$).

Теорема A .[2]. Если $f \in L[0,1)$ и

$$\lim_{\lambda\to 1+0} \limsup_{n\to\infty} ([\lambda n] - n + 1)^{-1} \sum_{k=n}^{[\lambda n]} ([\lambda n] - k + 1)|\Delta^m \hat{f}(k)| = 0, \tag{3}$$

где $m = 1$ или $m = 2$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f)(x) = f(x)$ п.в. на $[0,1)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_p = 0$ при $0 < p < 1/m$.

Теорема B. [3]. Пусть $f \in L[0,1)$ и $H(\lambda) = \limsup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n}^{[\lambda n]} k^{p-1}|\Delta \hat{f}(k)|^p$ конечно для некоторых $\lambda > 1$ и $p > 1$. Тогда условия

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_1 = 0 \tag{4}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}(n) \int_0^1 |D_n(t)|\,dt = 0 \tag{5}$$

эквивалентны.

В данной работе доказываются аналоги теорем A и B для произвольных мультипликативных систем ограниченного типа. Приведем необходимые леммы.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1. [4, глава 4, § 4]. *1) Пусть $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для $x \in [m_{k+1}^{-1}, m_k^{-1})$ справедливо неравенство $|D_n(x)| \le m_{k+1} \le Nx^{-1}$.*

2) При $n \in \mathbb{Z}_+$ имеет место равенство $D_{m_n}(x) = m_n X_{[0,1/m_n)}(x)$, где X_E — индикатор множества E.

3) Пусть $k \in \mathbb{N}$ записано в виде (2). *Тогда*

$$D_k(t) = \chi_k(t) \left(\sum_{i=1}^{\infty} D_{m_{i-1}}(t) \sum_{l=1}^{k_i} \chi_{m_{i-1}}^{-l}(t) \right), \quad t \in [0,1).$$

Лемма 2. [1, § 1.5]. *При $0 \le k < m_n$ функции $\chi_k(t)$ постоянны на промежутках $I_s^n = [s/m_n, (s+1)/m_n)$, $s = 0, \ldots, m_n - 1$.*

Лемма 3. *Пусть $f \in L^1[0,1)$, $\lambda > 1$ и $\tau_{n,\lambda}(f)(x) = ([\lambda n] - n + 1)^{-1} \sum\limits_{k=n}^{[\lambda n]} S_k(f)(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - \tau_{n,\lambda}(f)\|_1 = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_{n,\lambda}(f)(x) = f(x)$ п.в. на $[0,1)$.*

Доказательство. Из результатов работы [5] или [4, гл.4, § 10] следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - \sigma_n(f)\|_1 = 0$. Но $\tau_{n,\lambda}(f) = ([\lambda n] - n + 1)^{-1}([\lambda n]\sigma_{[\lambda n]}(f) - (n-1)\sigma_{n-1}(f))$. Поэтому

$$\|\tau_{n,\lambda}(f) - f\|_1 \le ([\lambda n] - n + 1)^{-1}([\lambda n]\|\sigma_{[\lambda n]}(f) - f\|_1 + (n-1)\|\sigma_{n-1}(f) - f\|_1) \le$$

$$\le 2(\lambda - 1)^{-1}\lambda(\|\sigma_{[\lambda n]}(f) - f\|_1 + \|\sigma_{n-1}(f) - f\|_1) = o(1).$$

С другой стороны, известно, что $\sigma_n(f)(x)$ сходится к $f(x)$ п.в. на $[0,1)$ (см., напр. [5]). Аналогично доказательству выше показывается, что во всех точках, в которых $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(f)(x) = f(x)$, верно также $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_{n,\lambda}(f)(x) = f(x)$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Для $n \in \mathbb{N}$ и $x \in (0,1)$ верно неравенство $|nF_n(x)| \le Cx^{-2}$.*

Доказательство. В работе [5] для $n\in[m_{s-1},m_s)$ установлена оценка

$$|nF_n(x)|\le C_1\sum_{\nu=0}^{s-1}m_\nu\sum_{i=\nu}^{s-1}\left(D_{m_i}(x)+\sum_{l=0}^{p_{\nu+1}-1}D_{m_i}(x\oplus l/m_{\nu+1})\right).$$

Если $x\in[m_{j+1}^{-1},m_j^{-1})$, то при $i,\nu>j$ имеем $D_{m_i}(x\oplus l/m_{\nu+1})=0$ при всех $l=0,\dots,p_{\nu+1}-1$. Поэтому

$$|nF_n(x)|\le C_1\sum_{\nu=0}^{j}m_\nu\sum_{i=\nu}^{j}(N+1)m_i\le C_1(N+1)\left(\sum_{i=0}^{j}m_i\right)^2\le C_2m_j^2\le C_2x^{-2}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $1<p\le 2$, $1/p+1/q=1$, $\{a_k\}_{k=0}^\infty\subset\mathbb{C}$. *Тогда для любого* $\gamma\in(0,1)$ *справедливо неравенство*

$$\int_\gamma^1\left|\sum_{k=0}^{n-1}a_kD_{k+1}(x)\right|dx\le C(p)\gamma^{-1/q}\left(\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|^p\right)^{1/p}.$$

Доказательство. Начнем со случая $\gamma=1/m_r$, $r\in\mathbb{N}$. Обозначая $[m_{s+1}^{-1},m_s^{-1})$ через B_s, оценим

$$\int_{1/m_r}^1\left|\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1}a_kD_{k+1}(t)\right|dt=\sum_{s=0}^{r-1}\int_{B_s}\left|\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1}a_kD_{k+1}(t)\right|dt=:\sum_{s=0}^{r-1}F_s.$$

Если $r\ge j+1$, то в силу неравенства Гельдера и леммы 2

$$R_j:=\sum_{s=j}^{r-1}\int_{B_s}\left|\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1}a_kD_{k+1}(t)\right|dt\le\sum_{s=j}^{r-1}m_s^{-1}\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1}|a_k|(k+1)\le$$

$$\le 2N\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1}|a_k|\le 2Nm_{j+1}^{1-1/p}\left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1}|a_k|^p\right)^{1/p}. \tag{6}$$

При $s<j$ на B_s в силу части 2) леммы 1 имеем $D_{m_{j+1}}(t)=0$, $D_{m_{i-1}}(t)=m_{i-1}$ при $i\le s+1$ и $D_{m_i}(t)=0$ при $i\ge s+2$. По части 3) леммы 1 получаем при $s<j$

$$F_s\le\int_{B_s}\left|\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}-1}a_{k-1}\chi_k(t)\sum_{i=1}^{s}m_{i-1}\sum_{\alpha=1}^{k_i}\chi_{m_{i-1}}^{-\alpha}(t)\right|dt+$$

$$+\int_{B_s}\left|\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}-1}a_{k-1}\chi_k(t)m_s\sum_{\alpha=1}^{k_{s+1}}\chi_{m_s}^{-\alpha}(t)\right|dt=:F_s^{(1)}+F_s^{(2)}. \tag{7}$$

Поскольку $\chi_{m_{i-1}}(t)=1$ на B_s при $i\le s$, по неравенству Гельдера и теореме Ф.Рисса – Хаусдорфа – Юнга $(1/p+1/q=1)$ находим, что

$$F_s^{(1)}=\int_{B_s}\left|\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}-1}\left(a_{k-1}\sum_{i=1}^{s}k_im_{i-1}\right)\chi_k(t)\right|dt\le|B_s|^{1/p}\left\|\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}-1}\left(a_{k-1}\sum_{i=1}^{s}k_im_{i-1}\right)\chi_k(t)\right\|_q\le$$

$$\le m_s^{-1/p}\left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-2}|a_k|^pm_s^p\right)^{1/p}\le m_s^{1-1/p}\left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1}|a_k|^p\right)^{1/p}. \tag{8}$$

Наконец, $\chi_{m_s}(t)$ равна γ_{s+1}^l на I_l^{s+1}, где $l=1,\dots,p_{s+1}-1$ и $\gamma_{s+1}=e^{2\pi i/p_{s+1}}$ (см. определение χ_{m_s} и лемму 2). Поэтому

$$F_s^{(2)}=\sum_{l=1}^{p_{s+1}-1}\int_0^{1/m_{s+1}}\left|\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}-1}a_{k-1}m_s\sum_{\alpha=1}^{k_{s+1}}\gamma_{s+1}^{-\alpha l}\chi_k(l/m_{s+1})\chi_k(t)\right|dt=:$$

$$=: \sum_{l=1}^{p_{s+1}-1} \int_0^{1/m_{s+1}} \left| \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}-1} a_{k,s,l}\chi_k(t) \right| dt.$$

Поскольку $|a_{k,s,l}| \le p_{s+1}m_s|a_{k-1}| = m_{s+1}|a_{k-1}|$, снова применяя неравенство Гельдера и теорему Ф.Рисса – Хаусдорфа – Юнга, получаем

$$F_s^{(2)} \le \sum_{l=1}^{p_{s+1}-1} m_{s+1}^{-1/p} \left\| \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}-1} a_{k,s,l}\chi_k(t) \right\|_q \le$$

$$\le \sum_{l=1}^{p_{s+1}-1} m_{s+1}^{1-1/p} \left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} |a_k|^p \right)^{1/p} \le C_1 m_s^{1-1/p} \left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} |a_k|^p \right)^{1/p}. \tag{9}$$

Из оценок (6)–(9) выводим, что при $r \ge j+1$

$$\int_{1/m_r}^1 \left| \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} a_k D_{k+1}(t) \right| dt = R_j + \sum_{s=0}^{j-1} F_s \le C_2 m_{j+1}^{1-1/p} \left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} |a_k|^p \right)^{1/p} \le$$

$$\le C_2 m_r^{1-1/p} \left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} |a_k|^p \right)^{1/p}. \tag{10}$$

При $r \le j$ аналогично из (7)–(9) следует, что

$$\int_{1/m_r}^1 \left| \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} a_k D_{k+1}(t) \right| dt = \sum_{s=0}^{r-1} F_s \le C_3 m_r^{1-1/p} \left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} |a_k|^p \right)^{1/p}. \tag{10'}$$

Пусть теперь $n \in [m_k, m_{k+1})$. Полагая $a_i = 0$ при $i \ge n$, имеем в силу (10) и (10′)

$$\int_{1/m_r}^1 \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i D_{i+1}(t) \right| dt \le |a_0| \int_0^1 |D_1(t)|\, dt + \sum_{j=0}^{k} \int_{1/m_r}^1 \left| \sum_{i=m_j}^{m_{j+1}-1} a_i D_{i+1}(t) \right| dt \le$$

$$\le |a_0| + C_4 \sum_{j=0}^{k} m_r^{1-1/p} \left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} |a_k|^p \right)^{1/p} \le C_5 m_r^{1-1/p} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^p \right)^{1/p}.$$

При $\gamma \ne 1/m_r$, $r \in \mathbb{N}$, найдем $r \in \mathbb{Z}_+$, такое что $\gamma \in [m_{r+1}^{-1}, m_r^{-1})$. Тогда

$$\int_\gamma^1 \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i D_{i+1}(t) \right| dt \le \int_{1/m_{r+1}}^1 \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i D_{i+1}(t) \right| dt \le$$

$$\le C_5 m_{r+1}^{1-1/p} \left(\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|^p \right)^{1/p} \le N^{1-1/p} C_5 \gamma^{1/p-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|^p \right)^{1/p}.$$

Лемма доказана.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть $f \in L^1[0,1)$ и выполнено условие (3) при $m = 1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f)(x) = f(x)$ п.в. на $[0,1)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n(f) - f\|_p = 0$ при всех $0 < p < 1$.*

Доказательство. По определению

$$\tau_{n,\lambda}(f)(x) - S_n(f)(x) = ([\lambda n] - n + 1)^{-1} \sum_{j=n+1}^{[\lambda n]} \sum_{k=n}^{j-1} \hat{f}(k)\chi_k(x). \tag{11}$$

Благодаря преобразованию Абеля находим, что

$$\sum_{k=n}^{j-1}\hat f(k)\chi_k(x)=\sum_{k=n}^{j-2}\Delta\hat f(k)D_{k+1}+\hat f(j-1)D_j(x)-\hat f(n)D_n(x). \tag{12}$$

Меняя порядок суммирования и применяя лемму 1, получаем

$$|\tau_{n,\lambda}(f)(x)-S_n(f)(x)|\le C_1x^{-1}(([\lambda n-n+1])^{-1}\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}(|\hat f(j-1)|+|\hat f(n)|)+$$

$$+([\lambda n-n+1])^{-1}\sum_{k=n}^{[\lambda n]-1}\sum_{j=k+1}^{[\lambda n]}|\Delta\hat f(k)|)=C_1x^{-1}(I_1(n)+I_2(n)). \tag{13}$$

Ясно, что $I_1(n)\to 0$ при $n\to\infty$ согласно аналогу теоремы Римана – Лебега (см., напр. [4, глава 4, теорема 4.2]). В свою очередь,

$$I_2(n)\le([\lambda n-n+1])^{-1}\sum_{k=n}^{[\lambda n]-1}([\lambda n]-k)|\Delta\hat f(k)|$$

и из условия (3) следует, что при некотором $\lambda>1$ и достаточно больших n имеем $I_2(n)<\varepsilon$. Учитывая доказательство леммы 3, получаем, что во всех точках $x\ne 0$, в которых $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(f)(x)=f(x)$, верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(f)(x)=f(x)$. Также из леммы 3 следует, что при каждом $\lambda>1$ справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\|\tau_{n,\lambda}(f)-f\|_p=0$, $0<p<1$, а из (13) при некотором $\lambda>1$ получаем, что $\|\tau_{n,\lambda}(f)(x)-S_n(f)(x)\|_p<\varepsilon$ для всех $n>n_0(\varepsilon)$. Из этих соотношений следует второе утверждение теоремы. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $f\in L^1[0,1)$ и выполнено условие* (3) *при $m=2$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(f)(x)=f(x)$ п.в. на $[0,1)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\|S_n(f)-f\|_p=0$ при всех $0<p<1/2$.*

Доказательство. Снова имеем равенство (11). Применяя дважды преобразование Абеля, находим, что

$$\sum_{k=n}^{j-1}\hat f(k)\chi_k(x)=\sum_{k=n}^{j-3}\Delta^2\hat f(k)(k+1)F_{k+1}(x)+\Delta\hat f(j-2)(j-1)F_{j-1}(x)-$$

$$-\Delta\hat f(n)nF_n(x)+\hat f(j-1)D_j(x)-\hat f(n)D_n(x).$$

Используя леммы 1 и 4, получаем (см. (12) и (13))

$$|\tau_{n,\lambda}(f)(x)-S_n(f)(x)|\le C_1x^{-1}I_1(n)+C_2x^{-2}(([\lambda n]-n+1)^{-1}\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}(|\Delta\hat f(j-2)|+|\Delta\hat f(n)|)+$$

$$+([\lambda n]-n+1)^{-1}\sum_{k=n}^{[\lambda n]-2}\sum_{j=k+2}^{[\lambda n]}|\Delta^2\hat f(k)|)=:C_1x^{-1}I_1(n)+C_2x^{-2}(I_4(n)+I_5(n)). \tag{14}$$

По аналогу теоремы Римана – Лебега $I_1(n)\to 0$ и $I_4(n)\to 0$ при $n\to\infty$. Поскольку

$$I_5(n)\le C_3([\lambda n]-n+1)^{-1}\sum_{k=n}^{[\lambda n]}([\lambda n]-k)|\Delta^2\hat f(k)|,$$

из условия (3) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\tau_{n,\lambda}(f)(x)-S_n(f)(x))=0$ на $(0,1)$. Вместе с леммой 3 это доказывает первое утверждение теоремы. При $0<p<1/2$ из (14) следует, что

$$\int_0^1|\tau_{n,\lambda}(f)(x)-S_n(f)(x)|^p\,dx\le C_1I_1(n)(1-p)^{-1}+C_2(I_4(n)+I_5(n))(1-2p)^{-1}.$$

Последнее выражение стремится к нулю, откуда аналогично доказательству теоремы 1 получаем $\lim\limits_{n\to\infty}\|S_n(f)-f\|_p=0$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если* $f\in L^1[0,1)$ *и* $\lim\limits_{\lambda\to1+0}\limsup\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{[\lambda n]}|\Delta^m\hat f(k)|=0$ *при* $m=1$ *или* $m=2$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(f)(x)=f(x)$ *п.в. на* $[0,1)$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}\|S_n(f)-f\|_p=0$ *при всех* $0<p<1/m$.

Следствие 2. *Если* $f\in L^1[0,1)$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^{-1}\sum\limits_{k=n}^{2n}(2n-k+1)|\Delta^m\hat f(k)|=0$ *при* $m=1$ *или* $m=2$, *то верны оба заключения следствия 1.*

Теорема 3. *Если* $f\in L^1[0,1)$ *и* $H(\lambda,p)=\limsup\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{[\lambda n]}k^{p-1}|\Delta\hat f(k)|^p$ *конечно для некоторых* $\lambda>1$ *и* $p>1$, *то условия* (4) *и* (5) *равносильны.*

Доказательство. Сразу сделаем замечание: если $H(\lambda,r)$ конечно и $r>p>1$, то $H(\lambda,p)$ тоже конечно. Это легко следует из неравенства Гельдера. Поэтому далее считаем, что $1<p\le2$ и пользуемся леммой 5. Пусть справедливо (5). Докажем, что

$$\lim_{\lambda\to1+0}\limsup_{n\to\infty}\|\tau_{n,\lambda}(f)(x)-S_n(f)(x)\|_1=0. \tag{15}$$

Тогда из леммы 3 будет следовать (4). Пусть $d_n=([\lambda n]-n+1)^{-1}$. Из равенства (11) легко получается оценка

$$J_0(n)=\int_0^{d_n}|\tau_{n,\lambda}(f)(x)-S_n(f)(x)|\,dx\le\int_0^{d_n}d_n\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}([\lambda n]-k+1)|\hat f(k)|\le d_n\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}|\hat f(k)|, \tag{16}$$

где последнее выражение есть $o(1)$ в силу аналога теоремы Римана – Лебега. С другой стороны, согласно (12) имеем

$$\int_{d_n}^1|\tau_{n,\lambda}(f)(x)-S_n(f)(x)|\,dx\le\int_{d_n}^1|\hat f(n)D_n(x)|\,dx+\int_{d_n}^1d_n|\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}\hat f(j-1)D_j(x)|\,dx+$$

$$+d_n\int_{d_n}^1\left|\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}\sum_{k=n}^{j-2}\Delta\hat f(k)D_{k+1}(x)\right|dx=J_1(n)+J_2(n)+J_3(n).$$

В силу (5) $\lim\limits_{n\to\infty}J_1(n)=0$. Далее по лемме 5 $(1/p+1/q=1)$

$$J_2(n)\le C_1d_nd_n^{-1/q}\left(\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}|\hat f(j-1)|^p\right)^{1/p}=C_1\left(d_n\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}|\hat f(j-1)|^p\right)^{1/p}.$$

Отсюда в силу $\lim\limits_{n\to\infty}\hat f(n)=0$ получаем $\lim\limits_{n\to\infty}J_2(n)=0$. Наконец, меняя порядок суммирования, с помощью леммы 5 находим, что

$$J_3(n)=d_n\int_{d_n}^1\left|\sum_{k=n}^{[\lambda n]-2}\sum_{j=k+2}^{[\lambda n]}\Delta\hat f(k)D_{k+1}(x)\right|dx=d_n\int_{d_n}^1\left|\sum_{k=n}^{[\lambda n]-2}([\lambda n]-k-1)\Delta\hat f(k)D_{k+1}(x)\right|dx\le$$

$$\le C_1d_n^{1-1/q}\left(\sum_{k=n}^{[\lambda n]}([\lambda n]-k-1)^p|\Delta\hat f(k)|^p\right)^{1/p}\le C_1((\lambda-1)n)^{1/q}\left(\sum_{k=n}^{[\lambda n]}|\Delta\hat f(k)|^p\right)^{1/p}\le$$

$$\le C_1(\lambda-1)^{1/q}\left(\sum_{k=n}^{[\lambda n]}k^{p-1}|\Delta\hat f(k)|^p\right)^{1/p}. \tag{17}$$

Из условия следует, что при λ, близких к 1, правая часть меньше ε при всех n. Объединяя (16) и оценки для $J_1(n)$, $J_2(n)$, $J_3(n)$, получаем (15).

Пусть теперь верно (4). Тогда по лемме 3 $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n(f) - \tau_{n,\lambda}(f)\|_1 = 0$. Используя обозначения, введенные выше, имеем $\|S_n(f) - \tau_{n,\lambda}(f)\|_1 \ge J_1(n) - J_0(n) - J_2(n) - J_3(n)$ или

$$J_1(n) \le \|S_n(f) - \tau_{n,\lambda}(f)\|_1 + J_0(n) + J_2(n) + J_3(n). \tag{18}$$

Но при фиксированном λ первые три слагаемых в (18) стремятся к нулю при $n \to \infty$, а последнее стремится к нулю при $\lambda \to 1+0$ в силу (17). Таким образом, при некотором $\lambda > 1$ и достаточно больших n имеем $J_1(n) = \int_{d_n}^1 |\hat{f}(n)D_n(x)|\,dx < \varepsilon/2$. С другой стороны $\int_0^{d_n} |\hat{f}(n)D_n(x)|\,dx \le nd_n|\hat{f}(n)| \to 0$ при заданном $\lambda > 1$ и $n \to \infty$, откуда $\int_0^1 |\hat{f}(n)D_n(x)|\,dx < \varepsilon$ при $n > n_0(\varepsilon)$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть $f \in L^1[0,1)$, $p > 1$, и*

$$\lim_{\lambda\to 1+0} \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{[\lambda n]} k^{p-1}|\Delta\hat{f}(k)|^p = 0. \tag{19}$$

Тогда условия (4) *и* (5) *равносильны.*

Доказательство. Очевидно, из условия (19) следует условие теоремы 3.

Следствие 4. *Пусть $f \in L^1[0,1)$, $p > 1$, и*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} k^p|\Delta\hat{f}(k)|^p \tag{20}$$

существует и конечен. Тогда условия (4) *и* (5) *равносильны.*

Доказательство. Из условия вытекает ограниченность $(2n)^{-1}\sum\limits_{k=1}^{2n} k^p|\Delta\hat{f}(k)|^p$ и тем более $\sum\limits_{k=n}^{2n} k^{p-1}|\Delta\hat{f}(k)|^p$. По теореме 3 получаем заключение следствия.

Следствие 5. *Пусть $f \in L^1[0,1)$ и для некоторого $p > 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{p-1}|\Delta\hat{f}(k)|^p$ сходится. Тогда условия* (4) *и* (5) *равносильны.*

Замечание 1. Для $p_i \equiv 2$ следствие 3 доказано в [6].

Замечание 2. Тригонометрические аналоги теорем 1 и 2 можно найти в работе [7].

Замечание 3. Аналог следствия 5 для рядов по косинусам см. в [8], аналог следствия 3 для комплексных рядов с асимптотически четными коэффициентами можно найти в [9].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (*проект НШ-2970.2008.1*).

Библиографический список

1. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.

2. *Moricz F.* Walsh – Fourier series with coefficients of generalized bounded variation // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1989. V. 47, № 3. P. 458–465.

3. *Moricz F.* On L^1-convergence of Walsh – Fourier series. II. // Acta Math. Hung. 1991. V. 58, № 1–2. P. 203–210.

4. *Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981.

5. *Pal J., Simon P.* On a generalization of the concept of derivative // Acta Math. Hung. 1977. V.29, № 1–2. P. 155–164.

6. *Moricz F.* On L^1-convergence of Walsh – Fourier series. I. // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. 2. 1989. V.38, № 3. P.411–418.

7. *Chen C.P.* Pointwise convergence of trigonometric series // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1987. V.43, № 2. P. 291–300.

8. *Stanojevic C.V.* Classes of L^1-convergence of Fourier and Fourier – Stieltjes series // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 82, № 2. P. 209–215.

9. *Stanojevic C.V.* Tauberian conditions for L^1-convergence of Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. V.271, № 1. P. 237–244.

УДК 517.984

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ГРАФЕ С ЦИКЛОМ И С ОБОБЩЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕЙКИ

В.А. Юрко

Саратовский государственный университет,
кафедра математической физики и вычислительной математики
E-mail: YurkoVA@info.sgu.ru

Получено решение обратной спектральной задачи для дифференциальных операторов второго порядка на графе с циклом и с обобщенными условиями склейки во внутренней вершине.

Recovering Differential Operators on a Graph with a Cycle and with Generalized Matching Conditions

V.A. Yurko

The solution of the inverse spectral problem is obtained for second-order differential operators on a graph with a cycle and with generalized matching conditions in the internal vertex.

ВВЕДЕНИЕ

В статье исследуются обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов Штурма – Лиувилля на графе с циклом. Обратные спектральные задачи состоят в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Основные результаты по обратным спектральным задачам на *интервале* представлены в [1–6]. Дифференциальные операторы на графах (пространственных сетях, деревьях) часто возникают в естествознании и технике (см. [7]). Большинство работ в этом направлении посвящено так называемым прямым задачам изучения свойств спектра и корневых функций операторов на графе. Обратные спектральные задачи, в силу их нелинейности, являются более трудными, и в настоящее время есть только несколько работ в этой области. В частности, обратные спектральные задачи восстановления коэффициентов дифференциальных операторов на деревьях (т.е. на графах без циклов) по системе спектров и по функциям Вейля исследовались в [8] и других работах. Однако нет аналогичных общих результатов в теории обратных задач для графов с циклами.

В данной работе дана постановка и получено решение обратной спектральной задачи для операторов Штурма – Лиувилля на графе с циклом и с обобщенными условиями склейки во внутренней вершине. Доказана теорема единственности и получена конструктивная процедура решения этого класса обратных задач.

Рассмотрим компактный граф T в $\mathbf{R^m}$ с множеством вершин $V = \{v_0, \dots, v_r\}$ и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_0, \dots, e_r\}$, где $v_1, \dots, v_r$ — граничные вершины, v_0 — внутренняя вершина, $e_j = [v_j, v_0]$, $j = \overline{1,r}$, $e_0 \cap e_1 \cap \dots \cap e_r = \{v_0\}$, и e_0 — цикл. Пусть T_j, $j = \overline{0,r}$ — длина ребра e_j. Каждое ребро $e_j \in \mathcal{E}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, T_j]$. Для нас удобно выбрать следующую ориентацию: при $j = \overline{1,r}$ вершина v_j соответствует $x_j = 0$, а вершина v_0 соответствует $x_j = T_j$; при $j = 0$ оба конца интервала $x_0 = +0$ и $x_0 = T_0 - 0$ соответствуют v_0.

Интегрируемая функция Y на T может быть представлена в виде $Y = \{y_j\}_{j=\overline{0,r}}$, где функция $y_j(x_j)$, $x_j \in [0, T_j]$ определена на ребре e_j. Пусть $q = \{q_j\}_{j=\overline{0,r}}$ — интегрируемая вещественнозначная функция на T; q называется потенциалом. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение на T:

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j) y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \qquad j = \overline{0,r}, \tag{1}$$

где λ — спектральный параметр, а функции y_j, y_j', $j = \overline{0,r}$ абсолютно непрерывны на $[0, T_j]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки во внутренней вершине v_0:

$$y_0(0) = \alpha_j y_j(T_j),\ j = \overline{0,r}, \qquad y_0'(0) - h_0 y_0(0) = \sum_{j=0}^{r} \beta_j y_j'(T_j), \tag{2}$$

где α_j, β_j, h_0 — вещественные числа и $\alpha_j \beta_j \neq 0$, $\alpha_0 + \beta_0 \neq 0$. Предположим, что

$$z_r = (\alpha_0 + \beta_0) \prod_{j=1}^{r} \alpha_j + \alpha_0 \sum_{i=1}^{r} \beta_i \prod_{j=1,\, j \neq i}^{r} \alpha_j \neq 0.$$

© В.А. Юрко, 2008

Это условие называется условием регулярности склейки. Дифференциальные операторы, которые не удовлетворяют этому условию, имеют качественно отличные свойства при постановке и исследовании обратной задачи и в данной работе не рассматриваются; они требуют отдельного исследования. Отметим, что если $\alpha_j = \beta_j = 1$, $h_0^0 = 0$, то это условие называется стандартным условием склейки [7,8]. Для стандарной склейки $z_r = r + 2$, и условие регулярности склейки очевидно выполняется. Отметим также, что

$$z_0 = \alpha_0 + \beta_0, \qquad z_{k+1} = \alpha_{k+1} z_k + \beta_{k+1} \prod_{j=1}^{k} \alpha_j \,.$$

Рассмотрим краевую задачу $B_0(q)$ на T для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями в граничных вершинах $v_1, \ldots, v_r$:

$$y_j(0) = 0, \qquad j = \overline{1,r}.$$

Кроме того, рассмотрим краевые задачи $B_k(q)$, $k = \overline{1,r}$ на T для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями

$$y_k'(0) = 0, \qquad y_j(0) = 0, \qquad j = \overline{1,r} \setminus k.$$

Обозначим через $\Lambda_k = \{\lambda_{kn}\}_{n \geq 0}$ собственные значения (с учетом кратностей) задач $B_k(q)$, $k = \overline{0,r}$.

В отличие от задач на деревьях (см. [8]), здесь задание спектров Λ_k, $k = \overline{0,r}$ не определяет однозначно потенциал, и мы нуждаемся в дополнительной информации. Пусть $S_j(x_j, \lambda)$, $C_j(x_j, \lambda)$, $j = \overline{0,r}$ — решения уравнения (1) на ребре e_j при начальных условиях:

$$S_j(0, \lambda) = C_j'(0, \lambda) = 0, \qquad S_j'(0, \lambda) = C_j(0, \lambda) = 1.$$

При каждом фиксированном $x_j \in [0, T_j]$ функции $S_j^{(\nu)}(x_j, \lambda)$, $C_j^{(\nu)}(x_j, \lambda)$, $j = \overline{0,r}$, $\nu = 0, 1$ являются целыми по λ порядка $1/2$, причем,

$$\langle C_j(x_j, \lambda),\, S_j(x_j, \lambda) \rangle \equiv 1,$$

где $\langle y, z \rangle = yz' - y'z$ — вронскиан функций y и z. Обозначим

$$h(\lambda) = S_0(T_0, \lambda), \qquad H(\lambda) = \alpha_0 C_0(T_0, \lambda) - \beta_0 S_0'(T_0, \lambda).$$

Пусть $\{\nu_n\}_{n \geq 1}$ — нули целой функции $h(\lambda)$, и положим $\omega_n = \operatorname{sign} H(\nu_n)$, $\Omega = \{\omega_n\}_{n \geq 1}$. Обратная задача ставится следующим образом.

Обратная задача 1. По заданным Λ_k, $k = \overline{0,r}$ и Ω построить потенциал q на T.

Отметим, что коэффициенты из условия склейки (3) предполагаются известными a priori. Сформулируем теорему единственности решения обратной задачи 1. Для этого наряду с q рассмотрим потенциал $\tilde{q}$. Везде в дальнейшем, если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к q, то $\tilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\tilde{q}$.

Теорема 1. *Если $\Lambda_k = \tilde{\Lambda}_k$, $k = \overline{0,r}$, и $\Omega = \tilde{\Omega}$, то $q = \tilde{q}$. Таким образом, задание Λ_k, $k = \overline{0,r}$ и Ω однозначно определяет потенциал q на T.*

Эта теорема будет доказана в пункте 3. Кроме того, мы дадим конструктивную процедуру решения обратной задачи 1. В пункте 2 вводятся основные понятия и доказываются вспомогательные утверждения.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Фиксируем $k = \overline{1,r}$. Пусть $\Phi_k = \{\Phi_{kj}\}_{j=\overline{0,r}}$ — решения уравнения (1), удовлетворяющие (2) и краевым условиям:

$$\Phi_{kj}(0, \lambda) = \delta_{jk}, \qquad j = \overline{1,r}, \tag{3}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. Положим $M_k(\lambda) = \Phi_{kk}'(0, \lambda)$, $k = \overline{1,r}$. Функция $M_k(\lambda)$ называется *функцией Вейля* относительно граничной вершины v_k. Ясно, что

$$\Phi_{kk}(x_k,\lambda) = C_k(x_k,\lambda) + M_k(\lambda)S_k(x_k,\lambda), \qquad x_k \in [0,T_k], \qquad k=\overline{1,r}, \tag{4}$$

и следовательно,

$$\langle \Phi_{kk}(x_k,\lambda),\, S_k(x_k,\lambda)\rangle \equiv 1.$$

Обозначим $M^1_{kj}(\lambda) = \Phi_{kj}(0,\lambda)$, $M^0_{kj}(\lambda) = \Phi'_{kj}(0,\lambda)$. Тогда

$$\Phi_{kj}(x_j,\lambda) = M^1_{kj}(\lambda)C_j(x_j,\lambda) + M^0_{kj}(\lambda)S_j(x_j,\lambda), \qquad x_j \in [0,T_j],\ j=\overline{0,r},\ k=\overline{1,r}. \tag{5}$$

В частности, $M^1_{kk}(\lambda) = 1$, $M^0_{kk}(\lambda) = M_k(\lambda)$. Подставляя (5) в (2) и (3), получим линейную алгебраическую систему s_k относительно $M^\nu_{kj}(\lambda)$, $\nu = 0,1$, $j=\overline{0,r}$. Определитель $\Delta_0(\lambda)$ системы s_k не зависит от k и имеет вид

$$\Delta_0(\lambda) = d(\lambda)\prod_{j=1}^{r}\alpha_j S_j(T_j,\lambda) + \alpha_0 h(\lambda)D(\lambda), \tag{6}$$

где

$$d(\lambda) = \alpha_0 C_0(T_0,\lambda) + \beta_0 S'_0(T_0,\lambda) + \alpha_0 h_0 S_0(T_0,\lambda) - (\alpha_0\beta_0 + 1), \tag{7}$$

$$D(\lambda) = \sum_{i=1}^{r}\beta_i S'_i(T_i,\lambda)\prod_{j=1,\,j\neq i}^{r}\alpha_j S_j(T_j,\lambda) = \prod_{j=1}^{r}\alpha_j S_j(T_j,\lambda)\sum_{i=1}^{r}\frac{\beta_i S'_i(T_i,\lambda)}{\alpha_i S_i(T_i,\lambda)}. \tag{8}$$

Функция $\Delta_0(\lambda)$ является целой по λ порядка $1/2$, и ее нули совпадают с собственными значениями краевой задачи $B_0(q)$. Решая алгебраическую систему s_k, получаем по формулам Крамера $M^s_{kj}(\lambda) = \Delta^s_{kj}(\lambda)/\Delta_0(\lambda)$, $s = 0,1$, $j=\overline{0,r}$, где определитель $\Delta^s_{kj}(\lambda)$ получается из $\Delta_0(\lambda)$ заменой столбца, соответствующего $M^s_{kj}(\lambda)$, на столбец свободных членов. В частности,

$$M_k(\lambda) = -\frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)}, \qquad k=\overline{1,r}, \tag{9}$$

где

$$\Delta_k(\lambda) = d(\lambda)\alpha_k C_k(T_k,\lambda)\prod_{j=1,\,j\neq k}^{r}\alpha_j S_j(T_j,\lambda) + \alpha_0 h(\lambda)D_k(\lambda), \tag{10}$$

$$D_k(\lambda) = \beta_k C'_k(T_k,\lambda)\prod_{j=1,\,j\neq k}^{r}\alpha_j S_j(T_j,\lambda) + \alpha_k C_k(T_k,\lambda)\sum_{i=1,\,i\neq k}^{r}\beta_i S'_i(T_i,\lambda)\prod_{j=1,\,j\neq i,k}^{r}\alpha_j S_j(T_j,\lambda). \tag{11}$$

Отметим, что $\Delta_k(\lambda)$ получается из $\Delta_0(\lambda)$ заменой $S^{(\nu)}_k(T_k,\lambda)$, $\nu = 0,1$, на $C^{(\nu)}_k(T_k,\lambda)$. Функция $\Delta_k(\lambda)$ является целой λ порядка $1/2$ и ее нули совпадают с собственными значениями краевой задачи $B_k(q)$. Функции $\Delta_k(\lambda)$, $k=\overline{0,r}$ называются характеристическими функциями задач $B_k(q)$.

Пусть $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Im}\rho \geq 0$. Обозначим $\Lambda = \{\rho :\ \operatorname{Im}\rho \geq 0\}$, $\Lambda^\delta = \{\rho :\ \arg\rho \in [\delta, \pi-\delta]\}$. Известно (см. [9]), что при каждом фиксированном $j=\overline{0,r}$ на ребре e_j существует фундаментальная система решений уравнения (1) $\{e_{j1}(x_j,\rho), e_{j2}(x_j,\rho)\}$, $x_j \in [0,T_j]$, $\rho \in \Lambda$, $|\rho| \geq \rho^*$ со свойствами:

1) функции $e^{(\nu)}_{js}(x_j,\rho)$, $\nu = 0,1$, непрерывны при $x_j \in [0,T_j]$, $\rho \in \Lambda$, $|\rho| \geq \rho^*$;

2) для каждого $x_j \in [0,T_j]$ функции $e^{(\nu)}_{js}(x_j,\rho)$, $\nu = 0,1$, являются аналитическими при $\operatorname{Im}\rho > 0$, $|\rho| > \rho^*$;

3) равномерно по $x_j \in [0,T_j]$ имеют место асимптотические формулы

$$e^{(\nu)}_{j1}(x_j,\rho) = (i\rho)^\nu \exp(i\rho x_j)[1],\ e^{(\nu)}_{j2}(x_j,\rho) = (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x_j)[1],\ \rho \in \Lambda,\ |\rho| \to \infty, \tag{12}$$

где $[1] = 1 + O(\rho^{-1})$.

Зафиксируем $k=\overline{1,r}$. Имеем

$$\Phi_{kj}(x_j,\lambda) = A^1_{kj}(\rho)e_{j1}(x_j,\rho) + A^0_{kj}(\rho)e_{j2}(x_j,\rho), \qquad x_j \in [0,T_j]. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (2) и (3), получаем линейную алгебраическую систему s^0_k относительно $A^\nu_{kj}(\lambda)$, $\nu = 0,1$, $j=\overline{0,r}$. Определитель $\delta_0(\rho)$ системы s^0_k не зависит от k и имеет вид $\delta_0(\rho) = 2(-2i\rho)^r\Delta_0(\lambda)$, $\rho \in \Lambda$. Кроме того,

$$\delta_0(\rho) = z_r \exp\Big(-i\rho\sum_{j=0}^{r}T_j\Big)[1], \qquad \rho \in \Lambda^\delta,\ |\rho| \in \infty. \tag{14}$$

Решая алгебраическую систему s_k^0 по формулам Крамера и используя (12) и (14), вычисляем

$$A_{kk}^1(\rho) = [1],\ A_{kk}^0(\rho) = a_k \exp(2i\rho T_k)[1], \qquad \rho \in \Lambda^\delta,\ |\rho| \in \infty,$$

где a_k — константа. Вместе с (12) и (13) это дает при фиксированном $x_k \in [0, T_k)$:

$$\Phi_{kk}^{(\nu)}(x_k, \lambda) = (i\rho)^\nu \exp(i\rho x_k)[1], \qquad \rho \in \Lambda^\delta,\ |\rho| \in \infty. \tag{15}$$

В частности, $M_k(\lambda) = (i\rho)[1],\ \rho \in \Lambda^\delta,\ |\rho| \in \infty$. Кроме того, равномерно по $x_j \in [0, T_j]$,

$$S_j^{(\nu)}(x_j, \lambda) = \frac{1}{2i\rho}\Big((i\rho)^\nu \exp(i\rho x_j)[1] - (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x_j)[1]\Big),\ \rho \in \Lambda,\ |\rho| \to \infty, \tag{16}$$

$$C_j^{(\nu)}(x_j, \lambda) = \frac{1}{2}\Big((i\rho)^\nu \exp(i\rho x_j)[1] + (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x_j)[1]\Big),\ \rho \in \Lambda,\ |\rho| \to \infty. \tag{17}$$

Пусть $\lambda_{kn}^0 = (\rho_{nk}^0)^2,\ k = \overline{0, r}$, — собственные значения краевых задач $B_k(0)$ с нулевым потенциалом и $h_0 = 0$, и пусть $\Delta_k^0(\lambda)$ — характеристические функции задач $B_k(0)$. Согласно (6)–(8) и (10)–(11) имеем

$$\Delta_0^0(\lambda) = \Big((\alpha_0 + \beta_0)\cos\rho T_0 - (\alpha_0\beta_0 + 1)\Big)\prod_{j=1}^r \alpha_j \frac{\sin\rho T_j}{\rho} +$$

$$+\alpha_0 \frac{\sin\rho T_0}{\rho}\sum_{i=1}^r \beta_i \cos\rho T_i \prod_{j=1,\, j\neq i}^r \alpha_j \frac{\sin\rho T_j}{\rho}, \tag{18}$$

$$\Delta_k^0(\lambda) = \Big((\alpha_0 + \beta_0)\cos\rho T_0 - (\alpha_0\beta_0 + 1)\Big)\alpha_k \cos\rho T_k \prod_{j=1,\, j\neq k}^r \alpha_j \frac{\sin\rho T_j}{\rho} +$$

$$+\alpha_0 \frac{\sin\rho T_0}{\rho}\Big(\beta_k(-\rho\sin\rho T_k)\prod_{j=1,\, j\neq k}^r \alpha_j \frac{\sin\rho T_j}{\rho} + \alpha_k \cos\rho T_k \sum_{i=1,\, i\neq k}^r \beta_i \cos\rho T_i \prod_{j=1,\, j\neq i,k}^r \alpha_j \frac{\sin\rho T_j}{\rho}\Big). \tag{19}$$

Пусть $\tau = \operatorname{Im}\rho$. Из (6)–(8), (10)–(11), (16) и (17) вытекает, что при $|\rho| \to \infty$

$$\begin{gathered}\Delta_0(\lambda) = \Delta_0^0(\lambda) + O\Big(\rho^{-r-1}\exp\Big(|\tau|\sum_{j=0}^r T_j\Big)\Big),\\ \Delta_k(\lambda) = \Delta_k^0(\lambda) + O\Big(\rho^{-r}\exp\Big(|\tau|\sum_{j=0}^r T_j\Big)\Big), \qquad k = \overline{1, r}.\end{gathered} \tag{20}$$

Используя (18)–(20), известным методом (см., напр. [10]), можно получить следующие свойства характеристических функций $\Delta_k(\lambda)$ и собственных значений Λ_k краевых задач $B_k(q)$, $k = \overline{0, r}$.

1) При $\rho \in \Lambda,\ |\rho| \to \infty$,

$$\Delta_0(\lambda) = O\Big(|\rho|^{-r}\exp\Big(|\tau|\sum_{j=0}^r T_j\Big)\Big), \qquad \Delta_k(\lambda) = O\Big(|\rho|^{1-r}\exp\Big(|\tau|\sum_{j=0}^r T_j\Big)\Big),\ k = \overline{1, r}.$$

2) Существуют $h > 0,\ C_h > 0$, такие, что

$$|\Delta_0(\lambda)| \geq C_h|\rho|^{-r}\exp\Big(|\tau|\sum_{j=0}^r T_j\Big), \qquad |\Delta_k(\lambda)| \geq C_h|\rho|^{1-r}\exp\Big(|\tau|\sum_{j=0}^r T_j\Big),\ k = \overline{1, r},$$

при $|\tau| \geq h$. Следовательно, собственные значения $\lambda_{kn} = \rho_{nk}^2$ лежат в полосе $|\operatorname{Im}\rho| < h$.

3) Число $N_{\xi k}$ нулей функции $\Delta_k(\lambda)$ в прямоугольнике $\Pi_\xi = \{\rho :\ |\operatorname{Im}\rho| \leq h,\ \operatorname{Re}\rho \in [\xi, \xi + 1]\}$ ограничено по ξ.

4) Обозначим $G_\delta = \{\rho :\ |\rho - \rho_{0n}| \geq \delta\ \ \forall n \geq 0\}$, $\delta > 0$. Тогда

$$|\Delta_0(\lambda)| \geq C_\delta|\rho|^{-r}\exp\Big(|\tau|\sum_{j=0}^r T_j\Big), \qquad \rho \in G_\delta.$$

5) Существуют числа $r_N \to \infty$ такие, что при достаточно малом $\delta > 0$ окружности $|\rho| = r_N$ лежат в G_δ при всех N.

6) При $n \to \infty$

$$\rho_{nk} = \rho_{nk}^0 + O\Big(\frac{1}{\rho_{nk}^0}\Big).$$

Исследуем теперь восстановление характеристических функций по их нулям. Обозначим

$$\lambda_{kn}^{01} = \begin{cases} \lambda_{kn}^0, & \text{если} \quad \lambda_{kn}^0 \neq 0, \\ 1, & \text{если} \quad \lambda_{kn}^0 = 0. \end{cases} \tag{21}$$

По теореме Адамара [11, с. 289] имеем

$$\Delta_k^0(\lambda) = A_k^0 \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{kn}^0 - \lambda}{\lambda_{kn}^{01}}, \tag{22}$$

где

$$A_k^0 = (-1)^{s_k} \Big(\frac{\partial^{s_k}}{\partial \lambda^{s_k}} \Delta_k^0(\lambda)\Big)_{|\lambda=0} \tag{23}$$

и $s_k \geq 0$ — кратность нулевого собственного значения.

Покажем, что

$$\Delta_k(\lambda) = A_k^0 \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{kn} - \lambda}{\lambda_{kn}^{01}}. \tag{24}$$

В самом деле, по теореме Адамара

$$\Delta_k(\lambda) = A_k \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{kn} - \lambda}{\lambda_{kn}^{1}}, \tag{25}$$

где $A_k \neq 0$ — константа,

$$\lambda_{kn}^1 = \begin{cases} \lambda_{kn}, & \text{если} \quad \lambda_{kn} \neq 0, \\ 1, & \text{если} \quad \lambda_{kn} = 0. \end{cases}$$

Из (22) и (25) вытекает, что

$$\frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta_k^0(\lambda)} = \frac{A_k}{A_k^0} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{kn}^{01}}{\lambda_{kn}^1} \prod_{n=0}^{\infty} \Big(1 + \frac{\lambda_{kn} - \lambda_{kn}^0}{\lambda_{kn}^0 - \lambda}\Big).$$

Используя свойства характеристических функций и собственных значений, получаем для больших отрицательных λ:

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta_k^0(\lambda)} = 1, \qquad \lim_{\lambda \to -\infty} \prod_{n=0}^{\infty} \Big(1 + \frac{\lambda_{kn} - \lambda_{kn}^0}{\lambda_{kn}^0 - \lambda}\Big) = 1,$$

следовательно,

$$A_k = A_k^0 \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{kn}^1}{\lambda_{kn}^{01}}.$$

Подставляя это соотношение в (25), приходим к (24).

Таким образом, задание спектра $\Lambda_k = \{\lambda_{kn}\}_{n \geq 0}$ однозначно определяет характеристическую функцию $\Delta_k(\lambda)$ по формуле (24), где A_k^0 и $\{\lambda_{kn}^{01}\}$ определены согласно (21), (23), (18) и (19).

3. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 1

В этом разделе мы даем конструктивную процедуру решения обратной задачи 1 и доказываем единственность решения. Сначала мы изучим вспомогательные обратные задачи.

Зафиксируем $k = \overline{1, r}$ и рассмотрим следующую обратную задачу на ребре e_k, которую назовем IP(k).

IP(k). По заданной $M_k(\lambda)$ построить $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, T_k]$.

В обратной задаче IP(k) мы строим потенциал только на ребре e_k. Однако функция Вейля $M_k(\lambda)$ несет глобальную информацию со всего графа. Другими словами, IP(k) не является локальной обратной задачей, относящейся только к ребру e_k. Установим единственность решения задачи IP(k).

Теорема 2. *Если $M_k(\lambda) = \tilde{M}_k(\lambda)$, то $q_k(x_k) = \tilde{q}_k(x_k)$ п.в. на $[0, T_k]$. Таким образом, задание функции Вейля M_k однозначно определяет потенциал q_k на ребре e_k.*

Доказательство. Определим матрицу $P^k(x_k, \lambda) = [P^k_{js}(x_k, \lambda)]_{j,s=1,2}$ по формуле

$$P^k(x_k, \lambda) \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{kk}(x_k, \lambda) & \tilde{S}_k(x_k, \lambda) \\ \tilde{\Phi}'_{kk}(x_k, \lambda) & \tilde{S}'_k(x_k, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{kk}(x_k, \lambda) & S_k(x_k, \lambda) \\ \Phi'_{kk}(x_k, \lambda) & S'_k(x_k, \lambda) \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Тогда (26) дает

$$\begin{gathered} \Phi_{kk}(x_k, \lambda) = P^k_{11}(x_k, \lambda)\tilde{\Phi}_{kk}(x_k, \lambda) + P^k_{12}(x_k, \lambda)\tilde{\Phi}'_{kk}(x_k, \lambda), \\ S_k(x_k, \lambda) = P^k_{11}(x_k, \lambda)\tilde{S}_k(x_k, \lambda) + P^k_{12}(x_k, \lambda)\tilde{S}'_k(x_k, \lambda). \end{gathered} \tag{27}$$

Так как $\langle \Phi_{kk}(x_k, \lambda),\ S_k(x_k, \lambda)\rangle \equiv 1$, то

$$P^k_{1s}(x_k, \lambda) = (-1)^s \Big(\Phi_{kk}(x_k, \lambda)\tilde{S}^{(2-s)}_k(x_k, \lambda) - \tilde{\Phi}^{(2-s)}_{kk}(x_k, \lambda) S_k(x_k, \lambda) \Big). \tag{28}$$

Из (15), (16) и (28) вытекает, что

$$P^k_{1s}(x_k, \lambda) = \delta_{1s} + O(\rho^{-1}), \qquad \rho \in \Lambda^\delta,\ |\rho| \to \infty,\ x_k \in (0, T_k]. \tag{29}$$

Согласно (4) и (28) имеем

$$\begin{gathered} P^k_{1s}(x_k, \lambda) = (-1)^s \Big(\Big(C_k(x_k, \lambda)\tilde{S}^{(2-s)}_k(x_k, \lambda) - \tilde{C}^{(2-s)}_k(x_k, \lambda) S_k(x_k, \lambda) \Big) + \\ + (M_k(\lambda) - \tilde{M}_k(\lambda)) S_k(x_k, \lambda)\tilde{S}^{(2-s)}_k(x_k, \lambda) \Big). \end{gathered}$$

Так как $M_k(\lambda) = \tilde{M}_k(\lambda)$, то при каждом фиксированном x_k функции $P^k_{1s}(x_k, \lambda)$ являются целыми по λ порядка $1/2$. Вместе с (29) это дает $P^k_{11}(x_k, \lambda) \equiv 1$, $P^k_{12}(x_k, \lambda) \equiv 0$. Подставляя эти соотношения в (27), получаем $\Phi_{kk}(x_k, \lambda) \equiv \tilde{\Phi}_{kk}(x_k, \lambda)$ и $S_k(x_k, \lambda) \equiv \tilde{S}_k(x_k, \lambda)$ при всех x_k и λ, следовательно, $q_k(x_k) = \tilde{q}_k(x_k)$ п.в. на $[0, T_k]$. $\square$

Используя метод спектральных отображений [5], можно построить конструктивную процедуру решения обратной задачи IP(k). Здесь мы дадим краткие пояснения; подробнее см. [5]. Возьмем $\tilde{q} = 0$. Тогда $\tilde{S}_k(x_k, \lambda) = \dfrac{\sin \rho x_k}{\rho}$. Положим $\lambda' = \min\limits_{l \ge 0}(\lambda_{0l}, \tilde{\lambda}_{0l})$ и возьмем фиксированное $\delta > 0$. В λ-плоскости рассмотрим контур γ (с обходом против часовой стрелки) вида $\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^- \cup \gamma'$, где $\gamma^\pm = \{\lambda :\ \pm \mathrm{Im}\,\lambda = \delta;\ \mathrm{Re}\,\lambda \ge \lambda'\}$, $\gamma' = \{\lambda :\ \lambda - \lambda' = \delta \exp(i\alpha),\ \alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)\}$. При каждом фиксированном $x_k \in [0, T_k]$ функция $S_k(x_k, \lambda)$ является единственным решением линейного интегрального уравнения:

$$S_k(x_k, \lambda) = \tilde{S}_k(x_k, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \tilde{D}_k(x_k, \lambda, \mu) S_k(x_k, \mu)\, d\mu, \tag{30}$$

где $\tilde{D}_k(x, \lambda, \mu) = \displaystyle\int_0^x \tilde{S}_k(t, \lambda)\tilde{S}_k(t, \mu)\hat{M}_k(\mu)\, dt$, $\hat{M}_k(\mu) = M_k(\mu) - \tilde{M}_k(\mu)$. Потенциал q_k на ребре e_k может быть построен из решения интегрального уравнения (30) по формуле

$$q_k(x_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (S_k(x_k, \lambda)\tilde{S}_k(x_k, \lambda))' \hat{M}_k(\lambda)\, d\lambda$$

или по формуле $q_k(x_k) = \lambda + S''_k(x_k, \lambda)/S_k(x_k, \lambda)$. Также возможно построить потенциал по дискретным спектральным данным. Для этого надо вычислить интеграл в (30) по теореме о вычетах и привести (30) к уравнению в пространстве последовательностей; подробнее см. [5].

Рассмотрим следующую вспомогательную обратную задачу на ребре e_0, которую назовем IP(0).

IP(0). По заданным $d(\lambda), h(\lambda), \Omega$ построить $q_0(x_0)$, $x_0 \in [0, T_0]$.

Эта обратная задача изучалась в [12–13] и других работах в несколько другой эквивалентной постановке. Для удобства опишем здесь кратко решение задачи IP(0).

Обозначим $G(\lambda) = \alpha_0 C_0(T_0, \lambda) + \beta_0 S_0'(T_0, \lambda)$. Имеем

$$G(\alpha) = d(\lambda) - \alpha_0 h_0 h(\lambda) + (\alpha_0 \beta_0 + 1). \tag{31}$$

Напомним, что $H(\lambda) = \alpha_0 C_0(T_0, \lambda) - \beta_0 S_0'(T_0, \lambda)$, $\omega_n = \operatorname{sign} H(\nu_n)$, где $\{\nu_n\}_{n\geq 1}$ — нули функции $h(\lambda)$. Ясно, что

$$S_0'(T_0, \nu_n) = \frac{1}{2\beta_0}\Big(G(\nu_n) - H(\nu_n)\Big). \tag{32}$$

Так как $\langle C_0(T_0, \lambda), S_0(T_0, \lambda)\rangle \equiv 1$, то

$$H^2(\lambda) - G^2(\lambda) = -4\alpha_0\beta_0(1 + C_0'(T_0, \lambda)h(\lambda)),$$

следовательно,

$$H(\nu_n) = \omega_n \sqrt{G^2(\nu_n) - 4\alpha_0\beta_0}. \tag{33}$$

Обозначим $\alpha_n = \displaystyle\int_0^{T_0} S_0^2(t, \nu_n)\, dt$. Тогда (см. [4])

$$\alpha_n = \dot{h}(\nu_n) S_0'(T_0, \nu_n), \qquad \dot{h}(\lambda) = \frac{dh(\lambda)}{d\lambda}. \tag{34}$$

Множество $\{\nu_n, \alpha_n\}_{n\geq 1}$ называется спектральными данными called для потенциала q_0. Известно (см. [1–6]), что функция q_0 однозначно строится по спектральным данным $\{\nu_n, \alpha_n\}_{n\geq 1}$. Таким образом, IP(0) решена, и справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Задание $d(\lambda), h(\lambda), \Omega$ однозначно определяет потенциал $q_0(x_0)$ на $[0, T_0]$. Функция q_0 может быть построена по следующему алгоритму.*

Алгоритм 1. Заданы $d(\lambda), h(\lambda), \Omega$.

1) Находим $\{\nu_n\}_{n\geq 1}$ — нули функции $h(\lambda)$.

2) Строим $G(\lambda)$ по формуле (31).

3) Вычисляем $H(\nu_n)$ согласно (33).

4) Находим $S_0'(T_0, \nu_n)$ по формуле (32).

5) Вычисляем $\{\alpha\}_{n\geq 1}$, используя (34).

6) Строим q_0 по спектральным данным $\{\nu_n, \alpha_n\}_{n\geq 1}$, решая классическую обратную задачу Штурма – Лиувилля.

Перейдем теперь к решению обратной задачи 1. Сначала дадим доказательство теоремы 1. Предположим, что $\Lambda_k = \tilde{\Lambda}_k$, $k = \overline{0, r}$ и $\Omega = \tilde{\Omega}$. Тогда, согласно результатов пункта 2, имеем

$$\Delta_k(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}_k(\lambda), \qquad k = \overline{0, r}.$$

В силу (9) это дает

$$M_k(\lambda) \equiv \tilde{M}_k(\lambda), \qquad k = \overline{1, r}.$$

Применяя теорему 2 при каждом фиксированном $k = \overline{1, r}$, получаем

$$q_k(x_k) = \tilde{q}_k(x_k) \text{ п.в. на } [0, T_k], \qquad k = \overline{1, r},$$

следовательно,

$$C_k(x_k, \lambda) \equiv \tilde{C}_k(x_k, \lambda),\ S_k(x_k, \lambda) \equiv \tilde{S}_k(x_k, \lambda), \qquad k = \overline{1, r}, \qquad x_k \in [0, T_k].$$

Учитывая (6) и (10), имеем

$$d(\lambda) = \tilde{d}(\lambda), \qquad h(\lambda) = \tilde{h}(\lambda).$$

Так как $\Omega = \tilde{\Omega}$, то из теоремы 3 вытекает $q_0(x_0) = \tilde{q}_0(x_0)$ п.в. на $[0, T_0]$, и теорема 1 доказана.

Решение обратной задачи 1 может быть построено по следующему алгоритму.

Алгоритм 2. Заданы $\Lambda_k,\ k=\overline{0,r}$ и Ω.

1) Построим $\Delta_k(\lambda),\ k=\overline{0,r}$ по формуле (24), где A_k^0 и $\{\lambda_{kn}^{01}\}$ определены в (21), (23), (18) и (19).
2) Находим $M_k(\lambda),\ k=\overline{1,r}$ по формуле (9).
3) При каждом $k=\overline{1,r}$ решаем задачу IP(k) и находим $q_k(x_k),\ x_k\in[0,T_k]$ на ребре e_k.
4) При каждом $k=\overline{1,r}$ строим $C_k(x_k,\lambda), S_k(x_k,\lambda),\ x_k\in[0,T_k]$.
5) Вычисляем $d(\lambda)$ и $h(\lambda)$, используя (6) и (10).
6) Строим $q_0(x_0),\ x_0\in[0,T_0]$ по $d(\lambda), H(\lambda), \Omega$, используя алгоритм 1.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проекты* 07-01-00003, 07-01-92000-*ННС-а*).

Библиографический список

1. *Марченко В.А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977.
2. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М.: Наука, 1984.
3. *Beals R., Deift P., Tomei C.* Direct and Inverse Scattering on the Line, Math. Surveys and Monographs. V.28. Amer. Math. Soc. Providence: RI, 1988.
4. *Freiling G., Yurko V.A.* Inverse Sturm – Liouville Problems and their Applications. N.Y.: NOVA Science Publishers, 2001.
5. *Yurko V.A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory, Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.
6. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
7. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2004.
8. *Yurko V.A.* Inverse spectral problems for Sturm – Liouville operators on graphs // Inverse Problems. 2005. V. 21. P. 1075–1086.
9. *Naimark M.A.* Linear Differential Operators, 2nd ed., M.: Nauka, 1969; English transl. of 1st ed. P. I, II. N.Y.: Ungar, 1967, 1968.
10. *Bellmann R., Cooke K.* Differential-difference Equations. N.Y.: Academic Press, 1963.
11. *Conway J.B.* Functions of One Complex Variable, 2nd ed. V. I. N.Y.: Springer-Verlag, 1995.
12. *Станкевич И.В.* Об одной обратной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192, № 1. С. 34–37.
13. *Марченко В.А., Островский И.В.* Характеристика спектра оператора Хилла // Мат. сб. 1975. Т. 97. С. 540–606.

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МЕХАНИКА

УДК 533.6.011: 533.72: 523.2

ГАЗОДИНАМИКА И МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖПЛАНЕТНОЙ И МЕЖЗВЕЗДНОЙ СРЕД. ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

В.Б. Баранов

Институт проблем механики РАН,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
кафедра аэромеханики и газовой динамики
E-mail: baranov@ipmnet.ru

Проблема взаимодействия межпланетной и межзвездной сред сводится к исследованию взаимодействия сверхзвукового потока полностью ионизованного водородного газа от источника (солнечный ветер) со сверхзвуковым поступательным потоком межзвездного газа, главными компонентами которого являются нейтральная (атомы водорода) и плазменная (протоны и электроны).

В работе описывается самосогласованная кинетико-континуальная модель такого взаимодействия, предложенная в [8]. Основная особенность модели заключается в том, что течение нейтральной компоненты и ее влияние на плазменную не могут быть описаны в рамках механики сплошных сред, поскольку для главного процесса резонансной перезарядки (атомов H на протонах) число Кнудсена порядка единицы $(Kn \sim 1)$. В модели [8] уравнения Эйлера с «источниками» импульса и энергии для плазменной компоненты решаются совместно с уравнением Больцмана для нейтральной компоненты. Подробно описывается математическая постановка задачи и основные результаты численных расчетов. Некоторые предсказания модели в дальнейшем были подтверждены экспериментальными данными, полученными на космических аппаратах, исследующих внешние области солнечной системы. Например, образование «водородной стенки», предсказанное в [7, 8] и открытое на аппарате Hubble Space Telescope [11], пересечение аппаратами Voyager-1 и Voyager-2 гелиосферной ударной волны соответственно в декабре 2004 г. (на расстоянии 94 а.е.) и в августе 2007 г. (на расстоянии в 84 а.е.) и др.

В работе также описываются результаты развития модели [8], учитывающие влияние циклов солнечной активности, аномальных космических лучей, межзвездного магнитного и др.

Gasdynamics and Magnetohydrodynamics of the Interplanetary and Interstellar Gas Interaction. Theory and Experiments

V.B. Baranov

A problem of the interaction between interplanetary and interstellar gas flows is the problem of the interaction between the supersonic flow of the fully ionized hydrogen gas flow from a source (solar wind) and the supersonic translational flow of the interstellar gas which has neutral (H atoms) and plasma (electrons and protons) components.

Self-consistent, kinetic-continual model of this interaction, suggested in [8], is described in this paper. This model has the basic peculiarity connected with the mean free path of H atoms in a main process of the resonance charge exchange (charge exchange between H atoms and protons), namely, Knudsen number in this process $Kn \sim 1$, i. e. hydrodynamic equations are not correct for describing H atoms motion. Euler equations with «sources» of the momentum and energy for the plasma component and the Boltzmann equation for neutral component are solved in the model [8]. Mathematical formulation of the problem considered and the basic results of numerical calculations are in details described. Some predictions of the model [8] were later confirmed by experimental data obtained onboard of spacecraft investigating outer regions of the solar system. For example, the «hydrogen wall», predicted in [7, 8], was discovered experimentally onboard of Hubble Space Telescope [11] and Voyagers 1 and 2 have crossed the solar wind termination shock in December 2004 (at the distance 94 AU) and in August 2007 (at the distance 84AU) respectively (see Fig. 2) and so on.

Results of a development of the model in [8] taking into account effects of the solar cycles, anomalous cosmic rays, interstellar magnetic field and so on are also described.

© В.Б. Баранов, 2008

ВВЕДЕНИЕ

С точки зрения газовой динамики проблема взаимодействия межпланетной и межзвездной сред сводится к исследованию взаимодействия сверхзвукового потока от источника (солнечный ветер) со сверхзвуковым поступательным потоком газа (межзвездная среда). В рамках механики сплошных сред в таком взаимодействии образуются три поверхности сильного разрыва: внешняя и внутренняя ударные волны торможения поступательного потока и потока от источника соответственно и тангенциальный разрыв, разделяющий эти потоки. Первая модель сверхзвукового обтекания полностью ионизованной водородной плазмы солнечного ветра межзвездным газом была построена в работе [1] в предположении, что межзвездный газ, так же как и солнечный ветер, является полностью ионизованной водородной плазмой, что позволило решить задачу в рамках уравнений гидроаэромеханики. При этом задача была решена в ньютоновском приближении тонкого слоя (см., напр. [2]), в котором толщина области между ударными волнами предполагается малой по сравнению с ее расстоянием от Солнца. Только несколько лет спустя путем численных расчетов удалось показать [3], что в реальных условиях область между ударными волнами не является тонкой, а наземные астрономические наблюдения показали [4], что солнечная система погружена в частично ионизованное локальное межзвездное облако и движется относительно него со скоростью $V_\infty \sim 25$ км/сек. Измерение температуры газа в локальном облаке привело к величине $T_\infty \sim 7000K$, т.е. число Маха, набегающего на Солнце газа, оказалось равным $M_\infty \sim 2$. Таким образом, модель, предложенная в [1], оказалась непосредственно неприменимой к рассматриваемой проблеме взаимодействия солнечного ветра и межзвездного газа, хотя и привела к развитию некоторых направлений в астрофизике (межзвездные пузыри, обтекание межзвездных глобул звездными ветрами, взаимодействие звездных ветров в двойных системах и т.п. [5]).

Построение физически обоснованной модели взаимодействия двух сверхзвуковых потоков газа для рассматриваемой проблемы осложнялось тем, что взаимодействие солнечного ветра с заряженной компонентой межзвездного газа (в дальнейшем для краткости — плазменная компонента) можно описывать в рамках механики сплошных сред (см., напр. [6]), в то время как макроскопические уравнения гидроаэромеханики для описания взаимодействия солнечного ветра с нейтральной компонентой (атомами H) становятся некорректными, поскольку число Кнудсена $Kn = l/L \geq 1$ (l — длина свободного пробега атомов водорода в главном процессе перезарядки с протонами, а L — характерный размер задачи). В этом случае для описания движения атомов H требуется использование кинетического приближения, в котором основным является уравнение Больцмана для функции распределения атомов водорода f_H.

На рис. 1 приведена качественная картина рассматриваемого течения. Здесь HP — тангенциальный разрыв, разделяющий плазменную компоненту межзвездной среды и плазму солнечного ветра. Этот тангенциальный разрыва обычно называют гелиопаузой. На гелиопаузу справа набегает сверхзвуковой ($M_\infty > 1$) поток межзвездного газа, плазменная компонента которого тормозится через головную ударную волну BS. Солнечный ветер тормозится во внутренней ударной волне TS, которая обычно называется гелиосферной ударной волной. Движущиеся из межзвездной среды (область (4)) атомы водорода свободно проходят через поверхности сильного разрыва (их траектории показаны на рис. 1 пунктирными линиями), подвергаясь перезарядке с протонами в каждой из областей (1)–(3). В результате перезарядки в рассматриваемом течении рождаются новые протоны, параметры которых совпадают с параметрами атомов H. Эти протоны,

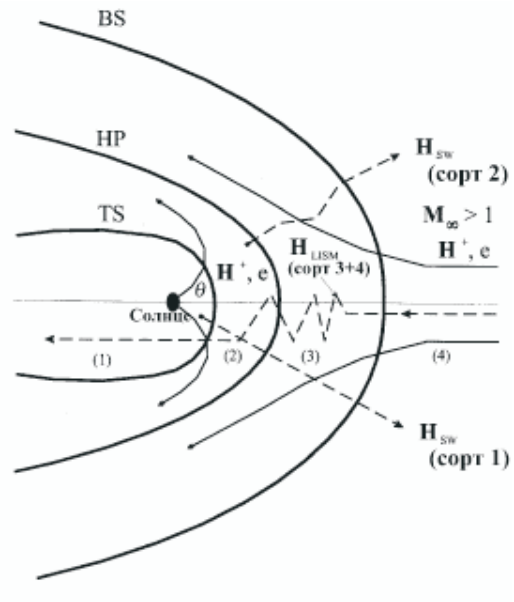


Рис. 1

взаимодействуя с плазменной компонентой основного течения, изменяют импульс и энергию последней. В результате перезарядки также рождается как минимум три сорта атомов водорода, которые имеют параметры протонов той области, в которой они родились. Атомы H_{SW}, образующиеся в сверхзвуковом солнечном ветре (сорт 1) и во внутреннем ударном слое (сорт 2), имеют параметры соответствующих областей. В частности, атомы сорта 1, имея большую среднюю скорость (относительно тепловой), направленную от Солнца, проникают в межзвездную среду и, перезаряжаясь с протонами набегающего потока, изменяют импульс и энергию плазменной компоненты межзвездной среды еще до головной ударной волны BS.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ЕЕ ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

Впервые кинетико-континуальная модель взаимодействия солнечного ветра с межзвездной средой была предложена в [7] и численно решена в работе [8]. Как было отмечено выше, для описания движения плазменной компоненты межзвездной среды и солнечного ветра были использованы уравнения идеальной газодинамики с «источниковыми» членами, описывающими влияние атомов H через посредство процессов перезарядки ($H + H^+ = H^+ + H$). В стационарном случае они будут иметь вид

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0, \qquad (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \mathbf{F}_1[f_H(\mathbf{r}, \mathbf{w}), p, \mathbf{V}, \rho],$$

$$\nabla \cdot \left[\rho \mathbf{V}\left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right)\right] = F_2[f_H(\mathbf{r}, \mathbf{w}_H), p, \mathbf{V}, \rho], \quad p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{V}$, p, ρ и ε — средняя скорость, давление, плотность и внутренняя энергия плазменной компоненты соответственно, γ — отношение теплоемкостей, $\mathbf{F}_1$ и F_2 — «источниковые» члены, характеризующие изменение импульса и энергии плазменной компоненты за счет процессов перезарядки и являющиеся функционалами от функции распределения атомов водорода f_H и газодинамических параметров. Для замыкания системы уравнений Эйлера (1) необходимо добавить уравнение Больцмана для f_H, которое в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$\begin{gathered}\mathbf{w}_H \cdot \frac{\partial f_H(\mathbf{r}, \mathbf{w}_H)}{\partial \mathbf{r}} + \left[\frac{\mathbf{F}_r + \mathbf{F}_g}{m_H}\right] \cdot \frac{\partial f_H(\mathbf{r}, \mathbf{w}_H)}{\partial \mathbf{w}_H} = f_p(\mathbf{r}, \mathbf{w}_H) \int |\mathbf{w}'_H - \mathbf{w}_H| \sigma f_H(\mathbf{r}, \mathbf{w}'_H)\, d\mathbf{w}'_H - \\ - f_H(\mathbf{r}, \mathbf{w}_H) \int |\mathbf{w}_H - \mathbf{w}_p| \sigma f_p(\mathbf{r}, \mathbf{w}_p)\, d\mathbf{w}_p\,,\end{gathered} \tag{2}$$

где $\mathbf{r}$, $\mathbf{w}$ — радиус-вектор и индивидуальная скорость частицы, нижние индексы «H» и «p» относятся к атомам водорода и протонам соответственно, σ — эффективное сечение столкновения атома H и протона, сопровождающееся процессом перезарядки, верхний индекс «штрих» означает скорость частицы после столкновения, $\mathbf{F}_r$ и $\mathbf{F}_g$ — силы радиационного отталкивания и гравитационного притяжения Солнца соответственно. Функция распределения протонов f_p считается локально-максвелловской, поскольку только в этом случае уравнения (1) являются корректными. Поэтому уравнение (2) является линейным относительно f_H. «Источниковые» члены в уравнениях (1) вычисляются по формулам:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{n_p} \int d\mathbf{w}_H \int d\mathbf{w}_p \sigma |\mathbf{w}_H - \mathbf{w}_p| (\mathbf{w}_H - \mathbf{w}_p) f_H(\mathbf{r}, \mathbf{w}_H) f_p(\mathbf{r}, \mathbf{w}_p),$$

$$F_2 = m_H \int d\mathbf{w}_H \int d\mathbf{w}_p \sigma |\mathbf{w}_H - \mathbf{w}_p| \left(\frac{w_H^2}{2} - \frac{w_p^2}{2}\right) f_H(\mathbf{r}, \mathbf{w}_H) f_p(\mathbf{r}, \mathbf{w}_p),$$

$$n_H = \int d\mathrm{w}_H f_H(\mathrm{r}, \mathrm{w}_H), \qquad n_p = \int d\mathrm{w}_p f_p(\mathrm{r}, \mathrm{w}_p), \tag{3}$$

где n_H и n_p — концентрации атомов водорода и протонов. Уравнения Эйлера для полностью ионизованной плазмы (1) справедливы при предположении о равенстве электронной и протонной температуры. Кроме того, предполагается мгновенная релаксация вновь образовавшихся в результате перезарядки протонов, т.е. предполагается, что они мгновенно приобретают скорость и температуру протонов плазменной компоненты.

Для решения интегрального уравнения (2) для функции распределения f_H и вычисления «источниковых» членов в уравнениях (1) по формулам (3) использовался усовершенствованный метод Монте-Карло с расщеплением траекторий, разработанный для рассматриваемой проблемы в [9]. Этот метод дает существенно большую степень точности, чем прямой метод Монте-Карло. Предполагается, что солнечный ветер сферически симметричный. Это предположение дает возможность рассматривать задачу как осесимметричную (в сферической системе координат все параметры зависят от гелиоцентрического расстояния r и угла θ, отсчитываемого от оси Oz, направленной навстречу набегающему потоку). В качестве граничных условий для уравнений (1) использовались постоянные значения скорости V_E, концентрации электронов n_{eE} (протонов n_{pE}) и число Маха M_E на орбите Земли ($r = 1$ а.е.), а также значения тех же параметров в межзвездном газе (с индексом «∞»). Уравнения (1) решались численно методом Годунова с выделением поверхностей сильного разрыва. При этом на ударных волнах BS и TS (рис. 1) удовлетворялись соотношения Гюгонио, а на гелиопаузе HP — равенство нулю нормальной компоненты скорости и равенство давлений (условия на тангенциальном разрыве). Для решения уравнения (2) функция распределения атомов водорода в межзвездной среде $f_{H\infty}$ считалась максвелловской. Кроме того, из наблюдательных данных необходимо было задавать отношение $\mu = F_r/F_g$, т.е. отношение сил солнечного радиационного давления и гравитационного притяжения.

Для решения поставленной осесимметричной задачи использовался метод глобальных итераций, первый шаг которого состоял в решении чисто газодинамической задачи, т.е. в решении уравнений (1) для задачи обтекания сферически симметричного сверхзвукового источника (солнечный ветер) сверхзвуковым поступательным потоком полностью ионизованного газа (межзвездный газ) с «источниковыми» членами, равными нулю. Затем методом Монте-Карло рассчитывались траектории атомов водорода в поле газодинамических параметров, что позволяло в первом приближении вычислить «источниковые» члены по формулам (3). Вычисленные в этом приближении «источниковые» члены использовались для решения газодинамической части проблемы на следующем шаге итераций, на котором принимались в расчет процессы перезарядки. Для расчета траекторий атомов H в новом поле газодинамических параметров и вычисления «источниковых» членов в следующем приближении снова использовался метод Монте-Карло. Процесс итераций продолжался до тех пор, пока последующее приближение не даст пренебрежимо малые поправки ($\sim 2\%$) к предыдущему. В работе [8] процесс итераций прекращался на четвертом шаге.

На рис. 2 представлены результаты расчета при следующих значениях параметров на орбите Земли и в набегающем потоке межзвездного газа

$$\begin{gathered} n_{eE} = 7\,\text{см}^{-3}, \quad V_E = 450\,\text{км/сек}, \quad M_E = 10, \quad \mu = 0.75, \\ n_{p\infty} = 0.07\,\text{см}^{-3}, \quad V_\infty = 25\,\text{км/сек}, \quad M_\infty = 2, \quad n_{H\infty} = 0.14\,\text{см}^{-3}\,. \end{gathered} \tag{4}$$

Пунктиром на рис. 2 представлены результаты расчетов при $n_{H\infty} = 0$, т.е. при отсутствии влияния атомов водорода. Как видно из рис. 2, перезарядка приводит, во-первых, к существенному уменьшению гелиоцентрического расстояния области сильного взаимодействия двух потоков (область между ударными волнами) и, во-вторых, сложная картина течения в хвостовой области, состоящая из отраженной ударной волны (RS), тангенциального разрыва (TD) и диска Маха (MD), исчезает при отсутствии перезарядки. Гелиосферная ударная волна становится гладкой (отсутствует тройная точка A), а течение в области меж-

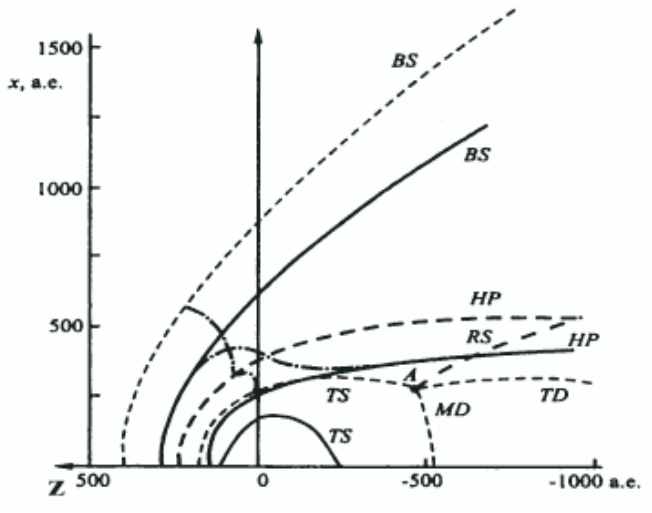


Рис. 2

ду гелиопаузой и гелиосферной ударной волной (внутренний ударный слой) — дозвуковым.

В номере журнала Science (2005 г., т. 309) американские ученые сообщили, что в декабре 2004 г. произошло событие, которого ждали в течение почти 30 лет, а именно пересечение аппаратом Voyager-1 гелиосферной ударной волны на расстоянии от Солнца в 94 а.е., что с большой степенью точности совпадает с предсказанием этого результата в [8] (см. рис. 2). Поскольку на этом аппарате не было приборов, измеряющих скорость, плотность и температуру солнечного ветра, то одним из решающих доказательств пересечения был измеренный скачок межпланетного магнитного поля [10].

В августе 2007 года Voyager-2, на котором такие приборы, были установлены, пересек эту ударную волну на расстоянии в 84 а.е. Это событие, которое широко обсуждалось на конференции Американского геофизического союза (AGU) в декабре 2007 года в Сан-Франциско, также подтвердило предсказание кинетико-континуальной модели по положению гелиосферной ударной волны с точностью в несколько процентов.

Еще одним неожиданным результатом модели в [8] было предсказание так называемой «водородной стенки» (этот результат был получен уже на первой итерации метода Монте-Карло в работе [7]), представляющей собой немонотонное поведение концентрации атомов водорода (рис. 3), проникающих в солнечный ветер из межзвездной среды.

Как видно из рис. 3, вблизи гелиопаузы концентрация атомов H имеет ярко выраженный максимум, связанный с образованием вторичных атомов H сорта 3. Протоны межзвездной среды, замедленные во внешнем ударном слое (области между BS и HP), в результате перезарядки с первичными атомами H межзвездной среды (сорт 4) превращаются в атомы H сорта 3, имеющими скорость партнеров по перезарядке. Уменьшение средней скорости атомов H сортов 3 и 4 приводит к возрастанию их суммарной концентрации. Уменьшение же их концентрации при приближении к Солнцу связано с процессами вторичных перезарядок в ударном слое и фотоионизации солнечным излучением. Физически очевидно, что «водородная стенка» наиболее ярко выражена вблизи критической линии тока (вблизи оси симметрии Oz) из-за наиболее эффективного торможения плазменной компоненты межзвездной среды на солнечном ветре вблизи гелиопаузы и практически отсутствует в хвосте.

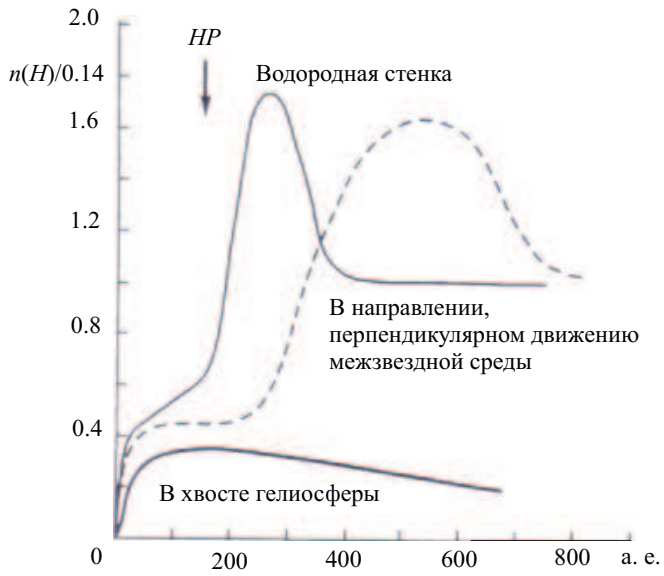


Рис. 3

Первое сообщение об экспериментальном открытии «водородной стенки» (см. [11]) на основе интерпретации наблюдений спектров поглощения излучения в водородной линии Лайман-α от звезды α-Cen при помощи прибора GHRS на борту американского аппарата Hubble Space Telescop было сделано в работе [12]. Один из полученных в этой работе спектров приведен на рис. 4. На этом рисунке кривая *1* представляет собой спектр излучения звезды, кривая *2* — спектр, полученный прибором GHRS. Кривая *3* получена в предположении, что поглощение от звезды происходит только на межзвездных атомах водорода. Видно, что это кривая не совпадает с измеренным спектром. Пунктирная линия *4* получена при учете поглощения не только в межзвездной среде, но и в «водородной стенке». Как видно из рис. 4, правая часть измеренного спектра полностью совпадает с кривой *4*. Это привело авторов [11] к выводу об экспериментальном открытии «водородной стенки», поскольку именно «синему» доплеровскому смещению соответствуют атомы H, проникающие из межзвездной среды в солнечную систему. Интересно, что несовпадение левого крыла спектра («красное» доплеровское смещение) объясняется наличием поглощения в «водородных стенках» у наблюдаемых звезд [13, 14], что, в свою очередь, свидетельствует о наличии у них звездных ветров.

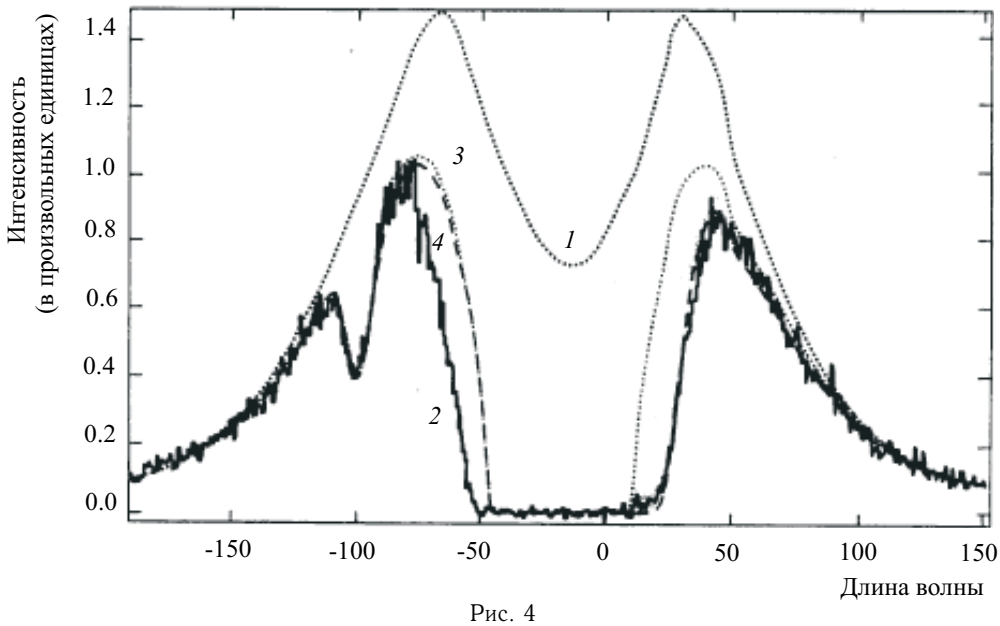


Рис. 4

Здесь следует заметить, что рассмотренная выше модель предсказала еще несколько физических явлений, одним из которых является эффект «фильтра», связанный с тем, что концентрация атомов H, проникших в солнечную систему, меньше, чем их концентрация в межзвездной среде (см. рис. 3) вследствие большого эффективного сечения столкновений, сопровождающихся перезарядкой. Этот эффект «фильтра», связанный в основном с внешним ударным слоем (область между BS и HP на рис. 1), оказался существенным и для атомов кислорода и азота [15], которые не влияют на рассмотренное течение из-за их малого космического содержания. Данные измерений на космическом аппарате Ulysses и их интерпретация доказали наличие такого «фильтра». Особенно убедительными явились прямые измерения на этом аппарате параметров гелия, которые показали [16], что его параметры в солнечной системе совпадают с теми параметрами, которые измеряются в межзвездной среде при помощи телескопов. Это связано с тем, что для атомов гелия эффективное сечение перезарядки очень мало по сравнению с сечениями для атомов H, O и N.

2. РАЗВИТИЕ КИНЕТИКО-КОНТИНУАЛЬНОЙ МОДЕЛИ

Модель взаимодействия солнечного ветра с межзвездной средой, рассмотренная выше, не объясняет многих эффектов, которые были обнаружены при экспериментальном исследовании гелиосферы при помощи космических аппаратов. Модель в работе [8] является стационарной и не учитывает 11-летний цикл солнечной активности. Влияние этих циклов наиболее полно было исследовано в [17]. Было показано, в частности, что вдоль оси симметрии положение гелиосферной ударной волны (TS) меняется за цикл менее чем на 10%, гелиопаузы (HP) — около 2%, а положение головной ударной волны (BS) практически не меняется.

В рамках модели работы [8] предполагалось, что в результате процессов перезарядки вновь образовавшиеся протоны мгновенно приобретают скорость и температуру основных протонов (происходит мгновенная релаксация). Отказ от этого предположения приводит к необходимости добавить к системе уравнений (1) и (2) дополнительное уравнение для «давления» (момента функции распределения) вновь образовавшихся протонов. Результаты численного решения такой проблемы в [19] привели к выводу о том, что неравновесность приводит к некоторому уменьшению толщины внутреннего ударного слоя в головной части течения (область между TS и HP) и довольно сильному увеличению гелиоцентрического расстояния до гелиосферной ударной волны (на величину ~ 70 а.е.) в хвостовой области. Кроме того, в [19] были вычислены потоки энергичных H-атомов из области внутреннего ударного слоя, которые планируется измерять с 1 а.е. на специальном спутнике IBEX для изображения внутреннего ударного слоя в этих потоках. Показано, что модель с учетом неравновесности предсказывает меньшие (по сравнению с моделью в [8]) потоки частиц с энергией <1 кэв и большие потоки частиц с энергией >1 кэв. В США спутник IBEX предполагается запустить в 2008 году.

До последнего времени оставался открытым вопрос о размерах области влияния солнечного ветра на межзвездный газ в хвостовой части гелиосферы, поскольку гелиопауза является незамкнутой поверхностью и она может быть названа границей гелиосферы только в головной части течения (ее гелиоцентрическое расстояние вдоль оси симметрии ~ 150 а.е., как видно из рис. 2). Иными словами, возникает вопрос: до каких гелиоцентрических расстояний параметры солнечного ветра становятся неотличимыми от параметров невозмущенного поступательного потока? Эта проблема исследовалась в работе [18]. Численные расчеты в рамках осесимметричной модели показали, что процесс перезарядки приводит к постепенному выравниванию параметров солнечного ветра в хвостовой области, и на расстоянии ~ 40–50 тысяч а.е. параметры солнечного ветра и невозмущенного потока межзвездного газа становятся неотличимыми.

В работах [20, 21] было исследовано влияние космических лучей на рассмотренное в [8] течение. Было показано [20], что влияние процессов перезарядки существенно сильнее влияния галактических космических лучей (ГКЛ) и последним можно пренебречь. Однако аномальная компонента космических лучей, как показано в [21], приводит к образованию «предвестника» у гелиосферной ударной волны и, как результат, к уменьшению интенсивности этой ударной волны. Последнее может изменить параметры течения во внутреннем ударном слое, что важно для проектирования экспериментов на упомянутом выше спутнике IBEX.

В заключение заметим, что построение трехмерной магнитогидродинамической модели, учитывающей влияние межзвездного магнитного поля на рассмотренную проблему, было осуществлено в работе [22]. В систему уравнений (1) и (2) были добавлены члены, связанные с влиянием магнитного поля на течение, и добавлено уравнение индукции магнитного поля. В частном случае, когда магнитное поле в межзвездной среде составляет угол $\sim 45°$ с направлением скорости, удалось объяснить асимметрию прихода межзвездных атомов H в солнечную систему, полученную путем измерения рассеянного солнечного излучения прибором SWAN на спутнике SOHO [23].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проекты* 07-01-00291, 07-02-01101, 06-02-72557) *и программы фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН.*

Библиографический список

1. *Баранов В.Б., Краснобаев К.В., Куликовский А.Г.* Модель взаимодействия солнечного ветра с межзвездной средой // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193, № 1. С. 41–44.

2. *Черный Г.Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.

3. *Баранов В.Б., Лебедев М.Г., Рудерман М.С.* Структура области взаимодействия солнечного ветра с межзвездной средой и ее влияние на проникновение атомов *H* в солнечную систему // Astrophys. Space Sci. 1979. V. 66, № 2. P. 429–440.

4. *Lallement R., Bertin P.* Nothern-hemisphere observations of nearly interstellar gas: possible detection of the local cloud // Astron. Astrophys. 1992. V. 266, № 1. P. 479–485.

5. *Баранов В.Б., Краснобаев К.В.* Гидродинамическая теория космической плазмы. М.: Наука, 1977. 335 с.

6. *Baranov V.B.* On the problem of fluid dynamics foundation for application in the space physics // Astrophs. Space Sci. 2000. V. 274, № 1–2. P. 3–16.

7. *Baranov V.B., Lebedev M.G., Malama Yu.G.* The influence of the interface between heliosphere and the local interstellar medium on the penetration of H-atoms to the solar system // Astrophys. J. 1991. V. 375, № 1. P. 347–351.

8. *Baranov V.B., Malama Yu.G.* Model of the solar wind interaction with the local interstellar medium: numerical solution of self-consistent problem // J. Geophys. Res. 1993. V. 98, № A9. P. 15,157–15,163.

9. *Malama Yu.G.* Monte Carlo simulation of neutral atom trajectories in the solar system // Astrophys. Space Sci. 1991. V. 176, № 1. P. 21–46.

10. *Burlaga L.F., Ness N.F., Acuna M.H., Lepping R.P., Connerney J.E.P., Stone E.S., McDonald F.B.* Crossing the termination shock into the heliosheath: magnetic fields // Science. 2005. V. 309. P. 2027–2029.

11. *Linsky J.L.* Wood B.E. The α-Centaury line of sight: D/H ratio, physical properties of local interstellar gas and measurements of heated hydrogen at heliospheric interface // Astrophys. J. 1996. V. 463, № 1. P. 254–270.

12. *Linsky J.L.* GHRS observations of the LISM // Space Sci. Rev. 1996. V. 78. P. 157–164.

13. *Wood B.E., Linsky J.L., Zank G.P.* Heliospheric, astrospheric and interstellar Ly-α absorption toward 36 Ophiuchi // Astrophys. J. 2000. V. 537, № 1. P. 304–311.

14. *Izmodenov V.V., Lallement R., Malama Yu.G.* Heliospheric and astrospheric hydrogen absorption towards Sirius: No need for interstellar hot gas // Astron. Astrophys. 1999. V. 342, № 1. P. L13–L16.

15. *Izmodenov V.V., Malama Yu.G., Gloeckler G., Geiss J.* Filtration of interstellar H, O, N atoms through the heliospheric interface: Inferences on local interstellar abundances of the elements // Astron. Astrophys. 2004. V. 414, № 3. P. L29–L32.

16. *Witte M.* Kinetic parameters of interstellar neutral helium. Review of results obtained during one solar cycle with Ulysses / GAS-instrument // Astron. Astrophys. 2004. V. 426, № 3. P. 835–844.

17. *Izmodenov V.V., Malama Yu.G., Ruderman M.S.* Solar cycle influence on the interaction of the solar wind with the local interstellar cloud // Astron. Astrophys. 2005. V. 34, № 3. P. 1069–1080.

18. *Измоденов В.В., Алексашов Д.Б.* Модель хвостовой области гелиосферного интерфейса // Письма в Астрон. журн. 2003. Т. 29, № 1. С. 69–75.

19. *Malama Yu.G., Izmodenov V.V., Chalov S.V.* Modeling of the heliospheric interface: multi-component nature of the heliospheric plasma // Astron. Astrophys. 2006. V. 445, № 2. P. 693–701.

20. *Myasnikov A.V., Alexashov D.B., Izmodenov V.V., Chalov S.V.* Self-consistent model of the solar wind interaction with three-component circumsolar interstellar cloud: Mutual influence of the thermal plasma, galactic cosmic rays and H atoms // J. Geophys. Res. 2000. V.105, № A3. P. 5167–5177.

21. *Alexashov D.B., Chalov S.V., Myasnikov A.V., Izmodenov V.V., Kallenbach R.* The dynamic role of anomalous cosmic rays in the outer heliosphere // Astron. Astrophys. 2004. V. 420, № 2. P. 729–736.

22. *Izmodenov V.V., Alexashov D.B., Myasnikov A.V.* Direction of the interstellar H atom inflow in the heliosphere: Role of the interstellar magnetic field // Astron. Astrophys. 2005. V. 437, № 3. P. L35–L38.

23. *Lallement R., Quemerais E., Bertaux J.-L., Ferron S., Koutroumpa D., Pellinen R.* Deflection of the interstellar neutral hydrogen flow across the heliospheric interface // Science. 2005. V. 307, № 5714. P. 1447–1449.

УДК 539.3

МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ В НАНОТЕХНОЛОГИИ

В.А. Еремеев, Е.А. Иванова*, Н.Ф. Морозов**

Южный научный центр РАН,
Южный Федеральный университет
E-mail: eremeyev@math.rsu.ru

*Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, кафедра теоретической механики
E-mail: ivanova@EI5063.spb.edu

**Санкт-Петербургский государственный университет кафедра теории упругости
E-mail: morozov@NM1016.spb.edu

В последнее десятилетие производство и внедрение наноразмерных агрегатов и включений становится актуальным в электронике, медицине, космической технике и многих других отраслях производства. В связи с этим определилась необходимость анализировать нанообъекты на предмет прочности, устойчивости, дефектологии и долговечности. Какими же методами мы можем пользоваться? Естественно, обсуждается возможность применения традиционных методов классической механики, которые развивались и опробывались столетиями. Здесь мнения ученых разделились — некоторые считают это применение невозможным, а другие используют традиционные методы в полном объеме без корректив. Истина, как нам кажется, заключается в тезисе: традиционные методы механики можно использовать в задачах нанотехнологии, но необходима определенная корректировка. И здесь, прежде всего, возникает вопрос о правомерности использования при исследовании нанообъектов традиционных механических и физических параметров.

Mechanical Problems in Nanotechnology

V.A. Eremeev, E.A. Ivanova, N.F. Morozov

During the last decade, production and adoption of nano-aggregations and nano-inclusions have become actual in electronics, medicine, space engineering and many other branches of production. In this connection, the necessity of studying the nano-subject resistance, stiffness, defectology, durability has emerged. Which of the techniques are best applicable? Feasibility of applying the traditional methods of Newtonian Mechanics, which have been developed and tested for centuries, is widely discussed. However, the researchers' opinions differ much: some of the scientists think it impossible to use this method, others are apt to employ the traditional techniques entirely without any amendments. In our opinion, the truth is in the following thesis: the traditional methods of the Mechanics could be used to solve nanotechnology problems, but still with certain corrections. And here the question arises about appropriateness of using the traditional mechanical and physical parameters of nano-subjects.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЖЕСТКОСТИ НАНООБЪЕКТОВ

В работе [1] были найдены и проанализированы величины модуля Юнга и коэффициента Пуассона для слоев наноразмерной толщины. В качестве модели исследования использовался двумерный монокристалл, изображенный на рис. 1, имеющий бесконечную длину в направлении x и $N \geq 2$

© В.А. Еремеев, Е.А. Иванова, Н.Ф. Морозов, 2008

атомарных слоев в направлении y. Взаимодействие между атомами считается парным. Заметим, что толщина кристалла H (его протяженность в направлении y) принципиально не может быть определена однозначно. Например, если положить, что толщина кристалла равна расстоянию между слоями атомов, лежащими на противоположных торцах (см. рис. 1), то тогда $H = (N-1)h$, где h — межслойное расстояние, N — число слоев. Но, с другой стороны, вполне резонно определить толщину кристалла как произведение числа слоев на толщину одного слоя, что приводит к формуле $H = Nh$. Поэтому обозначим

$$H \stackrel{\text{def}}{=} N_* h, \qquad N-1 \le N_* \le N\,, \tag{1}$$

где N_* — величина, отражающая произвол в определении H.

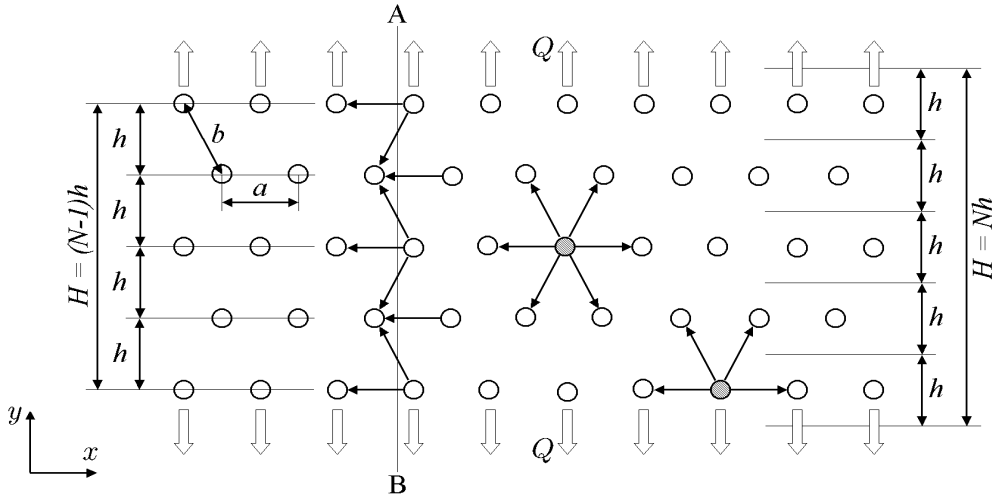


Рис. 1. Двумерная монокристаллическая полоса

Основной задачей данной работы являлось определение зависимости коэффициента Пуассона и модуля Юнга конечного (в одном из направлений) монокристалла от числа атомарных слоев. Решение этой задачи дало следующие результаты:

$$\nu_1 = \nu_\infty, \quad E_1 = \frac{N}{N_*}\,E_\infty; \quad \nu_2 = \frac{N-1}{N-\frac{1}{9}}\,\nu_\infty, \quad E_2 = \frac{N}{N-\frac{1}{9}}\,E_\infty\,. \tag{2}$$

Здесь ν_1 и E_1 — коэффициент Пуассона и модуль Юнга при растяжении вдоль оси x, величины ν_2 и E_2 соответствуют растяжению вдоль оси y, $\nu_\infty = 1/3$, $E_\infty = 2C/\sqrt{3}$ — значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона, соответствующие бесконечному кристаллу. Рассмотрим полученные формулы. При растяжении вдоль атомарных слоев модуль Юнга E_1 существенно зависит от величины N_*, то есть от того, как определяется толщина нанокристаллической полосы. Если положить $N_* = N$ (максимальное значение N_*), то тогда при растяжении вдоль атомарных слоев коэффициент Пуассона и модуль Юнга не зависят от числа слоев. Связано это, очевидно, с тем, что в продольном направлении рассматриваемый кристалл бесконечен. Модуль Юнга E_1^{max}, соответствующий минимальному значению $N_* = N-1$, напротив, отнюдь не постоянен, он увеличивается при уменьшении числа атомарных слоев, достигая при $N = 2$ значения, в два раза превышающего E_∞. Таким образом, неоднозначность в определении модуля Юнга оказывается весьма существенной для малых N. При растяжении перпендикулярно атомарным слоям и коэффициент Пуассона, и модуль Юнга зависят от N, причем при уменьшении числа слоев коэффициент Пуассона убывает, а модуль Юнга возрастает. Отметим, что при $N = 2$ коэффициент Пуассона почти в два раза меньше ν_∞. При $N \to \infty$ упругие модули стремятся к значениям, соответствующим бесконечному кристаллу, которые не зависят от направления деформирования.

В работе [2] исследовалась величина изгибной жесткости для пластин и оболочек наноразмерной толщины. Рассматривался двумерный монокристалл, имеющий $N \ge 2$ слоев в направлении y и $J \gg N$ слоев в направлении x. Предполагается, что каждый атом взаимодействует только с ближайшими соседями (см. рис. 2). К атомам на боковых гранях кристалла приложены силы Q_n, где индекс n

означает номер слоя ($n = 1, 2, \ldots, N$). При переходе от одного слоя к другому силы меняются по линейному закону, причем таким образом, что суммарная нагрузка, действующая на боковую грань кристалла, является чисто моментной.

При попытке выразить изгибную жесткость через макроскопические параметры возникают трудности, связанные с неоднозначностью определения толщины H нанокристалла. Предположим, что $N_* = N$. Тогда изгибная жесткость определяется формулой

$$D = D_\infty \left(1 - \frac{1}{N^2}\right), \qquad D_\infty = \frac{E_\infty H^3}{12}, \quad H = Nh. \tag{3}$$

Здесь D_∞ — значение изгибной жесткости полосы, известное из макроскопической теории упругости. Согласно формуле (3), изгибная жесткость нанокристалла изменяется в пределах $0 \le D \le D_\infty$. При малых N она существенно зависит от числа атомарных слоев. При увеличении N она возрастает, стремясь при $N \to \infty$ к своему значению, принятому в теории упругости. График зависимости изгибной жесткости от числа атомарных слоев представлен на рис. 3, где по оси ординат отложена величина $k = D/D_\infty$.

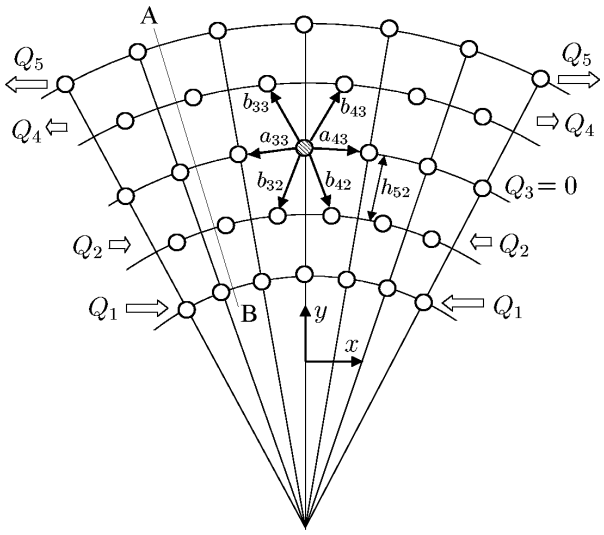


Рис. 2. Изгиб нанокристаллической полосы

Эти исследования, несмотря на свою простоту, нам представляются важными. Приведем два разъясняющих примера. Знание модуля Юнга позволяет сравнительно оценивать упругую и поверхностную энергию пленки и предсказывать ее устойчивость (сохранение или несохранение плоского состояния). Знание изгибной жесткости кантилевера АСМ (атомно-силового микроскопа) позволяет пересчитать по деформации консоли силовое воздействие на нанообъект.

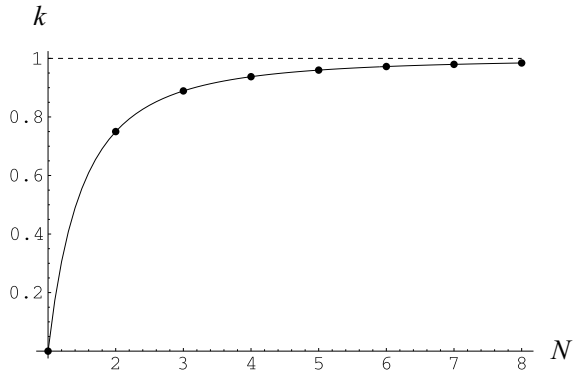


Рис. 3. Зависимость изгибной жесткости от числа атомарных слоев

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЖЕСТКОСТИ НАНООБЪЕКТОВ

При изучении стандартных нанообъектов — стержней, пластин и оболочек — было обращено внимание на формулы, связывающие изгибные жесткости и частоты свободных колебаний. Тем самым было предложено обсудить экспериментальные возможности определения частот нанообъектов. Здесь в настоящее время существуют две возможности: применять АСМ или оптические методы, причем в обоих случаях главным вопросом является проблема выделения параметров нанообъектов, поскольку в результате эксперимента, как правило, определяется общий параметр нанообъекта, подложки и измерительного оборудования. Ниже мы покажем, как можно решать эту проблему.

Существует принципиальное отличие условий, в которых проводятся эксперименты с нанообъектами, от условий экспериментов с макрообъектами. При исследовании макрообъектов размеры измерительных приборов (например, тензодатчиков) существенно меньше размеров исследуемого объекта. При исследовании объектов наноразмерного масштабного уровня используется микроразмерное оборудование, поэтому важное значение приобретает задача исследования взаимодействия нанообъектов с

измерительным оборудованием. В работах [3], [4] эта проблема обсуждалась применительно к задаче экспериментального определения упругих характеристик нанообъектов с помощью АСМ. Фактически, возникают две задачи, лежащие на стыке механики и экспериментальной физики.

Первая задача — определение упругих модулей нанообъектов по частотам системы нанообъект – кантилевер.

Вторая задача — разработка условий эксперимента, при котором из спектра системы нанообъект – кантилевер можно выделить собственные частоты нанообъекта.

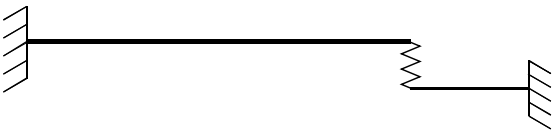


Рис. 4. Кантилевер (слева) и наностержень (справа)

Ниже приводится теоретическая основа определения собственных частот колебаний стержневых конструкций с помощью АСМ. Итак, рассмотрим следующую механическую модель объекта исследования (рис. 4). Стержень, изображенный слева, моделирует кантилевер. Используются обозначения: L_1 — длина кантилевера, D_1 и ρ_1 — его изгибная жесткость и погонная плотность. Стержень, изображенный справа, моделирует исследуемый объект, изгибную жесткость которого требуется определить. Правый конец стержня жестко защемлен, левый конец взаимодействует с кантилевером. Приняты обозначения: L_2 — длина наностержня, D_2 и ρ_2 — его изгибная жесткость и погонная плотность. Полевое взаимодействие между наностержнем и кантилевером моделируется линейной пружиной жесткостью C, что соответствует линеаризации потенциала Леннарда – Джонса в области статически равновесного состояния. В отсчетной конфигурации стержни считаются недеформированными, а пружина — ненапряженной. Решение задачи о свободных колебаниях описанной системы приводит к следующему частотному уравнению:

$$\begin{gathered}\left[1+\cos(\mu L_2)\mathrm{ch}(\mu L_2)+\frac{C}{D_2\mu^3}\Big(\sin(\mu L_2)\mathrm{ch}(\mu L_2)-\cos(\mu L_2)\mathrm{sh}(\mu L_2)\Big)\right]\Big(1+\cos(\lambda L_1)\mathrm{ch}(\lambda L_1)\Big)+\\ +\frac{C}{D_1\lambda^3}\Big[\sin(\lambda L_1)\mathrm{ch}(\lambda L_1)-\cos(\lambda L_1)\mathrm{sh}(\lambda L_1)\Big]\Big(1+\cos(\mu L_2)\mathrm{ch}(\mu L_2)\Big)=0.\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь использованы обозначения $\lambda^2=\sqrt{\dfrac{\rho_1}{D_1}}\,\omega$, $\mu^2=\sqrt{\dfrac{\rho_2}{D_2}}\,\omega$, где ω — собственная частота системы. Как видно из уравнения (4), все собственные частоты зависят от всех параметров системы и из частотного спектра системы невозможно выделить собственные частоты наностержня. Рассмотрим вынужденные гармонические колебания системы. Пусть перемещение u левого конца кантилевера имеет вид

$$u(0,t)=A\sin(\Omega t),\qquad A=\mathrm{const}. \tag{5}$$

Экспериментально можно фиксировать не только резкое возрастание амплитуды колебаний, но и обращение амплитуды колебаний в ноль. В системах с распределенными параметрами, состоящими из нескольких тел, обращение амплитуды колебаний в ноль может иметь место в двух случаях: когда точка, в которой измеряется амплитуда, является узлом данной формы колебаний и когда происходит динамическое демпфирование колебаний одного тела на парциальной частоте другого тела (зачастую это явление называют «антирезонанс»). Поставим вопрос так: существуют ли частоты вынужденных колебаний Ω, при которых правый конец кантилевера, контактирующий с нанообъектом, остается неподвижным в любой момент времени? Ответом на этот вопрос будет решение уравнения

$$u(L_1,t)=0. \tag{6}$$

Решив уравнение (6), можно определить частоты Ω_n, при которых амплитуда колебаний правого конца кантилевера обращается ноль. Можно показать, что уравнение (6) распадается на два независимых уравнения. Первое уравнение зависит только от параметров кантилевера и не представляет интереса. Второе уравнение имеет вид

$$1+\cos(\mu_* L_2)\mathrm{ch}(\mu_* L_2)+\frac{C}{D_2\mu_*^3}\Big[\sin(\mu_* L_2)\mathrm{ch}(\mu_* L_2)-\cos(\mu_* L_2)\mathrm{sh}(\mu_* L_2)\Big]=0. \tag{7}$$

Изгибную жесткость наностержня можно определять как по резонансным частотам, воспользовавшись уравнением (4), так и по «антирезонансным» частотам, воспользовавшись уравнением (7). Оба уравнения содержат два неизвестных параметра: изгибную жесткость наностержня D_2 и жесткость связи иглы кантилевера с наностержнем C. (Параметры кантилевера известны; массу m_2 и длину L_2 наностержня можно измерить, погонная плотность для однородного стержня вычисляется по формуле $\rho_2 = m_2/L_2$.) Если измерены две частоты (резонансные или «антирезонансные»), их значения можно подставить в соответствующие уравнения (4) или (7), в результате чего задача определения изгибной жесткости наностержня сведется к решению системы двух трансцендентных уравнений относительно двух неизвестных. Следует отметить, что уравнение (7) для «антирезонансных» частот проще уравнения (4), и в отличие от уравнения (4), уравнение (7) не содержит малого параметра $\dfrac{C}{D_1\lambda^3}$. Таким образом, с вычислительной точки зрения метод определения изгибной жесткости наностержня по «антирезонансным» частотам имеет преимущество.

В работах [5], [6] предложен метод определения собственных частот некоторых наноструктур (нанотрубок и нанокристаллов), основанный на измерении собственных частот «большой системы», состоящей из вертикально ориентированного массива (решетки) одинаковых нанотрубок или нанокристаллов, выращенных на подложке на одинаковом растоянии друг от друга (рис. 5).

Теоретически показано, что по найденному спектру «большой системы» (решетка – подложка) и спектру подложки можно определить собственные частоты одного нанообъекта. Это позволяет по экспериментальным данным для «больших систем» определить собственные частоты нанообъекта, которые трудно непосредственно определить другим способом. Приведен пример расчета собственных частот решетки микро- или нанокристаллов из оксида цинка на подложке сапфира.

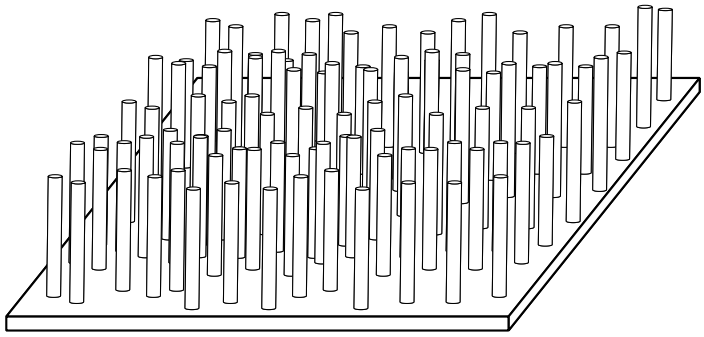


Рис. 5. «Большая система» — решетка нанокристаллов или нанотрубок на подложке

При теоретическом исследовании была рассмотрена стержневая модель «большой системы», состоящая из горизонтального стержня длины L, моделирующего подложку, и N вертикальных стержней длиной H, моделирующих нанообъекты (рис. 6). Вертикальные стержни нижними концами жестко закреплены на горизонтальном стержне и расположены на одинаковом расстоянии l друг от друга, так что $L = (N+1)l$. Верхние концы вертикальных стержней свободны, концы горизонтального стержня жестко закреплены.

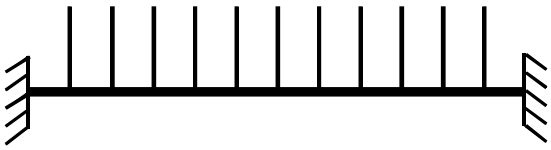


Рис. 6. Стержневая модель

Задача о свободных колебаниях системы решалась в двух постановках: «дискретной» и «континуальной». Анализ уравнений и дискретной, и континуальной модели показал, что существуют две группы решений. К первой группе решений относятся колебания с частотами, определяемыми уравнением

$$1 + \cos(\mu H)\mathrm{ch}(\mu H) = 0, \qquad \mu = \sqrt[4]{\frac{\rho_2}{D}}\sqrt{\omega}, \tag{8}$$

где D — изгибная жесткость вертикальных стержней, ρ_2 — их погонная плотность. В данном случае вертикальные стержни движутся как консольные балки. При этом амплитуды колебаний горизонтального стержня малы по сравнению с амплитудами колебаний вертикальных стержней. Ко второй группе решений относятся колебания с частотами, близкими к собственным частотам горизонтального стержня. При этом амплитуды колебаний вертикальных стержней малы по сравнению с амплитудами

колебаний горизонтального стержня. Колебания горизонтального стержня описываются уравнением

$$Cu^{IV} + \rho_1 \ddot{u} = -\sum_{n=1}^{N} \left[\rho_2 H \ddot{u}\, \delta(x - nl) + \frac{D\mu}{g(\mu H)} u'\, \delta'(x - nl) \right], \tag{9}$$

где u — перемещение точек горизонтального стержня, C, ρ_1 — его изгибная жесткость и погонная плотность, n — номер вертикального стержня, параметр $g(\mu H)$ имеет вид

$$g(\mu H) = \frac{1 + \cos(\mu H)\mathrm{ch}(\mu H)}{\sin(\mu H)\mathrm{ch}(\mu H) - \cos(\mu H)\mathrm{sh}(\mu H)}. \tag{10}$$

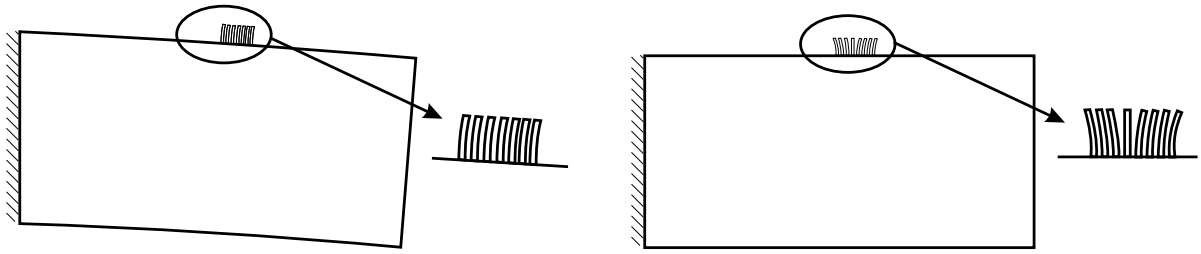
Если вертикальных стержней достаточно много, можно считать, что они непрерывно распределены по длине горизонтального стержня. Тогда осреднение правой части уравнения (9) позволяет упростить математическую постановку задачи, сведя ее к уравнению

$$u^{IV} - \frac{ND\mu}{Cg(\mu H)L} u'' + \frac{\rho_1}{C} \left(1 + N \frac{\rho_2 H}{\rho_1 L} \right) \ddot{u} = 0. \tag{11}$$

Таким образом, показано, что в случае моделирования «большой системы» и подложки в рамках механики стержней возможно выделение из спектра «большой системы» собственных частот, соответствующих частоте одного нанообъекта.

В качестве примера исследования реальной наноструктуры рассмотрим задачу определения собственных частот решетки микро- и нанокристаллов из оксида цинка (ZnO). Монокристаллы из ZnO являются пьезоэлектриками и благодаря своим высоким оптическим и механическим свойствам имеют большие потенциальные возможности для применений в наноэлектронике, нанофотонике и наномеханике, в частности, для создания УФ-лазеров, сенсоров химических и биологических веществ, солнечных батарей, УФ-фотодетекторов и других устройств. Монокристаллические ZnO-нанокристаллы изготавливаются различными методами: термическим испарением, химическим осаждением из газовой фазы, методом импульсного лазерного напыления и др. Высота получаемых нанокристаллов составляет 1.5–3.0 мкм, а диаметр — 30–100 нм, микрокристаллы имеют высоту 20–100 мкм и диаметр 1.0–3.0 мкм.

С точки зрения механики сплошной среды, решетка нанокристаллов на подложке представляет собой составное пьезоэлектрическое тело. В численном эксперименте найдены собственные частоты консольно закрепленного нанокристалла ZnO высотой 1 мкм (отношение высоты к диаметру $h/d = 10$). В качестве модели подложки рассматривался микрокристалл сапфира прямоугольной формы (10×20 мкм), закрепленный по большей стороне. «Большая система» моделировалась описанным микрокристалом сапфира с набором из восьми одинаковых нанокристалов, расположенных на большей свободной стороне подложки. Некоторые собственные формы колебаний представлены на рис. 7.



а *б*

Рис. 7. Собственные моды: *а*) определяемые подложкой, *б*) локализованные в решетке нанокристаллов

Форма колебаний, соответствующая первой изгибной моде, изображена на рис. 7, *а*. Кинематический анализ форм, соответствующих следующим 8 собственным частотам, показывает, что движения «большой системы» локализованы в нанокристалической «щетке» (рис. 7, *б*), при этом форма колебаний нанокристаллов соответствует первой собственной частоте. Частоты колебания пакета нанокристаллов отличаются от частоты одного нанокристалла менее чем на 4%. Аналогичное динамическое поведение «большой системы» проявляется в окрестности второй собственной частоты единичного нанокристаталла, что иллюстрируется рис. 8, на котором каждое плато на изображенной на нем кривой соответствует собственным частотам единичного нанокристалла.

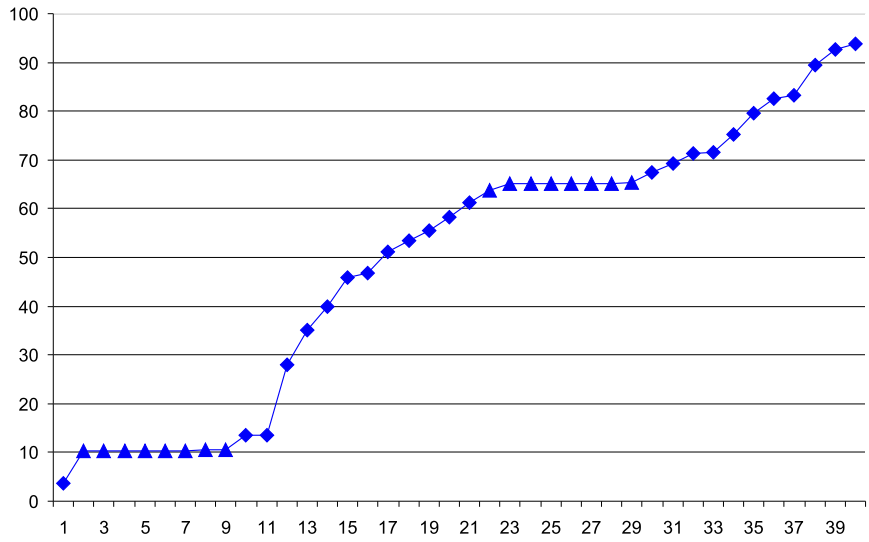


Рис. 8. Распределение собственных частот «большой системы»

Здесь треугольниками обозначены частоты, соответствующие частоте одного нанокристалла, а ромбиками — частотам подложки. Тем самым расчеты показали, что спектр «большой системы» приближенно может быть представлен как объединение собственных частот подложки и частот, порожденных частотами одного нанокристалла, что вполне согласуется с результатами анализа стержневой модели.

В случае вертикально расположенных нанотрубок метод позволяет оценить собственные частоты, соответствующие первым изгибным собственным модам нанотрубки. По этим частотам можно определить стержневую изгибную жесткость нанотрубки. Для определения изгибной жесткости нанопленки, из которой изготовлена нанотрубка, необходимо знать собственные частоты нанотрубок, лежащих на подложке.

В работе [7] метод определения собственных частот нанообъектов распространен на случай нанотрубок, закрепленных горизонтально (рис. 9). Показано, что из спектра «большой системы», состоящей из подложки нанотрубок, возможно выделение нескольких первых собственных частот, соответствующих изгибным колебаниям одной нанотрубки, что позволяет оценить их изгибную жесткость. Проведено конечно-элементное моделирование нанотрубок из арсенида галлия.

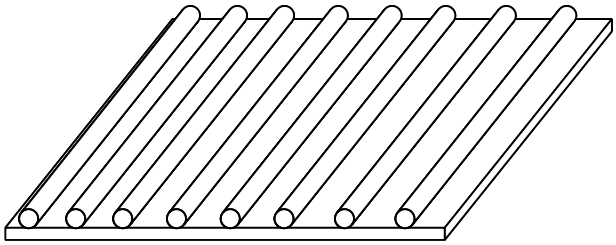


Рис. 9. Система параллельных друг другу нанотрубок, лежащих на подложке

На основании проведенного исследования разработан метод экспериментального определения изгибной жесткости нанооболочек. Идея метода в том, чтобы: 1) возбудить колебания нанооболочки, при которых деформация оболочки связана только с изгибом материала, а растяжение и сдвиг отсутствуют, либо пренебрежимо малы; 2) измерить первые собственные частоты колебаний нанооболочки; 3) по собственным частотам колебаний нанооболочки вычислить ее изгибную жесткость. Основные трудности на пути реализации этого метода связаны с измерением собственной частоты одного нанообъекта. Предложен метод, позволяющий экспериментально определить первые собственные частоты одной нанотрубки путем сравнения спектра системы решетка – подложка и спектра одной подложки. Метод особенно эффективен и обладает высокой точностью, когда первые собственные частоты нанообъектов сравнимы с первыми собственными частотами подложки. Таким образом, при использовании данного метода определяющим фактором является правильный подбор соотношения геометрических и физических характеристик нанообъектов и подложки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предлагаемой работе мы продемонстрировали широкие возможности методов механики сплошных сред, применительно к проблемам нанотехнологии, а также возможность и необходимость новых научных исследований, ориентированных на задачи наномеханики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 06-01-00452-*а*), *Фонда содействия отечественной науке, гранта Президента РФ* (*проекты МД*-4829.2007.1, *НШ*-4518.2006.1).

Библиографический список

1. *Кривцов А.М., Морозов Н.Ф.* Аномалии механических характеристик наноразмерных объектов // Докл. АН. 2001. Т. 381, № 3. С. 825–827.
2. *Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф.* Особенности расчета изгибной жесткости нанокристаллов // Докл. АН. 2002. Т. 385, № 4. С. 494–496.
3. *Иванова Е.А., Индейцев Д.А., Морозов Н.Ф.* К вопросу об определении параметров жесткости нанообъектов // Журн. технической физики. 2006. Т. 76, вып. 10. С. 74–80.
4. *Иванова Е.А., Индейцев Д.А., Морозов Н.Ф.* Об определении параметров жесткости нанообъектов // Докл. АН. 2006. Т. 410, № 6. С. 754–758.
5. *Еремеев В.А., Иванова Е.А., Морозов Н.Ф., Соловьев А.Н.* Об определении собственных частот нанообъектов // Докл. АН. 2006. Т. 406, № 6. С. 756–759.
6. *Еремеев В.А., Иванова Е.А., Морозов Н.Ф., Соловьев А.Н.* Об одном методе определения собственных частот упорядоченной системы нанообъектов // ЖТФ. 2007. Т. 77, вып. 1. С. 3–8.
7. *Еремеев В.А., Иванова Е.А., Морозов Н.Ф., Строчков С.Е.* Собственные колебания нанотрубок // Докл. АН. 2007. Т. 415, № 5. С. 605–610.

УДК 531.38, 575

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАМКНУТЫХ МОЛЕКУЛ ДНК

А.А. Илюхин, Д.В. Тимошенко

Таганрогский государственный педагогический институт,
кафедра математического анализа,
E-mail: stab@tgpi.org.ru, dmitrytim@yandex.ru

В рамках стержневой модели разработан метод определения параметров пространственной конфигурации молекул нуклеиновых кислот. С помощью разработанного метода получены необходимые и достаточные условия существования семейства замкнутых молекул ДНК. Найденные условия можно использовать при синтезе замкнутых молекул с заданными параметрами.

Mathematical Model of the Closed Molecules of DNA

A.A. Iliykhin, D.V. Timoshenko

Within the limits of rod model the method of definition of parameters of a spatial configuration of molecules of nucleinic acids is developed. By means of the developed method necessary and sufficient conditions of existence of family of the closed molecules of DNA are received. The found conditions can be used at synthesis of the closed molecules with the set parameters.

Математическое моделирование пространственной структуры биологических макромолекул, таких как ДНК и белки, является в настоящее время одной из наиболее бурно развивающихся ветвей молекулярной биологии. Фундаментальность этой проблемы определяется тем, что основные процессы жизнедеятельности клетки во многом зависят от пространственных конфигураций упомянутых макромолекул. В частности, основная биологическая функция молекулы ДНК состоит в хранении и передаче генетической информации, записанной в виде последовательности нуклеотидов в двойной спирали. Связанное с этим основное требование к структуре ДНК — стабильность и сохранность генов — должно вполне определённым образом сочетаться с изменениями её пространственной конфигурации, например, в процессах взаимодействия с белками. Кроме того, в последнее время в фармакологической промышленности интенсивно развивается метод создания лекарственных препаратов на основе ДНК и РНК-содержащих соединений. Он основан на том, что даже сравнительно короткие молекулы ДНК (РНК) (около 100 нуклеотидов) обладают гигантским количеством пространственных форм. Такое разнообразие в принципе позволяет подобрать подходящую по форме молекулу ДНК, закрывающую активные центры патогенного соединения (белка или фермента) и препятствующую

© А.А. Илюхин, Д.В. Тимошенко, 2008

его разрушительной работе. Основная проблема здесь — поиск недорого метода определения пространственной структуры короткой молекулы ДНК (РНК) по её нуклеотидному составу (первичной структуре). Наиболее перспективным для решения этой проблемы считается метод математического моделирования. В зарубежной научной литературе это направление получило название драг-дизайна: его суть заключается в предварительном создании с помощью ЭВМ трёхмерной модели молекулы потенциального препарата. Помимо практических нужд фармакологии, необходимость в экономически эффективных методах определения третичной структуры молекулы ДНК вызывается и тем, что поток информации о вновь открытых молекулах и расшифровке их нуклеотидного (для нуклеиновых кислот) и аминокислотного (для белков) состава год от года возрастает.

Используемая в настоящей работе математическая модель пространственной структуры ДНК на основе тонкого упругого однородного симметричного стержня стала уже классическим средством для изучения её пространственных форм [1–7]. В указанных работах заложены основы изучения пространственных конфигураций биологических макромолекул на основе стержневой модели. Однако, до настоящего момента не существовало эффективных методов, позволяющих определить пространственную структуру молекулы ДНК исходя из её физических параметров, а также параметров физико-химического воздействия со стороны активных компонентов среды, таких как белки или ферменты.

Предположим, что на молекулу воздействует какой-либо активный фермент. Согласно экспериментальным данным [1–6], этот процесс можно считать эквивалентным действию на молекулу концевых сил, тогда система уравнений, описывающих трансформации молекулы ДНК под воздействием концевых сил, имеет вид [8, 9]:

$$\frac{d}{ds}(x+\lambda) = (x+\lambda)\times\omega + P(e\times\nu), \quad \frac{d}{ds}\nu = \nu\times\omega, \tag{1}$$

где $\omega\,(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ — вектор Дарбу оси молекулы, P — равнодействующая концевых сил, $x\,(x_1,x_2,x_3)$ — вектор-момент внутренних сил, $\nu\,(\nu_{1,},\nu_2,\nu_3)$ — единичный вектор вдоль концевой силы, $e\,(e_1,e_2,e_3)$ — единичный вектор касательной к оси молекулы, вектор $\lambda\,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ связан с формой оси молекулы в начальном состоянии. Дифференцирование по дуговой координате s производится в главных осях изгиба и кручения.

Система дифференциальных уравнений (1) совместно с соотношениями

$$x = \tilde{B}\omega, \quad \lambda = -\tilde{B}\omega^0,$$

где $\tilde{B}$ — матрица жёсткости молекулы, ω^0– вектор Дарбу в естественном состоянии допускает три интеграла:

$$\nu\cdot\nu = 1, \quad (x+\lambda)\cdot\nu = K, \quad \mathrm{x}\cdot\omega - 2P\,(e\cdot\nu) = 2H. \tag{2}$$

Пусть параметры системы (1) удовлетворяют условиям:

$$e_1 = 1, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = 0, \quad B_{22} = B_{33}, \quad B_{ij} = 0 \quad (i\neq j), \quad \lambda_3 = 0,$$

λ_1 и λ_2 — константы, что указывает на то, что ось молекулы в естественном состоянии — винтовая линия.

Введём безразмерные величины

$$x_1 = \lambda_2 x, \qquad x_2 = \lambda_2 y, \qquad x_3 = \lambda_2 z, \qquad g = B_{22}/\mathrm{B}_{11},$$

$$p = B_{22}P/\lambda_2^2, \qquad k = pK/\lambda_2^2, \qquad 2h = 2B_{22}H/\lambda_2^2, \qquad \lambda_1 = r\lambda_2.$$

Наложим на постоянные интегралов (2) ограничения:

$$p^2 = \frac{1}{(1-a^2)^4}\left[(b-2a\,(a+1))^2 + a^2\,(1-a)^2\,n^4 + \left(2a\,(1-a)\,b + a^3\,(a+1)\left(a^2-3a+4\right)\right)n^2\right],$$

$$k = \frac{a\,(a-2)\,n\left(-b + a\,(a-1)\,n^2 - (a+1)\left(a^2+1\right)\right)}{(1-a^2)^3},$$

$$2h = \frac{2\left(a^2+a-1\right)b + a^2\left(1-a\right)\left(a+3\right)n^2 + 4a\left(a+1\right)}{\left(1-a^2\right)^2},$$

где $a = \dfrac{1 \mp \sqrt{g^2-g+1}}{1-g}$, $n = r\dfrac{1-a^2}{a^2-a+1}$.

Тогда система дифференциальных уравнений (1) допускает решение, в котором основные безразмерные переменные связаны равенствами:

$$y = \frac{ax^2 - anx + b + 2a\left(a+1\right)}{1-a^2},$$

$$z^2 = \frac{-a^2x^4 + 2a^2nx^3 + \left(-a^2n^2 - 2ab - a^2\left(a+1\right)^2\right)x^2 + 2an\left(b + a\left(a+1\right)\right)x - b\left(b + 2a\left(a+1\right)\right)}{\left(1-a^2\right)^2},$$

$$p\nu_1 = \frac{-a\left(a+1\right)x^2 + 2an\left(a+1\right)x - b}{\left(1-a^2\right)^2}, \tag{3}$$

$$p\nu_2 = \frac{ax^3 - 2anx^2 + \left(an^2+b\right)x - n\left(b + a\left(a+1\right)\right)}{\left(1-a^2\right)^2}, \qquad p\nu_2 = \frac{\left(x-n\right)z}{\left(1-a^2\right)}.$$

В механике стержней область изменения параметра а найдена в работе [8] и представляет собой следующие промежутки:

$$a < -1, \quad 0 < a < 1, \quad a > 2.$$

Целью настоящей работы является определение областей значений параметров решения (3) системы уравнений трансформаций (1), в которых данное решение описывает замкнутые конфигурации молекулы ДНК. Интерес к замкнутым конфигурациям вызван с одной стороны их существенной ролью в процессах блокирования активных центров патогенных соединений и клеток при лечении различных заболеваний, с другой стороны, тем, что замкнутые конфигурации, согласно биологическим исследованиям, являются наиболее благоприятными для передачи генетической информации с наименьшим количеством потерь и нарушений. Последнее представляет собой одну из важнейших проблем современной генетики.

Выбор для исследования решения (3) определялся тем, что оно получено в случае, наиболее полно отражающем естественное свободное состояние молекулы в виде винтовой линии. Трёхмерные тела подобной формы часто называют псевдоцилиндрами [9]. В решении (3) переменная x выступает в качестве независимой. Зависимость её от дуговой координаты s устанавливается обращением эллиптического интеграла

$$s - s_0 = \frac{B_{22}}{\lambda_2}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dt}{z\left(t\right)}, \tag{4}$$

получаемого интегрированием первого уравнения системы (1).

Соотношение (4) определяет периодический характер изменения промежуточной переменной x. Основное ограничение на область допустимых значений переменной x состоит в том, чтобы правая часть в выражении для $z^2(x)$ была неотрицательна. Это выражение представляет собой полином четвёртой степени относительно x, у которого коэффициент при x^4 отрицателен, поэтому неотрицательные значения он может принимать только в промежутках, ограниченных своими действительными корнями. Эти промежутки и являются областью, в которой исследуемое решение будет действительным. Учитывая приведённые ограничения на область изменения промежуточной переменной и монотонность дуговой координаты, приходим к выводу, что для сохранения монотонности дуговой координаты переменная x должна изменяться периодически в пределах промежутка, ограниченного корнями полинома $z^2(x)$.

Решение (3) является частным решением системы (1), его аналог получен в динамике твёрдого тела А.И. Докшевичем [10].

Известное точное решение уравнений трансформации (1) ещё не определяет вид оси молекулы в деформированном состоянии (упругой линии). Поэтому для качественного анализа геометрических

свойств деформированной оси необходимо знать уравнения, позволяющие вычислить её координаты. Ось молекулы изучается в цилиндрических координатах α, ρ, ζ и представляется как линия пересечения двух поверхностей: цилиндрической и поверхности вращения [8]. Направляющая цилиндрической поверхности (кривая П) определяется следующими уравнениями [8]:

$$\rho^2 = \frac{(x_1+\lambda_1)^2 + (x_2+\lambda_2)^2 + (x_3+\lambda_3)^2 - k^2}{\mathrm{P}^2}, \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{k\nu_1 - x_1 - \lambda_1}{\mathrm{P}\rho^2}.$$

Образующую цилиндрической поверхности направим параллельно некоторому неподвижному вектору $\vec{\nu}$. Проведём через оси Oζ и Oρ плоскость. Построим в этой плоскости кривую N (меридиан поверхности вращения), заданную уравнениями [8]:

$$\rho^2 = \frac{(x_1+\lambda_1)^2 + (x_2+\lambda_2)^2 + (x_3+\lambda_3)^2 - k^2}{\mathrm{P}^2}, \qquad \frac{d\zeta}{ds} = \nu_1.$$

Вторую поверхность получаем вращением кривой N вокруг оси Oζ с угловой скоростью $\dfrac{d\alpha}{ds}$. Линия пересечения этих двух поверхностей и даёт ось молекулы.

Для обоснования дальнейших рассуждений сформулируем леммы, полученные в работе [8].

Лемма 1. *Пусть производная* $\dfrac{d\alpha}{dt}$ *представима как*

$$\frac{d\alpha}{dt} = A(t)\sqrt{t_2 - t}, \quad \textit{либо} \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{A(t)}{\sqrt{t_2 - t}},$$

где функция $A(t)$ *в точке* $t = t_2$ *принимает конечное значение, причём эта точка не является для неё точкой ветвления. Тогда точки кривой* П*, которым на упругой линии соответствуют точки со значениями* $s_i(t)$ и$s_{i+1}(t)$ *дуговой координаты* s*, расположены симметрично относительно луча* $\alpha = \alpha_2$*, где* α_2 *— значение угла* α *при* $s = s_i(t_2)$.

Лемма 2. *Пусть функция* $\alpha(t)$ *имеет вид*

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{A(t)\sqrt{t_2 - t}}{\sqrt{f(t)}},$$

где $A(t)$ *в точке* $t = t_2$ *принимает конечное значение, не равное нулю. Тогда точки упругой линии с дуговыми координатами* $s_1(t)$ и $s_2(t)$ проектируются в одну точку плоскости, перпендикулярной концевой силе.

Поскольку в дальнейшем мы рассматриваем представление проекций $\alpha(\rho)$ и $\zeta(\rho)$ в декартовых координатах, замкнутость кривой будет пониматься в более широком смысле: кривую, изображающую проекцию $\alpha(\rho)$, будем считать замкнутой, если $\alpha(\rho)$ имеет за один или несколько периодов дуговой координаты приращение, равное нулю или кратное 2π, а полярный радиус — приращение, равное нулю за то же количество периодов.

Величина полярного радиуса ρ может принять исходное значение только за чётное число периодов дуговой координаты s (поскольку ρ — монотонная функция x). Поэтому в случаях, когда α принимает исходное значение за нечётное число периодов дуговой координаты или внутри промежутка, соответствующего одному периоду, кривая в целом может быть замкнута за удвоенное число периодов. Таким образом, замкнутыми будем считать даже проекции, которые графически замкнутыми не являются, но удовлетворяют приведённым соображениям. В случае отсутствия замкнутости в традиционном смысле, с помощью лемм 1 и 2 можно получить представление о виде кривой $\alpha(\rho)$ в целом.

Рассмотрим случай, когда в недеформированном состоянии ось молекулы расположена по дуге окружности. Это означает, что первоначальное кручение молекулы отсутствует: $\lambda_1 = 0$, а следовательно, $r = 0$. Тогда соотношения (3) примут вид:

$$y = \frac{ax^2 - ax + 2a(a+1)}{1-a^2}, \qquad z^2 = \frac{-a^2x^4 + a(a(a+1)(a-3) + 2a_1)x^2 - a_1^2 + 2aa_1(a+1)}{(1-a^2)^2},$$

$$p\nu_1 = \frac{-a(a+1)x^2 + a_1 + 2a(a+1)}{(1-a^2)^2}, \qquad p\nu_2 = \frac{ax^3 + a_1x - 2a(a+1)x}{(1-a^2)^2}, \tag{5}$$

$$p\nu_3 = \frac{xz}{1-a^2}, \qquad p^2 = \frac{a_1 - 2a(a+1)}{(1-a^2)^4}.$$

Для рассматриваемого частного случая решения (3) системы (1) уравнения кривых П и N примут вид

кривая П:

$$\rho^2 = \frac{x^2}{(a^2-1)} + \frac{2a_1 + (a-1)^2(a+1)}{(a-1)^2(a+1)}, \quad \frac{d\alpha}{dx} = -\frac{\gamma x}{\rho^2 z}, \tag{6}$$

меридиан N:

$$\rho^2 = \frac{x^2}{(a^2-1)} + \frac{2a_1 + (a-1)^2(a+1)}{(a-1)^2(a+1)}, \qquad \frac{d\zeta}{dx} = \frac{\gamma_1}{\gamma z}. \tag{7}$$

В уравнениях (6) и (7) заменено дифференцирование по дуговой координате s дифференцированием по x с помощью равенств

$$\frac{dx}{ds} = z(x) \quad \text{или} \quad s = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dt}{z(t)}.$$

Областью определения рассматриваемого решения является промежуток $[x_1; x_2]$, концами которого служат действительные корни многочлена $z^2(x)$. Многочлен $z^2(x)$ имеет не менее двух действительных корней в следующих областях значений параметров [8]:

$$a < -1, \qquad 0 < a < 1, \qquad a > 2, \qquad 0 < a_1 < 2a(a+1). \tag{8}$$

Радиальную составляющую можно представить в виде $\rho^2 = x^2 + (y+1)^2 + z^2$, откуда следует, что внутри области изменения x, когда $z^2 \geq 0$, ρ^2 — строго положительная величина (одновременно равенства $x = 0$, $y = -1$ и $z = 0$ не могут выполняться).Отметим, что для замкнутости кривой, описывающей ось молекулы, необходима и достаточна замкнутость обеих её проекций.

Если параметры удовлетворяют условию (8), то производная $\dfrac{d\rho^2}{dx}$ обращается в нуль в средней точке промежутка $x = 0$. Сама же функция $\rho^2(x)$ в промежутке $[x_1; x_2]$ является чётной. При этом, производная $\dfrac{d\alpha}{dx}$ — нечётная функция. Тогда приращение

$$\Delta\alpha = -\frac{\mathrm{p}}{\rho^2} \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{x}{z(x)} dx = 0.$$

Из последнего равенства следует, что кривая П — замкнута (рис. 1).

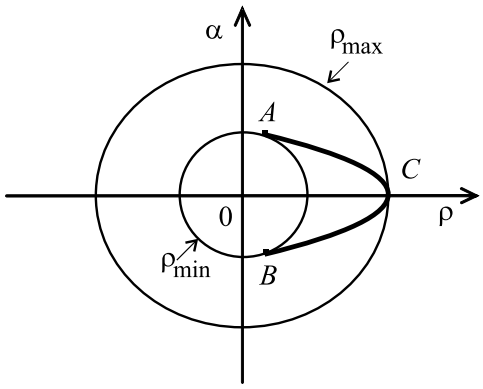


Рис. 1

За два периода промежуточной переменной точка проекции $\alpha(\rho)$ возвращается в исходное положение: в точку С (в соответствии с леммами 1 и 2), что обеспечивает замкнутость проекции П при всех допустимых значениях параметров решения.

Необходимым и достаточным условием замкнутости меридиана $\zeta(\rho)$ является равенство нулю приращения $\zeta(\rho)$ за один период:

$$\Delta\zeta = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\nu_1(x)}{\rho^2 z(x)} dx = 0 \tag{9}$$

При этом замыкание осуществляется, в силу леммы 1 за два периода дуговой координаты s (рис. 2). Выделенный участок на рис. 2 соответствует одному периоду дуговой координаты. Ось молекулы изображёна на рис. 3.

Из вышесказанного следует, что условия замкнутости молекулы совпадают с условиями замкнутости меридиана поверхности вращения $\zeta(\rho)$.

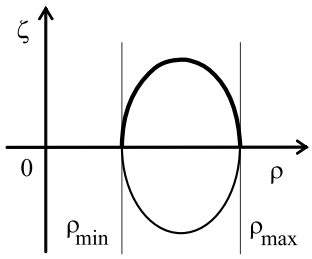


Рис. 2

Для нахождения области значений параметров, при которых выполняется условие замкнутости меридиана, приведём интеграл (9) к комбинации эллиптических интегралов в канонической форме с последующей их аппроксимацией функциями эллиптического модуля [11]:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi = \left[A_0 + A_1 m_1 + A_2 m_1^2\right] + \\ + \left[B_0 + B_1 m_1 + B_2 m_1^2\right]\ln\left(\frac{1}{m_1}\right) + \varepsilon_1\left(k^2\right), \\ \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi = \left[H_0 + H_1 m_1 + H_2 m_1^2\right] + \\ + \left[W_0 + W_1 m_1 + W_2 m_1^2\right]\ln\left(\frac{1}{m_1}\right) + \varepsilon_2\left(k^2\right), \tag{10}$$

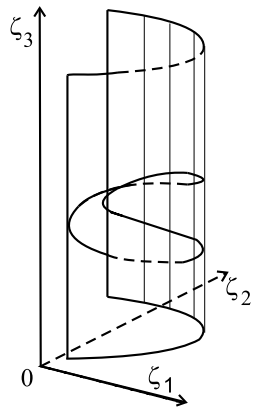


Рис. 3

где $m_1 = 1-k^2$, $\left|\varepsilon_i\left(k^2\right)\right| < 3\cdot 10^{-5}$ и коэффициенты A_i, B_i, H_i, W_i — фиксированные числа. Полезность указанных аппроксимаций определяется наличием оценки остаточного члена, что позволяет оценить точность условий замкнутости. С учётом представления (13) рассмотрим выражение (9) как функцию параметров a и a_1.

На рис. 4 представлен график функции $a_1 = a_1(a)$ в области допустимых значений параметров a и a_1, которая определяется уравнением (9)

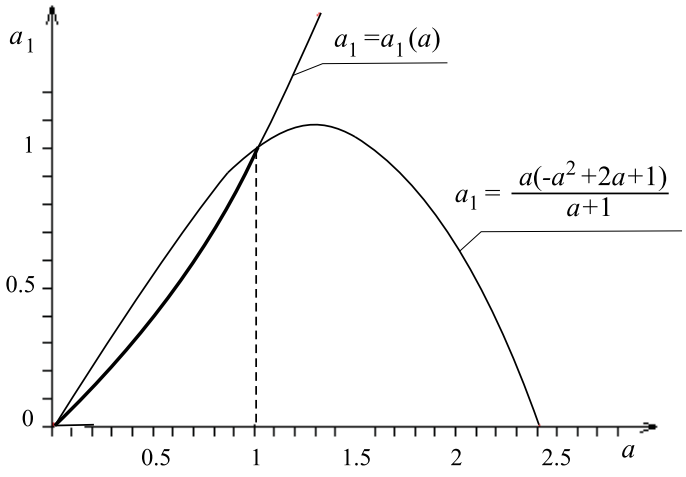


Рис. 4

Участок кривой $a_1 = a_1(a)$, на котором осуществляется замкнутость меридиана$\varsigma(\rho)$, принадлежит подмножеству области

$$0 < a_1 < \frac{a(-a^2+2a+1)}{a+1}, \quad 0 < a < 1, \tag{11}$$

в которой установлена и область значений эллиптического модуля k: $k \in (0; 0.75)$. Приведённые оценки остаточных членов аппроксимаций справедливы для всех значений эллиптического модуля k^2 из

промежутка $(0;1)$. Поэтому в данном случае интеграл в (9) принимает конечные значения (не возникает бесконечности при $k^2 \to 1$). На основании сказанного можно сделать вывод, что в области (11) осуществляется замкнутость меридиана $\varsigma(\rho)$, если параметры решения связаны соотношением (11).

Учитывая, что проекция $\alpha(\rho)$ замкнута, можно утверждать: *условия* (11) *являются необходимыми и достаточными для того, чтобы решение* (5) *системы уравнений* (1) *описывало однопараметрическое семейство замкнутых конфигураций оси молекулы ДНК для значений параметров* a *и* a_1*, лежащих на кривой* $a_1 = a_1(a)$.

С учётом того, что в качестве модели молекулы рассматривается упругий стержень, для её замкнутости необходима не только замкнутость оси, но и совпадение поперечных сечений стыкующихся концов молекулы с точностью до поворота на угол, кратный 2π. Совпадение поперечных сечений вытекает из следующих соображений: тангенс угла χ поворота поперечного сечения выражается соотношением [8]: $\mathrm{tg}\chi = \omega_2/\omega_3$. Из этого соотношения и периодичности функций ω_2 и ω_3 как эллиптических функций дуговой координаты, следует, что угол χ также является периодической функцией дуговой координаты. Для совпадения поперечных сечений молекулы в точке закрепления концов необходимо, чтобы приращение угла закручивания χ за период дуговой координаты было кратно 2π. За один период дуговой координаты $\mathrm{tg}\chi$ принимает исходное значение, если угол χ получает приращение π, а для полной замкнутости поперечное сечение должно повернуться на угол 2π. Гарантировать приращение угла χ на 2π за один период дуговой координаты, таким образом, невозможно. Однако в рассматриваемом случае это и не требуется в виду того, что замыкание проекции $\alpha(\rho)$ осуществляется за четыре периода, а замыкание меридиана поверхности вращения $\varsigma(\rho)$ за два периода дуговой координаты соответственно. Таким образом, приращение угла χ при выполнении условий замкнутости оказывается кратным 2π, либо равным нулю, что в совокупности с замкнутостью двух проекций пространственной оси молекулы обеспечивает совпадение поперечных сечений в точке замыкания концов оси и, как следствие, полную замкнутость молекулы в рассмотренном случае.

Таким образом, для рассмотренного вырожденного случая получено однопараметрическое семейство замкнутых конфигураций молекулы.

Основываясь на анализе критерия (9), удалось выработать метод, который применим для исследования условий замкнутости молекулы в общем случае решения (3). Достоинство рассмотренного случая в том, что условия замкнутости молекулы получены аналитически, что позволяет использовать его в качестве критерия для проверки вычислительных схем, разработанных далее для общего случая решения (3).

Пространственный случай. Рассмотрим теперь общий случай, когда ось молекулы в недеформированном состоянии является пространственной кривой и расположена по винтовой линии. В данном случае задача нахождения замкнутых конфигураций усложняется вследствие того, что помимо исследования замкнутости меридиана поверхности вращения, которое проводилось и для рассмотренного частного случая, необходимо также исследовать вопрос о замкнутости проекции $\alpha(\rho)$, которая в рассмотренном частном случае осуществлялась автоматически в силу свойств приращения полярного угла. Кроме того, необходимо, чтобы обе проекции были не просто замкнуты: критерии замкнутости должны быть согласованными.

В общем случае решения (3) уравнения оси молекулы примут вид:

$$\rho^2(x) = \frac{1}{(1-a^2)^2}\left[[(a+1)x-n]^2 + \frac{b^2\left[2(a+1)b - a^2n^2 + (a+1)^4\right]}{b^2 + a^2(a+1)^2 n^2}\right],$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\left(1-a^2\right)L(x)}{\sqrt{\left[b^2 + a^2(a+1)^2 n^2\right]^3}\,\rho^2(x)\,z(x)},$$

где

$$L(x) = a^2 n\left[b + (a+1)^3\right]x^2 + \left[(a-1)b^2 - a^2n^2b - 2a^2(a+1)^2n^2\right]x + n\left[b^2 + a(a+1)^2 b + a^2(a+1)n^2\right],$$

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{-a(a+1)x(x-n) - b}{\sqrt{b^2 + a^2(a+1)^2n^2}\,z(x)}.$$

Приращение полярного угла α за один период промежуточной переменной имеет вид

$$\Delta\alpha = \int\limits_{x_*}^{x^*} \frac{\left(1-a^2\right) L\left(x\right)}{\sqrt{\left[в^2 + a^2\left(a+1\right)^2 n^2\right]^3} \rho^2\left(x\right) z\left(x\right)} dx, \tag{12}$$

где x_1 и x_2 — действительные корни полинома $z^2(x)$.

Приращение $\Delta\alpha$ за один период изменения переменной x будет величиной постоянной для рассматриваемого фиксированного промежутка изменения переменной x, что следует из леммы 1. Поэтому критерий замкнутости кривой $\alpha(\rho)$ принимает вид:

$$m\Delta\alpha = 2\pi k, \tag{13}$$

где m — число периодов переменной s, кратное числу периодов, за которое полярный радиус ρ принимает исходное значение. Соотношение (13), таким образом, выражает условие замкнутости проекции $\alpha\left(\rho\right)$ за число периодов, за которое полярный угол α получает приращение, кратное 2π, а полярный радиус ρ принимает исходное значение.

Критерий замкнутости меридиана поверхности вращения$\varsigma\left(\rho\right)$ имеет вид:

$$\Delta\zeta = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{-a(a+1)x(x-n)-b}{\sqrt{b^2+a^2(a+1)^2n^2z(x)}} dx = 0 \tag{14}$$

как и в случае проекции $\alpha\left(\rho\right)$ полярный радиус ρ принимает начальное значение за два периода переменнойs.

Таким образом, замыкание меридиана может осуществляться уже за два периода изменения переменной s, а замыкание проекции $\alpha\left(\rho\right)$ — минимум за два, а также за любое чётное количество периодов переменной x.

В силу непрерывной зависимости интеграла (12) от параметров решения, а также того, что указанный интеграл может быть приведён [12] к комбинации эллиптических интегралов первого и второго рода следует, что соотношение (12) как функция эллиптического модуля является непрерывной и не является тождественно постоянной. Поэтому величина $\frac{\alpha}{2\pi}$ как функция параметров a и a_1 принимает непрерывное множество значений, в том числе, может принимать и рациональные значения $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{k}{m}$, где k и m — целые числа. Если рассматривать это равенство как уравнение относительно a и a_1, то при определённых k и m оно будет иметь решения, которые будем искать численными методами, варьируя указанные параметры одновременно или по отдельности.

Интеграл в уравнении (14) также непрерывно зависит от параметров решения и, кроме того, является комбинацией эллиптических интегралов первого и второго рода. Поэтому уравнение (14), как уравнение относительно параметров также может иметь решения.

С помощью разработанных программ: нахождения действительных корней полинома $z^2\left(v\right)$, проверки критериев (13), (14) и последующего построения проекций $\alpha\left(\rho\right)$ и $\zeta\left(\rho\right)$ и пространственной оси в случае выполнения этих критериев, построены примеры замкнутых конфигураций, соответствующих определённым значениям параметров решения, и проведён анализ поведения кривых вблизи найденных значений параметров путём одновременной или поочерёдной их вариации.

В результате проведённых численных экспериментов по вариации параметров при минимальном шаге вариации $h_1 = 10^{-12}$ установлено: для изученного решения (3) системы (1) при значении параметра $r = 0$ (плоский случай) промежуток значения параметра a, в котором выполняется замкнутость совпадает с промежутком, полученным аналитически.

Для общего случая решения (3) области параметров, соответствующие замкнутым конфигурациям, имеют вид:

$$0 \le b \le 7, \quad 0 < a < 1, \quad 2 < a \le 10, \quad 0 < r < 3. \tag{15}$$

Был разработан алгоритм, позволяющий с помощью критериев (13), (14) определить, за какое минимальное число периодов промежуточной переменной x решения (3) возможна замкнутость обеих проекций (рис. 5, 6), а, следовательно и молекулы в целом, что играет существенную роль, поскольку определяет длину молекулы.

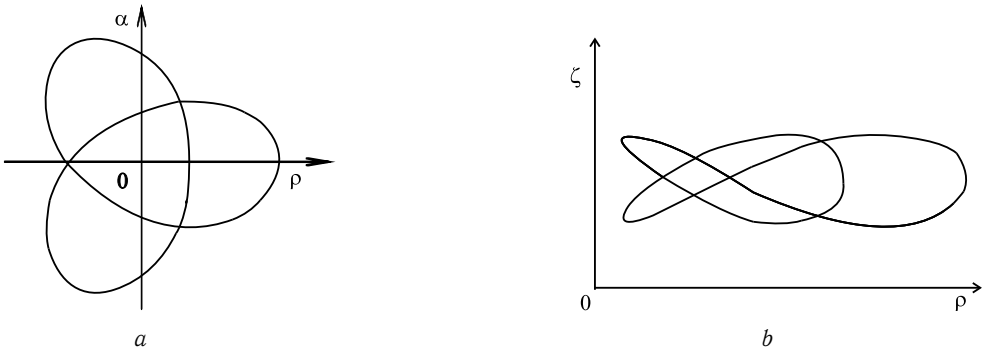


Рис. 5. Проекции *a*) $\alpha(\rho)$ и *b*) $\zeta(\rho)$, соответствующие параметрам $b = 1,\ \ a = 0.1,\ \ r = 1$

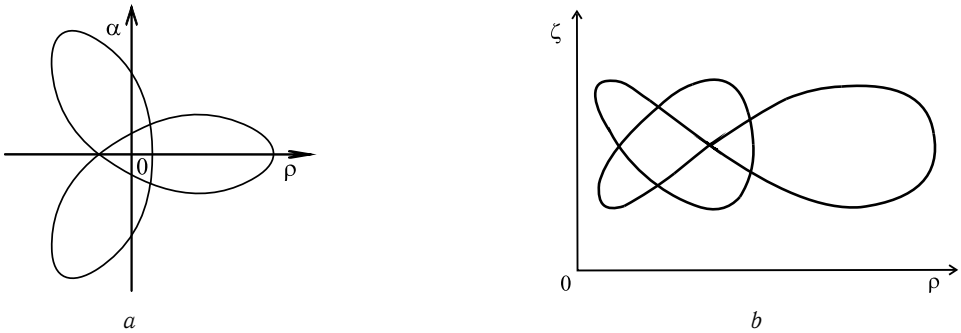


Рис. 6. Проекции *a*) $\alpha(\rho)$ и *b*) $\zeta(\rho)$, соответствующие параметрам $b = 1,\ \ a = 0.5,\ \ r = 1$

В частности, анализ критерия замкнутости проекции $\alpha\,(\rho)$ показал, что с увеличением параметра a в области (15) выполнимости критерия наблюдается резкое увеличение числа периодов, за которое происходит замкнутость, что имеет место для длинных молекул.

Рассуждения, связанные с замкнутостью молекулы как трёхмерного тела, приведённые для частного случая, полностью переносятся на общий случай.

Отметим, что найденные области (15) определяют ограничения для безразмерных параметров. Последующий возврат к размерным параметрам позволяет указать условия, которые можно использовать при синтезе замкнутых молекул с заданными параметрами.

Библиографический список

1. *Benham C.J.* Elastic model of supercoiling // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1977. V. 74, № 6. Jun. P. 2397–2401.

2. *Benham C.J.* Geometry and mechanics of DNA superhelicity // Biopolymers. 1983. V. 22, Issue 11. P. 2477–2495.

3. *Bustamante C., Smith S.B., Liphardt J., Smith D.* Single-molecule studies of DNA mechanics // Current Opinion in Structural Biology. 2000. V. 10, № 3. Jun. 1. P. 279–285.

4. *Bustamante C., Bryant Z., Smith S.B.* Ten years of tension: single-molecule DNA mechanics // Nature. 2003. V. 421, № 23. P. 423–427.

5. *Кугушев Е.И., Старостин Е.Л.* Математическая модель образования трёхмерной структуры ДНК. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 1997. № 77.

6. *Козлов Н.Н., Кугушев Е.И., Сабитов Д.И., Энеев Т.М.* Компьютерный анализ процессов структурообразования нуклеиновых кислот. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. № 19. 2002. № 42.

7. *Илюхин А.А., Тимошенко Д.В.* Новый метод определения условий замкнутости молекул ДНК // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2006. Т. 13, вып. 2. С. 322–323.

8. *Илюхин А.А.* Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. Киев: Наук. думка, 1979. 216 с.

9. *Устинов Ю.А.* Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. М.: Физматлит, 2003. 128 с.

10. *Докшевич А.И.* Новое частное решение уравнений движения гиростата, имеющего неподвижную точку // Механика твёрдого тела. 1970. Вып. 2. С 12–15.

11. *Абрамовиц М., Стиган А.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.

12. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.

УДК 532.516, 532.517

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ АЭРОДИНАМИКИ (перспективы управления сдвиговыми течениями)

В.В. Козлов, В.А. Щербаков*

Новосибирский государственный университет,
кафедра аэрофизики и газовой динамики,
*Институт теоретической и прикладной механики СО РАН
E-mail: kozlov@itam.nsc.ru

В работе обсуждаются задачи и возможности управления пристенными и свободными сдвиговыми течениями. Из числа методов управления, доведенных до практического использования и находящихся в стадии разработки, выделены основанные на эффектах гидродинамической неустойчивости. В ряде случаев их применение позволяет существенно модифицировать локальные и интегральные характеристики течений при минимальном управляющем воздействии.

Actual Problems of Aerodynamics (Prospect of Shear Flows Control)

V.V. Kozlov, V.A. Sherbokov

The lecture focuses on control of the near-wall and free shear layers emphasizing the control goals and approaches to modification of the flow characteristics. The control methods, both implemented in practice and prospective ones, employing effects of hydrodynamic instability are under the consideration. In some cases, their application makes it possible to modify local and global flow characteristics at a rather small level of the external forcing generating the controlled shear-layer perturbations.

ВВЕДЕНИЕ

В различных задачах аэрогидродинамики для оптимизации характеристик течения применяется управление обтеканием тел, основанное на тех или иных физических принципах. Ламинарные течения со сдвигом скорости, как правило, подвержены неустойчивости, приводящей к усилению возмущений их исходного состояния и развитию пульсационного движения. В таких условиях эффект управления может быть получен генерацией относительно малых стационарных и нестационарных возмущений ламинарного течения, которые при оптимальных параметрах оказанного на него воздействия вызывают заметные изменения локальных и интегральных гидродинамических характеристик. Иллюстрацией данного подхода к управлению обтеканием тел служат результаты экспериментальных работ последнего времени, выполненных, главным образом, при малых дозвуковых скоростях потока (см.[1]).

1. ЛАМИНАРИЗАЦИЯ ОБТЕКАНИЯ НЕСУЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Основная цель управления неустойчивым течением в ламинарном пограничном слое на поверхности обтекаемого тела — максимально возможное предотвращение его перехода в турбулентное состояние. Таким образом, достигается снижение поверхностного трения, что благоприятно сказывается на эксплуатации летательных аппаратов.

Сохранение ламинарного пограничного слоя на возможно большем участке крыла самолета имеет очевидное достоинство, приводя к экономии топлива и повышая эффективность использования транспортного средства.

Подход к решению данной проблемы основан на существующих представлениях о переходе к турбулентности в пограничном слое при низком уровне пульсаций внешнего потока. Традиционно процесс турбулизации подразделяется на последовательные стадии, которые включают генерацию возмущений пограничного слоя, их последующее усиление на участке малых амплитуд возбужденных колебаний и нелинейные взаимодействия возмущений в завершающей фазе перехода (рис. 1). Соответственно этому известные методы затягивания перехода к турбулентности заключаются в уменьшении начальной амплитуды возмущений пристенного течения и повышении его устойчивости (см. [2]–[4]). К настоящему времени линейная теория гидродинамической устойчивости, описывающая поведение экспоненциально растущих (затухающих) волновых возмущений хорошо развита для плоских и пространственных пограничных слоев, получила подтверждение в многочисленных экспериментах. Основанные на ней методы ламинаризации надежно обоснованы, часть из них доведена до практического применения.

© В.В. Козлов, В.А. Щербаков, 2008

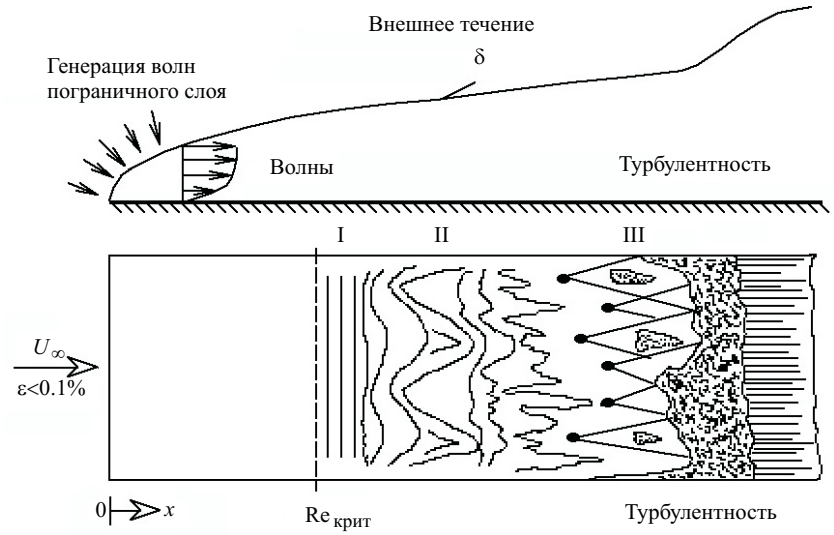


Рис. 1. Основные стадии ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое при малой степени турбулентности внешнего потока: I — усиление возмущений малых амплитуд (волн Толлмина – Шлихтинга), II — развитие трехмерных нелинейных возмущений (Λ-структур), III — образование взаимодействия турбулентных пятен [5]

За рамками классической теории устойчивости остаются специфические локализованные возмущения пограничного слоя — так называемые «продольные» или «полосчатые» структуры, вызывающие в последние годы большой исследовательский интерес (см. [4]–[6]). В определенных условиях подобные структуры могут нарастать, распространяясь в направлении потока, инициировать вторичные возмущения и Λ-образные вихри, характерные для поздних стадий перехода к турбулентности (рис. 2). В этом случае для достижения эффекта ламинаризации необходимы методы воздействия на зарождение и динамику таких локальных образований, что, в свою очередь, требует их детальных исследований.

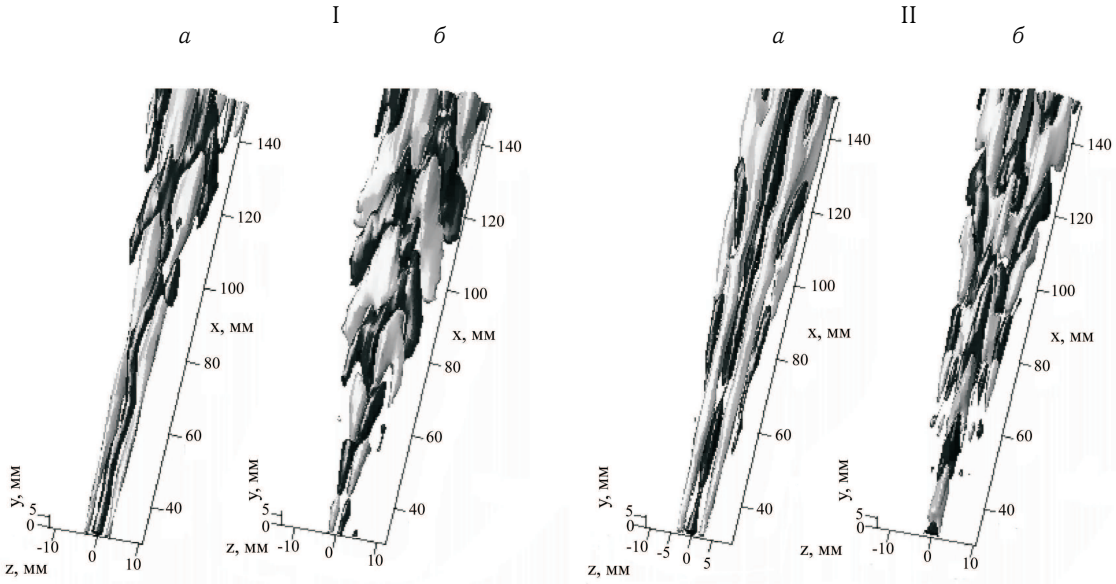


Рис. 2. Продольные структуры возмущений пограничного слоя с нарастающими на них антисимметричными (I) и симметричными (II) вторичными колебаниями: пространственное развитие вторичных возмущений совместно с их влиянием на среднюю скорость (*а*) и без него (*б*) (темными и светлыми полутонами отмечены области повышенной и пониженной скорости течения относительно ее невозмущенных значений) [7]

Искусственно смоделированные полосчатые структуры, развивающиеся в пограничном слое Блазиуса на прямом и скользящем крыльях, изучались в серии экспериментов последнего времени [8]–[10]. Наряду с определением основных характеристик структур, в этих работах были опробованы несколько способов управления локализованными возмущениями ламинарного течения. В их числе — использование продольного оребрения обтекаемой поверхности (риблет), применяемого для снижения трения в турбулентном пограничном слое. В результате опытов [7] было установлено благоприятное влияние риблет на течение в зоне ламинарно-турбулентного перехода, которое заключалось в уменьшении интенсивности полосчатых структур, возникающих на них вторичных колебаний и Λ-образных вихрей (рис. 3).

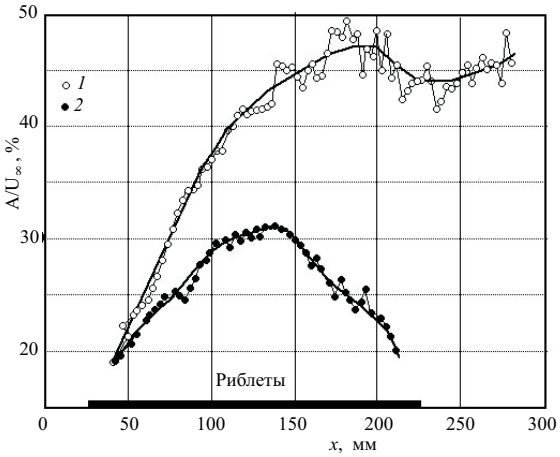


Рис. 3. Изменения вдоль потока интенсивности Λ-образных вихрей на гладкой (*1*) и оребренной (*2*) поверхностях плоской пластины [8]

Другая возможность затягивания перехода к турбулентности, вызванного эволюцией полосчатых структур была показана в работе [9], где для управления течением применялось отсасывание пограничного слоя через миниатюрные отверстия в поверхности экспериментальных моделей. Данный метод, аналогично использованию риблет, позволил подавить развитие полосчатых структур и их вторичную неустойчивость. Взаимодействие структур, порождаемых элементами шероховатости на скользящем крыле, изучалось в работе [10]. Результаты экспериментов показали, что уединенные стационарные возмущения пограничного слоя в большей мере подвержены развитию высокочастотных вторичных колебаний и последующей турбулизации, чем близко расположенные продольные структуры, испытывающие взаимное влияние при распространении вниз по потоку (рис. 4).

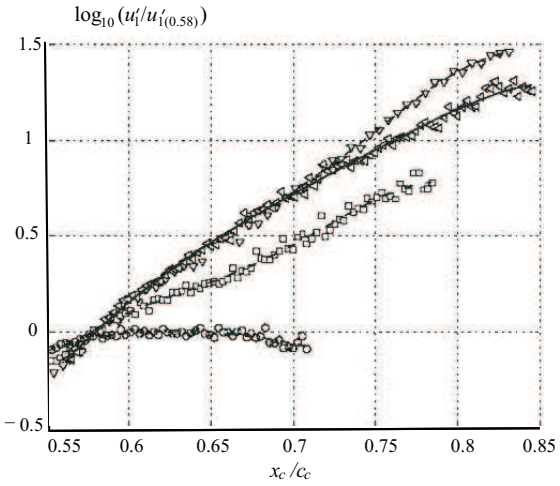


Рис. 4. Изменения вдоль потока амплитуды вторичных возмущений на уединенных (□, Δ) и взаимодействующих (◯) полосчатых структурах [10]

Таким образом, управление переходом к турбулентности, вызванным генерацией полосчатых структур элементами шероховатости обтекаемой поверхности, в принципе возможно оптимизацией их формы, размеров и пространственного расположения.

В целом результаты упомянутых выше исследований служат обоснованием новых подходов к решению проблемы ламинаризации несущих поверхностей в дополнение к известным методам управления ламинарно-турбулентным переходом, основанным на выводах классической теории устойчивости.

2. УПРАВЛЕНИЕ ОТРЫВОМ ПОТОКА НА МАЛОРАЗМЕРНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТАХ

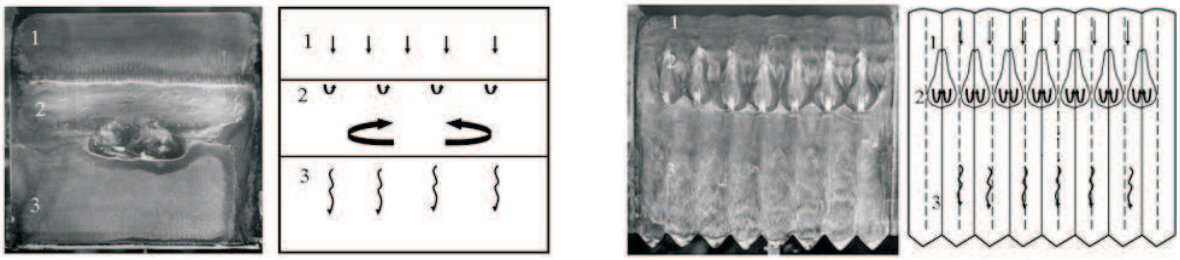
Малоразмерные летательные аппараты, такие как парапланы, планирующие парашюты и беспилотные дистанционно управляемые устройства, эксплуатируются при сравнительно низких числах Рейнольдса. В этих условиях на аэродинамических характеристиках аппаратов заметно сказывается явление отрыва ламинарного потока от обтекаемой поверхности. В большинстве случаев оно приводит к негативным последствиям, изменяя сопротивление, подъемную силу крыла и ограничивая диапазон его использования по углу атаки. Кроме того, при малой скорости движения летательного аппарата в возмущенной атмосфере возможны резкие изменения локальных условий его обтекания, вплоть до срыва потока с передней кромки крыла и потерей им несущих свойств. Для воздействия на

отрывные течения применяется ряд основанных на различных физических принципах пассивных и активных методов управления, которые реализованы на практике и находятся в стадии лабораторных испытаний (см. [3], [11]). Актуальной задачей аэродинамики летательных аппаратов остается поиск новых возможностей в этом направлении.

Рис. 5. Параплан в полете

Одна из них была рассмотрена в работах [12], [13], где изучалось отрывное обтекание крыла малого удлинения с модифицированной формой поверхности. Прообразом экспериментальной модели послужило волнистое крыло параплана (рис. 5).

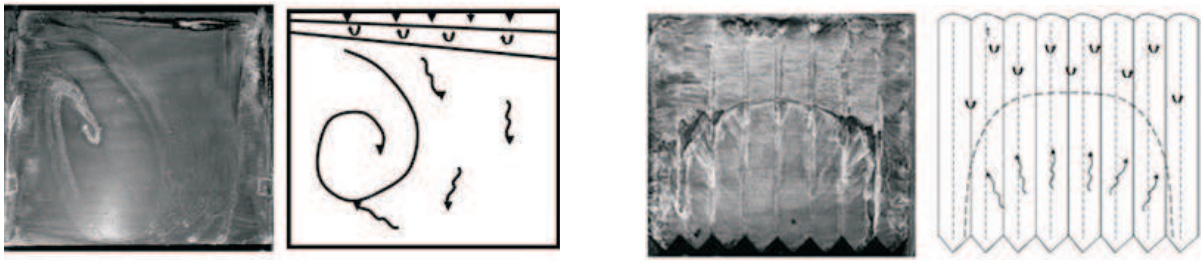
В результате исследований было установлено, что поперечная потоку периодичность поверхности крыла приводит к радикальному изменению структуры формирующегося над ним отрывного течения. Зона отрыва ламинарного потока, расположенная по размаху гладкого крыла, распадается на локальные отрывные области во впадинах между поверхностными волнами в пространственно периодическом течении (рис. 6). Следствием структурных изменений потока является увеличение критического угла атаки крыла, в экспериментальных условиях [12] — в полтора раза.



а *б*

Рис. 6. Визуализация и соответствующие ей схемы течения на гладком (*а*) и волнистом (*б*) крыльях: *1* — ламинарный пограничный слой, *2* — зона отрыва потока, *3* — турбулентный пограничный слой. Число Рейнольдса $\mathrm{Re} = 170000$, угол атаки моделей $\alpha = 0^\circ$, степень турбулентности $\varepsilon < 0,04\%$; поток направлен сверху вниз [12]

Кроме того, на умеренных (докритических) углах атаки волнистое крыло обладает более высоким аэродинамическим качеством, чем крыло гладкое. Преимуществом модифицированной несущей поверхности является также сохранение симметрии обтекания крыла при срыве потока с его передней кромки, рис. 7. В этом случае летательный аппарат имеет возможность безопасно вернуться в штатный режим полета, что повышает надежность его эксплуатации.



а *б*

Рис. 7. Визуализация и соответствующие ей схемы течения на гладком (*а*) и волнистом (*б*) крыльях при срыве потока с передней кромки. Число Рейнольдса $\mathrm{Re} = 170000$, угол атаки моделей $\alpha = 26$, степень турбулентности $\varepsilon < 0,04\%$; поток направлен сверху вниз

Результаты экспериментов [12], [13] дают основание расценивать использование волнистой несущей поверхности в качестве перспективного метода управления отрывом потока на малоразмерных

летательных аппаратах. Дальнейшее улучшение аэродинамических характеристик крыла следует ожидать после его оптимизации по форме, высоте и пространственному периоду поверхностной волны.

3. МОДИФИКАЦИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБТЕКАНИЯ ЛОПАТОК КОМПРЕССОРОВ И ТУРБИН

Лопатки компрессоров и турбин как правило используются при высоком уровне вихревых и акустических пульсаций набегающего потока (рис. 8). Соответственно аэродинамические характеристики лопаток определяются структурой сильно возмущенного течения вблизи их поверхности и в принципе могут быть оптимизированы управлением пограничным слоем. В свою очередь, для выбора эффективного метода воздействия на пристенное течение необходимы исследования его особенностей при большой интенсивности фоновых пульсаций.

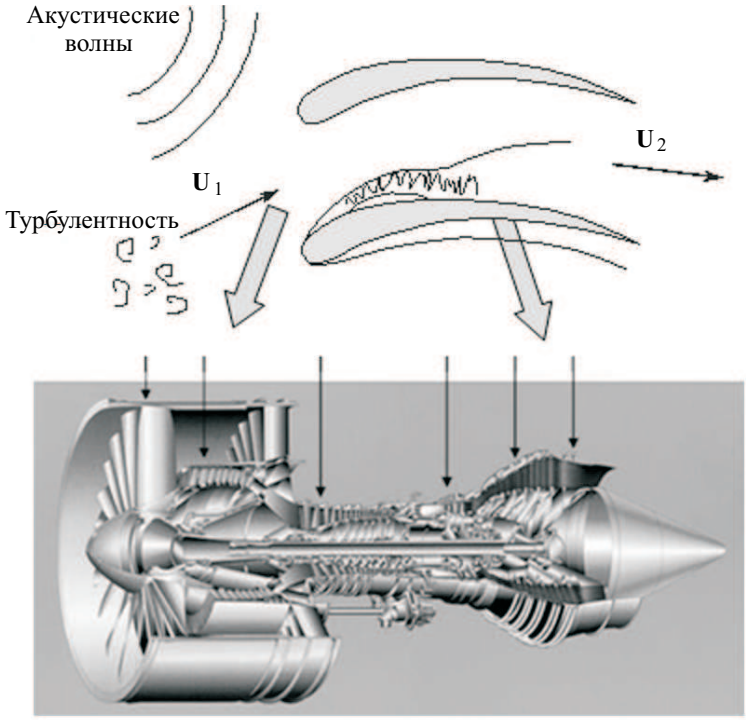


Рис. 8. Лопатки двигателя GE CF6-50 и внешние возмущающие течение факторы

Результаты изучения процесса турбулизации пограничного слоя указывают на то, что в подобных условиях он существенно отличается от перехода к турбулентности в слабо возмущенном потоке и связан с возникновением упоминавшихся выше продольных структур возмущений. Иллюстрацией служит рис. 9, на котором сравнивается дымовая визуализация течения в пограничном слое при низкой и высокой степенях турбулентности потока. Генерируемые в пограничном слое продольные структуры оказывают большое влияние на характеристики течения, вызывая, например, колебания локального коэффициента теплоотдачи в поперечном направлении, достигающие 20 % [14].

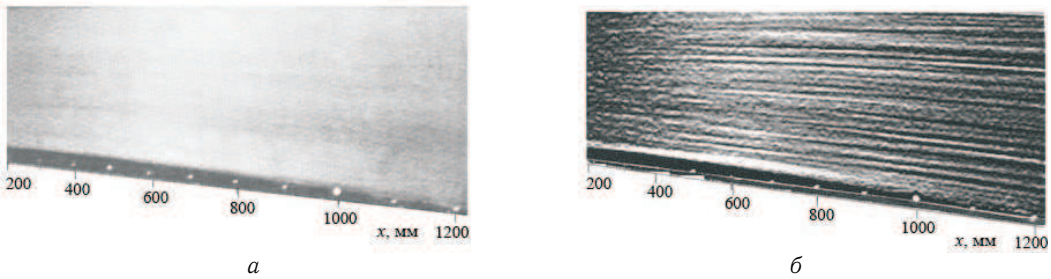


Рис. 9. Дымовая визуализация течения в пограничном слое плоской пластины при $\varepsilon < 0,04\%$ (*а*) и $\varepsilon = 1,5\%$ (*б*); поток направлен слева направо [15]

Закономерности образования полосчатых структур в пограничном слое под действием внешних турбулентных пульсаций изучались в экспериментах [14], [16], [17], где исследовались характеристики течений, возмущенных установленными на входе в рабочую часть аэродинамической трубы турбулизирующими сетками. Данные были получены на моделях крыла и клина, помещенных в потоке несжимаемого газа. При изменении уровня возмущений скорости потока в пределах до 1.8 % в исследованных конфигурациях течения была обнаружена система продольных структур с пространственным периодом, в несколько раз превышающим толщину пограничного слоя. Эксперименты показали, что поперечный масштаб и расположение этих структур у поверхности моделей определяются свойствами сеточной турбулентности. При анализе полученных результатов были получены подтверждения того, что причиной возникновения продольных структур является механизм растяжения завихренности. В ходе исследований была также установлена возможность изменения характерного поперечного масштаба структур и их расположения относительно поверхности обтекаемых потоком тел с помощью слабого акустического облучения в частотном диапазоне линейной неустойчивости сдвигового течения.

Следует ожидать, что для воздействия на продольные структуры, зарождающиеся в пограничном слое под влиянием внешней турбулентности, могут быть использованы перечисленные в первом разделе статьи методы управления, которые были опробованы на возмущениях, искусственно генерированных на поверхности экспериментальных моделей. В этом случае система управления должна включать идентификацию продольных структур, возникающих в течении неконтролируемым образом.

4. УПРАВЛЕНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ И АКУСТИЧЕСКИМ ИЗЛУЧЕНИЕМ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Процессы смешения в струях сказываются на эффективности горения, уровне шума самолетов и других летательных аппаратов, конструкции и оптимальных размерах сопел и камер сгорания. В большой мере перемешивание газа в струйных течениях связано с их турбулизацией, возникновением и развитием в них крупномасштабных энергонесущих вихревых структур. В числе последних — квазидвумерные вихри, формирующиеся вследствие неустойчивости Кельвина – Гельмгольца, и продольные вихревые структуры, которые могут быть индуцированы специальной геометрией сопла либо порождаться естественным образом в силу вторичной неустойчивости самой струи. Значительную роль продольные вихревые образования, взаимодействующие с вихрями Кельвина – Гельмгольца, играют, например, в процессе струйного горения и его стабилизации.

К возможным методам управления течением в струях относятся его акустическое облучение, создание противотока вблизи среза сопла, формирование интенсивных продольных вихрей с применением дольчатых смесителей и генерация падающих скачков уплотнения, взаимодействующих со слоем смешения при сверхзвуковых скоростях потока. Одна из концепций управления, основанная на представлениях о гидродинамической неустойчивости, подразумевает внешнее воздействие непосредственно на волновую компоненту — линейные и нелинейные колебания, нарастающие в неустойчивом сдвиговом течении на границе струи и доминирующие в нем вихревые структуры. Практическая реализация такого подхода требует подробных знаний о закономерностях формирования тонкой структуры возмущенного течения и происходящих в нем динамических процессах.

Исследованию этих вопросов были посвящены работы [18], [19], в которых рассматривались течения в различных конфигурациях, включая осесимметричную, плоскую свободную и плоскую пристенную струи. В проведенных экспериментах вихревые структуры, зарождающиеся в струях естественным образом, стабилизировались с помощью периодических во времени воздействий на струйные течения и пространственно периодических элементов шероховатости, расположенных у среза сопла. Таким образом, было изучено взаимодействие вихрей Кельвина – Гельмгольца с продольными структурами возмущений (рис. 10) и установлена аналогия наблюдаемого явления трехмерному искажению двумерной волны неустойчивости присоединенного пограничного слоя на нелинейной стадии ее развития, приводящему к формированию Λ-образных вихрей (рис. 11).

Результаты экспериментов выявили влияние числа Рейнольдса на поперечный масштаб продольных структур возмущений, показали возможность управления их характеристиками и процессом турбулизации струйного течения искусственной генерации двумерных волн неустойчивости в слое сдвига на границе струи.

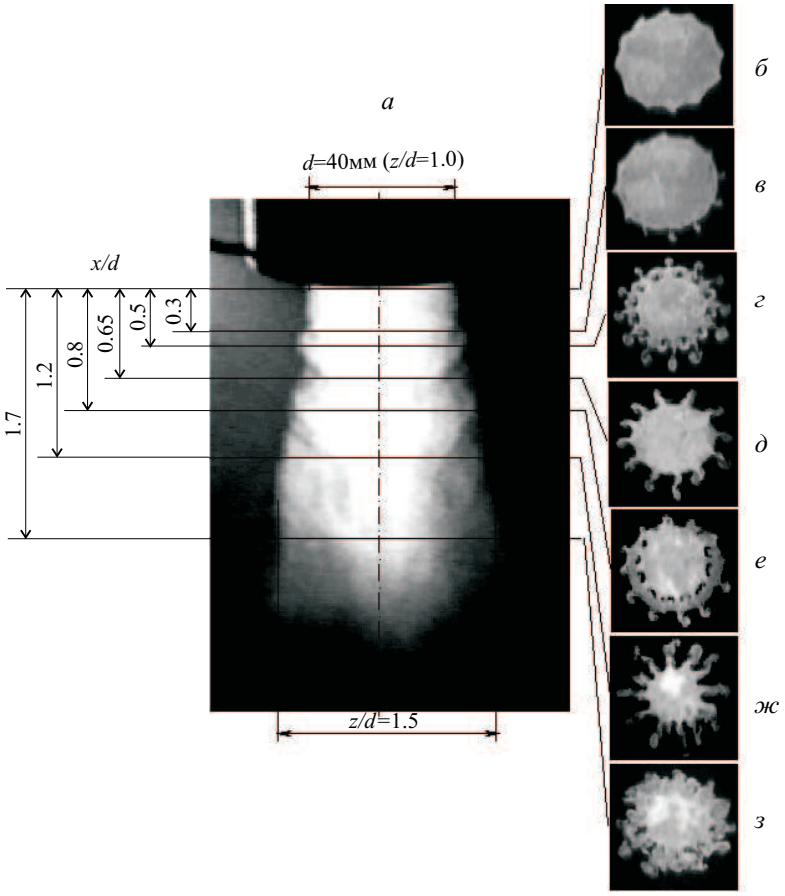


Рис. 10. Дымовая визуализация течения в круглой струе (*а*) и развивающихся в нем вихревых структур на различных расстояниях от среза сопла (*б–з*) [18]

а *б*

Рис. 11. Схема взаимодействия вихревых структур в круглой струе (*а*) и пограничном слое (*б*) [18]

Представляется, что совершенствование существующих и разработка перспективных методов управления струями во многом связаны с результатами дальнейших исследований возникновения и динамики вихревых структур, определяющих пульсационные характеристики течений.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (*проект* РНП.2.1.2.3370), *гранта РФФИ* (*проект* 08-01-00027) *и гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ* (*проект* НШ-454.2008.1).

Библиографический список

1. *Boiko A.V., Dovgal A.V., Kozlov V.V.* Actual problems of the subsonic flows aerodynamics (prospects of shear flows control) // Actual problems of aviation and aerospace systems: processes, models, experiment. Daytona Beach, USA, 2006. V. 11, № 2(22). С. 60–66.

2. *Schlichting H., Gersten K.* Boundary layer theory. Berlin: Springer, 2000.

3. *Gad-el-Hak M.* Flow control: Passive, active and reactive flow management. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

4. *Бойко А.В., Грек Г.Р., Довгаль А.В., Козлов В.В.* Физические механизмы перехода к турбулентности в открытых течениях. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» / Институт компьютерных исследований, 2006.

5. *Boiko A.V., Grek G.R., Dovgal A.V., Kozlov V.V.* The Origin of Turbulence in Near-Wall Flows. Berlin: Springer, 2002.

6. *Schmid P.J., Henningson D.S.* Stability and transition in shear flows. Berlin: Springer, 2000.

7. *Литвиненко Ю.А., Чернорай В.Г., Козлов В.В., Лефдаль Л.Л., Грек Г.Р., Чун Х.* О нелинейной синусоидальной и варикозной неустойчивости в пограничном слое (обзор) // Теплофизика и аэромеханика. 2004. Т. 11, № 3. С. 339–364.

8. *Литвиненко Ю.А., Чернорай В.Г., Козлов В.В., Лефдаль Л.Л., Грек Г.Р., Чун Х.* Влияние риблет на развитие Λ-структуры и ее преобразование в турбулентное пятно // Докл. АН. 2006. Т. 407, № 2. С. 1–4.

9. *Литвиненко Ю.А.., Козлов В.В., Чернорай В.Г., Грек Г.Р., Лефдаль Л.Л.* Управление неустойчивостью поперечного течения скользящего крыла с помощью отсоса // Теплофизика и аэромеханика. 2003. Т. 10, № 4. С. 1–9.

10. *Kozlov V.V., Chernoray V.G., Dovgal A.V., Löfdahl L.* Experiments on secondary instability of streamwise vortices in a swept wing boundary layer // J. Fluid Mech. 2005. V. 534. P. 295–325.

11. *Чжен П.* Управление отрывом потока. М.: Мир, 1979.

12. *Зверков И.Д., Занин Б.Ю.* Влияние формы поверхности крыла на отрыв потока // Теплофизика и аэромеханика. 2003. Т. 10, № 2. С. 205–213.

13. *Zverkov I.D., Sboev D.S.* Application of a combined method to study the separation flows on a wavy-surface wing model // Intern. Conf. on the Methods of Aerophysical Research. Novosibirsk, 2004. Part 1. P. 215–219.

14. *Брыляков А.П., Жаркова Г.М., Занин Б.Ю., Коврижина В.Н., Сбоев Д.С.* Стационарные продольные структуры в пограничном слое на скользящем крыле при повышенной степени турбулентности набегающего потока // Прикл. мех-ка и техн. физика. 2003. Т. 44, № 5. С. 56–63.

15. *Matsubara M., Kozlov V.V., Alfredsson P.H., Bakchinov A.A., Westin K.J.A.* On flat plate boundary layer perturbations at high free stream turbulence level // Intern. Conf. on the Methods of Aerophysical Research. Novosibirsk, 1996. V.1. P. 174–179.

16. *Zharkova G.M., Zanin B.Yu., Kovrizhina V.N., Brylyakov A.P.* Free stream turbulence effect on the flow structure over the finite span straight wing // J. Visualization. 2002. V. 5, № 2. P. 169–176.

17. *Брыляков А.П., Жаркова Г.М., Занин Б.Ю., Коврижина В.Н., Сбоев Д.С.* Влияние турбулентности набегающего потока на структуру течения на клине и наветренной стороне профиля // Прикл. мех-ка и техн. физика. 2004. Т. 45, № 4. С. 64–71.

18. *Козлов В.В., Грек Г.Р., Лефдаль Л.Л., Чернорай В.Г., Литвиненко М.В.* Роль продольных локализованных структур в процессе перехода к турбулентности в пограничных слоях и струях (обзор) // Прикл. мех-ка и техн. физика. 2002. Т. 43, № 2. С. 62–76.

19. *Levin O., Chernoray V.G., Löfdahl L., Henningson D.S.* A numerical and experimental study of the Blasius wall jet // J. Fluid Mech. 2005. V. 539. P. 313–347.

УДК 532.5326

ПРОЦЕССЫ ТОРМОЖЕНИЯ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В КАНАЛАХ

И.И. Липатов

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, кафедра аэрогидромеханики
E-mail: lipatow@postman.ru

В работе исследованы нестационарные процессы взаимодействия и отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. Выведены уравнения, описывающие подобное течение, получены численные решения линеаризованной и нелинейной системы уравнений. Предполагается, что эти результаты позволяют объяснить эффекты, наблюдающиеся при торможении сверхзвуковых течений в каналах. Для полного описания процессов торможения необходимо рассмотрение течения в области присоединения, где, собственно, и возникают автоколебательные процессы.

Processes of Supersonic Flows Retardation in Channels

I.I. Lipatov

Investigated are unsteady laminar boundary layer interaction and separation processes in supersonic flow. Deduced are equations describing such flow and obtained are numerical solutions of linearysed and nonlinear system of equations. It is supposed that these results will allow explain effects accompanying supersonic flow retardation in channels. For the full description it is needed to investigate flow in the reattachment region where selfoscillating processes arise.

ВВЕДЕНИЕ

Процессы торможения сверхзвуковых течений в каналах, несмотря на многолетние предшествующие исследования, все еще остаются во многих аспектах «terra incognita» газовой динамики. Причина этого, видимо, лежит в области практики. Пока для конструкторов эти явления не были важны или мало проявлялись в работе двигательных установок или других газодинамических устройств, достаточно было иметь некоторую эмпирическую информацию или располагать набором приближенных методов, предсказывающих интегральные характеристики процессов.

Ситуация определенно изменилась за последние 10–15 лет, когда на повестку дня встала разработка новых поколений авиационных и ракетных воздушно-реактивных двигателей, рассчитанных на работу при больших сверхзвуковых скоростях. Теперь потребовалось иметь более детальную информацию, не только интегральную, но и локальную о газодинамических процессах, сопровождающих торможение высокоскоростных потоков в каналах.

Эта информация была необходима также и потому, что потребовалось управлять процессами торможения. Одной из ключевых проблем стало создание модели — физической и/или математической, на основе которой можно было бы предлагать методы управления, определять границы устойчивой работы газодинамических устройств, да и вообще конструировать такие устройства.

Как писал Л.И. Седов — «исследовать явление — значит создать его модель. . . ». Можно было бы надеяться на современный уровень развития вычислительной гидродинамики и считать, что решение уравнений Навье – Стокса и будет служить такой моделью. Но и здесь остается достаточно вопросов, связанных с моделированием турбулентности, с нахождением критериев подобия, да и вообще с обоснованием (на физическом и математическом уровнях) постановок задач.

Представляется поэтому, что продвижение в понимании сложного явления может быть обеспечено за счет сочетания экспериментальных, вычислительных и теоретических методов исследования процессов торможения сверхзвуковых течений в каналах.

При исследовании дозвуковых течений обычно не возникает проблем. Входящий в канал поток содержит расположенные на стенках пограничные слои, толщина которых растет в продольном направлении, при достаточной длине канала они сливаются, формируя течение Пуазейля (ламинарное или турбулентное). При этом торможение течения у стенок требует разгона течения в невязком ядре (для выполнения условия сохранения расхода). При этом разгоне поперечный размер невязкого ядра уменьшается, что в сумме с увеличивающимися толщинами пограничных слоев обеспечивает выполнение сохранения толщины канала (если это канал с параллельными стенками. В любом случае течение такого типа, по определению Крокко, является докритическим, т.е. способным передавать возмущения вверх по потоку.

© И.И. Липатов, 2008

Совсем иная ситуация возникает при входе в канал сверхзвукового потока. Здесь также на стенках образуются пограничные слои. Но прежнего баланса между развитием пограничных слоев и невязкого сверхзвукового ядра уже нет. Режим реализующегося течения, по определению Крокко, уже может быть закритичским (сверхзвуковым в среднем) и переход в дозвуковое течение под влиянием каких либо причин на выходе (дросселирования, энерговыделения, выдува массы и т.д.), как показывают эксперименты, происходит через сложную структуру скачков и областей отрывного преисеночного течения, называемого в целом псевдоскачком. Интересно, что когда пограничный слой на стенках канала отсасывался, формирующийся в канале скачок по форме был близок к прямому.

Соответствующий пример можно видеть на рис. 1, приведенном в [1].

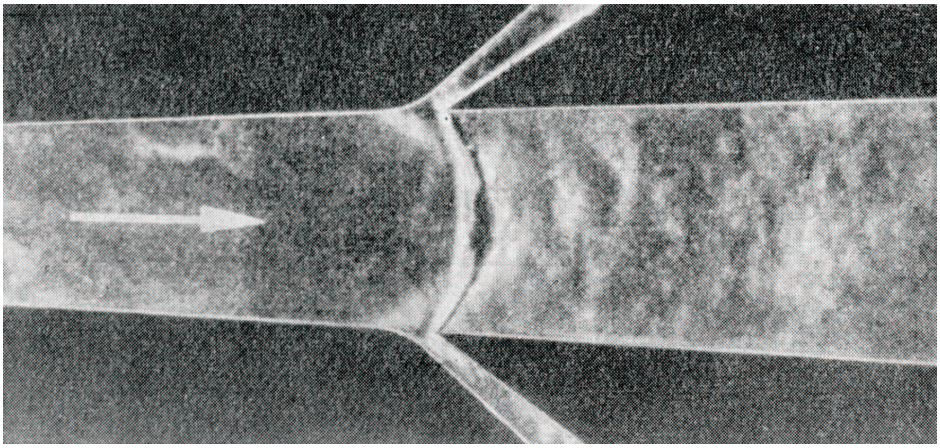


Рис. 1. Квазипрямой скачок уплотнения в канале после удаления пограничных слоев

Если же отсос пограничного слоя отсутствует реализуется совершенно другой режим течения с системой скачков, с областями отрыва и присоединения пограничного слоя.

То есть образование псевдоскачка целиком связано с проявлением сил вязкости при одновременном проявлении газодинамических эффектов невязких течений.

С пограничными слоями связано явление отрыва. В условиях внешнего обтекания известны соотношения, определяющие условия образования отрыва и параметры зон отрывных течений. При малых интенсивностях, возникающих в канале скачков, возможно безотрывное обтекание (для ламинарных и турбулентных режимов течения это разные интенсивности или разные допустимые числа Маха).

При увеличении числа Маха возникает ситуация, при которой возникающий отрыв (если его параметры такие же как и для отрыва во внешнем течении) должен был бы обязательно запирать течение в канале и формировать выбитую ударную волну. Вместе с тем эксперименты показывают, что этого не происходит, по крайней мере, в определенном диапазоне изменения параметров. Ясно, что при значительном повышении давления на выходе из канала режим с выбитой волной обязательно реализуется. Но возникает вопрос: что происходит в промежуточном диапазоне изменения параметров?

Фотографии структуры течения показывают, что, во-первых, трансформируется система скачков — они приобретают лямбда-образную или икс-образную структуру (рис.2). При этом возникающие градиенты могут быть такими, при которых отрыв пограничного слоя еще не возникает. Понятно, что

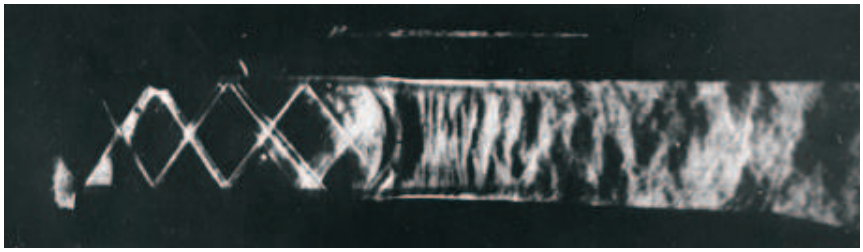


Рис. 2. Торможение сверхзвукового потока в канале при $M = 2$ [1]

могут быть и другие режимы, при которых все-таки образуется отрыв. При этом, если бы он был таким, какой возникает во внешних течениях, это снова приводило бы к запиранию потока. Следовательно, в канале возникают (могут возникать) другие режимы отрывных течений. Главное их отличие состоит в меньших поперечных размерах (меньших углах отхода слоя смешения). Каким образом может реализоваться такая ситуация? Ответ, видимо, единственный — только в условиях возникновения нестационарного течения в пограничных слоях. Нестационарное течение возникает и в невязком ядре, но там влияние организованных пульсаций относительно мало, в отличие от течения в пограничных слоях.

Как модель можно было бы предположить возникновение Рэлеевского режима течения в пограничном слое. Для этого нужно было бы обеспечить колебательное движение стенок канала в продольном направлении и обеспечить определенные значения амплитуды и частоты колебаний. В силу отсутствия нелинейных конвективных членов в уравнениях пограничного слоя никакого отрыва с изменением поперечных масштабов пограничного слоя не возникнет, хотя и будут наблюдаться в течение определенных временных интервалов возвратные течения. Воздействие на такой пограничный слой ударных волн не приведет к возникновению отрыва (если выполнены определенные соотношения между интенсивностью волны и параметрами колебаний [3]).

Другой возможный вариант связан с возникновением пульсаций давления (при отсутствии колебаний стенки), накладываемых на некоторое среднее движение. Причиной появления таких пульсаций могут быть нестационарные процессы в области присоединения пограничного слоя, которые будут существенно менять структуру области возвратных (или колебательных) движений. Косвенно в пользу такого предположения свидетельствуют как результаты экспериментов, так и найденные в вычислительных экспериментах граничные условия, которые соответствуют не условиям прилипания на стенке, а условиям развития струйных течений, при которых на стенке ставятся условия равенства нулю нормальных производных.

Дальнейшее развитие происходит как последовательное развитие пограничных слоев до области смыкания. Ниже представлены результаты исследования течения в одной из областей псевдоскачка, связанной с началом области взаимодействия вязкого и невязкого течений. Цель этого исследования — выяснить свойства нестационарного отрыва, проявляющегося в свободном потоке. Для течения в канале такое приближение применимо в начальном участке области взаимодействия.

Анализ экспериментальных данных показывает, что возникновение отрыва в канале отличается от соответствующего процесса в открытом течении. Среди различных гипотез наиболее вероятной представляется гипотеза о проявлении эффектов нестационарности, приводящих к повышению осредненного давления в точке отрыва, равно как и давления в области развитого отрыва.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Экспериментальные исследования, а в дальнейшем теоретический анализ, основанный на изучении асимптотических решениях уравнений Навье – Стокса [4–5], позволили выявить и описать такой режим течения, при котором в результате взаимодействия течения в пограничном слое с внешним невязким потоком индуцируется самосогласованное распределение давления. Для подобного режима течения в работе [6] предложен термин — «свободное взаимодействие».

К течениям со свободным взаимодействием относятся течения в локальных областях вблизи точек отрыва пограничного слоя, если отрыв начинается с гладкого участка контура обтекаемого тела, а взаимодействие пограничного слоя с внешним потоком до точки отрыва является слабым. Режим свободного взаимодействия реализуется также при взаимодействии слабых ударных волн с пограничным слоем, обтекании угловых точек контура тела, при сверхзвуковом и дозвуковом обтекании задней кромки пластины и во многих других случаях. Обзор некоторых задач, решенных в рамках теории «свободного взаимодействия», приведен в работе [7].

Исследования нестационарных течений в пограничном слое с самоиндуцированным давлением дали возможность отметить связь между теорией устойчивости и теорией «свободного взаимодействия» [8]. Результаты изучения пространственного течения с самоиндуцированным распределением давления представлены в работах [9–10], в которых рассмотрено обтекание малых неровностей, находящихся на дне ламинарного пограничного слоя в предположении, что возмущенное течение описы-

вается линейной системой уравнений. В настоящем разделе представлены результаты исследований нестационарных пространственных течений со свободным взаимодействием.

2. ОЦЕНКИ МАСШТАБОВ КООРДИНАТ И ФУНКЦИЙ ТЕЧЕНИЯ, УРАВНЕНИЯ И КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

Рассматривается обтекание плоской поверхности потоком вязкого сжимаемого газа. Пусть на расстоянии l от передней кромки расположена область возмущенного ламинарного течения с самоиндуцированным распределением давления. Декартова система координат выбрана таким образом, что направление оси OX совпадает с направлением скорости невозмущенного набегающего потока, величина которой равна u_∞, а ось OZ параллельна плоской поверхности. Предполагается, что число Рейнольдса достаточно велико, т.е. выполнен предельный переход

$$\mathrm{Re} \to \infty, \qquad \mathrm{Re} = \rho_\infty u_\infty l/\mu_\infty, \tag{2.1}$$

где ρ_∞ — плотность невозмущенного набегающего потока, μ_∞ — коэффициент вязкости, соответствующий невозмущенному набегающему потоку.

Ниже для декартовых координат, компонентов вектора скорости, плотности, давления, энтальпии, коэффициента вязкости и времени приняты следующие обозначения: lx, ly, $u_\infty u$, $u_\infty v$, $\rho_\infty \rho$, $\rho_\infty u_\infty^2 p$, $u_\infty^2 h$, $\mu_\infty \mu$, lt/u_∞ соответственно. Согласно теории «свободного взаимодействия», в возмущенной области течения можно выделить три характерные области. Размеры всех областей в направлениях x и z совпадают и равны по порядку величины $\varepsilon^{3/4}(\varepsilon = \mathrm{Re}^{-1/2})$; следует отметить, что эти размеры больше, чем толщина пограничного слоя перед областью взаимодействия ($\delta_0^* \sim \varepsilon$).

Размер области I в направлении, перпендикулярном поверхности, при конечных значениях числа Маха M совпадает по порядку величины с размерами в направлении осей OX и OZ. В области I содержатся струйки тока сверхзвукового или дозвукового невязкого безвихревого слабовозмущенного течения. Пограничный слой на дне области I представляет собой характерную область II. Возмущенное течение в областях I и II оказывается в первом приближении невязким, поэтому в рассмотрение вводится область III с толщиной, равной $\varepsilon^{5/4}$, лежащая на дне области II, где влияние сил вязкости становится сравнимым с силами инерции. Продольная скорость в пристеночной области меняется в главном члене, соответственно в основном порядке меняется толщина вытеснения, определяющая изменение возмущения давления.

В области I независимые координаты и функции можно представить в виде

$$\begin{gathered} x = 1 + \varepsilon^{3/4} x_1, \quad y = \varepsilon^{3/4} y_1, \quad t = \varepsilon^{1/2} t_1, \quad u = 1 + \varepsilon^{1/2} u_1(x_1, y_1) + \ldots, \\ v = \varepsilon^{1/2} v_1(x_1, y_1) + \ldots, \quad p = 1/\gamma M_\infty^2 + \varepsilon^{1/2} p_1(x_1, y_1) + \ldots, \quad \rho = 1 + \varepsilon^{1/2} \rho_1(x_1, y_1) + \ldots, \\ h = 1/(\gamma - 1) M_\infty^2 + \varepsilon^{1/2} h_1(x_1, y_1) + \ldots, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где M_∞ — число Маха в невозмущенном набегающем потоке, γ — отношение удельных теплоемкостей.

Подстановка (2.2) в систему уравнений Навье – Стокса и предельный переход (2.1) приводят к уравнениям теории малых возмущений для сжимаемого потока:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial y_1} = 0, \\ M_\infty^2 \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial z_1} = 0, \qquad (|M_\infty^2 - | \sim O(1)). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Система уравнений (2.3) описывает квазистационарное возмущенное невязкое течение. Масштаб изменения функций по времени определяется по величине скорости и длине возмущенной области. Из системы уравнений (2.3) можно получить следующее уравнение для возмущения давления:

$$-(M_\infty^2 - 1)\frac{\partial^2 p_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y_1^2} = 0. \tag{2.4}$$

Для дальнейшего анализа необходимо получить связь между распределением возмущения давления p_1 и распределением вертикальной скорости v_1 при $y_1 \to 0$, т.е. на внешней границе пограничного слоя. Решение системы уравнений (2.4), устанавливающее подобную зависимость приведено в [11].

Решение уравнения (2.4), удовлетворяющее условию отсутствия приходящих и на поверхность извне возмущений имеет вид

$$p_1 = cf(x_1 - \beta_0 y_1), \tag{2.5}$$

где $\beta_0 = (M_\infty^2 - 1)^{1/2}$.

Следует отметить, что для течений в каналах в определенных условиях необходимо учитывать приходящие (отраженные от противоположной стенки)возмущения. Исследование таких процессов представлено в работах [12–14]. Наконец, искомое соотношение между возмущениями давления и вертикальной скорости для решения (2.5) имеет вид

$$p_1(x_1, 0, t_1) = v_1(x_1, 0, t_1)\beta_0^{-1}. \tag{2.6}$$

В области II координаты и функции течения можно представить в следующей форме:

$$\begin{gathered} x = 1 + \varepsilon^{3/4}x_1, \qquad y = \varepsilon y_2, \qquad t = \varepsilon^{1/2}t_1\,, \qquad u = u_0 + \varepsilon^{1/4}u_2 + ..., \qquad v = \varepsilon^{1/2}v_2 + ...\,, \\ p = 1/\gamma M_\infty^2 + \varepsilon^{1/2}p_2(x_1, y_1) + ..., \quad \rho = \rho_0 + \varepsilon^{1/4}\rho_2 + ...\,, \quad h = 1/(\gamma - 1)M_\infty^2 + \varepsilon^{1/4}h_2 + ... \end{gathered} \tag{2.7}$$

Предельный переход (2.1) после подстановки (2.7) в уравнения Навье – Стокса дает следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} \rho_0 u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \rho_0 v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y_2} = 0, \\ \frac{\partial p_2}{\partial y_2} = 0, \qquad \rho_0 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \rho_0 \frac{\partial v_2}{\partial y_2} + u_0 \frac{\partial \rho_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial y_2} = 0, \\ u_0 \frac{\partial \rho_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial y_2} = 0. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Ее решение можно записать в виде

$$u_2(x_1, y_2, t_1) = \frac{du_0}{dy_2} A(x_1, y_2, t_1); \qquad v_2(x_1, y_2, t_1) = -u_0 \frac{\partial A(x_1, y_2, t_1)}{\partial x_1}. \tag{2.9}$$

Наконец, для масштабов координат и функций течения в области III верны формулы

$$\begin{gathered} x = 1 + \varepsilon^{3/4}x_1, \qquad y = \varepsilon^{5/4}y_2, \qquad t = \varepsilon^{1/2}t_1, \qquad u = \varepsilon^{1/4}u_3 + ..., \qquad v = \varepsilon^{3/4}v_3 + ...\,, \\ p = 1/\gamma M_\infty^2 + \varepsilon^{1/2}p_3(x_1, y_1) + ..., \qquad \rho = \rho_w + \varepsilon^{1/2}\rho_3 + ...\,, \qquad h = h_w + \varepsilon^{1/4}h_3 + ... \end{gathered} \tag{2.10}$$

Для главных членов разложений функций течения после подстановки (2.10) в уравнения Навье – Стокса получается следующая система уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_3}{\partial t_1} + \rho_w u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \rho_w v_3 \frac{\partial u_3}{\partial y_3} + \frac{\partial p_3}{\partial x_1} = \mu_w \frac{\partial^2 u_3}{\partial y_3^2}, \\ \frac{\partial p_3}{\partial y_3} = 0; \qquad \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} = 0. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Краевые условия определяются при сращивании решений в области III с решениями в областях II и I и с решением для невозмущенного пограничного слоя:

$$\begin{aligned} &u_3 \to a(y_3 + A), \qquad y_3 \to \infty, \\ &u_3 \to ay_3, \qquad x_3 \to -\infty, \\ &u_3 = v_3 = 0, \qquad y_3 = 0, \\ &v_1(x_1, 0, t_1) = -\frac{\partial A(x_1, t_1)}{\partial x_1} = \beta_0 p_3, \end{aligned} \tag{2.12}$$

где $a = \dfrac{du_0(0)}{dy_2}$.

Введем замены переменных

$$
\begin{aligned}
&x_3 = X(\rho_w a^{5/2}\mu_w^{1/2})^{-1/2}\left|M_\infty^2-1\right|^{-3/8}, && y_3 = Y(\rho_w^{-2}a^{-3}\mu_w)^{1/4}\left|M_\infty^2-1\right|^{-1/8},\\
&p_3 = P(a\mu_w)^{1/2}\left|M_\infty^2-1\right|^{1/2}, && t_3 = T(\rho_w a^{3/2}\mu_w^{1/2})^{-1}\left|M_\infty^2-1\right|^{-1/4}\\
&v_3 = V(\rho_w^{-1}a^{3/2}\mu_w^{3/2})^{1/2}\left|M_\infty^2-1\right|^{1/8}, && u_3 = U(\rho_w^{-2}a\mu_w)^{1/4}\left|M_\infty^2-1\right|^{-1/8},\\
&w_3 = W(\rho_w^{-2}a\mu_w)^{1/4}\left|M_\infty^2-1\right|^{-1/8}, && A = \tilde{A}(\rho_w^{-2}a^{-3}\mu_w)^{1/4}\left|M_\infty^2-1\right|^{-1/8}.
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Преобразуем систему уравнений (2.11) и краевых условий (2.12) к виду

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial T} + U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2},\\
&\frac{\partial P}{\partial Y} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0,\\
&U \to Y + \tilde{A}, \qquad Y \to \infty,\\
&U \to Y, \qquad X \to -\infty,\\
&U = V = 0, \qquad Y = 0,\\
&V(X,0,T) = -\frac{\partial \tilde{A}(X,T)}{\partial X} = P.
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Будем искать решение задачи (2.14) в виде малых возмущений к исходному решению, описывающему течение в пристеночной области пограничного слоя:

$$
U = Y + C_0 f_2(Y)\exp(\alpha X + i\omega T), \qquad P = C_0 P_2 \exp(\alpha X + i\omega T), \tag{2.15}
$$

где $C_0 << 1$

Замена переменных $Y = \alpha^{-1/3}Y_1$ приводит систему уравнений (2.14) для решений (2.15) к следующей системе уравнений:

$$
\begin{aligned}
&(Y_1 + T_1)f_2' = f_2''',\\
&f_2(0) = f_2'(\infty) = 0, \qquad f_2''(0) = \alpha^{2/3}P_2,
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

где $T_1 = i\omega\alpha^{-1}$. Решение (2.16) выражается через функции Эйри: $\dfrac{df_2}{dY_1} = CAi(Y_1)$.

Наконец, дополнительное краевое условие, полученное при сращивании с решениями в областях I и II, позволяет получить дисперсионное соотношение:

$$
Ai'(T_1) = -\alpha^{4/3}\int\limits_{T_1}^{\infty} Ai(Y_1)\,dY_1.
$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ

На рис. 3 представлены зависимости действительной и мнимой части параметра α от действительного параметра ω. Полученные в таком диапазоне изменения параметров решения соответствуют бегущим внутри пограничного слоя волнам с изменяющейся по пространству амплитудой. Эти волны распространяются как вверх, так и вниз по потоку. В данном случае представлены решения, описывающие волны, распространяющиеся вверх по потоку. Физически эти результаты соответствуют распространению возмущений от источника, расположенного в некоторой точке поверхности.

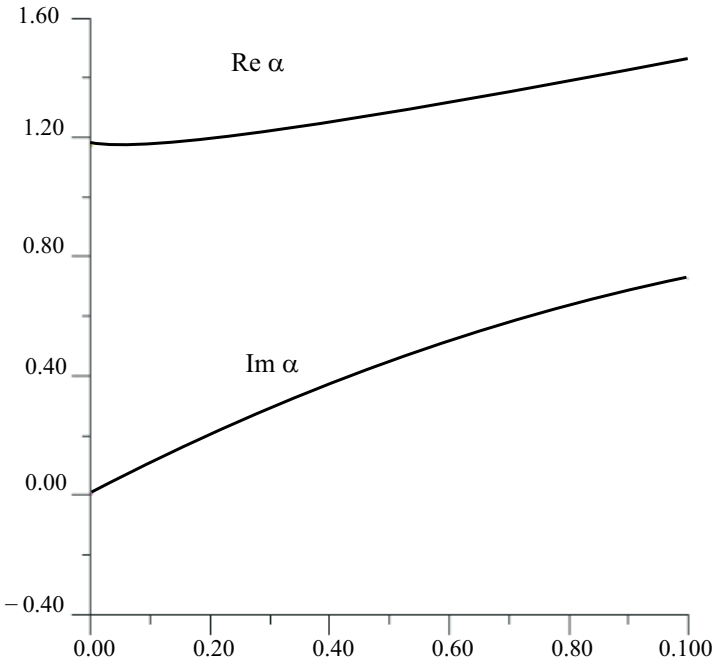


Рис. 3. Зависимость действительной и мнимой части волнового числа от частоты колебаний

Кроме того, были получены решения и нелинейной краевой задачи, описывающей возмущенное течение выше по потоку от источника нестационарных возмущений давления. Это решение в определенном смысле моделирует решение полной задачи, содержащей и область нестационарного течения вблизи точки присоединения пограничного слоя. В расчетах в области возвратных токов использовалась аппроксимация Флюгге – Лотц, для которой конвективные члены при возникновении возвратных токов полагаются равными нулю. Как было ранее показано, такая аппроксимация удовлетворительно работает в течениях с локальными зонами отрыва.

На рис. 4 представлены зависимости от времени возмущения давления и поверхностное трение вблизи точки, где расположен источник нестационарных возмущений.

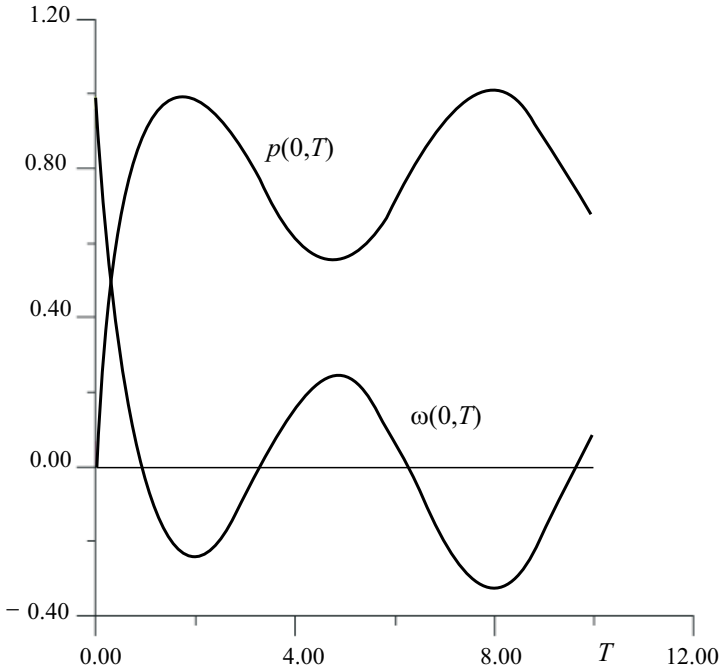


Рис. 4. Зависимость возмущения давления и поверхностного трения от времени

Библиографический список

1. Газовая динамика. Сер. Аэродинамика больших скоростей / Под ред. Эммонса. М.: Физматлит, 1957.
2. *Гуськов О.Н., Копченов В.И., Липатов И.И. и др.* Процессы торможения сверхзвуковых течений в каналах. М.: Физматлит. 2008.
3. *Липатов И.И., Нейланд В.Я.* К теории нестационарного отрыва и взаимодействия ламинарного пограничного слоя // Учен. записки ЦАГИ. 1987. Т. 18, № 1. С. 36–49.
4. *Нейланд В.Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1969. № 4. С. 53–57.
5. *Stewartson K., Williams P.G.* Self-induced separation // Proc. Roy. Soc. A. 1969. V. 312, № 1509. P. 181–206.
6. *Chapman D.R., Kuehn D., Larson H.* Investigation of separated flows in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effect of transition // NACA Rep. 1958. № 1356. 40 p.
7. *Гогиш Л.В., Нейланд В.Я., Степанов Г.Ю.* Теория двумерных отрывных течений // Итоги науки. Гидромеханика. 1975. Т. 8. С.5–73.
8. *Рыжов О.С., Терентьев Е.Д.* О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением // ПММ. 1977. Т. 41, вып. 6.
9. *Smith F.T., Sykes R.I., Brighton P.W.M.* A two-dimensional boundary layer encountering a three-dimensional hump // J. Fluid Mech. 1977. V. 83. Pt. 1. P.163–176
10. *Липатов И.И.* Пространственное обтекание малой неровности в режиме слабого гиперзвукового взаимодействия // Учен. записки ЦАГИ. 1980. Т. 11, № 2.
11. *Черный Г.Г.* Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз. 1959.
12. *Smith F.T.* Upstream interactions in channel flows // J. Fluid Mech. 1977. V. 79. Pt. 4. P. 631–655.
13. *Николаева Е.М., Тригуб В.Н.* О самоиндуцированном взаимодействии пограничных слоёв в плоском канале // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 4. С. 131–141.
14. *Дубинский С.В., Липатов И.И.* О распространении возмущений в пограничных слоях во внутренних течениях // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2004. № 2. С. 65–74.

УДК 539.376

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЯЗКОУПРУГОЕ ПОВЕДЕНИЕ НАПОЛНЕННЫХ ЭЛАСТОМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Е.В. Ломакин, Т.А. Белякова, Ю.П. Зезин*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет
кафедра теории пластичности,
*Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова
E-mail: lomakin@mech.math.msu.su

Проведены экспериментальные исследования процесса релаксации напряжений для резины плотностью 1200 кг/м^3, включающие испытания на релаксацию при нормальной температуре в условиях одноосного растяжения и сжатия при различном уровне деформаций. Для описания вязкогиперупругого деформирования наполненных эластомерных материалов используются определяющие соотношения, являющиеся обобщением нелинейной теории упругости и линейной теории вязкоупругости Больцмана – Вольтерра. Разработан метод определения параметров взаимосвязанных гиперупругих и реологических характеристик деформирования. На основании экспериментальных данных отмечена зависимость релаксационных свойств исследуемых эластомеров от уровня деформации и предложен подход к описанию этой зависимости, основанный на применении определяющих соотношений нелинейной эндохронной теории стареющих вязкоупругих материалов. Наблюдается вполне удовлетворительное соответствие теоретических и экспериментальных зависимостей.

Non-Linear Viscoelastic Behavior of Filled Elastomers

E.V. Lomakin, T.A. Beliakova, Yu.P. Zezin

The analysis of the results of experimental studies of relaxation properties of rubber at room temperature under the conditions of tension and compression at different strain levels is carried out. For the description of viscohyperelastic deformation of filled elastomers, the constitutive relations are used that are the generalization of non-linear elasticity and linear viscoelasticity Boltzmann – Volterra. The method for the determination of interrelated hyperelastic and reological characteristics of deformation is proposed. On the base of experimental data, the dependence of relaxation properties of elastomer on the strain level is discovered and the approach to the description of this dependence based on the constitutive relations of non-linear endochronic theory of aging viscoelastic materials is proposed. The finite element numerical simulation of an experiment under conditions of the confined compression of flat cylindrical specimen and subsequent relaxation is performed. Sufficient correspondence between the calculated values of axial load and the results of experimental study is demonstrated.

ВВЕДЕНИЕ

Возрастающее использование резиноподобных материалов во многих областях современной техники приводит к необходимости описания с высокой точностью кратковременных и длительных характеристик деформирования и разрушения эластомерных элементов конструкций. Повсеместное использование эластомеров в нефтегазовой промышленности, машиностроении, гражданском строительстве,

© Е.В. Ломакин, Т.А. Белякова, Ю.П. Зезин, 2008

кораблестроении, авиационной и аэрокосмической технике ставит широкий круг исследовательских задач. В него, прежде всего, входит проведение всестороннего комплекса экспериментальных исследований. Первостепенное значение имеет формулировка математической модели, позволяющей описать напряженно-деформированное состояние наполненных полимерных материалов с учетом физической и геометрической нелинейности, накопления повреждений и разрушения, а также разработка экспериментальных методов определения материальных функций и функционалов, входящих в определяющие соотношения. Наконец, возникает необходимость в уточнении существующих алгоритмов численных расчетов для анализа поведения конструкций из физически нелинейных эластомерных материалов при различных условиях нагружения и деформирования.

В условиях больших деформаций линейное приближение для описания упругих свойств эластомеров не может быть использовано, и необходимо считать материал гиперупругим с соответствующим представлением упругого потенциала как функции инвариантов тензора конечных деформаций. Кроме того, вязкие свойства многих эластомеров зависят от характеристик процесса деформирования, в том числе от уровня деформаций, и являются нелинейными. При этом гиперупругие и реологические свойства материалов взаимосвязаны, и необходима разработка соответствующих методов их определения.

В данной работе приведены результаты экспериментальных исследований на релаксацию в условиях растяжения и сжатия при нормальной температуре образцов резины. Для описания данных экспериментов использованы интегральные определяющие соотношения, позволяющие одновременно учесть как гиперупругие, так и вязкоупругие свойства, что является необходимым условием при моделировании реального поведения эластомерных материалов и конструкций. Разработан метод определения параметров взаимосвязанных гиперупругих и реологических характеристик деформирования. На основании экспериментальных данных отмечена зависимость релаксационных свойств исследуемых эластомеров от уровня деформации и предложен подход к описанию этой зависимости.

1. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Проведены экспериментальные исследования процесса релаксации напряжений в образцах из резины плотностью 1200 кг/м^3 в условиях одноосного растяжения и сжатия при различном уровне деформаций и нормальной температуре. В испытаниях на релаксацию использовались цилиндрические образцы, начальный диаметр и начальная высота H_0 которых составляли соответственно 10 и 12 мм. В табл. 1–4 представлены результаты экспериментов на релаксацию в условиях одноосного сжатия при уровнях деформаций соответственно $\varepsilon_{11} = -0.185, -0.284, -0.305, -0.421$ ($E_{11} = -0.1679, -0.2437, -0.2585, -0.3324$), где $\varepsilon_{11} = \lambda_1 - 1$ — относительная осевая деформация, которая часто называется инженерной деформацией, $E_{11} = (\lambda_1^2 - 1)/2$— осевая деформация Грина – Лагранжа, $\lambda_1 = H/H_0$, H — текущая высота образца. Скорость деформирования на этапе нагружения составляла 0.0082–0.01 с$^{-1}$. В таблицах приведены в зависимости от времени t [с] значения инженерного напряжения $\sigma_{11} = F/S_0$ [МПа], F — действующая осевая нагрузка, S_0 — начальная площадь сечения образца, а также значения соответствующей компоненты тензора напряжений Коши $\Sigma_{11} = (1 + \varepsilon_{11})\sigma_{11}$ [МПа], в предположении, что изменение объема образца отсутствует.

Таблица 1

Результаты эксперимента на релаксацию в условиях одноосного сжатия при значении инженерной деформации $\varepsilon_{11} = -0.185$

t	$-\sigma_{11}$	$-\Sigma_{11}$
1	2	3
21	1.3895	1.1325
26	1.3510	1.1010
36	1.2725	1.0371
46	1.2484	1.0175
56	1.2356	1.0070

Таблица 2

Результаты эксперимента на релаксацию в условиях одноосного сжатия при значении инженерной деформации $\varepsilon_{11} = -0.284$

t	$-\sigma_{11}$	$-\Sigma_{11}$
1	2	3
34	2.3708	1.6975
36	2.2765	1.6300
38	2.2340	1.5996
40	2.2058	1.5793
44	2.1703	1.5540

Окончание табл. 1

1	2	3
66	1.2292	1.0018
86	1.2132	0.9887
106	1.1988	0.9770
156	1.1811	0.9626
206	1.1715	0.9548
256	1.1651	0.9496
306	1.1587	0.9444
356	1.1507	0.9378
410	1.1491	0.9365
1010	1.1234	0.9156
1610	1.1106	0.9052
2810	1.1026	0.8986
4610	1.0849	0.8842
5810	1.0834	0.8829
7610	1.0801	0.8803
9410	1.0545	0.8594
13610	1.0417	0.8490
19370	1.0337	0.8425

Окончание табл. 2

1	2	3
50	2.1349	1.5286
60	2.0878	1.4949
70	2.0641	1.4779
80	2.0430	1.4628
90	2.0288	1.4526
111	2.0052	1.4357
186	1.9462	1.3935
261	1.9203	1.3749
411	1.8801	1.3462
561	1.8519	1.3259
711	1.8377	1.3158
895	1.8259	1.3073
2695	1.7528	1.2550
4495	1.7174	1.2297
6295	1.6891	1.2094
8095	1.6820	1.2043
11695	1.6584	1.1874
15620	1.6395	1.1739

Таблица 3

Результаты эксперимента на релаксацию в условиях одноосного сжатия при значении инженерной деформации $\varepsilon_{11} = -0.305$

t	$-\sigma_{11}$	$-\Sigma_{11}$
37	2.6949	1.8729
42	2.5271	1.7563
47	2.4680	1.7153
52	2.4283	1.6877
57	2.4054	1.6717
67	2.3692	1.6466
77	2.3363	1.6237
87	2.3099	1.6052
107	2.2770	1.5825
147	2.2441	1.5597
367	2.1454	1.4911
547	2.1125	1.4682
727	2.0960	1.4567
1087	2.0632	1.4339
1987	2.0204	1.4042
2887	1.9973	1.3881
3787	1.9808	1.3767
4687	1.9611	1.3630
6487	1.9348	1.3447
8287	1.9216	1.3356
10087	1.9117	1.3287
11887	1.8986	1.3195
13687	1.8854	1.3104

Таблица 4

Результаты эксперимента на релаксацию в условиях одноосного сжатия при значении инженерной деформации $\varepsilon_{11} = -0.421$

t	$-\varepsilon_{11}$	$-E_{11}$	$-\sigma_{11}$	$-\Sigma_{11}$
10	0.1028	0.0975	1.0746	0.9641
20	0.2055	0.1844	2.0511	1.6296
30	0.3083	0.2608	2.9628	2.0494
41	0.421	0.3324	4.0374	2.3377
51	0.421	0.3324	3.6792	2.1303
61	0.421	0.3324	3.5615	2.0621
81	0.421	0.3324	3.4643	2.0058
101	0.421	0.3324	3.4182	1.9791
201	0.421	0.3324	3.2749	1.8962
301	0.421	0.3324	3.2170	1.8626
500	0.421	0.3324	3.1453	1.8212
1000	0.421	0.3324	3.0668	1.7757
2400	0.421	0.3324	2.9628	1.7155
8280	0.421	0.3324	2.8647	1.6586
70980	0.421	0.3324	2.7027	1.5649
94680	0.421	0.3324	2.7027	1.5649
154980	0.421	0.3324	2.6497	1.5342
166260	0.421	0.3324	2.6497	1.5342

Табл. 5–9 содержат результаты экспериментов на релаксацию в условиях одноосного растяжения при уровнях деформации соответственно $\varepsilon_{11} = 0.105, 0.185, 0.269, 0.507, 0.56$ ($E_{11} = 0.1105, 0.2021, 0.3052, 0.6355, 0.7168$). Скорость деформирования на этапе нагружения составляла 0.00345–0.0035 с$^{-1}$.

Таблица 5

Результаты эксперимента на релаксацию в условиях одноосного растяжения при значении инженерной деформации $\varepsilon_{11} = 0.105$

t	σ_{11}	Σ_{11}
30	0.8309	0.9182
45	0.7819	0.8640
90	0.7328	0.8097
210	0.7027	0.7765
510	0.6582	0.7273
1362	0.6438	0.7114
6132	0.6340	0.7005
68382	0.5352	0.5913
273630	0.5214	0.5762

Таблица 6

Результаты эксперимента на релаксацию в условиях одноосного растяжения при значении инженерной деформации $\varepsilon_{11} = 0.185$

t	σ_{11}	Σ_{11}
53	1.1158	1.3223
77	1.0706	1.2687
107	1.0349	1.2263
227	0.9944	1.1784
587	0.9546	1.1312
1787	0.9320	1.1044
4187	0.9142	1.0833
6917	0.8963	1.0621
8807	0.8827	1.0460
12407	0.8696	1.0305
16367	0.8607	1.0199
82967	0.7577	0.8979
441114	0.6287	0.7450

Таблица 7

Результаты эксперимента на релаксацию в условиях одноосного растяжения при значении инженерной деформации $\varepsilon_{11} = 0.269$

t	σ_{11}	Σ_{11}
78	1.4730	1.8692
93	1.3409	1.7016
108	1.3178	1.6723
163	1.2612	1.6004
213	1.2381	1.5712
273	1.2050	1.5292
393	1.1907	1.5110
573	1.1627	1.4754
933	1.1440	1.4517
1353	1.1159	1.4161
9603	1.0736	1.3624
79803	0.9091	1.1536
171603	0.8266	1.0490
438903	0.8877	1.1264
686403	0.8266	1.0490

Таблица 8

Результаты эксперимента на релаксацию в условиях одноосного растяжения при значении инженерной деформации $\varepsilon_{11} = 0.507$

t	σ_{11}	Σ_{11}
147	1.6677	2.5132
171	1.4474	2.1812
231	1.3883	2.0921
351	1.2883	1.9414
651	1.2701	1.9141
1551	1.2569	1.8941
3081	1.2250	1.8460
8805	1.1888	1.7915
63612	1.0859	1.6365
234612	0.9701	1.4619
252612	0.9615	1.4489

Таблица 9

Результаты эксперимента на релаксацию в условиях одноосного растяжения при значении инженерной деформации $\varepsilon_{11} = 0.56$

t	σ_{11}	Σ_{11}
162	1.7606	2.7466
177	1.6654	2.5980
192	1.6118	2.5144
252	1.5226	2.3753
312	1.4870	2.3197
402	1.4572	2.2732
702	1.3977	2.1804
1002	1.3621	2.1248

Окончание табл. 9

t	σ_{11}	Σ_{11}
1302	1.3502	2.1063
3102	1.2966	2.0227
4602	1.2669	1.9763
8946	1.2311	1.9206
17546	1.1717	1.8278
80550	1.0980	1.7115
177150	1.0659	1.6628
260550	1.0665	1.6637
778950	1.0369	1.6176

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ВЯЗКОГИПЕРУПРУГОСТИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ КОНСТАНТ

Пусть $\overset{\circ}{x}_i$ и x_i, $i = 1, 2, 3$ соответственно начальные и актуальные координаты материальной точки. В качестве меры конечных деформаций могут быть использованы тензоры деформаций Коши – Лагранжа $\overset{\circ}{\mathbf{C}} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ и Коши – Эйлера $\mathbf{C} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$, где $F_{ij} = \partial x_i \big/ \partial \overset{\circ}{x}_j$ — градиент движения. Тензор $\overset{\circ}{\mathbf{C}}$ выражается через тензор кратностей удлинений $\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}$ в виде $\overset{\circ}{\mathbf{C}} = \overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}{}^2$, чьи главные значения представляют собой удлинения материальных волокон по главным направлениям тензора, $\lambda_i = ds_i \big/ d\overset{\circ}{s}_i$, $i = 1, 2, 3$. Связь тензора деформаций Коши – Лагранжа с тензором деформаций Грина – Лагранжа $\mathbf{E}$ задается соотношением $\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{I})/2$ [1].

Инварианты тензора деформаций Коши – Лагранжа $\overset{\circ}{\mathbf{C}}$ имеют вид $I_1 = \mathrm{tr}\,(\mathbf{C}^\circ) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, $I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \mathrm{tr}\,(\overset{\circ}{\mathbf{C}}{}^2)) = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2$, $I_3 = \det(\overset{\circ}{\mathbf{C}})$. В предположении несжимаемости эластомерных материалов справедливо $I_3 = 1$.

Для описания вязкогиперупругого деформирования эластомеров предлагается использовать определяющие соотношения, полученные путем обобщения нелинейной теории упругости и линейной вязкоупругой модели Больцмана – Вольтерра. Результирующее напряжение представляет собой сумму гиперупругой и вязкоупругой компонент [2, 3]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^h + \sigma_{ij}^\nu. \tag{1}$$

Гиперупругая составляющая тензора напряжений для изотропного несжимаемого материала может быть получена дифференцированием по соответствующим компонентам тензора деформаций упругого потенциала $W(I_1,\ I_2)$, представленного в виде полинома по инвариантам тензора конечных деформаций $(I_1 - 3)$ и $(I_2 - 3)$ [4]. Так, пятиконстантный полиномиальный гиперупругий потенциал будет иметь вид:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{02}(I_2 - 3)^2. \tag{2}$$

При этом гиперупругая составляющая напряжения σ_{11}^h при одноосном напряженном состоянии представляется соотношением

$$\Sigma_{11}^h = (1 + \varepsilon_{11})\sigma_{11}^h = -p^h + \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1},$$

где Σ_{11}^h — гиперупругая составляющая осевой компоненты тензора напряжений Коши, ε_{11} — относительная осевая деформация. Гидростатическое давление p^h определяется из условия равенства нулю напряжения в поперечном направлении $\Sigma_{22}^h = -p^h + \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = 0$, откуда

$$p^h = \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2}, \qquad \Sigma_{11}^h = (1 + \varepsilon_{11})\ \sigma_{11}^h = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2}.$$

В простейшем случае вязкоупругая составляющая напряжений σ_{ij}^ν может быть представлена соотношениями линейной теории вязкоупругости Больцмана – Вольтерра, и в случае одноосного деформирования несжимаемого материала записывается в виде

$$\sigma_{11}^\nu(t) = \int_0^t R(t - \tau)\, d\varepsilon_{11}(\tau). \tag{3}$$

Определяющие соотношения (3) применимы только при малых деформациях в геометрически линейной постановке и могут рассматриваться как первоначальная оценка соответствующих характеристик деформирования. При переходе к конечным деформациям аналогом соотношения (3) служит зависимость

$$\mathbf{\Sigma}^\nu(t) = -p^\nu \mathbf{I} + \mathbf{F}(t) \int_0^t G(t - \tau)\, d\mathbf{E}(\tau)\ \mathbf{F}^T(t), \tag{4}$$

переходящая в формулу (3) при малых деформациях, когда осевая деформация Грина – Лагранжа совпадает с инженерной, $E_{11} \cong \varepsilon_{11}$.

Функция релаксации $R(t)$ может аппроксимироваться суммой экспоненциальных функций:

$$R(t) = \sum_{i=1}^{N} E_i e^{-\alpha_i t}. \tag{5}$$

На основании соотношений (1), (3), (5) в случае одноосного нагружения с постоянной скоростью деформаций $\dot{\varepsilon}_{11}$ в течение времени t_0 до деформации $\varepsilon_{11}^0 = \dot{\varepsilon}_{11} t_0$ и последующей релаксации напряжение в образце представляется в виде

$$\sigma_{11}(t) = \begin{cases} \sigma_{11}^h(\varepsilon_{11}(t)) + \dot{\varepsilon}_{11} \sum\limits_{i=1}^{N} E_i \dfrac{1 - e^{-\alpha_i t}}{\alpha_i}, & 0 \le t \le t_0, \\ \sigma_{11}^h(\varepsilon_{11}(t)) + \dot{\varepsilon}_{11} \sum\limits_{i=1}^{N} E_i \frac{e^{\alpha_i t_0} - 1}{\alpha_i} e^{-\alpha_i t}, & t \ge t_0. \end{cases} \tag{6}$$

Таким образом, предполагается, что при описании напряженно-деформированного состояния эластомерных материалов можно выделить квазистатическую гиперупругую составляющую напряжений и вязкоупругую составляющую, описывающую зависимость деформационных свойств материала от истории деформирования. При медленном нагружении напряжение стремится к гиперупругой составляющей при данной деформации. В работе [2], где ставится задача описания деформирования резиноподобных материалов при высоких скоростях нагружения порядка 10^3 с$^{-1}$ (ударных нагрузках), предлагается определять коэффициенты для гиперупругой составляющей напряжений σ_{ij}^h в определяющих соотношениях, исходя из экспериментов при малых по сравнению с предполагаемыми скоростях нагружения (0.001 с$^{-1}$). Таким образом, считается, что влиянием зависимости деформационных свойств материала от скорости нагружения можно пренебречь, если предполагаемые скорости деформирования на несколько порядков превышают скорости деформирования в эксперименте, описывающем гиперупругую составляющую напряжений.

В случае, когда исследуемые скорости деформирования сопоставимы с экспериментальными, для определения коэффициентов в соотношении (2) для гиперупругой составляющей напряжений σ_{ij}^h предлагается использовать метод, основанный на определении асимптотических значений напряжений в процессе релаксации при различных уровнях деформаций. В табл. 10 приведены определенные на основании проведенных экспериментов (табл. 1–9) значения напряжений [МПа] при времени релаксации, стремящемся к бесконечности. Эти данные, представляющие собой зависимость $\sigma_{11}^h(\varepsilon_{11})$, аппроксимируются при помощи потенциала (2), при этом константы материала равны $C_{10} = 0.5879$, $C_{01} = 0.1354$, $C_{20} = 0.6988$, $C_{11} = -1.7884$, $C_{02} = 0.7736$ (рис. 1).

Таблица 10

Асимптотические значения релаксационных характеристик (гиперупругая составляющая напряжений)

ε_{11}	σ_{11}^h
-0.421	-2.3767
-0.305	-1.5950
-0.284	-1.3974
-0.185	-0.8877
0.105	0.4830
0.185	0.6072
0.269	0.7935
0.507	0.9522
0.56	1.0005

При известной гиперупругой составляющей напряжений из соотношения (6) и испытаний на релаксацию можно определить коэффициенты E_i и α_i в вязкоупругих соотношениях. Для описания напряженно-деформированного состояния материала в условиях действия сжимающих нагрузок примем за основу данные эксперимента на релаксацию в условиях одноосного сжатия до деформации $\varepsilon_{11} = -0.421$. Соответствующие коэффициенты E_i [МПа] и α_i, полученные аппроксимацией данных табл. 4, приведены в табл. 11.

Теперь, когда известны и гиперупругие, и вязкоупругие константы материала, можно рассчитать теоретические кривые деформирования и последующей релаксации при сжатии. Полученные зависимости показаны на рис. 2 (*a, b*) для разных масштабов времени. Экспериментальные значения отмечены на графиках звездочками; цифрами 1–4 обозначены теоретические кривые релаксации при уровнях деформации $\varepsilon_{11} = -0.185, -0.284, -0.305, -0.421$ соответственно. Анализ определенных таким образом теоретических кривых позволяет отметить зависимость функции релаксации от уровня

Таблица 11

Материальные константы ядра релаксации по данным эксперимента при значении инженерной деформации $\varepsilon_{11} = -0.421$

i	E_i	α_i
1	0.6921	$2.338 \cdot 10^{-6}$
2	0.3861	$9.723 \cdot 10^{-5}$
3	0.4613	$1.129 \cdot 10^{-3}$
4	0.6259	$8.527 \cdot 10^{-3}$
5	3.6803	0.106

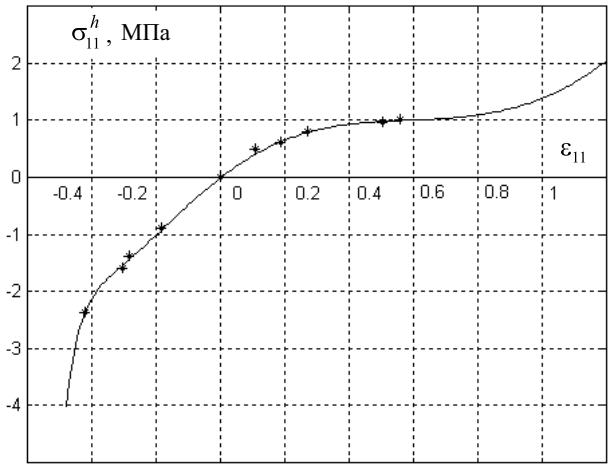
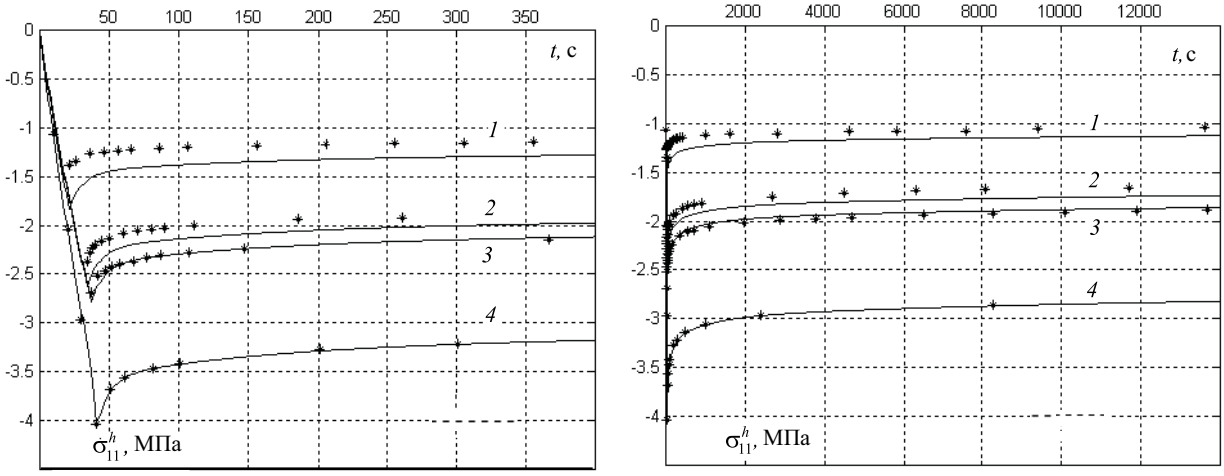


Рис. 1. Аппроксимация гиперупругой составляющей напряжений по данным экспериментов на релаксацию



a *b*

Рис. 2. Теоретические кривые деформирования и последующей релаксации при сжатии на основании соотношений линейной теории вязкоупругости

деформаций, которая не может быть описана при помощи соотношений (3) линейной теории вязкоупругости.

Оставаясь в рамках геометрически линейного подхода к описанию деформирования, можно учесть физически нелинейное сопротивление наполненных полимерных материалов при помощи нелинейной эндохронной теории стареющих вязкоупругих материалов. Определяющие соотношения эндохронной теории в общем случае трехосного напряженного состояния имеют вид

$$S_{ij}^{\nu}(t) = \varphi_1(t) \int\limits_0^t R_1(t_1(t) - t_1(\tau))\, d\text{Э}_{ij}(\tau),$$

$$\sigma^{\nu}(t) = \varphi_2(t) \int\limits_0^t R_2(t_2(t) - t_2(\tau))\, d[\vartheta(\tau) - 3\alpha\Delta T(\tau)], \tag{7}$$

$$t_1 = \int\limits_0^t \frac{\varphi_1(\xi)\, d\xi}{f_1(\xi)}, \quad t_2 = \int\limits_0^t \frac{\varphi_2(\xi)\, d\xi}{f_2(\xi)}.$$

Здесь $R_1(t)$ — функция релаксации при сдвиге, $R_2(t)$ — функция релаксации при объемном деформировании, S^{ν}_{ij} и $Э_{ij}$ — девиатор вязкоупругой составляющей тензора условных напряжений и девиатор тензора инженерных деформаций соответственно, $\sigma^{\nu}(t)$ — гидростатическая компонента вязкоупругой составляющей тензора напряжений, $\vartheta(t)$ — объемная деформация, ΔT — разность температур, α — коэффициент линейного теплового расширения, $t_i(t)$ $(i = 1, 2)$ — приведенные времена. Функции $f_i(t)$ и $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2)$ могут представлять собой функции времени, инвариантов тензора напряжений и тензора деформаций, температуры, поврежденности материала и других физических и химических параметров.

Для описания наблюдающейся зависимости релаксационных характеристик от уровня деформации в случае несжимаемого материала в исследуемом ограниченном диапазоне деформаций можно ввести функцию $\varphi_1(\varepsilon_{11}(t)) = A_1 - A_2 e^{p(\varepsilon_{11}(t)-\varepsilon_0)}$, $\varepsilon_0 = -0.421$, $p = 1.4534$, $A_1 = 1.953$, $A_2 = 0.953$, $f_1(\varepsilon_{11}(t)) = \varphi_1(\varepsilon_{11}(t))$, $t_1 = t$. Теоретические кривые деформирования и последующей релаксации при сжатии, полученные на основе модифицированных соотношений (7), представлены на рис. 3 (*a, b*) для разных масштабов времени (обозначения теоретических кривых и экспериментальных точек на графиках те же, что и на рис. 2 (*a, b*). При этом предполагалось, что зависимость вязкоупругих свойств материала от уровня деформации начинает проявляться заметным образом, когда абсолютное значение деформации превышает некоторую критическую величину ε_s, т. е. при $\varepsilon < -\varepsilon_s$ в случае сжатия. В качестве ε_s в данной работе использовалось минимальное по величине значение деформации при сжатии в исследуемом диапазоне: $\varepsilon_s = -0.185$. Приведенные на рис. 3 кривые демонстрируют хорошее соответствие экспериментальных и теоретических зависимостей, рассчитанных по формулам (7). Незначительное отклонение наблюдается только для деформации $\varepsilon_{11} = -0.305$ в силу выбранной монотонной зависимости функции релаксации от уровня деформаций.

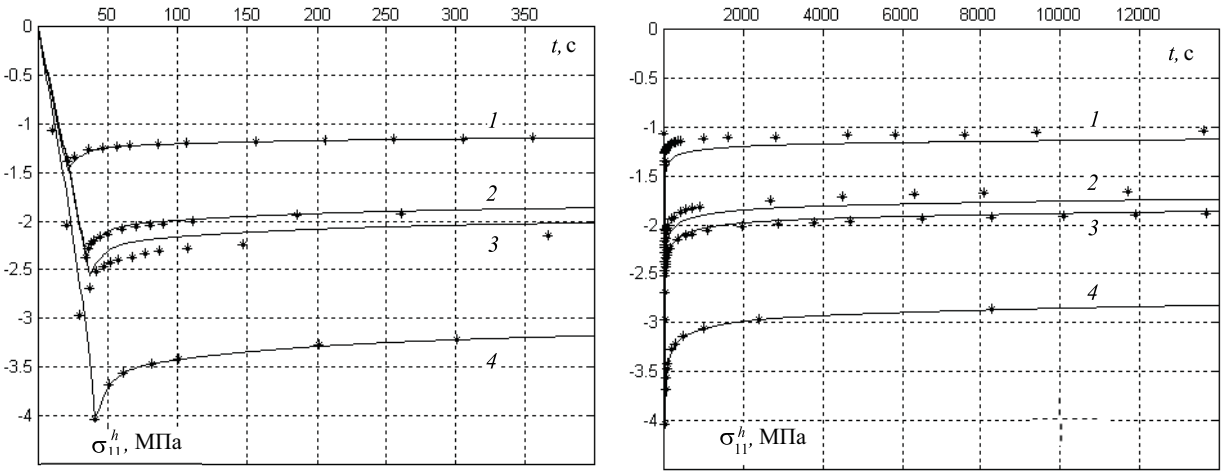
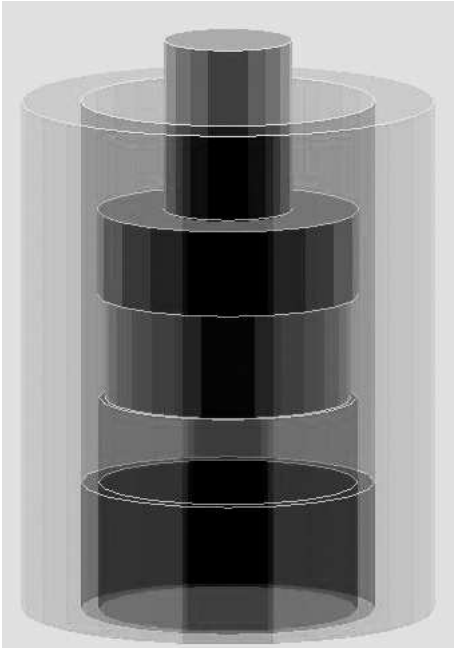
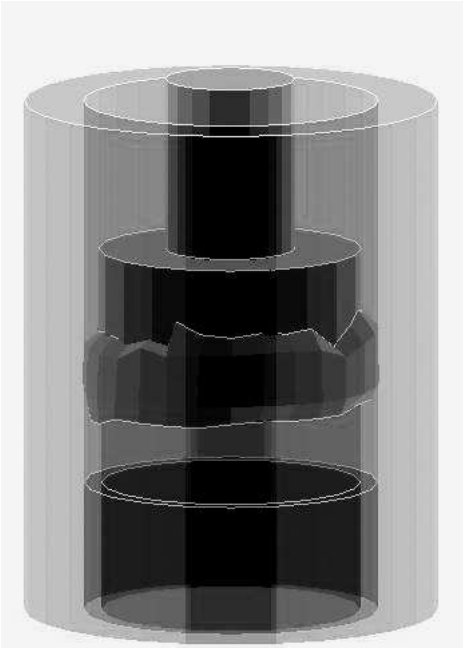


Рис. 3. Теоретические кривые деформирования и последующей релаксации при сжатии на основании соотношений нелинейной эндохронной теории стареющих вязкоупругих материалов

Для обоснования справедливости предложенного варианта определяющих соотношений и методики экспериментального определения входящих в них параметров был проведен также ряд независимых экспериментов на стесненное сжатие в обойме и последующую релаксацию плоских цилиндрических образцов, начальные диаметр и высота которых составляли соответственно 28.8 и 11.2 мм. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 4, *a*. Образец помещен в цилиндрическую обойму и сжимается в результате вертикального перемещения верхнего пуансона; нижний пуансон неподвижен. В экспериментах задавалось перемещение верхнего пуансона с постоянной скоростью 0.077 мм/сек до величины деформации сжатия 41.3%. Средняя скорость деформации сжатия была 0.007 сек$^{-1}$. В табл. 12 приведены полученные в эксперименте значения осевой силы F_{exp} [Н] в зависимости от времени t [с].



a



b

Рис. 4, *a* — схема экспериментальной установки, в которой реализуется стесненное сжатие в обойме и последующая релаксация плоского цилиндрического образца; *b* — деформированный вид образца в конце нагружения при времени $t = 60$ с

Проведено численное моделирование данного эксперимента при помощи метода конечных элементов в пакете LS-DYNA с использованием определенных выше значений гиперупругих и вязкоупругих констант материала. Деформированный вид образца в конце нагружения при времени $t = 60$ с показан на рис. 4, *b*. Полученная при расчете зависимость действующей в осевом направлении силы F от времени t приведена на рис. 5; соответствующие значения F также представлены в табл. 12. Точками на графике отмечены экспериментальные значения осевой нагрузки.

Таблица 12

Результаты эксперимента на стесненное сжатие в обойме и последующую релаксацию плоского цилиндрического образца

t	$-F_{exp}$	$-F$
10.002	637.0	439.0
19.998	1116.9	798.6
30	1587.0	1531.0
40.002	2155.4	2484.7
49.998	3331.1	4745.0
60	6609.4	7204.1
90	5766.0	6322.4
180	5442.4	6199.2
300	5295.3	6105.4
600	5148.2	6057.3

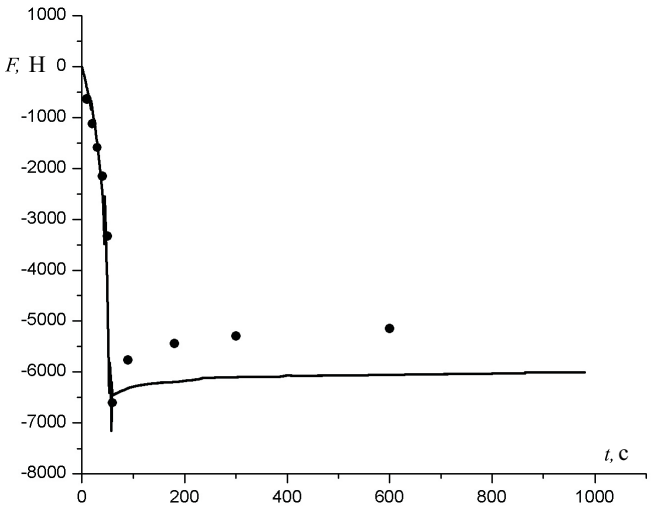


Рис. 5. Зависимость действующей в осевом направлении силы F от времени t по результатам численного моделирования при помощи метода конечных элементов в пакете LS-DYNA

Анализ результатов численного моделирования позволяет отметить, что, даже исходя только из экспериментов на одноосное напряженное состояние при определении констант в соотношениях (1)–

(5), в случае трехосного напряженного состояния можно получить расчетные значения деформационных характеристик, достаточно хорошо согласующихся с экспериментальными. На начальном этапе нагружения сопротивление материала определяется, в основном, гиперупругими свойствами и, как видно из рис. 5, экспериментальная и расчетная диаграммы зависимости сжимающей силы от времени на начальном участке сжатия практически совпадают, но имеется различие в максимальных значениях силы, которое составляет 18%. Это различие перенеслось и на расчетные и экспериментальные значения осевой нагрузки в процессе релаксации, которое также не превышает 18%. Следует отметить, что при проведении испытаний в условиях стесненного сжатия большое влияние оказывает трение на ограничивающих поверхностях, и здесь возможно определенное расхождение между расчетными и экспериментальными значениями напряжений. В экспериментах коэффициент трения между исследованным эластомером и поверхностями экспериментальной установки (рис. 4, *a, b*) не определялся, и в расчетах было использовано некоторое среднее значение, равное 0.3, которое часто принимается при проведении расчетов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании проведенных экспериментальных исследований релаксационных характеристик резины в условиях одноосного растяжения и сжатия при нормальной температуре предложен вариант описания механических свойств наполненных эластомерных материалов при помощи определяющих соотношений гипервязкоупругости, которые представляют собой обобщение нелинейной теории упругости и линейной теории вязкоупругости Больцмана – Вольтерра. Разработан метод определения взаимосвязанных гиперупругих и реологических свойств эластомеров. Представление зависимостей между вязкоупругой составляющей напряжений и деформациями в виде нелинейной эндохронной теории стареющих вязкоупругих материалов позволяет учесть, оставаясь в рамках геометрически линейного подхода, зависимость ядра релаксации от уровня деформаций, что приводит к удовлетворительному соответствию между теоретическими и экспериментальными зависимостями. Более точное описание поведения экспериментальных кривых может быть достигнуто введением приведенного времени. Следует отметить, что достаточно высокий уровень деформаций в исследованном диапазоне приводит к необходимости учета конечных деформаций с использованием соотношений (4) или их модификаций для вязкоупругой составляющей напряжений.

Проведено численное моделирование эксперимента на стесненное сжатие в обойме и последующую релаксацию плоских цилиндрических образцов при помощи метода конечных элементов в пакете LS-DYNA с использованием определенных значений гиперупругих и вязкоупругих констант материала. Отмечено, что даже исходя из экспериментов на одноосное напряженное состояние при определении констант в определяющих соотношениях, можно получить расчетные значения осевой нагрузки, достаточно хорошо согласующиеся с экспериментальными.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проекты* 06-01-08034, 06-08-00422).

Библиографический список

1. *Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н.* Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. 256 с.

2. *Yang L.M., Shim V.P.W., Lim C.T.* A visco-hyperelastic approach to modelling the constitutive behaviour of rubber // Intern. J. of Impact Engineering. 2000. V. 24. P. 545–560.

3. LS-DYNA Theoretical Manual. May 1998. Livermore Software Technology Corporation.

4. *Rivlin R.S.* Proceedings of First Symposium on Naval Structural Mechanics. 1960. P. 169–198.

5. *Быков Д.Л., Коновалов Д.Н.* Нелинейная эндохронная теория стареющих вязкоупругих материалов // Известия РАН. Механика твердого тела. 2002. № 4. С. 63–76.

УДК 519.853.2:629.5.01.001.26

ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ И ОПТИМИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.М. Пашин

ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова
E-mail: pashin@krylov.spb.ru

Проектирование сложных технических систем (корабль, летательный аппарат, производственный комплекс и др.), как правило, является многоуровневым процессом с разделением объекта проектирования на отдельные подсистемы. При этом поиск наилучших решений по отдельным подсистемам должен отвечать требованиям оптимальности объекта проектирования в целом. Это условие предлагается выполнять с помощью локальных критериев, построенных с использованием двойственных оценок (множителей Лагранжа) теории двойственности в нелинейном математическом программировании. Рассматриваются практические задачи использования подобных критериев.

Duality Theory and Optimization of Sophisticated Engineering Systems

V.M. Pashin

The design of sophisticated engineering systems (like the ship, airborne vehicle, production complex, etc.) is usually a multilevel process when the object under design is split up into separate sub-systems. At the same time, the quest for the best solutions for separate sub-systems should comply with requirements for optimality of the designed object as a whole. It is suggested to meet this condition with the help of local criteria developed using dual assessments (Lagrangian coefficients) of the duality theory in the non-linear mathematic programming. Application of the said criteria for the practical tasks has been reviewed.

1. СИСТЕМНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ. СУЩЕСТВО ПРОБЛЕМЫ

Корабль, судно, самолёт, ракета и т.п. являются примерами сложных технических систем. Подобные системы состоят из ряда таких подсистем, как корпус (планер), энергетическая установка, рулевой комплекс, радионавигационное оборудование и пр. Важнейшим принципом системного проектирования является согласованное проектирование всех подсистем с подчинением единой цели — достижению наивысшей эффективности проектируемого объекта. При этом должны быть выполнены все требования к качествам создаваемого образца техники.

В терминах математического программирования такая задача состоит в отыскании векторов $(X^0,\ X_k^0)$, доставляющих минимум (максимум) функции $f(X, X_k)$ при ограничениях $g_i(X, X_k) \geq 0, \quad i \in I, h_j(X, X_k) = 0, \quad j \in J$ — это задача А.

В качестве функции критерия $f(X, X_k)$может выступать, например, стоимость жизненного цикла образца техники (случай минимизации), либо объём выполняемой им работы (случай максимизации). Функции ограничений отражают требования к различным качествам проектируемого образца. Для судна, например, это условия обеспечения заданной грузовместимости, скорости хода, требования к остойчивости, удифферентовке, непотопляемости и др. Важнейшим является условие равновесного плавания (закон Архимеда) — случай строгого равенства $h_j(X, X_k) = 0$.

Соблюдая принцип системного проектирования, мы обеспечиваем оптимальность проектируемого объекта. Этот принцип можно было бы реализовать строго и в полном объёме, сведя системное проектирование к обозначенной математически сформулированной задаче оптимизации. По целому ряду причин прямое решение такой задачи не реально ни сегодня, ни в отдалённом будущем. Не случайно практика проектирования реализуется в виде последовательных приближений с нарастающей детализацией (аванпроект, эскизный, технический и т.д.) при распараллеливании разработки (проектирование подсистем). Сложился стереотип, согласно которому проектирование сводится к решению задач верхнего и нижнего уровней (ВУ и НУ). ВУ — это определение основных характеристик проектируемого объекта в первом приближении, когда ещё не наработана информация по подсистемам. НУ — это детальная разработка подсистем в рамках тех основных характеристик, которые приняты на ВУ. В свою очередь, проектирование на НУ также является многоуровневым.

Проблема возникает вследствие того, что задачи ВУ и НУ решаются разными подразделениями проектной организации. ВУ — это прерогатива главного конструктора и его группы. НУ — это предмет разработок специализированных по подсистемам отделов проектной организации. Процесс взаимодействия ВУ и НУ осуществляется в несколько приближений до получения сбалансированного проекта. При этом согласование проектных решений ВУ и НУ есть важнейшая функция главного

© В.М. Пашин, 2008

конструктора, успешность выполнения которой при отсутствии формализованной методологии зависит исключительно от его квалификации и опыта.

Таким образом, на практике проектирование осуществляется на основе декомпозиции сложной системы. В теории больших систем проблема декомпозиции и координации сводится к трём самостоятельным проблемам:

– формирование подзадач ВУ и НУ;

– выбор принципа координации и разработка метода определения координирующих воздействий;

– организация самой процедуры координации.

Формирование подзадач предопределено структурой сложной системы и сложившейся практикой проектирования.

ВУ: определить вектор $X = X^0$ такой, что

$$f(X, \overline{X}_k) \to \min(\max), \tag{1}$$

$$g_i(X, \overline{X}_k) \geq 0, \quad \forall\ i \in I, \tag{2}$$

$$h_j\left(X, \overline{X_k}\right) = 0, \quad \forall\ j \in J. \tag{3}$$

Соответственно НУ: определение $X_k = X_k^0$ при условии

$$\varphi_k\left(X^0, X_k\right) \to \min(\max), \tag{4}$$

$$g_{ki}\left(X^0, X_k\right) \geqslant 0, \quad \forall\ i \in I, k \in K, \tag{5}$$

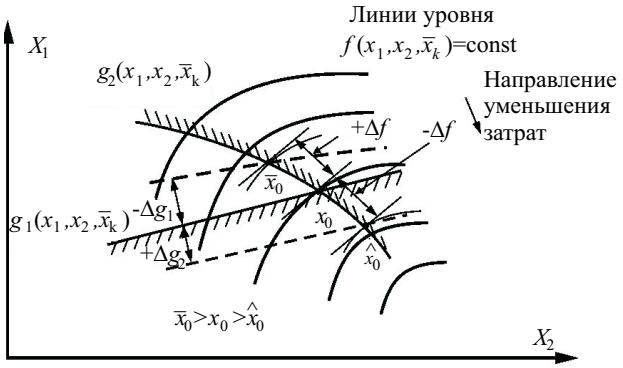
$$h_{kj}\left(X^0, X_k\right) = 0, \forall j \in J, k \in K. \tag{6}$$

При решении задачи (1)–(3) подробные значения X_k неизвестны. Однако косвенно они присутствуют в тех приближённых зависимостях $f(X, X_k)$, $g_i(X, X_k)$,$h_j(X, X_k)$,которые используются группой главного конструктора на ВУ. Это условно означает $X_k = \overline{X}_k$, хотя конкретные значения ещё не определены.

При решении задач НУ (4)–(6) обязательным условием является использование уже принятых значений $X_0 = X_{opt}$ в задаче (1)–(3). Для дальнейшего несущественно, каким методом решаются указанные задачи — с помощью математико-вычислительных средств либо традиционными переборами вариантов.

Выбор принципа координации задач требует дополнительного обоснования. Задачи НУ должны давать согласованные и непротиворечивые решения по отношению к задаче (1)–(3). Непротиворечивость понимается в том смысле, что оптимальные в K-задачах векторы X_k^0 улучшают глобальный критерий (1), т. е. повышают эффективность системы. Это условие однозначно предопределяет использование одинаковых показателей эффективности на ВУ и НУ (например, стоимости).

Согласованность решений означает, что векторы X_k^0 «не выводят» основные характеристики X^0 из допустимой области (2), (3), т. е. требования к качествам объекта остаются выполненными после завершения проектирования подсистем. Строгое выполнение этого условия при реально существующем процессе проектирования чрезвычайно затруднено. Следовательно, нужны дополнительные координирующие условия (воздействия). Принципу оптимальности объекта в целом соответствовали бы воздействия, «штрафующие» принятие X_k^0 выводящих X_0 из допустимой области (2), (3) и «поощряющие» вход в эту область. На рисунке дана простая геометрическая интерпретация влияния области допустимых решений на эффективность объекта. Здесь величины $\Delta f\,(\pm)$ и есть «плата» за принятие тех или иных значений X_k^0.



Эта плата должна учитываться при проектировании подсистем на НУ. Таким образом, критерии оптимизации на НУ должны состоять из двух частей:

$$\varphi_k\left(X^0, X_k\right) = f_k\left(X^0, X_k\right) \pm \Delta f_k\left(X^0, X_k \neq \overline{X}_k\right). \tag{7}$$

Первый член — условие непротиворечивости. Если критерий (1) — стоимость жизненного цикла объекта, то f_k — соответственно стоимость k-подсистемы.

Второй член — условие согласованности. Это соответственно «штраф» или «поощрение» при воздействии подсистемы на допустимую область (2), (3).

2. О ПРИНЦИПЕ КООРДИНАЦИИ

Всё предыдущее достаточно очевидно. Главный вопрос — объективный расчёт штрафа (поощрения) Δf_k в (7).

Обратимся к теории двойственности в нелинейном математическом программировании.

Возьмём функцию Лагранжа в виде

$$L\left(X, Y, Z\right) = f\left(X\right) - \sum_{i \in I} y_i g_i\left(X\right) + \sum_{j \in J} z_j h_j\left(X\right),$$

где $Y = \{y_i\}$, $Z = \{z_j\}$ — множители Лагранжа.

Напомним экономический смысл и условия существования множителей Лагранжа.

Если в исходной задаче А $f^0 = \min\limits_{x \in R} f\left(X\right)$, где $R = \{X : \ g_i\left(X\right) \geqslant 0, \ h_j\left(X\right) = 0\}$, то в двойственной задаче $\hat{f}^0 = \max\limits_{Y, Z \in \hat{R}} \hat{L}\left(Y, Z\right)$, причём $\hat{L}\left(Y, Z\right) = \min\limits_{X \in R} L\left(X, Y, Z\right)$, где $\hat{R}$ — область изменения векторов Y, Z, соответствующая условию

$$\min_{x \in R} \left\{ f\left(X\right) - \sum_{i \in I} y_i g_i\left(X\right) + \sum_{j \in J} z_j h_j\left(X\right) \right\}.$$

Согласно [1] имеет место обобщённое соотношение двойственности $f^0 = \hat{f}^0$, справедливое без каких-либо существенных предположений относительно свойств функции f и области R в отношении вогнутости и выпуклости. Это соотношение даёт возможность смысловой интерпретации множителей Y, Z в функции Лагранжа. Поскольку в точке оптимума $f(X^0) = L(X^0, Y^0, Z^0)$, то Y^0, Z^0 есть коэффициенты, приводящие к одной размерности критерий $f(X)$ и функции ограничений $g_i(X), h_j(X)$. Так, если мы за критерий примем стоимость судна, самолёта, а $g_i(X)$, $h_j(X)$ — функции массы (веса), полезной кубатуры, параметров остойчивости (для судна — это метацентрическая высота), то Y^0, Z^0 соответственно показывают стоимость массы (руб/т), кубатуры (руб/м^3), метацентрической высоты (руб/м) и т. п.

Таким образом, $Y = \{y_i\}$, $Z = \{z_j\}$ — «цены» ограничений в задаче ВУ. Подобное толкование множителей Лагранжа, называемых также двойственными переменными, распространено в экономико-математической литературе. Академиком Л.В. Канторовичем указано условие существования двойственных переменных для случая линейной задачи А, которые названы им объективно обусловленными оценками.

Рассмотрим условия существования двойственных переменных в нелинейном случае задачи типа А. Обратиться к этому необходимо потому, что используемые положения теории двойственности чаще всего считаются применимыми лишь для отдельных классов задач со специальными свойствами функций критерия и ограничений. В общем случае в такой задаче возможно существование нескольких локальных минимумов. Только в случае выпуклости $f(X)$ и вогнутости $g_i(X), h_j(X)$ локальный минимум является глобальным. Это так называемая задача выпуклого программирования. Наличие указанных свойств функций критерия и ограничений неочевидно, а их доказательство невозможно. То есть, строго говоря, решение задачи типа А гарантирует получение только локального оптимума. Однако необходимые и достаточные условия обобщённых соотношений двойственности доказаны [1] без использования специфических свойств указанных функций. А именно эти условия непосредственно связаны с существованием двойственных переменных. Согласно [2] необходимые условия первого порядка формулируются следующим образом.

Если в точке X^0 функции f, g_i, h_j дифференцируемы и ограничения $g_i(X) \geqslant 0$, $h_j(X) = 0$ удовлетворяют условиям регулярности первого порядка, то существуют такие векторы Y^0, Z^0, что X^0, Y^0, Z^0 удовлетворяют следующим условиям:

$$g_i(X) \geqslant 0, \quad i \in I,$$

$$h_j(X) = 0, \quad j \in J,$$

$$y_i g_i(X) = 0, \quad i \in I, \tag{8}$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i \in I, \tag{9}$$

$$\nabla L\,(X, Y, Z) = 0,$$

где $\nabla L = \nabla f - \sum\limits_{i \in I} y_i g_i + \sum\limits_{j \in J} z_j h_j$ — градиент функции Лагранжа.

Условие регулярности первого порядка заключается в том, что градиенты ∇g_i, ∇h_j должны быть линейно независимыми.

Вытекающие из общих условий существования множителей Лагранжа условия строгой дополняющей нежёсткости (8), (9) указывают на значимость (существенность) лимитирующих и нелимитирующих ограничений. Действительно, для лимитирующих ограничений $(g_i = 0)$ $y_i^0 > 0$, для нелимитирующих $(g_i > 0)$ $y_i^0 = 0$, причём последние не влияют на положение оптимума X^0.

Для ограничений в виде строгих равенств $h_j = 0$ всегда существуют ненулевые оценки z_j^0.

Теперь обратимся к вопросу расчёта Δf_k — величины штрафа (поощрения) в критерии задач НУ (7). Для этой цели воспользуемся результатом теоремы возмущения оптимума [2], полученным из задачи

$$f(X) + \varepsilon_0 a_0(X) \to \min,$$

$$g_i(X) + \varepsilon_i b_i(X) \geqslant 0, \quad i \in I,$$

$$h_j(X) + \varepsilon_j c_j(X) = 0, \quad j \in J,$$

где $a_0(X)$, $b_i(X)$, $c_j(X)$ — скалярные функции, ε_0, ε_i, ε_j — малые числа.

Доказывается [2], что изменение оптимального значения функции критерия

$$f\left[X\left(\varepsilon\right)\right] - f\left(X^0\right) = -\sum_{i \in I} \varepsilon_i y_i^0 b_i^0 + \sum_{j \in J} \varepsilon_j z_j^0 c_j^0. \tag{10}$$

Здесь $\varepsilon_i b_i^0 \equiv \Delta g_i\left(X\right)$, $\varepsilon_j c_j^0 \equiv \Delta h_j\left(X\right)$, отклонения ограничений в окрестности оптимума.

Именно условие (10) является основой для расчёта штрафа (поощрения) Δf_k в критерии задач НУ (7).

Теорема возмущения оптимума даёт, кроме того, другой важный теоретический результат, позволяющий аппроксимировать приращения векторов

$$(X(\varepsilon) - X^0), \qquad (Y(\varepsilon) - Y^0), \qquad (Z(\varepsilon) - Z^0),$$

т. е. указать степень устойчивости оптимального решения при изменении положения границ области допустимых решений. Это возможно, однако при выполнении достаточных условий второго порядка, что связано с вычислением вторых производных функции Лагранжа в точке оптимума. В реальных задачах (1)–(3) это непросто. Приближённое решение можно получить путём линеаризации (1)–(3) в окрестности оптимума.

3. ИЛЛЮСТРАЦИЯ ПРИМЕНЕНИЯ ИСПОЛЬЗОВАННОГО ПРИНЦИПА (на примере проектирования судов)

Итак, полагая известными «цены» ограничений (Y, Z) в единицах критерия задачи (1)–(3) и используя условие (10), можно конструировать критерии для задач НУ. Примем за показатель эффективности проектируемого объекта величину стоимости жизненного цикла объекта, привязанную к одному году. Тогда для любой подсистемы НУ критерий задачи (4)–(6) будет иметь вид

$$\varphi_k\left(X^0, X_k\right) = f_k\left(X^0, X_k\right) - \sum_{i \in I} y_i^0 \Delta g_i\left(X_k \neq \overline{X}_k\right) + \sum_{j \in J} z_i^0 \Delta h_j\left(X_k \neq \overline{X}_k\right). \tag{7a}$$

Величина φ_k — это стоимость k-подсистемы, откорректированная на величину изменения стоимости объекта, вызванную принятием в данной подсистеме $(X_k \neq \overline{X}_k)$.

Рассмотрим несколько примеров использования критерия (7а) для выбора наилучших решений на НУ.

Первый пример. Рассмотрим вопрос о выборе марки стали для металлического корпуса сухогрузного судна грузоподъёмностью 10 тыс. т и мощностью дизельной энергетической установки 7 тыс. кВт.

Опуская подробности формирования математической модели задачи ВУ (1)–(3) и конструирования критерия (7а) для подсистемы металлический корпус $(K = K1)$, примем исходные данные согласно [3]. Так, на ВУ при определении оптимальных элементов судна получены следующие оценки лимитирующих ограничений:

y_1^0 — «цена» вместимости W_{k1}, руб/м^3 — 18.2,
y_2^0 — «цена» возвышения ц.т. Z_g^{k1}, руб/см — 1216,
y_3^0 — «цена» длины судна L, руб/м — 4330,
z_1^0 — «цена» массы P_{k1}, руб/т — 37.9.

Соответственно

$$\varphi_{k1}(X^0, X_{k1}) = f_{k1}(X_{k1}) + 18.2\Delta W_{k1}(X_{k1} \neq \overline{X}_{k1}) + 1216\Delta Z_g^{k1}(X_{k1} \neq \overline{X}_{k1}) + 37,9\Delta P_{k1}(X_{k1} \neq \overline{X}_{k1}),$$

где f_{k1} — приведённая стоимость металлического корпуса.

Предположим перед корпусным отделом проектной организации стоит задача выбора марки стали из трёх возможных вариантов: с пределом текучести 300, 360 и 400 н/мм^2 (табл. 1). При определении элементов судна на ВУ использована сталь 300 н/мм^2.

Таблица 1

Результаты расчётов

Параметр	Варианты		
	300 н/мм^2	360 н/мм^2	400 н/мм^2
Масса металлического корпуса, т	4330	4010	3930
ΔP_{k1}, т	–	−320	−400
ΔW_{k1}, м^3	–	305	−430
ΔZ_g^{k1}, см	–	+4,18	+4,67
Приведённая стоимость металлического корпуса, тыс. руб.	517,8	538,4	609,9
Влияние изменения кубатуры, тыс. руб.	–	5,55	−7.83
Влияние изменения положения ц.т., тыс. руб.	–	5,07	−5.66
Влияние изменения массы, тыс. руб.	–	12,3	−15.2
Интегральная стоимость подсистемы φ_{k1}, тыс. руб.	517,8	515,5	581,1

Аналогичный пример с выбором типа энергетической установки (К = К2).

При тех же исходных данных

$$\varphi_{k2}(X^0, X_{k2}) = f_{k2}(X_{k2}) + 18.2\Delta W_{k2}(X_{k2} \neq \overline{X}_{k2}) + 1216\Delta Z_g^{k2}(X_{k2} \neq \overline{X}_{k2}) + 37.9\Delta P_{k2}(X_{k2} \neq \overline{X}_{k2}) +$$
$$+4330\Delta L(X_{k2} \neq \overline{X}_{k2})$$

Нужно выбрать тип энергетической установки: с малооборотным дизелем (МОД) либо со среднеоборотным (СОД) (табл. 2).

Таблица 2

Исходные данные

Параметр	Вариант с МОД	Вариант с СОД
Мощность главных двигателей, кВт	7900	2×4000
Масса ЭУ, т	750	450
Длина машинного отделения, м	26	21
Объём машинного отделения, м^3	6800	5490
Удельный расход топлива, %	100	100–115
Стоимость 1т топлива, %	100	120–170

Вариант с СОД имеет лучшие массогабаритные характеристики, но при бóльшем расходе топлива и при бóльшей его стоимости (табл. 3).

Таблица 3

Результаты расчётов

Параметр	Вариант с МОД	Вариант с СОД
ΔW_{k1}, м^3	—	1310
ΔZ_g^{k2}, см	–	5
ΔL, м	—	-5
Приведённая стоимость энергетической установки, тыс. руб.	816	857
Влияние изменения кубатуры, тыс. руб.	–	-23.8
Влияние изменения положения ц.т., тыс. руб.	–	$+5.8$
Влияние изменения длины, тыс. руб.	–	-21.6
Влияние изменения массы, тыс. руб.	–	-11.4
Интегральная стоимость подсистемы φ_{k2}, тыс. руб.	816	806

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Согласованная оптимизация технических решений на разных уровнях реального многоуровневого процесса проектирования должна предусматривать использование на нижних уровнях специальных критериев (7а), учитывающих эффективность собственно проектируемой подсистемы и её влияние на эффективность системы в целом.

2. Определение второй составляющей критерия (7а) базируется на использовании «цен» ограничений — управляющих воздействий, получаемых на верхнем уровне. Рассчитывать на получение упомянутых «цен» как результат решения задачи нелинейного программирования по целому ряду причин не приходится. Поэтому предлагается определять «цены» ограничений одним из двух приближённых способов:

– численным методом как отношение приращения критерия эффективности системы к малому приращению ограничений;

– на основе решения линейно-программной задачи с точкой линеаризации принятых на верхнем уровне основных характеристик системы.

3. Решение упомянутой линейно-программной задачи даёт возможность определить диапазон «цен» ограничений в смысле тех приращений ограничений, при которых эти «цены» остаются ненулевыми. При этом надо иметь в виду, что контроль диапазона устойчивости в рамках отдельно взятой подсистемы может быть осуществлён только приближённо, что является неизбежным следствием декомпозиции системы. Некоторые формальные правила, информирующие проектанта о наиболее рациональном управлении этим диапазоном, разработаны. Вместе с тем можно утверждать, что при проектировании сложных объектов типа судов, самолётов такой вопрос не является существенным, прежде всего, вследствие оперативного обмена информацией между верхним и нижним уровнями проектирования.

Библиографический список

1. *Гольштейн Е.Г.* Теория двойственности в математическом программировании и её приложения. М.: Наука, 1971. С. 57–72.
2. *Фиакко А., Мак-Кормик Г.* Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972. С.52–56.
3. Машиностроение: Энциклопедия / Под ред. акад. РАН К.В. Фролова. СПб.: Политехника, 2003. С. 72–90.

УДК 539.3

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ БАЛОК, ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

П.Е. Товстик

Санкт-Петербургский университет,
кафедра теоретической и прикладной механики
E-mail: peter.tovstik@mail.ru

Для задач статики, свободных колебаний и устойчивости балок, пластин и оболочек модель Тимошенко – Рейсснера, учитывающая сдвиг, сравнивается с классической моделью Кирхгофа – Лява и с трехмерной теорией упругости. На ряде тестовых примеров установлен формальный асимптотический характер одномерных и двухмерных моделей и найдена область их применимости. Для пластин и оболочек, лежащих на трансверсально изотропном упругом основании обсуждаются модели Кирхгофа – Лява и Тимошенко – Рейсснера. Используется асимптотический метод интегрирования, основанный на малости толщины оболочки по сравнению с длиной волны на поверхности. Особое внимание обращается на построение форм колебаний и потери устойчивости, локализованных вблизи свободной поверхности.

On the Non-Classic Models of Beams, Plates and Shells

P.E. Tovstik

For the problems of statics, of free vibrations, and of buckling of beams, plates and shells the Timoshenko – Reissner's model with shear is compared with the classic Kirchhoff – Love model and with the 3D theory of elasticity. By using some test examples the formal asymptotic character of 1D and 2D models is established and their field of application is found. The asymptotic expansions based on the small shell or plate thickness compared with the length of wave are used. The special attention is paid to the buckling or vibration modes localized near the free surface.

ВВЕДЕНИЕ

Выводу одномерных и двухмерных приближенных моделей из трехмерных уравнений теории упругости посвящены многочисленные исследования, из которых назовем монографии [1–4]. Ниже для задач статики, свободных колебаний и устойчивости балок, пластин и оболочек обсуждается модель Тимошенко – Рейсснера (ТР), учитывающая сдвиг, в сравнении с классической моделью Кирхгофа – Лява (КЛ) и с трехмерной теорией упругости. На ряде тестовых примеров установлен асимптотический характер одномерных и двухмерных моделей и найдена область их применимости. Также обсуждаются модели КЛ и ТР для пластин и оболочек, лежащих на упругом основании. Как пластина, так и основание предполагаются изготовленными из трансверсально изотропного материала. При анализе используется локальный подход, при котором решение разыскивается в виде двояко периодической функции по поверхностным координатам, а граничные условия на контуре игнорируются (либо пластина считается бесконечной). Используется асимптотический метод интегрирования, основанный на малости толщины оболочки по сравнению с длиной волны на поверхности. Особое внимание обращается на построение форм колебаний и потери устойчивости, локализованных вблизи свободной поверхности трансверсально изотропного предварительно непряженного полупространства или лежащей на нем пластины.

1. ДЕФОРМАЦИЯ И СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ ИЗ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Рассмотрим сначала плоскую задачу о деформации полосы $-\infty < x < \infty$, $-h/2 \le z \le h/2$ под действием гармонической нагрузки, приложенной к верхнему краю. Уравнения равновесия и соотношения упругости имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial\tau}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_3}{\partial z}=0;\\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{E_1}(\sigma_1-\nu_1\sigma_3),\qquad \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\tau}{G_{13}},\qquad \frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{E_3}(\sigma_3-\nu_3\sigma_1),\end{gathered}\tag{1.1}$$

© П.Е. Товстик, 2008

где $u(x,z)$, $w(x,z)$ — проекции перемещения, $\sigma_i(x,z)$, $\tau(x,z)$ — напряжения, E_i, ν_i, G_{13} — модули упругости, причем $\nu_1 E_3 = \nu_3 E_1$. Граничные условия возьмем в виде

$$\tau(x,-h/2) = \tau(x,h/2) = \sigma_3(x,-h/2) = 0, \qquad \sigma_3(x,h/2) = f\sin rx. \tag{1.2}$$

Будем искать периодическое решение в виде

$$\{u,\,\tau\}(x,z) = \{u,\,\tau\}(z)\cos rx, \qquad \{w,\,\sigma_1,\,\sigma_3\}(x,z) = \{w,\,\sigma_1,\,\sigma_3\}(z)\sin rx. \tag{1.3}$$

Тогда получим систему дифференциальных уравнений 4-го порядка. После растяжения масштаба $z = hz_1$, $u = hu^*$, $w = hw^*$, $\tau = E_1\tau^*$, $\sigma_3 = E_1\sigma_3^*$ (далее знак $*$ опускаем) и ряда преобразований приведем систему (1.1) к виду

$$\tau''' - \mu^2\left(\frac{1}{g} - 2\nu_1\right)\tau' + \frac{\mu^3}{e}\sigma_3 = 0, \quad \sigma_3' - \mu\tau = 0, \qquad (\ )' \equiv \frac{d(\ )}{dz_1}, \quad \mu = rh = \frac{2\pi h}{L}, \tag{1.4}$$

$$u = \frac{\tau' + \mu\nu_1\sigma_3}{\mu^2}, \quad u' + \mu w = \frac{\tau}{g}, \qquad e = \frac{E_3}{E_1}, \quad g = \frac{G_{13}}{E_1}. \tag{1.5}$$

Здесь μ — малый параметр, пропорциональный отношению толщины h балки к ее длине L. Из уравнений (1.4) находим напряжения τ и σ_3, удовлетворяющие граничным условиям (1.2), а затем перемещения u и w находим по явным формулам (1.5). При $\mu \ll 1$, $\mu^2/g \ll 1$, $\mu^2/e \ll 1$ получаем [5]

$$w(h/2) = \frac{12hf}{E_1\mu^4}K, \qquad K = 1 + \frac{\mu^2}{10g} - \frac{\nu_1\mu^2}{5} + O(\mu^4). \tag{1.6}$$

При этом для модели КЛ в формуле (1.6) следует считать $K = 1$, а для модели ТР коэффициент $K = 1 + \mu^2/(10g)$. Для получения последней формулы вместо модуля сдвига G_{13} следует (как это обычно делается, см. [1]) использовать значение γG_{13}, где корректирующий множитель $\gamma = 5/6$ учитывает неравномерность распределения касательных напряжений по толщине. Третье слагаемое в формуле для K в (1.6) учитывает деформацию растяжения – сжатия нормального волокна.

Пусть теперь $\mu \ll 1$, $\mu^2/g \sim 1$. Тогда ряд (1.6) утрачивает свой асимптотический характер и решение системы (1.4), (1.5) выражается через гиперболические функции. Представляя прогиб $w(h/2)$ в форме (1.6), для коэффициента K приходим к выражению

$$K = \frac{\xi^3}{12(\xi - 2\,\mathrm{th}(\xi/2))} + O(\mu^2), \qquad \xi = \mu\sqrt{\frac{1}{g} - 2\nu_1}. \tag{1.7}$$

Рассмотрим численный пример. Возьмем $\mu = 0.1$, $\nu_1 = 0.3$ и ряд значений параметров e и $g = e/(2(1+\nu_1))$. Расчеты [5] показали, что модель КЛ дает удовлетворительные результаты лишь при $e \geq 0.05$, а модель ТР — при $e \geq 0.0001$.

Обратимся к свободным колебаниям балки и рассмотрим колебания с заданной длиной волны L, при которой прогиб имеет вид $w(x,z) = w(z)\sin rx$. Начнем с одномерных моделей, в которых $w(z) = 1$. По модели КЛ имеем

$$\lambda = \frac{\mu^2}{12}, \qquad \lambda = \frac{\rho h^2\omega^2}{E_1}, \tag{1.8}$$

где λ — частотный параметр, ρ — плотность, ω — частота колебаний.

Модель ТР учитывает инерцию вращательного движения сечений, поэтому для параметра λ приходим к квадратному уравнению (см., напр. [6]):

$$\frac{\mu^4}{12} - \lambda\left(1 + \frac{\mu^2}{12} + k\right) + \frac{k}{\mu^2}\lambda^2 = 0, \qquad k = \frac{\mu^2}{10g}. \tag{1.9}$$

При $\mu \ll 1$ асимптотика двух корней уравнения (1.9) имеет вид

$$\lambda_1 = \frac{\mu^4}{12(1+k)} + O(\mu^6), \quad \lambda_2 = \frac{(k+1)\mu^2}{k} + O(\mu^2). \tag{1.10}$$

Рассмотрим теперь двухмерную задачу о свободных колебаниях ортотропной полосы. В уравнения равновесия (1.1) включаем инерционные слагаемые и после разделения переменных, растяжения масштаба $z = hz_1$ и ряда преобразований приходим к системе уравнений:

$$u' = \frac{\tau}{g} - \mu w, \quad w' = \nu_1 \mu u + \left(\frac{1}{e} - \nu_1^2\right)\sigma_3, \quad \tau' = (\mu^2 - \lambda)u - \mu\nu_1\sigma_3, \quad \sigma_3' = \mu\tau - \lambda w, \tag{1.11}$$

которая после исключения перемещений принимает вид

$$\begin{aligned} &\lambda\tau'' + \left(\mu^2 - \frac{\lambda}{g}\right)(\mu^2 - \lambda)\tau + \big(\mu\nu_1\lambda - \mu(\mu^2 - \lambda)\big)\,\sigma_3' = 0, \\ &(\mu^2 - \lambda)\sigma_3'' + \left(\left(\frac{1}{e} - \nu_1^2\right)\lambda(\mu^2 - \lambda) + \mu^2\nu_1^2\lambda\right)\sigma_3 + \big(\mu\nu_1\lambda - \mu(\mu^2 - \lambda)\big)\,\tau' = 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Систему (1.12) интегрируем с граничными условиями $\tau(\pm 1/2) = \sigma_3(\pm 1/2) = 0$, соответствующими свободным лицевым поверхностям. По-прежнему, считаем $\mu \ll 1$. Система (1.12) описывает низкочастотные изгибные колебания с $\lambda \sim \mu^4$ и две счетных серии высокочастотных колебаний $\lambda^{(1,n)}$ и $\lambda^{(2,n)}$ с $\lambda \sim 1$, описывающие соответственно изгибные деформации нормального волокна и его деформации растяжения – сжатия [5].

Для корня $\lambda \sim \mu^4$ приходим к уравнению [5]

$$\lambda\left(1 + \frac{\mu^2}{4} + \frac{\mu^2\nu_1}{6}\right) = \frac{\mu^4}{12}\left(1 - k + \frac{\mu^2\nu_1}{6}\right) + \frac{2\lambda^2}{\mu^2} + O(\mu^8), \tag{1.13}$$

где k — то же, что и в (1.9). Видим, что при $k \ll 1$ из (1.13) следует значение λ_1, приведенное в (1.10), т.е при $\mu^2 \ll g \ll 1$ модель ТР учитывает главную часть влияния сдвига.

Отметим, что первая частота высокочастотной изгибной серии $\lambda^{(1,1)} = \pi^2 g + O(\mu^2)$ приближенно равна частоте λ_2, заданной формулой (1.10). Совпадение $\lambda^{(1,1)}$ и λ_2 имеет место, если считать $k \ll 1$, $\pi^2 \simeq 10$.

Рассмотренные примеры позволяют сделать следующий вывод. Для балок из изотропного материала теория КЛ является первым асимптотическим приближением при $\mu \to 0$ по отношению к двухмерной теории. Теория ТР, учитывающая сдвиг, несущественно уточняет теорию КЛ. Для балок из ортотропного материала с умеренно малой поперечной жесткостью на сдвиг ($\mu^2 \ll g \ll 1$) теория ТР асимптотически непротиворечива и существенно уточняет теорию КЛ. Если же жесткость на сдвиг еще меньше ($g \le \mu^2$), теории КЛ и ТР утрачивают свой асимптотический характер.

2. ДЕФОРМАЦИИ И КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

Для ортотропной пластины и для балки результаты в значительной мере совпадают, поэтому приводится лишь их краткое обсуждение (подробности см. в [7]).

Ищем решение в виде двояко-периодических функций:

$$\begin{aligned} &u_1 = u_1(z)\cos(r_1x_1)\sin(r_2x_2)e^{i\omega t}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{13}(z)\cos(r_1x_1)\sin(r_2x_2)e^{i\omega t}, \\ &u_2 = u_2(z)\sin(r_1x_1)\cos(r_2x_2)e^{i\omega t}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}(z)\sin(r_1x_1)\cos(r_2x_2)e^{i\omega t}, \\ &w = w(z)\sin(r_1x_1)\sin(r_2x_2)e^{i\omega t}, \qquad \sigma_{12} = \sigma_{12}(z)\cos(r_1x_1)\cos(r_2x_2)e^{i\omega t}, \\ &\{\sigma_{11},\, \sigma_{22},\, \sigma_{33}\} = \{\sigma_{11}(z),\, \sigma_{22}(z),\, \sigma_{33}(z)\}\sin(r_1x_1)\sin(r_2x_2)e^{i\omega t}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где u_i, w, σ_{ij} — проекции перемещения и компоненты тензора напряжений. Для трансверсально изотропного материала система уравнений равновесия и соотношений упругости 6-го порядка после разделения переменных и введения новых неизвестных

$$\begin{aligned} &u = (r_1u_1 + r_2u_2)/r, \quad v = (r_2u_1 - r_1u_2)/r, \quad r^2 = r_1^2 + r_2^2, \\ &\sigma = (r_1\sigma_{13} + r_2\sigma_{23})/r, \quad \tau = (r_2\sigma_{13} - r_1\sigma_{23})/r \end{aligned} \tag{2.2}$$

распадается на системы второго и четвертого порядков [5]:

$$\tau' - r^2Gv + \rho\omega^2 v = 0, \qquad G_{13}v' = \tau; \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &\sigma' - E_{11}r^2u + E_{13}ru_3' + \rho\omega^2 u = 0, && \sigma = G_{13}(u' + ru_3), \\ &\sigma_{33}' - r\sigma + \rho\omega^2 u_3 = 0, && \sigma_{33} = E_{33}u_3' - E_{13}ru. \end{aligned} \tag{2.4}$$

В задаче о свободных колебаниях система (2.3) описывает высокочастотные крутильные колебания, а в задаче статики под действием нормального давления вида $\sigma_{33}(h/2) = f \sin r_1 x \sin r_2 y$ ее решение равно нулю.

Система (2.4) лишь обозначениями отличается от системы (1.11) для балки, поэтому основной вывод, сформулированный в конце п. 1, остается прежним — нулевое приближение по малому параметру $\mu = rh$ совпадает с результатом по модели КЛ и при относительно малом модуле поперечного сдвига главная часть первого приближения учитывается моделью ТР.

3. О МОДЕЛЯХ КИРХГОФА – ЛЯВА (КЛ) И ТИМОШЕНКО – РЕЙССНЕРА (ТР) В ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Асимптотический анализ уравнений теории оболочек сложнее, чем для балок и пластин, в связи с тем, что здесь приходится иметь дело с двумя малыми параметрами:

$$\mu = rh = \frac{2\pi h}{L} \quad \text{и} \quad h_* = \frac{h}{R}, \tag{3.1}$$

где R — характерный радиус кривизны оболочки. Параметр g также может быть малым.

Рассмотрим для определенности осесимметричную деформацию оболочки вращения по модели ТР. Как правило, напряженно-деформированное состояние (НДС) оболочки складывается из основного, медленно меняющегося состояния и краевого эффекта, экспоненциально затухающего при удалении от края. Интегралы краевого эффекта удовлетворяют уравнениям:

$$D\frac{d^4w}{dx^4} - \frac{D}{\gamma g R^2}\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{E_1 h}{R^2}w = 0, \qquad D = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1^2)}, \quad g = \frac{G_{13}}{E_1}; \tag{3.2}$$

$$\frac{D(1-\nu_1)}{2}\frac{d^2\Psi}{dx^2} - \gamma g E_1 h \Psi = 0. \tag{3.3}$$

При $g \sim 1$ средний член уравнения (3.2) мал и может быть отброшен. В результате уравнение (3.2) переходит в уравнение простого краевого эффекта по модели КЛ. Уравнение (3.3) связано с повышением дифференциального порядка системы уравнений по модели ТР по сравнению с моделью КЛ (с 8 до 10) и не имеет аналога в модели КЛ.

Ищем решения уравнений (3.2) и (3.3) в виде

$$w(x) = Ce^{px/R}, \qquad \Psi(x) = C_1 e^{p_1 x/R}. \tag{3.4}$$

Тогда для коэффициентов p и p_1 получим уравнения:

$$\frac{h_*^2}{12(1-\nu_1^2)}\left(p^4 + \frac{p^2}{\gamma g}\right) + 1 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{h_*^2}{24(1+\nu_1)\gamma g}\,p_1^2 - 1 = 0. \tag{3.5}$$

Положим $g \sim h_*^\delta$ и введем показатели изменяемости [2] $t_{1,2}$ и t_3 интегралов краевого эффекта по формулам

$$p \sim h_*^{t_{1,2}}, \qquad p_1 \sim h_*^{t_3} \tag{3.6}$$

(уравнение (3.2) может иметь интегралы с двумя разными показателями изменяемости). Получаем

$$\begin{aligned} &t_1 = t_2 = 1/2 && \text{при} \quad \delta \le 1, \\ &t_1 = (1+\delta)/2, \quad t_2 = (1-\delta)/2 && \text{при} \quad \delta \ge 1, \\ &t_3 = (1-\delta)/2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

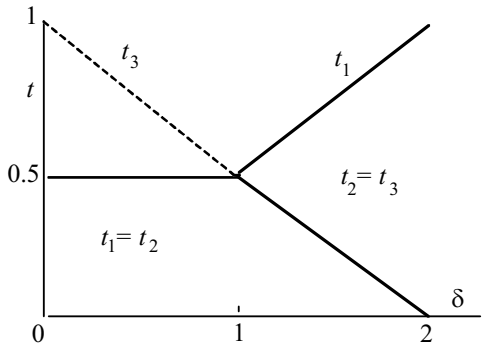


Рис. 1. Графики показателей изменяемости

Графики функций $t_k(\delta)$ показаны на рис. 1. Рассмотрение показателей изменяемости позволяет сделать ряд выводов. Во-первых, при $\delta = 0$ имеем $t_3 = 1$. Это значит, что длина волны деформации имеет порядок толщины оболочки. Последнее обстоятельство говорит об асимптотической противоречивости модели ТР, в частности, для изотропной оболочки. При $0 < \delta < 2$ модель ТР асимптотически непротиворечива. При $\delta \geq 2$ имеем $t_1 \geq 1$, $t_2 = t_3 \leq 0$. Из этих неравенств следует, что при столь малых значениях модуля G_{13} двухмерная модель ТР неприменима.

С областью применимости модели ТР при малых значениях модуля поперечного сдвига G_{13} связана и следующая задача устойчивости. По модели ТР в линейном приближении рассматриваем устойчивость трансверсально изотропной цилиндрической оболочки радиуса R при осевом сжатии. Ищем форму потери устойчивости в виде

$$w(x, y) = w_0 \sin r_1 x \sin r_2 y, \tag{3.8}$$

где x и y — осевая и окружная координаты, r_i — искомые волновые числа. Критическая осевая нагрузка определяется по формуле [7]

$$-T_0 = \min_{r_1, r_2} \frac{Dr^8 + Ar_1^4(1 + Br^2)}{r_1^2 r^4 (1 + Br^2)}, \qquad D = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1^2)}, \quad A = \frac{E_1 h}{R^2}, \quad B = \frac{D}{\gamma g h}, \tag{3.9}$$

где $r^2 = r_1^2 + r_2^2$. Модели КЛ соответствует $B = 0$. При $B > 0$ минимизация в (3.9) дает $r_2 = 0$ (что соответствует осесимметричной потере устойчивости) и

$$-T_0 = \frac{E_1 h^2}{R\sqrt{12(1 - \nu_1^2)}} f(\eta), \quad f(\eta) = \begin{cases} 2 - \eta, & \eta \leq 1, \\ 1/\eta, & \eta \geq 1, \end{cases} \qquad \eta = \frac{h_*}{\gamma g \sqrt{12(1 - \nu_1^2)}}. \tag{3.10}$$

При $\eta = 0$ формула (3.10) дает классическую критическую нагрузку Лоренца – Тимошенко, не учитывающую поперечный сдвиг [8,9]. Функция $f(\eta)$ описывает снижение нагрузки, связанное с учетом сдвига. При $\eta < 1$ минимум в (3.9) достигается при конечном значении $r_1 = (1 - \eta)^{-1/2}$, а при $\eta \geq 1$ — при $r_1 = \infty$. Последнее обстоятельство говорит о неприемлемости оболочечной модели при весьма малых значениях G_{13}. Отметим [10], что при напряжении сжатия $-\sigma_{11} = G_{13}$ сам ортотропный материал теряет устойчивость, а усилие $-T_0$ при $\eta \simeq 1$ порождает напряжения, близкие к критическим [7]. К вопросу о потере устойчивости материала мы еще вернемся.

4. ДВИЖЕНИЕ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Далее рассматриваются пластины и оболочки, лежащие на упругом основании. Однако сначала рассматривается предварительно напряженное трансверсально изотропное полупространство. Уравнения его движения имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \Delta_\sigma u_i - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \qquad \Delta_\sigma u_i = \sigma_j^0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{4.1}$$

где $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, $-\infty \leq x_3 = z \leq 0$ — декартовы координаты, u_1, u_2, $u_3 = w$ — проекции перемещения, σ_j^0 — начальные напряжения (отрицательные при сжатии и предполагаемые постоянными), σ_{ij} — дополнительные напряжения, ρ — плотность материала, t — время. Далее предполагается, что $\sigma_1^0 = \sigma_2^0 = \sigma^0$. Соотношения упругости для трансверсально изотропного материала

$$\begin{aligned} &\sigma_{11} = E_{11}\varepsilon_{11} + E_{12}\varepsilon_{22} + E_{13}\varepsilon_{33}, && \sigma_{13} = G_{13}\varepsilon_{13}, \\ &\sigma_{22} = E_{12}\varepsilon_{11} + E_{11}\varepsilon_{22} + E_{13}\varepsilon_{33}, && \sigma_{23} = G_{13}\varepsilon_{23}, \\ &\sigma_{33} = E_{13}\varepsilon_{11} + E_{13}\varepsilon_{22} + E_{33}\varepsilon_{33}, && \sigma_{12} = G\varepsilon_{12}, \\ &\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

содержат 5 упругих констант (E, E', G_{13}, ν, ν'), причем [11]

$$E_{11} = E_{22} = \frac{E(1-\nu_0^2)}{(1+\nu)c}, \quad E_{12} = \frac{E(\nu+\nu_0^2)}{(1+\nu)c}, \quad E_{13} = E_{23} = \frac{E\nu'}{c}, \quad E_{33} = \frac{E'(1-\nu)}{c},$$
$$G_{12} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \qquad G_{13} = G_{23}, \qquad \nu_0^2 E' = (\nu')^2 E, \qquad c = 1-\nu-2\nu_0^2. \tag{4.3}$$

Имеют место соотношения

$$E_{11} = E_{12} + 2G_{12}, \quad E_{11}^0 = E_{11} - \frac{E_{13}^2}{E_{33}} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad E_{12}^0 = E_{12} - \frac{E_{13}^2}{E_{33}} = \frac{E\nu}{1-\nu^2}. \tag{4.4}$$

Для изотропного тела в формулах (4.3) $E' = E$, $\nu' = \nu_0 = \nu$, где E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Далее в численных примерах при выборе модулей E_{ij}, G_{ij} для трансверсально изотропного тела поступаем следующим образом. Рассмотрим многослойное тело с чередующимися мягкими и жесткими плоскими изотропными слоями с параметрами

$$E_n, \ \nu_n, \ h_n, \quad n = 1, 2. \tag{4.5}$$

Осреднение упругих свойств по толщине слоев при h_1, $h_2 \to 0$, $\quad h_1/h_2 = \text{const}$ приводит к трансверсально изотропному материалу. При вычислении его модулей E_{ij}, G_{ij} в (4.2) пользуемся тем, что на границе слоев непрерывны деформации ε_{11}, ε_{12}, ε_{22} и напряжения σ_{13}, σ_{23}, σ_{33}.

Будем искать решения системы (4.1), локализованные вблизи плоскости $z = 0$, в виде (2.1). Как и в п. 2, после разделения переменных и перехода к новым неизвестным по формулам (2.2) система (4.1) шестого порядка распадается на системы четвертого и второго порядков

$$G_{13}^* u'' - (E_{11} + \sigma_0) r^2 u + \lambda u + (G_{13} + E_{13}) r w' = 0, \qquad G_{13}^* = G_{13} + \sigma_3^0,$$
$$-(G_{13} + E_{13}) r u' + E_{33}^* w'' - (G_{13} + \sigma_0) r^2 w + \lambda w = 0, \qquad E_{33}^* = E_{33} + \sigma_3^0, \tag{4.6}$$

$$G_{13}^* v'' - (G_{12} + \sigma_0) r^2 v + \lambda v = 0. \tag{4.7}$$

При $\sigma_3^0 \neq 0$ условия на свободной поверхности $z = 0$ имеют вид

$$\sigma^* = G_{13}^* u' + G_{13} r w = 0, \quad \sigma_{33}^* = -E_{13} r u + E_{33}^* w' = 0, \qquad \tau^* = G_{13}^* v' = 0, \tag{4.8}$$

а условия затухания при удалении от нее — вид

$$u_i(z), \, \sigma_{ij}(z) \to 0 \quad \text{при} \quad z \to -\infty. \tag{4.9}$$

Уравнение (4.7) не имеет нетривиальных решений, удовлетворяющих граничным условиям (4.8) и (4.9). Будем искать решение системы (4.6), удовлетворяющее условиям (4.9), в виде

$$w(z) = \sum_{k=1,2} C_k e^{\alpha_k r z}, \quad u(z) = \sum_{k=1,2} C_k b_k e^{\alpha_k r z}, \tag{4.10}$$

где

$$b_k = \frac{E_{33}^s \alpha_k^2 - G_{13} + \lambda^*}{(E_{13} + G_{13})\alpha_k}, \qquad \lambda^* = \frac{\lambda}{r^2} - \sigma_0, \qquad \mathrm{Re}(\alpha_k) > 0, \tag{4.11}$$

C_k — постоянные, α_k — корни характеристического уравнения системы (4.6)

$$a_0 \alpha^4 - a_1 \alpha^2 + a_2 = 0, \tag{4.12}$$

причем

$$a_0 = G_{13}^* E_{33}^*, \qquad a_2 = (E_{11} - \lambda^*)(G_{13} - \lambda^*),$$
$$a_1 = E_{33}^*(E_{11} - \lambda^*) + G_{13}^*(G_{13} - \lambda^*) - (E_{13} + G_{13})^2. \tag{4.13}$$

Уравнение (4.12) имеет два корня с $\mathrm{Re}(\alpha_k) > 0$ при $a_0 > 0$ и $a_2 > 0$.

Если (в двухмерном случае) решение исходной системы (4.1) искать в виде

$$u(x,z,t) = u(z)\cos(rx - \omega t), \quad w(x,z,t) = w(z)\sin(rx - \omega t), \tag{4.14}$$

то при выполнении условий (4.8) и (4.9) получим волну Релея [12], распространяющуюся по поверхности полупространства со скоростью $v = \sqrt{\lambda^*/\rho}$. При этом скорость распространения волны не зависит от ее длины.

Удовлетворяя условиям (4.9) на свободной поверхности, получаем дисперсионное уравнение как для частоты локализованных вблизи поверхности колебаний (2.1), так и для волны Релея (4.14)

$$(G_{13}^*\alpha_1 b_1 + G_{13})(E_{33}^*\alpha_2 - E_{13}b_2) - (G_{13}^*\alpha_2 b_2 + G_{13})(E_{33}^*\alpha_1 - E_{13}b_1) = 0. \tag{4.15}$$

В случае изотропного тела уравнение (4.15) принимает вид

$$(2G - \lambda^*)^2 - (2G + \sigma_3^0)^2\alpha_1\alpha_2 = 0. \tag{4.16}$$

Значения безразмерного частотного параметра $\Lambda^h = \lambda^*/G$ для ряда значений ν и $\sigma_3^* = \sigma_3^0/G$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения частотного параметра Λ^h для изотропного полупространства

ν	$\sigma_3^* = 0.5$	0	-0.5	-0.8	-0.9	-0.98
0.0	0.856	0.764	0.500	-0.151	-0.972	-4.721
0.1	0.878	0.798	0.566	-0.010	-0.692	-4.089
0.2	0.899	0.830	0.629	0.126	-0.512	-3.421
0.3	0.918	0.860	0.687	0.253	-0.292	-2.723
0.4	0.937	0.888	0.739	0.367	-0.088	-2.020
0.5	0.954	0.896	0.784	0.466	0.089	-1.334

Таблица 2

Значения частотного параметра $\Lambda^h = \lambda^*/G_{13}$ для трансверсально изотропного материала

$e = \frac{E_1}{E_2}$	$\eta = 0.5$	0	-0.5	-0.8	-0.9	-0.98
1	0.918	0.860	0.687	0.245	-0.298	-2.723
10	0.978	0.963	0.912	0.758	0.512	-1.100
100	0.998	0.996	0.991	0.974	0.946	0.724

Рассмотрим теперь трансверсально изотропное полупространство, образующееся из чередующихся изотропных слоев параметрами E_n, ν_n, h_n, $n = 1, 2$ при стремлении к нулю толщин слоев. Возьмем $h_1 = h_2$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $E_1/E_2 = e$ и для ряда значений e и $\eta = \sigma_3^0/G_{13}$ найдем величину частотного параметра $\Lambda^h = \lambda^*/G_{13}$. Результаты приведены в табл. 2.

С ростом параметра e, служащего мерой анизотропии, частотный параметр Λ^h приближается к 1.

Уравнения (4.15) и (4.16) позволяют исследовать влияние начальных напряжений на скорость v волны Релея частоту колебаний ω, причем

$$v = \sqrt{\frac{\lambda^*}{\rho}} = \sqrt{\frac{\Lambda G_{13} + \sigma_0}{\rho}}, \qquad \omega = rv. \tag{4.17}$$

В силу уравнений (1.15) или (1.16) частотный параметр Λ^h зависит лишь от свойств материала и от начального напряжения σ_3^0 и не зависит от начального напряжения σ_0, которое входит в формулы (4.17) явно.

Условиями устойчивости материала являются неравенства

$$-\sigma_0 < G_{13} \qquad \text{и} \qquad -\sigma_3^0 < \min\{G_{13},\, E_{33}\}, \tag{4.18}$$

необходимые для выполнения условий Адамара [13]. При выполнении этих условий поверхностные колебания и волны Релея возможны лишь в случае, когда $\lambda > 0$, т.е.

$$-\sigma_0 < \Lambda^h G_{13}. \tag{4.19}$$

Как следует из табл. 1 и 2, при некоторых значениях $\sigma_3^* < 0$ и других параметров задачи имеем $\Lambda^h < 0$. В этом случае поверхностные колебания и волны Релея возможны в силу (4.19) лишь при достаточно больших растягивающих начальных напряжениях σ_0.

При $-\sigma_0 = \Lambda_*^h G_{13}$ полупространство теряет устойчивость с образованием волн на свободной поверхности, где $\Lambda_*^h < 1$ — корень одного из уравнений (4.15), (4.16) при $\lambda = 0$. Условие (4.19) в силу

$\Lambda^h < 1$ накладывает на начальное напряжение σ_0 более сильное ограничение, чем первое из неравенств (4.18). Эффект снижения критической нагрузки с локализацией формы прогиба в окрестности свободного края или свободной поверхности известен. Для сжатой пластины со свободным краем он описан в [14, 15], для оболочек — в [9, 16, 17], для изотропного полупространства — в [18]. Для примеров, рассмотренных в табл. 1 и 2, положительные значения Λ_*^h соответствуют критическим напряжениям сжатия ($G_{13}\Lambda_*^h = -\sigma_0$). Если же $\Lambda_*^h < 0$, то при желании сохранить устойчивость для компенсации начальных сжимающих напряжений $\sigma_3^0 < 0$ необходимо приложить растягивающие напряжения $\sigma_0 > -G_{13}\Lambda_*^h$.

5. РЕАКЦИЯ УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ

В п. 6 рассматриваются колебания пластины, лежащей на рассмотренном в п. 4 трансверсально изотропном основании. При этом необходимо знать реакцию основания на перемещения его поверхности. В некоторых частных случаях решение этой задачи получено в [19, 20].

Пусть на поверхности $z = 0$ заданы перемещения

$$u = u_0, \quad w = w_0 \quad \text{при} \quad z = 0. \tag{5.1}$$

Тогда в силу формул (4.8) и (4.10) находим напряжения $\sigma^*(0)$ и $\sigma_{33}^*(0)$, порождаемые этими перемещениями,

$$\sigma^*(0) = r\left(c_{11}u_0 + c_{13}w_0\right), \qquad \sigma_{33}^*(0) = r\left(c_{13}u_0 + c_{33}w_0\right), \tag{5.2}$$

где для трансверсально изотропного материала коэффициенты жесткости основания c_{ij} равны

$$c_{11} = \frac{G^*(\alpha_1 b_1 - \alpha_2 b_2)}{b_1 - b_2}, \quad c_{13} = \frac{G_{13}^* b_1 b_2(\alpha_2 - \alpha_1)}{b_1 - b_2} + G_{13}, \quad c_{33} = \frac{E_{33}^*(b_1\alpha_2 - b_2\alpha_1)}{b_1 - b_2} \tag{5.3}$$

и для изотропного материала

$$c_{11} = \frac{(G + \sigma_3^0)\alpha_2(\alpha_1^2 - 1)}{\alpha_1\alpha_2 - 1} + G, \quad c_{13} = \frac{(G + \sigma_3^0)\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_1\alpha_2 - 1} + G, \quad c_{33} = \frac{E_{11}^*\alpha_1(\alpha_2^2 - 1)}{\alpha_1\alpha_2 - 1}. \tag{5.4}$$

Отличие коэффициентов (5.3)–(2.4), от найденных в [19, 20], заключается, в частности, в учете сил инерции основания и начальных напряжений σ_3^0.

6. КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ. ПОДХОД КИРХГОФА – ЛЯВА (КЛ)

Рассматриваются свободные колебания пластины толщины h, изготовленной из упругого трансверсально изотропного материала и лежащей на рассмотренном в п. 4 трансверсально изотропном основании. Между пластиной и основанием имеется жесткий контакт. Пластина и основание находятся в условиях вертикального сжатия с постоянным напряжением σ_3^0 и горизонтального всестороннего растяжения (сжатия) с постоянной деформацией ε_0 (при сжатии $\sigma_3^0 < 0$ и $\varepsilon_0 < 0$) (см. рис. 2). При этом для основания и пластины начальные напряжения σ_0 соответственно равны

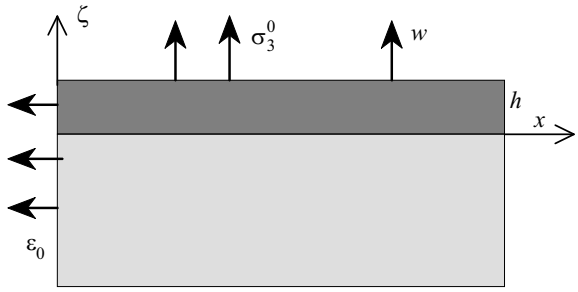


Рис. 2. Пластина на упругом основании

$$\sigma_0^F = \frac{E_0^F}{1 - \nu^F}\varepsilon_0 + \frac{E_{13}^F}{E_{33}^F}\sigma_3^0, \quad \sigma_0^P = \frac{E_0^P}{1 - \nu^P}\varepsilon_0 + \frac{E_{13}^P}{E_{33}^P}\sigma_3^0, \qquad E_0^{(F,P)} = \frac{E^{(F,P)}}{1 - (\nu^{(F,P)})^2}. \tag{6.1}$$

Здесь и ниже индекс F используется для величин, описывающих основание (Foundation), а индекс P — для одноименных величин пластины (Plate).

Уравнение колебаний пластины согласно модели КЛ имеет вид

$$D^P \Delta\Delta w - T^P \Delta w + \sigma_{33}^* + \rho^P \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{6.2}$$

где

$$D^P = \frac{E_0^P h^3}{12}, \quad T^P = h\sigma_0^P, \quad E_0^P = \frac{E^P}{1-(\nu^P)^2}, \quad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}. \tag{6.3}$$

Здесь E^P, ν^P, ρ^P — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала пластины, T^P — начальное усилие в пластине, σ_{33}^* — давление основания на пластину.

Пусть пластина совершает колебания с формой прогиба

$$w(x_1, x_2, t) = w_0 \sin(r_1 x_1) \sin(r_2 x_2) e^{i\omega t}, \tag{6.4}$$

где r_1 и r_2 — заданные волновые числа, $\sigma_{33}^* = r c_{33} w_0$, а ω — искомая частота.

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\frac{\mu^4}{12} + \mu^2 \varepsilon + \mu \hat{c}_{33} - \Lambda^K = 0, \tag{6.5}$$

где

$$\mu = rh = \frac{2\pi h}{L}, \quad \hat{c}_{33} = \frac{c_{33}}{E_0^P} \simeq \frac{G_{13}^F}{E_0^P}, \quad \Lambda^K = \frac{\rho^P h^2 \omega^2}{E_0^P}, \quad \varepsilon = \varepsilon_0(1+\nu^P) + \frac{E_{13}^P \sigma_3^0}{E_{33}^P E_0^P}. \tag{6.6}$$

Здесь L — длина волны на поверхности пластины. При естественных предположениях уравнение (6.5) содержит три малых параметра μ, $\hat{c}_{33}$ и ε. Частота колебаний ω входит в уравнение (6.5) явно через частотный параметр Λ^K и неявно через коэффициент c_{33}, учитывающий силы инерции основания. Использование уравнения (6.5) ограниченно двумя обстоятельствами. Во-первых, если эффективная начальная сжимающая деформация ε велика, пластина теряет устойчивость. Критерием устойчивости служит неравенство $\Lambda^K > 0$, что дает

$$-\varepsilon < \min_{\mu} \left(\frac{\mu^2}{12} + \frac{\hat{c}_{33}}{\mu} \right) = \frac{(6\,\hat{c}_{33})^{2/3}}{4}, \quad \mu = (6\,\hat{c}_{33})^{1/3}. \tag{6.7}$$

Отметим, что в отличие от полупространства потеря устойчивости теперь происходит при вполне определенном значении волнового числа r. Тем не менее, форма потери устойчивости не является вполне определенной, ибо в силу (2.2) $r^2 = r_1^2 + r_2^2$ и одно из чисел r_1 или r_2 остается произвольным. Геометрически нелинейное рассмотрение [18] показало, что в закритической области минимальная энергия деформации получается при $r_1 = r_2$, т.е. для квадратных вмятин.

Другое ограничение на частотный параметр Λ^K вытекает из требования, чтобы характеристическое уравнение (4.12) для основания не имело чисто мнимых корней, ибо в противном случае энергия колебаний будет уходить на бесконечность, свободные незатухающие колебания пластины (также, как и волны Релея) невозможны. Это требование приводит к неравенству

$$\Lambda^K < \mu^2 \frac{\rho^P}{\rho^F} \frac{G_{13}^F + \sigma_3^0}{E_0^P}, \tag{6.8}$$

где ρ^F и G_{13}^F — плотность материала основания и его жесткость на поперечный сдвиг соответственно.

7. ПОДХОД ТИМОШЕНКО – РЕЙССНЕРА

В случае сильной анизотропии материала пластины двухмерная модель ТР дает существенно более точные результаты, чем модель КЛ. В модели ТР при поперечных колебаниях нормальный элемент пластины имеет три степени свободы: вертикальное перемещение w и два угла его поворота φ_1 и φ_2 вокруг горизонтальных осей.

После введения вместо углов φ_1 и φ_2 новых неизвестных функций Θ и Ψ

$$\varphi_1 = \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \qquad \varphi_2 = -\frac{\partial \Theta}{\partial x_1} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \tag{7.1}$$

система уравнений поперечных колебаний расщепляется (как и в п. 4) на уравнение второго порядка относительно функции Θ (далее это уравнение не рассматривается)

$$\frac{1-\nu^P}{2}\,D^P\Delta\Theta-\Gamma h\Theta-\frac{h\tau^*(0)}{2}-\frac{\rho^P h^3}{12}\,\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}=0 \tag{7.2}$$

и систему уравнений относительно функций w и Ψ

$$\begin{gathered}\Gamma h(\Delta w-\Delta\Psi)+T^P\Delta w-\sigma_{33}^*(0)-\rho^P h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,\\ -D^P\Delta\Delta\Psi-\Gamma h(\Delta w-\Delta\Psi)-\frac{hr\sigma^*(0)}{2}+\frac{\rho^P h^3}{12}\,\frac{\partial^2\Delta\Psi}{\partial t^2}=0.\end{gathered} \tag{7.3}$$

Здесь $\sigma_{33}^*(0)$ и $\sigma^*(0)$ — это напряжения (5.2) на поверхности контакта пластины и основания, появляющиеся в результате вертикальных перемещений w и горизонтальных перемещений, связанных с углами φ_1 и φ_2 поворота нормали вокруг горизонтальных осей (в связи с малостью толщины h последние напряжения, как правило, не учитываются).

В системе (7.3), описывающей поперечные колебания, положим

$$w=w_0\sin r_1x_1\sin r_2x_2\,e^{i\omega t},\qquad \Psi=\Psi_0\sin r_1x_1\sin r_2x_2\,e^{i\omega t}. \tag{7.4}$$

Тогда в формулах (5.2) $u_0=-\mu\Psi_0/2$ и дисперсионное уравнение можно записать в виде

$$\left(\Lambda^T-g\mu^2-\mu^2-\hat c_{33}\mu\right)\left(\frac{\Lambda^T-\mu^2}{12}-g-\frac{\hat c_{11}\mu}{4}\right)-\left(g-\frac{\hat c_{13}\mu}{2}\right)\left(g\mu^2-\frac{\hat c_{13}\mu}{2}\right)=0, \tag{7.5}$$

где приняты обозначения (6.6), а также

$$g=\frac{\Gamma}{E_0^P},\quad \frac{5\Gamma}{6},\qquad \hat c_{ij}=\frac{c_{ij}}{E_0^P},\qquad \Lambda^T=\frac{\rho^P h^2\omega^2}{E_0^P},. \tag{7.6}$$

Как и для балки Тимошенко (см. п. 2), уравнение (7.5) имеет два корня. Остановимся на меньшем из них. Если длина волны L велика по сравнению с толщиной пластины h и $\gamma\ll 1$, это уравнение содержит малые параметры μ, , g, c_{ij}^*. Принимая, что они связаны порядковыми соотношениями:

$$\varepsilon\sim\mu^2,\qquad \hat c_{ij}\sim\mu^3,\qquad g\sim\mu^2, \tag{7.7}$$

для меньшего корня уравнения (7.5) получаем приближенно

$$\Lambda^T=\frac{\mu^4 g}{12g+\mu^2}+\mu^2+\mu\hat c_{33}. \tag{7.8}$$

Если жесткость пластины на поперечный сдвиг не мала ($12g\gg\mu^2$), то формула (7.8) переходит в (6.5), а условие устойчивости

$$-\varepsilon<\min_\mu f(\mu,g,\hat c_{33})=f_0(g,\hat c_{33}),\qquad f(\mu,g,\hat c_{33})=\frac{\mu^2 g}{12g+\mu^2}+\frac{\hat c_{33}}{\mu} \tag{7.9}$$

— в условие (6.7), полученное для модели КЛ.

Если

$$g>g_*=\left(\hat c_{33}^2/3\right)^{1/3}\quad\text{или}\quad \hat c_{33}<\sqrt{3g^3}, \tag{7.10}$$

функция $f(\mu,g,\hat c_{33})$ имеет минимум $f_0<g$ при некотором конечном значении μ. С ростом жесткости основания $\hat c_{33}$ вплоть до $\hat c_{33}=\sqrt{3g^3}$ величина f_0 растет до $f_0=g$, а величина μ растет до значения $\mu=\sqrt{12g}$. Если же неравенство (7.10) нарушено, то величина μ, при которой достигается минимум $f_0=g$, скачком становится равной $\mu=\infty$. Согласно двухмерной модели ТР нарушение условия (7.10) свидетельствует о потере устойчивости материала пластины.

8. НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При обсуждении численных результатов точное решение уравнений теории упругости сравниваем с приближенными решениями по моделям КЛ и ТР. Ограничимся рассмотрением системы (4.6), записанной как для основания, так и для пластины. Возможно построение точного аналитического решения, однако удобнее оказалось использовать смешанный способ. Систему (4.6) для пластины интегрируем численно в пределах $0 \le z \le h$, а начальные условия в задаче Коши при $z = 0$ берем из аналитического решения (4.10) для основания. Произвольные постоянные C_1 и C_2 и частотный параметр Λ^P находим, удовлетворяя граничным условиям при $z = h$.

Рассмотрим трансверсально изотропные основание и пластину с параметрами, определяемыми по схеме, описанной в п. 4, при значениях параметров (4.5), удовлетворяющих соотношениям

$$E_1^P = 10E_2^P = 100E_1^F = 1000E_2^F, \qquad \nu^P = \nu^F = 0.3, \qquad h_1^P = h_2^P, \quad h_1^F = h_2^F, \tag{8.1}$$

где, как и ранее, индексы P и F относятся к пластине и к основанию. В силу (8.1) как пластина, так и основание примерно в 5 раз жестче в горизонтальном направлении, чем в вертикальном. Основание в 100 раз мягче пластины. Остальные параметры задачи будем менять. Ниже обсуждается влияние длины волны деформации L, влияние горизонтальной начальной деформации ε_0, влияние вертикального начального напряжения σ_3^0 и влияние инерционности основания ρ^F.

Влияние длины волны деформации L описывается параметром $\mu = rh = 2\pi h/L$. При этом начальные напряжения считаем отсутствующими, а основание — безинерционным, т.е. $\varepsilon_0 = \sigma_3^0 = \rho^F = 0$.

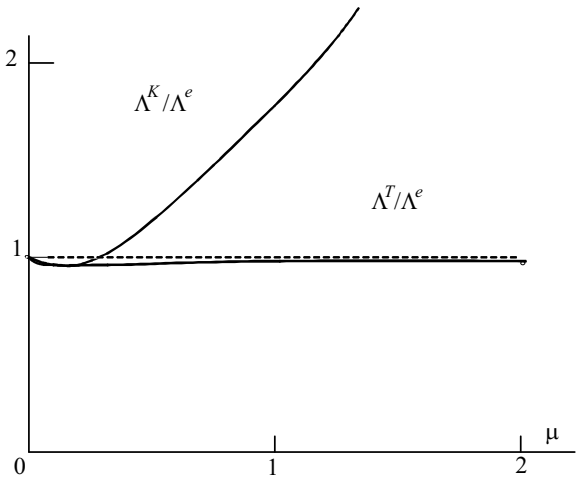


Рис. 3. Влияние длины волны деформации

На рис. 3 для первой частоты колебаний показаны отношения Λ^K/Λ^e и Λ^T/Λ^e частотных параметров, найденных по моделям КЛ и ТР, к точному значению Λ^e в зависимости от параметра μ. Видим, что при уменьшении длины волны L по сравнению с толщиной пластины h область применимости модели КЛ быстро исчерпывается, а модель ТР дает удовлетворительные результаты во всем рассмотренном диапазоне значений μ.

Влияние горизонтальной начальной деформации ε_0. При достаточно большом уровне сжимающей начальной деформации пластина теряет устойчивость. Как и выше, будем считать, что $\sigma_3^0 = \rho^F = 0$. Интегрирование точной системы (4.6) дает следующие критические значения деформации сжатия и параметра волнообразования: $\varepsilon_0 = -0.01015$, $\mu = 0.23$. Укажем для сравнения, что модель КЛ дает $\varepsilon_0 = -0.00947$, $\mu = 0.22$, а модель ТР — $\varepsilon_0 = -0.00934$, $\mu = 0.23$. Для принятых значений параметров (8.1) условие (7.9) выполнено с большим запасом.

Таблица 3

Влияние горизонтальной начальной деформации

ε_0	-0.01	0	0.01
Λ/μ^4	0.004	0.259	0.514

В табл. 3 приведена зависимость первого собственного значения параметра Λ, найденного из системы (4.6) для $\mu = 0.23$.

Как и следовало ожидать с учетом формул (4.11), зависимость параметра Λ от начальной деформации ε_0 линейна.

Влияние вертикального начального напряжения σ_3^0. Считаем, что выволнены соотношения (8.1), а также положим $\sigma_0 = \rho^F = 0$, $\sigma_3^0 = G_{13}^F\eta$, причем $\eta > -1$. Как отмечалось в п. 4, при $\eta \le -1$ материал основания теряет устойчивость. Для ряда значений η и μ в табл. 4 приведены значения первого собственного числа для трехмерной модели $\mu^{-4}\Lambda(\eta, \mu)$, полученные при численном интегрировании системы (4.6).

Зависимость Λ от η близка к линейной вплоть до критического значения $\eta = -1$. В отличие от случая горизонтальной начальной деформации (см. табл. 3) здесь параметр Λ при изменении нагрузки меняется в более узком диапазоне.

Влияние сил инерции основания. Примем данные (8.1) и будем считать, что начальные напряжения отсутствуют, т.е. $\varepsilon = \sigma_3^0 = 0$. Отношение плотностей $\rho_0 = \rho^F/\rho^P$ и волновое число μ будем менять. В силу формулы (6.8) параметр ρ_0 ограничен неравенством

$$\rho_0 < \rho_* = \frac{\mu^2 \hat{G}_{13}^F}{\Lambda^*}, \qquad \hat{G}_{13}^F = 0.001157, \tag{8.2}$$

при нарушении которого спектр колебаний не является вещественным. В табл. 5 приведено первое собственное значение, причем Λ^0 найдено при $\rho_0 = 0$, а Λ^* — при максимально возможном значении $\rho_0 = \rho_*$, меньше которого соответствующее значение Λ вещественно.

Влияние сил инерции основания можно оценить, сравнивая величины Λ^0 и Λ^*. Для более тонкой пластины (для меньших μ) это влияние больше.

Таблица 4

Влияние вертикального начального напряжения

η	$\mu = 0.03$	0.1	0.3	1.0
-0.99	41.9	1.20	0.115	0.0450
0	74.6	2.16	0.160	0.0467
1.0	105.7	3.10	0.205	0.0484

Таблица 5

Влияние сил инерции основания

μ	Λ^0	Λ^*	ρ_*
0.03	$6.04 \cdot 10^{-5}$	$3.38 \cdot 10^{-5}$	0.0208
0.1	$2.16 \cdot 10^{-4}$	$1.21 \cdot 10^{-4}$	0.0691
0.3	$1.30 \cdot 10^{-3}$	$1.00 \cdot 10^{-3}$	0.1059
1.0	$4.67 \cdot 10^{-2}$	$4.51 \cdot 10^{-2}$	0.2550

9. УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рассмотрим задачу устойчивости безмоментного напряженного состояния тонкой упругой изотропной оболочки, лежащей на изотропном упругом основании. Ограничимся использованием модели КЛ. Применим локальный подход [21–23], согласно которому переменные коэффициенты замораживаются, граничные условия игнорируются, а само решение ищется в виде двояко периодической функции координат на поверхности оболочки. В частных случаях построенное решение удовлетворяет граничным условиям шарнирного опирания, а в некоторых других (если граничные условия не являются слабыми) — дает хорошее первое асимптотическое приложение для критической нагрузки [9]. Для удовлетворения граничных условий может быть использован прием [24], связанный с построением интегралов краевого эффекта.

Исходим из системы уравнений пологих оболочек:

$$D\Delta\Delta w - \Delta_T w - \Delta_R \Phi - \sigma_{33}^* = 0, \qquad (Eh)^{-1}\Delta\Delta\Phi + \Delta_R w = 0, \tag{9.1}$$

где Φ — функция усилий, σ_{33}^* — реакция основания (2.12),

$$\Delta_T w = T_1^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + T_2^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \quad \Delta_R w = \frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \tag{9.2}$$

Здесь T_i^0,S^0 — безмоментные начальные усилия, R_1, R_2 — радиусы кривизны срединной поверхности, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки. Нагружение считаем однопараметрическим с параметром нагружения $\lambda > 0$, который вводим по формулам

$$\left\{T_1^0,\, T_2^0,\, S^0\right\} = -\lambda \left\{t_1,\, t_2,\, t_3\right\}, \tag{9.3}$$

где величины t_i считаем безразмерными и имеющими порядок единицы. При этом пренебрегаем начальными напряжениями в основании (заполнителе).

При локальном подходе решение системы (9.1) ищем в виде

$$w(x_1, x_2) = w_0 e^{iz}, \quad \Phi(x_1, x_2) = \Phi_0 e^{iz}, \qquad z = r_1 x_1 + r_2 x_2. \tag{9.4}$$

После подстановки решения (9.4) в систему (9.1) получаем явное выражение параметра $\lambda = \lambda(r_1, r_2)$ как функцию волновых чисел r_1 и r_2. В безразмерных переменных имеем

$$\Lambda = \frac{\lambda}{Eh} = \mu_0^2 g(k, \varphi, \omega), \qquad g(k, \varphi, \omega) = \frac{k^4 + 2\omega k + f_R(\varphi)}{k^2 f_T(\varphi)}, \tag{9.5}$$

где
$$\mu_0^4 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}, \qquad \omega = \frac{E_0(1-\nu_0)}{E\mu_0^3(1+\nu_0)(3-4\nu_0)\sqrt{12(1-\nu^2)}},$$
$$f_R(\varphi) = \left(\rho_2\cos^2\varphi + \rho_1\sin^2\varphi\right)^2, \quad f_T(\varphi) = t_1\cos^2\varphi + 2t_3\sin\varphi\cos\varphi + t_2\sin^2\varphi, \tag{9.6}$$
$$r_1 = \frac{k\cos\varphi}{\mu_0 R}, \quad r_2 = \frac{k\sin\varphi}{\mu_0 R}, \qquad \rho_1 = \frac{R}{R_1}, \quad \rho_2 = \frac{R}{R_2},$$

Здесь $R > 0$ — характерный радиус кривизны оболочки, μ_0 — малый параметр тонкостенности, ω — совмещенный параметр жесткости основания, введенный в [19], причем E_0 и ν_0 — модуль Юнга и коэффициент Пуассона основания.

Критическое значение $\lambda = \lambda_*$ получаем после минимизации λ по волновым числам r_1 и r_2 или по безразмерным параметрам k и φ

$$\Lambda_* = \mu_0^2 \min_{k,\varphi}{}^{+} g(k,\varphi,\omega) = \mu_0^2\, g(k_*,\varphi_*,\omega), \tag{9.7}$$

где значок $^+$ указывает на то, что ищется положительный минимум, а звездочкой отмечены критические значения соответствующих величин. Предполагается, что величины t_i таковы, что при некоторых значениях угла φ будет $f_T > 0$, т.е. существуют направления, в которых действуют сжимающие начальные усилия. Тогда минимум в (9.7) ищется по тем φ, для которых $f_T > 0$.

Область применимости локального приближения ограничена двумя неравенствами: длина полуволны деформации при потере устойчивости $L = \pi R/k$ должна быть существенно больше толщины оболочки h и меньше ее радиуса кривизны R или в безразмерных переменных

$$\mu_0^2 \ll k^{-1} \ll 1. \tag{9.8}$$

При этом предполагается, что размер оболочки в плане не меньше R, а закрепление краев не является слабым (см. [9]), ибо только в этом случае можно рассчитывать на то, что влияние граничных условий несущественно.

При $\omega = 0$ формула (9.7) дает критическую нагрузку при отсутствии основания. Наличие основания существенно расширяет область применимости локального подхода. Если при отсутствии основания область применимости ограничена оболочками положительной гауссовой кривизны и цилиндрическими (коническими) оболочками при осевом сжатии, то при наличии основания это ограничение снимается — кривизна срединной поверхности может быть любой.

В [21] рассмотрен ряд частных задач устойчивости при наличии основания. Здесь же ограничимся лишь обсуждением порядков параметра нагружения Λ^* и размера вмятины $L = \pi R/k$ при потере устойчивости при $h_* = h/R \to 0$ для различных значений отношения $e = E_0/E$. Введем порядки a_E, a_Λ и a_L соответствующих величин по формулам

$$e \sim h_*^{a_E}, \qquad \Lambda^* \sim h_*^{a_\Lambda}, \qquad L/R \sim h_*^{a_L}. \tag{9.9}$$

На рис. 4 показаны зависимости $a_\Lambda(a_E)$ и $a_L(a_E)$, построенные с учетом соотношения $\omega \sim h_*^{-3/2}e$ по формуле (9.7) при $\omega \ll 1$ (a — мягкое основание) и при $\omega \gg 1$ (b — жесткое основание). При $\omega \sim 1$ будет $a_E = 3/2$ (точка A на рис. 4).

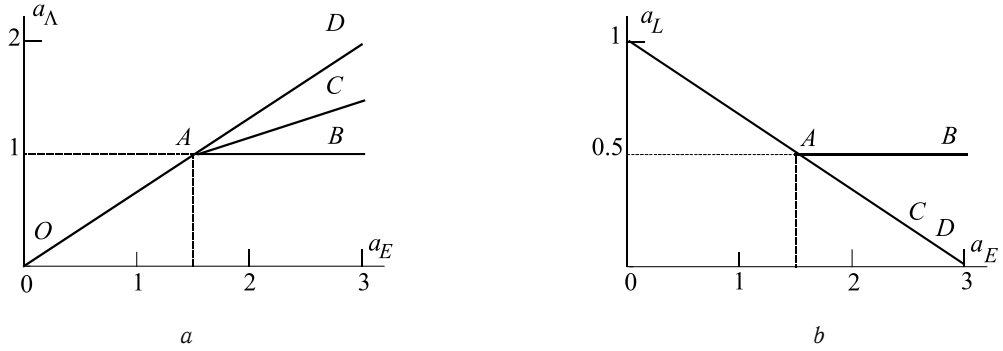


Рис. 4. Асимптотический портрет

Для жесткого основания (при $0 < a_E < 3/2$) независимо от знака гауссовой кривизны имеем (отрезок OA на рис. 4)

$$\Lambda^* \sim h_*^{2a_E/3} \sim e^{2/3}, \qquad L/R \sim h_*^{1-a_E/3}. \tag{9.10}$$

При этом параметр Λ тот же, что и для пластины и не зависит от ее толщины.

Для мягкого основания (при $a_E > 3/2$) асимптотические формулы для величин Λ^* и L зависят от знака гауссовой кривизны оболочки и от характера нагружения. Для выпуклых оболочек ($\rho_1\rho_2 > 0$) и для цилиндрической (конической) оболочки при осевом сжатии зависимости $a_\Lambda(a_E)$ и $a_L(a_E)$ показаны на рис. 4 отрезками AB и совпадают с аналогичными зависимостями при отсутствии основания ($e = 0$).

При $e > 0$ зависимость $a_\Lambda(a_E)$ для цилиндрической оболочки при кручении показана отрезком AC, а для цилиндрической оболочки при внешнем давлении и для оболочки отрицательной гауссовой кривизны — отрезком AD. Во всех названных здесь случаях (когда локальный подход неприменим при $e = 0$) зависимость $a_L(a_E)$ изображается одним и тем же отрезком AC или AD. Требование $L/R \ll 1$ приводит в этих случаях к ограничению на жесткость основания $a_E < 3$. Если же $a_E \geq 3$, локальный подход неприменим, ибо граничные условия существенно влияют на критическую нагрузку.

Напомним для сравнения (см. [9]), что в этих случаях при $e = 0$ для хорошо закрепленных оболочек средней длины имеют место следующие оценки: для цилиндрической оболочки при внешнем давлении $\Lambda^* \sim h_*^{3/2}$, $L/R \sim h_*^{1/4}$, для цилиндрической оболочки при кручении $\Lambda^* \sim h_*^{5/4}$, $L/R \sim h_*^{1/4}$, для оболочки отрицательной гауссовой кривизны $\Lambda^* \sim h_*^{4/3}$, $L/R \sim h_*^{1/3}$, причем константы в этих оценках зависят от граничных условий и от других факторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФМ (*проект* 07.01.00250а).

Библиографический список

1. *Доннелл Л.Г.* Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 568 с.
2. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
3. *Агаловян Л.А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414 с.
4. *Назаров С.А.* Асимптотический анализ тонких пластин и стержней. Новосибирск: Научная книга, 2002. 408 с.
5. *Товстик П.Е.* Об асимптотическом характере приближенных моделей балок, пластин и оболочек // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. № 3. С. 49–54.
6 *Биргер И.А., Пановко Я.Г.* Прочность. Устойчивость. Колебания: В 3-х т. / Под ред. Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. Т.3. 568 с.
7. *Tovstik P.E., Tovstik T.P.* On the 2D models of plates and shells including the shear // ZAMM. 2007. V. 87, № 2. P. 160–171.
8. *Григолюк Э.И., Каюанов В.В.* Устойчивость оболочек М.: Наука, 1978. 360 с.
9. *Товстик П.Е.* Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 1995. 320 с.
10. *Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н., Товстик П.Е.* Континуальные и дискретные модели в задаче устойчивости трехслойной нанопластины // Теор. и прикл. механика. Минск, 2005. Вып. 19. С. 37–41.
11. *Родионова В.А., Титаев Б.Ф., Черных К.Ф.* Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1996. 280 с.
12. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
13. *Сьярле Ф.* Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992. 472 с.
14. *Ишлинский А.Ю.* Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин. // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95, № 3. С. 477–479.
15. *Баничук Н.В., Ишлинский А.Ю.* О некоторых особенностях задач устойчивости и колебаний прямоугольных пластин // ПММ. 1995. Т. 59, № 4. С. 620–625.
16. *Кильчевский Н.А., Никулинская С.В.* Об осесимметричной потере устойчивости круговой цилиндрической оболочки // Прикл. мех. 1965. Т. 1, № 11. С. 1–6.
17. *Ершова З.Г.* Устойчивость цилиндрической панели со слабо закрепленными прямолинейными краями // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1993. № 3. С. 93–97.
18. *Морозов Н.Ф., Паукшто М.В., Товстик П.Е.* Устойчивость поверхностного слоя при термонагружении // МТТ. 1998. № 1. С. 130–139.
19. *Ильгамов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.В.* Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим заполнителем. М.: Наука. 1978. 332 с.
20. *Товстик П.Е.* Реакция предварительно напряженного ортотропного основания // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2006. № 4. 388 с.
21. *Товстик П.Е.* Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании // Изв. РАН. МТТ. 2005. Вып. 1. С. 147–160.
22. *Работнов Ю.Н.* Локальная устойчивость оболочек // Докл. АН СССР. 1946. Т. 52, № 2. С. 111–112.
23. *Ширшов В.П.* Локальная устойчивость оболочек // Тр. 2 Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. Киев, 1962. С. 314–317.
24. *Болотин В.В.* Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек // ПММ. 1960. Т. 24, Вып. 5.

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ИНФОРМАТИКА

УДК 62-50

ЭКСПЕРИМЕНТЫ С НЕСТАЦИОНАРНЫМИ БИЛИНЕЙНЫМИ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ

Д.В. Сперанский

Саратовский государственный университет,
кафедра математической кибернетики и компьютерных наук
E-mail: SperanskiyDV@info.sgu.ru

Получены условия существования синхронизирующих, установочных и диагностических последовательностей для нестационарных билинейных систем. Предложены методы синтеза упомянутых последовательностей.

Experiments with Non-Stationary Bilinear Discrete Systems

D.V. Speranskiy

The existence conditions of synchronizing, homing and diagnostic sequences for the non-stationary bilinear systems are found. Methods for synthesis of mentioned sequences are suggested.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая статья посвящена исследованию некоторых задач теории экспериментов с автоматами [1]. Эта теория, как известно, представляет собой фундаментальную математическую основу для разработки средств и методов контроля и диагностирования дискретных систем. Кроме того, она имеет самостоятельное значение как важный раздел общей теории автоматов при исследовании ее собственных внутренних задач. Из всех типов экспериментов ниже будут рассмотрены установочные (и их вырожденный случай — синхронизирующие) и диагностические. Интерес к ним связан с возможностью их применения при диагностике дискретных систем с целью определения их начального или конечного состояния, что существенно упрощает процесс их тестирования.

Отметим, что в настоящее время теория экспериментов с автоматами Мили, самой общей моделью автомата, развита достаточно хорошо. Известные в этой области результаты свидетельствуют о значительной трудоемкости методов синтеза упомянутых экспериментов и довольно больших их длинах. Вместе с тем среди дискретных систем и процессов, широко используемых на практике, имеется много таких, специфика которых позволяет существенно упростить процедуры синтеза экспериментов и сократить их длину.

К числу таких систем относятся, в частности, линейные и билинейные дискретные системы. Последние являются адекватными математическими моделями нейронных сетей, процессов роста популяций в биологии, устройств для умножения и деления полиномов, применяемых в криптографии, и т.п. Возможность упрощения процедур синтеза экспериментов для них подтверждена результатами, полученными для стационарных линейных и билинейных систем в [2, 3]. Ниже будет показано, что такие же упрощения имеют место и для нестационарных билинейных дискретных систем (НБС).

© Д.В. Сперанский, 2008

1. ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предварительно напомним некоторые определения. Пусть $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ — автомат Мили, где S, X, Y — конечные множества состояний, входной и выходной алфавиты соответственно, а $\delta: S \times X \to S$ и $\lambda: S \times X \to Y$ — отображения, представляющие собой функции перехода и выхода.

Определение 1. Входная последовательность $p = x_1, x_2, \ldots, x_k$ называется *синхронизирующей* (СП) для автомата A, если $\forall\ s_1, s_2 \in S\ \delta(s_1, p) = \delta(s_2, p)$.

Определение 2. Входная последовательность $p = x_1, x_2, \ldots, x_k$ называется *установочной* (УП) для автомата A, если $\forall\ s_1, s_2 \in S\ \lambda(s_1, p) = \lambda(s_2, p) \to \delta(s_1, p) = \delta(s_2, p)$.

Определение 3. Входная последовательность $p = x_1, x_2, \ldots, x_k$ называется *диагностической* (ДП) для автомата A, если $\forall\ s_1, s_2 \in S\ \lambda(s_1, p) = \lambda(s_2, p) \to s_1 = s_2$.

В этих определениях функции δ и λ расширены на входные последовательности так, как это традиционно делается в теории автоматов. Содержательно приведенные определения означают, что независимо от начального состояния автомата в случае подачи на его вход СП он оказывается в одном и том же состоянии независимо от выходной реакции, а в случае подачи на вход УП (ДП) по наблюдаемой реакции однозначно определяется конечное (начальное состояние).

Очевидно, что СП является вырожденным случаем УП, а ДП одновременно является и УП, однако обратное неверно.

Перейдем теперь к описанию объекта исследования. Условимся далее считать, что НБС задана над полем $GF(p) = \{0, 1, \ldots, p-1\}$, где p — простое число, а ее входным, выходным и вектором-состоянием являются соответственно вектора-столбцы

$$\overline{u}(t) = [u_1(t), \ldots, u_l(t)]', \quad \overline{y}(t) = [y_1(t), \ldots, y_m(t)]', \quad \overline{s}(t) = [s_1(t), \ldots, s_n(t)]'.$$

Пространством состояний НБС является множество векторов $\overline{s}(t)$, которые обозначим через S_n, где $|S_n| = p^n$. Функционирование НБС задается системами уравнений состояний и выходов

$$\overline{s}(t+1) = A(t)\overline{s}(t) + \left(\sum_{i=1}^{l} F_i(t)u_i(t)\right)\overline{s}(t) + B(t)\overline{u}(t), \tag{1}$$

$$\overline{y}(t) = C(t)\overline{s}(t) + \left(\sum_{i=1}^{l} G_i(t)u_i(t)\right)\overline{s}(t) + D(t)\overline{u}(t), \tag{2}$$

где $A(t)$, $F_i(t)$ — матрицы размерности $n \times n$; $B(t)$ — размерности $n \times l$; $C(t)$, $G_i(t)$ — размерности $m \times n$; D — размерности $m \times l$. Эти матрицы далее именуются характеристическими, а матрица $A(t)$ — главной характеристической. Элементами всех этих матриц являются элементы поля $GF(p)$. Величину n назовем размерностью НБС.

Введем следующие обозначения:

$$I(\overline{u}(t)) = \sum_{i=1}^{l} F_i(t)u_i(t), \qquad J(\overline{u}(t)) = \sum_{i=1}^{l} G_i(t)u_i(t).$$

Пусть задана входная последовательность $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(t)$ и пусть $\overline{s}(0)$ есть начальное состояние НБС. Тогда конечное состояние НБС и ее реакция на эту последовательность вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\overline{s}(t+1) = &\left\{\prod_{i=0}^{t}[A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\right\}\overline{s}(0) + \left\{\prod_{i=0}^{t-1}[A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\right\}B(0)\overline{u}(0) + \\ &+ \left\{\prod_{i=0}^{t-2}[A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\right\}B(1)\overline{u}(1) + \ldots + B(t)\overline{u}(t),\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\overline{y}(t) = &[C(t) + J(\overline{u}(t))]\left\{\prod_{i=0}^{t-1}[A(t-i-1) + I(\overline{u}(t-i-1))]\right\}\overline{s}(0) + \\ &+ [C(t) + J(\overline{u}(t))]\left\{\prod_{i=0}^{t-2}[A(t-i-1) + I(\overline{u}(t-i-1))]\right\}B(0)\overline{u}(0) + \ldots \\ &\ldots + [C(t) + J(\overline{u}(t))]\,B(t-1)\overline{u}(t-1) + D(t)\overline{u}(t)\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Справедливость формул (3) и (4) можно доказать методом математической индукции.

В работе рассматриваются задачи нахождения необходимых и достаточных условий существования у нестационарной билинейной дискретной системы, заданной над полем $GF(p)$, синхронизирующих, установочных и диагностических последовательностей, а также предлагаются методы их построения.

2. СИНХРОНИЗИРУЮЩИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Запишем определение 1 для СП $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(t)$ в терминах характеристических матриц НБС:

$$\begin{aligned} \forall\ \overline{s}_1,\ \overline{s}_2 \in S_n \qquad & \left\{ \prod_{i=0}^{t} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))] \right\} \overline{s}_1 + \ldots + B(t)\overline{u}(t) = \\ & = \left\{ \prod_{i=0}^{t} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))] \right\} \overline{s}_2 + \ldots + B(t)\overline{u}(t)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Перенеся в левую часть равенства (5) все выражения его правой части и проведя тривиальные преобразования, в результате получим

$$\forall\ \overline{s}_1,\ \overline{s}_2 \in S_n \quad \left\{ \prod_{i=0}^{t} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))] \right\} (\overline{s}_1 - \overline{s}_2) = [0]\,.$$

Поскольку $\overline{s}_1$ и $\overline{s}_2$ — произвольные состояния, то и $(\overline{s}_1 - \overline{s}_2)$ может быть любым состоянием из S_n. Тогда предыдущее высказывание эквивалентно следующему:

$$\forall\ \overline{s} \in S_n \quad \left\{ \prod_{i=0}^{t} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))] \right\} \overline{s} = [0]\,, \tag{6}$$

где $[0]$ — нулевая матрица (в частном случае, вектор).

Используя (6), докажем справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Для того, чтобы входная последовательность $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(t)$ была СП для НБС, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\prod_{i=0}^{t} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))] = [0]\,. \tag{7}$$

Докажем необходимость равенства (7), поскольку достаточность его очевидна. Обозначим через $H = [h_{ij}]$ матрицу, представляющую собой левую часть в (7). Поскольку $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(t)$ есть СП, то для нее должно по определению выполняться (6). В силу произвольности состояния $\overline{s}$ в (6) положим его равным вектору $[1, 0, \ldots, 0]$, тогда (6) трансформируется в равенство $[h_{11}, h_{21}, \ldots, h_{nn}]' = [0]$. Из этого равенства следует, что все элементы первого столбца матрицы H являются нулевыми. Полагая далее $\overline{s}$ равным векторам $[0, 1, \ldots, 0]', \ldots, [0, 0, \ldots, 1]'$, путем аналогичных рассуждений приходим к выводу, что и все остальные столбцы матрицы H также нулевые. Таким образом, из равенства (6) следует справедливость (7).

Следующее утверждение дает простое и конструктивно проверяемое достаточное условие существования СП небольшой длины.

Предварительно введем следующее определение. Квадратная матрица именуется верхней (нижней) супертреугольной, если все ее элементы, лежащие на главной диагонали и ниже (выше), нулевые.

Теорема 2. *Если характеристические матрицы $A(t)$ и $F_i(t)$ НБС являются верхними (нижними) супертреугольными, то для этой НБС существует СП, длина которой не превышает n, где n — размерность НБС.*

Доказательство. Пусть $A(t)$ и $F_i(t)$, $i = 1, \ldots, l$ являются верхними супертреугольными. Тогда каждый сомножитель в (7) представляет собой матрицу того же типа. Условимся нумеровать диагонали этих матриц, лежащие выше главной диагонали и параллельные ей, числами $1, 2, \ldots, n-1$. Непосредственными вычислениями легко убедиться, что все элементы первой диагонали матрицы — произведения двух супертреугольных матриц равны нулю. Если эту матрицу вновь умножить на верхнюю супертреугольную матрицу, т.е. вычислить произведение трех сомножителей в (7), то в

результате получится матрица, у которой нулевыми будут элементы первой и второй диагоналей. Отсюда методом индукции можно доказать, что произведение n штук верхних супертреугольных матриц даст нулевую матрицу. Тогда на основании теоремы 1 рассматриваемая НБС имеет СП, длина которой не превосходит n.

Для нижних супертреугольных матриц соответствующее утверждение доказывается аналогично.

Поскольку НБС являются частными видами автоматов Мили, для построения для них СП, УП и ДП применимы известные методы, описанные в [1], которые весьма трудоемки, поскольку базируются на использовании громоздкой конструкции дерева преемников. Ниже описываются аналитические методы построения различных типов последовательностей для НБС, менее трудоемкие, чем методы из [1].

Опишем метод построения СП. Обратимся к равенству (7) и на его основе организуем пошаговый процесс построения СП, последовательно для $t = 1, 2, \ldots$ При изменении величины t равенства (7) будут принимать следующий вид:

$$\begin{aligned}
&A(0) + I(\overline{u}(t)) = [0]\,,\\
&[A(1) + I(\overline{u}(1))]\,[A(0) + I(\overline{u}(0))] = [0]\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[A(t) + I(\overline{u}(t))]\,[A(t-1) + I(\overline{u}(t-1))] \cdot \ldots \cdot [A(0) + I(\overline{u}(0))] = [0]\ .
\end{aligned} \tag{8}$$

Для построения СП длины 1 сформируем на основе первого матричного равенства из (8)

$$\sum_{i=1}^{l} F_i(0) u_i(0) = -A(0) \tag{9}$$

систему линейных неоднородных уравнений относительно неизвестных, являющихся координатами вектора $\overline{u}(0)$. Пусть L есть матрица, представляющая левую часть в (9). Приравнивая каждый элемент этой матрицы соответствующим элементам матрицы $-A(0)$, получим систему из n^2 уравнений относительно неизвестных $u_1(0), \ldots, u_l(0)$. Обозначим матрицу сформированной линейной системы через M.

В случае совместности этой системы возможны два случая:

$$1)\ \operatorname{rank} M = l\,; \qquad 2)\ \operatorname{rank} M < l\,.$$

В первом случае система имеет единственное решение, которое дает искомую СП. Во втором случае система имеет конечное множество решений, каждому из которых соответствует своя СП.

Если построенная система линейных уравнений окажется несовместной, то перейдем к формированию следующей системы на базе второго матричного равенства в (8). Процесс ее формирования аналогичен только что описанному.

В случае совместности системы ее решения будут давать СП длины 2. При отрицательном исходе делается попытка построения СП длины 3 и т.д.

Заметим, что в общем случае верхняя оценка длины минимальной СП равна величине $v(v-1)/2$, где v — число состояний НБС. В действительности такая оценка установлена в [1] для минимальной УП, но поскольку СП есть ее частный случай, то справедливость ее имеет место и для СП.

Заметим также, что каждому матричному равенству в (8), начиная со второго, используемому для построения СП, будет соответствовать нелинейная система уравнений. Известно, что для таких систем общих методов их решения не существует, однако в силу конечности поля $GF(p)$, над которым рассматриваются НБС, решение может быть найдено по крайней мере перебором.

Задачи синхронизации и установки автоматов — это разновидности задачи управления автоматом, которая в общем виде формулируется следующим образом: для рассматриваемого автомата найти такую входную последовательность, которая переводит его из заданного состояния $\overline{s}_1$ в заданное состояние $\overline{s}_2$. Если автомат задан графом переходов, то решение этой задачи сводится к поиску путей на графе между двумя заданными вершинами, методы решения которой известны. Однако для автоматов с большим числом состояний проблема построения графа переходов сама по себе является

трудоемкой. Покажем, что для НБС может быть предложен аналитический метод решения задачи управления, не требующей наличия графа переходов.

Поиск требуемой входной последовательности осуществим следующим образом. Положим в (1) $t = 0$ и вместо $\overline{s}(0)$ подставим состояние $\overline{s}_1$, а вместо $\overline{s}(1)$ — состояние $\overline{s}_2$. Полученное матричное равенство будем рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $u_1(0), \ldots, u_l(0)$. Очевидно, что если эта система совместна, то ее решению соответствует искомая входная последовательность. Если таких решений будет несколько, то это говорит о существовании нескольких путей перехода из $\overline{s}_1$ в $\overline{s}_2$, а отсутствие решений — невозможность осуществления требуемого перехода с помощью входной последовательности длины 1. В последнем случае сделаем попытку найти соответствующую последовательность длины 2, положив в (3) $t = 1$ и заменив $\overline{s}(0)$ и $\overline{s}(t+1)$ соответственно на $\overline{s}_1$ и $\overline{s}_2$. Если полученная система вновь окажется несовместной, то продолжим описанный процесс далее аналогичным образом. Если до значения $t = v - 1$ включительно, где v — число состояний НБС, все последовательно получаемые системы линейных уравнений окажутся несовместными, то это означает, что переход из $\overline{s}_1$ в $\overline{s}_2$ невозможен, поскольку, если соответствующий путь существует, то его длина не может превосходить величины $v - 1$.

3. УСТАНОВОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Условия существования таких последовательностей даются следующей теоремой.

Теорема 3. *Для того, чтобы входная последовательность $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(t)$ была УП для НБС, необходимо и достаточно, чтобы для каждого ненулевого состояния $\overline{s} \in S_n$ выполнялось одно из условий:*

1) $\bigvee\limits_{d=0}^{t} [C(t) + J(\overline{u}(t))] \prod\limits_{i=0}^{d-1} [A(t-i-1) + I(\overline{u}(t-i-1))]\overline{s} \neq [0]$;

2) $\prod\limits_{i=0}^{t} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))] = [0]$.

Здесь и далее знак $\bigwedge\limits_{d=0}^{t}$ ($\bigvee\limits_{d=0}^{t}$) означает дизъюнкцию (конъюнкцию) выражений, стоящих за этим знаком и полученных при изменении индекса d от 0 до t.

Условимся также в следующем: если при вычислении $I(\overline{u}(v))$ и $J(\overline{u}(v))$ окажется, что $v < 0$ при некоторых значениях i и d, то в соответствующем выражении сомножители $[A(v) + I(\overline{u}(v))]$ и $[C(v) + J(\overline{u}(v))]$ полагаются равными единичной матрице соответствующей размерности.

Перейдем теперь к доказательству теоремы.

Запишем определение 2 УП $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(t)$ в терминах характеристических матриц НБС, используя формулы (3) и (4):

$$\forall\ s_1, \overline{s}_2 \in S_n \quad \bigwedge_{d=0}^{t} \Big\{ [C(t) + J(\overline{u}(d))] \prod_{i=0}^{d-1} [A(d-i-1) + I(\overline{u}(d-i-1))]\, \overline{s}_1 + \ldots$$
$$\ldots + [C(t) + J(\overline{u}(d))]\, B(d-1)\overline{u}(d-1) + D\overline{u}(d) =$$
$$= [C(t) + J(\overline{u}(d))] \prod_{i=0}^{d-1} [A(d-i-1) + I(\overline{u}(d-i-1))]\, \overline{s}_2 + \ldots$$
$$\ldots + [C(t) + J(\overline{u}(d))]\, B(d-1)\overline{u}(d-1) + D\overline{u}(d) \Big\} \to \Big\{ \prod_{i=0}^{t} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\, \overline{s}_1 +$$
$$+ \prod_{i=0}^{t-1} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\, B(0)\overline{u}(0) + \ldots + B(t)\overline{u}(t) =$$
$$= \prod_{i=0}^{t} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\, \overline{s}_2 + \prod_{i=0}^{t-1} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\, B(0)\overline{u}(0) + \ldots + B(t)\overline{u}(t) \Big\}.$$

Преобразуем каждое в отдельности равенство, стоящее до и после операции импликации, перенеся все в левые их части и осуществив соответствующие сокращения, в результате чего получим высказывание

$$\forall\ s_1, \overline{s}_2 \in S_n \quad \left[\bigwedge_{d=0}^{t} [C(t) + J(\overline{u}(d))] \prod_{i=0}^{d-1} [A(d-i-1) + I(\overline{u}(d-i-1))]\, (\overline{s}_1 - \overline{s}_2) = [0] \right] \to$$
$$\to \prod_{i=0}^{t} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\, (\overline{s}_1 - \overline{s}_2) = [0]\ .$$

Поскольку $\overline{s}_1, \overline{s}_2$ — произвольные состояния из S_n, то и $\overline{s} = \overline{s}_1 - \overline{s}_2$ также может быть любым состоянием из S_n. Отсюда следует, что последнее высказывание эквивалентно следующему:

$$\forall\ s \in S_n \quad \left[\bigwedge_{d=0}^{t} [C(t) + J(\overline{u}(d))] \prod_{i=0}^{d-1} [A(d-i-1) + I(\overline{u}(d-i-1))]\, \overline{s} = [0]\right] \to$$
$$\to \prod_{i=0}^{t} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\, \overline{s} = [0]\ .$$

Поскольку $x \to y$ эквивалентно $\overline{x} \vee y$, то последнее высказывание можно представить в виде

$$\forall\ s \in S_n \quad \left[\bigvee_{d=0}^{t} [C(t) + J(\overline{u}(d))] \prod_{i=0}^{d-1} [A(d-i-1) + I(\overline{u}(d-i-1))]\, \overline{s} \neq [0]\right] \vee$$
$$\vee \prod_{i=0}^{t} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\, \overline{s} = [0]\ .$$

Из этого высказывания и следует справедливость теоремы.

Заметим, что условие 2 в теореме 3 означает, что входная последовательность $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(t)$ является СП, представляющая собой частный случай УП. Метод построения СП был описан в предыдущем разделе.

Теперь перейдем к описанию метода построения УП при выполнении условия 1 теоремы 3. Организуем его в виде пошагового процесса, делая попытки построить УП сначала длины 1, затем длины 2 и т.д. С этой целью на основе условия 1 теоремы будем при очередном значении параметра d ($d = 0, 1, \ldots$) выписывать однородную нелинейную систему уравнений относительно неизвестных, являющихся координатами векторов $\overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(d), \overline{s}$, полученную путем замены в упомянутом условии знака $\neq$ на знак $=$.

Поскольку для нелинейных систем общие методы их решения отсутствуют, то сведем задачу к решению некоторого конечного множества систем линейных уравнений. Это множество будет получено из исходной системы нелинейных уравнений путем подстановки в нее вместо координат неизвестных векторов $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(d)$, координат всевозможных комбинаций конкретных входных векторов от $[0, 0, \ldots, 0]$ до $[1, 1, \ldots, 1]$. Каждый раз в результате указанной подстановки будет получена система линейных однородных уравнений относительно неизвестных $s_1, \ldots, s_n$, где n — размерность рассматриваемой НБС. Если такая система имеет не единственное решение, то это означает, что для конкретной комбинации входных векторов, породивших эту систему, условие 1 теоремы не выполняется. Если же система имеет единственное решение, то это означает, что условие 1 для рассматриваемой входной последовательности выполняется и она является искомой УП.

Если очередная система, порожденная некоторой входной последовательностью, имеет только нулевое решение, то переходим к проверке для этой последовательности условия 2 теоремы.

Указанный процесс продолжается далее до тех пор, пока не будет найдена УП, либо параметр d не достигнет значения $v(v-2)/2$, где v — число состояний НБС. Если и при этом значении d (это верхняя граница длины минимальной УП) УП не найдена, то для рассматриваемой НБС ее не существует.

4. ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Условия существования такой последовательности даются следующей теоремой.

Теорема 4. *Для того, чтобы последовательность $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(t)$ была ДП для НБС, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C(0) + J(\overline{u}(0)) \\ [C(1) + J(\overline{u}(1))]\,[A(0) + I(\overline{u}(0))] \\ \ldots \\ [C(t) + J(\overline{u}(t))] \prod_{i=0}^{t-1} [A(t-i-1) + I(\overline{u}(t-i-1))] \end{bmatrix} = n\,,$$

где n — размерность НБС.

Доказательство. Запишем определение 3 ДП $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(t)$ в терминах характеристических матриц НБС, используя формулы (3) и (4):

$$\begin{aligned}\forall\ s_1, \overline{s}_2 \in S_n \quad \bigwedge_{d=0}^{t} \Big\{ &[C(t) + J(\overline{u}(d))] \prod_{i=0}^{d-1} [A(d-i-1) + I(\overline{u}(d-i-1))]\, \overline{s}_1 + \ldots \\ &\ldots + [C(t) + J(\overline{u}(d))]\, B(d-1)\overline{u}(d-1) + D(d)\overline{u}(d) = \\ &= [C(t) + J(\overline{u}(d))] \prod_{i=0}^{d-1} [A(d-i-1) + I(\overline{u}(d-i-1))]\, \overline{s}_2 + \ldots \\ &\ldots + [C(t) + J(\overline{u}(d))]\, B(d-1)\overline{u}(d-1) + D(d)\overline{u}(d) \Big\} \to \overline{s}_1 = \overline{s}_2\,.\end{aligned}$$

Выполнив преобразование этого выражения так же, как это было сделано в теореме 3, получим высказывание

$$\forall\ s_1, \overline{s}_2 \in S_n \quad \left[\bigwedge_{d=0}^{t} \Big\{ [C(t) + J(\overline{u}(d))] \right] \prod_{i=0}^{d-1} [A(d-i-1) + I(\overline{u}(d-i-1))(\overline{s}_1 - \overline{s}_2) \to \overline{s}_1 = \overline{s}_2\,.$$

Если последовательность $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(t)$ является для НБС диагностической, то это означает, что знание реакции НБС на нее позволяет однозначно найти ее начальное состояние. Реакции НБС, используя (4), можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}&\overline{y}(0) = [C(0) + J(\overline{u}(0))]\, \overline{s}(0) + D(0)\overline{u}(0), \\ &\overline{y}(1) = [C(1) + J(\overline{u}(1))]\, [A(0) + I(\overline{u}(0))]\, \overline{s}(0) + [C(1) + J(\overline{u}(1))]\, B(0)\overline{u}(0) + D(1)\overline{u}(1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\overline{y}(t) = [C(t) + J(\overline{u}(t))] \prod_{i=0}^{t-1} [A(t-i-1) + I(\overline{u}(t-i-1))]\, \overline{s}(0) + \ldots + D(t)\overline{u}(t)\,.\end{aligned}$$

Поскольку входная последовательность $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(t)$ и реакция НБС на нее известны, то выписанные равенства можно представить так:

$$\begin{aligned}&[C(0) + J(\overline{u}(0))]\, \overline{s}(0) = \Phi_0(\overline{u}(0))\,, \\ &[C(1) + J(\overline{u}(1))]\, [A(0) + I(\overline{u}(0))]\, \overline{s}(0) = \Phi_1(\overline{u}(0), \overline{u}(1))\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[C(t) + J(\overline{u}(t))] \prod_{i=0}^{t-1} [A(t-i-1) + I(\overline{u}(t-i-1))]\, \overline{s}(0) = \Phi_t(\overline{u}(0), \ldots, \overline{u}(t))\,,\end{aligned}$$

где $\Phi_i(\overline{u}(0), \ldots, \overline{u}(i))$, $i = 0, 1, \ldots, t$, — некоторые значения из поля $GF(p)$. Выписанные равенства будем интерпретировать как системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $s_1(0), \ldots, s_n(0)$, являющихся координатами вектора-состояния $\overline{s}(0)$. Однозначность восстановления начального состояния $\overline{s}(0)$ по наблюдаемым реакциям $\overline{y}(0), \overline{y}(1), \ldots, \overline{y}(t)$ при известной входной последовательности $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(t)$ означает, что представленная система должна иметь единственное решение. Из [4] известно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы ранг этой системы был равен числу ее неизвестных. Отсюда и следует справедливость теоремы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как видно из изложенного, специфика НБС, во-первых, дает возможность получить легко проверяемые критерии существования рассматриваемых выше типов последовательностей для реализации соответствующих экспериментов и, во-вторых, предложить эффективные методы их построения, сводящиеся к решению систем линейных алгебраических уравнений.

Библиографический список

1. *Гилл А.* Введение в теорию конечных автоматов. М.: Наука, 1966.

2. *Сперанский Д.В.* Установочные и диагностические последовательности для линейных автоматов// Автоматика и телемеханика. 1997. №5. С. 133–141.

3. *Сперанский Д.В., Сперанский И.Д.* Эксперименты с билинейными дискретными системами// Автоматика и телемеханика. 2000. № 6. С. 176–189.

4. *Курош А.А.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1976.