МАТЕМАТИКА

УДК 512.66+513.83

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.П. Курдюмов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: KurdyumovVP@info.sgu.ru

Для задачи оптимального управления с линейным дифференциальным уравнением в гильбертовом пространстве и квадратичным функционалом получены необходимые и достаточные условия оптимальности управлений и приближенные формулы их разложений в ряд по собственным и присоединенным элементам оператора, входящего в это уравнение.

Ключевые слова: базисность Рисса, резольвента, оптимальное управление, матрица бесконечного порядка.

Approximate Solution of an Optimal Control Problem with Linear Nonhomogeneous Control System in Hilbert Space

V.P. Kurdyumov

Saratov State University,
Chair of Differential Equations and Applied Mathematics
E-mail: KurdyumovVP@info.sgu.ru

For an optimal control problem with a linear differential equation in Hilbert space and quadratic criteria necessary and sufficient conditions of control functions optimality and approximate formulas of the expansions of these functions in eigenfunctions of the control system operator have been obtained.

Key words: Riesz basisness, resolvent, optimal control, infinite matrix.

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача

$$\frac{du}{dt} = Lu + f, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

$$u(0) = \varphi, \tag{2}$$

$$I(f, \varphi) = \|u(T) - u_0\|^2 + \|f\|^2 + \|g\|^2 \to \min. \tag{3}$$

Здесь $u(t)$ при каждом t принадлежит гильбертову пространству H; L — линейный оператор со всюду плотной в H областью определения D, имеющий лишь конечное число кратных собственных значений. Собственные значения λ_k удовлетворяют требованиям:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{-2} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |e^{\lambda_k T}|^2 < \infty, \tag{4}$$

и ноль не является собственным значением; собственные и присоединенные элементы (с.п.э.) оператора L образуют базис Рисса в H;

© В.П. Курдюмов, 2010

норма резольвенты $(L-\lambda E)^{-1}$ (λ — спектральный параметр, E — единичный оператор) в области, полученной из λ-плоскости удалением всех λ_k вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса, при $|\lambda| \to \infty$ растет не быстрее некоторой степени $|\lambda|$; управлением в задаче (1)–(3) являются $f \in K_1$, $\varphi \in K_2$, K_i — выпуклые замкнутые множества из H; u_0 — заданный элемент из H; $\|\cdot\|$ — норма в H.

Задачи, подобные (1)–(3), рассматривались, например, Дж.Э. Аллахвердиевым и Н.К. Аллахвердиевой в [1, 2]. В этих работах при условиях n-кратной полноты с.п.э. операторного пучка $A(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \dots + \lambda^n A - n$, где A_i $(i = 0, \dots, n)$ — линейные вполне непрерывные операторы, и корректности задачи Коши: $u(t) = A_0 u(t) + A_1 \frac{du}{dt} + \ldots + A_n \frac{d^n u}{dt^n} + f(t)$, $u(0) = \varphi_0, \dots, u^{(n-1)}(0) = \varphi_{n-1}$ были получены операторные уравнения для оптимальных управлений $f(t)$, φ_i $(i = 0, \dots, n-1)$, где $f(t) \in M$, $\varphi_i \in M_i$ $(i = 0, \dots, n-1)$; M, M_i $(i = 0, \dots, n-1)$ — выпуклые замкнутые множества. В настоящей работе будут получены приближенные формулы разложений оптимальных управлений задачи (1)–(3) по с.п.э. оператора L для случая, когда $K_1 = K_2 = H$.

1. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

Решение задачи (1)–(3) ищется в гильбертовом пространстве H_1 со скалярным произведением $(z, y)_{H_1} = \int\limits_0^T (z(t), y(t))dt$, где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в пространстве H.

Определение. Функция $u(t)$ называется *решением задачи Коши* (1)–(2) в случае, когда $\varphi \in D$, если 1) $u(t) \in D$ при всех $t \in [0, T]$; 2) $u(t)$ непрерывно дифференцируема, удовлетворяет уравнению (1) на $(0, T)$ и начальному условию (2).

Определение. Функция $u(t)$ называется *обобщенным решением задачи* (1)–(2) в случае, когда $\varphi \in H$ и может не принадлежать области D, если существует последовательность $u_m(t)$ $(m = 1, 2, \dots)$ решений задач

$$\frac{du}{dt} = Lu + f_m, \quad t \in [0, T], \tag{5}$$

$$u(0) = v_m, \tag{6}$$

где $f_m \in H$, $v_m \in D$, $\|f_m - f\| \to 0$, $\|v_m - \varphi\| \to 0$ при $m \to \infty$ такая, что $\|u_m(t) - u(t)\| \to 0$ равномерно по $t \in [0, T]$.

Для простоты изложения в дальнейшем считаем, что все собственные значения оператора L простые. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система собственных элементов оператора L и $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — биортогональная к этой системе. Она также является базисом Рисса в H [3, с. 371, 374].

Теорема 1. *Обобщенное решение задачи* (1)–(2) *существует, единственно и имеет вид*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t}(\varphi, \psi_k)\varphi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1}(e^{\lambda_k t} - 1)(f, \psi_k)\varphi_k, \tag{7}$$

где сходимость рядов понимается в H.

Доказательство. Обозначим $u_m(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} e^{\lambda_k t}(\varphi, \psi_k)\varphi_k + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k^{-1}(e^{\lambda_k t} - 1)(f, \psi_k)\varphi_k$. Имеем $\dfrac{du_m}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k e^{\lambda_k t}(\varphi, \psi_k)\varphi_k + \sum\limits_{k=1}^{m} e^{\lambda_k t}(f, \psi_k)\varphi_k$, $Lu_m(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k e^{\lambda_k t}(\varphi, \psi_k)\varphi_k + \sum\limits_{k=1}^{m} (e^{\lambda_k t} - 1)(f, \psi_k)\varphi_k$. Легко видеть, что $u_m(t)$ при $t \in (0, T)$ удовлетворяет уравнению (5), где $f_m = \sum\limits_{k=1}^{m} (f, \psi_k)\varphi_k$ и, кроме того, $\|u_m(0) - \varphi\| \to 0$, $\|f_m - f\| \to 0$ при $m \to \infty$. Равномерная сходимость по $t \in [0, T]$ рядов в (7) следует по теореме Бари [3, с. 374] из условий (4) и базисности Рисса систем $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Докажем единственность решения. Пусть $u^i(t)$ $(i = 1, 2)$ — обобщенные решения задачи (1)–(2). Тогда существуют последовательности f_m^i, $u_m^i(0)$ $(m = 1, 2, \dots,\ i = 1, 2)$, что для решений $u_m^i(t)$ задачи (5)–(6) с элементами f_m^i вместо f_m и $u_m^i(0)$ вместо v_m при $m \to \infty$ имеют место соотношения: $\|f_m^i - f\| \to 0$, $\|u_m^i(0) - \varphi\| \to 0$ и $\|u_m^i(t) - u^i(t)\| \to 0$ равномерно по $t \in [0, T]$. Обозначим $\tilde{u}_m(t) = u_m^1(t) - u_m^2(t)$, $\tilde{u}(t) = u^1(t) - u^2(t)$, $\tilde{f}_m = f_m^1 - f_m^2$. Ясно, что при $m \to \infty$ имеет место $\|\tilde{f}_m\| \to 0$ и $\|\tilde{u}_m(t) - \tilde{u}(t)\| \to 0$ равномерно по $t \in [0, T]$. Так как функции $\tilde{u}_m(t)$ $(m = 1, 2, \dots)$ непрерывно дифференцируемы, то для

всех $m = 1, 2, \ldots$ и фиксированного λ имеем:

$$\int_0^t e^{-\lambda\tau}\tilde{u}_m(\tau)d\tau = -\lambda^{-1}\tilde{u}_m(\tau)e^{-\lambda\tau}\Big|_0^t + \lambda^{-1}\int_0^t \frac{d\tilde{u}_m(\tau)}{d\tau}e^{-\lambda\tau}d\tau =$$

$$= -\lambda^{-1}\tilde{u}_m(t)e^{-\lambda t} + \lambda^{-1}\tilde{u}_m(0) + \lambda^{-1}\int_0^t L\tilde{u}_m(\tau)e^{-\lambda\tau}d\tau + \lambda^{-1}\tilde{f}_m\int_0^t e^{-\lambda\tau}d\tau. \tag{8}$$

Умножим (8) на λ и, используя замкнутость оператора L, вынесем его из под знака интеграла:

$$\lambda\int_0^t e^{-\lambda\tau}\tilde{u}_m(\tau)d\tau = -\tilde{u}_m(t)e^{-\lambda t} + \tilde{u}_m(0) + L\int_0^t \tilde{u}_m(\tau)e^{-\lambda\tau}d\tau + \lambda^{-1}(e^{-\lambda t} - 1)\tilde{f}_m.$$

Отсюда

$$(L - \lambda E)\int_0^t \tilde{u}_m(\tau)e^{-\lambda\tau}d\tau = \tilde{u}_m(t)e^{-\lambda t} - \tilde{u}_m(0) + \lambda^{-1}(e^{-\lambda t} - 1)\tilde{f}_m. \tag{9}$$

Положим в (9) $t = T$ и умножим на $e^{\lambda T}$, тогда

$$(L - \lambda E)\int_0^T e^{\lambda(T-\tau)}\tilde{u}_m(\tau)d\tau = \tilde{u}_m(T) - e^{\lambda T}\tilde{u}_m(0) + \lambda^{-1}(1 - e^{\lambda T})\tilde{f}_m. \tag{10}$$

Пусть в точке λ существует $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, тогда (10) имеет вид

$$\int_0^T e^{\lambda\tau}\tilde{u}_m(T - \tau)d\tau = R_\lambda[\tilde{u}_m(T) - e^{\lambda T}\tilde{u}_m(0) + \lambda^{-1}(1 - e^{\lambda T})\tilde{f}_m]. \tag{11}$$

Перейдем в (11) к пределу при $m \to \infty$, получим тождество

$$R_\lambda\tilde{u}(T) = \int_0^T e^{\lambda\tau}\tilde{u}(T - \tau)d\tau. \tag{12}$$

Из (12) и требования на рост нормы резольвенты следует, что

$$\overline{\lim_{\lambda\to+\infty}}\ \lambda^{-1}\ln\left\|\int_0^T e^{\lambda\tau}\tilde{u}(T - \tau)d\tau\right\| = 0. \tag{13}$$

Поскольку функция $\tilde{u}(t)$ (как равномерный предел непрерывных функций) непрерывна на $[0, T]$, то $\int_0^T \|\tilde{u}(t)\|dt < \infty$. Отсюда и из (13) по лемме [4, с. 81] следует, что $\tilde{u}(t) = 0$ почти всюду на $[0, T]$. А так как она непрерывна, то $\tilde{u}(t) \equiv 0$. Теорема доказана.

В дальнейшем обобщенные решения задач Коши мы называем решениями этих задач. Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть L^* — оператор, сопряженный оператору L, $v_T \in H$. Решение задачи Коши*

$$\frac{dv}{dt} = -L^*v, \quad t \in [0, T], \tag{14}$$

$$v(T) = V_T \tag{15}$$

существует, единственно и имеет вид

$$v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\bar{\lambda}_k(T-t)}(v_T, \varphi_k)\psi_k. \tag{16}$$

Теорема 3. *Решение задачи* (1)–(3) *существует и единственно.*

Доказательство. Проверим условия теоремы Вейерштрасса [5, с. 57]. По формуле (7) имеем

$$u(T) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k T}(\varphi, \psi_k)\varphi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(f, \psi_k)\varphi_k, \tag{17}$$

где $\mu_k = \lambda_k^{-1}(e^{\lambda_k T} - 1)$. Правую часть (17) рассматриваем как линейный оператор $A(f, \varphi)$ в векторном пространстве $H^2 = H \bigoplus H$. Тогда для функционала (3) имеем:

$$I(f, \varphi) = \|A(f, \varphi) - u_0\|^2 + \|f\|^2 + \|\varphi\|^2 = \|A(f, \varphi) - u_0\|^2 + \left\| \begin{matrix} f \\ \varphi \end{matrix} \right\|_0^2 = I_1 + I_2,$$

где $\|\cdot\|_0$ — норма в H^2. Функционал $I(f, \varphi)$ рассматриваем в H^2. Поскольку I_2 — строго равномерно выпуклый функционал [5, с. 56], а I_1 — выпуклый, то $I(f, \varphi)$ — также строго равномерно выпуклый. Из базисности Рисса систем $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ и условий (4) следует ограниченность, а значит, и непрерывность оператора $A(f, \varphi) : H^2 \to H$. Поэтому $I(f, \varphi)$ непрерывен. Теорема доказана.

2. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Лемма 1. *Для приращения функционала* (3) *справедлива формула*

$$\begin{aligned} I(f + \Delta f, \varphi + \Delta\varphi) - I(f, \varphi) = -\mathrm{Re}\,(g, \Delta f) + 2\mathrm{Re}\,(f.\Delta f) + \|\Delta f\|^2 - \\ -\mathrm{Re}\,(v(0), \Delta\varphi) + 2\mathrm{Re}\,(\varphi, \Delta\varphi) + \|\Delta\varphi\|^2 + \|\Delta u(T)\|^2, \end{aligned} \tag{18}$$

где $v(t)$ — решение задачи (14)–(15) *для $v(T) = -2(u(T) - u_0)$; $u(t)$ — решение задачи* (1)–(2)*:*

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} (v(T), \mu_k\varphi_k)\psi_k, \tag{19}$$

μ_k — те же, что и в (17)*; $\Delta u(t)$ — решение задачи* (1)–(2) *с элементами Δf и $\Delta\varphi$ вместо соответственно f и φ; Δf и $\Delta\varphi$ таковы, что $f + \Delta f \in K_1$, $\varphi + \Delta\psi \in K_2$.*

Доказательство. Обозначим через $w(t)$ решение задачи (1)–(2), соответствующее $f + \Delta f$, $\varphi + \Delta\varphi$, тогда $\Delta u(t) = w(t) - u(t)$. Легко находим

$$\begin{aligned} I(f + \Delta f, \varphi + \Delta\varphi) - I(f, \varphi) = \|w(T) - u_0\|^2 + \|f + \Delta f\|^2 + \|\varphi + \Delta\varphi\|^2 - \|u(T) - u_0\|^2 - \|f\|^2 - \|\varphi\|^2 = \\ = 2\mathrm{Re}\,(u(T) - u_0, \Delta u(T)) + 2\mathrm{Re}\,(\varphi, \Delta\varphi) + 2\mathrm{Re}\,(f, \Delta f) + \|\Delta f\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2 + \|\Delta u(T)\|^2. \end{aligned} \tag{20}$$

Пусть $v_s(t)$ — решение задачи

$$\frac{dv_s}{dt} = -L^* v_s, \tag{21}$$

$$v_s(T) = \sum_{k=1}^{s} (v_T, \varphi_k)\psi_k, \tag{22}$$

где $v_T = -2(u(T) - u_0)$; и $\Delta u_k(t)$ — задачи

$$\frac{d}{dt}\Delta u_k = L\Delta u_k + \Delta f_k, \tag{23}$$

$$\Delta u_k(0) = \sum_{i=1}^{k} (\Delta\varphi, \psi_i)\varphi_i, \tag{24}$$

где $\Delta f_k = \sum\limits_{i=1}^{k} (\Delta f, \psi_i)\varphi_i$. Интегрированием по частям находим

$$\begin{aligned} -\int_0^T (\Delta f_k, v_s)dt = \int_0^T \left(L\Delta u_k - \frac{d}{dt}\Delta u_k, v_s \right) dt = \int_0^T \left(\Delta u_k, L^* v_s + \frac{d}{dt} v_s \right) dt - (\Delta u_k(t), v_s(t) \Big|_0^T = \\ = (\Delta u_k(0), v_s(0)) - (\Delta u_k(T), v_s(T)). \end{aligned} \tag{25}$$

Так как при $k \to \infty$ имеют место: $\Delta f_k \to \Delta f$, $\Delta u_k(T) \to \Delta u(T)$, $\Delta u_k(0) \to \Delta\varphi$, то, переходя к пределу в (25) при $k \to \infty$, получим

$$\int_0^T (\Delta f, v_s)dt = (\Delta u(T), v_s(T))) - (\Delta\varphi, v_s(0). \tag{26}$$

Далее, так как при $s \to \infty$ $v_s(t)$ стремится к $v(t)$ — решению задачи (14)–(15); для $v_s(t)$ в силу (16) справедливо $v_s(t) = \sum\limits_{k=1}^{s} e^{\bar{\lambda}_k(T-t)}(v_T, \varphi_k)\psi_k$ и, как нетрудно видеть, $\lim\limits_{s\to\infty}\int\limits_0^T(\Delta f, v_s)dt = \left(\Delta f, \sum\limits_{k=1}^{\infty}(v_T, \mu_k\varphi_k)\psi_k\right)$, то, переходя в (26) к пределу при $s \to \infty$, получим

$$(\Delta f, g) = (\Delta u(T), v_T) - (\Delta\varphi, v(0)). \tag{27}$$

Поскольку $v_T = -2(u(T) - u_0)$, то из (27) следует, что

$$\mathrm{Re}\,\{(\Delta f, g) + 2(\Delta u(T), u(T) - u_0) + (\Delta\varphi, v(0))\} = 0. \tag{28}$$

Вычитая теперь из (20) равенство (28), получим (18). Лемма доказана.

Теорема 4. *Для оптимальности пары f_0, φ_0 в задаче* (1)–(3) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:*

$$\min_{\varphi\in K_1}\left\{-\mathrm{Re}\,(g, f) + \|f\|^2\right\} = -\mathrm{Re}\,(g, f_0) + \|f_0\|^2, \tag{29}$$

$$\min_{\varphi\in K_2}\left\{-\mathrm{Re}\,(v(0), f) + \|\varphi\|^2\right\} = -\mathrm{Re}\,(v(0), f_0) + \|\varphi_0\|^2, \tag{30}$$

где $v(0)$ — решение задачи (14)–(15) *в точке $t = 0$ при $v(T) = -2(u(T) - u_0)$; $u(t)$ — решение задачи* (1)–(2) *при $f = f_0$, $\varphi = \varphi_0$; g — то же, что и в лемме* 1.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть f_0, φ_0 — оптимальная пара, и Δf, $\Delta\varphi$ таковы, что $f = f_0 + \Delta f \in K_1$, $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi \in K_2$. По лемме 1

$$-\mathrm{Re}\,(g, \Delta f) + 2\mathrm{Re}\,(f, \Delta f) + \|\Delta f\|^2 - \mathrm{Re}\,(v(0), \Delta\varphi) + 2\mathrm{Re}\,(\varphi, \Delta\varphi) + \|\Delta\varphi\|^2 + \|\Delta u(T)\|^2 \geq 0, \tag{31}$$

где по теореме 1 $\Delta u(T) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda kT}(\Delta\varphi, \psi_k)\varphi_k + \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(\Delta f, \psi_k)\varphi_k$. В силу (4) и того, что $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базисы Рисса, имеет место оценка

$$\|\Delta u(T)\| = C\left(\|\Delta f\| + \|\Delta\varphi\|\right), \tag{32}$$

где постоянная C не зависит от Δf и $\Delta\varphi$. Поэтому из (31) тем более следует, что

$$-\mathrm{Re}\,(g, \Delta f) + 2\mathrm{Re}\,(f, \Delta f) + \|\Delta f\|^2 - \mathrm{Re}\,(v(0), \Delta\varphi) + 2\mathrm{Re}\,(\varphi, \Delta\varphi) + \|\Delta\varphi\|^2 + C\left(\|\Delta f\| + \|\Delta\varphi\|\right)^2 \geq 0. \tag{33}$$

Возьмём в (33) $\Delta f = 0$, а вместо $\Delta\varphi$ возьмем $\alpha\Delta\varphi$, где $\alpha \in [0, 1]$. Разделим полученное неравенство на α и перейдем к пределу при $\alpha \to +0$, тогда $-\mathrm{Re}\,(v(0), \Delta\varphi) + 2\mathrm{Re}\,(\varphi_0, \Delta\varphi) \geq 0$, и, тем более, $-\mathrm{Re}\,(v(0), \Delta\varphi) + 2\mathrm{Re}\,(\varphi_0, \Delta\varphi) + \|\Delta\varphi\|^2 \geq 0$. Это и есть соотношение (30). Аналогично доказывается равенство (29).

Достаточность. Пусть для произвольных $f \in K_1$, $\varphi \in K_2$ имеют место неравенства:

$$-\mathrm{Re}\,(g, f) + \|f\|^2 \geq -\mathrm{Re}\,(g, f_0) + \|f_0\|^2, \tag{34}$$

$$-\mathrm{Re}\,(v(0), \varphi) + \|\varphi\|^2 \geq -\mathrm{Re}\,(v(0), \varphi_0) + \|\varphi_0\|^2. \tag{35}$$

Обозначим $f - f_0 = \Delta f$, $\varphi - \varphi_0 = \Delta\varphi$. Так как $\|f\|^2 - \|f_0\|^2 = 2\mathrm{Re}\,(f_0, \Delta f) + \|\Delta f\|^2$ и $\|\varphi\|^2 - \|\varphi_0\|^2 = 2\mathrm{Re}\,(\varphi_0, \Delta\varphi) + \|\Delta\varphi\|^2$, то неравенства (34), (35) принимают вид

$$-\mathrm{Re}\,(g, \Delta f) + 2\mathrm{Re}\,(f_0, \Delta f) + \|\Delta f\|^2 \geq 0, \tag{36}$$

$$-\mathrm{Re}\,(v(0), \Delta\varphi) + 2\mathrm{Re}\,(\varphi_0, \Delta\varphi) + \|\Delta\varphi\|^2 \geq 0. \tag{37}$$

Из (36) и (37) сразу следует, что $-\mathrm{Re}\,(g,\Delta f)+2\mathrm{Re}\,(f_0,\Delta f)+\|\Delta f\|^2-\mathrm{Re}\,(v(0),\Delta\varphi)+2\mathrm{Re}\,(\varphi_0,\Delta\varphi)+$ $+\|\Delta\varphi\|^2+\|\Delta u(T)\|^2\geq C$. По лемме 1 отсюда следует, что $I(f,\varphi)\geq I(f_0,\varphi_0)$ для любых $f\in K_1$, $\varphi\in K_2$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Для оптимальности пары f_0,φ_0 в задаче* (1)–(3) *в случае, когда $K_1=K_2=H$ (эту задачу в дальнейшем называем задачей* (1′)–(3′)*) необходимо и достаточно, чтобы пара f_0,φ_0 являлась решением системы уравнений*

$$f_0+\sum_{i,j=1}^{\infty}(\varphi_0,\psi_i)(e^{\lambda_i T}\varphi_i,\mu_j\varphi_j)\psi_j+\sum_{i,j=1}^{\infty}(f_0,\psi_i)(\mu_i\varphi_i,\mu_j\varphi_j)\psi_j=\sum_{j=1}^{\infty}(u_o,\mu_j\varphi_j)\psi_j, \tag{38}$$

$$\varphi_0+\sum_{i,j=1}^{\infty}(\varphi_0,\psi_i)(e^{\lambda_i T}\varphi_i,e^{\lambda_j T}\varphi_j)\psi_j+\sum_{i,j=1}^{\infty}(f_0,\psi_i)(\mu_i\varphi_i,e^{\lambda_j T}\varphi_j)\psi_j=\sum_{j=1}^{\infty}(u_o,e^{\lambda_j T}\varphi_j)\psi_j. \tag{39}$$

Доказательство. Так как

$$-\mathrm{Re}\,(g,f)+\|f\|^2=\|f-\tfrac{1}{2}g\|^2-\tfrac{1}{4}\|g\|^2, \tag{40}$$

$$-\mathrm{Re}\,(v(0),\varphi)+\|\varphi\|^2=\|\varphi-\tfrac{1}{2}v(0)\|^2-\tfrac{1}{4}\|v(0)\|^2, \tag{41}$$

то по теореме 4 для оптимальности пары f_0,g_0 необходимо и достаточно, чтобы

$$f_0=\tfrac{1}{2}g, \tag{42}$$

$$\varphi_0=\tfrac{1}{2}v(0). \tag{43}$$

Чтобы получить (38) подставим в (42) выражение для g по формуле (19), затем, заменяя в полученном уравнении $v(T)$ на $-2(u(T)-u_0)$ и $u(T)$ — на представление по формуле (7) в точке $t=t_0$ при $f=f_0$, $\varphi=\varphi_0$, получим (38). Аналогично получается (39). Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть $\alpha^0=(\alpha_1^0,\alpha_2^0,\ldots)^T$ и $\beta^0=(\beta_1^0,\beta_2^0,\ldots)^T$ (T — знак транспонирования) принадлежат пространству l_2 (элементы из l_2 считаем столбцами). Для того, чтобы пара f_0,φ_0, где*

$$f_0=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^0\varphi_k,\qquad \varphi_0=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^0\varphi_k, \tag{44}$$

являлась решением задачи (1′)–(3′)*, необходимо и достаточно, чтобы α^0,β^0 являлись решением системы уравнений*

$$(\Gamma+Q)\alpha+R\beta=p, \tag{45}$$

$$\mathcal{D}\alpha+(\Gamma+S)\beta=q, \tag{46}$$

где $\Gamma=(\varphi_i,\varphi_j)_{j,i=1}^{\infty}$, $Q=(\mu_i\varphi_i,\mu_j\varphi_j)_{j,i=1}^{\infty}$, $R=(e^{\lambda_i T}\varphi_i,\mu_j\varphi_j)_{j,i=1}^{\infty}$, $\mathcal{D}=(\mu_i\varphi_i,e^{\lambda_j T}\varphi_j)_{j,i=1}^{\infty}$, $S=(e^{\lambda_i T}\varphi_i,e^{\lambda_j T}\varphi_j)_{j,i=1}^{\infty}$ — бесконечные матрицы; $p=(p_1,p_2,\ldots)^T$, $p_i=(u_0,\mu_i\varphi_i)$ $(i=1,2,\ldots)$; $q=(q_1,q_2,\ldots)^T$, $q_i=(u_0,e^{\lambda_i T}\varphi_i)$ $(i=1,2,\ldots)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть f_0,φ_0 — решение задачи (1′)–(3′) и имеют место представления (44). И пусть также $f_0=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\xi_j\psi_j$, $\varphi_0=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\eta_j\psi_j$. Тогда

$$f_0=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^0\varphi_i=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\psi_j, \tag{47}$$

$$\varphi_0=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i^0\varphi_i=\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j\psi_j. \tag{48}$$

Умножим (47) скалярно на φ_k $(k=1,2,\ldots)$, тогда

$$\xi_k=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^0(\varphi_i,\varphi_k). \tag{49}$$

Подставим (49) в (47):

$$f_0 = \sum_{j,i=1}^{\infty} \alpha_i^0 (\varphi_i, \varphi_j)\psi_j. \tag{50}$$

Подставим (50) в первое слагаемое слева в (38) и приравняем коэффициенты при ψ_j $(j = 1, 2, \ldots)$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^0 (\varphi_i, \varphi_j) + \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_0, \psi_i)(e^{\lambda_i T}\varphi_i, \mu_j\varphi_j) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_0, \psi_i)(\mu_i\varphi_i, \mu_j\varphi_j) = (u_0, \mu_j\varphi_j). \tag{51}$$

Подставим в (51) представления (44), тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^0 (\varphi_i, \varphi_j) + \sum_{i,k=1}^{\infty} \beta_k^0 (\varphi_k, \psi_i)(e^{\lambda_i T}\varphi_i, \mu_j\varphi_j) + \sum_{i,k=1}^{\infty} \alpha_k^0 (\varphi_k, \psi_i)(\mu_i\varphi_i, \mu_j\varphi_j) = (u_0, \mu_j\varphi_j) \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^0 (\varphi_i, \varphi_j) + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^0 (e^{\lambda_i T}\varphi_i, \mu_j\varphi_j) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^0 (\mu_i\varphi_i, \mu_j\varphi_j) = (u_0, \mu_j\varphi_j) \quad (j = 1, 2, \ldots). \tag{52}$$

Уравнение (52) совпадает с уравнением (45). Аналогично получается уравнение (46).

Достаточность доказывается обратными рассуждениями. Теорема доказана.

Замечание. Из существования единственного решения задачи $(1')$–$(3')$ следует существование единственного решения системы (45)–(46) при $\alpha, \beta \in l_2$.

3. РЕШЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Для нахождения приближенного решения задачи $(1')$–$(3')$ рассмотрим задачу (1)–(3) для случая, когда $K_1 = K_2 = T^{(n)}$, где $T^{(n)}$ — подпространство, порожденное системой $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, и обозначим эту задачу $P^{(n)}$. Из теоремы 3 следует существование единственного решения задачи $P^{(n)}$ $(n = 1, 2 \ldots)$.

Теорема 7. *Для того, чтобы пара* $f_0^{(n)}$, $\varphi_0^{(n)}$ $(n = 1, 2 \ldots)$, *где*

$$f_0^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} \varphi_k, \qquad \varphi_0^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(n)} \varphi_k, \tag{53}$$

являлась решением задачи $P^{(n)}$ $(n = 1, 2 \ldots)$, *необходимо и достаточно, чтобы векторы*

$$\alpha^{(n)} = (\alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_n^{(n)})^T, \qquad \beta^{(n)} = (\beta_1^{(n)}, \ldots, \beta_n^{(n)})^T \tag{54}$$

являлись решением системы уравнений

$$(\Gamma_n + Q_n)\alpha^{(n)} + R_n\beta^{(n)} = p^{(n)}, \tag{55}$$

$$\mathcal{D}_n\alpha^{(n)} + (\Gamma_n + S_n)\beta^{(n)} = q^{(n)}, \tag{56}$$

где $\Gamma_n = (\varphi_i, \varphi_j)_{j,i=1}^n$, $Q_n = (\mu_i\varphi_i, \mu_j\varphi_j)_{j,i=1}^n$, $R_n = (e^{\lambda_i T}\varphi_i, \mu_j\varphi_j)_{j,i=1}^n$, $\mathcal{D}_n = (\mu_i\varphi_i, e^{\lambda_j T}\varphi_j)_{j,i=1}^n$, $S_n = (e^{\lambda_i T}\varphi_i, e^{\lambda_j T}\varphi_j)_{j,i=1}^n$, $p^{(n)} = ((u_0, \mu_1\varphi_1), \ldots, (u_0, \mu_n\varphi_n))^T$, $q^{(n)} = ((u_0, e^{\lambda_n T}\varphi_1), \ldots, (u_0, e^{\lambda_n T}\varphi_n))^T$.

Доказательство. *Необходимость.* По теореме 4 имеем

$$\min_{f \in T^{(n)}} \{-\mathrm{Re}\,(g, f) + \|f\|^2\} = -\mathrm{Re}\,(g, f_0^{(n)}) + \|f_0^{(n)}\|^2, \tag{57}$$

$$\min_{\varphi \in T^{(n)}} \{-\mathrm{Re}\,(v(0), \varphi) + \|\varphi\|^2\} = -\mathrm{Re}\,(v(0), \varphi_0^{(n)}) + \|\varphi_0^{(n)}\|^2, \tag{58}$$

где g определен по формуле (19), в которой $v(T) = -2(u(T) - u(0))$; $u(t)$ — решение задачи (1)–(2), соответствующие $f = f_0^{(n)}$, $\varphi = \varphi_0^{(n)}$, $v(0)$ — значение в точке $t = 0$ решения задачи (14)–(15). Так как имеют место равенства (40), (41), то из (57), (58) следует, что $f_0^{(n)}$ является проекцией вектора

$\frac{1}{2}g$ на $T^{(n)}$, а $\varphi_0^{(n)}$ — проекцией вектора $\frac{1}{2}v(0)$ на $T^{(n)}$. По свойству проекций векторы $\frac{1}{2}g - f_0^{(n)}$ и $\frac{1}{2}v(0) - \varphi_0^{(n)}$ ортогональны $T^{(n)}$. Отсюда, учитывая (53), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)}(\varphi_k, \varphi_j) = \left(\frac{1}{2}g, \varphi_j\right) \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{59}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(n)}(\varphi_k, \varphi_j) = \left(\frac{1}{2}v(0), \varphi_j\right) \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{60}$$

Покажем, что из (59) следует (55). Так как из (7) и (53) следует, что

$$u(T) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k T}(\varphi_0^{(n)}, \psi_k)\varphi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(f_0^{(n)}, \psi_k)\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(n)} e^{\lambda_k T}\varphi_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)}\mu_k\varphi_k$$

и $v(T) = -2(u(T) - u_0)$, то по (19)

$$\frac{1}{2}g = -\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(n)} e^{\lambda_k T}(\varphi_k, \mu_i\varphi_i)\psi_i - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)}(\mu_k\varphi_k, \mu_i\varphi_i)\psi_i + \sum_{i=1}^{\infty}(u_0, \mu_i\varphi_i)\psi_i.$$

Тогда

$$\left(\frac{1}{2}g, \varphi_j\right) = -\sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(n)} e^{\lambda_k T}(\varphi_k, \mu_j\varphi_j) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)}(\mu_k\varphi_k, \mu_j\varphi_j) + (u_0, \mu_j\varphi_j) \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{61}$$

Подставив (61) в (59), получим (55). Аналогично из (60) получается (56). Достаточность доказывается обратными рассуждениями.

Замечание. Из существования единственного решения задачи (1)–(3) следует существование единственного решения системы (55)–(56).

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Введем гильбертово пространство $l_2^2 = l_2 \oplus l_2$. Элементы из l_2^2 обозначим $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$, где $\xi, \eta \in l_2$. Если $\theta_i = \begin{pmatrix}\xi^i\\ \eta^i\end{pmatrix} \in l_2^2$ $(i = 1, 2)$, то скалярное произведение в l_2^2 определяем формулой $\langle\theta_1, \theta_2\rangle = (\xi^1, \xi^2)_1 + (\eta^1, \eta^2)_1$, где $(\cdot,\cdot)_1$ есть скалярное произведение в l_2, тогда $\|\theta\|_2^2 = \|\xi\|_1^2 + \|\eta\|_1^2$, где $\|\cdot\|_1$ — норма в l_2, $\|\cdot\|_2$ — норма в l_2^2.

Лемма 2. *Пусть векторы $\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}$ из* (54) *являются решением системы* (55)–(56). *Обозначим $\tilde{\alpha}^{(n)} = (\alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_n^{(n)}, 0, 0, \ldots)^T$, $\tilde{\beta}^{(n)} = (\beta_1^{(n)}, \ldots, \beta_n^{(n)}, 0, 0, \ldots)^T$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — элементы из l_2. Тогда последовательность векторов $\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{(n)}\\ \tilde{\beta}^{(n)}\end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничена в l_2^2.*

Доказательство. По теореме 7 векторы $f_0^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)}\varphi_k$, $\varphi_0^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k^{(n)}\varphi_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$ являются решением задачи $P^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Поскольку для всех $n = 1, 2, \ldots$ $J(f_0^{(n)}, \varphi_0^{(n)}) \leq$ $\leq J(f_0^{(1)}, \varphi_0^{(1)})$, то $\|f_0^{(n)}\|, \|\varphi_0^{(n)}\| \leq C$, где постоянная C не зависит от n. Отсюда, в частности, следует, что $\|f_0^{(n)}\| = \|\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)}\varphi_k\| \leq C$. Тогда из пункта 3) в теореме Бари [3, с. 374] получаем $\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k^{(n)}| \leq C_1\|\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)}\varphi_k\|^2 \leq C_1C^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Поэтому последовательность $\tilde{\alpha}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничена в l_2. Аналогично доказывается ограниченность в l_2 последовательности $\tilde{\beta}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Обозначим через $\tilde{\Gamma}_n, \tilde{Q}_n, \tilde{R}_n, \tilde{\mathcal{D}}_n, \tilde{S}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ матрицы бесконечного порядка, полученные соответственно из $\Gamma_n, Q_n, R_n, \mathcal{D}_n, S_n$ добавлением бесконечного числа нулей в качестве своих элементов в каждую строку и каждый столбец. Тогда операторы A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ и A,*

действующие из l_2^2 в l_2^2, определенные формулами $A_n = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho_n\\ \sigma_n\end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho\\ \sigma\end{pmatrix}$, *где* $\rho_n = (\tilde{\Gamma_n}+\tilde{Q_n})\xi+\tilde{R_n}\eta$, $\sigma_n = \tilde{\mathcal{D}_n}\xi+(\tilde{\Gamma_n}+\tilde{S_n})\eta$, $\rho = (\Gamma+Q)\xi+R\eta$, $\sigma = \mathcal{D}\xi+(\Gamma+S)\eta$, *самосопряжены.*

Доказательство. Доказательство проведем лишь для оператора A. Так как $\Gamma = \overline{\Gamma}^T$, $Q = \overline{Q}^T$, $S = \overline{S}^T$, $R = \overline{\mathcal{D}}^T$, то для произвольного $\begin{pmatrix}\mu\\ \nu\end{pmatrix} \in l_2^2$ имеем

$$\left\langle A\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mu\\ \nu\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}\rho\\ \sigma\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mu\\ \nu\end{pmatrix}\right\rangle = (\rho,\mu)_1 + (\sigma,\nu)_1 = ((\Gamma+Q)\xi + R\eta,\mu)_1 + (\mathcal{D}\xi + (\Gamma+S)\eta,\nu)_1 =$$

$$= (\xi, (\Gamma+Q)\mu + \overline{\mathcal{D}}^T\nu)_1 + (\eta, \overline{R}^T\mu + (\Gamma+S)\nu)_1 = \left\langle \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}(\Gamma+Q)\mu + \overline{\mathcal{D}}^T\nu\\ \overline{R}^T\mu + (\Gamma+S)\nu\end{pmatrix}\right\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}(\Gamma+Q)\mu + R\nu\\ \mathcal{D}\mu + (\Gamma+S)\nu\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}\mu\\ \nu\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Последовательность операторов A_n поточечно сходится к оператору A.*

Доказательство. Так как для произвольного $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \in l_2^2$

$$(A - A_n)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho-\rho_n\\ \sigma-\sigma_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\Gamma+Q-\tilde{\Gamma}_n-\tilde{Q}_n)\xi + (R-\tilde{R}_n)\eta\\ (\mathcal{D}-\tilde{\mathcal{D}}_n)\xi + (\Gamma+S-\tilde{\Gamma}_n-\tilde{S}_n)\eta\end{pmatrix},$$

то достаточно доказать, что поточечно в l_2 к нулю сходятся операторы, порожденные матрицами $\Gamma-\tilde{\Gamma}_n$,$Q-\tilde{Q}_n$, $R-\tilde{R}_n$, $\mathcal{D}-\tilde{\mathcal{D}}_n$, $S-\tilde{S}_n$ (в дальнейшем произвольный оператор, действующий из l_2 в l_2, порожденный матрицей T, называем оператором T). Докажем такую сходимость лишь для операторов $\Gamma-\tilde{\Gamma}_n$ (в остальных случаях доказательство проводится аналогично). Имеем для $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots)^T \in l_2$:

$$\|(\Gamma-\tilde{\Gamma_n})\xi\|_1^2 = \sum_{j=1}^{n}\Big|\sum_{i=n+1}^{\infty}(\varphi_i,\varphi_j)\xi_i\Big|^2 + \sum_{j=n+1}^{\infty}\Big|\sum_{i=1}^{\infty}(\varphi_i,\varphi_j)\xi_i\Big|^2. \tag{62}$$

Поскольку в силу пункта 4) из теоремы Бари [3, с. 374] оператор Γ ограничен в l_2, то при n достаточно большом второе слагаемое в (62) меньше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$. Рассмотрим первое слагаемое из (62). Обозначим $\tilde{\xi}^{(n+1)} = (\tilde{\xi_1}^{(n+1)}, \tilde{\xi_2}^{(n+1)},\ldots)^T$, где $\tilde{\xi}_i^{(n+1)} = \begin{cases}0, & 1\le i\le n,\\ \xi_i, & i\ge n+1.\end{cases}$ Опять, используя ограниченность Γ, при n достаточно большом и произвольном $\varepsilon > 0$ получим

$$\sum_{j=1}^{n}\Big|\sum_{i=n+1}^{\infty}(\varphi_i,\varphi_j)\xi_i\Big|^2 = \sum_{j=1}^{n}\Big|\sum_{i=1}^{\infty}(\varphi_i,\varphi_j)\tilde{\xi_i}^{(n+1)}\Big|^2 \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty}\Big|\sum_{i=1}^{\infty}(\varphi_i,\varphi_j)\tilde{\xi_i}^{(n+1)}\Big|^2 \le C\|\tilde{\xi}^{(n+1)}\|_1^2 = C\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^2 < C\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Операторы $Q, S, \mathcal{D}, R$ являются вполне непрерывными в l_2.*

Доказательство. Докажем вполне непрерывность оператора R. Обозначим $[R]_n$ матрицу, полученную из матрицы R обнулением всех её элементов, расположенных в строках, начиная с $(n+1)$-й строки. Имеем для $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots)^T \in l_2$

$$\|(R-[R]_n)\xi\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty}|\mu_j|^2\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k(\varphi_k,\varphi_j)\Big|^2, \tag{63}$$

где $\eta_k = e^{\lambda_k T}\xi_k$. Из базисности Рисса системы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ следует оценка $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|(\varphi_k,\varphi_j)|^2 \le C\|\varphi_j\|^2 \le C_1$, где постоянная C_1 не зависит от j. Применяя неравенство Гельдера ко внутренней сумме в (63),

используя только что полученную оценку и (4), получим для любого $\|\xi\|_1 \le 1$: $\|(R-[R]_n)\xi\|_1^2 \le$ $\le C_1\|\eta\|_1^2 \sum\limits_{j=n+1}^{\infty} |\mu_j|^2 \le C_2\|\xi\|_1^2 \sum\limits_{j=n+1}^{\infty} |\mu_j|^2 < \varepsilon$, где $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots)^T$, $\varepsilon > 0$ и произвольно мало. Поэтому конечномерные операторы $[R]_n$ сходятся к оператору R равномерно. Отсюда следует, что R вполне непрерывен. Так как оператор $\mathcal{D}$ является сопряженным к оператору R, то и он вполне непрерывен. Вполне непрерывность операторов Q и S доказывается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 6. *Операторы* $(\Gamma+Q)^{-1}$, $(\Gamma+S)^{-1}$ *существуют, ограничены и определены всюду в* l_2.

Доказательство. Введем две вспомогательных задачи: одна из них получается из задачи $(1')$–$(3')$ при фиксированном $f=0$, управлением в которой является лишь $\varphi \in H$, а вторая — из задачи $(1')$–$(3')$ при фиксированном φ и управлением в ней является лишь $f \in H$. Обозначим первую задачу (A), а вторую (B). Используя теоремы 1–3 и проводя рассуждения, аналогичные проведенным в лемме 1 и теоремах 3–6 для каждой из этих задач, получим следующие утверждения.

1. Решение задачи (A) существует и единственно. Пусть $\alpha^0 = (\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots)^T \in l_2$. Для того, чтобы $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^0 \varphi_k$ являлся решением задачи (A), необходимо и достаточно, чтобы α^0 являлся решением уравнения

$$(\Gamma+Q)\alpha = p. \tag{64}$$

2. Решение задачи (B) существует и единственно. Пусть $\beta^0 = (\beta_1^0, \beta_2^0, \ldots)^T \in l_2$. Для того, чтобы ряд $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k^0 \varphi_k$ являлся решением задачи (B), необходимо и достаточно, чтобы β^0 являлось решением уравнения $(\Gamma+S)\beta = q$.

Покажем, что существует, ограничен и определен во всем l_2 оператор $(E+\Gamma^{-1}Q)^{-1}$ (здесь E — единичный оператор в l_2). Для этого рассмотрим уравнение

$$(E+\Gamma^{-1}Q)\alpha = 0, \tag{65}$$

где $0 = (0, 0, \ldots)^T$, которое получается из (64) при $u_0 = 0$. В силу единственного решения задачи (A) вектор $\alpha = 0$ является единственным решением уравнения (65). Из леммы 5 следует, что $\Gamma^{-1}Q$ является вполне непрерывным оператором. Тогда по теореме 3 [6, с. 275] неоднородное уравнение $(E+\Gamma^{-1}Q)\alpha = \xi$ разрешимо при любом $\xi \in l_2$ и оператор $(E+\Gamma^{-1}Q)^{-1}$ ограничен в l_2, и, следовательно, ограничен и оператор $(\Gamma+Q)^{-1}$. Аналогично доказываются подобные утверждения для оператора $(\Gamma+S)^{-1}$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Множество значений оператора* $A : L_2^2 \to l_2^2$ *совпадает со всем пространством* l_2^2.

Доказательство. Для произвольных $\xi, \eta \in l_2$ рассмотрим систему уравнений

$$(\Gamma+Q)\alpha + \mathcal{D}\beta = \xi, \qquad R\alpha + (\Gamma+S)\beta = \eta. \tag{66}$$

Используя существование по лемме 6 операторов $(\Gamma+Q)^{-1}$ и $\Gamma+S)^{-1}$, запишем эту систему в виде

$$\alpha + (\Gamma+Q)^{-1}R\beta = (\Gamma+Q)^{-1}\xi, \qquad (\Gamma+S)^{-1}\mathcal{D}\alpha + \beta = (\Gamma+S)^{-1}\eta \tag{67}$$

и, вводя обозначения $V = (\Gamma+Q)^{-1}R$, $W = (\Gamma+S)^{-1}\mathcal{D}$ — в блочном виде,

$$(E+P)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \tag{68}$$

где E — единичный оператор в l_2^2, $P = \begin{pmatrix}0 & V\\ W & 0\end{pmatrix}$, а ξ и η имеют новый смысл. Поскольку из леммы 5 следует, что операторы V и W вполне непрерывны в l_2, то оператор P вполне непрерывен в l_2^2. По теореме 3 [6, с. 275], чтобы уравнение (68) было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$(E+P)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{69}$$

имело лишь тривиальное решение. Так как уравнение (69) эквивалентно системе (66) при $\xi = \eta = 0$, то в силу единственности решения задачи $(1')$–$(3')$ при $u_0 = 0$ и по теореме 6 решением уравнения (69) является лишь $\alpha = \beta = 0$. Лемма доказана.

Используя введенные в лемме 2 векторы $\tilde{\alpha}^{(n)}$, $\tilde{\beta}^{(n)}$; аналогично определяя по векторам $p^{(n)}, q^{(n)}$ векторы $\tilde{p}^{(n)}, \tilde{q}^{(n)}$ и используя операторы A и A_n $(n = 1, 2, \ldots)$, запишем системы (45)–(46) и (55)–(56) соответственно в виде

$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \tag{70}$$

$$A_n \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\beta}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{p}^{(n)} \\ \tilde{q}^{(n)} \end{pmatrix}. \tag{71}$$

Теорема 8. *Пусть* $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ *— решение уравнения* (70) *и* $\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\beta}^{(n)} \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *— уравнения* (71), *построенное по решению* $\begin{pmatrix} \alpha^{(n)} \\ \beta^{(n)} \end{pmatrix}$ *системы* (55)–(56). *Тогда* $\tilde{\alpha}_i^{(n)} \to \alpha_i$, $\tilde{\beta}_i^{(n)} \to \beta_i$ *при* $n \to \infty$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots$, *вообще говоря, неравномерно.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что в силу замечаний к теоремам 6 и 7 указанные решения уравнений (70) и (71) существуют. Далее, так как по лемме 3 операторы A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — самосопряженные, то для любого $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in l_2^2$ из (71) следует, что

$$\left\langle \begin{pmatrix} \tilde{p}^{(n)} \\ \tilde{q}^{(n)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle A_n \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\beta}^{(n)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\beta}^{(n)} \end{pmatrix}, A_n \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle. \tag{72}$$

Так как $\tilde{p}^{(n)} \to p$, $\tilde{q}^{(n)} \to q$ при $n \to \infty$, то из (72), (70) и леммы 3 получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\beta}^{(n)} \end{pmatrix}, A_n \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle. \tag{73}$$

Используя леммы 2 и 4, находим

$$\left| \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\beta}^{(n)} \end{pmatrix}, A_n \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\beta}^{(n)} \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle \right| = \left| \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\beta}^{(n)} \end{pmatrix}, (A_n - A) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle \right| \le$$
$$\le \left\| \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\beta}^{(n)} \end{pmatrix} \right\|_2 \left\| (A - A_n) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\|_2 < C\varepsilon$$

для произвольного $\varepsilon > 0$ при n достаточно большом. Поэтому из (73) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\beta}^{(n)} \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Отсюда в силу лемм 2 и 7 по теореме 8 [6, с. 219] следует, что последовательность $\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} \\ \tilde{\beta}^{(n)} \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ слабо сходится в l_2^2. То есть для произвольного $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in l_2^2$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(n)} - \alpha \\ \tilde{\beta}^{(n)} - \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \tag{74}$$

Из (74) следует, что в пространстве l_2 последовательность $\tilde{\alpha}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ слабо сходится к α, а $\tilde{\beta}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ слабо сходится к β. Отсюда и из теоремы 9 [6, с. 219] следует утверждение теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00270) *и гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ* (*проект* НШ-4383.2010.1)

Библиографический список

1. *Аллахвердиев, Дж.Э.* Об одной задаче оптимального управления в гильбертовом пространстве / Дж.Э. Аллахвердиев, Н.К. Аллахвердиева // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. XIII, № 12. – С. 2124–2134.
2. *Аллахвердиева, Н.К.* Необходимое и достаточное условие оптимальности для некоторой задачи управления системой, описываемой дифференциально-операторным уравнением / Н.К. Аллахвердиева // Вопросы математической кибернетики и прикладной математики. – Баку: ЭЛМ, 1980. – Вып. 4. – С. 44–54.
3. *Гохберг, И.Ц.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
4. *Крейн, С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
5. *Васильев, Ф.П.* Методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 399 с.
6. *Люстерник, Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 519 с.

УДК 514.133+514.17

КОНЕЧНЫЕ ЗАМКНУТЫЕ 3(4)-КОНТУРЫ РАСШИРЕННОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Л.Н. Ромакина

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: romakinaln@mail.ru

Введены в рассмотрение конечные замкнутые n-контуры расширенной гиперболической плоскости H^2. Подробно исследованы топологические и метрические свойства конечных замкнутых 3(4)-контуров. Получены аналоги предложения Паша. Доказано: существование двух типов 4-контуров; выпуклость простого 4-контура.

Ключевые слова: конечный замкнутый n-контур, простой 4-контур, внутренность конечного замкнутого контура, выпуклый замкнутый конечный контур.

Finite Closed 3(4)-Loops of Extended Hyperbolic Plane

L.N. Romakina

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: romakinaln@mail.ru

This article considers finite closed n-loops of the extended hyperbolic plane H^2. The paper deals with topological and metric properties of the finite closed 3(4)-loops. Pasha statement analogues have been also obtained. We proved the existence of two types 4-loops and convexity of the plain 4-loop.

Key words: finite closed n-loop, plain 4-loop, interior of a finite closed isotropic loop, convex finite closed loop.

ВВЕДЕНИЕ

1. *Расширенной гиперболической плоскостью* H^2 называют проективную плоскость с фиксированной на ней овальной линией γ [1], линию γ в этом случае называют *абсолютом плоскости* H^2. Все точки линии γ называют бесконечно удаленными, или несобственными. Внутренняя область относительно овальной линии γ является полной плоскостью Лобачевского, а на множестве всех внешних относительно абсолюта точек, образующих так называемую идеальную область плоскости Лобачевского, можно построить различные геометрии. Каждую прямую плоскости H^2 по наличию общих с абсолютом точек можно отнести к одному из трех типов. Прямые, пересекающие абсолют в двух действительных точках, называют *гиперболическими*, в двух мнимо сопряженных точках — *эллиптическими*, а касательные к абсолюту называют *параболическими*, или *изотропными прямыми*. В работе [2] на прямых указанных типов с помощью точек абсолюта введены понятия: направление, луч, отрезок, квазиотрезок, середина отрезка и квазиотрезка, квазисередина отрезка. Ослабляя строгость определений, приведем те из них, которые будут использованы в данной работе.

© Л.Н. Ромакина, 2010

Проективная прямая является замкнутой, поэтому для точек на ней имеют место те же отношения порядка, что и для точек, например, окружности евклидовой плоскости. Единственным инвариантом для точек проективной прямой является сложное, или ангармоническое, отношение четырех точек.

Начнем с параболических прямых. Так как именно параболическими являются все прямые евклидовой плоскости, то нам нужно лишь описать известные отношения средствами проективной геометрии. Сопровождая следующие рассуждения рис. 1, прямые будем изображать замкнутыми линиями l.

Пусть на параболической прямой l (рис. 1, *а*) точка K принадлежит абсолюту. Удаление точки K меняет топологию прямой l, но сохраняет связность. Так что теперь любая точка A прямой l разделяет прямую на две части. Получаем два направления на прямой l, два *луча* с началом в точке A. Любые две точки A и B прямой l разделяют ее на три пересекающиеся не более чем в одной точке части, две из которых — лучи AK и BK. Третью часть называют *отрезком* AB. Или более строго: *отрезком* AB *параболической прямой* l называют множество, состоящее из точек A, B и всех точек X прямой l, разделяющих с абсолютной точкой прямой l пару точек A, B.

Разделенность (неразделенность) пар A, B и X, K точек прямой l соответствует неравенству $(ABXK) < 0$ ($(ABXK) > 0$), где $(ABXK)$ — сложное отношение четырех данных точек. Положение точки X отрезка AB параболической прямой l (рис. 1, *а*) можно характеризовать неравенством $(ABXK) < 0$, а точки Y луча BK — неравенством $(AYBK) < 0$.

Эллиптическая прямая не имеет общих действительных точек с абсолютом, поэтому как и проективная прямая является замкнутой. Любые две точки A и B эллиптической прямой l (рис. 1, *б*) разбивают множество всех точек этой прямой, за исключением точек A и B, на два непустых непересекающихся множества, каждое из которых называют *отрезком эллиптической прямой с концами в точках* A *и* B. На рис. 1, *б* изображены два отрезка эллиптической прямой AXB, AYB. Если K_1, K_2 — абсолютные мнимо сопряженные точки эллиптической прямой l, то для каждой пары точек A, B на прямой l найдется единственная пара действительных точек S_1, S_2, гармонически разделяющая и пару A, B, и пару K_1, K_2: $(S_1S_2AB) = -1$, $(S_1S_2K_1K_2) = -1$. Точки S_1, S_2 принадлежат различным отрезкам, определенным точками A и B. Если точка S_1 (S_2) принадлежит отрезку AXB (AYB), в этом случае $(S_1XAB) > 0$ ($(S_2YAB) > 0$), ее называют *серединой* этого отрезка.

Гиперболическая прямая имеет две действительные абсолютные точки. Поэтому как гипербола евклидовой плоскости она состоит из двух связных частей, называемых *ветвями*.

Пусть на гиперболической прямой l (рис. 1, *в*) с бесконечно удаленными точками K_1, K_2 точки A и B принадлежат одной ветви: $(ABK_1K_2) > 0$. Тогда эти точки разделяют ветвь на три пересекающиеся не более чем в одной точке части: луч AK_1, луч BK_2 и отрезок AB. *Отрезком* AB *гиперболической прямой* l называют множество, состоящее из точек A, B одной ветви и всех точек X прямой l, разделяющих с каждой абсолютной точкой прямой l пару точек A, B. Условие принадлежности точки X отрезку AB можно записать неравенством $(ABXK_1) < 0$.

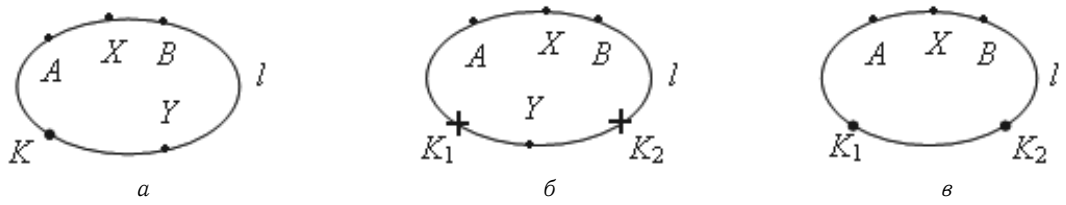


Рис. 1

Если AB — отрезок гиперболической прямой l, то на l существует единственная пара действительных точек S_1, S_2, гармонически разделяющая пары точек A, B и K_1, K_2: $(S_1S_2AB) = -1$, $(S_1S_2K_1K_2) = -1$. Одна из точек S_1, S_2 принадлежит отрезку AB, ее называют *серединой отрезка* AB. Другая точка принадлежит ветви прямой l, не содержащей точек A и B, ее называют *квазисерединой отрезка* AB.

Если точки A и B принадлежат различным ветвям гиперболической прямой l с несобственными точками K_1, K_2, то они делят прямую l на две части. Одна из частей содержит точку K_1, другая — точку K_2. Каждую часть называют *квазиотрезком* гиперболической прямой с концами в точках A и B.

2. Пусть A_1, A_2, ..., A_n — такая упорядоченная последовательность действительных точек расширенной гиперболической плоскости H^2, что каждая прямая A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 является изотропной. Совокупность всех отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 соответствующих изотропных прямых назовем *замкнутым конечным n-контуром* или кратко: *n-контуром*. Точки A_1, A_2, ..., A_n назовем *вершинами*, прямые A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 — *сторонами*, а отрезки A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 — *ребрами* n-контура. Ребра, имеющие общую вершину, и вершины, принадлежащие одному ребру, назовем *смежными* ребрами, вершинами соответственно.

Точку плоскости H^2 назовем *особой* точкой n-контура, если она является общей точкой несмежных ребер данного n-контура.

Замкнутый конечный контур назовем *простым*, если он не имеет особых точек. В противном случае контур будем называть *составным*.

Точку плоскости H^2 назовем *внутренней* относительно n-контура, если она не принадлежит данному n-контуру, и каждая прямая, проходящая через эту точку, имеет с n-контуром, по крайней мере, две общие точки.

Непустое множество всех внутренних относительно n-контура точек плоскости H^2 назовем *внутренностью* данного контура. Обозначение: $\operatorname{int} F$ — внутренность контура F.

По определению конечный замкнутый n-контур не содержит бесконечно удаленных точек, а каждая его сторона касается абсолютной овальной квадрики плоскости H^2, следовательно, каждая его точка является внешней по отношению к абсолюту. Не каждая прямая плоскости H^2, в отличие от любой прямой евклидовой плоскости или плоскости Лобачевского, разделяет плоскость на части, поэтому используемое в указанных геометриях определение выпуклого многоугольника как многоугольника, все точки которого принадлежат одной полуплоскости относительно каждой из сторон, для многоугольников плоскости H^2, в частности для изотропных контуров, неприменимо. Кроме того, любые две точки плоскости H^2 могут определять: отрезок параболической прямой; два отрезка эллиптической прямой; отрезок или квазиотрезок гиперболической прямой плоскости H^2. С учетом этого, корректируя известное определение евклидовой геометрии, можно ввести следующее определение выпуклого замкнутого конечного контура плоскости H^2.

Пусть замкнутый конечный контур F плоскости H^2 обладает внутренностью. Будем говорить, что отрезок (квазиотрезок) *принадлежит внутренности* контура F, если каждая точка отрезка (квазиотрезка) является внутренней относительно данного контура.

Замкнутый конечный контур F плоскости H^2 назовем *выпуклым*, если для любых двух его внутренних точек существует отрезок или квазиотрезок с концами в этих точках, принадлежащий внутренности данного контура.

В данной работе установлено, что из всех замкнутых конечных 3(4)-контуров выпуклым является только каждый простой 4-контур, конечный замкнутый 3-контур не обладает внутренностью. Получены аналоги предложения Паша: для 3-контуров — утверждения 2), 3) теоремы 1, для 4-контуров — утверждения 4)–6) теоремы 2.

1. КОНЕЧНЫЕ ЗАМКНУТЫЕ 3-КОНТУРЫ ПЛОСКОСТИ H^2

Теорема 1. *Пусть ABC — конечный замкнутый 3-контур плоскости H^2. Выполняются следующие утверждения:*

1) не существует точек, внутренних относительно контура ABC;

2) любая прямая плоскости H^2 имеет с контуром ABC, по крайней мере, одну общую точку;

3) если некоторая прямая не содержит вершин контура ABC и пересекает два его ребра, то она пересекает и третье ребро контура.

Доказательство. На проективной плоскости любую овальную линию можно задать уравнением

$$x_1x_2 - x_3^2 = 0. \tag{1}$$

Проективный репер плоскости H^2, уравнение абсолютной линии γ в котором имеет вид (1), назовем *каноническим*.

В каждом каноническом репере плоскости H^2 первые две вершины и единичная точка принадлежат линии γ, а третья вершина является полюсом прямой, соединяющей две первые вершины.

Каждое ребро данного контура ABC — отрезок изотропной прямой. Не теряя общности рассуждений, вершину A_3 канонического репера $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ плоскости H^2 совместим с точкой A, а вершины A_1, A_2 — с несобственными точками сторон AB и AC соответственно (рис. 2). Единичную точку E репера R поместим в точку касания прямой BC с линией γ. В присоединенном репере R вершины данного контура имеют координаты $A(0:0:1)$, $B(2:0:1)$, $C(0:2:1)$, а его стороны заданы уравнениями $AB: x_2 = 0$; $AC: x_1 = 0$; $BC: x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$.

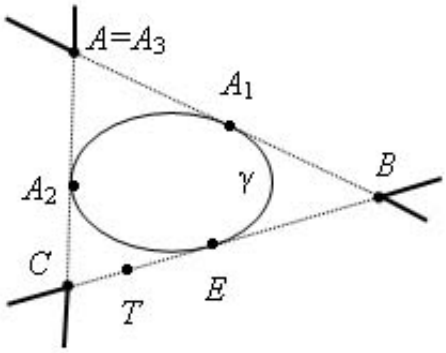


Рис. 2

Пусть $M(m_1 : m_2 : m_3)$ — произвольная точка плоскости H^2. Покажем, что существует прямая, проходящая через точку M и пересекающая данный контур в единственной точке. Выберем некоторую точку на прямой BC, не принадлежащую отрезку BC, например, точку $T(1:3:2)$. Точка T принадлежит лучу CE, не содержащему точку B, так как $(BTCE) = -2 < 0$.

Прямая MT в репере R задана уравнением:

$$x_1(3m_3 - 2m_2) + x_2(2m_1 - m_3) + x_3(m_2 - 3m_1) = 0$$

и пересекает прямые AB и AC соответственно в точках

$$B_0(3m_1 - m_2 : 0 : 3m_3 - 2m_2), \qquad C_0(0 : 3m_1 - m_2 : 2m_1 - m_3).$$

Для четверок точек A, B, B_0, A_1 и A, C, C_0, A_2 имеем

$$(ABB_0A_1) = \frac{3m_1 - m_2}{3(m_1 + m_2 - 2m_3)}, \qquad (ACC_0A_2) = \frac{-(3m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 - 2m_3}.$$

Следовательно, числа (ABB_0A_1) и (ACC_0A_2) разных знаков, т. е. одна и только одна из точек B_0, C_0 принадлежит ребру данного 3-контура. Таким образом, для каждой точки плоскости H^2 найдется содержащая ее прямая, пересекающая любой замкнутый конечный 3-контур в единственной точке, т. е. никакая точка плоскости H^2 не является внутренней относительно 3-контура. Первое утверждение доказано.

Для доказательства второго и третьего утверждений произвольной прямой a присвоим в репере R координаты $(a_1 : a_2 : a_3)$. Тогда точки пересечения прямой a сторонами данного контура имеют координаты

$$AB \cap a = T_1(-a_3 : 0 : a_1), \qquad AC \cap a = T_2(0 : -a_3 : a_2), \qquad BC \cap a = T_3(a_3 + 2a_2 : -a_3 - 2a_1 : a_2 - a_1).$$

Знаки чисел $I_1 = (ABT_1A_1)$, $I_2 = (ACT_2A_2)$, $I_3 = (BCT_3E)$ определяют принадлежность точек T_1, T_2, T_3 соответствующим ребрам данного контура. Если прямая a не содержит вершин контура ABC (иначе второе утверждение теоремы очевидно), то числа I_1, I_2, I_3 определены и $I_1I_2I_3 \neq 0$. Так как в репере R

$$I_1 = (ABT_1A_1) = \frac{a_3}{2a_1 + a_3}, \qquad I_2 = (ACT_2A_2) = \frac{a_3}{2a_2 + a_3}, \qquad I_3 = (BCT_3E) = -\frac{2a_1 + a_3}{2a_2 + a_3},$$

то возможны только следующие наборы знаков чисел I_1, I_2, I_3:

I_1	$+$	$+$	$-$	$-$
I_2	$+$	$-$	$+$	$-$
I_3	$-$	$+$	$+$	$-$

Каждый возможный набор знаков содержит «минус», значит, хотя бы одна из точек T_1, T_2, T_3 принадлежит ребру контура. И ни один набор не имеет точно два «минуса», т. е. принадлежность контуру двух и только двух точек из T_1, T_2, T_3 невозможна. Таким образом, прямая a имеет с

контуром ABC, по крайней мере, одну общую точку и если она пересекает какие-либо два ребра контура ABC, то она пересекает и третье его ребро. Теорема 1 доказана.

Отметим, что 3-контур не имеет инварианта фундаментальной группы G преобразований плоскости H^2, поэтому все 3-контуры G-эквивалентны.

2. КОНЕЧНЫЕ ЗАМКНУТЫЕ 4-КОНТУРЫ ПЛОСКОСТИ H^2

Вершины (ребра) замкнутого конечного 4-контура назовем *противоположными*, если они не являются смежными.

Прямые, соединяющие противоположные вершины замкнутого конечного 4-контура, назовем *диагональными прямыми* данного контура.

Теорема 2. *Пусть $\wp$ — множество всех замкнутых конечных 4-контуров расширенной гиперболической плоскости. Справедливы утверждения:*

1) любой контур в $\wp$ или простой, или составной с двумя особыми точками;

2) диагональные прямые каждого контура из $\wp$ неизотропные и взаимно ортогональные, они различных типов (гиперболического типа) тогда и только тогда, когда контур простой (составной); диагонали простого (составного) контура из $\wp$ пересекаются в их середине (квазисередине);

3) прямая, содержащая точки пересечения противоположных сторон контура из $\wp$, является гиперболической (эллиптической) тогда и только тогда, когда контур является простым (составным);

4) каждая прямая пересекает, по крайней мере, два ребра любого составного контура из $\wp$; если прямая имеет с составным контуром из $\wp$ единственную общую точку, то эта точка для контура является особой;

5) каждая прямая, не содержащая вершину простого контура из $\wp$, либо не имеет с этим контуром общих точек, либо пересекает точно два ребра контура;

6) если изотропная прямая пересекает ребро простого контура из $\wp$, то она пересекает и противоположное ему ребро;

7) любой простой контур из $\wp$ является выпуклым;

8) каждая точка на ребре простого контура F из $\wp$ однозначно определяет два простых контура F_1, F_2 из $\wp$ так, что $\operatorname{int} F_1 \cap \operatorname{int} F_2 = \varnothing$ и $\operatorname{int} F = \operatorname{int} F_1 \cup \operatorname{int} F_2$;

9) любой составной контур F из $\wp$ имеет внутренность, не является выпуклым и его можно представить в виде объединения двух простых контуров F_1, F_2 из $\wp$ так, что $\operatorname{int} F_1 \cap \operatorname{int} F_2 = \varnothing$ и $\operatorname{int} F = \operatorname{int} F_1 \cup \operatorname{int} F_2$.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — некоторый контур из $\wp$. Присоединим к нему канонический репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, используемый при доказательстве теоремы 1, следующим образом.

Совместим вершину A_3 с точкой A, а вершины A_1 и A_2 — с несобственными точками прямых AB и AD соответственно. Тогда конечным точкам B и D можно присвоить координаты $B(b : 0 : 1)$, $D(0 : d : 1)$, где $bd \neq 0$, так как точки B и D не совпадают с точкой A. Некоординатные изотропные прямые, проходящие соответственно через точки B и D, имеют в репере R уравнения

$$BC : 4x_1 + b^2x_2 - 4bx_3 = 0, \qquad CD : d^2x_1 + 4x_2 - 4dx_3 = 0.$$

Следовательно, вершина C задана в репере R координатами $(4b : 4d : 4 + bd)$.

Несобственные точки прямых AB, BC, CD, DA имеют в репере R соответственно координаты

$$K_2 = A_1(1 : 0 : 0), \qquad K_3(b^2 : 4 : 2b), \qquad K_4(4 : d^2 : 2d), \qquad K_1 = A_2(0 : 1 : 0), \tag{2}$$

а точки пересечения противоположных сторон данного контура — координаты

$$AB \cap CD = P(4 : 0 : d), \qquad BC \cap AD = N(0 : 4 : b). \tag{3}$$

Определим принадлежность точек P и N ребрам данного контура. Используя координаты (2), (3), получаем

$$(ABK_2P) = (CDK_4P) = (CBK_3N) = (ADK_1N) = \frac{4 - bd}{4}.$$

По условию $bd \neq 0$. Если $bd = 4$, то прямая BD является изотропной, и точка C принадлежит абсолютной квадрике. Но контур $ABCD$ — конечный, следовательно, $bd \neq 4$. Поэтому возможны только два случая.

1. Имеет место неравенство

$$bd < 4. \tag{4}$$

Тогда все числа (ABK_2P), (CDK_4P), (CBK_3N), (ADK_1N) больше нуля, и, следовательно, ни одна из точек P и N не принадлежит контуру $ABCD$. Контур $ABCD$ является простым (рис. 3).

2. Выполняется неравенство

$$bd > 4. \tag{5}$$

Тогда все числа (ABK_2P), (CDK_4P), (CBK_3N), (ADK_1N) меньше нуля. Следовательно, каждая из точек P, N принадлежит одновременно двум противоположным ребрам данного контура, т. е. контур является составным с особыми точками P, N (рис. 4).

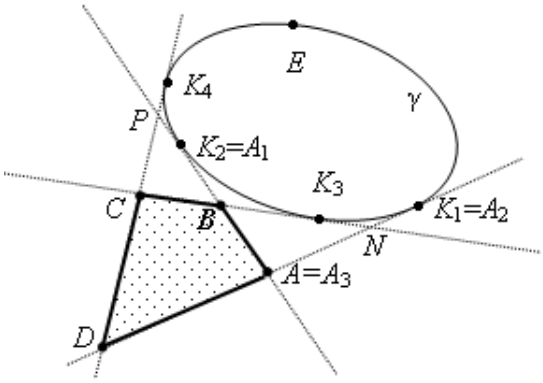


Рис. 3

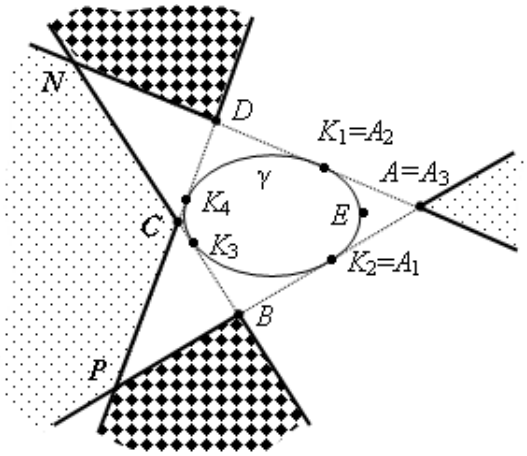


Рис. 4

Таким образом, каждый контур из $\wp$ является либо простым, либо составным с двумя особыми точками. Первое утверждение доказано.

Уравнения диагональных прямых каждого контура $ABCD$ из $\wp$ имеют вид

$$AC:\ dx_1 - bx_2 = 0, \qquad BD:\ dx_1 + bx_2 - bdx_3 = 0. \tag{6}$$

Пусть ζ_{AC} и ζ_{BD} — значения квадратичной тангенциальной формы $\psi = 4X_1X_2 - X_3^2$, соответствующей заданию (1) абсолюта плоскости H^2, от координат (6) прямых AC и BD. Тогда $\zeta_{AC} = -4bd$, $\zeta_{AC} = 4bd - b^2d^2$. Числа ζ_{AC}, ζ_{BD} отличны от нуля, так как $bd \neq 0$, $bd \neq 4$. Знак числа ζ_{AC} (ζ_{BD}) определяет тип прямой AC (BD). Числа ζ_{AC} и ζ_{BD} одного знака, отрицательные, только при $bd > 4$, следовательно, прямые AC и BD принадлежат одному типу, гиперболическому, тогда и только тогда, когда контур $ABCD$ является составным. В противном случае, при условии (4), соответствующем простому контуру из $\wp$, одна из диагональных прямых контура является гиперболической, другая — эллиптической.

Квадратичной тангенциальной форме $\psi = 4X_1X_2 - X_3^2$ соответствует билинейная тангенциальная форма $\Psi = 2X_1Y_2 + 2X_2Y_1 - X_3Y_3$. Координаты прямых AC и BD (6) сопряжены относительно формы Ψ, следовательно, диагональные прямые AC и BD ортогональны.

Точка O пересечения диагоналей контура $ABCD$ в репере R имеет координаты $O(b : d : 2)$, а несобственные точки $L_{1,2}$ ($Z_{1,2}$) прямой AC (BD) — координаты

$$L_{1,2}(b : d : \pm\sqrt{bd}), \qquad Z_{1,2}(b^2d - 2b \pm b\sqrt{bd(bd-4)} : 2d : bd \pm \sqrt{bd(bd-4)}).$$

Если $bd > 4$, точки $L_{1,2}$, $Z_{1,2}$ — действительные, если $bd < 4$, точки одной из пар $L_{1,2}$, $Z_{1,2}$ являются действительными, другой — мнимо сопряженными.

Непосредственная проверка дает: $(OAL_1L_2) = (COL_1L_2)$, $(OBZ_1Z_2) = (DOZ_1Z_2)$. По лемме 1 [2, с. 94] на прямой AC (BD) найдется единственная точка $\tilde{O}$ такая, что пара точек O, $\tilde{O}$

гармонически разделит пару точек A, C (B, D). Согласно определению при $bd > 4$ ($bd < 4$) точка O является квазисерединой (серединой) диагоналей данного составного (простого) контура $ABCD$.

Второе утверждение теоремы доказано.

Прямая PN, заданная в репере R уравнением $dx_1 + bx_2 + 4x_3 = 0$, является гиперболической (эллиптической) только при $bd < 4$ ($bd > 4$), т. е. тогда и только тогда, когда контур $ABCD$ простой (составной). Доказано утверждение 3).

Зададим произвольную прямую a в репере R координатами $(a_1 : a_2 : a_3)$. Полагая, что прямая a не проходит через точку A, примем $a_3 = 1$. Точки пересечения сторон контура $ABCD$ прямой a имеют в репере R координаты

$$AB \cap a = T_1(-1 : 0 : a_1), \qquad BC \cap a = T_2(b^2 + 4a_2b : -4 - 4a_1b : 4a_2 - a_1b^2),$$

$$CD \cap a = T_3(4 + 4a_2d : -d^2 - 4a_1d : a_2d^2 - 4a_1), \qquad AD \cap a = T(0 : -1 : a_2).$$

Найдем выражение чисел $I_1 = (ABK_2T_1)$, $I_2 = (BCK_3T_2)$, $I_3 = (CDK_4T_3)$, $I_4 = (ADK_1T_4)$ через параметры b, d, фиксированные числа для каждого данного контура $ABCD$, и координаты a_1, a_2 прямой a:

$$I_1 = ba_1 + 1, \qquad I_2 = \frac{4(ba_1 + 1) + 4(da_2 + 1) + bd - 4}{(4 - bd)(ba_1 + 1)}, \tag{7}$$

$$I_4 = da_2 + 1, \qquad I_3 = \frac{4(ba_1 + 1) + 4(da_2 + 1) + bd - 4}{(4 - bd)(da_2 + 1)}. \tag{8}$$

Если прямая a не содержит вершин контура $ABCD$, то числа I_1, I_2, I_3, I_4 определены и каждое из них отлично от нуля.

Рассмотрим отдельно варианты для составного и простого контуров из $\wp$.

1. Контур $ABCD$ — составной, имеет место неравенство (5).

Предположим, что прямая a не пересекает какие-либо два ребра контура $ABCD$. Эти ребра могут быть либо смежными, либо противоположными. Пусть для начала прямая a не пересекает смежные ребра AB и AD, тогда ее координаты a_1, a_2 удовлетворяют системе неравенств

$$ba_1 + 1 > 0, \qquad da_2 + 1 > 0. \tag{9}$$

При условиях (5), (9) числа I_2, I_3 меньше нуля, следовательно, прямая a пересекает ребра BC и CD. По условию прямая a не проходит через вершину C, следовательно, точки ее пересечения с ребрами BC и CD различные, т. е. a имеет с контуром две общие точки.

Пусть теперь прямая a не пересекает два противоположных ребра данного составного контура, например, ребра AB и CD. Тогда числа I_1, I_3 больше нуля. В данном случае при $bd > 4$ это возможно лишь при $I_4 < 0$. Но тогда $I_2 < 0$. Значит, прямая a пересекает ребра AD и BC. Прямая a будет иметь с контуром одну общую точку только в случае совпадения точек ее пересечения ребрами AD и BC. Это возможно, так как указанные ребра имеют общую особую точку N.

Итак, каждая прямая пересекает, по крайней мере, два ребра составного контура из $\wp$, и если прямая имеет с составным контуром из $\wp$ единственную общую точку, то эта точка для контура является особой. Доказано утверждение 4).

2. Контур $ABCD$ — простой, выполняется неравенство (4).

Тогда согласно представлениям (7), (8) для чисел I_1, I_2, I_3, I_4 возможны только следующие наборы знаков:

I_1	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$
I_2	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
I_3	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
I_4	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$

Таким образом, для каждого простого контура из $\wp$ существуют прямые, пересекающие его, и прямые, не имеющие с ним общих точек. Каждый из наборов, содержащий знак «минус», содержит

точно два «минуса». Поэтому если прямая, не содержащая вершину простого контура из $\wp$, пересекает ребро контура, она пересекает точно два его ребра. Доказано утверждение 5).

Если прямая a является изотропной, то ее координаты $(a_1 : a_2 : 1)$ обращают квадратичную тангенциальную форму ψ, определяющую абсолют плоскости H^2, в нуль. Следовательно, числа I_1, I_2, I_3, I_4 из (7), (8) для изотропной прямой a можно записать в виде

$$I_1 = ba_1 + 1, \qquad I_2 = \frac{4(da_2 + 1)}{4 - bd}, \tag{10}$$

$$I_4 = da_2 + 1, \qquad I_3 = \frac{4(ba_1 + 1)}{4 - bd}. \tag{11}$$

Так как для простого контура $ABCD$ имеет место неравенство $bd < 4$, то числа в парах I_1, I_3 и I_2, I_4 из (10), (11) одного знака. Следовательно, если прямая a пересекает ребро AB (BC) контура, то она пересекает и противоположное ему ребро CD (DA). Утверждение 6) доказано.

Далее. Пусть $ABCD$ — простой контур из $\wp$ и $AB \cap CD = P$, $BC \cap AD = N$ (рис. 5). Условимся обозначать через W_X ту часть плоскости H^2, определенную изотропными прямыми, проходящими через точку X, которая не содержит точек абсолюта. Покажем, что контур $ABCD$ имеет внутренность и

$$\operatorname{int}(ABCD) = W_P \cap W_N. \tag{12}$$

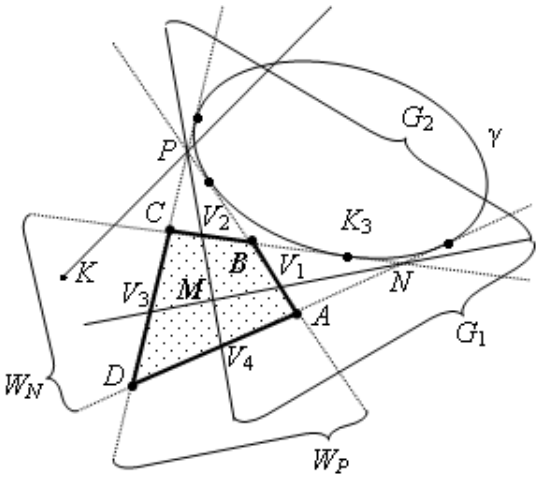


Рис. 5

Пусть точка M принадлежит множеству $W_P \cap W_N$. Прямые AB и CD разделяют изотропную прямую BC на две части: отрезок BC и объединение лучей BK_3, CK_3. Отрезок BC не содержит бесконечно удаленных точек, следовательно, полностью принадлежит множеству W_P. Отрезок AD также принадлежит множеству W_P. Поэтому для каждой точки M из W_P прямая MP пересекает и отрезок BC, и отрезок AD. Аналогично, для каждой точки M из W_N прямая MN пересекает и отрезок AB, и отрезок CD. Таким образом, для любой точки M из $W_P \cap W_N$ на отрезках AB, BC, CD, DA существуют попарно различные точки $V_1 = AB \cap MN$, $V_2 = BC \cap MP$, $V_3 = CD \cap MN$, $V_4 = DA \cap MP$. По условию контур $ABCD$ — простой, следовательно, точки P и N ему не принадлежат, т. е. $(PV_1AB) < 0$, $(PV_3CD) < 0$, $(NV_2BC) < 0$, $(NV_4AD) < 0$. Отсюда следует, что прямые MP и MN разделяют каждую из следующих пар прямых: MA и MB, MB и MC, MC и MD, MD и MA. В силу этого точки A и C (B и D) принадлежат одной части G_1 (G_2) плоскости H^2, определенной прямыми MP и MN. Точки V_1, V_3 (V_2, V_4) лежат на прямой MN (MP), поэтому ломаные V_4AV_1 и V_2CV_3 (V_1BV_2 и V_3DV_4) полностью принадлежат части G_1 (G_2).

Каждая прямая l, проходящая через точку M, целиком лежит либо в части G_1, либо в части G_2. В первом случае l пересекает и ломаную V_4AV_1, и ломаную V_2CV_3, во втором — каждую из ломаных V_1BV_2, V_3DV_4.

Итак, любая прямая, проходящая через точку множества $W_P \cap W_N$, пересекает данный простой контур $ABCD$ в двух точках, т. е. $W_P \cap W_N = \operatorname{int}(ABCD)$.

Покажем, что точки плоскости H^2, не принадлежащие множеству $W_P \cap W_N$, не являются внутренними относительно контура $ABCD$. Предположим, что точка K не принадлежит множеству $W_P \cap W_N$. Тогда K не принадлежит хотя бы одному из множеств W_P, W_N, например, не принадлежит множеству W_P. В этом случае прямая KP принадлежит дополнению множества W_P до H^2. Так как отрезки BC и AD целиком лежат во множестве W_P, прямая KP эти отрезки не пересекает. Но прямая KP не пересекает и отрезки AB, CD, так как P не принадлежит контуру. Итак, для каждой точки плоскости H^2, не принадлежащей множеству $W_P \cap W_N$, найдется прямая, не имеющая с данным контуром общих точек. Следовательно, если точка не принадлежит множеству $W_P \cap W_N$, то она не является внутренней относительно данного контура. Таким образом, имеет место равенство (12).

Согласно построению множества W_P, W_N не содержат точек абсолюта, следовательно, каждая внутренняя точка относительно контура $ABCD$ является внешней по отношению к абсолютной линии.

Докажем, что простой контур $ABCD$ — выпуклый.

Пусть M и T — внутренние относительно контура $ABCD$ точки. Тогда $M \in W_P \cap W_N$ и $T \in W_P \cap W_N$.

Обозначим X_1 и X_2 точки пересечения прямой MT прямыми AB и CD соответственно. Рассмотрим возможные варианты.

1. Прямая MT — изотропная. Пусть S — несобственная точка прямой MT. По построению множество W_P не содержит точек абсолюта, следовательно, $S \notin W_P$. Так как $M \in W_P$ и $T \in W_P$, каждая из точек M и T разделяет с S пару точек X_1, X_2:

$$(MSX_1X_2) < 0, \qquad (TSX_1X_2) < 0. \tag{13}$$

Пусть X — произвольная точка отрезка MT параболической прямой, тогда пара точек X, S разделяет пару точек M, T:

$$(XSMT) < 0. \tag{14}$$

При условиях (13), (14) имеет место неравенство $(XSX_1X_2) < 0$, т. е. X принадлежит отрезку X_1X_2 параболической прямой MT. Следовательно, $X \in W_P$. Аналогично можно показать, что $X \in W_N$. Таким образом, X — внутренняя относительно контура $ABCD$ точка.

2. Прямая MT — гиперболическая. Точки M и T являются внешними по отношению к абсолюту, поэтому определяют отрезок гиперболической прямой. Пусть S_0 — середина, а S — квазисередина отрезка MT. Тогда так как точки M и T принадлежат множеству W_P, то $S_0 \in W_P$, а $S \notin W_P$, следовательно,

$$(MSX_1X_2) < 0, \qquad (TSX_1X_2) < 0. \tag{15}$$

Для каждой точки X отрезка MT выполняется неравенство $(XS_0MT) > 0$, откуда следует, что $(XSMT) < 0$. С учетом неравенств (15) имеем $(XSX_1X_2) < 0$, т. е. $X \in W_P$. Рассуждая аналогично, получим $X \in W_N$. Следовательно, каждая точка отрезка MT является внутренней относительно контура $ABCD$.

3. Если прямая MT эллиптическая, то точки M и T определяют на ней два различных отрезка, обозначим их MO_1T и MO_2T. Так как обе точки M и T принадлежат множеству W_P, то пара точек M, T не разделяет пару точек X_1, X_2: $(MTX_1X_2) > 0$. Следовательно, точки X_1, X_2 принадлежат одному из отрезков, определенных точками M и T, например, отрезку MO_1T. Тогда $MO_2T \subset W_P$. Аналогично заключаем, что $MO_2T \subset W_N$. Следовательно, $MO_2T \subset \operatorname{int}(ABCD)$.

Показали, что какова бы ни была прямая MT, существует отрезок, соединяющий точки M, T и принадлежащий внутренности данного контура. По определению контур $ABCD$ выпуклый. Утверждение 7) доказано.

На ребре AB простого контура $ABCD$ выберем некоторую точку K. Через K проходят две изотропные прямые, одна из них совпадает со стороной AB контура, другую обозначим k. Согласно утверждению 6) прямая k пересекает ребро CD данного контура (пусть $k \cap CD = L$), тогда по утверждению 5) прямая k не пересекает ребра BC и DA. Следовательно, отрезок AB (CD) является объединением отрезков AK и KB (CL и LD) и контуры $F_1 = AKLD$, $F_2 = KBCL$ являются простыми. Таким образом, точка K однозначно определяет два простых контура F_1, F_2 из $\wp$.

Пусть $AB \cap CD = P$, $BC \cap AD = N$, $KL \cap AD = V$, $KL \cap BC = J$. Тогда по условию (12) для контуров F_1, F_2 получаем:

$$\operatorname{int} F_1 = W_P \cap W_V, \qquad \operatorname{int} F_2 = W_P \cap W_J. \tag{16}$$

Так как контуры F_1, F_2 — простые, точки V, J прямой KL не принадлежат отрезку KL, следовательно, эти точки не принадлежат множеству W_P. Точка N не принадлежит простому контуру F, т. е. также не принадлежит множеству W_P. Поэтому

$$W_P \cap (W_V \cap W_J) = \varnothing. \tag{17}$$

Равенства (16), (17) приводят к условию $\operatorname{int} F_1 \cap \operatorname{int} F_2 = \emptyset$.

Прямые NV, NJ и VJ изотропные, поэтому

$$W_V \cup W_J = W_N \cup (W_V \cap W_J). \tag{18}$$

Учитывая равенства (16), (18), (17), (12), получаем $\operatorname{int} F_1 \cup \operatorname{int} F_2 = \operatorname{int} F$. Доказано утверждение 8).

Пусть теперь $F = ABCD$ — составной контур, где $AB \cap CD = P$, $BC \cap AD = N$. По утверждению 4) каждая прямая пересекает хотя бы два ребра составного контура из $\wp$, и если прямая имеет с составным контуром из $\wp$ только одну общую точку, эта точка является для контура особой. Пусть l — произвольная прямая, проходящая через особую точку P (N). Если l принадлежит множеству W_P (W_N), то она пересекает ребра BC и AD (AB и CD), также принадлежащие этому множеству, следовательно, l имеет с контуром еще хотя бы одну общую точку. Если l принадлежит множеству $\hat{W}_P$ ($\hat{W}_N$), дополнению множества W_P (W_N) до плоскости H^2, то l пересекает дополнения отрезков BC и AD (AB и CD) до содержащих их прямых. Следовательно, P (N) — единственная общая точка прямой l и контура $ABCD$. Таким образом, каждая прямая, проходящая через любую точку M множества $W_P \cap W_N$, имеет с контуром не менее двух общих точек, и для каждой точки K, не принадлежащей множеству $W_P \cap W_N$, найдется прямая (KP, KN), пересекающая контур в единственной точке. Следовательно, для составного контура $ABCD$ также имеет место равенство (12).

Точка P (N) разбивает каждый из отрезков AB и CD (BC и AD) на два отрезка:

$$AB = AP \cup PB, \qquad CD = CP \cup PD, \qquad BC = BN \cup NC, \qquad AD = AN \cup ND. \tag{19}$$

Очевидно, контуры $F_1 = APCN$ и $F_2 = BPDN$ (см. рис. 4) принадлежат $\wp$. По утверждениям 2), 3) диагональные прямые AC и BD контура F гиперболические, а прямая PN эллиптическая. Тогда контуры F_1 и F_2 в силу утверждения 2) являются простыми. Докажем, что $\operatorname{int} F_1 \cap \operatorname{int} F_2 = \emptyset$ и $\operatorname{int} F = \operatorname{int} F_1 \cap \operatorname{int} F_2$.

Предположим, что существует точка M: $M \in \operatorname{int} F_1$ и $M \in \operatorname{int} F_2$. Тогда любая прямая m, проходящая через точку M, пересекает каждый простой контур F_1, F_2 в двух точках. Полагая, что прямая m не содержит особых точек P и N, общих для контуров F_1, F_2, получим четыре различные точки пересечения прямой m ребрами контуров F_1, F_2. Прямая m не может пересечь некоторую прямую дважды, поэтому при разложениях (19) m пересекает каждое ребро контура F.

В то же время, какова бы ни была точка M плоскости H^2, найдутся проходящие через нее прямые, имеющие с данным контуром из $\wp$ менее четырех общих точек. Действительно, если S — несобственная точка какой-либо стороны контура, то прямая MS не пересекает, по крайней мере, одно из ребер данного контура. Пришли к противоречию. Следовательно, $\operatorname{int} F_1 \cap \operatorname{int} F_2 = \emptyset$.

Пусть точка M принадлежит множеству $\operatorname{int} F_1$ ($\operatorname{int} F_2$), тогда каждая проходящая через M прямая пересекает контур F_1 (F_2) в двух точках X, Y. Но имеют место равенства (19), т. е. все ребра контуров F_1, F_2 полностью принадлежат контуру F. Поэтому $X \in F$, $Y \in F$. Следовательно, $M \in \operatorname{int} F$. Итак,

$$\operatorname{int} F_1 \cup \operatorname{int} F_2 \subset \operatorname{int} F. \tag{20}$$

Обратно. Противоположные стороны контуров F_1 (F_2) пересекаются в точках B, D (A, C). По ранее доказанному

$$\operatorname{int} F = W_P \cap W_N, \qquad \operatorname{int} F_1 = W_B \cap W_D, \qquad \operatorname{int} F_2 = W_A \cap W_C. \tag{21}$$

Пусть $M \in \operatorname{int} F$, или

$$M \in W_P \cap W_N. \tag{22}$$

Предположим, что $M \notin \operatorname{int} F_1 \cup \operatorname{int} F_2$, т. е. $M \notin \operatorname{int} F_1$ и $M \notin \operatorname{int} F_2$. Тогда на основании равенств (21) M не принадлежит хотя бы одному из множеств W_B, W_D и хотя бы одному из множеств W_A, W_C. Допустим, что

$$M \notin W_A \qquad \text{и} \qquad M \notin W_B. \tag{23}$$

Тогда точка M принадлежит дополнениям множеств W_A и W_B до плоскости H^2: $M \in \hat{W}_A$ и $M \in \hat{W}_B$. Следовательно,

$$M \in \hat{W}_A \cap \hat{W}_B. \tag{24}$$

Через точки A и B проходят три изотропные прямые AB, AN, BN, две из которых (AN, BN) определяют множества $\hat{W}_N$ и W_N. По построению каждое из множеств $\hat{W}_A$, $\hat{W}_B$ содержит абсолютную квадрику, следовательно, $\hat{W}_A \cap \hat{W}_B \subset \hat{W}_N$. Поэтому из условия (24) следует условие: $M \in \hat{W}_N$. Но тогда $M \notin W_N$. Пришли к противоречию с условием (22). Следовательно, допущения (23) не имеют места. Аналогично исключаем условия: $M \notin W_A$ и $M \notin W_D$; $M \notin W_C$ и $M \notin W_B$; $M \notin W_C$ и $M \notin W_D$. Получаем противоречие предположения $M \notin \operatorname{int} F_1 \cup \operatorname{int} F_2$ с условием $M \in \operatorname{int} F$. Откуда следует, что $\operatorname{int} F \subset \operatorname{int} F_1 \cup \operatorname{int} F_2$. Учитывая условие (20), приходим к утверждению теоремы: $\operatorname{int} F = \operatorname{int} F_1 \cup \operatorname{int} F_2$.

Остается доказать, что составной контур $ABCD$ из $\wp$ не является выпуклым.

По построению каждая точка прямой PN, за исключением точек P и N, является внутренней относительно контура $ABCD$. Выберем на прямой PN точки T, L, разделяющие пару точек P, N. Тогда каждый из отрезков, определенных точками T, L на эллиптической прямой PN, содержит точку P или N, т. е. не принадлежит полностью множеству $\operatorname{int}(ABCD)$. Следовательно, контур $ABCD$ не является выпуклым. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Случаям простого и составного контуров из $\wp$ соответствуют принципиально различные положения на абсолютной линии γ несобственных точек K_1, K_2, K_3, K_4 последовательно взятых сторон AB, BC, CD, DA контура. Действительно, пусть $X = K_1K_2 \cap K_3K_4$, $Y = K_2K_3 \cap K_1K_4$. В используемом каноническом репере R точки K_1, K_2, K_3, K_4 заданы координатами (2), поэтому точки X и Y имеют координаты $X(-b : d : 0)$, $Y(2b : 2d : bd)$. Точка X является внутренней (внешней) относительно линии γ при $bd < 0$ ($bd > 0$), а точка Y является внутренней (внешней) относительно γ при условии $bd \in (0; 4)$ ($bd \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$). Внутренними относительно γ точки X, Y одновременно быть не могут. Остаются два варианта:

1) одна из точек X, Y внутренняя, другая — внешняя относительно абсолюта ($bd < 4$, $ABCD$ — простой изотропный контур);

2) обе точки X, Y — внешние относительно линии γ ($bd > 4$, $ABCD$ — составной изотропный контур).

В первом случае разделены или пары точек K_1, K_2 и K_3, K_4 (рис. 3), или пары точек K_2, K_3 и K_4, K_1; во втором — никакая пара соседних точек из K_1, K_2, K_3, K_4 не разделена (рис. 4).

Замечание 2. Пусть $ABCD$ — простой контур. По утверждению 2) теоремы 2 диагональные прямые AC и BD различных типов. Предположим, что прямая AC (BD) — эллиптическая (гиперболическая). Тогда $bd < 0$.

Пусть $M(1 : m_2 : m_3)$ — некоторая точка плоскости H^2. Непосредственная проверка показывает, что при $bd < 0$ прямые $MP(dm_2 : (4m_3 - d) : -4m_2)$, $MN(4m_3 - bm_2 : b : -4)$ одновременно являются эллиптическими тогда и только тогда, когда одновременно эллиптическими (гиперболическими) являются прямые $MA(m_2 : 1 : 0)$, $MC(4dm_3 + bdm_2 - 4m_2 : 4 + bd - 4b + m_3 : 4bm_2 - 4d)$ ($MB(m_2 : bm_3 - 1 : -bm_2)$, $MD(dm_3 - m_2 : 1 : -d)$).

Поэтому на основании равенства (12) получаем

$$\operatorname{int}(ABCD) = W_A \cap W_C, \qquad \operatorname{int}(ABCD) = \hat{W}_B \cap \hat{W}_D.$$

Замечание 3. С проективной точки зрения на плоскости H^2 простое отношение трех точек A, B, C параболической прямой l с несобственной точкой K есть число $t = -(ABCK)$, инвариантное относительно преобразований фундаментальной группы G плоскости H^2. Если $(ABCK) = -t$, говорят, что точка C делит отрезок AB параболической прямой в отношении t: $(AB, C) = t$.

При доказательстве утверждения 1) теоремы 2 определены числа (ABK_2P), (CDK_4P), (CBK_3N), (ADK_1N), равные в используемом каноническом репере R отношению $\frac{4-bd}{4}$. Учитывая, что K_1, K_2, K_3, K_4 — несобственные точки сторон изотропного контура $ABCD$, получаем:

$$(AB, P) = (CD, P) = (CB, N) = (AD, N) = \frac{4}{bd - 4} = \Delta.$$

Определяя Δ, условимся в простых отношениях трех точек первой указывать ту вершину ребра 4-контура, которая принадлежит диагональной прямой эллиптического типа.

Таким образом, число Δ является инвариантом конечного замкнутого 4-контура относительно группы G и равно отношению, в котором точки пересечения противоположных сторон контура делят его ребра, принадлежащие данным сторонам. При $\Delta < 0$ ($\Delta > 0$) конечный замкнутый 4-контур является простым (составным).

Покажем, что любые два 4-контура плоскости H^2 с равными инвариантами ΔG-эквивалентны. Пусть $ABCD$ и $A'B'C'D'$ — конечные замкнутые 4-контуры плоскости H^2, для которых имеют место равенства:

$$(AB, P) = (CD, P) = (CB, N) = (AD, N) = \Delta_0,$$

$$(A'B', P') = (C'D', P') = (C'B', N') = (A'D', N') = \Delta_0,$$

где $\mathrm{P} = AB \cap CD$, $N = AD \cap BC$, $P' = A'B' \cap C'D'$, $N' = A'D' \cap B'C'$.

Несобственные точки сторон AB, AD и BC ($A'B$, $A'D'$ и $B'C'$) обозначим A_1, A_2 и E (A'_1, A'_2 и E') соответственно. Выберем проективные реперы $R_0 = \{A_1, A_2, A, E\}$ и $R' = \{A'_1, A'_2, A', E'\}$. По основной теореме о проективных преобразованиях существует единственное проективное преобразование f, которое репер R_0 переводит в репер R'. Так как первые две вершины и единичная точка реперов R_0 и R' принадлежат абсолюту, то уравнение абсолютной овальной линии γ в каждом выбранном репере имеет вид (1). Следовательно, линия γ инвариантна относительно преобразования f, т. е. f входит в фундаментальную группу G преобразований плоскости H^2.

Изотропные прямые l_1, l_2, l с несобственными точками A_1, A_2, E переходят при f в изотропные прямые l'_1, l'_2, l' с несобственными точками A'_1, A'_2, E' соответственно. Так как $B = l_1 \cap l$, $B' = l'_1 \cap l'$, $N = l_2 \cap l$, $N' = l'_2 \cap l'$, то $f(B) = B'$, $f(N) = N'$. Пусть $f(C) = C_1$. Тогда $(C_1B', N') = (CB, N) = \Delta_0$. Но простое отношение $(C'B', N')$ также равно Δ_0, т. е. $(C_1B', N') = (C'B', N')$. Следовательно, $C_1 = C'$. Аналогично можно показать, что $f(D) = D'$. Поэтому $f(ABCD) = A'B'C'D'$.

Таким образом, контуры $ABCD$ и $A'B'C'D'$ G-эквивалентны.

Теорема 3. *Если простые* 4*-контуры* F_1, F_2, $\ldots$, F_n, $n \in N$, *соответственно с инвариантами* Δ_1, Δ_2, $\ldots$, Δ_n *образуют разбиение простого* 4*-контура* F *с инвариантом* Δ, *то*

$$|\Delta| = \prod_{i=1}^{n} |\Delta_i|. \tag{25}$$

Доказательство. Пусть в каноническом репере R контур F задан координатами своих вершин: $A(0:0:1)$, $B(b:0:1)$, $C(4b:4d:4+bd)$, $D(0:d:1)$. Тогда несобственные точки прямых AB, BC, CD, DA имеют в репере R координаты (2), а точки пересечения противоположных сторон данного контура — координаты (3).

Применим метод математической индукции.

1. На стороне, например, AB, контура F выберем точку $T(t:0:1)$. Согласно утверждению 8) теоремы 2 точка T определяет разбиение контура F на простые контуры $F_1 = ATT'D$ и $F_2 = TBCT'$. Выразим модуль инварианта Δ контура F через модули инвариантов Δ_1, Δ_2 контуров F_1, F_2. Так как в репере R

$$\Delta = -(ABPK_2) = \frac{4}{bd-4}, \qquad \Delta_1 = -(ATPK_2) = \frac{4}{dt-4}, \qquad \Delta_2 = -(TBPK_2) = \frac{4-dt}{4-bd},$$

то при $n = 2$ теорема справедлива:

$$|\Delta| = |\Delta_1||\Delta_2|. \tag{26}$$

2. Предположим, что формула (25) верна для $n = k$, $k \in N$, т. е. имеет место равенство

$$|\Delta| = \prod_{i=1}^{k} |\Delta_i|, \tag{27}$$

где Δ_1, Δ_2, $\ldots$, Δ_k — инварианты простых 4-контуров соответственно F_1, F_2, $\ldots$, F_k, удовлетворяющих равенствам: 1) $(\forall\ p, q = \overline{1,k})$ $\operatorname{int} F_p \cap \operatorname{int} F_q = \varnothing$; 2) $\bigcup\limits_{p=1}^{k} \operatorname{int} F_p = \operatorname{int} F$.

3. Докажем справедливость формулы (25) для $n = k+1$. Разобьем некоторый контур F_j, $j = \overline{1,k}$, на контуры F_j^1, F_j^2 соответственно с инвариантами Δ^1, Δ^2. По формуле (26) $|\Delta_j| = |\Delta^1||\Delta^2|$. Поэтому в силу предположения (27) $|\Delta| = |\Delta_1||\Delta_2|\cdots|\Delta_{j-1}||\Delta^1||\Delta^2||\Delta_{j+1}|\ldots|\Delta_k|$, т. е. $|\Delta| = \prod\limits_{i=1}^{k+1}|\Delta_i|$.

Теорема 3 доказана.

Библиографический список

1. *Розенфельд, Б.А.* Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства / Б.А. Розенфельд, М.П. Замаховский. – М.: МЦНМО, 2003. – 560 с.

2. *Ромакина, Л.Н.* Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей / Л.Н. Ромакина. – Саратов: Научная книга, 2008. – 279 с.

УДК 517.984

ОБ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА – ДИРИХЛЕ ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.А. Халова

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: HalovaVA@info.sgu.ru

В статье получен аналог теоремы Жордана – Дирихле о сходимости разложений по собственным функциям оператора $Ly = \alpha y'(x) - y'(1-x)$ с граничным условием $U(y) = ay(0) + by(1) - (y,\varphi) = 0$.

Ключевые слова: теорема Жордана – Дирихле, резольвента.

On Analogue of Jordan – Dirichlet Theorem about the Convergence of the Expansions in Eigenfunctions of a Certain Class of Differential-Difference Operators

V.A. Khalova

Saratov State University,
Chair of Differential Equations and Applied Mathematics
E-mail: HalovaVA@info.sgu.ru

An analogue of Jordan – Dirichlet theorem is established of convergence of the expansions in eigen functions of the operator $Ly = \alpha y'(x) - y'(1-x)$ with the boundary condition $U(y) = ay(0) + by(1) - (y,\varphi) = 0$.

Key words: Jordan – Dirichlet theorem, resolvent.

Рассматривается оператор

$$Ly = \alpha y'(x) - y'(1-x), \quad x \in [0,1], \quad \alpha^2 \neq 1, \tag{1}$$

с граничным условием

$$U(y) = ay(0) + by(1) - (y,\varphi) = 0, \tag{2}$$

где $y'(1-x) = \frac{d}{d\xi}y(\xi)|_{\xi=1-x}$, a, b — заданные постоянные, $(y,\varphi) = \int\limits_0^1 y(t)\varphi(t)\,dt$, $\varphi(t) \in C[0,1]$.

В настоящей статье для разложений по собственным и присоединенным функциям (в дальнейшем с.п.ф.) оператора (1)–(2) установлен аналог теоремы Жордана – Дирихле из теории тригонометрических рядов Фурье [1, с. 121–122]. Данная работа продолжает исследования функционально-дифференциальных и интегральных операторов с операторами отражения. В работе [2] такой результат был получен для оператора дифференцирования $y'(x)$ с краевым условием $\int\limits_0^1 y(t)\,d\sigma(t) = 0$, где $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации, имеющая скачки в точках 0 и 1. В работе [3] аналог теоремы Жордана – Дирихле установлен для разложений по с.п.ф. оператора

$$Ly = \beta y'(x) + y'(1-x), \quad x \in [0,1], \quad \beta^2 \neq 1,$$

© В.А. Халова, 2010

с интегральным граничным условием

$$U(y) = \int\limits_0^1 \frac{k(t)}{t^\alpha (1-t)^\alpha} y(t)\,dt = 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

1. Обозначим через $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ резольвенту оператора (1)–(2).

Следующие утверждения приведем без доказательств (см., например, [3, 4]).

Лемма 1. *Если $y(x) = R_\lambda f(x)$, то $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^{\mathrm{T}}$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1-x)$, является решением следующей краевой задачи в пространстве вектор-функций:*

$$z'(x) - \lambda B_0 z(x) = B_0 F(x), \tag{3}$$

$$P_0 z(0) + Q_0 z(1) - \int\limits_0^1 \Phi_0(t) z(t)\,dt = 0, \tag{4}$$

где $B_0 = \dfrac{1}{\alpha^2 - 1}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}$, $P_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$, $\Phi_0(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) & 0 \\ 0 & \varphi(1-t) \end{pmatrix}$, $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$, *T — знак транспонирования.*

И наоборот. Пусть $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^{\mathrm{T}}$ — решение задачи (3)–(4) *и $F(x) = (f(x), f(1-x))$. Если при $F(x) = 0$ задача* (3)–(4) *имеет только нулевое решение, то R_λ существует и $R_\lambda f = z_1(x)$, $z_2(x) = z_1(1-x)$.*

Пусть $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$, $\gamma = \dfrac{1-\alpha d}{d} = \dfrac{-d}{1+\alpha d}$, $d = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$. В (3)–(4) выполним замену $z(x) = \Gamma v(x)$. Тогда краевая задача (3)–(4) примет вид

$$v'(x) - \lambda \mathcal{D} v(x) = BF(x), \tag{5}$$

$$\mathbf{U}(v) = Pv(0) + Qv(1) - \int\limits_0^1 \Phi(t) v(t)\,dt = 0, \tag{6}$$

где $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$, $B = \Gamma^{-1} B_0 = -\dfrac{d^2}{2\gamma}\begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & -1 \end{pmatrix} = \dfrac{d}{2}\begin{pmatrix} \alpha d + 1 & d \\ -d & -(\alpha d + 1) \end{pmatrix}$, $P = P_0 \Gamma = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = Q_0 \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_2 & p_1 \end{pmatrix}$, $p_1 = a + \gamma b$, $p_2 = \gamma a + b$, $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) & \gamma\varphi(t) \\ \gamma\varphi(1-t) & \varphi(1-t) \end{pmatrix}$.

Для определенности, считаем, что $\operatorname{Re} \lambda d \geq 0 \geq \operatorname{Re}(-\lambda d)$.

Лемма 2. *Если λ таково, что $\Delta^{-1}(\lambda)$ существует, то для решения $v(x) = v(x, \lambda)$ задачи* (5)–(6) *имеет место формула*

$$v(x,\lambda) = -V(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda) \int\limits_0^1 \mathbf{U}_x(g(x,t,\lambda)) BF(t)\,dt + \int\limits_0^1 g(x,t,\lambda) BF(t)\,dt,$$

где $V(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e^{\lambda d x} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda d x} \end{pmatrix}$, $\Delta(\lambda) = \mathbf{U}(V(x,\lambda))$, $g(x,t,\lambda) = \begin{pmatrix} g_1(x,t,\lambda) & 0 \\ 0 & g_2(x,t,\lambda) \end{pmatrix}$, $g_1(x,t,\lambda) = -\varepsilon(t,x) e^{\lambda d(x-t)}$, $g_2(x,t,\lambda) = \varepsilon(x,t) e^{-\lambda d(x-t)}$, $\varepsilon(x,t) \equiv 1$ *при* $t \leq x$, $\varepsilon(x,t) = 0$ *при* $t > x$, $\mathbf{U}_x$ *означает, что условие* (6) *применяется по переменной* x.

Следствие. *Имеет место формула $R_\lambda f(x) = v_1(x,\lambda) + \gamma v_2(x,\lambda)$.*

2. Пусть $f(x) \in C[0,1] \cap V[0,1]$ и $U(f) = af(0) + bf(1) - \int\limits_0^1 \varphi(t) f(t)\,dt = 0$.

Лемма 3. *Для компонент вектора $BF(x) = (\Phi_1(x), \Phi_2(x))^{\mathrm{T}}$ справедливы формулы*

$$\Phi_1(x) = -\frac{d^2}{2\gamma}[f(x) - \gamma f(1-x)] = \frac{d}{2}[(\alpha d + 1) f(x) + d f(1-x)],$$

$$\Phi_2(x) = -\Phi_1(1-x), \tag{7}$$

$$\Phi_1(x) + \gamma\Phi_1(1-x) = df(x). \tag{8}$$

Доказательство леммы непосредственно следует из того, что $\Phi_i(x) = b_{i1}f(x) + b_{i2}f(1-x)$, где b_{ij} — компоненты матрицы B.

Лемма 4. *Для компонент вектора*

$$\int\limits_0^1 g(x,t,\lambda)BF(t)\,dt = \left(\int\limits_0^1 g_1(x,t,\lambda)\Phi_1(t)\,dt, \int\limits_0^1 g_2(x,t,\lambda)\Phi_2(t)\,dt\right)^T$$

справедливы формулы

$$\int\limits_0^1 g_2(x,t,\lambda)\Phi_2(t)\,dt = \int\limits_0^1 g_1(1-x,t,\lambda)\Phi_1(t)\,dt, \tag{9}$$

$$\int\limits_0^1 g_1(x,t,\lambda)\Phi_1(t)\,dt = \frac{1}{\lambda d}e^{\lambda d(x-1)}\Phi_1(1) - \frac{1}{\lambda d}\Phi_1(x) - \frac{1}{\lambda d}\int\limits_x^1 e^{\lambda d(x-t)}\,d\Phi_1(t), \tag{10}$$

$$\int\limits_0^1 g_1(x,t,\lambda)\Phi_1(t)\,dt + \gamma\int\limits_0^1 g_2(x,t,\lambda)\Phi_2(t)\,dt = -\frac{1}{\lambda}f(x) + \frac{1}{\lambda d}\Phi_1(1)[e^{\lambda d(x-1)} + \gamma e^{-\lambda dx}] + Q_1(x,\lambda), \tag{11}$$

где

$$Q_1(x,\lambda) = -\frac{1}{\lambda d}\left(\int\limits_x^1 e^{\lambda d(x-t)}\,d\Phi_1(t) + \gamma\int\limits_{1-x}^1 e^{\lambda d(1-x-t)}\,d\Phi_1(t)\right). \tag{12}$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_0^1 g_1(x,t,\lambda)\Phi_1(t)\,dt = -\int\limits_x^1 e^{\lambda d(x-t)}\Phi_1(t)\,dt, \tag{13}$$

$$\int\limits_0^1 g_2(x,t,\lambda)\Phi_2(t)\,dt = \int\limits_0^x e^{-\lambda d(x-t)}\Phi_2(t)\,dt. \tag{14}$$

Выполняя в (14) замену $\tau = 1-t$ и учитывая (7) и (13), получаем (9). Интегрируя (13) по частям, приходим к (10). В силу (8)–(10) следует справедливость равенства (11). □

Лемма 5. *Имеет место формула*

$$\int\limits_0^1 \mathbf{U}_x(g(x,t,\lambda))BF(t)\,dt = (P(\lambda), P(\lambda))^{\mathrm{T}},$$

где

$$P(\lambda) = \frac{1}{\lambda d}\Phi_1(1)e^{-\lambda d}[U_{11} + U_{21}] + U_1(Q_1(x,\lambda)), \tag{15}$$

$U_{j1} = U_j(e^{\lambda dx})$ (*условия применяются по переменной* x),

$$U_1(f) = p_1 f(0) - \int\limits_0^1 \varphi(t)f(t)\,dt, \quad U_2(f) = p_2 f(1) - \gamma\int\limits_0^1 \varphi(1-t)f(t)\,dt. \tag{16}$$

Доказательство. Из (13), (14) имеем $g_1(1,t,\lambda) = g_2(0,t,\lambda) = 0$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \mathbf{U}_x(g(x,t,\lambda))BF(t)\,dt = \begin{pmatrix} p_1\int\limits_0^1 g_1(0,t,\lambda)\Phi_1(t)\,dt - I_1 \\ p_1\int\limits_0^1 g_2(1,t,\lambda)\Phi_2(t)\,dt - I_2 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$I_1 = \int\limits_0^1 \varphi(\tau) \left(\int\limits_0^1 g_1(\tau,t,\lambda)\Phi_1(t)\,dt + \gamma \int\limits_0^1 g_2(\tau,t,\lambda)\Phi_2(t)\,dt \right) d\tau,$$

$$I_2 = \int\limits_0^1 \varphi(1-\tau) \left(\gamma \int\limits_0^1 g_1(\tau,t,\lambda)\Phi_1(t)\,dt + \int\limits_0^1 g_2(\tau,t,\lambda)\Phi_2(t)\,dt \right) d\tau. \tag{18}$$

Выполняя в (18) замену $\xi = 1-\tau$ и учитывая (9), получаем, что $I_2 = I_1$. Далее, из (9) следует, что $\int\limits_0^1 g_1(0,t,\lambda)\Phi_1(t)\,dt = \int\limits_0^1 g_2(1,t,\lambda)\Phi_2(t)\,dt$. Поэтому (17) можно записать в виде

$$\int\limits_0^1 U_x(g(x,t,\lambda))BF(t)\,dt = (P(\lambda), P(\lambda))^{\mathrm{T}},$$

где $P(\lambda) = p_1 \int\limits_0^1 g_1(0,t,\lambda)\Phi_1(t)\,dt - \int\limits_0^1 \varphi(\tau) \left(\int\limits_0^1 g_1(\tau,t,\lambda)\Phi_1(t)\,dt + \gamma \int\limits_0^1 g_2(\tau,t,\lambda)\Phi_2(t)\,dt \right) d\tau.$

Учитывая (10)–(11) и (12) при $x=0$, получаем

$$P(\lambda) = -\frac{1}{\lambda d} p_1 \Phi_1(0) + \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^1 \varphi(\tau) f(\tau)\,d\tau - \frac{\gamma}{\lambda d}\Phi_1(1) \int\limits_0^1 \varphi(\tau) e^{-\lambda d\tau}\,d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\lambda d} e^{-\lambda d}\Phi_1(1) \left(p_1 - \int\limits_0^1 \varphi(\tau) e^{\lambda d\tau}\,d\tau \right) + \left(p_1 Q_1(0,\lambda) - \int\limits_0^1 \varphi(\tau) Q_1(\tau,\lambda)\,d\tau \right).$$

Так как $p_1\Phi_1(0) = -p_2\Phi_1(1) + d(af(0) + bf(1))$, то в силу условия $U(f) = 0$ получаем

$$P(\lambda) = \frac{1}{\lambda d}\Phi_1(1) e^{-\lambda d} \left(p_2 e^{\lambda d} - \gamma \int\limits_0^1 \varphi(\tau) e^{\lambda d(1-\tau)}\,d\tau \right) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda d} e^{-\lambda d}\Phi_1(1) \left(p_1 - \int\limits_0^1 \varphi(\tau) e^{\lambda d\tau}\,d\tau \right) + \left(p_1 Q_1(0,\lambda) - \int\limits_0^1 \varphi(\tau) Q_1(\tau,\lambda)\,d\tau \right).$$

Выполняя в интеграле $\int\limits_0^1 \varphi(\tau) e^{\lambda d(1-\tau)}\,d\tau$ замену переменных $\xi = 1-\tau$ и учитывая (16), можно записать

$$P(\lambda) = \frac{1}{\lambda d}\Phi_1(1) e^{-\lambda d}[U_1(e^{\lambda dx}) + U_2(e^{\lambda dx})] + U_1(Q_1(x,\lambda)).$$

Так как $U_j(e^{\lambda dx}) = U_{j1}$, то приходим к утверждению леммы. □

Теорема 1. *Если* $f(x) \in C[0,1] \cap V[0,1]$ *и* $U(f) = af(0) + bf(1) - \int\limits_0^1 \varphi(t) f(t)\,dt = 0$, *то*

$$R_{0,\lambda} f = -\frac{1}{\lambda} f(x) + Q_1(x,\lambda) + Q_2(x,\lambda), \tag{19}$$

где

$$Q_2(x,\lambda) = -U_1(Q_1(x,\lambda))[e^{\lambda dx}(x_{11} + x_{12}) + \gamma e^{-\lambda dx}(x_{21} + x_{22})], \tag{20}$$

x_{ij} *— компоненты матрицы* $\Delta^{-1}(\lambda)$.

Доказательство. Имеем

$$V(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda) \int\limits_0^1 U_x(g(x,t,\lambda))BF(t)\,dt = \begin{pmatrix} P(\lambda)e^{\lambda dx}(x_{11} + x_{12}) \\ P(\lambda)e^{-\lambda dx}(x_{21} + x_{22}) \end{pmatrix}.$$

В силу леммы 2 и следствия из нее имеем

$$R_\lambda f = -P(\lambda)(e^{\lambda dx}(x_{11}+x_{12}) + \gamma e^{-\lambda dx}(x_{21}+x_{22})) + \int\limits_0^1 g_1(x,t,\lambda)\Phi_1(t)\,dt + \gamma \int\limits_0^1 g_2(x,t,\lambda)\Phi_2(t)\,dt.$$

Учитывая (11) и (15), получаем

$$\begin{aligned} R_\lambda f = &-\frac{1}{\lambda d}\Phi_1(1)e^{-\lambda d}(U_{11}+U_{21})(e^{\lambda dx}(x_{11}+x_{12}) + \gamma e^{-\lambda dx}(x_{21}+x_{22}))- \\ &-\frac{1}{\lambda}f(x) + \frac{1}{\lambda d}\Phi_1(1)[e^{\lambda d(x-1)} + \gamma e^{-\lambda dx}] + Q_1(x,\lambda) + Q_2(x,\lambda). \end{aligned} \tag{21}$$

Так как $\Delta(\lambda) = \mathbf{U}(V(x,\lambda)) = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{21}e^{-\lambda d} \\ U_{21} & U_{11}e^{-\lambda d} \end{pmatrix}$ и $\Delta^{-1}(\lambda)\Delta(\lambda) = E$, то

$$\begin{cases} U_{11}x_{11} + U_{21}x_{12} = 1, \\ e^{-\lambda d}(U_{21}x_{11} + U_{11}x_{12}) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} U_{11}x_{21} + U_{21}x_{22} = 0, \\ e^{-\lambda d}(U_{21}x_{21} + U_{11}x_{22}) = 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$x_{11} + x_{12} = \frac{1}{U_{11}+U_{21}}, \qquad x_{21} + x_{22} = \frac{e^{\lambda d}}{U_{11}+U_{21}}. \tag{22}$$

Подставляя (22) в (21) приходим к утверждению теоремы. □

Лемма 6. *Если $a^2 + b^2 - 2\alpha ab \neq 0$, то $p_1p_2 \neq 0$ и имеет место следующая асимптотическая формула*:

$$\det\Delta(\lambda) = e^{\lambda d}(p_1^2 e^{-2\lambda d} - p_2^2 + o(1)).$$

Доказательство. В силу леммы 4 из работы [5] $U_{11} = e^{\lambda d}(p_1 e^{-\lambda d} + o(1))$, $U_{21} = e^{\lambda d}(p_2 + o(1))$. Поэтому $\det\Delta(\lambda) = e^{-\lambda d}(U_{11}^2 - U_{21}^2) = e^{\lambda d}(p_1^2 e^{-2\lambda d} - p_2^2 + o(1))$. □

Следствие. *Обозначим через S_{δ_0} область, получающуюся из полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda d \geq 0$ удалением всех нулей функции $p_1^2 e^{-2\lambda d} - p_2^2$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же радиуса δ_0. Тогда в S_{δ_0} при больших $|\lambda|$ имеет место оценка*

$$|\det\Delta(\lambda)| \geq C|e^{\lambda d}|, \tag{23}$$

где $C > 0$ и не зависит от λ.

Здесь и далее через C будем обозначать различные константы, не зависящие от λ.

Лемма 7. *В области S_{δ_0} при больших $|\lambda|$ справедливы оценки*

$$x_{11} + x_{12} = O(e^{-\lambda d}), \qquad x_{21} + x_{22} = O(1). \tag{24}$$

Доказательство. Из (22) имеем

$$x_{11} + x_{12} = \frac{1}{\det\Delta(\lambda)}e^{-\lambda d}(U_{11} - U_{21}), \qquad x_{21} + x_{22} = \frac{1}{\det\Delta(\lambda)}(U_{11} - U_{21}).$$

Так как $|U_{11} - U_{21}| \leq |e^{\lambda d}||p_1 e^{-\lambda d} - p_2 + o(1)| \leq C|e^{\lambda d}|$, то в силу (23) приходим к (24). □

Лемма 8. *Имеют место следующие оценки:*

$$\int\limits_{|\lambda|=r} Q_1(x,\lambda)\,d\lambda = o(1), \tag{25}$$

$$\int\limits_{|\lambda|=r} Q_2(x,\lambda)\,d\lambda = o(1). \tag{26}$$

Доказательство. Имеем

$$Q_1(x,\lambda) = -\frac{1}{\lambda d}\left(\int\limits_x^1 e^{\lambda d(x-t)}d\Phi_1(t) + \gamma\int\limits_{1-x}^1 e^{\lambda d(1-x-t)}d\Phi_1(t)\right) =$$
$$= -\frac{1}{\lambda d}\left(\int\limits_x^1 e^{\lambda d(x-t)}d\Phi_1(t) + \gamma\int\limits_0^x e^{-\lambda d(x-t)}d\Phi_2(t)\right). \tag{27}$$

Так как

$$\int\limits_x^1 e^{\lambda d(x-t)}d\Phi_1(t) = \int\limits_x^{x+r_1} + \int\limits_{x+r_1}^1 = O\left(\overset{x+r_1}{\underset{x}{V}}(\Phi_1)\right) + O(|e^{-\lambda d r_1}|),$$
$$\int\limits_0^x e^{-\lambda d(x-t)}d\Phi_2(t) = \int\limits_0^{x-r_1} + \int\limits_{x-r_1}^x = O(|e^{-\lambda d r_1}|) + O\left(\overset{x}{\underset{x-r_1}{V}}(\Phi_2)\right)$$

(r_1 — достаточно малое положительное число), то из (27) получаем

$$Q_1(x,\lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|}|e^{-\lambda d r_1}|\right) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\overset{x+r_1}{\underset{x}{V}}(\Phi_1)\right) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\overset{x}{\underset{x-r_1}{V}}(\Phi_2)\right). \tag{28}$$

Обозначим через $\int\limits_{|\lambda|=r}{}'$ интеграл по части контура $|\lambda| = r$, для которого $\operatorname{Re}\lambda d \geq 0 \geq \operatorname{Re}(-\lambda d)$, а через $\int\limits_{|\lambda|=r}{}''$ — для которого $\operatorname{Re}\lambda d \leq 0 \leq \operatorname{Re}(-\lambda d)$ (r считаем таким, что $|\lambda| = r$ находится целиком в области S_{δ_0}).

В силу произвольности выбора r_1 из (28) получаем $\int\limits_{|\lambda|=r}{}' Q_1(x,\lambda)\,d\lambda = o(1)$. Аналогичная оценка имеет место и для интеграла $\int\limits_{|\lambda|=r}{}''$. Следовательно, оценка (25) доказана.

Далее, в силу леммы 7

$$|Q_2(x,\lambda)| = \left|U_1(Q_1(x,\lambda))(e^{\lambda dx}(x_{11}+x_{12}) + \gamma e^{-\lambda dx}(x_{21}+x_{22}))\right| =$$
$$= |U_1(Q_1(x,\lambda))|(O(e^{\lambda d(x-1)}) + O(e^{-\lambda dx})). \tag{29}$$

Имеем

$$U_1(Q_1(x,\lambda)) = p_1 Q_1(0,\lambda) - \int\limits_0^1 \varphi(\tau)Q_1(\tau,\lambda)\,d\tau. \tag{30}$$

Аналогично (28) получаем

$$Q_1(0,\lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\overset{r_1}{\underset{0}{V}}(\Phi_1)\right) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}|e^{-\lambda d r_1}|\right).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{|\lambda|=r}{}' Q_1(0,\lambda)(O(e^{\lambda d(x-1)}) + O(e^{-\lambda dx}))\,d\lambda = o(1). \tag{31}$$

Рассмотрим

$$-\int\limits_0^1 \varphi(\tau)Q_1(\tau,\lambda)\,d\tau = \frac{1}{\lambda d}\int\limits_0^1 \varphi(\tau)\left(\int\limits_\tau^1 e^{\lambda d(\tau-t)}d\Phi_1(t) + \gamma\int\limits_0^\tau e^{-\lambda d(\tau-t)}d\Phi_2(t)\right). \tag{32}$$

Меняя порядок интегрирования и применяя лемму 4 из работы [5] к внутренним интегралам, имеем

$$\int_0^1 e^{-\lambda dt} d\Phi_1(t) \int_0^t e^{\lambda d\tau}\varphi(\tau)d\tau = \int_0^1 e^{-\lambda dt}(o(e^{\lambda dt}) + o(1))d\Phi_1(t) = \int_0^1 (o(1) + o(e^{-\lambda dt}))d\Phi_1(t). \quad (33)$$

$$\int_0^1 e^{\lambda dt} d\Phi_2(t) \int_t^1 e^{-\lambda d\tau}\varphi(\tau)d\tau = \int_0^1 e^{\lambda dt}(o(e^{-\lambda d}) + o(e^{-\lambda d}t))d\Phi_2(t) = \int_0^1 (o(e^{\lambda d(t-1)}) + o(1))d\Phi_2(t). \quad (34)$$

В силу (32)–(34)

$$\int_{|\lambda|=r}{}' (O(e^{\lambda d(x-1)}) + O(e^{-\lambda dx})) \int_0^1 \varphi(\tau)Q_1(\tau,\lambda)\, d\tau\, d\lambda = o(1). \quad (35)$$

Таким образом, учитывая (29)–(31), (35), получаем

$$\int_{|\lambda|=r}{}' Q_2(x,\lambda)\, d\lambda = o(1).$$

Аналогичная оценка имеет место и для интеграла $\int_{|\lambda|=r}{}''$. Значит, оценка (26) доказана. □

Теорема 2. *Если* $f(x) = C[0,1] \cap V[0,1]$, $U(f) = af(0) + b(f) - (y,\varphi) = 0$, $a^2 + b^2 - 2\alpha ab \neq 0$, *то выполняется соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \max_{0\le x\le 1} \left| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f\, d\lambda \right| = 0.$$

Доказательство. По теореме 1 в силу леммы 8 имеем

$$\int_{|\lambda|=r} R_\lambda f\, d\lambda = -\int_{|\lambda|=r} \frac{f(x)}{\lambda}\, d\lambda + o(1).$$

Отсюда следует утверждение теоремы. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00270) *и гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ* (*проект* НШ-4383.2010.1).

Библиографический список

1. *Бари, Н.К.* Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. – М.: Физматгиз, 1961.

2. *Молоденков, В.А.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи для оператора дифференцирования / В.А. Молоденков, А.П. Хромов // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1972. – Вып.1. – С. 17–26.

3. *Хромов, А.П.* Об аналоге теоремы Жордана – Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием / А.П. Хромов // Докл. РАЕН (Поволжское межрегиональное отделение). – 2004. – № 4. – С. 80–87

4. *Халова, В.А.* Конечномерные возмущения интегральных операторов с ядрами, имеющими скачки производных на диагоналях: дис. ... канд. физ.-мат. наук / В.А. Халова. – Саратов, 2006. – 123 с.

5. *Хромов, А.П.* Теоремы равносходимости для интегродифференциальных и интегральных операторов / А.П. Хромов // Мат. сборник. – 1981. – Т. 114 (156), № 3. – С. 378–405.

УДК 517.984

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ КОМПАКТНЫХ ГРАФАХ

В.А. Юрко

Саратовский государственный университет,
кафедра математической физики и вычислительной математики
E-mail: yurkova@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для операторов Штурма – Лиувилля на произвольных компактных графах со стандартными условиями склейки во внутренних вершинах. Доказана теорема единственности восстановления потенциалов по спектрам.

Ключевые слова: операторы Штурма – Лиувилля, пространственные сети, обратные спектральные задачи.

Uniqueness of the Solution of the Inverse Problem for Differential Operators on Arbitrary Compact Graphs

V.A. Yurko

Saratov State University,
Chair of Mathematical Physics and Calculus Mathematics
E-mail: yurkova@info.sgu.ru

An inverse spectral problem is studied for Sturm – Liouville operators on arbitrary compact graphs with standard matching conditions in internal vertices. A uniqueness theorem of recovering operator's coefficients from spectra is proved.

Key words: Sturm – Liouville operators, spatial networks, inverse spectral problems.

1. Исследуется нелинейная обратная задача восстановления потенциалов операторов Штурма – Лиувилля на произвольных компактных графах по спектрам. Обратная спектральная задача для дифференциальных операторов на *деревьях* (т. е. на графах без циклов) изучалась в [1–7] и других работах. Для графов с циклами задача становится существенно более сложной. В частности, в работах [8, 9] решена обратная задача для графов, имеющих только один цикл. В данной статье исследуются компактные графы общего вида с произвольным числом циклов. Доказана теорема единственности решения обратной задачи по спектрам. Отметим, что обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов на *интервале* достаточно подробно представлены в монографиях [10–16].

Рассмотрим компактный связный граф G в $\mathbf{R}^\ell$ с множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_s\}$, с множеством вершин $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_m\}$ и с отображением σ, которое каждому ребру $e_j \in \mathcal{E}$ ставит в соответствие упорядоченную пару (возможно равных) вершин: $\sigma(e_j) := [u_{2j-1}, u_{2j}]$, $u_j \in \mathcal{V}$. Вершины $u_{2j-1} =: \sigma^-(e_j)$ и $u_{2j} =: \sigma^+(e_j)$ называются *начальной* и *конечной* вершинами e_j соответственно. Будем говорить, что ребро e_j *начинается* в точке u_{2j-1} и *заканчивается* в u_{2j}. Точки $U := \{u_j\}_{j=\overline{1,2s}}$ называются *концевыми* для $\mathcal{E}$. Каждая вершина $v \in \mathcal{V}$ порождает класс эквивалентности (который обозначается тем же символом v): $v = \{u_{j_1}, \dots, u_{j_\nu}\}$ так, что $v = u_{j_1} = \dots = u_{j_\nu}$. Другими словами, множество U разделяется на m классов эквивалентности $v_1, \dots, v_m$. Число концевых точек в классе v_k называется *валентностью* вершины v_k и обозначается $val\,(v_k)$. Вершина $v_k \in \mathcal{V}$ называется *граничной*, если $val\,(v_k) = 1$. Остальные вершины называются *внутренними*. Пусть $\mathcal{V}_0 = \{v_1, \dots, v_p\}$ — граничные вершины, а $\mathcal{V}_1 = \{v_{p+1}, \dots, v_m\}$ — внутренние вершины. Ребро e_j называется *граничным*, если одна из его концевых точек лежит в $\mathcal{V}_0$. Остальные ребра называются внутренними. Пусть $\mathcal{E}_0 = \{e_1, \dots, e_p\}$ — граничные ребра и $v_k \in e_k$ при $k = \overline{1,p}$. Ребро $e_k \in \mathcal{E}$ называется *примыкающим* к $v \in \mathcal{V}$, если $v \in e_k$. Через $R(v, G)$ обозначим множество ребер графа G, примыкающих к v. Пусть l_j — длина ребра e_j. Каждое ребро $e_j \in \mathcal{E}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, l_j]$ так, что начальная точка u_{2j-1} соответствует $x_j = 0$, а конечная точка u_{2j} соответствует $x_j = l_j$.

Цепочка ребер $\{e_{\nu_1}, \dots, e_{k,\nu_\eta}\}$ называется *циклом*, если она образует замкнутую кривую. Ребро $e_j \in \mathcal{E}$ называется *простым*, если оно не является частью цикла. В частности, все граничные ребра $e_1, \dots, e_p$ являются простыми. Занумеруем ребра следующим образом: $\mathcal{E}_1 = \{e_1, \dots, e_r\}$ — простые ребра, $\mathcal{E}_2 = \{e_{r+1}, \dots, e_s\}$ — ребра, которые образуют множество циклов. Пусть для определенности $p > 1$ (случаи $p = 0$ и $p = 1$ требуют небольших изменений; см. замечание в конце статьи). Возьмем граничную вершину v_p в качестве корня. Соответствующее ребро e_p будем называть *корневым*. Для

© В.А. Юрко, 2010

определенности условимся, что если $e_j \in \mathcal{E}_1$ — простое ребро, то u_{2j} расположена ближе к корню, чем u_{2j-1}. Стягивая каждый цикл в точку, получим новый граф G^* с множеством ребер $\mathcal{E}_1$. Ясно, что G^* — дерево (т. е. граф без циклов). Зафиксируем $e_k \in G^*$. Наименьшее число ω_k ребер G^* между корневым ребром и e_k (включая e_k) называется *порядком* ребра e_k. Порядок корневого ребра равен нулю. Число $\omega := \max\limits_{e_k \in G^*} \omega_k$ называется порядком G^*. Пусть $\mathcal{E}^{(\mu)}$, $\mu = \overline{0,\omega}$ — множество простых ребер порядка μ.

2. Интегрируемая функция Y на G имеет вид $Y = \{y_j\}_{j=\overline{1,s}}$, где функция $y_j(x_j)$, $x_j \in [0, l_j]$ определена на ребре e_j. Обозначим $Y_{|u_{2j-1}} := y_j(0)$, $Y_{|u_{2j}} := y_j(l_j)$, $\partial Y_{|u_{2j-1}} := y_j'(0)$, $\partial Y_{|u_{2j}} := -y_j'(l_j)$. Если $v \in \mathcal{V}$, то $Y_{|v} = 0$ означает, что $Y_{|u_j} = 0$ для всех $u_j \in v$. Пусть $q = \{q_j\}_{j=\overline{1,s}}$ — интегрируемая вещественная функция на G; q называется потенциалом. Рассмотрим дифференциальное уравнение на G:

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \qquad x_j \in [0, l_j], \tag{1}$$

где $j = \overline{1,s}$, λ — спектральный параметр, функции y_j, y_j', $j = \overline{1,s}$ абсолютно непрерывны на $[0, l_j]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки (УС) в каждой внутренней вершине $v_\xi \in \mathcal{V}_1$:

$$Y_{|u_i} = Y_{|u_j} \quad \text{для всех} \quad u_i,\ u_j \in v_\xi, \qquad \sum_{u_i \in v_\xi} \partial Y_{|u_i} = 0. \tag{2}$$

УС (2) называются стандартными УС. Зафиксируем $e_k \in \mathcal{E}_2$ и $\varepsilon_k = 0 \vee 1$. Положим $w_k := u_{2k-\varepsilon_k}$. Если (2) верно для множества $U \setminus \{w_k\}$, то будем называть эти условия w_k-УС. Рассмотрим краевую задачу $L_0(G)$ для уравнения (1) с УС (2) во внутренних вершинах $\mathcal{V}_1$ и с краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах $\mathcal{V}_0$:

$$Y_{|v_j} = 0, \qquad j = \overline{1,p}. \tag{3}$$

Рассмотрим также краевые задачи $L_k(G)$, $k = \overline{1,p-1}$, для уравнения (1) с УС (2) и с краевыми условиями $\partial Y_{|v_k} = 0$, $Y_{|v_j} = 0$, $j = \overline{1,p} \setminus k$. Таким образом, $L_k(G)$ получается из $L_0(G)$ заменой краевого условия Дирихле в вершине $v_k = \sigma^-(e_k)$ на условия Неймана в v_k. Обозначим $\Lambda_k = \{\lambda_{kn}\}_{n\geq 1}$, $k = \overline{0,p-1}$ — собственные значения (с учетом кратностей) задач $L_k(G)$. Пусть $L_\nu^\xi(G)$, $\xi = \overline{r+1,s}$, $\nu = 0,1$ — краевые задачи для уравнения (1) с w_ξ-УС и с краевыми условиями $\partial^\nu Y_{|w_\xi} = 0$, $Y_{|v_j} = 0$, $j = \overline{1,p}$, где $\partial^0 Y := Y$, $\partial^1 Y := \partial Y$. Через $\Lambda_\nu^\xi = \{\lambda_{\nu n}^\xi\}_{n\geq 1}$ обозначим собственные значения (с учетом кратностей) задач $L_\nu^\xi(G)$. Обратная задача ставится следующим образом.

Обратная задача 1. *Даны спектры* Λ_k, $k = \overline{0,p-1}$, Λ_ν^ξ, $\xi = \overline{r+1,s}$, $\nu = 0,1$, *построить потенциал* q *на* G.

Эта обратная задача является обобщением классических обратных задач для операторов Штурма – Лиувилля на *интервале* и на *деревьях*. Основным результатом статьи является теорема единственности решения обратной задачи 1. Для формулировки теоремы условимся, что наряду с q рассмотрим потенциал $\tilde{q}$. Везде в дальнейшем считаем, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к q, то $\tilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\tilde{q}$.

Теорема 1. *Если* $\Lambda_k = \tilde{\Lambda}_k$, $k = \overline{0,p-1}$, $\Lambda_\nu^\xi = \tilde{\Lambda}_\nu^\xi$, $\xi = \overline{r+1,s}$, $\nu = 0,1$, *то* $q = \tilde{q}$.

Эта теорема будет доказана в пункте 5. В п. 3–4 вводятся основные понятия и доказываются вспомогательные утверждения.

3. Пусть $S_j(x_j,\lambda)$, $C_j(x_j,\lambda)$, $j = \overline{1,s}$, $x_j \in [0, l_j]$ — решения уравнения (1) на ребре e_j при начальных условиях $S_j(0,\lambda) = C_j'(0,\lambda) = 0$, $S_j'(0,\lambda) = C_j(0,\lambda) = 1$. При каждом фиксированном $x_j \in [0, l_j]$ функции $S_j^{(\nu)}(x_j,\lambda)$, $C_j^{(\nu)}(x_j,\lambda)$, $j = \overline{1,s}$, $\nu = 0,1$ являются целыми по λ порядка $1/2$, причем $\langle C_j(x_j,\lambda), S_j(x_j,\lambda)\rangle \equiv 1$, где $\langle y,z\rangle := yz' - y'z$ — вронскиан функций y и z. Пусть $Y = \{y_j\}_{j=\overline{1,s}}$ — решение уравнения (1) на G. Тогда

$$y_j(x_j,\lambda) = a_{j1}(\lambda)C_j(x_j,\lambda) + a_{j2}(\lambda)S_j(x_j,\lambda), \qquad j = \overline{1,s}, \tag{4}$$

где $a_{j1}(\lambda)$ и $a_{j2}(\lambda)$ не зависят от x_j. Подставляя (4) в (2) и (3), получаем линейную алгебраическую систему s_0 относительно $a_{j1}(\lambda)$, $a_{j2}(\lambda)$, $j = \overline{1,s}$. Определитель $\Delta_0(\lambda, G)$ системы s_0 является целой функцией порядка $1/2$. Нули $\Delta_0(\lambda, G)$ совпадают с собственными значениями задачи $L_0(G)$. Функция $\Delta_0(\lambda, G)$ называется *характеристической функцией* для $L_0(G)$. Аналогично определяются

характеристические функции $\Delta_k(\lambda, G)$, $k = \overline{1, p-1}$ для задач $L_k(G)$. Так как $x_k = 0$ в вершине v_k, то $\Delta_k(\lambda, G)$ получается из $\Delta_0(\lambda, G)$ заменой $S_k^{(\nu)}(l_k, \lambda)$, $\nu = 0, 1$ на $C_k^{(\nu)}(l_k, \lambda)$. Через $\Delta_\nu^\xi(\lambda, G)$ обозначим характеристическую функцию задачи $L_\nu^\xi(G)$.

Пусть e_k, $k = \overline{p, r}$ — фиксированное простое ребро графа G и пусть $v = \sigma^-(e_k) \in \mathcal{V}$ — начальная точка ребра e_k. Вершина v делит граф G на две части: $G = Q \cup \hat{G}$, где $Q \cap \hat{G} = v$, $\hat{G} \cap R(v, G) = e_k$. Рассмотрим краевую задачу $L_0(Q, v)$ для уравнения (1) на Q с УС (2) для $v_\xi \in \mathcal{V}_1 \setminus \{v\}$ и с краевыми условиями $Y_{|v_j} = 0$, $v_j \in \mathcal{V}_0 \cup \{v\}$. Пусть $\Delta(\lambda, Q, v)$ — характеристическая функция задачи $L_0(Q, v)$. Разлагая определитель $\Delta_0(\lambda, G)$ системы s_0 по столбцам, соответствующим $a_{j1}(\lambda)$ и $a_{j2}(\lambda)$ для $e_j \in \hat{G}$,, получаем следующие соотношения.

Случай 1. Пусть v — внутренняя вершина для Q. Тогда

$$\Delta_0(\lambda, G) = \Delta_0(\lambda, \hat{G})\Delta_0(\lambda, Q) + \Delta_k(\lambda, \hat{G})\Delta_0(\lambda, Q, v). \tag{5}$$

Аналогично

$$\Delta_j(\lambda, G) = \Delta_0(\lambda, \hat{G})\Delta_j(\lambda, Q) + \Delta_k(\lambda, \hat{G})\Delta_j(\lambda, Q, v), \qquad e_j \in \mathcal{E}_0 \cap Q. \tag{6}$$

Случай 2. Пусть v — граничная вершина для Q, т. е. $R(v, Q) =: e_i \in \mathcal{E}_1$ состоит из одного простого ребра e_i, и $v = \sigma^+(e_i)$. Тогда

$$\Delta_0(\lambda, G) = \Delta_0(\lambda, \hat{G})\Delta_i(\lambda, Q) + \Delta_k(\lambda, \hat{G})\Delta_0(\lambda, Q). \tag{7}$$

Аналогично

$$\Delta_j(\lambda, G) = \Delta_0(\lambda, \hat{G})\Delta_{ij}(\lambda, Q) + \Delta_k(\lambda, \hat{G})\Delta_j(\lambda, Q), \qquad e_j \in \mathcal{E}_0 \cap Q. \tag{8}$$

Здесь $\Delta_{ij}(\lambda, Q)$ — характеристическая функция краевой задачи $L_{ij}(Q)$, которая получается из $L_0(Q)$ заменой граничных условий Дирихле в граничных вершинах $\sigma^-(e_j)$ и $\sigma^+(e_i)$ на условия Неймана. Поэтому $\Delta_{ij}(\lambda, Q)$ получается из $\Delta_0(\lambda, Q)$ заменой $S_j^{(\nu)}(l_j, \lambda)$, $\nu = 0, 1$ на $C_j^{(\nu)}(l_j, \lambda)$ и заменой $S_i(l_i, \lambda)$, $C_i(l_i, \lambda)$ на $S_i'(l_i, \lambda)$, $C_i'(l_i, \lambda)$ соответственно.

Зафиксируем $k = \overline{1, p-1}$. Пусть $\Phi_k = \{\Phi_{kj}\}_{j=\overline{1,s}}$ — решение уравнения (1) на G, удовлетворяющее УС (2) и граничным условиям

$$\Phi_{k|v_j} = \delta_{kj}, \qquad j = \overline{1, p}, \tag{9}$$

где δ_{kj} — символ Кронекера. Положим $M_k(\lambda) := \partial\Phi_{k|v_k} = \Phi_{kk}'(0, \lambda)$. Функция $M_k(\lambda)$ называется функцией Вейля относительно граничного ребра e_k.

Обозначим $M_{kj}^0(\lambda) = \Phi_{kj}'(0, \lambda)$, $M_{kj}^1(\lambda) = \Phi_{kj}(0, \lambda)$, $j = \overline{1, s}$. Тогда

$$\Phi_{kj}(x_j, \lambda) = M_{kj}^1(\lambda)C_j(x_j, \lambda) + M_{kj}^0(\lambda)S_j(x_j, \lambda), \qquad j = \overline{1, s}. \tag{10}$$

В частности, $M_{kk}^0(\lambda) = M_k(\lambda)$, $M_{kk}^1(\lambda) = 1$,

$$\Phi_{kk}(x_k, \lambda) = C_k(x_k, \lambda) + M_k(\lambda)S_k(x_k, \lambda), \tag{11}$$

и, следовательно,

$$\langle \Phi_{kk}(x_k, \lambda),\, S_k(x_k, \lambda)\rangle \equiv 1. \tag{12}$$

Подставляя (10) в (2) и (9), получаем линейную алгебраическую систему s_k относительно $M_{kj}^0(\lambda), M_{kj}^1(\lambda)$, $j = \overline{1, s}$. Определитель системы s_k есть $\Delta_0(\lambda, G)$. Решая систему s_k по формулам Крамера, получаем $M_{kj}^\nu(\lambda) = \Delta_{kj}^\nu(\lambda, G)/\Delta_0(\lambda, G)$, $\nu = 0, 1$, $j = \overline{1, s}$, где определитель $\Delta_{kj}^\nu(\lambda, G)$ получается из $\Delta_0(\lambda, G)$ заменой столбца, соответствующего $M_{kj}^\nu(\lambda)$, на столбец свободных членов. В частности,

$$M_k(\lambda) = -\frac{\Delta_k(\lambda, G)}{\Delta_0(\lambda, G)}, \qquad k = \overline{1, p-1}, \tag{13}$$

где $\Delta_k(\lambda, G)$ — характеристическая функция задачи $L_k(G)$. Из (13) следует, что функции Вейля $M_k(\lambda)$ являются мероморфными по λ с множеством полюсов Λ_0 и множеством нулей Λ_k.

Пусть $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Im}\rho \geq 0$. Обозначим $\Lambda := \{\rho :\ \operatorname{Im}\rho \geq 0\}$, $\Lambda^\delta := \{\rho :\ \arg\rho \in [\delta, \pi - \delta]\}$. При каждом фиксированном $x_k \in [0, l_k)$ имеем

$$\Phi_{kk}^{(\nu)}(x_k,\lambda) = (i\rho)^\nu \exp(i\rho x_k)[1], \qquad \rho \in \Lambda^\delta,\ |\rho| \to \infty. \tag{14}$$

Кроме того, равномерно по $x_j \in [0, l_j]$

$$\left.\begin{aligned} S_j^{(\nu)}(x_j,\lambda) &= \frac{1}{2i\rho}\Big((i\rho)^\nu \exp(i\rho x_j)[1] - (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x_j)[1]\Big),\ \rho \in \Lambda,\ |\rho| \to \infty, \\ C_j^{(\nu)}(x_j,\lambda) &= \frac{1}{2}\Big((i\rho)^\nu \exp(i\rho x_j)[1] + (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x_j)[1]\Big),\ \rho \in \Lambda,\ |\rho| \to \infty. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Пусть $\lambda_{kn}^0 = (\rho_{kn}^0)^2$, $n \geq 1$ — собственные значения краевой задачи $L_k(G)$ с нулевым потенциалом $q = 0$. Эту краевую задачу будем обозначать $L_k^0(G.)$ Пусть $\Delta_k^0(\lambda, G)$ — характеристическая функция задачи $L_k^0(G)$. Ясно, что $\Delta_k^0(\lambda, G)$ имеет тот же вид, что и $\Delta_k(\lambda, G)$, но с $S_j(x_j,\lambda) \equiv \dfrac{\sin \rho x_j}{\rho}$, $C_j(x_j,\lambda) \equiv \cos \rho x_j$, $j = \overline{1,s}$. Известным методом (см., например, [17, 18]), можно получить следующие свойства характеристических функций и собственных значений задач $L_k(G)$.

1. Существует $h > 0$ такое, что числа $\lambda_{kn} = \rho_{kn}^2$ лежат в полосе $|\mathrm{Im}\,\rho| < h$.

2. Число $N_{\xi k}$ нулей $\Delta_k(\lambda, G)$ в прямоугольнике $\Pi_\xi = \{\rho :\ |\mathrm{Im}\,\rho| \leq h,\ \mathrm{Re}\,\rho \in [\xi, \xi+1]\}$ ограничено по ξ.

3. При $\rho \in \Lambda^\delta$, $|\rho| \to \infty$, $\Delta_k(\lambda, G) = \Delta_k^0(\lambda, G)(1 + O(\rho^{-1}))$.

4. При $n \to \infty$, $\rho_{kn} = \rho_{kn}^0 + O\Big((\rho_{kn}^0)^{-1}\Big)$.

Характеристические функции $\Delta_\nu^\xi(\lambda, G)$ имеют аналогичные свойства. Рассмотрим теперь восстановление характеристических функций по их нулям. Обозначим

$$\mu_{kn}^0 = \begin{cases} \lambda_{kn}^0, & \text{если} \quad \lambda_{kn}^0 \neq 0, \\ 1, & \text{если} \quad \lambda_{kn}^0 = 0. \end{cases}, \qquad \mu_{kn} = \begin{cases} \lambda_{kn}, & \text{если} \quad \lambda_{kn} \neq 0, \\ 1, & \text{если} \quad \lambda_{kn} = 0. \end{cases}$$

Используя факторизационную теорему Адамара [19, с. 289] и свойства характеристических функций, можно показать, что задание спектра $\Lambda_k = \{\lambda_{kn}\}_{n\geq 1}$ однозначно определяет характеристическую функцию $\Delta_k(\lambda, G)$ по формуле

$$\Delta_k(\lambda, G) = A_k^0 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{kn} - \lambda}{\mu_{kn}^0}, \qquad A_k^0 = (-1)^{s_k} \frac{1}{s_k!}\Big(\frac{\partial^{s_k}}{\partial \lambda^{s_k}}\, \Delta_k^0(\lambda, G)\Big)_{|\lambda=0},$$

где $s_k \geq 0$ — кратность нулевого собственного значения $L_k^0(G)$. Аналогично задание спектра $\Lambda_\nu^\xi = \{\lambda_{\nu n}^\xi\}_{n\geq 1}$ однозначно определяет характеристическую функцию $\Delta_\nu^\xi(\lambda, G)$.

4. Зафиксируем $k = \overline{1, p-1}$ и рассмотрим следующую обратную задачу на ребре e_k, которую назовем $IP(e_k, G)$.

$IP(e_k, G)$. *Даны* $\Delta_0(\lambda, G)$ *и* $\Delta_k(\lambda, G)$, *построить потенциал* q *на* e_k.

В обратной задаче $IP(e_k, G)$ мы строим потенциал только на ребре e_k, но характеристические функции $\Delta_0(\lambda, G)$ и $\Delta_k(\lambda, G)$ несут глобальную информацию со всего графа.

Докажем теорему единственности для задачи $IP(e_k, G)$.

Теорема 2. *Зафиксируем* $k = \overline{1, p-1}$. *Если* $\Delta_0(\lambda, G) \equiv \tilde{\Delta}_0(\lambda, G)$ *и* $\Delta_k(\lambda, G) \equiv \tilde{\Delta}_k(\lambda, G)$, *то* $q_k(x_k) = \tilde{q}_k(x_k)$ *п.в. на* $[0, l_k]$. *Таким образом, задание двух характеристических функций однозначно определяет потенциал* q_k *на ребре* e_k.

Доказательство. В силу (13) имеем $M_k(\lambda) \equiv \tilde{M}_k(\lambda)$. Рассмотрим функции

$$\left.\begin{aligned} P_{k1}(x_k,\lambda) &= \Phi_{kk}(x_k,\lambda)\tilde{S}_k'(x_k,\lambda) - \tilde{\Phi}_{kk}'(x_k,\lambda) S_k(x_k,\lambda), \\ P_{k2}(x_k,\lambda) &= \tilde{\Phi}_{kk}(x_k,\lambda) S_k(x_k,\lambda) - \Phi_{kk}(x_k,\lambda)\tilde{S}_k(x_k,\lambda). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Из (14)–(16) вытекает, что

$$P_{ks}(x_k,\lambda) = \delta_{1s} + O(\rho^{-1}), \qquad \rho \in \Lambda^\delta,\ |\rho| \to \infty,\ x_k \in (0, l_k], \tag{17}$$

где δ_{ks} — символ Кронекера. Используя (16), вычисляем

$$P_{k1}(x_k,\lambda)\tilde{S}_k(x_k,\lambda)+P_{k2}(x_k,\lambda)\tilde{S}'_k(x_k,\lambda)=S_k(x_k,\lambda)\Big(\tilde{\Phi}_{kk}(x_k,\lambda)\tilde{S}'_k(x_k,\lambda)-\tilde{\Phi}'_{kk}(x_k,\lambda)\tilde{S}_k(x_k,\lambda)\Big).$$

Учитывая (12), выводим

$$S_k(x_k,\lambda)=P_{k1}(x_k,\lambda)\tilde{S}_k(x_k,\lambda)+P_{k2}(x_k,\lambda)\tilde{S}'_k(x_k,\lambda). \tag{18}$$

Подставляя (11) в (16), получаем

$$P_{k1}(x_k,\lambda)=C_k(x_k,\lambda)\tilde{S}'_k(x_k,\lambda)-\tilde{C}'_k(x_k,\lambda)S_k(x_k,\lambda)+(M_k(\lambda)-\tilde{M}_k(\lambda))S_k(x_k,\lambda)\tilde{S}'_k(x_k,\lambda),$$

$$P_{k2}(x_k,\lambda)=\tilde{C}_k(x_k,\lambda)S_k(x_k,\lambda)-C_k(x_k,\lambda)\tilde{S}_k(x_k,\lambda)-(M_k(\lambda)-\tilde{M}_k(\lambda))S_k(x_k,\lambda)\tilde{S}_k(x_k,\lambda).$$

Так как $M_k(\lambda)\equiv\tilde{M}_k(\lambda)$, то при каждом фиксированном x_k функции $P_{ks}(x_k,\lambda)$ являются целыми по λ порядка $1/2$. Вместе с (17) это дает $P_{k1}(x_k,\lambda)\equiv 1$, $P_{k2}(x_k,\lambda)\equiv 0$. Подставляя эти соотношения в (18), получаем $S_k(x_k,\lambda)\equiv\tilde{S}_k(x_k,\lambda)$ при всех x_k и λ, и, следовательно, $q_k(x_k)=\tilde{q}_k(x_k)$ п.в. на $[0,l_k]$. □

Зафиксируем $\xi=\overline{r+1,s}$. Рассмотрим следующую вспомогательную обратную задачу, которую назовем $IP(e_\xi,G)$.

$IP(e_\xi,G)$. *Даны* $\Delta_0^\xi(\lambda,G)$ *и* $\Delta_1^\xi(\lambda,G)$, *построить потенциал* q *на* e_ξ.

Сдвигая немного концевую точку w_ξ в точку $w_\xi^0\notin G$ (без изменения других концевых точек G и без изменения длины e_ξ), получим вместо графа G граф G^ξ с ребром e_ξ^0 вместо e_ξ. Ребро e_ξ^0 является граничным ребром для G^ξ, а w_ξ^0 — граничная вершина для G^ξ. Тогда обратная задача $IP(e_\xi,G)$ равносильна обратной задаче $IP(e_\xi^0,G^\xi)$. Поэтому задача $IP(e_\xi,G)$, $\xi=\overline{r+1,s}$ решается точно так же, как и задача $IP(e_k,G)$.

Зафиксируем $k=\overline{p,r}$. Пусть $e_k\in\mathcal{E}^{(\mu)}$ — фиксированное простое ребро порядка μ и пусть $v=\sigma^-(e_k)\in\mathcal{V}$ — начальная точка ребра e_k. Вершина v делит граф G на две части $G=Q\cup\hat{G}$, где $Q\cap\hat{G}=v$, $\hat{G}\cap R(v,G)=e_k$. Тогда верны (5)–(6) или (7)–(8). Предположим, что потенциал q известен на Q. Зафиксируем $e_j\in\mathcal{E}_0\cap Q$. Пусть заданы $\Delta_0(\lambda,G)$ и $\Delta_j(\lambda,G)$.

1. Решая алгебраическую систему (5)–(6) или (7)–(8), вычисляем $\Delta_0(\lambda,\hat{G})$ и $\Delta_k(\lambda,\hat{G})$.

2. Решая обратную задачу $IP(e_k,\hat{G})$, строим потенциал q на e_k.

Эта процедура вычисления q на e_k называется *процедурой спуска*.

5. Докажем теперь теорему 1, которая является основным результатом статьи. Пусть $\Lambda_k=\tilde{\Lambda}_k$, $k=\overline{0,p-1}$, $\Lambda_\nu^\xi=\tilde{\Lambda}_\nu^\xi$, $\xi=\overline{r+1,s}$, $\nu=0,1$. Так как задание спектров однозначно определяет их характеристические функции, то получаем $\Delta_k(\lambda,G)\equiv\tilde{\Delta}_k(\lambda,G)$, $k=\overline{0,p-1}$ и $\Delta_\nu^\xi(\lambda,G)\equiv\tilde{\Delta}_\nu^\xi(\lambda,G)$, $\xi=\overline{r+1,s}$, $\nu=0,1$. Далее действуем по следующей схеме:

1) для каждого фиксированного $\xi=\overline{r+1,s}$ применяем теорему единственности решения обратной задачи $IP(e_\xi,G)$ и находим, что $q=\tilde{q}$ на e_ξ;

2) для каждого фиксированного $k=\overline{1,p-1}$ применяем теорему единственности решения обратной задачи $IP(e_k,G)$ и находим, что $q=\tilde{q}$ на e_k;

3) при $\mu=\omega-1,\omega-2,\ldots,1,0$ последовательно выполняем следующие операции: для каждого фиксированного простого ребра $e_k\in\mathcal{E}^{(\mu)}$, $p\le k\le r$, пользуясь процедурой спуска, находим, что $q=\tilde{q}$ на e_k. □

Замечание 1. Пусть $p\le 1$ (т.е. $p=0$ или $p=1$). Тогда обратная задача ставится следующим образом: даны спектры Λ_ν^ξ, $\xi=\overline{r+1,s}$, $\nu=0,1$, построить потенциал q на G. Для $p=1$ все вышеприведенные рассуждения и результаты остаются верными; в частности, для доказательства теоремы единственности может быть использована та же схема, но без шага 3. Если $p=0$, $r>0$, то дерево G^* не пусто. Тогда выбираем одну из граничных вершин G^* в качестве корня и повторяем вышеприведенные рассуждения. Если $r=0$, то дерево G^* пусто, и мы опускаем шаг 3 в доказательстве теоремы.

Замечание 2. Доказательство теоремы 1 конструктивно и дает алгоритм построения решения обратной задачи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (*проекты* 10-01-00099 *и* 10-01-92001-*ННС*).

Библиографический список

1. *Belishev, M. I.* Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method / M. I. Belishev // Inverse Problems. – 2004. – V. 20. – P. 647–672.
2. *Yurko, V. A.* Inverse spectral problems for Sturm – Liouville operators on graphs / V. A. Yurko // Inverse Problems. – 2005. – V. 21. – P. 1075–1086.
3. *Brown, B. M.* A Borg – Levinson theorem for trees / B. M. Brown, R. Weikard // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. – 2005. V. 461, № 2062. – P. 3231–3243.
4. *Freiling, G.* Inverse spectral problems for Sturm – Liouville operators on noncompact trees / G. Freiling, V.A. Yurko // Results in Mathematics. – 2007. – V. 50. – P. 195–212.
5. *Yurko, V. A.* Recovering differential pencils on compact graphs / V. A. Yurko // J. Diff. Equations. – 2008. – V. 244. – P. 431–443.
6. *Юрко, В. А.* Обратные задачи для дифференциальных операторов произвольных порядков на деревьях / В. А. Юрко // Мат. заметки. – 2008. – Т. 83, вып. 1. – С. 139–152.
7. *Юрко, В. А.* Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов на некомпактных пространственных сетях / В. А. Юрко // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 12. – С. 1658–1666.
8. *Yurko, V. A.* Inverse problems for Sturm – Liouville operators on bush-type graphs / V. A. Yurko // Inverse Problems. – 2009. – V. 25, № 10, 105008. – 14 p.
9. *Юрко, В. А.* Об обратной спектральной задаче для дифференциальных операторов на графе-еже / В. А. Юрко // Докл. АН. – 2009. – Т. 425, № 4. – С. 466–470.
10. *Марченко, В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. – Киев: Наук. думка, 1977. – 331 с.
11. *Левитан, Б. М.* Обратные задачи Штурма – Лиувилля / Б. М. Левитан. – М.: Наука, 1984. – 240 с.
12. *Freiling, G.* Inverse Sturm – Liouville Problems and their Applications / G. Freiling, V. A. Yurko. – N. Y.: NOVA Science Publishers, 2001. – 305 p.
13. *Yurko, V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory / V. A. Yurko. Inverse and Ill-posed Problems Series. – Utrecht: VSP, 2002. – 303 p.
14. *Beals, R.* Direct and Inverse Scattering on the Line / R. Beals, P. Deift, C. Tomei. – Math. Surveys and Monographs. – V. 28. – Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1988. – 275 p.
15. *Yurko, V. A.* Inverse Spectral Problems for Differential Operators and their Applications / V. A. Yurko. – Amsterdam: Gordon and Breach, 2000. – 253 p.
16. *Юрко, В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач / В. А. Юрко. – М.: Физматлит, 2007. – 384 с.
17. *Наймарк, М. А.* Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
18. *Bellmann, R.* Differential-difference Equations / R. Bellmann, K. Cooke. – N. Y.: Academic Press, 1963. – 548 p.
19. *Conway, J. B.* Functions of One Complex Variable. 2nd ed., V. I / J.B. Conway. – N. Y.: Springer-Verlag, 1995. – 445 p.

МЕХАНИКА

УДК 532.5

ОБТЕКАНИЕ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ ПОД ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА ДВУХ ВЕСОМЫХ ЖИДКОСТЕЙ В КАНАЛЕ

К.В. Кириллин, С.И. Филиппов

Казанский государственный университет,
НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева
E-mail: kirill_k@inbox.ru, sergei.filippov@ksu.ru

Исследуется обтекание крылового профиля под линией раздела двухслойной весомой жидкости при конечной глубине слоев. Представлены результаты расчетов гидродинамических характеристик реального гидропрофиля в зависимости от числа Фруда. Проведены сравнения со случаями обтекания профиля в полубезграничном канале — при отсутствии крышки и при отсутствии дна.

Ключевые слова: крыловой профиль, двухслойная жидкость, гравитационные волны, ограниченный поток.

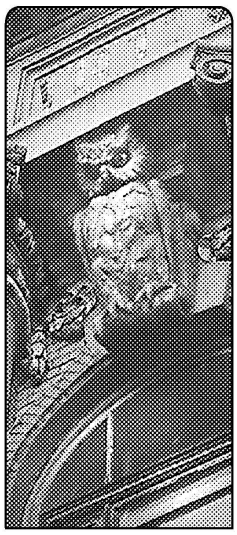
Flow around the Wing Section in Channel under the Interface of Two Ponderable Liquids

K.V. Kirillin, S.I. Filippov

Kazan State University,
N.G. Chebotarev Research Institute of Mathematics and Mechanics
E-mail: kirill_k@inbox.ru, sergei.filippov@ksu.ru

In this paper, we examine a flow around the wing section under the interface of two bounded layers of liquids under gravity. We present here some results of the calculation of real hydrofoil hydrodynamic characteristics subject to Froude number. Comparisons with cases of semi-infinite channel — with no top border and with no bottom border — are given.

Key words: wing section, double-layer liquid, gravity waves, bounded flow.



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ВВЕДЕНИЕ

Общее решение задачи о поступательном движении произвольного контура под свободной поверхностью бесконечно глубокой весомой жидкости в приближении теории волн малой амплитуды было дано Н.Е. Кочиным [1]. М.Д. Хаскинд [2] обобщил решение [1] на случай жидкости конечной глубины. В.С. Войценя [3, 4] теоретически исследовал методом [1] задачу о движении плоского контура непрерывной кривизны под и над границей раздела двух жидкостей разной плотности с верхним слоем, имеющим свободную поверхность. Иной метод решения задачи о движении контура вблизи границ раздела сред был предложен Г.Г. Тумашевым и Н.Д. Черепениным [5] и развит для многосвязных областей С.И. Филипповым [6]. Главное достоинство метода [5] состоит в точном удовлетворении граничного условия на контуре по построению решения. Численные методы к решению данной задачи для кругового и эллиптического цилиндров применялись И.В. Стуровой [7] и С.И. Горловым [8].

В настоящей работе метод [5] применен к решению задачи обтекания профиля произвольной формы, расположенного в закрытом канале под линией раздела двух жидкостей разной плотности. Следует отметить, что при небольших числах Фруда твердая стенка

© К.В. Кириллин, С.И. Филиппов, 2010

моделирует свободную поверхность. Рассматриваемая задача при небольших числах Фруда эквивалентна задаче об обтекании профиля двухслойным потоком со свободной поверхностью и дном. Эта задача связана с явлением «мертвой воды», впервые внесенным в поле научного исследования Ф. Нансеном, которое в настоящее время привлекает большое внимание [9].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим поток идеальной несжимаемой жидкости, ограниченный сверху твердой крышкой M_1, а снизу твердым дном M_3, и состоящий из слоя толщины H_1 плотности ρ_1 и слоя толщины H_2 плотности ρ_2. Жидкость находится под действием силы тяжести, ускорение которой равняется g. Крыловой профиль C с длиной хорды L расположен в нижнем слое жидкости (рис. 1).

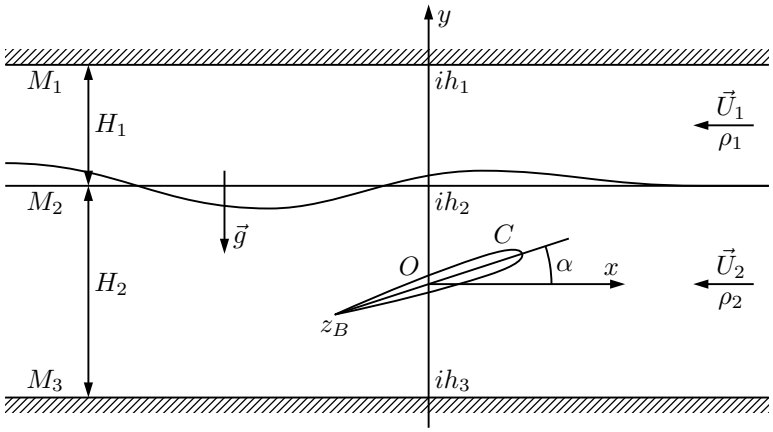


Рис. 1. Схема течения

В системе координат, начало которой совпадает с серединой хорды профиля, ось Ox параллельна невозмущенной границе раздела сред M_2 и направлена навстречу потоку, а ось Oy направлена вертикально вверх, течение плоскопараллельное, установившееся. Границы раздела M_k в системе координат xOy описываются соответственно уравнениями $y = h_k$ $(k = \overline{1,3})$. Скорости потока на бесконечности перед профилем параллельны стенкам канала и равны U_l $(l = 1, 2)$. Считаем, что внутри жидкости вихри отсутствуют, так что течение обладает потенциалом скорости.

Введем соответствующие слоям жидкости области D_l $(l = 1, 2)$. Область D_1 представляет собой полосу $h_2 \le y \le h_1$ $(h_2 = h_1 - H_1)$, область D_2 — полосу $h_3 \le y \le h_2$ $(h_3 = h_2 - H_2)$ за исключением области, ограниченной профилем C.

Рассмотрим комплексную переменную $z = x+iy$ и комплексные потенциалы возмущенного течения

$$\tilde{W}_l(z) = \tilde{\varphi}_l(x, y) + i\tilde{\psi}_l(x, y)$$

в соответствующих областях D_l.

Используя предположения линейной теории волн малой амплитуды, с учетом обозначений

$$\tilde{W}_l(z) = U_l W_l(z), \quad \nu_2 = \frac{g\,(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2},$$

$$m_l = \frac{\rho_l U_l^2}{\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2}, \quad m = m_1 - m_2$$

придем к следующей задаче. Найти функции $W_l(z)$, аналитические в соответствующих областях и удовлетворяющие условиям:

на поверхности профиля C

$$\operatorname{Im} W_2(z) = y + \psi_1 \quad (\psi_1 = \text{const}), \quad z \in C; \tag{1}$$

на горизонтальной крышке M_1

$$\operatorname{Im}\left[\frac{dW_1(z)}{dz}\right] = 0, \quad y = h_1; \tag{2}$$

на невозмущенном уровне линии раздела жидкостей M_2

$$\operatorname{Im}\Big[W_1(z) - W_2(z)\Big] = 0, \tag{3}$$

$$\mathrm{Re}\left[m_1\frac{dW_1(z)}{dz} - m_2\frac{dW_2(z)}{dz} + i\nu_2 W_2(z)\right] = 0, \quad y = h_2; \tag{4}$$

на дне канала M_3

$$\mathrm{Im}\left[\frac{dW_2(z)}{dz}\right] = 0, \quad y = h_3; \tag{5}$$

на бесконечности

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{dW_l(z)}{dz} = 0,$$

$$\left|\frac{dW_l(z)}{dz}\right| < A, \quad A < \infty, \quad z \to \infty. \tag{6}$$

Граничные условия (1), (2), (5) являются условиями плавности обтекания профиля и стенок канала. Условие (3) на линии раздела является кинематическим, (4) — динамическим и представляет собой комплексную запись условия непрерывности давления при пересечении поверхности раздела жидкостей, взятое в линеаризованной форме. При этом, следуя теории волн малой амплитуды, будем выполнять это условие на невозмущенном уровне линии раздела. Условия на бесконечности (6) обеспечивают отсутствие скоростей возмущений далеко перед профилем и ограниченность возмущений вне его окрестности.

В силу линейности задачи представим $W_l(z)$ $(l = 1, 2)$ в виде суммы

$$W_l(z) = W_{1l}(z) + \gamma W_{2l}(z), \tag{7}$$

где $W_{1l}(z)$ — комплексные потенциалы возмущенного бесциркуляционного течения, удовлетворяющие условиям (1)–(6), $W_{2l}(z)$ — комплексные потенциалы чисто циркуляционного течения, γ — значение циркуляции. Потенциалы $W_{2l}(z)$ $(l = 1, 2)$ наряду с условиями (2)–(6) должны удовлетворять еще следующим условиям:

$$\mathrm{Im}\, W_{22}(z) = \psi_2 \quad (\psi_2 = \mathrm{const}), \quad z \in C; \tag{8}$$

$$\Delta_C W_{22} = 1, \tag{9}$$

где Δ_C — приращение функции при положительном обходе контура C.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Метод решения задачи заключается в распределении двойных слоев особенностей (диполей) вещественной плотности по невозмущенному уровню линии раздела жидкостей M_2 и горизонтальным крышке M_1 и дну M_3, к потенциалам которых добавляются такие регулярные вне C функции, что условие на контуре (1) выполняется точно.

Наряду с физической плоскостью $z = x + iy$ рассмотрим параметрическую плоскость $\zeta = \xi + i\eta$. Пусть функция $z = f(\zeta)$ осуществляет конформное отображение внешности единичной окружности $C_0 = \{\zeta \,|\, |\zeta| = 1\}$ на внешность профиля C, причем $f(\infty) = \infty$ и $\zeta_B = -1$ соответствует задней кромке профиля z_B.

Будем искать комплексные потенциалы в виде

$$W_{sl}(z) = W_{s\infty}(z) + \sum_{k=1}^{3}\big[V_{sk}(z) + \Phi_{sk}(z)\big], \tag{10}$$

где $W_{s\infty}(z)$ — комплексные потенциалы возмущенного течения при обтекании профиля безграничным потоком,

$$V_{sk}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+ih_k}^{+\infty+ih_k}\frac{\mu_{sk}(t)}{z-t}\,dt,$$

$$\Phi_{sk}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+ih_k}^{+\infty+ih_k}F_k(z,t)\mu_{sk}(t)\,dt.$$

Функции $F_k(z,t)$ строятся в параметрической плоскости ζ на основании теоремы Милн-Томсона об окружности [10]:

$$F_k\left[f(\zeta), f(\tau)\right] = \frac{1}{f'(\tau)}\left[\chi_k(\zeta,\tau) + G_k(\zeta,\tau)\right],$$

$$\chi_k(\zeta,\tau) = \frac{1}{\zeta-\tau} - \frac{f'(\tau)}{f(\zeta)-f(\tau)}, \qquad G_k(\zeta,\tau) = \frac{1}{\overline{\tau}^2\left(\zeta - 1/\overline{\tau}\right)}.$$

Плотности непрерывно распределенных по M_k особенностей $\mu_{sk}(t)$ $(s=1,2;\ k=\overline{1,3})$ определяются из условий (2), (4), (5). Предварительно для границ M_k проводятся преобразования координат $z = z_k + ih_k$. Условие (3) выполняется на основании свойств предельных значений интеграла типа Коши.

Рассмотрим условие (4) на границе раздела жидкостей M_2 для случая чисто циркуляционного обтекания профиля. Подставим комплексный потенциал в форме (10) $(s=2)$ в условие (4) с учетом преобразования координат $z = z_2 + ih_2$, получим:

$$\mathrm{Re}\left[\left(-\frac{d}{dz_2} + i\nu_2\right)V_{22}(z_2) + \left(m\frac{d}{dz_2} + i\nu_2\right)\Omega_{22}(z_2) + \left(m\frac{d}{dz_2} + i\nu_2\right)V_{21}(z_2)\right]_{z_2=x_2-i\cdot 0} = 0, \qquad (11)$$

где

$$\Omega_{22}(z_2) = W_{2\infty}(z_2) + V_{23}(z_2) + \Phi_{21}(z_2) + \Phi_{22}(z_2) + \Phi_{23}(z_2).$$

Условие (11) представляет собой сингулярное интегродифференциальное уравнение, которое содержит три группы слагаемых: с особенностями на линии раздела $(y_2 = 0)$, с особенностями внутри рассматриваемой области $(y_2 < 0)$ и с особенностями вне области $(y_2 > 0)$. Его можно регуляризовать, используя следующий прием. Заметим, что (11) эквивалентно следующему уравнению:

$$\mathrm{Re}\left[\left(-\frac{d}{dz_2} + i\nu_2\right)V_{22}(z_2) + \left(m\frac{d}{dz_2} - i\nu_2\right)\overline{\Omega}_{22}(z_2) + \left(m\frac{d}{dz_2} + i\nu_2\right)V_{21}(z_2)\right]_{z_2=x_2-i\cdot 0} = 0. \qquad (12)$$

Функции $V_{22}(z_2)$, $\overline{\Omega}_{22}(z_2)$, $V_{21}(z_2)$ регулярны в полуплоскости $y_2 \le 0$, следовательно, выражение под знаком действительной части в этой области является чисто мнимой постоянной:

$$\left(-\frac{d}{dz_2} + i\nu_2\right)V_{22}(z_2) + \left(m\frac{d}{dz_2} - i\nu_2\right)\overline{\Omega}_{22}(z_2) + \left(m\frac{d}{dz_2} + i\nu_2\right)V_{21}(z_2) = iN, \qquad (13)$$

где N — вещественная постоянная, определяемая из условия на бесконечности (6): $N = 0$. Решая линейное дифференциальное уравнение первого порядка (13) относительно V_{22} и находя действительную часть предела при $z_2 \to x_2 - i\cdot 0$ (предельный переход в сингулярном интеграле осуществляется по формуле Сохоцкого), получим в параметрической плоскости ζ при $x_2 = f(\zeta_2) - ih_2$:

$$\mu_{22}(\zeta_2) = 2\,\mathrm{Re}\left[\sigma_{22}(\zeta_2) + \sum_{r=1}^{3}\int\limits_{T_r} L_{2r}(\zeta_2,\tau_r)\mu_{2r}(\tau_r)\,d\tau_r\right]. \qquad (14)$$

Остальные пять уравнений для нахождения плотностей особенностей можно получить, проделав аналогичные (11)–(14) преобразования для граничных условий (2), (4), (5) для случая бесциркуляционного и для условий (2), (5) для случая чисто циркуляционного обтекания. В результате получим две системы уравнений для определения плотностей особенностей $\mu_{sk}(\zeta)$:

$$\mu_{sk}(\zeta_k) = 2\,\mathrm{Re}\left[\sigma_{sk}(\zeta_k) + \sum_{r=1}^{3}\int\limits_{T_r} L_{kr}(\zeta_k,\tau_r)\mu_{sr}(\tau_r)\,d\tau_r\right] \quad \left(s=1,2;\ k=\overline{1,3}\right), \qquad (15)$$

где

$$\sigma_{s1}(\zeta_1) = W^*_{s\infty}(\zeta_1),$$

$$L_{11}(\zeta_1,\tau_1) = \frac{1}{2\pi i}\left[\chi_1(\zeta_1,\tau_1) + G_1(\zeta_1,\tau_1)\right],$$

$$L_{12}(\zeta_1,\tau_2)=\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{\zeta_1-\tau_2}+G_2(\zeta_1,\tau_2)\right],$$

$$L_{13}(\zeta_1,\tau_3)=\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{\zeta_1-\tau_3}+G_3(\zeta_1,\tau_3)\right],$$

$$\sigma_{s2}(\zeta_2)=mW^*_{s\infty}(\zeta_2)-i\nu_2\,(m-1)\,e^{-i\nu_2 f(\zeta_2)}\int\limits_{+\infty}^{\zeta_2}e^{+i\nu_2 f(\vartheta_2)}W^*_{s\infty}(\vartheta_2)f'(\vartheta_2)\,d\vartheta_2,$$

$$L_{21}(\zeta_2,\tau_1)=\frac{1}{2\pi i}\left[m\left(\frac{1}{\zeta_2-\tau_1}+G_1(\zeta_2,\tau_1)\right)-\right.$$

$$-i\nu_2\,(m-1)\,e^{-i\nu_2 f(\zeta_2)}\int\limits_{+\infty}^{\zeta_2}e^{+i\nu_2 f(\vartheta_2)}\big(\chi_1(\vartheta_2,\tau_1)+G_1(\vartheta_2,\tau_1)\big)f'(\vartheta_2)\,d\vartheta_2+$$

$$\left.+i\nu_2\,(m+1)\,e^{+i\nu_2 f(\zeta_2)}\int\limits_{+\infty}^{\zeta_2}e^{-i\nu_2 f(\vartheta_2)}\frac{f'(\tau_1)}{f(\vartheta_2)-f(\tau_1)}f'(\vartheta_2)\,d\vartheta_2\right],$$

$$L_{22}(\zeta_2,\tau_2)=\frac{1}{2\pi i}\left[m\big(\chi_2(\zeta_2,\tau_2)+G_2(\zeta_2,\tau_2)\big)-\right.$$

$$\left.-i\nu_2\,(m-1)\,e^{-i\nu_2 f(\zeta_2)}\int\limits_{+\infty}^{\zeta_2}e^{+i\nu_2 f(\vartheta_2)}\big(\chi_2(\vartheta_2,\tau_2)+G_2(\vartheta_2,\tau_2)\big)f'(\vartheta_2)\,d\vartheta_2\right],$$

$$L_{23}(\zeta_2,\tau_3)=\frac{1}{2\pi i}\left[m\left(\frac{1}{\zeta_2-\tau_3}+G_3(\zeta_2,\tau_3)\right)-\right.$$

$$\left.-i\nu_2\,(m-1)\,e^{-i\nu_2 f(\zeta_2)}\int\limits_{+\infty}^{\zeta_2}e^{+i\nu_2 f(\vartheta_2)}\left(\frac{1}{\vartheta_2-\tau_3}+G_3(\vartheta_2,\tau_3)\right)f'(\vartheta_2)\,d\vartheta_2\right],$$

$$\sigma_{13}(\zeta_3)=-W^*_{1\infty}(\zeta_3),\qquad \sigma_{23}(\zeta_3)=W^*_{2\infty1}(\zeta_3)-W^*_{2\infty2}(\zeta_3),$$

$$L_{31}(\zeta_3,\tau_1)=-\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{\zeta_3-\tau_1}+G_1(\zeta_3,\tau_1)\right],$$

$$L_{32}(\zeta_3,\tau_2)=-\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{\zeta_3-\tau_2}+G_2(\zeta_3,\tau_2)\right],$$

$$L_{33}(\zeta_3,\tau_3)=-\frac{1}{2\pi i}\left[\chi_3(\zeta_3,\tau_3)+G_3(\zeta_3,\tau_3)\right],$$

$$W^*_{1\infty}(\zeta)=-\left(K\zeta+\overline{K}/\zeta\right)+f(\zeta),$$

$$W^*_{2\infty}(\zeta)=W^*_{2\infty1}(\zeta)+W^*_{2\infty2}(\zeta),$$

$$W^*_{2\infty1}(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\ln\left(\zeta-\zeta_\gamma\right),\qquad W^*_{2\infty2}(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\ln\left(\zeta-1/\overline{\zeta}_\gamma\right),$$

$$K=f'_\zeta(\infty),\qquad \zeta_\gamma=f^{-1}(z_\gamma),$$

z_γ — точка, лежащая в области $y\le h_3$, $T_k=\left\{\zeta\,\middle|\,\zeta=f^{-1}(x+ih_k)\right\}$ — образы невозмущенных границ раздела сред в параметрической плоскости ζ. Комплексный потенциал циркуляционного обтекания профиля безграничным потоком $W_{2\infty}(z)=W_{2\infty}\left[f(\zeta)\right]=W^*_{2\infty}(\zeta)$ удовлетворяет условиям (3), (8), (9), этим же условиям удовлетворяет и вся сумма (10) ($s=2$).

Значение циркуляции γ находится из постулата Жуковского – Чаплыгина о конечности скорости на острой кромке профиля [11]:

$$\gamma = \frac{2\pi \operatorname{Im}\left(-K + \overline{K}/\zeta_B^2\right) + \operatorname{Re}\sum\limits_{k=1}^{3} J_{1k}(\zeta_B)}{\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\zeta_B - 1/\overline{\zeta}_\gamma} - \frac{1}{\zeta_B - \zeta_\gamma} - \sum\limits_{k=1}^{3} J_{2k}(\zeta_B)\right)},$$

где

$$J_{sk}(\zeta_B) = \int\limits_{T_k} \left[\frac{1}{(\zeta_B - \tau)^2} + \frac{1}{\overline{\tau}^2\left(\zeta_B - 1/\overline{\tau}\right)^2}\right] \mu_{sk}(\tau)\, d\tau.$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для решения полученных систем линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода (15) $(s = 1, 2)$ применялся метод последовательных приближений [6].

По найденным значениям плотностей определяется комплексный потенциал возмущенного течения (7) и по формуле Чаплыгина [11] вычисляется волновое сопротивление X и подъемная сила Y профиля C:

$$X - iY = \frac{i\rho_2}{2} \oint\limits_{C_0} \frac{1}{f'(\zeta)} \left[\frac{d\tilde{W}_2(\zeta)}{d\zeta}\right]^2 d\zeta - i\rho_2 U_2^2 \gamma.$$

Для расчета гидродинамических характеристик крылового профиля была разработана программа, тестирование которой было проведено на известных решениях задач обтекания тел различных форм слоями жидкостей с одной и двумя границами [6, 7, 12].

Для данной задачи характерно наличие критического числа Фруда Fr^*, значение которого зависит от отношения плотностей ρ_2/ρ_1 и толщин слоев H_1/L и H_2/L [13]. Периодические волны на границе раздела существуют только при $\mathrm{Fr} < \mathrm{Fr}^*$, поэтому именно в этом диапазоне изменения числа Фруда проводились расчеты.

Результаты расчетов, выполненных для профиля NACA 66mod в случае одинаковых скоростей слоев $(U_1 = U_2)$, представлены на рис. 2–5. Отображающая функция $f(\zeta)$ для данного профиля определялась по методу М.В. Лотфуллина [14]. Отношение плотностей жидкостей ρ_2/ρ_1 в расчетах было принято равным 1.03, что соответствует отношению плотностей морской и пресной воды. На рис. 2–4 изображены зависимости коэффициента подъемной силы $c_y = 2Y/\left(\rho_2 U_2^2 L\right)$ от числа Фруда $\mathrm{Fr} = U_2/\sqrt{gL}$.

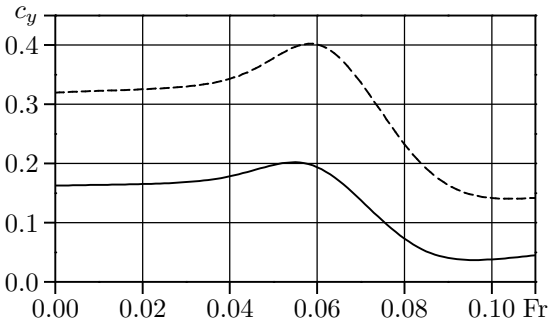


Рис. 2. Зависимость c_y от Fr при $h_1/L = 1.4$, $h_2/L = 0.5$, $h_3/L = -0.6$, $\alpha = \{0°, 1°\}$

На рис. 2 приведены результаты исследования влияния угла атаки профиля α на коэффициент подъемной силы c_y при неизменной геометрии канала — $h_1/L = 1.4$, $h_2/L = 0.5$, $h_3/L = -0.6$. Сплошной кривой изображен коэффициент подъемной силы при $\alpha = 0°$, штриховой — при $\alpha = 1°$. При увеличении угла атаки α наблюдается увеличение c_y во всем рассматриваемом диапазоне чисел Фруда.

На рис. 3 при $\alpha = 1°$, $h_2/L = 0.5$, $h_3/L = -0.6$ сплошной кривой изображен коэффициент подъемной силы профиля c_y в случае верхнего слоя жидкости конечной толщины при $h_1/L = 1.1$, а штриховой — в случае полубезграничного верхнего слоя при $h_1/L = +\infty$. Как видно из графика, наибольшие и наименьшие значения c_y достигаются при меньших значениях h_1/L. Следует отметить значительное отличие коэффициентов подъемной силы в случае канала и в случае полубезграничного потока.

На рис. 4 представлены результаты изучения влияния толщины нижнего слоя жидкости на коэффициент подъемной силы c_y. При $\alpha = 1°$, $h_1/L = 1.2$, $h_2/L = 0.5$ сплошной кривой изображен

коэффициент подъемной силы в случае нижнего слоя жидкости конечной толщины при $h_3/L = -0.8$, а штриховой — в случае бесконечно удаленного дна при $h_3/L = -\infty$.

На рис. 5 продемонстрирован пример расчета линий тока течения и границы раздела жидкостей при $\alpha = 2°$, $h_1/L = 0.97$, $h_2/L = 0.37$, $h_3/L = -0.63$, $\mathrm{Fr} = 0.062$.

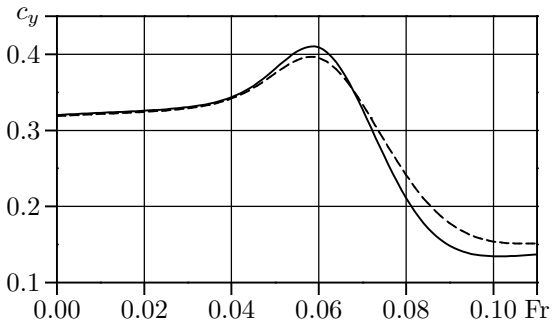


Рис. 3. Зависимость c_y от Fr при $\alpha = 1°$, $h_2/L = 0.5$, $h_3/L = -0.6$, $h_1/L = \{1.1, +\infty\}$

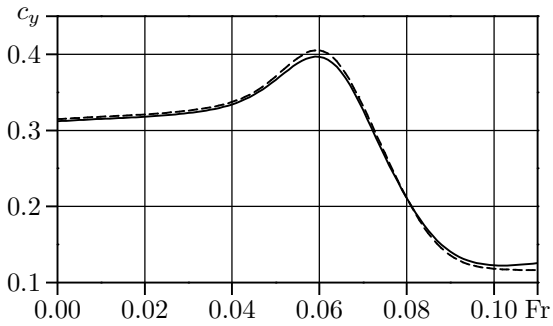


Рис. 4. Зависимость c_y от Fr при $\alpha = 1°$, $h_1/L = 1.2$, $h_2/L = 0.5$, $h_3/L = \{-0.8, -\infty\}$

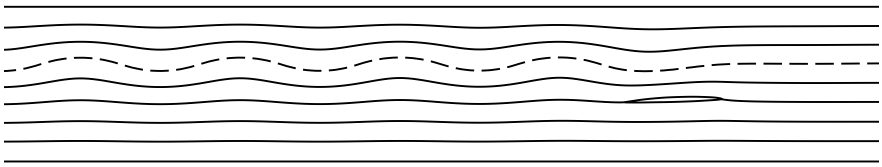


Рис. 5

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 08-01-00163).

Библиографический список

1. *Кочин, Н.Е.* О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел / Н.Е. Кочин // Труды конференции по теории волнового сопротивления. – М.: Изд-во ЦАГИ, 1937. – С. 65–134.

2. *Хаскинд, М.Д.* О поступательном движении тел под свободной поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины / М.Д. Хаскинд // Прикладная математика и механика. – 1945. – Т. 9, № 1. – С. 67–78.

3. *Войценя, В.С.* Плоская задача о поступательном движении тела под поверхностью раздела двух жидкостей / В.С. Войценя // Труды Новочеркасского политехнического ин-та. – 1959. – Т. 109. – С. 95–111.

4. *Войценя, В.С.* О поступательном движении тела над поверхностью раздела двух жидкостей / В.С. Войценя // Изв. вузов. Математика. – 1963. – № 2. – С. 20–30.

5. *Тумашев, Г.Г.* Задача о движении круглого цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости / Г.Г. Тумашев, Н.Д. Черепенин // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1973. – Вып. 10. – С. 140–151.

6. *Филиппов, С.И.* Гидродинамика крылового профиля вблизи границ раздела / С.И. Филиппов. – Казань: Изд-во Казан. мат. об-ва, 2004. – 200 с.

7. *Стурова, И.В.* Плоская задача об обтекании кругового цилиндра равномерным потоком двухслойной жидкости конечной глубины / И.В. Стурова // ПМТФ. – 1998. – Т. 3, № 6. – С. 91–101.

8. *Горлов, С.И.* Влияние поверхностных и внутренних волн на гидродинамические характеристики контура в линейном приближении / С.И. Горлов // Изв. РАН. МЖГ. – 1998. – № 3. – С. 121–127.

9. *Vasseur, R.* Dead Waters: Large amplitude interfacial waves generated by a boat in a stratified fluid / R. Vasseur, M. Mercier, T. Dauxois // ARXIV.ORG: архив электронных препринтов. – 2008. 9 окт. URL: http://arxiv.org/abs/0810.1702 (дата обращения: 01.12.2008).

10. *Милн-Томсон, Л.М.* Теоретическая гидродинамика / Л.М. Милн-Томсон. – М.: Мир, 1964. – 656 с.

11. *Лойцянский, Л.Г.* Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1970. – 904 с.

12. *Лотфуллин, М.В.* Гидродинамическое воздействие на контур, обтекаемый равномерным потоком двухслойной жидкости / М.В. Лотфуллин, И.В. Стурова, С.И. Филиппов // Вычислительные технологии. – 1994. – Т. 3, № 8. – С. 108–115.

13. *Сретенский, Л.Н.* Теория волновых движений жидкости / Л.Н. Сретенский. – М.: Наука, 1977. – 816 с.

14. *Лотфуллин, М.В.* Численный метод конформного отображения односвязных областей / М.В. Лотфуллин // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985. – Вып. 22. – С. 148–150.

УДК 539.374

ВОЛНОВЫЕ ЧИСЛА ПЛОСКИХ GNIII-ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН И НЕРАВЕНСТВА, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЕ ИХ НОРМАЛЬНОСТЬ

В.А. Ковалев[1], **Ю.Н. Радаев**[2]

[1]Московский городской университет управления Правительства Москвы,
кафедра прикладной математики
E-mail: vlad_koval@mail.ru

[2]Самарский государственный университет,
кафедра механики сплошных сред
E-mail: radayev@ssu.samara.ru

В представляемой работе в рамках линейной теории обобщенной термоупругости (GNIII) с помощью связанной системы уравнений движения и теплопроводности приводится анализ плоских гармонических термоупругих волн. Найдены их волновые числа и произведено отделение многозначных ветвей квадратных корней на комплексной плоскости, определяющих четыре возможных значения волновых чисел плоской гармонической GNIII-термоупругой волны. Получены определяющие ограничения и ограничения на частоту, которые обеспечивают нормальный характер затухания прямых волн. Отмечены предельные случаи, в контексте GNIII включающие вариант GNI/CTE (классическая термоупругость) и вариант GNII (гиперболическая термоупругость).

Ключевые слова: теплопроводность, GN-термоупругость, плоская волна, волновое число, фазовая скорость, коэффициент затухания, определяющее ограничение.

On Wavenumbers of Plane Harmonic Type III Thermoelastic Waves

V.A. Kovalev[1], **Yu.N. Radayev**[2]

[1]Moscow City Government University of Management,
Chair of Applied Mathematics
E-mail: vlad_koval@mail.ru

[2] Samara State University,
Chair of Continuum Mechanics
E-mail: radayev@ssu.samara.ru

The present study is devoted to propagation of plane harmonic GNIII-thermoelastic waves by the coupled system of linear equations of motion and heat transport based on the Green & Naghdi theory of thermoelasticity. Analytical findings and exact solutions are primarily related to complex wavenumbers, phase velocities and attenuation coefficients of the plane GNIII-thermoelastic waves. Complete analysis of all analytical branches of the wavenumbers is given. Constitutive inequlities and frequency restrictions which provide a normal behaviour of the plane GNIII-thermoelastic waves are obtained. Limiting cases, including those corresponding to GNI/CTE (the classical theory) and GNII (hyperbolic, thermal energy conserving theory) thermoelasticity, are noted. The paper presents an in-depth analysis of plane thermoelastic waves in the context of GNI,II,III.

Key words: heat transport, GN-thermoelasticity, plane wave, wavenumber, phase velocity, attenuation coefficient, constitutive restriction.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

После выхода в свет работ [1, 2], быстрыми темпами развиваются математические модели термоупругого поведения твердых тел (GN-термоупругость), основанные на различных модификациях закона теплопроводности Фурье, ставивших своей целью получение связанных гиперболических уравнений термоупругости, которые гарантировали бы конечную скорость распространения теплового сигнала.

Явление теплопроводности посредством распространения (с конечной скоростью) незатухающих термических волн получило название «второго звука». Имеется ряд экспериментальных доказательств существования «второго звука», хотя его экспериментальное обнаружение всегда сопряжено с большими трудностями, поскольку в твердых телах он возможен лишь в области весьма низких температур (например, в твердом гелии).

Неклассическая теория GN-термоупругости включает три различных варианта: термоупругость, основанную на законе теплопроводности Фурье, с бесконечно большой скоростью распространения экспоненциально затухающего теплового сигнала (GNI/CTE); термоупругость с сохраняющейся энергией и конечной скоростью распространения термических волн «второго звука» (GNII, гиперболическая термоупругость); третий вариант (GNIII) смешанный и включает первые два в качестве предельных случаев. Ясно, что GNIII-теория в состоянии моделировать значительно более широкий круг явлений, по сравнению с классической теорией теплопроводности Фурье. Заметим, что GNII — единственная известная в настоящее время термодинамически корректная теория, которая

© В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев, 2010

позволяет описать теплопроводность в твердом теле как волновой процесс, не сопровождающийся рассеянием энергии, и сформулировать математическую модель процесса теплопроводности в твердых телах с помощью системы гиперболических уравнений в частных производных, обеспечивающих (в силу своей аналитической классификации) конечную скорость распространения тепла. Поэтому GNII-термоупругость — это как раз такая теория, которую с достаточным основанием можно назвать гиперболической термоупругостью. Она допускает вариационную формулировку [3]: все основные соотношения GNII-термоупругости могут быть последовательно выведены из принципа наименьшего действия с соответствующим образом подобранным Лагранжианом. Последнее обстоятельство позволяет рассматривать термоупругость типа GNII как физическую теорию поля [4].

Полный анализ плоских гармонических GNI/CTE-термоупругих волн был выполнен в статье [5] и было показано, что для каждой частоты всегда имеется ровно два волновых числа, вещественная и мнимая части которых положительны. В работах [6, 7] приводится исследование плоских волн в GNII-термоупругих средах. Плоские термоупругие волны «второго звука» характеризуются четырьмя вещественными волновыми числами, два из которых положительны. Целью настоящего исследования являются плоские гармонические связанные термоупругие волны, которые описываются линейными уравнениями GNIII-термоупругости. Ставится задача вычисления их волновых чисел и их последующий анализ в зависимости от определяющих параметров термоупругости и частоты. Поскольку волновое число k плоской термоупругой волны является, вообще говоря, комплексной величиной, то ограничиваясь лишь исследованием затухающих волн, фазовые поверхности которых распространяются в направлении волнового вектора $\mathbf{k}$, необходимо найти только такие волновые числа, которые удовлетворяли бы условиям $\mathrm{Re}\, k > 0$, $\mathrm{Im}\, k > 0$. Мы будем называть их нормальными волновыми числами. Решение этой задачи требует систематического исследования знаков вещественной и мнимой части в многозначном комплексном представлении волнового числа и выполнения в этой связи значительного объема вычислительной работы. Волновое число k в том виде, в котором оно обычно находится, помимо всего прочего, определяется несколькими независимо изменяющимися параметрами, что также существенно осложняет решение указанной задачи.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ СВЯЗАННОЙ GNIII-ТЕРМОУПРУГОСТИ

Рассмотрим систему связанных уравнений движения и теплопроводности для линейного изотропного термоупругого (типа GNIII) тела при условии отсутствия массовых сил и источников тепла:

$$\begin{cases} \mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} - \alpha\boldsymbol{\nabla}\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \Lambda\boldsymbol{\nabla}^2\theta + \Lambda_*\boldsymbol{\nabla}^2\dot{\theta} - \kappa\ddot{\theta} - \alpha\theta_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\ddot{\mathbf{u}} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор перемещения среды из отсчетного состояния; ρ — плотность среды; λ, μ — упругие постоянные Ламе; $\boldsymbol{\nabla}$ — трехмерный оператор Гамильтона; $\boldsymbol{\nabla}^2 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ — оператор Лапласа; θ — приращение температуры над отсчетной температурой; θ_0 — отсчетная температура; Λ — характерная скорость теплопроводности (thermal conductivity rate); Λ_* — коэффициент теплопроводности; κ — теплоемкость (на единицу объема) при постоянной деформации; термомеханическая постоянная $\alpha = (1/3)(3\lambda + 2\mu)\beta^*$, где β^* — коэффициент объемного теплового расширения; точка над символом обозначает частное дифференцирование по времени при фиксированных пространственных координатах.

Скалярное уравнение в системе (1) называется обобщенным уравнением теплопроводности, сопряженным с уравнением движения (первое уравнение в системе (1)).

Предельный переход $\Lambda_* \to 0$ трансформирует GNIII-модель в GNII-термоупругость (гиперболическая термоупругость), а $\Lambda \to 0$ преобразует ее к классической теории термоупругости GNI/CTE (параболическая термоупругость).

К данным выше уравнениям следует добавить определяющий закон GNIII-термоупругости (закон Дюгамеля—Неймана)

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + (\lambda\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon} - \alpha\theta)\mathbf{I}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор малых деформаций, $\mathbf{I}$ — единичный тензор, и геометрические соотношения Коши

$$2\varepsilon = \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u} + (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

устанавливающие связь между малыми деформациями и перемещениями.

С целью упрощения записи и лучшего восприятия уравнений GNIII-термоупругости (1) введем следующие обозначения:

$$\Lambda' = \frac{\Lambda}{\theta_0}, \quad \Lambda'_* = \frac{\Lambda_*}{\theta_0}, \quad \kappa' = \frac{\kappa}{\theta_0}.$$

Разделив обе части обобщенного уравнения теплопроводности на Λ, перепишем (опуская при этом штрихи в записи постоянных Λ', Λ'_*, κ') затем второе уравнение системы (1) в несколько более простой форме. Окончательно уравнения связанной динамической GNIII-термоупругости для целей настоящего исследования принимаются в форме

$$\begin{cases} \mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} - \alpha\boldsymbol{\nabla}\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\nabla}^2\theta + \dfrac{\Lambda_*}{\Lambda}\boldsymbol{\nabla}^2\dot{\theta} - \dfrac{\kappa}{\Lambda}\ddot{\theta} - \dfrac{\alpha}{\Lambda}\boldsymbol{\nabla}\cdot\ddot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Отметим два предельных случая уравнений GNIII-термоупругости: полагая $\Lambda \to 0$ приходим к динамическим связанным уравнениям классической теории термоупругости GNI/CTE:

$$\begin{cases} \mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} - \alpha\boldsymbol{\nabla}\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\nabla}^2\theta - \dfrac{\kappa}{\Lambda_*}\dot{\theta} - \dfrac{\alpha}{\Lambda_*}\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\mathbf{u}} = 0; \end{cases} \tag{5}$$

совершая предельный переход $\Lambda_* \to 0$, получим уравнения GNII-термоупругости:

$$\begin{cases} \mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} - \alpha\boldsymbol{\nabla}\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\nabla}^2\theta - \dfrac{\kappa}{\Lambda}\ddot{\theta} - \dfrac{\alpha}{\Lambda}\boldsymbol{\nabla}\cdot\ddot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

3. ПЛОСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ СВЯЗАННЫЕ GNIII-ТЕРМОУПРУГИЕ ВОЛНЫ

В этом разделе будут рассмотрены плоские гармонические связанные термоупругие волны, которые являются одним из наиболее часто исследуемых в волновых задачах термоупругости (и вообще в динамике сплошных сред [8]) предметов.

Плоская гармоническая термоупругая волна[1] имеет вид ($\mathbf{k}$ — волновой вектор, ω — циклическая частота, $\mathbf{A}$ — вектор поляризации волны, B — амплитуда отклонений температуры от отсчетной температуры)

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{A}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \\ \theta &= Be^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Рассмотрим связанную систему уравнений GNIII-термоупругости

$$\begin{cases} \mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} - \alpha\boldsymbol{\nabla}\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\nabla}^2\theta + \dfrac{\Lambda_*}{\Lambda}\boldsymbol{\nabla}^2\dot{\theta} - \dfrac{\kappa}{\Lambda}\ddot{\theta} - \dfrac{\alpha}{\Lambda}\boldsymbol{\nabla}\cdot\ddot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Подставив выражения (7) в уравнения системы (8), а также учитывая, что

$$\boldsymbol{\nabla} = i\mathbf{k}, \quad \partial/\partial t = -i\omega,$$

получим следующую систему уравнений, связывающую волновой вектор, циклическую частоту, вектор поляризации волны и амплитуду B:

$$\begin{aligned} &-\mu k^2\mathbf{A} + (\lambda+\mu)(i\mathbf{k})\,(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}) - \alpha(i\mathbf{k})B + \rho\omega^2\mathbf{A} = \mathbf{0}, \\ &\left(\frac{\kappa}{\Lambda}\omega^2 + k^2\left(i\frac{\Lambda_*}{\Lambda}\omega - 1\right)\right)B + \frac{\alpha}{\Lambda}i\omega^2\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}) = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

[1]В физической литературе такие волны обычно называются плоскими монохроматическими волнами.

где k является волновым числом (модулем волнового вектора $\mathbf{k}$) плоской гармонической волны.

Волновое число k может быть, вообще говоря, комплексной величиной. Вполне естественным представляется ограничиться лишь исследованием затухающих волн, фазовые поверхности которых распространяются в направлении вектора $\mathbf{k}$. Поэтому следует разыскивать волновые числа, подчиняющиеся условиям

$$\operatorname{Re} k > 0, \quad \operatorname{Im} k > 0.$$

Заметим, что в физической литературе собственно волновым числом называется $\operatorname{Re} k$; величина $\operatorname{Im} k$ обычно называется коэффициентом затухания. С волновым числом k связана также следующая терминология: $\dfrac{\omega}{\operatorname{Re} k}$ — фазовая скорость волны; $\dfrac{1}{\operatorname{Im} k}$ — глубина проникания волны; $4\pi \left|\dfrac{\operatorname{Im} k}{\operatorname{Re} k}\right|$ — коэффициент потерь.

С помощью первого из уравнений (9) можно заключить, что в связанной термоупругой волне $B \neq 0$ векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{k}$ не могут быть ортогональными.

4. ВОЛНОВЫЕ ЧИСЛА ПЛОСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ GNIII-ТЕРМОУПРУГОЙ ВОЛНЫ

Умножим обе части первого из уравнений системы (9) скалярно на волновой вектор $\mathbf{k}$, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} (\mathbf{k}\cdot\mathbf{A})(\rho\omega^2 - k^2(\lambda+2\mu)) - i\alpha k^2 B = 0, \\ (\mathbf{k}\cdot\mathbf{A})\dfrac{\alpha}{\Lambda} i\omega^2 + \left(\dfrac{\kappa}{\Lambda}\omega^2 + i\frac{\Lambda_*}{\Lambda}k^2\omega - k^2\right) B = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Для нетривиальной совместности системы уравнений (10) должно выполнятся равенство

$$\begin{vmatrix} \rho\omega^2 - k^2(\lambda+2\mu) & -i\alpha k^2 \\ i\dfrac{\alpha}{\Lambda}\omega^2 & \dfrac{\kappa}{\Lambda}\omega^2 + i\dfrac{\Lambda_*}{\Lambda}k^2\omega - k^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Вычисляя определитель, приходим к следующему биквадратному уравнению относительно неизвестного волнового числа k:

$$\rho\frac{\kappa}{\Lambda}\omega^4 - k^2\frac{\kappa}{\Lambda}\omega^2(\lambda+2\mu) + \rho\omega^2 k^2\left(i\frac{\Lambda_*\omega}{\Lambda} - 1\right) - k^4(\lambda+2\mu)\left(i\frac{\Lambda_*\omega}{\Lambda} - 1\right) - \frac{\alpha^2}{\Lambda}k^2\omega^2 = 0. \tag{12}$$

Введем необходимые для дальнейшего изложения обозначения

$$c_l^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}, \quad l^{-2} = \frac{\kappa}{\Lambda},$$

где c_l и l имеют размерность скорости, а также безразмерные постоянные

$$h_3^2 = \frac{\Lambda_*\omega}{\Lambda}, \quad s^2 = \frac{\alpha^2}{\rho\Lambda}, \quad h_2^2 = \frac{c_l^2}{l^2}.$$

Определим еще один безразмерный параметр соотношением

$$h_1^2 = 1 + \frac{c_l^2}{l^2} + s^2$$

и обозначим квадрат волнового числа упругой продольной волны через

$$k_\parallel^2 = \frac{\omega^2}{c_l^2}.$$

Принимая во внимание новые обозначения уравнение (12), из которого находятся значения волновых чисел, представим в следующей форме:

$$\left(ih_3^2 - 1\right)\frac{k^4}{k_\parallel^4} + \left(h_1^2 - ih_3^2\right)\frac{k^2}{k_\parallel^2} - h_2^2 = 0. \tag{13}$$

Заметим, что в силу данных выше определений a priori удовлетворяются определяющие неравенства:

$$h_1 > 1, \quad h_1^2 - h_2^2 > 1. \tag{14}$$

Первое из них является следствием второго. Поэтому имеется только одно априорное определяющее ограничение на постоянные h_1, h_2, h_3.

Ясно, что безразмерное волновое число $k/k_{\|}$ может быть найдено в зависимости от постоянных h_1, h_2, h_3, из которых две первые являются определяющими и лишь последняя зависит от частоты[2].

Квадраты волновых чисел плоской гармонической связанной термоупругой волны находятся из уравнения (13) в виде

$$2\frac{k^2}{k_{\|}^2} = \frac{ih_3^2 - h_1^2 + \sqrt{\left(h_1^2 - ih_3^2\right)^2 + 4h_2^2(ih_3^2 - 1)}}{ih_3^2 - 1}. \tag{15}$$

Здесь и в дальнейшем изложении квадратный корень из комплексного числа понимается как двузначный.

Отступая от основной линии изложения, заметим, что поскольку в теории GNII-термоупругих волн «второго звука» величина $h_3 = 0$, то отношение $k/k_{\|}$ не зависит от частоты. Нетрудно видеть, что уравнение (15) в этом случае упрощается

$$2\frac{k^2}{k_{\|}^2} = h_1^2 \pm \sqrt{h_1^4 - 4h_2^2}. \tag{16}$$

Выражение под знаком квадратного корня всегда положительно:

$$h_1^4 - 4h_2^2 = (1 + s^2 - h_2^2)^2 + 4s^2h_2^2 > 0.$$

Правая часть в (16), как легко проверить, также положительна при любом выборе знака. Поэтому плоские термоупругие волны «второго звука» характеризуются четырьмя вещественными волновыми числами, два из которых положительны.

Для определения значений квадрата волнового числа k проведем ряд дополнительных вычислений и извлечение квадратного корня в соотношении (15).

Воспользуемся известной формулой для нахождения квадратного корня из комплекснозначного выражения $p = \mathrm{Re}\,p + i\mathrm{Im}\,p$. Положив $\sqrt{p} = q = \mathrm{Re}\,q + i\mathrm{Im}\,q$, имеем ровно два значения для $\sqrt{p}$, которые определяются в следующем виде:

$$\mathrm{Re}\,q = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,p + \sqrt{(\mathrm{Re}\,p)^2 + (\mathrm{Im}\,p)^2}}{2}}, \qquad \mathrm{Im}\,q = \frac{\mathrm{Im}\,p}{2\mathrm{Re}\,q}. \tag{17}$$

В рассматриваемом нами случае $p = \left(h_1^2 - ih_3^2\right)^2 + 4h_2^2(ih_3^2 - 1)$, значения величин $\mathrm{Re}\,p$ и $\mathrm{Im}\,p$ следует принять равными

$$\mathrm{Re}\,p = h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2, \qquad \mathrm{Im}\,p = 2h_3^2\left(2h_2^2 - h_1^2\right).$$

Тогда на основании (17), обозначая $\mathrm{Re}\,q = a_{1,2}$ и $\mathrm{Im}\,q = b_{1,2}$, находим

$$a_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2 + \sqrt{\left(h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2\right)^2 + 4h_3^4\left(2h_2^2 - h_1^2\right)^2}}{2}}, \qquad b_{1,2} = \frac{h_3^2\left(2h_2^2 - h_1^2\right)}{a_{1,2}}. \tag{18}$$

Учитывая найденные выше значения $a_{1,2}$ и $b_{1,2}$, равенство (15) можно компактно представить в следующем виде:

$$2\frac{k^2}{k_{\|}^2} = \frac{ih_3^2 - h_1^2 + a_{1,2} + ib_{1,2}}{ih_3^2 - 1}. \tag{19}$$

[2]В теории GNII-термоупругих волн «второго звука» $h_3 = 0$.

Продолжим анализ, отделяя мнимую и вещественные части в правой части (19). Для этого умножим и разделим правую часть уравнения (19) на комплексно сопряженную знаменателю величину

$$2\frac{k^2}{k_{\|}^2} = \frac{ih_3^2 - h_1^2 + a_{1,2} + ib_{1,2}}{ih_3^2 - 1} \cdot \frac{-ih_3^2 - 1}{-ih_3^2 - 1}. \tag{20}$$

Преобразуя и извлекая в (20) корень приходим к

$$\frac{k}{k_{\|}} = \sqrt{\frac{h_3^4 + b_{1,2}h_3^2 + h_1^2 - a_{1,2} + i\left(h_1^2h_3^2 - h_3^2a_{1,2} - h_3^2 - b_{1,2}\right)}{2\left(h_3^4+1\right)}}. \tag{21}$$

Для дальнейшего вычисления волновых чисел плоской гармонической термоупругой волны еще раз осуществим операцию извлечения квадратного корня в (21). Для этого воспользуемся уже применявшимся алгоритмом и соответствующими формулами, полагая

$$\operatorname{Re} p = h_3^4 + b_{1,2}h_3^2 + h_1^2 - a_{1,2}, \qquad \operatorname{Im} p = h_1^2h_3^2 - h_3^2a_{1,2} - h_3^2 - b_{1,2}.$$

В результате находим

$$\sqrt{2\left(h_3^4+1\right)}\frac{k}{k_{\|}} = a'_{1,2;3,4} + ib'_{1,2;3,4}, \tag{22}$$

где номера 1, 2 выбираются независимо от номеров 3, 4 и поэтому имеется всего четыре различных варианта;

$$\begin{aligned} a'_{1,2;3,4} &= \pm\sqrt{\frac{S^2 + b_{1,2}h_3^2 - a_{1,2} + \sqrt{(S^2 + b_{1,2}h_3^2 - a_{1,2})^2 + (T^2 - a_{1,2}h_3^2 - b_{1,2})^2}}{2}}, \\ b'_{1,2;3,4} &= \frac{T^2 - a_{1,2}h_3^2 - b_{1,2}}{2a_{1,2;3,4}}; \end{aligned} \tag{23}$$

S^2 и T^2 определяются согласно

$$S^2 = h_3^4 + h_1^2, \qquad T^2 = h_3^2(h_1^2 - 1). \tag{24}$$

5. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗНАЧЕНИЙ ВОЛНОВЫХ ЧИСЕЛ ПЛОСКОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ ВОЛНЫ

Поскольку волновое число k плоской термоупругой волны является, вообще говоря, комплексной величиной, то ограничиваясь лишь исследованием затухающих волн, фазовые поверхности которых распространяются в направлении вектора $\mathbf{k}$, необходимо найти только такие волновые числа, которые удовлетворяли бы условиям $\operatorname{Re} k > 0$, $\operatorname{Im} k > 0$. Такие волновые числа мы называем нормальными. Решение этой задачи требует систематического исследования знаков вещественной и мнимой части в (22) и выполнения значительного объема вычислительной работы, так как волновое число k в том виде, в котором оно было найдено выше, определяется тремя независимо изменяющимися параметрами h_1, h_2, h_3. Напомним, что они подчинены всего одному априорному определяющему ограничению $h_1^2 - h_2^2 > 1$.

Совсем просто решается вопрос с вещественной частью волнового числа k: неравенству $\operatorname{Re} k > 0$ при всех допустимых значениях параметров h_1, h_2, h_3 удовлетворяют лишь значения $a'_{1;3}$ и $a'_{2;3}$.

Таким образом, остается выяснить знаки величин $b'_{1;3}$ и $b'_{2;3}$ в области допустимых значений параметров h_1, h_2, h_3 с тем, чтобы указать знак мнимой части волнового числа.

Прежде всего заметим, что знак $b'_{1,2;3}$ совпадает со знаком величины

$$\tau_{1,2} = h_1^2h_3^2 - a_{1,2}h_3^2 - h_3^2 - b_{1,2}. \tag{25}$$

Замечая далее, что $b_{1,2} = \dfrac{h_3^2(2h_2^2 - h_1^2)}{a_{1,2}}$, выражение для $\tau_{1,2}$ можно преобразовать к виду

$$\tau_{1,2} = h_3^2(h_1^2 - 1) - h_3^2\frac{a_{1,2}^2 + 2h_2^2 - h_1^2}{a_{1,2}} \tag{26}$$

или

$$\tau_{1,2} = \frac{h_3^2}{a_{1,2}} \left[-a_{1,2}^2 + (h_1^2 - 1)a_{1,2} + h_1^2 - 2h_2^2\right]. \tag{27}$$

Заметим, что в силу своего определения $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ в области допустимых значений параметров h_1, h_2, h_3. Следовательно, можно заключить, что

$$\operatorname{sign}\tau_1 = \operatorname{sign}\left[-a_1^2 + (h_1^2 - 1)a_1 + h_1^2 - 2h_2^2\right], \quad \operatorname{sign}\tau_2 = -\operatorname{sign}\left[-a_2^2 + (h_1^2 - 1)a_2 + h_1^2 - 2h_2^2\right]. \tag{28}$$

Продолжая рассуждения, связанные с оценкой знаков величины $\tau_{1,2}$, рассмотрим вспомогательный квадратный трехчлен

$$\delta(\kappa) = -\kappa^2 + (h_1^2 - 1)\kappa + h_1^2 - 2h_2^2. \tag{29}$$

Оценим его знак для различных диапазонов изменения переменной κ. Определим сначала его корни

$$\kappa_{1,2} = \frac{-(h_1^2 - 1) \pm \sqrt{(h_1^2 - 1)^2 + 4(h_1^2 - 2h_2^2)}}{-2}. \tag{30}$$

Для дальнейшего анализа необходимо исследовать знак дискриминанта квадратного трехчлена (29). Обозначая указанный дискриминант через ς, имеем

$$\varsigma = (h_1^2 - 1)^2 + 4(h_1^2 - 2h_2^2). \tag{31}$$

Будем рассматривать дискриминант ς как квадратный трехчлен от переменной $\xi = h_1^2 - 1$. Нас будет интересовать лишь положительный диапазон изменения переменной ξ. Ясно, что

$$\varsigma = \xi^2 + 4\xi + 4(1 - 2h_2^2).$$

Корни ς определяются как

$$\xi_{1,2} = 2(-1 \pm \sqrt{2}h_2). \tag{32}$$

В области значений $\xi > 0$ может располагаться только корень ξ_1, да и то только, когда выполняется неравенство $h_2^2 > 1/2$. Учитывая все сказанное выше можно заключить, что оценка знака дискриминанта ς в зависимости от тех или иных ограничений распадается на три случая:

(i) $\varsigma < 0$, если $h_1^2 - h_2^2 > 1$, $h_2^2 > 1/2$ и $\xi < \xi_1$;

(ii) $\varsigma > 0$, если $h_1^2 - h_2^2 > 1$, $h_2^2 < 1/2$;

(iii) $\varsigma > 0$, если $h_1^2 - h_2^2 > 1$, $h_2^2 > 1/2$ и $\xi > \xi_1$.

Исследуем каждый из указанных выше вариантов.

В случае (i), который характеризуется априорным определяющим неравенством $h_1^2 - h_2^2 > 1$ и определяющими неравенствами $h_2^2 > 1/2$, $0 < h_1^2 - 1 < 2(-1 + \sqrt{2}h_2)$, дискриминант ς отрицателен и, следовательно, квадратный трехчлен δ не имеет вещественных корней. Поэтому трехчлен δ принимает только отрицателные значения, откуда заключаем, что $\tau_1 < 0$, $\tau_2 > 0$. Неравенства $\operatorname{Re} k > 0$, $\operatorname{Im} k > 0$, таким образом, выполняются, если в выражении для волнового числа (22) выбрать индексы 2 и 3. Исследование неравенств $h_1^2 - h_2^2 > 1$ и $0 < h_1^2 - 1 < 2(-1 + \sqrt{2}h_2)$ показывает, что они несовместны, поэтому случай (i) следует исключить из рассмотрения.

В случае (ii), который характеризуется априорным определяющим неравенством $h_1^2 - h_2^2 > 1$ и еще одним определяющим неравенством $h_2^2 < 1/2$, дискриминант ς положителен; квадратный трехчлен δ имеет ровно два вещественных корня κ_1, κ_2, которые удовлетворяют неравенствам $\kappa_1 < 0$, $\kappa_2 > 0$. Ясно, что $\tau_1 > 0$, только если $a_1 < \kappa_2$; $\tau_2 > 0$, только если $a_2 < \kappa_1$. Заметим, что неравенства $a_1 < \kappa_2$ и $a_2 < \kappa_1$ не имеют смысла определяющих ограничений, поскольку они устанавливают ограничения на параметр h_3, который зависит от циклической частоты ω. Неравенства $\operatorname{Re} k > 0$, $\operatorname{Im} k > 0$, таким образом, выполняются, если в выражении для волнового числа (22) выбрать:

(ii-1) номера 1 и 3 при условии $a_1 < \kappa_2$;

(ii-2) номера 2 и 3 при условии $a_2 < \kappa_1$.

В пределах исследуемого случая пока остается открытым вопрос о спектре частот, подчиняющихся неравенствам $a_1 > \kappa_2$ или $0 > a_2 > \kappa_1$: при априорном определяющем ограничении $h_1^2 - h_2^2 > 1$ и определяющем ограничении $h_2^2 < 1/2$ неравенство $\operatorname{Im} k > 0$, обеспечивающее нормальный характер

затухания плоской волны, никогда не удовлетворяется, если частота подчинена ограничению $a_1 > \kappa_2$ или $0 > a_2 > \kappa_1$.

В случае (iii), который характеризуется априорным определяющим неравенством $h_1^2 - h_2^2 > 1$ и определяющими неравенствами $h_2^2 > 1/2$, $h_1^2 - 1 > 2(-1 + \sqrt{2}h_2)$, второе из которых является следствием априорного определяющего неравенства, дискриминант ς положителен; квадратный трехчлен δ имеет ровно два вещественных корня κ_1, κ_2, второй из которых положителен, а знак первого корня необходимо выяснить. Заметим, что справедливо неравенство $\kappa_1 < \kappa_2$. На основании (30) имеем

$$\kappa_1 = \frac{-(h_1^2 - 1) + \sqrt{(h_1^2 - 1)^2 + 4(h_1^2 - 2h_2^2)}}{-2}, \tag{33}$$

т. е. знак κ_1 (положительный или отрицательный) может быть указан в зависимости от выполнения неравенств

$$\xi > \sqrt{\xi^2 + 4\xi + 4(1 - 2h_2^2)}, \qquad \xi < \sqrt{\xi^2 + 4\xi + 4(1 - 2h_2^2)},$$

которые сводятся соответственно к следующему виду:

$$h_1^2 - 1 < 2h_2^2 - 1, \qquad h_1^2 - 1 > 2h_2^2 - 1.$$

В рамках рассматриваемого случая имеется априорное определяющее ограничение $h_1^2 - h_2^2 > 1$, которое не противоречит ограничению $h_1^2 - 1 < 2h_2^2 - 1$, только если выполняется неравенство $h_2^2 > 1$. Суммируя все рассуждения, можно сделать следующий вывод. В рамках (iii) неравенства $\operatorname{Re} k > 0$, $\operatorname{Im} k > 0$ удовлетворяются, если в выражении для волнового числа (22) выбрать:

(iii-1-1) индексы 2 и 3 при выполнении $h_1^2 - h_2^2 > 1$, $h_2^2 > 1$ и дополнительного определяющего ограничения $h_1^2 - 1 < 2h_2^2 - 1$;

(iii-1-2) индексы 2, 3, а также 1, 3 при выполнении $h_1^2 - h_2^2 > 1$, $h_2^2 > 1$ и дополнительного определяющего ограничения $h_1^2 - 1 < 2h_2^2 - 1$ и ограничения на частоту $0 < \kappa_1 < a_1 < \kappa_2$;

(iii-2-1) индексы 1 и 3 при выполнении $h_1^2 - h_2^2 > 1$ и дополнительного определяющего ограничения $h_1^2 - 1 > 2h_2^2 - 1$ и ограничения на частоту $a_1 < \kappa_2$;

(iii-2-2) индексы 2 и 3 при выполнении $h_1^2 - h_2^2 > 1$ и дополнительного определяющего ограничения $h_1^2 - 1 > 2h_2^2 - 1$ и ограничения на частоту $a_2 < \kappa_1 < 0$.

Таким образом, нормальные волновые числа k плоских GNIII-термоупругих волн, т. е. волновые числа удовлетворяющие неравенствам $\operatorname{Re} k > 0$, $\operatorname{Im} k > 0$, определены во всем допустимом диапазоне изменения параметров h_1, h_2, h_3.

Библиографический список

1. *Green, A.E.* On undamped heat waves in an elastic solid / A.E. Green, P.M. Naghdi // J. Therm. Stress. – 1992. – V. 15. – P. 253–264.

2. *Green, A.E.* Thermoelasticity without energy dissipation / A.E. Green, P.M. Naghdi // J. Elasticity. – 1993. – V. 31. – P. 189–208.

3. *Kalpakides, V.K.* Canonical formulation and conservation laws of thermoelasticity without dissipation / V.K. Kalpakides, G.A. Maugin // Reports in Mathematical Physics. – 2004. – V. 53. – P. 371–391.

4. *Ковалев, В.А.* Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты / В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев. – М.: Физматлит, 2009. – 156 с.

5. *Радаев, Ю.Н.* Гармонические связанные СТЕ-термоупругие волны в свободном цилиндрическом волноводе / Ю.Н. Радаев, Д.А. Семенов // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. – 2008. – №8/1(67). – С. 411–459.

6. *Ковалев, В.А.* Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости/ В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев, Д.А. Семенов // III сессия Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела: тез. докл. Всерос. конф./ под ред. проф. Л.Ю. Коссовича. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. – С. 25.

7. *Ковалев, В.А.* Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости/ В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев, Д.А. Семенов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. – 2009. – Т. 10. – Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 4, ч. 2. – С. 94–128.

8. *Бреховских, Л.М.* Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн) / Л.М. Бреховских, В.В. Гончаров. – М.: Наука, 1982. – 336 с.

УДК 539.3

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

В.А. Лохов, Ю.И. Няшин, В.С. Туктамышев

Пермский государственный технический университет,
кафедра теоретической механики
E-mail: nyashin@pstu.ru

В статье представлен метод ортогональных проекций для решения краевых задач теории упругости с собственными деформациями. Основная особенность метода заключается в том, что ортогональное разложение производится в функциональном пространстве собственных деформаций, а не напряжений, как ранее. В результате показана возможность решения задач о создании в системе заданного поля напряжений посредством собственных деформаций, сохраняя при этом деформацию системы, и, наоборот, создания в системе заданных деформаций (заданной формы), не меняя напряжений в системе. Разработанный подход применен для управления остаточными напряжениями в задаче термопластического деформирования.

Ключевые слова: независимое управление напряжениями, горячая прокатка.

Development of the Decomposition Method in Mechanics of Solids

V.A. Lokhov, Yu.I. Nyashin, V.S. Tuktamishev

Perm State Technical University,
Chair of Theoretical Mechanics
E-mail: nyashin@pstu.ru

The orthogonal projection method for solution of boundary value problem of theory of elasticity with eigenstrain is presented. The main feature of the method is that the orthogonal decomposition is performed in the Hilbert function space of eigenstrains instead of function space of stresses, which is commonly accepted. As a result, the opportunities to create the desired stress field by eigenstrain keeping strain unchanged (strain-free stress control) and vice versa to create the desired strain distribution keeping stress unchanged (stress-free shape control) are shown. The developed approach is applied to control of residual stress in thermoplasticity.

Key words: independent stress control, hot rolling.

ВВЕДЕНИЕ

Идея использования декомпозиции гильбертова пространства для решения краевых задач принадлежит польскому математику Зарембе [1]. Позже этот метод был назван методом ортогональных проекций [2]. Применительно к задачам МДТТ метод был развит в работах С.Г. Михлина [3], где гильбертово пространство являлось пространством напряжений. В настоящей работе гильбертово пространство строится с помощью тензоров собственной деформации. Это понятие для геометрически линейных задач ввел Рейсснер [4] как разность тензоров полной и упругой деформации, определяемой по закону Гука. В роли собственной деформации могут быть температурные, пластические деформации, деформации ползучести, деформации при фазовых превращениях, различные деформации в живых тканях и т.д. Такой подход позволяет выявить важные свойства решений краевых задач МДТТ, не зависящие от природы собственных деформаций. В данной работе доказана теорема о том, что собственная деформация, существующая в теле, может быть однозначно разложена на две ортогональные (в смысле введенного гильбертова пространства) составляющие: собственную деформацию, не вызывающую напряжений, и собственную деформацию, не вызывающую полной деформации в любой точке тела. Применение указанной методики позволяет полностью разделить задачи управления напряжениями и деформациями (или перемещениями) с помощью собственных деформаций.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим твердое тело, занимающее область Ω в трехмерном евклидовом пространстве E^3. Замыкание области обозначим как $\bar{\Omega}$, а границу (которая предполагается достаточно гладкой) — как Γ ($\bar{\Omega} = \Omega \bigcup \Gamma$). Граница области Γ разделена на две непересекающиеся части $\Gamma = \Gamma_u \bigcup \Gamma_\sigma$. На границе Γ_u заданы кинематические граничные условия, а граница Γ_σ свободна от напряжений:

$$\vec{u} = 0, \qquad \vec{x} \in \Gamma_u, \tag{1}$$

$$\vec{n} \cdot \tilde{\sigma} = 0, \qquad \vec{x} \in \Gamma_\sigma. \tag{2}$$

Деформации системы считаются малыми и аддитивными. Следовательно, тензор полной деформации $\tilde{\varepsilon}$ может быть представлен как сумма тензора упругой деформации $\tilde{\varepsilon}^e$ и тензора собственной деформации $\tilde{\varepsilon}^*$,

© В.А. Лохов, Ю.И. Няшин, В.С. Туктамышев, 2010

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^e + \tilde{\varepsilon}^*. \tag{3}$$

Под собственной деформацией здесь понимается неупругая деформация любой природы: температурная деформация, пластическая деформация, деформация фазовых переходов, деформации роста и перестройки живых тканей и т.д.

Далее тело, деформация которого представлена формулой (3) и собственная деформация $\tilde{\varepsilon}^*$ считается заданной, будем называть упругим телом с собственной деформацией.

Напряжения в системе определяются обобщенным законом Гука,

$$\tilde{\sigma} = \tilde{C} \cdot\cdot \left(\tilde{\varepsilon}(\vec{u}) - \tilde{\varepsilon}^*\right), \tag{4}$$

где $\vec{u} \in \left(W_2^1(\Omega)\right)^3$, $\vec{u} = 0$, $\vec{x} \in \Gamma_u$, а также имеет место равенство,

$$\int\limits_{\Omega} \tilde{\sigma} \cdot\cdot \tilde{\varepsilon}(\vec{w})\, dV = 0, \tag{5}$$

$$\forall\, \vec{w} \in \left(W_2^1(\Omega)\right)^3, \qquad \vec{w} = 0, \qquad \vec{x} \in \Gamma_u.$$

Здесь W_2^1 — пространство Соболева функций, имеющих первую обобщенную производную и интегрируемых в квадрате вместе с первыми производными. Деформации $\tilde{\varepsilon}(\vec{u})$ и $\tilde{\varepsilon}(\vec{w})$ определяются геометрическими соотношениями Коши,

$$\tilde{\varepsilon}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{u}\vec{\nabla}\right), \qquad \vec{x} \in \bar{\Omega}, \tag{6}$$

где производные понимаются в обобщенном смысле. Значения перемещений $\vec{u}$ and $\vec{w}$ на границе вычисляются посредством оператора следа [5]. В обобщенной постановке задачи считается, что $\tilde{\varepsilon}^* \in \left(L_2(\Omega)\right)^6$, компоненты C_{ijkl} $(i, j, k, l = 1, 2, 3)$ являются кусочно-непрерывными функциями координат.

Обобщенное решение имеет аналогичный смысл с принципом возможных перемещений и не требует вычисления производных по пространственным координатам. Можно показать, что дифференциальное решение аналогичной краевой задачи удовлетворяет обобщенной постановке (1)–(6), а при достаточной гладкости напряжений обобщенное решение удовлетворяет дифференциальным уравнениям краевой задачи.

Краевую задачу (1)–(6) будем называть задачей теории упругости с собственной деформацией. В данной задаче собственная деформация $\tilde{\varepsilon}^*$ считается известной. При добавлении, например, уравнения теплопроводности и определяющих соотношений теории пластичности, необходимых для вычисления собственной деформации, краевая задача будет называться задачей термоупругопластичности. Однако постановка краевой задачи в виде уравнений (1)–(6) с заданной собственной деформацией позволит определить свойства решения задачи, которые не зависят от природы собственной деформации.

Под управлением напряжениями и деформациями понимается задача отыскания собственной деформации, создающей в теле заданные напряжения и (или) заданные деформации.

2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА СОБСТВЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Более детальное исследование свойств собственных деформаций проведено посредством аппарата функционального анализа, то есть введения функционального пространства собственных деформаций.

Рассмотрим множество H симметричных тензоров второго ранга. Компоненты тензоров являются вещественными функциями пространственных координат и принадлежат функциональному пространству L_2. Совокупность компонент тензора $\tilde{A}$ принадлежит пространству $(L_2)^6$: $\tilde{A} \in (L_2)^6$.

Скалярное произведение в пространстве, удовлетворяющее условиям симметрии, линейности и положительной определенности, описывается в пространстве H следующим выражением

$$(\tilde{A},\ \tilde{B})_H = \int\limits_{\Omega} A_{ij}\, C_{ijkl}\, B_{kl}\, dV. \tag{7}$$

Норма в пространстве H определяется через скалярное произведение (7),

$$\left\|\tilde{A}\right\|_H = \sqrt{(\tilde{A},\, \tilde{A})_H}. \tag{8}$$

Подпространство H_u введено посредством следующего определения: некоторый симметричный тензор $\tilde{f} \in H$ принадлежит подпространству H_u если для него существует вектор перемещений: $\exists\, \vec{u} \in \left(W_2^1\,(\Omega)\right)^3$, удовлетворяющий условию $\vec{u} = 0$, $\vec{x} \in \Gamma_u$, и

$$\tilde{f} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{u}\vec{\nabla}\right). \tag{9}$$

Производные в уравнении (9) понимаются в обобщенном смысле, а значение функции $\vec{u}$ на границе Γ_u определяется посредством оператора следа.

Физический смысл подпространства H_u заключается в том, что это пространство есть множество совместных деформаций, где соответствующие им перемещения $\vec{u}$ обращаются в нуль на неподвижных опорах. Можно показать, что подпространство H_u является линейным, так как операции суммирования и умножения на число в результате дают элемент подпространства H_u . В дальнейшем тензоры, принадлежащие указанному подпространству, будут называться совместными.

Далее считается, что элементами функционального подпространства являются тензоры собственных деформаций.

В этом случае из постановки задачи (1)–(6) можно показать, что принадлежность собственной деформации подпространству H_u является необходимым и достаточным условием для того, чтобы собственная деформация не вызывала напряжений в системе [6], т.е. была свободной от напряжений.

Подпространство H_σ содержит собственные деформации, которые не вызывают полной деформации системы:

$$\tilde{\varepsilon}^* = -\tilde{C}^{-1} \cdot\cdot \tilde{\sigma}, \qquad \vec{x} \in \bar{\Omega}, \tag{10}$$

где $\tilde{\sigma}$ — статически допустимые напряжения (уравновешенные напряжения),

$$\int\limits_{\Omega} \tilde{\sigma}^* \cdot\cdot \tilde{\varepsilon}(\vec{w})\, dV = 0, \qquad \forall\, \vec{w} \in \left(W_2^1\,(\Omega)\right)^3, \quad \vec{w} = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma_u. \tag{11}$$

Множество собственных деформаций, удовлетворяющих условиям (10), (11), образуют линейное подпространство H_σ.

Условие $\tilde{\varepsilon}^* \in H_\sigma$ (то есть условия (10) и (11) выполнены) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы собственная деформация $\tilde{\varepsilon}^*$ не вызывала деформации системы [6], т.е. была свободной от деформаций.

3. ТЕОРЕМА О ДЕКОМПОЗИЦИИ СОБСТВЕННОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Эта теорема отражает фундаментальное свойство собственной деформации.

Любая существующая в теле собственная деформация $\tilde{\varepsilon} \in H$ может быть единственным образом разложена на две составляющие [6]

$$\tilde{\varepsilon}^* = \tilde{\varepsilon}^*_u + \tilde{\varepsilon}^*_\sigma, \tag{12}$$

где $\tilde{\varepsilon}^*_u \in H_u$ и $\tilde{\varepsilon}^*_\sigma \in H_\sigma$ (H_u — подпространство совместных собственных деформаций, H_σ — подпространство собственных деформаций, не создающих полной деформации системы).

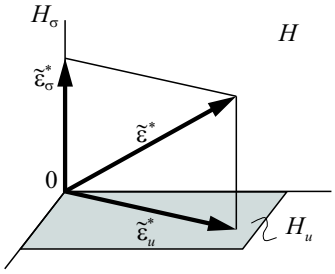


Рис. 1

Другими словами, подпространства H_u и H_σ взаимно ортогональны ($H = H_u \oplus H_\sigma$), и любой элемент $\tilde{\varepsilon}^* \in H$ может быть представлен в виде (12) единственным образом. Иллюстрация декомпозиции показана на рис. 1.

Доказанная теорема утверждает, что любая собственная деформация, имеющаяся в теле, может быть единственным образом разложена на свободную от напряжений и свободную от деформаций части.

Разложение собственных деформаций открывает практически значимую возможность для полного разделения задач управления напряжениями и деформациями.

Таким образом, теорема показывает, что за счет одной функции $\tilde{\varepsilon}^*$ в задаче (1)–(6) можно независимо управлять двумя функциями: напряжениями и деформациями.

4. ОЦЕНКИ ОТКЛОНЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ОТ ТРЕБУЕМЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Задача заключается в определении функционала, характеризующего отклонение напряжений от заданных величин. Необходимо представить это отклонение через управляющие величины, т.е. через собственные деформации. Особенностью построения оценки является то, что не требуется знание решения задачи теории упругости с собственными деформациями.

(i) Пусть необходимо создать в теле напряжения $\tilde{\sigma}^{(0)}$ (статически допустимое напряжение) при условии, что деформации не меняются. Тогда заданные напряжения $\tilde{\sigma}^{(0)}$ должны удовлетворять условию (11). Отметим, что только такие напряжения могут быть созданы в системе посредсвом собственных деформаций. Тогда согласно формуле (10) точное решение поставленной задачи имеет вид

$$\tilde{\varepsilon}_\sigma^{(0)} = -\tilde{C}^{-1} \cdot\cdot \tilde{\sigma}^{(0)}, \tag{13}$$

в то время как истинные напряжения вычисляются через часть $\tilde{\varepsilon}_\sigma^*$ существующей собственной деформации:

$$\tilde{\sigma} = -\tilde{C} \cdot\cdot \tilde{\varepsilon}_\sigma^*. \tag{14}$$

Тогда оценка напряжений может быть введена как расстояние между деформациями ε_σ^* и $\varepsilon_\sigma^{(0)}$ в пространстве H. Действительно, рассмотрим следующую задачу:

$$\Phi = \left\| \tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}^{(0)} \right\|^2 = \int\limits_\Omega \left(\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}^{(0)} \right) \cdot\cdot \tilde{C}^{-1} \cdot\cdot \left(\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}^{(0)} \right) dV \to \inf(\tilde{\varepsilon}_\sigma^* \in H_\sigma). \tag{15}$$

С учетом уравнений (13) и (14) оценку (15) можно записать в виде

$$\Phi = \left\| \tilde{\varepsilon}_\sigma^{(0)} - \tilde{\varepsilon}_\sigma^* \right\|_H^2 \to \inf(\tilde{\varepsilon}_\sigma^* \in H_\sigma). \tag{16}$$

(ii) Рассмотрим задачу, где необходимо создать заданные совместные деформации $\tilde{\varepsilon}^{(0)}$, при условии, что напряжения в системе не изменятся (задача независимого управления деформациями). Целевая функция для такой задачи водится аналогично:

$$\Psi = \left\| \tilde{\varepsilon}_u^* - \tilde{\varepsilon}^{(0)} \right\|_H \to \inf(\tilde{\varepsilon}_u^* \in H_u) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tilde{\varepsilon}(\vec{r}) \to \tilde{\varepsilon}^{(0)}(\vec{r}) \ \ \forall\, \vec{r} \in \bar{\Omega}. \tag{17}$$

Скалярное произведение в оценках (16) и (17) вычисляется согласно формуле (8).

5. УПРАВЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ В ГОРЯЧЕКАТАНЫХ ДВУТАВРОВЫХ БАЛКАХ

Предлагаемый подход был использован для получения заданного распределения остаточных напряжений в горячекатаных двутавровых балках. В качестве параметра управления рассматривался режим принудительного охлаждения поверхности балки после прокатки, характеризуемый коэффициентом теплоотдачи $\alpha(\vec{r}, t)$.

При решении задачи была принята гипотеза о том, что напряжения и деформации в момент окончания прокатки равны нулю, в то время как температура в точках поперечного сечения существенно отличается. Разность температур может достигать 150–200 K [7]. Поскольку температурные деформации, возникающие при охлаждении балки от температуры прокатки до температуры окружающей среды, определены (они зависят только от режима прокатки), то заданное распределение остаточных напряжений может быть достигнуто путем создания в балке пластических деформаций. В этом случае собственная деформация $\tilde{\varepsilon}^*$ является суммой температурной деформации $\tilde{\varepsilon}^T$, пластической деформации $\tilde{\varepsilon}^P$ и деформации фазовых переходов $\tilde{\varepsilon}^{Ph}$. Остаточные напряжения, формирующиеся в процессе естественного охлаждения балки, носят, как правило, отрицательный характер [7]. Продольные остаточные напряжения могут достигать 75% от предела текучести и существенно снижать предел выпучивания балки (примерно на 1/3) при использовании её в качестве колонны. Однако можно найти

такое распределение остаточных напряжений, которое позволит увеличить предел устойчивости. Методика построения такого поля остаточных напряжений изложена в работе [8]. Целью данной работы является создание в балке поля остаточных напряжений, близкого к заданному полю, посредством собственных деформаций.

Целевая функция (16) для случая одноосных остаточных напряжений в балке принимает вид

$$\Phi = l \int\limits_S E \Delta f^2 \, ds \to \inf(\varepsilon^*), \tag{18}$$

где

$$f = \varepsilon^* + \frac{\sigma_0}{E}, \qquad \Delta f = f - \left(\int\limits_S E \, f \, ds \right) \Big/ \left(\int\limits_S E \, ds \right),$$

и l — длина двутавровой балки. При решении задачи об управлении остаточными напряжениями процесс термоупругого деформирования был разделен на малые шаги. На каждом шаге находился параметр $\alpha(\vec{r}, t)$ путем минимизации функционала (18). Соответствующие пластические деформации вычислялись путем использования теории неизотермического пластического течения:

$$d\sigma_x = A d\varepsilon_x + B dT(\alpha).$$

Более подробно алгоритм решения описан в работе [7].

Результаты решения представлены на рис. 2. На рис. 2, *а, г*, показаны распределения остаточных напряжений в двутавровой балке с размерами $H \times B \times d \times t = 340 \times 160 \times 5,5 \times 9$ мм, на рис. 2, *б*, показана зависимость коэффициента теплоотдачи принудительного охлаждения в зависимости от времени. Кривая *1* обозначает распределение желаемых остаточных напряжений, кривая *2* — распределение остаточных напряжений, полученных при естественном охлаждении, кривая *3* — распределение остаточных напряжений после принудительного охлаждения. Видно, что принудительное охлаждение позволяет приблизиться к оптимальному распределению остаточных напряжений, что, в свою очередь, увеличивает предел устойчивости балки по сравнению с балкой, произведенной по традиционной технологии.

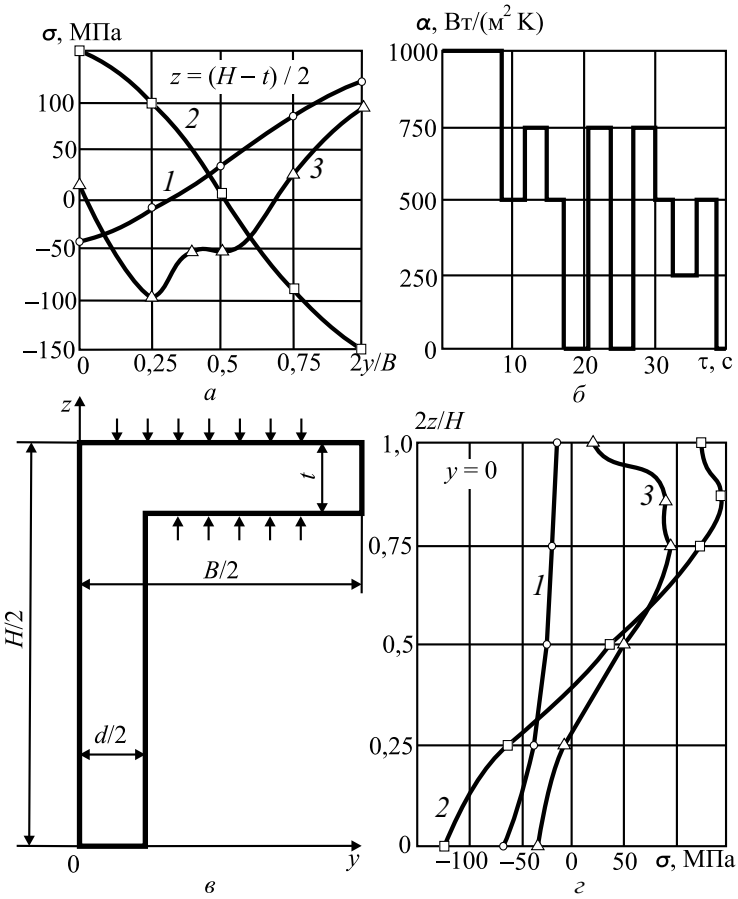


Рис. 2. Результаты расчетов: *а*, *г* — распределение остаточных напряжений в балке (кривые: *1* — распределение желаемых остаточных напряжений, *2* — распределение остаточных напряжений, полученных при естественном охлаждении, *3* — распределение остаточных напряжений после принудительного охлаждения); *б* — зависимость коэффициента теплоотдачи принудительного охлаждения от времени; *в* — четверть поперечного сечения балки

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проекты* 07-01-96061-Урал, 07-01-92168-НЦНИ).

Библиографический список

1. *Zaremba, S.* Sur le principe de minimum / S. Zaremba // Bull. intern. l'Acad. d. sciences de Cracovie. Cl. des sciences math. et natur. – 1909. – № 7. – P. 197–264.
2. *Weil, H.* The method of orthogonal projections in potential theory / H. Weil // Duke Math. J. – 1940. – V. 7. – P. 411–444.
3. *Михлин, С.Г.* Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
4. *Reissner, H.* Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen / H. Reissner // Z. Angew. Math. Mech. – 1931. – V. 11, № 1. – P. 1–8.
5. *Колмогоров, А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В Фомин. – М.: Наука, 1968. – 543 с.
6. *Nyashin, Y.* Decomposition method in linear elastic problems with eigenstrain / Y. Nyashin, V. Lokhov, F. Ziegler // Z. Angew. Math. Mech. – 2005. – V. 85. – P. 557–570.
7. *Поздеев, А.А.* Остаточные напряжения: теория и приложения / А.А. Поздеев, Ю.И. Няшин, П.В. Трусов. – М.: Наука, 1982. – 112 с.
8. *Tall, L.* Residual stress and column instability under axial loads / L. Tall, A. Huber, Beedle // XII Annual Assembly, Liege, June 13–19, 1960. – Liege: Intern. Institute of Welding, 1960. – P. 381–396.

УДК 539.3

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ В ЗАДАЧАХ О КОЛЕБАНИЯХ ТОНКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ

П.Ф. Недорезов[1], О.М. Ромакина[2], Р.А. Сафонов[1]

[1]Саратовский государственный университет,
кафедра математической теории упругости и биомеханики
E-mail: p1934n@yandex.ru, safonovra@gmail.com

[2]Саратовский государственный университет,
кафедра компьютерной алгебры и теории чисел,
E-mail: romakinaom@hotbox.ru,

В статье изложена методика численного решения задач о поиске критических частот вязкоупругих пластинок при изгибных установившихся колебаниях. Решение основано на понижении размерности задачи с помощью модифицированного метода сплайн-коллокации и численном решении получившейся краевой задачи методом дискретной ортогонализации. Подробно описано применение этого подхода при различных вариантах граничных условий.

Ключевые слова: пластинка, изгиб, численное решение, сплайны, дискретная ортогонализация.

Modified Spline Collocation Method in the Problems of Thin Rectangular Viscoelastic Plate Vibrations

P.F. Nedorezov[1], O.M. Romakina[2], R.A. Safonov[1]

[1]Saratov State University,
Chair of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics
E-mail: p1934n@yandex.ru, safonovra@gmail.com

[2]Saratov State University,
Chair of Computer's Algebra and Theory of Numbers
E-mail: romakinaom@hotbox.ru

Numerical method for evaluation of critical frequencies during steady-state bending vibrations of viscoelastic plate is presented. The solution is based on applying modified spline collocation method for lowering the problem's dimension and numerical solving of the obtained problem via discrete orthogonalization method. The application of this approach with different boundary conditions is examined in detail.

Key words: plate, bending, numerical solution, spline, discrete orthogonalization.

ВВЕДЕНИЕ

Задача об установившихся поперечных колебаниях тонкой прямоугольной полимерной пластинки в рамках классической теории Кирхгофа при различных частных способах закрепления двух противоположных сторон рассматривалась ранее в работах [1–5]. В настоящей работе приводится методика численного решения задачи об установившихся колебаниях такой пластинки при произвольных граничных условиях на боковой поверхности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Тонкая пластинка с размерами в плане a, b и толщиной h совершает установившиеся колебания под действием распределенной по поверхности $z = -h/2$ нагрузки интенсивности

$$q(x, y, t) = q_0(x, y) \cos \omega t. \tag{1}$$

© П.Ф. Недорезов, О.М. Ромакина, Р.А. Сафонов, 2010

Материал пластинки считается вязкоупругим с независящими от температуры свойствами:

$$\sigma_x = \frac{1}{1-\nu^2}\int\limits_{\tau=-\infty}^{t} K(t-\tau)\,(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_{\text{H}})\,d\tau \qquad (x \Leftrightarrow y),$$
$$\tau_{xy} = \frac{1}{2(1+\nu)}\int\limits_{\tau=-\infty}^{t} K(t-\tau)\,\gamma_{xy}d\tau, \qquad \nu = \text{const}. \tag{2}$$

Перемещения и внутренние усилия в пластинке, соответствующие нагрузке (1), представляются в виде

$$Z(x,\,y,\,z,\,t) = \sum_{k=1}^{2} Z^{(k)}(x,\,y,\,z)\,\cos\left[\omega\,t - (k-1)\pi/2\right]. \tag{3}$$

Система уравнений для определения составляющих прогиба $w^{(k)}$ $(k = 1,\,2)$ при предположении, что выполняются гипотезы классической теории изгиба Кирхгофа, получена в работе [1]. Для безразмерных составляющих $W_k = h^{-1}w^{(k)}$ $(k = 1,\,2)$ эта система в безразмерных переменных $\xi = a^{-1}x$, $\eta = b^{-1}y$ может быть записана в виде

$$\frac{\partial^4 W_k}{\partial\,\xi^4} + 2c^2\frac{\partial^4 W_k}{\partial\,\xi^2\partial\eta^2} + c^4\frac{\partial^4 W_k}{\partial\,\eta^4} + (-1)^k\omega^2\sum_{r=1}^{2}\delta_{k+r-1}\,W_r = (-1)^{k-1}d_k\,q_0(\xi,\,\eta) \qquad (k = 1,\,2), \tag{4}$$

где обозначено $c = a/b$, $d_k = 12\,(1-\nu^2)\,h_0^{-4}\frac{E_k}{E_1^2+E_2^2}$, $\delta_k = \rho\,h^2 d_k$ $(k = 1,\,2)$, $d_3 = -d_1$, $\delta_3 = -\delta_1$, ρ — плотность, E_k $(k = 1,\,2)$ — компоненты комплексного модуля материала $E_1 + iE_2 = \int\limits_0^\infty K(s)\,\exp(i\omega s)\,ds$, $E_3 = -E_1$, $h_0 = h/a$ — безразмерная толщина пластинки.

Тогда формулы для составляющих внутренних усилий в пластинке преобразуются к виду

$$M_x^{(k)} = a^2\sum_{r=1}^{2}(-1)^r D_{k+r-1}\left(\frac{\partial^2 W_r}{\partial\xi^2} + \nu c^2\frac{\partial^2 W_r}{\partial\eta^2}\right), \qquad H_{xy}^{(k)} = (1-\nu)a^2 c\sum_{r=1}^{2}(-1)^r D_{k+r-1}\frac{\partial^2 W_r}{\partial\xi\,\partial\eta},$$
$$Q_x^{(k)} = a\sum_{r=1}^{2}(-1)^r D_{k+r-1}\left[\frac{\partial^3 W_r}{\partial\xi^3} + c^2\frac{\partial^3 W_r}{\partial\xi^2\,\partial\eta}\right], \qquad (k = 1,2;\quad x \Leftrightarrow y;\quad \xi \Leftrightarrow \eta c^{-1}),$$
$$Q_x^{(k)*} = Q_x^{(k)} + \frac{\partial H_{xy}^{(k)}}{\partial y} = a\sum_{r=1}^{2}(-1)^r D_{k+r-1}\left[\frac{\partial^3 W_r}{\partial\xi^3} + (2-\nu)c^2\frac{\partial^3 W_r}{\partial\xi^2\,\partial\eta}\right], \tag{5}$$

где $D_k = \dfrac{E_k h_0^4}{12(1-\nu^2)}$ $(k = 1,\,2)$; $D_3 = -D_1$.

Граничные условия для уравнений (4) должны быть записаны в соответствии с условиями закрепления или нагружения сторон пластинки. В случаях пластинки, шарнирно опертой по всему периметру, или когда две противоположные стороны подкреплены шарнирами при произвольных условиях на остальной части границы удается получить точные аналитические решения. Такие решения приведены соответственно в работах [1] и [2]. При других способах закрепления двух противоположных сторон численное решение может быть получено классическим методом сплайн-коллокации [3, 4].

Далее приводится основанная на применении модифицированного метода сплайн-коллокации [5] методика численного решения краевой задачи для уравнений (4) при произвольных граничных условиях на контуре пластинки. Единственное принимаемое при этом ограничение состоит в предположении, что вид граничных условий в пределах каждой стороны пластинки остается неизменным.

2. СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ $W_k(\xi,\eta)$ (k=1, 2)

Следуя модифицированному методу сплайн-коллокации, будем искать функции $W_k(\xi,\eta)$ $(k = 1,\,2)$ в виде

$$W_k(\xi,\eta) = \sum_{j=-2}^{N+2} B_{5,j}(\xi)W_j^{(k)}(\eta), \qquad (k = 1,\,2). \tag{6}$$

Здесь $B_{5,j}(\xi)$ — нормализованные B-сплайны пятой степени [6], определенные на равномерной сетке $\Delta = \{\xi_{-5} < \xi_{-4} < \ldots < \xi_{N+5}\}$, $\xi_i = i/N$ $(i = \overline{-5, N+5})$, а функции $W_j^{(k)}(\eta)$ $(k = 1, 2;\ j = \overline{-2, N+2})$ подлежат определению, причем функции $W_{-r}^{(k)}(\eta)$ и $W_{N+r}^{(k)}(\eta)$ $(k, r = 1, 2)$ должны быть подобраны так, чтобы выполнялись граничные условия на сторонах $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_N$.

Рассмотрим возможные варианты граничных условий при $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_N$.

Вариант 1. Стороны $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_N$ деформированы заданным образом:

$$W_1(\xi_0, \eta) = w_0(\eta), \qquad W_2(\xi_0, \eta) = 0, \qquad \frac{\partial W_1(\xi_0, \eta)}{\partial \xi} = \Theta_0(\eta), \qquad \frac{\partial W_2(\xi_0, \eta)}{\partial \xi} = 0, \tag{7}$$

$$W_1(\xi_N, \eta) = w_N(\eta), \qquad W_2(\xi_N, \eta) = 0, \qquad \frac{\partial W_1(\xi_N, \eta)}{\partial \xi} = \Theta_0(\eta), \qquad \frac{\partial W_2(\xi_N, \eta)}{\partial \xi} = 0. \tag{8}$$

В этом случае подстановка выражений (6) в (7) и (8) приводит к системам двух алгебраических уравнений, из которых функции $W_{-r}^{(k)}(\eta)$ и $W_{N+r}^{(k)}(\eta)$ $(k, r = 1, 2)$ выражаются через $W_j^{(k)}(\eta)$ и $W_{N-j}^{(k)}(\eta)$ $(k = 1, 2;\ j = \overline{0, 2})$ следующим образом:

$$W_{-r}^{(k)}(\eta) = m_{0,r}^{(k)}(\eta) + \sum_{j=0}^{2} a_{r,j} W_j^{(k)}(\eta), \qquad W_{N+r}^{(k)}(\eta) = m_{N,r}^{(k)}(\eta) + \sum_{j=N-2}^{N} a_{r,j} W_j^{(k)}(\eta) \qquad (k, r = 1, 2). \tag{9}$$

Вариант 2. На сторонах $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_N$ заданы условия смешанного типа

$$w^{(1)}(\xi_0, \eta) = h w_0(\eta), \qquad w^{(2)}(\xi_0, \eta) = 0, \qquad M_x^{(1)}(\xi_0, \eta) = m_0(\eta), \qquad M_x^{(2)}(\xi_0, \eta) = 0,$$
$$w^{(1)}(\xi_N, \eta) = h w_N(\eta), \qquad w^{(2)}(\xi_N, \eta) = 0, \qquad M_x^{(1)}(\xi_N, \eta) = m_N(\eta), \qquad M_x^{(2)}(\xi_N, \eta) = 0,$$

или

$$\frac{\partial w^{(1)}(\xi_0, \eta)}{\partial \xi} = h\Theta_0(\eta), \qquad \frac{\partial w^{(2)}(\xi_0, \eta)}{\partial \xi} = 0, \qquad Q_x^{(1)*}(\xi_0, \eta) = p_0(\eta), \qquad Q_x^{(2)}(\xi_0, \eta) = 0,$$
$$\frac{\partial w^{(1)}(\xi_N, \eta)}{\partial \xi} = h\Theta_N(\eta), \qquad \frac{\partial w^{(2)}(\xi_N, \eta)}{\partial \xi} = 0, \qquad Q_x^{(1)*}(\xi_N, \eta) = p_N(\eta), \qquad Q_x^{(2)}(\xi_N, \eta) = 0.$$

Соответствующие условия для функций $W_k(\xi, \eta)$ $(k = 1, 2)$ с учетом формул (5) могут быть преобразованы к виду

$$W_1(\xi_0, \eta) = w_0(\eta), \quad W_2(\xi_0, \eta) = 0, \quad \frac{\partial^2 W_1(\xi_0, \eta)}{\partial \xi^2} = m_{0,1}(\eta), \quad \frac{\partial^2 W_2(\xi_0, \eta)}{\partial \xi^2} = m_{0,2}(\eta),$$
$$W_1(\xi_N, \eta) = w_N(\eta), \quad W_2(\xi_N, \eta) = 0, \quad \frac{\partial^2 W_1(\xi_N, \eta)}{\partial \xi^2} = m_{N,1}(\eta), \quad \frac{\partial^2 W_2(\xi_0, \eta)}{\partial \xi^2} = m_{N,2}(\eta), \tag{10}$$

или

$$\frac{\partial W_1(\xi_0, \eta)}{\partial \xi} = \Theta_0(\eta), \quad \frac{\partial W_2(\xi_0, \eta)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial^3 W_1(\xi_0, \eta)}{\partial \xi^3} = p_{0,1}(\eta), \quad \frac{\partial^3 W_2(\xi_0, \eta)}{\partial \xi^3} = p_{0,2}(\eta),$$
$$\frac{\partial W_1(\xi_N, \eta)}{\partial \xi} = \Theta_N(\eta), \quad \frac{\partial W_2(\xi_N, \eta)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial^3 W_1(\xi_N, \eta)}{\partial \xi^3} = p_{N,1}(\eta), \quad \frac{\partial^3 W_2(\xi_0, \eta)}{\partial \xi^3} = p_{N,2}(\eta). \tag{11}$$

Тогда, как и в случае первого варианта граничных условий, после подстановки выражений (6) в условия (10) или (11) получаются системы алгебраических уравнений, из которых функции $W_{-r}^{(k)}(\eta)$ и $W_{N+r}^{(k)}(\eta)$ $(k, r = 1, 2)$ в явном виде выражаются через $W_j^{(k)}(\eta)$ и $W_{N-j}^{(k)}(\eta)$ $(k = 1, 2;\ j = \overline{0, 2})$. Соответствующие формулы также можно записать в виде (9).

Вариант 3. Стороны $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_N$ загружены заданными усилиями:

$$M_x^{(1)}(\xi_0, \eta) = m_0(\eta), \qquad M_x^{(2)}(\xi_0, \eta) = 0, \qquad Q_x^{(1)*}(\xi_0, \eta) = p_0(\eta), \qquad Q_x^{(2)}(\xi_0, \eta) = 0,$$
$$M_x^{(1)}(\xi_N, \eta) = m_N(\eta), \qquad M_x^{(2)}(\xi_N, \eta) = 0, \qquad Q_x^{(1)*}(\xi_N, \eta) = p_N(\eta), \qquad Q_x^{(2)}(\xi_N, \eta) = 0.$$

Учитывая (5), условия при $\xi = \xi_0$ можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 W_k(\xi_0, \eta)}{\partial \xi^2} + \nu c^2 \frac{\partial^2 W_k(\xi_0, \eta)}{\partial \eta^2} = -\frac{m_{0,k}(\eta)}{D_1 a^2 (1 + \mathrm{tg}^2 \delta)},$$

$$\frac{\partial^3 W_k(\xi_0,\eta)}{\partial\xi^3}+(2-\nu)c^2\frac{\partial^3 W_k(\xi_0,\eta)}{\partial\xi\,\partial\eta^2}=-\frac{p_{0,k}(\eta)}{D_1 a(1+\mathrm{tg}^2\delta)}\qquad (k=1,\,2),$$

где $m_{0,1}(\eta)=m_0(\eta)$, $m_{0,2}(\eta)=-m_0(\eta)\mathrm{tg}\,\delta$, $p_{0,1}(\eta)=p_0(\eta)$, $p_{0,2}(\eta)=-p_0(\eta)\mathrm{tg}\,\delta$. Из этих соотношений после подстановки выражений (6) и ряда преобразований для функций $W_{-r}^{(k)}$ $(k,\,r=1,\,2)$ получаются дифференциальные зависимости:

$$\frac{d^2W_{-r}^{(k)}}{d\eta^2}=m_{0,r}^{(k)}(\eta)+\sum_{j=0}^{2}a_{r,j}\frac{d^2W_j^{(k)}}{d\eta^2}+\sum_{j=0}^{2}b_{r,j}W_j^{(k)}+\sum_{j=1}^{2}c_{r,j}W_{-j}^{(k)}\qquad (k,\,r=1,\,2). \tag{12}$$

Совершенно аналогично из условий при $\xi=\xi_N$ получаются уравнения для функций $W_{N+r}^{(k)}$ $(k,\,r=1,\,2)$

$$\frac{d^2W_{N+r}^{(k)}}{d\eta^2}=m_{N,r}^{(k)}(\eta)+\sum_{j=N-2}^{N}a_{r,j}\frac{d^2W_j^{(k)}}{d\eta^2}+\sum_{j=N-2}^{N}b_{r,j}W_j^{(k)}+\sum_{j=N+1}^{N+2}c_{r,j}W_j^{(k)}\qquad (k,\,r=1,\,2). \tag{13}$$

В формулах (9), (12) и (13) постоянные $a_{r,j}$, $b_{r,j}$ $(j=\overline{0,\,2},\,\overline{N-2,\,N})$, $c_{r,j}$ $(r=1,\,2;\ j=1,2,\ N+1,N+2)$ и функции $m_{0,r}^{(k)}(\eta)$, $m_{N,r}^{(k)}(\eta)$ $(r,\,k=1,\,2)$ выражаются через значения B-сплайнов в точках $\xi=\xi_0$, $\xi=\xi_N$ и характеристики внешнего воздействия. Из-за громоздкости соответствующие выражения не приводятся.

Комбинируя в различных сочетаниях полученные выше выражения для функций $W_{-r}^{(k)}(\eta)$ и $W_{N+r}^{(k)}(\eta)$ $(k,\,r=1,\,2)$, с помощью формул (6) можно построить выражения функций $W_k(\xi,\eta)$ $(k=1,\,2)$ при любых законах деформирования или нагружения сторон $\xi=\xi_0$ и $\xi=\xi_N$.

3. СИСТЕМЫ РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ $W_{\mathbf{k}}(\xi,\eta)$ (k=1, 2)

Уравнения для функций $W_j^{(k)}(\eta)$ $(j=\overline{0,\,N})$ получаются из уравнений (4) методом коллокации. Для этого на отрезке $\xi\in[0,1]$ вводится массив точек коллокации ξ_i^* по правилу $\xi_i^*=\xi_i+\varepsilon/N$ $(i=\overline{0,\,N/2-1})$, $\xi_{N/2}^*=\xi_{N/2}$, $\xi_i^*=\xi_i-\varepsilon/N$ $(i=\overline{N/2+1,N})$, $0<\varepsilon<1$, и требуется, чтобы уравнения (4) выполнялись при $\xi=\xi_i^*$ $(i=\overline{0,\,N})$. В результате для функций $W_j^{(k)}(\eta)$ получается система обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с известными коэффициентами, которые выражаются через значения B-сплайнов $B_{5,j}(\xi)$ и их производных в точках коллокации.

Как показано в п. 2, число неизвестных $W_j^{(k)}(\eta)$ меняется в зависимости от вида граничных условий на сторонах $\xi=\xi_0$ и $\xi=\xi_N$. При задании на этих сторонах линейных и угловых смещений или при граничных условиях смешанного типа число неизвестных $W_j^{(k)}(\eta)$ равно $2N+2$. В этом случае формулы (6) после подстановки выражений $W_{-r}^{(k)}(\eta)$ и $W_{N+r}^{(k)}(\eta)$ $(k,\,r=1,\,2)$ из (9) удобнее записать в виде

$$W_k(\xi,\eta)=\sum_{j=0}^{N}\varphi_j(\xi)W_j^{(k)}(\eta)+M_k(\xi,\eta)\qquad (k=1,\,2). \tag{14}$$

Здесь

$$\varphi_j(\xi)=B_{5,j}(\xi)+a_{1,j}B_{5,-1}(\xi)+a_{2,j}B_{5,-2}(\xi)\quad (j=\overline{0,\,2}),\qquad \varphi_j(\xi)=B_{5,j}(\xi)\quad (j=\overline{3,\,N-3}),$$
$$\varphi_j(\xi)=B_{5,j}(\xi)+a_{1,j}B_{5,N+1}(\xi)+a_{2,j}B_{5,N+2}(\xi)\qquad (j=\overline{N-2,\,N}),$$
$$M_k(\xi,\eta)=\sum_{r=1}^{2}B_{5,-r}(\xi)m_{0,r}^{(k)}(\eta)+\sum_{r=N+1}^{N+2}B_{5,N+r}(\xi)m_{N,r}^{(k)}(\eta)\qquad (k=1,\,2). \tag{15}$$

После подстановки в (4) выражений (14) при $\xi=\xi_i^*$ $(i=\overline{0,\,N})$ получается система уравнений, которая в векторной форме имеет вид

$$c^4A_0\frac{d^4\overline{W}_1}{d\eta^4}+c^2A_2\frac{d^2\overline{W}_1}{d\eta^2}+A_4\overline{W}_1-\omega^2\delta_2A_0\overline{W}_2=\overline{Q}_1^*,$$
$$c^4A_0\frac{d^4\overline{W}_2}{d\eta^4}+c^2A_2\frac{d^2\overline{W}_2}{d\eta^2}+A_4\overline{W}_2+\omega^2\delta_2A_0\overline{W}_1=\overline{Q}_2^*. \tag{16}$$

Здесь обозначено $\overline{W}_k = \{W_0^{(k)}, W_1^{(k)}, \ldots, W_N^{(k)}\}$ $(k = 1, 2)$ — векторы искомых компонент составляющих прогиба, A_0, A_2, A_4, $\overline{Q}_k^*$ $(k = 1, 2)$ — квадратные матрицы и векторы с известными компонентами.

Система (16) в рассматриваемом случае является системой разрешающих уравнений.

В дальнейшем для нахождения численного решения краевой задачи для уравнений вида (16) предполагается применять метод дискретной ортогонализации С.К. Годунова. Для этого уравнения (16) разрешаются относительно старших производных, что всегда возможно при соответствующем выборе точек коллокации, и стандартным приемом сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, записанной в нормальной форме Коши:

$$\frac{d\overline{Y}(\eta)}{d\eta} = A\overline{Y}(\eta) + \overline{F}(\eta), \tag{17}$$

где вектор $\overline{Y}(\eta) = \{y_r\eta)\}$ $(r = \overline{0, 8N+7})$ — новый вектор неизвестных, компонентами которого являются функции $W_i^{(k)}(\eta)$ $(k = 1, 2;\ i = \overline{0, N})$ и их производные до третьего порядка включительно, а компоненты матрицы A и вектора $\overline{F}(\eta)$ выражаются соответственно через компоненты матриц $A_0^{-1}A_2$, $A_0^{-1}A_4$ и векторов $A_0^{-1}\overline{Q}_1^*$, $A_0^{-1}\overline{Q}_2^*$.

Граничные условия для системы уравнений (17) получаются из условий на сторонах $\eta = 0$ и $\eta = 1$, выполнение которых требуется в концевых точках отрезков $\xi = \xi_i^*$ $(i = \overline{0, N})$. Эти условия всегда можно представить в виде

$$H_1\overline{Y}(0) = \overline{g}_1, \qquad H_2\overline{Y}(1) = \overline{g}_2 \tag{18}$$

с известными матрицами H_1, H_2 и векторами $\overline{g}_1$, $\overline{g}_2$.

Если на одной из сторон пластинки, например, при $\xi = \xi_0$, заданы перемещения или условия смешанного типа, а при $\xi = \xi_N$ известно распределение нагрузки, то число неизвестных функций $W_j^{(k)}(\eta)$ увеличивается до $2N + 6$. В этом случае формулы (6) с учетом зависимостей для $W_{-r}^{(k)}(\eta)$ $(k,\ r = 1, 2)$ из (9) переписываются в виде

$$W_k(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{N+2} \varphi_j(\xi) W_j^{(k)}(\eta) + M_k(\xi, \eta) \qquad (k = 1, 2). \tag{19}$$

Здесь $\varphi_j(\xi) = B_{5,j}(\xi) + a_{1,j}B_{5,-1}(\xi) + a_{2,j}B_{5,-2}(\xi)$ $(j = \overline{0, 2})$, $\varphi_j(\xi) = B_{5,j}(\xi)$ $(j = \overline{3, N+2})$, $M_k(\xi, \eta) = B_{5,-1}(\xi)m_{0,1}^{(k)}(\eta) + B_{5,-2}(\xi)m_{0,2}^{(k)}(\eta)$ $(k = 1, 2)$. Постоянные $a_{r,j}$ $(r, j = \overline{0, 2})$ и функции $m_{0,r}^{(k)}(\eta)$ по-прежнему известны, а для функций $W_{N+r}^{(k)}$ $(k,\ r = 1, 2)$ остаются в силе дифференциальные зависимости (13).

Для получения системы разрешающих уравнений в этом случае выражения функций $W_k(\xi, \eta)$ $(k = 1, 2)$ из (19) подставляются в уравнения (4), выполнение которых по-прежнему требуется в точках коллокации. Из полученных уравнений исключаются величины $\dfrac{\partial^2 W_{N+r}^{(k)}}{\partial\eta^2}$ согласно формулам (13) и $\dfrac{\partial^4 W_{N+r}^{(k)}}{\partial\eta^4}$ $(k,\ r = 1, 2)$ с помощью дважды продифференцированных соотношений (13). Результат таких преобразований можно записать в виде системы двух векторных уравнений:

$$c^4 A_0 \frac{d^4\overline{W}_1}{d\eta^4} + c^2 A_2 \frac{d^2\overline{W}_1}{d\eta^2} + A_4\overline{W}_1 - B^*\overline{W}_2 + W_{N+1}^{(1)}\overline{R}_3 + W_{N+2}^{(1)}\overline{R}_4 - W_{N+1}^{(2)}\overline{P}_3 - W_{N+1}^{(2)}\overline{P}_4 = \overline{Q}_1^*,$$

$$c^4 A_0 \frac{d^4\overline{W}_2}{d\eta^4} + c^2 A_2 \frac{d^2\overline{W}_2}{d\eta^2} + A_4\overline{W}_2 + B^*\overline{W}_1 + W_{N+1}^{(1)}\overline{P}_3 + W_{N+2}^{(1)}\overline{P}_4 + W_{N+1}^{(2)}\overline{R}_3 + W_{N+2}^{(2)}\overline{R}_4 = \overline{Q}_2^*, \tag{20}$$

где $\overline{W}_k = \{W_0^{(k)}, W_1^{(k)}, \ldots, W_N^{(k)}\}$ $(k = 1, 2)$ — по-прежнему векторы искомых составляющих прогиба, A_0, A_2, A_4, B^*, $\overline{P}_s$, $\overline{R}_s$ $(s = 3, 4)$, $\overline{Q}_k^*$ $(k = 1, 2)$ — известные квадратные матрицы и векторы.

Для рассматриваемого сочетания граничных условий при $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_N$ уравнения (20) вместе с уравнениями (13) составляют систему разрешающих уравнений. Чтобы преобразовать эту систему к виду, допускающему применение метода дискретной ортогонализации, уравнения (20) разрешаются

относительно производных $\dfrac{\partial^4 W_i^{(k)}}{\partial \eta^4}$ $(i = \overline{0, N};\ k = 1, 2)$. Полученные уравнения и уравнения (13) легко сводятся к системе $8N + 16$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая записывается в виде (17). В рассматриваемом случае вектор $\overline{Y}(\eta)$ имеет компонентами функции $W_i^{(k)}(\eta)$ $(i = \overline{0, N};\ k = 1, 2)$, их производные до третьего порядка включительно, а также функции $W_{N+r}^{(k)}(\eta)$ $(r, k = 1, 2)$ и их первые производные.

Граничные условия для компонент вектора $\overline{Y}(\eta)$ по-прежнему записываются согласно условиям на сторонах $\eta = 0$ и $\eta = 1$, причем выполнение последних требуется не только в концевых точках отрезков $\xi = \xi_i^*$ $(i = \overline{0, N})$, как в предыдущем случае, но и на концах стороны $\eta = 1$. Эти условия также представляются в виде (18) с известными матрицами H_1, H_2 и векторами $\overline{g}_1$, $\overline{g}_2$.

Совершенно аналогично выполняется построение системы разрешающих уравнений, когда стороны $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_N$ несут заданную нагрузку (третий вариант граничных условий). В этом случае, как показано в п. 2, функции $W_k(\xi, \eta)$ $(k = 1, 2)$ определяются выражениями (6), в которых $W_{-r}^{(k)}(\eta)$ и $W_{N+r}^{(k)}(\eta)$ $(k, r = 1, 2)$ должны удовлетворять уравнениям (12) и (13). Из требования, чтобы результат подстановки выражений (6) в уравнения (4) выполнялся в точках коллокации $\xi = \xi_i^*$ $(i = \overline{0, N})$, получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая после исключения из нее с помощью (12) и (13) производных от функций $W_{-r}^{(k)}(\eta)$ и $W_{N+r}^{(k)}(\eta)$ представляется в виде

$$
\begin{gathered}
c^4 A_0 \frac{d^4 \overline{W}_1}{d\eta^4} + c^2 A_2 \frac{d^2 \overline{W}_1}{d\eta^2} + A_4 \overline{W}_1 - B^* \overline{W}_2 + W_{-1}^{(1)} \overline{R}_1 + W_{-2}^{(1)} \overline{R}_2 + W_{N+1}^{(1)} \overline{R}_3 + W_{N+2}^{(1)} \overline{R}_4 - \\
- W_{-1}^{(2)} \overline{P}_1 - W_{-2}^{(2)} \overline{P}_2 - W_{N+1}^{(2)} \overline{P}_3 - W_{N+2}^{(2)} \overline{P}_4 = \overline{Q}_1^*, \\
c^4 A_0 \frac{d^4 \overline{W}_2}{d\eta^4} + c^2 A_2 \frac{d^2 \overline{W}_2}{d\eta^2} + A_4 \overline{W}_2 + B^* \overline{W}_1 + W_{-1}^{(1)} \overline{P}_1 + W_{-2}^{(1)} \overline{P}_2 + W_{N+1}^{(1)} \overline{P}_3 + W_{N+2}^{(1)} \overline{R}_4 + \\
+ W_{-1}^{(2)} \overline{R}_1 + W_{-2}^{(2)} \overline{R}_2 + W_{N+1}^{(2)} \overline{R}_3 + W_{N+2}^{(2)} \overline{R}_4 = \overline{Q}_2^*
\end{gathered} \tag{21}
$$

с известными матрицами A_0, A_2, A_4, B^* и векторами $\overline{P}_s$, $\overline{R}_s$ $(s = \overline{1, 4})$, $\overline{Q}_k^*$ $(k = 1, 2)$.

Подобно тому, как это делалось в предыдущих случаях, система (21) и уравнения (12) и (13) преобразуются к виду (17), в котором компонентами функции $\overline{Y}(\eta)$ являются функции $W_j^{(k)}(\eta)$ $(k = 1, 2;\ j = \overline{0, N})$, их производные до третьего порядка включительно и функции $W_{-r}^{(k)}(\eta)$ и $W_{N+r}^{(k)}(\eta)$ $(k, r = 1, 2)$ вместе с их первыми производными.

При составлении граничных условий для вектора $\overline{Y}(\eta)$, которые записываются в виде (18), условия на сторонах $\eta = 0$ и $\eta = 1$ должны быть выполнены при $\xi = \xi_i^*$ $(i = \overline{0, N})$ и в концевых точках сторон $\xi = 0$ и $\xi = 1$.

Примеры применения изложенного подхода для решения конкретных задач будут приведены в последующих публикациях.

Библиографический список

1. *Недорезов, П.Ф.* Установившиеся поперечные колебания пластинки из вязкоупругого материала / П.Ф. Недорезов // Механика деформируемых сред: межвуз. науч. сб. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1979. – Вып. 6. – С. 27–34.

2. *Недорезов, П.Ф.* Установившиеся поперечные колебания вязкоупругой пластинки с двумя шарнирно опертыми сторонами / П.Ф. Недорезов // Механика деформируемых сред: межвуз. науч. сб. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1983. – Вып. 8. – С. 114–125.

3. *Недорезов, П.Ф.* Метод сплайн-коллокации в задаче о вибрационном изгибе вязкоупругой пластинки при сложном закреплении краев / П.Ф. Недорезов // Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. шестой межвуз. науч. конф. – Самара: СамГТУ, 1996. – Ч. 1. – С. 64–66.

4. *Недорезов, П.Ф.* Применение B-сплайнов в задаче определения НДС при установившихся колебаниях прямоугольной пластинки из вязкоупругого материала / П.Ф. Недорезов; Сарат. гос. ун-т. – Саратов, 1997. – 12 с. – Деп. в ВИНИТИ 04.04.1997, № 1093-В97.

5. *Недорезов, П.Ф.* Модифицированный метод сплайн-коллокации в задачах изгиба прямоугольных пластинок / П.Ф. Недорезов, Ю.В. Шевцова, О.М. Ромакина // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. Второй Всерос. науч. конф. – Самара: СамГТУ, 2005. – Ч. 1. – С. 203–209.

6. *Завьялов, Ю.С.* Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Ю.И. Квасов, И.Л. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

УДК 531.381, 531.395

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ПРИВОДИМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СЛОЖНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В.Ю. Ольшанский

Институт проблем точной механики и управления
Российской академии наук
E-mail: olshanskiy_vlad@mail.ru

Рассматривается механическая система, состоящая из неизменяемого твердого тела (носителя) и подсистемы, конфигурация и состав которой могут изменяться со временем (движение ее элементов относительно носителя задано). Система движется в однородном поле силы тяжести вокруг неподвижной точки носителя. Получены условия существования интеграла, являющегося обобщением интеграла проекции кинетического момента на случай системы переменной массы. Выполнено приведение системы к автономному виду. Выделен случай существования алгебраического интеграла типа Ковалевской.

Ключевые слова: изменение состава и конфигурации, интегралы движения, случай Ковалевской.

On One Case of Reducibility of the Equations of Motion of a Complex Mechanical System

V.Yu. Olshanskiy

Institute of Precision Mechanics and Control,
Russian Academy of Sciences
E-mail: olshanskiy_vlad@mail.ru

A mechanical system, consisting of a non-variable rigid body (a carrier) and a subsystem, the configuration and composition of which may vary with time (the motion of its elements with respect to the carrier is specified), is considered. The system moves in a uniform gravitational field around a fixed point of the carrier. Obtained are conditions for the existence of the integral, which is a generalization of the kinetic moment projection integral in the case of variable mass. The system is reduced to an autonomous type. Case of an algebraic integral of the Kovalevskaya type existence is distinguish.

Key words: change the composition and configuration, integral of motion, Kovalevskaya case.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для описания движения носителя используем следующую форму уравнений [1–3]:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{y} \times \mathbf{x} + \Lambda\mathbf{x} + \mathbf{s} \times \mathbf{a} + \mathbf{N}, \qquad \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s} \times \mathbf{x}. \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{y} = J\mathbf{x} + \mathbf{K}$, J — оператор инерции системы в точке O, $\mathbf{K}$ — кинетический момент в движении относительно главной системы отсчета (СО) в неподвижной точке O, $\mathbf{K} = \sum m_n \mathbf{r}_n \times \dot{\mathbf{r}}_n$, $(\dot{\ })$ — производная по времени в главной СО, $\mathbf{x}$ — угловая скорость главной СО, симметрический оператор Λ задан тождеством [3] $\Lambda\mathbf{z} \equiv \dot{J}\mathbf{z} - \sum m_n[\dot{\mathbf{r}}_n \times (\mathbf{z} \times \mathbf{r}_n) + \mathbf{r}_n \times (\mathbf{z} \times \dot{\mathbf{r}}_n)]$, $\mathbf{s}$ — орт вертикали, $\mathbf{a} = \mathrm{P}\mathbf{r}_c$, P — вес тела, $\mathbf{r}_c$ — радиус-вектор центра масс, $\mathbf{N} = \mathbf{M}_f + \dot{\mathbf{K}} + \mathbf{M}_r + \mathbf{M}^*$, $\mathbf{M}_f$ — главный момент сил инерции в движении относительно главной СО, $\mathbf{M}_f = -\sum m_n \mathbf{r}_n \times \ddot{\mathbf{r}}_n$, $\mathbf{M}_r$ — главный момент реактивных сил, $\mathbf{M}^*$ — управляющий момент.

Решается задача получения условий существования и нахождения явного вида квадратичного интеграла

$$(\mathbf{y}, F\mathbf{y}) + (\mathbf{y}, G\mathbf{s}) + (\mathbf{s}, Q\mathbf{s}) + (\mathbf{m}, \mathbf{y}) + (\mathbf{n}, \mathbf{s}) + \varphi(t) = \mathrm{const}. \tag{1.2}$$

Ниже показано, что оператор F имеет вид $F = \psi_1 E + \psi_2 J^{-1}$. Квадратичный интеграл вида (1.2) при $\psi_1 = 0$ и условия его существования найдены в работе [1]. Необходимые и достаточные условия существования одного и двух квадратичных интегралов свободного движения ($\mathbf{a} = 0$, $\psi_1 = 0$) получены в работах [2, 3].

Для существования интеграла (1.2) при $\psi_2 \neq 0$ необходимо, чтобы функции α_i были пропорциональны, $\alpha_i = \alpha_{0i}\alpha(t)$, где $\alpha_i = A_i(A_j - A_k)$, A_i — главные моменты инерции. В настоящей работе рассматривается случай $\psi_2 = 0$, когда интеграл вида (1.2) может существовать без данного ограничения на закон изменения главных моментов инерции. Выделен случай, когда система является автономной и обладает обобщенным интегралом энергии, а также случай, когда существует интеграл типа Ковалевской.

2. НАХОЖДЕНИЕ УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИНТЕГРАЛА

Если интеграл (1.2) продифференцировать в силу системы (1.1), то получим тождество

$$(2F\mathbf{y} + G\mathbf{s} + \mathbf{m}, \mathbf{y} \times J^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{k} \times \mathbf{y} + \Lambda J^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{s} \times \mathbf{a} + \mathbf{L}) + (\mathbf{y}, \dot{F}\mathbf{y} + \dot{G}\mathbf{s} + \dot{\mathbf{m}}) +$$

© В.Ю. Ольшанский, 2010

$$+(\mathbf{s}, \dot{Q}\mathbf{s} + \dot{\mathbf{n}}) + \langle G^T\mathbf{y} + 2Q\mathbf{s} + \mathbf{n}, \mathbf{s}, J^{-1}\mathbf{y} - \mathbf{k}\rangle + \dot{\varphi} \equiv 0. \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{k} = J^{-1}\mathbf{K}$, $\mathbf{L} = \mathbf{N} - \Lambda\mathbf{k}$.

Выделяя члены с y^3, получим тождество $\langle F\mathbf{y}, \mathbf{y}, J^{-1}\mathbf{y}\rangle \equiv 0$, откуда следует представимость оператора F в виде

$$F = \psi_1 E + \psi_2 J^{-1}. \tag{2.2}$$

Выделяя из тождества (2.1) члены с $y^2 s$, получим тождество $\langle G\mathbf{s}, \mathbf{y}, J^{-1}\mathbf{y}\rangle + \langle G^T\mathbf{y}, \mathbf{s}, J^{-1}\mathbf{y}\rangle \equiv 0$, которое выполнено, только если $G = pE$.

Выделяя в тождестве (2.1) члены с $s^2 y$, получим тождество $\langle Q\mathbf{s}, \mathbf{s}, J^{-1}\mathbf{y}\rangle \equiv 0$, откуда следует $Q = qE$. Слагаемое $(\mathbf{s}, Q\mathbf{s})$ в интеграле (1.2) включим в $\varphi(t)$, поскольку $s^2 = 1$.

Интеграл (1.2) теперь можно записать в виде

$$\psi_1 y^2 + \psi_2(\mathbf{y}, J^{-1}\mathbf{y}) + p(\mathbf{s}, \mathbf{y}) + (\mathbf{m}, \mathbf{y}) + (\mathbf{n}, \mathbf{s}) + \varphi(t) = \mathrm{const}. \tag{2.3}$$

Выделяя в тождестве (2.1) члены с sy, получим

$$2\langle \psi_1\mathbf{y} + \psi_2 J^{-1}\mathbf{y}, \mathbf{s}, \mathbf{a}\rangle + p(\mathbf{s}, \Lambda J^{-1}\mathbf{y}) + \dot{p}(\mathbf{y}, \mathbf{s}) + \langle \mathbf{n}, \mathbf{s}, J^{-1}\mathbf{y}\rangle \equiv 0. \tag{2.4}$$

Если положить здесь $\mathbf{s} = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = A_i\mathbf{e}_i$($\mathbf{e}_i$, A_i — собственные векторы и собственные значения оператора J), то получим условия

$$\dot{p} + A_i^{-1}\lambda_{ii}p = 0, \qquad i = 1,\, 2,\, 3. \tag{2.5}$$

Если в тождестве (2.4) положить сначала $\mathbf{s} = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = A_j\mathbf{e}_j$, затем $\mathbf{s} = \mathbf{e}_j$, $\mathbf{y} = A_i\mathbf{e}_i$ и сложить полученные равенства, то придем к условиям

$$p\lambda_{ij} = -\psi_1 \Delta A_k \mathbf{a}_k, \qquad \Delta A_i = (A_j - A_k)\delta_{ijk}. \tag{2.6}$$

В случае, когда центр масс не совпадает с неподвижной точкой и динамическая симметрия отсутствует, из условий (2.6) следует, что если $p \equiv 0$, то и $\psi_1 \equiv 0$. Далее будем рассматривать случай $p \neq 0$, $\psi_1 \neq 0$. Тогда из условий (2.5) следует

$$\lambda_{ii}A_i^{-1} = \lambda, \qquad i = 1,\, 2,\, 3, \qquad \lambda = -\dot{p}/p, \tag{2.7}$$

где $\lambda_{ij} = (\mathbf{e}_i, \Lambda\mathbf{e}_j)$. Обозначим

$$\beta = \exp\left(-\int\limits_0^t \lambda(\xi)\, d\xi\right). \tag{2.8}$$

Учитывая условие (2.5), параметр $p(t)$ запишем в виде

$$p = p_0\beta, \qquad p_0 = \mathrm{const}. \tag{2.9}$$

Тождество (2.4) при выполнении условий (2.5), (2.6), (2.9) запишется в виде

$$\psi_1(\langle \mathbf{y}, \mathbf{s}, \mathbf{a}\rangle + \langle J^{-1}\mathbf{y}, J\mathbf{s}, \mathbf{a}\rangle) + 2\psi_2\langle J^{-1}\mathbf{y}, \mathbf{s}, \mathbf{a}\rangle + \langle \mathbf{n}, \mathbf{s}, J^{-1}\mathbf{y}\rangle \equiv 0.$$

Данное тождество эквивалентно следующему тождеству:

$$\psi_1(\mathbf{a} \times \mathbf{y} + J(\mathbf{a} \times J^{-1}\mathbf{y})) + 2\psi_2\mathbf{a} \times J^{-1}\mathbf{y} + J^{-1}\mathbf{y} \times \mathbf{n} \equiv 0,$$

которое выполнено, только если параметр $\mathbf{n}$ имеет вид

$$\mathbf{n} = \psi_1\mathbf{r} + 2\psi_2\mathbf{a}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{a}\,\mathrm{tr}\,J - J\mathbf{a}. \tag{2.10}$$

При $p \neq 0$ из условий (2.6) следует, что параметры λ_{ij} должны быть пропорциональны $\Delta A_k a_k$. Обозначим

$$\psi_1 = p\eta \tag{2.11}$$

и запишем условие (2.6) в виде

$$\lambda_{ij} = -\eta \Delta A_k a_k, \qquad (i,j,k). \tag{2.12}$$

Выделяя в (2.1) члены с $\mathbf{y}^2$, придем к тождеству

$$(\mathbf{y}, 2\lambda F\mathbf{y} + \dot{F}\mathbf{y} - 2\psi_1 \eta J^{-1}(\mathbf{a} \times J\mathbf{y}) - (2\psi_2 \mathbf{r} - 4\psi_2 \eta \mathbf{a} + \mathbf{m}) \times J^{-1}\mathbf{y}) \equiv 0. \tag{2.13}$$

Полагая здесь $\mathbf{y} = \mathbf{e}_i$, $i = 1,2,3$, получим $\dot{F} + 2\lambda F = 0$, или, учитывая определение (2.8) параметра β, $\beta\dot{F} - 2\dot{\beta}F = 0$, откуда следует $F = \beta^2 C$, $C = \mathrm{diag}\,(c_i) = \mathrm{const}$. Учитывая представление (2.2) оператора F, получим

$$\psi_1 + \psi_2 A_i^{-1} = c_i \beta^2, \qquad i = 1,2,3. \tag{2.14}$$

Умножая эти равенства на α_i и складывая, придем к условию

$$\mathrm{c}_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = 0. \tag{2.15}$$

Если $\psi_2 \neq 0$, $\Delta A_i \neq 0$, то из условий (2.14) следует, что постоянные c_i попарно различны. Учитывая тождество $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, из условия (2.15) получим, что α_i пропорциональны, $\alpha_i = \alpha_{0i}\alpha(t)$. Далее рассмотрим случай, когда функции $A_i(t)$ не связаны этим дополнительным ограничением. Это возможно, если $\psi_2 = 0$. При этом из условий (2.9), (2.11), (2.14) следует $\psi_1 = \beta^2\mathrm{const}$ и

$$\eta = \eta_0 \beta. \tag{2.16}$$

Параметр $\mathbf{n}$ в силу формул (2.9)–(2.11) равен $\mathbf{n} = p_0\beta\eta\mathbf{r}$. Тождество (2.13) принимает вид $(\mathbf{y}, 2\psi_1\eta J^{-1}(\mathbf{a} \times J\mathbf{y}) - \mathbf{m} \times J^{-1}\mathbf{y}) \equiv 0$. Используя равенство $\langle J^{-1}\mathbf{y}, J\mathbf{y}, \mathbf{a}\rangle = \langle J^{-1}\mathbf{y}, \mathbf{y}, \mathbf{r}\rangle$, запишем последнее тождество в виде $\langle \mathbf{y}, J^{-1}\mathbf{y}, \mathbf{m} - 2\psi_1\eta\mathbf{r}\rangle \equiv 0$. Отсюда следует, что $\mathbf{m} = 2\psi_1\eta\mathbf{r} = 2\eta\mathbf{n}$.

Запишем оператор Λ в виде

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \qquad \Lambda_1 = \lambda J. \tag{2.17}$$

Из условия (2.7) следует, что диагональные элементы матрицы оператора (в главном базисе) Λ_2 равны нулю. В соответствии с условием (2.12) внедиагональные элементы Λ_2совпадают с соответствующими элементами оператора, заданного тождеством

$$\Lambda_2\mathbf{z} \equiv \eta[(J\mathbf{z}) \times \mathbf{a} + J(\mathbf{a} \times \mathbf{z})]. \tag{2.18}$$

Интеграл (2.3) можно теперь записать в виде

$$p(\eta y^2 + (\mathbf{y}, \mathbf{s}) + 2\eta^2(\mathbf{y}, \mathbf{r}) + \eta(\mathbf{r}, \mathbf{s})) + \varphi(t) = \mathrm{const}. \tag{2.19}$$

При выполнении полученных выше необходимых условий в тождестве (2.1) остаются только слагаемые с первыми степенями по $\mathbf{y}$, $\mathbf{s}$ и свободный член, их обращение в ноль приводит к условиям:

$$\beta^2(\mathbf{L} + \eta_0\mathbf{r} \times \mathbf{k}) + \eta_0((\beta^3\mathbf{r})^{\cdot} + \lambda\beta^3\mathbf{r}) + \eta_0\beta^4(\mathbf{a} \times \mathbf{r} + \eta_0 J^{-1}(J\mathbf{r} \times \mathbf{a})) = 0, \tag{2.20}$$

$$\beta\mathbf{L} + 2\eta_0\beta^3\mathbf{a} \times \mathbf{r} + \eta_0\beta^2\mathbf{r} \times \mathbf{k} + \eta_0(\beta^2\mathbf{r})^{\cdot} = 0, \tag{2.21}$$

$$2p_0\eta_0^2\beta^3(\mathbf{r}, \mathbf{L}) + \dot{\varphi} = 0. \tag{2.22}$$

Учитывая, что $\dot{\beta} = -\lambda\beta$, условие (2.20) запишем в виде

$$\beta\mathbf{L} + \eta_0\beta^2\mathbf{r} \times \mathbf{k} + \eta_0(\beta^2\mathbf{r})^{\cdot} + \eta_0\beta^3\mathbf{a} \times \mathbf{r} + \eta_0\beta^3 J^{-1}((J\mathbf{r}) \times \mathbf{a}) = 0. \tag{2.23}$$

Покажем, что условия (2.21), (2.23) совпадают. Вычитая эти равенства, получим $J^{-1}((J\mathbf{r}) \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \times \mathbf{r} = 0$. Учитывая выражение (2.10) для $\mathbf{r}$, проверяем, что последнее равенство является верным. Таким образом, остаются условия (2.21), (2.22).

Получим теперь выражение для $\varphi(t)$. Исключим $\mathbf{L}$ из равенств (2.21), (2.22), тогда $-2p_0\eta_0^3\beta^2(\mathbf{r}, (\beta^2\mathbf{r})^{\cdot}) + \dot{\varphi} = 0$ и отсюда $\varphi = p\eta^3 r^2 + \mathrm{const}$. Интеграл (2.19) можно теперь записать в виде

$$\eta(\mathbf{y} + \eta\mathbf{r})(\mathbf{s} + \eta(\mathbf{y} + \eta\mathbf{r})) = \mathrm{const}. \tag{2.24}$$

Необходимое условие (2.21) при учете равенства $\mathbf{L} = \mathbf{N} - \Lambda\mathbf{k}$ записывается в виде

$$\eta\mathbf{N} + \dot{\eta}\mathbf{K} + 2\eta^2\mathbf{a} \times \mathbf{K} + 2\eta^3(J\mathbf{a}) \times \mathbf{a} + (\eta^2\mathbf{r})^{\cdot} = 0.$$

Если обозначить $\mathbf{M} = \mathbf{M}_f + \mathbf{M}_r + \mathbf{M}^*$, то данное условие приводится к виду $\eta\mathbf{M} + 2\eta^2\mathbf{a} \times (\mathbf{K} - \eta J\mathbf{a}) + (\eta\mathbf{K} + \eta^2\mathbf{r})^{\cdot} = 0$, или

$$\eta\mathbf{M} + \dot{\mathbf{d}} + 2\eta\mathbf{a} \times \mathbf{d} = 0, \mathbf{d} = \eta\mathbf{K} + \eta^2\mathbf{r}. \tag{2.25}$$

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРИ СУЩЕСТВОВАНИИ ИНТЕГРАЛА

Будем далее считать, что полученные выше необходимые условия существования интеграла (2.16), (2.17), (2.18), (2.25) выполнены.

Введем переменную $\mathbf{u} = \eta\mathbf{y} + \eta^2\mathbf{r}$. Интеграл (2.24) запишется в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{u} + \mathbf{s}) = \text{const}. \tag{3.1}$$

Покажем, что система (1.1) приводится к виду

$$\dot{\mathbf{u}} = \eta^{-1}\mathbf{u} \times J^{-1}\mathbf{u} + \eta\mathbf{u} \times (3\mathbf{a} - (\operatorname{tr} J)J^{-1}\mathbf{a}) + \mathbf{k} \times \mathbf{u} + \eta\mathbf{s} \times \mathbf{a}, \quad \dot{\mathbf{s}} = \eta^{-1}\mathbf{s} \times J^{-1}\mathbf{u} - \mathbf{s} \times (\eta J^{-1}\mathbf{r} + \mathbf{k}). \tag{3.2}$$

Первое уравнение системы (1.1) записывается в виде

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{y} \times J^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{k} \times \mathbf{y} + \lambda\mathbf{y} + \eta(\mathbf{y} \times \mathbf{a} + J(\mathbf{a} \times J^{-1}\mathbf{y})) + \mathbf{s} \times \mathbf{a} - 2\eta_0^2\beta^2\mathbf{a} \times \mathbf{r} - \eta_0\beta\mathbf{r} \times \mathbf{k} - \eta_0\beta^{-1}(\beta^2\mathbf{r})^{\cdot}.$$

Здесь $\lambda = -\dot{\beta}/\beta$, а в силу условия (2.16) $\eta = \eta_0\beta$. Если учесть определение (2.10) параметра $\mathbf{r}$ и тождество $J(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (J\mathbf{b}) \times \mathbf{a} + \mathbf{b} \times J\mathbf{a} + (\operatorname{tr} J)\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, то уравнение записывается в виде

$$(\eta\mathbf{y} + \eta^2\mathbf{r})^{\cdot}/\eta = (\mathbf{y} + \eta\mathbf{r}) \times J^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{k} \times (\mathbf{y} + \eta\mathbf{r}) + 2\eta(\mathbf{y} + \eta\mathbf{r}) \times \mathbf{a} + \mathbf{s} \times \mathbf{a}.$$

При переходе к переменной $\mathbf{u}$ получаем первое уравнение системы (3.2). Аналогично получаем второе уравнение этой системы.

Если перейти к переменным $d\tau = dt/\eta$, $\mathbf{a}_1 = \eta^2\mathbf{a}$, $\mathbf{k}_1 = \eta\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_1 = \eta^2\mathbf{r}$, то система (3.2) запишется в виде

$$d\mathbf{u}/d\tau = \mathbf{u} \times J^{-1}\mathbf{u} + \mathbf{u} \times (3\mathbf{a}_1 - (\operatorname{tr} J)J^{-1}\mathbf{a}_1) + \mathbf{k}_1 \times \mathbf{u} + \mathbf{s} \times \mathbf{a}_1, \qquad d\mathbf{s}/d\tau = \mathbf{s} \times J^{-1}\mathbf{u} - \mathbf{s} \times (J^{-1}\mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_1).$$

Данная система преобразуется к симметричному виду:

$$d\mathbf{u}/d\tau = \mathbf{u} \times (J^{-1}\mathbf{u} + \mathbf{b}) + \mathbf{v} \times \mathbf{a}_1, \qquad d\mathbf{v}/d\tau = \mathbf{v} \times (J^{-1}\mathbf{u} + \mathbf{b}) + \mathbf{u} \times \mathbf{a}_1, \tag{3.3}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{s}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{a}_1 - (\operatorname{tr} J)J^{-1}\mathbf{a}_1 - \mathbf{k}_1$.

Интеграл (3.1) записывается в виде

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = \text{const}. \tag{3.4}$$

Система (3.3) обладает также интегралом

$$u^2 + v^2 = \text{const}. \tag{3.5}$$

Этот интеграл является следствием интегралов (3.4) и $\gamma^2 = 1$.

Систему (3.3) можно также записать в следующей форме [4]:

$$d\mathbf{u}/d\tau = \mathbf{u} \times \partial H/\partial\mathbf{u} + \mathbf{v} \times \partial H/\partial\mathbf{v}, \qquad d\mathbf{v}/d\tau = \mathbf{v} \times \partial H/\partial\mathbf{u} + \mathbf{u} \times \partial H/\partial\mathbf{v}, \tag{3.6}$$

где $H = (\mathbf{u}, J^{-1}\mathbf{u})/2 + (\mathbf{b}, \mathbf{u}) + (\mathbf{a}_1, \mathbf{v})$. Интегралы (3.4), (3.5) определяются функциями Казимира последней системы $F_1 = u^2 + v^2$, $F_2 = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим случай, когда система (3.3), а следовательно, и исходная система (1.1), приводятся к автономному виду. Это возможно, если $J = \nu J_0$, $\mathbf{a}_1 = \nu^{-1}\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b} = \nu^{-1}\mathbf{b}_0$, $\mathbf{k}_1 = \nu^{-1}\mathbf{k}_0$, где J_0, $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{k}_0 = \mathrm{const}$. Данные условия эквивалентны следующим условиям:

$$J = \nu J_0, \qquad \mathbf{a} = (\nu\eta^2)^{-1}\mathbf{a}_0, \qquad \mathbf{K} = \eta^{-1}\mathbf{K}_0. \tag{4.1}$$

При выполнении условий (4.1) система (3.3) приводится к автономному виду

$$d\mathbf{u}/d\theta = \mathbf{u}\times(J_0^{-1}\mathbf{u}+\mathbf{b}_0)+\mathbf{v}\times\mathbf{a}_0, \qquad d\theta = d\tau/\nu = dt/(\nu\eta), \qquad d\mathbf{v}/d\theta = \mathbf{v}\times(J_0^{-1}\mathbf{u}+\mathbf{b}_0)+\mathbf{u}\times\mathbf{a}_0. \tag{4.2}$$

Необходимое условие (2.25) принимает вид

$$\mathbf{M} = (\nu\eta^2)^{-1}(\mathbf{K}_0 - J_0\mathbf{a}_0)\times\mathbf{a}_0.$$

Система (4.2) записывается в форме (3.6) (с заменой τ на θ) с гамильтонианом, не зависящим явно от времени, который дает обобщенный интеграл энергии

$$H_{\mathsf{a}} = (\mathbf{u}, J_0^{-1}\mathbf{u})/2 + (\mathbf{b}_0, \mathbf{u}) + (\mathbf{a}_0, \mathbf{v}) = \mathrm{const}. \tag{4.3}$$

Выделим случай, исследованный в работе [5], когда система (4.2) имеет алгебраический интеграл четвертой степени типа интеграла Ковалевской (при более жестких ограничениях интеграл Ковалевской для исходной системы (1.1) указан в работе [6]). Этот случай задается гамильтонианом следующего вида:

$$H = (u_1^2 + u_2^2 + 2u_3^2)/2 + \zeta_3 u_3 + \zeta_1 v_1.$$

Для приведения гамильтониана (4.3) к данному виду необходимо выполнение условий

$$A_{01} = A_{02} = 2A_{03}, \qquad \mathbf{a}_0 = \zeta_1\mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{b}_0 = \zeta_3\mathbf{e}_3. \tag{4.4}$$

Положим $\mathbf{u} = A_{01}\mathbf{z}$, $\mathbf{v} = A_{01}\mathbf{w}$, $J_0 = A_{01}I$, $I = \mathrm{diag}\,(1, 1, 1/2)$ и запишем систему (4.2) в виде

$$d\mathbf{z}/d\theta = \mathbf{z}\times(I^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{b}_0) + \mathbf{w}\times\mathbf{a}_0, \qquad d\mathbf{w}/d\theta = \mathbf{w}\times(I^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{b}_0) + \mathbf{z}\times\mathbf{a}_0. \tag{4.5}$$

Дополнительный интеграл имеет вид [5]

$$(z_1^2 - z_2^2 - 2\zeta_1 w_1 + \zeta_1^2)^2 + 4(z_1 z_2 - \zeta_1 w_2)^2 - 4\zeta_3^2(z_1^2 + z_2^2) - 4\zeta_3(z_3(z_1^2 + z_2^2 + \zeta_1^2) - 2\zeta_1 z_1 z_3) = \mathrm{const}.$$

Интегрируемость системы (4.5) при выполнении условий (4.4) показана в работе [5].

Библиографический список

1. *Ольшанский, В.Ю.* Линейный и квадратичный интегралы сложной механической системы / В.Ю. Ольшанский // Прикладная математика и механика. – 1996. – Т. 60, вып. 1. – С. 37–46.

2. *Ольшанский, В.Ю.* Свободное движение сложной механической системы с квадратичными интегралами / В.Ю. Ольшанский // Космические исследования. – 1996. – Т. 34, № 2. – С. 145–149.

3. *Ольшанский, В.Ю.* О приводимости уравнений свободного движения сложной механической системы / В.Ю. Ольшанский // Прикладная математика и механика. – 1998. – Т. 62, вып. 5. – С. 768–777.

4. *Борисов, А.В.* Динамика твердого тела / А.В. Борисов, И.С. Мамаев. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.

5. *Borisov, A.V.* Kovalevskaya top and generalizations of integrable systems / A.V. Borisov, I.S. Mamaev, A.G. Kholmskaya // Reg.&Ch. Dyn. – 2000. – V. 6, № 1. – P. 1–16.

6. *Ольшанский, В.Ю.* О динамике механической системы изменяемой конфигурации и состава в случае Ковалевской / В.Ю. Ольшанский // Вестн. Сарат. гос. техн. ун-та. – 2008. – Т. 4(36). – С. 39–44.

УДК 532.5:533.6.011.5

ГОМЭНТРОПИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОТРАЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ ЦЕНТРА СХОЖДЕНИЯ

И.А. Чернов

Саратовский государственный университет,
кафедра вычислительного эксперимента в механике
E-mail: chernov-ia@yandex.ru

Обсуждается частный случай движения имплозивной ударной волны по покоящемуся газу с нулевым давлением, но с переменной плотностью. Плотность описывается степенной зависимостью от расстояния до точки фокусировки ударной волны. Предлагается такой выбор показателя степени в этой зависимости, чтобы энтропия во всей области течения после прохождения ударной волны была постоянной (гомэнтропичность). При этом получается качественно другое по сравнению с классическим случаем Гудерлея – Ландау – Станюковича поведение температуры.

Ключевые слова: одномерные течения, автомодельные течения, сходящаяся ударная волна, гомэнтропическая модель.

Homentropic Model of Spherical Shock Wave Reflection from the Center of Convergence

I.A. Chernov

Saratov State University,
Chair of Mechanics Computational Experiment
E-mail: chernov-ia@yandex.ru

An implosive shock wave on a based gas the particular case of motion with zero pressure, but with variable density is discussed. The density is described by degree relation to distance up to a point of focusing of a shock wave. Such selection of an exponent in this relation that the entropy in all area of flow after passage of a shock wave was a constant (homentropic case) is offered. Thus qualitatively different behaviour of temperature in comparison with classical case Guderley – Landau – Stanjukovich is obtained.

Key words: one-dimensional flows, self-similar flows, converging shock wave, homentropic model.

ВВЕДЕНИЕ

Решение задачи о сходящейся к центру ударной волне (УВ) было получено Гудерлеем [1] и независимо от него Л.Д. Ландау и К.П. Станюковичем [2, 3]. Эта задача имеет большое прикладное значение, поскольку описывает один из способов создания экстремальных условий в малой области пространства. Существование автомодельных решений степенного вида предопределено наличием двухпараметрической группы подобных преобразований соответствующей системы уравнений газовой динамики идеального газа [4]. Эти решения описываются нелинейной системой *обыкновенных дифференциальных уравнений* (ОДУ) первого порядка, в которую входят три независимых параметра: $\gamma = C_p/C_v$ — показатель адиабаты Пуассона ($p/\rho^\gamma = \mathrm{const}$); ω — показатель степени в автомодельном представлении плотности $\rho = \rho_0 t^\omega R(\xi)$ ($\rho_0 = \mathrm{const}$); n — показатель автомодельности, где $\xi = r/(Kt^n)$ — независимая автомодельная переменная (t — время, r — пространственная координата, K — масштабная константа). Выбор показателя γ определяет свойства изучаемого газа. Нахождение n осуществляется решением специальной переопределенной краевой задачи названной системы ОДУ и находится на первом временном этапе (до момента фокусировки УВ). При выборе ω используют [1–3] модель *сильной УВ* (СУВ) и поскольку УВ распространяется по однородному газу, то полагают $\partial\rho(t,\xi)/\partial t = 0$, как до, так и после нее, тогда как $p(t,\xi)$ — функция двух независимых переменных t, ξ. В результате энтропийная функция $s = p/\rho^\gamma$ для течения после ударной волны является функцией лагранжевой координаты, то есть сохраняется вдоль траектории частицы — это свойство изэнтропии, но не гомэнтропии (постоянство энтропии в двумерной области (r,t) — англояз. термин).

Ниже обсуждается другая теоретическая возможность: показатель ω выбирается из условия $\partial s(t,\xi)/\partial t = 0$ — это оказывается (вместе с условием адиабатичности) достаточным условием гомэнтропии (соответственно гомэнтропическая УВ (ГУВ)). Это означает, что энтропия меняется скачком на ГУВ одинаково для всех жидких частиц.

В работе Хантера [5], посвященной проблеме схлопывания пустой сферической полости (каверны) в воде, для изучения эффекта сжимаемости среды использовалась газодинамическая модель течения с показателем $\gamma = 7$. Так как это течение начинается как гомэнтропическое, то автор использовал для определения давления уравнение состояния среды в конечной форме и рассмотрел систему двух дифференциальных законов: неразрывности и количества движения вместе с интегралом адиабаты.

© И.А. Чернов, 2010

Этот подход распространялся и на вторую стадию течения, когда возникала отраженная УВ (от центра после схлопывании каверны). Это пример течения, в котором энтропия постоянна всюду (не меняется на УВ), то есть выполняется глобальная гомэнропичность. Работа интересна, в частности, тем, что в ней описана техника построения ударной волны, которая возникает после схлопывания полости.

В дальнейшем это изучение для других значений γ, а также при использовании кусочно-постоянных значений энтропии до и после отраженной УВ (гомэнтропическая модель) продолжил Лазарус [6]. Задача о каверне изучалась параллельно с задачей о сходящейся к центру УВ с последующим отражением от центра, но здесь автор использовал классическую модель СУВ.

Ниже повторяется соответствующий результат Лазаруса для частного случая $\gamma = 7/5$ и результаты сравниваются с новым расчетом при том же γ, но по гомэнтропической модели.

Если оставаться в рамках классического подхода, то представленный результат можно рассматривать как относящийся к частному случаю движения сильной УВ по покоящемуся газу с нулевым давлением, но с переменной по пространству начальной плотностью. Подобная трактовка используется в астрофизике [7].

Таким образом, цель работы — сравнение результатов расчета процесса схождения – отражения сферической УВ по двум моделям: классической [1–3] и по модели ГУВ для одного и того же показателя $\gamma = 7/5$.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Изучаются одномерные неустановившиеся адиабатические течения идеального совершенного газа для случая сферической симметрии течения. Оно характеризуется скоростью $u = u(r,t)$, плотностью $\rho = \rho(r,t)$ и квадратом локальной скорости звука $c2 = c2(r,t)$, который с точностью до коэффициента совпадает с абсолютной температурой. Основные уравнения таковы:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\rho + \rho\frac{\partial}{\partial r}u + \frac{(\nu-1)\,\rho u}{r} = 0, \qquad \gamma\frac{d}{dt}u + \frac{\partial}{\partial r}c2 + c2\frac{\partial}{\partial r}\ln(\rho) = 0,\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{c2}{\rho^{\gamma-1}}\right) = 0, \qquad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r}.\end{gathered} \tag{1}$$

Предполагая автомодельность, зададим искомые функции в форме ($m = 1/n$, $\eta = 1/\xi^n$):

$$t = K^{-m}\eta r^m, u = \frac{K^m r^{1-m} U1(\eta)}{m}, \qquad \rho = \rho_0 r^w R1(\eta), \qquad c2 = \frac{K^{2m} r^{2-2m} Z1(\eta)}{m^2}. \tag{2}$$

Функции $\{U1,\ R1,\ Z1\}$ называются *автомодельными представителями* (АП) (по r) функций $\{u,\ \rho,\ c2\}$ соответственно. Они описывают поведение $\{u,\ \rho,\ c2\}$ при фиксированном r в зависимости от t.

После подстановки заданного вида (2) в основную систему (1) получается три ОДУ для $\{U1(\eta),\ R1(\eta),\ Z1(\eta)\}$.

Эта система приводится к нормальному виду (разрешенному относительно производных), затем она записывается в виде автономной системы четырех ОДУ (без знаменателей в правых частях с независимой переменной x — искусственным временем)

$$\begin{gathered}\frac{d}{dx}Z1(x) = Z1(x)\left[(k_{111}U1(x) + k_{110})\,Z1(x) + k_{103}U1(x)^3 + k_{102}U1(x)^2 + k_{101}U1(x)\right],\\ \frac{d}{dx}U1(x) = \left[-1 + U1(x)\eta(x)\right]\left[(k_{311}U1(x) + k_{310})\,Z1(x) + k_{303}U1(x)^3 + k_{302}U1(x)^2\right],\\ \frac{d}{dx}R1(x) = R1(x)\left[(k_{211}U1(x) + k_{210})\,Z1(x) + k_{202}U1(x)^2 + k_{201}U1(x)\right],\\ \frac{d}{dx}\eta(x) = m\gamma\left[-1 - 2U1(x)\eta(x) + U1(x)^2\eta(x)^2 - Z1(x)\eta(x)^2\right]\left[-1 + U1(x)\eta(x)\right].\end{gathered} \tag{3}$$

Коэффициенты k зависят от основных параметров задачи $\{m,\ w = \omega/n,\ \gamma,\ \nu = 1,2,3$ *для плоского, цилиндрического, сферического случаев симметрии течения*$\}$ и автомодельной независимой переменной η: $k_{110} = -\eta\,(2m-2-w)\,(\gamma-1)$, $k_{111} = 2\eta^2\gamma\,(m-1)$, $k_{103} = \gamma\eta^2\,(-\gamma+3-2m+\gamma\nu-\nu)$, $k_{102} = \gamma\nu\,(\gamma-5+3m-2\gamma\nu+2\nu+\gamma m)$, $k_{101} = -\gamma\,(\gamma m-\gamma\nu-2+m+\nu)$, $k_{210} = -\eta\,(2m-2-w)$,

$k_{211} = -\eta^2\gamma w$, $k_{201} + \gamma(-w+m-\nu)$, $k_{202} = \gamma\eta(1-2w+m-2\nu)$, $k_{203} = \eta^2\gamma(-1+w+\nu)$, $k_{310} = 2m-2-w$, $k_{311} = \gamma\eta(-\nu+m)$, $k_{302} = \gamma(m-1)\, k_{303} = -\gamma\eta(m-1)$.

Эта система удобна для расчетов и в том частном случае, когда приходится проходить точку с $\eta = 0$, что соответствует $t = 0$ (момент фокусировки УВ), которая не является особой точкой для системы (3).

Чтобы иметь возможность сравнения результатов с результатами классического подхода, рассмотрим наряду с (2) традиционное представление основных величин [8]

$$r = Kt^n\xi, \qquad u = nKt^{n-1}\xi U(\xi), \qquad \rho = \rho_0 t^\omega R(\xi), \qquad c2 = n^2K^2t^{2n-2}\xi^2 Z(\xi). \tag{4}$$

Отметим различие: здесь $U(\xi)$, $Z(\xi)$ — это *фазовые переменные*, тогда как $\{U2 = \xi U(\xi)$, $Z2 = \xi^2 Z(\xi)$, $R2 = R(\xi)\}$ — это АП *(по t)* искомых функций $\{u, \rho, c2\}$. Две функции $U(\xi)$, $Z(\xi)$ параметрически представляют решение ОДУ первого порядка для функции $Z = Z(U)$ (фазовая плоскость $\{U, Z\}$)

$$\frac{d}{dU}Z(U) = \frac{num}{den}, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} num = -Z\left(5U\gamma + 2\gamma nU^2\nu - U^3\gamma n\nu - 2\gamma^2 nU^2\nu + U^3\gamma^2 n\nu + \gamma^2 nU\nu + \right. \\ + Z(U)\gamma\omega - U\gamma^2 + U^2\gamma^2 + 2\gamma nZ(U) + 2\gamma nU - 5\gamma nU^2 + 3U^3\gamma n + \gamma^2 nU^2 - \\ \left. -U^3\gamma^2 n - 2\gamma nUZ(U) - \gamma nU\nu + 2Z(U) - Z(U)\omega - 2nZ(U) - 3U^2\gamma - 2\gamma\right), \\ den = \left(-U^3 n\gamma + U^2\gamma + nU^2\gamma + Z(U)\gamma nU\nu - U\gamma - 2Z(U) + Z(U)\omega + 2nZ(U)\right)(U-1). \end{gathered}$$

Качественный анализ этого ОДУ содержится в [8]. После того как решение $Z = Z(U)$ найдено, следует осуществить две квадратуры для определения $\xi = \xi(U)$ и $R = R(U)$.

Сравнивая два представления (2) и (4), легко получить соотношения:

$$\xi = \eta^{-n}, \qquad U(\xi) = \eta U1(\eta), \qquad Z(\xi) = \eta^2 Z1(\eta), \qquad R(\xi) = \frac{R1(\eta)}{\eta^\omega}.$$

Если в течении есть автомодельная ударная волна $\eta S = \eta 1 = \eta 2 = \mathrm{const}$, то при ее переходе выполняются три закона сохранения — массы, импульса и энергии. Считая параметры с индексом 1 известными, находят параметры с индексом 2 ($U1 = U11$, $Z1 = Z11$, $R1 = R11, \ldots$; $U2 = U12, \ldots$) — для значений представителей сразу за скачком

$$\begin{gathered} U2 = \frac{\gamma U1^2 - U1^2 + 3U1\eta 1 - \gamma U1\eta 1 - 2\eta 1^2 + 2Z1}{\gamma U1 + U1 - \gamma\eta 1 - \eta 1}, \\ R2 = \frac{R1\left(\gamma\eta 1^2 + \gamma U1^2 - 2\gamma U1\eta 1 + \eta 1^2 + U1^2 - 2U1\eta 1\right)}{\gamma\eta 1^2 - \eta 1^2 + 2Z1 + \gamma U1^2 - 2\gamma U1\eta 1 - U1^2 + 2U1\eta 1}, \\ Z2 = \frac{1}{(\gamma U1 + U1 - \gamma\eta S - \eta S)^2}\left(12\gamma^2 U1^2\eta 1^2 - 12\gamma U1^2\eta 1^2 - \gamma^2 U1^2 Z1 + 6\gamma\eta 1^2 Z1 - 2\gamma Z1^2 - 2\gamma\eta 1^4 + \right. \\ +6\gamma U1^2 Z1 + 8\gamma U1\eta 1^3 + 2U1\eta 1 Z1 - 12\gamma U1\eta 1 Z1 + 2\gamma^2 U1\eta 1 Z1 - 8\gamma^2 U1^3\eta 1 - 8\gamma^2 U1\eta 1^3 - \\ \left. -\gamma^2\eta 1^2 Z1 + 2\gamma^2 U1^4 - 2\gamma U1^4 - U1^2 Z1 - \eta 1^2 Z1 + 2Z1^2 + 2\gamma^2\eta 1^4 + 8\gamma U1^3\eta 1\right). \end{gathered} \tag{6}$$

Если УВ распространяется по неподвижному газу с $\{U10 = 0$, $Z10 = 0$, $R10 = \rho_0\}$, то позади нее должно быть

$$U20 = \frac{2\eta 1}{\gamma+1}, \qquad Z20 = \frac{2\gamma\eta 1^2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}, \qquad R20 = \frac{\rho_0(\gamma+1)}{\gamma-1}.$$

Введем в рассмотрение энтропийную функцию $s = \dfrac{p}{\rho^\gamma}$. Вдоль траектории частицы s имеет постоянное значение в силу третьего уравнения из (1). Для гомэнтропического потока эта постоянная одна для всех траекторий. Выражая s в автомодельном случае через (t, ξ) с использованием формул (4), получим $s = s_0 t^{\omega(1-\gamma)+2n-2}S(\xi)$, где $s_0 = \rho_0^{1-\gamma}n^2K^2$, $S = \xi^2 R(\xi)^{1-\gamma}Z(\xi)$.

Условием того, что s явно не зависит от времени, является равенство

$$\omega = \frac{2\,(n-1)}{\gamma - 1}.$$

Если предполагается гомэнтропичность течения в какой-то области, то это означает использование уравнения адиабаты Пуассона, которая определяет квадрат скорости звука через плотность. Вместо основных уравнений (1) можно использовать первые два из них вместе с интегралом адиабаты, при этом значение двух разных постоянных в интеграле вычисляется по (6).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Чтобы описать изучаемое явление, полезно рассмотреть плоскость (r, t) (рис. 1). Отрицательному времени соответствует фаза схождения УВ к центру. УВ1 изображает ее траекторию, ПХ — траекторию предельной характеристики, УВ2 — отраженной УВ. Каждая из них описывается обобщенной параболой $\eta = \mathrm{const}$. Полуплоскость $r = 0$ разделена на 4 подобласти, обозначенные цифрами *1–4*. Подобласть *1* изображает покоящийся газ, траектория частицы — пунктирная вертикальная прямая, идущая вверх.

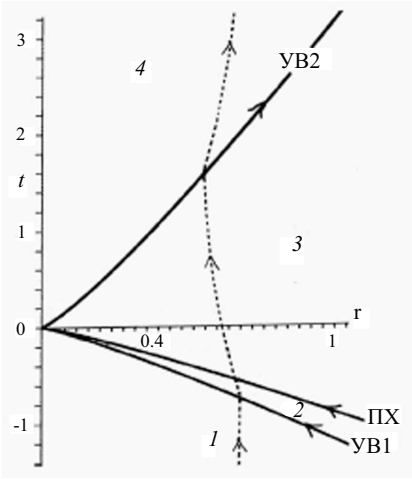


Рис. 1

После пересечения ее с УВ1 возникает движение частиц к *центру фокусировки* $r = 0$ (ЦФ). Подобласть *2* является зоной влияния на УВ1: ПХ — последняя из центростремящихся характеристик, приходящих на УВ1. УВ2 изображает отраженную от ЦФ ударную волну, которая идет по газу, движущемуся навстречу. Рис. 1 может рассматриваться как гипотетическая картина явления в малой окрестности ЦФ, но в данном случае это также результат расчета по ГУВ модели.

Математическое моделирование включает:

1) обоснование факта использования автомодельных решений (2);

2) описание краевой задачи для соответствующей системы ОДУ как автомодельной задачи второго рода [8, 9], в которой показатель автомодельности определяется методом пристрелки из условия аналитического прохода известной интегральной кривой уравнения (5) через особую точку на фазовой плоскости, являющейся образом ПХ. На рис. 2 показаны две кривые (*1* — по классической модели и *2* — по ГУВ) для $\gamma = 1.4$. Особая точка ПХ лежит на *звуковой линии* (ЗЛ);

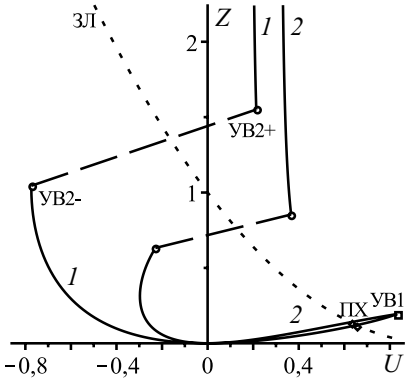


Рис. 2

3) построение ударного перехода (см. рис. 2) от точки УВ2– к точке УВ2+ осуществляется таким образом, чтобы фазовая траектория могла пройти из точки УВ+ вверх к особой точке ($U = (2 - 2n - \omega)\,/\,(n\gamma)$, $Z \to +\infty$), которая является седлом и приход в которую обеспечивает продолжимость течения до точки $r = 0$ при $t \to +\infty$ для подобласти *4* рис. 1.

Дополнительные детали по методике расчетов есть в [7–9].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Первым этапом построения решения является определение показателя автомодельности при заданных γ, ω и нахождение АП для трех параметров течения в подобласти *2* рис. 1. Поскольку автомодельное решение определено с точностью до масштабной постоянной K в (2), это позволяет положить $\eta = -1$ на ПХ (такова предварительная нормировка). Далее можно построить решение системы (3) в виде степенных рядов по $(\eta + 1)$ с учетом того, что нас интересует окрестность одной (с меньшим значением Z) из двух особых точек, которые соответствуют ПХ. Сделав небольшое отступление от $\eta = -1$ в сторону уменьшения η, можно получить начальные условия для интегрирования системы

(3) при выбранном $\gamma = 7/5$, $\omega = 0$ и некотором пробном значении n. Решая задачу Коши для системы в сторону уменьшения η, следят за поведением соответствующей фазовой траектории на плоскости (U, Z) с тем, чтобы попасть в известную неособую точку — образ УВ1+. Такое попадание возможно лишь при определенном подборе n и определенном размере интервала интегрирования по x. Так были получены первая и вторая строки в таблице и известное значение $n = 0.7171745$.

Модель	Характерная точка	η	$U1$	$R1$	$Z1$
СУВ $\omega = 0$ $n = 0.7171745$ $\gamma = 7/5$	УВ1+	-1.0	-5/6	6.0	7/36
	ПХ–	-0.845089	-0.773168	8.49174	0.1682177
	ПХ+	-0.845065	-0.773182	8.49062	0.168228
	УВ2–	2.68841	-0.287893	64.3086	0.144550
	УВ2+	2.68841	0.0794383	145.062	0.214518
		16.7345	0.0112545	54.4395	0.185998
	$\eta \to +\infty$	50.03389	0.00373867	31.5279	0.172507
ГУВ $\omega = 0.7900640$ $n = 0.8419872$ $\gamma = 7/5$	УВ1+	-1.0	-5/6	6.0	7/36
	ПХ–	-0.821996	-0.762431	6.95182	0.206241
	ПХ+	-0.821976	-0.762424	6.95178	0.206242
	УВ2–	1.44198	-0.158958	18.3459	0.304056
	УВ2+	1.44198	0.254178	35.5986	0.410791
		16.0763	0.0195063	4.36336	0.177409
	$\eta \to +\infty$	50.4683	0.00619525	1.76270	0.123458

Аналогичное вычисление зависимости $n = n(\gamma)$ проведено для модели ГУВ, сравнение двух графиков (кривая *1* по модели СУВ, *2* — по ГУВ) дано на рис. 3.

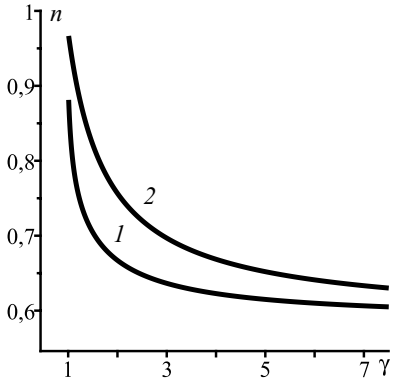


Рис. 3

Перейдем к описанию второго этапа построения решения. Используя найденные разложения для АП в окрестности $\eta = -1$ (их коэффициенты стали числами), находят начальные условия в задаче Коши для построения решения в подобласти *3* рис. 1. Интегрируют систему (3) в сторону увеличения η, так чтобы пройти точку с $\eta = 0$. Далее интегральная кривая на плоскости (U, Z) выходит на ЗЛ, где $Z = (U - 1)^2$, в точке, отличной от ПХ. Это означает предельную линию на (r, t)-плоскости, что недопустимо. Возникает задача определения местоположения отраженной УВ (см. п. 3 вышеприведенного *математического моделирования*) с тем, чтобы с помощью скачка УВ2– $\to$ УВ2+ перепрыгнуть ЗЛ.

В таблице приведены характерные точки, полученные при интегрировании системы ОДУ для УВ1+, ПХ, УВ2–, УВ2+ и больших значений η. Расчеты были проведены для 2-х моделей (СУВ и ГУВ). Их использование позволяет легко воспроизвести АП и построить параметры соответствующих течений. В таблице была проведена вторая нормировка, так что значению УВ1 соответствует $\eta = -1$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 4–7 приведены АП (по r) для скорости частиц, плотности, квадрата локальной скорости звука и энтропийной функции параллельно для 2-х обсуждаемых моделей. Всюду кривые *1* относятся к классической СУВ-модели, *2* — к ГУВ. Напомним, что *эти функции при изменении η от $-\infty$ до $+\infty$ описывают поведение соответствующего параметра при фиксированном r и изменении t от $-\infty$ до $+\infty$.*

На рис. 4 вертикальным пунктиром изображены УВ1 и УВ2. Область между УВ+ и ПХ– изображена утолщенной линией. Отметим, что сила (по $U1$) отраженной УВ почти в 2 раза меньше, чем падающей. Отраженная УВ по модели ГУВ возникает раньше, чем по СУВ. Качественное поведение АП($U1$) одинаковое.

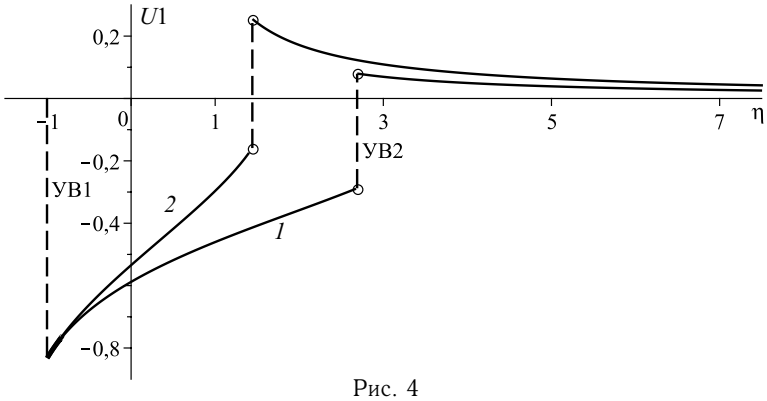


Рис. 4

На рис. 5 показан АП($R1$) (по r) для плотности. Сила (по $R1$) отраженной УВ по СУВ-модели более чем в 3 раза превосходит по ГУВ-модели. Качественное поведение АП($R1$) одинаковое.

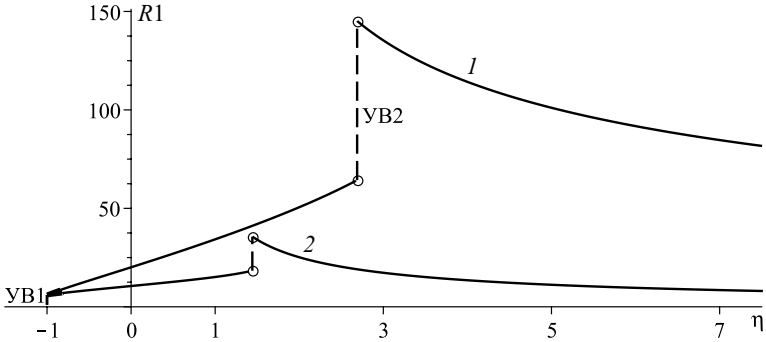


Рис. 5

На рис. 6 показан АП($Z1$) (по r) для квадрата локальной скорости звука (температуры с точночтью до постоянного множителя). Кривая *1* показывает, что температура в фиксированной точке r подскакивает на приходящей УВ1, затем начинает падать до минимума, затем слегка возрастает, подскакивает в отраженной УВ2 с тем, чтобы уменьшаться со временем. Таким образом, АП температуры — немонотонная функция в интервале между приходящей и отраженной УВ. Это означает наличие характерного размера. Кривая *2* имеет другое качественное поведение: температура продолжает расти в интервале между двумя УВ. Это можно объяснить тем, что газ адиабатически сжимается, так как частицы двигаются к ЦФ после сходящейся УВ. После отраженной УВ газ адиабатически расширяется, что приводит к его охлаждению.

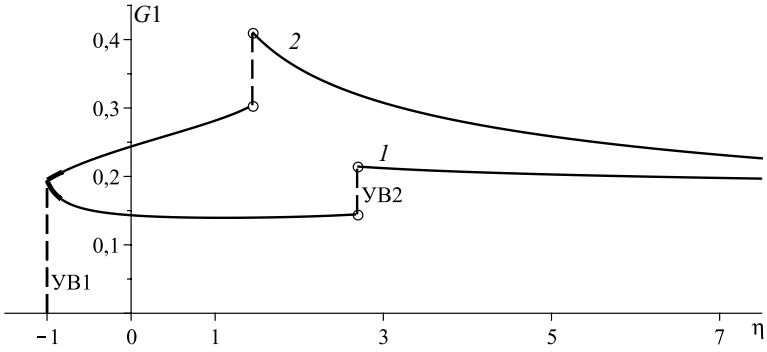


Рис. 6

На рис. 7 показаны АП($S1$) (по r) для энтропийной функции. Кривая *1* после УВ1 монотонно и сильно убывает до появления УВ2, что представляется качественно правдоподобным, поскольку частицы, которые в начальный момент располагались ближе к ЦФ, проходят через более сильную УВ и получают большее значение энтропии позади нее. За отраженной УВ2 наблюдается монотонное возрастание энтропии, что не противоречит высказанному объяснению, так как скорость частиц в зоне 4 рис. 1 меняет знак. Кривая *2* демонстрирует кусочно постоянные значения $S1$, что соответствует гомэнтропической модели.

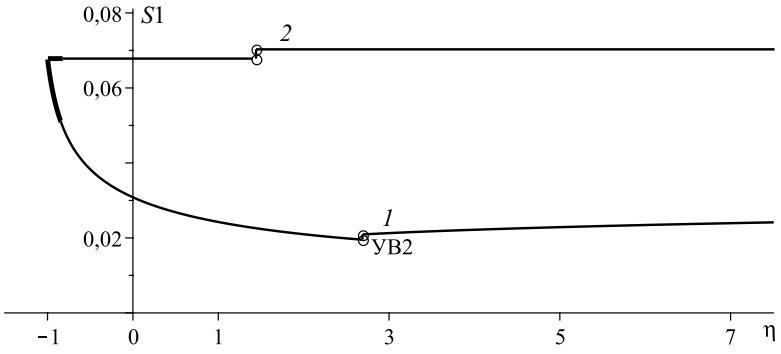


Рис. 7

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Классическое решение [1–3] — это решение хорошо поставленной задачи с краевыми и начальными условиями. Такая задача является *полностью* автомодельной [10]: основные уравнения, начальные и граничные условия инвариантны относительно группы подобных преобразований. Решение такой задачи дает локальную асимптотику (фазу схождения УВ к ЦФ) и от него нельзя требовать правильного описания второй фазы (отражения УВ от ЦФ). Физически интересными могут оказаться *частично* автомодельные решения (уравнения инвариантны, но часть условий — нет). Иногда такие решения выступают в роли промежуточных асимптотик изучаемого явления, они, в частности, способны «забывать» начальные условия. Приведем простой пример: если в лужу бросить прямоугольный кирпич, то от него почти сразу пойдет волна в виде расходящегося круга, которая описывается частично автомодельным решением, «забывшим» о «прямоугольных» начальных условиях. Возможно, что представленное новое решение является промежуточной асимптотикой для схождения – отражения УВ по газу постоянной начальной плотности. Для окончательного вывода требуется сравнение с результатами анализа асимптотик в конечноразностных решениях соответствующих задач.

Автор благодарит В.С. Кожанова за помощь в оформлении статьи.

Библиографический список

1. *Guderley, G.* Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöe in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse / G. Guderley // Luftfahrtforschung. – 1942. – B. 19, lfg. 9. – S. 302–312.

2. *Ландау, Л.Д.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2003. – 736 с.

3. *Станюкович, К.П.* Неустановившиеся движения сплошной среды / К.П. Станюкович. – М.: Наука, 1971. – 856 с.

4. *Овсянников, Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 236 с.

5. *Хантер, К.* О захлопывании пустой полости в воде / К. Хантер // Механика: период. сб. пер. иностр. ст. – 1961. – № 3 (67). – С. 77–100.

6. *Lazarus, R.B.* Self-Similar Solutions for Converging Shocks and Collapsing Cavities / R.B. Lazarus // SIAM J. Numer. Anal. – 1981. – V. 18, iss. 2. – P. 316–371.

7. *Зельдович, Я.Б.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений / Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер. – М.: Наука, 1966. – 688 с.

8. *Седов, Л.И.* Методы подобия и размерностей в механике / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1967. – 428 с.

9. *Брушлинский, К.В.* Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики / К.В. Брушлинский, Я.М. Каждан // УМН. – 1963. – Т. 18, вып. 2 (110). – С. 3–23.

10. *Баренблатт, Г.И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика / Г.И. Баренблатт. – Л.: Гидрометеоиздат, 1978. – 207 с.

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.63:004.272.26

О РЕАЛИЗАЦИИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ОСТЕОСИНТЕЗА НА КЛАСТЕРНЫХ СИСТЕМАХ СГУ

Д.К. Андрейченко[1], **П.В. Ирматов**[2], **М.С. Ирматова**[2], **М.Г. Щербаков**[2]

[1]Саратовский государственный университет,
кафедра математической кибернетики и компьютерных наук
E-mail: kp_andreichenko@renet.ru

[2]Саратовский государственный университет,
Поволжский региональный центр новых информационных технологий
E-mail: karteron@yahoo.com, welecat@gmail.com

В статье рассмотрена оптимизированная кластерная версия пакета конечно-элементного моделирования, использованная в проекте «Разработка вычислительно-информационных технологий компьютерного моделирования на параллельных вычислительных комплексах травматологических и операционных процессов для оперативной выработки диагностических и лечебных рекомендаций», выполняемом в рамках федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2012 годы» по Государственному контракту от 30 сентября 2009 года 02.514.11.4121.

Ключевые слова: математическое моделирование, метод конечных элементов, кластерные системы, параллельное программирование.

About Realisation of Finite-Element Modeling in Problems of an Osteosynthesis on Cluster Systems of SSU

D.K. Andreichenko[1], **P.V. Irmatov**[2], **M.S. Irmatova**[2], **M.G. Scherbakov**[2]

[1]Saratov State University,
Chair of Mathematical Cybernetics and Computer Sciences
E-mail: kp_andreichenko@renet.ru

[2]Saratov State University,
Volga Regional Center of New Informational Technologies
E-mail: karteron@yahoo.com, welecat@gmail.com

In this article we describe the optimized cluster version of a package of finite-element modeling. This project titled «Development of Computational and information technologies using computer modeling on parallel computing complexes for traumatological and surgical evaluations to enable efficient diagnostic and medical recommendations». The project which commenced on September 30th 2009 was a «state commission» and part of the federal special-purpose programme titled «Research and development on priority directions of the Russian science & technology complex 2007–2012», Project 02.514.11.4121.

Key words: mathematical modeling, finite-element method, cluster systems, parallel programming.

ВВЕДЕНИЕ

В современной травматологии при принятии решения о проведении операций остеосинтеза [1] требуется выполнять математическое моделирование напряженно-деформированного состояния в металлофиксаторах и в биологических тканях, в том числе в кортикальном слое костной ткани. С этой целью по целевой исследовательской программе Минобрнауки РФ была показана возможность создания

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

© Д.К. Андрейченко, П.В. Ирматов, М.С. Ирматова, М.Г. Щербаков, 2010

соответствующего высокопроизводительного программно-информационного комплекса (ПИК) [2] на основе имеющегося свободно распространяемого программного обеспечения. Традиционно подобные ПИК содержат три компонента, возможно, функционирующих в гетерогенных программно-аппаратных средах: 1) препроцессор, в котором выполняется подготовка либо импорт трехмерной геометрической модели, а также генерация конечно-элементной сетки; 2) решатель (Solver), в котором выполняется численное решение задач математической физики на основе метода конечных элементов (характеризуется повышенными требованиями к ресурсам вычислительной системы); 3) постпроцессор, который служит для визуализации полученных результатов. Разработанный препроцессор подробно рассмотрен в [2]. Далее ограничимся рассмотрением собственно конечно-элементного решателя и связанных с его реализацией аспектов конечно-элементного моделирования.

1. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Движение сплошной среды, занимающей в пространстве в текущий момент времени t некоторый объем V, описывается т. н. уравнением импульсов [3]

$$\rho w^k = \rho F^k + \nabla_i \sigma^{ki}, \qquad i,\, k = 1,\, 2,\, 3. \tag{1}$$

Здесь: $\sigma = \{\sigma^{kj}\}$, $\sigma^{ik} = \sigma^{ki}$ — симметричный тензор напряжений, заданный своими контравариантными компонентами; ρ — плотность среды; $\mathbf{F} = \{F^k\}$, $k = 1,\, 2,\, 3,$ — вектор массовых сил, действующих на индивидуальные частицы сплошной среды, и заданный своими контравариантными компонентами; $\mathbf{w} = \{w^k\}$, $k = 1,\, 2,\, 3,$ — ускорение индивидуальных точек сплошной среды, заданное своими контравариантными компонентами; ∇_i, $i = 1,\, 2,\, 3,$ — символ ковариантного дифференцирования в используемой системе координат (возможно, подвижной, криволинейной и деформируемой); по одноименному верхнему и нижнему индексу, как обычно в тензорном исчислении, выполняется суммирование [4]. С точки зрения Лагранжа, свойственной механике твердого деформируемого тела, индивидуализация точек сплошной среды выполняется посредством указания их координат $\mathbf{r} \subset V_0$ в начальный момент времени $t = t_0$, когда среда заполняет объем V_0. Если при этом вектор перемещений $\mathbf{u}$ отсчитывается от некоторой инерциальной системы координат, то векторы скорости $\mathbf{v}$ и ускорения $\mathbf{w}$ индивидуальных частиц сплошной среды суть $\mathbf{v} = \partial\mathbf{u}/\partial t$, $\mathbf{w} = \partial^2\mathbf{u}/\partial t^2$. При необходимости в массовых силах $\mathbf{F}$ следует учесть переносные и кориолиссовы силы инерции [5]. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ индивидуальной точки сплошной среды относительно используемой системы координат задается набором криволинейных координат $\{x^k\}$, $k = 1,\, 2,\, 3,$ а расстояние между двумя бесконечно близкими точками суть $ds^2 = d\mathbf{r}^2 = g_{ki}dx^k dx^i$, $k,\, i = 1,\, 2,\, 3$; $g_{ki} = g_{ik}$, где g_{ki} — ковариантные компоненты метрического тензора используемой криволинейной системы координат. Любой вектор $\mathbf{a}$ может быть задан как своими ковариантными компонентами a_k, $k = 1,\, 2,\, 3,$ так и своими контравариантными компонентами a^i, $i = 1,\, 2,\, 3,$ причем $a_k = g_{kj}a^i$. Ковариантные, контравариантные и смешанные компоненты тензоров преобразуются по аналогичному закону [4]. Матрицы, составленные из ковариантных $\{g_{ki}\}$ и контравариантных $\{g^{ki}\}$ компонент метрического тензора являются взаимно-обратными, а смешанные компоненты метрического тензора образуют единичную матрицу. При преобразовании системы криволинейных координат $x^k = x^k(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, $k = 1,\, 2,\, 3,$ компоненты векторов и тензоров в новой системе координат ξ^k (отмечены символом $\wedge$) преобразуются по закону

$$\hat{a}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} a^j, \qquad \hat{a}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \xi^i} a_j, \qquad \hat{A}^{ik} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} A^{jl}, \qquad \hat{A}_{ik} = \frac{\partial x^j}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^l}{\partial \xi^k} A_{jl}.$$

По правилам тензорного исчисления операции ковариантного дифференцирования над векторными и тензорными полями выполняются следующим образом [4]:

$$\nabla_i a^k = \partial a^k/\partial x^i + a^j \Gamma^k_{ji}, \qquad \nabla_i a_k = \partial a_k/\partial x^i - a_j \Gamma^j_{ki}, \qquad \nabla_i a_k = g_{kj}\nabla_i a^j,$$
$$\nabla_i A^{kj} = \partial A^{kj}/\partial x^i + A^{lj}\Gamma^k_{lj} + A^{kl}\Gamma^j_{li}, \qquad \nabla_i A_{kj} = \partial A_{kj}/\partial x^i - A_{lj}\Gamma^l_{ki} - A_{kl}\Gamma^l_{ji},$$
$$\nabla_i A_{kj} = g_{kl} g_{jm} \nabla_i A^{lm}, \qquad \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks}\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s}\right) = \Gamma^k_{ji}.$$

Ковариантные компоненты симметричного тензора деформаций $\varepsilon = \{\varepsilon_{ki}\}$, $k, i = 1, 2, 3$ связаны с ковариантными компонентами вектора перемещений $\mathbf{u}$ формулами Коши [3]:

$$\varepsilon_{ki} = \frac{1}{2}\left(\nabla_k u_i + \nabla_i u_k + \nabla_k u_j \nabla_i u^j\right). \tag{2}$$

Здесь вектор перемещений задан проекциями на оси криволинейной системы координат, соответствующей начальному состоянию деформированной среды, а ковариантное дифференцирование выполняется в метрике начального состояния. С точки зрения Лагранжа, метрические тензоры в начальном $g_{ki}^{(0)}$ и актуальном g_{kj} состоянии суть $g_{kj} = g_{ki}^{(0)} + 2\varepsilon_{ki}$. Любой вектор $\mathbf{a}$ и тензор $\mathbf{A}$ могут быть заданы как своими компонентами a^k, A^{ik} в метрике начального состояния, так и своими компонентами $\tilde{a}^k$, $\tilde{A}^{ik}$ в метрике актуального состояния, причем (δ_i^k — символ Кронекера)

$$a^k = \tilde{a}^i(\delta_i^k + \nabla_i u^k), \qquad A^{ki} = \tilde{A}^{jl}(\delta_j^k + \nabla_j u^k)(\delta_l^i + \nabla_l u^i).$$

С точки зрения Лагранжа, закон сохранения массы индивидуальной частицы среды принимает вид $\rho_0 dV_0 = \rho\, dV$, т. е.

$$\rho_0\sqrt{\det\{g_{ki}^{(0)}\}} = \rho\sqrt{\det\{g_{ki}^{(0)} + 2\varepsilon_{ki}\}}. \tag{3}$$

Здесь ρ_0, ρ — плотность среды в начальном и актуальном состоянии, dV_0 и dV — объем малой индивидуальной частицы среды в начальном и актуальном состоянии.

В механике деформируемого твердого тела связь тензоров напряжений (в метрике актуального состояния) и деформаций задается либо функционалом $\sigma = \sigma[\varepsilon]$, учитывающим историю деформирования индивидуальной частицы сплошной среды, либо некоторыми функциями компонент тензора деформаций и компонент тензора скоростей деформаций $\dot{\varepsilon} = \{\dot{\varepsilon}_{jl}\}$, $j, l = 1, 2, 3$, $\dot{\varepsilon}_{jl} = \partial\varepsilon_{jl}/\partial t$

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}). \tag{4}$$

В математических моделях теории упругости контравариантные компоненты тензора напряжений связаны с производными объемной плотности свободной энергии деформирования (приведенной к единице недеформированного индивидуального объема упругой среды — т. н. упругого потенциала) по ковариантным компонентам тензора деформаций

$$\sigma^{ki} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ki}}, \qquad U = U(\varepsilon), \tag{5}$$

причем предполагается, что свободная энергия деформирования (упругий потенциал) U зависит лишь от компонент тензора деформаций ε и, возможно, температуры T. Если полагать, что относительные деформации достаточно малы (порядка 10^{-3} при упругом деформировании литых металлов), то [6]

$$\sigma^{ki} = \partial U/\partial\varepsilon_{ki}, \qquad U = U(\varepsilon). \tag{6}$$

В частности, если свободная энергия деформирования U является квадратичной (положительно определенной) формой компонент тензора деформаций

$$U(\varepsilon) = \frac{1}{2}C^{kijl}\varepsilon_{ki}\varepsilon_{jl}, \qquad C^{kijl} = C^{jlki} = C^{ikjl} = C^{kilj}, \tag{7}$$

то связь напряжений и деформаций становится линейной

$$\sigma^{ki} = C^{kijl}\varepsilon_{jl}. \tag{8}$$

Для уравнений импульса (1) требуется поставить начальные и граничные условия. Начальные условия требуются лишь в том случае, когда в левой части уравнения импульса (1) учитываются компоненты (относительного) ускорения $\mathbf{w}$, и состоят в задании в начальный момент времени t_0 координат и скоростей индивидуальных точек сплошной среды, занимающей объем V_0. При задании

граничных условий требуется учитывать, что на некоторой части S_1 (рис. 1) граничной поверхности $S = \partial V = S_1 \cup S_2$ могут задаваться смещения $\mathbf{u}^{(0)}$ точек деформируемого твердого тела, а на другой части S_2 граничной поверхности могут задаваться действующие на деформируемое твердое тело внешние поверхностные силы $\mathbf{p}_{(0)}$, т. е.

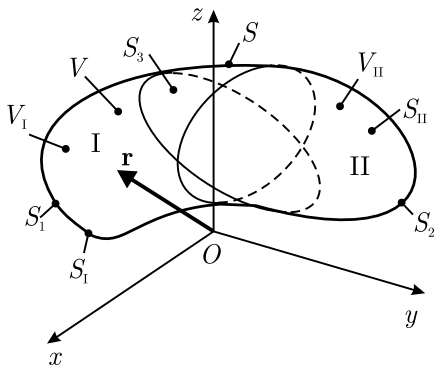


Рис. 1. К постановке граничных условий

$$u_k = u_k^{(0)}(t), \qquad \mathbf{r} \in S_1, \qquad k = 1, 2, 3. \tag{9}$$

Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к элементарной площадке, проходящей через данную точку сплошной среды. Он задан своими ковариантными компонентами $\mathbf{n} = \{n_i\}$, $i = 1, 2, 3$. В частности, это может быть и единичный вектор внешней нормали к части S_2 граничной поверхности. Известно, что контравариантные компоненты p^k развивающегося на данной элементарной площадке вектора $\mathbf{p}$ поверхностных сил (для элементарных площадок, проходящих через внутренние точки объема V, $\mathbf{p}$ есть вектор полного внутреннего напряжения) связаны с компонентами тензора напряжений σ т. н. формулами Коши [3, 6] $p^k = \sigma^{ki} n_i$. Следовательно,

$$\sigma^{ki} n_i = p^k_{(0)}, \qquad \mathbf{r} \in S_2, \tag{10}$$

где $p^k_{(0)}$ суть контравариантные компоненты заданного на S_2 вектора внешних поверхностных сил $\mathbf{p}_{(0)}$. Возможна ситуация, когда на некоторых фрагментах S^* поверхности S для некоторых значений индекса $k = 1, 2, 3$ задаются краевые условия (9), а для остальных значений индекса k задаются краевые условия (10).

Вместе с тем, возможна ситуация, когда требуется отдельно рассмотреть деформирование каждой из частей V_I и V_{II} объема $V = V_I \cup V_{II}$ (например, в силу существенной неоднородности конструкции). Полагаем: $\partial V_I = S_I \cup S_3$, $\partial V_{II} = S_{II} \cup S_3$, $S = S_I \cup S_{II}$. В каждом из объемов V_I и V_{II} должно выполняться уравнение импульсов (1), для которого на соответствующих фрагментах поверхности $S_1 \cap S_I$ и $S_1 \cap S_{II}$ потребуется задать краевые условия типа (9), а на фрагментах поверхности $S_2 \cap S_I$ и $S_2 \cap S_{II}$ — краевые условия типа (10). На разделяющей объемы V_I и V_{II} лежащей внутри V поверхности S_3 должны выполняться условия

$$\mathbf{u}^{(I)} = \mathbf{u}^{(II)}, \qquad \mathbf{r} \in S_3, \tag{11}$$

$$\sigma^{ki}_{(I)} n_i = \sigma^{ki}_{(II)} n_i, \qquad \mathbf{r} \in S_3. \tag{12}$$

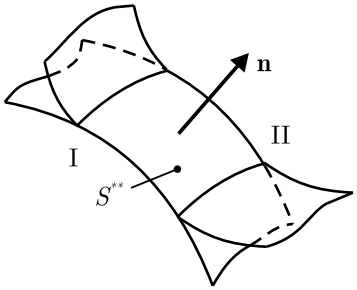


Рис. 2. Контактная поверхность

Далее, на поверхности контакта S^{**} твердых деформируемых тел I и II (рис. 2) должны совпадать нормальные составляющие векторов перемещений и поверхностных сил

$$u^k_{(I)} n_k = u^k_{(II)} n_k, \qquad \mathbf{r} \in S^{**}, \tag{13}$$

$$\sigma^{ki}_{(I)} n_i n_k = \sigma^{ki}_{(II)} n_i n_k, \qquad \mathbf{r} \in S^{**}. \tag{14}$$

При отсутствии трения на контактной поверхности на стороне I и на стороне II отсутствуют касательные составляющие векторов касательных сил, т. е. достаточно потребовать выполнения любых двух равенств из трех равенств (15) и любых двух равенств из трех равенств (16)

$$\sigma^{ki}_{(I)} n_i - (\sigma^{ij}_{(I)} n_i n_j) n^k = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \qquad \mathbf{r} \in S^{**}, \tag{15}$$

$$\sigma^{ki}_{(II)} n_i - (\sigma^{ij}_{(II)} n_i n_j) n^k = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \qquad \mathbf{r} \in S^{**}. \tag{16}$$

При наличии трения касательная составляющая вектора поверхностных сил не может превосходить по абсолютной величине произведения коэффициента трения на абсолютную величину нормальной составляющей вектора поверхностных сил.

В аналитической механике уравнения движения (равновесия) механических систем обычно получаются при помощи т. н. вариационного принципа возможных перемещений Эйлера – Лагранжа [5], согласно которому, работа всех действующих на индивидуальные точки механической системы внешних и внутренних физических сил, а также сил инерции, на любом виртуальном перемещении тождественно обнуляется. Под виртуальным (т. е. возможным) перемещением понимается любое бесконечно малое перемещение, совместное со связями, наложенными на механическую систему. При этом реакции связей по определению не совершают никакой работы на виртуальных перемещениях. Пусть $\delta\mathbf{u}$ — векторное поле виртуальных перемещений точек твердого деформируемого тела. Выполнение краевых условий (9) приводит к следующему ограничению, накладываемому на поле виртуальных перемещений:

$$\delta\mathbf{u} = 0, \qquad \mathbf{r} \in S_1. \tag{17}$$

Наличие поля виртуальных перемещений приводит к возникновению тензорного поля виртуальных деформаций, которое в метрике актуального состояния суть

$$\delta\varepsilon_{ki} = \frac{1}{2}\left(\nabla_k \delta u_i + \nabla_i \delta u_k\right). \tag{18}$$

Принцип Эйлера – Лагранжа применительно к механике деформируемого твердого тела принимает вид

$$\int\limits_V \left[\rho(F^k - w^k)\delta u_k - \sigma^{ki}\delta\varepsilon_{ki}\right] dV + \oint\limits_S p^k_{(0)}\delta u_k \, dS = 0. \tag{19}$$

В силу инвариантности операций тензорного анализа подынтегральные выражения в (19) могут вычисляться в любой подходящей криволинейной системе координат, однако элементы объема и площади соответствуют актуальному состоянию. Из (17) следует, что интеграл по фрагменту поверхности S_1 в левой части (19) тождественно обнуляется. Если на некоторых фрагментах S^* поверхности S для некоторых значений индекса $k = 1, 2, 3$ ставятся краевые условия (9), а для остальных значений индекса k задаются краевые условия (10), то в поверхностном интеграле по S^* в левой части (19) выполняется суммирование по соответствующему подмножеству значений индекса k. Можно показать, что из принципа Эйлера – Лагранжа (19) и произвольности поля виртуальных перемещений $\delta\mathbf{u}$ следуют уравнение импульса (1), а также краевые условия (9) и (10). Далее, если выполняются кинематические условия (11), из принципа Эйлера – Лагранжа (19) следует краевое условие (12). Если предположить, что на контактной поверхности S^{**} отсутствуют силы трения, то исходя из (19), можно показать, что выполнение условия (13) влечет выполнение краевых условий (14)–(16). Если деформируемая среда является упругой либо гиперупругой, то из (3), (5) следует $\sigma^{ki}\delta\varepsilon_{ki}\, dV = \delta U(\varepsilon) dV_0$, и уравнение (19) принимает вид

$$\int\limits_V \rho(F^k - w^k)\delta u_k \, dV - \delta \int\limits_{V_0} U(\varepsilon)\, dV + \int\limits_{S_2} p^k_{(0)}\delta u_k \, dS = 0, \qquad k = 1, 2, 3. \tag{20}$$

Здесь V_0 — объем, занимаемый средой в недеформированном состоянии. При численном решении (1) сплошную среду обычно наделяют конечным числом степеней свободы, например, аппроксимируя поля упругих смещений отрезками фурье-разложений по той или иной полной системе базисных функций $\Psi_{k_j}(\mathbf{r}) = \Psi_{k_j}(x^1, x^2, x^3)$, удовлетворяющих краевым условиям (9),

$$u_k(\mathbf{r}, t) \approx \sum_{j=1}^{N} q_{k_j}(t)\Psi_{k_j}(\mathbf{r}), \qquad k = 1, 2, 3, \qquad \mathbf{r} \in V_0. \tag{21}$$

При использовании метода конечных элементов [7–9] индекс j в (21) можно сопоставить с номером текущего узла конечно-элементной сетки, а базисные функции $\Psi_{k_j}(\mathbf{r})$ отличны от нуля лишь в пределах тех конечных элементов, в которые входит текущий узел j. Особенностью метода конечных элементов является тот факт, что выполнение краевых условий типа (9) сводится к заданию значений обобщенных координат для узлов на граничной поверхности S_1. При этом в (21) функции $q_{k_j}(t)$, $j = N_k + 1, \ldots, N$, $k = 1, 2, 3$, становятся известными функциями времени и тем самым исключаются

из числа искомых функций, а дальнейшему определению подлежат функции $q_{k_j}(t)$, $j = 1, 2, \ldots, N_k$, $k = 1, 2, 3$. В качестве базисных функций метода конечных элементов [7–9] обычно используют базисные функции т. н. элементов сирендипова семейства, либо базисные функции т. н. элементов лагранжева семейства (где базисные функции в том или ином смысле представляют собой произведения интерполяционных полиномов Лагранжа локальных координат конечного элемента). Поскольку варьируются лишь искомые обобщенные координаты, из (21) следует

$$\delta u_k(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^{N_k} \Psi_{k_j}(\mathbf{r}) \delta q_{k_j}, \qquad k = 1,\, 2,\, 3, \qquad \mathbf{r} \in V_0.$$

Уравнение Эйлера – Лагранжа (19) должно выполняться при любых значениях вариаций обобщенных координат δq_{k_j}. После группировки слагаемых, приравнивания нулю сомножителей при δq_{k_j} и преобразования соответствующих уравнений к метрике начального состояния находим

$$\int\limits_{V_0} (\delta_j^k + \nabla_j u^k) \tilde{\nabla}_i \tilde{\sigma}^{ji} \sqrt{\det\{g_{ki}^{(0)} + 2\varepsilon_{ki}\} / \det\{g_{ki}^{(0)}\}} \Psi_{k_j}(\mathbf{r}) dV_0 +$$
$$+ \int\limits_{S_2^{(0)}} [p_{(0)}^k - (\delta_j^k + \nabla_j u^k) \tilde{\sigma}^{ji} \tilde{n}_i] \sqrt{(\hat{g}_{11}\hat{g}_{22} - \hat{g}_{12}^2)/(\hat{g}_{11}^{(0)}\hat{g}_{22}^{(0)} - (\hat{g}_{12}^{(0)})^2)} \Psi_{k_j}(\mathbf{r}) dS^{(0)} +$$
$$+ \int\limits_{V_0} \rho_0 (F^k - \ddot{u}^k) \Psi_{k_j}(\mathbf{r}) dV_0 = 0, \qquad k = 1,\, 2,\, 3, \qquad j = 1, 2, \ldots, N_k. \tag{22}$$

Здесь величины и операции в метрике актуального состояния отмечены символом $\sim$. Из (21), (2), (4)–(7) следует, что (22) представляет собой записанную в неявной форме систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (весьма большой размерности) относительно набора обобщенных координат q_{k_j}, $k = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \ldots, N_k$. Фактически (22) представляет собой некоторый вариант проекционного метода Галеркина [10]. Сходимость приближенных решений (21) к точному решению исходной краевой задачи (в пренебрежении относительными ускорениями частиц сплошной среды) частично исследована в [11].

Элементы матрицы при обобщенных ускорениях $\ddot{q}_{k_j}$, $k = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \ldots, N_k$, называемой обычно матрицей инерции, задаются выражениями $\int_{V_0} \rho_0(\mathbf{r}) g^{ki}(\mathbf{r}) \Psi_{k_j}(\mathbf{r}) \Psi_{i_l}(\mathbf{r}) dV_0$, представляющими собой скалярные произведения по начальному объему V_0 базисных функций с весовыми коэффициентами $\rho_0(\mathbf{r}) g^{ki}(\mathbf{r})$. Поскольку весовые коэффициенты образуют положительно определенную симметричную матрицу, матрица инерции будет симметричной положительно определенной. Так как базисные функции отличны от нуля лишь в пределах конечных элементов, содержащих текущий узел, матрица инерции будет разреженной.

Предположим, что сплошная среда является упругой либо гиперупругой, и рассмотрим (20) в пренебрежении (относительным) ускорением частиц сплошной среды. Если материал не является резиноподобным, то в пределах упругих деформаций компоненты тензора деформаций можно считать малыми. Далее, если упруго деформируемое тело не является тонкостенным, то величины упругих смещений также можно считать малыми. Следовательно,

$$\varepsilon_{ki} = \frac{1}{2} (\nabla_k u_i + \nabla_i u_k) \tag{23}$$

и с точностью до малых высшего порядка можно полагать, что положение упруго деформируемого тела в актуальном состоянии практически совпадает с положением в начальном состоянии, т. е. $V \approx V_0$, $S \approx S^{(0)}$. Если полагать, что компоненты вектора массовых $\mathbf{F} = \{F^k\}$ и поверхностных $\mathbf{p}_{(0)} = \{p_{(0)}^k\}$ сил не зависят от поля смещений $\mathbf{u}$, то (20) принимает вид

$$\delta\Phi = 0, \qquad \Phi = \Phi[\mathbf{u}] = \int\limits_V \rho F^k u_k \, dV - \int\limits_V U(\varepsilon) \, dV + \int\limits_{S_2} p_{(0)}^k u_k \, dS, \tag{24}$$

т. е. решение уравнений равновесия сплошной среды доставляет экстремальное (а фактически — минимальное) значение функционалу (24), что и составляет содержание известного вариационного

метода Ритца [6]. Подстановка приближенного решения (21) в (23) и далее в (24) позволяет явно выразить величину функционала Φ через значения обобщенных координат $q = \{q_{k_j}\}$, $k = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \ldots, N$

$$\Phi = \Phi(\mathbf{q}), \qquad \delta\Phi = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{N_k} \frac{\partial\Phi(\mathbf{q})}{\partial q_{k_j}}\delta q_{k_j}. \tag{25}$$

Из (24), (25) и произвольности вариаций обобщенных координат δq_{k_j} следует, что приближенному решению (21) уравнений равновесия сплошной среды соответствует выполнение требований

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{q})}{\partial q_{k_j}} = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \ldots, N_k. \tag{26}$$

Если теперь полагать, что деформируемая среда является линейно-упругой, т. е. справедливы формулы (7), то в этом случае функционал Ритца (24) будет квадратичной функцией обобщенных координат:

$$\begin{gathered}\Phi = \sum_{\nu=1}^{N}\sum_{k=1}^{2} B_{\nu k} q_{k_\nu} - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A_{\nu mkj} q_{k_\nu} q_{j_m}, \\ A_{\nu mil} = \int\limits_V C^{kijl}\nabla_k\Psi_{i_\nu}\cdot\nabla_j\Psi_{l_m}\,dV = A_{m\nu li}, \qquad B_{\nu i} = \int\limits_V \rho F^i\Psi_{i_\nu}\,dV + \int\limits_{S_2} p^i_{(0)}\Psi_{i_\nu}\,dS.\end{gathered} \tag{27}$$

В выражениях для $A_{\nu mil}$ и суммирование по i и l отсутствует. Матрица коэффициентов $A_{\nu mkj}$ квадратичной формы в правой части (27), называемая обычно матрицей жесткости, очевидно, симметрична. Поскольку квадратичная форма в правой части (27) получается посредством интегрирования по объему V некоторой квадратичной формы, положительно определенной в каждой точке объема V, матрица жесткости также будет положительно определенной. Поскольку базисные функции, типичные для метода конечных элементов, отличны от нуля лишь в пределах конечных элементов, содержащих текущий узел, матрица $A_{\nu mkj}$ будет разреженной. Решение исходной краевой задачи сводится к решению системы линейных уравнений

$$\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{N_l} A_{\nu mkj} q_{j_m} = B_{\nu k} - \sum_{l=1}^{3}\sum_{m=N_l+1}^{N} A_{\nu mkj} q_{j_m}$$

с разреженной симметричной положительно определенной матрицей.

Заметим далее, что методы, рассмотренные в п. 1, автоматически реализуются в большинстве коммерческих [12] и свободно распространяемых [13] пакетов конечно-элементного моделирования.

2. ОПТИМИЗИРОВАННАЯ ВЕРСИЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО РЕШАТЕЛЯ

За основу оптимизированной кластерной редакции конечно-элементного решателя был взят исходный код параллельной редакции конечно-элементного решателя (версия 5.5.5), входящего в состав свободно распространяемого пакета конечно-элементного моделирования Elmer [13] (www.csc.fi/english/pages/elmer). Технология MPI [14] (www.mpi-forum.org), основанная на обмене сообщениями между параллельно работающими процессами, является стандартной для параллельной версии пакета Elmer. При сборке оптимизированной версии конечно-элементного решателя были выбраны библиотеки стандартных программ MPICH2 (версия 2–1.2 свободно доступна в сети Интернет, http://www.mcs.anl.gov/research/projects/mpich2/index.php). Сборка оптимизированной кластерной редакции конечно-элементного решателя (Solver'a) требует использования обновленного комплекта компиляторов GNU для Linux x86_64 (в частности, версии 4.4.3 и выше компиляторов gcc, g++ и gfortran). В связи с этим были исправлены некоторые ошибки в скриптах компиляции и сборки исходного кода пакета Elmer, не позволявшие автоматически отследить изменение используемой версии комплекта компиляторов GNU.

Эффективность конечно-элементного моделирования напрямую зависит от эффективности выполнения базовых операций линейной алгебры над плотно заполненными матрицами, а также от эф-

фективности выполнения базовых операций по факторизации разреженных матриц. При расчете глобальных конечно-элементных матриц (т. е. при сборке конечно-элементной модели) любой конечно-элементный решатель выполняет большое число базовых операций линейной алгебры (перемножение матриц, умножение матриц на векторы, значительно реже — решение систем линейных уравнений) над плотно заполненными матрицами разного размера (от достаточно малого до достаточно большого). По указанной причине при сборке оптимизированной редакции решателя входящие в состав базовой версии пакета Elmer неоптимизированные версии пакетов LAPACK и т. н. Reference BLAS были заменены на оптимизированную редакцию указанных пакетов в составе библиотеки GotoBLAS2 (http://www.tacc.utexas.edu/resources/software), позволяющие использовать специфические машинные команды процессора Xeon, ресурсы кэш-памяти и т.д.. Для того, чтобы избежать конфликтов технологий MPI и OpenMP в пределах узлов кластера, содержащих по два 4-ядерных процессора Xeon, генерировались последовательные (не многопоточные) библиотеки GotoBLAS2.

Значительные размеры разреженных матриц, возникающих при математическом моделировании на основе метода конечных элементов (характерный размер от нескольких десятков тысяч до нескольких десятков миллионов при среднем количестве ненулевых элементов в строке/столбце от нескольких сотен до нескольких тысяч), требуют использования специальных алгоритмов при решении систем линейных уравнений с разреженными матрицами. В частности, это могут быть итерационные методы решения систем линейных уравнений. Однако относительно медленная сходимость итерационных методов (а в некоторых случаях, например, при наличии сгущения конечно-элементной сетки — отсутствие гарантированной сходимости) вынуждает по возможности использовать т. н. прямые методы решения линейных уравнений, связанные с выполнением факторизации разреженных матриц. Большинство свободно распространяемых, а также доступных для некоммерческого использования пакетов прямых методов численного решения систем линейных уравнений с разреженными матрицами (UMFPACK [15],CHOLMOD [16], MA57 [17], PARDISO [18]) не используют технологию MPI и, следовательно, будут непригодны для вычислительных систем с кластерной архитектурой. По указанной причине кластерные редакции большинства пакетов конечно-элементного моделирования с открытым исходным кодом (например, Elmer) ограничиваются использованием итерационных методов решения систем линейных уравнений с разреженными матрицами, ограничивая использование прямых методов лишь локальными версиями пакетов. К сожалению, это приводит к ощутимому снижению производительности при решении задач конечно-элементного моделирования на кластерных системах. Если говорить применительно к кластерным архитектурам, то одним из немногих свободно распространяемых пакетов, реализующих прямые методы решения линейных уравнений с разреженными матрицами, является пакет MUMPS [19] (MUltifrontal Massively Parallel Solver — «Мультифронтальный масштабируемый параллельный решатель»), исходный код которого после регистрации доступен с сайта производителя (http://mumps.enseeiht.fr либо http://graal.ens-lyon.fr/MUMPS). Пакет выполняет факторизацию достаточно широкого класса разреженных матриц (симметричных и эрмитовых положительно определенных, симметричных неопределенных, несимметричных действительных и комплексных). Исходный код пакета представлен модулями на языках Fortran77/90 и C. Пакет позволяет использовать в пределах отдельных узлов кластеров оптимизированные версии библиотеки BLAS (в частности, упомянутый выше GotoBLAS2). Для сборки пакета MUMPS дополнительно необходимы пакеты BLACS и ScaLAPACK (www.netlib.org), представляющие собой расширения пакетов BLAS и LAPACK на кластерные архитектуры, а также пакет PARMETIS (http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/metis/metis/download), предназначенный для анализа графов и переупорядочения элементов разреженных матриц на кластерных системах, что позволяет достичь требуемой производительности.

Оптимизированная версия конечно-элементного решателя функционирует на типовых кластерах ПРЦНИТ СГУ (содержащих примерно по 10 узлов, с двумя 4-ядерными процессорами Intel Xeon и 16 ГБ оперативной памяти в каждом узле). При ее создании к базовой поставке исходного кода пакета Elmer были добавлены пакеты MPICH2, GotoBLAS2, BLACS, SCALAPACK, PARMETIS и MUMPS, а также было выполнено некоторое исправление скриптов компиляции и сборки, позволяющее использовать обновленные версии комплекта компиляторов GNU (gcc/g++/gfortran). В результате удалось сократить характерное время выполняемого на кластере СГУ в ходе проведения виртуальной опе-

рации остеосинтеза типового этапа конечно-элементных расчетов с нескольких десятков минут до нескольких десятков секунд, что вполне приемлемо для клинической практики. Характерный пример моделирования (поле эквивалентных напряжений, МПа) в системе «бедренная кость – фиксатор» после отображения полученных данных в постпроцессоре приведен на рис. 3.

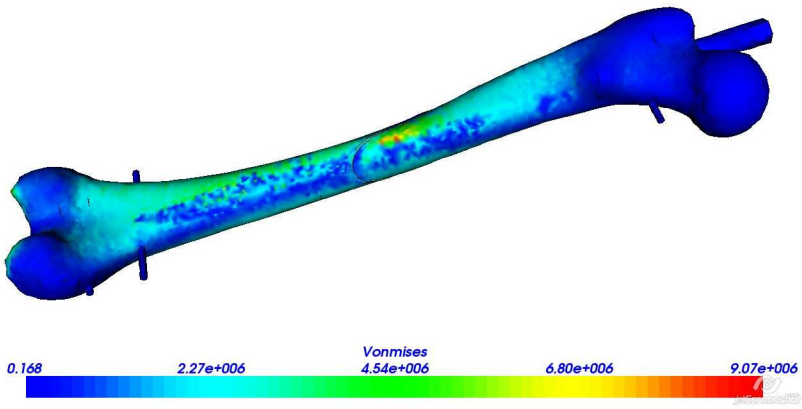


Рис. 3. Поле эквивалентных напряжений

Библиографический список

1. *Мюллер, М.Е.* Руководство по внутреннему остеосинтезу / М.Е. Мюллер, М. Алльговер, Р. Шнайдер, Х. Виллингер. – М.: Springer-Verlag, 1996. – 750 с.

2. *Соловьёв, В.М.* Технология построения твердотельных моделей бедренных костей на основе данных компьютерной томографии / В.М. Соловьёв, П.В. Ирматов, М.С. Ирматова, М.Г. Щербаков // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. – 2010. – Т. 10. – Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. – С. 81–87.

3. *Седов, Л.И.* Механика сплошной среды: в 2 т. / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1976. – Т. 1. – 536 с.

4. *Новиков, С.П.* Элементы дифференциальной геометрии и топологии / С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М.: Наука, 1987. – 432 с.

5. *Четаев, Н.Г.* Теоретическая механика / Н.Г. Четаев. – М.: Наука, 1987. – 368 с.

6. *Лурье, А.И.* Теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1970. – 939 с.

7. *Галлагер, Р.* Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. – М.: Мир,1984. – 428 с.

8. *Зенкевич, О.* Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

9. *Zienkiewich, O.C.* The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics / O.C. Zienkiewich, R.L. Taylor. – Elsevier, 2005. – 631 p.

10. *Флетчер, К.* Численные методы на основе метода Галеркина / К. Флетчер. – М.: Мир, 1988. – 352 с.

11. *Оден, Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж. Оден. – М.: Мир, 1976. – 464 с.

12. ANSYS [Электронный ресурс]. URL: http://www.ansys.com (дата обращения: 20.04.2010).

13. Elmer Solver Manual /CSC – IT Center for Science.– Finland, 2010. — 119 p. [Электронный ресурс] URL: http://www.nic.funet.fi/pub/sci/physics/elmer/doc/ElmerSolverManual.pdf. (дата обращения: 20.04.2010).

14. *Антонов, А.С.* Параллельное программирование с использованием технологии MPI (www.parallel.ru) / А.С. Антонов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004. – 72 с.

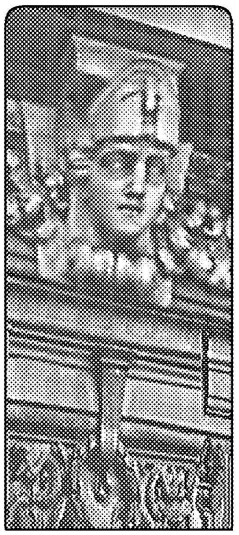
15. *Davis, T.A.* UMFPACK v.5.4.0 User Guide. Dept. of Computer and InformationScience and Engineering Univ. of Florida / T.A. Davis. – Gainesville, Florida, 2009. — 133 p. [Электронный ресурс] URL: http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/umfpack/current/UMFPACK/Doc/UserGuide.pdf (дата обращения: 20.04.2010).

16. *Davis, T.A.* User Guide for CHOLMOD: a sparse Cholesky factorization and modification package. Ver. 1.7. Dept. of Computer and Information Science and Engineering Univ. of Florida / T.A. Davis. – Gainesville, Florida, 2008. – 140 p. [Электронный ресурс] URL: http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/cholmod/CHOLMOD/Doc/UserGuide.pdf (дата обращения: 20.04.2010).

17. The HSL Mathematical Software Library [Электронный ресурс]. URL: http://hsl.rl.ac.uk (дата обращения: 20.04. 2010).

18. Intel® Math Kernel Library. Reference Manual. Document Number: 630813-031US. – 2009. – 3680 p. [Электронный ресурс]. URL: http://software.intel.com/sites/products/documentation/hpc/mkl/mklman.pdf (дата обращения: 20.04.2010).

19. MUltifrontal Massively Parallel Solver (MUMPS 4.9.2) User Guide. – 2009. – 46 p. [Электронный ресурс]. URL: http://graal.ens-lyon.fr/MUMPS/doc/userguide_4.9.2.pdf. (дата обращения: 20.04.2010).



ПРИЛОЖЕНИЯ

ХРОНИКА НАУЧНОЙ ЖИЗНИ

15-Я САРАТОВСКАЯ ЗИМНЯЯ ШКОЛА «СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ», ПОСВЯЩЕННАЯ 125-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ В.В. ГОЛУБЕВА И 100-ЛЕТИЮ СГУ

С 28 января по 3 февраля 2010 года в Саратове проходила 15-я Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», посвященная 125-летию со дня рождения В.В. Голубева и 100-летию СГУ. Школа была организована Саратовским государственным университетом имени Н.Г. Чернышевского, Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова и Математическим институтом имени В.А. Стеклова РАН при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-06827-моб-г).

В работе школы приняли участие 174 человека, из них 2 члена-корреспондента РАН, 29 докторов физико-математических наук, 53 кандидата физико-математических наук. Среди участников школы были представители следующих городов: Астаны, Баку, Бергена, Брянска, Волгограда, Волжского (Волгоградская область), Долгопрудного, Екатеринбурга, Иванова, Казани, Калуги, Киева, Красноярска, Махачкалы, Минска, Москвы, Обнинска, Одессы, Озерска, Петрозаводска, Ростова-на-Дону, Самары, Санкт-Петербурга, Саратова, Стамбула. Самыми многочисленными были саратовская и московская делегации.

К началу работы школы были изданы тезисы (Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 15-й Сарат. зимней школы, посвящ. 125-летию со дня рождения В.В. Голубева и 100-летию СГУ. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. – 200 с.).

Оргкомитет школы возглавил член-корреспондент РАН Б.С. Кашин; в состав оргкомитета вошли также ректор СГУ, профессор Л.Ю. Коссович (зам. председателя), профессор Б.И. Голубов (зам. председателя), профессор А.П. Хромов (зам. председателя), академик РАН С.М. Никольский, член-корреспондент РАН Ю.Н. Субботин, профессора А.В. Абанин, Е.П. Долженко, М.И. Дьяченко, С.И. Дудов, А.Л. Лукашев, Ю.В. Покорный, Е.С. Половинкин, Д.В. Прохоров, А.М. Седлецкий, доцент С.П. Сидоров (секретарь).

15-я Саратовская зимняя школа посвящена актуальным проблемам теории функций действительного и комплексного переменного. Лекции, доклады и сообщения можно распределить по следующим направлениям:

1) ортогональные системы и ряды;
2) тригонометрические ряды;
3) системы функций, порожденные сдвигами;
4) базисы в различных пространствах;
5) вопросы конструктивной теории функций;
6) однолистные функции, квазиконформные отображения;
7) граничные свойства аналитических функций;

8) приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных;

9) спектральная теория операторов;

10) оптимизация и негладкий анализ.

Результаты, представленные участниками школы, являются весомым вкладом в приведенные выше актуальные направления науки. На школе было прочитано 15 лекций. Направления научной деятельности В.В. Голубева были представлены в обзорной лекции д-ра физ.-мат. наук Дмитрия Валентиновича Прохорова(Саратов) «О работах В.В. Голубева по теории аналитических функций», а факты его биографии были приведены деканом механико-математического факультета Андреем Михайловичем Захаровым (Саратов) в докладе «Голубев Владимир Васильевич и Саратовский университет».

Для целостного представления о современном состоянии и существующих приложениях теории функций и возможные пути ее дальнейшего развития оргкомитет заказал следующие лекции:

чл.-кор. РАН Борис Сергеевич Кашин (Москва) «Новые применения оценок поперечников»;

чл.-кор. РАН Юрий Николаевич Субботин (Екатеринбург), д-р физ.-мат. наук Николай Иванович Черных (Екатеринбург) «Бигармоническое уравнение и всплески»;

д-р физ.-мат. наук Николай Юрьевич Антонов (Екатеринбург) «О поведении последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье»;

д-р физ.-мат. наук Александр Иванович Аптекарев (Москва) «Структура многозначности аналитических функций и аппроксимации Эрмита – Паде»;

д-р физ.-мат. наук Виталий Владимирович Арестов (Екатеринбург) «Полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля по мере и в равномерной норме на компактах»;

д-р физ.-мат. наук Виктор Валентинович Власов (Москва) «Спектральный анализ некоторых классов интегродифференциальных уравнений»;

д-р физ.-мат. наук Борис Иванович Голубов(Долгопрудный) «Интегрируемость мультипликативных преобразований Фурье»;

д-р физ.-мат. наук Тарас Павлович Лукашенко (Москва) «О рекурсивных разложениях функций и мер»;

д-р физ.-мат. наук Алексей Леонидович Лукашов (Саратов, Стамбул) «Точные решения некоторых экстремальных задач теории приближений»;

д-р физ.-мат. наук Сергей Сергеевич Платонов (Петрозаводск) «О некоторых задачах теории приближения функций связанных с гармоническим анализом Фурье – Бесселя»;

д-р физ.-мат. наук Евгений Сергеевич Половинкин (Москва) «Об интегрировании многозначных отображений»;

канд. физ.-мат. наук Юрий Анатольевич Фарков (Москва) «Всплески и фреймы в двоичном гармоническом анализе»;

д-р физ.-мат. наук Идрис Идрисович Шарапудинов (Махачкала) «Некоторые свойства полиномов, ортогональных на неравномерных сетках из единичной окружности и отрезка».

На школе было сделано 27 получасовых докладов. В целом школа прошла успешно. Необходимо отметить, что благодаря финансовой поддержке РФФИ в школе приняло участие большее количество иногородних и молодых ученых, аспирантов и студентов.

Следующую школу планируется провести в январе – феврале 2012 г. в г. Саратове. Оргкомитету поручено подготовить список основных докладов и начать необходимую подготовительную работу.

Л.Ю. Коссович, С.П. Сидоров, А.П. Хромов

ВЛАДИМИР ВАСИЛЬЕВИЧ ГОЛУБЕВ В САРАТОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Владимир Васильевич Голубев родился 22 ноября (4 декабря по новому стилю) 1884 года в Сергиевом Посаде Волоколамского уезда Московской губернии. Его отец, Василий Сергеевич, сначала был преподавателем латыни в семинарии, а затем священником в одной из московских церквей. Мать Владимира Васильевича Клавдия Матвеевна происходила из крестьян, получила начальное образование и занималась домашним хозяйством.

Как отмечал Владимир Васильевич: «Первым и самым близким учителем, влияние которого сформировало мировоззрение и направило в значительной мере всю мою деятельность, был мой отец. Ему я обязан интересом к точным и естественным наукам. В памяти резко обрисовалась весна 1889 года. Мне было четыре с половиной года, и отец подарил мне большое деревянное яйцо, в котором были лупа и магнит в виде подковы. Это было мое первое знакомство с физикой». Этот эпизод произвел на Владимира Васильевича сильное впечатление и был упомянут через 65 лет, в последнем слове профессора Голубева.

Окончил гимназию Владимир Васильевич с золотой медалью и поступил в 1903 году на математическое отделение Московского Императорского университета, которое окончил в 1908. Как способный выпускник, рано проявивший склонность к научным исследованиям, Голубев был оставлен в университете при кафедре чистой математики — для подготовки к профессорскому званию. Тогда же он начал работать преподавателем математики в частной женской гимназии и в коммерческом училище. Впрочем, педагогическое мастерство В.В. Голубева начало формироваться еще раньше. В последних классах гимназии, в студенческие годы Владимир Васильевич работал репетитором, преподавал в воскресной школе.

Большую роль в образовании и развитии широты кругозора В.В. Голубева сыграли зарубежные поездки. Первой из них была в Германию в качестве репетитора с семьей своего подопечного, вторая — в Париж зимой 1905–1906 годов, где он учился в Сорбонне. В это время Московский университет, как и Санкт-Петербургский, был закрыт по политическим соображениям до осени 1906.

Особую роль в жизни В.В. Голубева сыграла третья зарубежная поездка 1913–1914 годов. Это была командировка от Министерства Народного Просвещения для усовершенствования знаний после сдачи магистерских экзаменов. Он провел эту командировку в Гёттингене (1 год) и Париже (4 месяца), где участвовал в семинарах и слушал лекции Гильберта, Ландау, Каратеодори, Пуанкаре, Пенлеве, Лебега, Дарбу, Гурса, Адамара, Бореля, Вейля, Куранта, Пикара.

По возвращении в Россию, в сентябре 1914 года, В.В. Голубев был избран преподавателем Московского института путей сообщения, через год начал работать по совместительству в Московском Высшем техническом училище, кроме того, преподавал на Московских коммерческих курсах.

Весной 1917 года Владимир Васильевич защитил в Московском университете диссертацию на тему «Однозначные аналитические функции с совершенным множеством точек» и получил степень магистра чистой математики.

В.В. Голубев пишет: «Очень сильное воздействие оказал на меня мой ближайший университетский учитель, незабвенный и дорогой Дмитрий Федорович Егоров. Дмитрий Федорович Егоров был математиком исключительно широких научных интересов и, можно утверждать, энциклопедических знаний в современной ему математике. И это оказывало исключительное влияние на научную молодежь, по крайней мере, двух первых десятилетий XX века в Московском университете. Благодаря ему стало чем-то само собой разумеющимся обстоятельное знакомство с мировой научной литературой, понимание совершенной необходимости, если понадобится, читать научную литературу на любом языке, а если возможно, то и послушать крупнейших европейских ученых (Владимир Васильевич еще с гимназических времен в совершенстве владел французским и немецким языками). Я сейчас могу только пожалеть, что влияние на меня такого математика, как Дмитрий Федорович, не было таким сильным, как на некоторых моих более счастливых в этом отношении товарищей. И я могу с некоторой горечью сказать, что я никогда не принадлежал к его любимым ученикам. Впрочем, я никогда не

был ничьим "любимым учеником". Очевидно, было что-то такое в моем характере, что ставило меня в положение того Кота в известном рассказе Киплинга, который всегда шел "сам по себе" ».

В июле 1917 года в Саратовском университете открывается физико-математический факультет. Уже в первый год его существования было принято более 300 студентов. Испытывалась острая потребность в квалифицированных преподавательских кадрах. Следует сказать, что новому факультету повезло: сразу же преподавание математики и механики взяли в свои руки молодые талантливые ученые. Надо назвать имена тех, кто стоял у истоков преподавания этих наук в нашем университете, кто начинал научные исследования по математике и механике. Это были Николай Николаевич Андреев, Иван Иванович Привалов, Владимир Васильевич Голубев, Леонид Самуилович Лейбензон, Георгий Николаевич Свешников. Профессора И.И. Привалов и В.В. Голубев с 1918 года читали курсы чистой и прикладной математики, а профессора Л.С. Лейбензон и Н.Н. Андреев первыми начали преподавать механику. Впоследствии они были избраны академиками АН СССР, а И.И. Привалов и В.В. Голубев стали ее членами-корреспондентами.

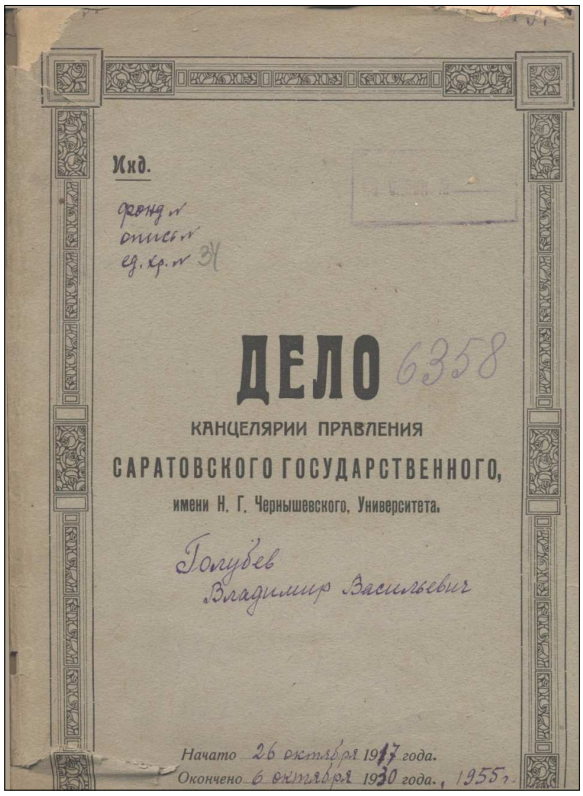
Каким образом В.В. Голубев оказался в Саратовском университете? В личном деле В.В. Голубева хранится письмо профессора Дмитрия Федоровича Егорова первому декану физико-математического факультета профессору Владимиру Дмитриевичу Зёрнову, работавшему в Саратовском университете с момента основания летом 1909. «Многоуважаемый Владимир Дмитриевич, в ответ на ваше письмо относительно возможных кандидатов на кафедру чистой математики в Саратовском университете могу указать окончательно на приват-доцента Московского университета, магистра чистой математики Владимира Васильевича Голубева, которого я знаю как своего ученика и ценю как способного математика, отличающегося притом своей работоспособностью. В.В. Голубев специализировался преимущественно по теории аналитических функций, в области которой и работает, но при этом изыскания, касающиеся тонких вопросов, выдвигаемых в настоящее время, всецело базируются на результатах современной теории множеств.

Насколько я знаю В.В Голубева, я ожидаю, что он окажется хорошим преподавателем, и потому спокойно рекомендую его как подходящего, по моему мнению, кандидата на кафедру математики.

Искренне уважающий Д.Егоров, ординарный профессор Московского университета. При сем прилагаю краткие сведения о работах В.В. Голубева и curriculum vitae.»

Осенью 1917 года В.В. Голубев подал документы и был избран профессором и заведующим кафедрой чистой математики Саратовского университета. В январе 1918 года, переехав в Саратов, он вступил в должность и начал читать курс лекций студентам физмата.

Владимиру Васильевичу нелегко далось решение о переезде в провинциальный город на Волге. Профессору Голубеву пришлось трудиться в условиях, далеких от желаемых. К материальным трудностям добавлялись организационные непродуманные новшества. Тем не менее после ухода Зёрнова в ректорат Владимир Васильевич возглавляет физико-математический факультет, а с марта 1921 года проф. Голубев почти на два года возглавил весь Саратовский университет.



Личное дело В.В. Голубева

В личном деле В.В. Голубева документов о назначении его на пост ректора не сохранилось, можно лишь предположить, что заступал он на высшую университетскую должность срочно и неожиданно для себя, поскольку связано это было с заключением под стражу В.Д. Зёрнова. Время ректорства

Голубева (март 1921 – 11 января 1923 г.) — тяжелейший период в истории университета, отражавший ситуацию в целом по России. Речь шла о физическом выживании преподавателей и студентов, ибо такого голода, какой охватил Поволжье в 1921 году, не знали местные жители ни до, ни после.

В 1921–1922 годах, в период ректорства Голубева, в Саратовском университете функционировали медицинский, физико-математический, историко-филологический, агрономический, гидротехнический факультеты, факультет путей сообщения, рабочий факультет имени Ленина и факультет общественных наук. В 1922 году Саратовскому университету было присвоено имя Н.Г. Чернышевского.

1922 год был в известном смысле переломным в истории университета. Появились признаки улучшения материального положения, схлынула волна организационных перемен, на ближайшие 8 лет установилась относительная стабильность в учебной и научной деятельности университета.

В описываемые времена в области образования широко проводились эксперименты: резко уменьшались количество лекционных часов, вводился бригадный метод сдачи экзаменов. Все это было явно не по душе Владимиру Васильевичу, профессору с ярко выраженным научным дарованием. Позже Голубев писал: «Я думаю, кто слушал лекции Млодзеевского, тот никогда не заменит в преподавании музыку живого человеческого слова бездушным либретто и его не будут искушать никакие лабораторно-бригадные методы, дальтон-планы и другие наивно невежественные педагогические измышления». Думается, Владимир Васильевич оставил пост ректора без сожаления, передав его в январе 1923 года профессору медику С.Р. Миротворцеву.

Жил Владимир Васильевич в Саратове на Малой Сергиевской улице (ныне Мичурина), д. 100, кв. 4. Дом не сохранился. Жену Владимира Васильевича звали Наталья Сергеевна, у них было двое детей — сын Николай (1909 г. рожд.) и дочь Ольга (1915 г. рожд.).

После ректорства Владимир Васильевич преподавал в университете математику на педагогическом факультете, читал многочисленные специальные курсы из области теории функций комплексного переменного, активно занимался научной работой, опубликовал в ряде выпусков «Ученых записок» большое исследование по теории особых точек аналитических функций. В 1922 году он завершил докторскую диссертацию (к тому времени они были отменены), которую вспомнили в 1934 году, когда Владимиру Васильевичу присудили ученую степень доктора без защиты диссертации.

Владимир Васильевич пропагандировал свои методические взгляды там, где это было кстати, даже в частных разговорах. В беседе с одним из молодых профессоров он сказал: «Вы знаете, что смысл лекций состоит не в том, чтобы рассказать в них всё, что мы знаем о предмете, а в том, чтобы ввести слушателей в мир новых идей, заинтересовать их и закрепить этот интерес. Для этой цели следует изложить сравнительно немногое так, чтобы этот материал улегся в голове студента и помогал ему без труда двигаться на основе уже усвоенного» (из воспоминаний Б.В. Гнеденко).

А вот фрагмент воспоминаний о В.В. Голубеве профессора А.А. Космодемьянского: «. . . Для лекции нужно критически отобрать только самое лучшее. Ограничивайте себя в материале. Ведь Вы не печатаете в журналах всё, о чем думаете? Правда?» Примеров таких кулуарных разговоров, пропагандирующих квалифицированный метод чтения лекций, описанных в воспоминаниях коллег В.В. Голубева, множество.

Сохранилась интересная рукопись В.В. Голубева — «Индивидуальный план, организация и методы подготовки научно-педагогических кадров через аспирантуру». В заметке вскрываются недостатки подготовки аспирантов к будущей научной и педагогической работе. Вот один из фрагментов этой методической статьи: «Основная цель, которую мы должны преследовать в подготовке аспиранта, это — добиться такого положения, при котором для него научная работа станет основным его делом, основным содержанием его жизни. Если аспирант смотрит на научную работу так: отсидел 6 или 8 часов, а потом все научные интересы и вопросы снял с себя и повесил на гвоздь, как рабочий халат, до следующего посещения института, то из него никакого ученого не выйдет. . . Для ученого его научная работа — это, как зубная боль, — научная мысль непрерывно сидит где-то в голове. От нее и рад бы другой раз избавиться, забыть её, но не можешь, потому что она о себе непрерывно напоминает. Если руководителю удалось добиться того, что мысль о научном вопросе стала для аспиранта неотвязною мыслью, от которой он не может отделаться, пока не выяснит вопрос до конца — руководитель достиг цели: из его аспиранта выйдет научный работник. Он будет работать в лаборатории или за письменным столом, или пойдет со знакомою барышнею в театр — все равно где-то в подсознании у

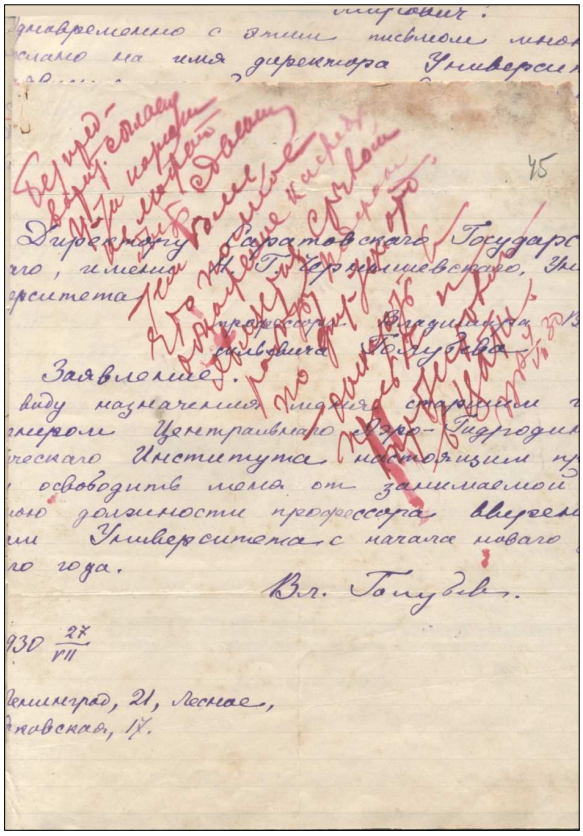
него неотступно будет сидеть мысль о научном вопросе. Это значит, что он действительно вошел во вкус научного исследования».

Каждое лето В.В. Голубев выезжал в научную командировку в Москву и Ленинград, где оставался и на время отпуска, возвращаясь в Саратов к началу учебного года.

В середине 20-х годов в Саратове по существу не было библиотеки, пригодной для занятий. Владимир Васильевич занялся изучением оттисков работ по теории крыла Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина и совершенно неожиданно для себя обнаружил, что в этих работах содержится приложение теории функций комплексного переменного к изучению явлений природы и техники (его мечта).

В.В. Голубев в Саратове завершил фундаментальные труды в области аэродинамики, которые в 1927 и 1931 гг. были опубликованы в трудах ЦАГИ. Это монографии «Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке» и «Теория крыла аэроплана конечного размаха».

Отъезду В.В. Голубева из Саратова предшествовали следующие обстоятельства. Новое руководство университета во главе с ректором С.З. Каценбогеном «проявило бдительность» и назначило на 14 марта 1930 года смотр кафедры математики, предписав заведующему кафедрой проф. Голубеву не познее 12 марта предоставить письменный доклад о состоянии, работе кафедры, о своей научно-педагогической, общественной, политической деятельности и автобиографию. Очевидно, по каким-то обстоятельствам администрацию университета не устроили многочисленные автобиографии, хранящиеся в личном деле. Этим же летом, находясь после командировки в отпуске в Ленинграде, проф. Голубев прислал в адрес ректора университета заявление с просьбой об освобождении от занимаемой должности с нового учебного года ввиду назначения старшим инженером ЦАГИ.



Заявление В.В. Голубева об увольнении ввиду назначения на должность старшего инженера ЦАГИ

Библиографический список

1. История Саратовского университета 1909–2009: в 2 т. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. – Т. 1.
2. Саратовский университет 1909–1959. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1959.
3. *Хромов, А.П.* Владимир Васильевич Голубев / А.П. Хромов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. – 2009. – Т. 9. – Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 4, ч. 1. – С. 88–89.
4. Владимир Васильевич Голубев (к 100-летию со дня рождения): сб. статей / сост. И.А. Тюлина. – М.: Знание, 1984. – 64 с. (Новое в жизни, науке, технике. Сер. Математика, кибернетика, № 10).
5. *Семёнов, В.Н.* Ректоры Саратовского университета. Факты жизни и деятельности / В.Н. Семёнов. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999.
6. *Аврус, А.И.* История российских университетов: курс лекций / А.И. Аврус. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005.

А.М. Захаров

ПРИЛОЖЕНИЯ

PERSONALIA

АВГУСТ ПЕТРОВИЧ ХРОМОВ (к 75-летию)

17 июня 2010 года исполнилось 75 лет доктору физико-математических наук, профессору Августу Петровичу Хромову. Он один из тех, кто многие годы определяет лицо университета, сохраняет, приумножает и передает знания и традиции математики.

А.П. Хромов родился в Тульской области в семье рабочего. В 1953 году после окончания средней школы города Петровска Саратовской области он поступил в Саратовский государственный университет на механико-математический факультет, который окончил с отличием в 1958 году.

С 1958 по 1961 год Август Петрович — аспирант СГУ (научный руководитель Н.П. Купцов), а с 1961 по 1963 год — ассистент СГУ. В 1963 году в качестве научного сотрудника он перешел на работу в Свердловское отделение Математического института АН СССР, а с 1965 по 1976 год являлся доцентом СГУ. С 1976 года, со дня основания в СГУ кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Август Петрович работает профессором и заведующим этой кафедрой.

Основные научные интересы и достижения А.П. Хромова относятся к спектральной теории операторов. В его исследованиях спектральная теория несамосопряженных дифференциальных и интегральных операторов получила дальнейшее развитие; этим он приобрел широкую известность в данной области в России и за рубежом. Научное творчество А.П. Хромова очень обширно. Период его деятельности до 2005 года в достаточной мере отражен в статьях, посвященных 60- и 70-летним юбилеям (Успехи математических наук, 1995. Т. 50, вып. 2; Интегральные преобразования и специальные функции, 2006. Т. 6, № 1; Известия Саратовского университета, сер. Математика. Механика. Информатика, 2007. Т. 7, вып. 2; Саратовский университет, 2005; Курс. Русский проект, 2008, № 6 (9); Фильм о А.П. Хромове в серии, посвященной 100-летию СГУ).

Последние пять лет также были очень плодотворными для Августа Петровича: он занимался изучением спектральных свойств новых классов дифференциальных и интегральных операторов — операторов с инволюцией. Им был разработан новый перспективный метод исследования и получен ряд глубоких результатов для операторов такого рода.

В целом научные исследования А.П. Хромова можно представить в следующих циклах работ:

– спектральная теория обыкновенных дифференциальных операторов на конечном интервале (1962 — 2000);

– вопросы сходимости рядов Дирихле (1969 — 1991);

– конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов (1971 — 2000);

– теоремы равносходимости спектральных разложений интегральных операторов (1972 — 2000);
– исследования по теории оптимального управления (1984 — 1995);
– интегральные операторы с ядрами, имеющими особенности на диагоналях (1995 — 2010);
– дифференциальные и интегральные операторы с инволюцией (1998 — 2010).

По результатам этих исследований им было опубликовано более 240 научных работ.

С уверенностью можно сказать, что А.П.Хромов внес большой вклад в отечественную математику. Профессионализм, широта жизненных интересов в сочетании с доброжелательностью, отзывчивостью и замечательным чувством юмора всегда привлекают к нему коллег и молодежь. Трудно переоценить атмосферу живого творческого общения, царящую на семинаре по спектральной теории, этой кузнице математических наук, которой руководит Август Петрович. Под его руководством защищено 29 кандидатских диссертаций, двое его учеников стали докторами наук.

Велик вклад А.П. Хромова в дело организации математической жизни в Саратове и России. Механико-математический факультет по праву гордится Саратовскими зимними школами по теории функций, одним из основных организаторов которых является Август Петрович. Школы действуют с 1982 года и каждые два года собирают математиков, от академиков до аспирантов и студентов, со всей страны и ближнего зарубежья. Август Петрович — неизменный заместитель председателя оргкомитета школы начиная с 1994 года. Именно эти встречи служат отличной школой становления талантливой научной молодежи.

Август Петрович — президент Саратовского математического общества с момента его создания; более 15 лет он возглавлял диссертационный совет по защите кандидатских диссертаций, непосредственно через его руки прошло много докторских и кандидатских диссертаций.

А.П. Хромов — признанный лидер научной школы, направления которой — спектральная теория дифференциальных и интегральных операторов, аппроксимация и оптимизация в задачах действительного и комплексного анализа — объединяют сотрудников пяти кафедр механико-математического факультета. Традиции школы своими началами восходят к одному из основателей российской теории функций — академику Н.Н. Лузину, и через его ученика члена-корреспондента АН СССР Д.Е. Меньшова и профессора Н.П. Купцова — к А.П. Хромову. Эта школа признана одной из ведущих научных школ России, и ей четыре раза присуждался грант Президента РФ.

Август Петрович имеет звание заслуженного деятеля науки РФ, является академиком МАНВШ, РАЕН, Почетным профессором СГУ; он награжден медалью ордена «За заслуги перед Отечеством» II степени, ему трижды присуждалась государственная стипендия, выделяемая президентом РАН для выдающихся ученых. Но при всех этих знаках отличия А.П. Хромов, как и многие действительно крупные личности, свободен от комплекса величия. Преданность науке, высокая требовательность к себе, щедрость в передаче знаний ученикам в сочетании с доброжелательностью и остроумием создали ему заслуженную репутацию замечательного человека, талантливого педагога и прекрасного математика. Вот лишь одно из его напутствий молодым: «Успехов в любом деле можно достичь лишь тогда, когда есть любовь к этому делу. Нет любви — ничего не получится. А любовь — это значит, что на предмет любви тратятся огромные усилия, не считаясь с затратами. Самое главное — при любви — побеждаем!» Как близко это к евангельскому: «Иго Мое благо, и бремя Мое легко».

Август Петрович — счастливый человек, поскольку занят любимым делом — математикой.

В свои 75 лет Август Петрович проявляет неиссякаемую творческую энергию, делится новыми идеями с учениками и заряжает их оптимизмом.

Сердечно поздравляем юбиляра, желаем ему доброго здоровья и дальнейших успехов в его замечательной многогранной деятельности.

Д.В. Прохоров, А.М. Захаров, С.И. Дудов