МАТЕМАТИКА

УДК 519.4

О МНОГООБРАЗИЯХ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУГРУПП С ОПЕРАЦИЯМИ ЦИЛИНДРОФИКАЦИИ

Д.А. Бредихин

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: bredikhin@mail.ru

В работе находится конечный базис тождеств многообразий упорядоченных алгебр, порожденных упорядоченными полугруппами бинарных отношений с операциями цилиндрофикации.

Ключевые слова: многообразия, алгебры отношений, полугруппы, операции цилиндрофикации.

On Varieties of Partially Ordered Semigroups with Operations of Cylindrification

D.A. Bredikhin

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: bredikhin@mail.ru

The finite basis of identities of the varieties of the ordered algebras generated by partially ordered semigroups of binary relations with cylindrifications operations is found in this paper.

Key words: varieties, algebras of relations, semigroups, operations of cylindrification.

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

В творческом наследии В.В. Вагнера большое место занимают исследования, посвященные теории бинарных отношений [1]. Множество бинарных отношений Φ, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω), называемую алгеброй отношений. Всякая такая алгебра может быть рассмотрена как упорядоченная отношением теоретико-множественного включения $\subset$. Основы абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А. Тарского [2]. Одной из основных проблем в теории алгебр отношений традиционно является изучение их свойств, выраженных на языке тождеств [2–9].

Для заданного множества Ω операций над бинарными отношениями обозначим через $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$) класс алгебр (упорядоченных алгебр) отношений с операциями из Ω. Пусть $Var\{\Omega\}$ ($Var\{\Omega, \subset\}$) — многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$).

Нами будут рассмотрены операции умножения отношений $\circ$, объединения $\cup$ и играющие важную роль в алгебраической логике [3] операции цилиндрофикации ∇_1 и ∇_2. Для всякого бинарного отношения $\rho \subset X \times X$ положим $\nabla_1(\rho) = pr_1\rho \times X$, $\nabla_2(\rho) = X \times pr_2\rho$, где $pr_1\rho = \{x : (\exists\ y)(x, y) \in \rho\}$ и $pr_2\rho = \{y : (\exists\ x)(x, y) \in \rho\}$ — первая и вторая проекции отношения ρ соответственно.

В работе [9] был найден конечный базис тождеств для многообразий $Var\{\circ, \nabla_1\}$ и $Var\{\circ, \nabla_2\}$. Соответствующие результаты формулируются в теоремах 1 и 2.

Теорема 1. *Алгебра* $(A, \cdot, ^*)$ *типа* $(2, 1)$ *принадлежит многообразию* $Var\{\circ, \nabla_1\}$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим тождествам:*

© Д.А. Бредихин, 2009

$$1)\ (xy)z = x(yz), \qquad 2)\ (x^*)^* = x^*, \qquad 3)\ (x^*)^2 = x^*, \qquad 4)\ (xy)^* = xy^*,$$
$$5)\ xy^*x^* = xy^*, \qquad 6)\ x^*y^*z^* = x^*z^*y^*, \qquad 7)\ x^*y^*zy = x^*zy.$$

Теорема 2. *Алгебра* $(A, \cdot, ^*)$ *типа* $(2,1)$ *принадлежит многообразию* $Var\{\circ, \nabla_2\}$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам* 1)–3) *и тождествам*

$$4')\ (xy)^* = x^*y\ (4'), \qquad 5')\ x^*y^*x = y^*x, \qquad 6')\ x^*y^*z^* = y^*x^*z^*, \qquad 7')xyx^*z^* = xyz^*.$$

Под упорядоченной алгеброй мы понимаем алгебру с заданным на ней отношением порядка $\leq$, согласованным с операциями этой алгебры. Основными результатами работы являются следующие теоремы, в которых находятся базисы тождеств многообразий $Var\{\circ, \nabla_1, \subset\}$ и $Var\{\circ, \nabla_2, \subset\}$.

Теорема 3. *Упорядоченная алгебра* $(A, \cdot, ^*, \leq)$ *типа* $(2,1)$ *принадлежит многообразию* $Var\{\circ, \nabla_1, \subset\}$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам* 1)–7) *и тождествам*

$$8)\ x \leq x^*, \qquad 9)\ x \leq x^*x, \qquad 10)\ x^*y \leq x^*.$$

Теорема 4. *Упорядоченная алгебра* $(A, \cdot, ^*, \leq)$ *типа* $(2,1)$ *принадлежит многообразию* $Var\{\circ, \nabla_2, \subset\}$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам* 1)–3), 4′)–7′), 8) *и тождествам*

$$9')\ x \leq xx^*, \qquad 10')\ xy^* \leq y^*.$$

Следствие 1. *Алгебра* $(A, \cdot, +, ^*)$ *типа* $(2,2,1)$ *принадлежит многообразию* $Var\{\circ, \cup, \nabla\}$ *тогда и только тогда, когда* $(A, +)$ — *полурешетка, выполняются тождества* 1)–7) *и тождества*

$$11)\ x + x^* = x^*, \qquad 12)\ x + x^*x = x^*x, \qquad 13)\ x^*y + x^* = x^*,$$
$$14)\ (x+y)z = xz + yz, \qquad 15)\ x(y+z) = xy + xz, \qquad 16)\ (x+y)^* = x^* + y^*.$$

Следствие 2. *Алгебра* $(A, \cdot, +, ^*)$ *типа* $(2,2,1)$ *принадлежит многообразию* $Var\{\circ, \cup, \nabla_2\}$ *тогда и только тогда, когда* $(A, +)$ — *полурешетка, выполняются тождества* 1)–3), 4′)–7′), 11), 14)–16) *и тождества*

$$12')\ x + xx^* = xx^*, \qquad 13')\ xy^* + y^* = y^*.$$

Докажем теорему 3 (теорема 4 доказывается аналогично).

Доказательство. Разобьем доказательство на ряд последовательных шагов.

Шаг 1. Доказательство теоремы основывается на результатах работ [5, 7]. Приведем ряд определений и обозначений, используемых в дальнейшем изложении.

Пусть $Rel(U)$ — множество всех бинарных отношений на U. Всякая формула $\varphi(z_0, z_1, r_1, \ldots, r_m)$ логики предикатов первого порядка с равенством, содержащая m бинарных предикатных символов $r_1, \ldots, r_m$ и две свободные индивидуальные переменные z_0, z_1, определяет m-арную операцию F_φ на $Rel(U)$:

$$F_\varphi(R_1, \ldots, R_m) = \{(x, y) \in U \times U : \varphi(x, y, R_1, \ldots, R_m)\},$$

где $\varphi(x, y, R_1, \ldots, R_m)$ означает, что формула φ выполняется, если z_0, z_1 интерпретируются как x, y и $r_1, \ldots, r_m$ интерпретируются как отношения $R_1, \ldots, R_m$ из $Rel(U)$.

Операция над бинарными отношениями называется *примитивно-позитивной* [10] (в другой терминологии — *диофантовой* [7]), если она может быть определена формулой, содержащей в своей записи лишь кванторы существования и операцию конъюнкции. Примитивно-позитивные операции могут быть описаны с помощью графов [10].

Обозначим через N множество всех натуральных чисел. Помеченным графом назовем пару $G = (V,\ E)$, где $V = V(G)$ — конечное множество, называемое множеством вершин, и $E = E(G) \subset \subset V \times N \times V$ — тернарное отношение. Тройку $(u, k, v) \in E$ будем называть ребром графа, идущим из вершины u в вершину v, помеченным меткой k, и графически изображать следующим образом: $u\cdot \xrightarrow{k} \cdot v$.

Под двухполюсником мы понимаем помеченный граф с парой выделенных вершин, т. е. систему вида $G = (V, E, in, out)$, где (V, E) — помеченный граф; $in = in(G)$ и $out = out(G)$ — две выделенные вершины (необязательно различные), называемые входом и выходом двухполюсника соответственно.

Понятие изоморфизма помеченных графов и двухполюсников определяется естественным образом. В дальнейшем все графы будут рассматриваться с точностью до изоморфизма.

Пусть $F = F_\varphi$ — примитивно-позитивная операция, задаваемая формулой φ. С этой операцией может быть ассоциирован граф $G = G(F) = G(\varphi)$, определяемый следующим образом: $V(G)$ — множество всех индексов индивидуальных переменных, входящих в формулу φ, $in(G) = 0$, $out(G) = 1$, $(i, k, j) \in E(G)$ тогда и только тогда, когда атомарная формула $r_k(z_i, z_j)$ входит в φ; если формула $z_i = z_j$ входит в φ, то вершины i и j отождествляются.

Заметим, что графы, соответствующие операции умножения отношений $\circ$ и операциям цилиндрофикации ∇_1, ∇_2, задаются следующим образом:

$$in\cdot \xrightarrow{1} \cdot \xrightarrow{2} \cdot out, \qquad in\cdot \xrightarrow{1} \cdot \quad \cdot\, out, \qquad in\, \cdot \quad \cdot \xrightarrow{1} \cdot out.$$

Пусть $G = (V, E, in, out)$ и $G_k = (V_k, E_k, in_k, out_k)$ $(k = 1, \ldots, m)$ — двухполюсники с попарно непересекающимися множествами вершин. Назовем композицией этих двухполюсников новый двухполюсник $G(G_1, \ldots, G_m)$, определяемый следующим образом [10]: возьмем двухполюсник G и заменим каждое его ребро $(u, k, v) \in E$ на двухполюсник G_k, отождествляя при этом вершину in_k с вершиной u и вершину out_k с вершиной v.

Рассмотрим множество примитивно-позитивных операций над отношениями $\Omega = \{F_{\varphi_1}, \ldots, F_{\varphi_n}\}$, и пусть $A = (A, f_1, \ldots, f_n)$ — универсальная алгебра соответствующего типа. Положим $G_1 = G(\varphi_1), \ \ldots, \ G_n = G(\varphi_n)$.

Для всякого терма p алгебры A определим следующим индуктивным образом двухполюсник $G(p) = (V_p, E_p, in(p), out(p))$:

1) если $p = x_k$, то $G(p)$ представляет собой двухполюсник вида $in\cdot \xrightarrow{k} \cdot out$;

2) если $p = f_k(p_1, \ldots, p_m)$, то $G(p)$ есть композиция $G_k(G(p_1), \ldots, G(p_m))$.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1, in_1, out_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2, in_2, out_2)$ — двухполюсники. Отображение $f : V_2 \to V_1$ называется гомоморфизмом из G_2 в G_1, если $f(in_2) = in_1$, $f(out_2) = out_1$ и $(f(u), k, f(v)) \in E_1$ для всякой тройки $(u, k, v) \in E_2$. Мы будем писать $G_1 \prec G_2$, если существует гомоморфизм из G_2 в G_1.

Обозначим через $Eq\{\Omega, \subset\}$ эквациональную теорию класса $R\{\Omega, \subset\}$. Теперь мы готовы сформулировать основной результат из [5]:

Тождество $p \le q$ принадлежит эквациональной теории $Eq\{\Omega, \subset\}$ тогда и только тогда, когда $G(p) \prec G(q)$.

Шаг 2. Обозначим через Σ эквациональную теорию алгебр, удовлетворяющих тождествам 1)–10), и пусть Ξ — множество всех термов алгебры $(A, \cdot, ^*)$ типа $(2, 1)$. Для всякого терма p_1 и p_2 из Ξ будем писать $p_1 \prec p_2$ $(p_1 \cong p_2)$, если тождество $p_1 \le p_2$ $(p_1 = p_2)$ принадлежит Σ. В том случае, когда эквивалентность термов устанавливается с помощью тождества с номером k), будем использовать запись $p_1 \overset{k}{\prec} p_2$ $(p_1 \overset{k}{\cong} p_2)$.

Пусть Λ — множество слов над алфавитом $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, $\odot$ — пустое слово, $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \{\odot\}$.

Лемма 1. *Для любого терма $p \in \Xi$ существуют такие $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \tilde{\Lambda}$ $(n \ge 0)$, что $p \cong (\alpha_1)^* \ldots (\alpha_n)^* \alpha_0$.*

Доказательство леммы 1 содержится в работе [9].

Лемма 2. *Следующие тождества принадлежат Σ*

$$17)\ (\alpha\beta)^* \le \alpha^*, \qquad 18)\ \alpha^*(\beta\gamma)^* \le \alpha^*\gamma^*.$$

Доказательство. Действительно, $(\alpha\beta)^* \overset{4}{\prec} \alpha\beta^* \overset{8}{\prec} \alpha^*\beta^* \overset{10}{\prec} \alpha^*$ и $\alpha^*(\beta\gamma)^* \overset{4}{\prec} \alpha^*\beta\gamma^* \overset{10}{\prec} \alpha^*\gamma^*$. Лемма доказана.

Шаг 3. Согласно определению графы $G(p) = (V_p, E_p, in(p), out(p))$ для $p \in \Xi$ могут быть построены следующим образом.

Если $p = \alpha = \odot$, то положим по определению $V_p = V_\alpha = \{v_0\}$, $E_p = E_\alpha = \emptyset$, и $in(p) = in(\alpha) = out(p) = out(\alpha) = v_0$.

Пусть $p = \alpha = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n} \in \Lambda$. Тогда $V_p = V_\alpha = \{v_0, \dots, v_n\}$, $E_p = E_\alpha = \{(v_{k-1}, i_k, v_k) : k \in [1, n]\}$, и $in(p) = in(\alpha) = v_0$, $out(p) = out(\alpha) = v_n$:

$$in(\alpha) = v_0 \cdot \xrightarrow{i_1} \cdot \xrightarrow{i_2} \cdot \dots \cdot \xrightarrow{i_n} \cdot v_n = out(\alpha).$$

Пусть $p = (\alpha)^*$. Тогда $V_p = V_{\alpha^*} = V_\alpha \cup \{v_{n+1}\}$, $E_p = E_{\alpha^*} = E_\alpha$, и $in(p) = in(\alpha^*) = in(\alpha) = v_0$, $out(p) = out(\alpha^*) = v_{n+1}$:

$$in(\alpha^*) = v_0 \cdot \xrightarrow{i_1} \cdot \xrightarrow{i_2} \cdot \dots \cdot \xrightarrow{i_n} \cdot \ \cdot v_{n+1} = out(\alpha^*).$$

Пусть $p = (\alpha_1)^*(\alpha_2)^* \dots, (\alpha_n)^*\alpha_0$ и $n > 1$. Будем предполагать, что множества $V_{\alpha_1^*}, \dots, V_{\alpha_n^*}, V_{\alpha_0}$ попарно не пересекаются. Возьмем в качестве V_p объединение этих множеств, в котором отождествлены следующие вершины: $out(\alpha_1)$ и $in(\alpha_2)$, $out(\alpha_2)$ и $in(\alpha_3)$, ... , $out(\alpha_n)$ и $in(\alpha_0)$. Положим $E_p = E_{\alpha_1} \cup \dots \cup E_{\alpha_n} \cup E_{\alpha_0}$, и $in(p) = in(\alpha_1)$, $out(p) = out(\alpha_0)$.

Лемма 3. *Пусть $\alpha, \beta \in \tilde{\Lambda}$ и существует такое отображение f из V_β в V_α, что $(f(u), k, f(v)) \in E_\alpha$ для всякого $(u, k, v) \in E_\beta$. Тогда найдутся такие $\beta_1, \beta_2 \in \tilde{\Lambda}$, что $\alpha = \beta_1\beta\beta_2$. При этом $\beta_1 = \odot$, если $f(in(\beta)) = in(\alpha)$, и $\beta_2 = \odot$, если $f(in(\beta)) = in(\alpha)$.*

Доказательство. Пусть $\alpha = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$, $\beta = x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_m}$ и $V_\alpha = \{v_0, \dots, v_n\}$, $V_\beta = \{v'_0, \dots, v'_m\}$. Предположим, что $f(v'_0) = v_l$. Тогда $f(v'_k) = v_t$ и $x_{j_k} = x_{i_t}$, где $t = l + k$. Следовательно, достаточно положить $\beta_1 = x_{i_1}\dots x_{i_s}$ (или $\beta_1 = \odot$, если $l = 1$, т. е. $f(in(\beta)) = in(\alpha)$) и $\beta_2 = x_{i_w}\dots x_{i_n}$ (или $\beta_2 = \odot$, если $l + m = n$, т. е. $f(in(\beta)) = in(\alpha)$), где $s = l$ и $w = l + m + 1$. Лемма доказана.

Шаг 4. Легко проверить выполнимость тождеств 8)–10). Откуда следует, что $\Sigma \subset Eq\{\circ, \nabla_1\}$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что $Eq\{\circ, \nabla_1\} \subset \Sigma$.

Предположим, что тождество $p_1 \le p_2$ принадлежит $Eq\{\circ, \nabla_1, \subset\}$. Тогда согласно сформулированному выше результату из работы [5] имеем $G(p_1) \prec G(p_2)$, т. е. существует гомоморфизм f из $G(p_2)$ в $G(p_1)$. Согласно лемме 1 можно предположить, что $p_1 = (\alpha_1)^* \dots (\alpha_n)^*\alpha_0$ и $p_2 = (\beta_1)^* \dots (\beta_m)^*\beta_0$.

Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. $m = n = 0$. Тогда согласно лемме 3 имеем $p_1 = \alpha_0 = \beta_0 = p_2$.

2. $n = 0$, $m > 0$ и $\beta_0 = \odot$. Тогда по лемме 3 имеем $\alpha_0 = \beta_1\lambda_1$ и $\alpha_0 = \mu_k\beta_k\lambda_k$ для $k = 2, \dots m$, откуда

$$p_1 = \alpha_0 \overset{8}{\prec} \alpha_1^* \overset{3}{\prec} \alpha_0^* \dots \alpha_0^* = (\beta_1\lambda_1)^*(\mu_2\beta_2\lambda_2)^* \dots (\mu_m\beta_m\lambda_m)^* \overset{17}{\prec}$$
$$\prec \beta_1^*(\mu_2\beta_k)^* \dots (\mu_m\beta_m)^* \overset{18}{\prec} \beta_1^*\beta_2^* \dots \beta_m^* = p_2.$$

3. $n = 0$, $m > 0$ и $\beta_0 \ne \odot$. Тогда по лемме 3 имеем $\alpha_0 = \mu_0\beta_0$, $\alpha_0 = \beta_1\lambda_1$ и $\alpha_0 = \mu_k\beta_k\lambda_k$ для $k = 2, \dots m$, откуда

$$p_1 = \alpha_0 \overset{9}{\prec} \alpha_1^*\alpha_0 \overset{3}{\prec} \alpha_0^* \dots \alpha_0^*\alpha_0 = (\beta_1\lambda_1)^*(\mu_2\beta_2\lambda_2)^* \dots (\mu_m\beta_m\lambda_m)^*\mu_0\beta_0 \overset{17}{\prec}$$
$$\prec \beta_1^*(\mu_2\beta_k)^* \dots (\mu_m\beta_m)^*\mu_0\beta_0 \overset{18}{\prec} \beta_1^*\beta_2^* \dots \beta_m^*\mu_0\beta_0 \overset{10}{\prec} \beta_1^*\beta_2^* \dots \beta_m^*\beta_0 = p_2.$$

4. $n > 0$, $m > 0$ и $\beta_0 = \odot$. Тогда, учитывая, что компонента связанности графа $G(p_2)$ отображается в некоторую компоненту связанности графа $G(p_1)$, по лемме 3 получаем $\alpha_1 = \beta_1\lambda_1$ и $\alpha_{g(k)} = \mu_k\beta_k\lambda_k$ для $k = 2, \dots m$, где g — функция, отображающая множество $\{2, \dots, m\}$ во множество $\{0, \dots, n\}$. Следовательно,

$$p_1 = \alpha_1^* \dots \alpha_n^*\alpha_0 \overset{3}{\prec} \alpha_1^*\alpha_1^* \dots \alpha_n^*\alpha_0 \overset{6,10}{\prec} \alpha_1^*\alpha_{g(2)}^* \dots \alpha_{g(m)}^* =$$
$$= (\beta_1\lambda_1)^*(\mu_2\beta_2\lambda_2)^* \dots (\mu_m\beta_m\lambda_m)^* \overset{17}{\prec} \beta_1^*(\mu_2\beta_k)^* \dots (\mu_m\beta_m)^* \overset{18}{\prec} \beta_1^*\beta_2^* \dots \beta_m^* = p_2.$$

5. $n > 0$, $m > 0$ и $\beta_0 \ne \odot$. Так как $\beta_0 \ne \odot$, существует ребро в $G(p_2)$, входящее в вершину $out(p_2)$. Значит существует ребро в $G(p_1)$, входящее в вершину $f(out(p_2)) = out(p_1)$, откуда $\alpha_0 \ne \odot$. Далее, учитывая, что компонента связанности графа $G(p_2)$ отображается в некоторую компоненту связанности графа $G(p_1)$, по лемме 3 получаем $\alpha_1 = \beta_1\lambda_1$, $\alpha_0 = \mu_0\beta_0$ и $\alpha_{g(k)} = \mu_k\beta_k\lambda_k$ для $k = 2, \dots m$,

где g — функция, отображающая множество $\{2,\dots,m\}$ во множество $\{0,\dots,n\}$. Поэтому

$$p_1 = \alpha_1^*\dots\alpha_n^*\alpha_0 \overset{3}{\prec} \alpha_1^*\alpha_1^*\dots\alpha_n^*\alpha_0 \overset{7}{\prec} \alpha_1^*\alpha_0^*\alpha_1^*\dots\alpha_n^*\alpha_0 \overset{6,10}{\prec}$$

$$\prec \alpha_1^*\alpha_{g(2)}^*\dots\alpha_{g(m)}^*\alpha_0 = (\beta_1\lambda_1)^*(\mu_2\beta_2\lambda_2)^*\dots(\mu_m\beta_m\lambda_m)^*\mu_0\beta_0 \overset{17}{\prec}$$

$$\prec \beta_1^*(\mu_2\beta_k)^*\dots(\mu_m\beta_m)^*\mu_0\beta_0 \overset{18}{\prec} \beta_1^*\beta_2^*\dots\beta_m^*\mu_0\beta_0 \overset{10}{\prec} \beta_1^*\beta_2^*\dots\beta_m^*\beta_0 = p_2.$$

Таким образом, тождество $p_1 \le p_2$ принадлежит Σ, т. е. $Eq\{\circ,\nabla_1\} \subset \Sigma$. Теорема доказана.

Следствия 1, 2 непосредственно вытекают из теорем 1, 2 и следствия 2 работы [5].

Библиографический список

1. *Вагнер В.В.* Теория отношений и алгебра частичных преобразований // Теория полугрупп и ее приложения. Саратов, 1965. Вып. 1. С. 3–197.

2. *Tarski A. On the calculus of relations* // J. Symbolic Logic. 1941. V. 6. P. 73-89.

3. *Henkin L., Monk J.D., Tarski A.* Cylindric Algebras. North-Holland, Amsterdam, 1971. 311 p.

4. *Schein B.M.* Relation algebras and function semigroups // Semigroup Forum. 1970. V. 1. P. 1–62.

5. *Бредихин Д.А.* Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Математика. 1993. № 3. С. 23–30.

6. *Andreka H., Bredikhin D.A.* The equational theory of union-free algebras of relations // Alg. Univers. 1994. V. 33. P. 12–25.

7. *Бредихин Д.А.* О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сибирск. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29–41.

8. *Бредихин Д.А.* Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. АН. 1998. Т. 360. С. 594–595.

9. *Bredikhin D.A.* On varieties of semi-groups of relations with operations of cylindrofication // Contributions to General Algebra. 2005. V. 16. P. 1–6.

10. *Böner F, Pöschel F.R.* Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. 1991. V. 7. P. 50–70.

УДК 517.518

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ ПРОСТЫХ И ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

С.С. Волосивец

Саратовский государственный университет,
кафедра теории функций и приближений
E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

Устанавливаются двумерные аналоги известных условий Зигмунда и Саса для абсолютной сходимости рядов Фурье – Виленкина. Также доказывается, что двумерное условие Саса является неулучшаемым в определенном смысле.

Ключевые слова: абсолютная сходимость, ряды Фурье – Виленкина, модуль непрерывности, функции ограниченной p-флуктуации.

Absolute Convergence of Single and Double Fourier Series on Multiplicative Systems

S.S. Volosivets

Saratov State University,
Chair of Theory of Functions and Approximations
E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

Two-dimensional analogs of famous Zygmund and Szasz tests for absolute convergence of Fourier – Vilenkin series are established. Also it is proved that two-dimensional Szasz test is the best possible in the certain sense.

Key words: absolute convergence, Fourier – Vilenkin series, modulus of continuity, functions of bounded p-fluctuation.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{P}=\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \le p_j \le N$ при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_j = \{0,1,\dots,p_j-1\}$. По определению полагаем $m_0 = 1$, $m_n = p_1\dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое число $x \in [0,1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \qquad x_j \in \mathbb{Z}_j. \tag{1}$$

© С.С. Волосивец, 2009

Это разложение определяется однозначно, если при $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, $k \in \mathbb{Z}$, брать разложение с конечным числом ненулевых x_j. Если $y \in [0,1)$ записано в виде $y = \sum\limits_{j=1}^{\infty} y_j m_j^{-1}$, $y_j \in \mathbb{Z}_j$, то по определению $x \oplus y = z = \sum\limits_{j=1}^{\infty} z_j m_j^{-1}$, $z_j \in \mathbb{Z}_j$, где $z_j = x_j + y_j (\operatorname{mod} p_j)$. Аналогично определяется операция $x \ominus y$, которая является обратной к операции $x \oplus y$.

Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ однозначно представимо в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}, \qquad k_j \in \mathbb{Z}_j. \tag{2}$$

Для чисел $x \in [0,1)$ вида (1) и $k \in \mathbb{Z}_+$ вида (2) положим по определению

$$\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j\right)\right).$$

Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирована и полна в $L[0,1)$ [1, гл. 1, § 1.5]. Из определения почти сразу следует, что при $k < m_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, функции $\chi_k(x)$ постоянны на $I_i^n = [i/m_n, (i+1)/m_n)$, $i = 0, 1, \ldots m_n - 1$. Также известно, что при фиксированном $y \in [0,1)$ для почти всех $x \in [0,1)$ верно $\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $f(x)$ ограничена на $[0,1)$ и $\operatorname{osc}(f, I_i^n) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in I_i^n\}$. Тогда p-флуктуация функции f задается формулой

$$\mathcal{F}l_p(f) = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \left(\sum_{i=0}^{m_n - 1} \operatorname{osc}^p(f, I_i^n)\right)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty.$$

Для $f \in L[0,1)$ коэффициенты Фурье задаются формулой $\hat{f}(i) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_i(t)}\,dt$, $i \in \mathbb{Z}_+$. Как обычно пространство $L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, снабжено нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$. Если $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1)} |f(x)|$, то пространство $C^*[0,1)$ $\mathbf{P}$-непрерывных функций, состоящее из измеримых ограниченных функций f со свойством $\lim\limits_{h \to 0} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_\infty = 0$, полно относительно этой нормы. Пусть $\mathcal{P}_n = \{f \in L[0,1) : \hat{f}(i) = 0, i \ge n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Определим наилучшее приближение и модуль непрерывности для $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, или $f \in C^*[0,1)$:

$$E_n(f)_p = \inf\{\|f - Q\|_p : Q \in \mathcal{P}_n\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$\omega_n(f)_p = \sup_{h \in [0, 1/m_n)} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_p, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Известно, что эти величины связаны неравенством А.В. Ефимова [1, § 10.5]:

$$2^{-1}\omega_n(f)_p \le E_{m_n}(f)_p \le \omega_n(f)_p. \tag{3}$$

Система $\{\chi_i(x)\chi_j(y)\}_{i,j=0}^{\infty}$ также ортонормирована и полна в $L[0,1)^2$, что позволяет определить для $f \in L[0,1)^2$ коэффициенты Фурье

$$\hat{f}(i,j) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\overline{\chi_i(x)\chi_j(y)}\,dx\,dy, \qquad i, j \in \mathbb{Z}_+,$$

и частичную сумму Фурье

$$S_{mn}(f)(x,y) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{f}(i,j)\chi_i(x)\chi_j(y), \qquad m, n \in \mathbb{N}.$$

Пространство $L^p[0,1)^2$ снабжено нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^1 \int_0^1 |f(x,y)|^p\,dx\,dy\right)^{1/p}$, а $C^*[0,1)^2$ состоит из измеримых ограниченных функций f со свойством $\lim\limits_{(h,k) \to (0,0)} \|f(x \oplus h, y \oplus k) - f(x,y)\|_\infty = 0$,

где $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x,y\in[0,1)^2} |f(x,y)|$. Пространство $C^*[0,1)^2$ полно относительно этой нормы. Для $f \in L^p[0,1)^2$, $1 \le p < \infty$, также верно, что $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \|f(x\oplus h, y\oplus k) - f(x,y)\|_p = 0$. Пусть $\Delta_{uv}f(x,y) = f(x\oplus u, y\oplus v) - f(x\oplus u, y) - f(x, y\oplus v) + f(x,y)$. Ясно, что из условия $f \in L^p[0,1)^2$ следует, что $\|\Delta_{uv}f(x,y)\|_p \to 0$ при $u,v \to 0$ и такое же свойство верно для $C^*[0,1)^2$. Поэтому мы можем ввести два модуля непрерывности

$$\omega_{kl}(f)_p = \sup\{\|f(x\oplus u, y\oplus v) - f(x,y)\|_p : u \in I_0^k, v \in I_0^l\}, \quad 1 \le p < \infty, \quad k,l \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\omega^*_{kl}(f)_p = \sup\{\|\Delta_{uv}f(x,y)\|_p : u \in I_0^k, v \in I_0^l\}, \quad 1 \le p < \infty, \quad k,l \in \mathbb{Z}_+.$$

Ясно, что $\omega^*_{kl}(f)_p \le 2\omega_{kl}(f)_p$. Если $\mathcal{P}_{mn} = \{f \in L^1[0,1)^2 : \hat{f}(i,j) = 0 \text{ при } i \ge m \text{ или } j \ge n\}$, то $E_{mn}(f)_p = \inf\{\|f - Q\|_p : Q \in \mathcal{P}_{mn}\}$, $m,n \in \mathbb{N}$. По поводу аналога неравенства А.В. Ефимова см. [2] и лемму 2.

Пусть $I_{ij}^{kl} = I_i^k \times I_j^l$, $k,l \in \mathbb{Z}_+$, $i = 0,1,\dots,m_k - 1$, $j = 0,1,\dots,m_l - 1$, и $\operatorname{osc}(f, I_{ij}^{kl}) = \sup\{|\Delta_{uv}f(x,y)| : x,y \in I_{ij}^{kl}, u,v \in I_{00}^{kl}\}$. По определению p-флуктуацией функции $f(x,y)$ называется

$$\mathcal{F}l_p^{(2)}(f) = \sup_{k,l\in\mathbb{Z}_+} \left(\sum_{i=0}^{m_k-1} \sum_{j=0}^{m_l-1} \operatorname{osc}^p(f, I_{ij}^{kl}) \right)^{1/p}.$$

Целью настоящей работы является получение двумерных аналогов классических условий абсолютной сходимости А. Зигмунда [3, гл. 6, теорема (3.6)] и О. Саса [4, теорема 3.6]. В условии Зигмунда присутствовали ограниченная вариация и равномерный модуль непрерывности, у нас же будут использоваться ограниченная p-флуктуация и интегральные модули в соответствующем пространстве.

Аналоги большинства классических результатов об абсолютной сходимости для мультипликативных систем можно найти в монографии [5, гл. 4, § 2]. Двумерные аналоги теоремы Зигмунда для системы Уолша ($\{\chi_i\}_{i=0}^\infty$ при $p_i \equiv 2$), использующие ограниченную вариацию по Витали и Харди, а также равномерный модуль непрерывности, принадлежит И.А. Схиртладзе [6]. В другой работе [7] им же были даны аналоги результатов О. Саса с использованием конструкции, близкой к $\omega^*_{kl}(f)$. В работе Дж. Татеока [8] в числе прочих результатов был доказан двумерный аналог классической теоремы Стечкина об абсолютной сходимости (одномерный аналог см. в работе [5, гл. 4, теорема 4.8]). Следуя [8] мы будем использовать при получении аналога теоремы О. Саса неравенства типа А.В. Ефимова (см. лемму 2).

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1 ([1, гл. 1, § 1.5]). *Пусть* $D_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $D_{m_n}(x) = m_n X_{[0,1/m_n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *где* X_E *— индикатор множества* E. *В качестве следствия получаем, что* $\|D_{m_k}(x)\|_p = m_k^{1-1/p}$ *и* $\|D_{m_k}(x)D_{m_l}(y)\|_p = m_k^{1-1/p} m_l^{1-1/p}$, $k,l \in \mathbb{Z}_+$.

При $p_i \equiv 2$ неравенство (4) леммы 1 доказано Ф. Морицем [2].

Лемма 2. *Пусть* $f \in L^p[0,1)^2$, $1 \le p < \infty$, *или* $f \in C^*[0,1)^2$. *Тогда при* $k,l \in \mathbb{Z}_+$ *справедливы неравенства*

$$2^{-1}\omega_{kl}(f)_p \le E_{m_k,m_l}(f)_p \le \|f - S_{m_k,m_l}(f)\|_p \le \omega_{kl}(f)_p, \tag{4}$$

$$\omega^*_{kl}(f)_p \le 4E_{m_k,m_l}(f)_p. \tag{5}$$

Доказательство. Как легко видеть,

$$S_{m_k,m_l}(f)(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 f(x\ominus u, y\ominus v) D_{m_k}(u) D_{m_l}(v)\, du\, dv.$$

В силу леммы 1 и обобщенного неравенства Минковского получаем

$$\|S_{m_k,m_l}(f) - f\|_p \le \int_0^1 \int_0^1 \|f(x\ominus u, y\ominus v) - f(x,y)\|_p D_{m_k}(u) D_{m_l}(v)\, du\, dv =$$

$$= m_k m_l \int_0^{1/m_k} \int_0^{1/m_l} \|f(x \ominus u, y \ominus v) - f(x,y)\|_p \, du \, dv \le \omega_{kl}(f)_p. \qquad (6)$$

Из (6) следует правое неравенство (4). С другой стороны, если $Q \in \mathcal{P}_{m_k,m_l}$ таков, что $\|f - Q\|_p = E_{m_k,m_l}(f)_p$, то при $(u,v) \in I_{00}^{kl}$ имеем $Q(x \oplus u, y \oplus v) = Q(x \oplus u, y) = Q(x, y \oplus v) = Q(x,y)$ и, как следствие,

$$\|\Delta_{uv} f(x,y)\|_p = \|\Delta_{uv}(f - Q)(x,y)\|_p \le 4\|f - Q\|_p.$$

Отсюда следует (5). Здесь использована инвариантность интеграла относительно $\mathbf{P}$-ичного сдвига (см. [1, § 2.1] при $p_i \equiv 2$). Левое неравенство (4) доказывается аналогично (5). Лемма доказана.

Для формулировки следующей леммы напомним некоторые определения.

Пусть $A_n^\alpha = (\alpha+1)\cdots(\alpha+n)/n!$, $n \in \mathbb{N}$, $A_0^\alpha = 1$, $\alpha > -1$. Для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ определим $\sigma_n^\alpha = \sum\limits_{i=0}^{n} (A_n^\alpha)^{-1} A_{n-i}^\alpha a_i$. Пусть теперь для двойного ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{mn}$ имеет место равенство

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} S_{m,n}^{\alpha,\beta} x^m y^n = (1-x)^{-\alpha-1}(1-y)^{-\beta-1} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n.$$

Тогда $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = (A_m^\alpha A_n^\beta)^{-1} S_{m,n}^{\alpha,\beta}$. Ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{mn}$ называется $|C,\alpha,\beta|$-суммируемым, если

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} - \sigma_{m,n-1}^{\alpha,\beta} - \sigma_{m-1,n}^{\alpha,\beta} + \sigma_{m-1,n-1}^{\alpha,\beta}| < \infty,$$

$\sum\limits_{m=1}^{\infty} |\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} - \sigma_{m-1,n}^{\alpha,\beta}| < \infty$ при фиксированном $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} - \sigma_{m,n-1}^{\alpha,\beta}| < \infty$ при фиксированном $m \in \mathbb{Z}_+$. Соответственно ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем $|C,\alpha|$, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha| < \infty$.

Лемма 3. 1) *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *сходится, тогда ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (A_n^\alpha)^{-1} a_n$ *суммируем* $|C,-\alpha|$ *при* $0 < \alpha < 1$.

2) *Пусть* $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_{mn}| < \infty$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} (A_m^\alpha A_n^\beta)^{-1} a_{mn}$ *суммируем* $|C,-\alpha,-\beta|$, *где* $0 < \alpha, \beta < 1$.

Доказательство утверждения 1) содержится в работе [9], утверждения 2) — в работе [10, § 3, теорема 4].

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le r < 2p$, $1/p + 1/q = 1$, $0 < \beta < 2$, $\gamma + 1 - \beta/2 - \beta/2p > 0$. *Если* $\mathcal{F}l_r(f) < \infty$ *и сходится ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} m_n^{\gamma+1-\beta/2-\beta/2p} (\omega_n(f)_{r+(2-r)q})^{\beta-\beta r/2p}$, *то* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (i+1)^\gamma |\hat{f}(i)|^\beta < \infty$.

Доказательство. Аналогично [11] запишем согласно равенству Парсеваля:

$$\|f(x \oplus m_{k+1}^{-1}) - f(x)\|_2^2 = \sum_{i=m_k}^{\infty} |\hat{f}(i)|^2 |\chi_i(m_{k+1}^{-1}) - 1|^2$$

и отметим, что при $i \in [m_k, m_{k+1})$ верно неравенство $|\chi_i(m_{k+1}^{-1}) - 1|^2 \ge 2 - 2\operatorname{Re}\chi_i(m_{k+1}^{-1}) \ge 4\sin^2(\pi/N)$, где $p_{k+1} \le N$. Поэтому, записывая $2 = r/p + ((2-r)q + r)/q$ и применяя интегральное неравенство Гельдера с показателями p и q, получаем

$$\left(\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1} |\hat{f}(i)|^2\right)^p \le C_1(N)\|f(x \oplus m_{k+1}^{-1}) - f(x)\|_2^{2p} \le$$

$$\le C_1 m_k^{-1} \sum_{j=0}^{m_k-1} \left(\int_0^1 |f(x \oplus (jp_{k+1}+1)m_{k+1}^{-1}) - f(x \oplus jm_k^{-1})|^2 \, dx\right)^p \le$$

$$\le C_1 m_k^{-1} \sum_{j=0}^{m_k-1} \int_0^1 |f(x \oplus (jp_{k+1}+1)m_{k+1}^{-1}) - f(x \oplus jm_k^{-1})|^r \, dx \times$$

$$\times\left(\int_0^1 |f(x\oplus(jp_{k+1}+1)m_{k+1}^{-1})-f(x\oplus jm_k^{-1})|^{r+(2-r)q}\,dx\right)^{p-1}\le C_1 m_k^{-1}(\mathcal{F}l_r(f))^r\omega_k^{2p-r}(f)_{r_1},$$

где $r_1=r+(2-r)q$. Здесь в силу равенства $q=p/(p-1)$ имеем $(r+(2-r)q)(p-1)=rp-r+2p-$ $-pr=2p-r$. Таким образом,

$$\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1}|\hat f(i)|^2\le C_2(f)m_k^{-1/p}\omega_k^{2-r/p}(f)_{r_1}.$$

Используя полученную оценку, находим, что

$$\sum_{i=1}^{\infty}(i+1)^\gamma|\hat f(i)|^\beta\le C_3(N)\sum_{k=0}^{\infty}m_k^\gamma\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1}|\hat f(i)|^\beta\le$$

$$\le C_4(N)\sum_{k=0}^{\infty}m_k^\gamma\left(\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1}|\hat f(i)|^2\right)^{\beta/2}m_k^{1-\beta/2}\le C_5(f,N)\sum_{k=0}^{\infty}m_k^{\gamma+1-\beta/2-\beta/2p}(\omega_k(f)_{r_1})^{\beta-\beta r/2p}.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Для тригонометрической системы и функций ограниченной r-вариации при $\gamma=0$, $\beta=1$ аналогичный результат был получен М. Изуми и Ш. Изуми [12].

Следствие 1. *Пусть γ,p,r,β такие же, как в теореме 1, $r_1=r+(2-r)q$, $\mathcal{F}l_r(f)<\infty$. Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{\gamma-\beta/2-\beta/2p}(E_k(f)_{r_1})^{\beta-\beta r/2p}$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(i+1)^\gamma|\hat f(i)|^\beta$.*

Для доказательства следствия 1 используется неравенство (3) и убывание $E_k(f)_{r_1}$.

Следствие 2. 1) *Если $\mathcal{F}l_2(f)<\infty$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{-3/4}E_k^{1/2}(f)_2<\infty$, то $\sum\limits_{i=0}^{\infty}|\hat f(i)|<\infty$.*

2) *Если $\mathcal{F}l_3(f)<\infty$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{-3/4}E_k^{1/4}(f)_1<\infty$, то $\sum\limits_{i=0}^{\infty}|\hat f(i)|<\infty$.*

Для доказательства в случае 1) надо положить $\beta=1$, $r=p=q=2$, а в случае 2) — $\beta=1$, $r=3$, $p=q=2$.

Следствие 3. *Пусть $1<p<\infty$, $1\le r<2p$, $1/p+1/q=1$, $0<\beta<2$, $\gamma+\alpha>\beta/2+\beta/2p-1$, $0<\alpha<1$. Если $\mathcal{F}l_r(f)<\infty$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{\alpha+\gamma-\beta/2-\beta/2p}(E_k(f)_{r_1})^{\beta-\beta r/2p}$ сходится, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}i^\gamma|\hat f(i)|^\beta$ суммируем $|C,-\alpha|$.*

Доказательство. Как известно [3, гл. 3, § 1], при $\alpha>-1$ и $n\in\mathbb{N}$ имеет место соотношение $0<C_1n^\alpha\le A_n^\alpha\le C_2n^\alpha$. По следствию 1 из условия следствия 3 вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}i^{\alpha+\gamma}|\hat f(i)|^\beta$, что равносильно сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}i^\gamma A_i^\alpha|\hat f(i)|^\beta$. По лемме 3 ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}i^\gamma|\hat f(i)|^\beta$ суммируем $|C,-\alpha|$.

Теорема 2. *Пусть $1<p<\infty$, $1\le r<2p$, $1/p+1/q=1$, $0<\beta<2$, $\delta-\beta/2-\beta/2p>-1$, $\gamma-\beta/2-\beta/2p>-1$, $r_1=r+(2-r)q$ и $\mathcal{F}l_r^{(2)}(f)<\infty$. Если сходится ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}m_k^\gamma m_l^\delta(m_km_l)^{1-\beta/2-\beta/2p}\left(\omega_{kl}^*(f)_{r_1}\right)^{\beta-\beta r/2p},$$

то $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}i^\gamma j^\delta|\hat f(i,j)|^\beta<\infty$.

Доказательство. Рассмотрим при $0\le i<m_k$, $0\le j<m_l$, $i,j\in\mathbb{Z}$, $k,l\in\mathbb{Z}_+$, величину

$$A_{kl}^{ij}(x,y)=f(x\oplus(ip_{k+1}+1)m_{k+1}^{-1},y\oplus(jp_{l+1}+1)m_{l+1}^{-1})-f(x\oplus(ip_{k+1}+1)m_{k+1}^{-1},y\oplus jm_l^{-1})-$$
$$-f(x\oplus im_k^{-1},y\oplus(jp_{l+1}+1)m_{l+1}^{-1})+f(x\oplus im_k^{-1},y\oplus jm_l^{-1}).$$

В силу равенства Парсеваля имеем

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\hat f(i,j)(\chi_i(m_{k+1}^{-1})-1)(\chi_j(m_{l+1}^{-1})-1)\right|^2\right)^p=$$

$$= \|f(x \oplus m_{k+1}^{-1}, y \oplus m_{l+1}^{-1}) - f(x \oplus m_{k+1}^{-1}, y) - f(x, y \oplus m_{l+1}^{-1}) + f(x,y)\|_2^{2p} \le$$

$$\le m_k^{-1} m_l^{-1} \sum_{i=0}^{m_k-1} \sum_{j=0}^{m_l-1} \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| A_{kl}^{ij}(x,y) \right|^2 dx\, dy \right)^p .$$

Аналогично доказательству теоремы 1 неравенство $|(\chi_i(m_{k+1}^{-1}) - 1)(\chi_j(m_{l+1}^{-1}) - 1)|^2 \ge C_1(N)$ справедливо при $i \in [m_k, m_{k+1})$, $j \in [m_l, m_{l+1})$. Поэтому, используя равенство $2 = r/p + ((2-r)q + r)/q$ и неравенство Гельдера, получаем

$$\left(\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1} \sum_{i=m_l}^{m_{l+1}-1} |\hat{f}(i,j)|^2 \right)^p \le C_2 m_k^{-1} m_l^{-1} \sum_{i=0}^{m_k-1} \sum_{j=0}^{m_l-1} \int_0^1 \int_0^1 \left| A_{kl}^{ij}(x,y) \right|^r dx\, dy \times$$

$$\times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| A_{kl}^{ij}(x,y) \right|^{r+(2-r)q} dx\, dy \right)^{p-1} \le C_2 m_k^{-1} m_l^{-1} (\mathcal{F}l_r^{(2)}(f))^r (\omega_{kl}^*(f)_{r_1})^{2p-r}. \qquad (7)$$

Далее,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} i^\gamma j^\delta |\hat{f}(i,j)|^\beta \le C_3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} m_k^\gamma m_l^\delta \sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1} \sum_{i=m_l}^{m_{l+1}-1} |\hat{f}(i,j)|^\beta \le$$

$$\le C_3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} m_k^\gamma m_l^\delta \left(\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1} \sum_{i=m_l}^{m_{l+1}-1} |\hat{f}(i,j)|^2 \right)^{\beta/2} (m_{k+1} m_{l+1})^{1-\beta/2} \le$$

$$\le C_4 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} m_k^\gamma m_l^\delta (m_k m_l)^{1-\beta/2-\beta/2p} (\omega_{kl}^*(f)_{r_1})^{\beta-\beta r/2p}.$$

Теорема доказана.

Следствие 4. *Пусть кроме условий теоремы* 2 *известно, что* $\mathcal{F}l_r(f_1) < \infty$, $\mathcal{F}l_r(f_2) < \infty$, *а также*

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k^{\gamma+1-\beta/2-\beta/2p} \omega_k^{\beta-\beta r/2p}(f_1)_{r_1} < \infty, \qquad \sum_{l=0}^{\infty} m_l^{\delta+1-\beta/2-\beta/2p} \omega_k^{\beta-\beta r/2p}(f_2)_{r_1} < \infty, \qquad (8)$$

где $f_1(x) = \int_0^1 f(x,y)\, dy$, $f_2(y) = \int_0^1 f(x,y)\, dx$. *Тогда* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty} (i+1)^\gamma (j+1)^\delta |\hat{f}(i,j)|^\beta < \infty$.

Доказательство. Ясно, что $\hat{f}(i,0) = \hat{f}_1(i)$, $\hat{f}(0,j) = \hat{f}_2(j)$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$, поэтому из (8) по теореме 1 вытекает сходимость рядов $\sum\limits_{i=1}^{\infty} i^\gamma |\hat{f}(i,0)|^\beta$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} j^\delta |\hat{f}(0,j)|^\beta$. Отсюда по теореме 2 легко получаем утверждение следствия.

Замечание 2. В условиях (8), а также в условиях ограниченности r-флуктуации, можно варьировать r и p, требуя выполнения неравенств $1 < p < \infty$, $1 \le r < 2p$.

Следствие 5. *Пусть* γ, δ, p, r, q, β — *такие же как в теореме* 2, $\mathcal{F}l_r^{(2)}(f) < \infty$, $\mathcal{F}l_r(f_1) < \infty$, $\mathcal{F}l_r(f_2) < \infty$ *и сходятся ряды*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} i^\gamma j^\delta (ij)^{-\beta/2-\beta/2p} (E_{ij}(f)_{r_1})^{\beta-\beta r/2p}, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} i^{\gamma-\beta/2-\beta/2p} (E_i(f_1)_{r_1})^{\beta-\beta r/2p},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{\delta-\beta/2-\beta/2p} (E_j(f_2)_{r_1})^{\beta-\beta r/2p}.$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (i+1)^\gamma (j+1)^\delta |\hat{f}(i,j)|^\beta < \infty.$$

При доказательстве используется неравенство (5) и монотонность $E_{ij}(f)_{r_1}$ по каждому индексу.

Следствие 6 (аналог теоремы Зигмунда). *Если* $\mathcal{F}l_1^{(2)}(f) < \infty$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} (ij)^{-1} E_{ij}^{1/2}(f)_\infty < \infty$, *то* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} i^\gamma j^\delta |\hat{f}(i,j)|^\beta < \infty$.

Доказательство. Формально следствие 6 не вытекает из теоремы 2, поскольку в последней требуется $1 < p < \infty$. На самом деле, для доказательства в (7) вместо неравенства Гельдера надо записать

$$\sum_{i=0}^{m_k-1}\sum_{j=0}^{m_l-1}\int_0^1\int_0^1\left|A_{kl}^{ij}(x,y)\right|^2 dx\,dy \le \omega_{kl}^*(f)_\infty\int_0^1\int_0^1\sum_{i=0}^{m_k-1}\sum_{j=0}^{m_l-1}\left|A_{kl}^{ij}(x,y)\right| dx\,dy \le \omega_{kl}^*(f)_\infty \mathcal{F}l_1^{(2)}(f).$$

Далее рассуждения аналогичны доказательству теоремы 2 и следствия 5.

Следствие 7. *Пусть γ, δ, p, r, q, β — такие же как в теореме 2, причем $\gamma, \delta \in (0,1)$, $\mathcal{F}l_r^{(2)}(f) < \infty$, и сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} i^\gamma j^\delta (ij)^{-\beta/2-\beta/2p}(E_{ij}(f)_{r_1})^{\beta-\beta r/2p}$. Тогда ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\hat{f}(i,j)|^\beta$ суммируем $|C,-\gamma,-\delta|$.*

Доказательство. Аналогично следствию 5 из условия выводим сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} i^\gamma j^\delta |\hat{f}(i,j)|^\beta$, что в силу отмеченного при доказательстве следствия 3 неравенства равносильно сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} A_i^\gamma A_j^\delta |\hat{f}(i,j)|^\beta$. Результат следствия получается с помощью леммы 3.

Теперь дадим признак сходимости рядов из коэффициентов Фурье, в котором участвует модуль непрерывности $\omega_{kl}(f)_p$ при $k = l$. Введем множество индексов

$$R_l = \{(i,j) : 0 \le i,j < m_l\} \setminus \{(i,j) : 0 \le i,j < m_{l-1}\}, \qquad l \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3. *Пусть $f \in L^p[0,1)^2$, $1 < p \le 2$, $1/p + 1/q = 1$, $0 < \beta < q$, $\gamma + \delta + 2 - 2\beta/q > 0$. Если сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} m_k^{\gamma+\delta+2-2\beta/q}\omega_{kk}^\beta(f)_p$, то $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}(i+1)^\gamma(j+1)^\delta|\hat{f}(i,j)|^\beta < \infty$.*

Доказательство. С помощью неравенства Хаусдорфа – Юнга и (4) имеем при $l \in \mathbb{N}$

$$\sum_{(i,j)\in R_l}(i+1)^\gamma(j+1)^\delta|\hat{f}(i,j)|^\beta \le \left(\sum_{(i,j)\in R_l}((i+1)^\gamma(j+1)^\delta)^{q/(q-\beta)}\right)^{1-\beta/q}\left(\sum_{(i,j)\in R_l}|\hat{f}(i,j)|^q\right)^{\beta/q} \le$$

$$\le \left(m_l^{(\gamma+\delta)q/(q-\beta)}\sum_{(i,j)\in R_l}1\right)^{1-\beta/q}\|S_{m_l,m_l}(f) - S_{m_{l-1},m_{l-1}}(f)\|_p^\beta \le C_1 m_l^{((\gamma+\delta)q+2(q-\beta))/q}E_{m_{l-1},m_{l-1}}^\beta(f)_p.$$

В итоге получаем

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(i+1)^\gamma(j+1)^\delta|\hat{f}(i,j)|^\beta = |\hat{f}(0,0)|^\beta + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{(i,j)\in R_l}(i+1)^\gamma(j+1)^\delta|\hat{f}(i,j)|^\beta \le$$

$$\le |\hat{f}(0,0)|^\beta + C_2\sum_{l=0}^{\infty} m_l^{\gamma+\delta+2-2\beta/q}E_{m_l,m_l}^\beta(f)_p.$$

В силу (4) ясно, что сходимость последнего ряда вытекает из условия теоремы. Теорема доказана.

Следствие 8 (аналог теоремы Саса). *Пусть $f \in L^p[0,1)^2$, $1 < p \le 2$, и сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} m_k^{2/p}\omega_{kk}(f)_p$. Тогда $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}|\hat{f}(i,j)| < \infty$. В частности, это верно, если сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} m_k\omega_{kk}(f)_2$.*

Теорема 4. *Пусть γ, δ, β, p, q — такие как в теореме 3, а $\{\omega_l\}_{l=0}^\infty$ убывает к нулю и удовлетворяет условию Бари $\sum\limits_{k=l+1}^{\infty}\omega_k = O(\omega_l)$. Если расходится ряд $\sum\limits_{l=0}^{\infty} m_l^{\gamma+\delta+2-2\beta/q}\omega_l^\beta$, то существует $f \in L^p[0,1)^2$, такая что $\omega_{ll}(f)_p = O(\omega_l)$ и при этом $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}(i+1)^\gamma(j+1)^\delta|\hat{f}(i,j)|^\beta = \infty$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f_0(x,y) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} m_l^{-2/q}\omega_l\sum\limits_{(i,j)\in R_l}\chi_i(x)\chi_j(y)$. Тогда согласно (4), лемме 1 и условию Бари мы находим, что

$$\omega_{ll}(f_0)_p \le 2E_{m_l,m_l}(f_0)_p \le 2\|f - S_{m_l,m_l}(f_0)\|_p \le 2\sum_{k=l+1}^{\infty} m_k^{-2/q}\omega_k \|D_{m_k,m_k} - D_{m_{k-1},m_{k-1}}\|_p \le$$

$$\le 4\sum_{k=l+1}^{\infty} m_k^{-2/q}\omega_k m_k^{2/q} \le C_1\omega_l.$$

С другой стороны, в силу условия теоремы

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(i+1)^{\gamma}(j+1)^{\delta}|\hat{f}(i,j)|^{\beta} \ge \sum_{l=1}^{\infty}(m_l^{-2/q}\omega_l)^{\beta}\sum_{i=m_{l-1}}^{m_l-1}\sum_{j=m_{l-1}}^{m_l-1}(i+1)^{\gamma}(j+1)^{\delta} \ge$$

$$\ge \sum_{l=1}^{\infty} m_l^{-2\beta/q}\omega_l^{\beta}N^{-2}m_l^{\gamma+\delta}\sum_{i=m_{l-1}}^{m_l-1}\sum_{j=m_{l-1}}^{m_l-1}1 \ge C_2\sum_{l=0}^{\infty} m_l^{\gamma+\delta+2-2\beta/q}\omega_l^{\beta} = \infty.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (*проект* НШ-2970.2008.01).

Библиографический список

1. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
2. *Moricz F.* Approximation by double Walsh polynomials // Intern. J. Math. Math. Sci. 1992. V. 15, № 2. P. 209–220.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
4. *Szasz O.* Fourier series and mean moduli of continuity // Trans. Amer. Math. Soc. 1937. V. 42, № 3. P. 366–395.
5. *Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981.
6. *Схиртладзе И.А.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье – Уолша // Сообщ. АН ГССР. 1971. Т. 64, № 2. С. 273–276.
7. *Схиртладзе И.А.* Об абсолютной сходимости и суммируемости простых и кратных рядов Фурье – Уолша // Сообщ. АН ГССР. 1973. Т. 69, № 1. С. 17–20.
8. *Tateoka J.* Absolute convergence of double Walsh – Fourier series // Acta Sci. Math. (Szeged). 2006. V. 72, № 1–2. P. 101–115.
9. *Sunouchi G.I.* Notes on Fourier analysis. XI. On the absolute summability of Fourier series // J. Math. Soc. Japan. 1949. V. 1, № 2. P. 122–129.
10. *Жак И.Е., Тиман М.Ф.* О суммировании двойных рядов // Мат. сб. 1954. Т. 35(77), № 1. С. 21–56.
11. *Волосивец С.С.* Приближение функций ограниченной p-флуктуации полиномами по мультипликативным системам // Analysis Math. 1995. V. 21, № 1. P. 61–77.
12. *Izumi M., Izumi S.* On absolute convergence of Fourier series // Arkiv för Matematik. 1967. V. 7, № 12. P. 177–184.

УДК 517.977

ОБ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫМИ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

И.В. Гребенникова

Уральский государственный университет, Екатеринбург,
кафедра прикладной математики
E-mail: giv001@usla.ru

Рассматривается задача управления по минимаксному критерию для сингулярно возмущенной системы с запаздыванием. Предлагается итерационная процедура построения управляющего воздействия, аппроксимирующего оптимальное решение с заданной степенью точности относительно малого положительного параметра.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система с запаздыванием, оптимальное управление, фундаментальная матрица.

On Iterative Method of Constructing Optimal Control for Singularly Perturbed Systems with Delay

I.V. Grebennikova

Ural State University, Ekaterinburg,
Chair of applied mathematics
E-mail: giv001@usla.ru

The control problem for the singularly perturbed system with delay according to the minimax criterion is considered. Iterative procedure of constructing control response that approximates the optimal solution with given accuracy with respect to a small positive parameter is proposed.

Key words: singularly perturbed system with delay, optimal control, fundamental matrix.

© И.В. Гребенникова, 2009

ВВЕДЕНИЕ

Построение эффективных управляющих процедур для реальных систем обусловлено точностью используемых математических моделей. Детализация описания динамики управляемого процесса приводит к сложным структурам (часто нелинейным), включающим различные особенности. Это может определяться наличием нескольких взаимосвязанных подпроцессов с существенно различными временными масштабами, и удобный способ формализации в этом случае — введение сингулярных возмущений. В последние годы много работ посвящено проблемам оптимального управления такими системами (см. обзоры [1–3]). Зависимость текущей скорости изменения выходных переменных системы от их значений в предшествующие моменты времени приводит к моделям, которые описываются дифференциальными уравнениями с последействием [4]. Указанные особенности в значительной мере затрудняют использование известных результатов теории оптимального управления, практическую реализацию употребляемых методов и схем решения. Поэтому важным представляется качественное исследование асимптотических свойств управляемых сингулярно возмущенных систем (ансамблей траекторий, множеств достижимости), разработка на их основе аналитических способов представления (построения) решений.

В данной работе рассматриваются динамические объекты, математическими моделями которых являются сингулярно возмущенные системы (с малым параметром при части производных) с запаздыванием (по состоянию). Рассматривается задача оптимального управления в постановке [5, 6] для сингулярно возмущенных систем с запаздыванием в условиях неопределенности по начальным условиям. Терминальный функционал качества зависит как от быстрых, так и от медленных переменных. В основе предлагаемого метода лежит идея последовательных приближений фундаментальной матрицы исходной системы при ее блочном представлении (соответственно размерности медленных и быстрых переменных). При реализации метода используются результаты исследований [5–10], а также аппарат выпуклого анализа [11]. Оптимальное решение аппроксимируется с любой заданной точностью (относительного малого параметра), при этом не требуется чрезмерных условий гладкости (дифференцируемость не выше первого порядка), ограничений на класс допустимых управлений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается управляемая сингулярно возмущенная система (с малым параметром $\mu > 0$ при части производных) с запаздыванием $h > 0$ (по состоянию):

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + G_1(t)x(t-h) + B_1(t)u(t), \\ \mu\, dy(t)/dt &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t) + G_2(t)x(t-h) + B_2(t)u(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$, $x \in R^n$, $y \in R^m$, A_{ij}, B_i, G_i, $i, j = 1, 2$ — матрицы соответствующих размеров с непрерывными элементами. Начальное состояние системы $x(t) = \psi(t)$, $t_0 - h \le t < t_0$, $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ точно неизвестно и заданы лишь ограничения $x_0 \in X_0$, $y_0 \in Y_0$, где X_0, Y_0 — выпуклые компакты в соответствующих пространствах, $\psi(t) \in \Psi(t)$, $t_0 - h \le t < t_0$, $\Psi(t)$ — заданное многозначное отображение со значениями в виде выпуклых компактов (в R^n), непрерывное по t в метрике Хаусдорфа. Реализации управления $u(t)$, $t \in T$ — измеримые, по Лебегу, функции, удовлетворяющие условию $u(\cdot) \in P$, P — слабо компактное выпуклое множество в $L_2^r(T)$. В данном случае $P = \{u(\cdot) \mid u(t) \in P(t),\ t \in T\}$, где $P(t)$ — заданное непрерывное, ограниченное, выпуклое многозначное отображение. Пусть выполнено следующее

Предположение 1. *Собственные значения $\lambda_s(t)$ матрицы $A_{22}(t)$ удовлетворяют неравенству* $\operatorname{Re}\lambda_s(t) < -2c < 0$ *при* $t \in T$, $c = \mathrm{const} > 0$.

Тогда [12, с. 69] при достаточно малых μ $(0 < \mu \le \mu_0)$ фундаментальная матрица решений $Y[t, \tau]$ системы $\mu\, dy/dt = A_{22}(t)y$, $Y[\tau, \tau] = E_m$, E_m — единичная матрица $m \times m$, при $t_0 \le \tau \le t \le t_1$ имеет оценку

$$\|Y[t, \tau]\| \le c_0 \exp\{-c(t-\tau)/\mu\}, \tag{2}$$

$c_0 > 0$ — некоторая постоянная, $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Рассмотрим вырожденную систему, полученную из (1) при $\mu = 0$:

$$dx(t)/dt = A_0(t)x(t) + G_0(t)x(t-h) + B_0(t)u(t), \tag{3}$$

$$y(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)x(t) - A_{22}^{-1}(t)G_2(t)x(t-h) - A_{22}^{-1}(t)B_2(t)u(t), \tag{4}$$

где $t \in T$, $A_0(t) = A_{11}(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)$, $G_0(t) = G_1(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)G_2(t)$, $B_0(t) = B_1(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)B_2(t)$.

Пусть $Z[t,\tau]$ и $X[t,\tau]$ есть фундаментальные матрицы решений соответственно систем (1) и (3) (при $u \equiv 0$), причем $X[\tau,\tau] = E_n$, $X[t,\tau] = 0$ при $\tau > t$; $Z[\tau,\tau] = E_{n+m}$. Матрицу $Z[t,\tau]$ представим в следующем блочном виде:

$$Z[t,\tau] = \begin{pmatrix} Z_{11}[t,\tau] & Z_{12}[t,\tau] \\ Z_{21}[t,\tau] & Z_{22}[t,\tau] \end{pmatrix},$$

здесь $Z_{11}[t,\tau]$, $Z_{12}[t,\tau]$, $Z_{21}[t,\tau]$, $Z_{22}[t,\tau]$ — матрицы с размерами соответственно $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$.

Введем следующие обозначения: $z' = (x', y')$, $Z_0 = X_0 \times Y_0$; $Z(t, u(\cdot), Z_0, \psi(\cdot))$, $Z_0(t, u(\cdot), X_0, \psi(\cdot))$, $t_0 \le t \le t_1$ — соответственно множества (ансамбли) траекторий $z(t, u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$ системы (1), исходящих из Z_0, и $z_0(t, u(\cdot), x_0, \psi(\cdot))$ системы (3)–(4), исходящих из X_0, при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$.

Определим функционал $J(\cdot)$: $J(u(\cdot)) = \max\limits_{z_0 \in Z_0} \max\limits_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot)))$, где $\varphi(\cdot) : \ R^{n+m} \to R$ — заданная выпуклая функция (с конечными значениями).

Задача 1. *Среди управлений $u(\cdot) \in P$ найти оптимальное $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее минимум функционалу J на множестве P: $\varepsilon^0(t_1) = J(u^0) = \min\limits_{u(\cdot) \in P} J(u(\cdot))$.*

Решение задачи 1 описывается следующими соотношениями (используя [6]):

$$\varepsilon^0(t_1) = \min_{u(\cdot) \in P} \max_{l \in R^{n+m}} \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \{l' z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot)) - \varphi^*(l)\} =$$

$$= \max\{\chi^0(l,\mu) \mid l \in R^{n+m}\} = \chi^0(l^0, \mu), \tag{5}$$

$$\chi^0(l,\mu) = -h^{**}(l) - \rho(-r(\cdot; t_1, l, \mu) \mid P),$$

$$h(l) = \varphi^*(l) - \rho(l' Z[t_1, t_0] \mid Z_0) -$$

$$- \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(((p' Z_{11}[t,\tau] + q' Z_{21}[t,\tau]) G_1(\tau) + (1/\mu)(p' Z_{12}[t,\tau] + q' Z_{22}[t,\tau]) G_2(\tau)) \mid \Psi(\tau - h)) d\tau,$$

$$r(\tau; t, l, \mu) = (p' Z_{11}[t,\tau] + q' Z_{21}[t,\tau]) B_1(\tau) + (1/\mu)(p' Z_{12}[t,\tau] + q' Z_{22}[t,\tau]) B_2(\tau),$$

где $l' = (p', q')$, $p \in R^n$, $q \in R^m$; $\varphi^*(l)$ — функция, сопряженная [11] к $\varphi(z)$; $h^{**}(l) = \overline{(\mathrm{co}\, h)}(l)$ — замыкание выпуклой оболочки [11] функции $h(l)$; $\rho(s|X)$ — опорная функция множества X на элементе s. Оптимальное управление $u^0(\cdot, \mu)$ удовлетворяет условию минимума: для почти всех $\tau \in T$

$$\min_{u(\tau) \in P(\tau)} r(\tau; t_1, l^0, \mu) u(\tau) = r(\tau; t_1, l^0, \mu) u^0(\tau, \mu). \tag{6}$$

Полученные $u^0(\cdot, \mu)$, l^0, $\varepsilon^0(t_1)$ зависят от параметра μ. Однако эти величины при $\mu \to +0$ могут не сходиться [8] к соответствующим решениям задачи 1 для вырожденной системы . Поэтому важным представляется построить аппроксимацию оптимального управления $u^0(\cdot, \mu)$, доставляющую оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1) = J(u^0(\cdot, \mu))$ с заданной точностью (относительно μ). В данной работе в основе предложенного способа определения требуемых приближений лежит возможность представления блоков $Z_{ij}[t, \tau; \mu]$ $(i, j = 1, 2)$ в виде пределов равномерно сходящихся на $[t_0, t_1]$ последовательностей (при $0 < \mu \le \mu_0$, μ_0 достаточно мало) $Z_{ij}^{(k)}[t, \tau; \mu]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

2. АСИМПТОТИКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

Пусть $\hat{Z}[t,\tau]$ — решение матричного уравнения $d\hat{Z}[t,\tau]/dt = A(t)\hat{Z}[t,\tau] + G(t)\hat{Z}[t-h,\tau] + B(t)u(t)$; $Z_1[t,\tau]$ — решение матричного уравнения $dZ_1[t,\tau]/dt = A(t)Z_1[t,\tau] + G(t)Z_1[t-h,\tau]$, причем $Z_1[\tau,\tau] = E_n, Z_1[t,\tau] = 0$ при $\tau > t$; $Z_0[t,\tau]$ — решение матричного уравнения $dZ_0[t,\tau]/dt = A(t)Z_0[t,\tau]$, причем $Z_0[\tau,\tau] = E_n$. Тогда по формуле Коши [13] получаем

$$Z_1[t,\tau] = Z_0[t,\tau] + \int\limits_{\tau}^{t} Z_0[t,s]G(s)Z_1[s-h,\tau]ds,$$

$$\hat{Z}[t,\tau] = Z_1[t,\tau] + \int\limits_{\tau}^{t} Z_1[t,s]B(s)u(s)ds. \tag{7}$$

Применяя формулу (7) для каждого блока матрицы $Z[t,\tau]$, получим следующее утверждение.

Лемма 1. *Матрицы $Z_{ij}[t,\tau]$, $i,j = 1,2$, $t_0 \le \tau \le t \le t_1$, удовлетворяют уравнениям:*

$$Z_{11}[t,\tau] = X[t,\tau] + \mu \int\limits_{\tau}^{t} X[t,s]A_{12}(s)A_{22}^{-1}(s)(dZ_{21}[s,\tau]/ds)ds, \tag{8}$$

$$Z_{12}[t,\tau] = \mu \int\limits_{\tau}^{t} X[t,s]A_{12}(s)A_{22}^{-1}(s)(dZ_{22}[s,\tau]/ds)ds, \tag{9}$$

$$Z_{21}[t,\tau] = (1/\mu) \int\limits_{\tau}^{t} Y[t,s](A_{21}(s)Z_{11}[s,\tau] + G_2(s)Z_{11}[s-h,\tau])ds,$$

$$Z_{22}[t,\tau] = Y[t,\tau] + (1/\mu) \int\limits_{\tau}^{t} Y[t,s](A_{21}(s)Z_{12}[s,\tau] + G_2(s)Z_{12}[s-h,\tau])ds.$$

Уравнения (8) и (9) преобразуются к виду

$$Z_{11}[t,\tau] = X[t,\tau] - \int\limits_{\tau}^{t} (dZ_{12}^{(0)}[t,s]/ds)A_{22}^{-1}(s)(A_{21}(s)Z_{11}[s,\tau] + G_2(s)Z_{11}[s-h,\tau])ds, \tag{10}$$

$$Z_{12}[t,\tau] = Z_{12}^{(0)}[t,\tau] - \int\limits_{\tau}^{t} \frac{dZ_{12}^{(0)}[t,s]}{ds} A_{22}^{-1}(s)(A_{21}(s)Z_{12}[s,\tau] + G_2(s)Z_{12}[s-h,\tau])ds,$$

где матрица $Z_{12}^{(0)}[t,\tau]$ определяется формулой $Z_{12}^{(0)}[t,\tau] = \int\limits_{\tau}^{t} X[t,s]A_{12}(s)Y[s,\tau]ds$.

Теорема 1. *Существуют достаточно малое число $\mu_0 > 0$ и постоянная $N > 0$, такие что в области $0 < \mu \le \mu_0$, $t_0 \le \tau \le t \le t_1$ выполняются оценки*

$$\begin{gathered} \|Z_{11}[t,\tau]\| \le N/(1-\mu N); \|Z_{12}[t,\tau]\| \le \mu N(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})/(1-\mu N), \\ \|Z_{21}[t,\tau]\| \le N(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})/(1-\mu N), \\ \|Z_{22}[t,\tau]\| \le c_0 e^{-c(t-\tau)/\mu} + \mu N^2(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})/(1-\mu N). \end{gathered} \tag{11}$$

Доказательство. Пользуясь методом последовательных приближений Пикара, решение (10) можно представить как предел равномерно сходящейся на отрезке $[t_0,t_1]$ следующей последовательности (при $0 < \mu \le \mu_0$, μ_0 достаточно мало): $Z_{11}^{(0)}[t,\tau] = X[t,\tau]$, $Z_{11}^{(k+1)}[t,\tau] = X[t,\tau] - \int\limits_{\tau}^{t} (dZ_{12}^{(0)}[t,s]/ds)A_{22}^{-1}(s)(A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s,\tau] + G_2(s)Z_{11}^{(k)}[s-h,\tau])ds$, $k = 0,1,2,\ldots$

В силу ограниченности $X[t,\tau]$, $t_0 \le \tau \le t \le t_1$, с учетом оценки (2), при $0 < \mu \le \mu_0$ справедливы неравенства:

$$\|X[t,\tau]\| \le N_0, \qquad \left\|Z_{12}^{(0)}[t,\tau]\right\| \le \mu N_1 c_0(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})/c,$$

$$\left\| \int\limits_{\tau}^{t} (dZ_{12}^{(0)}[t,s]/ds) A_{22}^{-1}(s)(A_{21}(s)X[s,\tau] + G_2(s)X[s-h,\tau])ds \right\| \le \mu N_0 N_1 c_0/c,$$

$$\left\| Z_{11}^{(k+1)}[t,\tau] - Z_{11}^{(k)}[t,\tau] \right\| \le \mu^{k+1} N_0 (N_1 c_0/c)^{k+1}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,$$

где $N_0 > 0$, $N_1 > 0$ — некоторые постоянные. Отсюда непосредственно следует (при соответствующем выборе $N > 0$) оценка (11) для $Z_{11}[t,\tau]$. Аналогично получаются остальные неравенства, причем в области $0 < \mu \le \mu_0$, $t_0 \le \tau \le t \le t_1$ имеем:

$$\left\| Z_{12}^{(k+1)}[t,\tau] - Z_{12}^{(k)}[t,\tau] \right\| \le \mu^{k+2} N_0 N_1^{k+1} (c_0/c)(1 - e^{-c(t-\tau)/\mu}),$$

$$\left\| Z_{21}^{(k+1)}[t,\tau] - Z_{21}^{(k)}[t,\tau] \right\| \le \mu^{k+1} N_0 N_1^{k+1} (c_0/c)(1 - e^{-c(t-\tau)/\mu}), \tag{12}$$

$$\left\| Z_{22}^{(k+1)}[t,\tau] - Z_{22}^{(k)}[t,\tau] \right\| \le \mu^{k} N_0 N_1^{k} (c_0/c)^2 (\mu(1 - e^{-c(t-\tau)/\mu}) - c(t-\tau)e^{-c(t-\tau)/\mu}), \ k = 0,1,2,\ldots$$

Теорема 1 доказана.

Рекуррентные формулы для вычисления $Z_{ij}[t,\tau]$, $i,j = 1,2$, определяющие асимптотику фундаментальной матрицы, есть:

$$Z_{11}^{(k+1)}[t,\tau] = X[t,\tau] - \int\limits_{\tau}^{t} (dZ_{12}^{(0)}[t,s]/ds) A_{22}^{-1}(s)(A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s,\tau] + G_2(s)Z_{11}^{(k)}[s-h,\tau])\, ds,$$

$$Z_{22}^{(k+1)}[t,\tau] = Y[t,\tau] + \int\limits_{\tau}^{t} Z_{21}^{(k)}[t,s]A_{12}(s)Y[s,\tau]\, ds, \qquad Z_{12}^{(k)}[t,\tau] = \int\limits_{\tau}^{t} Z_{11}^{(k)}[t,s]A_{12}(s)Y[s,\tau]\, ds,$$

$$Z_{21}^{(k)}[t,\tau] = (1/\mu) \int\limits_{\tau}^{t} Y[t,s](A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s,\tau] + G_2(s)Z_{11}^{(k)}[s-h,\tau])\, ds, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

причем $Z_{11}^{(0)}[t,\tau] = X[t,\tau]$, $Z_{22}^{(0)}[t,\tau] = Y[t,\tau]$.

Для задачи 1 соотношение (5) можно представить [14] в виде

$$\varepsilon^0(t_1) = \min_{u(\cdot)\in P} \max_{p,q} \{\rho(p'Z_{11}[t_1,t_0] + q'Z_{21}[t_1,t_0]|X_0) + \rho(p'Z_{12}[t_1,t_0] + q'Z_{22}[t_1,t_0]|Y_0) +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} [(p'Z_{11}[t_1,\tau] + q'Z_{21}[t_1,\tau])B_0(\tau) + (1/\mu)q'Y[t_1,\tau]B_2(\tau) - \xi(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau)]u(\tau)d\tau + \tag{13}$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \rho((p'Z_{11}[t_1,\tau] + q'Z_{21}[t_1,\tau])G_0(\tau) - \tilde{\xi}(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)G_2(\tau)|\Psi(\tau-h))d\tau - \varphi^*(p,q)\},$$

где $\xi(\tau,t_1,p,q) = \frac{d}{d\tau}[p'Z_{12}[t_1,\tau] + (1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t_1} q'Y[t_1,s]A_{21}(s)Z_{12}[s,\tau]ds]$, $\tilde{\xi}(\tau,t_1,p,q) = \frac{d}{d\tau}[p'Z_{12}[t_1,\tau] + (1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t_0+h} q'Y[t_1,s]A_{21}(s)Z_{12}[s,\tau]ds]$.

На основании теоремы А. Лебега [15, с. 259] при $0 < \mu \le \mu_0$ (μ_0 достаточно мало) для любых $u(\cdot) \in P(\cdot)$, $p \in R^n$, $q \in R^m$ справедливы оценки

$$\left\| \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \rho(\tilde{\xi}(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)G_2(\tau)|\Psi(\tau-h))d\tau \right\| \le \omega(\mu)[\|p\| + N_2\|q\|],$$

$$\left\| \int\limits_{t_0}^{t_1} \xi(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau)u(\tau)d\tau \right\| \le \omega(\mu)[\|p\| + N_1\|q\|], \tag{14}$$

где $\omega(\mu) = o(1)$; N_1, $N_2 > 0$ — некоторые постоянные.

3. АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Используя последовательности $Z_{ij}^{(k)}[t,\tau,\mu]$, $i,j=1,2$, $k=0,1,2,\ldots$, можно аппроксимировать решение задачи 1 с любой заданной точностью (относительно μ, $0<\mu\le\mu_0$). Будем предполагать, что элементы матриц $A_{12}(\tau)$, $A_{22}^{-1}(\tau)$ имеют на T ограниченные производные. Построим управляющее воздействие $u_\mu^{(k)}(\cdot)$, доставляющее оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1)$ с точностью $o(\mu^k)$. Из (13) имеем

$$\varepsilon^0(t_1)=\min_{u(\cdot)\in P}\max_{p,q}\{\rho[p'Z_{11}^{(k)}[t_1,t_0]+q'Z_{21}^{(k)}[t_1,t_0]+\xi_1^{(k)}(t_0,t_1,p,q)|X_0]+$$

$$+\rho[p'Z_{12}^{(k)}[t_1,t_0]+q'Z_{22}^{(k)}[t_1,t_0]+\xi_2^{(k)}(t_0,t_1,p,q)|Y_0]+\int_{t_0}^{t_1}r^{(k)}(\tau,t_1,p,q)u(\tau)d\tau+ \tag{15}$$

$$+\int_{t_0}^{t_0+h}\rho(r_h^{(k)}(\tau,t_1,p,q)|\Psi(\tau-h))d\tau+\int_{t_0}^{t_1}[\xi_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q)B_0(\tau)+\xi^{(k)}(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau)]u(\tau)d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t_0+h}\rho(\xi_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q)G_0(\tau)+\tilde{\xi}^{(k)}(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)G_2(\tau)|\Psi(\tau-h))d\tau-\varphi^*(p,q)\},\quad p\in R^n,q\in R^m,$$

где

$$\xi_i^{(k)}(\tau,t,p,q)=p'(Z_{1i}[t,\tau]-Z_{1i}^{(k)}[t,\tau])+q'(Z_{2i}[t,\tau]-Z_{2i}^{(k)}[t,\tau]),\qquad i=1,2,$$

$$\xi^{(k)}(\tau,t,p,q)=-p'\frac{d}{d\tau}(Z_{12}[t,\tau]-Z_{12}^{(k-1)}[t,\tau])-(1/\mu)\int_\tau^t q'Y[t,s]A_{21}(s)\frac{d}{d\tau}(Z_{12}[s,\tau]-Z_{12}^{(k-1)}[s,\tau])ds,$$

$$\tilde{\xi}^{(k)}(\tau,t,p,q)=-p'\frac{d}{d\tau}(Z_{12}[t,\tau]-Z_{12}^{(k-1)}[t,\tau])-(1/\mu)\int_\tau^{t_0+h}q'Y[t,s]A_{21}(s)\frac{d}{d\tau}(Z_{12}[s,\tau]-Z_{12}^{(k-1)}[s,\tau])ds,$$

$$r^{(k)}(\tau,t,p,q)=(p'Z_{11}^{(k)}[t,\tau]+q'Z_{21}^{(k)}[t,\tau])B_0(\tau)+(1/\mu)q'Y[t,\tau]B_2(\tau)-\frac{d}{d\tau}[p'Z_{12}^{(k-1)}[t,\tau]+$$

$$+(1/\mu)\int_\tau^t q'Y[t,s]A_{21}(s)Z_{12}^{(k-1)}[s,\tau]ds]A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau),$$

$$r_h^{(k)}(\tau,t,p,q)=(p'Z_{11}^{(k)}[t,\tau]+q'Z_{21}^{(k)}[t,\tau])G_0(\tau)-\frac{d}{d\tau}(p'Z_{12}^{(k-1)}[t,\tau]+$$

$$+(1/\mu)\int_\tau^{t_0+h}q'Y[t,s]A_{21}(s)Z_{12}^{(k-1)}[s,\tau]ds)A_{22}^{-1}(\tau)G_2(\tau).$$

Используя оценки (12) и (14), получим следующий результат.

Лемма 2. *Существуют достаточно малое число $\mu_0>0$ и постоянная $N>0$, такие что для любых $t_0\le\tau\le t\le t_1$, $p\in R^n,q\in R^m$, $0<\mu\le\mu_0$ справедливы неравенства:*

$$\left\|\frac{d}{d\tau}(Z_{12}[t,\tau]-Z_{12}^{(k-1)}[t,\tau])\right\|\le\mu^{k+1}N^{k+2}(c_0/c)(1-e^{-c(t-\tau)/\mu}),$$

$$\left\|\xi_i^{(k)}(\tau,t,p,q)\right\|\le\mu^{k+1}N^{k+2}(\|p\|+\|q\|\,(c_0/c)(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})),\qquad i=1,2.$$

Пусть $\alpha_k(\mu)>0:\alpha_k(\mu)=o(1)$, $\alpha_k(\mu)/\mu\to+\infty$ при $\mu\to+0$, причем для $\tau\in[t_0,t_1-\alpha_k(\mu)]$ выполняется $\|Y[t_1,\tau]\|\le c_0\exp\{-c(t_1-\tau)/\mu\}<c_0\mu^{k+2}N_1$, где $N_1>0$ — некоторая постоянная. Тогда имеем

$$\int_{t_0}^{t_1}r^{(k)}(\tau,t_1,p,q)u(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t_1-\alpha_k(\mu)}r_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q)u(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} r_2^{(k)}(s,t_1,p,q)u(t_1-\mu s)ds+\hat{\xi}_k(l,\mu), \tag{16}$$

где $\left|\hat{\xi}_k(l,\mu)\right| \le \|l\|\,\hat{\omega}_k(\mu)$, $\hat{\omega}_k(\mu)=o(\mu^{k+1})$ при $0<\mu\le\mu_0$; причем функции $r_i^{(k)}(\tau,t_1,p,q)$, $i=1,2$, определяются следующим образом:

при $t_0\le\tau\le t\le t_1-\alpha_k(\mu)$

$$r_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q)=(p'Z_{11}^{(k)}[t_1,\tau]+$$

$$+\int\limits_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q'\Phi[t_1,s](A_{21}(t_1-\mu s)Z_{11}^{(k)}[t_1-\mu s,\tau]+G_2(t_1-\mu s)Z_{11}^{(k)}[t_1-\mu s-h,\tau])ds)B_0(\tau)-$$

$$-\frac{d}{d\tau}(p'Z_{12}^{(k-1)}[t_1,\tau]+\int\limits_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q'\Phi[t_1,s]A_{21}(t_1-\mu s)Z_{12}^{(k-1)}[t_1-\mu s,\tau]ds)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau),$$

при $0\le s<\alpha_k(\mu)/\mu$

$$r_2^{(k)}(s,t_1,p,q)=[q'\Phi[t_1,s]+\frac{d}{ds}(p'Z_{12}^{(k-1)}[t_1,t_1-\mu s]+$$

$$+\int\limits_0^{s} q'\Phi[t_1,\sigma]A_{21}(t_1-\mu\sigma)Z_{12}^{(k-1)}[t_1-\mu\sigma,t_1-\mu s]d\sigma)A_{22}^{-1}(t_1-\mu s)]B_2(t_1-\mu s)+\mu[p'Z_{11}^{(k)}[t_1,t_1-\mu s]+$$

$$+\int\limits_0^{s} q'\Phi[t_1,\sigma](A_{21}(t_1-\mu\sigma)Z_{11}^{(k)}[t_1-\mu\sigma,t_1-\mu s]+G_2(t_1-\mu\sigma)Z_{11}^{(k)}[t_1-\mu\sigma-h,t_1-\mu s])d\sigma]B_0(t_1-\mu s),$$

где $\Phi[t_1,s]=Y[t_1,t_1-\mu s]$.

Таким образом, из представлений (15), (16) получаем следующий результат.

Теорема 2. *При $0<\mu\le\mu_0$ (μ_0 достаточно мало) для любых $p\in R^n$, $q\in R^m$ выполняются соотношения:*

$$\chi^0(p,q)=\chi^{(k)}(p,q)+\widehat{\xi}_k(p,q),$$

причем $\left|\widehat{\xi}_k(p,q)\right|\le\|l\|\,\widehat{\omega}_k(\mu)$, $\widehat{\omega}_k(\mu)=O(\mu^{k+1})$;

$$\varepsilon^0(t_1)=\varepsilon^{(k)}(t_1)+O(\mu^{k+1}), \tag{17}$$

где

$$\chi^{(k)}(p,q)=-h_{(k)}^{**}(p,q)-\int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha_k(\mu)}\rho(-r_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q)\mid P(\tau))d\tau-\int\limits_0^{\alpha_k(\mu)/\mu}\rho(-r_2^{(k)}(s,t_1,p,q)\mid V(s))ds,$$

$$V(s)=P(t_1-\mu s),$$

$$h_{(k)}(p,q)=\varphi^*(p,q)-\rho(p'Z_{11}^{(k)}[t_1,t_0]+\int\limits_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q'\Phi[t_1,s](A_{21}(t_1-\mu s)Z_{11}^{(k)}[t_1-\mu s,t_0]+$$

$$+G_2(t_1-\mu s)Z_{11}^{(k)}[t_1-\mu s-h,t_0])ds\mid X_0)-\rho(p'Z_{12}^{(k)}[t_1,t_0]+$$

$$+\int\limits_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q'\Phi[t_1,s](A_{21}(t_1-\mu s)Z_{12}^{(k)}[t_1-\mu s,t_0]+G_2(t_1-\mu s)Z_{12}^{(k)}[t_1-\mu s-h,t_0])ds\mid Y_0)-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho(r_h^{(k)}(\tau,t_1,p,q)|\Psi(\tau-h))d\tau,$$

$$\varepsilon^{(k)}(t_1) = \max\{\chi^{(k)}(p,q) \mid p \in R^n, q \in R^m\} = \chi^{(k)}(p^{(k)}, q^{(k)}). \tag{18}$$

Предположение 2.
(i) Система (3) *вполне управляема* [5] *на* T.
(ii) Для любого $t \in T \quad \operatorname{rank}\{B_2(t), A_{22}(t)B_2(t), \ldots, A_{22}^{m-1}(t)B_2(t)\} = m$.
(iii) Максимум в (18) *достигается на векторе* $(l^{(k)})' = (p^{(k)'}, q^{(k)'})$ *таком, что*

$$r_1^{(k)}(\tau, t_1, p^{(k)}, q^{(k)}) \neq 0, \qquad q^{(k)} \neq 0.$$

Следует заметить, что в условиях предположения 2 задача 1 разрешима [5, с. 110; 6, с. 76], т.е. существует управление $u^0(\cdot) \in P(\cdot)$, удовлетворяющее (6) при $0 < \mu \leq \mu_0$, причем вектор $(l^0)' = (p^{0'}, q^{0'})$, максимизирующий (5), отличен от нулевого.

Теорема 3. *Пусть выполнено предположение* 2. *Тогда при* $0 < \mu \leq \mu_0$ *(*μ_0 *достаточно мало) управляющее воздействие*

$$u_\mu^{(k)}(\tau) = \begin{cases} u^{(k)}(\tau), & t_0 \leq \tau \leq t_1 - \alpha_k(\mu), \\ v^{(k)}((t_1 - \tau)/\mu), & t_1 - \alpha_k(\mu) < \tau \leq t_1, \end{cases}$$

доставляет оценку $\varepsilon^0(t_1)$ *с точностью* $O(\mu^{k+1})$:

$$\varepsilon^0(t_1) = J(u^0(\cdot)) = J(u_\mu^{(k)}(\cdot)) + O(\mu^{k+1}), \tag{19}$$

причем $u^{(k)}(\cdot)$, $v^{(k)}(\cdot)$ *определяются условиями: при почти всех* $\tau \in [t_0, t_1 - \alpha_k(\mu)]$, $s \in [0, \alpha_k(\mu)/\mu)$

$$r_1^{(k)}(\tau, t_1, p^{(k)}, q^{(k)})u^{(k)}(\tau) = \min_{u(\tau) \in P(\tau)} r_1^{(k)}(\tau, t_1, p^{(k)}, q^{(k)})u(\tau),$$
$$r_2^{(k)}(s, t_1, p^{(k)}, q^{(k)})v^{(k)}(s) = \min_{v(s) \in V(s)} r_2^{(k)}(s, t_1, p^{(k)}, q^{(k)})v(s).$$

Доказательство. Утверждение вытекает из свойств функции

$$L_{(k)}(p, q; u(\cdot), v(\cdot)) = -h_{(k)}^{**}(p, q) + \int\limits_{t_0}^{t_1 - \alpha_k(\mu)} r_1^{(k)}(\tau, t_1, p, q)u(\tau)d\tau + \int\limits_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} r_2^{(k)}(s, t_1, p, q)v(s)ds,$$

а именно элементы $p^{(k)}$, $q^{(k)}$, $u^{(k)}(\cdot)$, $v^{(k)}(\cdot)$ определяют седловую точку $L_{(k)}(p, q; u(\cdot), v(\cdot))$: для $p \in R^n$, $q \in R^m$, $u \in P(\cdot)$, $v \in V(\cdot)$

$$L_{(k)}(p, q; u^{(k)}(\cdot), v^{(k)}(\cdot)) \leq L_{(k)}(p^{(k)}, q^{(k)}; u^{(k)}(\cdot), v^{(k)}(\cdot)) \leq L_{(k)}(p^{(k)}, q^{(k)}; u(\cdot), v(\cdot)),$$

причем (пользуясь (18))

$$\varepsilon^{(k)}(t_1) = \min_{u(\cdot), v(\cdot)} \max_{p,q} L_{(k)}(p, q; u(\cdot), v(\cdot)) = \max_{p,q} \min_{u(\cdot), v(\cdot)} L_{(k)}(p, q; u(\cdot), v(\cdot)) =$$
$$= L_{(k)}(p^{(k)}, q^{(k)}; u^{(k)}(\cdot), v^{(k)}(\cdot)), \quad p \in R^n,\ q \in R^m,\ u \in P(\cdot),\ v \in V(\cdot).$$

Тогда получим

$$J(u_\mu^{(k)}(\cdot)) = \max_{p \in R^n, q \in R^m} \{L_{(k)}(p, q; u^{(k)}(\cdot), v^{(k)}(\cdot)) + \hat{\xi}_k(p, q; \mu)\}, \tag{20}$$

где $\hat{\xi}_k(p, q; \mu)$ имеет такой же как в (17) порядок малости по μ $(0 < \mu \leq \mu_0)$, и максимум в (20) достигается на некотором векторе $\hat{l} \in \operatorname{co} M^{(k)}$, где $M^{(k)} = \{l \in R^{n+m} \mid l \in \partial\varphi(z),$ $z \in Z(t_1; u_\mu^{(k)}(\cdot), Z_0),\ \varphi(z) = J(u_\mu^{(k)}(\cdot))\}$, $\partial\varphi(z)$ — субдифференциал функции φ в точке z [11], $\operatorname{co} M^{(k)}$ — выпуклая оболочка $M^{(k)}$ (в данном случае $M^{(k)}$ — компакт в R^{n+m}).

Таким образом, имеем $J(u_\mu^{(k)}(\cdot)) = \varepsilon^{(k)}(t_1) + O(\mu^{k+1})$ при $(0 < \mu \leq \mu_0)$, и, следовательно, справедливо равенство (19). Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.

2. *Kokotovic P.V., Khalil H.K., O'Reilly J.* Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design. SIAM, 1999. 200 с.

3. *Калинин А.И.* Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. Минск: Экоперспектива, 2000. 294 с.

4. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 100 с.

5. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.

6. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.

7. *Кремлёв А.Г.* Асимптотические свойства ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы в задаче оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 1993. № 9. С. 61–78.

8. *Кремлёв А.Г.* Об оптимальном управлении ансамблем траекторий сингулярно возмущенной квазилинейной системы // Диф. уравнения. 1994. Т. 30, № 11. С. 1892–1904.

9. *Кремлёв А.Г., Гребенникова И.В.* Об асимптотике оптимального управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием // Математика. Информационные технологии. Образование: Материалы науч.-прктич. конф. Ч. 1. Оренбург: Изд-во ГОУ ОГУ, 2006. С. 36–38.

10. *Гребенникова И.В., Кремлёв А.Г.* О начальной аппроксимации минимаксной задачи управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием // Качество науки — качество жизни: Материалы науч.-прктич. конф. Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2007. С. 89–92.

11. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 492 с.

12. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 192 с.

13. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 547 с.

14. *Кремлёв А.Г., Гребенникова И.В.* Об асимптотике ансамбля траекторий управляемой сингулярно возмущенной системы с запаздыванием // Новости научной мысли – 2006: Материалы науч.-прктич. конф. Т. 4. Днепропетровск: Наука и образование, 2006. С. 65–69.

15. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 498 с.

УДК 519.872

МЕТОД АНАЛИЗА СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДИНАМИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ ИНТЕНСИВНОСТЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

В.И. Долгов, Ю.И. Митрофанов, Е.С. Рогачко

Саратовский государственный университет,
кафедра системного анализа и автоматического управления
E-mail: DolgovVI@sysan.ru, MitrophanovYuI@info.sgu.ru, RogachkoES@info.sgu.ru

Предлагаются модель эволюции и метод анализа замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания с динамическим управлением интенсивностями обслуживания. Приводятся способ вычисления стационарного распределения и формулы для вычисления стационарных характеристик сетей. Дается пример анализа сети обслуживания рассматриваемого типа. Как показали результаты анализа и имитационного моделирования данной сети, метод имеет достаточную для практических приложений точность.

Ключевые слова: сети массового обслуживания, интенсивности обслуживания, управление интенсивностями обслуживания, анализ сетей массового обслуживания.

Method for Analysis of Queueing Networks with Dynamic Control of Service Rates

V.I. Dolgov, Yu.I. Mitrophanov, E.S. Rogachko

Saratov State University,
Chair of Systems Analysis and Automatic Control
E-mail: DolgovVI@sysan.ru, MitrophanovYuI@info.sgu.ru, RogachkoES@info.sgu.ru

Model of evolution and a method for analysis of closed exponential queueing networks with dynamic control of service rates are proposed. A method of computing of the stationary distribution and formulas for calculating of stationary characteristics of the networks are presented. An example of analysis of considered type queueing network is given. According to the results of analysis and simulation of this network the accuracy of this method is sufficient for practical application.

Key words: queueing networks, service rates, service rates control, analysis of queueing networks.

© В.И. Долгов, Ю.И. Митрофанов, Е.С. Рогачко, 2009

ВВЕДЕНИЕ

Разработка и исследование методов управления интенсивностями обслуживания в сетях массового обслуживания и методов анализа сетей обслуживания с управлением интенсивностями обслуживания являются актуальными направлениями развития теории сетей массового обслуживания. Практическое значение этих направлений определяется широким использованием сетей массового обслуживания в качестве математических моделей дискретных систем с управлением, сетевой структурой и стохастическим характером функционирования. Интенсивности обслуживания требований системами обслуживания, входящими в состав сетей массового обслуживания, являются параметрами, в существенной степени определяющими качество функционирования сетей. Поэтому проблемам, связанным с исследованием влияния интенсивностей обслуживания на функционирование сетей обслуживания, определением оптимальных интенсивностей обслуживания, управлением интенсивностями обслуживания уделяется значительное внимание в современной теории сетей массового обслуживания. При решении задач нахождения оптимальных интенсивностей обслуживания используются известные методы решения оптимизационных задач, такие как линейное, нелинейное и динамическое программирование [1–3], марковские и полумарковские процессы принятия решений [4, 5]. Значительный интерес представляют задачи анализа сетей обслуживания с интенсивностями обслуживания, зависящими от состояния систем массового обслуживания, подсетей или сети в целом. В качестве примера можно привести работы [6–9], посвященные разработке и развитию методов анализа сетей массового обслуживания этого класса.

В данной работе предлагается метод анализа замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания с одним классом требований и динамическим управлением интенсивностями обслуживания [10]. В одной системе сети число обслуживающих приборов равно числу требований в сети, а остальные системы обслуживания (базисные системы) являются одноприборными. В сети используется централизованная система управления, осуществляющая идентификацию состояний сети в моменты окончания фиксированных интервалов времени — тактов. В зависимости от состояния сети системой управления могут быть изменены интенсивности обслуживания в базисных системах, в этом случае в течение очередного такта в них используются оптимальные значения интенсивностей обслуживания. Основными характеристиками качества функционирования сети являются математическое ожидание длительности пребывания требований в базисной подсети, включающей все базисные системы обслуживания, и вероятность пребывания сети в состояниях, в которых число требований в базисной подсети превышает заданное. Целью динамического управления интенсивностями обслуживания в сети является уменьшение значений этих характеристик. При анализе сети рассматриваемого типа используется моделирование эволюции сети цепями Маркова с соответствующими параметрами. В работе приводится способ вычисления стационарного распределения вероятностей состояний сети с управлением интенсивностями обслуживания, даются формулы для нахождения некоторых других стационарных характеристик сети.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть N — замкнутая сеть массового обслуживания с Q требованиями одного класса, одной системой обслуживания S_0 типа $M/M/Q$ с интенсивностью μ_0 обслуживания требований одним прибором, L системами обслуживания S_i, $i = 1, \ldots, L$, типа $M/M/1$ с интенсивностями обслуживания μ_i и неприводимой маршрутной матрицей $\Theta = (\theta_{ij})$, $i, j = 0, 1, \ldots, L$. Состояние с номером n сети определяется вектором $s^{(n)} = (s_i^{(n)})$, $i = 0, 1, \ldots, L$, где $s_i^{(n)}$ — число требований, находящихся в системе S_i. Обозначим через X множество состояний сети, $c_X = |X|$, $B = \{1, \ldots, c_X\}$ — множество номеров состояний сети, $I = \{0, 1, \ldots, L\}$ — множество номеров систем в сети, H — базисную подсеть, включающую базисные системы S_i, $i = 1, \ldots, L$, $J = \{1, \ldots, L\}$ — множество номеров систем в подсети H.

Сеть массового обслуживания, структура, параметры и алгоритмы функционирования которой такие же, как у сети N, и которая отличается от N только тем, что в ней реализовано динамическое управление интенсивностями обслуживания в базисных системах, обозначим через N^c. Для параметров и характеристик сети N^c используются введенные для соответствующих параметров и ха-

рактеристик сети N обозначения с индексом c. В частности, число требований в подсети H сетей N и N^c обозначается соответственно через Q_H и Q_H^c. Целью управления интенсивностями обслуживания в N^c является уменьшение математического ожидания (м.о.) длительности реакции $\bar{\zeta}^c$ сети N^c для системы S_0 (м.о. длительности пребывания требований в подсети H) и вероятности ρ^c пребывания этой сети в состояниях, в которых Q_H^c больше математического ожидания $\bar{Q}_H$ числа требований в подсети H сети N.

Различаются два режима эволюции сети N^c — нормальный и коррективный. Периоды эволюции сети в этих режимах называются соответственно нормальными и коррективными тактами. Обозначим через $x^{(k)}$ такт с номером $k \in \{1, 2, \ldots\}$, $\tau^{(k)}$ — момент окончания такта $x^{(k)}$, φ — длительность такта, $Q_H^{(k)}$ — число требований в H в момент $\tau^{(k)}$. В момент $\tau^{(k)}$ проверяется выполнение неравенства $Q_H^{(k)} \le \bar{Q}_H$. Если неравенство выполняется, то такт $x^{(k+1)}$ считается нормальным, и в течение этого такта используется вектор $\mu^{(k+1)} = \mu = (\mu_i)$, $i = 1, \ldots, L$, в противном случае этот такт — коррективный, формируется зависящий от $Q_H^{(k)}$ вектор $\tilde{\mu}^{(k+1)}$, значения компонент которого направляются базисным системам и используются в течение $x^{(k+1)}$. Округлим с избытком $\bar{Q}_H$ до целого числа b, тогда при $b < Q$ имеем множество $\{b, b+1, \ldots, Q\}$ возможных значений $Q_H^{(k)} > \bar{Q}_H$. Для значения $Q_H^{(k)} > \bar{Q}_H$ находится в соответствии с алгоритмом, приведенным в [10], вектор оптимальных интенсивностей обслуживания $\tilde{\mu}^{(k+1)} = \mu^{(r)} = (\mu_i^{(r)})$, $r \in R = \{1, \ldots, D\}$, $D = Q - b + 1$, используемый в течение коррективного такта $x^{(k+1)}$. Вектор $\mu^{(r)}$ является решением следующей задачи оптимизации: минимизировать $\sum\limits_{i=1}^{L} a_i \mu_i^{(r)}$ при ограничении $\bar{\zeta} \le U$, где $a_i \mu_i^{(r)}$, $0 < a_i < \infty$, $i \in J$, — стоимость системы S_i при использовании в ней интенсивности обслуживания $\mu_i^{(r)}$, U — заданная величина. Решение находится методом множителей Лагранжа. Вектор $\mu^{(r)}$ обеспечивает выполнение приближенного равенства $Q_H^{(k+1)} \approx \bar{Q}_H$.

Определим разбиение множества X состояний сети N^c на подмножества $X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(D)}$, такие что

$$X^{(0)} = \{s^{(n)} \in X \,|\, 0 \le Q_H^c \le b - 1\},$$

$$X^{(r)} = \{s^{(n)} \in X \,|\, Q_H^c = r + b - 1\}, \qquad r = 1, \ldots, D.$$

Множество $X^{(r)}$, $r \in \{0, 1, \ldots, D\}$, назовем агрегированным состоянием с номером r сети N^c; множество номеров агрегированных состояний $E = \{0, 1, \ldots, D\}$. Обозначим через $B^{(r)}$, $r \in E$, множество номеров состояний сети N^c из множества $X^{(r)}$.

2. МОДЕЛИ И АНАЛИЗ СЕТИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Эволюция сети N^c описывается случайным процессом Ξ с непрерывным временем и конечным множеством состояний B, который представляет собой последовательность фрагментов, соответствующих нормальным и коррективным тактам функционирования сети. Из определения сети N^c следует, что фрагментами реализаций процесса Ξ являются реализации цепей Маркова $\hat{C}$ и $\tilde{C}^{(r)}$, $r \in R$, с множеством состояний B и непрерывным временем. Эволюция сети N^c в течение нормальных тактов описывается цепью $\hat{C}$ с множеством начальных состояний $B^{(0)}$, а в течение коррективных тактов — цепями $\tilde{C}^{(r)}$ с множествами начальных состояний $B^{(r)}$ соответственно. Длительности реализаций цепей $\hat{C}$ и $\tilde{C}^{(r)}$ равны φ.

Обозначим через $\hat{A} = (\hat{a}_{mn})$, $m, n = 1, \ldots, c_X$, инфинитезимальный оператор цепи $\hat{C}$, а через $\hat{P}^{(t)} = (\hat{p}_{mn}^{(t)})$ матрицу вероятностей перехода этой цепи за время t. Имеем

$$\hat{a}_{mn} = \alpha_i(s_i^{(m)}) \mu_i \theta_{ij}, \quad m \ne n, \quad i, j \in I, \quad i \ne j,$$

$$\hat{a}_{nn} = -\sum_{i=0}^{L} \alpha_i(s_i^{(n)}) \mu_i,$$

где $\alpha_i(x) = \min(x, \kappa_i)$, $0 \le x \le Q$, $\kappa_0 = Q$, $\kappa_i = 1$, $i = 1, \ldots, L$ (κ_i, $i \in I$, — число приборов в S_i). При вычислении $\hat{P}^{(t)}$ используется известное соотношение $\hat{P}^{(t)} = e^{\hat{A}t}$ [11].

Для параметров цепи $\tilde{C}^{(r)}$ используются введенные для цепи $\hat{C}$ соответствующие обозначения со знаком $\sim$ и индексом r, в частности, $\tilde{A}^{(r)} = (\tilde{a}_{mn}^{(r)})$, $m, n = 1, \ldots, c_X$, — инфинитезимальный оператор,

$\tilde{P}^{(t),(r)} = (\tilde{p}_{mn}^{(t),(r)})$ — матрица вероятностей перехода за время t цепи $\tilde{C}^{(r)}$. Тогда

$$\tilde{a}_{mn}^{(r)} = \alpha_i(s_i^{(m)})\mu_i^{(r)}\theta_{ij}, \quad m \neq n, \quad i,j \in I, \quad i \neq j,$$

$$\tilde{a}_{nn}^{(r)} = -\sum_{i=0}^{L} \alpha_i(s_i^{(n)})\mu_i^{(r)}.$$

Теорема. *При заданном значении φ стационарное распределение $\pi = (\pi_n)$, $n = 1, \ldots, c_X$, сети N^c существует, является единственным и удовлетворяет уравнению $\pi = \pi P$, где $P = (p_{mn})$, $m, n = 1, \ldots, c_X$, $p_{mn} = \begin{cases} \hat{p}_{mn}^{(\varphi)}, & m \in B^{(0)}, \\ \tilde{p}_{mn}^{(\varphi),(r)}, & m \in B^{(r)},\ r \in R. \end{cases}$*

Доказательство. Так как множество состояний сети является конечным и существенным, а все состояния — устойчивыми, стационарное распределение сети N^c существует и является единственным. Из определения процесса Ξ следует, что стационарное распределение сети N^c совпадает со стационарным распределением процесса Ξ. Так как реализация процесса Ξ представляет собой последовательность конечных реализаций цепей $\hat{C}$ и $\tilde{C}^{(r)}$, характеристики процесса Ξ определяются параметрами этих цепей и длительностями их реализаций. В стационарном режиме процесса Ξ вероятности $\hat{p}_{mn}^{(\varphi)}$, $m \in B^{(0)}$, и $\tilde{p}_{mn}^{(\varphi),(r)}$, $m \in B^{(r)}$, являются вероятностями окончания реализаций цепей $\hat{C}$ и $\tilde{C}^{(r)}$, $r \in R$, в состоянии $n \in B$ при начале их эволюции из состояния m. Поэтому

$$\pi_n = \sum_{m \in B^{(0)}} \pi_m \hat{p}_{mn}^{(\varphi)} + \sum_{r=1}^{D} \sum_{m \in B^{(r)}} \pi_m \tilde{p}_{mn}^{(\varphi),(r)}, \quad n \in B, \quad \text{или} \quad \pi = \pi P,$$

где P — матрица вероятностей перехода процесса Ξ. □

Очевидно,

$$\rho^c = \sum_{r=1}^{D} \sum_{s^{(n)} \in X^{(r)}} \pi_n.$$

При вычислении стационарных характеристик сети N^c используется м.о. интенсивностей обслуживания в базисных системах

$$\bar{\mu}_i^c = \mu_i \sum_{s^{(n)} \in X^{(0)}} \pi_n + \sum_{r=1}^{D} \mu_i^{(r)} \sum_{s^{(n)} \in X^{(r)}} \pi_n, \qquad i = 1, \ldots, L.$$

Обозначим через $\bar{s}_i^c$ м.о. числа требований в системе S_i сети N^c; ψ_i^c — коэффициент использования обслуживающих приборов системы S_i; λ_i^c — интенсивность входящего в систему S_i потока требований; $\bar{u}_i^c$ — м.о. длительности пребывания требований в системе S_i.

Тогда $\bar{s}_i^c = \sum\limits_{k=1}^{Q} kP\{s_i = k\}$, $i = 0, 1, \ldots, L$, где $P\{s_i = k\} = \sum\limits_{s^{(n)} \in X\ \&\ s_i^{(n)} = k} \pi_n$. Учитывая, что $\kappa_0 = Q$, $\kappa_i = 1$, $i = 1, \ldots, L$, получим

$$\psi_0^c = \bar{s}_0^c/Q, \qquad \psi_i^c = 1 - P\{s_i = 0\}, \quad i = 1, \ldots, L,$$
$$\lambda_0^c = \mu_0 \bar{s}_0^c, \qquad \lambda_i^c = \bar{\mu}_i^c(1 - P\{s_i = 0\}), \quad i = 1, \ldots, L.$$

По формуле Литтла [12]

$$\bar{u}_0^c = 1/\mu_0, \qquad \bar{u}_i^c = \bar{s}_i^c/\lambda_i^c, \quad i = 1, \ldots, L.$$

Математическое ожидание длительности реакции сети N^c для S_0 вычисляется по формуле

$$\bar{\zeta}^c = \frac{1}{\mu_0 \bar{s}_0^c} \sum_{i=1}^{L} \bar{s}_i^c.$$

3. ПРИМЕР

Пусть задана сеть массового обслуживания N со следующими параметрами:

$$L = 3, \qquad Q = 8, \qquad \mu = (0.5, 2.3, 0.9, 1.7), \qquad \Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда $c_X = 165$, $\bar{Q}_H = 5.66$, $D = 3$, $R = \{1, 2, 3\}$, $|E| = 4$.

При окончании нормального такта в состоянии $X^{(r)}$, $r \in R$, в течение следующего коррективного такта в сети N^c используется вектор интенсивностей обслуживания $\mu^{(r)}$, зависящий от длительности такта φ и формируемый в соответствии с методом, изложенным в работе [10]. При формировании вектора $\mu^{(r)}$ предполагается, что $a_i = 1$, $i = 1, 2, 3$, $U = 2$. В частности, если в момент окончания нормального такта сеть N^c находится в одном из состояний $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ или $X^{(3)}$, а $\varphi = 1$, то будет использоваться один из векторов $\mu^{(1)} = (2.3, 2.1, 2.2)$, $\mu^{(2)} = (2.9, 2.7, 2.7)$ или $\mu^{(3)} = (3.5, 3.3, 3.3)$ соответственно.

В таблице приведены значения характеристик ρ^c, $\bar{\zeta}^c$ качества функционирования сети N^c и полученные методом имитационного моделирования их оценки ρ_s^c, $\bar{\zeta}_s^c$ при различных значениях φ. Результаты имитационного моделирования получены с доверительной вероятностью 0.95 и доверительным интервалом 10% от значения оценки. При отсутствии управления в сети N $\rho = 0.58$, $\bar{\zeta} = 4.85$.

Из таблицы видно, что качество функционирования сети N^c при малых значениях φ существенно выше, чем у сети N. Это свидетельствует о достаточно высокой эффективности метода динамического управления интенсивностями обслуживания. Из сравнения результатов аналитического и имитационного моделирования заключаем, что максимальная разность величин ρ^c и ρ_s^c, $\bar{\zeta}^c$ и $\bar{\zeta}_s^c$ не превышает 10% от значений соответствующих характеристик, что свидетельствует о достаточной для практических приложений точности метода анализа.

Зависимость от φ характеристик ρ^c, $\bar{\zeta}^c$ и оценок ρ_s^c, $\bar{\zeta}_s^c$

φ	ρ^c	ρ_s^c	$\bar{\zeta}^c$	$\bar{\zeta}_s^c$
0.1	0.16	0.15	2.40	2.29
0.2	0.22	0.21	2.57	2.44
0.5	0.29	0.28	2.82	2.69
1	0.34	0.33	3.01	2.88
2	0.37	0.37	3.19	3.06
5	0.41	0.40	3.38	3.24
10	0.43	0.41	3.51	3.34
20	0.44	0.42	3.57	3.35
50	0.45	0.43	3.58	3.39
100	0.45	0.44	3.58	3.41

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен приближенный метод анализа замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания с динамическим управлением интенсивностями обслуживания. Данный метод обеспечивает возможность определения с удовлетворительной точностью стационарных характеристик сети обслуживания рассматриваемого класса при различных длительностях тактов, в моменты окончания которых сеть может находиться в переходном режиме функционирования. Поэтому он расширяет возможности анализа сетей обслуживания с динамическим управлением интенсивностями обслуживания по сравнению с предложенным в работе [10] методом анализа сетей данного класса, основанным на предположении о достижении сетью в моменты окончания тактов режима, близкого к стационарному. Длительность такта в сетях этого класса, являясь одним из основных параметров метода управления, в существенной степени определяет качество функционирования сетей. Таким образом, актуальными являются не только анализ сетей этого класса при заданной длительности такта, но и задачи выбора близкой к оптимальной длительности такта, при решении которых может быть использован предложенный в данной работе метод анализа сетей.

Библиографический список

1. *Alidrisi M.* Linear programming model for the optimal control of a queueing network // Intern. J. Syst. Sci. 1987. V. 18. P. 1079–1089.

2. *Azaron A., Ghomi S.M.* Optimal control of the service rates and arrivals in Jackson networks // Eur. J. Oper. Res. 2003. V. 147, № 1. P. 17–31.

3. *Weber R.R., Stidham S.* Optimal control of service rates in networks of queues // Advances in Applied Probability. 1987. V. 19. P. 202–218.

4. *Jo K.Y.* Decomposition approximation of queueing-network control models with tree structures // Annals of Operations Research. 1987. V. 8. P. 117–132.

5. *Alidrisi M.* Optimal control of the service rate of an exponential queueing network using Markov decision theory // Intern. J. Syst. Sci. 1990. V. 21. P. 2553–2563.

6. *Bruell S.C., Balbo G., Afshari P.V.* Mean value analysis of mixed, multiple class BCMP networks with load dependent service stations // Performance Evaluation. 1984. V. 4. P. 241–260.

7. *Mitra D., McKenna J.* Asymptotic expansions for closed Markovian networks with state-dependent service rates // J. of the Association for Computing Machinery. 1986. V. 33, № 3. P. 568–592.

8. *Ляхов А.И.* Асимптотический анализ замкнутых сетей очередей, включающих устройства с переменной интенсивностью обслуживания // Автоматика и телемеханика. 1997. № 3. С. 131–143.

9. *Mandelbaum A., Massey W.A., Reiman M.I.* Strong approximations for Markovian service networks // Queueing Systems. 1998. V. 30. P. 149–201.

10. *Митрофанов Ю.И., Долгов В.И.* Динамическое управление интенсивностями обслуживания в сетях массового обслуживания // АВТ. 2008. № 6. С. 44–56.

11. *Баруча-Рид А.Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, ГРФМЛ, 1969. 512 с.

12. *Митрофанов Ю.И.* Анализ сетей массового обслуживания. Саратов: Науч. книга, 2005. 175 с.

УДК 515.14

ПРЕПЯТСТВИЯ К ВЛОЖЕНИЮ РАССЛОЕНИЙ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР В ТРИВИАЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ

А.В. Ершов

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: ershov.andrei@gmail.com

В работе изучаются топологические препятствия к вложению $M_k(\mathbb{C})$-расслоения в тривиальное $M_{kl}(\mathbb{C})$-расслоение при условии $(k,\, l) = 1$. Описана также связь рассматриваемой задачи с теорией расслоений со структурным группоидом.

Ключевые слова: расслоение, топологическое препятствие, характеристический класс, группоид.

Obstructions to Embedding of Matrix Algebra Bundles into a Trivial One

A.V. Ershov

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: ershov.andrei@gmail.com

Topological obstructions to embedding of an $M_k(\mathbb{C})$-bundle into a trivial $M_{kl}(\mathbb{C})$-bundle under the condition $(k,\, l) = 1$ are studied. The relation of this problem to the theory of bundles with a structure groupoid is described.

Key words: bundle, topological obstruction, characteristic class, groupoid.

1. КОГОМОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРЕПЯТСТВИЙ

1.1. Постановка задачи. Пусть X — конечное клеточное пространство, $A_k \xrightarrow{\pi} X$ — локально тривиальное расслоение со слоем комплексная матричная алгебра $M_k(\mathbb{C})$ (таким образом, его «естественной» структурной группой является $\mathrm{Aut}(M_k(\mathbb{C})) \cong \mathrm{PGL}_k(\mathbb{C})$). Зафиксируем натуральное l, взаимно простое с k. Наша задача — описать топологические препятствия к существованию отображения расслоений над X:

$$\mu\colon A_k \to X \times M_{kl}(\mathbb{C}), \tag{1}$$

такого что для любой точки $x \in X$ ограничение $\mu\,|_x$ вкладывает слой $(A_k)_x$ в $M_{kl}(\mathbb{C})$ в качестве унитальной подалгебры.

1.2. Конструкция препятствий. Чтобы применить стандартную технику топологической теории препятствий, сведем задачу о вложениях к задаче о сечениях подходящего расслоения.

Заметим, что группы $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ можно заменить их компактными деформационными ретрактами $\mathrm{PU}(n)$, рассматривая вместо всех унитальных гомоморфизмов матричных алгебр только их $*$-гомоморфизмы.

Пусть $\mathrm{Hom}_{alg}(M_k(\mathbb{C}),\, M_{kl}(\mathbb{C}))$ — множество всех унитальных $*$-гомоморфизмов $M_k(\mathbb{C}) \to M_{kl}(\mathbb{C})$. Из теоремы Нетер – Сколема [1] следует его представление

$$\mathrm{Hom}_{alg}(M_k(\mathbb{C}),\, M_{kl}(\mathbb{C})) \cong \mathrm{PU}(kl)/(E_k \otimes \mathrm{PU}(l)) \tag{2}$$

© А.В. Ершов, 2009

(здесь и ниже символ $\otimes$ обозначает кронекерово произведение матриц) в виде однородного пространства группы $\mathrm{PU}(kl)$. Это пространство обозначим $\mathrm{Fr}_{k,\,l}$. Полученное представление и периодичность Ботта позволяют вычислить его стабильные гомотопические группы:

$$\pi_r(\mathrm{Fr}_{k,\,l}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \ \text{ для } r \text{ нечетного} \quad \text{и} \quad \pi_r(\mathrm{Fr}_{k,\,l}) = 0 \ \text{ для } r \text{ четного}. \tag{3}$$

Пусть $A_k^{univ} \to \mathrm{BPU}(k)$ – универсальное $M_k(\mathbb{C})$-расслоение. Применяя функтор (со значениями в категории топологических пространств) $\mathrm{Hom}_{alg}(\ldots,\, M_{kl}(\mathbb{C}))$ послойно к A_k^{univ}, получаем расслоение

$$\mathrm{H}_{k,\,l}(A_k^{univ}) \xrightarrow{p_{k,\,l}} \mathrm{BPU}(k) \tag{4}$$

со слоем $\mathrm{Fr}_{k,\,l}$.

Пусть $f\colon X \to \mathrm{BPU}(k)$ — классифицирующее отображение для $A_k \xrightarrow{\pi} X$, т.е. $A_k = f^*(A_k^{univ})$.

Предложение 1. *Существует взаимно однозначное соответствие между вложениями* (1) *и подъемами в* (4)

$$\widetilde{f}\colon X \to \mathrm{H}_{k,\,l}(A_k^{univ}), \qquad p_{k,\,l} \circ \widetilde{f} = f,$$

классифицирующего отображения f.

Доказательство очевидно. □

1.3. Первое препятствие. Применяя теорию препятствий, с учетом (3) получаем, что первое препятствие к существованию подъема $\widetilde{f}$ — некоторый характеристический класс $\bar{\omega}_1(A_k) = f^*\bar{\omega}_1 \in H^2(X,\, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ расслоения $A_k \xrightarrow{\pi} X$, где $\bar{\omega}_1 \in H^2(\mathrm{BPU}(k),\, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$.

Теорема 1. *Класс* $\bar{\omega}_1$ *— образующая в* $H^2(\mathrm{BPU}(k),\, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

Доказательство. Идея состоит в том, что существует гомотопическая эквивалентность $\tau_{k,\,l}\colon \mathrm{H}_{k,\,l}(A_k^{univ}) \simeq \mathrm{Gr}_{k,\,l}$ между тотальным пространством расслоения (4) и так называемым матричным грассманианом

$$\mathrm{Gr}_{k,\,l} := \mathrm{PU}(kl)/(\mathrm{PU}(k) \otimes \mathrm{PU}(l)) \tag{5}$$

— однородным пространством, параметризующим унитальные $*$-подалгебры в $M_{kl}(\mathbb{C})$, изоморфные $M_k(\mathbb{C})$ (*k-подалгебры*). Отображение $\tau_{k,\,l}$ задается так: для $h \in \mathrm{H}_{k,\,l}(A_k^{univ})$, $p_{k,\,l}(h) = x$ $\tau_{k,\,l}(h)$ есть точка в $\mathrm{Gr}_{k,\,l}$, отвечающая k-подалгебре $h((A_k^{univ})_x) \subset M_{kl}(\mathbb{C})$. Заметим, что $\tau_{k,\,l}$ в действительности есть расслоение со стягиваемыми слоями $\mathrm{EPU}(k)$ (последнее обозначает тотальное пространство универсального $\mathrm{PU}(k)$-расслоения).

Представление (2) показывает, что $\mathrm{Fr}_{k,\,l}$ имеет структуру главного $\mathrm{PU}(k)$-расслоения над $\mathrm{Gr}_{k,\,l}$. Пусть $\lambda_{k,\,l}\colon \mathrm{Gr}_{k,\,l} \to \mathrm{BPU}(k)$ — его классифицирующее отображение. Тогда нетрудно показать, что $\lambda_{k,\,l} \circ \tau_{k,\,l} \simeq p_{k,\,l}$. Теперь, используя условие $(k,\, l) = 1$, мы можем вычислить интересующий нас кусок гомотопической последовательности расслоения (4):

$$\pi_2(\mathrm{H}_{k,\,l}(A_k^{univ})) = 0 \to \pi_2(\mathrm{BPU}(k)) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathrm{Fr}_{k,\,l}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \to \pi_1(\mathrm{H}_{k,\,l}(A_k^{univ})) = 0.$$

Рассмотрим гомоморфизм групп $\pi_2(\mathrm{BPU}(k)) \to H^2(S^2,\, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$, $[g] \mapsto g^*\bar{\omega}_1$, где $[g]$ обозначает гомотопический класс отображения $g\colon S^2 \to \mathrm{BPU}(k)$. Это изоморфизм. Действительно, в силу $\pi_2(\mathrm{H}_{k,\,l}(A_k^{univ})) = 0$ мы видим, что подъем в (4) существует только для отображения $g\colon S^2 \to \mathrm{BPU}(k)$, гомотопический класс которого тривиален, а значит, из $[g] \neq 0$ следует $g^*\bar{\omega}_1 \neq 0$, поскольку это единственное препятствие в данном случае. □

Легко видеть, что характеристический класс $f^*\bar{\omega}_1$ может быть также описан, как препятствие к редукции структурной группы расслоения $A_k = f^*(A_k^{univ})$ с $\mathrm{PU}(k)$ до $\mathrm{SU}(k)$. Поэтому структурная группа всякого расслоения A_k, допускающего вложение в $X \times M_{kl}(\mathbb{C})$, $(k,\, l) = 1$, редуцируется к $\mathrm{SU}(k)$.

Рассмотрим случай, когда $A_k = \mathrm{End}(\xi_k)$, где $\xi_k \to X$ — векторное $\mathbb{C}^k$-расслоение (заметим, что препятствием к такому представлению является класс $\delta(\bar{\omega}_1(A_k)) \in H^3(X,\, \mathbb{Z})$, где $\delta\colon H^2(X,\, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \to H^3(X,\, \mathbb{Z})$ — кограничный гомоморфизм, отвечающий коэффициентной последовательности $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/kZ \to 0$).

Теорема 2. *Для* $A_k = \mathrm{End}(\xi_k)$ *первое препятствие в рассматриваемой задаче есть* $c_1(\xi_k) \bmod k \in H^2(X,\, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$, *где* c_1 *— первый класс Чженя.*

Доказательство. Конструкцию, аналогичную той, которая привела к (4), можно применить к $\mathrm{End}(\xi_k^{univ}) \to \mathrm{BU}(k)$, где $\xi_k^{univ} \to \mathrm{BU}(k)$ — универсальное векторное $\mathbb{C}^k$-расслоение; это даст $\mathrm{Fr}_{k,\,l}$-расслоение:

$$\mathrm{H}_{k,\,l}(\mathrm{End}(\xi_k^{univ})) \to \mathrm{BU}(k). \tag{6}$$

Это расслоение — обратный образ (4) относительно отображения классифицирующих пространств $\vartheta_k\colon \mathrm{BU}(k) \to \mathrm{BPU}(k)$, индуцированного гомоморфизмом групп $\mathrm{U}(k) \to \mathrm{PU}(k)$, являющимся факторизацией по центру. Отсюда легко видеть, что первое препятствие к существованию вложения для $\mathrm{End}(\xi_k)$ есть характеристический класс $\omega_1 := \vartheta_k^*(\bar{\omega}_1) \in H^2(\mathrm{BU}(k),\, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$, который равен $c_1 \bmod k$. □

То, что $c_1 \bmod k$ является препятствием к редукции структурной группы расслоения $\mathrm{End}(\xi_k)$ к $\mathrm{SU}(k)$, показывает следующее рассуждение. Имеем $c_1(\xi_k) \equiv 0 \bmod k \Leftrightarrow c_1(\xi_k) = k\alpha,\ \alpha \in H^2(X,\, \mathbb{Z})$. Возьмем линейное расслоение $\zeta \to X$, такое что $c_1(\zeta) = -\alpha$. Тогда $c_1(\xi_k \otimes \zeta) = c_1(\xi_k) + kc_1(\zeta) = 0$, т.е. $\xi_k \otimes \zeta$ есть расслоение со структурной группой $\mathrm{SU}(k)$. С другой стороны, $\mathrm{End}(\xi_k) = \mathrm{End}(\xi_k \otimes \zeta)$.

1.4. Второе препятствие. Предположим теперь, что для расслоения $A_k \xrightarrow{\pi} X$ первое препятствие равно 0, тогда, как мы показали ранее, $A_k \cong \mathrm{End}(\widetilde{\xi}_k)$, где $\widetilde{\xi}_k \to X$ — векторное $\mathbb{C}^k$-расслоение со структурной группой $\mathrm{SU}(k)$. Эквивалентно, классифицирующее отображение $f\colon X \to \mathrm{BPU}(k)$ можно поднять до $\widehat{f}\colon X \to \mathrm{BSU}(k)$. Из (3) теперь мы видим, что следующее препятствие лежит в $H^4(X,\, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$.

Теорема 3. *Второе препятствие — в точности $c_2(\widetilde{\xi}_k) \bmod k$, второй класс Чженя расслоения $\widetilde{\xi}_k$, приведенный по модулю k.*

Доказательство. Заметим, что пространство $\widetilde{\mathrm{Fr}}_{k,\,l} := \mathrm{SU}(kl)/(E_k \otimes \mathrm{SU}(l))$ — универсальное накрытие для $\mathrm{Fr}_{k,\,l}$ (ср. (2)). Заметим также, что конструкция расслоения (4) показывает, что оно ассоциировано с универсальным главным $\mathrm{PU}(k)$-расслоением $\mathrm{EPU}(k) \to \mathrm{BPU}(k)$ относительно соответствующего (правого) действия $\mathrm{PU}(k)$ на слое $\mathrm{Fr}_{k,\,l} = \mathrm{Hom}_{alg}(M_k(\mathbb{C}),\, M_{kl}(\mathbb{C}))$.

Легко видеть, что существует коммутативная диаграмма расслоений:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Fr}_{k,\,l} \arrow[r] & \mathrm{EPU}(k) \underset{\mathrm{PU}(k)}{\times} \mathrm{Fr}_{k,\,l} \arrow[d, "p_{k,\,l}"] \\
\widetilde{\mathrm{Fr}}_{k,\,l} \arrow[ur] \arrow[r] & \mathrm{ESU}(k) \underset{\mathrm{SU}(k)}{\times} \widetilde{\mathrm{Fr}}_{k,\,l} \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[d] & \mathrm{BPU}(k) \\
 & \mathrm{BSU}(k) \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \tag{7}$$

Здесь $p_{k,\,l}$ — расслоение (4), причем тотальные пространства гомотопически эквивалентны. Из $\pi_3(\widetilde{\mathrm{Fr}}_{k,\,l}) = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ следует, что препятствие есть характеристический класс $\omega_2 \in H^4(\mathrm{BSU}(k),\, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$. Поскольку $c_2(\widetilde{\xi}_k^{univ}) \bmod k$, где $\widetilde{\xi}_k^{univ} \to \mathrm{BSU}(k)$ — универсальное $\mathrm{SU}(k)$-расслоение, является образующей для $H^4(\mathrm{BSU}(k),\, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, имеем:

$$\omega_2 = \alpha c_2(\widetilde{\xi}_k^{univ}) \bmod k \in H^4(\mathrm{BSU}(k), \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}), \qquad \alpha \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Кусок гомотопической последовательности для нижнего расслоения в (7)

$$\pi_4(\widetilde{\mathrm{Fr}}_{k,\,l}) \to \pi_4(\mathrm{ESU}(k) \underset{\mathrm{SU}(k)}{\times} \widetilde{\mathrm{Fr}}_{k,\,l}) \to \pi_4(\mathrm{BSU}(k)) \to \pi_3(\widetilde{\mathrm{Fr}}_{k,\,l}) \to \pi_3(\mathrm{ESU}(k) \underset{\mathrm{SU}(k)}{\times} \widetilde{\mathrm{Fr}}_{k,\,l})$$

имеет вид

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \to 0.$$

Следовательно, образ $\pi_4(\mathrm{ESU}(k) \underset{\mathrm{SU}(k)}{\times} \widetilde{\mathrm{Fr}}_{k,\,l}) \hookrightarrow \pi_4(\mathrm{BSU}(k))$ — подгруппа индекса k. Полагая $X = S^4$ и рассуждая, как в конце доказательства теоремы 1, получаем, что α в (8) обратимо по модулю k. □

1.5. Высшие препятствия. В общем случае «высшие» препятствия лежат в $H^{2r}(X,\, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$, $r \in \mathbb{N}$, но для $r > 2$ они уже не совпадают с обычными классами Чженя, приведенными по модулю k.

Чтобы это показать, возьмем $X = S^8$ и рассмотрим 6-мерное векторное расслоение $\xi_6 \to S^8$. Хорошо известно [2], что для S^{2r} классы Чженя векторных расслоений образуют подгруппу индекса $(r-1)!$ в $H^{2r}(S^{2r}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. В частности, в нашем случае $r = 4$, $k = 6$ имеем $c_4(\xi_6) \equiv 0 \pmod 6$, но из гомотопической последовательности расслоения (4) следует, что не каждое такое расслоение имеет подъем.

Однако теоремы 2 и 3 можно обобщить следующим образом. Пусть $\iota\colon \mathrm{BU}\langle 2r\rangle \to \mathrm{BU}$ — $(2r-1)$-связное накрытие BU (т.е. его первая нетривиальная гомотопическая группа лежит в размерности $2r$). Например, $\mathrm{BU}\langle 2\rangle = \mathrm{BU}$, $\mathrm{BU}\langle 4\rangle = \mathrm{BSU}, \ldots$ Тогда известно [3], что образ r-го класса Чженя при гомоморфизме $\iota^*\colon H^*(\mathrm{BU}, \mathbb{Z}) \to H^*(\mathrm{BU}\langle 2r\rangle, \mathbb{Z})$ делится на $(r-1)!$ (заметим, что этот результат обобщает приведенный выше факт о классах Чженя расслоений над сферами). Положим $\widetilde{c}_r := \frac{\iota^*(c_r)}{(r-1)!}$.

Теорема 4. *Для расслоений, классифицируемых* $\mathrm{BU}\langle 2r\rangle$*, первое нетривиальное препятствие в нашей задаче есть класс* $\widetilde{c}_r \bmod k$.

Доказательство. Для $(2r-1)$-связного накрытия $\iota_k\colon \mathrm{BU}(k)\langle 2r\rangle \to \mathrm{BU}(k)$, $k > r$ пространства $\mathrm{BU}(k)$ рассмотрим $\mathrm{Fr}_{k,l}$-расслоение $\iota_k^*(\mathrm{H}_{k,l}(\mathrm{End}(\xi_k^{univ}))) \to \mathrm{BU}(k)\langle 2r\rangle$, индуцированное из (6). Ясно, что первое препятствие к подъему в этом расслоении — некоторый характеристический класс $\omega_r \in H^{2r}(\mathrm{BU}(k)\langle 2r\rangle, \pi_{2r-1}(\mathrm{Fr}_{k,l})) = H^{2r}(\mathrm{BU}(k)\langle 2r\rangle, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Используя гомотопическую последовательность расслоения, нетрудно посчитать, что $\pi_{2r}(\iota_k^*(\mathrm{H}_{k,l}(\mathrm{End}(\xi_k^{univ})))) \cong \mathbb{Z}$ и что образ вложения $\pi_{2r}(\iota_k^*(\mathrm{H}_{k,l}(\mathrm{End}(\xi_k^{univ})))) \hookrightarrow \pi_{2r}(\mathrm{BU}(k)\langle 2r\rangle) \cong \mathbb{Z}$ — подгруппа индекса k. Теперь, используя аргумент с S^{2r} как в конце предыдущего доказательства, получаем, что для расслоения $\xi_k \to S^{2r}$, соответствующего образующей $1 \in \pi_{2r}(\mathrm{BU}(k)) \cong \mathbb{Z}$, класс ω_r — образующая в $H^{2r}(S^{2r}, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, т.е. $\omega_r = \widetilde{c}_r \bmod k$, что и требовалось. □

2. СВЯЗЬ С РАССЛОЕНИЯМИ СО СТРУКТУРНЫМ ГРУППОИДОМ

Расслоение (4), возникшее при описании препятствий к вложению (1), является универсальным главным расслоением некоторого топологического группоида $\mathfrak{G}_{k,l}$.

2.1. Группоид $\mathfrak{G}_{k,l}$. Фиксируем комплексную матричную алгебру $M_{kl}(\mathbb{C})$. Напомним, что унитальные $*$-подалгебры в $M_{kl}(\mathbb{C})$, изоморфные $M_k(\mathbb{C})$, мы называем *k-подалгебрами*.

Рассмотрим категорию $C_{k,l}$, объектами которой являются k-подалгебры в $M_{kl}(\mathbb{C})$, а морфизмами из одной k-подалгебры $M_{k,\alpha} \subset M_{kl}(\mathbb{C})$ в другую $M_{k,\beta} \subset M_{kl}(\mathbb{C})$ — множество всех унитальных $*$-гомоморфизмов $M_{k,\alpha} \to M_{k,\beta}$. Легко видеть, что $C_{k,l}$ — группоид, т.е. малая категория, в которой всякий морфизм является изоморфизмом. Кроме того, это топологический группоид (и даже группоид Ли), который мы обозначим $\mathfrak{G}_{k,l}$. Пространство его объектов $\mathfrak{G}^0_{k,l}$ — матричный грассманиан $\mathrm{Gr}_{k,l}$ (5). Пространство морфизмов $\mathfrak{G}_{k,l}$ описывается так. Во-первых, заметим, что матричный грассманиан $\mathrm{Gr}_{k,l}$ — база тавтологического (над точкой $\alpha \in \mathrm{Gr}_{k,l}$ «висит» k-подалгебра $M_{k,\alpha} \subset M_{kl}(\mathbb{C})$, параметризуемая этой точкой) $M_k(\mathbb{C})$-расслоения, которое обозначим $\mathcal{A}_{k,l} \to \mathrm{Gr}_{k,l}$. Применяя к нему послойно функтор $\mathrm{Hom}_{alg}(\ldots, M_{kl}(\mathbb{C}))$, получаем пространство $\mathrm{H}_{k,l}(\mathcal{A}_{k,l})$, которое и есть $\mathfrak{G}_{k,l}$ (ср. (4)).

Будучи группоидом, $\mathfrak{G}_{k,l}$ задано вместе со структурными морфизмами: $s, t\colon \mathfrak{G}_{k,l} \rightrightarrows \mathfrak{G}^0_{k,l}$, композицией $m\colon \mathfrak{G}_{k,l} \underset{s\ \mathfrak{G}^0_{k,l}\ t}{\times} \mathfrak{G}_{k,l} \to \mathfrak{G}_{k,l}$, единицей $e\colon \mathfrak{G}^0_{k,l} \to \mathfrak{G}_{k,l}$ и обращением $i\colon \mathfrak{G}_{k,l} \to \mathfrak{G}_{k,l}$.

Опишем, например, s и t в терминах топологических пространств $\mathrm{Gr}_{k,l} \sim \mathfrak{G}^0_{k,l}$ и $\mathrm{H}_{k,l}(\mathcal{A}_{k,l}) \sim \mathfrak{G}_{k,l}$. Морфизм $s\colon \mathrm{H}_{k,l}(\mathcal{A}_{k,l}) \to \mathrm{Gr}_{k,l}$ — в точности отображение проекции расслоения, индуцированное проекцией тавтологического расслоения $\mathcal{A}_{k,l} \to \mathrm{Gr}_{k,l}$. Морфизм $t\colon \mathrm{H}_{k,l}(\mathcal{A}_{k,l}) \to \mathrm{Gr}_{k,l}$ — отображение $h \mapsto h((\mathcal{A}_{k,l})_\alpha)$, где $h \in \mathrm{H}_{k,l}(\mathcal{A}_{k,l})$, $s(h) = \alpha$, и мы как обычно отождествляем k-подалгебру $h((\mathcal{A}_{k,l})_\alpha)$ с соответствующей точкой $\mathrm{Gr}_{k,l}$.

Заметим, что имеются бифункторы $C_{k,l} \times C_{m,n} \to C_{km,ln}$, индуцированные тензорным произведением матричных алгебр, и соответствующие морфизмы топологических группоидов

$$\mathfrak{G}_{k,l} \times \mathfrak{G}_{m,n} \to \mathfrak{G}_{km,ln}, \tag{9}$$

накрывающие соответствующие отображения $\mathrm{Gr}_{k,l} \times \mathrm{Gr}_{m,n} \to \mathrm{Gr}_{km,ln}$ матричных грассманианов [4].

Для $\alpha \in \mathrm{Ob}(C_{k,l})$ рассмотрим (полную) подкатегорию в $C_{k,l}$ с одним объектом α. Соответствую-

щий морфизм группоидов $\mathrm{PU}(k) \to \mathfrak{G}_{k,\,l}$ — Морита-морфизм, т.е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathrm{PU}(k) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{G}_{k,\,l} \arrow[d, "s\times t"] \\ \alpha \arrow[r] & \mathrm{Gr}_{k,\,l} \times \mathrm{Gr}_{k,\,l} \end{tikzcd}$$

является декартовым квадратом.

2.2. Универсальное главное $\mathfrak{G}_{k,\,l}$-расслоение. Напомним, что для топологической группы G универсальное главное расслоение получается из свободного действия G на стягиваемом пространстве EG. Тогда классифицирующее пространство BG — пространство орбит EG/G этого действия. Понятия главного и универсального главного расслоения естественно обобщаются на случай топологического группоида $\mathfrak{G}$, причем последнее получается из свободного действия $\mathfrak{G}$ на пространстве $\mathrm{E}\mathfrak{G}$, гомотопически эквивалентном пространству объектов $\mathfrak{G}^0$ [5, II. 8] (если группоид является группой, то это сводится к универсальному расслоению группы, поскольку группу можно рассматривать как группоид с единственным объектом).

В доказательстве теоремы 1 мы определили отображение $\tau_{k,\,l}\colon \mathrm{H}_{k,\,l}(A_k^{univ}) \to \mathrm{Gr}_{k,\,l}$, $h \mapsto h((A_k^{univ})_x) \subset M_{kl}(\mathbb{C})$, где $x \in \mathrm{BPU}(k)$ и $h \in p_{k,\,l}^{-1}(x)$, которое является расслоением со стягиваемыми слоями, в частности, гомотопической эквивалентностью; причем, напомним, $\mathrm{Gr}_{k,\,l} = \mathfrak{G}^0_{k,\,l}$.

Имеется свободное действие φ группоида $\mathfrak{G}_{k,\,l}$:

$$\varphi\colon \mathfrak{G}_{k,\,l} \underset{s\ \ \mathrm{Gr}_{k,\,l}}{\times}{}^{\tau} \mathrm{H}_{k,\,l}(A_k^{univ}) \to \mathrm{H}_{k,\,l}(A_k^{univ})$$

($\tau := \tau_{k,\,l}$), определенное с помощью композиции гомоморфизмов алгебр. Точнее, для $g \in \mathfrak{G}_{k,\,l}$, $h \in p_{k,\,l}^{-1}(x)$, $x \in \mathrm{BPU}(k)$, такого что $s(g) = \tau_{k,\,l}(h)$, полагаем $\varphi(g,\,h) := g(h((A_k^{univ})_x)) \subset M_{kl}(\mathbb{C})$ (в частности, $\tau_{k,\,l}(\varphi(g,\,h)) = t(g)$).

Теорема 5. *База главного $\mathfrak{G}_{k,\,l}$-расслоения* $(\mathrm{H}_{k,\,l}(A_k^{univ}),\, \mathfrak{G}_{k,\,l},\, \varphi)$ *есть* $\mathrm{BPU}(k)$ *(ср.* (4)*).*

Доказательство. Нетрудно проверить, что отображение

$$\mathfrak{G}_{k,\,l} \underset{s\ \ \mathfrak{G}^0_{k,\,l}}{\times}{}^{\tau} \mathrm{H}_{k,\,l}(A_k^{univ}) \to \mathrm{H}_{k,\,l}(A_k^{univ}) \underset{\mathrm{BPU}(k)}{\times} \mathrm{H}_{k,\,l}(A_k^{univ}),\ (g,\,p) \mapsto (gp,\,p)$$

является гомеоморфизмом. □

Таким образом, действие φ определяет на расслоении (4) структуру главного $\mathfrak{G}_{k,\,l}$-расслоения. Более того, так как $\tau_{k,\,l}\colon \mathrm{H}_{k,\,l}(A_k^{univ}) \to \mathrm{Gr}_{k,\,l}$ имеет стягиваемые слои, это *универсальное* главное расслоение для $\mathfrak{G}_{k,\,l}$. Тем самым мы доказали гомотопическую эквивалентность $\mathrm{B}\mathfrak{G}_{k,\,l} \simeq \mathrm{BPU}(k)$.

2.3. Частичные изоморфизмы. Пусть, как в п. 1.1 $A_k \xrightarrow{\pi} X$ — $M_k(\mathbb{C})$-расслоение над X и $\mu\colon A_k \hookrightarrow X \times M_{kl}(\mathbb{C})$ $((k,\,l) = 1)$ — отображение расслоений, которое является унитальным $*$-гомоморфизмом алгебр на каждом слое. Таким образом, каждый слой $(A_k)_x$, $x \in X$ можно отождествить с соответствующей k-подалгеброй $\mu|_x((A_k)_x) \subset M_{kl}(\mathbb{C})$ и, фактически, мы рассматриваем тройки $(A_k,\,\mu,\,X \times M_{kl}(\mathbb{C}))$. Пусть $(A'_k,\,\mu',\,X \times M_{kl}(\mathbb{C}))$ — другая тройка этого вида. Предположим что расслоения A_k и A'_k изоморфны и выберем некоторый конкретный $*$-изоморфизм $\vartheta\colon A_k \cong A'_k$.

Заметим, что вложения $\mu,\,\mu'$ определяют соответствующие отображения в матричный грассманиан $f_\mu,\,f_{\mu'}\colon X \to \mathrm{Gr}_{k,\,l}$ и, более того, ϑ, μ и μ' определяют отображение $\nu\colon X \to \mathfrak{G}_{k,\,l}$, такое что $s \circ \nu = f_\mu$, $t \circ \nu = f_{\mu'}$ и $\nu|_x = \mu' \circ \vartheta|_x \circ \mu^{-1}\colon \mu((A_k)_x) \to \mu'((A'_k)_x)$.

Обратно, отображение $\nu\colon X \to \mathfrak{G}_{k,\,l}$ определяет некоторые отображения $f_\mu := s \circ \nu$ и $f_{\mu'} := t \circ \nu\colon X \to \mathrm{Gr}_{k,\,l}$, которые отвечают некоторым тройкам $(A_k,\,\mu,\,X \times M_{kl}(\mathbb{C}))$, $(A'_k,\,\mu',\,X \times M_{kl}(\mathbb{C}))$, и изоморфизм $\vartheta\colon A_k \cong A'_k$.

Такое ν естественно назвать *частичным изоморфизмом* из $(A_k,\,\mu,\,X \times M_{kl}(\mathbb{C}))$ в $(A'_k,\,\mu',\,X \times M_{kl}(\mathbb{C}))$. Частичный изоморфизм, который может быть поднят до «настоящего» автоморфизма тривиального расслоения $X \times M_{kl}(\mathbb{C})$ (т.е. до отображения расслоений $\widetilde{\vartheta}\colon X \times M_{kl}(\mathbb{C}) \to X \times M_{kl}(\mathbb{C})$, такого что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A_k & \xrightarrow{\vartheta} & A'_k \\ \downarrow{\scriptstyle\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\mu'} \\ X \times M_{kl}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\widetilde{\vartheta}} & X \times M_{kl}(\mathbb{C}) \end{array}$$

коммутативна), назовем просто *изоморфизмом*.

Заметим, что не всякий частичный изоморфизм может быть поднят до изоморфизма, что связано с существованием негомотопных вложений μ. Задача подъема эквивалентна редукции структурного группоида [6] и препятствия к ней могут быть явно описаны.

2.4. Действие группоида на слоях забывающего функтора. Рассмотрим функтор

$$(A_k,\, \mu,\, X \times M_{kl}(\mathbb{C})) \mapsto A_k,$$

«забывающий» вложение μ и отвечающий отображению представляющих пространств $\mathrm{Gr}_{k,\,l} \to \to \mathrm{BPU}(k)$ (с гомотопическим слоем $\mathrm{Fr}_{k,\,l}$).

Ранее мы показали, что для $f\colon X \to \mathrm{BPU}(k)$ выбор подъема $\widetilde{f}\colon X \to \mathrm{H}_{k,\,l}(A_k^{univ})$ (если он существует) эквивалентен выбору вложения $\mu\colon f^*(A_k^{univ}) \to X \times M_{kl}(\mathbb{C})$. Такой подъем обозначим через $\widetilde{f}_\mu$.

Для данного $\nu\colon X \to \mathfrak{G}_{k,\,l}$, такого что $s \circ \nu = \tau_{k,\,l} \circ \widetilde{f}_\mu = f_\mu$, $t \circ \nu = f_{\mu'}\colon X \to \mathrm{Gr}_{k,\,l}$, определим композицию $\widetilde{f}_{\mu'}$:

$$X \overset{diag}{\to} X \times X \overset{\nu \times \widetilde{f}_\mu}{\longrightarrow} \mathfrak{G}_{k,\,l} \underset{\mathrm{Gr}_{k,\,l}}{\overset{\tau}{\underset{s}{\times}}} \mathrm{H}_{k,\,l}(A_k^{univ}) \overset{\varphi}{\to} \mathrm{H}_{k,\,l}(A_k^{univ}),$$

которая есть другой подъем f ($p_{k,\,l} \circ \widetilde{f}_\mu = f = p_{k,\,l} \circ \widetilde{f}_{\mu'}$), т.е. отвечает другому (вообще говоря, гомотопически неэквивалентному) вложению $\mu'\colon f^*(A_k^{univ}) \to X \times M_{kl}(\mathbb{C})$, т.е. $f_{\mu'} = \tau_{k,\,l} \circ \widetilde{f}_{\mu'}\colon\ X \to \mathrm{Gr}_{k,\,l}$. Ясно, что определенное действие транзитивно на гомотопических классах таких вложений.

2.5. Переход к прямому пределу. Заметим, что отображения (9) отвечают отображениям классифицирующих пространств

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_{k,\,l}(A_k^{univ}) \times \mathrm{H}_{m,\,n}(A_m^{univ}) & \longrightarrow & \mathrm{H}_{km,\,ln}(A_{km}^{univ}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{BPU}(k) \times \mathrm{BPU}(m) & \longrightarrow & \mathrm{BPU}(km) \end{array}$$

(где $(km,\, ln) = 1$), индуцированным тензорным произведением расслоений на матричные алгебры [4]. Ввиду гомотопической эквивалентности $\mathrm{H}_{k,\,l}(A_k^{univ}) \simeq \mathrm{Gr}_{k,\,l}$ получаем морфизм H-пространств

$$\mathrm{Gr} \to \varinjlim_{k} \mathrm{BPU}(k), \tag{10}$$

где $\mathrm{Gr} := \varinjlim\limits_{(k,\,l)=1} \mathrm{Gr}_{k,\,l}$ [4] и прямые пределы берутся относительно отображений, индуцированных тензорным произведением матричных алгебр. Ввиду изоморфизма H-пространств $\mathrm{Gr} \cong \mathrm{BSU}_\otimes$ [4], отображение (10) — композиция отображений локализации

$$\mathrm{BSU}_\otimes \to \prod_{n \geq 2} \mathrm{K}(\mathbb{Q},\, 2n)$$

и включения

$$\prod_{n \geq 2} \mathrm{K}(\mathbb{Q},\, 2n) \hookrightarrow \mathrm{K}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\, 2) \times \prod_{n \geq 2} \mathrm{K}(\mathbb{Q},\, 2n) \simeq \varinjlim_{k} \mathrm{BPU}(k).$$

Морфизм H-пространств (10) позволяет определить интересный гомотопический инвариант пространства X. Рассмотрим абелеву группу

$$\mathrm{coker}\{[X,\, \mathrm{Gr}] \to [X,\, \varinjlim_{k} \mathrm{BPU}(k)]\}, \tag{11}$$

где гомоморфизм групп гомотопических классов отображений индуцирован морфизмом H-пространств (10). Эта группа допускает следующее «геометрическое» описание. Если существует вложение $\mu\colon A_k \hookrightarrow X \times M_{kl}(\mathbb{C})$ для некоторого l, $(k, l) = 1$, то $M_k(\mathbb{C})$-расслоение $A_k \to X$ называется *вложимым* (заметим, что из предыдущих результатов видно, что если l достаточно велико, то вложимость не зависит от выбора конкретного l, но только от самого́ расслоения A_k). Если существуют вложимые расслоения A_l, B_n, такие что $C_k \otimes A_l \cong D_m \otimes B_n$, то $M_k(\mathbb{C})$ и $M_m(\mathbb{C})$-расслоения C_k, D_m над X называются *эквивалентными*. Множество классов такой эквивалентности расслоений над данной базой X относительно операции, индуцированной тензорным произведением, является группой. Она совпадает с коядром (11). В частности, для каждой четномерной сферы S^{2n} она изоморфна $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (и 0 для нечетномерной).

Автор выражает благодарность А.С. Мищенко, Е.В. Троицкому и Томасу Шику за конструктивное обсуждение вопросов, затронутых в данной статье.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проекты* 07-01-00046-а, 07-01-91555-ННИО_а и 08-01-00034-а).

Библиографический список

1. *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986. 543 с.
2. *Каруби М.* К-теория. Введение. М.: Мир, 1981. 360 с.
3. *Peterson F.P.* Some remarks on Chern classes // Annals of Math. 1959. V. 69. P. 414–420.
4. *Ershov A.V.* A generalization of the topological Brauer group // J. of K-theory: K-theory and its Applications to Algebra, Geometry and Topology. 2008. V. 2, Spec. Iss. 03. P. 407–444.
5. *Connes A.* Noncommutative geometry. N.Y.: Academic Press, 1994. 661 p.
6. *Ershov A.V.* Topological obstructions to embedding of a matrix algebra bundle into a trivial one // http://arxiv.org/abs/0807.3544.

УДК 512.534

ОТНОШЕНИЯ ГРИНА И ОБОБЩЁННЫЕ ОТНОШЕНИЯ ГРИНА НА НЕКОТОРЫХ ПОЛУГРУППАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

И.Б. Кожухов, В.А. Ярошевич

Московский институт электронной техники,
кафедра высшей математики – 1
E-mail: Kozhuhov_I_B@mail.ru, V-Yaroshevich@ya.ru

Исследуются отношения Грина $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$ на полугруппах изотонных преобразований частично упорядоченных множеств, а также обобщённые отношения Грина $\mathscr{L}^*$, $\mathscr{R}^*$ на полугруппе $B(X)$ бинарных отношений на множестве X. Доказано, что хотя полугруппа $B(X)$ не регулярна при $|X| \geqslant 3$, но в ней, как во всякой регулярной полугруппе $\mathscr{L} = \mathscr{L}^*, \mathscr{R} = \mathscr{R}^*$.

Ключевые слова: частично упорядоченное множество, полугруппа изотонных преобразований, отношение Грина на полугруппе, обобщённые отношения Грина, полугруппа бинарных отношений.

The Green's Relations and the Generalized Green's Relations on Certain Transformation Semigroups

I.B. Kozhukhov, V.A. Yaroshevich

Moscow Institute of Electronic Technology,
Chair of Higher Mathematics – 1
E-mail: Kozhuhov_I_B@mail.ru, V-Yaroshevich@ya.ru

We investigate the Green's relations $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$ on the semigroups of isotone transformations of the partially ordered sets, and also the generalized Green's relations $\mathscr{L}^*$, $\mathscr{R}^*$ on the semigroup $B(X)$ of binary relations on a set X. It is proved that $\mathscr{L} = \mathscr{L}^*, \mathscr{R} = \mathscr{R}^*$ in the semigroup $B(X)$ though this semigroup is non-regular for $|X| \geqslant 3$.

Key words: partially ordered set, semigroup of isotone transformations, Green's relations on semigroup, generalized Green's relations, semigroup of binary relations.

В работе используются основные понятия теории полугрупп из монографии [1]. Пусть S — полугруппа, $S^1 = S \cup \{1\}$ — полугруппа S с внешне присоединённой единицей 1. Отношения левой и правой делимости в S определяются обычным образом:

$$a \leqslant_l b \;\Leftrightarrow\; S^1 a \subseteq S^1 b, \qquad a \leqslant_r b \;\Leftrightarrow\; aS^1 \subseteq bS^1.$$

© И.Б. Кожухов, В.А. Ярошевич, 2009

Эти отношения являются квазипорядками на множестве S. Обозначим через $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$ отношения Грина на полугруппе S.

Пусть X — произвольное множество. Обозначим через $T(X)$ полугруппу преобразований множества X с умножением $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$, где $x \in X$. Если $\alpha : X \to Y$, то $\ker\alpha = \{(x, x') \in X \times X \,|\, x\alpha = x'\alpha\}$ — *ядро*, а $\operatorname{im}\alpha = \{x\alpha \,|\, \alpha \in X\}$ — *образ* отображения α. *Частичное отображение* множества X в множество Y — это обычное отображение $\alpha : X_1 \to Y$, где $X_1 \subseteq X$. Множество X_1 называется *областью определения* α и обозначается $\operatorname{dom}\alpha$. Ядро и образ частичного отображения определяются так же, как для обычного. Произведение $\alpha\beta$ двух частичных отображений определяется обычным образом. Множество $PT(X)$ всех частичных отображений множества X в себя с операцией умножения является полугруппой, содержащей $T(X)$ в качестве подполугруппы.

Полугруппу бинарных отношений на множестве X с обычным умножением бинарных отношений обозначим через $B(X)$. Пусть σ — бинарное отношение на множестве X. Для $x \in X$ положим $\sigma\langle x\rangle = \{y \,|\, (x, y) \in \sigma\}$. Тогда σ можно рассматривать как многозначное отображение $x \to \sigma\langle x\rangle$. Очевидно, $T(X)$, $PT(X)$ — подполугруппы полугруппы $B(X)$.

Элемент a полугруппы S называется *регулярным*, если $a \in aSa$. Полугруппа S регулярна, если все её элементы регулярны.

Хорошо известно, что полугруппы $T(X)$ и $PT(X)$ регулярны для любого множества X. Полугруппа $B(X)$ регулярна при $|X| \leqslant 2$ и нерегулярна при $|X| \geqslant 3$. Условия регулярности элемента $\sigma \in B(X)$ получены в [2].

Пусть X — квазиупорядоченное отношением $\leqslant$ множество. Отображение $\alpha : X \to X$ назовем *изотонным*, если

$$\forall\, x, y \in X \quad x \leqslant y \;\Rightarrow\; x\alpha \leqslant y\alpha.$$

Множество всех изотонных отображений $\alpha : X \to X$ обозначим $O(X)$. Очевидно, что $O(X)$ — подполугруппа полугруппы $T(X)$. Полугруппа $O(X)$ несёт большую информацию о строении квазиупорядоченного множества X. Так, Л.М. Глускин доказал [3], что полугруппы $O(X)$ и $O(Y)$ изоморфны тогда и только тогда, когда квазиупорядочные множества X и Y изоморфны или антиизоморфны. Необходимые и достаточные условия регулярности полугруппы $O(X)$, где X — частично упорядоченное множество, получены А.Я. Айзенштат в [4]. Следует отметить, что изучение полугруппы $O(X)$ изотонных преобразований является частью более общей задачи — исследования полугрупп эндоморфизмов графов [5].

Строение отношений Грина на полугруппе $T(X)$ всех преобразований хорошо известно (см. [1, § 2.2]). А именно:

(i) если $\alpha, \beta \in T(X)$, то $(\alpha, \beta) \in \mathscr{R} \;\Leftrightarrow\; \ker\alpha = \ker\beta$;

(ii) если $\alpha, \beta \in T(X)$, то $(\alpha, \beta) \in \mathscr{L} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{im}\alpha = \operatorname{im}\beta$.

Если вместо $T(X)$ взять $O(X)$, то утверждения (i), (ii) в общем случае перестанут быть верными. Разумеется, остаются справедливыми импликации $\Rightarrow$. Выясним, в каких случаях верны импликации $\Leftarrow$.

Цепью мы будем называть произвольное линейно упорядоченное множество.

Предложение 1. *Пусть X — произвольная цепь. Тогда:*

(iii) *если $\alpha, \beta \in O(X)$, то $(\alpha, \beta) \in \mathscr{L} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{im}\alpha = \operatorname{im}\beta$.*

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ очевидна. Докажем $\Leftarrow$. Пусть $\operatorname{im}\alpha = \operatorname{im}\beta$. Выберем в каждом классе отношения $\ker\beta$ по одному элементу. Если K — класс отношения $\ker\beta$, то выбранный в K элемент обозначим через $\widehat{K}$. Определим отображение $\gamma : \; X \to X$ по формуле $x\gamma = \widehat{(x\alpha)\beta^{-1}}$. Непосредственно проверяется, что $\gamma \in O(X)$ и $\gamma\beta = \alpha$. Аналогичным образом можно доказать, что $\beta = \delta\alpha$ при некотором $\delta \in O(X)$. Это влечет, что $(\alpha, \beta) \in \mathscr{L}$. $\square$

Предложение 2. *Пусть X — конечная цепь. Тогда:*

(iv) *если $\alpha, \beta \in O(X)$, то $(\alpha, \beta) \in \mathscr{R} \;\Leftrightarrow\; \ker\alpha = \ker\beta$.*

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ очевидна. Докажем $\Leftarrow$. Пусть X — конечная цепь и $\ker\alpha = \ker\beta$ для некоторых $\alpha, \beta \in O(X)$. Так как α — изотонное отображение, то классы отношения $\ker\alpha$ являются интервалами цепи X. Пусть эти классы таковы: $K_1, K_2, \ldots, K_m$, причем $x < y$ при всех $x \in K_i$,

$y \in K_j$, $i < j$. Тогда $\alpha = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & \dots & K_m \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & \dots & K_m \\ y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{pmatrix}$. Построим отображение $\varphi : \{x_1, \dots, x_m\} \to \{y_1, \dots, y_m\}$, положив $x_i\varphi = y_i$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, и продолжим φ до изотонного отображения $\gamma : X \to X$ следующим образом:

$$x\gamma = \begin{cases} y_1 & \text{при } x \leqslant x_1; \\ y_i & \text{при } x_{i-1} < x \leqslant x_i,\ 2 \leqslant i \leqslant m; \\ y_m & \text{при } x_m < x. \end{cases}$$

Тогда получим $\alpha\gamma = \beta$. Аналогичным образом можно построить $\delta \in O(X)$, такое что $\beta\delta = \alpha$. Отсюда получаем $(\alpha, \beta) \in \mathscr{R}$. $\square$

Построим теперь цепь X и элементы $\alpha, \beta \in O(X)$, такие что $\ker\alpha = \ker\beta$, но $(\alpha, \beta) \notin \mathscr{R}$ в $O(X)$, т.е. приведём пример, опровергающий утверждение (iv).

Пример 1. В качестве цепи X возьмем множество $X = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}' = \{1, 2, 3, \dots,\ 1', 2', 3', \dots\}$ с порядком $1 < 2 < 3 < \dots < 1' < 2' < 3' < \dots$ Положим $i\alpha = 1'$ для $i \in \mathbb{N}$, $i'\alpha = (i+1)'$ для $i' \in \mathbb{N}'$; $i\beta = 1$ для $i \in \mathbb{N}$, $i'\beta = i + 1$ для $i' \in \mathbb{N}'$. Очевидно, $\alpha, \beta \in O(X)$ и $\ker\alpha = \ker\beta$. Докажем, что не существует такого $\gamma \in O(X)$, что $\beta\gamma = \alpha$. Предположим, что такое γ существует. Тогда $i'\beta\gamma = i'\alpha$, т.е. $(i+1)\gamma = (i+1)'$. Имеем $i + 1 < 1'$ при всех $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, $(i+1)\gamma \leq 1'\gamma$ при всех $i \in \mathbb{N}$. Отсюда получаем: $(i+1)' \leq 1'\gamma$ при всех $i \in \mathbb{N}$. Но такого элемента a, который удовлетворял бы неравенству $a \geq (i+1)'$ при всех $i \in \mathbb{N}$, в цепи X нет. Мы доказали, что $\alpha \neq \beta\gamma$ ни при каком $\gamma \in O(X)$. Следовательно, $(\alpha, \beta) \notin \mathscr{R}$. $\square$

Наконец, построим примеры конечных частично упорядоченных множеств, для которых неверны утверждения (iii) и (iv).

Построим конечное частично упорядоченное множество X и элементы $\alpha, \beta \in O(X)$, такие что $\mathrm{im}\alpha = \mathrm{im}\beta$, но $(\alpha, \beta) \notin \mathscr{L}$ в $O(X)$.

Пример 2. Пусть $X = \{x, x', y, y', z, z', u\}$ — множество с отношением частичного порядка, заданным двумя нетривиальными соотношениями: $y < y'$ и $z < z'$ (остальные пары различных элементов несравнимы). Положим

$$\alpha = \begin{pmatrix} x & x' & y & y' & z & z' & u \\ y & y' & u & u & u & u & u \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} x & x' & y & y' & z & z' & u \\ u & u & u & u & y & y' & u \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\alpha, \beta \in O(X)$. Пусть существует такое $\gamma \in O(X)$, что $\gamma\alpha = \beta$. Имеем $y = z\beta = z\gamma\alpha$. Поэтому $z\gamma = x$. Аналогично получаем, что $z'\gamma = x'$. Так как $z < z'$, но $x \not\leq x'$, то $\gamma \notin O(X)$. Полученное противоречие показывает, что $(\alpha, \beta) \notin \mathscr{L}$. $\square$

Построим конечное частично упорядоченное множество X и элементы $\alpha, \beta \in O(X)$, такие что $\ker\alpha = \ker\beta$, но $(\alpha, \beta) \notin \mathscr{R}$ в $O(X)$.

Пример 3. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ — множество с отношением частичного порядка, заданным следующими нетривиальными соотношениями: $1 < 6$, $2 < 4$, $1 < 4$, $2 < 5$, $3 < 6$, $3 < 5$ и $1 < 5$ (остальные пары различных элементов несравнимы). Положим

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $\alpha, \beta \in O(X)$. Пусть существует такое $\delta \in O(X)$, что $\alpha\delta = \beta$. Тогда $3\alpha\delta = 3\beta$, $3\beta = 2$, $3\alpha = 2$. Отсюда $2\delta = 2$. Аналогично $4\alpha\delta = 4\beta$, $4\beta = 6$, $4\alpha = 4$. Отсюда $4\delta = 6$. Такое δ не сохраняет соотношение $2 < 4$. Полученное противоречие показывает, что $(\alpha, \beta) \notin \mathscr{R}$. $\square$

Отметим, что отношения Грина на полугруппах $O(X)$, где X — цепь, изучались также в работе [6], а для конечных квазиупорядоченных множеств X специального вида — в работе [7].

Перейдём теперь к обобщённым отношениям Грина на полугруппе S. Для элементов $a, b \in S$ положим $a \leqslant_l^* b$, если и только, если $a \leqslant_l b$ в некоторой надполугруппе $T \supseteq S$; $(a, b) \in \mathscr{L}^*$, если и только, если $(a, b) \in \mathscr{L}$ в некоторой надполугруппе $T \supseteq S$.

Отношения $\leqslant_r^*$, $\mathscr{R}^*$ определяются двойственным образом. Известна внутренняя характеризация отношений $\leqslant_l^*, \leqslant_r^*, \mathscr{L}^*, \mathscr{R}^*$.

Теорема 1 ([8, гл. 10, п. 1.6; 9]). *Пусть S — произвольная полугруппа и $a, b \in S$. Тогда эквивалентны условия: (a) $a \leqslant_l^* b$; (b) $\forall\, x, y \in S^1$ $(bx = by \;\Rightarrow\; ax = ay)$.*

Аналогичное утверждение верно для отношения $\leqslant_r^*$.

Нетрудно проверить, что для любых $a, b \in S$ справедливо соотношение $a \leqslant_l b \Rightarrow a \leqslant_l^* b$.

Для любой полугруппы S отношение $\leqslant_l^*$ является квазипорядком, но при доказательстве транзитивности этого отношения могут встретиться трудности следующего характера. Пусть $a \leqslant_l^* b$ и $b \leqslant_l^* c$. Тогда $a \leqslant_l b$ в некоторой надполугруппе $T_1 \supseteq S$, а $b \leqslant_l c$ — в надполугруппе $T_2 \supseteq S$. Если бы можно было найти одну надполугруппу $T \supseteq S$, в которой $a \leqslant_l b$ и $b \leqslant_l c$, то мы получили бы требуемое: $a \leqslant_l b$ в T. Такая надполугруппа была найдена. Для отношения $\leqslant_l^*$ в качестве такой «общей» надполугруппы можно взять полугруппу $T(S^1)^{op}$, двойственную к $T(S^1)$. Докажем, что на самом деле в качестве «общей» надполугруппы можно взять любую регулярную надполугруппу полугруппы S. А именно имеет место

Теорема 2. *Пусть S — произвольная полугруппа и A — регулярная надполугруппа полугруппы S. Тогда для элементов $a, b \in S$ эквивалентны условия: (a) $a \leqslant_l^* b$; (b) $a \leqslant_l b$ в A.*

Доказательство. В доказательстве этой теоремы мы будем считать, что $S^1 = S \cup \{1\}$ — полугруппа, которая получается из S присоединением внешним образом единицы, даже если в S уже была единица. Аналогично этому $A^1 = A \cup \{1\}$, $1 \notin A$. Кроме того, будем считать, что единицы в S^1 и A^1 совпадают. Тогда S, S^1, A — подполугруппы полугруппы A^1.

Пусть $a \leqslant_l^* b$ для некоторых $a, b \in S$. Естественные вложения $S \to A \to A^1$ продолжим до вложения $A^1 \to PT(A^1)^{op}$, определив для каждого $u \in A^1$ отображение $\varphi_u : S^1 \to A^1$ по формуле: $\varphi_u(x) = ux$ при всех $x \in S^1$. Так как $a \leqslant_l^* b$, то по теореме 1 при всех $x, y \in S^1$ выполняется условие $bx = by \;\Rightarrow\; ax = ay$. Построим отображение $\psi : bS^1 \to aS^1$, полагая $\psi(bx) = ax$ при $x \in S^1$. В силу условия (b) теоремы 1 ψ определено корректно и $\psi \in PT(A^1)$. Ясно, что $\varphi_a = \psi\varphi_b$. Отождествляя a с φ_a, b с φ_b, мы получим, что $a \in PT(A^1) \cdot b$. Это означает, что в полугруппе A имеет место соотношение $a \leqslant_l^* b$. Но A — регулярная полугруппа, поэтому $a \leqslant_l b$ в A. $\square$

Так как $\mathscr{L}^* = \leqslant_l^* \bigcap (\leqslant_l^*)^{-1}$, то из теорем 1 и 2 мы получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть S — полугруппа и A — регулярная надполугруппа S. Тогда для элементов $a, b \in S$ следующие условия эквивалентны: (a) $(a, b) \in \mathscr{L}^*$; (b) $(a, b) \in \mathscr{L}$ в полугруппе A.*

Теоремы, аналогичные теоремам 2 и 3, справедливы для отношений $\leqslant_r^*$ и $\mathscr{R}^*$.

Для доказательства следующей теоремы нам потребуется лемма.

Лемма 1. *Пусть $S = B(X)$ — полугруппа бинарных отношений на множестве X и $\sigma, \tau \in S$. Для $x \in X$ положим*

$$Y_x = \{y \,|\, \forall\, t\ (y, t) \in \sigma \;\Rightarrow\; (x, t) \in \tau\}. \tag{1}$$

Тогда $\tau \in S\sigma$ в том и только том случае, если выполнено условие

$$\forall\, x\ \forall\, z\ \ ((x, z) \in \tau \;\Rightarrow\; \exists\, y \in Y_x\ \ ((y, z) \in \sigma)). \tag{2}$$

Доказательство следует из результатов работы В.В. Вагнера [10, формулы (1.34), (1.38) и комментарии к ним].

Теорема 4. *Пусть X — множество, $B(X)$ — полугруппа бинарных отношений на X. Тогда в этой полугруппе при любых $\sigma, \tau \in B(X)$ выполняется условие $\tau \leqslant_l^* \sigma \;\Rightarrow\; \tau \leqslant_l \sigma$.*

Доказательство. Пусть $\tau \nleqslant_l \sigma$. Нам надо доказать, что $\tau \nleqslant_l^* \sigma$. Так как $\tau \nleqslant_l \sigma$, то из леммы 1 мы получаем, что существуют $x_0, z_0 \in X$, такие что $(x_0, z_0) \in \tau$ и

$$(y, z_0) \notin \sigma \text{ при всех } y \in Y_{x_0}. \tag{3}$$

Положим $\rho = (X \backslash \tau\langle x_0\rangle) \times X$, $\rho' = \rho \cup (\{z_0\} \times X)$. Очевидно, что $\tau\rho' \neq \tau\rho$, так как $x_0 \notin \mathrm{dom}\tau\rho$, но $x_0 \in \mathrm{dom}\tau\rho'$.

Докажем, что $\sigma\rho = \sigma\rho'$. Так как $\sigma\rho \subseteq \sigma\rho'$, то достаточно доказать, что $\sigma\rho' \subseteq \sigma\rho$. Пусть $(u, v) \in \sigma\rho'$. Тогда $(u, w) \in \sigma$, $(w, v) \in \rho'$ при некотором $w \in X$. Если $(w, v) \in \rho$, то $(u, v) \in \sigma\rho$. Поэтому далее будем предполагать, что $(w, v) \in \rho' \backslash \rho$. Отсюда получаем, что $w = z_0$. Итак, $(u, z_0) \in \sigma$, поэтому ввиду (3) мы можем заключить, что $u \notin Y_{x_0}$. Следовательно, ввиду (1) найдется $t \in X$, такое что $(u, t) \in \sigma$,

$(x_0, t) \notin \tau$. Это влечет, что $(t, t') \in \rho$ при любом $t' \in X$. В частности, $(t, v) \in \rho$. Так как $(u, t) \in \sigma$ и $(t, v) \in \rho$, то $(u, v) \in \sigma\rho$.

Мы доказали, что $\sigma\rho = \sigma\rho'$, но $\tau\rho \neq \tau\rho'$. В силу теоремы 1 это означает, что $\tau \not\leq_l^* \sigma$. □

Следствие из теоремы 4 и двойственной к ней. *В полугруппе $B(X)$ бинарных отношений на множестве X справедливы равенства $\mathscr{L}^* = \mathscr{L}$ и $\mathscr{R}^* = \mathscr{R}$.*

Авторы благодарят рецензента, сделавшего ряд ценных замечаний, позволивших существенно улучшить текст статьи.

Библиографический список

1. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. В 2 т. М.: Мир, 1972. Т. 1. 285 с.
2. *Зарецкий К.А.* Полугруппа бинарных отношений // Мат. сб. 1963. Т. 61 (103), № 3. С. 291–305.
3. *Глускин Л.М.* Полугруппы изотонных преобразований // Успехи мат. наук. 1961. Т. 5 (101), № 16. С. 157–162.
4. *Айзенштат А.Я.* Регулярные полугруппы эндоморфизмов упорядоченных множеств // Учен. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А.И. Герцена. 1968. Т. 387. С. 3–11.
5. *Molchanov V.A.* Semigroups of mappings on graphs // Semigroup Forum. 1983. V. 27. P. 155–199.
6. *Laradji A., Umar A.* On certain finite semigroups of order-decreasing transformations // King Fahd Univ. Petroleum & Minerals. Tech. Rep. Ser. 2003. P. 1–19.
7. *Huisheng P., Dingyu Z.* Green's equivalences on semigroups of transformations preserving order and an equivalence relation // Semigroup Forum. 2005. V. 71. P. 241–251.
8. *Ляпин Е.С.* Полугруппы. М.: Физматгиз, 1960. 592 с.
9. *Шутов Э.Г.* Потенциальная делимость элементов в полугруппах // Учен. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. Герцена. 1958. Т. 166. С. 75–103.
10. *Вагнер В.В.* Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и её приложения: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1965. Вып. 1. С. 3–178.

УДК 517.958

СТРУКТУРА РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА КОМПАКТНОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ В СЛУЧАЕ НЕНУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТИ

О.В. Коровина, В.Л. Прядиев

Белгородский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: olesya_korovina@mail.ru, Pryadiev@bsu.edu.ru

Для волнового уравнения на компактном геометрическом графе при обобщённо-гладких условиях трансмиссии доказывается аналог формулы Даламбера.

Ключевые слова: компактный геометрический граф, волновое уравнение, обобщённо-гладкие условия трансмиссии, смешанная задача, аналог формулы Даламбера.

Structure of Mixed Problem Solution for Wave Equation on Compact Geometrical Graph in Nonzero Initial Velocity Case

O.V. Korovina, V.L. Pryadiev

Belgorod State University,
Chair of Mathematical Analysis
E-mail: olesya_korovina@mail.ru, Pryadiev@bsu.edu.ru

A D'Alambert formula analogue for wave equation on the compact geometrical graph with generalized smooth transmission conditions is being proved.

Key words: compact geometrical graph, wave equation, generalized smooth transmission conditions, mixed problem, D'Alambert formula analogue.

В настоящей работе рассматривается волновое уравнение на компактном геометрическом графе при условиях трансмиссии, которые являются обобщением так называемых «гладких» или «стандартных» [1]. Основная цель работы — дать доказательство представления типа Даламбера для решения начально-краевой задачи при ненулевой начальной скорости из класса C^1. Использована техника, развитая в работе [2] (где начальная скорость предполагалась нулевой). Представление типа Даламбера здесь не только даёт информацию о структуре общего решения (дополняя представление решения в виде ряда Фурье), но и может быть положено в основу при создании вычислительной схемы решения начально-краевой задачи [3].

© О.В. Коровина, В.Л. Прядиев, 2009

1. ОПИСАНИЕ ОСНОВНОГО ОБЪЕКТА ИССЛЕДОВАНИЯ

Пусть Γ — компактный геометрический граф из $\mathbb{R}^n$, который понимается нами так же, как в [4]. Пусть $\mathcal{J}$ — множество всех внутренних вершин Γ, $\partial\Gamma$ — множество граничных вершин. В соответствии с работой [4] $\mathcal{J}$ содержится в Γ и $\partial\Gamma \cap \Gamma = \varnothing$. Будем предполагать, что компоненты связности множества $\Gamma \setminus \mathcal{J}$ (называемые рёбрами графа) являются прямолинейными интервалами. Все рёбра будем считать ориентированными, т. е. что каждому интервалу $\gamma = (a, b)$, являющемуся ребром Γ, поставлен в соответствие один из двух векторов единичной длины, коллинеарных вектору $b - a$. Этот вектор обозначим через h_γ.

Для функции u, определённой в точках множества $(\Gamma \setminus \mathcal{J}) \times (0; +\infty)$, будем использовать следующие обозначения: если $x \in \Gamma \setminus \mathcal{J}$, а γ — ребро Γ, содержащее x, то $u_x(x,t) := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1}[u(x + \varepsilon h_\gamma, t) - u(x,t)]$, и если $t > 0$, то $u_t(x,t) := \lim\limits_{\tau \to 0} \tau^{-1}[u(x, t+\tau) - u(x,t)]$.

Основной объект исследования в данной работе — это волновое уравнение

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \quad (x \in \Gamma \setminus \mathcal{J},\ t > 0) \tag{1}$$

при условиях трансмиссии

$$\sum_{h \in T(x)} \alpha(x,h) u_h^+(x,t) = 0 \quad (x \in \mathcal{J},\ t \geqslant 0), \tag{2}$$

здесь $T(x) := \big\{h \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \|h\| = 1$ и $(x + \varepsilon h) \in \Gamma$ для достаточно малых $\varepsilon > 0\big\}$, $\alpha(x,h)$ — некоторые вещественные числа, такие что

$$\sum_{h \in T(x)} \alpha(x,h) = 1 \quad (x \in \mathcal{J}), \tag{3}$$

$u_h^+(x,t)$ — правая производная по вектору h функции $u(\,\cdot\,,t)$ в точке x. Отметим попутно, что существование правых производных $u_h^+(x,t)$ для всех $h \in T(x)$ автоматически влечёт непрерывность функции $u(\,\cdot\,,t)$ в точке x при любом $t \geqslant 0$. Предполагая, что функция u, удовлетворяющая соотношениям (1) и (2), определена на $(\Gamma \cup \partial\Gamma) \times [0; +\infty)$, будем рассматривать для системы (1)–(2) следующую начально-краевую задачу:

$$u(x,t) = 0 \quad (x \in D,\ t \geqslant 0), \tag{4}$$

$$u_h^+(x,t) = 0 \quad (x \in N,\ h \in T(x),\ t \geqslant 0), \tag{5}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (x \in \Gamma \cup \partial\Gamma), \tag{6}$$

$$\lim_{t \to 0+} u_t(x,t) = \psi(x) \quad (x \in \Gamma \cup \partial\Gamma), \tag{7}$$

здесь $D \cup N = \partial\Gamma$ и $D \cap N = \varnothing$, причём $x \in N \Rightarrow |\,T(x)\,| = 1$.

Под решением задачи (1)–(2), (4)–(7) будем понимать функцию $u : (\Gamma \cup \partial\Gamma) \times [0; +\infty) \to \mathbb{R}$, которая 1) непрерывна по первому аргументу в точках $\partial\Gamma \times [0; +\infty)$, 2) непрерывна по второму аргументу в точках $(\Gamma \cup \partial\Gamma) \times \{0\}$, 3) удовлетворяет соотношениям (1)–(2), (4)–(7)[1].

Заметим, что можно считать $N = \varnothing$, т. е. $D = \partial\Gamma$ (и далее мы всегда это будем предполагать). Действительно, достаточно объявить точки из N внутренними вершинами Γ, и тогда (5) примет вид равенства (2) с единственным числом $\alpha(x,h)$, равным 1.

2. РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (1)–(2), (4)–(7) В ФОРМЕ ДАЛАМБЕРА

Для формулировки основного результата нам потребуется ввести в рассмотрение некоторое множество ориентированных ломаных, которое мы обозначим буквой P. Ориентированную ломаную p с вершинами $a_i \in \Gamma \cup \partial\Gamma$, $i = \overline{0,k}$, перенумерованными согласно ориентации p, отнесём ко множеству P, если и только если:

1) $(\forall\ i = \overline{1, k-1})\big[a_i \in \mathcal{J} \cup \partial\Gamma\big]$,

[1]Имеется в виду, что речь будет идти *только* о классических решениях задачи (1)–(2), (4)–(7). Понятно, что класс функций, которому гарантированно принадлежит решение задачи (1)–(2), (4)–(7), зависит от того, каким классам принадлежат φ и ψ. В разд. 3 мы проанализируем этот вопрос подробнее.

2) $(\forall\ i=\overline{0,k-1})\big[a_i\neq a_{i+1}$ и $(a_i;a_{i+1})\subseteq\Gamma\setminus\mathcal{J}\big]$,

3) $(\forall\ i=\overline{1,k-1})[a_i\in\partial\Gamma\Rightarrow[a_{i-1};a_i]\cap[a_i;a_{i+1}]\neq\{a_i\}]$.

При этом мы допускаем, что некоторые звенья $[a_i;a_{i+1}]$, в том числе соседние, могут совпадать или быть вложенными одно в другое. Точку a_0 будем называть началом ломаной p, а точку a_k — её концом. Длиной ломаной p назовём сумму длин её звеньев $[a_i;a_{i+1}]$, т. е. $\sum\limits_{i=0}^{k-1}|a_{i+1}-a_i|$.

Каждой паре (p,i), в которой p — ломаная из P, а i — номер её вершины, отличной от конца (т. е. $i=\overline{0,k-1}$), поставим в соответствие число

$$\beta_i(p):=\begin{cases}-1, & \text{если } a_i\in D(=\partial\Gamma) \text{ и } i\neq 0,\\ 2\alpha(a_i,h_i(p)), & \text{если } \big(i=0\big)\vee\big((a_i\notin\partial\Gamma)\wedge([a_{i-1};a_i]\cap[a_i;a_{i+1}]=\{a_i\})\big),\\ 2\alpha(a_i,h_i(p))-1, & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

где $h_i(p):=|a_{i+1}-a_i|^{-1}(a_{i+1}-a_i)$, и если $a_0\in\Gamma\setminus\mathcal{J}$, то $\alpha(a_0,h):=1/2$ для любого $h\in T(a_0)$, а если $a_0\in\partial\Gamma$, то $\alpha(a_0,h):=1$ для любого $h\in T(a_0)$. Положим

$$\beta(p):=\frac{1}{2}\prod_{i=0}^{k-1}\beta_i(p).$$

Введём, наконец, в рассмотрение оператор $\mathcal{C}(t)$, действующий в пространстве определённых на $\Gamma\cup\partial\Gamma$ функций по правилу:

$$[\mathcal{C}(t)\zeta](x):=\begin{cases}\sum\limits_{p\in P(x,t)}\beta(p)\zeta(e_p), & \text{если } x\in\Gamma \text{ и } t>0,\\ 0, & \text{если } x\in\partial\Gamma \text{ и } t>0,\\ \zeta(x), & \text{если } x\in\Gamma\cup\partial\Gamma \text{ и } t=0,\end{cases}\tag{8}$$

где $P(x,t)$ есть множество всех ломаных из P с началом в точке x и длины t, а e_p здесь и далее обозначает конец p.

Теорема 1. *Пусть φ и ψ непрерывны на $\Gamma\cup\partial\Gamma$, причём для любого ребра γ сужения $\varphi''|_\gamma$ и $\psi'|_\gamma$ функций φ'' и ψ' на это ребро равномерно непрерывны на нём. Пусть для любой $x\in\mathcal{J}$ вторая производная $(\varphi_h^+)_h^+(x)$ по вектору $h\in T(x)$ не зависит от h, т. е.*

$$(\varphi_h^+)_h^+(x)=(\varphi_\eta^+)_\eta^+(x)\quad(x\in\mathcal{J},\ h,\eta\in T(x)).\tag{9}$$

Пусть также

$$\sum_{h\in T(x)}\alpha(x,h)\varphi_h^+(x)=0\quad(x\in\mathcal{J}),\tag{10}$$

$$\sum_{h\in T(x)}\alpha(x,h)\psi_h^+(x)=0\quad(x\in\mathcal{J}),\tag{11}$$

$$\varphi(x)=\psi(x)=(\varphi_h^+)_h^+(x)=0\quad(x\in\partial\Gamma,\ h\in T(x)).\tag{12}$$

Тогда решение задачи (1)–(2), (4)–(7) *существует, единственно и представимо в виде*

$$u(x,t)=[\mathcal{C}(t)\varphi](x)+\int_0^t[\mathcal{C}(\tau)\psi](x)d\tau.\tag{13}$$

Доказательство. Для доказательства единственности решения задачи (1)–(2), (4)–(7) достаточно доказать тривиальность решения u^0 однородной задачи (1)–(2), (4)–(7) (при φ и ψ тождественно равных нулю) на $(\Gamma\cup\partial\Gamma)\times[0;\delta]$, где δ — наименьшая из длин рёбер. Выражая для каждого ребра $\gamma=(a;b)$ сужение $u^0|_{\gamma\times[0;+\infty)}$ через $u^0(a,t)$ и $u^0(b,t)$, получим, в силу формулы решения задачи о распространении граничного режима [5, гл. II, § 2, п. 7], что для $t\in[0;\delta]$ выполнено

$$(u^0)_h^+(x,t)=-(u^0)_t(x,t)\quad(x\in\mathcal{J}).$$

Отсюда, ввиду выполнения (2) для u^0, следует, что $(u^0)_t(x,t) = 0$ для всех $x \in \mathcal{J}$ и $t \in [0;\delta]$, т. е. так как $u^0(x,0) = 0$, что $u^0(x,t) = 0$ для тех же x и t. Но тогда $u \equiv 0$ на $\gamma \times [0;\delta]$ для любого ребра γ. Единственность доказана.

Справедливость представления (13) достаточно доказать отдельно для случаев $\psi \equiv 0$ и $\varphi \equiv 0$. Допустим пока, что $\psi \equiv 0$ в (13). Найдём сначала $u_t(x,t)$ для $x \in \Gamma$ и $t > 0$. Если $\Delta t < 0$ достаточно мало, то

$$u(x,t+\Delta t) = \sum_{\pi \in P(x,t+\Delta t)} \beta(\pi)\varphi(e_\pi) = \sum_{p \in P(x,t)} \beta(p)\varphi(e_p - \Delta t \cdot h(p)),$$

где $h(p)$ — вектор из $T(e_p)$, однозначно определяемый требованием о том, что точка $e_p + \varepsilon h(p)$ принадлежит последнему звену ломаной p для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Значит, левая производная $u_t^-(x,t)$ имеет вид

$$u_t^-(x,t) = -\sum_{p \in P(x,t)} \beta(p)\varphi^+_{h(p)}(e_p). \tag{14}$$

Если же $\Delta t > 0$ достаточно мало, то, представляя $P(x,t)$ в виде $P(x,t) := P_1(x,t) \cup P_2(x,t) \cup P_3(x,t)$, где $P_1(x,t) := \{p \in P(x,t) \mid e_p \in \Gamma \setminus \mathcal{J}\}$, $P_2(x,t) := \{p \in P(x,t) \mid e_p \in \partial\Gamma\}$, $P_3(x,t) := \{p \in P(x,t) \mid e_p \in \mathcal{J}\}$, получим

$$u(x,t+\Delta t) = \sum_{\pi \in P(x,t+\Delta t)} \beta(\pi)\varphi(e_\pi) = \sum_{p \in P_1(x,t)} \beta(p)\varphi(e_p - \Delta t \cdot h(p)) - \sum_{p \in P_2(x,t)} \beta(p)\varphi(e_p + \Delta t \cdot h(p)) +$$
$$+ \sum_{p \in P_3(x,t)} \beta(p)\Big[-\varphi(e_p + \Delta t \cdot h(p)) + \sum_{h \in T(e_p)} 2\alpha(e_p,h)\varphi(e_p + \Delta t \cdot h)\Big].$$

Следовательно, правая производная $u_t^+(x,t)$ имеет вид

$$u_t^+(x,t) = l_1 + l_2 + l_3, \tag{15}$$

где

$$l_1 = -\sum_{p \in P_1(x,t)} \beta(p)\varphi^+_{h(p)}(e_p), \qquad l_2 = -\sum_{p \in P_2(x,t)} \beta(p) \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{\varphi(e_p + \Delta t \cdot h(p)) + \varphi(e_p)}{\Delta t},$$
$$l_3 = \sum_{p \in P_3(x,t)} \beta(p) \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{1}{\Delta t}\Big[-\varphi(e_p + \Delta t \cdot h(p)) + \sum_{h \in T(e_p)} 2\alpha(e_p,h)\varphi(e_p + \Delta t \cdot h) - \varphi(e_p)\Big].$$

Заметим, что если $p \in P_2(x,t)$, то $e_p \in \partial\Gamma$, и значит, $\varphi(e_p) = 0$. Следовательно, $\varphi(e_p + \Delta t \cdot h(p)) + \varphi(e_p) = \varphi(e_p + \Delta t \cdot h(p)) - \varphi(e_p)$, и поэтому

$$l_2 = -\sum_{p \in P_2(x,t)} \beta(p)\varphi^+_{h(p)}(e_p).$$

Далее,

$$l_3 = \sum_{p \in P_3(x,t)} \beta(p) \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{1}{\Delta t}\Big\{-\big[\varphi(e_p + \Delta t \cdot h(p)) - \varphi(e_p)\big] + 2\sum_{h \in T(e_p)} \alpha(e_p,h)\big[\varphi(e_p + \Delta t \cdot h) - \varphi(e_p)\big]\Big\} =$$
$$= \sum_{p \in P_3(x,t)} \beta(p)\Big[-\varphi^+_{h(p)}(e_p) + 2\sum_{h \in T(e_p)} \alpha(e_p,h)\varphi^+_h(e_p)\Big] = -\sum_{p \in P_3(x,t)} \beta(p)\varphi^+_{h(p)}(e_p),$$

так как если $p \in P_3(x,t)$, то $e_p \in \mathcal{J}$, и значит, в силу (10)

$$\sum_{h \in T(e_p)} \alpha(e_p,h)\varphi^+_h(e_p) = 0.$$

Таким образом, (15) приобретает вид $u_t^+(x,t) = -\sum_{p \in P(x,t)} \beta(p)\varphi^+_{h(p)}(e_p)$, что вместе с (14) влечёт

$$u_t(x,t) = -\sum_{p \in P(x,t)} \beta(p)\varphi^+_{h(p)}(e_p). \tag{16}$$

Аналогично найдём $u_{tt}(x,t)$. Так же как из (13) было получено (14), из (16) получаем

$$(u_t)_t^-(x,t) = \sum_{p\in P(x,t)} \beta(p)(\varphi^+_{h(p)})^+_{h(p)}(e_p).$$

Далее,

$$(u_t)_t^+(x,t) = L_1 + L_2 + L_3, \tag{17}$$

где

$$L_1 = \sum_{p\in P_1(x,t)} \beta(p)(\varphi^+_{h(p)})^+_{h(p)}(e_p), \qquad L_2 = -\sum_{p\in P_2(x,t)} \beta(p)(\varphi^+_{h(p)})^+_{h(p)}(e_p),$$

$$L_3 = -\sum_{p\in P_3(x,t)} \beta(p) \lim_{\Delta t\to 0+} \frac{1}{\Delta t}\Big[-\varphi^+_{-h(p)}(e_p+\Delta t\cdot h(p)) + 2\sum_{h\in T(e_p)} \alpha(e_p,h)\varphi^+_{-h}(e_p+\Delta t\cdot h) - \varphi^+_{h(p)}(e_p)\Big].$$

Для преобразования L_3 воспользуемся, тем, что для достаточно малых $\Delta t > 0$ выполнено равенство $\varphi^+_{-h}(e_p+\Delta t\cdot h) = -\varphi^+_h(e_p+\Delta t\cdot h)$ — при всех $h\in T(e_p)$. Тогда с учётом (10) получим:

$$L_3 = -\sum_{p\in P_3(x,t)} \beta(p) \lim_{\Delta t\to 0+} \Big[\frac{\varphi^+_{h(p)}(e_p+\Delta t\cdot h(p)) - \varphi^+_{h(p)}(e_p)}{\Delta t} -$$

$$-2\sum_{h\in T(e_p)} \alpha(e_p,h)\frac{\varphi^+_h(e_p+\Delta t\cdot h) - \varphi^+_h(e_p)}{\Delta t}\Big] =$$

$$= -\sum_{p\in P_3(x,t)} \beta(p)\Big[(\varphi^+_{h(p)})^+_{h(p)}(e_p) - 2\sum_{h\in T(e_p)} \alpha(e_p,h)\varphi^{++}_{hh}(e_p)\Big].$$

Заметим, что в силу (9) $\varphi^{++}_{hh}(e_p) = (\varphi^+_{h(p)})^+_{h(p)}(e_p)$ для любого $h\in T(e_p)$. Поэтому с учётом (3) окончательно получаем

$$L_3 = \sum_{p\in P_3(x,t)} \beta(p)(\varphi^+_{h(p)})^+_{h(p)}(e_p).$$

Таким образом, (17) примет вид

$$(u_t)_t^+(x,t) = \sum_{p\in P_1(x,t)\cup P_3(x,t)} \beta(p)(\varphi^+_{h(p)})^+_{h(p)}(e_p) - \sum_{p\in P_2(x,t)} \beta(p)(\varphi^+_{h(p)})^+_{h(p)}(e_p),$$

что совпадает с $(u_t)_t^-(x,t)$, так как если $p\in P_2(x,t)$, то $e_p\in\partial\Gamma$ и, стало быть, в силу (12) имеем $(\varphi^+_{h(p)})^+_{h(p)}(e_p) = 0$. Значит,

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{p\in P(x,t)} \beta(p)(\varphi^+_{h(p)})^+_{h(p)}(e_p). \tag{18}$$

Найдём теперь выражения для $u^+_h(x,t)$ и для $u_{xx}(x,t)$, где в первом случае x — фиксированная точка из Γ, $h\in T(x)$, а во втором случае x принадлежит $\Gamma\setminus\mathcal{J}$, и в обоих случаях $t>0$. Пусть $P'(x,t,h) := \big\{p\in P(x,t)\,\big|\,(x+\varepsilon h)$ принадлежит первому звену ломаной p при достаточно малых $\varepsilon>0\big\}$ и $P''(x,t,h) := P(x,t)\setminus P'(x,t,h)$. Если $\varepsilon>0$ достаточно мало, то

$$u(x+\varepsilon h,t) = \sum_{p\in P''(x,t,h)} \beta(p)\varphi(e_p+\varepsilon h(p)) +$$

$$+\sum_{p\in P'_1(x,t,h)} \beta(p)\Big[\frac{1}{2\alpha(x,h)}\varphi(e_p-\varepsilon h(p)) + \frac{2\alpha(x,h)-1}{2\alpha(x,h)}\varphi(e_p+\varepsilon h(p))\Big] +$$

$$+\sum_{p\in P'_2(x,t,h)} \beta(p)\frac{\alpha(x,h)-1}{\alpha(x,h)}\varphi(e_p+\varepsilon h(p)) +$$

$$+\sum_{p\in P'_3(x,t,h)} \beta(p)\Big[\frac{1}{\alpha(x,h)}\sum_{\eta\in T(e_p)} \alpha(e_p,\eta)\varphi(e_p+\varepsilon\eta) + \frac{\alpha(x,h)-1}{\alpha(x,h)}\varphi(e_p+\varepsilon h(p))\Big], \tag{19}$$

где $P_i'(x,t,h) := P'(x,t,h) \cap P_i(x,t)$. Из (19) вытекает, что

$$u_h^+(x,t) = \sum_{p\in P''(x,t,h)} \beta(p)\varphi^+_{h(p)}(e_p) + \frac{\alpha(x,h)-1}{\alpha(x,h)} \sum_{p\in P'(x,t,h)} \beta(p)\varphi^+_{h(p)}(e_p). \tag{20}$$

Теперь мы можем показать, что функция (13) (при $\psi \equiv 0$) удовлетворяет условию (2). В самом деле, в силу (20)

$$\sum_{h\in T(x)} \alpha(x,h)u_h^+(x,t) = \sum_{h\in T(x)} \Bigg[\alpha(x,h) \sum_{p\in P''(x,t,h)} \beta(p)\varphi^+_{h(p)}(e_p) + (\alpha(x,h)-1) \sum_{p\in P'(x,t,h)} \beta(p)\varphi^+_{h(p)}(e_p)\Bigg]. \tag{21}$$

Изменим в правой части (21) порядок суммирования так, чтобы внутреннее суммирование осуществлялось по $h \in T(x)$, а внешнее — по $p \in P(x,t)$. Заметим, что всякая ломаная $p \in P(x,t)$ принадлежит $P'(x,t,h)$ для единственного h из $T(x)$; обозначим это h через $\theta(p)$. Тогда замена порядка суммирования в правой части (21) может быть осуществлена по следующему правилу:

$$\sum_{h\in T(x)} \Bigg[\sum_{p\in P'(x,t,h)} f_1(h,p) + \sum_{p\in P''(x,t,h)} f_2(h,p)\Bigg] = \sum_{p\in P(x,t)} \Bigg[f_1(\theta(p),p) + \sum_{h\in T(x)\setminus\{\theta(p)\}} f_2(h,p)\Bigg]. \tag{22}$$

На основании (22) из (21) получаем

$$\sum_{h\in T(x)} \alpha(x,h)u_h^+(x,t) = \sum_{p\in P(x,t)} \beta(p)\varphi^+_{h(p)}(e_p)\Bigg[\alpha(x,\theta(p)) - 1 + \sum_{h\in T(x)\setminus\{\theta(p)\}} \alpha(x,h)\Bigg] = 0 \tag{23}$$

— в силу (3). Значит, если $\psi \equiv 0$, то функция (13) условию (2) удовлетворяет.

При $x \in \Gamma \setminus \mathcal{J}$ равенство (23) принимает вид

$$u^+_{h_\gamma}(x,t) + u^+_{-h_\gamma}(x,t) = 0,$$

где γ — ребро, содержащее x. Но тогда существует и $u_x(x,t)$, и из равенства (20) следует:

$$u_x(x,t) = \sum_{p\in P''(x,t,h_\gamma)} \beta(p)\varphi^+_{h(p)}(e_p) - \sum_{p\in P'(x,t,h_\gamma)} \beta(p)\varphi^+_{h(p)}(e_p). \tag{24}$$

Равенство (24) используем для нахождения $u_{xx}(x,t)$, где $x \in \Gamma \setminus \mathcal{J}$ и $t > 0$. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет место:

$$u_x(x+\varepsilon h_\gamma,t) = \sum_{\pi\in P''(x+\varepsilon h_\gamma,t,h_\gamma)} \beta(\pi)\varphi^+_{h(\pi)}(e_\pi) - \sum_{\pi\in P'(x+\varepsilon h_\gamma,t,h_\gamma)} \beta(\pi)\varphi^+_{h(\pi)}(e_\pi) =$$

$$= \sum_{p\in P''(x,t,h_\gamma)} \beta(p)\varphi^+_{h(p)}\big(e_p + \varepsilon h(p)\big) - \sum_{p\in P'(x,t,h_\gamma)\cap P_1(x,t)} \beta(p)\varphi^+_{h(p)}\big(e_p - \varepsilon\cdot h(p)\big) +$$

$$+ \sum_{p\in P'(x,t,h_\gamma)\cap P_2(x,t)} \beta(p)\varphi^+_{-h(p)}\big(e_p + \varepsilon\cdot h(p)\big) -$$

$$- \sum_{p\in P'(x,t,h_\gamma)\cap P_3(x,t)} \beta(p)\Bigg[\sum_{\eta\in T(e_p)} 2\alpha(e_p,\eta)\varphi^+_{-\eta}\big(e_p+\varepsilon\cdot\eta\big) - \varphi^+_{-h(p)}\big(e_p+\varepsilon\cdot h(p)\big)\Bigg].$$

Заметим, что $\varphi^+_{-\eta}\big(e_p+\varepsilon\eta\big) = -\varphi^+_{\eta}\big(e_p+\varepsilon\eta\big)$ (для любого $\eta \in T(e_p)$) при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Учитывая это, а также (10), (12), (9) и (3), получим

$$(u_x)^+_{h_\gamma}(x,t) = \sum_{p\in P(x,t)} \beta(p)(\varphi^+_{h(p)})^+_{h(p)}(e_p). \tag{25}$$

Вычисление $(u_x)^+_{-h_\gamma}(x,t)$ аналогично и приводит к равенству

$$(u_x)^+_{-h_\gamma}(x,t) = -\sum_{p\in P(x,t)} \beta(p)(\varphi^+_{h(p)})^+_{h(p)}(e_p). \tag{26}$$

Из равенств (25) и (26) следует, что правая часть равенства (25) и есть $u_{xx}(x,t)$. Значит (см. (18)), при $\psi \equiv 0$ функция (13) удовлетворяет уравнению (1).

Выполнение (4) для функции (13) при $\psi \equiv 0$ следует из определения $\mathcal{C}(t)$ (см. (8)). Но надо еще доказать, что $(\forall\ x \in \partial\Gamma)$ $(\forall\ t > 0)$ $[u(y,t) \to 0$ при $y \to x]$.

Пусть $x \in \partial\Gamma$ и $t > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $|T(x)| = 1$. В этом случае

$$\lim_{y\to x} u(y,t) = \lim_{y\to x} \sum_{\pi\in P(y,t)} \beta(\pi)\varphi(e_\pi) = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0+}\Bigg\{ \sum_{p\in P_1(x,t)} \beta(p)\big[\varphi(e_p - \varepsilon h(p)) - \varphi(e_p + \varepsilon h(p))\big] -$$

$$-2\sum_{p\in P_2(x,t)} \beta(p)\varphi(e_p + \varepsilon h(p)) + \sum_{p\in P_3(x,t)} \beta(p)\Bigg[2\sum_{\eta\in T(e_p)} \alpha(e_p,\eta)\varphi(e_p + \varepsilon\eta) - 2\varphi(e_p + \varepsilon h(p))\Bigg]\Bigg\} = 0,$$

ввиду непрерывности φ на $\Gamma \cup \partial\Gamma$, обнуления φ на $\partial\Gamma$ и равенства (3). При этом последний предел — равномерный по любому конечному интервалу изменения переменной t, что вместе со сходимостью $u(y,0) = \varphi(y) \to 0$ при $y \to x$ $(\in \partial\Gamma)$ влечёт сходимость $u(y,t)$ к 0 при $y \to x$ $(\in \partial\Gamma)$ равномерно на каждом отрезке вида $[0;t_0]$. Значит [6, n° 505], функция u непрерывна на $\partial\Gamma \times [0;+\infty)$.

Справедливость (6) для функции (13) при $\psi \equiv 0$ следует из определения $\mathcal{C}(t)$ (см. (8)). Однако надо обосновать, что

$$\lim_{t\to 0+} u(x,t) = \varphi(x) \quad (x \in \Gamma). \tag{27}$$

Заметим, что для любой $x \in \Gamma$ при достаточно малых $t > 0$ все ломаные p из $P(x,t)$ однозвенны, следовательно, имеет место равенство $\beta(p) = \alpha(x,\theta(p))$. Поэтому

$$\lim_{t\to 0+} u(x,t) = \lim_{t\to 0+} \sum_{p\in P(x,t)} \alpha(x,\theta(p))\varphi(x + t\cdot\theta(p)) = \lim_{t\to 0+} \sum_{h\in T(x)} \alpha(x,h)\varphi(x + t\cdot h) = \varphi(x),$$

причём в силу равномерной непрерывности φ последний предел — равномерный на Γ. Это вместе с очевидной сходимостью $u(x,t) \to \varphi(x)$ при $t \to 0+$ в точках $x \in \partial\Gamma$ влечёт равномерную уже на $\Gamma\cup\partial\Gamma$ сходимость $u(x,t)$ к $\varphi(x)$ при $t \to 0+$, откуда следует непрерывность функции u на $(\Gamma \cup \partial\Gamma) \times \{0\}$ по совокупности переменных [6, n° 505].

Аналогично доказывается справедливость (7) для (13) при $\psi \equiv 0$: в силу (16) и (10) для $x \in \Gamma$ получим

$$\lim_{t\to 0+} u_t(x,t) = -\lim_{t\to 0+} \sum_{p\in P(x,t)} \beta(p)\varphi^+_{h(p)}(e_p) = \sum_{h\in T(x)} \alpha(x,h)\lim_{t\to 0+} \varphi^+_h(x+t\cdot h) = \sum_{h\in T(x)} \alpha(x,h)\varphi^+_h(x) = 0,$$

причём последний предел — равномерный на $\Gamma \cup \partial\Gamma$ в силу равномерной непрерывности $\varphi'|_\gamma$ для любого ребра γ.

Итак, в случае $\psi \equiv 0$ функция (13) есть решение задачи (1)–(2), (4)–(7).

Остаётся рассмотреть случай, когда $\varphi \equiv 0$ в (13). В этом случае при $x \in \Gamma$ и $t > 0$

$$u_{tt}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{p\in P(x,t)} \beta(p)\psi(e_p) = -\sum_{p\in P(x,t)} \beta(p)\psi^+_{h(p)}(e_p), \tag{28}$$

что доказывается так же, как и (16). Далее, если $x \in \Gamma$ и $t > 0$, то

$$u^+_h(x,t) = \int_0^t \Bigg[\sum_{p\in P''(x,\tau,h)} \beta(p)\psi^+_{h(p)}(e_p) + \frac{\alpha(x,h)-1}{\alpha(x,h)} \sum_{p\in P'(x,\tau,h)} \beta(p)\psi^+_{h(p)}(e_p)\Bigg]\, d\tau. \tag{29}$$

Здесь мы учитываем, что в силу равномерной непрерывности ψ' на любом ребре и с учётом (11) подынтегральная функция при любом фиксированном $t > 0$ непрерывна по совокупности переменных в некотором прямоугольнике вида $[x;x+\varepsilon h] \times [0;t]$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Из (29) следует, что

$$\sum_{h\in T(x)} \alpha(x,h)u^+_h(x,t) = \int_0^t \sum_{h\in T(x)} \Bigg[\alpha(x,h) \sum_{p\in P''(x,\tau,h)} \beta(p)\psi^+_{h(p)}(e_p) + (\alpha(x,h)-1) \sum_{p\in P'(x,\tau,h)} \beta(p)\psi^+_{h(p)}(e_p)\Bigg]\, d\tau.$$

Подынтегральная сумма здесь равна нулю, что доказывается так же, как и равенство нулю правой части равенства (21). Таким образом, функция (13) в случае $\varphi \equiv 0$ удовлетворяет условию (2) и дифференцируема по x в точках $\Gamma \setminus \mathcal{J}$.

Проинтегрируем правую часть (29) при $x \in \Gamma \setminus \mathcal{J}$. Покажем, что

$$\int_0^t \sum_{p \in P''(x,\tau,h)} \beta(p)\psi^+_{h(p)}(e_p)\, d\tau = -\sum_{p \in P''(x,t,h)} \beta(p)\psi(e_p) + \frac{1}{2}\psi(x). \tag{30}$$

С одной стороны, производные по t левой и правой частей (30) равны. В то же время при достаточно малых $t > 0$ в $P''(x,\tau,h)$ содержится ровно одна, причём однозвенная, ломаная, которую обозначим через $\widetilde{p}$. Учитывая равенство $h(\widetilde{p}) = h$, получим

$$\int_0^t \sum_{p \in P''(x,\tau,h)} \beta(p)\psi^+_{h(p)}(e_p)\, d\tau = \int_0^t \beta(\widetilde{p})\psi^+_h(x - \tau h)\, d\tau = \frac{1}{2}[\psi(x) - \psi(x - th)],$$

что совпадает с правой частью (30) при тех же t. Тем самым равенство (30) доказано. Далее, поскольку $P'(x,\tau,h) = P''(x,\tau,-h)$, то в силу (30)

$$\int_0^t \sum_{p \in P'(x,\tau,h)} \beta(p)\psi^+_{h(p)}(e_p) d\tau = \int_0^t \sum_{p \in P''(x,\tau,-h)} \beta(p)\psi^+_{h(p)}(e_p) d\tau =$$

$$= -\sum_{p \in P''(x,t,-h)} \beta(p)\psi(e_p) + \frac{1}{2}\psi(x) = -\sum_{p \in P'(x,t,h)} \beta(p)\psi(e_p) + \frac{1}{2}\psi(x).$$

Значит (см. (29)), для $x \in \Gamma \setminus \mathcal{J}$

$$u^+_h(x,t) = -\sum_{p \in P''(x,t,h)} \beta(p)\psi(e_p) + \sum_{p \in P'(x,t,h)} \beta(p)\psi(e_p).$$

Отсюда, поскольку $u^+_{h_\gamma}(x,t) = u_x(x,t)$ для $x \in \Gamma \setminus \mathcal{J}$ (здесь γ — ребро, содержащее x), получаем

$$u_{xx}(x,t) = -\sum_{p \in P(x,t)} \beta(p)\psi^+_{h(p)}(e_p),$$

что вместе с (28) влечёт выполнение (1) для функции (13) при $\varphi \equiv 0$.

Далее, функция $[\mathcal{C}(t)\psi](x)$ как функция x и t непрерывна на $\partial\Gamma \times [0; +\infty)$, что доказывается так же, как и непрерывность $[\mathcal{C}(t)\varphi](x)$. Поэтому функция (13) при $\varphi \equiv 0$ не только удовлетворяет условию (4), но и непрерывна в точках $\partial\Gamma \times [0; +\infty)$.

Остаётся отметить выполнение начальных условий. Справедливость $u(x,0) = 0$ очевидна. Равенство $u_t(x,0+) = \psi(x)$ обосновывается так же, как и (27). Теорема доказана.

3. О КЛАССЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ (1)–(2), (4)–(7)

Обратимся теперь к вопросу о том, какому классу принадлежит решение задачи (1)–(2), (4)–(7) при выполнении условий теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда решение* u *задачи* (1)–(2), (4)–(7) *и его производные* u_t *и* u_{tt} *непрерывны на* $(\Gamma \cup \partial\Gamma) \times [0; +\infty)$, u_{xx} *непрерывно доопределяема на* $(\Gamma \cup \partial\Gamma) \times [0; +\infty)$, *а* u_x *равномерно непрерывна на* $\gamma \times [0; +\infty)$, *где* γ *— любое ребро* Γ. *Кроме того,*

$$\sum_{h \in T(x)} \alpha(x,h)(u_t)^+_h(x,t) = 0 \quad (x \in \mathcal{J},\ t > 0). \tag{31}$$

Замечание. Заявленные в теореме 2 свойства решения u задачи (1)–(2), (4)–(7) означают, в частности, что u и u_t — как функции первого аргумента при фиксированном втором аргументе, — наследуют все свойства φ и соответственно ψ из условий теоремы. Здесь мы учитываем, что в силу

уравнения (1) из непрерывности u_{tt} на $(\Gamma \cup \partial\Gamma) \times [0; +\infty)$ вытекает равномерная непрерывность u_{xx} на $\gamma \times [0; +\infty)$, где γ — любое ребро Γ, а также, что

$$(u_h^+)_h^+(x,t) = (u_\eta^+)_\eta^+(x,t) \quad (x \in \mathcal{J},\ h, \eta \in T(x),\ t \geq 0),$$
$$(u_h^+)_h^+(x,t) = 0 \quad (x \in \partial\Gamma,\ h \in T(x),\ t \geq 0).$$

Доказательство теоремы 2. В доказательстве теоремы 1 мы уже установили непрерывность по t функций u и u_t. Поэтому, доказав непрерывность на $(\Gamma \cup \partial\Gamma) \times [0; +\infty)$ функции u_{tt}, мы докажем такую же непрерывность функций u_t и u. Кроме того, в силу уравнения (1) u_{xx}, будучи равной u_{tt} на $\Gamma \setminus \mathcal{J}$, будет непрерывно доопределяемой на $(\Gamma \cup \partial\Gamma) \times [0; +\infty)$ (если мы докажем, что u_{tt} непрерывна на этом множестве), что повлечёт и равномерную непрерывность $u_x|_{\gamma \times [0; +\infty)}$ для любого ребра γ.

Для обоснования непрерывности u_{tt} на $(\Gamma \cup \partial\Gamma) \times [0; +\infty)$ достаточно показать непрерывность правых частей в (18) и в (28). Равномерная на Γ непрерывность по t правой части в (18) следует, с учётом (9) и (12), из равномерной непрерывности $\varphi''|_\gamma$ на любом ребре γ, а правой части в (28) — из равномерной непрерывности $\psi'|_\gamma$ на любом ребре γ (и с учётом (11)). При этом для любой $x \in \partial\Gamma$

$$\lim_{y \to x} u_{tt}(y,t) = 0 = u_{tt}(x,t), \tag{32}$$

что и влечёт непрерывность u_{tt} на $(\Gamma \cup \partial\Gamma) \times [0; +\infty)$. Обоснуем (32):

$$\lim_{y \to x} u_{tt}(y,t) = \lim_{y \to x} \sum_{\pi \in P(y,t)} \beta(\pi) \Big[\big(\varphi_{h(\pi)}^+\big)_{h(\pi)}^+(e_\pi) - \psi_{h(\pi)}^+(e_\pi) \Big] =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0+} \Bigg\{ \sum_{p \in P_1(x,t)} \beta(p) \Big[\varphi''(e_p - \varepsilon h(p)) - \varphi''(e_p + \varepsilon h(p)) \Big] - 2 \sum_{p \in P_2(x,t)} \beta(p) \varphi''(e_p + \varepsilon h(p)) +$$

$$+ \sum_{p \in P_3(x,t)} \beta(p) \Big[2 \sum_{\eta \in T(e_p)} \alpha(e_p, \eta) \varphi''(e_p + \varepsilon\eta) - 2\varphi''(e_p + \varepsilon h(p)) \Big] -$$

$$- \sum_{p \in P_1(x,t)} \beta(p) \Big[\psi_{h(p)}^+(e_p - \varepsilon h(p)) - \psi_{h(p)}^+(e_p + \varepsilon h(p)) \Big] +$$

$$+ \sum_{p \in P_2(x,t)} \beta(p) \Big[\psi_{h(p)}^+(e_p + \varepsilon h(p)) + \psi_{-h(p)}^+(e_p + \varepsilon h(p)) \Big] -$$

$$- \sum_{p \in P_3(x,t)} \beta(p) \Big[2 \sum_{\eta \in T(e_p)} \alpha(e_p, \eta) \psi_{-\eta}^+(e_p + \varepsilon\eta) - \psi_{-h(p)}^+(e_p + \varepsilon h(p)) - \psi_{h(p)}^+(e_p + \varepsilon h(p)) \Big] \Bigg\}.$$

Здесь все суммы стремятся к нулю (при $\varepsilon \to 0+$): первая и четвёртая — так как φ'' и ψ' непрерывны на $\Gamma \setminus \mathcal{J}$, вторая и третья — так как φ'' равномерно непрерывна на каждом ребре и удовлетворяет условиям (12) и (9), пятая — так как просто равна нулю, шестая — так как ψ' равномерно непрерывна на каждом ребре и удовлетворяет условию (11).

Справедливость (31) устанавливается дифференцированием по t равенства (2) и с учётом равенства

$$(u_h^+)_t(x,t) = (u_t)_h^+(x,t) \quad (x \in \mathcal{J},\ h \in T(x),\ t > 0),$$

которое следует непосредственно из (20), (16) и (29), (28). Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 07-01-00299).

Библиографический список

1. *Юрко В.А.* О восстановлении операторов Штурма – Лиувилля на графах // Мат. заметки. 2006. Т. 79, № 4. С. 619–630.

2. *Прядиев В.Л.* Описание решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на одномерной пространственной сети через функцию Грина соответствующей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Современная математика

и её приложения. Тбилиси, 2006. Т. 38. С. 82–94.
3. *Прядиев В. Л.* Численная схема решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на одномерной пространственной сети при обобщённо-гладких условиях трансмиссии // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. 2008. № 8/2 (67). С. 195–202.
4. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 272 с.
5. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999. 799 с.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. Т. II. 808 с.

УДК 512.571 + 515.122.55

АЛГЕБРЫ НЕПРЕРЫВНЫХ МУЛЬТИФУНКЦИЙ

В.А. Молчанов

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: V.Molchanov@inbox.ru

С помощью методов нестандартного анализа изучаются непрерывные сходимости в пространстве мультифункций и описываются псевдотопологические алгебры непрерывных мультифункций.

Ключевые слова: сходимости в пространстве мультифункций, алгебры отношений, нестандартный анализ.

Algebras of Continuous Multifunctions

V.A. Molchanov

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: V.Molchanov@inbox.ru

With the help of methods of nonstandard analysis we investigate continuous convergences in the space of multifunctions and describe pseudotopological algebras of continuous multifunctions.

Key words: convergences in the space of multifunctions, algebras of relations, nonstandard analysis.

ВВЕДЕНИЕ

Как показывают результаты исследований [1, 2], разработанная В.В. Вагнером теория отношений [3] является эффективным инструментом в изучении сходимостей в функциональных пространствах на основе нестандартного подхода к топологии [4]. Настоящая статья продолжает эти исследования и посвящена изучению непрерывных сходимостей в пространстве мультифункций с помощью методов алгебры отношений [3] и нестандартного анализа [5]. В начале работы канонически определяются непрерывные сходимости мультифункций и обосновывается их согласованность с отображением вычисления. Здесь также приводятся условия, при которых непрерывные сходимости являются топологиями, хаусдорфовыми или регулярными сходимостями, описываются компактные множества мультифункций. Основные результаты работы описывают псевдотопологические алгебры непрерывных мультифункций.

Основные результаты работы докладывались на Международной конференции, посвященной 100-летию профессора В.В. Вагнера.

В работе используются методы нестандартного анализа [5], общепринятая топологическая терминология [6, 7] и отдельные результаты из нестандартной топологии [2, 4].

Как обычно [4], для простоты рассуждений основные множества X рассматриваемых пространств сходимости считаются подмножествами множества индивидов $\mathbf{S}$, над которым строится теоретико-множественная суперструктура $V(\mathbf{S})$ [5]. Для таких множеств X определено нестандартное расширение ${}^*X$ и любой фильтр $\mathcal{F}$ над X полностью определяется своей монадой $\mu\mathcal{F} = \bigcap\{{}^*A : A \in \mathcal{F}\}$. Монады ультрафильтров над множеством X разбивают расширение ${}^*X$ на классы эквивалентности ε_X. Подмножество $M \subset {}^*X$ называется насыщенным, если $\varepsilon_X(M) \subset M$, и монадой, если $M = \mu\mathcal{F}$ для некоторого фильтра $\mathcal{F}$ над множеством X.

При нестандартном подходе к топологии [4] произвольная сходимость [6] на множестве X определяется соответствием $\rho \subset X \times {}^*X$, для которого все значения $\rho(a) = \{x \in {}^*X : (a, x) \in \rho\}$ $(a \in X)$ являются насыщенными подмножествами ${}^*X$ и удовлетворяют условию $a \in \rho(a)$. Такие соответствия называются (нестандартными) сходимостями и на них распространяется топологическая терминоло-

© В.А. Молчанов, 2009

гия. Если сходимость на X — предтопология [6], то все $\rho(a)$ $(a \in X)$ являются монадами, и если сходимость на X задается топологией открытых множеств $\mathcal{O}_X$, то $\rho(a) = \bigcap\{{}^*A : a \in A \in \mathcal{O}_X\}$ $(a \in X)$.

Как известно [4], подмножество A пространства сходимости (X, ρ) открыто, замкнуто или компактно, если соответственно $\rho(A) \subset {}^*A$, $\overset{-1}{\rho}\,({}^*A) \subset A$ или ${}^*A \subset \rho(A)$.

1. НЕПРЕРЫВНЫЕ СХОДИМОСТИ МУЛЬТИФУНКЦИЙ

Пусть $X, Y \subset \mathbf{S}$ и $f \subset X \times Y$ — бинарное отношение между элементами множеств X, Y с областью определения $\mathrm{dom} f = X$. В этом случае каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие непустое множество $f(x) = \{y \in Y : (x, y) \in f\}$, которое называется образом элемента x относительно f. Такое отношение f обозначается $f : X \to Y$ и называется многозначным отображением X в Y, или мультифункцией на X с значениями в Y. В частности, если все образы $f(x)$ являются одноэлементными множествами, то f — обычная функция на X с значениями в Y. Множество всех функций (соответственно мультифункций) на X с значениями в Y обозначается символом $\mathcal{F}(X, Y)$ или просто $\mathcal{F}$ (соответственно $\mathcal{MF}(X, Y)$ или просто $\mathcal{MF}$).

Пусть на множествах X и Y заданы нестандартные сходимости ρ и σ. Как известно [1], непрерывность функции $f \in \mathcal{F}$ равносильна тому, что выполняется любое из эквивалентных условий:

$$\text{(а)}\ \ {}^*f \circ \rho \subset \sigma \circ f \qquad \text{или} \qquad \text{(б)}\ \ f \circ \overset{-1}{\rho} \subset \overset{-1}{\sigma} \circ {}^*f.$$

В случае многозначности функции f условия (а), (б) не эквивалентны и приводят к следующим трем видам непрерывности: мультифункция $f \in \mathcal{MF}$ называется непрерывной сверху, если для нее выполняется (а), непрерывной снизу, если выполняется (б), и непрерывной, если эта мультифункция непрерывна сверху и снизу, т.е. одновременно выполняются условия (а) и (б). Корректность такой классификации обосновывается в работе [2, теорема 1] ее согласованностью с общепринятой классификацией мультифункций [7], а именно если (X, ρ), (Y, σ) — топологические пространства, то для мультифункции $f : X \to Y$ условие ${}^*f \circ \rho \subset \sigma \circ f$ равносильно тому, что все образы $f(x)$ $(x \in X)$ компактны в Y и для любого замкнутого в Y множества B прообраз $\overset{-1}{f}\,(B)$ замкнут в X, а условие $f \circ \overset{-1}{\rho} \subset \overset{-1}{\sigma} \circ {}^*f$ равносильно тому, что для любого открытого в Y множества B прообраз $\overset{-1}{f}\,(B)$ открыт в X.

Множества всех непрерывных, непрерывных сверху и непрерывных снизу мультифункцией на X с значениями в Y обозначим соответственно $\mathcal{MF}_H$, $\mathcal{MF}_{HB}$ и $\mathcal{MF}_{HH}$. Разновидности понятия непрерывности мультифункций естественно приводят к следующим трем видам непрерывной сходимости мультифункций.

Непрерывная сверху (соответственно снизу) сходимость γ_{HB} (γ_{HH}) определяется на множестве мультифункций $\mathcal{MF}_{HB}$ $(\mathcal{MF}_{HH})$ по формуле

$$(f, h) \in \gamma_{HB} \ \Leftrightarrow\ h \circ \rho \subset \sigma \circ f \qquad \big((f, h) \in \gamma_{HH} \ \Leftrightarrow\ f \circ \overset{-1}{\rho} \subset \overset{-1}{\sigma} \circ h\big),$$

где $f \in \mathcal{MF}_{HB}$, $h \in {}^*\mathcal{MF}_{HB}$ $\quad (f \in \mathcal{MF}_{HH},\ h \in {}^*\mathcal{MF}_{HH})$. Непрерывная сходимость γ_H на множестве $\mathcal{MF}_H$ определяется по формуле $\gamma_H = \gamma_{HB} \cap \gamma_{HH}$. Корректность этих определений обосновывается в работе [2, лемма 1].

Непрерывные сходимости на множестве $\mathcal{MF}$ могут быть охарактеризованы также с помощью многозначного отображения вычисления $\lambda : \mathcal{MF} \times X \to Y$, которое для $f \in \mathcal{MF}$ и $x \in X$ определяется по формуле $\lambda(f, x) = f(x)$. По аналогии с работой [2, теорема 2] нетрудно показать, что непрерывные сходимости являются самыми слабыми сходимостями на соответствующих множествах мультифункций $\mathcal{MF}_{HB}$, $\mathcal{MF}_{HH}$ и $\mathcal{MF}_H$, при которых отображение вычисления λ непрерывно в соответствующем смысле.

С целью описания условий, при которых непрерывные сходимости мультифункций являются топологиями, введем следующие обозначения для пространства сходимости (X, ρ) : $\mathcal{K}_X$ — множество всех компактных подмножеств и $\mathcal{O}_X$ — множество всех открытых подмножеств этого пространства. Кроме того, для подмножеств $A \subset X$, $B \subset Y$ положим

$$(A, B) = \{f \in \mathcal{MF} : f(A) \subset B\}, \qquad)A, B(= \{f \in \mathcal{MF} : A \subset \overset{-1}{f}\,(B)\}.$$

По аналогии с работой [2, теорема 3] нетрудно показать, что для локально компактного пространства сходимости [6] (X, ρ) и топологического пространства (Y, σ) сходимость γ_{HB} на множестве $\mathcal{MF}_{HB}$ есть топология с базой $\mathcal{B}_{HB} = \{(K, U) : \ K \in \mathcal{K}_X \ \wedge U \in \mathcal{O}_Y\}$, сходимость γ_{HH} на множестве $\mathcal{MF}_{HH}$ — топология с базой $\mathcal{B}_{HH} = \{)K, U(: \ K \in \mathcal{K}_X \ \wedge U \in \mathcal{O}_Y\}$ и сходимость γ_H на множестве $\mathcal{MF}_H$ — топология с базой $\mathcal{B}_H = \mathcal{B}_{HB} \cup \mathcal{B}_{HH}$.

Кроме того, по аналогии с работой [2, лемма 2, теорема 4] нетрудно показать, что для хаусдорфова (соответственно, регулярного) пространства сходимости (Y, σ) непрерывная сходимость γ_H на множестве $\mathcal{MF}_H$ также хаусдорфова (соответственно регулярна).

По аналогии с известной теоремой Арцела – Асколи [8] и результатами [2, теоремы 5, 6] можно описать компактные подмножества рассматриваемых пространств мультифункций с непрерывными сходимостями. В частности, если (X, ρ) — произвольное пространство сходимости и пространство сходимости (Y, σ) хаусдорфово и регулярно, то относительная компактность [6] любого подмножества $\mathcal{P}$ в пространстве сходимости $(\mathcal{MF}_H, \gamma_H)$ равносильна тому, что

$$\text{все} \ \ h \in {}^*\mathcal{P} \ \ \text{удовлетворяют условию} \ \ h \circ \rho \circ \overset{-1}{\rho} \subset \sigma \circ \overset{-1}{\sigma} \circ h. \tag{1}$$

В заключение остановимся на стандартной интерпретации полученных результатов. Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ и $(Y, \mathcal{O}_Y)$ — произвольные топологические пространства. С помощью принципа переноса [5] нетрудно убедиться, что подмножество $\mathcal{P} \subset \mathcal{MF}_H$ удовлетворяет условию (1), если для любых $x \in X$, $B \in \mathcal{O}_Y$ найдется такая окрестность $A \in \mathcal{O}_X$ точки x, что из $f(x) \subset B$ следует $f(A) \subset B$, и, с другой стороны, для любой окрестности $B \in \mathcal{O}_Y$ произвольной точки $y \in Y$ найдутся такие $A \in \mathcal{O}_X$ и $C \in \mathcal{O}_Y$, что $y \in C$ и из $A \cap \overset{-1}{f}(C) \neq \emptyset$ следует $A \subset \overset{-1}{f}(B)$. Это позволяет дать стандартную интерпретацию последнему результату и получить аналог основной теоремы работы [9].

2. АЛГЕБРЫ МУЛЬТИФУНКЦИЙ

Пусть Ω — алгебраическая сигнатура, состоящая из символов операций конечной арности. Напомним [10], что псевдотопологической Ω-алгеброй называется алгебра $\mathcal{A} = (A, \Omega, \alpha)$ сигнатуры Ω с заданной на основном множестве A сходимостью α, относительно которой непрерывны все операции Ω-алгебры $\mathcal{A}$.

Легко видеть, что алгебраическая структура сигнатуры Ω естественно продолжается на множество всех подмножеств базисного множества A по формуле

$$F_A(X_1, \ldots, X_n) = \{F_A(x_1, \ldots, x_n) : \ x_i \in X_i \ \text{для всех} \ 1 \leq i \leq n\},$$

где F — символ n-арной операции сигнатуры Ω и $X_1, \ldots, X_n \subset A$. С другой стороны, по принципу переноса [5] операция F_A продолжается на нестандартное расширение ${}^*A$ до операции ${}^*F_A$. Тогда непрерывность операции $F_A : A^n \to A$ означает, что при любых значениях $a_1, \ldots, a_n \in A$ выполняется условие

$${}^*F_A(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)) \subset \alpha(F_A(a_1, \ldots, a_n)). \tag{2}$$

Это равносильно тому, что при любых $x_1, \ldots, x_n \in {}^*A$ выполняется условие

$$F_A(\overset{-1}{\alpha}(x_1), \ldots, \overset{-1}{\alpha}(x_n)) \subset \overset{-1}{\alpha}({}^*F_A(x_1, \ldots, x_n)). \tag{3}$$

Обозначим символом $\mathcal{MF}(A)$ множество всех мультифункций на A с значениями в A. На этом множестве мультифункций поточечно определяется алгебраическая структура сигнатуры Ω по формуле

$$F_{\mathcal{MF}(A)}(f_1, \ldots, f_n)(a) = F_A(f_1(a), \ldots, f(a_n)),$$

где F — символ n-арной операции сигнатуры Ω, $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{MF}(A)$ и $a \in A$.

Подмножества множества $\mathcal{MF}(A)$, состоящие из всех непрерывных, непрерывных сверху и непрерывных снизу мультифункций, обозначим соответственно $\mathcal{MF}_H(A)$, $\mathcal{MF}_{HB}(A)$ и $\mathcal{MF}_{HH}(A)$.

Теорема 1. *Все вышеперечисленные множества мультифункций являются подалгебрами Ω-алгебры $\mathcal{MF}(A)$ и замкнуты относительно композиции мультифункций.*

Доказательство. Для любых мультифункций $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{MF}_{HB}(A)$ композиция $f_2 \circ f_1$ и значение $f = F_{\mathcal{MF}(A)}(f_1, \ldots, f_n)$ являются непрерывными сверху мультифункциями. Действительно, из условий ${}^*f_i \circ \alpha \subset \alpha \circ f_i \quad (1 \le i \le n)$ следует, что

$$\begin{gathered}{}^*(f_2 \circ f_1) \circ \alpha = {}^*f_2 \circ {}^*f_1 \circ \alpha = {}^*f_2 \circ ({}^*f_1 \circ \alpha) \subset {}^*f_2 \circ (\alpha \circ f_1) = \\ = ({}^*f_2 \circ \alpha) \circ f_1 \subset (\alpha \circ f_2) \circ f_1 = \alpha \circ (f_2 \circ f_1),\end{gathered}$$

и при любом $a \in A$ в силу (2) выполняется

$$\begin{gathered}{}^*f(\alpha(a)) = {}^*F_A({}^*f_1(\alpha(a)), \ldots, {}^*f_n(\alpha(a))) \subset {}^*F_A(\alpha(f_1(a)), \ldots, \alpha(f_n(a))) \subset \\ \subset \alpha(F_A(f_1(a), \ldots, f_n(a)) = \alpha(F_{\mathcal{MF}(A)}(f_1, \ldots, f_n)(a)) = \alpha(f(a)).\end{gathered}$$

Аналогично для любых мультифункций $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{MF}_{HH}(A)$ композиция $f_2 \circ f_1$ и значение $f = F_{\mathcal{MF}(A)}(f_1, \ldots, f_n)$ являются непрерывными снизу мультифункциями. Действительно, из условий $\overset{-1}{\alpha} \circ f_i \subset \overset{-1}{\alpha} \circ {}^*f_i \quad (1 \le i \le n)$ следует, что

$$(f_2 \circ f_1) \circ \overset{-1}{\alpha} = f_2 \circ (f_1 \circ \overset{-1}{\alpha}) \subset f_2 \circ (\overset{-1}{\alpha} \circ {}^*f_1) = (f_2 \circ \overset{-1}{\alpha}) \circ {}^*f_1 \subset (\overset{-1}{\alpha} \circ {}^*f_2) \circ {}^*f_1 = \overset{-1}{\alpha} \circ {}^*(f_2 \circ f_1),$$

и при любом $x \in {}^*A$ в силу (3) выполняется

$$\begin{gathered}f(\overset{-1}{\alpha}(x)) = F_A(f_1(\overset{-1}{\alpha}(x)), \ldots, f_n(\overset{-1}{\alpha}(x))) \subset F_A(\overset{-1}{\alpha}({}^*f_1(x)), \ldots, \overset{-1}{\alpha}({}^*f_n(x))) \subset \\ \subset \overset{-1}{\alpha}({}^*F_A({}^*f_1(x), \ldots, {}^*f_n(x)) = \overset{-1}{\alpha}({}^*F_{\mathcal{MF}(A)}(f_1, \ldots, f_n)(x)) = \alpha({}^*f(x)).\end{gathered}$$

Из доказанного следует, что для любых непрерывных мультифункций $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{MF}_H(A)$ композиция $f_2 \circ f_1$ и значение $f = F_{\mathcal{MF}(A)}(f_1, \ldots, f_n)$ являются непрерывными мультифункциями. Теорема доказана.

Теорема 2. *Для любой псевдотопологической Ω-алгебры $\mathcal{A} = (A, \Omega, \alpha)$ справедливы следующие утверждения:*

1) *множество $\mathcal{MF}_{HB}(A)$ всех непрерывных сверху мультифункций с непрерывной сходимостью γ_{HB} и поточечно определенными операциями сигнатуры Ω (а также с композицией $\circ$) является псевдотопологической Ω-алгеброй (псевдотопологическим кольцоидом* [10] *над Ω-алгеброй $\mathcal{MF}_{HB}(A)$);*

2) *множество $\mathcal{MF}_{HH}(A)$ всех непрерывных снизу мультифункций с непрерывной сходимостью γ_{HH} и поточечно определенными операциями сигнатуры Ω (а также с композицией $\circ$) является псевдотопологической Ω-алгеброй (псевдотопологическим кольцоидом над Ω-алгеброй $\mathcal{MF}_{HH}(A)$);*

3) *множество $\mathcal{MF}_H(A)$ всех непрерывных мультифункций с непрерывной сходимостью γ_H и поточечно определенными операциями сигнатуры Ω (а также с композицией $\circ$) является псевдотопологической Ω-алгеброй (псевдотопологическим кольцоидом над Ω-алгеброй $\mathcal{MF}_H(A)$).*

Доказательство. Для любых мультифункций $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{MF}_{HB}(A)$ и $h_1, \ldots, h_n \in {}^*\mathcal{MF}_{HB}(A)$, удовлетворяющих условиям $(f_i, h_i) \in \gamma_{HB} \quad (1 \le i \le n)$, и значений $f = F_{\mathcal{MF}(A)}(f_1, \ldots, f_n)$, $h = {}^*F_{\mathcal{MF}(A)}(h_1, \ldots, h_n)$ справедливы утверждения: $(f_2 \circ f_1, h_2 \circ h_1) \in \gamma_{HB}$, $(f, h) \in \gamma_{HB}$. Действительно, из условий $h_i \circ \alpha \subset \alpha \circ f_i \quad (1 \le i \le n)$ следует, что

$$(h_2 \circ h_1) \circ \alpha = h_2 \circ (h_1 \circ \alpha) \subset h_2 \circ (\alpha \circ f_1) = (h_2 \circ \alpha) \circ f_1 \subset (\alpha \circ f_2) \circ f_1 = \alpha \circ (f_2 \circ, f_1),$$

и при любом $a \in A$ в силу (2) выполняется

$$\begin{gathered}h(\alpha(a)) = {}^*F_A(h_1(\alpha(a)), \ldots, h_n(\alpha(a))) \subset {}^*F_A(\alpha(f_1(a)), \ldots, \alpha(f_n(a))) \subset \\ \subset \alpha(F_A(f_1(a), \ldots, f_n(a)) = \alpha(F_{\mathcal{MF}(A)}(f_1, \ldots, f_n)(a)) = \alpha(f(a)).\end{gathered}$$

Аналогично для любых мультифункций $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{MF}_{HH}(A)$ и $h_1, \ldots, h_n \in {}^*\mathcal{MF}_{HH}(A)$, удовлетворяющих условиям $(f_i, h_i) \in \gamma_{HH} \quad (1 \le i \le n)$, и значений $f = F_{\mathcal{MF}(A)}(f_1, \ldots, f_n)$,

$h = {}^*F_{\mathcal{MF}(A)}(h_1, \ldots, h_n)$ справедливы утверждения: $(f_2 \circ f_1, h_2 \circ h_1) \in \gamma_{HH}$, $(f, h) \in \gamma_{HH}$. Действительно, из условий $f_i \circ \overset{-1}{\alpha} \subset \overset{-1}{\alpha} \circ h_i$ $(1 \le i \le n)$ следует, что

$$(f_2 \circ f_1) \circ \overset{-1}{\alpha} = f_2 \circ (f_1 \circ \overset{-1}{\alpha}) \subset f_2 \circ (\overset{-1}{\alpha} \circ h_1) = (f_2 \circ \overset{-1}{\alpha}) \circ h_1 \subset (\overset{-1}{\alpha} \circ h_2) \circ h_1 = \overset{-1}{\alpha} \circ (h_2 \circ h_1),$$

и при любом $x \in {}^*A$ в силу (3) выполняется

$$f(\overset{-1}{\alpha}(x)) = F_A(f_1(\overset{-1}{\alpha}(x)), \ldots, f_n(\overset{-1}{\alpha}(x))) \subset F_A(\overset{-1}{\alpha}(h_1(x)), \ldots, \overset{-1}{\alpha}(h_n(x))) \subset$$
$$\subset \overset{-1}{\alpha}({}^*F_A(h_1(x), \ldots, h_n(x)) = \overset{-1}{\alpha}({}^*F_{\mathcal{MF}(A)}(h_1, \ldots, h_n)(x)) = \overset{-1}{\alpha}(h(x)).$$

Из доказанного следует, что для любых мультифункций $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{MF}_H(A)$ и $h_1, \ldots, h_n \in {}^*\mathcal{MF}_H(A)$, удовлетворяющих условиям $(f_i, h_i) \in \gamma_H$ $(1 \le i \le n)$, и значений $f = F_{\mathcal{MF}(A)}(f_1, ..., f_n)$, $h = {}^*F_{\mathcal{MF}(A)}(h_1, \ldots, h_n)$ справедливы утверждения: $(f_2 \circ f_1, h_2 \circ h_1) \in \gamma_H$, $(f, h) \in \gamma_H$. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Молчанов В.А.* Нестандартные сходимости в пространствах отображений // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 6. С. 141–153.

2. *Молчанов В.А.* Непрерывные сходимости отображений // Изв. вуз. Мат. 1993. № 3. С. 59–67.

3. *Вагнер В.В.* Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и ее приложения: Сб. статей. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1965. Вып. 1. С. 3–178.

4. *Молчанов В.А.* О применении повторных нестандартных расширений в топологии // Сиб. мат. журнал. 1989. Т. 30, № 3. С. 64–71.

5. *Альбеверио С., Фенстад Й., Хег-Крон Р., Линдстрем Т.* Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М.: Мир, 1990. 616 с.

6. *Fischer H.R.* Limesraume // Math. Ann. 1959. V. 137. P. 269–303.

7. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.

8. *Ascoli G.* Le curve limite di una varieta data di curve // Mem. Accad. Lincei. 1883. V. 18, № 3. P. 551–586.

9. *Weston J.D.* A generalization of Ascoli's theorem // Mathematika. 1959. V. 6. P. 19–24.

10. *Молчанов В.А.* О представлениях топологических алгебр преобразованиями // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, № 3 (291). С. 195–196.

УДК 519.4

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД К СТРУКТУРЕ ГЕНЕРАТОРОВ КОНЦЕПТА

В.Е. Новиков

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: NovikovVE@list.ru

Разработаны теоретико-множественные методы, с помощью которых описывается структура генераторов концепта в формальном концептуальном анализе.

Ключевые слова: формальный концептуальный анализ, генерация концептов, семейства множеств.

Set-Theoretical Approach to the Structure of Concept Generators

V.E. Novikov

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: NovikovVE@list.ru

Set-theoretical methods for the description of the structure of concept generators are developed.

Key words: formal concept analysis, concept generalization, family of sets.

ВВЕДЕНИЕ

В работах немецких математиков Р. Вилле [1], Б. Гантера [2] и др. был основан формальный концептуальный анализа и показаны его приложения к теории баз данных [3]. Генератор концепта — это такое множество атрибутов, которое определяет этот концепт. Например, если в качестве

© В.Е. Новиков, 2009

концепта рассматривать некоторую алгебраическую теорию, то в качестве её генератора выступает множество аксиом этой алгебраической теории. При этом одна и та же алгебраическая теория может определяться различными множествами аксиом, которые образуют некоторую алгебраическую систему относительно теоретико-множественного включения.

1. СЕМЕЙСТВА, МИНИМАЛЬНЫЕ ПО ПЕРЕСЕЧЕНИЮ

Пусть $\mathbf{P}(M)$ — множество всех подмножеств множества M. Отображение $f : I \to \mathbf{P}(M)$ обозначаем $\{X_i\}_{i\in I}$ для $X_i = f(i)$ и называем *семейством* подмножеств множества M, индексированное множеством I. Семейство $\{X_i\}_{i\in I}$ назовём *минимальным по пересечению* или кратко $\bigcap$-*минимальным*, если для любого $j \in I$ выполняется неравенство

$$\bigcap_{i\in I} X_i \neq \bigcap_{i\in I\setminus\{j\}} X_i. \tag{1}$$

Учитывая свойства пересечения, последнее неравенство означает строгое включение:

$$\bigcap_{i\in I} X_i \subset \bigcap_{i\in I\setminus\{j\}} X_i. \tag{2}$$

Очевидно, что не каждое семейство множеств может иметь подсемейство, удовлетворяющее условию (1). Например, таким является бесконечное семейство открытых множеств с замкнутым пересечением. Далее рассматриваются только семейства, которые содержат минимальные подсемейства или сами ими являются. В частности, в этот класс семейств попадают все конечные семейства.

Для семейства $\{X_i\}_{i\in I}$ обозначим $Y = \bigcap\limits_{i\in I} X_i$. Если при этом семейство $\{X_i\}_{i\in I}$ является $\cap$-минимальным, то будем называть его Y-*минимальным*, в частности, если $Y = \emptyset$, то будем называть *ноль-минимальным*. Для $i \in I$ обозначим $\acute{X}_i = X_i \backslash Y$, $X^i = \bigcap\limits_{j\in I\setminus\{i\}} X_j$. При этом семейство $\{\acute{X}_i\}_{i\in I}$ назовём *приведённым*, а $\{X^i\}_{i\in I}$ — *производным* от семейства $\{X_i\}_{i\in I}$.

Предложение 1.1. *Для любого семейства $\{X_i\}_{i\in I}$ имеет место $\bigcap\limits_{i\in I} \acute{X}_i = \emptyset$.*

Доказательство. $\bigcap\limits_{i\in I} \acute{X}_i = \bigcap\limits_{i\in I} (X_i \setminus Y) = \big(\bigcap\limits_{i\in I} X_i\big) \setminus Y = Y \setminus Y = \emptyset$. □

Предложение 1.2. *Семейство $\{X_i\}_{i\in I}$ $\cap$-минимально тогда и только тогда, когда ноль-минимально его приведённое семейство $\{\acute{X}_i\}_{i\in I}$.*

Доказательство. Допустим $\{X_i\}_{i\in I}$ минимально. Тогда для любого $j \in I$ выполняется строгое включение $\bigcap\limits_{i\in I} X_i \subset \bigcap\limits_{i\in I\setminus\{j\}} X_i$, т. е. выполняется строгое включение $Y \subset Y^j$, которое равносильно неравенству $Y^j \backslash Y \neq \emptyset$, что, в свою очередь, равносильно выражению

$$\bigcap_{i\in I\setminus\{j\}} \acute{X}_i = \Big(\bigcap_{i\in I\setminus\{j\}} X_i\Big) \setminus Y = Y^j \setminus Y \neq \emptyset.$$

Таким образом, для любого $j \in I$ выполняется $\bigcap\limits_{i\in I\setminus\{j\}} \acute{X}_i \neq \emptyset$. Откуда, учитывая предложение 1.1, семейство $\{\acute{X}_i\}_{i\in I}$ является ноль-минимальным. □

Следовательно, рассмотрение $\cap$-минимальных семейств можно свести к рассмотрению ноль-минимальных семейств.

Теорема 1.3. *Семейство $\{X_i\}_{i\in I}$ является ноль-минимальным тогда и только тогда, когда его производное семейство $\{X^i\}_{i\in I}$ состоит из непустых и попарно непересекающихся множеств.*

Доказательство. Допустим $\{X_i\}_{i\in I}$ ноль-минимально. Тогда $\bigcap\limits_{i\in I} X_i = \emptyset$ и для любого $i \in I$ выполняется $\bigcap\limits_{j\in I\setminus\{i\}} X_j \neq \emptyset$. Причём для любых $i_1 \neq i_2$ выполняется условие

$$X^{i_1} \bigcap X^{i_2} = \Big(\bigcap_{j\in I\setminus\{i_1\}} X_j\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{k\in I\setminus\{i_2\}} X_k\Big) = \bigcap_{j\in (I\setminus\{i_1\})\bigcup(I\setminus\{i_2\})} X_j = \bigcap_{j\in I} X_j = \emptyset. \qquad \square$$

По определению в семействе $\{X_i\}_{i\in I}$ при $i \neq j$, где $i, j \in I$, возможно $X_i = X_j$, т.е. в семействе могут присутствовать два экземпляра одного и того же множества. Легко заметить, что в минимальном семействе $\{X_i\}_{i\in I}$ при $i \neq j$, где $i, j \in I$, всегда $X_i \neq X_j$. Иначе одно из множеств, X_i или X_j, можно было бы удалить, не нарушая пересечения.

2. НАСЫЩЕННЫЕ МНОЖЕСТВА НОЛЬ-МИНИМАЛЬНЫХ СЕМЕЙСТВ

Пусть $\{X_i\}_{i\in I}$, $\{X_j\}_{j\in J}$, где $|I|, |J| \geq 2$, — два ноль-минимальных семейства. Тогда семейство $\{X_i\}_{i\in I\bigcup J}$ также будет иметь пустое пересечение, причём это семейство может содержать в себе ноль-минимальные семейства, отличные от $\{X_i\}_{i\in I}$ и $\{X_j\}_{j\in J}$.

Множество ноль-минимальных семейств $\{X_{k_s}\}_{k_s\in K_s}$, $s \in S$, будем называть *насыщенным*, если семейство $\{X_v\}_{v\in\bigcup_{s\in S} K_s}$ не содержит в себе ноль-минимальное подсемейство, не присутствующее в множестве семейств $\{X_{k_s}\}_{k_s\in K_s}$, $s \in S$.

Произвольное множество ноль-минимальных семейств $\{X_{k_t}\}_{k_t\in K_t}$, $t \in T$, можно пополнить до насыщенного, добавив к нему те ноль-минимальные подсемейства из семейства $\{X_u\}_{u\in\bigcup_{t\in T} K_t}$, которые в нём не присутствуют. Такой процесс и его результат будем называть *насыщением*.

Теорема 2.1. *Множество ноль-минимальных семейств $\{X_{k_s}\}_{k_s\in K_s}$, $s \in S$, является насыщенным тогда и только тогда, когда для любого семейства $\{k_s\}_{s\in S}$ элементов $k_s \in K_s$ выполняется условие $\bigcap\limits_{s\in S} X^{k_s} \neq \emptyset$.*

Доказательство. Пусть множество ноль-минимальных семейств $\{X_{k_s}\}_{k_s\in K_s}$, $s \in S$, является насыщенным. Тогда по теореме 1.3 для любого $s \in S$ выполняется условие

$$X^{k_s} = \bigcap_{t\in K_s\setminus\{k_s\}} X_t \neq \emptyset.$$

Допустим, существует такое семейство $\{k_s^0\}_{s\in S}$ элементов $k_s^0 \in K_s$, что $\bigcap\limits_{s\in S} X^{k_s^0} = \emptyset$. Обозначим $K = \bigcup\limits_{s\in S} K_s$ и рассмотрим семейство $\{X_k\}_{k\in K}$, очевидно, оно имеет пустое пересечение. Удалив из него все $X_{k_s^0}$ $(s \in S)$, получим семейство $\{X_k\}_{k\in K\setminus\{k_s^0\}_{s\in S}}$, которое удовлетворяет условию

$$\bigcap_{k\in K\setminus\{k_s^0\}_{s\in S}} X_k = \bigcap_{s\in S}\Big(\bigcap_{k\in K\setminus\{k_s^0\}} X_k\Big) = \bigcap_{s\in S} X^{k_s^0} = \emptyset.$$

Таким образом, из семейства $\{X_k\}_{k\in K\setminus\{k_s^0\}_{s\in S}}$ можно получить ноль-минимальное семейство. Однако по построению оно не содержит ни одного из ноль-минимальных семейств $\{X_{k_s}\}_{k_s\in K_s}$, $s \in S$, и полученное из него ноль-минимальное семейство будет отлично от них, что противоречит определению насыщенного множества. Следовательно, такого семейства $\{k_s^0\}_{s\in S}$ элементов $k_s^0 \in K_s$ не существует, и для любого семейства $\{k_s\}_{s\in S}$ элементов $k_s \in K_s$ выполняется условие $\bigcap\limits_{s\in S} X^{k_s} \neq \emptyset$.

Обратно, пусть для любого семейства $\{k_s\}_{s\in S}$ элементов $k_s \in K_s$ выполняется $\bigcap\limits_{s\in S} X^{k_s} \neq \emptyset$. Положим $K = \bigcup\limits_{s\in S} K_s$ и рассмотрим семейство $\{X_k\}_{k\in K}$. Возьмём произвольный элемент $s_0 \in S$ и удалим из семейства $\{X_k\}_{k\in K}$ любые $\{X_{k'_s}\}_{s\in S\setminus\{s_0\}}$. Ясно, что из множества ноль-минимальных семейств $\{X_{k_s}\}_{k_s\in K_s}$, $s \in S$, полученное семейство содержит в себе только семейство $\{X_{k_{S_0}}\}_{k_{s_0}\in K_{s_0}}$, причём оно единственное его ноль-минимальное подсемейство, поскольку с удалением любого $X_{k'_{s_0}}$, где $k'_{s_0} \in K_{s_0}$, оставшееся семейство имеем пересечение

$$\bigcap_{k\in K\setminus\{k'_s\}_{s\in S}} X_k = \bigcap_{s\in S} X^{k'_s} \neq \emptyset.$$

Тогда по определению множество ноль-минимальных семейств $\{X_{k_s}\}_{k_s\in K_s}$, $s \in S$, является насыщенным. □

3. СТРУКТУРА НАСЫЩЕННЫХ МНОЖЕСТВ НОЛЬ-МИНИМАЛЬНЫХ СЕМЕЙСТВ

Предложение 3.1. *Пусть семейство $\{X_i\}_{i\in I}$ имеет пустое пересечение и $\{X_k\}_{k\in K}$, $(K \subseteq I)$, некоторое ноль-минимальное его подсемейство. Ноль-минимальное семейство $\{X_k\}_{k\in K\subseteq I}$ явля-*

ется единственным ноль-минимальным в семействе $\{X_i\}_{i\in I}$ в том и только том случае, если для любого $k \in K$

$$\bigcap_{i\in I\setminus\{k\}} X_i \neq \emptyset.$$

Доказательство. Если $K = I$, то утверждение очевидно. Положим строгое включение $K \subset I$. Пусть $\{X_k\}_{k\in K}$ единственное ноль-минимальное. Допустим, существует $k_0 \in K$, такой что $\bigcap\limits_{i\in I\setminus\{k_0\}} X_i = \emptyset$. Тогда из $\{X_i\}_{i\in I\setminus\{k_0\}}$ методом исключения можно получить ноль-минимальное семейство, отличное от $\{X_k\}_{k\in K}$.

Обратно, пусть для любого $k \in K$ выполняется $\bigcap\limits_{i\in I\setminus\{k\}} X_i \neq \emptyset$. Допустим, существует другое ноль-минимальное семейство $\{X_j\}_{j\in J}$ $(J \subset I)$, причём $K \neq J$, т.е. существует $k_0 \in K$, такой что $k_0 \notin J$. Но тогда $J \subseteq I\setminus\{k_0\}$ и, следовательно,

$$\bigcap_{i\in I\setminus\{k_0\}} X_i \subseteq \bigcap_{j\in J} X_j = \emptyset. \qquad \square$$

Теорема 3.1. *Пусть семейство $\{X_i\}_{i\in I}$ имеет пустое пересечение и множество ноль-минимальных его подсемейств $Y_s = \{X_{k_s}\}_{k_s\in K_s}$ $(K_s \subseteq I)$, $s \in S$, является насыщенным. Тогда насыщенное множество семейств $\{Y_s\}$, $s \in S$, является максимальным насыщенными в семействе $\{X_i\}_{i\in I}$ в том и только том случае, когда для любого семейства $\{k_s\}_{s\in S}$ элементов $k_s \in K_s$*

$$\bigcap_{i\in I\setminus\{k_s\}_{s\in S}} X_i \neq \emptyset.$$

Доказательство. Для любого $s \in S$ имеем строгое включение $K_s \subset I$ $(K_s \neq I)$, в противном случае мы получаем противоречие тому, что семейства Y_s ноль-минимальны. Допустим теперь, что существует семейство $\{k'_s\}_{s\in S}$ элементов $k'_s \in K_s$, такое что

$$\bigcap_{i\in I\setminus\{k'_s\}_{s\in S}} X_i = \emptyset.$$

Тогда по построению семейство $\{X_i\}_{i\in I\setminus\{k'_s\}_{s\in S}}$ содержит ноль-минимальное подсемейство, отличное от всех Y_s, $s \in S$.

Обратно, пусть для любого семейства $\{k_s\}_{s\in S}$ элементов $k_s \in K_s$ выполняется неравенство $\bigcap\limits_{i\in I\setminus\{k_s\}_{s\in S}} X_i \neq \emptyset$. Допустим, существует ноль-минимальное семейство $Y = \{X_k\}_{k\in K'}$ $(K' \subset I)$, отличное от всех семейств Y_s, $s \in S$, т.е. для любого $s \in S$ имеем $K_s \neq K'$ и $\bigcap_{k\in K'} X_k = \emptyset$. Следовательно, существует семейство $\{k^0_s\}_{s\in S}$ элементов $k^0_s \in K_s$ такое, что $k^0_s \notin K'$ для любого $s \in S$. Но тогда $K' \subseteq I\setminus\{k^0_s\}_{s\in S}$ и, следовательно,

$$\bigcap_{i\in I\setminus\{k^0_s\}_{s\in S}} X_i \subseteq \bigcap_{k\in K'} X_k = \emptyset,$$

что противоречит предположению. $\square$

Предложение 3.2. *Пусть $\{Y_s\}$ — насыщенное множество ноль-минимальных семейств, $\{Y_t\} \subset \subset \{Y_s\}$ и $\{Y_v\}$ — насыщение множества $\{Y_t\}$ $\big(\{Y_v\} \supseteq \{Y_t\}\big)$. Тогда $\{Y_s\} \supseteq \{Y_v\}$. Другими словами, насыщение любого подмножества насыщенного множества остаётся его подмножеством.*

Доказательство. Пусть семейство $\{X_i\}_{i\in I}$ имеет пустое пересечение и $Y_s = \{X_{k_s}\}_{k_s\in K_s}$ $(K_s \subseteq I)$, $s \in S$, — некоторое насыщенное множество ноль-минимальных семейств. Рассмотрим его подмножество $\{Y_t\}$, $t \in T$, $T \subset S$. Насытим это подмножество до насыщенного множества ноль-минимальных семейств $\{Y_v\}$, $v \in V$, $V \supseteq T$, добавляя из $\bigcup\limits_{t\in T} X_{k_t}$ те ноль-минимальные семейства, которых нет в $\{Y_t\}$, $t \in T$. Поскольку $\bigcup\limits_{t\in T} X_{k_t} \subseteq \bigcup\limits_{s\in S\supset T} X_{k_s}$, а из $\bigcup\limits_{s\in S} X_{k_s}$, в силу насыщенности множества $\{Y_S\}$, $s \in S$, можно получить только эти же ноль-минимальные семейства, то, следовательно, $\{Y_v\}$, $v \in V$, $V \subseteq S$. Итак, имеем следующую последовательность включений: $\{Y_t\} \subseteq \{Y_v\} \subseteq \{Y_s\}$. $\square$

Предложение 3.3. *Непустое пересечение двух насыщенных множеств ноль-минимальных семейств опять является насыщенным множеством.*

Доказательство. Действительно, пусть $\{Y_t\} = \{Y_s\} \bigcap \{Y_p\}$, где $\{Y_s\}$ и $\{Y_p\}$ — два насыщенных множества ноль-минимальных семейств. Насытим $\{Y_t\}$ до насыщенного множества $\{Y_v\}$. По предложению 3.2 $\{Y_v\} \subseteq \{Y_s\}$ и $\{Y_v\} \subseteq \{Y_p\}$, следовательно, $\{Y_v\} \subseteq \{Y_t\} = \{Y_s\} \bigcap \{Y_p\}$. Откуда $\{Y_v\} = \{Y_t\}$, т.е. $\{Y_t\}$ — насыщенное множество ноль-минимальных семейств. □

Основная теорема 3.2. *Пусть семейство множеств $\{X_i\}_{i \in I}$ удовлетворяет условию $\bigcap\limits_{i \in I} X_i = \emptyset$. Обозначим $\mathfrak{K}$ — множество всех насыщенных множеств ноль-минимальных его подсемейств, включая $\emptyset$. Тогда из предложений 3.2 и 3.3 следует, что $\mathfrak{K}$ относительно теоретико-множественного включения образует решётку.*

4. ОБОБЩЕНИЕ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ РЕЗУЛЬТАТОВ НА СЛУЧАЙ СЕМЕЙСТВ, МИНИМАЛЬНЫХ ПО ПРОИЗВОЛЬНОМУ ПЕРЕСЕЧЕНИЮ

Вернёмся теперь к общему случаю, когда $\{X_i\}_{i \in I}$ — произвольное $\cap$-минимальное семейство, для которого $\bigcap\limits_{i \in I} X_i = B$, т.е. B-минимальное. Пусть $\{\acute{X}_i\}_{i \in I}$ — его приведённое семейство, оно будет ноль-минимальным (см. предложение 1.2). Причём для любого $i \in I$

$$X_i = \acute{X}_i \bigcup B. \tag{3}$$

Тогда из теоремы 1.3, учитывая равносильность выражений (1) и (2), получим следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Семейство $\{X_i\}_{i \in I}$ является B-минимальным тогда и только тогда, когда его производное семейство состоит из множеств, содержащих B как собственное подмножество и попарно пересекающихся по множеству B.*

Множество B-минимальных семейств $\{X_{k_s}\}_{k_s \in K_s}$, $s \in S$, будем называть *насыщенным*, если семейство $\{X_v\}_{v \in \bigcup_{s \in S} K_s}$ не содержит в себе B-минимальное подсемейство, не присутствующее в множестве семейств $\{X_{k_s}\}_{k_s \in K_s}$, $s \in S$.

Учитывая равенство (3), все результаты для ноль-минимального семейства легко распространяются на общий случай. Таким образом, из предложений 2.1, 3.1, 3.3 и теорем 3.1, 3.2, учитывая равносильность выражений (1) и (2), получим следующие утверждения.

Теорема 4.2. *Множество B-минимальных семейств $\{X_{k_s}\}_{k_s \in K_s}$, $s \in S$, является насыщенным тогда и только тогда, когда для любого семейства $\{k_s\}_{s \in S}$ элементов $k_s \in K_s$ имеет место строгое включение*

$$B \subset \bigcap_{s \in S} X^{k_s}.$$

Предложение 4.1. *Пусть семейство $\{X_i\}_{i \in I}$ имеет пересечение B и $\{X_k\}_{k \in K}$ — его B-минимальное подсемейство ($K \subseteq I$). B-минимальное семейство $\{X_k\}_{k \in K}$ является единственным B-минимальным в семействе $\{X_i\}_{i \in I}$ в том и только том случае, когда для любого $k \in K$ имеет место строгое включение*

$$B \subset \bigcap_{i \in I \setminus \{k\}} X_i.$$

Теорема 4.3. *Пусть семейство $\{X_i\}_{i \in I}$ имеет пересечение B и множество B-минимальных его подсемейств $Y_s = \{X_{k_s}\}_{k_s \in K_s}$, ($K_s \subseteq I$), $s \in S$, является насыщенным. Насыщенное множество семейств $\{Y_s\}$, $s \in S$, является максимальным насыщенными в семействе $\{X_i\}_{i \in I}$ в том и только том случае, когда для любого семейства $\{k_s\}_{s \in S}$ элементов $k_s \in K_s$ имеет место строгое включение*

$$B \subset \bigcap_{i \in I \setminus \{k_s\}_{s \in S}} X_i.$$

Предложение 4.2. *Непустое пересечение двух насыщенных множеств семейств минимальных по одному и тому же пересечению опять является насыщенным множеством семейств минимальных по тому же пересечению.*

Теорема 4.4. *Пусть семейство множеств $\{X_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию $\bigcap\limits_{i\in I} X_i = B$. Обозначим через $\mathfrak{K}$ множество всех насыщенных множеств B-минимальных его подсемейств, включая $\emptyset$. Тогда $\mathfrak{K}$ относительно теоретико-множественного включения образует решётку.*

5. ГЕНЕРАТОРЫ КОНЦЕПТА

Пусть задан контекст [4] $\mathbb{K} = (M_{\bar{\imath}_s}, M_{\bar{n}}, \rho)$, где $\bar{\imath}_s \subseteq \bar{n}$ и $M_{\bar{\imath}_s}$ выбрано в качестве множества объектов. Допустим $X \subset M_{\bar{\imath}_s}$ является $\bar{\imath}_s$-концептом по атрибуту $\bar{\jmath}_k \subseteq \bar{n}$, что по определению [4] означает $X = \widehat{\rho}_{\bar{\imath}_s\bar{\jmath}_k}(X)$. Тогда любой $Y' \subseteq Y$, где $Y = \widehat{\rho}_{\bar{\jmath}_k}(X)$, является $\bar{\jmath}_k$-генератором этого концепта, если $\widehat{\rho}_{\bar{\imath}_s}(Y') = X$. При этом, если для любого собственного подмножества $Y'' \subset Y'$ выполняется $\widehat{\rho}_{\bar{\imath}_s}(Y') \neq X$, то Y' является минимальным генератором $\bar{\imath}_s$-концепта X. По определению $\widehat{\rho}_{\bar{\imath}_s}(Y') = \bigcap\{\rho_{\bar{\imath}_s}\langle y_{\bar{\jmath}_k}\rangle : y_{\bar{\jmath}_k} \in Y'\}$, т.е. $\bar{\imath}_s$-концепт X определяется семейством $\{\rho_{\bar{\imath}_s}\langle y_{\bar{\jmath}_k}\rangle\}_{y_{\bar{\jmath}_k}\in Y'}$, где Y' — любой его генератор. Поэтому в силу результатов раздела 4 справедливы следующие утверждения.

Теорема 5.1. *Множество всех $\bar{\jmath}_k$-генераторов концепта X совпадает с объединением фильтров в $\mathbf{P}(Y)$, содержащих минимальные $\bar{\jmath}_k$-генераторы этого концепта.* □

Теорема 5.2. *Множество $Y^0 \subseteq Y$ является минимальным $\bar{\jmath}_k$-генератором $\bar{\imath}_s$-концепта X тогда и только тогда, когда для любого $y' \in Y^0$*

$$\widehat{\rho}_{\bar{\imath}_s}(Y^0 \backslash \{y'\}) \neq X$$

и для любых $y', y'' \in Y^0$, $y' \neq y''$,

$$\widehat{\rho}_{\bar{\imath}_s}(Y^0 \backslash \{y'\}) \bigcap \widehat{\rho}_{\bar{\imath}_s}(Y^0 \backslash \{y''\}) = X.$$

Доказательство. Следует из теоремы 4.1. □

Множество минимальных $\bar{\jmath}_k$-генератора $Y_t \subset Y = \widehat{\rho}_{\bar{\jmath}_k}(X)$, $t \in T$, $\bar{\imath}_s$-концепта X будем называть *насыщенным*, если их объединение не содержит никаких иных минимальных $\bar{\jmath}_k$-генераторов этого концепта.

Теорема 5.3. *Множество минимальных $\bar{\jmath}_k$-генераторов $\{Y_t\}$, $t \in T$, $\bar{\imath}_s$-концепта X является насыщенным тогда и только тогда, когда для любого семейства $\{y_t\}_{t\in T}$ элементов $y_t \in Y_t$ выполняется*

$$\bigcap_{t\in T} \widehat{\rho}_{\bar{\imath}_s}(Y_t \backslash \{y_t\}) \neq X.$$

Доказательство. Следует из теоремы 4.2. □

Предложение 5.1. *Минимальный $\bar{\jmath}_k$-генератор $Y^0 \subset Y = \widehat{\rho}_{\bar{\jmath}_k}(X)$ $\bar{\imath}_s$-концепта X является единственным минимальным $\bar{\jmath}_k$-генератором $\bar{\imath}_s$-концепта X тогда и только тогда, когда для любого $y \in Y^0$ выполняется $\widehat{\rho}_{\bar{\imath}_s}(Y \backslash \{y\}) \neq X$.*

Доказательство. Следует из предложения 4.1. □

Теорема 5.4. *Насыщенное множество минимальных $\bar{\jmath}_k$-генераторов $\{Y_t \subset Y = \widehat{\rho}_{\bar{\jmath}_k}(X)\}$, $t \in T$, $\bar{\imath}_s$-концепта X является максимальным насыщенным тогда и только тогда, когда для любого семейства $\{y_t\}_{t\in T}$ элементов $y_t \in Y_t$ выполняется*

$$\bigcap_{t\in T} \widehat{\rho}_{\bar{\imath}_s}(Y \backslash \{y_t\}) \neq X.$$

Доказательство. Следует из теоремы 4.3. □

Предложение 5.2. *Непустое пересечение двух насыщенных множеств минимальных $\bar{\jmath}_k$-генераторов $\bar{\imath}_s$-концепта X опять является насыщенным множеством минимальных $\bar{\jmath}_k$-генераторов этого концепта.*

Доказательство. Следует из предложения 4.2. □

Теорема 5.5. *Пусть $\mathfrak{G}$ — множество всех насыщенных множеств минимальных $\bar{\jmath}_k$-генераторов $\bar{\imath}_s$-концепта X, упорядоченное теоретико-множественным включением. Тогда упорядоченное множество $\mathfrak{G}$ изоморфно соответствующей решётке $\mathfrak{K}$ без наименьшего элемента.*

Доказательство. Следует из теоремы 4.4. □

Библиографический список

1. *Wille R.* Bedeutungen von Begriffsverbanden // *Ganter B., Wille R., Wolff K.E.* Beitrage zur Begriffsanalyse. B. I. Mannheim: Wissenschaftsverlag, 1987. P. 161–211.
2. *Ganter B., Wille R.* Formal Concept Analysis — Mathematical Foundations. Berlin: Springer, 1998.
3. *Мейер Д.* Теория реляционных баз данных. М.: Мир, 1987.
4. *Новиков В.Е.* Генераторы концептов в проблеме распознавания образов // Проблемы теоретической кибернетики: Тез. докл. XIV Междунар. конф. М.: Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ, 2005.

УДК 512.643.2+512.558

О НУЛЯХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

В.Б. Поплавский

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: poplavskivb@mail.ru

В статье изучаются свойства внешностей и внутренностей матриц с элементами из произвольной булевой алгебры. Внешняя и внутренняя части образуют вырожденную часть матрицы, определитель которой равен нулю. Показано, в частности, что внешние матрицы образуют нормальные множества в булевой алгебре всех булевых квадратных матриц и нижнюю полурешетку, а внутренности — верхнюю полурешетку, которой принадлежат линейные комбинации и даже многочлены от внутренних матриц.

Ключевые слова: булевы матрицы, определитель, вырожденные матрицы.

On Determinant Zeros of Boolean Matrices

V.B. Poplavski

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: poplavskivb@mail.ru

The properties of exteriority and interiority of square matrices with elements from arbitrary Boolean algebra are studied in this paper. The exterior and interior parts form a degenerate part of a matrix with zero determinant. It is shown, in particular, that the set of exterior parts is a normal set in the Boolean algebra of all Boolean square matrices and it is a lower semilattice. The set of interior parts is an upper semilattice. Moreover linear combinations and even polynomials of the interiorities also belong to it.

Key words: Boolean matrices, determinant, degenerate matrices.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\langle \mathbf{B}_{n\times n}, \cup, \cap, ', 0, 1\rangle$ есть булева алгебра квадратных матриц с элементами из некоторой булевой алгебры $\langle \mathbf{B}, \cup, \cap, ', 0, 1\rangle$. Операции $\cup, \cap, '$ (объединение, пересечение и дополнение) и, следовательно, отношение частичного порядка $\subseteq$ определяются для матриц поэлементно. Нулем и единицей такой вторичной булевой алгебры служат матрицы O и J, образованные целиком из нулей 0 и единиц 1 соответственно. С другой стороны, матрицы из $\mathbf{B}_{n\times n}$ образуют полумодуль с двумя операциями, объединением матриц (заменяющим сложение) $A \cup B = (a^i_j \cup b^i_j) \in \mathbf{B}_{n\times n}$ и пересечением матрицы с элементом из булевой алгебры (заменяющим умножение на скаляр) $\lambda \cap A = (\lambda \cap a^i_j) \in \mathbf{B}_{n\times n}$. Здесь a^i_j и b^i_j — элементы, стоящие в i-й строке и j-м столбце матриц $A = (a^i_j)$ и $B = (b^i_j)$ соответственно. Кроме этого множество $\mathbf{B}_{n\times n}$ относительно произведения, определяемого для матриц $A = (a^i_j)$ и $B = (b^i_j)$ как $C = A \sqcap B$ с элементами $c^i_s = \bigcup_{t=1}^n (a^i_t \cap b^t_s)$, образует решеточно упорядоченную полугруппу с единицей E. Здесь E — матрица, по главной диагонали которой стоят единицы, а на остальных местах — нули.

Пусть $\overset{+}{P}$ и $\overset{-}{P}$ обозначают множества всех четных и нечетных n-подстановок ($n \geq 2$). Полуперманенты, определяемые формулами

$$\overset{+}{\nabla}\, A = \bigcup_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in \overset{+}{P}} \bigcap_{k=1}^{n} a_k^{\lambda_k}, \qquad \overset{-}{\nabla}\, A = \bigcup_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in \overset{-}{P}} \bigcap_{k=1}^{n} a_k^{\lambda_k},$$

позволяют рассмотреть перманент $\operatorname{Per} A = \overset{+}{\nabla}\, A \cup \overset{-}{\nabla}\, A$, определитель, равный симметрической разности полуперманентов, т. е. $\operatorname{Det} A = (\overset{+}{\nabla}\, A \setminus \overset{-}{\nabla}\, A) \cup (\overset{-}{\nabla}\, A \setminus \overset{+}{\nabla}\, A)$, и общую часть полуперманентов

© В.Б. Поплавский, 2009

$\Delta A = \overset{+}{\nabla} A \cap \overset{-}{\nabla} A$ для любой матрицы A. Ясно, что $\operatorname{Per} A = \operatorname{Det} A \cup \Delta A$ и из определения перманента и детерминанта квадратной булевой матрицы автоматически следует выполнение неравенства $\operatorname{Det} A \subseteq \operatorname{Per} A$.

Любая матрица может быть представлена в виде объединения $A = \hat{A} \cup \overset{o}{A} \cup \check{A}$ внешней $\hat{A}$, детерминированной $\overset{o}{A}$ и $\check{A}$ внутренней частей, которые получаются как пересечения $\check{A} = (\operatorname{Per} A)' \cap A$, $\overset{o}{A} = \operatorname{Det} A \cap A$, $\hat{A} = \triangle A \cap A$. Можно показать [1], что перманенты этих частей удовлетворяют следующим равенствам:

$$\operatorname{Per} \check{A} = 0, \qquad \operatorname{Per} \overset{o}{A} = \operatorname{Det} \overset{o}{A} = \operatorname{Det} A, \qquad \operatorname{Per} \hat{A} = \overset{+}{\nabla} A = \overset{-}{\nabla} A = \triangle \hat{A} = \triangle A.$$

Также выполняются равенства, дающие дизъюнктные перманентные разложения, разложения общей части и определителя матрицы A:

$$\operatorname{Per} A = \operatorname{Per} \check{A} \cup \operatorname{Per} \overset{o}{A} \cup \operatorname{Per} \hat{A}, \qquad \triangle A = \triangle \check{A} \cup \triangle \overset{o}{A} \cup \triangle \hat{A}, \qquad \operatorname{Det} A = \operatorname{Det} \check{A} \cup \operatorname{Det} \overset{o}{A} \cup \operatorname{Det} \hat{A},$$

при этом $\triangle \check{A} = \triangle \overset{o}{A} = \operatorname{Det} \check{A} = \operatorname{Det} \hat{A} = 0$.

Определение 1. Ненулевую матрицу A назовем *внешней* (или *внешностью*), если $A = \check{A}$, *детерминированной*, если $A = \overset{o}{A}$, и *внутренней* (или *внутренностью*), если $A = \hat{A}$. Матрицу $A = \check{A} \cup \hat{A}$ назовем *вырожденной*.

Для детерминированной матрицы выполняется равенство $\overset{o}{A} = \operatorname{Det} \overset{o}{A} \cap \overset{o}{A}$, а для внутренней матрицы — $\hat{A} = \operatorname{Det} \Delta \hat{A} \cap \hat{A}$.

Следующее утверждение, доказательство которого можно найти в работе [1], указывает на однозначность разложения матрицы A на внешнюю, детерминированную и внутреннюю части. А именно имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если $B = \check{B}$ — внешняя, $C = \overset{o}{C}$ — детерминированная и $D = \hat{D}$ — внутренняя матрицы, причем $B \subseteq (\operatorname{Det} C \cup \Delta D)' \cap B$ и $\operatorname{Det} C \cap \Delta D = 0$, то для внешней, детерминированной и внутренней частей матрицы $A = B \cup C \cup D$ выполняются равенства $\check{A} = B$, $\overset{o}{A} = C$ и $\hat{A} = D$.*

Следует отметить, что для матриц над двухэлементной булевой алгеброй $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$ проблема разложения выглядит проще. Возможен один из вариантов: любая (0,1)-матрица является либо внешней, либо детерминированной, либо внутренней.

Представление матрицы $A = \hat{A} \cup \overset{o}{A} \cup \check{A}$ помогает справиться с такими задачами, например, как проблема разложения определителя по строке или столбцу. Как было показано в работе [1], она сводится к разложимости детерминанта внутренности этих матриц. Там же была показана тесная связь проблем обратимости, невырожденности и разложимости детерминанта по строке или столбцу булевых матриц.

Примером внутренних матриц могут служить матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно также увидеть, что всякое рефлексивное бинарное отношение на конечном множестве, содержащее, по крайней мере, две симметричных пары точек, описывается внутренней матрицей. Таким образом, широко используемые в математике бинарные отношения на конечном множестве нередко являются внутренними. К ним можно отнести рефлексивные бинарные отношения (эквивалентности, толерантности, частичного порядка и т.д.) на конечном множестве, свойства детерминантов матриц которых изучались в работе [2]. Можно указать интерпретацию внутренностей и в терминах конечных ориентированных графов. Как мы увидим далее, имеется также схожесть свойств внутренности булевых матриц со свойствами соответствующего топологического понятия.

Множество вырожденных матриц, определяемое условием $\operatorname{Det} A = 0$ или $A = \hat{A} \cup \check{A}$, образует идеал в полугруппе квадратных матриц относительно произведения матриц, что сразу следует из $\operatorname{Det}(A \sqcap B) \subseteq \operatorname{Det} A \cap \operatorname{Det} B$ [3]. Мы покажем, что все внутренние матрицы образуют подполугруппу в этом идеале относительно произведения.

Все сказанное объясняет наш интерес к внешним и внутренним булевым матрицам. Будет показано, в частности, что внешние матрицы образуют нижнюю полурешетку, а главные булевы идеалы, порожденные внешней матрицей, состоят из внешностей. Внутренности образуют верхнюю полурешетку, которой принадлежат линейные комбинации и даже многочлены внутренних матриц. Более того, множество всех внутренностей образует полукольцо с аддитивной операцией $\cup$ и мультипликативной операцией $\sqcap$.

1. СВОЙСТВА ВНЕШНОСТЕЙ

Внешняя булева матрица определяется как матрица, перманент которой равен нулю. Такие матрицы над различными полукольцами хорошо описаны и играют значительную роль в комбинаторной математике. Строение такой матрицы описывается следующей известной теоремой Фробениуса – Кёнига, доказательство которой приводится, например, в работах [4, гл. 7, § 2] и [5, гл. 3, § 2] для неотрицательных матриц и можно дословно повторить для случая матриц с элементами из булевой алгебры $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$.

Теорема 1.1 (Фробениус – Кёниг). *Перманент квадратной матрицы над двухэлементной булевой алгеброй $\mathbf{B}_2$ равен нулю тогда и только тогда, когда в результате перестановок строк или столбцов этой матрицы можно получить нулевую подматрицу размера $s \times t$ с условием $s + t = n + 1$.*

Следующая теорема перечисляет свойства множества всевозможных внешних матриц.

Теорема 1.2. *Следующие свойства внешностей выполняются для любых булевых матриц A, B и элемента $\lambda \in \mathbf{B}$: 1) $\check{J} = \check{O} = O$; 2) $\check{A} \subseteq A$; 3) $\check{\check{A}} = \check{A}$; 4) Если $A \subseteq B = \check{B}$, то $A = \check{A}$; 5) $\overbrace{\check{A} \cap \check{B}}^{\check{}} = \check{A} \cap \check{B} \subseteq \overbrace{A \cap B}^{\check{}}$; 6) $\overbrace{\lambda \cap \check{A}}^{\check{}} = \lambda \cap \check{A} = \overbrace{\lambda \cap A}^{\check{}}$; 7) Если $A \sqcap B = \overbrace{A \sqcap B}^{\check{}}$, то $A \cap B = \overbrace{A \cap B}^{\check{}}$; 8) $\overbrace{A \sqcap B}^{\check{}} \subseteq (\check{A} \sqcap B) \cup (A \sqcap \check{B}) \subseteq A \sqcap B$.*

Доказательство. Равенство 1) проверяется непосредственно. Свойство 2) следует из определения внутренности. Справедливость свойства 3) следует из тождества $\operatorname{Per}(\lambda \cap A) = \lambda \cap \operatorname{Per} A$ и равенств

$$\check{\check{A}} = \check{A} \cap (\operatorname{Per} \check{A})' = A \cap (\operatorname{Per} A)' \cap (\operatorname{Per}(A \cap (\operatorname{Per} A)')' = A \cap (\operatorname{Per} A)' = \check{A}.$$

Для проверки свойства 4) заметим, что из $A \subseteq B = \check{B}$ следует $\operatorname{Per} A \subseteq \operatorname{Per} B = \operatorname{Per} \check{B} = 0$. Поэтому $A = \check{A}$.

Докажем свойство 5). Прежде заметим, что из свойства 2) получаем $\overbrace{\check{A} \cap \check{B}}^{\check{}} \subseteq \check{A} \cap \check{B}$. Учитывая то, что неравенство $C \subseteq D$ для любых матриц C, D влечет $\operatorname{Per} C \subseteq \operatorname{Per} D$, получаем $\operatorname{Per} C \cup \operatorname{Per} D \supseteq \operatorname{Per} C \cap \operatorname{Per} D \supseteq \operatorname{Per}(C \cap D)$. Тогда $(\operatorname{Per} C)' \cap (\operatorname{Per} D)' = (\operatorname{Per} C \cup \operatorname{Per} D)' \subseteq$ $\subseteq (\operatorname{Per} C \cap \operatorname{Per} D)' \subseteq (\operatorname{Per}(C \cap D))'$. Поэтому выполняется

$$\overbrace{\check{A} \cap \check{B}}^{\check{}} = (\check{A} \cap \check{B}) \cap (\operatorname{Per}(\check{A} \cap \check{B}))' \supseteq (\check{A} \cap \check{B}) \cap (\operatorname{Per} \check{A})' \cap (\operatorname{Per} \check{B})' = \check{\check{A}} \cap \check{\check{B}} = \check{A} \cap \check{B}.$$

и, следовательно, равенство $\overbrace{\check{A} \cap \check{B}}^{\check{}} = \check{A} \cap \check{B}$ доказано. Кроме того $\check{A} \cap \check{B} \subseteq \overbrace{A \cap B}^{\check{}}$, так как

$$\check{A} \cap \check{B} = A \cap (\operatorname{Per} A)' \cap B \cap (\operatorname{Per} B)' \subseteq (A \cap B) \cap (\operatorname{Per}(A \cap B))' = \overbrace{A \cap B}^{\check{}}.$$

При доказательстве свойства 6) снова применим тождество $\operatorname{Per}(\lambda \cap A) = \lambda \cap \operatorname{Per} A$. Тогда

$$\overbrace{\lambda \cap A}^{\check{}} = (\lambda \cap A) \cap (\operatorname{Per}(\lambda \cap A))' = \lambda \cap A \cap (\lambda \cap \operatorname{Per} A)' = \lambda \cap A \cap (\lambda' \cup (\operatorname{Per} A)') = \lambda \cap A \cap (\operatorname{Per} A)' = \lambda \cap \check{A}.$$

Далее, $\lambda \cap \check{A} \subseteq \check{A}$ и в силу доказанного свойства 4) получаем $\overbrace{\lambda \cap \check{A}}^{\check{}} = \lambda \cap \check{A}$.

Проверим 7). Если $A \sqcap B = \overset{\vee}{\widehat{A \sqcap B}}$, то $\mathrm{Per}\,(A \sqcap B) = 0$. Учитывая $\mathrm{Per}\,(A \sqcap B) \supseteq \mathrm{Per}\,A \cap \mathrm{Per}\,B \supseteq$ $\supseteq \mathrm{Per}\,(A \cap B)$, получаем $\mathrm{Per}\,(A \cap B) = 0$. Это означает, что $A \cap B = \overset{\vee}{\widehat{A \cap B}}$.

Свойство 8) получим, используя неравенство $(\mathrm{Per}\,(A \sqcap B))' \subseteq (\mathrm{Per}\,A \cap \mathrm{Per}\,B)'$, или $(\mathrm{Per}\,(A \sqcap B))' \subseteq$ $\subseteq (\mathrm{Per}\,A)' \cup (\mathrm{Per}\,B)'$. Тогда $A \cap (\mathrm{Per}\,(A \sqcap B))' \subseteq A \cap ((\mathrm{Per}\,A)' \cup (\mathrm{Per}\,B)') = \check{A} \cup (A \cap (\mathrm{Per}\,B)')$. Умножая последнее неравенство справа на матрицу B, имеем $(A \cap (\mathrm{Per}\,(A \sqcap B))') \sqcap B \subseteq (\check{A} \cup (A \cap (\mathrm{Per}\,B)')) \sqcap B$, или $(\mathrm{Per}\,(A \sqcap B))' \cap (A \sqcap B) \subseteq (\check{A} \cup (A \cap (\mathrm{Per}\,B)')) \sqcap B$. Учитывая дистрибутивность произведения относительно объединения матриц, получим $\overset{\vee}{\widehat{A \sqcap B}} \subseteq (\check{A} \sqcap B) \cup ((A \cap (\mathrm{Per}\,B)') \sqcap B)$. Используя тождество $(\lambda \cap A) \sqcap B = A \sqcap (\lambda \cap B) = (\lambda \cap A) \sqcap (\lambda \cap B)$, получаем $\overset{\vee}{\widehat{A \sqcap B}} \subseteq (\check{A} \sqcap B) \cup (A \sqcap \check{B})$. С другой стороны, так как $\check{A} \subseteq A$, то $\check{A} \sqcap B \subseteq A \sqcap B$. Аналогично $A \sqcap \check{B} \subseteq A \sqcap B$. Поэтому $(\check{A} \sqcap B) \cup (A \sqcap \check{B}) \subseteq A \sqcap B$. $\square$

Здесь и далее существенно используются изотонность перманента и его свойства, а также свойства произведения булевых матриц, о которых изложено в работах [1–3].

Особо отметим, свойство 4) означает, что множество всех внешностей вложено нормально в булеву алгебру квадратных матриц $\mathbf{B}_{n \times n}$, следуя терминологии [6]. Получается, что всякая внешняя матрица $A = \check{A}$ порождает главный идеал $[O, A] = \{B | B \subseteq A = \check{A}\}$, который состоит из внешностей. Свойства 1) и 5) указывают на то, что множество всех внешностей образует нижнюю (минорантную) полурешетку с минимальным элементом $O = \check{O}$.

2. ВНУТРЕННОСТИ И ИХ СВОЙСТВА

Матрица является внутренней тогда и только тогда, когда выполнено $\mathrm{Per}\,A \cap A = A$ и перманент и полуперманенты совпадают: $\mathrm{Per}\,A = \overset{+}{\nabla} A = \overset{-}{\nabla} A = \triangle A$. Как будет показано далее, внутренности образуют верхнюю (мажорантную) полурешетку с наибольшим элементом J. Более того, множество всех внутренностей образует полукольцо с аддитивной операцией $\cup$ и мультипликативной операцией $\sqcap$. Кроме того, множество всех внутренностей замкнуто относительно взятия линейных комбинаций, и, следовательно, любой многочлен от внутренних матриц $f(A) = \bigcup_{i=0}^{k} (\lambda_i \cap A^{n_i})$ является внутренним.

Теорема 2.1. *Следующие свойства внутренностей выполняются для любых булевых матриц A, B и элемента $\lambda \in \mathbf{B}$:* 1) $\hat{O} = O$, $\hat{J} = J$; 2) $\hat{A} \subset A$; 3) $\hat{\hat{A}} = \hat{A}$; 4) *Если* $A \subset B$, *то* $\hat{A} \subset \hat{B}$; 5) $\widehat{\hat{A} \cap \hat{B}} = \widehat{\hat{A} \cap B} = \widehat{A \cap \hat{B}} = \widehat{A \cap B} \subseteq \hat{A} \cap \hat{B}$; 6) $\widehat{\hat{A} \cup \hat{B}} = \hat{A} \cup \hat{B} \subseteq \widehat{A \cup B}$; 7) $\widehat{\lambda \cap \hat{A}} = \lambda \cap \hat{A} = \widehat{\lambda \cap A}$; 8) $\widehat{\hat{A} \sqcap \hat{B}} = \hat{A} \sqcap \hat{B} \subseteq \widehat{A \sqcap B}$.

Доказательство. Свойство 1) верно, так как $\hat{O} = \triangle O \cap O = 0 \cap O = O$ и $\hat{J} = \triangle J \cap J = 1 \cap J = J$.

Свойство 2) следует из определения внутренности.

Свойство 3) проверяется непосредственно: $\hat{\hat{A}} = \Delta \hat{A} \cap \hat{A} = \Delta \hat{A} \cap (\Delta A \cap A) = \Delta A \cap A = \hat{A}$.

Свойство 4) следует из того, что неравенство $A \subseteq B$ влечет $\Delta A \subseteq \Delta B$. Следовательно, $A \cap \Delta A \subseteq B \cap \Delta B$, т. е. $\hat{A} \subseteq \hat{B}$.

Для проверки свойства 5) заметим, что из свойств 2) и 4) получаем $\widehat{\hat{A} \cap \hat{B}} \subseteq \widehat{A \cap B}$. С другой стороны, выполняется $\Delta(A \cap B) \subseteq \Delta A \cap \Delta B$. Поэтому $\widehat{A \cap B} = \Delta(A \cap B) \cap (A \cap B) \subseteq \Delta A \cap \Delta B \cap A \cap B =$ $= \hat{A} \cap \hat{B}$. Таким образом, имеем цепочку неравенств $\widehat{\hat{A} \cap \hat{B}} \subseteq \widehat{A \cap B} \subseteq \hat{A} \cap \hat{B}$, из которой с учетом свойства 4) следует $\widehat{\widehat{\hat{A} \cap \hat{B}}} \subseteq \widehat{\widehat{A \cap B}} \subseteq \widehat{\hat{A} \cap \hat{B}}$. Применяя к последнему выражению свойство 3), получаем равенство $\widehat{\hat{A} \cap \hat{B}} = \hat{A} \cap \hat{B}$. Равенства $\widehat{\hat{A} \cap B} = \widehat{A \cap \hat{B}} = \widehat{A \cap B}$ доказываются аналогично.

Свойство 6) получается из того, что $\hat{A} \cup \hat{B} \supseteq \widehat{\hat{A} \cup \hat{B}} = \Delta(\hat{A} \cup \hat{B}) \cap (\hat{A} \cup \hat{B}) \supseteq (\Delta \hat{A} \cup \Delta \hat{B}) \cap (\hat{A} \cup \hat{B}) \supseteq$ $\supseteq (\Delta \hat{A} \cap \hat{A}) \cup (\Delta \hat{B} \cap \hat{B}) = (\Delta A \cap A) \cup (\Delta B \cap B) = \hat{A} \cup \hat{B}$.

Проверим свойство 7). Так как $\Delta(\lambda \cap A) = \lambda \cap \Delta A$, тогда $\widehat{\lambda \cap A} = \Delta(\lambda \cap A) \cap (\lambda \cap A) = (\lambda \cap \Delta A \cap A) =$ $= \lambda \cap \hat{A}$. Аналогично $\widehat{\lambda \cap \hat{A}} = \Delta(\lambda \cap \hat{A}) \cap (\lambda \cap \hat{A}) = (\lambda \cap \Delta \hat{A}) \cap (\lambda \cap \Delta A \cap A) = \lambda \cap \Delta A \cap A = \lambda \cap \hat{A}$.

Для доказательства формулы 8) сначала покажем, что для всех матриц A и B выполняется неравенство $\Delta A \cap \Delta B \subseteq \Delta(A \sqcap B)$. Для этого воспользуемся известными формулами для полуперманентов (см., например, [7] или [8, § 19]):

$$(\overset{+}{\nabla} A \cap \overset{+}{\nabla} B) \cup (\overset{-}{\nabla} A \cap \overset{-}{\nabla} B) \subseteq \overset{+}{\nabla} (A \sqcap B), \qquad (\overset{-}{\nabla} A \cap \overset{+}{\nabla} B) \cup (\overset{+}{\nabla} A \cap \overset{-}{\nabla} B) \subseteq \overset{-}{\nabla} (A \sqcap B).$$

Тогда $(\overset{+}{\nabla} A \cap \overset{+}{\nabla} B) \cap (\overset{-}{\nabla} A \cap \overset{-}{\nabla} B) \subseteq \overset{+}{\nabla} (A \sqcap B)$ и $(\overset{-}{\nabla} A \cap \overset{+}{\nabla} B) \cap (\overset{+}{\nabla} A \cap \overset{-}{\nabla} B) \subseteq \overset{-}{\nabla} (A \sqcap B)$. Следовательно, $\Delta A \cap \Delta B \subseteq \overset{+}{\nabla} (A \sqcap B)$ и $\Delta A \cap \Delta B \subseteq \overset{-}{\nabla} (A \sqcap B)$. Получаем $\Delta A \cap \Delta B \subseteq \Delta(A \sqcap B)$.

Учитывая тождество $\lambda \cap (A \sqcap B) = (\lambda \cap A) \sqcap B = A \sqcap (\lambda \cap B) = (\lambda \cap A) \sqcap (\lambda \cap B)$, получим

$$\widehat{A \sqcap B} = \Delta(A \sqcap B) \cap (A \sqcap B) \supseteq (\Delta A \cap \Delta B) \cap (A \sqcap B) = (\Delta A \cap A) \sqcap (\Delta B \cap B) = \hat{A} \sqcap \hat{B}.$$

Последнее выражение справедливо, в частности, для внутренних матриц $A = \hat{A}$ и $B = \hat{B}$. Получаем $\widehat{\hat{A} \sqcap \hat{B}} \supseteq \hat{\hat{A}} \sqcap \hat{\hat{B}} = \hat{A} \sqcap \hat{B}$. С другой стороны, верно обратное включение (свойство 2)). Следовательно, выполняется равенство $\widehat{\hat{A} \sqcap \hat{B}} = \hat{A} \sqcap \hat{B}$ для любых квадратных булевых матриц A и B. □

Теорема 2.2. *Пусть $\widehat{\mathbf{B}}_{n\times n}$ — множество всех внутренних булевых матриц. Тогда*

1) $\widehat{\mathbf{B}}_{n\times n}$ — *верхняя (мажорантная) полурешетка с наибольшим элементом J;*

2) $\widehat{\mathbf{B}}_{n\times n}$ — *полукольцо с аддитивной операцией $\cup$ и мультипликативной операцией $\sqcap$;*

3) $\widehat{\mathbf{B}}_{n\times n}$ — *полумодуль над булевой алгеброй $\mathbf{B}$.*

Доказательство. Первое утверждение сразу следует из свойств 1) и 6) теоремы 2.1.

Второе следует из свойств 6), 8) теоремы 2.1 и закона дистрибутивности, который, как легко проверить, выполняется с двух сторон для любых булевых $n \times n$-матриц:

$$A \sqcap (B \cup C) = (A \sqcap B) \cup (A \sqcap C), \qquad (A \cup B) \sqcap C = (A \sqcap C) \cup (B \sqcap C).$$

Из свойств 1), 6), 7) теоремы 2.1 следует справедливость третьего утверждения.□

Приведенные в теореме 2.1 свойства 1)–5) показывают, насколько близки между собой введенное здесь понятие «внутренность» булевой квадратной матрицы и понятие «внутренность подмножества топологического пространства». Это объясняет выбор термина «внутренность» для булевой матрицы. От аксиом Куратовского, определяющих топологию через понятие «внутренность подмножества», их отличает неравенство 5), записанное вместо равенства.

Следующее утверждение может служить новым определением внутренности булевой матрицы.

Теорема 2.3. *Внутренность $\hat{A}$ булевой квадратной матрицы A есть наибольшая из всех внутренних матриц, содержащихся в A.*

Доказательство. Предположим, что существует внутренняя матрица $\hat{B}$ и $\hat{A} \subset \hat{B} \subset A$. Из свойства 4) теоремы 2.1 получаем $\hat{\hat{A}} \subset \hat{\hat{B}} \subset \hat{A}$, и тогда, учитывая свойство 3), $\hat{A} = \hat{B}$. □

Пример. Нетрудно показать, что внутренние матрицы размера 2×2 — это в точности матрицы вида $A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$, где $\alpha \in \mathbf{B}$. Тогда свойство 5), указанное в теореме 2.1, превращается в равенство $\widehat{\hat{A} \cap \hat{B}} = \widehat{\hat{A} \cap B} = \widehat{A \cap \hat{B}} = \widehat{A \cap B} = \hat{A} \cap \hat{B}$. Поэтому множество внутренних 2×2-матриц есть открыто-замкнутая топология, которая, если ее рассматривать как булеву алгебру, очевидно, изоморфна исходной булевой алгебре. Однако в случае большего размера матриц можно указать пример таких внутренних матриц, пересечение которых не есть внутренность. Действительно, для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{A}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \hat{B}$$

выполняется $A \cap B = E \neq \hat{E} = O$.

Замечание 2.1. Свойства 5) и 2) теоремы 2.1 дают $\widehat{A \cap B} \subseteq \hat{A} \cap \hat{B} \subseteq A \cap B$. Тогда из теоремы 2.3 получаем, что пересечение внутренностей $\hat{A} \cap \hat{B}$ есть внутренность тогда и только тогда, когда оно совпадает с внутренностью $\widehat{A \cap B}$. Получается, что любое множество, содержащее O, J и матрицы из $\mathbf{B}_{n\times n}$, попарные пересечения которых являются внутренними матрицами, определяют множество внутренностей для некоторой топологии.

Замечание 2.2. Заметим также, что в случае матриц с элементами из $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$ всякая матрица, содержащая ненулевую внутреннюю матрицу, сама является внутренней: $(\hat{A} \subseteq B) \to (\hat{B} = B)$. Это получается из того, что $(\hat{A} \subseteq B) \to (\Delta\hat{A} \subseteq \Delta B)$ и $\Delta\hat{A} = 1$ дает $\Delta B = 1$ и, следовательно, $B = \hat{B}$.

Замечание 2.3. Утверждение, подобное теореме 2.3, для внешних частей булевых матриц не выполняется. Действительно, если для матрицы A существует матрица B такая, что $\check{A} \subseteq \check{B} \subseteq A$, то это влечет неравенства $\check{A} \cap (\operatorname{Per} A)' \subseteq \check{B} \cap (\operatorname{Per} A)' \subseteq A \cap (\operatorname{Per} A)'$ и, следовательно, равенство $\check{A} = \check{B} \cap (\operatorname{Per} A)'$. При этом матрицы $\check{A}$ и $\check{B}$ могут быть различными, если рассматривать булеву алгебру мощности $|\mathbf{B}| > 2$. Примером таких матриц над четырехэлементной булевой алгеброй $\mathbf{B} = \{0, a, b, 1\}$ могут служить матрицы

$$\check{A} = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \subset \check{B} = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ b & b & 0 \end{pmatrix} \subset A = \begin{pmatrix} a & a & b \\ 1 & 1 & 0 \\ b & b & b \end{pmatrix},$$

для которых $\operatorname{Per} B = 0$, $\operatorname{Per} A = b$ и, следовательно, $(\operatorname{Per} A)' = a$.

Библиографический список

1. *Поплавский В.Б.* О разложении определителей булевых матриц // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13, № 4. С. 199–223.
2. *Поплавский В.Б.* Объемы и определители степеней транзитивных и рефлексивных булевых отношений на конечных множествах // Изв. Тульск. госун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2004. Т. 10, вып. 1. С. 134–141.
3. *Поплавский В.Б.* О рангах, классах Грина и теории определителей булевых матриц // Дискрет. мат. 2008. Т. 20, № 4. С. 42–60.
4. *Сачков В.Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1982.
5. *Минк Х.* Перманенты. М.: Мир, 1982.
6. *Владимиров Д.А.* Булевы алгебры. М.: Наука, 1969.
7. *Golan J.S.* Semirings and their Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.
8. *Reutenauer C., Straubing H.* Inversion of matrices over a commutative semiring // J. of Algebra. 1984. № 88. С. 350–360.

УДК 519.83

РАВНОВЕСИЕ В ИГРАХ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ

В.В. Розен

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: RozenVV@info.sgu.ru

Рассмотрены условия существования ситуаций равновесия в смешанных расширениях игр с упорядоченными исходами. Предложены общие методы описания множества ситуаций равновесия, а также равновесий по Нэшу.

Ключевые слова: ситуация равновесия, равновесие по Нэшу, отношение порядка, вероятностная мера.

Equilibrium in Games with Ordered Outcomes

V.V. Rozen

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: RozenVV@info.sgu.ru

We consider some conditions of existence of equilibrium points in mixed extensions of games with ordered outcomes. General methods for description of the set of equilibrium points and also for Nash equilibrium points are proposed.

Key words: equilibrium points, Nash equilibrium, ordering relation, stochastic measure.

ВВЕДЕНИЕ

Игра с упорядоченными исходами характеризуется тем, что ее целевая структура задана с помощью отношений порядка, выражающих предпочтения игроков на множестве исходов игры. Игра с упорядоченными исходами в нормальной форме задается в виде набора объектов

$$G = \langle (X_i)_{i \in I},\, A,\, (\omega_i)_{i \in I},\, F \rangle, \tag{1}$$

где X_i — множество стратегий игрока $i \in I$, $I = \{1, \ldots, n\}$ — множество игроков, A — множество исходов, ω_i — отношение (частичного) порядка на A, выражающее предпочтения игрока i, $F\colon \prod\limits_{i \in I} X_i \to A$ — функция реализации.

© В.В. Розен, 2009

Основным некооперативным принципом оптимальности для игр этого класса является принцип равновесия.

Определение. Ситуация $x^0 \in \prod_{i \in I} X_i$ называется *ситуацией равновесия* в игре G, если ни у одного игрока $i \in I$ не существует такой стратегии $x_i \in X_i$, для которой выполняется

$$F(x^0||x_i) >^{\omega_i} F(x^0).$$

Ситуация равновесия обладает устойчивостью, так как в такой ситуации ни один игрок не заинтересован в одностороннем отклонении от нее.

Ситуация x^0 называется *равновесием по Нэшу*, если для всех $i \in I$, $x_i \in X_i$ имеет место

$$F(x^0||x_i) \leq^{\omega_i} F(x^0).$$

Отметим, что если все отношения ω_i являются линейными (в частности, для игр с функциями выигрыша), то понятия равновесия и равновесия по Нэшу становятся равнозначными; в общем случае равновесие по Нэшу есть специализация понятия равновесия.

Настоящая работа представляет собой краткий обзор результатов, полученных автором в разные годы (в том числе неопубликованных), которые касаются условий существования и методов нахождения ситуаций равновесия в играх с упорядоченными исходами [1–6]. Как и в играх с численными выигрышами, в играх с упорядоченными исходами принцип равновесия обладает универсальной реализуемостью лишь в смешанных стратегиях. Переход к смешанным стратегиям в играх с упорядоченными исходами требует продолжения порядков ω_i $(i \in I)$ на множество вероятностных мер. Проблемы продолжения порядка на множество вероятностных мер обсуждались на Международной конференции, посвященной 100-летию профессора В.В. Вагнера, и опубликованы в работе [7].

1. ПРОДОЛЖЕНИЕ УПОРЯДОЧЕННОСТИ НА МНОЖЕСТВО ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР С ПОМОЩЬЮ КОНУСОВ ИЗОТОННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Под вероятностной мерой на произвольном (частично) упорядоченном множестве $\langle A, \omega \rangle$ понимается неотрицательная счетно-аддитивная нормированная функция, заданная на σ-алгебре Ω, порожденной семейством всех мажорантно стабильных в $\langle A, \omega \rangle$ подмножеств. Последнее условие обеспечивает выполнение включения $A \subseteq \Sigma$, а также измеримость относительно такой σ-алгебры любой функции, являющейся изотонным отображением упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в числовую прямую R. Множество всех вероятностных мер на упорядоченном множестве $\langle A, \omega \rangle$ обозначается далее через $P_\omega(A)$. *Продолжением порядка ω на множество вероятностных мер* называется любое содержащее ω отношение квазипорядка на $P_\omega(A)$, ограничение которого на A совпадает с ω. Через $C_0(\omega)$ будем обозначать множество всех ограниченных изотонных отображений упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в числовую прямую. Для $f \in C_0(\omega), \mu \in P_\omega(A)$ будем полагать: $\bar{f}\,(\mu) = (f, \mu) = \int_A f d\mu$. Зафиксируем некоторый конус $C \subseteq C_0(\omega)$ изотонных отображений упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в R. Определим на $P_\omega(A)$ отношение ω^C формулой

$$\mu \geq^C \nu \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\, f \in C) \;\; \bar{f}\,(\mu) \geq \bar{f}\,(\nu).$$

Замечание 1. При всяком конусе $C \subseteq C_0(\omega)$ отношение ω^C является отношением квазипорядка на множестве вероятностных мер $P_\omega(A)$, содержащим отношение ω. Квазипорядок ω^C будет продолжением порядка ω тогда и только тогда, конус C аппроксимирует отношение ω.

Основные типы структур, рассматриваемых на множестве вероятностных мер $P_\omega(A)$, — выпуклая структура и топология. Выпуклая структура на $P_\omega(A)$ определена в силу того, что для любых двух вероятностных мер $\mu, \nu \in P_\omega(A)$ их выпуклая комбинация $\alpha\mu + (1-\alpha)\nu$, где $0 \leq \alpha \leq 1$, также является вероятностной мерой. Топология на $P_\omega(A)$ определяется при помощи сходимости (сходимость последовательности вероятностных мер (μ_n) к вероятностной мере μ означает сходимость числовой последовательности $\int_A f d\mu_n$ к $\int_A f d\mu$ при любой функции $f \in C_0(\omega)$).

Отметим основные математические свойства отношений вида ω^C.

Теорема 1. *При всяком конусе $C \subseteq C_0(\omega)$ отношение квазипорядка ω^C обладает свойствами:*
(a) двусторонней стабильности относительно смешивания:

$$\mu \geq^{\omega^C} \nu \Leftrightarrow \lambda\mu + (1-\lambda)\theta \geq^{\omega^C} \lambda\nu + (1-\lambda)\theta \ (\mu, \nu, \theta \in P_\omega(A),\ 0 < \lambda < 1),$$

(b) замкнутости: из условий $\mu_n \geq^{\omega^C} \nu_n,\ \mu_n \to \mu,\ \nu_n \to \nu\ (n = 1, 2, \ldots)$ следует $\mu \geq^{\omega^C} \nu$.

Свойства двусторонней стабильности относительно смешивания и замкнутости, которыми обладают квазипорядки ω^C, полностью их характеризуют в случае, когда A — конечное множество. А именно справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Пусть ω — отношение порядка на конечном множестве A и квазипорядок ρ является его продолжением на множество вероятностных мер $P_\omega(A)$. Для того, чтобы для некоторого конуса изотонных отображений $C \subseteq C_0(\omega)$ имело место $\rho = \omega^C$, необходимо и достаточно, чтобы отношение ρ было двусторонне стабильным относительно смешивания и замкнутым.*

2. КАНОНИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ПОРЯДКА НА МНОЖЕСТВО ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

Среди квазипорядков ω^C существует наименьший — им является квазипорядок $\omega^{C_0(\omega)}$. Он называется *каноническим продолжением* порядка ω на множество вероятностных мер и обозначается далее через $\widetilde{\omega}$. Так как конус $C_0(\omega)$ аппроксимирует отношение ω, то в силу замечания 1 квазипорядок $\widetilde{\omega}$ будет продолжением порядка ω на множество вероятностных мер $P_\omega(A)$.

Теорема 3. *Каноническое продолжение порядка ω на множество вероятностных мер является отношением порядка.*

Эффективное выражение для канонического продолжения порядка ω дается следующей теоремой.

Теорема 4. *Пусть $\langle A, \omega\rangle$ — произвольное упорядоченное множество. Для любых вероятностных мер $\mu, \nu \in P_\omega(A)$ условие $\mu \geq^{\widetilde{\omega}} \nu$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mu(B) \geq \nu(B)$ для любого подмножества $B \subseteq A$, которое является мажорантно стабильным в упорядоченном множестве$\langle A, \omega\rangle$.*

Рассмотрим теперь случай, когда упорядоченное множество $\langle A, \omega\rangle$ является конечным. Полагаем $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. В этом случае множество вероятностных мер $P_\omega(A)$ может быть отождествлено со стандартным $(n-1)$-мерным симплексом S_n вероятностных векторов $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, где $x_i \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, а каноническое продолжение порядка ω задается равносильностью

$$x \geq^{\widetilde{\omega}} y \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\ f \in C_0(\omega)) \ \ (f, x) \geq (f, y),$$

где $(\cdot, \cdot)$ — стандартное скалярное произведение в R^n.

Дается полное описание структуры канонического продолжения порядка, заданного на конечном множестве, на множество его вероятностных мер.

Определение. *Декомпозиционной матрицей* n-элементного упорядоченного множества $\langle A, \omega\rangle$ будем называть квадратную матрицу $D = (d_i^j)$ порядка n, удовлетворяющую следующим условиям: $a)\ d_i^j \geq 0,\quad b)\ \sum\limits_{j=1}^{n} d_i^j = 1,\quad c)\ d_i^j \neq 0 \Rightarrow a_i \leq^\omega a_j$ (заметим, что первые два условия означают, что матрица D является стохастической).

Теорема 5 (теорема декомпозиции). *Для любых вероятностных векторов $x, y \in S_n$ условие $y \geq^{\widetilde{\omega}} x$ выполняется тогда и только тогда, когда $y = xD$ для некоторой декомпозиционной матрицы D упорядоченного множества $\langle A, \omega\rangle$.*

Следствие. *Для n-элементного упорядоченного множества $\langle A, \omega\rangle$ каноническое продолжение порядка ω на стандартный симплекс S_n совпадает с наименьшим отношением на S_n, содержащим отношение ω и стабильным относительно смешивания.*

3. ОПИСАНИЕ РАВНОВЕСИЙ В ИГРАХ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ

Пусть G — игра с упорядоченными исходами вида (1). Зафиксируем для каждого $i \in I$ некоторый конус C_i ограниченных изотонных отображений упорядоченного множества $\langle A, \omega_i\rangle$ в числовую прямую R, аппроксимирующий отношение ω_i. Смешанное расширение игры G с помощью набора конусов

$(C_i)_{i\in I}$ есть игра игроков I с квазиупорядоченными исходами:

$$\widetilde{G}_{(C_1,\ldots,C_n)} = \langle (\widetilde{X}_i)_{i\in I}, \widetilde{A}, (\omega_i^{C_i})_{i\in I}, \widetilde{F}\rangle,$$

где $\widetilde{X}_i$ — множество вероятностных мер на X_i, $\widetilde{A}$ — множество вероятностных мер на A, $\widetilde{F}$ — отображение множества $\prod\limits_{i\in I}\widetilde{X}_i$ в $\widetilde{A}$, которое каждому набору вероятностных мер $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_n) \in \prod\limits_{i\in I}\widetilde{X}_i$ ставит в соответствие вероятностную меру $F_\mu \in \widetilde{A}$, представляющую собой образ произведения вероятностных мер $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$ относительно отображения F; отношение квазипорядка $\omega_i^{C_i}$ есть продолжение порядка ω_i на множество вероятностных мер с помощью конуса изотонных отображений C_i.

Пусть наряду с игрой G задана еще одна игра с упорядоченными исходами того же множества игроков $H = \langle (Y_i)_{i\in I}, B, (\sigma_i)_{i\in I}, \Phi\rangle$. Исходя из общего определения гомоморфизма многоосновных алгебраических систем, можно определить гомоморфизм игры G в игру H как такой набор отображений $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\psi)$, где $\varphi_i : X_i \to Y_i$, $\quad \psi : A \to B$, что

$$\psi \circ F = \Phi \circ (\underset{i\in I}{\square}\varphi_i),$$

$$a_1 \leq^{\omega_i} a_2 \Rightarrow \psi(a_1) \leq^{\sigma_i} \psi(a_2) \text{ для всех } i \in I.$$

Для игры H при каждом $i \in I$ зафиксируем некоторый конус K_i ограниченных изотонных отображений упорядоченного множества $\langle B, \sigma_i\rangle$ в R, аппроксимирующий отношение σ_i. Тогда определено смешанное расширение $\widetilde{H}_{(K_1,\ldots,K_n)}$ игры H с помощью набора конусов $(K_1,\ldots,K_n)$. Можно показать, что если набор отображений $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\psi)$ является гомоморфизмом игры G в игру H, причем каждая компонента гомоморфизма является измеримой функцией относительно соответствующих σ-алгебр и при каждом $i \in I$ выполнено включение $K_i \circ \psi \subseteq C_i$, тогда набор $(\widetilde{\varphi}_1,\ldots,\widetilde{\varphi}_n,\widetilde{\psi})$, состоящий из продолжений отображений $\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\psi$ на множества вероятностных мер, будет гомоморфизмом смешанного расширения игры G в смешанное расширение игры H. В частности, для конусов, состоящих из *всех* изотонных отображений соответствующих упорядоченных множеств, включение $K_i^0 \circ \psi \subseteq C_i^0$ выполнено всегда. Поэтому всякий гомоморфизм игр с упорядоченными исходами продолжается на их смешанные расширения, если в качестве продолжений отношений порядка на множества вероятностных мер рассматривать их канонические продолжения.

На базе понятия гомоморфизма решается задача описания оптимальных решений смешанного расширения игры с упорядоченными исходами, где оптимальность понимается в смысле равновесия.

Рассмотрим игру с упорядоченными исходами $G = \langle (X_i)_{i\in I},\ A,\ (\omega_i)_{i\in I}, F\rangle$, и пусть C_i — конус ограниченных изотонных отображений упорядоченного множества $\langle A, \omega_i\rangle$ в R, аппроксимирующий отношение $\omega_i (i \in I)$. Рассмотрим смешанное расширение $\widetilde{G}_{(C_1,\ldots,C_n)}$ игры G с помощью набора конусов $(C_1,\ldots,C_n)$.

Ситуация $\mu \in \prod\limits_{i\in I}\widetilde{X}_i$ будет *ситуацией равновесия* в игре $\widetilde{G}_{(C_1,\ldots,C_n)}$, если вероятностная мера F_μ является максимальным элементом подмножества вероятностных мер $F_{\mu'}$, где $\mu' = \{(\mu_1,\ldots,\mu_i',\ldots,\mu_n) : \mu_i' \in \widetilde{X}_i\}$, относительно квазипорядка $\omega_i^{C_i}$.

Предположим, что G — конечная игра с упорядоченными исходами и при каждом $i \in I$ конус C_i является конечно-порожденным. Пусть $\{\lambda_1^i,\ldots,\lambda_m^i\}$ — множество образующих конуса C_i. С каждым набором чисел $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ связана игра с функциями выигрыша того же множества игроков

$$G_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)} = \langle (X_i)_{i\ \in\ I}, (f_i \circ F)_{i\in I}\rangle,$$

где $f_i = \alpha_1\lambda_1^i + \ldots + \alpha_m\lambda_m^i$.

С использованием теоремы 5 доказывается следующий результат.

Теорема 6. *Множество всех ситуаций равновесия игры $\widetilde{G}_{(C_1,\ldots,C_n)}$ совпадает с теоретико-множественным объединением множеств ситуаций равновесия по Нэшу в смешанном расширении игр с численными выигрышами вида $G_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}$ по всем наборам положительных чисел $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$.*

Для конечного упорядоченного множества $\langle A, \omega_i\rangle$ конус C_i^0 всех его изотонных отображений в R является конечно-порожденным, причем в качестве образующих этого конуса выступает набор

характеристических функций его мажорантно стабильных подмножеств. В этом случае множество функций вида $f_i = \alpha_1\lambda_1^i + \ldots + \alpha_m\lambda_m^i$, где все $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ строго положительны, совпадает с множеством всех строго изотонных отображений из $\langle A, \omega_i\rangle$ в R. Поэтому как частный случай теоремы 6 получаем следующее описание множества ситуаций равновесия для смешанного расширения конечной игры с упорядоченными исходами, в котором в качестве продолжений отношений порядка игроков на множество вероятностных мер взяты их канонические продолжения.

Следствие. *Для конечной игры с упорядоченными исходами $G = \langle (X_i)_{i\in I}, A, (\omega_i)_{i\in I}, F\rangle$ множество ситуаций равновесия в ее смешанном расширении при помощи набора конусов $(C_1^0, \ldots, C_n^0)$ совпадает с теоретико-множественным объединением множеств ситуаций равновесия по Нэшу в смешанных расширениях игр с численными выигрышами вида $\langle (X_i)_{i\,\in\,I}, (f_i \circ F)_{i\in I}\rangle$, где при каждом $i \in I$ функция f_i пробегает всевозможные строго изотонные отображения упорядоченного множества $\langle A, \omega_i\rangle$ в R.*

4. РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ

Пусть G — игра с упорядоченными исходами вида (1), $\widetilde{G}$ — ее смешанное расширение, в котором используется каноническое продолжение порядка на множество вероятностных мер. Через $\operatorname{Sp}\mu$ будем обозначать спектр меры μ, через δ_x — вероятностную меру, сосредоточенную в точке x, через $\widetilde{\omega}_i$ — каноническое продолжение порядка ω_i на множество вероятностных мер. Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы ситуация в смешанных стратегиях была ситуацией равновесия по Нэшу в смешанном расширении игры G.

Теорема 7. *Для того чтобы ситуация $\mu^0 \in \prod\limits_{i\in I} \widetilde{X}_i$ была ситуацией равновесия по Нэшу в игре $\widetilde{G}$, необходимо и достаточно, чтобы при каждом $i \in I$ выполнялись следующие условия:*

$$(a) \quad F_{\mu^0||\delta_{x_i'}} = F_{\mu^0} \quad \text{для} \quad x_i' \in \operatorname{Sp}\mu_i^0, \qquad\qquad (b) \quad F_{\mu^0||\delta_{x_i''}} \leq^{\widetilde{\omega}_i} F_{\mu^0} \quad \text{для} \quad x_i'' \notin \operatorname{Sp}\mu_i^0.$$

Отметим, что условие (a) теоремы 7 формулируется на языке функции реализации F без привлечения отношений порядка ω_i, выражающих предпочтения игроков. Это обстоятельство накладывает сильные ограничения на спектры мер, образующих ситуацию равновесия по Нэшу в смешанном расширении игры G, и лежит в основе методов нахождения ситуаций равновесия по Нэшу для игр указанного класса.

Укажем теперь общий метод нахождения ситуаций равновесия по Нэшу в смешанном расширении конечной игры с упорядоченными исходами. Для упрощения записи будем рассматривать игру двух лиц

$$G = \langle X,\, Y,\, A,\, \omega_1,\, \omega_2,\, F\rangle, \tag{2}$$

где $X = \{1, \ldots, n\}$, $Y = \{1, \ldots, m\}$. Смешанное расширение игры (2) есть игра

$$\tilde{G} = \langle \widetilde{X},\, \widetilde{Y},\, \widetilde{A},\, \widetilde{\omega}_1,\, \widetilde{\omega}_2,\, \widetilde{F}\rangle, \tag{3}$$

в которой $\widetilde{X} = S_n$, $\widetilde{Y} = S_m$ — стандартные симплексы соответствующих размерностей, $\widetilde{\omega}_k$ — каноническое продолжение порядка ω_k $(k = 1, 2)$ на $\widetilde{A}$, функция реализации $\widetilde{F}$ задается равенством

$$\widetilde{F}_{(x,\,y)}(a) = \sum_{F(i,\,j)=a} x_i y_j.$$

Определение. Матрица $\| F(i, j) \|$ формата $n \times m$ над множеством A называется *сбалансированной*, если существует такая пара векторов $x \in S_n$, $y \in S_m$ с положительными компонентами, что при любом $a \in A$ и любых $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ выполнено $\widetilde{F}_{(i,\,y)}(a) = \widetilde{F}_{(x,\,j)}(a)$. При этом пара (x, y) называется *балансовой парой* векторов данной матрицы.

Теорема 8. 1. *Пусть $(x^0, y^0) \in S_n \times S_m$ — ситуация равновесия по Нэшу в игре $\widetilde{G}$. Тогда подматрица, являющаяся ограничением матрицы $\| F(i, j) \|$ относительно пары спектров $(\operatorname{Sp} x^0, \operatorname{Sp} y^0)$, является сбалансированной.*

2. *Пусть $\| F(i, j) \|$ $(i \in N_1, j \in N_2)$ — сбалансированная подматрица матрицы функции реализации и $(x_i^0)_{i\in N_1}$, $(y_j^0)_{j\in N_2}$ — ее балансовая пара векторов. Рассмотрим вероятностные*

векторы x^0 и y^0, которые получаются из указанных балансовых векторов добавлением нулевых компонент для тех индексов, которые отсутствуют в N_1 и N_2 соответственно. Для того, чтобы (x^0, y^0) была ситуацией равновесия по Нэшу в игре $\widetilde{G}$ вида (3), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие дополнительные условия:

$$\widetilde{F}_{(i', y^0)} \leq^{\widetilde{\omega}_1} \widetilde{F}_{(x^0, y^0)} \quad \text{для всех} \quad i' \notin N_1, \tag{4}$$

$$\widetilde{F}_{(x^0, j')} \leq^{\widetilde{\omega}_2} \widetilde{F}_{(x^0, y^0)} \quad \text{для всех} \quad j' \notin N_2. \tag{5}$$

Таким образом, нахождение ситуаций равновесия по Нэшу в игре $\widetilde{G}$ сводится к нахождению сбалансированных подматриц матрицы функции реализации и проверке для ее балансовых векторов дополнительных условий (4), (5). Отметим, что условие сбалансированности матрицы сводится к положительной разрешимости некоторой системы линейных уравнений, а проверка дополнительных условий (4), (5) состоит, в силу теоремы 4, в выполнимости некоторой системы линейных неравенств.

Библиографический список

1. *Розен В.В.* Об упорядоченности множества вероятностных мер // Изв. вузов. Сер. Математика. 1988. № 11. С. 72–74.
2. *Розен В.В.* Ситуации равновесия в играх с упорядоченными исходами // Кибернетика. 1989. № 6. С. 98–104.
3. *Розен В.В.* О мерах на упорядоченных множествах // Теория полугрупп и ее приложения: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1993. Вып. 11. С. 35–39.
4. *Розен В.В.* Вложения упорядоченных множеств в упорядоченные линейные пространства // Изв. вузов. Сер. Математика. 1998. №7 (434).
5. *Розен В.В.* Математические модели принятия решений на основе частичной упорядоченности исходов // Таврический вест. информатики и математики. 2004. № 1. С. 54–59.
6. *Розен В.В.* Продолжение упорядоченности на множество вероятностных мер // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 5. С. 61–70.
7. *Розен В.В.* Упорядочение вероятностных мер // Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры: Тез. докл. Междунар. науч. конф., посвящ. 100-летию проф. В.В. Вагнера. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. С. 52–59.

УДК 519.83

КОВАРИАНТНЫЕ И КОНТРАВАРИАНТНЫЕ ГОМОМОРФИЗМЫ ИГР С ОТНОШЕНИЯМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Т.Ф. Савина

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: suri-cat@yandex.ru

Для игр с отношениями предпочтения мы рассматриваем в качестве принципов оптимальности равновесие по Нэшу, а также некоторые его модификации. Для описания оптимальных решений игр с отношениями предпочтения введены ковариантно и контравариантно полные семейства гомоморфизмов.

Ключевые слова: ситуация равновесия, равновесие по Нэшу, отношение предпочтения, гомоморфизм.

Covariant and Contrvariant Homomorphisms of Games with Preference Relations

T.F. Savina

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: suri-cat@yandex.ru

We consider Nash equilibrium and some its modifications as principles of optimality for games with preference relations. For description of the optimal solutions of games with preference relations covariantly and contrvariantly complete families of homomorphisms are introduced.

Key words: equilibrium points, Nash equilibrium, preference relation, homomorphism.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе объектом изучения являются игры с отношениями предпочтения, т.е. трехосновные алгебраические системы вида

$$G = \langle X, Y, A, \rho_1, \rho_2, F \rangle,$$

© Т.Ф. Савина, 2009

где X — множество стратегий игрока 1, Y — множество стратегий игрока 2, A — множество исходов, $F\colon X \times Y \to A$ — функция реализации, $\rho_i \subseteq A^2$ — бинарное отношение, выражающее предпочтения игрока i $(i = 1, 2)$.

Будем обозначать через ρ^* строгую часть, а через ρ^s симметричную часть отношения предпочтения ρ.

Игры с отношениями предпочтения представляют собой некоторое обобщение классических игр с функциями выигрыша игроков, в которых цель отождествляется с максимизацией или минимизацией этих функций. Это обобщение связано с тем, что на практике при построении целевой функции возникают сложности как принципиального, так и технического характера. Мы используем альтернативный подход: при построении теоретико-игровой модели задаются не целевые функции, а отношения предпочтения для каждого игрока в виде бинарных отношений.

Основными принципами оптимальности в классе игр с отношениями предпочтения являются различные модификации принципа равновесия. А именно:

1. Ситуация (x_0, y_0) называется *ситуацией равновесия в смысле Нэша*, если для любых $x \in X$, $y \in Y$ выполняются соотношения:

$$F(x, y_0) \overset{\rho_1}{\lesssim} F(x_0, y_0), \qquad F(x_0, y) \overset{\rho_2}{\lesssim} F(x_0, y_0).$$

2. Заменяя в условии равновесия по Нэшу знак $\lesssim$ на $\not>$, получаем определение *ситуации общего равновесия*. Одностороннее отклонение от такой ситуации одного из игроков не приводит к более предпочтительному (с точки зрения отклонившегося игрока) исходу, т.е.

$$F(x_0, y_0) \overset{\rho_1^*}{\not<} F(x, y_0), \qquad F(x_0, y_0) \overset{\rho_2^*}{\not<} F(x_0, y).$$

Целью работы является установление взаимосвязей между ситуациями равновесия заданной игры и ситуациями равновесия ее гомоморфных образов.

Основные результаты работы докладывались на Международной конференции, посвященной 100-летию профессора В.В. Вагнера [1].

1. КОВАРИАНТНЫЕ И КОНТРАВАРИАНТНЫЕ ГОМОМОРФИЗМЫ

Пусть теперь, кроме игры G, задана еще одна игра с отношениями предпочтения тех же игроков $\Gamma = \langle U, V, B, \sigma_1, \sigma_2, \Phi \rangle$.

Для игр с отношениями предпочтения, как для алгебраических систем [2], естественным образом определяется понятие гомоморфизма.

Тройка отображений $(\varphi_1, \varphi_2, \psi)$, где $\varphi_1\colon X \to U$, $\varphi_2\colon Y \to V$, $\psi\colon A \to B$, называется *гомоморфизмом* игры G в игру Γ, если для любой ситуации (x, y) и любых двух исходов a_1, a_2 игры G при $i = 1, 2$ выполняются следующие условия:

$$a_1 \overset{\rho_i}{\lesssim} a_2 \;\Rightarrow\; \psi(a_1) \overset{\sigma_i}{\lesssim} \psi(a_2) \quad (i = 1, 2), \tag{1}$$

$$\psi(F(x, y)) = \Phi(\varphi_1(x), \varphi_2(y)). \tag{2}$$

Заметим, что в обозначениях теории бинарных отношений В.В. Вагнера [3] условие (1) принимает вид $\psi \Box \psi(\rho_i) \subseteq \sigma_i$, а условие (2) принимает вид $\psi \circ F = \Phi \circ (\varphi_1 \Box \varphi_2)$.

Тройка отображений $(\varphi_1, \varphi_2, \psi)$, где $\varphi_1\colon X \to U$, $\varphi_2\colon Y \to V$, $\psi\colon A \to B$, называется *строгим гомоморфизмом* игры G в игру Γ, если условие (1) заменяется двумя условиями:

$$a_1 \overset{\rho_i^*}{<} a_2 \;\Rightarrow\; \psi(a_1) \overset{\sigma_i^*}{<} \psi(a_2) \qquad (i = 1, 2), \tag{3}$$

$$a_1 \overset{\rho_i^s}{\sim} a_2 \;\Rightarrow\; \psi(a_1) \overset{\sigma_i^s}{\sim} \psi(a_2) \qquad (i = 1, 2), \tag{4}$$

а условие (2) сохраняется.

Отметим, что строгий гомоморфизм является гомоморфизмом, но обратное неверно.

Рассмотрим игру G с отношениями предпочтения и обозначим через $Opt\,G$ множество ее оптимальных решений по некоторому принципу оптимальности. Пусть K — некоторый класс игр с отношениями предпочтения, причем для каждой игры $\Gamma_j \in K$ множество ее оптимальных решений $Opt\,\Gamma_j$ считается известным. Задача состоит в установлении связи между множествами $Opt\,G$ и семейством множеств $Opt\,\Gamma_j$ $(j \in J)$. В данной работе эта связь устанавливается с помощью построения соответствующего семейства гомоморфизмов. Основным понятием для дальнейшего изложения является следующее.

Определение 1. Гомоморфизм $f = (\varphi_1, \varphi_2, \psi)$ из игры G в игру $\Gamma \in K$ называется *ковариантным*, если он сохраняет оптимальные решения игры G, т.е. образ оптимального решения игры G есть оптимальное решение игры Γ.

На теоретико-множественном языке условие ковариантности гомоморфизма f можно записать в виде $f(Opt\,G) \subseteq Opt\,\Gamma$ или, в эквивалентной форме, $Opt\,G \subseteq f^{-1}(Opt\,\Gamma)$.

Таким образом, в этом случае $f^{-1}(Opt\,\Gamma)$ задает аппроксимацию множества $Opt\,G$ сверху. Если задано произвольное семейство ковариантных гомоморфизмов $(f_j)_{j\in J}$ из игры G в игру $\Gamma_j \in K$, то каждое из множеств $f_j^{-1}(Opt\,\Gamma_j)$ задает аппроксимацию множества $Opt\,G$ сверху.

Семейство $(f_j)_{j\in J}$ ковариантных гомоморфизмов из игры G в игру Γ_j называется *контравариантно полным*, если в совокупности оно дает точную аппроксимацию сверху для $Opt\,G$, т.е. $Opt\,G$ совпадает с пересечением множеств $f_j^{-1}(Opt\,\Gamma_j)$:

$$Opt\,G = \bigcap_{j\in J} f_j^{-1}(Opt\,\Gamma_j).$$

Двойственно вводятся понятия контравариантного гомоморфизма и ковариантно полного семейства контравариантных гомоморфизмов. А именно:

Гомоморфизм f из игры G в игру Γ называется *контравариантным*, если прообраз оптимального решения игры Γ есть оптимальное решение игры G, т.е. $f^{-1}(Opt\,\Gamma) \subseteq Opt\,G$.

Множество $f^{-1}(Opt\,\Gamma)$ задает аппроксимацию снизу множества оптимальных решений игры G. Если задано произвольное семейство контравариантных гомоморфизмов $(f_j)_{j\in J}$ из игры G в игру $\Gamma_j \in K$, то каждый гомоморфизм задает аппроксимацию множества $Opt\,G$ снизу. Семейство $(f_j)_{j\in J}$ контравариантных гомоморфизмов из игры G в игру Γ называется *ковариантно полным* [4], если в совокупности оно дает точную аппроксимацию снизу для $Opt\,G$, т.е. $Opt\,G$ совпадает с объединением множеств $f_j^{-1}(Opt\,\Gamma_j)$:

$$Opt\,G = \bigcup_{j\in J} f_j^{-1}(Opt\,\Gamma_j).$$

Результаты работы, связанные с ковариантными и контравариантными гомоморфизмами игр с отношениями предпочтения общего вида, представлены в следующих теоремах.

Теорема 1. *Если в качестве принципов оптимальности для игры G, а также для игр класса K рассматривать равновесие по Нэшу, то всякий сюрьективный гомоморфизм $f = (\varphi_1, \varphi_2, \psi)$ является ковариантным.*

Теорема 2. *Если в качестве принципов оптимальности для игры G, а также для игр класса K рассматривать равновесие в общем смысле, то всякий строгий гомоморфизм $f = (\varphi_1, \varphi_2, \psi)$ является контравариантным.*

2. ГОМОМОРФИЗМЫ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР

Дальнейшие результаты этого направления получены для антагонистических игр с упорядоченными исходами, т.е. игр, в которых отношения предпочтения являются взаимно обратными отношениями порядка. Формально *антагонистическая* игра может быть задана в виде $G = \langle X, Y, A, \omega, F\rangle$, причем $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega^{-1}$.

В данном классе игр, кроме общего равновесия и равновесия по Нэшу, возникает еще один тип равновесия — Tr-равновесие.

Определение 2. Ситуация (x_0, y_0) в антагонистической игре с упорядоченными исходами называется *ситуацией Tr-равновесия*, если для любых $x \in X$, $y \in Y$ выполняется $F(x_0, y) \overset{\omega}{\not<} F(x, y_0)$.

Для антагонистической игры G будем обозначать: $NEq\,G$ — множество ситуаций равновесия по Нэшу, $Eq\,G$ — множество ситуаций общего равновесия, $TrEq\,G$ — множество ситуаций транзитивного равновесия.

Связь между такими множествами ситуаций имеет вид $NEq\,G \subseteq TrEq\,G \subseteq Eq\,G$, причем обратные включения не выполняются.

Если в игре G отношение порядка ω линейно, то все три типа равновесия: общее равновесие, Tr-равновесие и равновесие по Нэшу совпадают и превращаются в принцип седловой точки. Для антагонистической игры G с линейно упорядоченными исходами через $Sp\,G$ будем обозначать множество ее седловых точек.

Приведем теперь примеры полных семейств гомоморфизмов.

Пример 1. Пусть G — антагонистическая игра с упорядоченными исходами, K — класс антагонистических игр с линейно упорядоченными исходами. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Возьмем в качестве принципа оптимальности в игре G транзитивное равновесие, а в классе K — принцип седловой точки. Пусть при каждом $j \in J$ тройка отображений $f_j = (\varphi_j^1, \varphi_j^2, \psi_j)$ является строгим гомоморфизмом из игры G в игру $\Gamma_j \in K$. Тогда $(f_j)_{j\in J}$ является ковариантно полным семейством контравариантных гомоморфизмов.*

Доказательство. Введем обозначения: $\Gamma_j = \langle U_j, V_j, B_j, \sigma_j, \Phi_j\rangle$, $f_j(x_0, y_0) := (\varphi_j^1(x_0), \varphi_j^2(y_0))$, где $\varphi_j^1\colon X \to U_j$, $\varphi_j^2\colon Y \to V_j$, $\psi_j\colon A \to B_j$. Нужно доказать

$$(x_0, y_0) \in TrEq\,G \quad \Leftrightarrow \quad (\exists\, j \in J) \;\; f_j(x_0, y_0) \in Sp\,\Gamma_j. \tag{5}$$

Импликация слева направо основана на следующем факте.

Лемма. *Если в упорядоченном множестве $(A, \leq)$ выделены два подмножества $P, Q \subseteq A$, такие что $p \not> q$ для любых $p \in P$ и $q \in Q$, то существует строго изотонное отображение f из A в некоторое линейно упорядоченное множество, при котором $f(p) \leq f(q)$ для любых $p \in P$, $q \in Q$.*

Докажем прямую импликацию в (5). Пусть (x_0, y_0) — ситуация Tr-равновесия в игре G, т.е. $F(x, y_0) \overset{\omega}{\not>} F(x_0, y)$ для любых $x \in X$, $y \in Y$. Согласно лемме существует (B, σ) — линейно упорядоченное множество и строго изотонное отображение $\psi\colon A \to B$, такое что $\psi(F(x, y_0)) \overset{\sigma}{\leq} \psi(F(x_0, y))$ для любых $x \in X$, $y \in Y$. Полагая $x = x_0$, получаем $\psi(F(x_0, y_0)) \overset{\sigma}{\leq} \psi(F(x_0, y))$, а полагая $y = y_0$, имеем $\psi(F(x, y_0)) \overset{\sigma}{\leq} \psi(F(x_0, y_0))$.

Объединяя два последних соотношения, получаем, что ситуация (x_0, y_0) является седловой точкой в игре $\Gamma = \langle X, Y, B, \sigma, \psi \circ F\rangle$, которая является игрой с линейно упорядоченными исходами, причем тройка отображений $(\Delta_X, \Delta_Y, \psi)$ есть строгий гомоморфизм из G в Γ.

Докажем теперь импликацию справа налево в (5). Пусть при некотором $j \in J$ ситуация $f_j(x_0, y_0)$ — седловая точка игры Γ_j. Надо показать, что (x_0, y_0) — ситуация транзитивного равновесия в игре G. Предположим противное, т.е. что ситуация (x_0, y_0) не является ситуацией Tr-равновесия. Тогда при некоторых $x' \in X$, $y' \in Y$ выполняется соотношение $F(x_0, y') \overset{\omega}{<} F(x', y_0)$.

Так как гомоморфизм f_j — строгий, то согласно (3) в игре Γ_j имеет место

$$\psi_j(F(x_0, y')) \overset{\sigma_j}{<} \psi_j(F(x', y_0)). \tag{6}$$

Согласно (2) соотношение (6) принимает вид

$$\Phi_j(\varphi_j^1(x_0), \varphi_j^2(y')) \overset{\sigma_j}{<} \Phi_j(\varphi_j^1(x'), \varphi_j^2(y_0)). \tag{7}$$

С другой стороны, так как $f_j(x_0, y_0) = (\varphi_j^1(x_0), \varphi_j^2(y_0))$ — седловая точка в игре Γ_j, то

$$\Phi_j(\varphi_j^1(x), \varphi_j^2(y_0)) \overset{\sigma_j}{\leq} \Phi_j(\varphi_j^1(x_0), \varphi_j^2(y_0)) \overset{\sigma_j}{\leq} \Phi_j(\varphi_j^1(x_0), \varphi_j^2(y)). \tag{8}$$

Полагая в (8) $x = x'$, $y = y'$ получим $\Phi_j(\varphi_j^1(x'), \varphi_j^2(y_0)) \overset{\sigma_j}{\leq} \Phi_j(\varphi_j^1(x_0), \varphi_j^2(y'))$, что противоречит соотношению (7). Теорема доказана. □

Пример 2. Пусть G — антагонистическая игра с упорядоченными исходами, K — класс ее линейных доупорядочений, $Opt\,G$ — множество ситуаций равновесия по Нэшу; для каждой игры $\Gamma_j \in K$ в качестве $Opt\,\Gamma_j$ выступает множество седловых точек. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Семейство тождественных гомоморфизмов $(f_j)_{j\in J}$ является контравариантно полным семейством ковариантных гомоморфизмов.*

Утверждение теоремы 4 означает справедливость равносильности:

$$(x_0,\, y_0) \in NEq\,G \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\ j \in J)\ \ (x_0,\, y_0) \in Sp\,\Gamma_j, \quad \text{т.е.} \quad NEq\,G = \bigcap_{j\in J} Sp\,\Gamma_j.$$

Для доказательства теоремы используем теорему Душника -- Миллера, которая утверждает, что всякое отношение порядка может быть представлено как пересечение всех его линейных доупорядочений. По определению справедлива равносильность:

$$(x_0,\, y_0) \in NEq\,G \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\ x \in X)(\forall\ y \in Y)\ F(x,\, y_0) \overset{\omega}{\leq} F(x_0,\, y_0) \overset{\omega}{\leq} F(x_0,\, y).$$

Учитывая, что по теореме Душника – Миллера $\omega = \bigcap\limits_{j\in J} \omega_j$, получаем, что правая часть этой эквивалентности равносильна тому, что при всех $x \in X$, $y \in Y$ выполняется

$$(\forall\ j \in J)\ \ F(x,\, y_0) \overset{\omega_j}{\leq} F(x_0,\, y_0) \overset{\omega_j}{\leq} F(x_0,\, y).$$

Последнее означает, что $(\forall\ j \in J)\ (x_0,\, y_0) \in Sp\,\Gamma_j$, т.е. $(x_0,\, y_0) \in \bigcap\limits_{j\in J} Sp\,\Gamma_j$. Теорема доказана. □

Библиографический список

1. *Савина Т.Ф.* Ситуации равновесия в играх с отношениями предпочтения // Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры: Тез. докл. Междунар. науч. конф., посвящ. 100-летию проф. В.В. Вагнера. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2008. С. 131–132.
2. *Богомолов А.М., Салий В.Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, Физматлит, 1997. 368 с.
3. *Вагнер В.В.* Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и ее приложения: Сб. статей. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1965. Вып. 1. С. 3–178.
4. *Розен В.В.* Нахождение оптимальных решений методом построения ковариантно полных семейств контравариантных гомоморфизмов // Фундаментальные проблемы математики и механики. Математика. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. С. 349–350

УДК 501.1

О ГОМОМОРФИЗМАХ ПОЛУГРУПП ЭНДОМОРФИЗМОВ ГИПЕРГРАФОВ

Е.В. Хворостухина

Саратовский государственный университет,
кафедра математической физики и вычислительной математики
E-mail: katyanew2007@rambler.ru

В работе описано строение сюрьективных гомоморфизмов полугрупп эндоморфизмов эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами.

Ключевые слова: гомоморфизм, гиперграф, полугруппа эндоморфизмов.

On Homomorphisms of Endomorphism Semigroups of Hypergraphs

E.V. Khvorostukhina

Saratov State University,
Chair of Mathematical Physics and Calculus Mathematics
E-mail: katyanew2007@rambler.ru

In the paper we describe a structure of surjective homomorphisms of endomorphism semigroups of effective hypergraphs with p-definable edges.

Key words: homomorphism, hypergraph, semigroup of endomorphisms.

© Е.В. Хворостухина, 2009

ВВЕДЕНИЕ

Одним из важнейших направлений в теории полугрупп является изучение математических объектов путем исследования некоторых полугрупп отображений, специальным образом связанных с исходными объектами. Многие авторы значительное внимание уделяли исследованию полугрупп эндоморфизмов графов и их обобщений — гиперграфов (см., например, обзор [1]).

В настоящей работе продолжается исследование полугрупп эндоморфизмов гиперграфов. Главный результат — теорема 2 — описывает строение сюрьективных гомоморфизмов полугрупп эндоморфизмов гиперграфов специального вида, называемых эффективными гиперграфами с p-определимыми ребрами.

Основные результаты работы докладывались на Международной конференции, посвященной 100-летию профессора В.В. Вагнера [2].

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В работе используются основные понятия теории гиперграфов и теории полугрупп [3, 4].

Напомним [3], что *гиперграфом* называется система вида $H = (X, L)$, где X — непустое множество и L — семейство произвольных подмножеств X. Элементы множества X называются *вершинами*, а элементы множества L называются *ребрами* гиперграфа. Множество вершин гиперграфа называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором его ребре, и *неограниченным* в противном случае. Вершины гиперграфа, принадлежащие некоторому его ребру, называются *смежными*. Гиперграф $H = (X, L)$ называется *эффективным*, если любая его вершина принадлежит некоторому ребру этого гиперграфа.

Пусть p — произвольное натуральное число. Гиперграф H будем называть *гиперграфом с p-определимыми ребрами*, если в каждом ребре этого гиперграфа найдется по крайней мере $p+1$ вершина и, с другой стороны, любые p вершин этого гиперграфа принадлежат не более чем одному его ребру.

Например, эффективный гиперграф с 1-определимыми ребрами — это гиперграф, ребра которого образуют нетривиальное разбиение множества вершин без одноэлементных классов. С другой стороны, как аффинная, так и проективная плоскости являются эффективными гиперграфами с 2-определимыми ребрами, вершинами которых являются точки этих плоскостей, а ребрами — соответствующие прямые [5].

Гомоморфизмом гиперграфа $H = (X, L)$ в гиперграф $H_1 = (X_1, L_1)$ называется отображение φ множества X в множество X_1, которое смежные в гиперграфе H вершины переводит в смежные вершины гиперграфа H_1, т.е. выполняется свойство

$$(\forall\ r \in L)(\exists\ r' \in L_1)[\varphi(r) \subset r'].$$

Гомоморфизм $f : H \to H_1$ называется *сюрьективным* гомоморфизмом, если образом множества вершин X гиперграфа H является все множество вершин X_1 гиперграфа H_1, т.е. $f(X) = X_1$.

Гомоморфизм гиперграфа H в себя называется *эндоморфизмом* H. Множество всех эндоморфизмов гиперграфа H с операцией композиции образует *полугруппу* $\operatorname{End} H$.

Гиперграфы $H = (X, L)$ и $H_1 = (X_1, L_1)$ называются *изоморфными*, если найдется такая биекция f множества X на множество X_1, которая сохраняет ребра этих гиперграфов, т.е. выполняется

$$(\forall\ Y \subset X)[Y \in L \ \Leftrightarrow\ f(Y) \in L_1].$$

Тождественным отношением на множестве X называется бинарное отношение $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$.

Для отображения $f : X \to Y$ обозначим f^2 отображение X^2 в Y^2, которое для $(a, b) \in X^2$ определяется по формуле: $f^2(a, b) = (f(a), f(b))$. Тогда для любого преобразования $\varphi : X \to X$ выполняется $f^2(\varphi) = f^{-1}\varphi f$.

Пусть $H = (X, L)$ — гиперграф. Последовательность ребер $l_1, l_2, \ldots, l_n$ этого гиперграфа называется *цепью*, если в ней соседние ребра $l_i, l_{i+1} (i = \overline{1, n-1})$ имеют непустое пересечение. На множестве X определим бинарное отношение ε_H по правилу: $(x, x_1) \in \varepsilon_H$ в том и только том случае, если найдется такая цепь $l_1, \ldots, l_n$, что $x \in l_1$ и $x_1 \in l_n$. Легко видеть, что такое отношение ε_H является

эквивалентностью на множестве X, для которого используется запись $x \equiv x_1(\varepsilon_H)$. Эквивалентность ε_H называется *отношением связности* гиперграфа H и классы эквивалентности ε_H называются *компонентами связности* гиперграфа H.

2. ГЛАВНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть X — непустое множество. Обозначим через $T(X)$ полугруппу всех преобразований множества X.

Лемма 1. *Для эффективного гиперграфа с p-определимыми ребрами $H = (X, L)$ следующие условия эквивалентны:*

1) *любое преобразование множества X является эндоморфизмом гиперграфа H;*

2) *выполняется равенство* $\operatorname{End} H = T(X)$;

3) *множество ребер L состоит из одного ребра.*

Доказательство. Очевидно, что условия 1), 2) равносильны.

Покажем, что из истинности условия 2) следует истинность условия 3). Пусть $H = (X, L)$ — эффективный гиперграф с p-определимыми ребрами и пусть выполняется условие 2). Покажем, что множество ребер этого гиперграфа состоит из одного ребра. Поскольку гиперграф H — эффективный, то этот гиперграф содержит по меньшей мере одно ребро l. В силу p-определимости гиперграфа H, в ребре l найдется по крайней мере $p+1$ вершина $x_1, \ldots, x_{p+1}$, где $x_i \neq x_j$ для всех $i, j = \overline{1, p+1}, i \neq j$. Для произвольной вершины $y \in X$ определим преобразование $\varphi : X \to X$ по формуле

$$\varphi(x) = \begin{cases} x_i, & \text{если} \quad x = x_i, \ i = \overline{1, p}, \\ y, & \text{для остальных} \quad x \in X. \end{cases}$$

По условию 2) φ — эндоморфизм гиперграфа H. Значит, множество $\varphi(l) = \{x_1, \ldots, x_p, y\}$ — ограниченное в гиперграфе H, т.е. содержится в некотором его ребре l_1. Поскольку H — гиперграф с p-определимыми ребрами и элементы $x_1, \ldots, x_p \in l \cap l_1$, то выполняется равенство $l = l_1$. Таким образом, произвольный элемент y множества X принадлежит ребру l гиперграфа H. Это означает, что множество ребер данного гиперграфа состоит из одного ребра $l = X$, т.е. выполняется условие 3).

Покажем теперь, что из условия 3) следует условие 1). Пусть множество ребер $L = \{l\}$. В силу эффективности гиперграфа H выполняется $l = X$, т.е. множество вершин X является ограниченным в гиперграфе H. Значит, все подмножества множества X также ограниченные в H и, следовательно, все преобразования множества X являются эдоморфизмами H, т.е. выполняется условие 1).

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть H — эффективный гиперграф с p-определимыми ребрами, H_1 — эффективный гиперграф с p_1-определимыми ребрами и $g : \operatorname{End} H \to \operatorname{End} H_1$. Тогда g — гомоморфизм полугруппы* $\operatorname{End} H$ *на полугруппу* $\operatorname{End} H_1$ *в том и только том случае, если выполняется одно из следующих условий:*

1) *g — изоморфизм полугруппы* $\operatorname{End} H$ *на полугруппу* $\operatorname{End} H_1$*, который представим в виде $g = f^2$ для некоторого изоморфизма f гиперграфа H на гиперграф H_1;*

2) *$g = f^2$ для некоторого гомоморфизма f гиперграфа H на гиперграф H_1, удовлетворяющего равенству $\varepsilon_H = \ker f$, и H_1 — однореберный гиперграф, число вершин которого совпадает с числом компонент связности гиперграфа H.*

Доказательство. Необходимость. Пусть отображение $g : \operatorname{End} H \to \operatorname{End} H_1$ является гомоморфизмом полугруппы $\operatorname{End} H$ на полугруппу $\operatorname{End} H_1$.

В силу эффективности гиперграфа H все константы вида $C_a : X \to \{a\}$, где $a \in X$, являются эндоморфизмами гиперграфа H. Легко видеть, что в этом случае такие эндоморфизмы, и только они, являются правыми нулями полугруппы $\operatorname{End} H$. Обозначим $g(C_a) = \varphi$. Возьмем произвольное $\psi \in \operatorname{End} H_1$. Заметим, что $\psi = g(\psi_1)$ для некоторого $\psi_1 \in \operatorname{End} H$. Тогда по определению гомоморфизма g выполняются равенства $\psi\varphi = g(\psi_1)g(C_a) = g(\psi_1 C_a) = g(C_a) = \varphi$.

Таким образом, отображение $\varphi = g(C_a)$ является правым нулем полугруппы $\operatorname{End} H_1$. С другой стороны, в силу эффективности гиперграфа H_1 все константы вида $C_{a_1} : X_1 \to \{a_1\}$, где $a_1 \in X_1$, являются эндоморфизмами гиперграфа H_1. В этом случае такие эндоморфизмы, и только они, являются правыми нулями полугруппы $\operatorname{End} H_1$.

Значит, для любого $a \in X$ образ $g(C_a)$ является правым нулем полугруппы $\operatorname{End} H_1$ и выполняется $g(C_a) = C_{a_1}$ для некоторого $a_1 \in X_1$.

Этот факт позволяет определить отображение $f : X \to X_1$ по правилу: для любого $a \in X$ значение $f(a) = a_1$, если $g(C_a) = C_{a_1}$ для соответствующего $a_1 \in X_1$. Тогда по определению $g(C_a) = C_{f(a)}$ для любого $a \in X$.

Следовательно, по определению гомоморфизма g для любых $a, b \in X$, $\varphi \in \operatorname{End} H$ справедливы утверждения:

$$\varphi(a) = b, \qquad C_a\varphi = C_b, \qquad g(C_a\varphi) = g(C_b),$$

$$g(C_a)g(\varphi) = g(C_b), \qquad C_{f(a)}g(\varphi) = C_{f(b)}, \qquad g(\varphi)(f(a)) = f(b).$$

Это означает, что $g(\varphi) = \{(f(a), f(b)) : (a, b) \in \varphi\} = f^2(\varphi)$, т.е. имеет место равенство

$$g = f^2. \tag{1}$$

Если отображение g взаимнооднозначно, то очевидно и отображение f взаимнооднозначно, т.е. $\ker f = \Delta_X$. В этом случае $g = f^2$ — изоморфизм полугруппы $\operatorname{End} H$ на полугруппу $\operatorname{End} H_1$ и из теоремы 1 [2] следует, что отображение f — изоморфизм гиперграфа H на гиперграф H_1.

Рассмотрим случай, когда отображение g не является взаимнооднозначным. Тогда отображение f также не является взаимнооднозначным, т.е. $\ker f \neq \Delta_X$. Это означает, что для некоторых различных $z_1, z_2 \in X$ имеет место $z_1 \equiv z_2(\ker f)$, т.е. $f(z_1) = f(z_2) = z$ для некоторого $z \in X_1$. Покажем, что в этом случае $\ker f = \varepsilon_H$. Сначала докажем, что $\varepsilon_H \subset \ker f$. Для этого достаточно показать, что $l^2 \subset \ker f$ для любого $l \in L$. Предположим противное. Пусть в некотором ребре $l \in L$ найдутся точки x_1, x_2 такие, что $x_1 \not\equiv x_2(\ker f)$, т.е. $f(x_1) \neq f(x_2)$. Определим преобразование $\varphi : X \to X$ по формуле

$$\varphi(x) = \begin{cases} x_1, & \text{если } \ x = z_1; \\ x_2, & \text{для остальных } \ x \in X. \end{cases}$$

Отображение φ удовлетворяет $\varphi(X) = \{x_1, x_2\} \subset l$ и, значит, является эндоморфизмом гиперграфа H. По формуле (1) $g(\varphi) = f^2(\varphi) = f^{-1}\varphi f$. Тогда по определению φ для $i = 1, 2$ получаем $g(\varphi)(z) = (f^{-1}\varphi f)(f(z_i)) = (\varphi f)((f^{-1}f)(z_i)) = f(\varphi(z_i)) = f(x_i)$. Следовательно, $f(x_1), f(x_2) \in g(\varphi)(z)$, что противоречит однозначности отображения $g(\varphi)$. Значит, наше предположение неверно и выполняется $\varepsilon_H \subset \ker f$.

Теперь покажем, что $\ker f \subset \varepsilon_H$. Предположим противное: допустим, что существуют $x_1, x_2 \in X$, такие что $x_1 \equiv x_2(\ker f)$, но $x_1 \not\equiv x_2(\varepsilon_H)$. В этом случае $f(x_1) = f(x_2)$ и x_1, x_2 лежат в разных компонентах связности. Зафиксируем некоторый элемент $x_3 \in X$ такой, что $f(x_3) \neq f(x_1)$. Такой элемент существует, так как в силу p_1-определимости гиперграфа H_1 его множество вершин X_1 содержит по меньшей мере $p_1 + 1$ вершину, где $p_1 \geq 1$.

Определим преобразование $\varphi : X \to X$ по формуле

$$\varphi(x) = \begin{cases} x_1, & \text{если } \ x \in \varepsilon_H(x_1), \\ x_3, & \text{для остальных } \ x \in X. \end{cases}$$

Заметим, что $\varphi(X) = \{x_1, x_3\}$, $\varphi^{-1}(x_1) = \varepsilon_H(x_1)$, $\varphi^{-1}(x_3) = X \setminus \varepsilon_H(x_1)$. В силу того, что множества $\varepsilon_H(x_1)$ и $X \setminus \varepsilon_H(x_1)$ не имеют смежных вершин, отображение φ является эндоморфизмом гиперграфа H . Тогда образ $g(\varphi) = f^{-1}\varphi f$ — элемент полугруппы $\operatorname{End} H_1$. Обозначим $a = f(x_1) = f(x_2)$, $b = f(x_3)$. Тогда получаем для $i = 1, 2$, что $g(\varphi)(a) = (f^{-1}\varphi f)(f(x_i)) = (\varphi f)((f^{-1}f)(x_i)) = f(\varphi(x_i)) = f(x_j)$, где $j = 1$, если $i = 1$, и $j = 3$, если $i = 2$. Таким образом, $a, b \in g(\varphi)(a)$, при этом $a \neq b$. Это противоречит однозначности отображения $g(\varphi)$. Значит, наше предположение неверно и выполняется $\ker f \subset \varepsilon_H$.

Следовательно, выполняется равенство $\ker f = \varepsilon_H$. Это означает, что всякая компонента связности гиперграфа H отображается в некоторую точку гиперграфа H_1 и, с другой стороны, каждой точке гиперграфа H_1 соответствует единственная компонента связности гиперграфа H. Следовательно, множество вершин гиперграфа H_1 равномощно множеству компонент связности гиперграфа H. При этом $f(X) = X_1$, т.е. f — гомоморфизм гиперграфа H на гиперграф H_1.

Покажем, что любое преобразование $\psi : X_1 \to X_1$ является образом некоторого элемента $\varphi \in \operatorname{End} H$, т.е. $\psi = g(\varphi) = f^{-1}\varphi f$. Поскольку $\ker f = \varepsilon_H$, всякий элемент множества X_1 — это образ некоторой компоненты связности гиперграфа H. В каждом классе K эквивалентности ε_H зафиксируем элемент $x_K \in K$. Тогда $f(x_K) = f(x)$ для любого $x \in K$. Определим отображение $\varphi : X \to X$ по правилу: $\varphi(z) = x_{[y]}$, если $\psi(f(z)) = f(y)$ для произвольного $z \in X$ и соответствующего $y \in X$. Следовательно, $f(\varphi(z)) = f(x_{[y]}) = f(y) = \psi(f(z))$, т.е. выполняется равенство $\varphi f = f\psi$. Умножив последнее равенство слева на f^{-1}, получим $f^{-1}\varphi f = \psi$. Это означает, что $g(\varphi) = f^2(\varphi) = \psi$.

Таким образом, всякое преобразование множества X_1 является эндоморфизмом гиперграфа H_1, т.е. $T(X_1) = \operatorname{End} H_1$. Тогда из леммы 1 следует, что гиперграф H_1 состоит из одного ребра.

Достаточность условия 1). Если f — изоморфизм гиперграфа H на гиперграф H_1, то из теоремы 1 [2] следует, что отображение $g = f^2$ является изоморфизмом полугруппы $\operatorname{End} H$ на полугруппу $\operatorname{End} H_1$.

Достаточность условия 2). Пусть отображение $f : H \to H_1$ удовлетворяет $\varepsilon_H = \ker f$ и является гомоморфизмом гиперграфа $H = (X, L)$ на гиперграф $H_1 = (X_1, L_1)$, где H — эффективный гиперграф с p-определимыми ребрами, H_1 — однореберный эффективный гиперграф с p_1-определимыми ребрами. Проверим, что отображение $g = f^2$ является гомоморфизмом полугруппы $\operatorname{End} H$ на полугруппу $\operatorname{End} H_1$.

Пусть $\varphi : X \to X$ — произвольный элемент полугруппы $\operatorname{End} H$. Покажем, что $g(\varphi) = (f^2)(\varphi) = f^{-1}\varphi f$ является эндоморфизмом гиперграфа H_1.

Поскольку по условию 2) $\varepsilon_H = \ker f$, то при отображении f образом пересекающихся ребер l_1, l_2 является некоторая вершина $y \in X_1$. Таким образом, всякая компонента связности гиперграфа H отображается в некоторую точку единственного ребра r гиперграфа H_1. При этом для любых $x, x_1 \in X$ для любого эндоморфизма $\varphi \in \operatorname{End} H$ из условия $x \equiv x_1(\varepsilon_H)$ следует $\varphi(x) \equiv \varphi(y)(\varepsilon_H)$. В самом деле, если x, x_1 соединены цепью $l_1, \ldots, l_n$, то $\varphi(x), \varphi(x_1)$ соединены цепью $\varphi(l_1), \ldots, \varphi(l_n)$, так как для всех $i = \overline{1, n-1}$ из $l_i \cap l_{i+1} \neq \emptyset$ следует $\emptyset \neq \varphi(l_i \cap l_{i+1}) \subset \varphi(l_i) \cap \varphi(l_{i+1})$. В этом случае имеем, что условие $f(x) = f(x_1)$ влечет $f(\varphi(x)) = f(\varphi(x_1))$. Отсюда следует, что образ $g(\varphi) = f^{-1}\varphi f$ является отображением X_1 в X_1. Поскольку гиперграф H_1 состоит из одного ребра, то в силу леммы 1 преобразование $g(\varphi) : X_1 \to X_1$ является эндоморфизмом гиперграфа H_1.

Кроме того, из проведенных рассуждений следует, что для любого эндоморфизма $\varphi \in \operatorname{End} H$ выполняются условия: $\varphi^2(\ker f) \subset \ker f$, $\varphi^{-1}(\ker f)\varphi \subset \ker f$ и, значит, $(\ker f)\varphi \subset \varphi(\ker f)$.

Рассмотрим произвольные эндоморфизмы $\varphi, \psi \in \operatorname{End} H$. Покажем, что $g(\varphi\psi) = g(\varphi)g(\psi)$. Так как $(\ker f)\psi \subset \psi(\ker f)$ и $(\ker f)f = ff^{-1}f = f$, то по определению отображения g выполняются условия:

$$g(\varphi)g(\psi) = (f^{-1}\varphi f)(f^{-1}\psi f) = f^{-1}\varphi(ff^{-1})\psi f = f^{-1}\varphi(\ker f)\psi f \subset$$

$$\subset f^{-1}\varphi\psi(\ker f)f = f^{-1}(\varphi\psi)f = f^2(\varphi\psi) = g(\varphi\psi).$$

Отсюда в силу однозначности бинарных отношений $g(\varphi)g(\psi), g(\varphi\psi)$ следует равенство

$$g(\varphi)g(\psi) = g(\varphi\psi).$$

Таким образом, g — гомоморфизм полугруппы $\operatorname{End} H$ в полугруппу $\operatorname{End} H_1$.

Докажем, что образом полугруппы $\operatorname{End} H$ при гомоморфизме g является вся полугруппа $\operatorname{End} H_1$. Рассмотрим произвольное отображение $\psi : X_1 \to X_1$ и покажем, что $\psi = g(\varphi)$ для некоторого $\varphi \in \operatorname{End} H$. Как уже отмечалось выше, всякий элемент множества X_1 — это образ некоторой компоненты связности гиперграфа H. В каждом классе K эквивалентности ε_H зафиксируем элемент $x_K \in K$ и определим отображение $\varphi : X \to X$ по следующему правилу: $\varphi(z) = x_{[y]}$, если $\psi(f(z)) = f(y)$ для любого $z \in X$ и соответствующего $y \in X$. Следовательно, $f(\varphi(z)) = f(x_{[y]}) = f(y) = \psi(f(z))$, т.е. выполняется равенство $\varphi f = f\psi$. Умножив последнее равенство слева на f^{-1}, получим $f^{-1}\varphi f = \psi$. Это означает, что $g(\varphi) = f^2(\varphi) = \psi$. Следовательно, всякий эндоморфизм $\psi \in \operatorname{End} H_1$ является образом некоторого эндоморфизма $\varphi \in \operatorname{End} H$.

Таким образом, отображение g является гомоморфизмом полугруппы $\operatorname{End} H$ на полугруппу $\operatorname{End} H_1$. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Molchanov V. A.* Semigroups of mappings on graphs // Semigroup Forum. 1983. V. 27. C. 155–199.
2. *Хворостухина Е.В.* О полугруппах эндоморфизмов гиперграфов // Совр. проблемы диф. геометрии и общей алгебры: Тез. докл. Междунар. науч. конф., посвящ. 100-летию проф. В.В. Вагнера. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. С. 136–137.
3. *Зыков А.А.* Гиперграфы // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29, № 6. С. 89–154.
4. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. В 2 т. М.: Мир, 1972. Т. 1. 286 с.
5. *Хартсхорн Р.* Основы проективной геометрии. М.: Мир, 1970. 161 с.

УДК 517.51

ПРИБЛИЖАЮЩИЕ СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

А.А. Хромов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Построены семейства операторов и исследованы их аппроксимирующие свойства в задаче приближения производных функций и в задаче приближения гладких решений интегральных уравнений.

Ключевые слова: аппроксимация функций и их производных, резольвента, интегральное уравнение, приближенное решение.

Approximating Properties of the Powers of the Differentiation Operator Resolvent

A.A. Khromov

Saratov State University,
Chair of Differential Equations and Applied Mathematics
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

The families of operators are constructed and their approximating properties are investigated in the problems of approximating the derivative of functions and the smooth solutions of integral equations.

Key words: approximation of functions and their derivatives, resolvent, integral equation, approximate solution.

1. Рассмотрим операторы

$$\Omega_r u = \begin{cases} \Omega_{2r} u \equiv r \int\limits_x^1 e^{r(x-t)} u(t)dt, & x \in [0, 1/2], \\ \Omega_{1r} u \equiv r \int\limits_0^x e^{-r(x-t)} u(t)dt, & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Задание разрывной на отрезке $[0, 1]$ функции в таком виде здесь и в дальнейшем означает, что мы не обращаем внимания на то, как именно она задана в точке $x = 1/2$, поскольку это несущественно.

Построим операторы, комбинирующиеся из степеней операторов Ω_{1r} и Ω_{2r}, а именно операторы

$$\Omega_r^{(k)} u = \begin{cases} \Omega_{2r}^k u, & x \in [0, 1/2], \\ \Omega_{1r}^k u, & x \in [1/2, 1], \end{cases} \qquad D^m \Omega_r^{(k)} u = \begin{cases} D^m \Omega_{2r}^k u, & x \in [0, 1/2], \\ D^m \Omega_{1r}^k u, & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

где D^m — оператор m-го дифференцирования по x.

Лемма 1. *Операторы* $\Omega_r^{(k)}$, $k = 2, \ldots$ *имеют вид*

$$\Omega_r^{(k)} u = \begin{cases} r^k \int\limits_x^1 \frac{(t-x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{r(x-t)} u(t)dt, & x \in [0, 1/2], \\ r^k \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-r(x-t)} u(t)dt, & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Доказательство для $k = 2$ приведено в работе [1], для любого k получается по индукции.

© А.А. Хромов, 2009

Лемма 2. *Операторы* $D^m\Omega_r^{(k)}$, $k \geq 2$, $m = 1, \ldots, k-1$ *имеют вид*

$$D^m\Omega_r^{(k)}u = \begin{cases} r^k \int\limits_x^1 K_{2m}(x,t,k,r)u(t)dt, & x \in [0,1/2], \\ r^k \int\limits_0^x K_{1m}(x,t,k,r)u(t)dt, & x \in [1/2,1], \end{cases}$$

где

$$K_{1m}(x,t,k,r) = (-1)^m e^{-r(x-t)} \left[r^m \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} - mr^{m-1}\frac{(x-t)^{k-2}}{(k-2)!} + \right.$$

$$\left. + C_m^2 r^{m-2}\frac{(x-t)^{k-3}}{(k-3)!} + \cdots + (-1)^{m-1}C_m^{m-1} r \frac{(x-t)^{k-m}}{(k-m)!} + (-1)^m \frac{(x-t)^{k-m-1}}{(k-m-1)!} \right],$$

$$K_{2m}(x,t,k,r) = e^{r(x-t)} \left[r^m \frac{(t-x)^{k-1}}{(k-1)!} - mr^{m-1}\frac{(t-x)^{k-2}}{(k-2)!} + \right.$$

$$\left. + C_m^2 r^{m-2}\frac{(t-x)^{k-3}}{(k-3)!} + \cdots + (-1)^{m-1}C_m^{m-1} r \frac{(t-x)^{k-m}}{(k-m)!} + (-1)^m \frac{(t-x)^{k-m-1}}{(k-m-1)!} \right].$$

Доказательство проводится методом математической индукции.

Теорема 1. *Для любой функции* $u(x) \in C[0,1]$ *выполняется сходимость*

$$\|\Omega_r^{(k)}u - u\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty, \ k = 1, 2 \ldots.$$

Здесь и в дальнейшем $\|v(x)\|_{L_\infty[0,1]} = \max\{\|v(x)\|_{C[0,1/2]}, \|v(x)\|_{C[1/2,1]}\}$.

Доказательство. Для $k = 1, 2$ эта сходимость выполняется [1]. Для любого $k > 2$ применяем метод математической индукции и теорему Банаха – Штейнгауза.

Теорема 2. *Для любой функции* $u(x) \in C^{k-1}[0,1]$ *при* $k \geq 2$, $m \leq k-1$ *выполняется сходимость:*

$$\|D^m\Omega_r^{(k)}u - u^{(m)}\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

Доказательство сводится к доказательству сходимостей:

$$\|D^m\Omega_{1r}^k u - u^{(m)}\|_{C[1/2,1]} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty \qquad \text{и} \qquad \|D^m\Omega_{2r}^k u - u^{(m)}\|_{C[0,1/2]} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty,$$

а каждая из них доказывается методом индукции с использованием теоремы 1.

2. Пусть непрерывно дифференцируемая m раз функция $u(x)$ задана ее приближением $f_\delta(x)$ в метрике пространства $L_2[0,1]$:$\|f_\delta - f\|_{L_2} \leq \delta$. Поставим задачу: по f_δ и δ найти равномерные приближения к $u^{(m)}(x)$. Это известная задача восстановления функций [2].

Теорема 3. *При* $k \geq 2$, $m = 1, \ldots, k-1$ *для сходимости*

$$\Delta(\delta, D^m\Omega_r^{(k)}u) \equiv \sup\{\|D^m\Omega_r^{(k)}f_\delta - u^{(m)}\|_{L_\infty[0,1]} : \|f_\delta - f\|_{L_2[0,1]} \leq \delta\} \to 0 \quad \textit{при} \quad \delta \to 0$$

необходимо и достаточно выполнения согласования $r = r(\delta)$, *удовлетворяющего условиям:* $r(\delta) \to \infty$ *и* $(r(\delta))^{\frac{2m+1}{2}}\delta \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

Доказательство. На основании оценки

$$\|D^m\Omega_r^{(k)}f_\delta - u^{(m)}\|_{L_\infty[0,1]} \leq \|D^m\Omega_r^{(k)}\|_{L_2[0,1]\to L_\infty[0,1]}\delta + \|D^m\Omega_r^{(k)}u - u^{(m)}\|_{L_\infty[0,1]}$$

и теоремы 2 нам достаточно доказать ограниченность норм $\|D^m\Omega_r^{(k)}\|_{L_2[0,1]\to L_\infty[0,1]}$ при каждом фиксированном r, а для нахождения согласований $r = r(\delta)$, нужно затем найти асимптотику по r при $r \to \infty$ указанных норм.

Имеем

$$\|D^m\Omega_r^{(k)}\|_{L_2[0,1]\to L_\infty[0,1]} = \max\{\|D^m\Omega_{2r}^k\|_{L_2[0,1]\to C[0,1/2]}, \quad \|D^m\Omega_{1r}^k\|_{L_2[0,1]\to C[1/2,1]}\}.$$

Рассмотрим сначала норму $\|D^m\Omega_{1r}^k\|_{L_2[0,1]\to C[1/2,1]}$. Имеем

$$\|D^m\Omega_{1r}^k\|_{L_2[0,1]\to C[1/2,1]} = r^k \max_{1/2\le x\le 1}\left(\int\limits_0^x K_{1m}^2(x,t,k,r)dt\right)^{1/2}. \tag{1}$$

Раскроем квадрат скобки, стоящей в правой части (1). Обозначим для краткости $x-t=\tau$, $k-1=k_1$. Тогда получим $K_{1m}^2(x,t,k,r)=P_{1m}(\tau,r)$, где $P_{1m}(\tau,r)$ имеет вид (располагаем слагаемые в порядке возрастания степеней r)

$$P_{1m}(\tau,r)=a_0\tau^{2k_1-2m}+a_1r\tau^{2k_1-2m+1}+a_2r^2\tau^{2k_1-2m+2}+\dots+a_lr^l\tau^{2k_1-2m+l}+\dots+a_{2m}r^{2m}\tau^{2k_1},$$

где a_j, $j=0,\dots,2m$ — константы, выражающиеся через произведения констант, стоящих при степенях $r^{m-l}(x-t)^{k-l-1}$, $l=0,1,\dots,m$ в квадратной скобке выражения (1).

Тогда интеграл $I=\int\limits_0^x K_{1m}^2(x,t,k,r)dt$, стоящий в правой части (1), можно представить в виде

$$I=a_0I_0+a_1rI_1+\dots+a_lr^lI_l+\dots+a_{2m}r^{2m}I_{2m},$$

где $I_l=\int\limits_0^x \tau^{2k_1-2m+l}e^{-2r\tau}d\tau$, $l=0,1,\dots,2m$.

Вычисляя эти интегралы, получим

$$I=Cr^{-(2k_1-2m+1)}+O(r^{2m-1}e^{-r}),$$

$$\|D^m\Omega_{1r}^k\|_{L_2[0,1]\to C[1/2,1]}=r^kC^{1/2}r^{-(m+1/2)}[1+O(r^{2k-2}e^{-r})].$$

Точно такое же выражение получаем для нормы $\|D^m\Omega_{2r}^k\|_{L_2[0,1]\to C[0,1/2]}$ и в целом справедлива формула

$$\|D^m\Omega_{1r}^{(k)}\|_{L_2[0,1]\to L_\infty[0,1]}=C^{1/2}r^{-\frac{2m+1}{2}}+O(r^{2k+m-3/2}e^{-r}). \tag{2}$$

Из этой формулы и теории некорректно поставленных задач следует, что константа C отлична от нуля. В противном случае норма $\|D^m\Omega_r^{(k)}\|_{L_2[0,1]\to L_\infty[0,1]}\to 0$ при $r\to\infty$, а значит, $\|D^m\Omega_r^{(k)}\|_{L_2[0,1]\to L_\infty[0,1]}\le K$, где K не зависит от r. А этого не может быть, поскольку операторы $D^m\Omega_r^{(k)}$ аппроксимируют неограниченный оператор.

Из равенства (2) и из работы [3] вытекает утверждение теоремы 3.

3. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$Au\equiv u(x)-\lambda\int\limits_0^1 K(x,t)u(t)dt=f(x). \tag{3}$$

Предполагаем, что ядро $K(x,t)$ суммируемо с квадратом по обеим переменным и что однородное уравнение $Au=0$ имеет только тривиальное решение в пространстве $L_2[0,1]$. Будем считать, что оператор A в уравнении (1) действует из пространства $C^p[0,1]$ в пространство $L_2[0,1]$.

Лемма 3. *Если в уравнении* (3) $A\in(C^p[0,1]\to L_2[0,1])$ *($p\ge 0$ — целое) и A^{-1} существует, то A^{-1} неограничен.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 в работе [1].

Построим операторы, с помощью которых можно находить приближения к производным от точного решения уравнения (3). С этой целью рассмотрим операторы

$$T_r^{(m,k)}f=D^m\Omega_r^{(k)}\tilde{A}^{-1}f,$$

где $\tilde{A}$ — оператор A, рассматриваемый как оператор, действующий из $L_2[0,1]$ в $L_2[0,1]$.

Теорема 4. *Если $u(x)\in C^{k-1}[0,1]$, $f_\delta(x)\in L_2[0,1]$, $\|f_\delta-f\|_{L_2[0,1]}\le\delta$, где $f=Au$, A — оператор в уравнении* (3)*, то для сходимости*

$$\Delta(\delta,T_r^{(m,k)},u)\equiv\{\sup\|T_r^{(m,k)}f_\delta-u^{(m)}\|_{L_\infty[0,1]}:\|f_\delta-Au\|_{L_2[0,1]}\le\delta\}\to 0$$

при $r \to \infty$ *необходимо и достаточно выбрать* $r = r(\delta)$ *так, чтобы*

$$r(\delta) \to +\infty, \quad (r(\delta))^{\frac{2m+1}{2}}\delta \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0 \quad (m = 1, \ldots, k-1, \quad k \geq 2).$$

Доказательство. Запишем оценку:

$$\|T_r^{(m,k)} f_\delta - u^{(m)}\|_{L_\infty} \leq \|T_r^{(m,k)}(f_\delta - f)\|_{L_\infty} + \|T_r^{(m,k)} Au - u^{(m)}\|_{L_\infty}. \tag{4}$$

Тогда

$$\|T_r^{(m,k)} Au - u^{(m)}\|_{L_\infty} = \|D^m \Omega_r^{(k)} u - u^{(m)}\|_{L_\infty} \to 0$$

при $r \to \infty$ по теореме 2. Далее,

$$\|T_r^{(m,k)}(f_\delta - f)\|_{L_\infty[0,1]} = \|D^m \Omega_r^{(k)} \tilde{A}^{-1}(f_\delta - f)\|_{L_\infty[0,1]} \leq$$

$$\leq \|D^m \Omega_r^{(k)}\|_{L_2[0,1] \to L_\infty[0,1]} \|\tilde{A}^{-1}(f_\delta - f)\|_{L_2} \leq \|D^m \Omega_r^{(k)}\|_{L_2[0,1] \to L_\infty[0,1]} \|\tilde{A}^{-1}\|_{L_2[0,1]} \delta.$$

Из формулы (2) для нормы $\|D^m \Omega_r^{(k)}\|_{L_2[0,1] \to L_\infty[0,1]}$ и оценки (4) получаем утверждение теоремы 4.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (*проект* НШ-2970.2008.01).

Библиографический список

1. *Хромов А.А.* Решение интегральных уравнений с помощью резольвент простейших дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 53–58.

2. *Морозов В.А.* О восстановлении функций методом регуляризации // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1967. Т. 7, № 4. С. 874–884.

3. *Иванов В.К.* Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода // Диф. уравнения. 1967. Т. III, № 3. С. 410–421.

МЕХАНИКА

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ОТ НЕРАВНОМЕРНОЙ РАДИАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Э.В. Антоненко, Т.Э. Шульга*

Саратовский государственный университет,
кафедра вычислительного эксперимента в механике;
*Саратовский государственный социально-экономический университет,
факультет информатики и информационных технологий
E-mail: vem@info.sgu.ru, *shulga@ssea.runnet.ru

Рассматривается круговая цилиндрическая оболочка с переменной вдоль продольной оси толщиной при действии осесимметричного изменяющегося вдоль оси оболочки радиального давления. Находится одна из величин в законе изменения давления, при которой происходит потеря устойчивости оболочки.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, теория оболочек, устойчивость оболочек, радиальная нагрузка, критическое давлением, толщина оболочки, теория упругости.

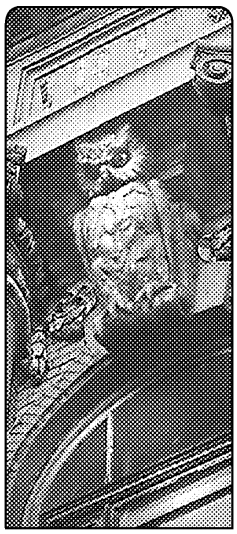
Mathematical Models of Stability Loss of Nonuniform Cylindrical Shells Because of Nonuniform Radial Loading

E.V. Antonenko, T.E. Shulga*

Saratov State University
Chair of Mechanics Computational Experiment;
*Saratov State Socio-Economical University
Faculty of Computer Sciences and Informational Technologies
E-mail: vem@info.sgu.ru, *shulga@ssea.runnet.ru

The circular cylindrical shell with variable thickness along the axis of elongation is considered. The axisymmetric radial pressure along the axis of shell is suggested. The one of values (for the law of pressure variation) which effects the stability loss of shell is determinated.

Key words: cylindrical shell, theory of shells , stability of shells, radial loading, critical pressure, shell thickness, the theory of elasticity.



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

Исследования устойчивости оболочек от действия неравномерного давления, по-видимому, начинаются с работ Б.О. Элмроса [1] и В.И. Моссаковского [2]. Решение некоторых задач для неоднородных оболочек с переменной радиальной нагрузкой имеется в работах [3, 4]. Однако в них рассматривались ситуации отдельно для неоднородности оболочки и отдельно от действия переменной нагрузки. На конференциях по механике деформированных тел, теории оболочек и в литературе [4–6] ставились задачи о получении зависимостей для расчета критического давления с учетом неоднородности оболочек и нагрузок, аналогичных зависимостям [7].

Задачу статической устойчивости будем решать в линейной постановке, используя классические зависимости теории оболочек [6, 8–10] и деформационных гипотез нерастяжимости поперечного сечения и отсутствия сдвигов в срединной поверхности. Применим энергетический метод в форме [9], используя две математические

© Э.В. Антоненко, Т.Э. Шульга, 2009

модели задачи. Первая модель строится на получении дифференциального уравнения задачи. Математическое содержание задачи в этом случае сводится к нахождению собственных значений дифференциального уравнения при заданных граничных условиях. Искомая величина критического давления содержится в коэффициенте уравнения.

Вторая модель строится на использовании условия безразличного равновесия при потере устойчивости. В этой ситуации, согласно принципу виртуальных перемещений, сумма работ внутренних усилий и сил давления равна нулю. Это условие позволяет найти критическое давление без решения дифференциального уравнения задачи, что служит основанием для названия такого метода прямым.

Составим функционал энергии единицы длины оболочки, включая в него наиболее весомые в энергетическом отношении составляющие: энергию изгиба поперечного сечения от кольцевых изгибающих моментов m_φ и энергию депланаций от осевых напряжений σ_x:

$$\Gamma = \frac{1}{2}\oint [m_\varphi \chi_\varphi + \sigma_x \delta(x)\varepsilon_x - p(x)Rw\chi_\varphi]Rd\varphi, \tag{1}$$

где последнее слагаемое есть работа сил переменного вдоль оболочки давления $p(x)$ на радиальных перемещениях, толщину оболочки $\delta(x)$ полагаем также переменной вдоль продольной оси оболочки x.

Все усилия и деформации в (1) выражаются через функцию радиальных перемещений $w(x,\varphi)$ и ее производные. Прогиб оболочки зададим в виде

$$w(x,\varphi) = \sum_n \psi_n(x)\cos n\varphi, \tag{2}$$

где $\psi_n(x)$ — неизвестные функции, меняющиеся по длине оболочки, $n = 2, 3, 4, \ldots$ — числа натурального ряда, соответствующие количеству волн в поперечном сечении оболочки при потере устойчивости. Далее индекс n опускается.

Кольцевые и осевые перемещения в силу принятых гипотез имеют вид

$$v = -\sum_n \frac{\psi(x)}{n}\sin n\varphi, \qquad u = -\sum_n \frac{R}{n^2}\psi'(x)\cos n\varphi.$$

Здесь и далее штрихами обозначены производные по осевой координате x. Тогда изменение кривизны поперечных сечений, кольцевые изгибающие моменты, относительная осевая деформация и осевые нормальные напряжения запишутся в виде

$$\begin{gathered} \chi_\varphi = -\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} + w\right) = \sum_n \frac{n^2-1}{R^2}\psi(x)\cos n\varphi, \qquad m_\varphi = D\chi_\varphi, \\ \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\sum_n \frac{R^2}{n^2}\psi''(x)\cos n\varphi, \qquad \sigma_x = E\varepsilon_x. \end{gathered} \tag{3}$$

Подстановка (3) в (1) с учетом ортогональности тригонометрических функций дает

$$\Gamma = \frac{1}{2}\sum_n \left\{ D(x)\frac{(n^2-1)^2}{R^4}\psi^2(x) + \frac{E\delta(x)R^2}{n^4}[\psi''(x)]^2 - \frac{n^2-1}{R}p(x)\psi^2(x)\right\}\pi R, \tag{4}$$

где учтено, что $\oint \cos^2 n\varphi d\varphi = \pi$, $D(x) = E\delta^3(x)/12(1-\mu^2)$.

Дифференциальное уравнения задачи потери устойчивости получим из условия минимума функционала (4), применяя уравнение Эйлера – Лагранжа вариационной задачи:

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\psi(x)} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\psi'(x)}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\psi''(x)}\right) = 0. \tag{5}$$

Выполняя для (4) операции (5) получаем:

$$\psi^{IV}(x) + 2\frac{\delta'(x)}{\delta(x)}\psi'''(x) + \frac{\delta''(x)}{\delta(x)}\psi''_n(x) + \frac{n^4(n^2-1)}{R^3E\delta(x)}\left(\frac{E(n^2-1)\delta^3(x)}{12(1-\mu^2)R^3} - p(x)\right)\psi_n(x) = 0. \tag{6}$$

Полученное дифференциальное уравнение задачи для n-й функции продольной координаты $\psi(x)$ дает основание отказаться от представления функции $w(x,\varphi)$ в виде ряда (2) и задавать ее только одним членом этого ряда. Следовательно, символ суммы во всех предыдущих формулах может быть исключен. Это будет учтено ниже.

Для определения величины критического давления закон изменения давления в (6) необходимо представлять в форме, содержащей основной параметр этого давления, например,

$$p(x) = p_0 f(x). \tag{7}$$

Величина p_0, которую будем называть критическим давлением, зависит, как это видно из (6), от функций $f(x)$ и граничных условий. Только для случая (7) можно говорить о задаче на собственные значения дифференциального уравнения.

Для оболочек с постоянной толщиной $\delta(x) = \delta_0$ при действии равномерного давления $p(x) = p_0$ из (6) как частный случай следует известное в теории оболочек дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Оно имеет аналитическое решение, приводящее, например, к формуле П.Ф. Попковича для критического давления.

Аналитическое определение величины p_0 из дифференциального уравнения с переменными коэффициентами (6) не представляется возможным, численные решения связаны со значительными трудностями.

Предлагается более простая модель рассматриваемой задачи, следующая из принципа минимума потенциальной энергии U, когда в состоянии безразличного равновесия оболочки при потере устойчивости работа внутренних усилий равна работе внешних сил

$$U = \int_0^l \Gamma dx = 0, \tag{8}$$

где l – длина оболочки.

Условие (8) с учетом (4) и (7) позволяет получить формулу для критического давления:

$$\frac{p_0}{E} = \frac{\frac{n^2-1}{12(1-\mu^2)R^3}\int\limits_0^l \delta^3(x)\psi^2(x)\,dx + \frac{R^3}{n^4(n^2-1)}\int\limits_0^l \delta(x)[\psi''(x)]^2 dx}{\int\limits_0^l f(x)\psi^2(x)\,dx}. \tag{9}$$

Для оболочек средней длины, у которых число волн при потере устойчивости $n \geq 4$, в формуле (9)можно пренебречь единицей по сравнению с n^2. Из условия минимума p_0:

$$\frac{\partial p_0}{\partial n^2} = 0, \tag{10}$$

следует

$$p_0 = \frac{4}{3}\frac{\sqrt[4]{3I_1^3 I_2}}{I_3}, \tag{11}$$

где интегралы, входящие в (11), имеют вид

$$I_1 = \int_0^l \frac{E\delta^3(x)}{12(1-\mu^2)R^3}\psi^2(x)\,dx, \qquad I_2 = \int_0^l E\delta(x)[\psi''(x)]^2 dx, \qquad I_3 = \int_0^l f(x)\psi^2(x)\,dx.$$

При использовании (9) и (10) функции продольной координаты $\psi(x)$ должны задаваться и удовлетворять граничным условиям оболочки.

В настоящей статье представлены результаты расчетов по формуле (11) для четырех схем закрепления краев оболочки. Функции продольной координаты $\psi(x)$двух видов представлены в табл.1. Численный эксперимент, выполненный авторами, показал, что для однородных оболочек при равномерном давлении результаты расчетов при рассмотренных видах функций $\psi(x)$ практически не отличаются, если удовлетворяются граничные условия задачи. В данной работе функции $\psi(x)$ задавались в виде

Таблица 1

Граничные условия

Номер схемы	Граничные условия	Виды функций $\psi(x)$	Коэффициент α
1	$\psi(0)=0$ $\psi''(0)=0$	$A\sin\frac{m\pi x}{l}$	π
	$\psi(l)=0$ $\psi''(l)=0$	$x^4-2lx^3+l^3x$	
2	$\psi(0)=0$ $\psi'(0)=0$	$A\sin^2\frac{m\pi x}{l}$	$1,5\pi$
	$\psi(l)=0$ $\psi'(l)=0$	$x^4-2lx^3+l^2x^2$	
3	$\psi(0)=0$ $\psi'(0)=0$	$A\left(1-\cos\frac{\pi x}{2l}\right)$	$0,6\pi$
	$\psi''(l)=0$ $\psi'''(l)=0$	$x^4-4lx^3+6l^2x^2$	
4	$\psi(0)=0$ $\psi'(0)=0$ $\psi(l)=0$ $\psi''(l)=0$	$2x^4-5lx^3+3l^2x^2$	$1,25\pi$

полиномов. В этих случаях получаем формулу для расчета критического давления в форме [7]. При коэффициенте Пуассона $\mu=0,3$ имеем

$$n_0^2=2,39\alpha\frac{R}{l}\sqrt{\frac{R}{\delta_0}}\ ,\qquad p_0=0,293\alpha E\frac{R}{l}\left(\frac{\delta_0}{R}\right)^{2,5}, \tag{12}$$

где α — коэффициент критичности, учитывающий граничные условия. При граничных условиях Новье из (12) следует формула П.Ф. Папковича ($\alpha=\pi$).

Рассмотрена устойчивость оболочки с линейно изменяющейся толщиной

$$\delta(x)=\delta_0(1-\beta\frac{x}{l}),\quad \beta=\frac{\delta_0-\delta_l}{\delta_0}. \tag{13}$$

Радиальная нагрузка также принималась линейно изменяющейся по длине оболочки:

$$p(x)=p_0(1-\gamma\frac{x}{l}),\quad \gamma=\frac{p_0-p_l}{p_0}. \tag{14}$$

В формулах (13) и (14) βи γ — показатели изменяемости толщины оболочки и давления, δ_0 и p_0 — толщина оболочки и давление в сечении x=0, δ_l и p_l — эти же параметры на краю оболочки $x=l$.

Подстановка выражений $\delta(x)$и $p(x)$вида (13) и (14) в формулы (9) и (11) учетом (10) дают зависимости для расчета числа волн при потере устойчивости и величины критического давления в виде аналогичном (12):

$$n^2=n_0^2f(\beta),\qquad p_0=0,293\alpha E\frac{R}{l}\left(\frac{\delta_0}{R}\right)^{2,5}k_\delta k_p, \tag{15}$$

где $f(\beta)$, k_δ и k_p — корректирующие функции, учитывающие изменение толщины и давления по длине оболочки. Аналитические выражения корректирующих функций для рассмотренных схем граничных условий приведены в табл. 2.

Таблица 2

Выражения корректирующих функций

Номер схемы	$f(\beta)$	k_δ	k_p
1	$\sqrt[4]{\frac{1-0,5\beta}{\varphi_1(\beta)}}$ $\varphi_1(\beta)=1-1,5\beta+0,85\beta^2-0,174\beta^2$	$\sqrt[4]{(1-0,5\beta)\varphi_1^3(\beta)}$	$\frac{1}{1-0,5\gamma}$
2	$\sqrt[4]{\frac{1-0,5\beta}{\varphi_2(\beta)}}$ $\varphi_2(\beta)=1-1,5\beta+0,818\beta^2-0,159\beta^2$	$\sqrt[4]{(1-0,5\beta)\varphi_2^3(\beta)}$	$\frac{1}{1-0,5\gamma}$
3	$\sqrt[4]{\frac{1-0,167\beta}{\varphi_3(\beta)}}$ $\varphi_3(\beta)=1-2,415\beta+2,01\beta^2-0,573\beta^2$	$\sqrt[4]{(1-0,167\beta)\varphi_3^3(\beta)}$	$\frac{1}{1-0,802\gamma}$
4	$\sqrt[4]{\frac{1-0,417\beta}{\varphi_4(\beta)}}$ $\varphi_4(\beta)=1-0,698\beta+1,04\beta^2-0,226\beta^2$	$\sqrt[4]{(1-0,417\beta)\varphi_4^3(\beta)}$	$\frac{1}{1-0,565\gamma}$

Зависимости $k_\delta = f(\beta)$ и $k_p = f(\gamma)$ при линейном изменении толщины и давления для расчета удобнее представлять в виде функция от соотношения толщин и давлений на краях оболочки:

$$\beta = 1 - \frac{\delta_l}{\delta_0}, \qquad \gamma = 1 - \frac{p_l}{p_0}.$$

Графические зависимости корректирующих функций k_δ и k_p от соотношения толщин и давления приведены на рис. 1 и 2, где номера кривых соответствуют номерам схем граничных условий в табл. 1 и 2.

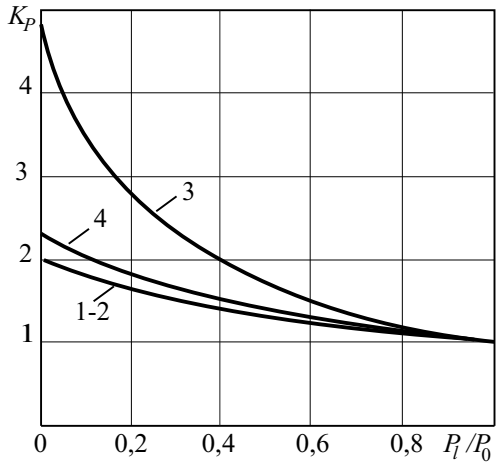


Рис. 1. Зависимости корректирующих функций изменения толщины от соотношения толщины при разных граничных условиях оболочки

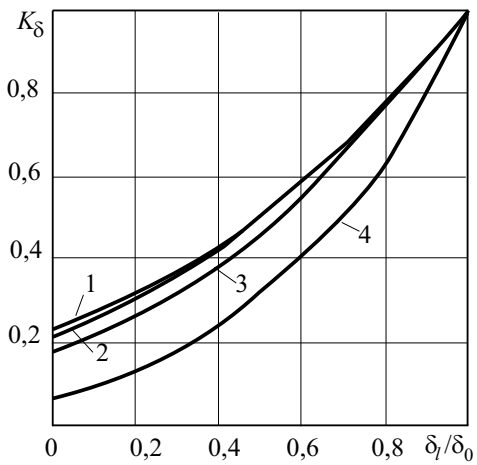


Рис. 2. Зависимости корректирующих функций изменения давления от соотношения давлений при разных граничных условиях оболочки

Для однородной оболочки ($\delta_0 = \delta_l$) $\beta = 0$ при равномерном давлении ($p_0 = p_l$) $\gamma = 0$ значения всех корректирующих функций становятся равными единице. Из формул (15) как частный случай следуют известные зависимости [6–10] для однородных оболочек при равномерном давлении.

Приведенные в статье зависимости для оболочек с линейно изменяющейся толщиной и линейно изменяющемся по длине давлением дают возможность получить величины критического давления по имеющейся в проектных организациях справочной литературе, используя корректирующие функции.

Математическая модель потери устойчивости оболочки, построенная на прямом методе, позволяет по формулам (9)–(11) находить критические нагрузи практически для любых законов изменения толщины и давления вдоль оболочки.

Библиографический список

1. *Элмрос Б.О.* Выпучивание цилиндрической оболочки, подверженной действию неравномерного внешнего давления // Прикладная механика: Тр. Амер. общества инженеров – механиков. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. № 4. С. 27–31.

2. *Моссаковский В.И., Андреев Л.В., Зюзин В.А.* Некоторые вопросы устойчивости цилиндрической оболочки под действием неравномерного давления // V Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек: Тез. докл. М.: Наука, 1965. С. 47–51.

3. *Кан С.Н., Тодчук В.А.* Устойчивость цилиндрической оболочки при действии переменной радиальной нагрузки // Избранные главы по строительной механике оболочек. Харьков, 1965. Вып. V. С. 182–187.

4. *Антоненко Э.В., Хлопцева Н.С.* Устойчивость цилиндрических оболочек переменной толщины при действии наружного давления // Тр. XXI Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. С. 7–13.

5. Актуальные проблемы механики оболочек: Тр. междунар. конф. Казань: Новое знание, 2000. 488 с.

6. *Товстик П.Е.* Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 1995. 308 с.

7. *Антоненко Э.В.* Свободные колебания и устойчивость оболочек с упругими краевыми ребрами // Прикладная механика. Киев, 1975. Т. XI, вып. 6. С. 44–50.

8. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1974. 640 с.

9. *Кан С.Н.* Строительная механика оболочек М.: Машиностроение, 1966. 508 с.

10. Прочность. Устойчивость. Колебания: В 3 т. М.: Машиностроение, 1968. Т. 3. 568 с.

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.71

ОБНАРУЖЕНИЕ DDoS АТАК НЕЧЕТКОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТЬЮ

И.И. Слеповичев, П.В. Ирматов*, М.С. Комарова*, А.А. Бежин*

Саратовский государственный университет,
кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии;
*Поволжский региональный центр новых информационных технологий,
отдел информационных ресурсов и систем
E-mail: gurgutan@yandex.ru, *karteron@yahoo.com

В статье анализируется DDoS атака SYN Flood. Предлагается метод для обнаружения атаки этого типа при помощи нечеткой нейронной сети. Приводится модификация алгоритма обратного распространения ошибки, используемая для обучения нейронной сети.

Ключевые слова: DDoS, SYN Flood, нечеткая нейронная сеть, алгоритм обратного распространения.

DDoS Attack Detection Using Fuzzy Neural Network

I.I. Slepovichev, P.V. Irmatov*, M.S. Komarova*, A.A. Bezhin*

Saratov State University,
Chair of Theoretical Basics of Computer Security and Cryptography;
* Volga Regional Center of New Informational Technologies,
Department of Informational Resources and Systems
E-mail: gurgutan@yandex.ru, *karteron@yahoo.com

In this article we analyze SYN Flood type of DDoS attack. We suggest method to detect this attack using a fuzzy neural network. Also we introduce modified back-propagation algorithm for neural network teaching.

Key words: DDoS, SYN Flood, fuzzy neural network, back-propagation algorithm

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ВВЕДЕНИЕ

В наши дни распределенные атаки типа отказ в обслуживании (Distributed denial-of-service — DDoS) стали мощным инструментом в руках злоумышленников. Теперь это не просто способ тестирования сети при экстремальных нагрузках, но и средство шантажа владельцев интернет-сайтов. Большая часть таких атак — это атаки, нацеленные на вывод сервера из строя (то есть на отказ в обслуживании) путем посылки большого количества запросов на сервер. В результате канал связи переполняется, и компьютер жертвы не может отвечать на запросы пользователей. Это наносит значительный ущерб владельцам атакованных сетевых служб. На сегодняшний день разработаны методики противодействия DDoS атакам, однако их применение требует значительных материальных и административных затрат [1]. Обнаружение таких атак является непростой алгоритмической задачей, так как не существует простых и универсальных признаков, по которым можно было бы отличить сетевые запросы законопослушных пользователей к ресурсам сервера от запросов, посылаемых на сервер с целью атаки. В данной статье рассматривается абстрактная математическая модель DDoS атаки типа SYN Flood и предлагается способ её обнаружения на ранней стадии с использованием математического аппарата нечетких нейронных

© И.И. Слеповичев, П.В. Ирматов, М.С. Комарова, А.А. Бежин, 2009

сетей. Стоит отметить, что в данной работе не ставится задача дать универсальный способ обнаружения атак типа отказ в обслуживании, однако на примере этой прикладной задачи демонстрируются возможности математического аппарата нечетких нейронных сетей. Авторами данной статьи была создана программа, анализирующая входящий интернет-трафик и графически отображающая степень уверенности в наличии DDoS атаки.

1. АТАКА SYN FLOOD

Рассмотрим атаку SYN Flood. Целью такой атаки является вывод из строя сетевой службы так, чтобы атакуемый сервер не мог отвечать на запросы «обычных» пользователей. Для этого злоумышленником на адрес жертвы посылается большое количество пакетов данных переполняющих канал жертвы. Точнее, атака ведется на операционную систему с целью переполнения очереди поступающих пакетов. Так как размер очереди пакетов ограничен некоторой величиной N, а на обработку каждого запроса уходит определенное время T, то момент отказа в обслуживании пользователей будет определяться неравенством $v \geq N/T$, где v — скорость приходящих пакетов, то есть количество пакетов в секунду, N — длина очереди входящих соединений, T — время ожидания завершения соединения в секундах.

Значительного ущерба можно избежать, обнаружив атаку на ранней стадии. В этом случае у сетевого администратора будет время на принятие мер по предотвращению атаки или мер по минимизации возможного ущерба. Для решения этой задачи необходимо анализировать входящий трафик и если поступающая на сервер очередь пакетов данных имеет признаки начала атаки, сообщить об этом сетевому администратору.

Рассмотрим подробнее параметры очереди входящих пакетов данных, которые мы будем анализировать. Предположим, для анализа мы имеем последовательность из N пакетов. Анализировать будем всю последовательность, а не каждый пакет в отдельности. Существенными для анализа являются такие параметры, как TCP флаги (SYN) (нас интересуют пакеты только с этими флагами), IP адреса отправителя и получателя, направление пакета (входящее или исходящее), время поступления пакета и порт получателя. Также можно учитывать корректность заголовка: поступление большого количества пакетов с некорректными заголовками является одним из признаков атаки. Таким образом, на основе экспериментальных данных, был составлен вектор параметров для анализа, состоящий из следующих компонент:

[Процент пакетов с различными внешними IP адресами, процент пакетов с различными внешними портами, среднее время поступления одного пакета, процент пакетов с некорректными заголовками].

Эксперименты проводились на компьютере с процессором Pentium IV с частотой 3 ГГц, 512 Mb оперативной памяти. Для проведения атак использовалась виртуальная машина VMware с запущенной на ней ОС LINUX Freespire. С помощью виртуальной машины создавалась локальная сеть и сниффер, установленный на хостовой операционной системе, фиксировал параметры трафика. В качестве сниффера использовалась Trial версия программы SoftPerfect Analizer [2].

2. ПОСТРОЕНИЕ НЕЧЕТКОГО КЛАССИФИКАТОРА

Для решения задачи анализа был использован аппарат нечеткой логики и нейронных сетей [3, 4]. Для формализации знаний экспертов о DDoS атаке мы создали пять лингвистических переменных, каждая из которых характеризует одну из компонент вектора параметров. Напомним, что лингвистической переменной называют объект вида (B, T, X, G, M), где B — имя лингвистической переменной, T — множество наименований нечетких переменных, составляющих лингвистическую переменную, G — синтаксическая процедура, позволяющая оперировать элементами множества T, M — семантическая процедура, позволяющая переводить значения лингвистической переменной в нечеткую переменную. Далее приведены лингвистические переменные, созданные на основе экспериментальных данных. Процедура G нам не понадобится, поэтому мы пропускаем её в описании переменных.

1. (Время_поступления_пакетов, {«мало», «средне», «велико»}, [0,1000], $\{f_{11}(x) = \frac{1}{1+e^{-0.3(x-111)}}$, $f_{12}(x) = 1 - \frac{1}{1+e^{-0.3(x+15)}}$, $f_{13}(x) = e^{-(x-63)^2 2*0.025^2}\}$);

2. (Процент_различных_внешних_ip_адресов, {«мал», «велик»}, [0,100], $\{f_{21}(x) = \frac{1}{1+e^{-0.3(x-75)}}$, $f_{22}(x) = 1 - \frac{1}{1+e^{-0.3(x+25)}}\}$);

3. (Процент_различных_портов, {«мал», «велик»}, [0,100], $\{f_{31}(x) = \frac{1}{1+e^{-3(x-15)}}$, $f_{32}(x) = 1 - \frac{1}{1+e^{-2(x-3)}}\}$);

4. (Процент_пакетов_с_поврежденными_заголовками, {«велик»},[0,100], $\{f_{41}(x) = \frac{1}{1+e^{-2(x-5)}}\}$);

5. (Степень_уверенности, {«низкая», «средняя», «высокая»}, [0,100], $\{f_{51}(x) = \frac{1}{1+e^{-0.5(x-75)}}$, $f_{52}(x) = 1 - \frac{1}{1+e^{-0.5(x+25)}}$, $f_{53}(x) = e^{-(x-50)^2 2*15^2}\}$).

Нечеткий логический вывод для определения степени уверенности в атаке будет состоять из следующих предикатных правил:

1. Если Время_поступления_пакетов есть «мало» И Процент_различных_внешних_ip_адресов есть «мал» И Процент_различных_портов есть «мал», тогда Степень_уверенности_в_атаке есть «средняя»;

2. Если (Время_поступления_пакетов есть «мало» ИЛИ Время_поступления_пакетов есть «средне») И (Процент_различных_внешних_ip_адресов есть «велик» ИЛИ Процент_различных_портов есть «велик» ИЛИ Процент_пакетов_с_поврежденными_заголовками есть «велик»), тогда Степень_уверенности_в_атаке есть «высокая»;

3. Если Время_поступления_пакетов есть «велико», тогда Степень_уверенности_в_атаке есть «низкая»;

На основе нечеткого логического вывода был построен нечеткий классификатор со структурой, представленной на рис. 1.

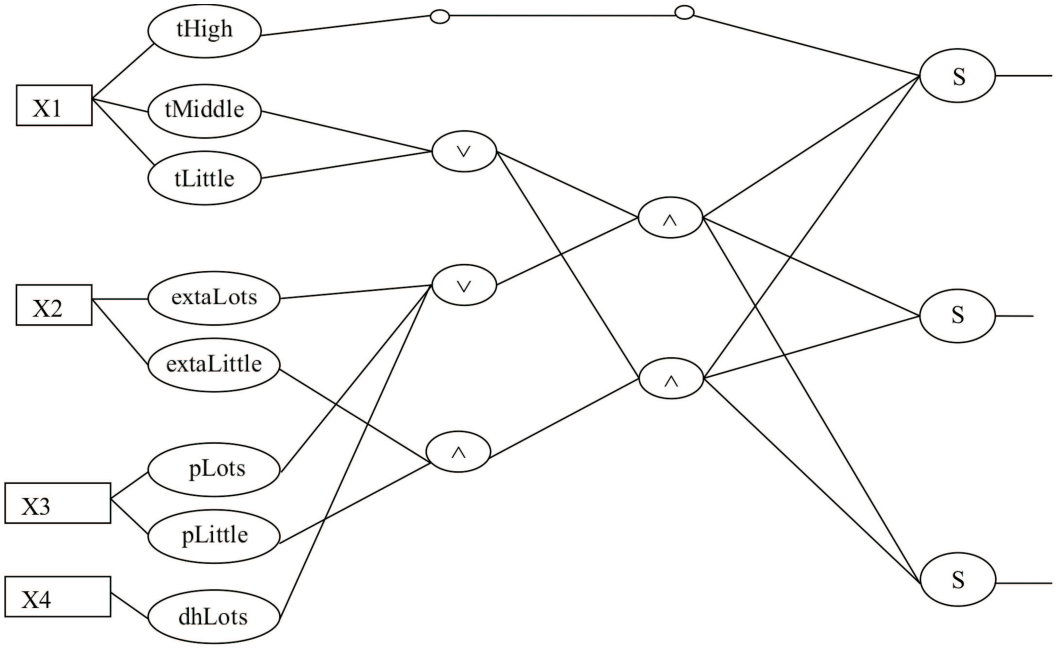


Рис. 1. Схема нечеткого классификатора для обнаружения SYN Flood атак

Здесь символом ∨ обозначен нечеткий ИЛИ-нейрон, символом ∧ — нечеткий И-нейрон, символом S — классический нейрон, X1, X2, X3, X4 — соответствующие входы, а tLittle, tMiddle, tHigh, extraLittle, extraLots, pLittle, pLots, dhLots — функции активации для нечетких переменных Время_поступления_пакетов мало, Время_поступления_пакетов средне, Время_поступления_пакетов велико, Процент_различных_внешних_ip_адресов мал, Процент_различных_внешних_ip_адресов велик, Процент_различных_портов мал, Процент_различных_портов велик, Процент_пакетов_с_поврежденными_заголовками велик соответвтвенно.

Таким образом, построенный нечеткий классификатор должен по данным, поданным на вход, определять степень уверенности в атаке.

Данная нечеткая система может быть представлена в форме многослойной нейронной сети с прямым распространением сигнала. Указанное представление нечеткого классификатора дает нам возможность использовать такие достоинства нейронных сетей, как обучение и адаптация под конкрет-

ную ситуацию. Это может быть полезным в том случае, когда конкретные параметры лингвистических переменных неизвестны и подбирать их приходиться в процессе эксплуатации системы обнаружения атак. Нейронная сеть, реализующая нечеткий классификатор, будет иметь структуру, идентичную представленной на рис. 1. В этой сети присутствуют нейроны следующих видов: И-нейроны, вычисляющие значение функции нейчеткой конъюнкции, ИЛИ-нейроны, вычисляющие значение нечеткой дизъюнкции, нейроны, вычисляющие значения функций принадлежности нечетким множествам, и S-нейроны, вычисляющие выход нечеткого классификатора.

Для обучения этой нейронной сети мы можем использовать любой градиентный метод минимизации целевой функции. В нашей работе был использован метод обратного распространения ошибки.

3. ОБУЧЕНИЕ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Обучение нейронной сети происходит по методу обратного распространения ошибки, который состоит в следующем: на каждой итерации алгоритма обратного распространения весовые коэффициенты нейронной сети модифицируются так, чтобы улучшить решение одного примера. Таким образом, в процессе обучения циклически решаются однокритериальные задачи оптимизации [5].

Классический алгоритм для нашей нейронной сети не подходит, так как в нашей нейронной сети у различных нейронов различные функции активации, и нельзя записать общую формулу, которая бы подошла для всех нейронов сети, поэтому мы модифицировали классический алгоритм для наших целей.

Функция ошибки имеет следующий вид:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k \in Outputs} (t_k - o_k)^2,$$

где k — номер выхода нейронной сети пробегает все возможные выходы, t_k — желаемый выход, o_k — выход нейронной сети.

Тогда производная ошибки на последнем слое выражается формулой

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial E}{\partial S_j} \frac{\partial S_j}{\partial w_{ij}} = x_{ij} \frac{\partial E}{\partial S_j},$$

где w_{ij} — вес от нейрона i к нейрону j, $S_j = \sum\limits_{k \in inputs} w_{kj} x_k$.

Вычислим значения

$$\frac{\partial E}{\partial S_j} = \frac{\partial E}{\partial o_j} \frac{\partial o_j}{\partial S_j} = \left(\frac{\partial}{\partial o_j} \frac{1}{2} \sum_{k \in Outputs} (t_k - o_k)^2 \right) \left(\frac{\partial o_j}{\partial S_j} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial o_j} (t_j - o_j)^2)(o_j(1 - o_j) = -o_j(1 - o_j)(t_j - o_j).$$

Теперь можно записать формулу подсчета ошибки для остальных слоев:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = \sum_{k \in Child} \frac{\partial E}{\partial S_k} \frac{\partial S_k}{\partial w_{ij}},$$

где S_k — это функция конкретного нечеткого нейрона.

Отсюда видно, что первая часть данной формулы, а именно $\frac{\partial E}{\partial S_k}$ — это ошибка на предыдущем шаге. Запишем вторую часть для каждого из слоев сети. Для предпоследнего слоя:

$$\frac{\partial S_k}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial S_k}{\partial o_j} \frac{\partial o_j}{\partial w_{ij}}.$$

Для второго и третьего слоев, содержащих нечеткие нейроны получим

$$\frac{\partial S_k}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial S_k}{\partial w_{ij}}. \tag{1}$$

Для И-нейронов под S_k будем понимать значение, вычисляемое по формуле

$$S_k = \prod_{k \in Inputs} (w_{kj} + x_{ki} - w_{ki} x_{ki}),$$

а для ИЛИ-нейронов — значение, вычисляемое по формуле

$$S_k = (w_{ij}x_{ij} + w_{i+1j}x_{i+1j} + w_{i+2j}x_{i+2j} + w_{ij}x_{ij}w_{i+1j}x_{i+1j} + \\ + w_{ij}x_{ij}w_{i+2j}x_{i+2j} - w_{ij}x_{ij}w_{i+1j}x_{i+1j}w_{i+2j}x_{i+2j}).$$

Тогда формула (1) для И-нейрона будет иметь вид

$$\frac{\partial S_k}{\partial w_{ij}} = (1 - x_i) \prod_{k \in Inputs = i} (w_{kj} + x_{kj} - w_{kj}x_{kj}). \tag{2}$$

Для ИЛИ-нейрона формула (1) в случае входного вектора с тремя компонентами, будет иметь вид

$$\frac{\partial S_k}{\partial w_{ij}} = (x_{ij} + w_{i+1j}x_{i+1j} + w_{i+2j}x_{i+2j} + x_{ij}w_{i+1j}x_{i+1j} + x_{ij}w_{i+2j}x_{i+2j} - x_{ij}w_{i+1j}x_{i+1j}w_{i+2j}x_{i+2j}). \tag{3}$$

Для первого слоя получим:

$$\frac{\partial f_1}{\partial a} = \frac{e^{-a(x-b)}(b-x)}{(1+e^{-a(x-b)})^2}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial b} = \frac{e^{-a(x-b)}a}{(1+e^{-a(x-b)})^2}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial a} = -\frac{\partial f_1}{\partial a}, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial b} = -\frac{\partial f_1}{\partial b}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial a} = \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}(x-a)}{b^2}, \qquad \frac{\partial f_3}{\partial b} = \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}(x-a)^2}{b^3}, \tag{6}$$

где $\frac{\partial f_1}{\partial a}$, $\frac{\partial f_1}{\partial b}$, $\frac{\partial f_2}{\partial a}$, $\frac{\partial f_2}{\partial b}$, $\frac{\partial f_3}{\partial a}$, $\frac{\partial f_3}{\partial b}$ — производные функций активации на первом слое. Так как на первом слое нет весовых коэффициентов, и функция по x сложная, то эти производные имеют смысл поправки $\frac{\partial S_k}{\partial w_{ij}}$ в формуле (1).

Поскольку мы вычислили поправку для узлов последнего слоя и выразили поправку для узла более низкого уровня через поправки более высокого, то теперь мы можем посчитать поправку для каждого настраиваемого параметра сети. Имея формулу вычисления ошибки последнего слоя, можно вычислить ошибку предпоследнего и соответственно поправку параметров нейронов этого слоя. И так далее — поправка для нейронов слоя непосредственно вычисляется из значений входов и поправок нейронов следующего за ним слоя. Именно из-за этой особенности вычисления поправок алгоритм называется алгоритмом обратного распространения ошибки.

Таким образом, алгоритм обратного распространения ошибки для нашей нечеткой сети будет следующим.

1. Инициализация сети: весовым коэффициентам и смещениям сети присваиваются начальные значения.

2. Определение элемента обучающей выборки: (<текущий вход>, <желаемый выход>). Текущие входы $(x_0, x_1 \dots x_{N-1})$ должны различаться для всех элементов обучающей выборки.

3. Вычисление текущего выходного сигнала: текущий выходной сигнал определяется в соответствии с традиционной схемой функционирования нейронной сети.

4. Настройка синаптических весов.

Для настройки весовых коэффициентов используется рекурсивный алгоритм, который сначала применяется к выходным нейронам сети, а затем проходит сеть в обратном направлении до первого слоя. Синаптические веса настраиваются по формуле

$$w_{ij} = w_{ij} - \eta \frac{\partial E}{\partial w_{ij}},$$

где w_{ij} — вес от нейрона i или от элемента входного сигнала i к нейрону j, η — некоторая константа, задающая величину шага, $\frac{\partial E}{\partial w_{ij}}$ — производная функции ошибки по настраиваемому параметру.

Ошибка для последнего слоя:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = x_{ij}o_j(1 - o_j)(t_j - o_j).$$

Если нейрон с номером j принадлежит одному из слоев с первого по предпоследний, то

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = \sum_{k \in Child} \frac{\partial E}{\partial S_k} \frac{\partial S_k}{\partial w_{ij}},$$

где $\frac{\partial E}{\partial S_k}$ — производная на предыдущем слое, а второй множитель — производная, подсчитанная по формуле для соответствующего нейрона сети. Например, для И-нейрона по формуле (2), а для ИЛИ-нейрона по формуле (3). Поправки для параметров функций принадлежности нечетким множествам, т. е. к первому слою, считаются по одной из соответствующих формул (4)–(6).

4. ПРОГРАММА

На основе вышеизложенной теории нами была создана программа. Программа состоит из:

– модуля классификатора, который может служить для проектирования искусственных нейронных сетей произвольной архитектуры и работы с ними;

– модуля сниффера пакетов, который перехватывает все пакеты, приходящие по протоколу TCP, и осуществляет их фильтрацию;

– модуля анализатора, который получает данные от сниффера пакетов, формирует из них векторы значений для анализа и передает нечеткому классификатору, который осуществляет оценку уровня опасности атаки.

При программировании модуля нечеткого классификатора были созданы классы для моделирования нечетких нейронных сетей, классы для обучения нечетких нейронных сетей по приведенному выше алгоритму.

Архитектура нейронной сети полностью задается через три конфигурационных файла. Два из них задают архитектуру нейронной сети, а третий задает коэффициенты для функций принадлежности нечетких множеств.

Обучение может происходить в двух режимах. В режиме реального времени пользователь выбирает уровень опасности, выступая в роли «учителя», моделирует атаку, и при нажатии кнопки «начать обучение» программа собирает обучающие выборки, с помощью которых обучается нейронная сеть. В режиме работы «из файла» пользователю предлагается выбрать файл, в котором сохранен образ атаки, что позволяет обучать программу не в момент моделирования атаки, а позже. Образы атаки можно подготовить с помощью самой программы. Для этого в программе есть специальные средства.

При тестировании программы нами были созданы ситуации с имитацией атаки на сервер. Программа с обученным классификатором показала хорошие возможности по обнаружению SYN Flood атаки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы мы рассмотрели проблему определения DDoS атак типа SYN Flood нечеткими нейронными сетями. Был построен нечеткий классификатор, который на основании параметров входящего сетевого трафика может судить о степени уверенности в наличии DDoS атаки на компьютер. Также был предложен алгоритм обучения нейронной сети. В итоге была разработана программа, которая, используя математический аппарат нечеткой логики и нейронных сетей, определяет степень уверенности в наличии атаки.

Библиографический список

1. *Paxson V.* Bro: A System for Detecting Network Intruders in Real-Time // Computer Networks. 1999. V. 31. P. 2435–2463.

2. SoftPerfect Network Protocol Analyzer – Network sniffer for Windows // http://www.softperfect.com/products/networksniffer/

3. *Круглов В.В., Дли М.И., Голунов Р.Ю.* Нечеткая логика и искусственные нейронные сети. М., 2001. 224 с.

4. *Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л.* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. М., 2006. 452 с.

5. *Rumelhart D.E., Hinton G.E., Williams R.J.* Learning internal representations by error propagation // Parallel Data Processing. 1986. V. 1. P. 318–362.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ХРОНИКА

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ», ПОСВЯЩЕННАЯ 100-ЛЕТИЮ ПРОФЕССОРА В.В. ВАГНЕРА

В.В. Розен

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: RozenVV@info.sgu.ru

Краткое информационное сообщение о Международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры», посвященной 100-летию профессора В.В. Вагнера (Саратов, 5–7 ноября 2008 г.).

International Conference «Contemporary Problems of Differential Geometry and General Algebra» Dedicated to 100th Anniversary of Professor V.V. Vagner

V.V. Rozen

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: RozenVV@info.sgu.ru

A short the information about International Conference «Contemporary Problems of Differential Geometry and General Algebra» dedicated to 100th anniversary of professor V.V. Vagner (Saratov, November 5–7, 2008)

5–7 ноября 2008 г. в Саратовском государственном университете на базе механико-математического факультета и кафедры геометрии была проведена Международная научная конференция «Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры». Это мероприятие явилось составной частью программы подготовки к 100-летию СГУ и было приурочено к 100-летию профессора Виктора Владимировича Вагнера. Конференция была поддержана грантом РФФИ и проводилась под эгидой Федерального агентства РФ по образованию. Организационный комитет возглавил ректор Саратовского университета профессор Л.Ю. Коссович. В программный комитет конференции вошли академик РАН А.Т. Фоменко, профессора МГУ В.А. Артамонов, В.Н. Латышев, А.В. Михалев, профессор СПбГУ А.М. Вершик, профессор Уральского ГУ Л.Н. Шеврин, профессор Самарского ГУ В.Е. Воскресенский, профессор Казанского ГУ В.В. Шурыгин, а также ряд известных ученых из США, Великобритании, Израиля и стран ближнего зарубежья. В конференции приняло участие около семидесяти ученых, представляющих крупнейшие математические центры РФ. Тезисы докладов участников конференции были изданы в научном сборнике «Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры».

Конференция рекомендовала некоторые из заслушанных докладов к публикации в журнале «Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика». Отобранные Оргкомитетом конференции работы представлены в настоящем выпуске.

© В.В. Розен, 2009