

### МАТЕМАТИКА

УДК 517.984

# ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ РАВНОСХОДИМОСТИ НА ВСЕМ ОТРЕЗКЕ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов\*

Воронежский государственный университет, кафедра математического анализа;

\*Саратовский государственный университет, кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики

E-mail: burlutskaya@math.vsu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

В работе установлена равносходимость на всем отрезке рядов Фурье по собственным и присоединенным функциям функционально-дифференциального оператора с инволюцией, содержащего потенциалы, и простейшего функционально-дифференциального оператора.

**Ключевые слова:** функционально-дифференциальный оператор, инволюция, разложение по собственным и присоединенным функциям, равносходимость.

On the Same Theorem on a Equiconvergence at the Whole Segment for the Functional-Differential Operators

### M.Sh. Burlutskaya, A.P. Khromov\*

Voronezh State University, Chair of Mathematical Analysis;

\*Saratov State University, Chair of Differential Equations and Applied Mathematics E-mail: burlutskaya@math.vsu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

The equiconvergence of expansions in eigen- and adjoint functions of functional-differential operator with involution, containing the potentials, and simplest functional-differential operator at the whole segment of Fourier series is established.

**Key words:** functional-differential operator, involution, the expansions in eigen and associated functions, equiconvergence.

В данной работе устанавливается равносходимость на отрезке [0,1] рядов Фурье по собственным и присоединенным функциям (далее — с.п.ф.) для следующих функционально-дифференциальных операторов с инволюцией:

$$Ly = y'(1-x) + \alpha y'(x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x), \quad y(0) = \gamma y(1),$$
  

$$L_0y = y'(1-x) + \alpha y'(x), \quad y(0) = \gamma y(1),$$

где  $x \in [0,1], \ \alpha^2 \neq 1, \ \alpha, \ \gamma$  — комплексные постоянные,  $p_i(x) \in C^1[0,1].$ 

Для скалярного дифференциального оператора n-го порядка с регулярными краевыми условиями подобный результат хорошо известен [1].

**1.** Обозначим через  $\widetilde{L}$  следующий оператор в пространстве вектор-функций размерности 2:

$$\widetilde{L}z = Bz'(x) + P(x)z(x), \tag{1}$$

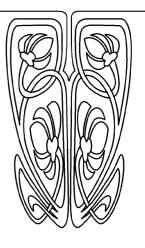
$$M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0. (2)$$







# НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ





Здесь 
$$z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$$
  $(T$  — знак транспонирования),  $P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_2(1-x) & p_1(1-x) \end{pmatrix}$ ,

$$B=egin{pmatrix} lpha & -1 \ 1 & -lpha \end{pmatrix},\ M_0=egin{pmatrix} 1 & -\gamma \ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_1=egin{pmatrix} 0 & 0 \ \gamma & -1 \end{pmatrix}.$$
 Оператор  $\widetilde{L}$  представляет собой частный случай оператора Дирака.

Так же как в [2, 3] можно доказать

**Теорема 1.** Спектры операторов L и  $\widetilde{L}$  совпадают, причем если  $R_{\lambda}$  и  $\widetilde{R}_{\lambda}$  — соответственно резольвенты операторов L и  $\widetilde{L}$ , и  $y=R_{\lambda}f$ ,  $z=\widetilde{R}_{\lambda}F$ , еде  $F(x)=(f(x),f(1-x))^{T}$ , то  $y(x)=z_{1}(x)$ , а  $z_{2}(x)=y(1-x)$ .

Аналогично можно показать, что совпадают спектры операторов  $L_0$  и  $\widetilde{L}_0$ , где

$$\widetilde{L}_0 z = B z'(x), \quad M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0,$$

(матрицы B,  $M_0$ ,  $M_1$  — те же, что и в (1)–(2)) и  $R_\lambda^0 f(x) = [\widetilde{R}_\lambda^0 F(x)]_1$ , а  $[\widetilde{R}_\lambda^0 F(x)]_2 = (R_\lambda^0 f)(1-x)$ ,  $R_\lambda^0$  и  $\widetilde{R}_\lambda^0$  — соответственно резольвенты операторов  $L_0$  и  $\widetilde{L}_0$ ,  $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$  ( $[\cdot]_k$  означает k-ю компоненту вектора).

Исследуем резольвенту  $\widetilde{R}_{\lambda}=(\widetilde{L}-\lambda E)^{-1}$  оператора  $\widetilde{L}$  (здесь  $\lambda$  — спектральный параметр, E — единичный оператор). Пусть  $z(x)=z(x,\lambda)=\widetilde{R}_{\lambda}F(x)$  (в дальнейшем для краткости аргумент  $\lambda$  в обозначении решений различных задач будем опускать). Тогда z(x) удовлетворяет задаче

$$Bz'(x) + P(x)z(x) - \lambda z(x) = F(x), \tag{3}$$

$$M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0. (4)$$

Положим  $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}$ , где  $b = \alpha - \widetilde{\omega}$ ,  $\widetilde{\omega} = \sqrt{\alpha^2 - 1}$  (числа  $\pm \widetilde{\omega}$  — собственные значения матрицы B). Тогда  $B\Gamma = \Gamma D^{-1}$ , где  $D^{-1} = \mathrm{diag}(\widetilde{\omega}, -\widetilde{\omega})$ . Выполнив в (3)–(4) замену  $z(x) = \Gamma u(x)$ , получим следующую задачу для u(x):

$$u'(x) + P_1(x)u(x) - \lambda Du(x) = F_1(x),$$
 (5)

$$M_0 \Gamma u(0) + M_1 \Gamma u(1) = 0, \tag{6}$$

где  $P_1(x) = D\Gamma^{-1}P(x)\Gamma$ ,  $F_1(x) = D\Gamma^{-1}F(x)$ ,  $D = \operatorname{diag}(\omega, -\omega)$  и  $\omega = 1/\widetilde{\omega}$ .

Далее проводится преобразование системы (5)–(6), заменяющее матрицу  $P_1(x)$  на матрицу, компоненты которой имеют оценку  $O(\lambda^{-1})$  (см., напр., [2, 3]).

**Лемма 1.** Существует преобразование  $u(x)=H(x,\lambda)v(x)$ , где  $H(x,\lambda)=H_0(x)+\lambda^{-1}H_1(x)$ ,  $H_0(x)$  — диагональная,  $H_1(x)$  — кодиагональная матрицы, приводящее систему (5)–(6) к виду

$$v'(x) + P(x,\lambda)v(x) - \lambda Dv(x) = H^{-1}(x,\lambda)F_1(x), \tag{7}$$

$$M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(1) = 0. (8)$$

Здесь  $H_0(x) = \operatorname{diag}(h_1(x), h_2(x)), h_1(x) = \exp\left\{-\omega\eta^{-1}\int_0^x r(t)\,dt\right\}, h_2(x) = \exp\left\{\omega\eta^{-1}\int_0^x r(1-t)\,dt\right\},$   $r(x) = q_1(x) - bq_2(1-x), q_1(x) = p_1(x) + bp_2(x), q_2(x) = bp_1(x) + p_2(x), \eta = 1 - b^2, P(x,\lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x,\lambda)[H'_1(x) + P_1(x)H_1(x)], M_{0\lambda} = M_0\Gamma H(0,\lambda), M_{1\lambda} = M_1\Gamma H(1,\lambda).$ 

**Доказательство.** Так же как в [2,3] строим матричную функцию  $H(x,\lambda)=H_0(x)+\lambda^{-1}H_1(x)$ , где элементы  $H_0(x)$  есть  $h_k(x)=\exp\left\{-\int\limits_0^x \widetilde{p}_{kk}(t)\,dt\right\}$  и  $\widetilde{p}_{kk}(x)$  — диагональные элементы матрицы  $P_1(x)$ , а  $H_1(x)$  — кодиагональная матрица, являющаяся решением матричного уравнения

$$H_0'(x) + P_1(x)H_0(x) + (H_1(x)D - DH_1(x)) = 0.$$

Вычислив непосредственно элементы  $\widetilde{p}_{kk}(x)$ , придем к утверждению леммы.  $\square$ 

**Лемма 2.** Имеет место соотношение  $h_2(1-x) = h_2(1)h_1(x)$ .



Так как  $h_2(1)=\exp\left\{\omega\int_0^1p_1(t)\,dt\right\}$ , то имеем

Следствие. Если  $\int\limits_0^1 p_1(t)\,dt=0$ , то  $h_1(1)=h_2(1)=1$  и  $h_2(1-x)=h_1(x)$ .

2. Исследуем решение следующей краевой задачи:

$$w'(x) - \mu \widetilde{D}w(x) = m(x), \tag{9}$$

$$U_0(w) = \widetilde{M}_0 w(0) + \widetilde{M}_1 w(1) = 0, \tag{10}$$

где  $m(x)=(m_1(x),m_2(x))^T,\ m_k(x)\in L[0,1],\ \mu=\lambda\omega,\ \widetilde{D}={\rm diag}(1,-1),\ \widetilde{M}_0=M_0\Gamma H_0(0),\ \widetilde{M}_1=M_1\Gamma H_0(1).$ 

Решая задачу (9)–(10) (как и в [2-4]), придем к утверждению

**Лемма 3.** Если  $\mu$  таково, что матрица  $\Delta_0(\mu)=U_0(V(x,\mu))$ , где  $V(x,\mu)=\mathrm{diag}\,(e^{\mu x},e^{-\mu x})$ , обратима, то краевая задача (9)–(10) однозначно разрешима при любой m(x) с компонентами из L[0,1], и ее решение  $w(x)=w(x,\mu)$  имеет вид

$$w(x,\mu) = R_{0\mu}m(x) = -V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_\mu m) + g_\mu m(x), \tag{11}$$

где  $g_{\mu}m(x)=\int\limits_{0}^{1}g(x,t,\mu)m(t)\,dt$ ,  $U_{0}(g_{\mu}m)=\int\limits_{0}^{1}U_{0x}(g(x,t,\mu))m(t)\,dt$ ,  $(U_{0x}$  означает, что  $U_{0}$  применяется  $\kappa$  g по переменной x),  $g(x,t,\mu)=\mathrm{diag}(g_{1}(x,t,\mu),g_{2}(x,t,\mu))$ ,  $g_{k}(x,t,\mu)=-\varepsilon(t,x)\exp\{(-1)^{k-1}\times (x-t)\}$ , при  $(-1)^{k-1}\operatorname{Re}\mu\geq 0$ ,  $g_{k}(x,t,\mu)=\varepsilon(x,t)\exp\{(-1)^{k-1}\mu(x-t)\}$ , при  $(-1)^{k-1}\operatorname{Re}\mu\leq 0$ ,  $\varepsilon(x,t)=1$ , если  $x\geq t$ ,  $\varepsilon(x,t)=0$ , если x< t.

Непосредственно вычисляя  $\Delta_0(\mu)$ , получим, что  $\det \Delta_0(\mu) = (b-\gamma)^2 h_1(1) e^\mu - (1-\gamma b)^2 h_2(1) e^{-\mu}$ . Всюду далее требуем выполнения условий регулярности

$$\gamma \neq b, \quad \gamma \neq b^{-1}. \tag{12}$$

Корни  $\det \Delta_0(\mu)$  есть числа  $\mu_k = k\pi i + \ln \alpha_1/2$  ( $k \in Z$ ), где  $\alpha_1 = (1-\gamma b)^2(b-\gamma)^{-2}h_2(1)/h_1(1)$ . Удаляя из комплексной  $\mu$ -плоскости эти корни вместе с круговыми окрестностями одного и того же радиуса  $\delta$ , получим область  $S_\delta$ , в которой справедлива оценка

$$|\det \Delta_0(\mu)| \ge c |e^{\mu \cdot \operatorname{sign}(\operatorname{Re} \mu)}|.$$

Образ области  $S_\delta$  в  $\lambda$ -плоскости обозначим  $\widetilde{S}_\delta$ .

**Лемма 4.** В области  $S_\delta$  для элементов  $\Delta_0^{-1}(\mu)=(x_{ij})_{i,j=1,2}$  имеют место оценки:

$$\begin{split} x_{11} &= O\left(e^{-2\mu}\right), \ x_{12} = O\left(e^{-\mu}\right), \ x_{21} = O\left(1\right), \ x_{22} = O\left(e^{-\mu}\right), \quad \textit{npu} \ \operatorname{Re} \mu \geq 0, \\ x_{11} &= O\left(1\right), \ x_{12} = O\left(e^{\mu}\right), \ x_{21} = O\left(e^{2\mu}\right), \ x_{22} = O\left(e^{\mu}\right), \quad \textit{npu} \ \operatorname{Re} \mu \leq 0. \end{split}$$

Так же как в [4, теорема 2] доказывается, что

$$||R_{0\mu}m||_{\infty} = O(||m||_1), \qquad ||R_{0\mu}\varphi||_{\infty} = O(\mu^{-1}),$$
 (13)

где  $\varphi(x)$  — вектор-функция, каждая компонента которой есть функция ограниченной вариации,  $\|\cdot\|_{\infty}$  и  $\|\cdot\|_1$  — нормы в пространствах  $L_{\infty}$  и L[0,1] соответственно.

Всюду далее будем обозначать через  $v(x,\lambda;\psi)$  решение задачи (7)–(8) с правой частью  $\psi(x)$ .

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$s'(x) - \mu \widetilde{D}s(x) = m(x), \tag{14}$$

$$U_1(w) = M_{0\lambda}s(0) + M_{1\lambda}s(1) = 0.$$
(15)

Ее решение  $s(x)=R_{1\mu}m(x)$  имеет вид (11), где  $U_0,~\Delta_0(\mu)$  заменяются на  $U_1,~\Delta_1(\mu)=U_1(V(x,\mu))$  соответственно. Так же как в [5, лемма 17] можно показать, что для элементов  $\Delta_1(\mu)$  справедливо представление  $\Delta_1(\mu)=([a_{ij}]+[b_{ij}]e^{\mu\omega_j})_{i,j=1}^2$ , где  $a_{ij},~b_{ij}$ — соответственно элементы матриц  $\widetilde{M}_0$  и  $\widetilde{M}_1$ ,



[a] = a + o(1),  $\omega_j = (-1)^{j-1}$ . Поэтому при выполнении условий регулярности (12) для решения задачи (14)–(15) имеем оценки, аналогичные (13), и так же как в [3, лемма 10] получаем, что

$$\lim_{r \to \infty} \left\| \int_{|\lambda| = r} H(x, \lambda) \left[ v\left(x, \lambda; H^{-1}(x, \lambda) m\right) - R_{1\mu}(H_0^{-1} m) \right] d\lambda \right\|_{\infty} = 0.$$
 (16)

Здесь и всюду далее интегрирование ведется по контурам  $|\lambda|=r$ , целиком находящимся в области  $\widetilde{S}_{\delta}$ . **Лемма 5.** Для любой функции m(x) с компонентами из L[0,1] и функции  $\varphi(x)$ , компоненты которой есть функции ограниченной вариации, справедливы соотношения:

$$||R_{1\mu}m - R_{0\mu}m||_{\infty} = O(\mu^{-1}||m||_1), \qquad ||R_{1\mu}\varphi - R_{0\mu}\varphi||_{\infty} = O(\mu^{-2}).$$
 (17)

**Доказательство.** Так как  $M_{0\lambda} = \widetilde{M}_0 + O(\lambda^{-1}), M_{1\lambda} = \widetilde{M}_1 + O(\lambda^{-1}),$  то  $U_1(g_\mu m(x)) = U_0(g_\mu m(x)) + O(\mu^{-1} \|m\|_1)$ . Поэтому, учитывая ограниченность  $V(x,\mu)\Delta_k^{-1}(\mu)$ , а также  $U_0(g_\mu m(x))$ , и то, что компоненты  $V(x,\mu)[\Delta_0^{-1}(\mu) - \Delta_1^{-1}(\mu)]$  есть  $O(\mu^{-1})$ , имеем

$$R_{1\lambda}m(x) - R_{0\mu}m(x) = V(x,\mu) \left[ \Delta_0^{-1}(\mu) - \Delta_1^{-1}(\mu) \right] U_0(g_\mu m(x)) + O(\mu^{-1} ||m||_1) = O(\mu^{-1} ||m||_1),$$

откуда следует первое соотношение в (17). Используя для  $\varphi(x)$  оценки  $g_{\mu}\varphi(x) = O(\mu^{-1})$ ,  $U_0(g_{\mu}\varphi(x)) = O(\mu^{-1})$  (доказательства оценок приведены, например, в [4, теорема 2]), получим второе соотношение в (17).  $\square$ 

Из леммы 5 по теореме Банаха – Штейнгауза получим, что

$$\lim_{r \to \infty} \left\| \int_{|\lambda| = r} \left[ H(x, \lambda) R_{1\mu} (H_0^{-1} m) - H_0(x) R_{0\mu} (H_0^{-1} m) \right] d\lambda \right\|_{\infty} = 0.$$
 (18)

Наконец, из (16) и (18) следует

**Лемма 6.** Для любой вектор-функции  $m(x)=(m_1(x),m_2(x))^T$ ,  $m_i(x)\in L[0,1]$  имеет место соотношение

$$\lim_{r \to \infty} \left\| \int_{|\lambda| = r} \left[ H(x, \lambda) v\left(x, \lambda; H^{-1}(x, \lambda) m\right) - H_0(x) R_{0\mu}(H_0^{-1} m) \right] d\lambda \right\|_{\infty} = 0.$$

Обозначим через  $\widetilde{R}_{0\lambda}$  резольвенту оператора  $D^{-1}w', U_0(w) = 0$ .

**Лемма 7.** Для любой функции  $f(x) \in L[0,1]$  имеет место соотношение

$$\lim_{r \to \infty} \left\| \int_{|\lambda| = r} \left[ \widetilde{R}_{\lambda} F - \Gamma H_0(x) \widetilde{R}_{0\lambda} (H_0^{-1} \Gamma^{-1} F) \right] d\lambda \right\|_{\infty} = 0,$$

 $где \ F - ma \ же \ вектор-функция, что и в теореме 1.$ 

**Доказательство.** Так как  $\widetilde{R}_{\lambda}F(x)=z(x)=\Gamma H(x,\lambda)v\left(x,\lambda;H^{-1}(x,\lambda)F_{1}\right)$ , где  $F_{1}=D\Gamma^{-1}F$ , то из леммы 6 получаем

$$\lim_{r \to \infty} \left\| \int_{|\lambda| = r} \left[ \widetilde{R}_{\lambda} F - \Gamma H_0(x) R_{0\mu} (H_0^{-1} D \Gamma^{-1} F) \right] d\lambda \right\|_{\infty} = 0.$$
 (19)

Так как  $w=\widetilde{R}_{0\lambda}m$  есть решение задачи (9)–(10) с правой частью Dm, то

$$R_{0\mu} = \widetilde{R}_{0\lambda} D^{-1}. \tag{20}$$

Из (19) и (20), учитывая перестановочность диагональных матриц  $H_0^{-1}$  и D, получим утверждение леммы  $\square$ .

**3.** Положим

$$\Omega_r(m) = \int_{|\lambda|=r} [Q(x)R_{0\mu}m - R_{0\mu}(Qm)] d\lambda,$$



где  $Q(x) = \operatorname{diag}(q(x), q(1-x)), \ q(x)$  удовлетворяет условию Липшица порядка 1 и q(0) = q(1) = 1.

**Лемма 8.** Имеет место оценка 
$$\left\| \int\limits_{|\lambda|=r} \left[ Q(x) g_{\mu} m(x) - g_{\mu}(Qm(x)) \right] \, d\lambda \, \right\|_{\infty} = O\left(\|m\|_1\right).$$

**Доказательство.** Для первой компоненты данного вектора (учитывая, что  $\mu = \lambda \omega$ ) имеем

$$\left| \int\limits_{|\lambda|=r} [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 d\lambda \right| \leq \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| \cdot |d\mu| = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{|\mu|=r_1} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}$$

$$= \frac{1}{|\omega|} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \right\} \left| [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 \right| r_1 d\varphi, \tag{21}$$

где  $r_1=r|\omega|$ . Пусть  $\mathrm{Re}\,\mu\geq 0$ . В этом случае  $g_\mu m(x)=\left(-\int\limits_x^1 e^{\mu(x-t)}m_1(t)\,dt,\int\limits_0^x e^{-\mu(x-t)}m_2(t)\,dt\right)^T$ . Тогда первый интеграл в (21) имеет следующую оценку:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r_1 \, d\varphi \left| \int_{x}^{1} e^{\mu(x-t)} (q(x) - q(t)) m_1(t) \, dt \right| = O\left( \int_{x}^{1} |m_1(t)| \, dt \int_{0}^{\pi/2} r_1 e^{r_1 \cos \varphi(x-t)} |x - t| \, d\varphi \right) = O\left( \int_{x}^{1} |m_1(t)| \, dt \int_{0}^{\pi r_1(t-x)/2} e^{-c_1 \xi} \, d\xi \right) = O\left( ||m||_1 \right)$$

(здесь использованы замена  $\varphi=\pi/2-\tau$ , оценка  $\sin\tau\geq c_1\tau$ , при  $\tau\in(0,\pi/2)$ , где  $c_1$  — некоторая константа  $0< c_1<2/\pi$ , и замена  $\xi=r_1(t-x)$ ).

Аналогично оцениваются второй интеграл в (21) (при  ${\rm Re}\,\mu \leq 0$ ) и вторая компонента вектора, указанного в условии.  $\square$ 

Непосредственно вычисляя компоненты матриц в (11), получим

**Лемма 9.** Если  $\text{Re } \mu > 0$ , то имеет место соотношение:

$$Q(x)V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_{\mu}m) - V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_{\mu}(Qm)) = ((\gamma b - 1)(J_1 + J_2), (\gamma b - 1)(J_3 + J_4))^T,$$

где

$$J_1(x,\mu) = x_{11}e^{\mu x} \int\limits_0^1 e^{-\mu t} (q_1(x) - q_1(t)) m_1(t) \, dt, \quad J_2(x,\mu) = x_{12}h_2(1)e^{\mu x} \int\limits_0^1 e^{-\mu(1-t)} (q_1(x) - q_2(t)) m_2(t) \, dt,$$
 
$$J_3(x,\mu) = x_{21}e^{-\mu x} \int\limits_0^1 e^{-\mu t} (q_2(x) - q_1(t)) m_1(t) \, dt, \quad J_4(x,\mu) = x_{22}h_2(1)e^{-\mu x} \int\limits_0^1 e^{-\mu(1-t)} (q_2(x) - q_2(t)) m_2(t) \, dt,$$
 
$$x_{ij} - \text{элементы} \ \Delta_0^{-1}(\mu), \ q_1(x) = q(x), \ q_2(x) = q(1-x) - \text{элементы матрицы} \ Q(x).$$

Лемма 10. Имеют место следующие оценки:

$$\int_{\substack{|\mu|=r_1\\\text{Re }\mu\geq 0}} J_k(x,\mu) \, d\mu = O(\|m\|_1), \quad k = \overline{1,4}.$$
 (22)

**Доказательство.** Продолжим функцию q(x) (соответственно  $q_1(x)$  и  $q_2(x)$ ) периодически с периодом 1. Так как q(0)=q(1), то полученная функция непрерывна и удовлетворяет условию Липшица. Докажем (22) для  $J_2(x,\mu)$ . Имеем

$$\left| \int_{\substack{|\mu|=r_1\\ |\mu|=r_2\\ |\mu$$

Используя периодичность q(x), оценки из леммы 4 ( $x_{12} = O(e^{-\mu})$ ), и неравенство  $\sin \tau \ge c_1 \tau$  (так же как в лемме 8), получим



$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\operatorname{Re}\mu(2-x-t)} |q(x) - q(1-t)| r_1 d\varphi = O\left(\int_{0}^{\pi/2} e^{-r_1 c_1 \varphi(2-x-t)} |q(x) - q(2-t)| r_1 d\varphi\right) = O\left(\int_{0}^{\pi/2} e^{-r_1 c_1 \varphi(2-x-t)} (2-x-t) r_1 d\varphi\right) = O\left(\int_{0}^{\pi/2} e^{-r_1 c_1 \varphi(2-x-t)} (2-x-t) r_1 d\varphi\right) = O\left(\int_{0}^{\pi/2} e^{-c_1 \xi} d\xi\right) = O(1).$$

Отсюда следует справедливость (22) для k=2. Также доказывается (22) для остальных интегралов.  $\square$  Из (11), леммы 8, лемм 9, 10 (и аналогичных им лемм при  $\operatorname{Re} \mu \leq 0$ ) следует

Лемма 11. Если  $\gamma \neq b$ ,  $\gamma \neq b^{-1}$ , то  $\|\Omega_r(m)\|_{\infty} = O(\|m\|_1)$ .

**Лемма 12.** Пусть компоненты вектора  $\widetilde{D}^{-1}m$  имеют ограниченную производную и  $U_0(\widetilde{D}^{-1}m)=0$ . Тогда  $Q(x)R_{0\mu}m-R_{0\mu}(Qm)=\mu^{-1}\left[Q(x)R_{0\mu}((\widetilde{D}^{-1}m)')-R_{0\mu}((\widetilde{D}^{-1}Qm)')\right]$ .

**Доказательство.** Пусть  $\widetilde{R}_{\mu}^{0}$  — резольвента оператора  $\widetilde{D}^{-1}w',\ U_{0}(w)=0.$  Тогда  $R_{0\mu}m=\widetilde{R}_{\mu}^{0}(\widetilde{D}^{-1}m).$ 

Пусть m удовлетворяет условиям леммы и  $U_0(\widetilde{D}^{-1}m)=0$ . Обозначим  $\widetilde{D}^{-1}(\widetilde{D}^{-1}m)'-\mu\widetilde{D}^{-1}m=g$ . Тогда  $\widetilde{D}^{-1}m=\widetilde{R}^0_\mu g=\widetilde{R}^0_\mu(\widetilde{D}^{-1}(\widetilde{D}^{-1}m)')-\mu\widetilde{R}^0_\mu(\widetilde{D}^{-1}m)$ , откуда  $\widetilde{R}^0_\mu(\widetilde{D}^{-1}m)=\mu^{-1}[\widetilde{R}^0_\mu(\widetilde{D}^{-1}(\widetilde{D}^{-1}m)')-\widetilde{D}^{-1}m]$ , или

$$R_{0\mu}m = \mu^{-1}[R_{0\mu}((\tilde{D}^{-1}m)') - \tilde{D}^{-1}m]. \tag{23}$$

Так как q(0)=q(1)=1, то Q(0)=Q(1)=E и  $U_0(\widetilde{D}^{-1}Qm)=0$ . Поэтому так же как (23) получим

$$R_{0\mu}(Qm) = \mu^{-1}[R_{0\mu}((\widetilde{D}^{-1}Qm)') - \widetilde{D}^{-1}Qm]. \tag{24}$$

Учитывая перестановочность диагональных матриц  $\widetilde{D}^{-1}$  и Q(x), из (23) и (24) получим утверждение леммы.  $\square$ 

Так же как в [4, теорема 2] доказывается

Лемма 13. Если т удовлетворяет условиям леммы 12, то

$$||R_{0\mu}((\widetilde{D}^{-1}m)')||_{\infty} = O(\mathfrak{E}(|\operatorname{Re}\mu|)), \qquad ||R_{0\mu}((\widetilde{D}^{-1}Qm)')||_{\infty} = O(\mathfrak{E}(|\operatorname{Re}\mu|)),$$

где  $x(y) = (1 - e^{-y})/y$  при y > 0.

**Теорема 2.** Если  $\gamma \neq b$  и  $\gamma \neq b^{-1}$ , то для любой функции m(x) с компонентами из L[0,1]

$$\lim_{r \to \infty} \|\Omega_r(m)\|_{\infty} = 0. \tag{25}$$

**Доказательство.** Пусть m удовлетворяет условиям леммы 12. Тогда, учитывая оценки из леммы 13, можно показать (так же как в [4, теорема 3]), что

$$\|\Omega_{r}(m)\|_{\infty} = O\left(\int_{|\mu|=r_{1}} \frac{|\underline{\mathbf{x}}(|\operatorname{Re}\mu|)|}{|\mu|} |d\mu|\right) = O\left(\frac{1}{r} \int_{0}^{\pi/2} \frac{1 - e^{-r_{1}\varphi}}{r_{1}\varphi} r_{1} d\varphi\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{r} \int_{0}^{\pi r_{1}/2} \frac{1 - e^{-\xi}}{\xi} d\xi\right) = O\left(\frac{1}{r} + \frac{\ln r}{r}\right). \tag{26}$$

Так как множество таких m(x) всюду плотно в  $L^2[0,1]$  ( $L^2[0,1]$  — множество интегрируемых векторфункций размерности 2), то из (26) и леммы 11 по теореме Банаха — Штейнгауза следует (25).  $\square$ 

**Следствие.** Для любой функции m(x) с компонентами из L[0,1]

$$\lim_{r\to\infty} \left\| \int\limits_{|\lambda|=r} \left[ Q(x) \widetilde{R}_{0\lambda} m - \widetilde{R}_{0\lambda} (Qm) \right] d\lambda \right\|_{\infty} = 0.$$

4. Перейдем к основным результатам статьи.

**Теорема 3.** Пусть  $\gamma \neq b$ ,  $\gamma \neq b^{-1}$ . Тогда для любой вектор-функции  $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$ ,  $f(x) \in L[0,1]$  имеет место соотношение



$$\lim_{r \to \infty} \|\widetilde{S}_r(F, x) - \widetilde{S}_r^0(F, x)\|_{\infty} = 0, \tag{27}$$

где  $\widetilde{S}_r(F,x)$   $(\widetilde{S}^0_r(F,x))$  — частичная сумма ряда Фурье вектор-функции F(x) по с.п.ф. оператора  $\widetilde{L}$   $(\widetilde{L}_0)$ , включающая слагаемые, соответствующие собственным значениям  $\lambda_k$   $(\lambda_k^0)$ , для которых  $|\lambda_k| < r$   $(|\lambda_k^0| < r)$ .

**Доказательство.** Имеем  $\widetilde{S}_r(F,x)=-rac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\widetilde{R}_\lambda F\,d\lambda$  (аналогичная формула для  $\widetilde{S}_r^0(F,x)$ ).

1. Пусть сначала  $\int\limits_0^1 p_1(t)\,dt=0$ . По следствию из леммы 2 в этом случае  $H_0(x)={
m diag}(h_1(x),h_1(1-x)),\ h_1(0)=h_1(1)=1$ . Поэтому теорема 2 справедлива, если в качестве Q(x) взять  $H_0(x)$ . Тогда, используя лемму 7 и следствие из теоремы 2, имеем

$$\int_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_{\lambda} F \, d\lambda = \int_{|\lambda|=r} \Gamma H_0(x) \widetilde{R}_{0\lambda} (H_0^{-1} \Gamma^{-1} F) \, d\lambda + o(1) = \int_{|\lambda|=r} \Gamma \widetilde{R}_{0\lambda} (\Gamma^{-1} F) \, d\lambda + o(1), \tag{28}$$

где  $\|o(1)\|_{\infty} \to 0$  при  $r \to \infty$ . Так как в краевых условиях (10)  $H_0(0) = H_0(1) = E$  (E — единичная матрица), то для  $w = \widetilde{R}_{0\lambda} m$  имеет место

$$D^{-1}w'(x) - \lambda w(x) = m(x), (29)$$

$$M_0 \Gamma w(0) + M_1 \Gamma w(1) = 0. \tag{30}$$

Умножая (29) слева на  $\Gamma$  и учитывая, что  $B=\Gamma D^{-1}\Gamma^{-1}$ , получим  $B(\Gamma w)'-\lambda(\Gamma w)=\Gamma m$ , Откуда  $\Gamma w=\widetilde{R}^0_\lambda(\Gamma m)$  ( $\widetilde{R}^0_\lambda-$  резольвента  $\widetilde{L}_0$ ). Тогда  $\Gamma \widetilde{R}_{0\lambda}(\Gamma^{-1}F)=\widetilde{R}^0_\lambda(F)$ , и из (28) получаем

$$\int_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_{\lambda} F \, d\lambda = \int_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_{\lambda}^{0} F \, d\lambda + o(1),$$

откуда следует утверждение теоремы.

2. Пусть теперь  $\int\limits_0^1 p_1(t)\,dt=a\neq 0$ . Контуры, по которым ведется интегрирование в (27), целиком располагаются в области  $\widetilde{S}_\delta$ , образованной из  $\lambda$ -плоскости удалением чисел  $\lambda_k=\mu_k/\omega=(2k\pi i+\ln\alpha_1)/2\omega$  вместе с некоторыми окрестностями (образами круговых окрестностей радиуса  $\delta$  точек  $\mu_k$ ). В любом кольце  $r-d\leq |\lambda|\leq r+d$  (d>0) количество таких окрестностей ограниченно константой, не зависящей от r. Следовательно, количество слагаемых в  $\widetilde{S}_r(F,x)$ , соответствующих этому кольцу, ограничено. Пусть  $\gamma_k\in\widetilde{S}_\delta$  — круговой контур из указанного кольца достаточно малого радиуса  $\delta_0$  с центром в  $\lambda_k$ . Докажем, что

$$\lim_{k \to \infty} \left\| \int_{\gamma_k} \widetilde{R}_{\lambda} F \, d\lambda \right\|_{\infty} = 0. \tag{31}$$

Нетрудно показать (как, например, в [3]), что

$$\widetilde{R}_{\lambda}F = \Gamma H(x,\lambda)v\left(x,\lambda;H^{-1}(x,\lambda)F_{1}\right) = \Gamma H_{0}(x)R_{0\mu}(H_{0}^{-1}F_{1}) + O(\lambda^{-1}\|f\|_{1}),$$

откуда, учитывая оценку (13), получим, что  $\|\widetilde{R}_{\lambda}F\|_{\infty} = O(\|f\|_1)$  для любой функции  $f \in L[0,1]$ , и

$$\left\| \int_{-\infty} \widetilde{R}_{\lambda} F \, d\lambda \right\|_{\infty} = O(\|f\|_1). \tag{32}$$

Пусть теперь  $f(x) \in C^1[0,1]$  и  $f(0) = \gamma f(1)$ . Тогда, положив Lf = g, из  $Lf - \lambda f = g - \lambda f$  получим

$$R_{\lambda}f = -\frac{f}{\lambda} + \frac{R_{\lambda}g}{\lambda}.$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_{\gamma_h} R_\lambda f \, d\lambda\right| = \left|\int\limits_{\gamma_h} \frac{R_\lambda g}{\lambda} \, d\lambda\right| = \left|\int\limits_{\gamma_h} (\widetilde{R}_\lambda G)_1 \frac{d\lambda}{\lambda}\right| = O\left(\int\limits_{\gamma_h} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|}\right) = o(1), \quad \text{при } k \to \infty,$$



(здесь  $G(x) = (g(x), g(1-x))^T$ ). Отсюда и из (32) следует (31). А следовательно,

$$\left\| \int_{|\lambda|=r+d} \widetilde{R}_{\lambda} F \, d\lambda - \int_{|\lambda|=r-d} \widetilde{R}_{\lambda} F \, d\lambda \right\|_{\infty} = o(1), \quad \text{при } r \to \infty.$$
 (33)

Рассмотрим оператор

$$L_1y = y'(1-x) + \alpha y'(x) + \widetilde{p}_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x), \quad y(0) = \gamma y(1),$$

где  $\widetilde{p}_1(x) = p_1(x) - a$ , который порождает оператор

$$\widetilde{L}_1 z = B z'(x) + \widetilde{P}(x) z(x), \quad M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0$$

(матрица  $\widetilde{P}(x)$  определяется через  $\widetilde{p}_1(x)$ ,  $p_2(x)$  так же как P(x) в (1)). Тогда  $\int\limits_0^1 \widetilde{p}_1(t)\,dt=0$ , и

$$\int\limits_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_{\lambda}^1 F \, d\lambda = \int\limits_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_{\lambda}^0 F \, d\lambda + o(1),$$

где  $\widetilde{R}^1_{\lambda}$  — резольвента оператора  $\widetilde{L}_1$ . Так как  $R_{\lambda}f=R^1_{\lambda+a}f$  ( $R^1_{\lambda}$  — резольвента  $L_1$ ) и соответственно  $\widetilde{R}_{\lambda}F=\widetilde{R}^1_{\lambda+a}F$ , то в силу (31) и (33)

$$\begin{split} \int\limits_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_{\lambda}^1 F \, d\lambda &= \int\limits_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_{\lambda+a}^1 F \, d\lambda = \int\limits_{|\lambda-a|=r} \widetilde{R}_{\lambda}^1 F \, d\lambda = \int\limits_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_{\lambda}^1 F \, d\lambda - \int\limits_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_{\lambda}^1 F \, d\lambda + \int\limits_{|\lambda-a|=r} \widetilde{R}_{\lambda}^1 F \, d\lambda = \int\limits_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_{\lambda}^1 F \, d\lambda + \int\limits_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_{\lambda}^1 F \, d\lambda + \int\limits_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_{\lambda}^1 F \, d\lambda + o(1) = \int\limits_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_{\lambda}^1 F \, d\lambda + o(1) = \int\limits_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_{\lambda}^1 F \, d\lambda + o(1), \end{split}$$

откуда следует соотношение (27) для  $\widetilde{R}_{\lambda}F$ .  $\square$ 

Учитывая, что согласно теореме 1,  $R_\lambda f=[\widetilde{R}_\lambda F]_1$ ,  $R_\lambda^0 f=[\widetilde{R}_\lambda^0 F]_1$ , получим

**Теорема 4.** Пусть  $\gamma \neq b$ ,  $\gamma \neq b^{-1}$ ,  $b = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$ . Тогда для любой функции  $f(x) \in L[0,1]$  имеет место соотношение

$$\lim_{r \to \infty} ||S_r(f, x) - S_r^0(f, x)||_{\infty} = 0,$$

где  $S_r(f,x)$   $(S_r^0(f,x))$  — частичная сумма ряда Фурье функции f(x) по с.п.ф. оператора L  $(L_0)$ , включающая слагаемые, соответствующие собственным значениям  $\lambda_k$   $(\lambda_k^0)$ , для которых  $|\lambda_k| < r$   $(|\lambda_k^0| < r)$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке  $P\Phi\Phi U$  (проект 07-01-00397) и гранта для государственной поддержки ведущих научных школ  $P\Phi$  (проект HШ-2970.2008.1).

### Библиографический список

- 1. Stone M.H. A comparison of the series of Fourier and Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. 1926. Vol. 28, N 4. P. 695–761.
- 2. Бурлуцкая М.Ш., Курдюмов В.П., Луконина А.С., Хромов А.П. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией // Докл. РАН. 2007. Т. 414, № 4. С. 443–446.
- 3. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора первого порядка на
- графе из двух ребер, содержащем цикл // Диф. уравнения. 2007. Т. 43, № 12. С. 1597–1605.
- 4. *Корнев В.В., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сборник. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.
- 5. *Хромов А.П*. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сборник. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142.



УДК 514.7

# КЛАСС ВСЕХ ГЛАДКИХ ЕДИНИЧНЫХ АКСИАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ, ПРОДОЛЬНО ВИХРЕВЫХ В $\mathbb{R}^3$

### В.П. Верещагин, Ю.Н. Субботин\*, Н.И. Черных\*

Российский государственный профессиональнопедагогический университет, Екатеринбург; \*Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, E-mail: yunsub@imm.uran.ru, Nikolai.Chernykh@imm.uran.ru

Методом отображений конструируются два класса полей. Первый исчерпывает единичные аксиально симметричные решения (EACP) задачи Громеки о нахождении векторного поля, линии которого совпадают с линиями поля его ротора. Второй исчерпывает гладкие в  $R^3$  EACP расширенной в этой работе задачи Громеки о векторном поле с разными в смежных областях вихревыми свойствами.

Ключевые слова: скалярные и векторные поля, ротор.



The Full Class of Smooth Axially Symmetric Longitudinal-Vortex Unit Vector Fields

### V.P. Vereshchagin, Yu.N. Subbotin, N.I. Chernykh

Russian State Professional – Pedagogical University, Ekaterinburg; \*Institute of Mathematics and Mechanics,

Ural Branch of RAS, Ekaterinburg

E-mail: yunsub@imm.uran.ru, Nikolai.Chernykh@imm.uran.ru

In the paper, two vector fields are constructed by means of transformation method. The first describes the axially symmetric unit solutions (ASUS) of the Gromeka problem to find out vector fields which flow lines coincide in  $\mathbb{R}^3$  with vortex lines. The second describes the smooth ASUS of the extended in this paper Gromeka problem of finding a vector fields with different vortex properties in adjacent parts of  $\mathbb{R}^3$ .

Key words: scalar and vector fields, curl.

В [1] предложен метод построения в области  $D\subset R^3$  единичных векторных полей  $\{\beta: \beta\in C^{(1)}(D), \ {\rm rot}\beta\neq 0\ {\rm п.\, в.}\ {\rm в.\, }D,\ [\beta, {\rm rot}\beta]=0,\ |\beta|=1\ {\rm в.\, }D\}:=\mathfrak{L}_u(D).$  Символами [a,b] и (a,b) в работе обозначаются соответственно векторное и скалярное произведения векторов a,b. Линии поля  $\beta$  по определению класса  $\mathfrak{L}_u(D)$  всюду в D совпадают с его вихревыми линиями (линиями поля  ${\rm rot}\,\beta$ ). Для краткости в [1] такие поля названы продольно вихревыми в D. Задача этой работы — найти, в отличие от [2], класс  $C^{(1)}(R^3,\mathfrak{L}_{\rm uas}(R^3))$  всех гладких единичных векторных полей, продольно вихревых в  $R^3$  и аксиально симметричных. Результаты ее интересны в связи с расширением класса решений задачи И.С. Громеки [3] о векторном поле, линии которого совпадают с его вихревыми линиями.

**1.** Пусть  $\{i_1,i_2,i_3\}$  — базис декартовой системы координат в  $R^3$  с началом в точке O,  $\Pi$  — плоскость, ортогональная  $i_3$  и проходящая через начало O, X и  $\xi$  — радиус-векторы произвольной точки из  $R^3$  и плоскости  $\Pi$ ,  $\psi(\xi)$ ,  $\Phi(\xi)$  — достаточно гладкие скалярные поля, заданные в  $\Pi$ ,  $\widehat{\Omega}(\xi) = \widehat{\Omega}(\psi(\xi), l(\xi))$  — тензорное поле, которое, действуя на вектор  $g(\xi)$ , поворачивает его на угол  $\psi(\xi)$  вокруг оси, проходящей через точку  $\xi$  и задаваемой ортом

$$l(\xi) = l(\Phi(\xi)) = i_1 \cos \Phi(\xi) + i_2 \sin \Phi(\xi). \tag{1}$$

Тогда, следуя [1], можно утверждать, что векторное поле

$$\beta(X) = t(\xi(X)) = t(\psi(\xi(X)), \Phi(\xi(X))) \tag{2}$$

принадлежит классу  $\mathfrak{L}_{n}(R^{3})$ , его линии прямолинейны, если:

1) t как функция  $\xi \in \Pi$  есть гладкое отображение поля  $g(\xi) \equiv i_3$ :

$$t(\xi) = \widehat{\Omega}(\xi)g(\xi) = i_3 \cos \psi(\xi) + [l(\xi), i_3] \sin \psi(\xi); \tag{3}$$

2) зависимость координат  $\xi_1=\xi_1(X),\ \xi_2=\xi_2(X)$  вектора  $\xi$  от  $X\in R^3$  определяется не явно системой уравнений

$$(X - \xi, [l(\xi), t(\xi)]) = 0, \qquad (X - \xi, l(\xi)) = 0;$$
 (4)

- 3)  $\xi_1(X)$ ,  $\xi_2(X)$  непрерывно дифференцируемы в  $R^3$ ;
- 4) скалярное поле

$$(i_3, [\partial/\xi, t(\xi)]) \neq 0$$
 п. в. в П,  $(\partial/\partial \xi = i_1 \partial/\partial \xi_1 + i_2 \partial/\partial \xi_2)$ . (5)



Оговариваемые условия должны быть конкретизированы, если интересоваться полями (2), аксиально симметричными относительно некоторой оси. Пусть это будет ось  $OX_3$ , а  $\widehat{\omega}=\widehat{\omega}(\gamma,i_3)$  — оператор поворота на угол  $\gamma$  вокруг оси  $OX_3$ .

Каждая из линий поля  $\beta(X)$  (2) есть [1] прямая  $\Gamma(\xi)$ , проходящая через точку  $\xi$  плоскости  $\Pi$  в направлении  $t(\xi)$  и задаваемая уравнением  $X = \xi + st(\xi)$  ( $-\infty < s < +\infty$ ). Поэтому самосовместимость линий аксиально симметричного относительно оси  $OX_3$  поля  $\beta(X)$  (2) означает, что

$$\widehat{\omega}(\gamma, i_3)\beta(X) = \beta(\widehat{\omega}(\gamma, i_3)X), \qquad \widehat{\omega}(\gamma, i_3)t(\xi) = t(\widehat{\omega}(\gamma, i_3)\xi), \tag{6}$$

при любом X и любом  $\gamma$ , где  $\xi$  — радиус-вектор точки пересечения плоскости  $\Pi$  линией  $\Gamma(\xi)$  поля  $\beta$ , проходящей через точку X. Согласно (6), для построения поля  $\beta(X)$  (2), аксиально симметричного относительно оси  $OX_3$ , требуется отображение (3), аксиально симметричное относительно оси  $OX_3$ .

Класс отображений (3) поля  $g\equiv i_3$  задается посредством скалярных полей  $\psi(\xi), \ \Phi(\xi)$ :  $t(\xi)=t(\psi(\xi),\Phi(\xi))$ . Для аксиальной симметрии (3) нужно, чтобы для любого  $\xi$  при любом  $\gamma$  выполнялся закон

$$\widehat{\omega}(\gamma, i_3) t(\psi(\xi), \Phi(\xi)) = t(\widehat{\omega}(\gamma, i_3)\xi). \tag{7}$$

Установим, какие поля  $\psi(\xi)$ ,  $\Phi(\xi)$  совместимы с (7).

**2.** Перейдем от декартовых координат  $\xi_1, \xi_2$  и  $X_1, X_2, X_3$  в П и в  $R^3$  к полярным —  $\rho, \vartheta$  и цилиндрическим —  $r, \theta, z$  координатам с базисами  $\{i_{\rho}(\vartheta), i_{\vartheta}(\vartheta)\}$  и  $\{i_{r}(\theta), i_{\theta}(\theta), i_{z} = i_{3}\}$ . Так, в частности, найдем  $\xi = \xi(\rho, \vartheta) = \rho i_{\rho}(\vartheta), \ X = X(r, \theta, z) = r i_{r}(\theta) + z i_{z}$ . Далее из (7) при  $\gamma = \vartheta, \ \xi = \xi_0$ , где  $\xi_0 = \xi(\rho, 0)$ , выражаем  $t(\xi) = \widehat{\omega}(\vartheta, i_{3})t(\psi(\xi_0), \Phi(\xi_0))$ , учитывая, что  $\widehat{\omega}(\vartheta, i_{3})\xi_0 = \xi(\rho, \vartheta) = \xi$ . Отсюда, используя формулы (3), (1), взятые при  $\xi = \xi_0$ , для любого  $\xi$  получаем

$$t(\xi) = t(\psi(\xi), \Phi(\xi)) \Big|_{\substack{\psi(\xi) = \psi(\xi_0), \\ \Phi(\xi) = \Phi(\xi_0) + \vartheta}},$$
(8)

где  $\psi(\xi_0) = \psi(\xi(\rho, 0)) = \psi(\rho), \ \Phi(\xi_0) = \Phi(\xi(\rho, 0)) = \varphi(\rho).$ 

Итак, поля  $\psi(\xi)$ ,  $\Phi(\xi)$  ( $\xi = \xi(\rho, \vartheta)$ ), совместимые с (7), должны иметь вид:  $\psi(\rho, \vartheta) = \psi(\rho)$ ,  $\Phi(\rho, \vartheta) = \varphi(\rho) + \vartheta$ . Принимая это во внимание, сформулируем

**Предложение 1.** Единичное векторное поле  $t(\xi)$  принадлежит классу полей, аксиально симметричных относительно оси  $OX_3$ , если и только если зависимость t от координат  $\rho, \vartheta$  точек  $\xi$  плоскости  $\Pi$  устанавливается отображением  $\widehat{\Omega}(\xi) = \widehat{\Omega}(\psi(\xi), \Phi(\xi))$  поля  $g(\xi) \equiv i_3$ , где

$$\psi(\xi) = \psi(\xi(\rho, \vartheta)) = \psi(\rho), \qquad \Phi(\xi) = \Phi(\xi(\rho, \vartheta)) = \varphi(\rho) + \vartheta. \tag{9}$$

В явном виде эта зависимость выражается формулой

$$t(\xi(\rho,\vartheta)) = [i_{\rho}(\vartheta)\sin\varphi(\rho) - i_{\vartheta}(\vartheta)\cos\varphi(\rho)]\sin\psi(\rho) + i_{z}\cos\psi(\rho). \tag{10}$$

Формула (10) выводится из (8) с помощью (3), (1) и формул перехода к криволинейным координатам.

**Замечание 1.** Функции  $\psi(\rho,\vartheta) \equiv m\pi$  в  $\Pi$   $(m \in \mathbb{Z})$  не представляют интереса, так как их использование не расширяет класс отображений поля  $g(\xi(\rho,\vartheta)) \equiv i_z$  в аксиально симметричные поля. Действительно, при  $\psi(\rho,\vartheta) \equiv m\pi$  и произвольной функции  $\Phi(\rho,\vartheta)$  имеем  $t(\xi(\rho,\vartheta)) \equiv (-1)^m i_z$ .

При аксиально симметричном поле  $t(\xi)$  аксиально симметрично (зависит только от  $\rho$ ) и скалярное поле  $(i_3, [\partial/\partial \xi, t(\xi)])$  (см. (5)). Действительно, с помощью (9) и формул  $\partial/\partial \xi = i_{\rho}(\vartheta)\partial/\partial \rho + i_{\vartheta}(\vartheta)\rho^{-1}\partial/\partial \vartheta$ , выводим

$$\frac{\partial}{\partial \rho} t(\xi(\rho, \vartheta)) = i_{\rho}(\vartheta) [\varphi'(\rho) \cos \varphi(\rho) \sin \psi(\rho) + \psi'(\rho) \sin \varphi(\rho) \cos \psi(\rho)] +$$

$$+i_{\vartheta}(\vartheta)[\varphi'(\rho)\sin\varphi(\rho)\sin\psi(\rho)-\psi'(\rho)\cos\varphi(\rho)\cos\psi(\rho)]-i_{z}\psi'(\rho)\sin\psi(\rho),\tag{11}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \vartheta} t(\xi(\rho, \vartheta)) = [i_{\rho}(\vartheta) \cos \varphi(\rho) + i_{\vartheta}(\vartheta) \sin \varphi(\rho)] \frac{\sin \psi(\rho)}{\rho}, \tag{12}$$



$$\left(i_3, \left[\partial/\partial \xi, t(\xi)\right]\right)\Big|_{\xi=\xi(\rho,\vartheta)} = R_3(\rho), \qquad R_3(\rho) = -\rho^{-1} \left[\rho\cos\varphi(\rho)\sin\psi(\rho)\right]'. \tag{13}$$

Детальное обсуждение требований непрерывности поля (10) и его производных всюду в плоскости П удобно пока отложить. Здесь же сформулируем

Замечание 2. Для непрерывности поля (10) всюду в плоскости П необходимы: непрерывность функции  $\psi(\rho)$  при всех  $\rho \geq 0$  и равенство  $\psi(0) = n\pi, \ n \in \mathbb{Z}$ . Для непрерывности производной поля (10) в П по любому направлению необходимо и достаточно непрерывности полей (11), (12) при любых  $\rho \geq 0$ .

**3.** Выявим обусловленные аксиальной симметрией (см. (6)) особенности зависимости поля  $\beta$  от координат  $r, \theta, z$  точек  $X = X(r, \theta, z)$  пространства  $R^3$ .

Из (6) при  $\gamma=\theta,\ X=X_0$ , где  $X_0=X(r,0,z)$ , выражаем  $\beta(X)=\widehat{\omega}(\theta,i_3)\beta(X_0)$ , учитывая, что  $\widehat{\omega}(\theta,i_3)X_0=X(r,\theta,z)=X.$  Отсюда, используя формулы (2), (3), взятые при  $X=X_0$ , получаем

$$\beta(X) = t(\psi(\xi(X)), \Phi(\xi(X))) \Big|_{\substack{\psi(\xi(X)) = \psi(\xi(X_0)), \\ \Phi(\xi(X)) = \Phi(\xi(X_0)) + \theta}},$$
(14)

где  $\psi(\xi(X_0)) = \psi(\rho(X_0)) = \psi(\rho(r,0,z)), \ \Phi(\xi(X_0)) = \varphi(\rho(X_0)) + \vartheta(X_0) = \varphi(\rho(r,0,z)) + \vartheta(r,0,z).$  Примем обозначения  $\beta(X) = \beta(X(r,\theta,z)) = \beta(r,\theta,z), \ \rho(r,0,z) = \rho(r,z), \ \vartheta(r,0,z) = f(r,z).$  Тогда формулу (14) можно выразить в виде

$$\beta(r,\theta,z) = t(\psi(\xi(X)), \Phi(\xi(X))) \Big|_{\substack{\psi(\xi(X)) = \psi(\rho(r,z)), \\ \Phi(\xi(X)) = \varphi(\rho(r,z)) + f(r,z) + \theta}}.$$
(15)

Зависимость переменных  $\rho,f$  в (15) от r,z определяется не явно системой

$$\begin{cases}
 \{r\sin[f + \varphi(\rho)] - \rho\sin\varphi(\rho)\}\cos\psi(\rho) - z\sin\psi(\rho) = 0, \\
 r\cos[f + \varphi(\rho)] - \rho\cos\varphi(\rho) = 0.
\end{cases}$$
(16)

Такой вид приобретает система (4), если в (4) исключить l и t с помощью (1) и (3), перейти к криволинейным координатам в  $\Pi$  и  $R^3$ , учесть формулы (9) и выполнить замену  $\vartheta=\theta+f$ , где  $0\leq \theta<2\pi$ ,  $-\pi< f\leq \pi$ .

Исходя из предложения 1, формул (16), условия (5), выражаемого в полярных координатах через (13), заключаем

**Предложение 2.** Соответствие  $X(r,\theta,z) \to \beta(X) = \beta(r,\theta,z)$  определяет в  $R^3$  единичное векторное поле, отвечающее условиям аксиальной симметрии и условию (5), если только это соответствие устанавливается правилом

$$\beta(r,\theta,z) = \left\{ i_r(\theta) \sin[f + \varphi(\rho)] \sin \psi(\rho) - i_{\theta}(\theta) \cos[f + \varphi(\rho)] \sin \psi(\rho) + i_z \cos \psi(\rho) \right\} \Big|_{\substack{\rho = \rho(r,z), \\ f = f(r,z)}}.$$
 (17)

При этом зависимость  $\rho$  и f от r и z определяется неявно системой (16). Эта зависимость описывается непрерывно дифференцируемыми функциями  $\rho = \rho(r,z), \ f = f(r,z)$  для всех  $r \geq 0, \ z \in R;$   $n. \, в. \, в \ [0,+\infty) \ R_3(\rho) \neq 0.$ 

**4.** Изучение разрешимости системы (16) упрощается, если предварительно установить ограничения на функции  $\psi(\rho), \ \varphi(\rho),$  обусловленные требованием непрерывности поля  $\beta(X)$  всюду в  $R^3$ . Если исходить из геометрической картины поля  $\beta(X)$  как семейства прямых  $\Gamma(\xi),$  проходящих через каждую точку  $\xi \in \Pi$  в направлении  $t(\xi),$  то из непрерывности поля  $\beta(X)$  следует, что через каждую точку  $X \in R^3$  проходит одна и только одна прямая  $\Gamma(\xi).$  Стало быть, требование непрерывности предполагает непересечение прямых  $\Gamma(\xi), \ \Gamma(\xi'),$  проходящих через любые различные точки  $\xi, \ \xi' \in \Pi$  в направлениях  $t = t(\xi), \ t' = t(\xi').$  Непересечение прямых  $\Gamma(\xi), \ \Gamma(\xi')$  имеет место, когда поле  $t(\xi),$  определяемое в точках плоскости  $\Pi$ , отвечает одному из условий [1]:

$$V=(\xi'-\xi,\ [t',t]) \neq 0 \quad (\Gamma(\xi),\ \Gamma(\xi')$$
 — скрещенные прямые),  $\{V=(\xi'-\xi,\ [t',t])=0,\ [t',t]=0\} \quad (\Gamma(\xi),\ \Gamma(\xi')$  — параллельные прямые).



Использование условий (18) позволяет сформулировать следующее предложение.

**Предложение 3.** K непрерывным, удовлетворяющим условиям (18), относятся функции  $\psi(\rho)$ ,  $\varphi(\rho)$ , подчиненные условиям (19), либо (20):

$$\begin{cases} \psi(0) = n\pi, \ n\pi < \psi(\rho) < n\pi + (\pi/2) \ (\text{либо} \ n\pi - (\pi/2) < \psi(\rho) < n\pi) \ \text{при} \ \rho > 0, \\ m\pi - (\pi/2) < \varphi(\rho) < m\pi + (\pi/2) \ \text{при} \ \rho > 0, \end{cases}$$
(19)

или такие, что

$$\begin{cases} \psi(\rho) = n\pi & npu \ 0 \le \rho \le \rho_0, \ n\pi < \psi(\rho) < n\pi + (\pi/2) \\ (nu60 & n\pi - (\pi/2) < \psi(\rho) < n\pi) & npu \ \rho > \rho_0, \\ \varphi(\rho_0) = m\pi, & m\pi - \widetilde{\varphi}(\rho_0/\rho) < \varphi(\rho) < m\pi + \widetilde{\varphi}(\rho_0/\rho) & npu \ \rho > \rho_0, \end{cases}$$

$$(20)$$

для фиксированных целых  $n, m, \operatorname{rde} \widetilde{\varphi}(\rho_0/\rho) = \arccos(\rho_0/\rho), \rho > \rho_0.$ 

Докажем предложение 3. Для этого отметим, что величины, входящие в (18), в случае поля направлений  $t(\xi) = t(\xi(\rho, \vartheta))$  (10) выражаются формулами

$$\xi = \xi(\rho, \vartheta), \quad \xi' = \xi(\rho', \vartheta'), \quad t = t(\xi(\rho, \vartheta)), \quad t' = t(\xi(\rho', \vartheta')), \quad [t', t] = [t(\xi(\rho', \vartheta')),$$

$$t(\xi(\rho, \vartheta))] = i_{\rho}(\vartheta)T_{\rho}(\rho', \vartheta', \rho, \vartheta) + i_{\vartheta}(\vartheta)T_{\vartheta}(\rho', \vartheta', \rho, \vartheta) + i_{z}\dot{T}_{z}(\rho', \vartheta', \rho, \vartheta),$$

$$V = V(\rho', \vartheta', \rho, \vartheta) = [\rho'\cos(\vartheta - \vartheta') - \rho]T_{\rho}(\rho', \vartheta', \rho, \vartheta) - \rho'\sin(\vartheta - \vartheta')T_{\vartheta}(\rho', \vartheta', \rho, \vartheta),$$

где  $T_{\rho}(\rho', \vartheta', \rho, \vartheta) = \cos \psi(\rho') \sin \psi(\rho) \cos \varphi(\rho) - \sin \psi(\rho') \cos \psi(\rho) \cos [\vartheta - \vartheta' - \varphi(\rho')], T_{\vartheta}(\rho', \vartheta', \rho, \vartheta) = \cos \psi(\rho') \sin \psi(\rho) \sin \varphi(\rho) + \sin \psi(\rho') \cos \psi(\rho) \sin [\vartheta - \vartheta' - \varphi(\rho')], T_{z}(\rho', \vartheta', \rho, \vartheta) = \sin \psi(\rho') \sin \psi(\rho) \times \sin [\vartheta - \vartheta' + \varphi(\rho) - \varphi(\rho')].$ 

Покажем, что среди функций  $\psi(\rho)$ , равных  $n\pi$  при  $\rho=0$  и непрерывных на  $[0,+\infty)$  (см. замечание 2), и среди непрерывных на этом промежутке функций  $\varphi(\rho)$  условиям (18) отвечают только ограниченные функции. Для этого возьмем в  $\Pi$  пару точек:  $\xi=\xi(\rho,\vartheta), \quad \xi'=\xi(\rho,\vartheta'), \quad \text{где } \vartheta'\neq\vartheta.$  Таким точкам соответствуют

$$V = V(\rho', \vartheta', \rho, \vartheta) = -2\rho \sin 2\psi(\rho) \sin^2 \frac{\vartheta - \vartheta'}{2} \cos \varphi(\rho), \tag{21}$$

$$[t',t] = [t(\xi(\rho,\vartheta'),t(\xi(\rho,\vartheta))] = 2\sin\psi(\rho)\sin\frac{\vartheta-\vartheta'}{2}\Big\{\cos\psi(\rho)\Big[i_{\rho}(\vartheta)\sin\Big(\frac{\vartheta-\vartheta'}{2}-\varphi(\rho)\Big) + i_{\vartheta}(\vartheta)\cos\Big(\frac{\vartheta-\vartheta'}{2}-\varphi(\rho)\Big)\Big] + i_{z}\sin\psi(\rho)\cos\frac{\vartheta-\vartheta'}{2}\Big\}.$$
(22)

Предположим, что  $\cos\psi(\rho_1)=0$  при каком-то  $\rho=\rho_1>0$ . Тогда из (21), (22) при  $\rho=\rho_1$  находим  $V=0,\ [t',t]=i_z\sin(\vartheta-\vartheta')$ . Следовательно, при  $\rho=\rho_1$  условия (18) не могут выполняться при всех  $\vartheta,\ \vartheta'$ . Значит, из функций  $\psi(\rho)$ , равных  $n\pi$  при  $\rho=0$  и непрерывных при  $\rho\geq0$ , условиям (18) могут удовлетворять лишь те, значения которых принадлежат интервалу

$$n\pi - (\pi/2) < \psi(\rho) < n\pi + (\pi/2)$$
 при  $\rho > 0$ . (23)

Выделим случаи: 1)  $\psi(\rho) \neq n\pi$  при  $\rho > 0$  и 2)  $\psi(\rho) = n\pi$  при некотором  $\rho = \rho_0 > 0$ . В случае 1) в силу (23) и замечания 2 заключаем

$$\psi(0) = n\pi; \quad n\pi < \psi(\rho) < n\pi + (\pi/2) \quad ($$
либо  $n\pi - (\pi/2) < \psi(\rho) < n\pi)$  при  $\rho > 0.$  (24)

Предположим также, что  $\cos \varphi(\rho_2)=0, \ |\sin \varphi(\rho_2)|=1$  при каком-то  $\rho_2>0.$  Тогда при  $\rho=\rho_2$  из (21), (22) будем иметь

$$V = 0, \quad [t', t] = 2\sin\psi(\rho_2)\sin\frac{\vartheta - \vartheta'}{2} \Big\{ i_z \sin\psi(\rho_2)\cos\frac{\vartheta - \vartheta'}{2} - \cos\psi(\rho_2)\sin\varphi(\rho_2) \Big[ i_\rho(\vartheta)\cos\frac{\vartheta - \vartheta'}{2} - i_\vartheta(\vartheta)\sin\frac{\vartheta - \vartheta'}{2} \Big] \Big\}.$$



Отсюда следует, что при  $\cos\varphi(\rho)=0$  (для некоторого  $\rho>0$ ) и предположении (24) относительно  $\psi(\rho)$  условия непересечения (18) прямых  $\Gamma(\xi)$ ,  $\Gamma(\xi')$  не выполняются. Значения функции  $\varphi(\rho)$ , непрерывной при  $\rho\geq0$ , косинус которой при  $\rho>0$  отличен от нуля, — это значения из интервала  $(m\pi-(\pi/2),\ m\pi+(\pi/2))$ , где  $m\in\mathbb{Z}$ . Из (24) и отсюда следуют условия (19).

Во втором случае, когда  $\psi(\rho_0)=n\pi$  при каком-то  $\rho_0>0$ , в плоскости  $\Pi$  возьмем пару точек:  $\xi=\xi(\rho,\vartheta),\ \xi'=\xi(\rho_0,\vartheta').$  Для таких точек имеем

$$V = V(\rho_0, \vartheta', \rho, \vartheta) = (-1)^n \rho_0 \sin \psi(\rho) \{\cos[\vartheta - \vartheta' + \varphi(\rho)] - (\rho/\rho_0) \cos \varphi(\rho)\},$$

$$[t', t] = [t(\xi(\rho_0, \vartheta')), t(\xi(\rho, \vartheta))] = (-1)^n \sin \psi(\rho) [i_\rho(\vartheta) \cos \varphi(\rho) + i_\vartheta(\vartheta) \sin \varphi(\rho)].$$
(25)

Легко видеть, что здесь при любом  $\rho \in (0, \rho_0)$  и любом  $\vartheta$  найдутся такие  $\vartheta'$ , что  $\cos[\vartheta - \vartheta' + \varphi(\rho)] - (\rho/\rho_0)\cos\varphi(\rho) = 0$  и V = 0, а  $[t', t] \neq 0$  всюду, где  $\psi(\rho) \neq n\pi$ . Следовательно, для выполнимости условий (18) необходимы такие функции  $\psi(\rho)$ , что

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi(\rho) = n\pi \quad \text{при} \quad 0 \leq \rho \leq \rho_0, \quad n\pi < \psi(\rho) < n\pi + (\pi/2) \\ (\text{либо} \quad n\pi - (\pi/2) < \psi(\rho) < n\pi) \quad \text{при} \quad \rho > \rho_0. \end{array} \right.$$

Установим справедливость ограничений (20) на  $\varphi(\rho)$ , когда  $\psi(\rho)$  удовлетворяет (26). Пусть  $\cos \varphi(\rho_1) = 0$  при каком-то  $\rho_1 > \rho_0$ . Тогда из (25) при  $\rho = \rho_1$  находим

$$V = (-1)^{n+1} \rho_0 \sin \psi(\rho_1) \sin \varphi(\rho_1) \sin (\theta - \theta'), \quad [t', t] = (-1)^n \sin \psi(\rho_1) \sin \varphi(\rho_1) i_{\theta}(\theta),$$

где  $|\sin \varphi(\rho_1)|=1$ . Легко видеть, что и здесь V=0 при  $\vartheta'=\vartheta$  или  $\vartheta'=\vartheta\pm\pi$  и любом  $\vartheta$ , а  $[t',t]\neq 0$  при любых  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$ . Стало быть, если  $\psi(\rho)$  отвечает (26), то  $\varphi(\rho)$  должна быть такой, что  $\cos\varphi(\rho)\neq 0$  при  $\rho>\rho_0$ , а это имеет место, когда  $\varphi(\rho)\neq m\pi-(\pi/2)$  или  $m\pi+(\pi/2)$ , где  $m\in\mathbb{Z}$ . Далее заметим, что правая часть в первой из формул (25) отлична от нуля при  $\rho>\rho_0$ , если только

$$(\rho/\rho_0)|\cos\varphi(\rho)| > 1$$
 для любых  $\rho > \rho_0$ , (27)

т. е. когда  $\varphi \in (m\pi - \widetilde{\varphi}(\rho_0/\rho), m\pi + \widetilde{\varphi}(\rho_0/\rho))$  при  $\rho > \rho_0$ , где  $\widetilde{\varphi}(\rho_0/\rho)$  определено выше (предложение 3). Кроме того, очевидно, что  $(\rho_0/\rho)|\cos\varphi(\rho)|<1$  при  $\rho<\rho_0$ . Переходя в последнем неравенстве и в (27) к пределу  $\rho\to\rho_0$ , получаем  $|\cos\varphi(\rho_0)|=1$ , т. е.  $\varphi(\rho_0)=m\pi$ . Отсюда и из (26) получаем (20). Предложение 3 доказано.

**5.** Обсудим непрерывность полей (10)–(13). Пусть  $\psi(\rho)$ ,  $\varphi(\rho)$  отвечают условиям (19) и  $\psi(\rho)$  непрерывна на  $[0, +\infty)$ , (см. замечание 2). Тогда поле (10) непрерывно в  $\Pi$ , если  $\varphi(\rho)$  непрерывна на  $[0, +\infty)$ .

Если  $\psi(\rho)$ ,  $\psi'(\rho)$ ,  $\varphi(\rho)$ ,  $\varphi'(\rho)$  непрерывны на  $(0,+\infty)$  и удовлетворяют условиям

$$\psi'(\rho) \to \psi'(0) = 0, \quad \varphi'(\rho) \sin \psi(\rho) \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to 0,$$
 (28)

то поля (11), (12), а значит, и поле (13), поддаются определению как непрерывные функции всюду в П. Причем поле (13) в явном виде выражается формулой

$$\left(i_3, \left[\frac{\partial}{\partial \xi}, t(\xi)\right]\right)\Big|_{\xi=\xi(\rho,\vartheta)} = \begin{cases} 0, & \rho=0, \\ R_3(\rho), & \rho>0, \end{cases}$$

где  $R_3(\rho)$  определяется формулой (13). Действительно, используя формулы (10)–(13), нетрудно убедиться, что при условиях (28) справедливы равенства  $\lim_{\rho \to 0} t'_{\rho}(\xi(\rho,\vartheta)) = \lim_{\rho \to 0} \left[t(\xi(\rho,\vartheta)) - t(\xi(0,\vartheta))\right]/\rho = t$ 

$$=t_{\rho}'(\xi(\rho,\vartheta))\Big|_{\rho=0}=0$$
, а  $\rho^{-1}t_{\vartheta}'(\xi(\rho,\vartheta))\to 0$ ,  $R_3(\rho)\to 0$  при  $\rho\to 0$ .

Отметим, также, что при  $\psi(\rho)$ ,  $\varphi(\rho)$ , удовлетворяющих (20), использование функций  $\varphi(\rho)$  с разрывами и(или) разрывными производными в точках интервала  $[0,\rho_0)$  не расширяет класса отображений поля  $g(\xi(\rho,\vartheta))\equiv i_3$  в аксиально симметричные поля (10). Далее такие функции исключаются. Итак, доказано следующее



**Предложение 4.** Поле (10) непрерывно дифференцируемо, а поле (13) непрерывно всюду в плоскости  $\Pi$ , если 1)  $\psi(\rho)$ ,  $\varphi(\rho)$  отвечают условиям (19) (условиям (20)); 2)  $\psi(\rho)$ ,  $\psi'(\rho)$ ,  $\varphi(\rho)$  непрерывны в интервале  $[0,+\infty)$ ,  $\psi'(0)=0$ ,  $\varphi'(\rho)\sin\psi(\rho)\to 0$  при  $\rho\to 0$   $(\rho\to\rho_0)$ ; 3)  $\varphi'(\rho)$  непрерывна в интервале  $[0,+\infty)$  за исключением, быть может, точки  $\rho=0$   $(\rho=\rho_0)$ , когда  $\varphi(\rho)$  удовлетворяет условиям (19) (условиям (20)).

**Замечание 3.** Поле из (5) при условиях (20) определяется как непрерывное в  $\Pi$ , независимо от поведения  $\varphi'(\rho)$  при  $\rho \to \rho_0$  ( $\rho_0 > 0$ ), так

$$\left(i_3, \left[\frac{\partial}{\partial \xi}, t(\xi)\right]\right)\Big|_{\xi=\xi(\rho,\vartheta)} = \begin{cases}
0, & 0 \le \rho \le \rho_0, \\
R_3(\rho), & \rho > \rho_0,
\end{cases}$$
(29)

где  $R_3(\rho)$  выражается формулой (13).

Поле (29) при  $\rho_0 > 0$  заведомо несовместимо с условием (5). Это означает, что использование функций  $\psi(\rho)$ ,  $\varphi(\rho)$ , отвечающих условиям (20), позволяет строить аксиально симметричные поля (17), продольно вихревые не в  $R^3$ , а в области

$$D = \{ (r, \theta, z) : r \in (\rho_0, +\infty), \ \theta \in [0, 2\pi), \ z \in (-\infty, +\infty) \}.$$
(30)

Однако такие поля все-таки заслуживают внимания как пример непрерывно и гладко сопрягающихся полей с разными в разных областях вихревыми свойствами.

**6.** Обратимся к системе (16) относительно  $\rho = \rho(r,z), f = f(r,z)$  и перепишем ее, учитывая, что  $\cos \psi(\rho) \neq 0$  в силу (19), (20), в виде

$$\left\{r\sin[f+\varphi(\rho)] - \rho\sin\varphi(\rho) - z\operatorname{tg}\psi(\rho) = 0, \ r\cos[f+\varphi(\rho)] - \rho\cos\varphi(\rho) = 0\right\}. \tag{31}$$

Исследуем разрешимость системы (31), полагая, что  $\psi(\rho)$ ,  $\varphi(\rho)$  удовлетворяют условиям (19) (условиям (20)). Тогда при r>0 из системы (31) выводим

$$F(\rho, r, z) = 0, (32)$$

$$\sin f = F_1(\rho, z)/r, \quad \cos f = F_2(\rho, z)/r.$$
 (33)

Здесь

$$F(\rho, r, z) = a^2(\rho) + \omega^2(\rho, z) - r^2$$

где

$$a(\rho) = \rho \cos \varphi(\rho), \qquad \text{$\alpha(\rho, z) = \rho \sin \varphi(\rho) + z \operatorname{tg} \psi(\rho)$}$$
(34)

$$F_1(\rho, z) = z \cos \varphi(\rho) \operatorname{tg} \psi(\rho), \qquad F_2(\rho, z) = \rho + z \sin \varphi(\rho) \operatorname{tg} \psi(\rho).$$
 (35)

Уравнение (32), справедливое и при r=0, не содержит переменной f, в отличие от системы (31), и устанавливает не явно зависимость одной из переменных  $\rho, r, z$  от двух других переменных. Так, разрешая (32) относительно r, получаем

$$r(\rho, z) = \begin{cases} \rho, & \rho = 0 \quad (0 \le \rho \le \rho_0), \\ \sqrt{u(\rho, z)}, & \rho > 0 \quad (\rho > \rho_0), \end{cases}$$
(36)

где значения  $\rho$  в скобках относятся к  $\psi(\rho)$ ,  $\varphi(\rho)$ , удовлетворяющим условиям (20),

$$u(\rho, z) = a^2(\rho) + \omega^2(\rho, z).$$
 (37)

Если  $\psi(\rho)$ ,  $\varphi(\rho)$  удовлетворяют условиям (19) или (20), а их производные — условиям предложения 4, то при любых значениях переменных  $\rho \geq 0$  и  $z \in R$  функция (36) определена и непрерывна вместе со своими частными производными:

$$r'_{\rho}(\rho, z) = \begin{cases} 1, & \rho = 0 \quad (0 \le \rho \le \rho_0), \\ u'_{\rho}(\rho, z) / \left[2\sqrt{u(\rho, z)}\right], & \rho > 0 \quad (\rho > \rho_0), \end{cases}$$



$$r'_{z}(\rho, z) = \begin{cases} 0, & \rho = 0 \quad (0 \le \rho \le \rho_{0}), \\ u'_{z}(\rho, z) / \left[2\sqrt{u(\rho, z)}\right], & \rho > 0 \quad (\rho > \rho_{0}) \end{cases}$$

после доопределения их при  $\rho=0$  в случае условий (19) по непрерывности.

Решение  $\rho=\rho(r,z)$  уравнения (32) есть функция, обратная функции  $r=r(\rho,z)$  (36), поэтому справедливо

**Предложение 5.** Зависимость  $\rho$  от переменных r,z, определяемая уравнением (32), описывается функцией  $\rho=\rho(r,z)$ , однозначной, гладкой, строго и неограниченно возрастающей с ростом r в интервале  $0\leq r<+\infty$  ( $\rho_0\leq r<+\infty$ ), если и только если при любом  $z\in R$  функция  $u=u(\rho,z)$  (37), равная нулю при  $\rho=0$  (равная  $\rho_0$  при  $\rho=\rho_0$ ), есть гладкая, строго и неограниченно возрастающая функция в интервале  $0\leq \rho<+\infty$  ( $\rho_0\leq \rho<+\infty$ ) и  $u'_{\rho}(\rho,z)>0$ .

**Замечание 4.** Если при тех же условиях  $u'_{\rho}=0$  при каких-то  $\rho_i>0,\ z_i\in R,$  то производная  $\rho'_r$  от  $\rho=\rho(r,z)$  в точке  $(r_i=u(\rho_i,z_i),z_i)$  терпит разрыв второго рода.

**Замечание 5.** Если  $\psi(\rho), \varphi(\rho)$  удовлетворяют условиям (20) и  $\varphi'(\rho)$  терпит разрыв при  $\rho=\rho_0$ , то производную  $u'_{\rho}(\rho,z)$  при условии 2) предложения 4 можно доопределить по непрерывности при  $\rho=\rho_0$ , полагая  $u'_{\rho}(\rho_0,z)=2\rho_0$ .

Частные производные  $\rho_r'$ ,  $\rho_z'$  можно найти, учитывая, что  $\rho_r'(r,z) = 1/r_\rho'(\rho,z)\Big|_{\rho=\rho(r,z)}$ ,  $\rho_z'(r,z) = 1/r_\rho'(\rho,z)\Big|_{\rho=\rho(r,z)}$ 

 $=-r_z'(
ho,z)/r_
ho'(
ho,z)\Big|_{
ho=
ho(r,z)}$ , используя выражаемую из (36) зависимость ho=
ho(r,z), в том числе и устанавливаемые явно зависимости:

$$\rho(0,z) = 0, \quad \rho(r,0) = r \quad (r \ge 0, \ z \in R), \tag{38}$$

$$\rho(r,z) = r \quad (0 \le r \le \rho_0, \ z \in R), \tag{39}$$

при условиях (19) и (20) соответственно. В результате получим

$$\rho_r'(r,z) = \begin{cases} 1, & r = 0 \quad (0 \le r \le \rho_0), \\ 2r/u_\rho'(\rho,z)\Big|_{\rho=\rho(r,z)}, & r > 0 \quad (r > \rho_0), \end{cases}$$

$$(40)$$

$$\rho'_{z}(r,z) = \begin{cases} 0, & r = 0 \quad (0 \le r \le \rho_{0}), \\ -u'_{z}(\rho,z)/u'_{\rho}(\rho,z)\Big|_{\rho = \rho(r,z)}, & r > 0 \quad (r > \rho_{0}), \end{cases}$$

где значения r в скобках относятся к  $\psi(\rho)$ ,  $\varphi(\rho)$ , удовлетворяющим условиям (20).

Переменная  $f \in (-\pi, \pi]$  при известной функции  $\rho = \rho(r, z)$  и r > 0 выражается из уравнений (33) как функция f(r, z) переменных r > 0,  $z \in R$ , однозначная и непрерывная при условиях предложения 5, имеющая при условиях предложения 4 непрерывные частные производные. Последние можно найти, используя также уравнения (33), что приводит к выражениям:

$$f'_r(r,z) = f_r(r,z), \quad f'_z(r,z) = f_z(r,z) \quad (r > 0, \ z \in R),$$
 (41)

$$f_r(r,z) = \frac{2z}{ru_\rho'(\rho,z)} \left\{ \frac{\rho \psi'(\rho) \cos \varphi(\rho)}{\cos^2 \psi(\rho)} - \operatorname{tg} \psi(\rho) \left[ \cos \varphi(\rho) + \varphi'(\rho) \operatorname{æ}(\rho,z) \right] \right\} \Big|_{\rho = \rho(r,z)},\tag{42}$$

$$f_z(r,z) = \frac{2 \operatorname{tg} \psi(\rho)}{u_\rho'(\rho,z)} \left[ z \varphi'(\rho) \operatorname{tg} \psi(\rho) + \cos \varphi(\rho) \right] \Big|_{\rho = \rho(r,z)}.$$
 (43)

Что же касается зависимости f и ее производных от z при r=0, то системе (31) при r=0 удовлетворяет в качестве f(0,z) любая функция z со значениями из полуинтервала  $(-\pi,\pi]$ . Однако если в уравнениях (33), взятых при  $\rho=\rho(r,z)$ , перейти к пределу  $r\to +0$  и учесть вытекающее из (40) отношение эквивалентности

$$\rho(r,z) \sim r \quad \text{при} \quad r \to 0, \tag{44}$$

то получим  $\sin f(r,z) \to 0, \ \cos f(r,z) \to 1$  при  $r \to 0.$  Откуда  $f(r,z) \to 0$  при  $r \to +0.$  Следовательно, переменную f и ее производную  $f_z'$  можно определить как непрерывные функции при любом  $r \ge 0,$   $z \in R$ , если только

$$f(r,z) = 0$$
 при  $r = 0$   $(0 \le r \le \rho_0),$  (45)



так как  $f_z(r,z) \to 0$  при  $r \to 0$  и с учетом (41), (43) имеем

$$f'_z(r,z) = \{0$$
 при  $r = 0 \ (0 \le r \le \rho_0); \ f_z(r,z)$  при  $r > 0 \ (r > \rho_0) \}$ . (46)

Производную  $f'_r(0,z)$  путем дифференцирования системы (31) не найти, поскольку получаемой в результате системе уравнений при r=0 удовлетворяет любая функция z. Поэтому используем формулы (33), (45) и определение производной. Тогда

$$f'_r(0,z) = \lim_{r \to 0} \frac{f(r,z)}{r} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \arctan \frac{F_1(\rho,z)}{F_2(\rho,z)} \Big|_{\rho = \rho(r,z)},\tag{47}$$

а для непрерывности  $f'_r$  при r=0 потребуем выполнения равенства

$$\lim_{r \to 0} f_r(r, z) = f'_r(0, z) \quad \text{при любом} \quad z \in R.$$
 (48)

При вычислении предела в (47) используем формулы (35), отношения эквивалентности (44) и  $\operatorname{arctg}[F_1(\rho,z)/F_2(\rho,z)] \sim F_1(\rho,z)/F_2(\rho,z) \sim F_1(\rho,z)/\rho$  при  $\rho \to 0$  и правило Лопиталя, а при вычислении предела в (48) — формулы (42), (34), отношения эквивалентности (44),  $u_\rho'(\rho,z) \sim 2\rho$  при  $\rho \to 0$ . Получаем в результате

$$f_r'(0,z) = \lim_{\rho \to 0} \frac{z \operatorname{tg} \psi(\rho) \cos \varphi(\rho)}{\rho^2} = z \lim_{\rho \to 0} \left[ \frac{\operatorname{tg} \psi(\rho) \cos \varphi(\rho)}{\rho} \right]',$$

$$\lim_{r \to 0} f_r(r, z) = z \lim_{\rho \to 0} \left\{ \left[ \frac{\operatorname{tg} \psi(\rho) \cos \varphi(\rho)}{\rho} \right]' - z \varphi'(\rho) \left[ \frac{\operatorname{tg} \psi(\rho)}{\rho} \right]^2 \right\}.$$

Стало быть, для существования производной  $f'_r(0,z)$  и выполнимости требования (48) необходимо, чтобы  $\psi(\rho), \varphi(\rho)$  отвечали еще и условиям

$$\left[\frac{\operatorname{tg}\psi(\rho)\cos\varphi(\rho)}{\rho}\right]' \to f_r(0) \quad \text{и} \quad \varphi'(\rho)\left[\frac{\operatorname{tg}\psi(\rho)}{\rho}\right]^2 \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to 0, \tag{49}$$

где  $f_r(0)$  — конечное число. Резюмируя полученные результаты, сформулируем

**Предложение 6.** При условиях предложения 5 зависимость переменной  $f \in (-\pi, \pi]$  от переменных  $r \geq 0$ ,  $z \in R$  описывается однозначной непрерывной функцией f = f(r, z), которая при условиях предложения 4 имеет непрерывную частную производную  $f'_z(r, z)$ , определяемую формулой (46), а вместе с условиями (49) имеет и непрерывную частную производную

$$f'_r(r,z) = \{zf_r(0) \text{ npu } r = 0 \ (0 \le r \le \rho_0); \ f_r(r,z) \text{ npu } r > 0 \ (r > \rho_0)\},$$

еде  $f_r(0) = \lim_{\rho \to 0} [\rho^{-1} \operatorname{tg} \psi(\rho) \cos \varphi(\rho)]'$   $(f_r(0) = 0 \text{ при } 0 \le r \le \rho_0 \text{ в случае функций } \psi(\rho), \varphi(\rho),$  удовлетворяющих условиям (20)),  $f_r(r,z)$  определяется формулой (42).

7. При условиях предложений 5, 6 каждой точке  $\overrightarrow{X}(r,\theta,z) \in R^3$  с учетом зависимостей (38), (45) можно поставить в соответствие единичный вектор, следуя правилу (17) и задать тем самым в  $R^3$  непрерывное векторное поле  $\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\beta}(r,\theta,z)$ . При этом формулу (17) для r>0 удобно представить в виде

$$\overrightarrow{\beta}(r,\theta,z) = \overrightarrow{\beta_+}(r,\theta,z) = \left\{ \frac{\sin\psi(\rho)}{r} \left[ \mathfrak{E}(\rho,z) \overrightarrow{i_r}(\theta) - a(\rho) \overrightarrow{i_\theta}(\theta) \right] + \cos\psi(\rho) \overrightarrow{i_z} \right\} \Big|_{\rho=\rho(r,z)}, \tag{50}$$

исключив  $f+\varphi(\rho)$  в (17) с помощью системы (31). Здесь  $æ(\rho,z)$  определяется второй из формул (34). Тогда соответствие  $\overrightarrow{X}(\rho,\vartheta,z) \to \overrightarrow{\beta}(r,\theta,z)$  выражается формулами:

$$\overrightarrow{\beta}(r,\theta,z) = \begin{cases} (-1)^n \overrightarrow{i_z}, & r = 0 \quad (0 \le r \le \rho_0), \\ \overrightarrow{\beta_+}(r,\theta,z), & r > 0 \quad (r > \rho_0), \end{cases}$$
(51)

где значения r в скобках относятся к  $\psi(\rho)$ ,  $\varphi(\rho)$ , удовлетворяющим (20).



Поле (51) имеет непрерывные производные по любому направлению всюду в  $\mathbb{R}^3$  в силу непрерывности всюду в  $\mathbb{R}^3$  полей

$$\frac{\partial \beta_{\nu}}{\partial \alpha} = \left[ \frac{\partial \beta_{\nu}(\rho, z)}{\partial \rho} \rho_{\alpha}'(r, z) + \frac{\partial \beta_{\nu}(\rho, z)}{\partial f} f_{\alpha}'(r, z) \right] \Big|_{\rho = \rho(r, z)} = 
= \left\{ 0 \text{ при } r = 0 \ (0 \le r \le \rho_0); \ \beta_{\nu, \alpha}(r, z) \text{ при } r > 0 \ (r > \rho_0) \right\}, 
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \overrightarrow{\beta}(r, \theta, z) = \begin{cases} 0, & r = 0 \ (0 \le r \le \rho_0), \\ (1/r) [\overrightarrow{i_z}, \overrightarrow{\beta_+}(r, \theta, z)], & r > 0 \ (r > \rho_0). \end{cases}$$
(52)

Здесь  $\nu,~\alpha=r,~\theta,~z;~\beta_{\nu}$  — компоненты вектора (51) относительно базиса  $\{\overrightarrow{i_r}(\theta),~\overrightarrow{i_\theta}(\theta),~\overrightarrow{i_z}\};$   $\beta_{\nu,\theta}(r,z)=0~(\nu=r,\theta,z);$ 

$$\beta_{r,r}(r,z) = \frac{2a(\rho)}{u_{\rho}'(\rho,z)} \left\{ \left[ \frac{a(\rho)}{r} \right]^2 \left[ \frac{\varpi(\rho,z)}{a(\rho)} \right]_{\rho}' \sin \psi(\rho) + \frac{\varpi(\rho,z)}{a(\rho)} [\sin \psi(\rho)]' \right\} \Big|_{\rho = \rho(r,z)},\tag{53}$$

$$\beta_{\theta,r}(r,z) = \frac{2a(\rho)}{u_{\rho}'(\rho,z)} \left\{ \frac{a(\rho)\varpi(\rho,z)\sin\psi(\rho)}{r^2} \left[ \frac{\varpi(\rho,z)}{a(\rho)} \right]_{\rho}' - \left[ \sin\psi(\rho) \right]' \right\} \Big|_{\rho=\rho(r,z)},\tag{54}$$

$$\beta_{z,r}(r,z) = -\frac{2r\psi'(\rho)\sin\psi(\rho)}{u'_{\rho}(\rho,z)}\Big|_{\rho=\rho(r,z)};$$
(55)

$$\beta_{r,z}(r,z) = \frac{\operatorname{tg}\psi(\rho)}{ru'_{\rho}(\rho,z)} \left\{ \sin\psi(\rho) [a^{2}(\rho)]' - 2\omega^{2}(\rho,z) [\sin\psi(\rho)]' \right\} \Big|_{\rho=\rho(r,z)},\tag{56}$$

$$\beta_{\theta,z}(r,z) = \frac{2\omega(\rho,z)\operatorname{tg}\psi(\rho)}{ru_{\rho}'(\rho,z)} \left\{ a'(\rho)\sin\psi(\rho) + a(\rho)[\sin\psi(\rho)]' \right\} \Big|_{\rho=\rho(r,z)},\tag{57}$$

$$\beta_{z,z}(r,z) = \frac{2\psi'(\rho)\mathfrak{E}(\rho,z)\sin\psi(\rho)\operatorname{tg}\psi(\rho)}{u_o'(\rho,z)}\Big|_{\rho=\rho(r,z)},\tag{58}$$

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{\beta} = B(r, z) \overrightarrow{\beta}(r, \theta, z), \quad \operatorname{div} \overrightarrow{\beta} = \delta(r, z). \tag{59}$$

Здесь

$$B(r,z) = \begin{cases} 0, & r = 0 \quad (0 \le r \le \rho_0), \\ B_+(r,z), & r > 0 \quad (r > \rho_0), \end{cases}$$
 (60)

$$\delta(r,z) = \begin{cases} 0, & r = 0 \quad (0 \le r \le \rho_0), \\ \delta_+(r,z), & r > 0 \quad (r > \rho_0), \end{cases}$$
 (61)

где значения r в скобках относятся к  $\psi(\rho)$ ,  $\varphi(\rho)$ , удовлетворяющим условиям (20),

$$B_{+}(r,z) = \frac{2\rho R_{3}(\rho)}{[u'_{\rho}(\rho,z)\cos\psi(\rho)]}\Big|_{\rho=\rho(r,z)},$$
(62)

$$\delta_{+}(r,z) = \frac{2\left[\omega_{\rho}'(\rho,z)\sin\psi(\rho)\cos\psi(\rho) + \psi'(\rho)\omega(\rho,z)\right]}{\left[u_{\rho}'(\rho,z)\cos\psi(\rho)\right]}\Big|_{\rho=\rho(r,z)}.$$
(63)

Переменная  $R_3(\rho)$  в (62) определяется формулой (13)

**8.** Вернемся к условиям на функцию  $u(\rho,z)$  (37) в предложении 5, которые накладывают ограничения на выбор функций  $\psi(\rho)$ ,  $\varphi(\rho)$ . Установим эти ограничения, принимая во внимание, что строгое и неограниченное возрастание функции  $u(\rho,z)$  с ростом  $\rho$  при любом фиксированном  $z\in R$  не исключает: 1) существование таких  $\rho_i>0$  ( $\rho_i\geq\rho_0$ ),  $z_i\in R$ , что  $u'_{\rho}(\rho_i,z_i)=0$ ; 2) существование и однозначность при таких  $\rho_i,z_i$  (см. формулы (36)) соответствий

$$(\rho_i, z_i) \to r_i = r(\rho_i, z_i) \quad \text{if} \quad (r_i, z_i) \to \rho_i \doteq \rho(r_i, z_i);$$
 (64)



3) замену условия  $u_{\rho}'(\rho,z) > 0$  (см. предложение 5) для каких-то пар  $(\rho_i,z_i)$  условием  $u_{\rho}'(\rho,z) \geq 0$ , если оно позволяет построить гладкое в  $R^3$  поле (51).

Выделим в поведении функций  $\psi(\rho)$ ,  $\varphi(\rho)$ , удовлетворяющих условиям предложений 3 и 4, те особенности, которые при каких-то  $\rho > 0$  ( $\rho > \rho_0$ ),  $z \in R$  совместимы с условием

$$u'_{\rho}(\rho, z) = 2[a(\rho)a'(\rho) + \mathfrak{X}(\rho, z)\mathfrak{X}'_{\rho}(\rho, z)] = 0,$$
 (65)

где  $a(\rho)$ ,  $æ(\rho,z)$  определяются формулами (34),  $a'(\rho) = \cos \varphi(\rho) - \rho \varphi'(\rho) \sin \varphi(\rho)$ ,  $æ'_{\rho}(\rho,z) = \sin \varphi(\rho) + \rho \varphi'(\rho) \cos \varphi(\rho) + z \psi'(\rho) \cos^{-2} \psi(\rho)$ .

Так, условие (65) заведомо выполнимо, когда  $a'(\rho_1)=0$  при каком-то  $\rho=\rho_1>0$  ( $\rho_1>\rho_0$ ) справедливо, так как при  $\rho=\rho_1$  всегда найдется  $z=z_1'$  (если  $\psi'(\rho_1)\neq 0$ ), а также  $z=z_1$ , при которых  $lpha'_{
ho}(\rho_1,z_1')=0$ ,  $lpha(\rho_1,z_1)=0$ , где  $z_1'=-\cos^2\psi(\rho_1)[\sin\varphi(\rho_1)+\rho_1\varphi'(\rho_1)\cos\varphi(\rho_1)]/\psi'(\rho_1)$ ,  $z_1=-\rho_1\sin\varphi(\rho_1)\operatorname{ctg}\psi(\rho_1)$ . Равенство  $a'(\rho_1)=0$  имеет место, если только  $\sin\varphi(\rho_1)\neq 0$ ,  $\varphi'(\rho_1)=(1/\rho_1)\operatorname{ctg}\varphi(\rho_1)$ . Что же касается  $\psi(\rho)$ , совместимой с (65), то при  $\rho=\rho_1$  в зависимости от ее выбора возможны случаи:

- 1)  $\psi'(\rho_1)=0$  и æ $(\rho_1,z_1)=0,$  а æ $_{
  ho}'(\rho_1,z)
  eq 0$  при любом  $z\in R;$
- $2) \ z_1 \neq z_1', \ \psi'(\rho_1) \neq 0 \ \text{if} \ \Re(\rho_1, z_1) = 0, \ \Re'_{\rho}(\rho_1, z_1) \neq 0, \ \operatorname{a} \ \Re(\rho_1, z_1') \neq 0, \ \operatorname{a}'_{\rho}(\rho_1, z_1') = 0;$
- 3)  $z_1 = z_1', \ \psi'(\rho_1) \neq 0 \ \text{if } \mathfrak{A}(\rho_1, z_1) = \mathfrak{A}_{\rho}'(\rho_1, z_1) = 0.$

Отметим далее, что в силу соответствий (64) всегда найдутся такие  $r=r_1,\ z=z_1$  и такие  $r=r_1',\ z=z_1',$  что  $\rho(r_1,z_1)=\rho_1$  и  $\rho(r_1',z_1')=\rho_1$ . Поэтому в первом случае для точек  $\overrightarrow{X_1}=\overrightarrow{X}(r_1,\theta,z_1)$  будем иметь  $\psi'=0,\ \varpi=0,\ \varpi'_{\rho}\neq 0,\ u'_{\rho}=0.$  Отсюда и из (52), (53) следует, что производная  $\partial\beta_r/\partial r$  в этих точках терпит разрыв второго рода. Во втором случае в точках  $\overrightarrow{X_1}=\overrightarrow{X}(r_1,\theta,z_1)$  уже  $\psi'\neq 0$  и разрыв второго рода терпят (см. формулы (52)–(55)) производные  $\partial\beta_{\nu}/\partial r,\ \nu=r,\theta,z$ . В точках же  $\overrightarrow{X_1'}=\overrightarrow{X}(r_1',\theta,z_1')$  имеем  $\psi'\neq 0,\ \varpi\neq 0,\ \varpi'_{\rho}=0,\ u'_{\rho}=0,$  поэтому (см. (52)–(58)) разрыв второго рода терпят  $\partial\beta_{\nu}/\partial\alpha,\ \nu=r,\theta,z,\ \alpha=r,z.$  Наконец, в третьем случае в точках  $\overrightarrow{X_1'}=\overrightarrow{X_1}=\overrightarrow{X}(r_1,\theta,z_1)$  имеем  $\psi'\neq 0,\ \varpi=\varpi'_{\rho}=u'_{\rho}=0$  и разрыв второго рода терпят (см. (52), (54), (55))  $\partial\beta_{\theta}/\partial r,\ \partial\beta_z/\partial r.$ 

Итак, для непрерывной дифференцируемости поля (51) необходимо выполнение условия  $a'(\rho) \neq 0$  при  $\rho > 0$  ( $\rho > \rho_0$ ). Его можно выразить неравенством

$$|a(\rho)|' > 0$$
 при  $\rho > 0 \ (\rho > \rho_0),$  (66)

где  $|a(\rho)|=(-1)^m\rho\cos\varphi(\rho)$  (см. (34), (19), (20)), поскольку удовлетворяющая ему функция  $|a(\rho)|$ , со свойствами  $|a(0)|=0,\ |a(\rho)|>0$  при  $\rho>0$ , когда  $\varphi(\rho)$  подчиняется (19), и свойствами  $|a(\rho_0)|=\rho_0,\ |a(\rho)|>\rho_0,$  когда  $\varphi(\rho)$  подчиняется (20), должна иметь положительную производную при  $\rho>0$  ( $\rho>\rho_0$ ). Поскольку  $(-1)^m\cos\varphi(\rho)=|\cos\varphi(\rho)|,$  то функция  $\varphi(\rho),$  совместимая с (66), должна подчиняться условию

$$|\cos \varphi(\rho)| - (-1)^m \rho \varphi'(\rho) \sin \varphi(\rho) > 0$$
 πρи  $\rho > 0 (\rho > \rho_0).$  (67)

Если  $\varphi(\rho)$  удовлетворяет (67) и если

$$\left[ \operatorname{tg}^2 \psi(\rho) \right]' \Big|_{\rho = \rho_2} < 0 \tag{68}$$

при каком-то  $\rho = \rho_2 > 0$  ( $\rho_2 > \rho_0$ ), то условие (65) выполнимо при  $\rho = \rho_2$  и  $z = z_2^{(\pm)}$ . Здесь  $z_2^{(\pm)}$  находятся из уравнения (65), взятого при  $\rho = \rho_2$ , которое имеет вещественные корни, поскольку дискриминант квадратного относительно z уравнения (65)

$$d(\rho) = \left\{ \frac{\left[\rho \sin \varphi(\rho) \operatorname{tg} \psi(\rho)\right]'}{\left[\operatorname{tg}^2 \psi(\rho)\right]'} \right\}^2 - \left\{ \frac{2\rho}{\left[\operatorname{tg}^2 \psi(\rho)\right]'} \right\}$$
(69)

при  $\rho = \rho_2$  положителен в силу (68). Так же обстоит дело при  $\rho = \rho_3 > 0$   $(\rho_3 > \rho_0)$ , если  $[\lg^2 \psi(\rho)]'\Big|_{\rho=\rho_3} = 0$ ,  $[\rho \sin \varphi(\rho)]'\Big|_{\rho=\rho_3} \neq 0$  и  $z=z_3=-\rho \operatorname{ctg} \psi(\rho)/[\rho \sin \varphi(\rho)]'\Big|_{\rho=\rho_3}$ , т. е. в этом случае снова выполнимо условие (65).



Тогда в силу соответствий (64) для выделенных пар  $(\rho_2, z_2^{(\pm)}), \ (\rho_3, z_3)$  найдутся такие  $r=r_2^{(\pm)}$  и такое  $r=r_3$ , что  $\rho(r_2^{(\pm)}, z_2^{(\pm)})=\rho_2, \ \rho(r_3, z_3)=\rho_3.$  Поэтому для точек  $\overrightarrow{X_2}^{(\pm)}=\overrightarrow{X}(r_2^{(\pm)}, \theta, z_2^{(\pm)})$  будем иметь  $\psi'\neq 0, \ a'\neq 0, \ a\neq 0, \ a\neq 0, \ a'\neq 0$ 

Следовательно, требование непрерывной дифференцируемости поля (51) накладывает запрет на выбор функций  $\psi(\rho)$ , которые где-то в интервале  $(0,+\infty)$  (интервале  $(\rho_0,+\infty)$ ) ведут себя так, что убывает  $\operatorname{tg}^2\psi(\rho)$ . Однако допустим выбор функций  $\psi(\rho)$ , имеющих при  $\rho>0$   $(\rho>\rho_0)$  точки перегиба и (или) интервалы неубывания и невозрастания, где  $\psi'(\rho)=0$ , если в точках перегиба и (или) на интервалах неубывания и невозрастания функция  $\varphi(\rho)$  ведет себя так, что  $[\rho\sin\varphi(\rho)]'=0$ , поскольку при таком ее поведении  $u'_{\rho}(\rho,z)=2\rho>0$  всюду, где  $\psi'(\rho)=0$ .

Наконец, условие (65) выполнимо при  $\rho=\rho_4>0$  ( $\rho_4>\rho_0$ ) и  $z=z_4^{(\pm)}$ , если  $[\lg^2\psi(\rho)]'\Big|_{\rho=\rho_4}>0$ ,  $d(\rho_4)>0$ , где  $z_4^{(\pm)}$  и  $d(\rho_4)$  — соответственно корни и дискриминант уравнения (65), взятого при  $\rho=\rho_4$ . Однако при  $r=r_4^{(\pm)},\ z=z_4^{(\pm)},$  выделенных соответствиями  $\rho(r_4^{(\pm)},z_4^{(\pm)})=\rho_4$ , часть производных (52), а именно  $\partial\beta_z/\partial r,\,\partial\beta_z/\partial z$ , взятых в точках  $\overrightarrow{X_4}^{(\pm)}=\overrightarrow{X}(r_4^{(\pm)},\theta,z_4^{(\pm)}),$  терпят неустранимый разрыв второго рода. Следовательно, во всех точках  $\rho$  интервала  $(0,+\infty)$  (интервала  $(\rho_0,+\infty)$ ), где

$$[\lg^2 \psi(\rho)]' > 0, \tag{70}$$

для непрерывной дифференцируемости  $\overrightarrow{\beta}(r,\theta,z)$  требуется условие  $d(\rho)<0$ , т. е.

$$Q(\rho) < 1, \tag{71}$$

где  $Q(\rho) = \{ [\rho \sin \varphi(\rho) \operatorname{tg} \psi(\rho)]' \}^2 / \{ 2\rho [\operatorname{tg}^2 \psi(\rho)]' \}$ . Условие (71) обеспечивает отрицательность дискриминанта (69) квадратного относительно z уравнения (65), а значит, и отсутствие у него вещественных корней, если поведение  $\psi(\rho)$  совместимо с неравенством (70). Учитывая это, следует указать случаи, когда (70) заведомо выполнимо.

Так, если  $\psi(\rho)$  удовлетворяет условиям (19) (условиям (20)), то  $\operatorname{tg}^2\psi(\rho)=0$  при  $\rho=0$  ( $\rho=\rho_0$ ) и  $\operatorname{tg}^2\psi(\rho)>0$  при  $\rho>0$  ( $\rho>\rho_0$ ). Поэтому можно всегда выделить интервал (0,h) (интервал  $(\rho_0,\rho_0+h)$ ), где h>0, в котором всюду справедливо неравенство (70). Отсюда в силу (71) следует, в частности, что при  $\rho\to+0$  ( $\rho\to\rho_0+0$ ) должен существовать предел  $\lim_{\rho\to\infty}Q(\rho)=Q_0<1$ . Аналогично, если  $\psi(\rho)$  при  $\rho\to\infty$  имеет горизонтальную асимптоту  $\psi=\psi_\infty$ , где  $0<|\psi_\infty-n\pi|\leq\pi/2$ , то должен существовать предел  $\lim_{\rho\to\infty}Q(\rho)=Q_\infty<1$ .

Резюмируя сказанное относительно поведения функций  $\psi(\rho)$ ,  $\varphi(\rho)$ , допускаемого требованием непрерывной дифференцируемости поля  $\beta(r,\theta,z)$ , сформулируем

Предложение 7. Среди функций  $\psi(\rho)$ ,  $\varphi(\rho)$ , отвечающих условиям предложений 3 и 4, требованию гладкости поля  $\beta(r,\theta,z)$  соответствуют те и только те, поведение которых подчиняется следующим ограничениям:  $1 |\cos \varphi(\rho)| - (-1)^m \rho \varphi'(\rho) \sin \varphi(\rho) > 0$  при  $\rho > 0$   $(\rho > \rho_0)$ ;  $2 |\psi(\rho) - n\pi| -$  неубывающая функция при  $\rho > 0$   $(\rho > \rho_0)$ ; 3 всюду, где  $|\psi(\rho) - n\pi|' > 0$ , выполняется неравенство  $Q(\rho) = \{ [\rho \sin \varphi(\rho) \operatorname{tg} \psi(\rho)]' \}^2 / \{ 2\rho [\operatorname{tg}^2 \psi(\rho)]' \} < 1$  и всюду, где  $|\psi(\rho) - n\pi|' = 0$ , — равенство  $[\rho \sin \varphi(\rho)]' = 0$ ; 4) выполняется неравенство  $Q_0 < 1$ , а также  $Q_\infty < 1$ , если  $\psi(\rho)$  при  $\rho \to \infty$  имеет горизонтальную асимптоту  $\psi = \psi_\infty$   $(0 < |\psi_\infty - n\pi| \le \pi/2)$ , где  $Q_0$  и  $Q_\infty$  — предельные значения  $Q(\rho)$  при  $\rho \to +0$   $(\rho \to \rho_0 +0)$  и при  $\rho \to \infty$ .

**9.** Предложения 1–7 и замечания 1–4 позволяют дать конструктивное описание полей, исчерпывающих класс  $C^{(1)}(R^3, \mathfrak{L}_{uas}(R^3))$ . Сформулируем теорему.

**Теорема.** Соответствие  $X=X(r,\theta,z)\to \beta=\beta(r,\theta,z)$  определяет векторное поле класса  $C^{(1)}(R^3,\mathfrak{L}_{\mathsf{UAS}}(R^3)),$  если оно представимо в виде  $\beta=\beta(r,\theta,z)=\{(-1)^ni_z$  при r=0;  $\beta_+(r,\theta,z)$  при  $r>0\},$  где  $\beta_+(r,\theta,z)=\{(\rho/r)\sin\psi(\rho)\big[\big(\sin\varphi(\rho)+(z/\rho)\,\mathrm{tg}\,\psi(\rho)\big)i_r(\theta)-\cos\varphi(\rho)i_\theta(\theta)\big]+\cos\psi(\rho)i_z\}\Big|_{\rho=\rho(r,z)},$  и при этом:

1)  $\rho$  как функция r, z определяется неявно уравнением

$$\rho^2 \cos^2 \varphi(\rho) + [\rho \sin \varphi(\rho) + z \operatorname{tg} \psi(\rho)]^2 - r^2 = 0;$$



- 2)  $\psi(\rho)$ ,  $\varphi(\rho)$  непрерывны на  $R_+ = [0, +\infty)$  и подчиняются ограничениям:  $\psi(0) = n\pi$ ,  $0 < \psi(\rho) n\pi < \pi/2$  (либо  $-\pi/2 < \psi(\rho) n\pi < 0$ ),  $-\pi/2 < \varphi(\rho) m\pi < \pi/2$  при  $\rho > 0$ , где  $n, m \in \mathbb{Z}$ , причем  $|\psi(\rho) n\pi|$  неубывающая функция;
- 3) производная  $\psi'(\rho)$  также непрерывна на промежутке  $R_+$ , причем  $\psi'(0) = 0$ , а производная  $\varphi'(\rho)$  непрерывна на  $R_+$ , за исключением, быть может, точки  $\rho = 0$ ;
  - 4) функции  $\psi(\rho)$ ,  $\varphi(\rho)$  и их производные удовлетворяют условиям (a)–(e):
  - (a)  $\varphi'(\rho)\sin\psi(\rho) \to 0$ ,  $\varphi'(\rho)\rho^{-2}\operatorname{tg}^2\psi(\rho) \to 0$  npu  $\rho \to 0$ ,
  - (b) существует предел производной  $\left[\rho^{-1}\operatorname{tg}\psi(\rho)\cos\varphi(\rho)\right]'$  при  $\rho\to0$ ,
  - (c)  $|\cos \varphi(\rho)| (-1)^m \rho \varphi'(\rho) \sin \varphi(\rho) > 0$  npu  $\rho > 0$ ,
- $(d) \ [\rho \sin \varphi(\rho)]' = 0 \$ всюду, где  $|\psi(\rho) n\pi|' = 0$ , а всюду, где  $|\psi(\rho) n\pi|' > 0$ , выполняется неравенство  $Q(\rho) = \{ [\rho \sin \varphi(\rho) \operatorname{tg} \psi(\rho)]' \}^2 / \{ 2\rho [\operatorname{tg}^2 \psi(\rho)]' \} < 1$ ,
- (e) существует предел  $\lim_{\rho \to +0} Q(\rho) = Q_0$ , а если  $\psi(\rho)$  при  $\rho \to \infty$  имеет горизонтальную асимптоту  $\psi = \psi_\infty$   $(0 < |\psi_\infty n\pi| \le \pi/2)$ , то существует и предел  $\lim_{\rho \to \infty} Q(\rho) = Q_\infty$ , причем  $Q_0 < 1$ ,  $Q_\infty < 1$ .

Ротор и дивергенция полей класса  $C^{(1)}(R^3, \mathfrak{L}_{uas}(R^3))$  при условиях теоремы выражаются в явном виде формулами (59)–(63).

Если задачу о нахождении поля, принадлежащего классу  $C^{(1)}(R^3, \mathfrak{L}_{uas}(R^3))$ , ставить, следуя И. С. Громеке, то ее решение предусматривает интегрирование системы

$$\{ [\beta, \operatorname{rot}\beta] = 0, \quad |\beta| = 1 \}, \tag{72}$$

при условиях  $\beta \in C^{(1)}(R^3)$ ,  ${\rm rot}\beta \neq 0$  п. в. в  $R^3$  и дополнительном условии самосовместимости поля  $\beta$  при повороте на любой угол вокруг координатной оси  $OX_3$ , направленной вдоль оси симметрии. В цилиндрических координатах это дополнительное условие эквивалентно условиям  $\beta_r = \beta_r(r,z), \ \beta_\theta = \beta_\theta(r,z), \ \beta_z = \beta_z(r,z)$  на компоненты поля  $\beta$  относительно базиса  $\{i_r(\theta), i_\theta(\theta), i_z\}$ , а система (72) эквивалентна следующей системе скалярных уравнений относительно этих компонент:

$$\left(\beta_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \beta_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \beta_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \beta_\nu = \chi_\nu \quad (\nu = r, \theta, z); \qquad \beta_r^2 + \beta_\theta^2 + \beta_z^2 = 1,$$

где  $\chi_r = \beta_\theta^2/r$ ,  $\chi_\theta = -\beta_\theta^2 \beta_r/r$ ,  $\chi_z = 0$ .

Одно из семейств полей класса  $C^{(1)}(R^3, \mathfrak{L}_{uas}(R^3))$ , каждое из которых заведомо удовлетворяет системе (72), найдено в работе [2]. В настоящей же работе устанавливается вид полей, по построению исчерпывающих класс  $C^{(1)}(R^3, \mathfrak{L}_{uas}(R^3))$ , а стало быть и класс всех аксиально симметричных решений системы (72).

Примером поля из класса  $C^{(1)}(R^3, \mathfrak{L}_{uas}(R^3))$  может служить векторное поле, сконструированное посредством скалярных полей

$$\psi = n\pi + \operatorname{arctg}(k\widetilde{\rho}^2/\sqrt{1+\widetilde{\rho}^2}), \qquad \varphi = m\pi - (-1)^m \operatorname{arcsin}(\lambda\widetilde{\rho}/\sqrt{1+\widetilde{\rho}^2}).$$
 (73)

Здесь n и m — фиксированные целые числа, k — не равная нулю произвольная постоянная,  $\widetilde{\rho}=\rho/\Delta,\ \lambda=k\zeta/\Delta,$  где  $\Delta,\ \zeta$  — произвольные постоянные, причем  $\Delta>0.$  Поля (73) удовлетворяют всем условиям теоремы, если  $|\lambda|<1.$  При таких  $\psi,\varphi$  в соответствии с теоремой имеем

$$\beta = \frac{(-1)^n}{\sqrt{P_2(\tilde{\rho}^2)}} \left\{ \frac{k\tilde{\rho}^2}{\sqrt{1+\tilde{\rho}^2\sigma}} \left[ \tilde{\rho}\tau i_r(\theta) - (-1)^m \sqrt{P_1(\tilde{\rho}^2)} i_\theta(\theta) \right] + \sqrt{1+\tilde{\rho}^2} i_z \right\} \Big|_{\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\tilde{r},\tau)}.$$
(74)

Здесь  $P_2(\widetilde{\rho}^2)=1+\widetilde{\rho}^2+k^2\widetilde{\rho}^4,\ P_1(\widetilde{\rho}^2)=1+(1-\lambda^2)\widetilde{\rho}^2,\ \sigma=1-\lambda^2+\tau^2,\ \tau=k(z-\zeta)/\Delta,$   $\widetilde{\rho}(\widetilde{r},\tau)=\sqrt{\left[\widetilde{r}^2-1+\sqrt{(\widetilde{r}^2-1)^2+4\sigma\widetilde{r}^2}\right]/(2\sigma)},$  где  $\widetilde{r}=r/\Delta.$  Ротор и дивергенция поля (74) выражаются формулами:

$$\operatorname{rot}\beta = \frac{(-1)^{m+1}(k/\Delta)\widetilde{\rho}P_4(\widetilde{\rho}^2)}{P_2(\widetilde{\rho}^2)U_2(\widetilde{\rho}^2)\sqrt{P_1(\widetilde{\rho}^2)}}\beta, \qquad \operatorname{div}\beta = \frac{2(-1)^n(k/\Delta)\tau\widetilde{\rho}^2(2+\widetilde{\rho}^2)\sqrt{1+\widetilde{\rho}^2}}{U_2(\widetilde{\rho}^2)\sqrt{P_2(\widetilde{\rho}^2)}},$$

где 
$$\widetilde{\rho}=\widetilde{\rho}(\widetilde{r},\tau),\ P_4(\widetilde{\rho}^2)=[(1-\lambda^2)\widetilde{\rho}^2(2+\widetilde{\rho}^2)+1]P_2(\widetilde{\rho}^2)+(1+\widetilde{\rho}^2)(2+\widetilde{\rho}^2)P_1(\widetilde{\rho}^2),\ U_2(\widetilde{\rho}^2)=\sigma\widetilde{\rho}^2(2+\widetilde{\rho}^2)+1.$$



**Замечание 6.** Предложения 1–7 и замечания 1–5 позволяют также дать описание полей, исчерпывающих класс

$$C^{(1)}(R^3, \mathfrak{T}_{\text{uas}}(R^3 \backslash D), \mathfrak{L}_{\text{uas}}(D)) \tag{75}$$

единичных аксиально симметричных векторных полей, гладких в  $R^3$ , но с разными в смежных областях вихревыми свойствами, а именно потенциальных (следуя [4], потенциальные в G поля относим к классу  $\mathfrak{T}(G)$  поперечно вихревых полей) в  $R^3\backslash D$  и продольно вихревых в D, где область D определяется формулой (30),  $R^3\backslash D$  — прямой круговой цилиндр радиуса  $\rho_0$ , ось которого совпадает с осью симметрии поля. Вид этих полей определяется формулами (51), (50), если функции  $\psi(\rho)$ ,  $\varphi(\rho)$  подчиняются условиям (20) предложения 3 и условиям предложений 4, 7. Зависимость переменной  $\rho$  от переменных r,z при  $r\in [0,\rho_0]$  имеет вид  $\rho(r,z)=r$  (см. (39)), а при  $r>\rho_0$  определяется неявно уравнением (32). Ротор и дивергенция полей из (75) выражаются формулами (59)–(63). Из этих формул и из конструкции класса (75) следует, что (75) исчерпывает класс всех аксиально симметричных решений системы уравнений:

$$rot\beta = 0 \quad B \quad R^3 \setminus D, \qquad [\beta, rot\beta] = 0 \quad B \quad D, \qquad |\beta| = 1 \quad B \quad R^3$$
 (76)

при условиях  $\beta \in C^{(1)}(R^3)$ ,  $\operatorname{rot}\beta \neq 0$  п. в. в D. Постановку задачи об интегрировании системы (76) можно рассматривать как распространение задачи (72) Громеки на случай разнородных по вихревым свойствам гладких векторных полей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-00014, 08-01-00213, 08-01-00320) и гранта для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект HIII-1071.2008.1).

### Библиографический список

- 1. Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И. К построению единичных продольно вихревых векторных полей с помощью гладких отображений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 82–91
- 2. Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И. Продольно вихревые единичные векторные поля из класса аксиально симметричных полей // Тр. Ин-та математи-

ки и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 92-98.

- 3. *Громека И.С.* Собрание сочинений. М.: Из-во АН СССР, 1952. 296 с.
- 4. Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И. Преобразование, изменяющее геометрическое строение векторного поля // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 1. С. 111–121.

УДК 517.984

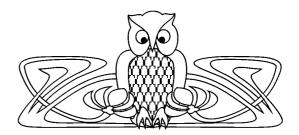
### О СПЕКТРАЛЬНОСТИ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М.И. Исмайлов

Бакинский государственный университет, кафедра теории функций и функционального анализа E-mail: miqdadismailov@rambler.ru

Работа посвящена исследованию спектральности матричных операторов в банаховом пространстве. Ведется исследование спектральных свойств некоторого матричного оператора, получаемого при линеаризации полиномиального операторного пучка.

**Ключевые слова:** спектральная мера, разложение единицы, спектральный оператор, матричный оператор, полиномиальный операторный пучок.



## On Spectral Property of Matrix Operators in Banach Space

M.I. Ismailov

Baku State University,

Chair of Theory of Function and Functional Analysis E-mail: miqdadismailov@mail.ru

The paper is covers to the investigation of spectral property of matrix operators in Banach space. One matrix operator obtained on linearization of a polynomial operator bundle is being searched resolution of identity for its spectral properties.

**Key words:** spectral measure, unit expansion, spectral operator, matrix operator, polynomial operator bundle.

(С) М.И. Исмайлов, 2009



Известно, что нормальные операторы обладают счётно-аддитивным спектральным разложением на борелевских подмножествах комплексной плоскости. Одной из важных задач теории операторов является изучение класса операторов, спектральные свойства которых аналогичны спектральным свойствам нормальных операторов. К таким классам относится класс спектральных операторов, изученный Н. Данфордом и его сотрудниками. Известны труды (напр., [1–6]) многих математиков, работавших в этом направлении.

Большое количество задач теории обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными и математической физики требуют в соответствующих пространствах исследования спектральных свойств матричных операторов, т.е. оператор-матриц, элементы которых сами являются некоторыми операторами. Поэтому представляет интерес изучение спектральных свойств матричных операторов. Известно, что спектральность матричных операторов с коммутативными матричными элементами была изучена Н. Данфордом [1] в гильбертовом пространстве, где рассматриваются спектральные матричные операторы конечного типа. В отличие от [1] в данной работе вопрос спектральности матричного оператора изучается в банаховом пространстве, вообще говоря, с некоммутативными элементами, а также устанавливаются соотношения между спектром матричного оператора и спектрами его элементов. Эти результаты при n=2 получены в работах [7, 8].

### 1. СПЕКТРАЛЬНОСТЬ МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть X — банахово пространство,  $X^n = X \times X \times \ldots \times X$  — прямое произведение n экземпляров пространства X. Пусть  $\tilde{A}$  — линейный ограниченный оператор, действующий в  $X^n$ . Тогда очевидно, что  $\tilde{A}$  задается некоторой матрицей  $\tilde{A} = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ , где  $A_{ij}$   $(i,j=1,\ldots,n)$  — линейные ограниченные операторы в X. Норму оператора  $\tilde{A}$  можно определить как  $\|\tilde{A}\| = \sup_{1 \leq i,j \leq n} \|A_{ij}\|$ .

**Теорема 1.** Пусть  $A_{ij}$   $(i \neq j)$  — коммутирующие квазинильпотентные операторы,  $A_{ii}$  — спектральные операторы, кроме того,  $A_{ii}A_{ij} = A_{ij}A_{jj}$ . Тогда оператор  $\tilde{A}$  спектрален c разложением единицы  $\tilde{E}(\cdot) = (E_{ij})_{i,j=1}^n$ , где  $E_{ij}$  — разложение единицы  $A_{ij}$ , причем спектр  $\sigma(\tilde{A})$  оператора  $\tilde{A}$  определяется равенством  $\sigma(\tilde{A}) = \bigcup_{i=1}^n \sigma(A_{ii})$ .

**Доказательство.** Представим оператор  $\tilde{A}$  в виде суммы операторов:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & 0 & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2.$$

Покажем, что оператор  $\tilde{A}_1$  является спектральным оператором с разложением единицы  $\tilde{E}(\cdot)==(E_{ij})_{i,j=1}^n$ . Очевидно, что  $\tilde{E}(\cdot)$  является спектральной мерой и для любого борелевского множества  $\sigma$ , сужение  $\tilde{A}_{1\sigma}$  оператора  $\tilde{A}_1$  на подпространство  $\tilde{E}(\cdot)X^n$  определяется матрицей  $\tilde{A}_{1\sigma}=(\delta_{ij}A_{ij\sigma})_{i,j=1}^n$ , где  $A_{ij\sigma}$  — сужение оператора  $A_{ij}$  на подпространство  $E_{ij}X$ , а  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Тогда, легко показать, что  $\sigma(\tilde{A}_{1\sigma})=\bigcup_{i=1}^n\sigma(A_{ii\sigma})$ , в частности  $\sigma(\tilde{A}_1)=\bigcup_{i=1}^n\sigma(A_{ii})$ . В силу того, что  $A_{ii}$  являются спектральными, для любого борелевского множества  $\sigma\in\Sigma$  имеет место включение  $\sigma(A_{ii\sigma})\subseteq\bar{\sigma}$ , значит,  $\sigma(\tilde{A}_{1\sigma})\subseteq\bar{\sigma}$ ,  $A_{ij}\in\Sigma$ . Так как операторы  $A_{ij}$  коммутируют с операторами  $E_{ij}$ , то легко показать, что оператор  $\tilde{A}_1$  коммутирует с оператором  $\tilde{E}(\cdot)$  и, следовательно, оператор  $\tilde{A}_1$  спектрален с разложением единицы  $\tilde{E}(\cdot)$ .

Теперь рассмотрим оператор  $\tilde{A}_2$ . В силу перестановочности и квазинильпотентности операторов  $A_{ij}$   $(i \neq j)$ , учитывая указанное определение нормы матричного оператора, легко показать квазинильпотентность оператора  $\tilde{A}_2$ . Далее покажем, что оператор  $\tilde{A}_2$  перестановочен с оператором  $\tilde{A}_1$ . Имеем

$$\tilde{A}_{1}\tilde{A}_{2} = \begin{pmatrix} 0 & A_{11}A_{12} & \dots & A_{11}A_{1n} \\ A_{22}A_{21} & 0 & \dots & A_{22}A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{nn}A_{n1} & A_{nn}A_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12}A_{22} & \dots & A_{1n}A_{nn} \\ A_{21}A_{11} & 0 & \dots & A_{2n}A_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}A_{11} & A_{n2}A_{22} & \dots & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A}_{2}\tilde{A}_{1}.$$



Таким образом, оператор  $ilde{A}$  спектрален, поскольку он представим в виде суммы спектрального оператора  $\hat{A}_1$  и перестановочного с ним квазинильпотентного оператора  $\hat{A}_2$ .

Так как оператор  $\tilde{A}_2$  квазинильпотентен, тогда  $\sigma(\tilde{A}) = \sigma(\tilde{A}_1)$ , тем самым  $\sigma(\tilde{A}) = \bigcup_{i=1}^n \sigma(A_{ii})$ . Теорема доказана.

Определим операторы  $A_{n+1i} = A_{1i}$  и  $A_{in+1} = A_{i1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Теорема 2.** Пусть  $A_{ij}$   $(i,j=1,\ldots,n,\ i\neq j+1)$  — коммутирующие квазинильпотентные операторы, а операторы  $A_{i+1i}$  попарно коммутируют, причем оператор  $A = A_{21}A_{32}\cdots A_{1n}$  спектрален, точка нуль является изолированной точкой спектра  $\sigma(A)$  или оператор A ограниченно обратим. Пусть, кроме того, выполнено соотношение  $A_{i+1}A_{ij} = A_{i+1}A_{j+1}A_{j+1}$ , j, i = 1, ..., n.

Тогда оператор  $ilde{A}$  спектрален и  $\sigma( ilde{A})=h(\sigma(A))$ , где h(z) — одна из аналитических в спектре  $\sigma(A)$  однозначных ветвей функции  $\sqrt[n]{z}$ .

**Доказательство.** Представим оператор  $\tilde{A}$  в виде суммы операторов:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & A_{1n} \\ A_{21} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & A_{nn-1} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2.$$

Рассмотрим оператор  $\tilde{A}_1$ . Очевидно, что  $\tilde{A}_1^n=(\delta_{ij}A)_{i,j=1}^n$ , где  $A=\prod_{i=1}^n A_{i+1i}$ . Так как оператор Aспектрален, то оператор  $\tilde{A}_1^n$  также спектрален и  $\sigma(\tilde{A}_1^n) = \sigma(A)$ . Из условий теоремы оператор  $\tilde{A}_1^n$  ограниченно обратим или спектр  $\sigma(\tilde{A}_1^n)$  содержит точку нуль как изолированную, тогда в силу [3] или [4] получаем, что оператор  $\tilde{A}_1$  спектрален и согласно теореме об отображении спектра  $\sigma(\tilde{A}_1) = h(\sigma(\tilde{A}_1^n))$ .

Теперь рассмотрим оператор  $ilde{A}_2$ . Так как в силу условия теоремы операторы  $ilde{A}_{ij}$   $(i,j=1,\ldots,n,n)$  $i \neq j+1$ ) коммутируют и квазинильпотентны, то легко показать, что оператор  $ilde{A}_2$  квазинильпотентен. Покажем, что операторы  $ilde{A}_1$  и  $ilde{A}_2$  коммутируют. Имеем

$$\tilde{A}_{1}\tilde{A}_{2} = \begin{pmatrix} A_{1n}A_{n1} & \dots & A_{1n}A_{nn-2} & 0 & A_{1n}A_{nn} \\ A_{21}A_{11} & \dots & A_{21}A_{1n-1} & A_{21}A_{1n-1} & 0 \\ 0 & \dots & A_{32}A_{2n-2} & A_{32}A_{2n-1} & A_{32}A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{nn-1} & \dots & 0 & A_{nn-1}A_{n-1n-1} & A_{nn-1}A_{n-1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{12}A_{21} & \dots & A_{1n-1}A_{n-1n-2} & 0 & A_{11}A_{1n} \\ A_{22}A_{21} & \dots & A_{2n-1}A_{n-1n-2} & A_{2n}A_{nn-1} & 0 \\ 0 & \dots & A_{3n-1}A_{n-1n-2} & A_{3n-1}A_{nn-1} & A_{31}A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n2}A_{21} & \dots & 0 & A_{nn}A_{nn-1} & A_{n1}A_{1n} \end{pmatrix} = \tilde{A}_{2}\tilde{A}_{1}.$$

Следовательно, оператор  $ilde{A}$  спектрален, поскольку он представим в виде суммы спектрального оператора  $ilde{A}_1$  и перестановочного с ним квазинильпотентного оператора  $ilde{A}_2$ , причем в силу того что  $\sigma(A) = \sigma(A_1)$ , имеем  $\sigma(A) = h(\sigma(A))$ . Теорема доказана.

В дальнейшем, говоря об определителе матричного оператора, будем понимать оператор, составленный из матричных элементов с помощью действий нахождения определителя числовой матрицы.

Обозначим через  $\left| \tilde{A}_k \ \frac{j_1 j_2, \dots, j_k}{i_1 i_2, \dots, i_k} \right|$  — минор k-го порядка оператор-матрицы  $\tilde{A}$ , составленный из строк

с номерами  $i_1, i_2, \ldots, i_k$  и столбцов с номерами  $j_1, j_2, \ldots, j_k$ , а через A — оператор  $A = \sum\limits_{i=1}^n A_{ii}$ . **Теорема 3.** Пусть операторы  $A_{ij}$  коммутируют,  $\left| \tilde{A}_k \, \frac{i_1 i_2, \ldots, i_k}{i_1 i_2, \ldots, i_k} \, \right| = 0 \,\, (2 \leq k \leq n), \,\, 0 \in \sigma(A)$ .

Tогда  $\sigma(\tilde{A})=\sigma(A)$ , кроме того, если A — спектральный оператор, то  $\tilde{A}$  является спектральным оператором с разложением единицы  $\tilde{E}(\cdot) = (\delta_{ij}E(\cdot))_{i,j=1}^n$ , где  $E(\cdot)$  — разложение единицы onepamopa A.



**Доказательство.** Очевидно, что для любых оператор-матриц  $\tilde{C}$  и  $\tilde{D}$  справедливо  $|\tilde{C}||\tilde{B}|=|\tilde{C}\tilde{B}|$ . Тогда в силу того что  $|\tilde{A}|=0$ , ясно, что  $0\in\sigma(\tilde{A})$ .

Пусть  $\lambda \neq 0$ . Рассмотрим оператор  $\tilde{A} - \lambda \tilde{I}$ , где  $\tilde{I}$  — единичный оператор в  $X^n$ . Легко показать, что  $|\tilde{A} - \lambda \tilde{I}| = (-1)^n (\lambda^n I - \lambda^{n-1} A)$ . Пусть  $\lambda \in \rho(\tilde{A})$ . Обозначим через  $R_{\lambda}(\tilde{A})$  оператор  $(\tilde{A} - \lambda \tilde{I})^{-1}$ . Имеем  $|\tilde{A} - \lambda \tilde{I}| |R_{\lambda}(\tilde{A})| = |\tilde{I}| = I$ , отсюда  $(-1)^n (\lambda^n I - \lambda^{n-1} A) |R_{\lambda}(\tilde{A})| = I$ . Следовательно,  $\lambda \in \rho(A)$ . Обратно, пусть  $\lambda \in \rho(A)$ . Рассмотрим оператор-матрицу

$$R_{\lambda}(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} B_{11}R_{\lambda}(A) & B_{21}R_{\lambda}(A) & \dots & B_{n1}R_{\lambda}(A) \\ B_{12}R_{\lambda}(A) & B_{22}R_{\lambda}(A) & \dots & B_{n2}R_{\lambda}(A) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{1n}R_{\lambda}(A) & B_{2n}R_{\lambda}(A) & \dots & B_{nn}R_{\lambda}(A) \end{pmatrix},$$

где  $B_{ij}$  — алгебраическое дополнение  $A_{ij} - \lambda \delta_{ij}I$ ,  $R_{\lambda}(A) = (-1)^n(\lambda^nI - \lambda^{n-1}A)^{-1}$ . Тогда, очевидно, что  $(\tilde{A} - \lambda \tilde{I})R_{\lambda}(\tilde{A}) = \tilde{I}$ , т.е.  $\lambda \in \rho(\tilde{A})$ . Таким образом,  $\sigma(\tilde{A}) = \sigma(A)$ .

Покажем, что оператор  $\tilde{A}$  является спектральным. Пусть A — спектральный оператор с разложением единицы  $\tilde{E}(\cdot)$ . Так как оператор  $E(\cdot)$  коммутирует с каждым из операторов  $A_{ij}$ , то очевидно, что  $\tilde{E}(\cdot)$  коммутирует с  $\tilde{A}$  и является счетно-аддитивной спектральной мерой. В то же время, аналогично сказанному, можно показать, что при любом борелевском подмножестве  $\sigma$  комплексной плоскости спектры  $\sigma(\tilde{A}_{\sigma})$  и  $\sigma(A_{\sigma})$  равны, где  $\tilde{A}_{\sigma}$  и  $A_{\sigma}$  сужения соответственно операторов  $\tilde{A}$  и A на подпространства  $\tilde{E}(\cdot)X^n$  и  $E(\cdot)X$ . Тогда поскольку оператор A спектрален, то  $\sigma(A_{\sigma})\subseteq \bar{\sigma}$ , значит,  $\sigma(\tilde{A}_{\sigma})\subseteq \bar{\sigma}$ . Теорема доказана.

### 2. ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ НЕКОТОРОГО МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА

Перейдем к изучению спектральности матричного оператора, получаемого при линеаризации полиномиального операторного пучка:

$$L(\lambda) = I - A_0 - \lambda A_1 - \lambda^2 A_2 - \dots - \lambda^n A_n,$$

где  $A_i$   $(i=0,1,\ldots,n)$  — линейные ограниченные операторы в X, I — тождественный оператор в X. А именно известно, что при линеаризации указанного пучка в пространстве  $X^n$  приходится рассматривать операторный пучок вида  $\tilde{L}(\lambda)=\tilde{I}-\tilde{B}_0-\lambda\tilde{B}_1$ , где

$$\tilde{B}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & A_n \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что оператор  $I-A_0$  ограниченно обратим, тогда вместо указанного пучка удобно рассматривать пучок вида  $\tilde{L}_1(\lambda)=\tilde{I}-\lambda \tilde{C}$ , где

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} (I - A_0)^{-1} A_1 & (I - A_0)^{-1} A_2 & \dots & \dots & (I - A_0)^{-1} A_n \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix}.$$

Прежде чем изучить спектральные свойства оператора  $\tilde{C}$ , установим некоторые спектральные связи операторов  $\tilde{B}_1$  и  $A_n$ .

**Теорема 4.** Пусть  $A_n$  — ограниченно обратимый оператор. Оператор  $A_n$  является спектральным оператором c разложением единицы  $E(\cdot)$  тогда и только тогда, когда оператор  $\tilde{B}_1$  является спектральным оператором c разложением единицы  $\tilde{E}_1(\cdot) = (\delta_{ij}E_1(\cdot))_{i,j=1}^n$ , где  $E_1(\cdot) = (h(\cdot))$ , а h(z) — некоторая однозначная аналитическая ветвь функции  $\sqrt[n]{z}$ , причем  $\sigma_p(\tilde{B}_1) = h(\sigma_p(A_n))$ ,  $\sigma_c(\tilde{B}_1) = h(\sigma_c(A_n))$ ,  $\sigma_r(\tilde{B}_1) = h(\sigma_r(A_n))$ .

**Доказательство.** *Необходимость*. Пусть  $A_n$  ограниченно обратимый спектральный оператор с разложением единицы  $E(\cdot)$ . Рассмотрим оператор  $\tilde{B}_1^n$ . Очевидно, что  $\tilde{B}_1^n = (\delta_{ij} A_n)_{i,j=1}^n$ . Поскольку



операторы  $\tilde{B}_1^n$  и  $A_n$  имеют аналогичные свойства, то  $\tilde{B}_1^n$  — ограниченно обратимый спектральный оператор с разложением единицы  $\tilde{E}(\cdot) = (\delta_{ij}E(\cdot))_{i,j=1}^n$ , причем  $\sigma(\tilde{B}_1^n) = \sigma(A_n)$ . Тогда согласно работам [3] или [4] оператор  $\tilde{B}_1$  спектрален и имеет разложение единицы  $\tilde{E}_1(\cdot)$ .

Достаточность. Пусть оператор  $A_n$  ограниченно обратим, а оператор  $\tilde{B}_1$  спектрален с разложением единицы  $\tilde{E}_1(\cdot)$ . Покажем, что оператор  $A_n$  спектрален с разложением единицы  $E_1(\cdot)$ , где  $E_1(\cdot)=E(h(\cdot))$ . Рассмотрим оператор  $\tilde{B}_1^n$ . Ясно, что  $\tilde{B}_1^n$  спектральный оператор с некоторым разложением единицы  $\tilde{E}(\cdot)$ , определяемый матрицей  $\tilde{E}(\cdot)=(E_{ij}(\cdot))_{i,j=1}^n$ .

Покажем, что  $E_{ij}(\cdot)=0$   $(i\neq j)$ ,  $E_{ii}(\cdot)=E(\cdot)$ . Для этого рассмотрим операторы:  $\tilde{I}_{ij}$  — оператор, в котором  $A_{ij}=\tilde{I}$ , а все остальные равны нулю,  $\tilde{I}_i$  — оператор, в котором в первой строке i-й элемент I, а остальные — 0, во второй строке i+1-й элемент I, а остальные — 0 и т.д.,  $\tilde{J}$  — матричный оператор, в котором элементы побочной диагонали, — единичные операторы, а остальные — нулевые операторы.

Очевидно, что оператор  $\tilde{B}_{1}^{n}$  коммутирует с каждым из операторов  $\tilde{I}_{ij}$ ,  $\tilde{I}_{i}$  и  $\tilde{J}$ . Поскольку разложение единицы спектрального оператора коммутирует с каждым оператором, коммутирующим со спектральным оператором, то оператор  $\tilde{E}(\cdot)$  коммутирует с операторами  $\tilde{I}_{ij}$ ,  $\tilde{I}_{i}$  и  $\tilde{I}_{11}$ . Далее легко показать, что из равенств  $\tilde{E}(\cdot)\tilde{I}_{ij}=\tilde{I}_{ij}\tilde{E}(\cdot)$ ,  $\tilde{E}(\cdot)\tilde{I}_{i}=\tilde{I}_{i}\tilde{E}(\cdot)$ ,  $\tilde{E}(\cdot)\tilde{J}=\tilde{J}\tilde{E}(\cdot)$  получается, что  $E_{ij}(\cdot)=0$  ( $i\neq j$ ),  $E_{ii}(\cdot)=E(\cdot)$ . В силу того что  $\tilde{E}(\cdot)$  — спектральная мера, очевидно, спектральной мерой будет и оператор  $E(\cdot)$ . Покажем, что  $E(\cdot)$  — разложение единицы оператора  $A_{n}$ . Так как  $\tilde{B}_{1}^{n}\tilde{E}(\cdot)=\tilde{E}(\cdot)\tilde{B}_{1}^{n}$ , то  $A_{n}E(\cdot)=E(\cdot)A_{n}$ . Пусть  $\sigma$  — произвольное борелевское подмножество комплексной плоскости. Ясно, что  $\sigma((\tilde{B}_{1}^{n})_{\sigma})=\sigma((A_{n})_{\sigma})$ , где  $(\tilde{B}_{1}^{n})_{\sigma}$ ,  $(A_{n})_{\sigma}$  — сужения соответственно операторов  $\tilde{B}_{1}^{n}$  и  $A_{n}$  на соответствующие подпространства  $\tilde{E}(\cdot)X^{n}$ ,  $E(\cdot)X$ . Следовательно, поскольку  $\sigma((\tilde{B}_{1}^{n})_{\sigma})\subseteq\bar{\sigma}$ , то  $\sigma((A_{n})_{\sigma})\subseteq\bar{\sigma}$  и оператор  $A_{n}$  спектрален с разложением единицы  $E(\cdot)$ .

Теперь докажем вторую часть теоремы. Пусть  $\lambda \in \sigma_p(\tilde{B}_1)$ . Так как  $\sigma(\tilde{B}_1^n) = \sigma(A_n)$ , то в силу ограниченной обратимости  $A_n$ , ясно, что  $\sigma(\tilde{B}_1) = h(\sigma(A_n))$  тогда и только тогда, когда операторы  $\tilde{B}_1 - \lambda \tilde{I}$  и  $A_n - \lambda^n I$  взаимно однозначны. Следовательно,  $\lambda^n \in \sigma_p(A_n)$ .

Обратно, пусть  $\lambda \in \sigma_r(\tilde{B}_1)$ . Тогда существует ненулевой  $\tilde{f}=(f_1,f_2,\ldots,f_n)\in (X^*)^n$ , такой что  $\tilde{f}((\tilde{B}_1-\lambda \tilde{I})\tilde{x})=0,\ \tilde{x}\in X^n$ . Переходя к координатам, получим

$$0 = (f_1, f_2, \dots, f_n) \begin{pmatrix} A_n x_n - \lambda x_1 \\ x_1 - \lambda x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} - \lambda x_n \end{pmatrix} = f_1(A_n x_n - \lambda x_1) + f_2(x_1 - \lambda x_2) + \dots + f_n(x_{n-1} - \lambda x_n).$$

Покажем, что функционал  $f_1$  ненулевой. В самом деле, если  $f_1=0$ , то выбирая вектор  $\tilde{x}_j\in X^n$   $(j=1,\ldots,n-1)$ , так чтобы  $x_i=\lambda x_{i+1}$   $(i=1,\ldots,n-1,i\neq j)$ , из последнего соотношения получаем

$$f_{i+1}(x_i - \lambda x_{i+1}) = 0, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Так как вектора  $x_j$  и  $x_{j+1}$  произвольны, то  $f_{j+1}=0$ , значит,  $\tilde{f}=\tilde{0}$ , что приводит к противоречию предположения. Следовательно, функционал  $f_1$  ненулевой. Тогда, подобрав вектор  $\tilde{x}\in X^n$  так, чтобы  $x_i=\lambda x_{i+1}$   $(i=1,\ldots,n-1)$ , получаем

$$0 = f_1(A_n x_n - \lambda x_1) + f_2(x_1 - \lambda x_2) + \dots + f_n(x_{n-1} - \lambda x_n) = f_1(A_n x_n - \lambda^n x_n).$$

Отсюда в силу произвольности элемента  $x_n \in X$  получаем, что  $\lambda^n \in \sigma_r(A_n)$ . Обратно, пусть  $\lambda^n \in \sigma_r(A_n)$ . Тогда существует ненулевой функционал  $f_1$ , такой что  $f_1(A_nx_1-\lambda^nx_1)=0, x_1\in X$ . Рассмотрим в пространстве  $X^n$  функционал  $\tilde{f}=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ , такой что  $f_2=\lambda f_1,\ f_3=\lambda f_2,\ldots$ ,  $f_n=\lambda f_{n-1}$ . Тогда ясно, что  $\tilde{f}$  ненулевой, причем

$$\tilde{f}((\tilde{B}_1 - \lambda \tilde{I})\tilde{x}) = f_1(A_n x_n - \lambda x_1) + f_2(x_1 - \lambda x_2) + \dots + f_n(x_{n-1} - \lambda x_n) =$$

$$= f_1(A_n x_n - \lambda x_1) + \lambda f_1(x_1 - \lambda x_2) + \dots + \lambda^{n-1} f_1(x_{n-1} - \lambda x_n) = f_1(A_n x_n - \lambda^n x_n) = 0.$$

Так как вектор  $\tilde{x}$  произвольный, то  $\lambda \in \sigma_r(\tilde{B}_1)$ . Последнее утверждение теоремы справедливо, поскольку оно вытекает согласно доказанным утверждениям при переходе к дополнениям соответствующих спектров  $\sigma(A_n)$  и  $\sigma(\tilde{B}_1)$ . Теорема доказана.



Теперь перейдем к изучению спектральности оператора  $ilde{C}$ .

**Теорема 5.** Пусть операторы  $A_i$  попарно коммутируют, причем оператор  $A_1$  квазинильпотентен, а оператор  $A_n$  ограниченно обратим. Тогда  $\sigma(\tilde{C}) = h(\sigma((I-A_0)^{-1}A_n))$ , причем если  $(I-A_0)^{-1}A_n$  — спектральный оператор с разложением единицы  $E(\cdot)$ , то  $\tilde{C}$  есть спектральный оператор с разложением единицы  $E(\cdot)$ , а  $E(\cdot)$  и  $E(\cdot)$ 

Доказательство теоремы непосредственно следует из теоремы 2.

Автор выражает благодарность профессору А.М. Ахмедову за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

### Библиографический список

- 1. Данфор∂ Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Спектральные операторы. Т. III. М.: Мир, 1974.
- 2. *Dunford N*. Spectral operators // Pac. J. Math. 1954. V. 4. P. 321–354.
- 3. Stampfli J.G. Roots of scalar operators // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. V. 13. P. 796–798.
- 4. *Аллахвердиев Дж.Э., Ахмедов А.М.* Некоторые классы обобщенных спектральных операторов и их приложения // Мат. сборник. 1990. Т. 67, № 5. С. 43–63.
- 5. Ахмедов А.М. Некоторые спектральные свойства обобщенных спектральных операторов // Линейные

операторы и их приложения. Баку, 1989. С. 3–15. 6.  $Axme\partial os$  A.M. Спектральность полиномиальных операторных пучков // Линейные операторы и их применения. Баку, 1986. С. 5–10.

- 7. *Ismailov M.I.* On spectrum property of matrix operators in Banach space // Proceedings of IMM of NAS of Azerb. 2006. V. XXV (XXXIII). P. 47–52.
- 8. Исмайлов М.И. Исследование спектра и спектральности некоторых матричных операторов в банаховом пространстве // Вестн. Бакин. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. 2007.  $\mathbb{N}_2$  2. С. 36–43.

УДК 517.984

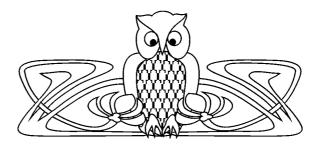
# О БАЗИСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЯДРАМИ, РАЗРЫВНЫМИ НА ЛОМАНЫХ ЛИНИЯХ

### В.П. Курдюмов

Саратовский государственный университет, кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики E-mail: KurdyumovVP@info.sgu.ru

Доказана базисность Рисса собственных и присоединенных функций интегрального оператора, ядро которого терпит разрывы первого рода на ломаных линиях, образованных из сторон и диагоналей квадратов, полученных разбиением единичного квадрата  $0 \le x, t \le 1$  на четыре равных квадрата.

**Ключевые слова:** интегральный оператор, краевые условия, регулярность, базисность Рисса, собственные функции, собственные значения.



# On Riesz Basises of Eigenfunctions of Integral Operators with Kernels Discontinuous on Broken Lines

### V.P. Kurdyumov

Saratov State University, Chair of Differential Equations and Applied Mathematics

E-mail: KurdyumovVP@info.sgu.ru

For the integral operator, which kernel has jump discontinuities on the sides and diagonals of the four equal subsquares of the unit square  $0 \le x, t \le 1$ , Riesz basisness of its eigen and associated

functions is proved.

**Key words:** integral operator, boundary conditions, regularity, Riesz basisness, eigenfunctions, eigenvalues.

В настоящей работе рассматривается вопрос о базисности Рисса в пространстве  $L_2[0,1]$  собственных и присоединенных функций с.п.ф. интегрального оператора:

$$y = Af = \int_{0}^{1} A(x,t)f(t)dt, \tag{1}$$

ядро которого терпит разрывы первого рода на некоторых ломаных в единичном квадрате  $0 \le x, t \le 1$ .



В работах [1–3] интегральный оператор (1) изучался, когда ядро (или его некоторые производные) имело разрывы на линиях t=x и t=1-x. В работе [4] проведено исследование равносходимости по с.п.ф. оператора A и в тригонометрический ряд, когда ядро терпит разрывы на ломаных линиях, образованных из сторон и диагоналей квадратов, полученных разбиением единичного квадрата на  $n^2$  равных квадратов; показано, что исследование оператора (1) может быть для произвольного n сведено к исследованию интегрального оператора B в пространстве вектор-функций той же размерности.

Здесь рассматривается случай n=2, как и в работе [4] получаем оператор

$$z = Bg = \int_{0}^{1/2} B(x,t)g(t)dt, \quad x \in [0,1/2],$$
 (2)

где  $z(x)=(z_1(x),z_2(x))^T,\ g(x)=(g_1(x),g_2(x))^T,\ T$ — знак транспонирования,  $z_k(x)=y\left(\frac{k-1}{2}+x\right),\ g_k(x)=f\left(\frac{k-1}{2}+x\right),\ B(x,t)=(B_{ij}(x,t))_1^2,\ B_{ij}(x,t)=A\left(\frac{i-1}{2}+x,\frac{j-1}{2}+t\right).$  Считаем, что компоненты  $B_{ij}(x,t)$  матрицы B(x,t) имеют вид  $B_{ij}(x,t)=B_{ij}^1(x,t)+B_{ij}^2(x,t)$ , где

Считаем, что компоненты  $B_{ij}(x,t)$  матрицы B(x,t) имеют вид  $B_{ij}(x,t)=B^1_{ij}(x,t)+B^2_{ij}(x,t)$ , где  $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} B^1_{ij} \left( \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} B^2_{ij} \right) (k+l \leq 2$ , причем, если k+l=2, то k=l=1) непрерывны, кроме, быть может, линии t=x, (t+x=1/2). При подходе к каждой такой линии с любой стороны  $B^1_{ij}(x,t)$  и  $B^2_{ij}(x,t)$  принимают постоянные значения. Кроме того, считаем, что  $\frac{\partial}{\partial x} B^1_{ij}(x,x\pm 0)$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} B^2_{ij}(x,1/2-x\pm 0)$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} B^s_{ij}(x,j)$ ,  $s=1,2,\ j=0,1$ , непрерывно дифференцируемы.

Обозначим  $P_1=B(x,x-0)-B(x,x+0),\ P_2=B(x,1/2-x-0)-B(x,1/2-x+0).$  Как и в работе [4, с. 131] предполагаем, что блочная матрица  $\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_1 \end{pmatrix}$  обратима и, кроме того, считаем выполненными условия леммы 14 из работы [4], гарантирующие существование оператора  $B^{-1}$ .

**Лемма 1** [4, теорема 11]. Если  $R_{\lambda}(A) = (E - \lambda A)^{-1}A$  (E - eдиничный оператор,  $\lambda - c$ пектральный параметр) существует, то

$$R_{\lambda}(A)f = \begin{cases} z_1(x), & x \in [0, 1/2], \\ z_2(x - 1/2), & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$
 (3)

еде  $z_1(x)$ ,  $z_2(x)$  — первые две компоненты вектора y(x) размерности 4, удовлетворяющего следующей системе:

$$Qy'(x) + \tilde{P}_1(x)y(0) + \tilde{P}_2(x)y(1/2) + \tilde{P}_3(x)y(x) + \tilde{N}y - \lambda y(x) = \tilde{m}(x), \tag{4}$$

$$\tilde{M}_0 y(0) + \tilde{M}_1 y(1/2) + \int_0^{1/2} \tilde{a}(t) y(t) dt = 0,$$
(5)

еде 
$$Q=\begin{pmatrix}Q_1&-Q_2\\Q_2&-Q_1\end{pmatrix}$$
, причем  $\begin{pmatrix}Q_1&Q_2\\Q_2&Q_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1&P_2\\P_2&P_1\end{pmatrix}^{-1}$ ,  $Q_i$  — блочные матрицы,  $\tilde{P}_1(x)=\begin{pmatrix}a_1(x)&a_2(x)\\0&0\end{pmatrix}$ ,  $\tilde{P}_2(x)=\begin{pmatrix}0&0\\a_2(1/2-x)&a_1(1/2-x)\end{pmatrix}$ ,  $\tilde{P}_3(x)=\begin{pmatrix}a_3(x)&a_4(x)\\a_4(1/2-x)&a_3(1/2-x)\end{pmatrix}$ ,  $\tilde{N}y=\int\limits_0^{1/2}\tilde{N}(x,t)y(t)dt$ ,  $\tilde{N}(x,t)=\begin{pmatrix}a(x,t)&0\\a(1/2-x,t)&0\end{pmatrix}$ ,  $\tilde{M}_0=\begin{pmatrix}S&T\\0&0\end{pmatrix}$ ,  $\tilde{M}_1=\begin{pmatrix}0&0\\T&S\end{pmatrix}$ ,  $\tilde{a}(t)=\begin{pmatrix}a(t)&0\\a(t)&0\end{pmatrix}$ ,  $\tilde{m}(x)=(g^T(x),g^T(1/2-x))^T$ , непрерывные матрицы-функции  $a(x)$ ,  $a(x,t)$ ,  $a_i(x)$   $(i=1,\ldots,4)$  и постоянные матрицы  $S$  и  $T$  (все размерности  $2\times 2$ ) определены в работе  $[4$ , теорема  $[4]$ .

Верно и обратное: если  $\lambda$  таково, что однородная краевая задача для системы (4)–(5) имеет только нулевое решение,то  $R_{\lambda}(A)f$  существует и определяется по формуле (3).

Предположим, что все собственные значения матрицы Q различны, отличны от нуля и пусть  $\Gamma$  — неособая матрица, диагонализирующая  $Q^{-1}$ , то есть  $\Gamma^{-1}Q^{-1}\Gamma = D$ . Выполним в (4)–(5) замену



 $y(x) = \Gamma z(x)$  (теперь z(x) получает новый смысл и имеет размерность 4), тогда система (4)–(5) переходит в систему

$$z'(x) + P_1(x)z(0) + P_2(x)z(1/2) + P_3(x)z(x) + Nz - \lambda Dz(x) = m(x),$$
(6)

$$M_0 z(0) + M_1 z(1/2) + \int_0^{1/2} \Omega(t) z(t) dt = 0,$$
(7)

где  $P_i(x)=D\Gamma^{-1}\tilde{P}_i(x)\Gamma$ ,  $N=D\Gamma^{-1}\tilde{N}\Gamma$ ,  $m(x)=D\Gamma^{-1}\tilde{m}(x)$ ,  $\Omega(t)=\tilde{a}(t)\Gamma$ ,  $M_0=\tilde{M}_0\Gamma$ ,  $M_1=\tilde{M}_1\Gamma$ .

**Лемма 2** [4, лемма 16]. Существует матрица  $H(x,\lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$  с непрерывно дифференцируемыми компонентами матриц  $H_0(x)$ ,  $H_1(x)$ , причем  $H_0(x)$  невырождена при всех x, диагональная и такая, что преобразование  $z = H(x,\lambda)v$  приводит систему (6)–(7) к виду

$$v'(x) + P_1(x,\lambda)v(0) + P_2(x,\lambda)v(1/2) + P_3(x,\lambda)v(x) + N_{\lambda}v - \lambda Dv(x) = m(x,\lambda),$$
(8)

$$U(v) = M_0(\lambda)v(0) + M_1(\lambda)v(1/2) + \int_0^{1/2} \Omega(t,\lambda)v(t)dt = 0,$$
(9)

εθε  $P_1(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)P_1(x)H(0, \lambda)$ ,  $P_2(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)P_2(x)H(1/2, \lambda)$ ,  $P_3(x, \lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x, \lambda) \times [H'_1(x) + P_3(x)H_1(x)]$ ,  $N_{\lambda} = H^{-1}(x, \lambda)NH(x, \lambda)$ ,  $M_0(\lambda) = M_0H(0, \lambda)$ ,  $M_1(\lambda) = M_1H(1/2, \lambda)$ ,  $\Omega(t, \lambda) = \Omega(t)H(t, \lambda)$ ,  $m(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)m(x)$ .

**Лемма 3.** Если  $v(x,\lambda) = (v_1(x,\lambda), \dots, v_4(x,\lambda))^T$  является решением задачи (8)–(9), то

$$R_{\lambda}(A)f = \sum_{j=1}^{4} \gamma_{1j}h_{j}(x)v_{j}(x,\lambda) + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{4} r_{j}(x)v_{j}(x,\lambda), \ x \in [0,1/2],$$

$$R_{\lambda}(A)f = \sum_{i=1}^{4} \gamma_{2j} h_j(x - 1/2) v_j(x - 1/2, \lambda) + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{4} r_j(x - 1/2) v_j(x - 1/2, \lambda), \quad x \in [1/2, 1],$$

где  $\gamma_{i,j}$  — элементы матрицы  $\Gamma$ ,  $h_j(x)$  — диагональные элементы матрицы  $H_0(x)$ ,  $r_j(x) = \sum\limits_{k \neq j} \gamma_{1k} r_{kj}$ ,  $r^j(x) = \sum\limits_{k \neq j} \gamma_{2k} r_{kj}(x)$ ,  $r_{kj}$  — элементы матрицы  $H_1(x)$ .

**Доказательство** следует из леммы 1, введенной замены  $y(x) = \Gamma z(x)$  и леммы 2.

Проведем необходимое исследование системы (8)-(9). Рассмотрим

$$\omega'(x) = \lambda D\omega(x) + m(x),\tag{10}$$

$$U(\omega) = 0, (11)$$

где  $U(\cdot)$  берется из (9), а m(x) — произвольная вектор-функция с компонентами из  $L_2[0,1/2].$ 

Нетрудно получается следующее утверждение.

**Лемма 4.** Элементы матрицы D симметричны относительно начала координат. Кроме того, все они расположены на двух разных прямых, проходящих через начало координат, если выполняется условие

$$\operatorname{Re} \frac{s_1^2}{s_2} \neq 2 + |\mu| + \frac{1}{|\mu|},$$
 (12)

и на одной прямой, если

Re 
$$\frac{s_1^2}{s_2} = 2 + |\mu| + \frac{1}{|\mu|}, \quad |\mu| \neq 1,$$
 (13)

где  $s_1=q_{11}^2+2q_{12}q_{21}+q_{22}^2-g_{11}^2-2g_{12}g_{21}-g_{22}^2$ ,  $s_2=\det Q$ ,  $s_3=(s_1^2-4s_2)^{1/2}$ ,  $q_{ij}(g_{ij})$  — компоненты матриц  $Q_1(Q_2)$ ,  $\mu=(s_1+s_3)(s_1-s_3)^{-1}$ .

Пусть  $\omega_j$   $(j=1,\ldots,4)$  — элементы матрицы D. Обозначим

$$\sigma_{j}(x,\lambda) = \begin{cases} e^{\lambda\omega_{j}x}, & \operatorname{Re}\lambda\omega_{j} \leq 0, \\ e^{\lambda\omega_{j}(x-1/2)}, & \operatorname{Re}\lambda\omega_{j} > 0. \end{cases}, \qquad g_{j}(x,t,\lambda) = \begin{cases} \varepsilon(x,t)e^{\lambda\omega_{j}(x-t)}, & \operatorname{Re}\lambda\omega_{j} \leq 0, \\ -\varepsilon(t,x)e^{\lambda\omega_{j}(x-t)}, & \operatorname{Re}\lambda\omega_{j} > 0, \end{cases}$$



 $g(x,t,\lambda)=\mathrm{diag}\,(g_1(x,t,\lambda),\ldots,g_4(x,t,\lambda))$ , где  $\varepsilon(x,t)=1$  при  $t\leq x,\,\varepsilon(x,t)=0$  при t>x.Так же как в работе [4, лемма 1] получается

**Лемма 5.** Для решения  $\omega(x) = \omega(x, \lambda)$  задачи (10)-(11) имеет место формула

$$\omega(x,\lambda) = g_{\lambda}m(x) - V(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)\Phi(m,\lambda),$$

еде 
$$g_{\lambda}m(x)=\int\limits_{0}^{1/2}g(x,t,\lambda)m(t)dt$$
,  $V(x,\lambda)=\mathrm{diag}\left(\sigma_{1}(x,\lambda),\ldots,\sigma_{4}(x,\lambda)\right)$ ,  $\Delta(\lambda)=U(V(x,\lambda))$ ,  $\Phi(m,\lambda)=\int\limits_{0}^{1/2}U_{x}(g(x,t,\lambda))m(t)dt$ ,  $U_{x}$  означает, что  $U$  применяется  $\kappa$   $g(x,t,\lambda)$  по  $x$ .

$$\Phi(m,\lambda)=\int\limits_0^{1/2}U_x(g(x,t,\lambda))m(t)dt$$
,  $U_x$  означает, что  $U$  применяется  $\kappa$   $g(x,t,\lambda)$  по  $x$ .

По лемме 4 собственные значения матрицы D расположены либо на двух, либо на одной прямой, проходящих через начало координат. Рассмотрим каждый их этих случаев подробно.

Пусть сначала имеет место (12), тогда числа  $\omega_i$  ( $i=1,\ldots,4$ ) расположены на двух прямых, проходящих через начало координат. Для определенности считаем  $\omega_1 = -\omega_4$ ,  $\omega_2 = -\omega_3$ ,  $\arg \omega_i = \alpha_i$ ,  $0 \le \alpha_j < \pi \ (j = 1, 2), \ \arg \omega_3 = \alpha_2 + \pi, \ \arg \omega_4 = \alpha_1 + \pi, \ 0 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \pi + \alpha_1 < \pi + \alpha_2.$ Через  $d_j$   $(j=1,\ldots,4)$  обозначим лучи с центром в начале координат:  $\arg d_j=\frac{\pi}{2}-\arg \omega_j.$ Построим еще лучи  $l_i'$ ,  $l_i''$   $(j=1,\ldots,4)$  с центром в начале координат:  $\arg l_i'=\arg d_i+\varepsilon_j$ ;  $\arg l_j''=rg d_j-arepsilon_j$ , где  $arepsilon_j>0$ , достаточно мало и, например, при j=1 выбирается из условий, чтобы при  $\lambda$ , принадлежащих сектору  $S_1=l_1'Od_1$ , выполнялось неравенство  $\mathrm{Re}\,\lambda\omega_2<\mathrm{Re}\,\lambda\omega_1$  (тогда  $\operatorname{Re} \lambda \omega_2 < \operatorname{Re} \lambda \omega_1 \leq 0 \leq \operatorname{Re} \lambda \omega_4 < \operatorname{Re} \lambda \omega_3$ ), а при  $\lambda \in S_1' = d_1 O l_1''$  выполнялось  $\operatorname{Re} \lambda \omega_2 < \operatorname{Re} \lambda \omega_4$ (тогда  $\operatorname{Re} \lambda \omega_2 < \operatorname{Re} \lambda \omega_4 \le 0 \le \operatorname{Re} \lambda \omega_1 < \operatorname{Re} \lambda \omega_3$ ). Аналогично определяются  $\varepsilon_j$  (j=2,3,4) для секторов  $S_j = l_i'Od_j$  и  $S_i' = d_jOl_i''$ . Рассмотрим каждый из секторов  $S_j$  (секторы  $S_i'$  рассматриваются аналогично).

**Лемма 6.** В секторе  $S_1$  для матрицы  $\Delta(\lambda)$  при больших  $|\lambda|$  имеет место представление

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} [a_{11}] & [a_{12}] & o(1) & [a_{14}e^{\mu\omega_1}] \\ [a_{21}] & [a_{22}] & o(1) & [a_{24}e^{\mu\omega_1}] \\ [b_{31}e^{\mu\omega_1}] & o(1) & [b_{33}] & [b_{34}] \\ [b_{41}e^{\mu\omega_1}] & o(1) & [b_{43}] & [b_{44}] \end{pmatrix},$$

где  $\mu = \lambda/2$ ,  $a_{ij}$   $(b_{ij})$  — компоненты матрицы  $K_0$   $(L_0)$ ,

$$K_0 = \begin{pmatrix} S\Gamma_{11} + T\Gamma_{21} & S\Gamma_{12} + T\Gamma_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} H_0(0), \qquad L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T\Gamma_{11} + S\Gamma_{21} & T\Gamma_{21} + S\Gamma_{22} \end{pmatrix} H_0(1/2),$$

 $\Gamma_{ij}$  — блоки матрицы  $\Gamma$ , [a] = a + o(1).

Доказательство. Имеем

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \Delta_1(\lambda),\tag{14}$$

где  $\Delta_0(\lambda)=M_0(\lambda)V(0,\lambda)+M_1(\lambda)V(1/2,\lambda),$   $\Delta_1(\lambda)=\int\limits_0^{1/2}\Omega(t,\lambda)V(t,\lambda)dt.$  Для  $\Delta_0(\lambda)$  имеет место формула

$$\Delta_0(\lambda) = K_0 V(0, \lambda) + L_0 V(1/2, \lambda) + \lambda^{-1} (K_1 V(0, \lambda) + L_1 V(1/2, \lambda)),$$

где  $K_1$  и  $L_1$  — постоянные матрицы. Так как при  $\lambda \in S_1$ :  $\operatorname{Re} \lambda \omega_2 < \operatorname{Re} \lambda \omega_1 \le 0 \le \operatorname{Re} \lambda \omega_4 < \operatorname{Re} \lambda \omega_3$ , то  $V(x,\lambda) = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda\omega_1 x}, e^{\lambda\omega_2 x}, e^{\lambda\omega_3 (x-1/2)}, e^{\lambda\omega_4 (x-1/2)}\right) = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda\omega_1 x}, e^{\lambda\omega_2 x}, e^{-\lambda\omega_2 (x-1/2)}, e^{-\lambda\omega_1 (x-1/2)}\right).$ Далее, по лемме 4 из работы [5] все элементы  $\Delta_1(\lambda)$  есть o(1). Поэтому утверждение леммы следует из (14).

**Следствие.** Для  $\det \Delta(\lambda)$  при  $\lambda \in S_1$  имеет место асимптотическая формула

$$\det \Delta(\lambda) = [\Theta_0^1] + [\Theta_1^1]e^{2\mu\omega_1}$$

$$\varepsilon \partial e \qquad \Theta_0^1 = \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} b_{33} & b_{34} \\ b_{43} & b_{44} \end{array} \right|, \qquad \Theta_1^1 = - \left| \begin{array}{ccc} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} b_{31} & b_{33} \\ b_{41} & b_{43} \end{array} \right|.$$

Аналогично получаются следующие утверждения.



Лемма 7. Имеют место асимптотические формулы:

$$\det \Delta(\lambda) = [\Theta_0^2] + [\Theta_1^2]e^{2\mu\omega_2}, \ \lambda \in S_2,$$

$$\varepsilon\partial\varepsilon\;\Theta_0^2 = - \left| \begin{array}{ccc} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} b_{31} & b_{33} \\ b_{41} & b_{43} \end{array} \right|, \;\; \Theta_1^2 = \left| \begin{array}{ccc} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{array} \right|;$$

$$\det \Delta(\lambda) = [\Theta_0^3] + [\Theta_1^3]e^{2\mu\omega_4}, \ \lambda \in S_3,$$

$$\varepsilon \partial \varepsilon \ \Theta_0^3 = \left| \begin{array}{ccc} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{array} \right|, \ \ \Theta_1^3 = - \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cccc} b_{32} & b_{34} \\ b_{42} & b_{44} \end{array} \right|;$$

$$\det \Delta(\lambda) = [\Theta_0^4] + [\Theta_1^4] e^{2\mu\omega_3}, \quad \lambda \in S_4,$$

$$\varepsilon \partial \varepsilon \ \Theta_0^4 = - \left| \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc|c} b_{32} & b_{34} \\ b_{42} & b_{44} \end{array} \right|, \ \ \Theta_1^4 = \left| \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc|c} b_{33} & b_{34} \\ b_{43} & b_{44} \end{array} \right|.$$

Лемма 8. Пусть выполнено условие (12) и

$$\prod_{j=1}^{4} \Theta_0^j \Theta_1^j \neq 0. \tag{15}$$

Тогда все собственные значения краевой задачи (10)–(11) расположены в двух полосах, границы которых параллельны лучам  $d_j$  (j=1,2) и вне  $\delta$ -окрестностей собственных значений  $(\delta>0$  и достаточно мало) справедлива оценка

$$|\det \Delta(\lambda)| \ge c,\tag{16}$$

c > 0 и не зависит от  $\delta$ .

**Доказательство.** Так как собственные значения задачи (10)–(11) являются нулями  $\det \Delta(\lambda)$ , то утверждение леммы следует из следствия к лемме 6 и леммы 7.

Пусть теперь имеет место (13), тогда числа  $\omega_j$   $(j=1,\dots,4)$  расположены на одной прямой, проходящей через начало координат. Считаем, что  $\omega_1=-\omega_4,\,\omega_2=-\omega_3$  и пусть  $\arg\omega_1=\arg\omega_2=\alpha,\,0\leq\alpha<\pi,\,|\omega_1|>|\omega_2|.$  Обозначим через  $d_1$  луч с центром в начале координат,  $\arg d_1=\frac{\pi}{2}-\alpha,\,d_2$  — продолжение этого луча. Лучи  $d_1$  и  $d_2$  разбивают  $\lambda$ -плоскость на два сектора. Обозначим через  $S_0$  тот из секторов, который расположен от луча  $d_1$  в направление против часовой стрелки.

**Лемма 9.** Для  $\det \Delta(\lambda)$  при  $\lambda \in S_0$  имеет место асимптотическая формула:

$$\det \Delta(\lambda) = [\Theta_0] + [\Theta_1]e^{2\mu\omega_1} + [\Theta_2]e^{2\mu\omega_2} + [\Theta_3]e^{\mu(\omega_1 + \omega_2)} + [\Theta_4]e^{2\mu(\omega_1 + \omega_2)},$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 6

Лемма 10. Пусть выполнено (13) и условие

$$\Theta_0 \Theta_4 \neq 0. \tag{17}$$

Тогда все собственные значения краевой задачи (10)–(11) расположены в некоторой полосе, симметричной относительно начала координат, границы которой параллельны лучу  $d_1$ , причем в любом прямоугольнике единичной длины этой полосы (то есть две стороны являются границами полосы, а две другие стороны отстоят друг от друга на единицу) число собственных значений ограниченно числом, не зависящим от прямоугольника; и вне их  $\delta$ -окрестностей справедлива оценка (16).

Доказательство следует из леммы 9 и [6, гл. 3, § 1, теорема 7].

В дальнейшем считаем, что  $\lambda \in S_0$  (тогда  $\operatorname{Re} \lambda \omega_1 \leq \operatorname{Re} \lambda \omega_2 \leq 0 \leq \operatorname{Re} \lambda \omega_3 \leq \operatorname{Re} \lambda \omega_4$ ), выполняются условия (13) и (17) (случай, когда  $\lambda \in S_j$  ( $j=1,\ldots,4$ ) и выполняются условия (12) и (15) рассматривается аналогично, с естественными изменениями и использованием рассуждений из работы [3]).



Тогда в лемме 5  $g(x,t,\lambda) = \mathrm{diag} \; \left( e^{\lambda \omega_1(x-t)}, e^{\lambda \omega_2(x-t)}, 0, 0 \right) \; \mathrm{при} \; x \geq t; \; g(x,t,\lambda) = \mathrm{diag} \left( 0, 0, -e^{-\lambda \omega_2(x-t)}, -e^{-\lambda \omega_1(x-t)} \right) \; \mathrm{при} \; x < t; \; V(x,\lambda) = \mathrm{diag} \left( \sigma_1(x,\lambda), \sigma_2(x,\lambda), \sigma_2(1/2-x,\lambda), \sigma_1(1/2-x,\lambda) \right).$ 

**Лемма 11.** Для  $\Phi(m,\lambda)$  из леммы 5 имеет место представление:  $\Phi(m,\lambda)=(\Phi_1(m,\lambda),\ldots,\Phi_4(m,\lambda))^T$ , где  $\Phi_j(m,\lambda)$  являются линейными комбинациями с ограниченными по  $\lambda$  при  $|\lambda|$  достаточно больших коэффициентами интегралов  $\int\limits_0^{1/2} \sigma(t,\lambda)m_j(t)dt \ (j=1,\ldots,4), \ \text{где } \sigma(t,\lambda) - \text{любая из функций } \sigma_j(t,\lambda), \ \sigma_j(1/2-t,\lambda) \ (j=1,2); \ u \ \text{интегралов } \int\limits_0^{1/2} \sigma(t,\lambda)\varphi(t)dt, \ \text{где } \varphi(t) - \text{любая из функций } \int\limits_0^{1/2-t} a(t,\tau)m_j(\tau)d\tau, \ \int\limits_0^{1/2} b(t,\tau)m_j(\tau)d\tau; \ a(t,\tau) - \text{любая из функций } c(\tau+t), \ d(\tau+t);$ 

из функций  $\int\limits_0^{1/2-t} a(t,\tau)m_j(\tau)d\tau$ ,  $\int\limits_t^{1/2} b(t,\tau)m_j(\tau)d\tau$ ;  $a(t,\tau)$  — любая из функций  $c(\tau+t)$ ,  $d(\tau+t)$ ;  $b(t,\tau)$  — любая из функций  $c(\tau-t)$ ,  $d(\tau-t)$ ; c(t)(d(t)) — компоненты матрицы  $\Omega_0(t)(\Omega_1(t))$ ;  $\Omega_0(t)+\lambda^{-1}\Omega_1(t)=\Omega(t,\lambda)$ .

### Доказательство очевидно.

Введем следующие обозначения:  $\{\lambda: | \operatorname{Re} \lambda \omega_1 | \leq h \}$  — полоса из леммы 10;  $\Pi = \{\lambda \omega_1: | \operatorname{Re} \lambda \omega_1 | \leq h, \operatorname{Im} \lambda \omega_1 \geq 0 \}$ ;  $\lambda_k$  — нули  $\det \Delta(\lambda)$  из леммы 9. Удалим из  $\Pi$  все точки  $\lambda_k \omega_1$  вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса  $\delta$ . Получившуюся область обозначим  $\Pi(\delta)$  и через  $\Pi_1(\delta)$  обозначим часть  $\Pi(\delta)$ , когда  $\operatorname{Re} \lambda \omega_1 \leq 0$ .

**Лемма 12.** Если  $\lambda\omega_1 \in \Pi_1(\delta)$  и  $|\lambda|$  достаточно велико, то существует единственное решение  $\omega(x,\lambda) = R_{1\lambda}m$  задачи (10)-(11), для компонент которого имеют место представления:

$$(R_{1\lambda}m)_{1} = \int_{0}^{x} e^{\lambda\omega_{1}(x-t)}m_{1}(t)dt + W_{1}(m,\lambda)e^{\lambda\omega_{1}x}, \quad (R_{1\lambda}m)_{2} = \int_{0}^{x} e^{\lambda\omega_{2}(x-t)}m_{2}(t)dt + W_{2}(m,\lambda)e^{\lambda\omega_{2}x},$$

$$(R_{1\lambda}m)_{3} = -\int_{x}^{1/2} e^{-\lambda\omega_{2}(x-t)}m_{3}(t)dt + W_{3}(m,\lambda)e^{-\lambda\omega_{2}(x-1/2)},$$

$$(R_{1\lambda}m)_{4} = -\int_{x}^{1/2} e^{-\lambda\omega_{1}(x-t)}m_{4}(t)dt + W_{4}(m,\lambda)e^{-\lambda\omega_{1}(x-1/2)},$$

где  $W_j(m,\lambda)(j=1,\ldots,4)$  — линейные комбинации тех же интегралов, что и в лемме 11 с ограниченными по  $\lambda$  коэффициентами.

Утверждение леммы следует из лемм 5 и 11, если учесть, что в силу леммы 10 элементы матрицы  $\Delta(\lambda)$  ограничены по  $\lambda$ .

**Лемма 13.** Если  $\lambda$  — то же, что и в лемме 12, то существует единственное решение  $v(x,\lambda)$  задачи (8)–(9), которое представимо в виде конечной линейной комбинации с постоянными коэффициентами следующих векторов:

$$R_{1\lambda}q(x), \quad R_{1\lambda}M_{\lambda}R_{1\lambda}q(x), \quad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}q(x), \quad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_{\lambda}q(x), \quad R_{1\lambda}P(x)g(x_0,\lambda), \quad R_{1\lambda}P(x)p(x_0,\lambda),$$

$$R_{1\lambda}M_{\lambda}R_{1\lambda}P(x)g(x_0,\lambda), \quad R_{1\lambda}M_{\lambda}R_{1\lambda}P(x)p(x_0,\lambda), \quad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}P(x)g(x_0,\lambda), \quad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}P(x)l(x_0,\lambda),$$

$$\frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}P(x)M_{\lambda}g(x_0,\lambda), \quad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}P(x)M_{\lambda}p(x_0,\lambda), \quad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_{\lambda}P(x)g(x_0,\lambda), \quad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_{\lambda}P(x)p(x_0,\lambda),$$

$$\frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_{\lambda}R_{1\lambda}P(x)g(x_0,\lambda), \quad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_{\lambda}R_{1\lambda}P(x)l(x_0,\lambda), \quad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_{\lambda}R_{1\lambda}P(x)p(x_0,\lambda), \quad O\left(\frac{\|f\|}{\lambda^2}\right),$$

еде q(x) — любой из векторов  $q_i(x)$  (i=1,2),  $q_1(x)=H_0^{-1}(x)m(x)$ ,  $q_2(x)=-H_0^{-1}(x)H_1(x)H_0^{-1}(x)\times M_1(x)$  (i=0,1,2,3),  $M_0(x)=N_1L_\lambda$ ,  $M_1(x)=(H_2(x)+N_2)L_\lambda R_1(x)$ ,  $M_2(x)=N_1L_\lambda R_1(x)$ ,  $M_3(x)=N_2L_\lambda R_1(x)$ ,  $N_1=H_0^{-1}(x)NH_0(x)$ ,  $L_\lambda=(E+R_1\lambda P_3(x,\lambda)+R_1\lambda N_\lambda)^{-1}$ ,  $N_2=H_0^{-1}(x)(NH_1(x)-H_1(x)H_0^{-1}(x)NH_0(x))$ ,  $H_2(x)=H_0^{-1}(x)[H_1'(x)+P_3(x)H_1(x)]$ ,  $P(x)=n\omega$  бая из матриц  $H_2(x)$ ,  $P_{ij}(x)$  (i,j=1,2);  $P_{i1}(x)=H_0^{-1}(x)P_i(x)H_0(x)$ ,  $P_{i2}(x)=H_0^{-1}(x)P_i(x)H_{1i}-H_0^{-1}(x)H_1(x)H_0^{-1}(x)P_i(x)H_{0i}$ ,  $H_{01}=H_0(0)$ ,  $H_{11}=H_1(0)$ ,  $H_{02}=H_0(1/2)$ ,  $H_{12}=H_1(1/2)$ ;  $g(x_0,\lambda)=\alpha(\lambda)R_{1\lambda}q(x)_{|x=x_0}$ ,  $p(x_0,\lambda)=\alpha(\lambda)R_{1\lambda}M_\lambda q(x)_{|x=x_0}$ ,  $l(x_0,\lambda)=\alpha(\lambda)R_{1\lambda}M_\lambda q(x)_{|x=x_0}$ ,



 $lpha(\lambda)$  — некоторые, возможно, различные квадратные матрицы с ограниченными по  $\lambda$  коэффициентами,  $x_0$  — любое из чисел 0, 1/2,  $\|\cdot\|$  — норма в  $L_2[0,1]$ .

Доказательство осуществляется использованием рассуждений из работы [4, с. 138-139].

**Лемма 14.** Пусть  $\sigma(x,\lambda)$ ,  $a(t,\tau)$ ,  $b(t,\tau)$  — функции из леммы 11,  $\theta(x)$  — одна из некоторого конечного набора функций из C[0,1]. Тогда каждая компонента вектор-функции  $R_{1\lambda}q(x)$  представима в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами операторов  $\int\limits_0^x e^{\lambda \omega_j(x-t)} T_1 f(t) dt$ ,  $\int\limits_x^{1/2} e^{-\lambda \omega_j(x-t)} T_1 f(t) dt$  (j=1,2) и c ограниченными по  $\lambda$  коэффи-

циентами операторов  $\sigma(x,\lambda)\int\limits_0^{1/2}\sigma(t,\lambda)T_2f(t)dt$ , еде  $T_1f(x)$  — один из операторов  $\theta(x)f(x)$ ,  $\theta(x+1/2)f(x+1/2)$ ,  $\theta(1/2-x)f(1/2-x)$ ,  $\theta(1-x)f(1-x)$ ,  $T_2f(x)$  — один из операторов  $\int\limits_0^{1/2-x}a(x,t)T_1f(t)dt$ ,  $\int\limits_x^{1/2}b(x,t)T_1f(t)dt$  при всевозможных  $\theta(x)$ ,  $\sigma(x,\lambda)$ ,  $\sigma(t,\lambda)$  и операторах  $T_1$  и  $T_2$ .

**Доказательство.** По определению компоненты вектор-функции  $q_i(x)$  (j=1,2) можно представить в виде  $(q_j(x))_k = \alpha_{kj}(x)f(x) + \beta_{kj}(x+1/2)f(x+1/2) + \delta_{kj}(1/2-x)f(1/2-x) + \gamma_{kj}(1-x)f(1-x),$ где  $\alpha_{kj}(x)$ ,  $\beta_{kj}(x)$ ,  $\delta_{kj}(x)$ ,  $\gamma_{kj}(x)$  — непрерывные функции. Взяв в лемме 12 в качестве  $m_k(x) = \alpha_{ki}(x)f(x) + \beta_{ki}(x+1/2)f(x+1/2) + \delta_{ki}(1/2-x)f(1/2-x) + \gamma_{ki}(1-x)f(1-x)$  и обозначив через  $\theta(x)$  любую из этих непрерывных функций, получим утверждение леммы.

Пусть  $\frac{\omega_2}{\omega_1}=\beta,\ \beta>0$  и  $\omega_1=d$ , тогда  $\sigma(x,\lambda)$  из леммы 11 есть одна из функций  $e^{\lambda dx},\ e^{\beta\lambda dx},$  $e^{-eta\lambda d(x-1/2)},\ e^{-\lambda d(x-1/2)}.$  Обозначим  $\sigma(x,\lambda_1,k)=\sigma(x,\lambda)_{|\lambda d=\lambda_1+ik};\ \omega(x,t,\lambda_1,k)$  — одну из функций:  $arepsilon(x,t)e^{\lambda d(x-t)},\ arepsilon(x,t)e^{eta\lambda d(x-t)},\ arepsilon(t,x)e^{-\lambda d(x-t)},\$ при  $\lambda d=\lambda_1+ik.$  Пусть  $A_kg=\int_0^{1/2}A(x,t,\lambda_1,k)g(t)dt,$ где  $A(x,t,\lambda_1,k)=\psi(x)\sigma(x,\lambda_1,k)\sigma(t,\lambda_1,k)$  или  $A(x,t,\lambda_1,k)=\psi(x)\omega(x,t,\lambda_1,k),$  а  $\psi(x)$  совпадает либо с 1, либо с одной из функций  $h_j(x)$ ,  $r_j(x)$ ,  $r^j(x)$   $(j=1,\ldots,4)$   $(r_j(x)$  и  $r^j(x)$   $(j=1,\ldots,4)$ — определены в лемме 3);  $M_k g = \int_0^{1/2} M(x,t,\lambda_1,k) g(t) dt$ , где  $M(x,t,\lambda_1,k) = M(x,t,\lambda)_{|\lambda d=\lambda_1+ik}$ ,  $M(x,t,\lambda)$  есть  $M_{kj}(x,t,\lambda)$  при некоторых k,j;  $M_{kj}(x,t,\lambda)$   $(k,j=(1,\ldots,4)$  являются компонентами интегрального оператора  $M_{\lambda}$ ; T — любой из операторов  $T_i$  (i=1,2) из леммы 14, p(x) — любой элемент матрицы P(x) из леммы 13.

Пусть  $\lambda d \in \Pi_1(\delta)$ ,  $\lambda d = \lambda_1 + ik$  и  $\lambda_1$  принадлежит ограниченной области.

**Лемма 15.** Если  $f(x) \in L_2[0,1]$ , то при больших  $|\lambda|$  и  $x \in [0,1/2]$ 

$$R_{\lambda}(A)f_{|\lambda d=\lambda_1+ik} = \Omega(x,\lambda_1,k;f) + O\left(\frac{\|f\|}{k^2}\right),$$

еде  $\Omega(x,\lambda_1,k;f)$  — есть конечная сумма с ограниченными по  $\lambda_1$  и k коэффициентами всевозможных операторов:  $A_kTF$ ,  $A_kM_kA_kTF$ ,  $\frac{1}{k}A_kTf$ ,  $\frac{1}{k}A_kM_kTf$ ,  $A_kp(x)(A_kTf)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$ ,  $A_k M_k A_k p(x) (A_k M_k A_k T f)_{|x=x_0}$  $\times (A_kTf)_{|x=x_0}, \quad \frac{1}{k}A_kp(x)M_k(A_kTf)_{|x=x_0}, \quad \frac{1}{k}A_kM_kp(x)(A_kTf)_{|x=x_0}, \quad \frac{1}{k}A_kM_kA_kp(x)(A_kTf)_{|x=x_0}, \\ \frac{1}{k}A_kp(x)M_k(A_kM_kA_kTf)_{|x=x_0}, \quad \frac{1}{k}A_kM_kp(x)(A_kM_kA_kTf)_{|x=x_0}, \quad \frac{1}{k}A_kM_kA_kp(x)(A_kM_kA_kTf)_{|x=x_0}, \\ \frac{1}{k}A_kp(x)M_k(A_kM_kA_kTf)_{|x=x_0}, \quad \frac{1}{k}A_kM_kp(x)(A_kM_kA_kTf)_{|x=x_0}, \\ \frac{1}{k}A_kp(x)M_k(A_kM_kA_kTf)_{|x=x_0}, \quad \frac{1}{k}A_kM_kp(x)(A_kM_kA_kTf)_{|x=x_0}, \\ \frac{1}{k}A_kp(x)M_k(A_kM_kA_kTf)_{|x=x_0}, \quad \frac{1}{k}A_kM_kp(x)(A_kM_kA_kTf)_{|x=x_0}, \\ \frac{1}{k}A_kp(x)M_k(A_kM_kA_kTf)_{|x=x_0}, \quad \frac{1}{k}A_kM_kp(x)(A_kM_kA_kTf)_{|x=x_0}, \\ \frac{1}{k}A_kM_kp(x)(A_kM_kA_kTf)_{|x=x_0}, \quad \frac{1}{k}A_kM_kp(x)(A_kM_kA_kTf)_{|x=x_0}, \\ \frac{1}{k}A_kM_kA_kTf)_{|x=x_0}, \quad \frac{1}{k}A_kM_kP(x)(A_kM_kA_kTf)_{|x=x_0}, \\ \frac{1}{k}A_kM_kP(x)(A_kM_kA_kTf)_{|x=x_0}, \quad \frac{1}{k}A_kM_kP(x)(A_kM_kA_kTf)_{|x=x_0}, \\ \frac{1}{k}A_kM_kP(x)(A_kM_k$  $rac{1}{k}A_kp(x)(A_kM_kTf)_{|x=x_0}$ ,  $rac{1}{k}A_kM_kA_kp(x)(A_kM_kTf)_{|x=x_0}$ . Причем, если ядро оператора  $A_k$  совпадает с  $\psi(x)\omega(x,t,\lambda_1,k)$ , то коэффициенты при  $A_kTf$  не зависят от  $\lambda_1$  и k.

Здесь, если в любом из перечисленных операторов операторы  $A_k$  повторяются, то они могут иметь разные значения. Например, для оператора  $A_k M_k A_k Tf$ : оператор  $A_k$ , стоящий до  $M_k$ , может иметь ядро  $\psi(x)\omega(x,t,\lambda_1,k)$ , а оператор  $A_k$ , стоящий после  $M_k$ , — ядро  $\psi(x)\sigma(x,\lambda_1,k)\sigma(t,\lambda_1,k)$ , где  $\sigma(x,\lambda_1,k) = e^{(\lambda_1+ik)x}, \ \sigma(t,\lambda_1,k) = e^{-\beta(\lambda_1+ik)(t-1/2)}, \$ функции  $\psi(x)$  для операторов  $A_k$ , стоящих до и после  $M_k$ , могут не совпадать. То же самое касается и операторов  $M_k$ , если они повторяются.

Доказательство следует из лемм 3, 12–14.

Нетрудно получается следующий результат.

Лемма 16. Справедливы следующие оценки:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k T f_{|x=x_0|}|^2 \le C ||f||^2, \tag{18}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k T f_{|x=x_0|}|^2 \le C \|f\|^2,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k M_k A_k T f_{|x=x_0|}|^2 \le C \|f\|^2.$$
(18)



Здесь в (18) ядра операторов  $A_k$  отличаются только параметром k, в (19) ядра операторов, стоящих перед  $M_k$ , отличаются лишь параметром k и таким же свойством обладают ядра операторов после  $M_k$ ; и те и другие при данном k могут различаться; ядра операторов  $M_k$  отличаются только параметром k; Tf — один и тот же оператор; постоянная C не зависит от  $\lambda_1$ .

Так же, как и в работе [7, с. 81] представим полуполосу  $\Pi$  в виде объединения конечного числа различных групп равных между собой прямоугольников, границы которых  $\Gamma_k(k=1,2,\ldots)$  (при возрастании k контуры удаляются от начала координат) состоят из отрезков, лежащих на прямых  $\mathrm{Re}\,\lambda d=\pm h$ , и из отрезков, параллельных вещественной оси длины 2h. Контуры  $\Gamma_k$  принадлежат  $\Pi(\delta)$  и для каждого  $\Gamma_k$  одной конкретной группы существует натуральное  $t_k$ , что  $\Gamma_k=\Gamma+it_k$ , где  $\Gamma$  — некоторый фиксированный прямоугольный контур из этой группы. Аналогично построение проводится и для полуполосы  $\{\lambda d: |\mathrm{Re}\,\lambda d| \leq h, \mathrm{Im}\,\lambda \mathrm{d} \leq 0\}$ . Построенные в ней контуры обозначим  $\Gamma_k(k=-1,-2,\ldots)$ .

**Лемма 17.** Пусть J- любой конечный набор достаточно больших по модулю целых чисел. Тогда имеет место оценка

$$\left\| \sum_{k \in J} \int_{\Gamma_k} R_{\frac{\lambda}{d}}(A) d\lambda \right\| \le C,$$

равномерная по Ј.

Доказательство следует из рассуждений в леммах 8 и 9 из работы [3] и из лемм 15, 16.

**Лемма 18.** Система  $c.n.\phi$ . оператора A полна в  $L_2[0,1]$ .

**Доказательство.** Пусть  $f \in L_2[0,1]$  ортогональна всем с.п.ф. оператора  $A, A^*$  — оператор, сопряженный к A. Тогда  $R_\lambda(A^*)f$  — целая функция по  $\lambda$ . Из ограниченности при  $\lambda\omega_1\in\Pi(\delta)$  операторов  $M_\lambda$  и из лемм 3, 12, 13 следует оценка  $R_\lambda(A)f=O(1)$  и, следовательно,  $R_\lambda(A^*)f=O(1)$ . Отсюда следует, что  $R_\lambda(A^*)f$  не зависит от  $\lambda$ , поэтому f=0 почти всюду.

Используя леммы 17 и 18 так же как в работе [8, с. 62-63] получаем основной результат.

**Теорема 1.** Если выполнены условия (13) и (17), то система с.п.ф. оператора A образует базис Рисса со скобками в  $L_2[0,1]$ . При этом в скобки нужно объединять те с.п.ф., которые отвечают  $\lambda_k$ , когда  $\lambda_k d$  попадает в  $\Gamma_s$  при каждом s.

Аналогично и с использованием рассуждений из работы [3] получается

**Теорема 2.** Если выполнены условия (12) и (15), то система с.п.ф. оператора A образует базис Рисса в  $L_2[0,1]$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта для государственной поддержки ведущих научных школ  $P\Phi$  (проект HШ-2970.2008.1).

### Библиографический список

- 1. *Хромов А.П*. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Мат. заметки. 1998. Т. 64, N 6. С. 932–942.
- 2. Корнев В.В., Хромов А.П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сборник. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.
- 3. *Курдюмов В.П., Хромов А.П.* О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 1. С. 97–110.
- 4. *Хромов А.П*. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на диагоналях // Мат. сборник. 2006. Т. 197, № 11 . С. 115–142.
- 5. *Хромов А.П.* Теорема равносходимости для интегродифференциальных и интегральных операторов //

- Мат. сборник. 1981. Т. 114(156),  $\mathbb{N}$  3. С. 378–405. 6. *Расулов М.Л.* Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964.
- 7. *Курдюмов В.П., Хромов А.П.* О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций дифференциально-разностного оператора с многоточечным краевым условием // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 80–82.
- 8. *Курдюмов В.П., Хромов А.П.* О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций дифференциально-разностного оператора с интегральными краевыми условиями // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 61–63.



УДК 517.984

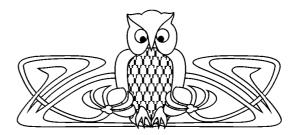
## РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИФФУЗИИ В СИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

### И.М. Набиев, А.Ш. Шукюров

Бакинский государственный университет, кафедра прикладной математики; \*Институт математики и механики НАН Азербайджана, отдел функционального анализа, Баку E-mail: nabievim@yahoo.com; ashshukurov@gmail.com

В работе доказывается единственность и приведены достаточные условия разрешимости обратной задачи восстановления оператора диффузии по одному спектру.

**Ключевые слова:** обратная задача, оператор диффузии, спектр.



Solution of Inverse Problem for the Diffusion Operator in a Symmetric Case

### I.M. Nabiev, A.Sh. Shukurov

Baku State University, Chair of Applied Mathematics; \*Institute of Mathematics and Mechanics, NAS of Azerbaijan, Baku E-mail: nabievim@yahoo.com; ashshukurov@gmail.com

In the paper uniqueness of reconstruction of the diffusion operator by a spectrum is proved and sufficient solvability conditions are provided.

Key words: inverse problem, diffusion operator, spectrum.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Обратными задачами спектрального анализа называются задачи, в которых требуется восстановить операторы по каким-либо их спектральным данным. Такими данными могут быть спектры, спектральная функция, данные рассеяния, функция Вейля и др. В настоящей работе впервые рассматривается вопрос о восстановлении на отрезке оператора диффузии по одному спектру в случае, когда коэффициенты уравнения диффузии симметричны относительно середины отрезка. Доказывается единственность и приводятся достаточные условия разрешимости обратной задачи восстановления оператора диффузии с граничными условиями Дирихле. Аналогичный вопрос для оператора Штурма – Лиувилля с разделенными и неразделенными граничными условиями ранее полностью изучены ([1–7]).

Обозначим через  $W_2^n[0,\pi]$  пространство функций  $f(x), x \in [0,\pi]$ , таких, что функции  $f^{(m)}(x), m=0,1,2,\ldots,n-1$  абсолютно непрерывны и  $f^{(n)}(x) \in L_2[0,\pi]$ . Рассмотрим краевую задачу, порожденную на отрезке  $[0,\pi]$  дифференциальным уравнением диффузии

$$y'' + [\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)]y = 0$$
(1)

и граничными условиями

$$y(0) = y(\pi) = 0, (2)$$

где  $p(x) \in W_2^1[0,\pi], \ q(x) \in W_2^0[0,\pi] = L_2[0,\pi]$  — вещественные функции. Эту задачу будем обозначать через L. Для уравнения (1) при различных граничных условиях ранее подробно исследованы некоторые варианты обратных задач, в которых в качестве основных спектральных данных используются два, три спектра, спектральная функция, спектр и нормировочные числа, функция Вейля (см. [8–12] и библиогр. список в них).

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию симметричности

$$p(\pi - x) = p(x), \qquad q(\pi - x) = q(x).$$
 (3)

Пусть  $\{\lambda_n\}$   $(n=\pm 1,\,\pm 2,\,\ldots)$  — спектр задачи L. В данной работе решается обратная задача, которая ставится следующим образом: по заданному спектру  $\{\lambda_n\}$  построить функции p(x) и q(x).

### 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

В этом пункте приводятся некоторые вспомогательные утверждения, используемые при доказательстве основных результатов этой работы.

Обозначим через  $c(x,\lambda)$  и  $s(x,\lambda)$  решения уравнения (1) при начальных условиях

$$c(0,\lambda) = s'(0,\lambda) = 1, \qquad c'(0,\lambda) = s(0,\lambda) = 0.$$
 (4)



Очевидно, что спектр задачи L будет совпадать с последовательностью нулей функции  $s(\pi, \lambda)$ . **Лемма 1** [9]. Справедливы следующие представления:

$$c(\pi,\lambda) = \cos \pi(\lambda - a) - a_1 \frac{\cos \pi(\lambda - a)}{\lambda} + \pi c_1 \frac{\sin \pi(\lambda - a)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(t) e^{i\lambda t} dt,$$

$$s'(\pi,\lambda) = \cos \pi(\lambda - a) + a_1 \frac{\cos \pi(\lambda - a)}{\lambda} + \pi c_1 \frac{\sin \pi(\lambda - a)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_2(t) e^{i\lambda t} dt,$$

где  $a=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(t)dt, \ a_1=\frac{1}{2}[p(0)-p(\pi)], \ c_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left[q(t)+p^2(t)\right]dt, \ \psi_i(t)\in L_2[-\pi,\pi], \ i=1,2.$  **Лемма 2** [9, 12]. Для того чтобы целые функции u(z) и v(z) допускали представления

$$u(z) = \sin \pi (z - a) + 4A\pi \frac{z - a}{4(z - a)^2 - 1} \cos \pi (z - a) + \frac{f(z - a)}{z - a},$$
$$v(z) = \cos \pi (z - a) - B\pi \frac{\sin \pi (z - a)}{z - a} + \frac{g(z - a)}{z - a},$$

где

$$f(z) = p_0 \sin \pi z + \int_{-\pi}^{\pi} F(t)e^{itz}dt, \qquad F(t) \in L_2[-\pi, \pi], \qquad f(0) = f'(0) = 0,$$
$$g(z) = p_1 \cos \pi z + \int_{-\pi}^{\pi} G(t)e^{itz}dt, \qquad G(t) \in L_2[-\pi, \pi], \qquad g(0) = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{split} u(z) &= \pi(z-a) \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{u_k - z}{k}, \qquad u_k = k + a - \frac{A}{k} + \frac{\delta_k}{k}, \\ v(z) &= \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\nu_k - z}{k - \frac{1}{2} \operatorname{sign} k}, \qquad \nu_k = k + a - \frac{1}{2} \operatorname{sign} k - \frac{B}{k} + \frac{\delta_k'}{k}, \end{split}$$

где A, B, a,  $p_0$ ,  $p_1$  — некоторые числа,  $\{\delta_k\}$ ,  $\{\delta_k'\}$  — произвольные числовые последовательности, удовлетворяющие условию  $\sum_k \{|\delta_k|^2 + |\delta_k'|^2\} < \infty$ .

В случае уравнения диффузии справедлив следующий аналог леммы 4 из работы [13], который доказывается с использованием результатов статьи [8].

**Лемма 3.** Тождество  $c(\pi, \lambda) \equiv s'(\pi, \lambda)$  имеет место тогда и только тогда, когда выполняются условия симметричности (3).

Дальше в этом и в следующем пункте всюду будем считать, что функция q(x) удовлетворяет следующему дополнительному условию: для всех функций  $y(x) \in W_2^2[0,\pi], \ y(x) \not\equiv 0$ , удовлетворяющих равенству  $y'(0)\overline{y(0)} - y'(\pi)\overline{y(\pi)} = 0$ , выполняется неравенство

$$\int_0^{\pi} \left[ |y'(\pi)|^2 + q(x)|y(x)|^2 \right] dx > 0.$$

Легко заметить, что последнее неравенство заведомо выполняется, если q(x) > 0.

**Лемма 4** [8]. Собственные значения краевой задачи L вещественны, отличны от нуля и простые. Эти собственные значения можно располагать в последовательность

$$\dots < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \tag{5}$$

причем при  $|n| o \infty$  имеет место асимптотическая формула

$$\lambda_n = n + a + \frac{A}{n} + \frac{\alpha_n}{n},\tag{6}$$

где  $a = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(x) dx$ ,  $A = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left[ q(x) + p^2(x) \right] dx$ ,  $\{\alpha_n\} \in \ell_2$ .



**Лемма 5.** Если выполняются условия (3), то  $s'(\pi, \lambda_n) = (-1)^n$ .

**Доказательство.** Поскольку функции p(x) и q(x) удовлетворяют условию (3), то функция  $s(\pi-x,\lambda)$  также удовлетворяет уравнению (1). Так как функции  $c(x,\lambda)$ ,  $s(x,\lambda)$  образуют фундаментальную систему решений уравнения (1), то функция  $s(\pi-x,\lambda)$  равна их линейной комбинации:  $s(\pi-x,\lambda) = C_1c(x,\lambda) + C_2s(x,\lambda)$ , где  $C_1$ ,  $C_2$ — некоторые постоянные. Отсюда

$$-s'(\pi - x, \lambda) = C_1 c'(x, \lambda) + C_2 s'(x, \lambda). \tag{7}$$

Полагая в последних двух равенствах x=0 и учитывая (4), получим

$$C_1 = s(\pi, \lambda), \quad C_2 = -s'(\pi, \lambda). \tag{8}$$

Соотношения (7), (8) влекут  $s'(\pi-x,\lambda)=s'(\pi,\lambda)s'(x,\lambda)-s(\pi,\lambda)c'(x,\lambda)$ . Отсюда при  $x=\pi$  вытекает, что  $s'^2(\pi,\lambda)-s(\pi,\lambda)c'(\pi,\lambda)=1$ . Из этого равенства при  $\lambda=\lambda_n$  следует, что  $s'^2(\pi,\lambda_n)=1$ . Значит,  $s'(\pi,\lambda_n)=\pm 1$ . Известно [9], что  $\mathrm{sign}\, s'(\pi,\lambda_n)=(-1)^n$ . Последние два равенства показывают, что  $s'(\pi,\lambda_n)=(-1)^n$ .  $\square$ 

### 2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ СПЕКТРОМ ЗАДАЧИ L

Исследуем теперь вопрос об однозначной определенности уравнения диффузии спектром задачи L. По последовательности  $\{\lambda_n\}$  можно восстановить функцию  $s(\pi,\lambda)$  в виде бесконечного произведения. Согласно лемме 1, функция  $s'(\pi,\lambda)$  представима в виде

$$s'(\pi,\lambda) = \cos \pi(\lambda - a) + A\pi \frac{\sin \pi(\lambda - a)}{\lambda} + \frac{f(\lambda)}{\lambda},\tag{9}$$

где  $f(\lambda)$  — целая функция экспоненциального типа не выше  $\pi$ , принадлежащая  $L_2(-\infty,\infty)$  при вещественном  $\lambda$  (представление (9) в случае  $p(x)\equiv 0$  получено в [14, с. 38]). Из асимптотической формулы (6) получаем

$$A = \lim_{n \to \infty} n(\lambda_n - n - a). \tag{10}$$

Далее, из формулы (9) получаем  $f(\lambda_n) = \lambda_n \left[ s'(\pi, \lambda_n) - \cos \pi (\lambda_n - a) \right] - A\pi \sin \pi (\lambda_n - a)$ , откуда, принимая во внимание лемму 5, имеем

$$f(\lambda_n) = \lambda_n \left[ (-1)^n - \cos \pi (\lambda_n - a) \right] - A\pi \sin \pi (\lambda_n - a). \tag{11}$$

Легко убедиться, что  $\{f(\lambda_n)\}\in \ell_2$ . Тогда функцию  $f(\lambda)$  можно восстановить по формуле

$$f(\lambda) = s(\pi, \lambda) \sum_{\substack{n = -\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{f(\lambda_n)}{(\lambda - \lambda_n) \dot{s}(\pi, \lambda_n)},$$
(12)

где точка над функцией означает дифференцирование по  $\lambda$ . Известно [15, с. 120], что этот ряд сходится равномерно на каждом компакте комплексной плоскости, а на вещественной оси — по норме пространства  $L_2(-\infty,\infty)$ . Последняя формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между  $\ell_2$  и множеством целых функций экспоненциального типа не выше  $\pi$ , принадлежащих  $L_2(-\infty,\infty)$  на вещественной оси. Соотношения (9)–(12) показывают, что функция  $s'(\pi,\lambda)$  однозначно определяется спектром  $\{\lambda_n\}$  краевой задачи L. Множество нулей  $\{\nu_n\}$  функции  $s'(\pi,\lambda)$  совпадает со спектром краевой задачи, порожденной уравнением (1) и граничными условиями

$$y(0) = y'(\pi) = 0. (13)$$

По двум спектрам  $\{\lambda_n\}$  и  $\{\nu_n\}$  однозначно восстанавливаются коэффициенты p(x) и q(x) уравнения (1) (см. [8]).

Таким образом, справедлива следующая теорема единственности.

**Теорема 1.** Задание спектра  $\{\lambda_n\}$  однозначно определяет краевую задачу L.

Легко заметить, что приведенное выше рассуждение содержит также процедуру восстановления функций p(x) и q(x) по спектру  $\{\lambda_n\}$ .



## 3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Теперь приведем достаточные условия разрешимости обратной задачи.

**Теорема 2.** Для того чтобы последовательность вещественных чисел (5) была спектром некоторой краевой задачи вида L с вещественными коэффициентными функциями p(x) и q(x), удовлетворяющими условиям (3), достаточно, чтобы имели место асимптотическая формула (6) и неравенство

$$\cos \pi a + A\pi \frac{\sin \pi a}{a} + \frac{s(0)}{a} \sum_{\substack{n = -\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\varphi_n}{\lambda_n s'(\lambda_n)} > 0, \tag{14}$$

еде  $a \neq 0$  и A — вещественные числа,  $\varphi_n = \left[ (-1)^n - \cos \pi (\lambda_n - a) \right] (\lambda_n - a) - A\pi \sin \pi (\lambda_n - a)$ ,  $s(z) = \pi \prod_{\substack{n = -\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_n - z}{n}$ .

**Доказательство.** Поскольку для  $\{\lambda_n\}$  имеет место асимптотическая формула (6), то, согласно лемме 2, функция (z-a)s(z) допускает следующее представление:

$$(z-a)s(z) = \sin \pi(z-a) - 4A\pi \frac{z-a}{4(z-a)^2 - 1}\cos \pi(z-a) + \frac{g(z-a)}{z-a},$$

где  $g(z)=a_0\sin\pi z+\int_{-\pi}^{\pi}g(t)e^{itz}\,dt,$   $g(t)\in L_2[-\pi,\pi],$  g(0)=g'(0)=0,  $a_0$  — некоторое число. Рассмотрим функцию

$$s_1(z) = \cos \pi (z - a) + A\pi \frac{\sin \pi (z - a)}{z - a} + \frac{\varphi(z - a)}{z - a},$$
 (15)

где

$$\varphi(z) = s(z) \sum_{\substack{n = -\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\varphi_n}{(z - \lambda_n)s'(\lambda_n)}.$$

Принимая во внимание асимптотические формулы  $\cos x = 1 + O(x^2)$ ,  $\sin x = O(x)$ , при  $x \to 0$  и (6), получаем

$$\varphi_n = \left[ (-1)^n - (-1)^n \left( 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right] \cdot O(n) - O\left(\frac{1}{n}\right),$$

т. е.  $\varphi_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$ . Следовательно,  $\{\varphi_n\}\in\ell_2$ . Поэтому функция  $\varphi(z)$  — целая функция экспоненциального типа не выше  $\pi$ , суммируемая с квадратом на вещественной оси. Тогда нули  $\nu_n$   $(n=\pm 1,\pm 2,\ldots)$  функции  $s_1(z)$  удовлетворяют асимптотической формуле

$$\nu_n = n - \frac{1}{2}\operatorname{sign} n + a + \frac{A}{n} + \frac{\xi_n}{n}, \quad \{\xi_n\} \in \ell_2$$
 (16)

(см. лемму 2). Полагая в равенстве (15)  $z = \lambda_n$ , получим

$$s_1(\lambda_n) = \cos \pi (\lambda_n - a) + A\pi \frac{\sin \pi (\lambda_n - a)}{\lambda_n - a} + \frac{\varphi_n}{\lambda_n - a} = (-1)^n.$$
 (17)

С другой стороны, неравенство (14) показывает, что  $s_1(0)>0$ . Поэтому в каждом интервале ...,  $(\lambda_{-2},\ \lambda_{-1}),\ (\lambda_{-1},0),\ (0,\lambda_1),\ (\lambda_1,\lambda_2),\ldots$  лежит один и в силу асимптотики (16) только один нуль функции  $s_1(z)$ . Следовательно, нули функций  $s_1(z)$  и s(z) перемежаются в следующем смысле:

$$\ldots < \lambda_{-2} < \nu_{-2} < \lambda_{-1} < \nu_{-1} < 0 < \nu_{1} < \lambda_{1} < \nu_{2} < \lambda_{2} < \ldots$$

Отсюда, учитывая асимптотические формулы (6) и (16), заключаем, что последовательности  $\{\lambda_n\}$  и  $\{\nu_n\}$  удовлетворяют условиям теоремы 3 работы [8]. Поэтому  $\{\lambda_n\}$ ,  $\{\nu_n\}$  являются спектрами краевых задач, порожденных на отрезке  $[0,\pi]$  одним и тем же уравнением (1) с вещественными коэффициентами  $p(x) \in W_2^1[0,\pi]$ ,  $q(x) \in L_2[0,\pi]$  и граничными условиями (2), (13) и

$$s(\lambda) = s(\pi, \lambda), \qquad s_1(\lambda) = s'(\pi, \lambda).$$
 (18)



Остается показать, что восстановленные функции p(x) и q(x) удовлетворяют условиям (3). Действительно, из равенств (17), (18) и тождества  $c(\pi, \lambda)s'(\pi, \lambda) - c'(\pi, \lambda)s(\pi, \lambda) = 1$  вытекает, что

$$c(\pi, \lambda_n) = \frac{1}{s'(\pi, \lambda_n)} = \frac{1}{s_1(\lambda_n)} = (-1)^n.$$

Поэтому функция  $a(\lambda) = c(\pi, \lambda) - s'(\pi, \lambda)$  обращается в нуль в нулях функции  $s(\lambda) = s(\pi, \lambda)$ .

Из равенств (15), (18) и леммы 1 вытекает, что для построенной задачи  $a_1=0$  ( $p(0)=p(\pi)$ ). Кроме того, из представлений для  $c(\pi,\lambda)$  и  $s'(\pi,\lambda)$  (см. лемму 1) следует, что

$$a(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(t) e^{i\lambda t} dt,$$

где  $\Psi(t) \in L_2[-\pi,\pi]$ . Отсюда получается  $|a(\lambda)| = |\lambda|^{-1}e^{\pi|\mathrm{Im}\,\lambda|}o(1)$ , при  $|\lambda| \to \infty$ . Значит, функция  $\nu(\lambda) = a(\lambda)/s(\lambda)$  — целая, причем  $\lim_{n\to\infty} \max_{\lambda\in K_n} |\nu(\lambda)| = 0$ , где  $K_n$  — последовательность неограниченно расширяющихся контуров, ограничивающих квадраты  $\left\{\lambda: |\mathrm{Re}\,\lambda - a| \le n + \frac{1}{2}, \; |\mathrm{Im}\,\lambda| \le n + \frac{1}{2}\right\}$ . Тогда по теореме Лиувилля  $\nu(\lambda) \equiv 0$ . Таким образом, при любом  $\lambda$  имеет место равенство  $c(\pi,\lambda) = s'(\pi,\lambda)$  (для восстановленного уравнения). Отсюда, согласно лемме 3, получаем, что p(x) и q(x) удовлетворяют условию симметричности (3).  $\square$ 

**Замечание 1.** Условия теоремы 2 являются также необходимыми, если функция q(x) удовлетворяет дополнительному условию, приведенному в п. 1. Но построенная вещественная функция при доказательстве теоремы 2 не обязана удовлетворять этому условию.

**Замечание 2.** Подобные результаты могут быть получены и в случае граничных условий вида y'(0) - hy(0) = 0,  $y'(\pi) + hy(\pi) = 0$ , где h — вещественное число. При этом широко используются результаты, полученные в работе [16].

## Библиографический список

- 1. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384 с.
- 2. *Левитан Б.М.* Об определении оператора Штурма– Лиувилля по одному и двум спектрам // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1978. Т. 42, № 1. С. 185–199.
- 3. *Poschel J., Trubowitz E.* Inverse Spectral Theory. N.Y.: Academic Press, 1987. 192 p.
- 4. *Гусейнов И.М., Набиев И.М.* Определение дифференциального оператора по спектру // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 4. С. 59–66.
- 5. *Yurko V. A.* The inverse spectral problem for differential operators with non-separated boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 250. P. 266–289.
- 6. *Набиев И.М.* Свойства спектров и восстановление дифференциальных операторов на отрезке: Автореф. дис.... д-ра физ.-мат. наук. Баку, 2007. 36 с.
- 7. *Мазур Т. В.* О разрешимости обратной задачи Штурма–Лиувилля в симметричном случае// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, № 1. С. 21–24.
- 8. Гусейнов Г. Ш. К спектральному анализу квадратичного пучка операторов Штурма Лиувилля // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, № 6. С. 1292–1296.

- 9. Гусейнов Г. Ш. Обратные спектральные задачи для квадратичного пучка операторов Штурма Лиувилля на конечном интервале // Спектральная теория операторов и ее приложения. Баку, 1986. Вып. 7. С. 51–101.
- 10. Юрко В. А. Обратная задача для пучков дифференциальных операторов // Мат. сборник. 2000. Т. 191, № 10. С. 137–160.
- 11. *Набиев И.М.* Обратная квазипериодическая задача для оператора диффузии // Докл. РАН. 2007. Т. 415, № 2. С. 168–170.
- 12. *Гусейнов И.М., Набиев И.М.* Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов // Мат. сборник. 2007. Т. 198, № 11. С. 47–66.
- 13. Юрко B.A. Обратная задача для дифференциальных операторов второго порядка с регулярными краевыми условиями // Мат. заметки. 1975. Т. 18, № 4. С. 569-576.
- 14.  $\it Mapченко B.A.$  Операторы Штурма Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977. 332 с.
- 15. *Левин Б.Я.* Целые функции (курс лекций). М.: Издво МГУ, 1971. 124 с.
- 16. *Гасымов М.Г., Гусейнов Г.Ш*. Определение оператора диффузии по спектральным данным // Докл. АН Азерб. ССР. 1981. Т. 37, № 2. С. 19–23.



УДК 513.6

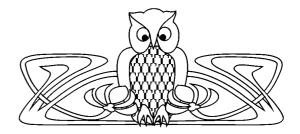
## ТОЛЕРАНТНОЕ РАССЛОЕНИЕ ПУТЕЙ И ТЕОРЕМА ГУРЕВИЧА ДЛЯ ТОЛЕРАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

С.И. Небалуев, М.Н. Сусин

Саратовский государственный университет, кафедра компьютерной алгебры и теории чисел E-mail: NebaluevSI@yandex.ru, SusinMN@mail.ru

В статье построено толерантное расслоение путей с толерантно стягиваемым пространством расслоения и с помощью точной гомотопической последовательности и гомологической спектральной последовательности толерантного расслоения доказывается толерантный аналог теоремы Гуревича.

**Ключевые слова:** толерантные пространства, толерантные расслоения, толерантные гомотопические группы, группы гомологий, спектральные последовательности толерантных расслоений, теорема Гуревича.



Tolerant Bundle of Ways and Gurevich's Theorem for Tolerant Spaces

S.I. Nebaluev, M.N. Susin

Saratov State University,

Chair of Computer Algebra and the Theory of Numbers E-mail: NebaluevSI@yandex.ru, SusinMN@mail.ru

In the article the tolerant bundle of ways with tolerant collapsible bundle space is constructed and the tolerant analogue of the Gurevich's theorem is proved by means of exact homotopic sequence and homology spectral sequence of tolerant bundles .

**Key words:** tolerant spaces, tolerant bundles, tolerant homotopic groups, homology groups, spectral sequences of tolerant bundles, Gurevich's theorem.

Толерантные пространства были определены Зиманом [1] и в настоящее время интерпретируются как наиболее общая математическая модель понятия схожести, позволяющая заменять непрерывность в различных разделах математики и ее приложений.

**Определение 1.** Толерантным пространством называется пара  $(X, \tau)$ , состоящая из множества X и рефлексивного и симметричного бинарного отношения  $\tau \in X \times X$ , называемого отношением толерантности.

Отображение  $f:(X,\tau)\to (Y,\theta)$  толерантных пространств называется *толерантным*, если из толерантности  $x_1\tau x_2$  (это означает  $(x_1,x_2)\in \tau$ ) следует  $f(x_1)\theta f(x_2)$ .

Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  обозначим через  $(I_n, \iota_n)$  и назовем *толерантным отрезком* длины n толерантное пространство, в котором  $I_n = \left\{\frac{k}{n} \middle| \ k = \overline{0,n}\right\}, \ \frac{k}{n} \iota_n \frac{l}{n} \Leftrightarrow |k-l| \leq 1.$ 

**Определение 2.** Толерантные отображения  $f_0$ ,  $f_1:(X,\tau)\to (Y,\theta)$  называются толерантно гомотопными относительно подмножества  $A\subset X$  и обозначаются  $f_0{\sim}f_1(rel\ A)$ , если найдутся число  $n\in\mathbb{N}$  и толерантное отображение  $F:(X\times I_n,\tau\times\iota_n)\to (Y,\theta)$ , такие что

$$(\forall \ x \in X) \ F(x,0) = f_0(x), \ F(x,1) = f_1(x); \qquad (\forall \ x \in X)(\forall \ k = \overline{0,n}) \ F\left(x,\frac{k}{n}\right) = f_0(x).$$

Если в определении 2 имеем n=1, то толерантная гомотопия называется *простой* и записывается  $f_0 \approx f_1(rel\ A)$ , а если A=0, то записывается  $f_0 \approx f_1$ .

**Определение 3.** Толерантное отображение  $p:(E,\overline{\tau})\to (B,\tau)$  называется *толерантным расслоением*, если для любого пространства  $(Y,\theta)$  и любых толерантных отображений

$$F: (Y \times I_n, \ \theta \times \iota_n) \to (B, \tau), \quad f': (Y, \theta) \to (E, \overline{\tau})$$

таких, что  $F(y,0) = p \circ f'(y), \ y \in Y$ , существует толерантное отображение  $F': (Y \times I_n, \theta \times \iota_n) \to (E, \overline{\tau})$ , такое что F'(y,0) = f'(y) и  $p \circ F' = F$ .

Рассматриваемое далее толератное пространство толерантных путей пространства  $(X, \tau)$  с проекцией конечной точки удовлетворяет определению 3 с точностью до несущественного изменения начальной функции f'(y).

**Определение 4.** Толерантным путем длины  $n \in \mathbb{N}$  в пространстве  $(X, \tau)$  называется толерантное отображение  $\omega_n: (I_n, \iota_n) \to (X, \tau)$ . Точки  $\omega_n(0), \ \omega_n(1) \in X$  называются началом и концом пути  $\omega_n$ . Если  $\omega_n(0) = \omega_n(1) = x_0$ , то  $\omega_n$  называется петлей в точке  $x_0$ .



Для путей  $\omega_n$ ,  $\omega_m'$  в пространстве  $(X,\tau)$ , у которых  $\omega_n(1)=\omega_m'(0)$ , определен путь  $\omega_n*\omega_m'$  длины n+m, такой что

$$\omega_n * \omega'_m \left( \frac{k}{n+m} \right) = \begin{cases} \omega_n \left( \frac{k}{n} \right), & k = \overline{0, n}, \\ \omega'_m \left( \frac{k-n}{m} \right), & k = \overline{n, n+m}. \end{cases}$$

**Определение 5.** Элементарным замедлением в точке  $\frac{k}{n}$ ,  $k=\overline{0,n}$ , толерантного пути  $\omega_n:(I_n,\iota_n)\to (X,\tau)$  называется толерантный путь  $\mu(k)(\omega_n):(I_{n+1},\iota_{n+1})\to (X,\tau)$ , такой что

$$(\forall \ l = \overline{0, n+1}) \quad \mu(k)(\omega_n) \left(\frac{l}{n+1}\right) = \begin{cases} \omega_n \left(\frac{l}{n}\right), & l = \overline{0, k}; \\ \omega_n \left(\frac{l-1}{n}\right), & l = \overline{k+1, n+1}. \end{cases}$$

Обозначим через  $P(X, x_0)$  — множество толерантных путей в  $(X, \tau)$  с началом в точке  $x_0 \in X$ .

Определение 6. Пути  $\omega_n$ ,  $\omega'_m \in P(X,x_0)$ , где для определенности считаем  $n \leq m$ , называются  $\varkappa$ -толерантыми, если выполняются следующие свойства: 1)  $\omega'_m = (\mu(0))^{m-n}(\gamma'_n)$ , 2)  $\omega_n \approx \gamma'_n$ .

В толерантном пространстве  $(P(X,x_0),\varkappa)$  будем рассматривать подпространство толерантных петель  $(\Omega(X,x_0),\varkappa)$  с  $\Omega(X,x_0)=\{\omega_n\in P(X,x_0)\mid \omega_n(0)=\omega_n(1)=x_0\}$ , подпространство путей ограниченной длины  $(P_M(X,x_0),\varkappa)$  с  $P_M(X,x_0)=\{\omega_n\in P(X,x_0)\mid n\leq M\}$ ,  $M\in\mathbb{N}$ , подпространство постоянных путей  $(CP(X,x_0),\varkappa)$  с  $CP(X,x_0)=\{\varepsilon_n\in P(X,x_0)\mid (\forall\ k=\overline{0,n})\ \varepsilon_n\left(\frac{k}{n}\right)=x_0\}$ .

Из определения 6 легко получить условие толерантности в  $(CP(X,x_0), \varkappa)$  :

$$(\forall \ \varepsilon_n, \varepsilon_m \in CP(X, x_0)) \ \varepsilon_n \varkappa \varepsilon_m.$$

**Теорема 1.** Для любого  $M \in \mathbb{N}$  пространство  $(P_M(X, x_0), \varkappa)$  является толерантно стягиваемым.

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся, что отображения

$$F: P_{M}(X, x_{0}) \times I_{M} \to P_{M}(X, x_{0}), \qquad F\left(\omega_{n}, \frac{l}{M}\right) \left(\frac{k}{n}\right) = \begin{cases} x_{0}, & n \leq l, \\ \omega_{n}\left(\frac{k}{n}\right), & l \leq n, \ k = \overline{0, n - l}, \\ \omega_{n}\left(\frac{n - l}{n}\right), & l \leq n, \ k = \overline{n - l, n}, \end{cases}$$

$$G: CP_{M}(X, x_{0}) \times I_{1} \to CP_{M}(X, x_{0}), \qquad G\left(\varepsilon_{n}, l\right) = \begin{cases} \varepsilon_{n}, & l = 0, \\ \varepsilon_{1}, & l = 1, \end{cases}$$

осуществляют толерантные гомотопии

$$F: 1_{P_M(X,x_0)} \sim \varphi(rel\ CP_M(X,x_0)), \qquad G: 1_{CP_M(X,x_0)} \sim const_{\varepsilon_1},$$

где  $\varphi: P_M(X,x_0) \to CP_M(X,x_0) \subset P_M(X,x_0), \ \varphi(\omega_n) \stackrel{df}{=} \varepsilon_n, \ \mathrm{const}_{\varepsilon_1}: CP_M(X,x_0) \to \{\varepsilon_1\} \subset CP_M(X,x_0), \ \mathrm{const}_{\varepsilon_1}(\varepsilon_n) \equiv \varepsilon_1.$  Отсюда следует, что отображение  $F*G: P_M(X,x_0) \times I_{M+1} \to P_M(X,x_0)$ , такое что

$$F * G\left(\omega_n, \frac{l}{M+1}\right) = \begin{cases} F\left(\omega_n, \frac{l}{M}\right), & l = \overline{0, M}, \\ G\left(\varepsilon_n, l - M\right), & l = \overline{M, M+1}, \end{cases}$$

осуществляет толерантную гомотопию  $F*G: 1_{P_M(X,x_0)} \sim \mathrm{const}_{\varepsilon_1}, \ \mathrm{const}_{\varepsilon_1}(\omega_n) \equiv \varepsilon_1.$   $\square$ 

**Теорема 2.** Для произвольного толерантного пространства  $(X, \tau)$  пространство  $(P(X, x_0), \varkappa)$  имеет тривиальные в положительных размерностях толерантные гомотопические и гомологические группы:

$$(\forall i \ge 1) \ \pi_i(P(X, x_0)) = 0, \ H_i(P(X, x_0)) = 0. \tag{1}$$

**Доказательство.** Утверждение (1) следует из теремы 1 (см. также [2, 3]) и того факта, что  $P(X,x_0)=\bigcup_{M\geq 1}P_M(X,x_0),\ (\forall\ m\in\mathbb{N})\ P_M(X,x_0)\subset P_{M+1}(X,x_0).$ 



**Теорема 3.** Толерантное отображение, задаваемое формулой  $p(\omega_m) = \omega_n(1)$ , является толерантным квазирасслоением, в смысле, что для любого пространства  $(Y, \theta)$  и любых толерантных отображений

$$F: (Y \times I_n, \theta \times \iota_n) \to (X, \tau), \qquad f': (Y, \theta) \to (P(X, x_0), \varkappa),$$

таких что  $F(y,0) = p \circ f'(y)$ , существует толерантное отображение

$$F: (Y \times I_n, \theta \times \iota_n) \to (P(X, x_0), \varkappa),$$

такое что  $p \circ F' = F$ ,  $F'(y,0) = (f'(y)) * \varepsilon_n$ .

Слоем квазирасслоения p над точкой  $x_0 \in X$  является пространство  $p^{-1}(x_0) = (\Omega(X, x_0), \varkappa)$ . А если пространство  $(X, \tau)$  является линейно связным и односвязным (т.е.  $\pi_1(X) = 0$ ), то толерантное квазирасслоение p имеет линейно связные базу и слой.

**Доказательство.** Первая часть теоремы доказывается аналогично теореме 1 [4]. При доказательстве второй части используются те же рассуждения, что и при доказательстве предложения 1 [4]. □

**Теорема 4.** Для линейно связного толерантного пространства  $(X, \tau)$  имеются следующие изоморфизмы толерантных гомотопических групп:

$$(\forall i \ge 2) \ \pi_i(X) \cong \pi_{i-1}(\Omega(X, x_0)), \tag{2}$$

откуда, в частности, следует коммутативность групп  $\pi_i(\Omega(X,x_0)), i \geq 1.$ 

**Доказательство.** Для толерантного квазирасслоения p из теоремы 3 имеется такая же точная гомотопическая последовательность, как для любого толерантного расслоения (см. [3, теорема 9]). Значит, точна следующая последовательность толернатных гомотопических групп:

$$\cdots \to \pi_i(\Omega(X,x_0)) \to \pi_i(P(X,x_0)) \to \pi_i(X) \to \pi_{i-1}(\Omega(X,x_0)) \to \pi_{i-1}(P(X,x_0)) \to \cdots$$

Точность этой последовательности вместе с теоремой 2 дают изоморфизмы (2), из которых следует утверждение о коммутативности (см. [3]).  $\square$ 

**Замечание.** Условие линейной связности пространства  $(X, \tau)$  в теореме 4 не является существенным и нужно лишь для того, чтобы не иметь ограничений, связанных с отмеченной точкой.

**Теорема 5.** Если для линейно связного и односвязного пространства  $(X, \tau)$  имеем

$$(\forall i = \overline{1, p-1}) \quad H_i(X) = 0, \tag{3}$$

тогда

$$(\forall i = \overline{1, 2p - 3}) \quad H_i(\Omega(X, x_0)) \cong H_{i+1}(X). \tag{4}$$

**Доказательство.** При наших условиях, согласно теореме 3, имеется толерантное квазирасслоение  $p:(P(X,x_0),\varkappa)\to (X,\tau)$  с линейно связными базой  $(X,\tau)$  и слоем  $(\Omega(X,x_0),\varkappa)$ . Как и в общем случае (см. [5, теоремы 1, 3, 5]) для этого толерантного квазирасслоения существует гомологическая спектральная последовательность Лере – Серра, имеющая классический вид. Такая толерантная последовательность Лере – Серра, при условии односвязности  $\pi_1(X)=0$ , порождает точную гомологическую последовательность Серра ([6, гл. III, § 4, предл. 5])

$$H_{p+q-1}(\Omega(X,x_0)) \to H_{p+q-1}(P(X,x_0)) \to H_{p+q-1}(X) \to H_{p+q-2}(\Omega(X,x_0)) \to \cdots \to$$
  
  $\to H_2(X) \to H_1(\Omega(X,x_0)) \to H_1(P(X,x_0)) \to H_1(\Omega(X,x_0)) \to 0,$  (5)

где натуральное число q таково, что  $(\forall i=\overline{1,q-1})$   $H_i(\Omega(X,x_0))=0$ . Из (5), (1), (3) следует, что  $q\geq p-1$ . Отсюда, еще раз воспользовавшись (5) и (1), получаем (4).  $\square$ 

Следующая теорема является толерантным аналогом теоремы Гуревича.

**Теорема 6.** Если  $(X, \tau)$  — линейно связное толерантное пространство и для  $i = \overline{1, n-1}$  имеем  $\pi_i(X) = 0$ , то для  $i = \overline{1, n-1}$   $H_i(X) = 0$  и  $\pi_n(X) \cong H_n(X)$ .

**Доказательство.** Индукция по n. При n=2 для i<2 имеем  $\pi_i(X)=0$ . Следовательно, применяя (1), толерантную теорему Пуанкаре ([2, теорема 2.4.3.]) и (4), получаем  $H_1(X)=0$  и

$$\pi_2(X) \cong \pi_1(\Omega(X, x_0)) \cong H_1(\Omega(X, x_0)) \cong H_2(X).$$



Пусть терема верна для n=m-1 и пусть  $\pi_i(X)=0$  для  $i=\overline{1,m-1},\ m\geq 3.$  Тогда из (2) и предложения индукции следует, что  $H_i(\Omega(X,x_0))=0$  при  $0< i\leq m-1$  и  $\pi_m(\Omega(X,x_0))\cong H_m(\Omega(X,x_0))$ . Отсюда, используя (2), предложение индукции и (4), получаем

$$\pi_{m+1}(X) \cong \pi_m(\Omega(X, x_0)) \cong H_m(\Omega(X, x_0)) \cong H_{m+1}(X),$$

так как при  $m \geq 3, \ m < 2m-2 = 2p-2.$  И по тем же соображениям при 1 < i < m-1 имеем i < 2p-2 и  $H_i(X) \cong H_{i-1}(\Omega(X,x_0)) = 0.$   $\square$ 

## Библиографический список

- 1. *Небалуев С.И., Кляева И.А.* Толерантное расслоение пространства толерантных путей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 3. С. 93–106.
- 2. Небалуев С.И. Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006.
- 3. Небалуев С.И. Точные гомотопические последовательности в теории толерантных пространств // Чебышевский сборник. Тула, 2004. Т. V, вып. 3(11). С. 64–97.
- 4. Сусин М.Н. Слабая толерантность в пространстве то-

лерантных путей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 5. С. 121–131.

- 5. Небалуев С.И., Кляева И.А., Сусин М.Н. Построение спектральной последовательности толерантного расслоения // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 5. С. 94–118.
- 6. *Серр Ж.-П.* Сингулярные гомологии расслоенных пространств. Расслоенные пространства и их приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.

УДК 517.9

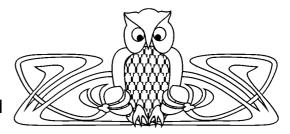
# О ПОЛНОТЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДАЕМЫХ СИНГУЛЯРНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

## Д.В. Поплавский

Саратовский государственный университет, кафедра вычислительной математики и математической физики E-mail: poplavskydv@mail.ru

В статье приводится теорема о полноте специальных векторфункций, инициированных произведениями так называемых решений Вейля дифференциального уравнения четвертого порядка и их производными на полуоси. Доказывается, что такие нелинейные комбинации решений Вейля и их производных образуют линейное подпространство убывающих на бесконечности решений линейной сингулярной дифференциальной системы типа Камке. Строится и исследуется функция Грина соответствующей сингулярной краевой задачи на полуоси для пучков операторов, определяющих дифференциальную систему типа Камке. Используя аналитические и асимптотические свойства функции Грина, методы спектральной теории операторов и теории аналитических функций, доказывается искомая теорема о полноте.

**Ключевые слова:** теорема о полноте, произведения решений Вейля, краевые задачи, функция Грина.



About Completeness of Products of Functions, Initiated by Singular Differential Equations

## D.V. Poplavsky

Saratov State University, Chair of Numerical Analysis and Mathematical Physics E-mail: poplavskydv@mail.ru

In this article we introduced the completeness theorem for special vector-functions, initiated by products of Weil solutions of forth order differential equation and its derivatives on the halfline. We prove that such nonlinear combinations of Weil solutions and its derivatives form the linear subspace of solutions, which decrease to infinity, of linear singular Kamke-type differential system. Then we construct and investigate Green function of corresponding singular boundary problem for the operator-pencils, which determine Kamke-type differential system. With help of analytic and asymptotic properties of Green function, methods of spectral theory of operators and theory of analytic functions we prove the required completeness theorem.

**Key words:** completeness theorem, products of Weil's solutions, boundary problems, Green's function.

Вопросы, связанные с исследованием полноты произведений решений дифференциальных уравнений, достаточно часто встречаются в различных задачах спектральной теории (см., напр., [1–4]). Приведенная в данной работе теорема о полноте может быть использована при исследовании вопроса разрешимости смешанной задачи на полуоси для системы Богоявленского [5].



Прежде чем сформулировать основной результат (теорема 1) введем необходимые понятия и факты. При  $x \ge 0$  рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$ly := y^{(4)} + (p_2(x)y')' + p_0(x)y = \lambda y, \tag{1}$$

где  $p_0(x), p_2(x)$  — достаточно гладкие комплекснозначные функции и при этом  $p_0(x), p_2^{(\nu)}(x) \in L(0,\infty), \ \nu=0,1.$  Сопоставим уравнению (1) (пока формально) следующие векторные уравнения типа Камке:

$$L_{\lambda}Y(x) := Y^{(7)}(x) + \sum_{j=0}^{5} P_j(x)Y^{(j)}(x) - \lambda(\Omega Y^{(3)}(x) + \sum_{j=0}^{1} R_j(x)Y^{(j)}(x)) = 0,$$
 (2)

$$L_{\lambda}^* Z(x) := -Z^{(7)}(x) - \sum_{j=0}^5 Z^{(j)}(x) P_j^*(x) + \lambda (Z^{(3)}(x)\Omega + \sum_{j=0}^1 Z^{(j)}(x) R_j^*(x)) = 0, \tag{3}$$

$$Y(x) = (Y_1(x), Y_2(x))^T, \quad Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x)), \quad \Omega = \begin{pmatrix} 36 & 10 \\ -80 & -24 \end{pmatrix},$$

где матрицы  $P_k(x), P_k^*(x), R_i(x), R_i^*(x)$  определены в [6] и строятся через коэффициенты уравнения (1). Предполагаем, что  $P_k(x), k = \overline{2,5}, (1+x^2)P_0(x), (1+x)P_1(x), (1+x^2)R_0(x), (1+x)R_1(x) \in C(0,\infty) \cap L(0,\infty)$ . Отметим, что для достаточно гладких Y(x) и Z(x) имеет место равенство

$$\int_{0}^{\infty} Z(x)L_{\lambda}Y(x) dx = \langle Z(x), Y(x) \rangle \Big|_{x=0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} L_{\lambda}^{*}Z(x)Y(x) dx,$$

$$\langle Z, Y \rangle := \sum_{j=1}^{7} (-1)^{j+1} Z^{(j-1)} Y^{(7-j)} + \sum_{k=1}^{5} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} (ZP_{k})^{(j-1)} Y^{(k-j)} - \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^{3} (-1)^{j+1} Z^{(j-1)} \Omega Y^{(3-j)} - ZR_{1}Y \right).$$

**Лемма 1.** Пусть y(x) и z(x) есть решения уравнения (1), такие что при каждом фиксированном  $x \geq 0$  функция  $(\xi - x)y'(\xi)z'(\xi) \in L(x,\infty)$ . Тогда вектор-функция  $(U(x),V(x)):=(y(x)z(x),\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\xi - x)y'(\xi)z'(\xi)\,d\xi)$  удовлетворяет уравнению (3).

**Замечание.** Доказательство леммы 1 состоит в последовательном дифференцировании U(x) и V(x) с применением уравнения (1).

Пусть  $\Phi_k(x,\lambda)$ ,  $k=\overline{1,4}$  есть решения Вейля уравнения (1) ([7, § 3.1, с. 255]), т.е.  $\Phi_k^{(j-1)}(0,\lambda)=$   $=\delta_{jk},\ j=\overline{1,k},\ \Phi_k(x,\lambda)=O(e^{\rho r_k x}),\ x\to\infty$ , где  $\lambda=\rho^4,\ \delta_{jk}$  — символ Кронекера,  $r_k,\ k=\overline{1,4}$  — корни уравнения  $r^4=1$ , занумерованные в каждом секторе S раствора  $\pi/4$  ( $\arg\rho\in(\nu\pi/4,(\nu+1)\pi/4),\ \nu=\overline{0,7}$ ) так, чтобы

$$\operatorname{Re}(\rho r_1) < \operatorname{Re}(\rho r_2) < \operatorname{Re}(\rho r_3) < \operatorname{Re}(\rho r_4).$$
 (4)

Для решений Вейля при  $|\rho| \to \infty, \ \rho \in S$  имеют место асимптотические представления ([7, § 3.1, с. 258])

$$\Phi_k^{(j-1)}(x,\lambda) = \rho^{1-k} \sum_{m=1}^k (\rho r_m)^{j-1} e^{\rho r_m x} (a_{km} + O(\rho^{-1})), \quad k = \overline{1,4},$$

где  $a_{km}$  — некоторые числа.

Определим вектор-функции  $\Psi_k(x,\lambda) = (\Psi_{k1}(x,\lambda),\Psi_{k2}(x,\lambda))$  следующим образом:

$$\Psi_k(x,\lambda) = (\Phi_j(x,\lambda)\Phi_p(x,\lambda), \int_x^\infty (\xi - x)\Phi'_j(\xi,\lambda)\Phi'_p(\xi,\lambda) d\xi),$$

где k=p при  $j=1,\ p=\overline{1,3}$  и k=4 при j=p=2. Из леммы 1 вытекает



**Следствие 1.** Вектор-функции  $\Psi_k(x,\lambda)$ ,  $k = \overline{1,4}$  удовлетворяют уравнению (3).

Ниже сформулирован основной результат — теорема о полноте системы  $\{\Psi_k(x,\lambda)\}_{k=\overline{1.4}}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $f(x)=(f_1(x),f_2(x))^T$ , где  $f_1(x),f_2(x)\in L(0,\infty)$ . Если имеют место равенства

$$\int_{0}^{\infty} \Psi_{k}(x,\lambda) f(x) dx = 0, \quad k = \overline{1,4}, \qquad |\lambda| > \lambda^{*}, \quad \text{Im } \lambda \neq 0,$$
 (5)

то f(x) = 0 п.в. на  $[0, \infty)$ .

Доказательство теоремы 1 основано на исследовании соответствующих сингулярных краевых задач для неоднородных уравнений, определяемых пучками операторов (2), (3), и реализуется в несколько этапов.

**І.** При фиксированных t и  $\lambda$  определим матрицу-функцию  $g(x,t,\lambda)$  при  $x\geq t$  как решение следующей задачи Коши:  $L_{\lambda}g(x,t,\lambda)=0, \ \frac{\partial^{j}}{\partial x^{j}}g(x,t,\lambda)\mid_{x=t}=0, \ j=\overline{0,5}, \ \frac{\partial^{6}}{\partial x^{6}}g(x,t,\lambda)\mid_{x=t}=E_{2}$  и матрицуфункцию  $g^{*}(x,t,\lambda)$  при  $x\leq t$  как решение задачи  $L_{\lambda}^{*}g^{*}(x,t,\lambda)=0, \ \frac{\partial^{j}}{\partial x^{j}}g^{*}(x,t,\lambda)\mid_{x=t}=0, \ j=\overline{0,5}, \ \frac{\partial^{6}}{\partial x^{6}}g^{*}(x,t,\lambda)\mid_{x=t}=-E_{2}.$  Здесь и далее  $E_{m}$  — единичная матрица размерности m. Доопределим  $g(x,t,\lambda)$  и  $g^{*}(x,t,\lambda)$ , положив  $g(x,t,\lambda)=0$  при x< t и  $g^{*}(x,t,\lambda)=0$  при x>t. Отметим, что при фиксированных x и t матрицы-функции  $g(x,t,\lambda)$  и  $g^{*}(x,t,\lambda)$  являются целыми аналитическими по  $\lambda$ . Следующие две леммы устанавливают то, что  $g(x,t,\lambda)$  и  $g^{*}(x,t,\lambda)$  являются функциями Грина соответствующих задач. Обозначим через  $L_{loc}(0,\infty)$  множество локально суммируемых на полуоси функций.

**Лемма 2.** Пусть  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ ,  $f_1(x), f_2(x) \in L_{loc}(0, \infty)$  и пусть

$$Y(x) = \int_{0}^{x} g(x, t, \lambda) f(t) dt.$$
 (6)

Tогда Y(x) удовлетворяет соотношениям:

$$L_{\lambda}Y(x) = f(x), \quad Y^{(j)}(0) = 0, \quad j = \overline{0,6}.$$
 (7)

Справедливо и обратное утверждение. Если Y(x) является решением задачи (7), то имеет место представление (6).

**Лемма 3.** Пусть  $f^*(x)=(f_1^*(x),f_2^*(x))$ ,  $f_1^*(x)$ ,  $f_2^*(x)$  — финитные суммируемые функции и пусть

$$Z(x) = \int_{-\tau}^{\infty} f^*(t)g^*(x,t,\lambda) dt.$$
 (8)

Тогда Z(x) удовлетворяет соотношениям

$$L_{\lambda}^* Z(x) = f^*(x), \quad Z(x) -$$
гладкая финитная вектор-функция. (9)

Справедливо и обратное утверждение. Если Z(x) является решением задачи (9), то имеет место представление (8).

**Лемма 4.** Имеет место следующее соотношение:  $g^*(x,t,\lambda) = g(t,x,\lambda)$ .

**II.** При  $x \ge 0$  и  $t \ge 0$  рассмотрим матрицу-функцию

$$G^{*}(x,t,\lambda) = \sum_{k=1}^{4} B_{k}(t,\lambda)\Psi_{k}(x,\lambda) + g^{*}(x,t,\lambda),$$
(10)

где  $B_k(t,\lambda)=(B_{k1}(t,\lambda),B_{k2}(t,\lambda))^T$  определим из условий  $G^*(0,t,\lambda)=0$  и  $G_x^*(0,t,\lambda)=0$ , т.е.  $B_k(t,\lambda)$  найдем из системы  $\sum\limits_{k=1}^4 B_k(t,\lambda)\Psi_k(0,\lambda)=-g^*(0,t,\lambda),\sum\limits_{k=1}^4 B_k(t,\lambda)\Psi_k'(0,\lambda)=-g_x^*(0,t,\lambda)$ . Данная система распадается на две системы с неизвестными  $B_{k1}(t,\lambda)$  и  $B_{k2}(t,\lambda)$  и определителем, отличным от нуля при  $|\lambda|>\lambda^*$ ,  ${\rm Im}\,\lambda\neq 0$ .



Учитывая условие (4) и, что  $\Phi_j^{(\nu)}(x,\lambda) = O(e^{\rho r_j x}), \ j = \overline{1,3}$  при  $x \to \infty, \ |\lambda| > \lambda^*, \ {\rm Im} \ \lambda \neq 0,$  находим  $\Psi_k^{(\nu)}(x,\lambda) \to 0, \ k = \overline{1,4}, \ x \to \infty, \ |\lambda| > \lambda^*, \ {\rm Im} \ \lambda \neq 0.$  Тогда из представления (10) при фиксированных  $\lambda$ ,  $|\lambda| > \lambda^*, \ {\rm Im} \ \lambda \neq 0$  и t, принадлежащем некоторому компакту из  $[0,\infty)$ , следует, что  $G^{*(\nu)}(x,t,\lambda) \stackrel{\exp}{\to} 0$ ,  $\nu = \overline{0,6}, \ x \to \infty$ . Здесь и в дальнейшем символ  $\stackrel{\exp}{\to}$  означает экспоненциальное стремление.

**Лемма 5.** Пусть  $f^*(x)=(f_1^*(x),f_2^*(x)),\, f_1^*(x),f_2^*(x)$ — финитные суммируемые функции и пусть  $Z(x)=\int\limits_0^\infty f^*(t)G^*(x,t,\lambda)\,dt.$  Тогда Z(x) при фиксированном  $\lambda(|\lambda|>\lambda^*,\, Im\,\lambda\neq 0)$  удовлетворяет соотношениям  $L_\lambda^*Z(x)=f^*(x),\, Z(0)=Z'(0)=0,\, Z^{(\nu)}(x)\stackrel{\exp}{\to} 0,\, \nu=\overline{0,6},\, x\to\infty.$ 

Доказательство леммы 5 основано на применении следствия 1 и леммы 3.

**III.** Рассмотрим так называемое «простейшее» уравнение вида (2), т.е. уравнение с переменными коэффициентами, равными тождественному нулю,

$$L_{\lambda}^{0}Y(x) := Y^{(7)}(x) - \lambda \Omega Y^{(3)}(x) = 0, \quad x \ge 0.$$
(11)

В этом пункте построим функцию Грина сингулярной краевой задачи для неоднородного уравнения, записанного с помощью оператора (11). Для этого введем фундаментальную систему решений  $X_k(x,\lambda)=(X_{k1}(x,\lambda),X_{k2}(x,\lambda))^T,\ k=\overline{1,14},\$  удовлетворяющую условиям  $X_k^{(m)}(0,\lambda)=(\delta_{k-1,2m},\delta_{k-2,2m})^T,\ m=\overline{0,6},\ k=\overline{1,14}.$  Также рассмотрим фундаментальную систему решений  $N_k(x,\lambda)=(N_{k1}(x,\lambda),N_{k2}(x,\lambda))^T,\ k=\overline{1,14},\$  такую что  $N_k(x,\lambda)=X_k(x,\lambda),\ k=\overline{1,6}$  и  $N_{k+6}(x,\lambda)=(e^{\rho\omega_k x},\beta_k e^{\rho\omega_k x})^T,\ k=\overline{1,8},\$  где  $\omega_k^4=-4,\ \beta_k=-4$  при k=1,2,5,6 и  $\omega_k^4=16,\ \beta_k=-2$  при k=3,4,7,8. При этом в каждом секторе S имеют место неравенства  $\mathrm{Re}\,(\rho\omega_1)<\mathrm{Re}\,(\rho\omega_2)<\mathrm{Re}\,(\rho\omega_5)<\mathrm{Re}\,(\rho\omega_6)$  и  $\mathrm{Re}\,(\rho\omega_3)<\mathrm{Re}\,(\rho\omega_4)<\mathrm{Re}\,(\rho\omega_7)<\mathrm{Re}\,(\rho\omega_8).$ 

Определим матрицу-функцию

$$G_0(x,t,\lambda) = \sum_{k=1}^{4} X_{k+10}(x,\lambda) A_k(t,\lambda) + g_0(x,t,\lambda),$$
 (12)

где  $g_0(x,t,\lambda)$  — функция Грина задачи  $L^0_{\lambda}Y(x)=f(x),\,Y^{(j)}(0)=0,\,j=\overline{0,6}.$ 

Используя разложения  $X_k(x,\lambda)=\sum\limits_{\nu=1}^{14}\alpha_{\nu,k}(\lambda)N_{\nu}(x,\lambda),\ k=\overline{1,14},$  определим вектор-функции  $A_k(t,\lambda)=(A_{k1}(t,\lambda),A_{k2}(t,\lambda)),\ k=\overline{1,4}$  из условия обнуления в представлении (12) растущих по x экспонент, которое имеет вид

$$\sum_{k=1}^{4} \alpha_{\nu,k+10}(\lambda) (A_{k1}(t,\lambda), A_{k2}(t,\lambda)) + (\alpha_{\nu,13}(\lambda), \alpha_{\nu,14}(\lambda)) e^{-\rho\omega_{\nu-6}t} = 0, \quad \nu = \overline{11,14}.$$

После определения  $A_k(t,\lambda)$  представление (12) примет вид а) при x>t

$$G_{0}(x,t,\lambda) = \sum_{\nu=7}^{10} \binom{N_{\nu1}(x,\lambda)}{N_{\nu2}(x,\lambda)} \left(\sum_{k=1}^{4} \alpha_{\nu,k+10}(\lambda)(A_{k1}(t,\lambda),A_{k2}(t,\lambda)) + (\alpha_{\nu,13}(\lambda),\alpha_{\nu,14}(\lambda))e^{-\rho\omega_{\nu-6}t}\right) + \sum_{\nu=1}^{6} \binom{N_{\nu1}(x,\lambda)}{N_{\nu2}(x,\lambda)} \sum_{k=1}^{4} \alpha_{\nu,k+10}(\lambda)(A_{k1}(t,\lambda),A_{k2}(t,\lambda)) + \sum_{\nu=1}^{6} \binom{N_{\nu1}(x-t,\lambda)}{N_{\nu2}(x-t,\lambda)} (\alpha_{\nu,13}(\lambda),\alpha_{\nu,14}(\lambda));$$

б) при  $x \leq t$ 

$$G_0(x,t,\lambda) = \sum_{\nu=1}^{10} \binom{N_{\nu 1}(x,\lambda)}{N_{\nu 2}(x,\lambda)} \sum_{k=1}^{4} \alpha_{\nu,k+10}(\lambda) (A_{k1}(t,\lambda), A_{k2}(t,\lambda)) - \sum_{\nu=11}^{14} \binom{N_{\nu 1}(x,\lambda)}{N_{\nu 2}(x,\lambda)} (\alpha_{\nu,13}(\lambda), \alpha_{\nu,14}(\lambda)) e^{-\rho\omega_{\nu-6}t}.$$

Кроме этого имеем  $\frac{\partial^j}{\partial x^j}G_0(0,t,\lambda)=0,\;j=\overline{0,4}$  и  $\frac{\partial^j}{\partial x^j}G_0(x,t,\lambda)=O(\frac{1+x^{2-j}}{\rho^4}),\;j=0,1,$   $\frac{\partial^j}{\partial x^j}G_0(x,t,\lambda)=O(\rho^{j-6}),\;j=\overline{2,6}.$ 



**Лемма 6.** Пусть  $f(x)=(f_1(x),f_2(x))^T$ ,  $f_1(x),f_2(x)\in L(0,\infty)$  и пусть  $Y(x)=\int\limits_0^\infty G_0(x,t,\lambda)f(t)\,dt$ . Тогда Y(x) удовлетворяет соотношениям  $L^0_\lambda Y(x)=f(x)$ ,  $Y^{(j)}(0)=0$ ,  $j=\overline{0,4}$ ,  $Y^{(j)}(x)=O(1+x^{2-j})$ ,  $j=0,1,Y^{(j)}(x)=O(1)$ ,  $j=\overline{2,6}$ ,  $x\to\infty$ .

**IV.** В этом пункте построим функцию Грина  $G(x,t,\lambda)$  соответствующей сингулярной краевой задачи для неоднородного уравнения, записанного с помощью оператора (2). Для этого применим метод возмущения простейшего уравнения (11). А именно при фиксированных t и  $\lambda$  определим совокупность матриц-функций  $G(x,t,\lambda)$  и  $G_k(x,t,\lambda)$ ,  $k=\overline{1,5}$  как решение следующей системы интегральных уравнений

$$G(x,t,\lambda) = G_0(x,t,\lambda) - \int_0^\infty G_0(x,s,\lambda)J(s,t,\lambda) ds, G_k(x,t,\lambda) =$$

$$= G_0^{(k)}(x,t,\lambda) - \int_0^\infty G_0^{(k)}(x,s,\lambda)J(s,t,\lambda) ds, \ k = \overline{1,5},$$
(13)

где  $J(s,t,\lambda) = \sum_{i=1}^5 P_i(s)G_i(s,t,\lambda) + P_0(s)G(s,t,\lambda) - \lambda(R_1(s)G_1(s,t,\lambda) + R_0(s)G(s,t,\lambda)).$ 

**Лемма 7.** При фиксированных  $t \geq 0$  и  $\lambda$  ( $|\lambda| > \lambda^*$ ,  $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ ) система интегральных уравнений (13) имеет единственное решение  $G(x,t,\lambda)$  и  $G_k(x,t,\lambda)$ ,  $k=\overline{1,5}$ . При этом имеют место неравенства:  $|G(x,t,\lambda)| \leq C\frac{1+x^2}{|\rho|^4}$ ,  $|G_1(x,t,\lambda)| \leq C\frac{1+x}{|\rho|^4}$ ,  $|G_j(x,t,\lambda)| \leq C|\rho|^{j-6}$ ,  $j=\overline{2,5}$ ,  $|\frac{\partial}{\partial x}G_5(x,t,\lambda)| \leq C$ . **Лемма 8.** При фиксированных  $t \geq 0$  и  $\lambda$  ( $|\lambda| > \lambda^*$ ,  $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ ) матрицы-функции  $G(x,t,\lambda)$ 

**Лемма 8.** При фиксированных  $t \geq 0$  и  $\lambda$  ( $|\lambda| > \lambda^*$ ,  $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ ) матрицы-функции  $G(x,t,\lambda)$  и  $G_k(x,t,\lambda)$ ,  $k = \overline{1,5}$  имеют следующие свойства: 1)  $G_k(x,t,\lambda) = \partial^k/\partial x^k G(x,t,\lambda)$ ,  $k = \overline{1,5}$ ; 2)  $\partial^6/\partial x^6 G(x,t,\lambda)$  — непрерывная по  $x \in [0,t) \cup (t,\infty)$  и  $\partial^6/\partial x^6 G(t+0,t,\lambda) - \partial^6/\partial x^6 G(t-0,t,\lambda) = E_2$ ; 3)  $G(0,t,\lambda) = \partial^k/\partial x^k G(0,t,\lambda) = 0$ ,  $k = \overline{1,4}$ ; 4)  $L_{\lambda}G(x,t,\lambda) = 0$ .

**Лемма 9.** Пусть  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ ,  $f_1(x), f_2(x) \in L(0, \infty)$  и пусть  $Y(x) = \int_0^\infty G(x, t, \lambda) f(t) dt$  при  $|\lambda| > \lambda^*$ ,  $\text{Im } \lambda \neq 0$ . Тогда Y(x) удовлетворяет соотношениям:

$$L_{\lambda}Y(x) = f(x), \qquad Y^{(j)}(0) = 0, \quad j = \overline{0, 4},$$
  

$$Y^{(j)}(x) = O(1 + x^{2-j}), \quad j = 0, 1, \qquad Y^{(j)}(x) = O(1), \quad j = \overline{2, 6}, \quad x \to \infty.$$
(14)

Таким образом,  $G(x,t,\lambda)$  можно назвать функцией Грина краевой задачи (14).

**Лемма 10.** При  $x \geq 0$ ,  $t \geq 0$  и  $|\lambda| > \lambda^*$ ,  ${\rm Im} \, \lambda \neq 0$  имеет место следующее соотношение:  $G^*(x,t,\lambda) = G(t,x,\lambda)$ .

Из представления (10), лемм 4 и 10 вытекает важное следствие.

**Следствие 2.** При  $x \ge 0, \ t \ge 0$  и  $|\lambda| > \lambda^*$ ,  $\operatorname{Im} \lambda \ne 0$  имеет место представление

$$G(x,t,\lambda) = \sum_{k=1}^{4} B_k(x,\lambda)\Psi_k(t,\lambda) + g(x,t,\lambda).$$
 (15)

**V.** Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1. Пусть f(x) удовлетворяет условию теоремы 1. Положим  $Y(x,\lambda)=\int\limits_0^\infty G(x,t,\lambda)f(t)\,dt$ . Используя лемму 9 при  $|\lambda|>\lambda^*$ ,  ${\rm Im}\,\lambda\neq 0$ , находим

$$L_{\lambda}Y(x,\lambda) = f(x). \tag{16}$$

Далее, с помощью представления (15) и условия (5) последовательно вычисляем

$$Y(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{4} B_k(x,\lambda) \int_0^\infty \Psi_k(t,\lambda) f(t) dt + \int_0^x g(x,t,\lambda) f(t) dt = \int_0^x g(x,t,\lambda) f(t) dt.$$
 (17)

Так как при фиксированных x и t матрица-функция  $g(x,t,\lambda)$  является целой по  $\lambda$ , то из равенства (17) вытекает, что  $Y(x,\lambda)$  также является целой. С другой стороны, в силу леммы 7  $Y(x,\lambda)$  убывает при  $|\lambda| \to \infty$ . Следовательно, по теореме Лиувилля (см., напр., [8, с. 209]) имеем  $Y(x,\lambda) \equiv 0$ . Учитывая последнее, из равенства (16) следует, что f(x) = 0 п.в. на  $[0,\infty)$ . Теорема 1 доказана.



#### Библиографический список

- 1. Borg G. Eine umkehrung der Sturm-Liouvillischen eigenwertaufgabe bestimmung der differentialgleichung durch die eigenwerte // Acta Math. (Uppsala). 1946. V. 78. P. 1–96.
- 2. Гасымов М.Г., Левитан Б.М. О разложении по произведениям некоторых решений двух уравнений Штурма — Лиувилля // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. С. 781–784.
- 3. *Христов Е.Х.* О разложениях по произведениям решений двух задач Штурма Лиувилля на полуоси // Диф. уравнения. 1980. № 16. С. 23–29.
- 4. *Yurko V.A.* The Inverse Spectral Problem for Differential Operators with Nonseparated Boundary

Conditions // J. Math. Analysis and Applications. 2000.  $\mathbb{N}_2$  250. P. 266–289.

- 5. Поплавский Д.В. О разрешимости начально-краевой задачи для системы Богоявленского // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 98–101.
- 6. Поплавский Д.В. Прямые и обратные задачи спектрального анализа и их приложения к нелинейным эволюционным операторам: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук / Сарат. ун-т. Саратов, 2006. 116 с.
- 7. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384 с.
- 8. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1967. 444 с.

УДК 517.518.85

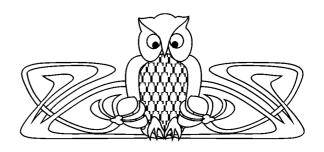
## ОШИБКА ПРИБЛИЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ ФОРМОСОХРАНЯЮЩИМИ ОПЕРАТОРАМИ

#### С.П. Сидоров

Саратовский государственный университет, кафедра математической экономики E-mail: SidorovSP@info.squ.ru

В статье приводится оценка ошибки равномерного приближения дифференцируемых функций многих переменных с ограниченной производной второго порядка линейными интерполяционными операторами, сохраняющими свойство положительности и выпуклости приближаемых функций.

**Ключевые слова:** формосохраняющее приближение, оптимальная интерполяция.



The Error of Approximation of Differentiable Functions of Several Variables by Means of Interpolatory Shape-Preserving Operators

### S.P. Sidorov

Saratov State University, Chair of Mathematical Economics E-mail: SidorovSP@info.sgu.ru

The article deals with the estimation of the error of uniform approximation of differentiable functions of several variables with limited second derivations by means of linear interpolation operators, which preserve the properties of positivity and convexity of approximated functions.

Key words: shape-preserving approximation, optimal interpolation.

## **ВВЕДЕНИЕ**

Для многих прикладных задач теории приближений зачастую необходимо не просто аппроксимировать некоторую функцию, а приблизить ее с сохранением некоторых ее свойств, связанных с формой функции (положительность, монотонность, выпуклость и т.п.). Раздел теории приближений, посвященный возникающим задачам, называется теорией формосохраняющего приближения. Обзор некоторых результатов теории формосохраняющего приближения можно найти в книге [1].

Пусть  $p,r\in\mathbb{N},\ p,r\geq 2,\ C[0,1]^r$  есть пространство непрерывных на множестве  $[0,1]^r$  функций,  $\|f\|=\sup_{(x_1,\ldots,x_r)\in[0,1]^r}|f(x_1,\ldots,x_r)|.$  Обозначим  $A=\{(x_1^{[i_1]},\ldots,x_r^{[i_r]}):\ 0\leq i_j\leq p\}\subset [0,1]^r$  множество точек, координаты которых лежат в узлах многомерной сетки  $\left(\frac{i_1}{p},\ldots,\frac{i_r}{p}\right)\in [0,1]^r,$   $i_j\in\{0,1,\ldots,p\}.$  Множество A содержит  $n=(p+1)^r$  точек, перенумеруем их и обозначим  $a^{[i]},$   $i=1,\ldots,n.$  Пусть  $V\subset C[0,1]^r$  означает конус всех положительных и выпуклых на  $[0,1]^r$  функций.

Обозначим через  $\mathcal{L}_n(V)$  множество всех линейных операторов  $L_n$ , определенных в  $C[0,1]^r$ , со значениями в  $C[0,1]^r$ , вида

© С.П. Сидоров, 2009



$$L_n f(x_1, \dots, x_r) = \sum_{k=1}^n f(a^{[k]}) l_{k,n}(x_1, \dots, x_r),$$
(1)

где  $l_{k,n}\in C[0,1]^r$ , и таких, что  $L_n(V)\subset V$ . Операторы вида (1) являются интерполяционными в том смысле, что значение оператора на некоторой функции полностью определяется значениями этой функции в узлах сетки  $\{a^{[1]}, \dots, a^{[n]}\}$  (см. [2]).

Целью статьи является оценка линейного относительного поперечника:

$$\inf_{L_n \in \mathcal{L}_n(V)} \sup_{f \in B_2[0,1]^r} \|f - L_n f\|,$$

где

$$B_2[0,1]^r:=\left\{f\in C^2[0,1]^r:\ \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right\|\leq 1,\ 1\leq i,j\leq r\right\}.$$

Оценки относительных линейных поперечников для класса положительных операторов приведены в работе [3].

## 1. ОЦЕНКА ОШИБКИ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Пусть W есть замкнутое уравновешенное выпуклое подмножество линейного пространства X. Рассмотрим проблему оптимального восстановления линейного функционала L на основе множества значений линейных функционалов  $l_1, \ldots, l_n$ . Для  $f \in W$  положим  $If := (l_1 f, \ldots, l_n f)$ . Оператор  $I:W \to \mathbb{R}^n$  называется информационным оператором.

Задачи оптимального восстановления функционалов возникают во многих приложениях теории приближения функций и привлекают повышенное внимание. Подробное изложение предмета можно найти в работах [4, 5].

Пусть V — замкнутый конус в  $\mathbb{R}^n$ , такой что  $V \cap I(W) \neq \emptyset$ . Пусть  $\Phi_I(V)$  означает класс всех линейных алгоритмов  $A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ , использующих информацию I, таких что  $A(v)\geqslant 0$  для всех  $v\in V$ .

Величина  $e(L,W,I,V):=\inf_{A\in\Phi_I(V)}\sup_{f\in W}\;|Lf-A(If)|$  есть ошибка задачи оптимального линейного

восстановления линейного функционала L на W на основе информации  $If,\,f\in W,\,c$  ограничением V.

Рассмотрим экстремальную задачу  $\sup_{f \in W, \ -If \in V} Lf$ . Пусть элемент  $f^*$  является ее решением, т.е.  $f^*$  таков, что  $f^* \in W, \ -If^* \in V$  и  $Lf^* = \sup_{f \in W, \ -If \in V} Lf$ . Заметим, что так как W замкнуто, такой элемент существует. Обозначим  $J:=\{1\leq j\leq n:\ l_jf^*=0\},\ I^*f=(l_jf)_{j\in J}.$ 

Нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 1. Справедлива оценка ошибка задачи оптимального линейного восстановления линейного функционала L на W на основе информации If,  $f \in W$ , c ограничением V:

$$\sup_{f \in W, \ -If \in V} Lf \le e(L, W, I, V) \le \sup_{f \in W, \ I^*f = 0} Lf.$$

Если  $J=\emptyset$ , то полагаем  $\sup_{f\in W,\ I^*f=0} Lf=\infty.$ 

Доказательство. Имеем

$$e(L, W, I, V) \ge \inf_{A \in \Phi_I(V)} \sup_{f \in W} \left( Lf - A(If) \right) \ge \inf_{A \in \Phi_I(V)} \sup_{f \in W, \ -If \in V} \left( Lf + A(-If) \right) \ge \inf_{A \in \Phi_I(V)} \sup_{f \in W, \ -If \in V} Lf = \sup_{f \in W, \ -If \in V} Lf$$

Установим верхнюю оценку. Обозначим через  $\Phi_{I^*}$  множество всех линейных алгоритмов, использующих информацию  $I^*$ . Имеем

$$e(L, W, I, V) = \inf_{A \in \Phi_I(V)} \sup_{f \in W} |Lf - A(If)| \le \inf_{A \in \Phi_{I^*}} \sup_{f \in W} |Lf - A(I^*f)|.$$

Из [5, лемма 3.1] следует, что последнее выражение равно 



Пусть  $E_r$  есть множество всех угловых точек куба  $D=[0,1]^r$ . Обозначим  $p(x_1,\dots,x_r)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^r x_i\,(1-x_i),\, F$  — множество всех функций  $f\in B_2[0,1]^r$ , таких что f(x)=0 для всех  $x\in E_r$ .

Лемма 2. Пусть  $y=(y_1,\ldots,y_r)\in [0,1]^r$ . Тогда  $\sup_{f\in F}|f(y_1,\ldots,y_r)|=p(y_1,\ldots,y_r)$ .

**Доказательство.** Покажем, используя индукцию, что если  $f(x) \leq 0$  для всех  $x \in E_r$  и  $\|(\partial^2 f)/(\partial x_i \partial x_j)\| \leq 1, \ 1 \leq i,j \leq r,$  то для  $(y_1,\ldots,y_r) \in [0,1]^r$  будет

$$|f(y_1, \dots, y_r)| \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r y_i (1 - y_i).$$
 (2)

Если r=1, то для  $y\in [0,1]$  и функции  $f\in C^2[0,1]$ , такой что  $f(0)\leq 0,\ f(1)\leq 0$  и  $\|f''\|\leq 1$  имеем

$$||f(y)| \le 1/2y(1-y). \tag{3}$$

Пусть (2) имеет место для r=k-1. Покажем, что (2) справедливо для r=k. Рассмотрим две грани куба  $[0,1]^k$ , лежащие на гиперплоскостях  $x_k=0$  и  $x_k=1$ . По предположению индукции имеем

$$|f(y_1, \dots, y_{k-1}, 0)| \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} y_i (1 - y_i), \qquad |f(y_1, \dots, y_{k-1}, 1)| \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} y_i (1 - y_i).$$
 (4)

Рассмотрим функцию  $f(y_1,\dots,y_{k-1},x_k)$  переменной  $x_k$  на отрезке [0,1]. По условию леммы  $\|(\partial^2 f)/(\partial x_k^2)\| \le 1$ . Из (3), (4) имеем

$$|f(y_1, \dots, y_{k-1}, y_k)| \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} y_i (1 - y_i) + \frac{1}{2} y_k (1 - y_k).$$

Пусть  $L=\delta_{\zeta},\ I=(\delta_{a_1},\dots,\delta_{a_n})$ , т.е.  $Lf=f(\zeta)$  и  $If=(f(a^{[1]}),\dots,f(a^{[n]}))$ . Для фиксированных  $i_j\in\{0,\dots,p-1\},\ j=1,\dots,r$ , обозначим  $D_{i_1,\dots,i_r}:=\mathop{\otimes}\limits_{j=1}^r\left[\frac{i_j}{p};\frac{i_{j+1}}{p}\right]$ , где  $\otimes$  означает декартово произведение множеств. Пусть  $\zeta\in D_{k_1,\dots,k_r}$ . Обозначим  $q(x_1,\dots,x_r)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^r(x_i-x_i^{[k_i]})(x_i^{[k_i+1]}-x_i)$ .

**Теорема 1.** Имеет место следующая оценка ошибки оптимальной интерполяции на множестве  $B_2[0,1]^r$  на основе информации I с ограничением V:

$$e(\delta_{\zeta}, B_2[0, 1]^r, I, V) = q(\zeta_1, \dots, \zeta_r).$$

**Доказательство.** Очевидно,  $q \in B_2[0,1]^r$  и  $-Iq \in V$ . Из лемм 1 и 2 следует, что

$$e(\delta_{\zeta}, B_2[0, 1]^r, I, V) \ge \sup_{f \in B_2[0, 1]^r, -If \in V} f(\zeta) = q(\zeta_1, \dots, \zeta_r).$$

Линейный алгоритм, который дает верхнюю оценку, приведен в работе [6].

## 2. ОЦЕНКА ЛИНЕЙНОГО ОТНОСИТЕЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНИКА

Рассмотрим конус  $V \subset C[0,1]^r$  всех положительных и выпуклых на  $[0,1]^r$  функций и множество  $\mathcal{L}_n(V)$  всех линейных операторов  $L_n$ , определенных в  $C[0,1]^r$ , со значениями в  $C[0,1]^r$ , вида (1) и обладающих свойством формосохранения относительно конуса V, т.е. таких, что  $L_n(V) \subset V$ .

Теорема 2. Справедливо равенство

$$\inf_{L_n \in \mathcal{L}_n(V)} \sup_{f \in B_2[0,1]^r} \|f - L_n f\| = \frac{r}{8n^{2/r}}.$$
 (5)

Доказательство. Имеем

$$\inf_{L_n \in \mathcal{L}_n(V)} \sup_{f \in B_2[0,1]^r} \|f - L_n f\| = \inf_{L_n \in \mathcal{L}_n(V)} \sup_{f \in B_2[0,1]^r} \sup_{\zeta \in [0,1]^r} |f(\zeta) - L_n f(\zeta)| \ge \sup_{\zeta \in [0,1]^r} \inf_{L_n \in \mathcal{L}_n(V)} \sup_{f \in B_2[0,1]^r} |f(\zeta) - L_n f(\zeta)| \ge \sup_{\zeta \in [0,1]^r} \inf_{L_n \in \mathcal{L}_n(V)} \sup_{f \in B_2[0,1]^r} |f(\zeta) - L_n f(\zeta)|,$$



где  $D_0 = [0, 1/(p+1)]^r$ . С учетом теоремы 1 имеем

$$\inf_{L_n \in \mathcal{L}_n(V)} \sup_{f \in B_2[0,1]^r} \|f - L_n f\| \ge \sup_{\zeta \in D_0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \zeta \left( \frac{1}{p-1} - \zeta \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \left( \frac{1}{2(p-1)} \right)^2 = \frac{r}{8(p-1)^2} = \frac{r}{8n^{2/r}}.$$

Таким образом, нижняя оценка в (5) установлена. Линейный алгоритм, который дает верхнюю оценку, приведен в работе [6]. □

Работа выполнена при финансовой поддержке  $P\Phi\Phi U$  (проект 07-01-00167-а) и гранта для государственной поддержки ведущих научных школ  $P\Phi$  (проект HШ-2970.2008.1).

## Библиографический список

- 1. *Gal S. G.* Shape-Preserving Approximation by Real and Complex Polynomials. Springer, 2008.
- 2. *DeVore R. A.* The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators. Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer-Verlag, 1972.
- 3. *Сидоров С.П.* Оценка относительных линейных поперечников единичого шара для класса положительных операторов // Сиб. журн. индустриальной математики. 2007. Т. 10, № 4. С. 122–128.
- 4. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Optimal estimation in approximation theory // A survey of optimal recovery. N.Y.: Plenum Press, 1977. P. 1–54.
- 5. Трауб Дж., Вожьняковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983.
- 6. Васильев Р.К. О порядке приближения функций многих переменных линейными положительными операторами конечного ранга // Мат. заметки. 1993. Т. 53, вып. 1. С. 3–15.

УДК 517.977

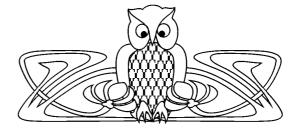
## О РЕШЕНИИ ДИСКРЕТНОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Н.Ю. Трошина

Саратовский государственный университет, кафедра математической экономики E-mail: troshina.n@gmail.com

В статье рассматривается дискретная линейно-квадратичная задача оптимального управления с закреплёнными концами и ограничениями на управление. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности типа принципа максимума и предлагается метод точного решения краевой зачи, который сводится к решению конечного числа систем линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: дискретное оптимальное управление.



## About Solution of Discrete Linear-Quadratic Optimal Control Problem

## N.Yu. Troshina

Saratov State University, Chair of Mathematical Economics E-mail: troshina.n@gmail.com

This paper is focuses on development of the method for exact solution of the optimal control problem for discrete linear system with quadratic criteria, with boundary conditions and constraints on control. This method gives a solution of finite number of systems of linear algebraic equations.

**Key words:** discrete optimal control.

Как известно, линейно-квадратичные задачи оптимального управления достаточно хорошо изучены, однако интерес к этим задачам не ослабевает [1–3]. В первую очередь это объясняется тем, что к задаче оптимизации квадратичного функционала на линейных системах приводит построение моделей многих технических и экономических процессов управления [4, 5].

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия оптимальности для линейной дискретной системы с закрепленными концами и квадратичным критерием качества при ограничениях на управление, которые дают в явном виде выражение оптимального управления через сопряженные переменные. Предлагается метод решения полученной краевой задачи, который сводится к последовательному решению конечного числа систем линейных алгебраических уравнений. В одном частном случае сопряженные переменные удаётся полностью исключить, что значительно упрощает процедуру вычислений. При этом получены формулы, показывающие зависимость оптимального управления и оптимальной траектории от заданных граничных условий.



Рассмотрим следующую дискретную задачу оптимального управления:

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t), t = 0, \dots, T-1,$$
 (1)

$$x(0) = x_0, x(T) = x_T,$$
 (2)

$$a \le u(t) \le c, \qquad t = 0, \dots, T - 1,$$
 (3)

$$I(x,u) = \sum_{t=0}^{T-1} [\langle Mx(t), x(t) \rangle + u^2(t)] + \langle Mx(T), x(T) \rangle \to \min, \tag{4}$$

где  $A,\ M$  — матрицы размерности  $n\times n,\ b$  — вектор размерности  $n,\ x(t)\in R^n,\ u(t)\in R^1,\ x=\{x(0),x(1),\dots,x(T)\}$  — дискретная траектория,  $u=\{u(0),u(1),\dots,u(T-1)\}$  — дискретное управление,  $\langle\cdot,\cdot\rangle$  — скалярное произведение векторов.

Будем предполагать: 1) M — неотрицательно определенная матрица, 2) система (1) управляема, 3) выполняется условие Слейтера, т.е. существует допустимая пара  $(\bar{x}, \bar{u})$ , такая что  $\forall t \ a < \bar{u}(t) < c$ , 4) существует  $A^{-1}$ .

Сформулированную задачу можно рассматривать как экстремальную задачу, состоящую в минимизации функционала (4), заданного в пространстве пар (x,u) (обозначим это пространство через Z). Это векторное пространство размерности n(T+1)+T, в котором можно определить скалярное произведение и норму:

$$\langle (x,u),(y,v)\rangle = \sum_{t=0}^{T} \langle x(t),y(t)\rangle + \sum_{t=0}^{T-1} u(t)v(t), \qquad \| (x,u) \| = \left(\sum_{t=0}^{T} \| x(t) \|^2 + \sum_{t=0}^{T-1} | u(t) |^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Решение задачи (1)–(4) будем обозначать  $(\hat{x}, \hat{u})$ . Для получения необходимых условий оптимальности применим теорию Дубовицкого – Милютина [6].

В пространстве Z рассмотрим конусы вариаций, соответствующие функционалу (4) и ограничениям, а также сопряженные к ним. Имеем следующие представления рассматриваемых конусов [7].

Конус запрещенных вариаций для функционала (4) с вершиной в точке  $(\hat{x},\hat{u})$ :

$$K_0 = \{(x, u) : \sum_{t=0}^{T-1} [\langle M\hat{x}(t), x(t) \rangle + \hat{u}(t)u(t)] + \langle M\hat{x}(T), x(T) \rangle < 0\}.$$

Сопряженный конус к конусу  $K_0$  состоит из функционалов вида

$$f_0(x,u) = -\lambda_o \left[ \sum_{t=0}^{T-1} \left[ \langle M\hat{x}(t), x(t) \rangle + \hat{u}(t)u(t) \right] + \langle M\hat{x}(T), x(T) \rangle \right], \qquad \lambda_0 \ge 0.$$
 (5)

Конус касательных направлений, соответствующий ограничениям (1), (2), имеет вид

$$K_1 = \{(x, u) : x(t+1) = Ax(t) + bu(t), \ x(0) = 0, \ x(T) = 0\}.$$

Функционалы  $f_1$  из сопряженного конуса  $K_1^*$  обладают следующими свойствами: 1)  $f_1(x,u)=0$ , если  $(x,u)\in K_1$ , 2) если пара (x,u) удовлетворяет (1) и начальному условию x(0)=0, то существует вектор  $\omega\in R^n$ , такой что  $f_1(x,u)=\langle \omega, x(T)\rangle$ .

Конус допустимых вариаций, соответствующий ограничению  $u(t) \leq c$ , имеет вид

$$K_2 = \{(x,u): \max_{t \in \Omega} u(t) < 0\}, \ \Omega = \{t: \hat{u}(t) = c\},$$

причем конус  $K_2$  совпадает со всем пространством пар Z, если  $\Omega=\emptyset$ . Сопряженный конус  $K_2^*$  состоит из функционалов  $f_2(x,u)=-\lambda\sum_{t\in\Omega}\alpha(t)u(t)$ , где  $\lambda\geq 0$ ,  $\alpha(t)\geq 0$ ,  $\sum_{t\in\Omega}\alpha(t)=1$ . Положим  $\alpha(t)=0$ , если  $t\notin\Omega$ . Тогда

$$f_2(x,u) = -\sum_{t=0}^{T-1} \gamma(t)u(t), \tag{6}$$

где  $\gamma(t) = \lambda \alpha(t) \ge 0$ , причем

$$\gamma(t)(\hat{u}(t) - c) = 0, \qquad t = 0, \dots, T - 1.$$
 (7)

Если  $\Omega = \emptyset$ , то  $f_2(x, u) = 0$ .



Конус допустимых вариаций, соответствующий ограничению  $u(t) \geq a$ , имеет вид

$$K_3 = \{(x, u) : \max_{t \in W} (-u(t)) < 0\}, \qquad W = \{t : \hat{u}(t) = a\},$$

причем конус  $K_3$  совпадает со всем пространством пар Z, если  $W=\emptyset$ . Сопряженный конус  $K_3^*$  состоит из функционалов  $f_3(x,u)=-\bar{\lambda}\sum_{t\in W}\beta(t)(-u(t))$ , где  $\bar{\lambda}\geq 0$ ,  $\beta(t)\geq 0$ ,  $\sum_{t\in W}\beta(t)=1$ . Положим  $\beta(t)=0$ , если  $t\notin W$ . Тогда

$$f_3(x,u) = \sum_{t=0}^{T-1} \mu(t)u(t), \tag{8}$$

где  $\mu(t) = \bar{\lambda}\beta(t) \geq 0$ , причем

$$\mu(t)(\hat{u}(t) - a) = 0, \qquad t = 0, \dots, T - 1.$$
 (9)

Если  $W = \emptyset$ , то  $f_3(x, u) = 0$ .

**Теорема 1** (необходимые условия оптимальности). Если  $(\hat{x}, \hat{u})$  — решение задачи (1)-(4), то существуют неотрицательные числа  $\gamma(t)$ ,  $\mu(t)$   $(t=0,\ldots,T-1)$ , существует вектор  $\omega \in R^n$  и вектор-функция  $\psi(t) \in R^n$ , для которых выполняется сопряженное уравнение

$$\psi(t) = A^* \psi(t+1) - M\hat{x}(t),$$

условие трансверсальности

$$\psi(T) = -M\hat{x}(T) + \omega \tag{10}$$

и условия дополняющей нежесткости (7), (9). При этом оптимальное управление определяется по формуле

$$\hat{u}(t) = \langle \psi(t+1), b \rangle + \mu(t) - \gamma(t), \qquad t = 0, \dots, T - 1.$$

**Доказательство.** Нетрудно проверить, что выполняются все условия теоремы Дубовицкого – Милютина о пересечении выпуклых конусов. Следовательно, существуют не равные одновременно нулю линейные функционалы  $f_0$ ,  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ , заданные на множестве пар Z и принадлежащие сопряженным конусам, для которых имеет место уравнение Эйлера:  $f_0 + f_1 + f_2 + f_3 = 0$ . Возьмем пару (x, u), удовлетворяющую уравнению (1) и условию x(0) = 0. Тогда  $f_1(x, u) = \langle \omega, x(T) \rangle$ . Запишем уравнение Эйлера, используя формулы (5), (6),(8):

$$-\lambda_0 \sum_{t=0}^{T} \langle M\hat{x}(t), x(t) \rangle - \lambda_0 \sum_{t=0}^{T-1} \hat{u}(t)u(t) + \langle \omega, x(T) \rangle - \sum_{t=0}^{T-1} \gamma(t)u(t) + \sum_{t=0}^{T-1} \mu(t)u(t) = 0.$$
 (11)

Так как пара (x,u) удовлетворяет (1), то для произвольной вектор-функции  $\psi(t) \in R^n$   $(t=0,\ldots,T)$  имеем тождество  $\sum_{t=0}^{T-1} \langle \psi(t+1), -x(t+1) + Ax(t) + bu(t) \rangle \equiv 0$ , что равносильно следующему:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \langle \psi(t), -x(t) \rangle - \langle \psi(0), -x(0) \rangle + \langle \psi(T), -x(T) \rangle + \sum_{t=0}^{T-1} \langle A^* \psi(t+1), x(t) \rangle + \sum_{t=0}^{T-1} \langle \psi(t+1), b \rangle u(t) = 0, \quad (12)$$

где знак \* означает транспонирование. Сложим (11) и (12), учитывая, что x(0)=0:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \langle -\lambda_0 M \hat{x}(t) - \psi(t) + A^* \psi(t+1), x(t) \rangle + \langle -\lambda_0 M \hat{x}(T) + \omega - \psi(T), x(T) \rangle + \sum_{t=0}^{T-1} [-\lambda_0 \hat{u}(t) + \mu(t) - \gamma(t) + \langle \psi(t+1), b \rangle] u(t) = 0.$$

Выберем  $\psi(t)$  так, чтобы выполнялась сопряженная система и условие трансверсальности:

$$\psi(t) = A^* \psi(t+1) - \lambda_0 M \hat{x}(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \qquad \psi(T) = -\lambda_0 M \hat{x}(T) + \omega.$$



Тогда будем иметь равенство  $\sum_{t=0}^{T-1} [-\lambda_0 \hat{u}(t) + \mu(t) - \gamma(t) + \langle \psi(t+1), b \rangle] u(t) = 0$ , которое верно при любых u(t). В силу произвольности u(t) отсюда следует  $-\lambda_0 \hat{u}(t) + \mu(t) - \gamma(t) + \langle \psi(t+1), b \rangle = 0$ ,  $t=0,\ldots,T-1$ , или

$$\lambda_0 \hat{u}(t) = \langle \psi(t+1), b \rangle + \mu(t) - \gamma(t), \qquad t = 0, \dots, T - 1. \tag{13}$$

Покажем, что  $\lambda_0 \neq 0$ . Для  $\mu(t), \gamma(t) \geq 0$ , удовлетворяющих (7), (9), образуем функционал

$$L(x, u, \lambda_0, \mu, \gamma) = \lambda_0 \sum_{t=0}^{T} \langle Mx(t), x(t) \rangle + \lambda_0 \sum_{t=0}^{T-1} u^2(t) + 2 \sum_{t=0}^{T-1} \gamma(t) u(t) - 2 \sum_{t=0}^{T-1} \mu(t) u(t).$$

Подсчитаем разность

$$L(x, u, \lambda_0, \mu, \gamma) - L(\hat{x}, \hat{u}, \lambda_0, \mu, \gamma) = \lambda_0 \sum_{t=0}^{T} [\langle Mx(t), x(t) \rangle - \langle M\hat{x}(t), \hat{x}(t) \rangle] + \lambda_0 \sum_{t=0}^{T-1} [u^2(t) - \hat{u}^2(t)] + 2 \sum_{t=0}^{T-1} \gamma(t)(u(t) - \hat{u}(t)) - 2 \sum_{t=0}^{T-1} \mu(t)(u(t) - \hat{u}(t)).$$

После преобразований получим:

$$L(x, u, \lambda_0, \mu, \gamma) - L(\hat{x}, \hat{u}, \lambda_0, \mu, \gamma) = \lambda_0 \sum_{t=0}^{T} [2\langle M\hat{x}(t), \Delta x(t) \rangle + \langle M\Delta x(t), \Delta x(t) \rangle] +$$

$$+ \lambda_0 \sum_{t=0}^{T-1} [2\hat{u}(t)\Delta u(t) + (\Delta u(t))^2] + \sum_{t=0}^{T-1} 2\gamma(t)\Delta u(t) - \sum_{t=0}^{T-1} 2\mu(t)\Delta u(t),$$
(14)

где  $\Delta x(t) = x(t) - \hat{x}(t), \Delta u(t) = u(t) - \hat{u}(t)$ 

Пусть (x, u) — допустимая пара. Согласно (12), имеем

$$\sum_{t=0}^{T-1} \langle \psi(t), \Delta x(t) \rangle - \sum_{t=0}^{T-1} \langle A^* \psi(t+1), \Delta x(t) \rangle - \sum_{t=0}^{T-1} \langle \psi(t+1), b \rangle \Delta u(t) = 0.$$
 (15)

. Умножим (15) на 2 и сложим с (14). Получим

$$\Delta L = L(x, u, \lambda_0, \mu, \gamma) - L(\hat{x}, \hat{u}, \lambda_0, \mu, \gamma) = \lambda_0 \sum_{t=0}^{T-1} \langle M \Delta x(t), \Delta x(t) \rangle + \lambda_0 \sum_{t=0}^{T-1} (\Delta u(t))^2 + \sum_{t=0}^{T-1} \langle 2\lambda_0 M \hat{x}(t) + 2\psi(t) - 2A^*\psi(t+1), \Delta x(t) \rangle + \sum_{t=0}^{T-1} \langle 2\lambda_0 \hat{u}(t) + 2\gamma(t) - 2\mu(t) - 2\langle \psi(t+1), b \rangle) \Delta u(t) + \sum_{t=0}^{T-1} \langle 2\lambda_0 M \hat{x}(t) + 2\psi(t) - 2A^*\psi(t+1), \Delta x(t) \rangle + \langle 2\lambda_0 M \hat{x}(t), \Delta x(t) \rangle.$$

При выбранных  $\gamma(t)$ ,  $\mu(t)$ ,  $\psi(t)$  управление  $\hat{u}(t)$  удовлетворяет (13), поэтому

$$\Delta L = \lambda_0 \sum_{t=0}^{T-1} 2\langle M \Delta x(t), \Delta x(t) \rangle + \lambda_0 \sum_{t=0}^{T-1} (\Delta u(t))^2.$$

Так как  $\lambda_0 \geq 0$  и M — неотрицательно определенная матрица, то  $\Delta L \geq 0$  при всех допустимых (x,u). Предположим, что  $\lambda_0 = 0$ . В этом случае все  $\gamma(t)$ ,  $\mu(t)$  одновременно в ноль не обращаются, иначе из уравнения Эйлера будет следовать, что  $f_1 = \langle \omega, T \rangle = 0$ , то есть все функционалы в уравнении Эйлера равны нулю, что невозможно. Предполагая, что  $\lambda_0 = 0$ , из (14) будем иметь

$$\Delta L = \sum_{t=0}^{T-1} 2\gamma(t)\Delta u(t) - \sum_{t=0}^{T-1} 2\mu(t)\Delta u(t). \label{eq:delta_L}$$



Так как выполняется условие Слейтера, то существует допустимая пара  $(\bar{x}, \bar{u})$ , для которой при всех  $t \ \bar{u}(t) - a > 0, \ \bar{u}(t) - c < 0$ . Пусть  $\gamma(t) \neq 0$ . Тогда из условия (7) будет следовать неравенство

$$\gamma(t)\Delta \bar{u}(t) < 0, \qquad t = 0, \dots, T - 1, \tag{16}$$

так как  $\gamma(t)\Delta \bar{u}(t) = \gamma(t)[\bar{u}(t) - \hat{u}(t) + c - c] = \gamma(t)[\bar{u}(t) - c] - \gamma(t)[\hat{u}(t) - c] < 0.$ 

Аналогично, пусть  $\mu(t) \neq 0$ . Тогда из условия (9) будет следовать неравенство

$$\mu(t)\Delta\bar{u}(t) > 0, \qquad t = 0, \dots, T - 1.$$
 (17)

Из (16), (17) вытекает, что существует пара  $(\bar{x}, \bar{u})$ , для которой  $\Delta L < 0$ . Получили противоречие, следовательно,  $\lambda_0 \neq 0$ . Из (13) для оптимального управления  $\hat{u}(t)$  получим

$$\hat{u}(t) = \langle \psi(t+1), b \rangle + \mu(t) - \gamma(t), \qquad t = 0, \dots, T - 1.$$

Теорема доказана.

**Теорема 2** (достаточные условия оптимальности). Пусть  $(\hat{x}, \hat{u})$  — допустимая пара и пусть существуют числа  $\gamma(t)$ ,  $\mu(t)$   $(t=0,\ldots,T-1)$ , вектор  $\omega \in R^n$  и вектор-функция  $\psi(t) \in R^n$ , которые удовлетворяют условиям:

$$\psi(t) = A^* \psi(t+1) - M\hat{x}(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \qquad \psi(T) = -M\hat{x}(T) + \omega, \tag{18}$$

$$\gamma(t)(\hat{u}(t) - c) = 0, \qquad \gamma(t) \ge 0, \qquad t = 0, \dots, T - 1,$$
 (19)

$$\mu(t)(\hat{u}(t) - a) = 0, \qquad \mu(t) \ge 0, \qquad t = 0, \dots, T - 1,$$
 (20)

а управление  $\hat{u}(t)$  определяется по формуле

$$\hat{u}(t) = \langle \psi(t+1), b \rangle + \mu(t) - \gamma(t), \qquad t = 0, \dots, T - 1.$$
(21)

Tогда  $(\hat{x}, \hat{u})$  является оптимальной парой для задачи (1)–(4).

**Доказательство.** Возьмем произвольную допустимую пару (x,u) и подсчитаем

$$\Delta I = I(x,u) - I(\hat{x},\hat{u}) = \sum_{t=0}^{T} [\langle Mx(t), x(t) \rangle - \langle M\hat{x}(t), \hat{x}(t) \rangle] + \sum_{t=0}^{T-1} [u^2(t) - \hat{u}^2(t)] =$$

$$= \sum_{t=0}^{T} [2\langle M\hat{x}(t), \Delta x(t) \rangle + \langle M\Delta x(t), \Delta x(t) \rangle] + \sum_{t=0}^{T-1} [2\hat{u}(t)\Delta u(t) + (\Delta u(t))^2],$$

где  $\Delta x(t) = x(t) - \hat{x}(t), \Delta u(t) = u(t) - \hat{u}(t).$ 

Так как  $(x,u),(\hat{x},\hat{u})$  — допустимые пары, то, согласно (12), для  $(\Delta x,\Delta u)$  имеем

$$2\sum_{t=0}^{T-1} \langle \psi(t), \Delta x(t) \rangle - 2\sum_{t=0}^{T-1} \langle A^* \psi(t+1), \Delta x(t) \rangle - 2\sum_{t=0}^{T-1} \langle \psi(t+1), b \rangle \Delta u(t) = 0.$$

Используя это равенство, для  $\Delta I$  можно получить

$$\Delta I = \sum_{t=0}^{T} \langle M \Delta x(t), \Delta x(t) \rangle + \sum_{t=0}^{T-1} (\Delta \hat{u}(t))^2 + 2 \sum_{t=0}^{T} \langle M \hat{x}(t) + \psi(t) - A^* \psi(t+1), \Delta x(t) \rangle + 2 \sum_{t=0}^{T-1} [\hat{u}(t) - \langle \psi(t+1), b \rangle] \Delta u(t).$$

Учитывая (18), (21), получим

$$\Delta I = \sum_{t=0}^{T} \langle M \Delta x(t), \Delta x(t) \rangle + \sum_{t=0}^{T-1} (\Delta u(t))^2 + 2 \sum_{t=0}^{T-1} (-\gamma(t) \Delta u(t)) + 2 \sum_{t=0}^{T-1} \mu(t) \Delta u(t).$$



Очевидно, при всех t = 0, ..., T - 1 имеет место равенство

$$\gamma(t)\Delta u(t) = \gamma(t)[u(t) - \hat{u}(t) + c - c] = \gamma(t)[u(t) - c] - \gamma(t)[\hat{u}(t) - c].$$

Используя условие (19), получим  $\gamma(t)\Delta u(t) \leq 0$ ,  $t=0,\ldots,T-1$ . Аналогично можно показать, что  $\mu(t)\Delta u(t) \geq 0$ ,  $t=0,\ldots,T-1$ . Так как  $\mathbf{M}$  — неотрицательно определенная матрица, отсюда будет следовать, что  $\Delta I \geq 0$  для любой допустимой пары. Поэтому  $(\hat{x},\hat{u})$  — оптимальна. Теорема доказана.

Доказанные теоремы позволяют свести решение задачи оптимального управления (1)-(4) к решению следующей краевой задачи:

$$x(t+1) = Ax(t) + bb^*\psi(t+1) - b\gamma(t) + b\mu(t), \qquad t = 0, \dots, T-1$$
(22)

$$\psi(t) = A^* \psi(t+1) - Mx(t), \qquad t = 0, \dots, T-1$$
(23)

$$x(0) = x_0, x(T) = x_T,$$
 (24)

$$\gamma(t)[b^*\psi(t+1) - \gamma(t) + \mu(t) - c] = 0, \qquad t = 0, \dots, T - 1,$$
(25)

$$\mu(t)[b^*\psi(t+1) - \gamma(t) + \mu(t) - a] = 0, \qquad t = 0, \dots, T - 1,$$
(26)

$$\gamma(t) \ge 0, \qquad \mu(t) \ge 0, \qquad t = 0, \dots, T - 1.$$
 (27)

**Теорема 3.** Если векторы x(t),  $\psi(t)$  удовлетворяют уравнениям (22), (23), то они выражаются через граничные значения x(T),  $\psi(T)$  по формулам

$$x(t) = A_t x(T) + B_t \psi(T) + \sum_{\tau=t}^{T-1} P_t(\tau) \gamma(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} Q_t(\tau) \mu(\tau),$$
 (28)

$$\psi(t) = C_t x(T) + D_t \psi(T) + \sum_{\tau=t}^{T-1} N_t(\tau) \gamma(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} R_t(\tau) \mu(\tau), \quad t = 0, \dots, T-1,$$
(29)

где матричные коэффициенты  $A_t$ ,  $B_t$ ,  $C_t$ ,  $D_t$ ,  $P_t(\tau)$ ,  $Q_t(\tau)$ ,  $N_t(\tau)$ ,  $R_t(\tau)$  определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$A_{T-1} = A^{-1}, \quad B_{T-1} = -A^{-1}bb^*, \quad P_{T-1}(T-1) = A^{-1}b, \quad Q_{T-1}(T-1) = -A^{-1}b,$$
  
 $C_{T-1} = -MA_{T-1}, \quad D_{T-1} = A^* - B_{T-1}, \quad N_{T-1}(T-1) = -MP_{T-1}(T-1),$   
 $R_{T-1}(T-1) = -MQ_{T-1}(T-1);$ 

для  $t = 0, \dots, T - 2$ :

$$A_{t} = A^{-1}(A_{t+1} - bb^{*}C_{t+1}), \quad B_{t} = A^{-1}(B_{t+1} - bb^{*}D_{t+1}),$$

$$P_{t}(\tau) = A^{-1}(P_{t+1}(\tau) - bb^{*}N_{t+1}(\tau)) \quad (\tau = t+1, \dots, T-1), \quad P_{t}(t) = A^{-1}b,$$

$$Q_{t}(\tau) = A^{-1}(Q_{t+1}(\tau) - bb^{*}R_{t+1}(\tau)) \quad (\tau = t+1, \dots, T-1), \quad Q_{t}(t) = -A^{-1}b;$$

$$(30)$$

$$C_{t} = A^{*}C_{t+1} - MA_{t}, \quad D_{t} = A^{*}D_{t+1} - MB_{t},$$

$$N_{t}(\tau) = A^{*}N_{t+1}(\tau) - MP_{t}(\tau) \quad (\tau = t+1, \dots, T-1), \quad N_{t}(t) = -MP_{t}(t),$$

$$R_{t}(\tau) = A^{*}R_{t+1}(\tau) - MQ_{t}(\tau) \quad (\tau = t+1, \dots, T-1), \quad R_{t}(t) = -MQ_{t}(t).$$
(31)

**Доказательство.** Из уравнения (22) при t = T - 1 имеем

$$x(T-1) = A^{-1}[x(T) - bb^*\psi(T) + b\gamma(T-1) - b\mu(T-1)] = A^{-1}x(T) - A^{-1}bb^*\psi(T) + A^{-1}b\gamma(T-1) - A^{-1}b\mu(T-1) = A_{T-1}x(T) + B_{T-1}\psi(T) + P_{T-1}(T-1)\gamma(T-1) - Q_{T-1}\mu(T-1).$$

Следовательно, формула (28) верна для t = T - 1. Аналогично из уравнения (23):

$$\psi(T-1) = A^*\psi(T) - M[A_{T-1}x(T) + B_{T-1}\psi(T) + P_{T-1}(T-1)\gamma(T-1) + Q_{T-1}(T-1)\mu(T-1)] =$$

$$= -MA_{T-1}x(T) + (A^* - MB_{T-1})\psi(T) - MP_{T-1}(T-1)\gamma(T-1) - MQ_{T-1}(T-1)\mu(T-1) =$$

$$= C_{T-1}x(T) + D_{T-1}\psi(T) + N_{T-1}(T-1)\gamma(T-1) + R_{T-1}(T-1)\mu(T-1).$$



Отсюда следует, что формула (29) верна для t=T-1. Пусть утверждение теорема выполняется для некоторого момента времени t. Покажем, что оно справедливо для момента t-1. Согласно (22), имеем

$$x(t-1) = A^{-1}[x(t) - bb^*\psi(t) + b\gamma(t-1) - b\mu(t-1)] =$$

$$= A^{-1}\Big[A_tx(T) + B_t\psi(T) + \sum_{\tau=t}^{T-1} P_t(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} Q_t(\tau)\mu(\tau)\Big] -$$

$$-A^{-1}bb^*\Big[C_tx(T) + D_t\psi(T) + \sum_{\tau=t}^{T-1} N_t(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} R_t(\tau)\mu(\tau)\Big] + A^{-1}b\gamma(t-1) - A^{-1}b\mu(t-1) =$$

$$= A^{-1}[A_t - bb^*C_t]x(T) + A^{-1}[B_t - bb^*D_t]\psi(T) + \sum_{\tau=t}^{T-1} A^{-1}[P_t(\tau) - bb^*N_t(\tau)]\gamma(\tau) + A^{-1}b\gamma(t-1) +$$

$$+ \sum_{\tau=t}^{T-1} A^{-1}[Q_t(\tau) - bb^*R_t(\tau)]\mu(\tau) - A^{-1}b\mu(t-1) = A_{t-1}x(T) + B_{t-1}\psi(T) +$$

$$+ \sum_{\tau=t}^{T-1} P_{t-1}(\tau)\gamma(\tau) + P_{t-1}(t-1)\gamma(t-1) + \sum_{\tau=t}^{T-1} Q_{t-1}(\tau)\mu(\tau) + Q_{t-1}(t-1)\mu(t-1).$$

Таким образом, получили

$$x(t-1) = A_{t-1}x(T) + B_{t-1}\psi(T) + \sum_{\tau=t-1}^{T-1} P_{t-1}(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=t-1}^{T-1} Q_{t-1}(\tau)\mu(\tau),$$

т. е. формула (28) верна для t-1, причем коэффициенты  $A_{t-1}$ ,  $B_{t-1}$ ,  $P_{t-1}(\tau)$ ,  $Q_{t-1}(\tau)$  удовлетворяют формулам (30) для момента t-1. Аналогично из (23) имеем

$$\psi(t-1) = A^*\psi(t) - Mx(t-1) = A^*[C_tx(T) + D_t\psi(T) + \sum_{\tau=t}^{T-1} N_t(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} R_t(\tau)\mu(\tau)] - M[A_{t-1}x(T) + B_{t-1}\psi(T) + \sum_{\tau=t-1}^{T-1} P_{t-1}(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=t-1}^{T-1} Q_{t-1}(\tau)\mu(\tau)] = (A^*C_t - MA_{t-1})x(T) + (A^*D_t - MB_{t-1})\psi(T) + \sum_{\tau=t}^{T-1} [A^*N_t(\tau) - MP_{t-1}(\tau)]\gamma(\tau) - MP_{t-1}(t-1)\gamma(t-1) + \sum_{\tau=t}^{T-1} [A^*R_t(\tau) - MQ_{t-1}(\tau)]\mu(\tau) - MQ_{t-1}(t-1)\mu(t-1).$$

Отсюда получим

$$\psi(t-1) = C_{t-1}x(T) + D_{t-1}\psi(T) + \sum_{\tau=t-1}^{T-1} N_{t-1}(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=t-1}^{T-1} R_{t-1}(\tau)\mu(\tau),$$

где коэффициенты  $C_{t-1}, D_{t-1}, N_{t-1}(\tau), R_{t-1}(\tau)$  удовлетворяют соотношениям (31) для t-1. Теорема доказана.

Рассмотрим возможные пути решения краевой задачи (22)–(27). Запишем формулу (28) для t=0:

$$x(0) = A_0 x(T) + B_0 \psi(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} P_0(\tau) \gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1} Q_0(\tau) \mu(\tau).$$
 (32)

С учетом граничных условий (2) из (29), (32) получим систему уравнений, в которой отсутствуют переменные состояния:

$$B_0\psi(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} P_0(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1} Q_0(\tau)\mu(\tau) = x_0 - A_0x_T,$$
(33)



$$D_t \psi(T) - \psi(t) + \sum_{\tau=t}^{T-1} N_t(\tau) \gamma(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} R_t(\tau) \mu(\tau) = -C_t x_T, \qquad t = 0, \dots, T-1.$$
 (34)

Для нахождения сопряженных переменных  $\psi(t)$  и множителей  $\gamma(t)$ ,  $\mu(t)$  будем иметь систему (33), (34), (25)–(27), которая разрешима, поскольку задача (1)–(4) имеет решение. Левые части уравнений (25)–(26) представляют собой произведение двух сомножителей:  $\gamma(t)$  (или  $\mu(t)$ ) и выражений в квадратных скобках. Приравнивая один из них к нулю, вместе с (33)–(34) будем получать системы линейных алгебраических уравнений относительно  $\psi(t)$ ,  $\gamma(t)$ ,  $\mu(t)$ . Таким образом, решение краевой задачи сводится к последовательному решению конечного числа систем линейных алгебраических уравнений. Решение, для которого будет выполняться условие (27), будет искомым. По формуле (28) мы сможем вычислить оптимальную траекторию, а по формуле (26) — оптимальное управление.

Рассмотрим случай, когда матрица  $B_0$  в форомуле (32) невырожденная. В этом случае оптимальное управление и оптимальную траекторию можно в явном виде выразить через заданные граничные условия и множители  $\gamma(t)$ ,  $\mu(t)$ . Для этого из (34) найдем

$$\psi(T) = B_0^{-1} \left[ x_0 - A_0 x_T - \sum_{\tau=0}^{T-1} P_0(\tau) \gamma(\tau) - \sum_{\tau=0}^{T-1} Q_0(\tau) \mu(\tau) \right].$$

Подставим найденное  $\psi(T)$  в (28). Получим

$$x(t) = A_t x(T) + B_t B_0^{-1} \left[ x_0 - A_0 x_T - \sum_{\tau=0}^{T-1} P_0(\tau) \gamma(\tau) - \sum_{\tau=0}^{T-1} Q_0(\tau) \mu(\tau) \right] + \sum_{\tau=t}^{T-1} P_t(\tau) \gamma(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} Q_t(\tau) \mu(\tau) = A_t x(T) + B_t B_0^{-1} x_0 - B_t B_0^{-1} A_0 x_T - \sum_{\tau=0}^{T-1} B_t B_0^{-1} P_0(\tau) \gamma(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} P_t(\tau) \gamma(\tau) - \sum_{\tau=0}^{T-1} B_t B_0^{-1} Q_0(\tau) \mu(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} Q_t(\tau) \mu(\tau),$$

или

$$x(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} K_t(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1} L_t(\tau)\mu(\tau) + K_t x_0 + L_t x_T, \qquad t = 1, \dots, T-1,$$

где  $K_t(\tau) = -B_t B_0^{-1} P_0(\tau)$ , если  $\tau = 0, \dots, t-1$ ,  $K_t(\tau) = -B_t B_0^{-1} P_0(\tau) + P_t(\tau)$ , если  $\tau = t, \dots, T-1$ ;  $K_t = B_t B_0^{-1}$ ;  $L_t(\tau) = -B_t B_0^{-1} Q_0(\tau)$ , если  $\tau = 0, \dots, t-1$ ;  $L_t(\tau) = -B_t B_0^{-1} Q_0(\tau) + Q_t(\tau)$ , если  $\tau = t, \dots, T-1$ ;  $L_t = A_t - B_t B_0^{-1} A_0$ .

Аналогично, подставив найденное  $\psi(T)$  в (29), получим выражение сопряженного вектора  $\psi(t)$  через граничные условия:

$$\psi(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} G_t(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1} H_t(\tau)\mu(\tau) + G_t x_0 + H_t x_T,$$

где коэффициенты  $G_t(\tau), G_t, H_t(\tau), H_t$  удовлетворяют формулам:  $G_t(\tau) = -D_t B_0^{-1} P_0(\tau),$  если  $\tau = 0, \ldots, t-1;$   $G_t(\tau) = -D_t B_0^{-1} P_0(\tau) + N_t(\tau),$  если  $\tau = t, \ldots, T-1;$   $G_t = D_t B_0^{-1};$   $H_t(\tau) = -D_t B_0^{-1} Q_0(\tau),$  если  $\tau = 0, \ldots, t-1;$   $H_t(\tau) = -D_t B_0^{-1} Q_0(\tau),$  если  $\tau = t, \ldots, T-1;$   $H_t = C_t - D_t B_0^{-1} A_0.$ 

Для оптимального управления, согласно (26), будем иметь

$$\hat{u}(t) = \left\langle \sum_{\tau=0}^{T-1} G_{t+1}(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1} H_{t+1}(\tau)\mu(\tau) + G_{t+1}x_0 + H_{t+1}x_T, b \right\rangle + \mu(t) - \gamma(t), \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Теперь подставим найденное  $\psi(t)$  в (25), (26) и получим уравнения для нахождения  $\gamma(t)$ ,  $\mu(t)$ :

$$\gamma(t) \left[ b^* \left( \sum_{\tau=0}^{T-1} G_{t+1}(\tau) \gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1} H_{t+1}(\tau) \mu(\tau) + G_{t+1} x_0 + H_{t+1} x_T \right) - \gamma(t) + \mu(t) - c \right] = 0,$$
 (35)



$$\mu(t) \left[ b^* \left( \sum_{\tau=0}^{T-1} G_{t+1}(\tau) \gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1} H_{t+1}(\tau) \mu(\tau) + G_{t+1} x_0 + H_{t+1} x_T \right) - \gamma(t) + \mu(t) - a \right] = 0, \tag{36}$$

где 
$$t = 0, \dots, T - 1$$
.

Как и в предыдущем случае, приравнивая один из сомножителей в (35)–(36) к нулю, будем решать полученные системы линейнах алгебраических уравнений. Решение с неотрицательными  $\gamma(t)$ ,  $\mu(t)$  будет искомым. Его существование следует из существования решения зачи (1)–(4).

Таким образом, в случае, когда матрица  $B_0$  невырожденная, чтобы решить поставленную задачу, нужно найти неотрицательные коэффициенты  $\gamma(t)$ ,  $\mu(t)$ , удовлетворяющие системе уравнений (35)–(36).

## Библиографический список

- 1. Киселев Ю.Н. Линейно-квадратичная задача оптимального управления: анализ с помощью принципа максимума // Проблемы динамического управления: Сб. науч. тр. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2005. Вып. 1. С. 166–182.
- 2. *Киселева О.Н.* Минимизация основных показателей качества в линейных дискретных системах // AиT. 2005. № 3. С. 65–73.
- 3. *Czornir A*. О неавтономный линейно-квадратичной задаче с дискретным управлением // Intern. J. Appl. Math. and Comput. Sci. 2002. V. 12, № 2. P. 78–85.
- 4. Ширяев В.И., Баев И.А., Ширяев Е.В. Экономико-

математическое моделирование управления фирмой. М.: КомКнига, 2006.

- 5. *Лагоша Б.А., Апалькова Т.Г.* Оптимальное управление в экономике: теория и приложение. М.: Финансы и статистика, 2008.
- 6. *Дубовицкий А.Я. Милютин А.А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ. 1965. № 3. С. 395–453.
- 7. *Трошина Н.Ю*. Принцип максимума и задача синтеза для линейных дискретных систем: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1997.



## МЕХАНИКА

УДК 539.3

## ДИНАМИКА МНОГОСЛОЙНЫХ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИН

#### В.А. Ковалев

Московский городской университет управления правительства Москвы, кафедра прикладной математики E-mail: vlad\_koval@mail.ru

В работе рассматриваются трехслойные тонкостенные конструкции. Полагается, что толщина среднего слоя значительно больше толщин внешних слоев. Средний слой рассматривается в постановке теориии оболочек с конечной сдвиговой жесткостью (теория Миндлина – Рейсснера), внешние слои -- в постановке мембранной теории. Деформирование пакета слоев определяется гипотезой ломаной нормали. Материал внешних слоев полагается изотропным термоупругим, а внутреннего слоя — изотропным термовязкоупругим. Для указанных трехслойных конструкций предлагается вариационный принцип конволютивного типа. Из вариационного принципа выводятся связанные уравнения движения и теплопроводности, а также краевые и начальные условия. Показано, что если кривизна поверхности осреденения равна нулю, то есть тонкостенная конструкция представляет собой трехслойную пластину, то уравнения движения и теплопроводности допускают решения, представленные посредством скалярных потенциалов. Рассмотрен численный пример для шарнирно закрепленной эллиптической пластины.

Ключевые слова: тонкостенные конструкции, пластины, многослойность, термовязкоупругость, вариационный принцип, конволюция, собственные колебания

## **Dynamics of Multilayered Thermoviscoelastic Plates**

#### V.A. Kovalev

Moscow City Government University of Management Moscow, Chair of Applied Mathematics E-mail: vlad\_koval@mail.ru

This paper deal with laminated thin-walled structures. The laminated structures considered herein consist of three layers. The following assumptions are assumed. The thickness of inner layer is considerably greater the others. The kinematic relations for the inner layer are examined in the form of Mindlin – Reissner shell theory, for the outer layers are in the form of membrane theory. The deformations of the whole layered structure are defined by the polyline hypothesis. The material of outer layers is supposed to be thermoelastic isotropic, whereas inner one is isotropic thermoviscoelastic. A variational principle for 3-layered thermoviscoelastic thin-walled structures is obtained. The variational technique is utilized to derive the equations of motion and heat conduction as well as appropriate boundary and initial conditions. In the case of plane mean surface the solutions of this equations are obtained in the terms of scalar potentials. The numerical example for the simply supported elliptic plate is shown.

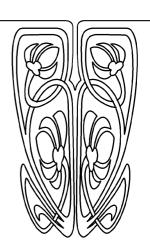
Key words: thin-walled structures, plates, laminated structures, thermoviscoelasticity, variational principle, convolution, eigenfunctions

## **ВВЕДЕНИЕ**

Исследования собственных и вынужденных колебаний трехслойных тонкостенных конструкций имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Это связано, в частности, с тем, что тонкостенные конструкции, образуемые тонкими несущими внешними слоями и средним слоем (заполнителем) значительно большей толщины, имеют меньший вес при заданной жесткости в сравнении с однородными конструкциями. Кроме того, средний слой может выполнять дополнительные конструктивные функции, не связанные с обеспечением



## ОТДЕЛ



© В.А. Ковалев, 2009 61



жесткости, например теплоизоляционные. Следует также отметить, что наиболее жесткими трехслойными непологими оболочками (т.е. обладающими наибольшей жесткостью при фиксированной массе) являются оболочки с несимметричной структурой слоев.

В работе рассматриваются трехслойные тонкостенные конструкции, образованные двумя тонкими наружными слоями с различными толщинами  $h_2,h_3$  и внутренним слоем толщиной  $h_1\gg h_2,h_3$ . Предполагается, что способы соединения слоев в единый пакет гарантируют отсутствие их смещения относительно друг друга (проскальзывания). Кроме того, будем полагать, что:

- 1) перемещения оболочки малы по сравнению с толщиной конструкции;
- 2) нормальными напряжениями на площадках, касательных к поверхности осреднения, можно пренебречь;
- 3) слои тонкостенной конструкции изотропные. Внешние слои испытывают мембранное напряженно-деформированное состояние;
- 4) нормальный элемент среднего слоя после деформирования не остается перпендикулярным к поверхности осреднения, а поворачивается на некоторый угол, не искривляясь и не изменяя своей длины (кинематические гипотезы Миндлина Рейсснера [1]).

Заметим, что в работе рассматривается общий случай несимметричной структуры пакета слоев, т.е. не предполагается, что толщины и физико-механические свойства внешних слоев одинаковы. Если же такое ограничение вводится, то будем говорить, что рассматриваются трехслойные тонкостенные конструкции с симметричной структурой пакета.

Известно, что вариационные принципы дают наиболее простой и строгий способ вывода уравнений движения и краевых условий, которые в теории пластин и оболочек могут принимать громоздкий и нетривиальный вид. В частности, первая корректная формулировка краевой задачи для однородной пластины была получена Кирхгофом с помощью вариационного принципа Лагранжа. Для формулировки начально-краевых задач динамической теории пластин и оболочек, как правило, используется принцип Остроградского - Гамильтона. Так, уравнения осесимметричного движения в перемещениях для непологой трехслойной сферической оболочки симметричной структуры были получены П. Цулковским и Х. Райзманом на основе принципа Гамильтона. Ими же было построено точное решение задачи о вынужденных колебаниях оболочки под действием внешнего давления, внезапно приложенного на малой площадке в полюсе оболочки в форме разложения по собственным формам колебаний [2]. Уравнения движения непологой трехслойной сферической оболочки с ортотропными несущими слоями и жестким заполнителем были сформулированы в работе [3]. Для изотропных несущих слоев эти уравнения интегрировались в присоединенных функциях Лежандра. Вынужденные колебания непологой трехслойной сферической оболочки при нестационарных динамических воздействиях изучались в работе [4]. Точное решение задачи было построено методом конечных интегральных преобразований в форме спектрального разложения по функциям Лежандра. Уравнения движения трехслойных сферических оболочек с несимметричной структурой пакета слоев и краевые условия, соответствующие наиболее общему (упругому) закреплению конструкции на опорном контуре, получены из принципа Остроградского - Гамильтона в работе [5]. Однако эта методология позволяет рассматривать только консервативные задачи. Задачи термоупругости и вязкоупругости не являются таковыми. Известны многочисленные работы, основанные на пионерных исследованиях М. Био [6], И. Дьярмати [7], Г. Циглера [8], в которых вводятся вариационные уравнения взамен вариационному принципу. Но при этом теряется изящество вариационного формализма, так как уже нельзя построить функционал, который достигает стационарного значения на решениях соответствующей краевой задачи. Вместе с тем вариационные уравнения, которые часто называют несколько некорректно «принципами», позволяют сформулировать начально-краевые задачи для диссипативных токостенных систем. В частности, в работе [9] из вариационного уравнения Онзагера и теории скрытых переменных состояния получены уравнения движения для трехслойных вязкоупругих сферических оболочек с несимметричной структурой пакета слоев<sup>1</sup>.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Следует также отметить, что вариационный принцип Остроградского – Гамильтона даже в консервативных задачах обладает существенным недостатком: при его формулировке требуется указывать начальные значения полей и их значения в некоторый фиксированный конечный момент времени, хотя начально-краевая задача предполагает, что указаны начальные значения и начальные скорости.



Возможности вариационного формализма существенно расширяются, если вместо принципа Остроградского – Гамильтона воспользоваться конволютивным вариационным принципом. Напомним, что математическая структура функционала в принципе Гамильтона порождается скалярным произведением в псевдоевклидовом пространстве – времени Минковского. Структура же конволютивного вариационного принципа задается функционалом свертки (конволюции) и потому качественно отличается от первого. Особым свойством функционала свертки является то, что соответствующие уравнения Эйлера – Лагранжа и естественные краевые условия определяют начальную или начальнокраевую задачу. На этот факт впервые обратил внимание М. Гертин [10] и ввел конволютивный вариационный принцип в динамической теории упругости [11]. Позже методология построения вариационных принципов на основе абстрактных билинейных форм, обобщающая теорию Гертина, была развита Э. Тонти [12]. Оказалось, что вариационный принцип Гертина справедлив для значительно большего класса задач, чем задачи, возникающие в линейной теории упругости. Это привело к построению новых вариационных принципов уже для диссипативных задач, в частности, вариационный принцип в термоупругости был введен Г. Белли и К. Морози [13].

В настоящей работе предлагается обобщение вариационного принципа Белли на изотропные вязкоупругие среды, из которого в результате варьирования выводятся уравнения движения, естественные краевые и начальные условия для пространственного ограниченного тела [14]. Тем самым обосновывается корректность вариационной формулировки. Затем функционал преобразуется с учетом кинематических гипотез, соответствующих трехслойным вязкоупругим тонкостенным конструкциям, из которого вновь путем варьирования получаем уравнения движения, теплопроводности, краевые и начальные условия, но уже специализированные для тонкостенных конструкций.

## 1. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП

Перед формулировкой вариационного принципа введем ряд вспомогательных определений. Введем пространство вектор-функций  $\boldsymbol{L}_{\mu}^2$ , определенных в ограниченной области  $V \in \mathbb{E}^3$  и интегрируемых с квадратом в этой области. Пусть скалярное произведение в  $\boldsymbol{L}_{\mu}^2$  задается следующим билинейным функционалом:

$$\boldsymbol{L}_{\mu}^{2}: \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \int_{V} \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \mu \, \boldsymbol{w} \, dV. \tag{1}$$

Вариационые принципы механики могут быть построены на основе следующего хорошо известного утверждения [15]: если линейный оператор A с областью определения D является самосопряженным, т.е.  $\forall \ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in D \ (A[\boldsymbol{u}], \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A[\boldsymbol{u}])$ , то стационарные значения квадратичного функционала  $I[\boldsymbol{u}] = \frac{1}{2} (\boldsymbol{u}, A[\boldsymbol{u}])$ , определенного в той же области D, являются решениями краевой задачи

$$u \in D, \quad A[u] = 0, \tag{2}$$

и наоборот. В случае несамосопряженного оператора все становится значительно сложнее.

Заметим, что свойство самосопряженности зависит не только от структуры оператора, но и от структуры скалярного произведения (1). Можно попытаться изменить билинейный функционал, определяющий скалярное произведение (1) и ввести так называемое произведение с весом. Это в ряде случаев позволяет добиться самосопряженности заданного оператора А. Однако выбор функционала для скаларного произведения ограничен известными аксиомами, в частности аксиомой дефинитности, что существенно ограничивает выбор. Вместе с тем, как показал Э. Тонти, вариационный принцип для своей формулировки требует определения лишь некоторой билинейной формы, которая может и не удовлетворять всем аксиомам скалярного произведения, в частности, не быть дефинитной. Это существенно расширяет возможности выбора и позволяет построить новые вариационные формулировки даже в тех случаях, когда классический подход позволял сформулировать лишь вариационные уравнения.

Итак, пусть в  $L^2_\mu$  определена симметричная билинейная форма  $\langle\cdot,\cdot\rangle$ :  $\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$  и эта билинейная форма отделима, т.е. удовлетворяет соотношению

$$(\forall \ \mathbf{u} \in D \ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0) \ \Rightarrow \ \mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Механика 63



Если линейный оператор A с областью определения D является самосопряженным относительно симметричной билинейной формы  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , т.е.  $\forall \ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in D \ \langle A[\boldsymbol{u}], \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, A[\boldsymbol{u}] \rangle$ , то стационарные значения квадратичного функционала  $I[\boldsymbol{u}] = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{u}, A[\boldsymbol{u}] \rangle$ , определенного в той же области D, являются решениями краевой задачи (2). Таким образом, возможность построения новых вариационных принципов зависит от выбора билинейной формы.

К нетривиальным результатам приводит выбор в качестве такой билинейной формы функционала свертки (конволюции). Напомним, что свертка функций u(t), v(t) определяется как интеграл<sup>2</sup> [16]:

$$\langle u(t), v(t) \rangle = \int_{0}^{T} u(T - t) v(t) dt.$$
(4)

Известно, что свертка обладает свойствами коммутативности

$$\langle \vartheta, \omega \rangle = \langle \omega, \vartheta \rangle, \tag{5}$$

ассоциативности

$$\langle \vartheta, \langle \omega, \varphi \rangle \rangle = \langle \langle \vartheta, \omega \rangle, \varphi \rangle, \tag{6}$$

и дистрибутивности

$$\langle \vartheta, (\omega + \varphi) \rangle = \langle \vartheta, \omega \rangle + \langle \vartheta, \varphi \rangle. \tag{7}$$

Соотношения (5)-(7) проверяются непосредственным вычислением соответствующих интегралов. В силу теоремы Титчмарша [16] имеет место импликация

$$\vartheta \not\equiv 0 \land \omega \not\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \vartheta, \omega \rangle \not\equiv 0,$$

а так называемое свойство отделимости

$$\forall \vartheta \quad \langle \vartheta, \omega \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega \equiv 0 \tag{8}$$

представляет собой аналог основной леммы классического операционного исчисления. Отметим, что из определения функционала свертки (4) и правила интегрирования по частям вытекает следующее соотношение:

$$\langle \dot{u}, v \rangle = \langle u, \dot{v} \rangle + u(T)v(0) - u(0)v(T). \tag{9}$$

Здесь точка обозначает дифференцирование по времени. Это соотношение принципиально отличается от аналогичного соотношения для евклидова скалярного произведения, которое имеет вид

$$(\dot{u}, v) = -(u, \dot{v}) + u(T)v(T) - u(0)v(0),$$

а именно билинейные формы в левой и правой частях равенства (9) имеют один и тот же знак. Можно сказать, что этот факт определяет особые свойства конволютивных функционалов, поскольку при однородных начальных данных оператор дифференцирования любого (в том числе первого) порядка оказывается самосопряженным относительно конволюции (напомним, что, например, уравнение теплопроводности содержит первую производную температуры по времени, а уравнение движения вязкоупругой среды дифференциального типа содержит производные по времени произвольных порядков).

В целях упрощения записи мы используем следующие обозначения для свертки векторнозначных и тензорнозначных функций:  $\langle {m u}(t)\cdot {m v}(t)\rangle = \int\limits_0^T {m u}(T-t)\cdot {m v}(t)\,dt, \ \langle {m A}(t):{m B}(t)\rangle = \int\limits_0^T {m A}(T-t):{m B}(t)\,dt$  и т.д. Символ  ${m E}$  во всем тексте работы обозначает единичный тензор.

При использовании конволюции для построения функционала целесообразно в качестве базовых переменных $^3$  использовать скорость v и приращение температуры  $\theta$ . При этом тензор деформаций  $\varepsilon$ 

 $<sup>^2</sup>$ Отметим, что в настоящей работе переменные T,t, au определяют моменты времени, причем переменной T обозначается текущее время, а переменными t и au обозначаются прошедшие моменты.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Под базовыми переменными мы понимаем независимые функции, по которым производится варьирование (аналог обобщенных координат в аналитической динамике).



может быть представлен выражением

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \int_{0}^{t} \left( \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{v}(\tau) + \left( \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{v}(\tau) \right)^{*} \right) d\tau.$$
 (10)

Приращение температуры  $\theta$  определяется относительно отсчетной температуры  $\vartheta$ , т.е. текущая абсолютная температура определяется суммой  $\vartheta + \theta$ .

Можно доказать, что интегродифференциальные операторы, порождаемые уравнениями движения и теплопроводности термовязкоупругой среды, оказываются самосопряженными по отношению к конволютивной билинейной форме. Этот факт позволяет сразу сформулировать вариационный принцип для термовязкоупругого пространственного тела [14]. Мы, однако, выберем несколько иной ход рассуждений и *apriori* сформулируем функционал, обобщающий известный функционал Белли для термоупругой среды, а затем покажем непосредственным вычислением, что уравнения Эйлера – Лагранжа, естественные краевые и начальные условия определяют начально-краевую задачу для термовязкоупругого ограниченного тела.

Итак, формулируем вариационный принцип (для термоупругой среды дифференциального типа порядка N) следующим образом:

$$\delta \mathscr{F} = 0.$$

где варьируемый функционал имеет вид

$$\mathscr{F}[\boldsymbol{v},\theta] = \int_{V} \left( \mathscr{L}_{\text{mech}} + \mathscr{L}_{\text{therm}} + \mathscr{L}_{\text{inter}} - \frac{\rho}{2} \boldsymbol{v}(T) \cdot \boldsymbol{v}_{0} + \frac{c}{2\vartheta} \theta(T) \theta_{0} - \sum_{k=2}^{N} \sum_{n=1}^{k-1} \left[ \mu_{k} D^{k-n} \boldsymbol{\varepsilon}(T) : \boldsymbol{\varepsilon}_{0}^{n} + \frac{\lambda_{k}}{2} D^{k-n} \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}(T) \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}_{0}^{n} \right] \right) dV.$$
(11)

Здесь  $v_0$ ,  $\theta_0$  определяют начальные значения скорости и температуры,  $\varepsilon_0^1 = \mathbf{def}[v_0]$ , а  $\varepsilon_0^2, \varepsilon_0^3, \dots$  деформации начальных полей ускорений и деформации начальных значений старших производных по времени полей скоростей. Разумеется, последнее слагаемое в выражении (11) отлично от нуля только при  $N \geq 2$ .

Разберем структуру и физический смысл остальных компонентов выражения для плотности функционала (11). В выражении (11) плотность  $\mathscr{L}_{\text{mech}}$  соответствует чисто механическому деформированию и может быть представлена посредством следующего соотношения:

$$\mathcal{L}_{\text{mech}} = \frac{1}{2} \left( \rho \left\langle \boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} \right\rangle - 2\rho \left\langle \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{v} \right\rangle + 2 \left\langle \mathcal{M}[\boldsymbol{\varepsilon}] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\rangle + \left\langle \mathcal{L}[\boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}], \boldsymbol{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\rangle \right), \tag{12}$$

где ho- плотность, K- массовые силы,  $\mathscr{M}$ ,  $\mathscr{L}-$  итегродифференциальные операторы

$$\mathcal{M}[\varepsilon] = \sum_{k=-N}^{N} \mu_k D^k \varepsilon, \qquad \mathcal{L}[e] = \sum_{k=-N}^{N} \lambda_k D^k e, \qquad e = \mathbf{E} : \varepsilon,$$

$$D^0 z(t) = z(t), \qquad D^k z(t) = \begin{cases} \frac{1}{(-k-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{-k-1} z(\tau) d\tau, & k < 0, \\ \frac{d^k}{dt^k} z(t), & k > 0. \end{cases}$$
(13)

Отметим, что из соотношений (13) в частных случаях вытекают известные законы состояния для линейной вязкой среды типа Фойгта, а именно

$$N=1, \qquad \mu_{-1}=\lambda_{-1}=0, \qquad \mathscr{M}[\boldsymbol{\varepsilon}]=\mu_0\boldsymbol{\varepsilon}+\mu_1\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \qquad \mathscr{L}[e]=\lambda_0e+\lambda_1\dot{e},$$

для среды типа Максвелла:

$$N=1, \quad \mu_1=\lambda_1=0, \qquad \mathscr{M}[\boldsymbol{\varepsilon}]=\mu_{-1}\int\limits_0^t \boldsymbol{\varepsilon}(\tau)\,d\tau + \mu_0\boldsymbol{\varepsilon}, \qquad \mathscr{L}[e]=\lambda_{-1}\int\limits_0^t e(\tau)\,d\tau + \lambda_0 e,$$

Механика 65



для трехмодульной среды типа Кельвина:

$$N = 1, \qquad \mathscr{M}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \mu_{-1} \int_{0}^{t} \boldsymbol{\varepsilon}(\tau) d\tau + \mu_{0} \boldsymbol{\varepsilon} + \mu_{1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \qquad \mathscr{L}[e] = \lambda_{-1} \int_{0}^{t} e(\tau) d\tau + \lambda_{0} e + \lambda_{1} \dot{\boldsymbol{e}}.$$

Здесь  $\lambda_0$ ,  $\mu_0$  — упругие модули Ламе, а  $\lambda_k$ ,  $\mu_k$  (для индексов k, отличных от нуля) — модули, определяющие вязкие свойства среды. Если положить N=0, то выражение (12) преобразуется к соответствующему выражению, введенному  $\Gamma$ . Белли и K. Морози для термоупругой среды [13].

Плотность  $\mathscr{L}_{\mathrm{therm}}$  соответствует процессу теплопроводности и определяется формулой

$$\mathcal{L}_{\text{therm}} = \frac{1}{2\vartheta} \left( 2 \langle \varpi, \theta \rangle - c \langle \theta, \dot{\theta} \rangle - k \langle \nabla \theta \cdot \nabla \theta \rangle \right), \tag{14}$$

где k — теплопроводность, c — удельная теплоемкость среды.

Наконец, плотность  $\mathscr{L}_{\mathrm{inter}}$  характеризует эффект связанности тепловых и механических полей:

$$\mathscr{L}_{\text{inter}} = -\beta \langle \theta, \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle. \tag{15}$$

Здесь  $\beta$  — термомеханический модуль, который для изотропной среды может быть вычислен из соотношения  $\beta = \alpha(3\lambda_0 + 2\mu_0)$ , где  $\alpha$  — коэффициент теплового расширения.

Для вывода уравнений движения и теплопроводности осуществим варьирование функционала  $\mathscr{F}$ . Формальное вычисление вариации дает следующий результат:

$$\delta\mathscr{F} = \int_{V} \frac{1}{2} \rho \left\langle \delta \boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} \right\rangle + \frac{1}{2} \rho \left\langle \boldsymbol{v} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{v}} \right\rangle - \rho \left\langle \boldsymbol{K} \cdot \delta \boldsymbol{v} \right\rangle +$$

$$+ \sum_{k=-N}^{N} \left( \mu_{k} \left\langle D^{k} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\rangle + \mu_{k} \left\langle D^{k} \boldsymbol{\varepsilon} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\rangle + \frac{\lambda_{k}}{2} \left\langle D^{k} \boldsymbol{E} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\rangle + \frac{\lambda_{k}}{2} \left\langle D^{k} \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{E} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\rangle \right) +$$

$$+ \frac{1}{\vartheta} \left\langle \boldsymbol{\omega}, \delta \boldsymbol{\theta} \right\rangle - \frac{c}{2\vartheta} \left\langle \delta \boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}} \right\rangle - \frac{c}{2\vartheta} \left\langle \boldsymbol{\theta}, \delta \dot{\boldsymbol{\theta}} \right\rangle - \frac{k}{\vartheta} \left\langle \delta \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\theta} \right\rangle - \beta \left\langle \delta \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\rangle - \beta \left\langle \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{E} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\rangle -$$

$$- \frac{\rho}{2} \delta \boldsymbol{v}(T) \cdot \boldsymbol{v}_{0} + \frac{c}{2\vartheta} \delta \boldsymbol{\theta}(T) \boldsymbol{\theta}_{0} - \sum_{k=2}^{N} \sum_{n=1}^{k-1} \left[ \mu_{k} D^{k-n} \delta \boldsymbol{\varepsilon}(T) : \boldsymbol{\varepsilon}_{0}^{n} + \frac{\lambda_{k}}{2} D^{k-n} \boldsymbol{E} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}(T) \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}_{0}^{n} \right] dV.$$

Будем полагать, что варьирование осуществляется на классе функций, значения которых в момент времени t=0 фиксированы. Тогда  $\delta {m v}(0)=0$ , и поскольку и функционал свертки симметричен, то посредством интегрирования по частям  $\langle {m v}\cdot\delta{m v}\rangle=\langle {\dot {m v}}\cdot\delta{m v}\rangle+{m v}(0)\cdot\delta{m v}(T)-{m v}(T)\cdot\delta{m v}(0)$  слагаемое, содержащее вариацию производной по времени от скорости, может быть преобразовано к выражению, в которое входит только вариация базовой переменной:  $\langle {m v}\cdot\delta{m v}\rangle=\langle \delta{m v}\cdot{m v}\rangle+{m v}(0)\cdot\delta{m v}(T)$ . Аналогичные преобразования позволяют исключить вариацию скорости изменения приращения температуры:  $\langle \theta,\delta\dot{\theta}\rangle=\langle\dot{\theta},\delta\theta\rangle+\theta(0)\cdot\delta\theta(T)$ . Члены, содержащие вариации деформаций (напомним, что базовыми переменными являются скорости, следовательно, в окончательном виде функционала следует оставить только вариации скоростей деформаций), также преобразуются путем интегрирования по частям:  $\langle \delta {m e} : \dot{{m e}} \rangle = \langle \delta \dot{{m e}} : {m e} \rangle + \delta {m e}(0) \cdot {m e}(T) - \delta {m e}(T) \cdot {m e}(0)$ , однако в силу определения (10) деформации в начальный момент времени равны нулю, т.е.  ${m e}(0)=\delta {m e}(0)=0$  и, следовательно,  $\langle \delta {m e} : \dot{{m e}} \rangle = \langle \delta \dot{{m e}} : {m e} \rangle$ 

Точно такие же рассуждения могут быть проведены для слагаемых, содержащих вариации интегралов деформации по времени  $\langle \delta D^k \varepsilon : \dot{\varepsilon} \rangle = \langle \delta \dot{\varepsilon} : D^k \varepsilon \rangle$ , k < 0, а для слагаемых, содержащих производные деформации по времени порядка выше первого, справедливы соотношения:

$$\langle \delta D^k \varepsilon : \dot{\varepsilon} \rangle = \langle \delta \dot{\varepsilon} : D^k \varepsilon \rangle + \sum_{n=1}^{k-1} D^{k-n} \delta \varepsilon(T) : D^n \varepsilon(0), \quad k > 1.$$

Таким образом, вариация функционала принимает вид

$$\delta \mathscr{F} = \int_{V} \left\{ \rho \left\langle \delta \boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} \right\rangle + \rho \left\langle \boldsymbol{K} \cdot \delta \boldsymbol{v} \right\rangle + \sum_{k=-N}^{N} \left( \mu_{k} \left\langle D^{k} \boldsymbol{\varepsilon} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\rangle + \frac{\lambda_{k}}{2} \left\langle D^{k} \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{E} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\rangle \right) + \left\langle \boldsymbol{\omega}, \delta \boldsymbol{\theta} \right\rangle - \frac{c}{2} \left\langle \delta \boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}} \right\rangle - k \left\langle \delta \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\theta} \right\rangle - \beta \left\langle \delta \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\rangle - \beta \left\langle \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{E} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\rangle + \frac{\rho}{2} \delta \boldsymbol{v}(T) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{0}) - \frac{c}{2} \left\langle \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}} \right\rangle - k \left\langle \delta \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\theta} \right\rangle - \beta \left\langle \delta \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\rangle - \beta \left\langle \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{E} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\rangle + \frac{\rho}{2} \delta \boldsymbol{v}(T) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{0}) - \frac{\rho}{2} \left\langle \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} \right\rangle - \frac{c}{2} \left\langle \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}} \right\rangle - k \left\langle \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\theta} \right\rangle - \beta \left\langle \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{E} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \right\rangle - \beta \left\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma} \right\rangle + \frac{\rho}{2} \delta \boldsymbol{v}(T) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{0}) - \frac{\rho}{2} \left\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma} \right\rangle + \frac{\rho}{2} \delta \boldsymbol{v}(T) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{0}) - \frac{\rho}{2} \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\rangle + \frac{\rho}{2} \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \frac{\rho}{2} \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \frac{\rho}{2} \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \frac{\rho}{2} \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \frac{\rho}{2} \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \frac{\rho}{2} \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \frac{\rho}{2} \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \frac{\rho}{2} \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \frac{\rho}{2} \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \frac{\rho}{2} \delta \boldsymbol{\sigma$$



$$-\frac{c}{2\vartheta}\delta\theta(T)(\theta-\theta_0) + \sum_{k=2}^{N} \sum_{n=1}^{k-1} \left(\mu_k D^{k-n} \delta \boldsymbol{\varepsilon}(T) + \frac{\lambda_k}{2} D^{k-n} \boldsymbol{E} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}(T) \boldsymbol{E}\right) : (D^n \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0^n) \right\} dV. \tag{16}$$

Последующие преобразования выражения (16) позволяют исключить вариации производных скорости перемещений по пространственным переменным и вытекают из дивергентной теоремы Остроградского – Гаусса. Приведем преобразования некоторых слагаемых (16):

$$\int\limits_{V} \langle \boldsymbol{\varepsilon} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \ dV = \int\limits_{V} \langle \boldsymbol{\varepsilon} : \delta \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{v} \rangle \ dV = \oint\limits_{A} \langle (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \delta \boldsymbol{v} \rangle \ dA - \int\limits_{V} \langle (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \delta \boldsymbol{v} \rangle \ dV,$$

$$\int\limits_{V} \langle \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{E} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \ dV = \int\limits_{V} \langle \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}, \delta \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} \rangle \ dV = \oint\limits_{A} \langle \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{n} \cdot \delta \boldsymbol{v} \rangle \ dA - \int\limits_{V} \langle (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \delta \boldsymbol{v} \rangle \ dV.$$

Аналогичные преобразования для пространственных производных температуры приводят к выражениям:

$$\int\limits_{V} \langle \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\theta} \cdot \delta \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\theta} \rangle \ dV = \oint\limits_{A} \langle \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\theta}, \delta \boldsymbol{\theta} \rangle \ dA - \int\limits_{V} \langle \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\theta}, \delta \boldsymbol{\theta} \rangle \ dV.$$

Наконец, слагаемое, определяющее связность тепловых и деформационных полей, трансформируется к виду

$$\int\limits_{V} \langle \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{E} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \ dV = \int\limits_{V} \langle \boldsymbol{\theta}, \delta \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} \rangle \ dV = \oint\limits_{A} \langle \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{n} \cdot \delta \boldsymbol{v} \rangle \ dA - \int\limits_{V} \langle \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\theta} \cdot \delta \boldsymbol{v} \rangle \ dV.$$

Окончательно варьируемый функционал может быть записан следующим образом:

$$\delta\mathscr{F} = \int_{V} \left\{ \left\langle \left( \rho \dot{\boldsymbol{v}} - \rho \boldsymbol{K} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \left[ \sum_{k=-N}^{N} \left( 2\mu_{k} D^{k} \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda_{k} \boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{E} : D^{k} \boldsymbol{\varepsilon} \right) - \beta \boldsymbol{E} \theta \right] \right) \cdot \delta \boldsymbol{v} \right\rangle + \\
+ \left\langle \left( \frac{\varpi}{\vartheta} - \frac{c}{\vartheta} \dot{\theta} + \frac{k}{\vartheta} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \theta - \beta \boldsymbol{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right), \delta \theta \right\rangle + \frac{\rho}{2} \delta \boldsymbol{v}(T) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{0}) - \frac{c}{2\vartheta} \delta \theta(T) (\theta - \theta_{0}) + \\
+ \sum_{k=2}^{N} \sum_{n=1}^{k-1} \left( \mu_{k} D^{k-n} \delta \boldsymbol{\varepsilon}(T) + \frac{\lambda_{k}}{2} D^{k-n} \boldsymbol{E} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}(T) \boldsymbol{E} \right) : \left( D^{n} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{0}^{n} \right) \right\} dV + \\
+ \oint_{A} \left\{ \left\langle \boldsymbol{n} \cdot \left[ \sum_{k=-N}^{N} \left( 2\mu_{k} D^{k} \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda_{k} \boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{E} : D^{k} \boldsymbol{\varepsilon} \right) - \beta \boldsymbol{E} \theta \right] \cdot \delta \boldsymbol{v} \right\rangle + \left\langle \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nabla} \theta, \delta \theta \right\rangle \right\} dA.$$

В силу произвольности вариаций базисных функций (здесь используется аналог основной леммы вариационного исчисления, которая вытекает из свойства отделимости билинейной формы (3)), необходимые и достаточные условия стационарности функционала определяются соответствующими уравнениями Эйлера – Лагранжа:

$$\rho \dot{\boldsymbol{v}} - \rho \boldsymbol{K} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \left[ \sum_{k=-N}^{N} \left( 2\mu_k D^k \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda_k \boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{E} : D^k \boldsymbol{\varepsilon} \right) - \beta \boldsymbol{E} \theta \right] = \boldsymbol{0},$$

$$\varpi - c \dot{\theta} + k \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \theta - \vartheta \beta \boldsymbol{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$$

и естественными начальными условими, которые определяют начальные значения скоростей, приращений температуры, начальных значений деформации поля ускорений и старших производных деформаций по времени, т.е.  $\boldsymbol{v}|_{t=0}=\boldsymbol{v}_0,~\theta|_{t=0}=\theta_0,~D^n\boldsymbol{\varepsilon}|_{t=0}=\boldsymbol{\varepsilon}_0^n,~(n=2,3,\ldots),$  а также краевыми условиями:

$$\boldsymbol{n} \cdot \left[ \sum_{k=-N}^{N} \left( 2\mu_k D^k \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda_k \boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{E} : D^k \boldsymbol{\varepsilon} \right) - \beta \boldsymbol{E} \theta \right] \bigg|_{A_1} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{v}|_{A_2} = \boldsymbol{0}, \quad A_1 \cup A_2 = A,$$
$$\boldsymbol{n} \cdot \left[ \boldsymbol{\nabla} \theta \right] |_{A_3} = 0, \quad \theta|_{A_4} = 0, \quad A_3 \cup A_4 = A.$$

Здесь A — граничная поверхность тела.

Механика 67



Уравнения движения и теплопроводности могут быть записаны в базовых переменных v и heta:

$$\rho \dot{\boldsymbol{v}} - \rho \boldsymbol{K} - \int_{0}^{T} \sum_{k=-N}^{N} \left[ \mu_{k} \nabla \cdot \nabla D^{k} \boldsymbol{v} + (\lambda_{k} + \mu_{k}) \nabla \otimes \nabla \cdot D^{k} \boldsymbol{v} \right] dt + \beta \nabla \theta = \mathbf{0},$$

$$\varpi - c \dot{\theta} + k \nabla \cdot \nabla \theta - \beta \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0.$$

При этом краевые условия принимают вид

$$\boldsymbol{n} \cdot \left[ \int_{0}^{T} \sum_{k=-N}^{N} \left\{ \mu_{k} \left( \boldsymbol{\nabla} \otimes D^{k} \boldsymbol{v} + \left( \boldsymbol{\nabla} \otimes D^{k} \boldsymbol{v} \right)^{*} \right) + \lambda_{k} \boldsymbol{\nabla} \cdot D^{k} \boldsymbol{v} \right\} dt - \beta \boldsymbol{E} \theta \right] \bigg|_{A_{1}} = \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{v}|_{A_{2}} = \boldsymbol{0}, \quad A_{1} \cup A_{2} = A, \quad \boldsymbol{n} \cdot [\boldsymbol{\nabla} \theta] |_{A_{2}} = 0, \quad \theta|_{A_{4}} = 0, \quad A_{3} \cup A_{4} = A.$$

Если ввести перемещения  $\mathbf{u} = \int_0^t \mathbf{v} + \mathbf{u}_0$ , то при нормировке  $\mathbf{u}_0 = 0$  (которая всегда возможна, если тело деформировалось из естественного состояния) уравнения движения и теплопроводности принимают классический вид:

$$\rho \ddot{\boldsymbol{u}} - \rho \boldsymbol{K} - \sum_{k=-N}^{N} \left[ \mu_k \nabla \cdot \nabla D^k \boldsymbol{u} + (\lambda_k + \mu_k) \nabla \otimes \nabla \cdot D^k \boldsymbol{u} \right] + \beta \nabla \theta = \boldsymbol{0},$$

$$\varpi - c\dot{\theta} + k \nabla \cdot \nabla \theta - \vartheta \beta \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0.$$

Полученные дифференциальные уравнения, начальные и краевые условия полностью определяют начально-краевую задачу для изотропной термовязкоупругой среды дифференциального типа.

## 2. ТЕРМОУПРУГИЕ ТОНКОСТЕННЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Приступим теперь к построению вариационного принципа для тонкостенных конструкций. Кинематические соотношения определяются гипотезами теории оболочек с конечной сдвиговой жесткостью (теорией Миндлина – Рейсснера) [17]. Для идентификации точек тонкостенной конструкции введем подходящие<sup>4</sup> криволинейные координаты  $\alpha, \beta, \zeta$ . Символами  $e^{\alpha}, e^{\beta}, e^{\zeta}$  обозначим соответствующие базисные векторы. Тонкостенную контрукцию будем рассматривать как трехмерное тело, ограниченное поверхностями  $\zeta = C_1, \ \zeta = C_2, \ C_2 > C_1$ . Будем полагать, что расстояние между поверхностями (толщина конструкции)  $h = C_2 - C_1$  является малым параметром по отношению к ее общим размерам.

Согласно принятым кинематическим гипотезам скорость v и приращение температуры  $\theta$  могут быть представлены в форме разложений первого порядка по переменной  $\zeta$ :

$$v = \mathfrak{u} + \zeta \mathfrak{v}, \quad \theta = \mathfrak{a} + \zeta \mathfrak{b},$$
 (17)

где функция двух поверхностных переменных  $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\alpha,\beta)$  определяет трансляционную скорость смещения нормали, а функция  $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\alpha,\beta)$  — скорость ее поворота. Кроме того, согласно теории Миндлина — Рейсснера, потребуем выполнения следующего дополнительного кинематического условия  $\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}^{\zeta}=0$ . Из указанных кинематических соотношений вытекает разложение для тензора деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$ :

$$\varepsilon = \int_{0}^{t} \mathbf{def} \boldsymbol{v}(\tau) d\tau, \quad \mathbf{def} \boldsymbol{v} = \mathbf{def} \boldsymbol{\mathfrak{u}} + \zeta \mathbf{def} \boldsymbol{\mathfrak{v}} + \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{\mathfrak{v}} \otimes \boldsymbol{e}^{\zeta} + \boldsymbol{e}^{\zeta} \otimes \boldsymbol{\mathfrak{v}} \right). \tag{18}$$

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Здесь, конечно, «подходящие» координатные системы лего угадываются лишь в простых случаях. Например, для цилиндрических или сферических оболочек естественно выбрать цилиндрическую и сферическую систему координат, для пластин — одну из систем цилиндрического типа, например, кругового, эллиптического или гиперболического цилиндра, в зависимости от формы границы пластины. Однако уже для эллипсоидальных оболочек ситуация значительно усложняется, поскольку координатные поверхности эллиптической координатной системы не эквидистантны и не могут быть использованы для определения граничных поверхностей оболочки постоянной толщины.

 $<sup>^5</sup>$ Это условие выражает тот факт, что в разложении скорости v по  $\zeta$  не учитывается член  $\frac{\partial v}{\partial \zeta} \cdot e^{\zeta}$ , что приводит к известной асимптотической некорректности теории Миндлина – Рейсснера. Вместе с тем погрешности, вносимые пренебрежением этого члена, в большинстве случаев оказываются малыми, что оправдывает такое упрощение. Конечно, для специальных (высокочастотных) нагрузок необходимо рассматривать полное разложение [18], либо вводить модифицированные кинематические гипотезы.



След тензора деформаций, очевидно, может быть найден по формуле  $\boldsymbol{E}:\boldsymbol{\varepsilon}=\int\limits_0^t \left\{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{u}}+\zeta\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{v}}\right\}\,d\tau$ . Отметим, что в силу принятых кинематических гипотез компонента  $\varepsilon_{\zeta\zeta}$  тензора деформаций обращается в нуль  $\varepsilon_{\zeta\zeta}=\boldsymbol{e}^\zeta\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{e}^\zeta=0$ , т.е. в рамках принятых гипотез обжатие по толщине отсутствует [18] (этот факт можно сформулирвать иначе: нормаль при деформировании не изменяет свою длину [17]).

Помимо кинематических гипотез, в теории Миндлина – Рейсснера вводятся статические гипотезы. Хотя в дальнейшем изложения мы не используем непосредственно компоненты напряжений (поскольку все построения опираются на вариационный принцип, и учет статических гипотез осуществляется за счет соответствующего изменения плотности варьируемого функционала), для пояснения здесь введем обозначение для тензора напряжений  $\sigma$ . Полагаем, что в случае трехмерного напряженного состояния напряжения  $\sigma$  связаны с тензором деформаций  $\varepsilon$  и приращением температуры  $\theta$  следующим законом состояния:  $\sigma = \mathfrak{F}(\varepsilon,\theta)$ . В теории Миндлина – Рейсснера постулируется отсутствие нормальных напряжений на площадках, касательных к поверхности осреднения, т.е.  $\sigma_{\zeta\zeta} = 0$ , и корректируются значения касательных напряжений  $\sigma_{\alpha\zeta} = \varkappa e^{\alpha} \cdot \mathfrak{F}(\varepsilon,\theta) \cdot e^{\zeta}$ ,  $\sigma_{\beta\zeta} = \varkappa e^{\beta} \cdot \mathfrak{F}(\varepsilon,\theta) \cdot e^{\zeta}$ , где  $\varkappa$  — коэффициент поперечного сдвига [19]

$$\varkappa = \frac{3}{2} - \frac{3}{10(1+\nu)} - \frac{3\nu}{4(1+\nu)}.$$
(19)

Поскольку в настоящей работе для вывода уравнений используется вариационный принцип, нет нужды непосредственно вводить статические гипотезы, однако для того чтобы получаемая теория оказалась согласованной с теорией Миндлина – Рейсснера, необходимо модифицировать выражение для плотности  $\mathcal{L}_{mech}$  (14) следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\text{mech}} = \frac{1}{2} \left( \rho \left\langle \boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} \right\rangle - 2\rho \left\langle \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{v} \right\rangle + 2 \left\langle \mathcal{M}[\boldsymbol{\varepsilon}] : \boldsymbol{G} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\rangle + \left\langle \mathcal{L}[\boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}], \boldsymbol{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\rangle \right), \tag{20}$$

где тензор четвертого ранга G вводится для поправки напряжений сдвига, вводимой в теорию Mиндлина – Рейсснера. Тензор G может быть представлен диадным разложением:

$$G = 1 + (\varkappa - 1) \left( G_0 + G_0^{(2143)} \right), \ G_0 = e^{\alpha} \otimes e^{\zeta} \otimes e^{\alpha} \otimes e^{\zeta} + e^{\beta} \otimes e^{\zeta} \otimes e^{\beta} \otimes e^{\zeta}. \tag{21}$$

Здесь 1 — тензорная единица (тензор четвертого ранга, отображающий любой тензор второго ранга в себя),  $G_0^{(2143)}$  — изомер тензорной единицы, соответствующий диадной перестановке  $(1234) \mapsto (2413)$ .

Таким образом, конволютивный функционал для тонкостенных конструкций записывается в виде (11), в котором формулировка плотности  $\mathscr{L}_{\mathrm{mech}}$  принимается в форме (20), а тензоры деформаций, скорости и приращения температуры представляются в виде разложений по степеням  $\zeta$  (17), (18). Это позволяет записать сам функционал (11) в форме разложения по  $\zeta$  и затем оуществить интегрирование получаемого таким образом выражения по переменной  $\zeta$  [20]. Для этой цели осуществим промежуточные вычисления, учитывая, что  $\dot{\varepsilon} = \mathbf{defu} + \zeta \mathbf{defv} + \frac{1}{2} \left( \mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^{\zeta} + \mathbf{e}^{\zeta} \otimes \mathbf{v} \right)$ . Имеем

$$\begin{split} \varepsilon\!:\!\boldsymbol{G}\!:\!\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \int\limits_0^t \left\{ \mathbf{defu} + \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{\mathfrak{v}} \otimes \boldsymbol{e}^{\zeta} + \boldsymbol{e}^{\zeta} \otimes \boldsymbol{\mathfrak{v}} \right) \right\} \, d\tau\!:\!\boldsymbol{G}\!:\! \left( \mathbf{defu} + \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{\mathfrak{v}} \otimes \boldsymbol{e}^{\zeta} + \boldsymbol{e}^{\zeta} \otimes \boldsymbol{\mathfrak{v}} \right) \right) + \\ &+ \zeta \int\limits_0^t \mathbf{defv} \, d\tau\!:\!\boldsymbol{G}\!:\! \left( \mathbf{defu} + \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{\mathfrak{v}} \otimes \boldsymbol{e}^{\zeta} + \boldsymbol{e}^{\zeta} \otimes \boldsymbol{\mathfrak{v}} \right) \right) + \zeta \int\limits_0^t \left\{ \mathbf{defu} + \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{\mathfrak{v}} \otimes \boldsymbol{e}^{\zeta} + \boldsymbol{e}^{\zeta} \otimes \boldsymbol{\mathfrak{v}} \right) \right\} \, d\tau\!:\!\boldsymbol{G}\!:\! \mathbf{defv} + \\ &+ \zeta^2 \int\limits_0^t \mathbf{defv} \, d\tau\!:\!\boldsymbol{G}\!:\! \mathbf{defv}. \end{split}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \colon \boldsymbol{G} \colon \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha\alpha} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha\beta} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\beta\alpha} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\beta\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\beta\beta} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\beta\beta} + \varkappa \left( \boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha\zeta} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha\zeta} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\zeta\alpha} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\zeta\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\beta\zeta} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\beta\zeta} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\zeta\beta} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\zeta\beta} \right).$$

Механика 69

 $<sup>^6</sup>$ Для определения коэффициента поперечного сдвига, помимо формулы (19), имеются другие предложения. Так, согласно Э. Рейсснеру,  $\varkappa = 5/6$ , согласно Р. Миндлину,  $\varkappa = \pi^2/12$ .

 $<sup>^7</sup>$ Например, выражение  $oldsymbol{arepsilon}$ :  $oldsymbol{arepsilon}$ : в компонентной записи может быть представлено следующим образом:



Полученное соотношение можно упростить. Действительно, в силу специальной структуры тензора G имеют место равенства:

$$\begin{split} \int\limits_0^t \operatorname{def} \mathfrak{u} \, d\tau \colon & G \colon \operatorname{def} \mathfrak{v} = \int\limits_0^t \operatorname{def} \mathfrak{u} \, d\tau \colon \operatorname{def} \mathfrak{v}, \quad \int\limits_0^t \operatorname{def} \mathfrak{v} \, d\tau \colon & G \colon \operatorname{def} \mathfrak{v} = \int\limits_0^t \operatorname{def} \mathfrak{v} \, d\tau \colon \operatorname{def} \mathfrak{v}, \\ \int\limits_0^t \operatorname{def} \mathfrak{u} \, d\tau \colon & G \colon \left( \mathfrak{v} \otimes e^{\zeta} + e^{\zeta} \otimes \mathfrak{v} \right) = \varkappa \int\limits_0^t \operatorname{def} \mathfrak{u} \, d\tau \colon \left( \mathfrak{v} \otimes e^{\zeta} + e^{\zeta} \otimes \dot{\mathfrak{v}} \right), \\ \int\limits_0^t \left( \mathfrak{v} \otimes e^{\zeta} + e^{\zeta} \otimes \mathfrak{v} \right) \colon & G \colon \left( \mathfrak{v} \otimes e^{\zeta} + e^{\zeta} \otimes \mathfrak{v} \right) = 2\varkappa \int\limits_0^t \mathfrak{v} \, d\tau \cdot \mathfrak{v}. \end{split}$$

Окончательно приходим к следующему разложению:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \colon \boldsymbol{G} \colon \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \int\limits_0^t \mathbf{defu} \, d\tau \colon \boldsymbol{G} \colon \mathbf{defu} + \frac{\varkappa}{2} \left( \int\limits_0^t \mathbf{defu} \, d\tau \colon (\boldsymbol{\mathfrak{v}} \otimes \boldsymbol{e}^{\zeta} + \boldsymbol{e}^{\zeta} \otimes \boldsymbol{\mathfrak{v}}) + \int\limits_0^t (\boldsymbol{\mathfrak{v}} \otimes \boldsymbol{e}^{\zeta} + \boldsymbol{e}^{\zeta} \otimes \boldsymbol{\mathfrak{v}}) \, d\tau \colon \mathbf{defu} + \int\limits_0^t \boldsymbol{\mathfrak{v}} \, d\tau \cdot \boldsymbol{\mathfrak{v}} \right) + \zeta \left( \int\limits_0^t \mathbf{defv} \, d\tau \colon \mathbf{defu} + \int\limits_0^t \mathbf{defu} \, d\tau \colon \mathbf{defv} \right) + \zeta^2 \int\limits_0^t \mathbf{defv} \, d\tau \colon \mathbf{defv}.$$

Аналогичные преобразования позволяют получить разложения для члена  $E\!:\!arepsilon\,E\!:\!\dot{arepsilon}$ , т.е.

$$\boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon} \, \boldsymbol{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \int_{0}^{t} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{u}} \, d\tau \, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{u}} + \zeta \left( \int_{0}^{t} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{v}} \, d\tau \, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{u}} + \int_{0}^{t} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{u}} \, d\tau \, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{v}} \right) + \zeta^{2} \int_{0}^{t} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{v}} \, d\tau \, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{v}}.$$

Наконец слагаемые, соответствующие инерциальным и массовым силам, допускают разложение

$$v \cdot \dot{v} = u \cdot \dot{u} + \zeta (u \cdot \dot{v} + \dot{u} \cdot v) + \zeta^2 v \cdot \dot{v}, \qquad K \cdot v = K \cdot u + \zeta K \cdot v.$$

В результате подстановки полученных соотношений в формулу (20) и перегруппировки слагаемых приходим к следующему разложению плотности  $\mathcal{L}_{\text{mech}}$ :

$$\begin{split} \mathscr{L}_{\mathrm{mech}} &= \frac{\rho}{2} \left\langle \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}} \right\rangle - \rho \left\langle \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \right\rangle + \left\langle \int\limits_{0}^{t} \mathscr{M}[\mathbf{defu}] \, d\tau : \mathbf{G} : \mathbf{defu} \right\rangle + \frac{\varkappa}{2} \left\langle \int\limits_{0}^{t} \mathscr{M}[\mathbf{defu}] \, d\tau : \left\langle \mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^{\zeta} + \mathbf{e}^{\zeta} \otimes \mathbf{v} \right\rangle \right\rangle + \\ &+ \frac{\varkappa}{2} \left\langle \int\limits_{0}^{t} \mathscr{M} \left[ \mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^{\zeta} + \mathbf{e}^{\zeta} \otimes \mathbf{v} \right] \, d\tau : \mathbf{defu} \right\rangle + \left\langle \int\limits_{0}^{t} \mathscr{M}[\mathbf{v}] \, d\tau \cdot \mathbf{v} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \int\limits_{0}^{t} \mathscr{L}[\nabla \cdot \mathbf{u}] \, d\tau, \nabla \cdot \mathbf{u} \right\rangle + \\ &+ \zeta \left\{ \frac{\rho}{2} \left( \left\langle \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{v}} \right\rangle + \left\langle \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \right\rangle \right) - \rho \left\langle \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} \right\rangle + \left\langle \int\limits_{0}^{t} \mathscr{M}[\mathbf{defv}] \, d\tau : \mathbf{defu} \right\rangle + \left\langle \mathbf{defv} : \int\limits_{0}^{t} \mathscr{M}[\mathbf{defu}] \, d\tau \right\rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \left\langle \int\limits_{0}^{t} \mathscr{L}[\nabla \cdot \mathbf{u}] \, d\tau, \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \nabla \cdot \mathbf{u}, \int\limits_{0}^{t} \mathscr{L}[\nabla \cdot \mathbf{v}] \, d\tau \right\rangle \right\} + \\ &+ \zeta^{2} \left\{ \frac{\rho}{2} \left\langle \int\limits_{0}^{t} \mathbf{v} \, d\tau \cdot \mathbf{v} \right\rangle + \left\langle \int\limits_{0}^{t} \mathscr{M}[\mathbf{defv}] \, d\tau : \mathbf{defv} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \int\limits_{0}^{t} \mathscr{L}[\nabla \cdot \mathbf{v}] \, d\tau, \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle \right\}. \end{split}$$

Для представления плотности  $\mathcal{L}_{\mathrm{therm}}$  в форме разложения по  $\zeta$  предварительно преобразуем следующие выражения:

$$\left\langle \varpi,\theta\right\rangle =\left\langle \varpi,\mathfrak{a}\right\rangle +\zeta\left\langle \varpi,\mathfrak{b}\right\rangle ,\qquad \left\langle \theta,\dot{\theta}\right\rangle =\left\langle \mathfrak{a},\dot{\mathfrak{a}}\right\rangle +\zeta\left(\left\langle \mathfrak{a},\dot{\mathfrak{b}}\right\rangle +\left\langle \dot{\mathfrak{a}},\mathfrak{b}\right\rangle \right) +\zeta^{2}\left\langle \mathfrak{b},\dot{\mathfrak{b}}\right\rangle .$$



Поскольку градиент температуры допускает разложение  $\nabla \theta = \nabla (\mathfrak{a} + \zeta \mathfrak{b}) = \nabla \mathfrak{a} + \zeta \nabla \mathfrak{b} + e^{\zeta} \mathfrak{b}$ , то его конволютивный квадрат может быть представлен в виде

$$\langle \nabla \theta \cdot \nabla \theta \rangle = \langle \nabla \mathfrak{a} \cdot \nabla \mathfrak{a} \rangle + 2\zeta \langle (\nabla \mathfrak{a} + e^{\zeta} \mathfrak{b}) \cdot \nabla \mathfrak{b} \rangle + \zeta^2 \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle,$$

а так как в силу принятых гипотез  $e^{\zeta} \cdot \nabla \mathfrak{b} = 0$ , то  $\langle \nabla \theta \cdot \nabla \theta \rangle = \langle \nabla \mathfrak{a} \cdot \nabla \mathfrak{a} \rangle + 2\zeta \langle \nabla \mathfrak{a} \cdot \nabla \mathfrak{b} \rangle + \zeta^2 \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle$ . Таким образом, имеем разложение для плотности  $\mathscr{L}_{\text{therm}}$ :

$$\mathcal{L}_{\text{therm}} = \langle \boldsymbol{\varpi}, \boldsymbol{\mathfrak{a}} \rangle - \frac{c}{2} \langle \boldsymbol{\mathfrak{a}}, \dot{\boldsymbol{\mathfrak{a}}} \rangle - \frac{k}{2} \langle \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\mathfrak{a}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\mathfrak{a}} \rangle + \zeta \left\{ \langle \boldsymbol{\varpi}, \boldsymbol{\mathfrak{b}} \rangle - \frac{c}{2} \langle \boldsymbol{\mathfrak{a}}, \dot{\boldsymbol{\mathfrak{b}}} \rangle - \frac{c}{2} \langle \dot{\boldsymbol{\mathfrak{a}}}, \boldsymbol{\mathfrak{b}} \rangle - k \langle \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\mathfrak{a}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\mathfrak{b}} \rangle \right\} - \zeta^2 \left\{ \frac{c}{2} \langle \boldsymbol{\mathfrak{b}}, \dot{\boldsymbol{\mathfrak{b}}} \rangle + \frac{k}{2} \langle \boldsymbol{\mathfrak{b}}, \boldsymbol{\mathfrak{b}} \rangle \right\}.$$

Наконец, плотность  $\mathscr{L}_{\mathrm{inter}}$  может быть сформулирована следующим образом:

$$\mathscr{L}_{\text{inter}} = -\beta \left\langle \left( \mathfrak{a} + \zeta \mathfrak{b} \right), \left( \nabla \cdot \mathfrak{u} + \zeta \cdot \mathfrak{v} \right) \right\rangle = -\beta \left\langle \mathfrak{a}, \nabla \cdot \mathfrak{u} \right\rangle - \zeta \beta \left( \left\langle \mathfrak{b}, \nabla \cdot \mathfrak{u} \right\rangle + \left\langle \mathfrak{a}, \nabla \cdot \mathfrak{v} \right\rangle \right) - \zeta^2 \beta \left\langle \mathfrak{b}, \nabla \cdot \mathfrak{v} \right\rangle.$$

Здесь и далее для краткости будем полагать, что начальные ускорения (и другие старшие производные по времени) равны нулю. Учет ненулевых начальных значений этих полей приводит к дополнительным слагаемым, вид которых подобен соответствующим членам функционала (11).

В результате подстановки полученных выражений в соотношение для функционала (11), приходим к интегралу по объему V от многочлена третьей степени по переменной  $\zeta$ . Это позволяет осуществить редукцию функционала, вычисляя интеграл по переменной  $\zeta$  явно. Громоздкость результата зависит от выбора поверхности осреднения. Выберем поверхность так, чтобы она была эквидистантна лицевым поверхностям. Тогда члены с нечетными степенями  $\zeta$  исчезнут. Таким образом, функционал (11) после интегрирования по координате  $\zeta$  принимает вид

$$\mathcal{F}_{\text{red}} = \int_{\Omega} \left\{ \frac{h\rho}{2} \langle \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}} \rangle - h\rho \langle \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \rangle + h \left\langle \int_{0}^{t} \mathcal{M}[\operatorname{def}\mathbf{u}] \, d\tau : \mathbf{G} : \operatorname{def}\mathbf{u} \right\rangle + \right. \\ \left. + \frac{\varkappa}{2} \left\langle \int_{0}^{t} \mathcal{M}[\operatorname{def}\mathbf{u}] \, d\tau : \left( \mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^{\zeta} + \mathbf{e}^{\zeta} \otimes \mathbf{v} \right) \right\rangle + \frac{\varkappa}{2} \left\langle \int_{0}^{t} \mathcal{M}\left[ \mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^{\zeta} + \mathbf{e}^{\zeta} \otimes \mathbf{v} \right] \, d\tau : \operatorname{def}\mathbf{u} \right\rangle + \\ \left. + \left\langle \int_{0}^{t} \mathcal{M}[\mathbf{v}] \, d\tau \cdot \mathbf{v} \right\rangle + \frac{h}{2} \left\langle \int_{0}^{t} \mathcal{L}[\nabla \cdot \mathbf{u}] \, d\tau, \nabla \cdot \mathbf{u} \right\rangle + h \left\langle \varpi, \mathfrak{a} \right\rangle - \frac{hc}{2} \left\langle \mathfrak{a}, \dot{\mathfrak{a}} \right\rangle - \frac{hk}{2} \left\langle \nabla \mathfrak{a} \cdot \nabla \mathfrak{a} \right\rangle - h\beta \left\langle \mathfrak{a}, \nabla \cdot \mathbf{u} \right\rangle + \\ \left. + \frac{h^{3}\rho}{24} \left\langle \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \right\rangle + \frac{h^{3}}{12} \left\langle \int_{0}^{t} \mathcal{M}[\operatorname{def}\mathbf{v}] \, d\tau : \operatorname{def}\mathbf{v} \right\rangle + \frac{h^{3}}{24} \left\langle \int_{0}^{t} \mathcal{L}[\nabla \cdot \mathbf{v}] \, d\tau, \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle - \frac{h^{3}c}{24} \left\langle \mathfrak{b}, \dot{\mathfrak{b}} \right\rangle + \\ \left. + \frac{h^{3}k}{24} \left\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \right\rangle - \frac{h^{3}\beta}{12} \left\langle \mathfrak{b}, \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle - \frac{h\rho}{2} \mathbf{u}(T) \cdot \mathbf{u}_{0} - \frac{h^{3}\rho}{24} \mathbf{v}(T) \cdot \mathbf{v}_{0} + \frac{hc}{2} \mathfrak{a}(T) \mathfrak{a}_{0} + \frac{h^{3}c}{24} \mathfrak{b}(T) \mathfrak{b}_{0} \right\} dA. \tag{22}$$

Итак, вариационная формулировка для термовязкоупругих тонкостенных конструкций определяется функционалом (22).

В результате варьирования функционала (22) и используя дивергентную теорему Остроградского – Гаусса в отношении пространственных переменных и интегрирование по частям в отношении переменной t, приходим к следующему выражению:

Mexaнnкa 71



$$+ \left\langle \left( \frac{h^3 \rho}{12} \dot{\mathbf{v}} + \int_0^t \left[ 2h \varkappa \mathscr{M} [\mathbf{defu}] \cdot e^{\zeta} + 2h \mu \mathbf{v} - \frac{h^3}{6} \nabla \cdot \mathscr{M} [\mathbf{defv}] - \frac{h^3}{12} \nabla \mathscr{L} [\nabla \cdot \mathbf{v}] \right] d\tau + \frac{h^3 \beta}{12} \nabla \mathbf{b} \right) \cdot \delta \mathbf{v} \right\rangle + \\ + \left\langle \left( h \varpi - h c \dot{\mathbf{a}} + h k \nabla^2 \mathbf{a} - h \beta \nabla \cdot \mathbf{u} \right), \delta \mathbf{a} \right\rangle + \left\langle \left( -\frac{h^3 c}{12} \dot{\mathbf{b}} + \frac{h^3 k}{12} \nabla^2 \mathbf{b} - \frac{h^3 \beta}{12} \nabla \cdot \mathbf{v} \right), \delta \mathbf{b} \right\rangle - \\ - \frac{h \rho}{2} \delta \mathbf{u}(T) \cdot (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}(0)) - \frac{h^3 \rho}{24} \delta \mathbf{v}(T) \cdot (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}(0)) + \frac{h c}{2} \delta \mathbf{a}(T) (\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}(0)) + \frac{h^3 c}{24} \delta \mathbf{b}(T) (\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}(0)) \right\} dA.$$

В силу свойства отделимости конволюции (3) получаем уравнения Эйлера - Лагранжа:

$$h\rho\left[\dot{\mathbf{u}}-\boldsymbol{K}\right] - \int_{0}^{t} h\left[2\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathcal{M}}\left[\operatorname{def}\mathbf{u}\right]:\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathcal{M}}\left[\mathbf{v}\otimes\boldsymbol{e}^{\zeta}+\boldsymbol{e}^{\zeta}\otimes\mathbf{v}\right] + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{L}}\left[\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}\right]\right] d\tau + h\beta\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\mathfrak{a}} = \mathbf{0},$$

$$\frac{h^{3}\rho}{12}\dot{\mathbf{v}} + \int_{0}^{t} \left[2h\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\mathcal{M}}\left[\operatorname{def}\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{e}^{\zeta}+\mathbf{v}\right] - \frac{h^{3}}{6}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathcal{M}}\left[\operatorname{def}\mathbf{v}\right] - \frac{h^{3}}{12}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{L}}\left[\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}\right]\right] d\tau + \frac{h^{3}\beta}{12}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\mathfrak{b}} = \mathbf{0},$$

$$h\boldsymbol{\varpi} - hc\dot{\mathbf{a}} + hk\boldsymbol{\nabla}^{2}\boldsymbol{\mathfrak{a}} - h\beta\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0,$$

$$-\frac{h^{3}c}{12}\dot{\mathbf{b}} + \frac{h^{3}k}{12}\boldsymbol{\nabla}^{2}\boldsymbol{\mathfrak{b}} - \frac{h^{3}\beta}{12}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0,$$
(23)

естественные краевые условия ( $\mathcal{E} = e^{lpha} \otimes e_{lpha} + e^{eta} \otimes e_{eta}$ ):

$$\mathcal{N} \cdot \left( \int_{0}^{t} h \left[ 2 \mathscr{M}[\mathbf{defu}] : \mathbf{G} + \varkappa \mathscr{M} \left[ \mathbf{v} \otimes \mathbf{e}^{\zeta} + \mathbf{e}^{\zeta} \otimes \mathbf{v} \right] + \mathscr{L}[\nabla \cdot \mathbf{u}] \mathcal{E} \right] d\tau - h \beta \mathfrak{a} \mathcal{E} \right) \bigg|_{\Gamma} = \mathbf{0},$$

$$\mathcal{N} \cdot \left( \int_{0}^{t} \frac{h^{3}}{12} \left[ 2 \mathscr{M}[\mathbf{defv}] + \mathscr{L}[\nabla \cdot \mathbf{v}] \mathcal{E} \right] d\tau - \frac{h^{3} \beta}{12} \mathfrak{b} \mathcal{E} \right) \bigg|_{\Gamma} = \mathbf{0}, \quad \mathcal{N} \cdot \nabla \mathfrak{a} |_{\Gamma} = 0, \quad \mathcal{N} \cdot \nabla \mathfrak{b} |_{\Gamma} = 0$$

и начальные условия

$$|\mathfrak{u}|_{t=0} = \mathfrak{u}_0, \quad \mathfrak{v}|_{t=0} = \mathfrak{v}_0, \quad \mathfrak{a}|_{t=0} = \mathfrak{a}_0, \quad \mathfrak{b}|_{t=0} = \mathfrak{b}_0, \quad \dot{\mathfrak{u}}|_{t=0} = 0, \quad \dot{\mathfrak{v}}|_{t=0} = 0, \dots$$

Подчеркнем, что, в отличие от классических вариационных принципов (таких как принцип Остроградского – Гамильтона) начальные условия, так же как и краевые, непосредственно вытекают из вариационной постановки.

### 3. ТРЕХСЛОЙНЫЕ ТОНКОСТЕННЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Для вывода уравнений движения и теплопроводности трехслойных тонкостенных конструкций принимаем следующие допущения. Толщина среднего слоя  $h_1$  значительно превосходит толщины внешних слоев  $(h_2,h_3)$ . Средний слой рассматривается в постановке теории Миндлина – Рейсснера, внешние слои рассматриваются в постановке мембранной теории. Деформирование всего пакета слоев удовлетворяет гипотезе ломаной нормали.

Принимая во внимание указанные гипотезы, представим скорости и температуру внутреннего (1) и внешних слоев (2,3) в форме следующих разложений:

$$v^1 = \mathbf{u} + \zeta \mathbf{v},$$
  $v^2 = \mathbf{u} - h_- \mathbf{v},$   $v^3 = \mathbf{u} + h_+ \mathbf{v},$   $\mathbf{v} \cdot e^{\zeta} = 0;$   $\theta^1 = \mathbf{a} + \zeta \mathbf{b},$   $\theta^2 = \mathbf{a} - h_- \mathbf{b},$   $\theta^3 = \mathbf{a} + h_+ \mathbf{b}.$ 

Здесь  $h_+$ ,  $h_-$  — расстояния от поверхности осреднения до внешних лицевых поверхностей тонкостенной конструкции.

Разложения тензора деформаций по переменной  $\zeta$ , соответствующие внешним и внутреннему слоям, могут быть представлены следующим образом:

$$\varepsilon^{k} = \int_{0}^{t} \mathbf{def} \boldsymbol{v}^{k}(\tau) d\tau, \qquad \mathbf{def} \boldsymbol{v}^{1} = \mathbf{def} \boldsymbol{\mathfrak{u}} + \zeta \mathbf{def} \boldsymbol{\mathfrak{v}} + \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{\mathfrak{v}} \otimes \boldsymbol{e}^{\zeta} + \boldsymbol{e}^{\zeta} \otimes \boldsymbol{\mathfrak{v}} \right),$$

$$\mathbf{def} \boldsymbol{v}^{2,3} = \mathbf{def} \boldsymbol{\mathfrak{u}} \mp h_{\mp} \mathbf{def} \boldsymbol{\mathfrak{v}}. \tag{24}$$



Принимая во внимание соотношения (24), приходим к следующему выражению для плотности  $\mathcal{L}_{mech}$ :

$$\mathcal{L}_{\text{mech}} = \frac{1}{2} \Big( \rho^{1} \langle \boldsymbol{v}^{1} \cdot \dot{\boldsymbol{v}}^{1} \rangle - 2\rho^{1} \langle \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{v}^{1} \rangle + 2\mu^{1} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{1} : \boldsymbol{G} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{1} \rangle + \lambda^{1} \langle \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^{1}, \boldsymbol{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{1} \rangle + \\ + \rho^{2} \langle \boldsymbol{v}^{1} \cdot \dot{\boldsymbol{v}}^{2} \rangle - 2\rho^{2} \langle \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{v}^{2} \rangle + 2\mu^{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{2} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{2} \rangle + \lambda^{2} \langle \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^{2}, \boldsymbol{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{2} \rangle + \\ + \rho^{3} \langle \boldsymbol{v}^{3} \cdot \dot{\boldsymbol{v}}^{3} \rangle - 2\rho^{3} \langle \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{v}^{3} \rangle + 2\mu^{3} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{3} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{3} \rangle + \lambda^{3} \langle \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^{3}, \boldsymbol{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{3} \rangle \Big).$$
 (25)

Подобные разложения получаются для плотностей  $\mathcal{L}_{\text{therm}}$  и  $\mathcal{L}_{\text{inter}}$  (верхний индекс в обозначениях материальных констант соответствует номеру слоя). Выражение для функционала (22), соответствующие уравнения Эйлера – Лагранжа, краевые и начальные условия аналогичны соотношениям, полученным в предыдущем разделе.

## 4. ПЛАСТИНЫ

Если кривизна поверхности осреднения равна нулю (т.е. тонкостенная конструкция представляет собой пластину), то вариационная формулировка и соответствующие ей уравнения движения и теплопроводности существенно упрощаются. Действительно, поскольку базисный вектор  $e^{\zeta}$  не зависит от координат, то оказывается справедливым соотношение  $\nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes e^{\zeta} + e^{\zeta} \otimes \mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{v} e^{\zeta}$ . Если, кроме того, принимать во внимание только поперечное нагружение, задаваемое функцией  $q = q(\alpha, \beta)$ ,  $K = \frac{q}{h\rho}e^{\zeta}$ , и только неравномерный нагрев, т.е. полагать, что  $\mathfrak{a} = 0$ ,  $\mathfrak{b} \neq 0$ ;  $\theta = \vartheta + \zeta \mathfrak{b}$ , то, как легко убедиться, имеют место равенства:

$$\mathfrak{u} = we^{\zeta}, \qquad 2\nabla \cdot \operatorname{def}\mathfrak{u} : G = \varkappa (\nabla^2 w) e^{\zeta}, \qquad \nabla \cdot \mathfrak{u} = 0, \qquad 2\operatorname{def}\mathfrak{u} \cdot e^{\zeta} = \nabla w,$$

а полная система уравнений (23) редуцируется к следующей системе четырех уравнений

$$h\rho\dot{w} - q - h\varkappa \int_{0}^{t} \mathscr{M} \left[ \nabla^{2}w + \nabla \cdot \mathbf{v} \right] d\tau = 0,$$

$$\frac{h^{3}\rho}{12}\dot{\mathbf{v}} + \int_{0}^{t} \left[ h\varkappa \mathscr{M} \left[ \nabla w + \mathbf{v} \right] - \frac{h^{3}}{6} \nabla \cdot \mathscr{M} \left[ \mathbf{def} \mathbf{v} \right] - \frac{h^{3}}{12} \nabla \mathscr{L} \left[ \nabla \cdot \mathbf{v} \right] \right] d\tau + \frac{h^{3}\beta}{12} \nabla \mathbf{b} = \mathbf{0}, \tag{26}$$

$$\frac{h^{3}k}{12} \nabla^{2} \mathbf{b} - \frac{h^{3}c}{12} \dot{\mathbf{b}} - \frac{h^{3}\beta}{12} \nabla \cdot \mathbf{v} + \omega = 0.$$

Краевые условия при этом принимают вид

$$\mathcal{N} \cdot \left( \int_{0}^{t} \mathscr{M} \left[ \nabla w + \mathbf{v} \right] d\tau \right) \bigg|_{\Gamma_{1}} = \mathbf{0}, \quad w|_{\Gamma_{2}} = \mathbf{0}; \quad \Gamma_{1} \cup \Gamma_{2} = \Gamma,$$

$$\mathcal{N} \cdot \left( \int_{0}^{t} \left[ 2\mathscr{M} \left[ \operatorname{def} \mathbf{v} \right] + \mathscr{L} \left[ \nabla \cdot \mathbf{v} \right] \mathcal{E} \right] d\tau - \beta \mathfrak{b} \mathcal{E} \right) \bigg|_{\Gamma_{3}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}|_{\Gamma_{4}} = \mathbf{0}; \quad \Gamma_{3} \cup \Gamma_{4} = \Gamma,$$

$$\mathcal{N} \cdot \nabla \mathfrak{b}|_{\Gamma_{5}} = 0, \quad \mathfrak{b}|_{\Gamma_{6}} = 0; \quad \Gamma_{3} \cup \Gamma_{4} = \Gamma.$$
(27)

Здесь  $\mathcal{N}$  — внешняя единичная нормаль к границе, которая представляет собой кусочно-гладкую кривую, лежащую в плоскости осреднения ( $\mathcal{N}\cdot e^{\zeta}=0$ ). Укажем канонические способы опирания. Если  $\Gamma_1=\Gamma_3=\emptyset$ ,  $\Gamma_2=\Gamma_4=\Gamma$ , то краевые условия соответствуют жесткому закреплению пластины на опорном контуре, если  $\Gamma_1=\Gamma_4=\emptyset$ ,  $\Gamma_2=\Gamma_3=\Gamma$ , то они соответствуют шарнирному опиранию, если  $\Gamma_5=\emptyset$ ,  $\Gamma_6=\Gamma$ , граница изотермическая, если  $\Gamma_6=\emptyset$ ,  $\Gamma_5=\Gamma$ , граница теплоизолированная.

Отметим, что второе уравнение системы (26) может быть записано в следующей эквивалентной форме

$$\frac{h^3\rho}{12}\dot{\mathfrak{v}} + \int\limits_0^t \left[h\varkappa\mathscr{M}\left[\nabla w + \mathfrak{v}\right] - \frac{h^3}{12}\mathscr{M}\left[\nabla^2\mathfrak{v}\right] - \frac{h^3}{12}\left(\mathscr{M} + \mathscr{L}\right)\left[\nabla\otimes\nabla\cdot\mathfrak{v}\right]\right]\,d\tau + \frac{h^3\beta}{12}\nabla\mathfrak{b} = \mathbf{0}.$$

Механика 73



Следует также отметить, что если в уравнениях (26) и краевых условиях (27) положить N=0 (т.е. считать отличными от нуля только упругие модули Ламе) и  $\beta=0$  (т.е. пренебрегать эффектом связанности тепловых и деформационных полей), то они преобразуются к известным уравнениям теории пластин с конечной сдвиговой жесткостью (теории Миндлина – Рейсснера)<sup>8</sup>.

Для анализа полученных уравнений их целесообразно представить в безразмерной форме. Для этой цели введем безразмерные пространственные координаты и время  $\tilde{\alpha}=\frac{\alpha}{R},\ \tilde{\beta}=\frac{\beta}{R},\ \tilde{t}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}\frac{t}{R},\ a$  также безразмерные скорости и приращение температуры  $\tilde{w}=\sqrt{\frac{\rho}{\mu_0}}w,\ \tilde{\mathbf{v}}=\sqrt{\frac{\rho}{\mu_0}}\mathbf{v},\ \tilde{\mathbf{b}}=\frac{\mathbf{b}h}{\vartheta}.$  Здесь R-характерный размер пластины.

В безразмерных переменных уравнения принимают вид

$$\mathcal{A}\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\tilde{w} - \tilde{q} - \mathcal{M}\int_{0}^{\tilde{t}} \left[\tilde{\boldsymbol{\nabla}}^{2}\tilde{w} + \tilde{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\boldsymbol{v}\right] d\tau = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\boldsymbol{v} + \int_{0}^{\tilde{t}} \left[\mathcal{B}\left(\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\tilde{w} + \boldsymbol{v}\right) - \mathcal{C}\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\otimes\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\boldsymbol{v} - \mathcal{M}\tilde{\boldsymbol{\nabla}}^{2}\boldsymbol{v}\right] d\tau + \mathcal{D}\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{0},$$

$$\tilde{\boldsymbol{\nabla}}^{2}\tilde{\boldsymbol{b}} - \mathcal{E}\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\tilde{\boldsymbol{b}} - \mathcal{F}\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\boldsymbol{v} + \tilde{\omega} = 0.$$
(28)

Здесь введены безразмерная нагрузка  $\tilde{q}$  и безразмерная удельная мощность источников тепла  $\tilde{\omega}$ :

$$\tilde{q} = \frac{R}{\mu_0 h} q, \qquad \tilde{\omega} = \frac{12R^2}{h\vartheta k} \omega.$$

Краевые условия могут быть записаны в безразмерной форме следующим образом:

$$\begin{split} \tilde{\mathcal{N}} \cdot \left( \int_{0}^{t} \mathcal{M} \left[ \tilde{\nabla} \tilde{w} + \mathfrak{v} \right] \, d\tau \right) \bigg|_{\tilde{\Gamma}_{1}} &= \mathbf{0}, \qquad \tilde{w} = \mid_{\tilde{\Gamma}_{2}} = \mathbf{0}; \qquad \tilde{\Gamma}_{1} \cup \tilde{\Gamma}_{2} = \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{\mathcal{N}} \cdot \left( \int_{0}^{\tilde{t}} \left[ 2 \mathcal{M} d\tilde{\mathbf{e}} \mathbf{f} \mathbf{v} + \mathcal{L} \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{v} \tilde{\mathcal{E}} \right] \, d\tau - \tilde{\beta} \tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathcal{E}} \right) \bigg|_{\Gamma_{3}} &= \mathbf{0}, \qquad \mathfrak{v} = \mid_{\tilde{\Gamma}_{4}} = \mathbf{0}; \qquad \tilde{\Gamma}_{3} \cup \tilde{\Gamma}_{4} = \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{\mathcal{N}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{b}} \bigg|_{\Gamma_{5}} &= 0, \qquad \tilde{\mathfrak{b}} \bigg|_{\tilde{\Gamma}_{6}} &= 0; \qquad \tilde{\Gamma}_{3} \cup \tilde{\Gamma}_{4} = \tilde{\Gamma}, \end{split}$$

где  $\tilde{\Gamma}_k$ ,  $k=1,2,\ldots,6$  — части образа  $\tilde{\Gamma}$  границы пластины в плоскости безразмерных координат  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$ ;  $\tilde{\mathcal{N}}$  — внешняя единичная нормаль к  $\tilde{\Gamma}$ .

В уравнениях (28) введены безразмерные параметры:

$$\mathcal{A} = 1/\varkappa, \qquad \mathcal{D} = \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha\vartheta R}{\mu h}, \qquad \mathcal{E} = \frac{Rc\sqrt{\mu}}{k\sqrt{\rho}}, \qquad \mathcal{F} = \frac{h(3\lambda + 2\mu)\alpha\sqrt{\mu}}{k\sqrt{\rho}},$$

и операторы с безразмерными коэффициентами:

$$\mathcal{M} = \sum_{k=-N}^{N} \frac{\mu_k}{\mu_0} D^k, \qquad \mathcal{B} = \frac{12\varkappa R^2}{h^2} \mathcal{M}, \qquad \mathcal{C} = \sum_{k=-N}^{N} \frac{\lambda_k + \mu_k}{\mu_0} D^k, \qquad \mathcal{L} = \sum_{k=-N}^{N} \frac{\lambda_k}{\lambda_0} D^k.$$

Если рассматривать термоупругие пластины (положить N=0), то записанные выше операторы трансформируются в постоянные коэффициенты

$$\mathcal{M} = 1, \qquad \mathcal{B} = \frac{12\varkappa R^2}{h^2}, \qquad \mathcal{C} = \sum_{k=-N}^{N} \frac{\lambda_0 + \mu_0}{\mu_0}, \qquad \mathcal{L} = 1.$$

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Вместе с тем основные уравнения теории пластин с конечной сдвиговой жесткостью были получены Я.С. Уфляндом в 1948 г., т.е. существенно раньше работ Миндлина и Рейсснера (Уфлянд Я.С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // ПММ. 1948. Т. 12, вып. 3).



Далее рассматриваем только безразмерные уравнения и для сокращения записи надстрочный знак тильды будем опускать.

Уравнения (28) могут быть сведены к каноническим уравнениям волнового типа, если ввести два скалярных потенциала  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\alpha, \beta)$ ,  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\alpha, \beta)$ , связав их с выражением для перемещений посредством соотношений:

$$w = (\mathcal{C} + \mathcal{M}) \nabla^2 \dot{\mathcal{G}} - \mathcal{B} \dot{\mathcal{G}} - \ddot{\mathcal{G}}, \qquad \mathfrak{v} = \mathcal{S} \cdot \nabla \dot{\mathcal{U}} + \mathcal{B} \nabla \dot{\mathcal{G}}. \tag{29}$$

Здесь S тензор, такой что  $\nabla \cdot S \cdot \nabla = 0$ . Подстановка выражений (29) в уравнения движения и теплопроводности приводит к системе уравнений относительно потенциалов, которая, очевидно, является линейной системой с постоянными коэффициентами, сформулированной в терминах оператора Лапласа (разумеется, сам оператор Лапласа может содержать переменные коэффициенты). Преимущество подобной формулировки начально-краевой задачи состоит в том, что порождающие ее уравнения формально имеют постоянные коэффициенты, и потому ее решение сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений и канонической краевой задачи для волнового уравнения, решения которой для канонических областей хорошо известны и записываются в терминах табулированных специальных функций.

Решение неоднородной краевой задачи (соответствующее вынужденным колебаниям пластины) может быть получено, например, в форме разложений по биортогональной системе собственных функций [20, 21]. В настоящей работе рассмотрим наиболее простой пример решения однородной задачи, которая соответствует собственным колебаниям.

Пусть рассматривается эллиптическая пластина. В качестве координатной системы выберем координаты эллиптического цилиндра  $\{\phi,\varphi,\zeta\}$ , которые связаны с декартовыми координатами  $\{x,y,z\}$  следующими соотношениями:  $x=\cosh\phi\cos\varphi,\ y=\sinh\phi\sin\varphi,\ z=\zeta.$ 

Уравнение Гельмгольца в эллиптических координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \mathcal{V} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \mathcal{V} + \left(\sinh^2 \phi + \sin^2 \varphi\right) \zeta \mathcal{V} = 0. \tag{30}$$

Решения уравнения (30), обращающиеся в нуль на эллиптической границе, могут быть представлены формулами

$$\mathcal{V} = C(q, \zeta/4, i\phi) C(q, \zeta/4, \varphi), \qquad i = \sqrt{-1},$$

где C(a,q;z) — функции Матье; a — характеристическое значение, q — параметр функции Матье. Параметры  $\zeta$  находятся как корни трансцендентного уравнения

$$C(q[n, \zeta/4], \zeta/4, i) = 0.$$

Используя построенные решения как решения уравнения, порождающего систему для потенциалов, не составляет труда найти собственные значения и соответствующие собственные вектор-функции, которые, как показывает непосредственное вычисление, соответствуют шарнирному опиранию пластины на опорном контуре.

Вычисления производились для эллиптической шарнирно закрепленной пластины из алюминия ( $\rho=2699\frac{\mathrm{KF}}{\mathrm{M}^3},\ c=900\frac{\mathrm{Дж}}{\mathrm{K}\Gamma^\circ\mathrm{K}},\ k=210\frac{\mathrm{BT}}{\mathrm{M}^\circ\mathrm{K}},\ \lambda_0=64.29\,\Gamma\Pi\mathrm{a},\ \mu_0=25\,\Gamma\Pi\mathrm{a},\ \mu_1=25\times10^{-3}\,\Gamma\Pi\mathrm{a}$  с,  $\alpha=24\times10^{-6}\,^\circ\mathrm{K}^{-1}$ ). Соотношение длин полуосей принималось равным 3/2. Отношение толщины толщины к длине большей полуоси принималось равным 1/10. Масштаб тела определялся множителем  $R=10^{-5}\mathrm{m}$ . В таблице приведены первые 16 собственных значений. Частоты собственных колебаний (в  $\Gamma$ ц) могут быть вычислены как произведения мнимых частей соответствующих собственных значений на размерный множитель  $9.69\times10^7$ . Отрицательные действительные части характеризуют затухание собственных колебаний, вызванных собственной и термической диссипацией.

$$S = e^{\alpha} \otimes e_{\beta} - e^{\beta} \otimes e_{\alpha}.$$

 $<sup>^9</sup>$ В ряде координатных систем (прямоугольной, кругового цилиндра, эллиптического цилиндра и т.д.) тензор  ${\cal S}$  может быть представлен следующим диадным разложением:



$n \backslash m$	1	2	3	4
1	-0.0000367+0.202 i	-0.000505+1.14 i	-0.00196+2.78 i	-0.00477+4.90 i
2	-0.000118+0.440 i	-0.000816+1.57 i	-0.00262+3.35 i	-0.00585+5.57 i
3	-0.000281+0.779 i	-0.00125+2.07 i	-0.00343+3.98 i	-0.00708+6.28 i
4	-0.000546+1.20 i	-0.00183+2.664 i	-0.00440+4.66 i	-0.00848+7.03 i

На рис. 1, 2 изображены действительные части компонент соответствующих собственных векторфункций, отвечающих поперечным перемещениям (моды на рисунках, так же как и в таблице, нумеруются парами чисел (n,m)). Система собственных функций не является ортогональной, но совместно с собственными функциями сопряженной задачи образует биортогональный базис в пространстве функций, интегрируемых с квадратом, что позволяет представить решение соответствующей неоднородной начально-краевой задачи в форме спектральных разложений [21].

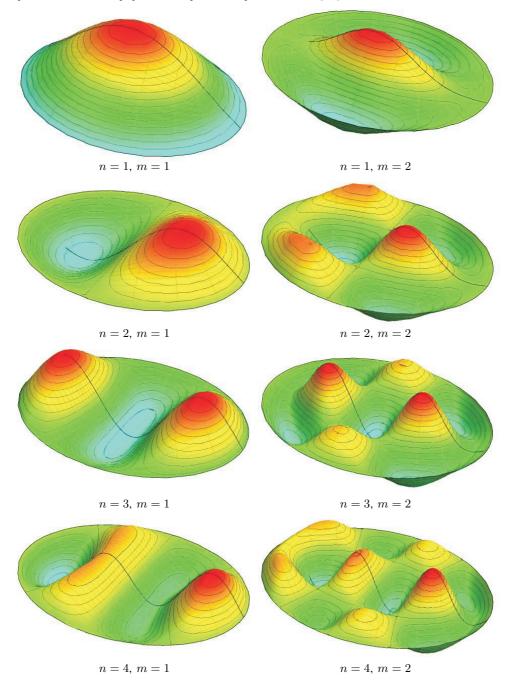


Рис. 1. Собственные формы колебаний эллиптической пластины при m=1,2



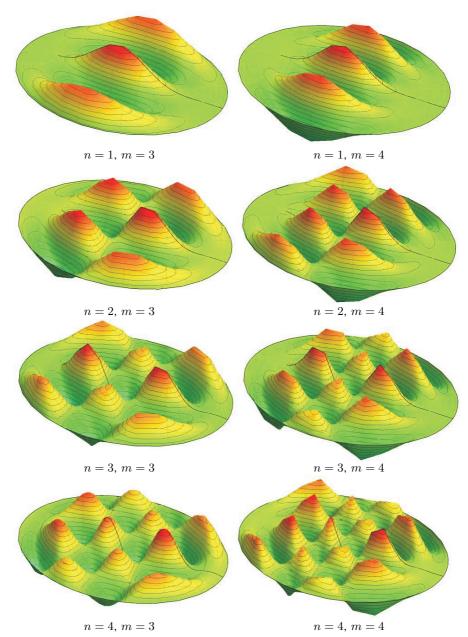


Рис. 2. Собственные формы колебаний эллиптической пластины при m=3,4

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-08-01180а).

### Библиографический список

- 1. Mindlin R.D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates // J. Appl. Mech. 1951. V. 18. P. 31–38.
- 2. Culkovski P.M., Reismann H. The spherical sandwich shell under axisymmetric static and dynamic loading // J. Sound and Vibration. 1971. V. 14,  $\mathbb{N}_{2}$  2. P. 229–240.
- 3. Лизарев А.Д., Ростанина Н.Б. Уравнения свободных колебаний непологих трехслойных сферических оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 4. С. 142–148.
- 4. Сеницкий Ю.Э. Нестационарная задача динамики для трехслойной непологой сферической оболочки//

- Строительная механика и расчет сооружений. 1990. № 6. С. 55–61.
- 5. Сеницкий Ю.Э., Лычев С.А. Динамика трёхслойных сферических оболочек несимметричной структуры// Тр. XVIII Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Саратов, 1997. Т. 1. С. 47–52.
- 6.  $\mathit{Buo}\ \mathit{M}$ . Вариационные принципы в теории теплообмена.  $\mathit{M}$ .: Энергия, 1975. 210 с.
- 7. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир, 1974. 304 с. 8. Циглер  $\Gamma$ . Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. М.: Мир, 1966. 136 с.



- 9. *Лычев С.А., Сайфутдинов Ю.Н.* Уравнения движения трехслойной вязкоупругой сферической оболочки // Вест. Самар. гос. ун-та. Естественно-научная сер. 2005. № 6(40). С. 70–88.
- 10. Gurtin M.E. Variational principles for linear initial-value problems // Quart. Appl. Math. 1964.  $\mathbb{N}_2$  22. P. 252–256.
- 11. *Gurtin M.E.* Variational principles for linear elastodynamics // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964. V. 16, N 1. P. 34–50.
- 12. *Tonti E*. On the variational formulation for linear initial value problems // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 1973. V. 95,  $\mathbb{N}$  1. P. 231–259.
- 13. Belli G., Morosi C. A variational principle for the dynamic problem of linear coupled thermoelasticity // Meccanica. 1974. V. 9,  $\mathbb{N}_{2}$  4. P. 239–243.
- 14. *Manzhirov A.V., Lychev S.A.* Mathematical modeling of growth processes in nature and engineering: A variational approach // J. Phys.: Conf. Ser. 2009. V. 181, 012018. 8 pp.

УДК 621.165:539.4

# ОБОСНОВАНИЕ ВАРИАНТОВ РЕМОНТНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ НАСАДНЫХ ДИСКОВ ТУРБИНЫ ПО ПАРАМЕТРАМ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

В.Н. Шлянников, Р.Р. Яруллин

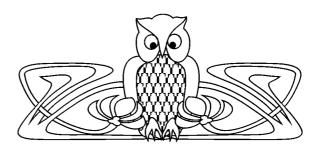
Исследовательский центр проблем энергетики Казанского научного центра РАН

E-mail: shlyannikov@mail.ru, yarullin\_r@mail.ru

Рассмотрено напряженно-деформированное состояние (НДС) насадного диска ротора турбины ВТ-50 для эксплуатационных условий нагружения при воздействии контурной нагрузки и натяга от посадки диска на вал. В результате численного расчета в трехмерной упруго-пластической постановке определены основные высоконагруженные зоны диска. По параметрам НДС дана сравнительная оценка вариантов изменения геометрии диска за счет удаления поврежденного материала в области продольного шпоночного паза.

**Ключевые слова:** диск турбины, шпоночный паз, ремонтные технологии, напряженно-деформированное состояние, остаточная долговечность.

- 15.  $\mathit{Muxлин}\ \mathit{C.\Gamma}$ . Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
- 16. Микусинский Я. Операторное исчисление. М.: Издво иностр. лит-ры, 1956. 366 с.
- 17. *Пелех Б.Л*. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наукова думка, 1973. 248 с.
- 18. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. 253 с.
- 19. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек (Механика твердых деформируемых тел, т. 5). М.: ВИНИТИ, 1973. 272 с.
- 20. Kovalev V.A., Lychev S.A. Nonstationary vibrations of 3-layered thermoviscoelastic thin-walled structures // Proceedings of the XXXVII Summer Scool-Conference «Advanced Problems in Mechanics». St.Peterburg, 2009. P. 380–388.
- 21. *Kovalev V., Lychev S.* Nonsymmetric finite integral transformations and their application in thermoviscoelasticity// Proceedings MATHMOD-09, Vienna. ARGESIM Reports № 35. Vienna, 2009. P. 2604–2607.



### Repair Technology Basis of Turbine Disks by Using Stress-Strain State Parameters

### V.N. Shlyannikov, R.R. Yarullin

Research Center of Power Engineering Problems of the Kazan Science Center RAS

E-mail: shlyannikov@mail.ru, yarullin\_r@mail.ru

Stress-strain state of power steam turbine disks under operation conditions including both contour and tighten loadings is considered. Full-size elastic-plastic stress-strain state analysis of turbine disk for different variants of considering key geometries is represented. As a result of numerical calculations three critical zones of turbine disk are defined. Proposed design modifications and repair technology to existing in-service power steam turbine disks by removing of damaged material volume are analyzed and substantiated on a stress state parameters basis.

**Key words:** turbine disk, key slot, repair technology, stress-strain state, lifetime.

Насадные диски сборного ротора паровой турбины являются сложными объемными телами, имеющими конструктивные концентраторы напряжений в виде шпоночных пазов, разгрузочных и крепежных отверстий, радиусных сопряжений и по своему назначению и условиям эксплуатации являются наиболее напряженными и ответственными элементами теплогенерирующего оборудования [1, 2]. В настоящее время значительная часть роторов паровых турбин близка к исчерпанию паркового ре-



сурса либо полностью его выработала и эксплуатируется на основании индивидуальных решений по фактическому техническому состоянию. Практика эксплуатации роторов большого ресурса показала, что в зонах конструктивной концентрации напряжения появляются и накапливаются повреждения, приводящие к образованию и развитию микро- и макротрещин. В связи с этим актуальной является задача определения сверх паркового ресурса роторов паровых турбин по критериям прочности, безопасности и экономической целесообразности. Особое значение в сложившейся экономической ситуации приобретают ремонтно-восстановительные технологии.

Объектом исследования являлся насадной диск 22-й ступени паровой турбины ВТ-50 с номинальной частотой вращения 3000 об/мин. Сборный ротор, или ротор с насадными дисками, представляет собой конструкцию [3], состоящую из вала и посаженных на него дисков с рабочими лопатками. Цилиндрическая контактная поверхность посадки диска на вал прерывается осевой шпоночной канавкой, в радиусных сопряжениях которой при определенной наработке в эксплуатации появляются несквозные уголковые трещины. Настоящая работа направлена на численное обоснование по параметрам напряженно-деформированного состояния (НДС) вариантов ремонта насадного диска за счет удаления слоя поврежденного материала в зоне накопления повреждений у осевого шпоночного паза. Параметры НДС насадного диска определялись с привлечением метода конечных элементов (МКЭ) для действующих эксплуатационных нагрузок.

Во время эксплуатации на диск действуют следующие силовые факторы, которые необходимо воспроизвести в расчетной схеме МКЭ: центробежная сила от собственной массы диска; контурная нагрузка от воздействия рабочих лопаток на обод диска, которая передается через замковое соединение; контактное давление на расточку диска, вызванное натягом при посадке диска на вал.

Контурная нагрузка в вильчатом типе замкового соединения лопатки с диском (рис. 1) для верхнего  $\sigma_K$  ( с учетом изгиба части обода) и нижнего  $\sigma_H^p$  ряда заклепочных отверстий рассчитывалась по методике [4]:

$$\sigma_{\rm K} = \sigma_{\rm P}^{\rm B} + \sigma_{\scriptscriptstyle \rm H} = \frac{{\sf C}_{\rm J}}{(t-0,5d)\,3b_2} + \frac{2{\sf a}{\sf C}_{\rm J}}{b_2(t-0.5d)^2},$$
 (1)

$$\sigma_{\rm P}^{\rm H} = \frac{3z_2 C_{\rm JI} + 2C_{\rm OB}}{3(2\pi r_2 - id) \cdot (b_3 - 3b_2)},\tag{2}$$

где d — диаметр заклепки,  $b_2$  — толщина одной проушины вилки, t — шаг заклепок, a — эксцентриситет центра тяжести пера лопатки, i — число заклепок в одном ряду по окружности колеса,  $b_3$  — ширина всей вилки,  $r_2$  — средний радиус части обода,  $C_{\rm Л}$  — центробежная сила лопатки с хвостовиком,  $C_{\rm ОБ}$  — центробежная сила части обода. В результате расчетов для рассматриваемой геометрии диска получено, что  $\sigma_{\rm K}=151.1$  МПа,  $\sigma_{\rm p}^{\rm H}=162.2$  МПа.

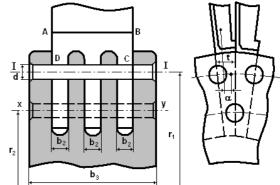


Рис. 1. Схема вильчатого замкового соединения лопатки с диском

Крутящий момент с диска на вал в нормальных условиях передается трением, создаваемым контактным давлением, возникающим за счет натяга. Для заданного натяга  $\Delta$ =0.054 см и номинальной частоты вращения диска n=3000 об/мин величины нормальных окружных и радиальных напряжений на поверхности контакта, возникающих от посадки диска на вал, рассчитывались, согласно [4], по итерационной процедуре по уравнениям:

$$\begin{cases}
\sigma_{r1} = \kappa'' \sigma_{r1}'' \\
\sigma_{t1} = \kappa'' \sigma_{t1}''
\end{cases}, \qquad \Delta = \frac{2r_1}{E} \left[ \sigma_{t1} - \frac{1 + (r_0/r_1)^2}{1 - (r_0/r_1)^2} \sigma_{r1} \right], \qquad \kappa'' = \frac{E\Delta}{2r_1 \left[ \sigma_{t1}'' - \frac{1 + (r_0/r_1)^2}{1 - (r_0/r_1)^2} \sigma_{r1}'' \right]}, \qquad (3)$$

где  $r_1$  — радиус вала после посадки диска,  $r_0$  — радиус расточки вала,  $\sigma_{t1}$  — окружные напряжения на радиусе  $r_1$ ,  $\sigma''_{t1}$ ,  $\sigma''_{t1}$  — соответственно радиальные и окружные напряжения на внутренней поверхности диска, E — модуль упругости. Расчетное значение контактного давления составило  $\sigma_{r1} = -50~\mathrm{M}\Pi a$ .

Анализ распределений напряжений и деформаций в насадном диске паровой турбины предполагалось провести на основе метода конечных элементов. В связи с этим по чертежам завода-изготовителя была сформирована объемная модель (рис. 2), которая полностью воспроизводит геометрию диска



с использованием 20-узловых конечных элементов. В трехмерных расчетных схемах МКЭ, как правило, используются конечные элементы высоких порядков, которые содержат промежуточные узлы на гранях. Тогда, согласно функциям формы подобных элементов, эквивалентное узловое распределение усилий при приложении единичного вектора в центре тяжести по нормали к поверхности одного изолированного элемента можно представить в виде проекций плюс-минус нагрузки. В том случае если поверхность приложения нагрузки состоит из совокупности нескольких элементов, то проекции

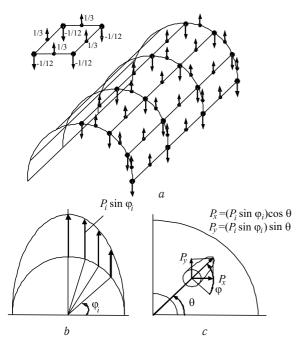


Рис. 2. Схема разнесения нагрузки по узлам конечного элемента

узловых усилий суммируются для общего узла по количеству примыкающих к нему конечных элементов (рис. 2).

В вильчатом типе замкового соединения суммарное центробежное усилие, приходящееся на одну лопатку, должно быть разнесено по цилиндрическим поверхностям верхнего и нижнего ряда крепежных отверстий в проушинах обода диска (см. рис. 1). При этом необходимо иметь в виду, что следует суммировать нагрузку отдельных конечных элементов, имеющих общий узел. Суммарное центробежное усилие от пера, бандажа и хвостовика лопатки должно быть распределено пропорционально ширине каждой из проушин по отношению к общей ширине вилки обода диска.

В верхнем ряду крепежных отверстий суммарное усилие равно

$$P_{B} = \sum C + C'_{X} = 2P_{1}^{B} + P_{2}^{B} = 506.98 \text{ kH},$$

а в нижнем ряду отверстий —

$$P_{H} = C_{JI} + \frac{2}{3} \cdot C_{OB} = 2P_{1}^{H} + P_{2}^{H} = 673.44 \text{ кH},$$

где  $(P_1^H)$ ,  $P_1^B$  — суммарное центробежное усилие, приходящееся на одно отверстие верхнего (нижнего) ряда в узкой (боковой) проушине,  $(P_2^H)$ ,  $P_2^B$  — суммарное центробежное усилие, приходящееся на одно отверстие верхнего (нижнего) ряда в широкой (средней) проушине. Все узловые нагрузки спроецированы на направление вертикальной оси с учетом знака, определяемого функцией формы конечного элемента. В том случае, если центр отверстия не совпадает ни с одной из координатных осей компоненты узловых усилий, найденные в локальной системе координат раскладывались на составляющие в глобальной системе координат, центрированной на ось вращения диска (см. рис. 2). Подобные распределения узловых усилий были обеспечены в каждом из сечений цилиндрической поверхности, образующих расчетную схему.

Центробежные силы от собственной массы диска, контурная нагрузка в элементах вильчатого замкового соединения лопатки с диском и контактное давление от посадки диска на вал турбины были должным образом приложены к сформированной трехмерной конечно-элементной расчетной схе-

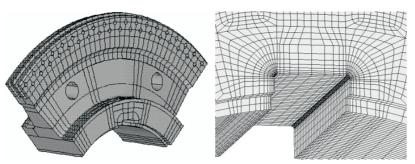


Рис. 3. Трехмерная МКЭ-модель диска с детализацией области шпоночного паза

ме (рис. 3). Диск изготовлен из стали 34XH3M, со следующими характеристиками: модуль упругости E=206000 МПа; коэффициент Пуассона  $\nu=0.3$ ; удельный вес  $\gamma=7800$  кг/м³; коэффициент деформационного упрочнения n=5.89; предел текучести  $\sigma_0=853$  МПа.

На первом этапе был проведен расчет штатной геометрии диска в упругой и упруго-плас-



тической постановке. Путем вариации размерности конечно-элементной модели за счет сгущения сетки конечных элементов в зонах концентрации напряжений в рамках упругих расчетов было определено устойчивое решение для размерности конечно-элементной модели в 1.5 млн неизвестных. Далее все расчеты проводились в упруго-пластической постановке с использованием конечно-элементного комплекса ANSYS [5].

Для оценки объемного упруго-пластического напряженного состояния различных вариантов геометрии диска использовались эквивалентные напряжения или интенсивность напряжений в форме

$$\sigma_{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^{2} + \left(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}\right)^{2} + \left(\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\right)^{2} + 6\left(\sigma_{xy}^{2} + \sigma_{yz}^{2} + \sigma_{zx}^{2}\right)}.$$
 (4)

На рис. 4 представлено общее напряженное состояние всего диска. Как следует из результатов выполненных расчетов, НДС диска имеет существенно трехмерный характер и основными высокона-

груженными зонами диска являются осевой шпоночный паз, разгрузочные отверстия в полотне и крепежные отверстия в ободе диска. При этом максимальные значения напряжений возникают на донышке шпоночного паза. На рис. 5 показано более детальное распределение нормированных на предел текучести  $\bar{\sigma} = \sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$  окружных напряжений по периметру радиусного сопряжения между стенкой и донышком  $\bar{l}=x/l$ и по толщине шпоночного паза  $\bar{b}=z/b$ . Принятая система координат показана на рис. 5, a. Представленные на рис. 5, bраспределения относятся к различным расстояниям от контура паза на боковой поверхности ступицы диска при  $\bar{b}=0$ со стороны паровпуска в турбину. При этом r = 0 соответствует контуру паза. Как следует из рис. 5, в область максимальных напряжений локализована в зоне радиусного сопряжения между стенкой и донышком паза. Данные рис. 5, с свидетельствуют о том, что на расстояниях менее 0.7 мм почти по всей толщине ступицы диска, ослабленной продольным шпоночным пазом, возникают зоны пластических деформаций. Очевидно, что наличие пластических деформаций в совокупности с коррозионной средой приводит к накоплению и развитию наблюдаемых в эксплуатации повреждений в виде поверхностных уголковых трещин глубиной до 10 мм.

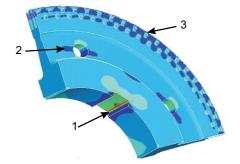
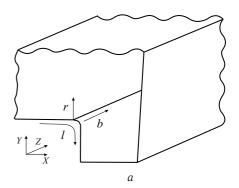
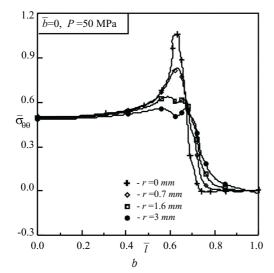


Рис. 4. Зоны концентрации напряжений в насадном диске





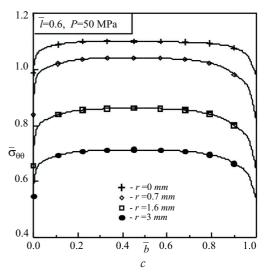


Рис. 5. Распределения окружных напряжений по поверхности и донышку для исходной геометрии шпоночного паза



Нормативными документами, принятыми в энергетике [6], допускается возможность удаления слоя поврежденного микро- и макротрещинами материала из зоны концентрации напряжений. В этой связи на втором этапе выполненной серии расчетов рассмотрены 5 вариантов изменения геометрии шпоночного паза, приведенные в таблице. Практика эксплуатации насадных дисков 22-й ступени паровой турбины ВТ-50 показала, что размеры уголковой трещины в зоне радиусного сопряжения могут достигать до x=10 мм на боковой поверхности и до z=20 мм по глубине шпоночного паза.

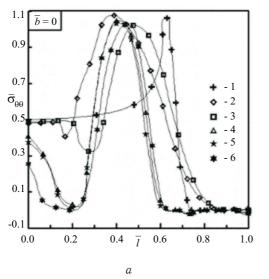
Варианты ремонтных технологий шпоночного паза

Вариант	Варианты ремонтных технологии шпоночного паза  Геометрия шпоночного паза			
1. Исходная геометрия шпоночного паза			971	
2. Дополнительная обра- ботка в углах паза на глубину 0.8 мм			970	
3. Дополнительная обработка в углах паза на глубину $2\mathrm{mm},R=5\mathrm{mm}$		395	956	
4. Выборка трещины глу- биной 5 мм			971	
5. Выборка трещины глу- биной 5 мм с углублени- ем разделки на 1 мм			965	
6. Выборка трещины глубиной 10 мм			962	



Поэтому в качестве ремонтных вариантов рассматривались ситуации от удаления только коррозионно-поврежденного поверхностного слоя глубиной до 1 мм при отсутствии макротрещины (вариант 2) до глубокой сквозной выборки на всю толщину паза с удалением трещины длиной до 10 мм (вариант 6).

На рис. 6 показаны распределения нормированной на предел текучести окружной компоненты напряжений  $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$  по периметру  $\bar{l}=x/l$  и по толщине шпоночного паза  $\bar{b}=z/b$  для всех анализируемых вариантов ремонтных технологий. Цифрами на рис. 6 обозначены номера вариантов геометрии паза, представленные в таблице. Следует отметить, что по отношению к штатной геометрии с острым пиком напряжений, ремонтные варианты обеспечивают более плавное изменение эпюр напряжений, что является благоприятным с точки зрения рассредоточения (делокализации) накапливаемых повреждений (рис. 6, a). В то же время уровень напряжений для всех вариантов геометрии остается незначительно выше предела текучести (рис. 6, b).



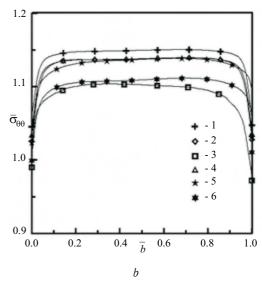


Рис. 6. Распределения окружных напряжений по поверхности и донышку для ремонтных вариантов геометрии шпоночного паза

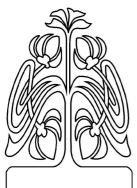
Обращает на себя внимание проявление эффектов трехмерности распределения напряжений, поскольку на боковых поверхностях ступицы диска при  $\bar{b}=0$  и  $\bar{b}=1$  напряжения на  $\sim\!15\%$  ниже, чем в середине толщины ступицы. Это обстоятельство необходимо учитывать при диагностике технического состояния насадного диска, когда основной контроль материала осуществляется только на боковых поверхностях.

Таким образом, рассмотренные варианты изменения геометрии шпоночной канавки на основании выполненных численных исследований можно рекомендовать в сочетании с результатами стендовых испытаний в качестве ремонтно-восстановительных технологий для удаления коррозионно-поврежденного материала в зоне конструктивной концентрации напряжений продольного шпоночного паза насадного диска паровой турбины.

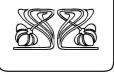
### Библиографический список

- 1. Трубилов М.А., Арсеньев Г.В., Фролов В.В. и др. Паровые и газовые турбины: Учебник для вузов / Под ред. А.Г.Костюка, В.В.Фролова. М.: Энергоатомиздат, 1985. 352 с.
- 2. *Трухний А.Д., Лосев С.М.* Стационарные паровые турбины / Под ред. Б.М.Троянского. М.: Энергоиздат, 1981 456 с
- 3. *Костюк А.Г.* Динамика и прочность турбомашин. М.: Машиностроение, 1982. 264 с.
- 4. Жирицкий Г.С. Конструкция и расчет на прочность деталей паровых турбин. М.: Госэнергоиздат, 1955. 280 с
- 5. ANSYS. Theory Reference. 001242. Eleventh Edition. SAS IP, Inc., 1999.
- 6. Методические указания по предотвращению коррозионных повреждений дисков и лопаточного аппарата паровых турбин в зоне фазового перехода. РД 34.30.507 92. М.: Ротапринт ВТИ, 1992.

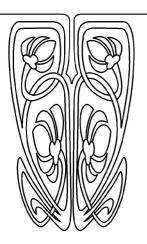








# НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ



# **ИНФОРМАТИКА**

УДК 519.72

# ПОСТРОЕНИЕ ИЕРАРХИЙ В МНОГОМЕРНЫХ МОДЕЛЯХ ДАННЫХ

### П.Г. Редреев

Омский филиал Института математики СО РАН, лаборатория методов преобразования и представления информации E-mail: redreev@mail.ru

В работе рассматривается способ автоматизированного определения иерархий в измерениях многомерного представления данных, сформированного из исходной реляционной базы данных. Построение иерархий осуществляется на основе зависимостей атрибутов исходной базы данных.

**Ключевые слова:** реляционная база данных, аналитическая обработка данных, многомерная модель данных.

### **Construction of Hierarchies in Multidimensional Data Models**

### P.G. Redreev

Omsk Branch Institute of Mathematics SB RAS, Laboratory of Methods of Transformation and Representation of Information E-mail: redreev@mail.ru

This article considers a method of automated determination of hierarchies in dimensions of multidimensional data model, constructed from the source relational database. Construction of hierarchies is realized on the basis of attribute dependencies of source database.

**Key words:** relational database, online analytical processing, multidimensional data model.

### ВВЕДЕНИЕ

Системы оперативного анализа данных OLAP (Online Analytical Processing) предоставляют пользователю возможности для многомерного анализа данных и принятия решений. Для представления данных в OLAP-системах используются многомерные модели данных, являющиеся гиперкубами, то есть обобщением электронных таблиц на произвольное количество измерений (dimensions). В многомерных моделях данные рассматриваются либо как меры (measures), которые являются числовыми значениями, либо как текстовые измерения [1]. Меры — это величины, подвергаемые анализу по измерениям. Измерение включает в себя уровни измерения, позволяющие пользователю анализировать меры с различной степенью детализации. Из уровней измерения может формироваться иерархия. Наличие иерархий позволяет осуществлять выполнение таких часто используемых для анализа данных операций, как roll-up и drill-down [2, 3].

Существуют различные способы задания иерархий в измерениях многомерных моделей [1]. Расположение одного из уровней иерархии выше другого интуитивно объясняется тем, что значения более высокого уровня логически содержат значения более низкого уровня [1, 4]. Как правило, иерархии задаются разработчиком при формировании схемы многомерной модели данных.

Для реляционных баз данных, используемых в качестве исходных данных для гиперкубов, заданы функциональные и многозначные



зависимости. Эти зависимости могут быть использованы при создании иерархий, если в качестве уровней измерений многомерной модели используются атрибуты исходной базы данных. В данной работе рассмотрен способ автоматизированного определения иерархий для модели данных «композиционная таблица», формируемой из исходной реляционной базы данных.

### 1. МОДЕЛЬ ДАННЫХ «КОМПОЗИЦИОННАЯ ТАБЛИЦА»

Рассмотрим модель данных «композиционная таблица», которая является обобщением модели «семантическая трансформация» [5], на случай списка значений в одной ячейке. Обозначим R — исходное реляционное отношение,  $R^*$  — результирующее отношение. Пусть  $X, Y_i, Z_i$  — множества атрибутов из R ( $i=1,2,\ldots,N$ ). Атрибуты X остаются неизменными в  $R^*$ , значения атрибутов  $Y_i$  становятся именами атрибутов в  $R^*$ , домены атрибутов  $Z_i$ , дополненные пустым значением, распределяются между доменами атрибутов, введенных для  $Y_i$ . Атрибуты  $Y_i$  и  $Z_i$  в явном виде отсутствуют в  $R^*$  ( $i=1,2,\ldots,N$ ).  $W_i$  — дополнительное множество атрибутов, которые используются в логических формулах-ограничениях, но в  $R^*$  отсутствуют. Поскольку X и  $Y_i$  являются координатами для  $Z_i$  в  $R^*$ , естественными являются ограничения:  $X \cap Y_i = \varnothing, X \cap Z_i = \varnothing, Y_i \cap Z_i = \varnothing$  ( $i=1,2,\ldots,N$ ).  $W_i \in R \setminus (X \cup Y_1 \cup \ldots \cup Y_N \cup Z_1 \cup \ldots \cup Z_N), |Dom(Y_i)| = L_i, |Z_i| = M_i, |\cdot|$  — мощность множества.

Схема результирующего представления строится из R по следующему правилу:

$$Sch(R) = \{X, Y_1, \dots, Y_N, Z_1, \dots, Z_N, W_1, \dots, W_N\} \Rightarrow Sch(R^*) = \{X, \bigcup_{i=1}^N Dom(Y_i) \times \{Z_i\}\},$$

где Sch — схема описания отношения, Dom — множество допустимых значений атрибутов,  $Dom(Y_i) = Dom(Y_{i1}) \times Dom(Y_{i2}) \times \ldots$ ,  $Y_{ij} \in Y_i$ . Символ  $\cup$  обозначает, что «композиционная таблица» состоит из подтаблиц со схемами  $\{X, Dom(Y_i) \times \{Z_i\}\}$   $(i=1,2,\ldots,N)$ .

**Пример 1.** В качестве примера «композиционной таблицы» рассмотрим план учебной нагрузки вуза (рис. 1).

		Сем				
	1		2			
	Лекции	Практика	Лекции	Практика	Экзамен	Зачет
Наименование дисциплины	Кол-во часов	Кол-во часов	Кол-во часов	Кол-во часов	№ семестра	№ семестра
Иностранный язык		3		2	4	1,2,3
Физическая культура		2		2		1,2,3,4
Отечественная история	2	2			1,2	
Философия	2	2			1,2,3	
Экономика			2	2	2	

Рис. 1. План учебной нагрузки

Здесь атрибуты множества X: название дисциплины,  $Y_1$ : номер семестра, тип занятия,  $Z_1$ : количество часов данного вида занятий по дисциплине в неделю,  $Y_2$ : общесеместровые мероприятия по дисциплине,  $Z_2$ : номер семестра.

Для модели «композиционная таблица» множества атрибутов X и  $Y_j$   $(j=1,2,\ldots,N)$  являются обобщенными координатами и могут рассматриваться как измерения. Иерархии атрибутов в X и  $Y_j$   $(j=1,2,\ldots,N)$  определяют порядок расположения значений атрибутов в заголовках строк и столбцов

пользовательского представления в виде двумерной таблицы. Следовательно, иерархии должны быть определены таким образом, чтобы пользовательское представление было наглядным. Наиболее удобной для работы пользователя является древовидная структура заголовка таблицы, пример которой показан на рис. 2.

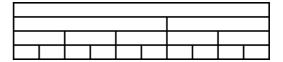


Рис. 2. Структура заголовка таблицы

### 2. ФОРМИРОВАНИЕ СХЕМЫ ИЕРАРХИИ

Рассмотрим способ определения иерархии в измерении. В качестве уровней измерения будем использовать атрибуты исходной базы данных. Пусть L — множество атрибутов X или  $Y_j$  «композиционной таблицы» со схемой  $Sch(R^*) = \{X, \bigcup_{i=1}^N Dom(Y_i) \times \{Z_i\}\} \ (i=1,2,\ldots,N).$ 

Информатика 85



**Определение 1.** Схема иерархии — это ориентированный ациклический и слабо связный граф H = (A, E), где A — множество атрибутов, E — множество дуг.

**Определение 2.** Пусть C, D — атрибуты, H — схема иерархии.  $C \prec D$ , если в H существует путь из вершины C в D.

Определим способы задания частичного порядка на множестве атрибутов.

Для задания частичного порядка на множестве атрибутов, входящих в функциональные и многозначные зависимости, используем следующее эвристическое правило.

Атрибуты из множества атрибутов, принимающего меньшее количество значений, располагаются в иерархии выше, чем атрибуты из множества, принимающего большее количество значений.

Для функциональной зависимости  $C \to D$ , где C и D — множества атрибутов, атрибуты из D располагаются в иерархии выше, чем атрибуты из C, так как различные значения множества атрибутов C могут определять одинаковое значение D. Таким образом, будем полагать, что для атрибутов  $C_k \in C, D_l \in D \ \forall k, l \ C_k \prec D_l$ .

Для многозначной зависимости C D(E), где C, D, E — множества атрибутов, атрибуты из C располагаются в иерархии выше, чем атрибуты из  $D \cup E$ , так как по определению многозначной зависимости при существовании двух кортежей, совпадающих по C, существуют еще два кортежа с тем же значением C. Таким образом, будем полагать, что для атрибутов  $C_k \in C, I_l \in D \cup E \ \forall k, l$   $I_l \prec C_k$ .

Некоторые последовательности уровней могут многократно использоваться в иерархиях измерений различных гиперкубов или задаваться в заголовках пользовательских представлений данных. Связь между этими атрибутами не всегда возможно установить с помощью зависимостей, заданных для исходной базы данных. Следовательно, для данных атрибутов задание отношения ≺ на множестве атрибутов необходимо предоставить пользователю. Заданные пользовательские иерархии будем использовать при формировании схемы иерархии.

Пример 2. Рассмотрим следующую схему БД:

 $R_1$  =Студенты (№ студента, № группы, ФИО студента);

 $R_2$  =Список групп (№ группы, Код группы, № специальности);

 $R_3 = \Pi$ редметы (№ предмета, Предмет);

 $R_4 = \Pi$ реподаватели ( $\mathbb{N}$  преподавателя, ФИО преподавателя);

 $R_5$  =Неделя (№ дня недели, День недели);

 $R_6$  =Начало занятий (№ пары, Время начала пары);

 $R_7$  =Оценки (№ студента, № группы, № предмета, Оценка);

 $R_8 =$ Расписание ( $\mathbb{N}_2$  группы,  $\mathbb{N}_2$  дня недели,  $\mathbb{N}_2$  пары,  $\mathbb{N}_2$  предмета,  $\mathbb{N}_2$  преподавателя,  $\mathbb{N}_2$  аудитории);

 $R_9$  =Специальности (№ специальности, Специальность);

 $R_{10}$  =Нагрузка (№ предмета, <u>№ специальности</u>, Количество часов).

Код группы День недели

↑ ↑

№ студента № пары

↑ ↑

ФИО студента Время начала пары

Рис. 3. Пользовательские иерархии атри-

Примеры пользовательских иерархий атрибутов для данной схемы БД изображены на рис. 3.

Приведем определение из теории графов [6], используемое в дальнейшем изложении.

**Определение 3.** Число дуг, которые имеют вершину  $x_i$  своей начальной вершиной, называется полустепенью исхода вершины  $x_i$ , и аналогично число дуг, которые имеют  $x_i$  своей конечной вершиной, называется полустепенью захода вершины  $x_i$ .

Рассмотрим алгоритм построения схемы иерархии Н.

*Шае 1.* Для каждой пользовательской иерархии  $B_1 \prec \ldots \prec B_m$  добавляем в H дуги  $B_i B_{i+1}$ , где  $B_i, B_{i+1} \in L, \ i=1,\ldots,m-1$ .



*Шаг* 2. Для каждой функциональной зависимости  $C \to D$ , где C, D — множества атрибутов, такой, что  $C' \neq \emptyset$ ,  $D' \neq \emptyset$ , где  $C' = L \cap C$ ,  $D' = L \cap D$ , добавляем в H дугу  $C'_k D'_l$ ,  $C'_k \in C'$ ,  $D'_l \in D'$   $\forall k, l$ , если на шаге 1 не добавлена дуга  $D'_l C'_k$ .

*Шаг* 3. Для каждой многозначной зависимости  $C \twoheadrightarrow D(E)$ , где C, D, E — множества атрибутов, такой, что  $C' \neq \emptyset$ ,  $D' \neq \emptyset$ , где  $C' = L \cap C$ ,  $D' = L \cap (D \cup E)$ , добавляем в H дугу  $D'_l C'_k$ ,  $C'_k \in C', D'_l \in D' \ \forall k, l$ , если на шаге 1 или на шаге 2 не добавлена дуга  $C'_k D'_l$ .

Для каждой компоненты связности графа находим вершины с полустепенью исхода, равной 0. Для этих атрибутов определяем минимальную величину  $m_k$  количества различных значений.

Упорядочиваем компоненты связности графа по возрастанию  $m_k$ . Для компонент связности, у которых  $m_k$  одинакова, находим вершины компоненты с полустепенью захода, равной 0. Для этих атрибутов определяем максимальную величину  $n_l$  количества различных значений.

Упорядочиваем эти компоненты по возрастанию  $n_l$ .

Последовательно просматриваем компоненты связности графа H в соответствии с полученным упорядочением. Дополняем в граф дуги, идущие в каждую вершину с полустепенью захода, равной 0, текущей компоненты связности из каждой вершины с полустепенью исхода, равной 0, следующей компоненты.

**Пример 3.** Пусть L={№ *группы*, № *студента*, ФИО *студента*, № *специальности*, Специальность}. По множеству атрибутов L будет сформирована схема иерархии, изображенная на рис. 4.

### **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Рассмотренный в данной работе алгоритм формирует иерархии в измерениях гиперкуба, используя функциональные, многозначные зависимости исходной базы данных и иерархии атрибутов, заданные пользователем. Применение этого алгоритма в OLAP-системах позволит сократить время на формирование схемы новой многомерной модели данных.

Для рассмотренной модели данных «композиционная таблица» иерархии в измерениях необходимы не только для реализации операций анализа данных, но и для структурирования заголовков пользовательского представления. Предложенный алгоритм формирует иерархии таким образом, чтобы представление модели в виде двумерной таблицы было наиболее удобным для работы пользователя.



Рис. 4. Схема иерархии

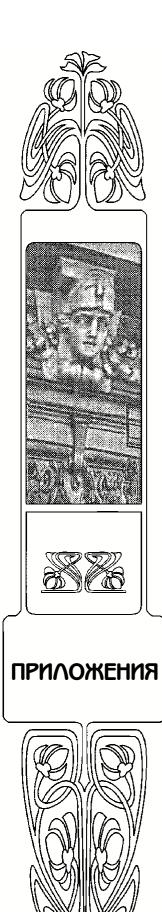
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-07-00059-а).

### Библиографический список

- 1. Pedersen T.B., Jensen C.S., Dyreson C.E. A foundation for capturing and querying complex multidimensional data // Information Systems. 2001. № 26(5). Р. 383–423. 2. Педерсен Т.Б., Йенсен К.С. Технология многомерных баз данных // Открытые системы. 2002. № 1. С. 45–50. 3. Щавелев Л.В. Способы аналитической обработки данных для поддержки принятия решений // СУБД. 1998. № 4–5. С. 51–60.
- 4. Lechtenborger J., Vossen G. Multidimensional normal forms for data warehouse design // Information Systems. 2003.  $\mathbb{N}_2$  28(5). P. 415–434.
- 5. *Кристофидес Н*. Теория графов. М.: Мир, 1978. 215 с.
- 6. Зыкин С.В. Формирование гиперкубического представления реляционной базы данных // Программирование. 2006. № 6. С. 348–354.

Информатика 87





# **PERSONALIA**

## ВЛАДИМИР ВАСИЛЬЕВИЧ ГОЛУБЕВ



4 декабря 2009 года исполнилось 125 лет со дня рождения и 55 лет со дня смерти Владимира Васильевича Голубева — выдающегося русского математика и механика, члена-корреспондента АН СССР, генералмайора инженерно-авиационной службы, заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, ректора Саратовского университета (1920—1922), первого декана механико-математического факультета МГУ (1933—1934, 1944—

1952), заведующего кафедрой высшей математики Военновоздушной инженерной академии имени Н.Е. Жуковского (с 1932 г.), старшего научного сотрудника Института механики АН СССР (с 1945 г.).

В.В. Голубев родился 4 декабря 1884 года в г. Сергиев-Посад Московской области. После окончания гимназии с золотой медалью поступил на физико-математический факультет Московского университета. По окончании университета Владимир Васильевич был оставлен в нём для подготовки к профессорскому званию. В 1911 году он сдал магистерские экзамены, а в 1917 году защитил в Московском университете диссертацию на степень магистра чистой математики. К 1922 году В.В. Голубев завершил математическое исследование, которое хотел представить в качестве докторской диссертации. Но она не была защищена, так как в то время ученые степени в СССР были упразднены. В 1934 г., когда они были восстановлены, В.В. Голубев стал доктором физико-математических наук без защиты диссертации.

Огромное влияние оказали на В.В. Голубева российские ученые: Н.И. Лобачевский, Б.К. Млодзеевский, Н.А. Умов, Д.Т. Егоров, В.К. Цесарский, Н.Е. Жуковский, С.А. Чаплыгин.

Много почерпнул В.В. Голубев из своих зарубежных поездок (1913–1914) в Геттинген и Париж. Он слушал лекции крупнейших зарубежных ученых: Анри Пуанкаре, Пенлеве, Пикара, Бореля, Лебега, Дарбу, Гильберта, Адамара, Гурса, Каретеодори, Германа Вейля.

В.В. Голубев прошел все этапы педагогической деятельности: от репетиторства, преподавания в воскресной и средней школе до профессорской деятельности по математике и механике в ряде ведущих высших учебных заведений нашей страны.

В феврале 1918 года В.В. Голубев был избран профессором Саратовского университета, в 1918–1919 г.г. был деканом физикоматематического факультета, в 1919 году его избрали проректором, а в 1920 году — ректором Саратовского университета. Пребывание в Саратове сыграло немаловажную роль в завершении формирования В.В. Голубева как интеллигента с необычно широким диапазоном знаний в различных областях науки. Этому способствовало тесное

88 Приложения



общение с крупными учеными различных специальностей, которые были в это время в Саратове. Коллегами по Саратову у В.В. Голубева были хирурги С.И. Спасокукоцкий, А.Н. Бакулев, фармаколог В.И. Скворцов, историки П.Г. Любомиров, В.Д. Бутенко, профессора в области физикоматематических наук И.И. Привалов, Г.Н. Свешников, И.Т. Полак, В.Д. Зернов, Г.П. Боев, Б.К. Ризенкампф и др. В период пребывания В.В. Голубева в Саратове им были получены фундаментальные результаты, определившие всю его последующую плодотворную научную деятельность.

В 1930 году Владимир Васильевич вернулся в Москву крупным ученым, блестящим лектором и оратором, опытным администратором. В 1932 году он был назначен начальником кафедры высшей математики Военно-воздушной инженерной академии имени Н.Е. Жуковского, которую возглавлял более 20 лет. С 1936 г. В.В. Голубев — директор Института механики при МГУ, в 1933–1934 г.г. и в 1944–1952 г.г. — декан механико-математического факультета МГУ. Около 20 лет он заведовал кафедрой аэродинамики МГУ. В 1934 г. В.В. Голубев был избран член-корреспондентом АН СССР. Ему было присвоено почетное звание Заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, он был награжден орденами Ленина, Трудового Красного Знамени, четырьмя орденами Красной Звезды. В 1939 г. В.В. Голубев был зачислен в кадры Красной армии в звании бригинжененра, а в 1944 г. ему присваивается военное звание генарл-майора инженерной авиационной службы.

Научное творчество В.В. Голубева характеризуется широтой тематики. Им получены крупные результаты в теории особых точек аналитических функций, теории автоморфных функций, аналитической теории дифференциальных уравнений. Эти результаты нашли важное применение в аэромеханике, в частности, в теории механизированного крыла самолета, теории крыла конечного размаха, теории машущего крыла.

В.В. Голубев оставил яркий след как выдающийся ученый, блестящий лектор и педагог, крупнейший организатор науки, пламенный патриот нашей Родины. В заключении приведем замечательные слова, произнесенные Владимиром Васильевичем Голубевым в блестящей речи на своем семидесятилетнем юбилее:

«Летом 1925 года, когда я был профессором в Саратове, где по существу не было библиотеки, пригодной для занятий, за книгами приходилось ездить в Москву. Я занялся изучением бывших у меня оттисков работ по теории крыла Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина и совершенно неожиданно для себя обнаружил, что в этих работах содержится то, о чем я мечтал: приложение теории функций комплексного переменного к изучению явлений природы и техники. При этом приложение непосредственное, минуя дифференциальные уравнения. Теорию функций комплексного переменного можно было буквально видеть, осуществить на модели течения жидкости. Это было претворением гениальных идей Римана в области техники и естествознания. Эти идеи совершенно очаровали меня. Область гидродинамического истолкования аналитических функций стала наряду с аналитической теорией дифференциальных уравнений моей самой любимой областью науки, а сам творец этого направления Бернгард Риман стал моим самым любимым, самым авторитетным ученым. Его гениальные идеи и воплощение их в науке в замечательных исследованиях Жуковского и Чаплыгина, их развитие и углубление стали основным делом моей научной жизни.

Обстоятельства сложились так, что я был в университете механиком, преподавал формально гидро- и аэромеханику и даже заведовал кафедрой аэромеханики. Но это была внешность. В действительности я был математиком, преподавал и занимался только математикой, но эта математика была для меня не абстрактным построением следствий из логически возможных схем, а само явление природы, физическое явление, которое можно экспериментально наблюдать, при помощи которого можно изучать окружающий мир и воздействовать на него в технике. Это была не абстракция и бесплотная схема, это был сам окружающий нас мир с его явлениями, со всем его разнообразием и богатством цветов и красок.»

А.П. Хромов

Приложения 89