МАТЕМАТИКА

УДК 517.984

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

Н.П. Бондаренко

Саратовский государственный университет,
кафедра математической физики и вычислительной математики
E-mail: BondarenkoNP@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для матричного уравнения Штурма – Лиувилля на конечном интервале. Приведены свойства спектральных характеристик, получена конструктивная процедура решения обратной задачи и необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

Ключевые слова: матричные операторы Штурма – Лиувилля, обратные спектральные задачи, метод спектральных отображений.

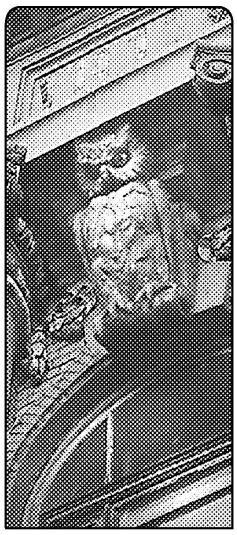
The Inverse Problem of Spectral Analysis for the Matrix Sturm – Liouville Equation

N.P. Bondarenko

Saratov State University,
Chair of Mathematical Physics and Calculus Mathematics
E-mail: BondarenkoNP@info.sgu.ru

The inverse spectral problem is investigated for the matrix Sturm - Liouville equation on a finite interval. The article provides properties of spectral characteristics, a constructive procedure for the solution of the inverse problem along with necessary and sufficient conditions for its solvability has been obtained.

Key words: matrix Sturm – Liouville operators, inverse spectral problems, method of spectral mappings.



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ВВЕДЕНИЕ

В статье исследуется обратная спектральная задача для матричного уравнения Штурма – Лиувилля. Обратные задачи состоят в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Скалярный случай достаточно хорошо изучен, основные результаты представлены в работе [1].

Матричный случай, представляющий собой обобщение скалярного, является существенно более трудным для исследования. В работах [2–4] представлены различные постановки обратных спектральных задач в матричном случае и доказаны соответствующие теоремы единственности. В статье [5] приведена конструктивная процедура восстановления, но только для частного случая простого спектра. В работе [6] были получены необходимые и достаточные условия для случая с существенным ограничением, заключающимся в асимптотической простоте спектра. Кроме того, метод, использованный в [6], не дает конструктивной процедуры решения.

В данной работе изучается самосопряженный матричный оператор Штурма – Лиувилля в общем случае, без априорных ограничений на спектр. Исследуются свойства характеристик, получены необходимые и достаточные условия разрешимости спектральных об-

© Н.П. Бондаренко, 2010

ратной задачи. Приведена конструктивная процедура решения, представляющая собой модификацию алгоритма, описанного в [5].

Основным методом исследования является развитие идей метода спектральных отображений [1].

Рассмотрим краевую задачу $L(Q(x), h, H)$ для матричного уравнения Штурма – Лиувилля:

$$lY := -Y'' + Q(x)Y = \lambda Y, \qquad x \in (0, \pi), \tag{1}$$
$$U(Y) := Y'(0) - hY(0) = 0, \qquad V(Y) := Y'(\pi) + HY(\pi) = 0.$$

Здесь $Y(x) = [y_k(x)]_{k=\overline{1,m}}$ — вектор-столбец, λ — спектральный параметр и $Q(x) = [Q_{jk}(x)]_{j,k=\overline{1,m}}$, причем $Q_{jk}(x) \in L_2(0, \pi)$ — комплекснозначные функции. Матрицу $Q(x)$ в дальнейшем будем называть *потенциалом*. Краевые условия задаются матрицами $h = [h_{jk}]_{j,k=\overline{1,m}}$, $H = [H_{jk}]_{j,k=\overline{1,m}}$, где h_{jk} и H_{jk} — комплексные числа. В данной работе будем рассматривать самосопряженный случай, когда $Q = Q^*$, $h = h^*$, $H = H^*$.

Пусть $\varphi(x, \lambda) = [\varphi_{jk}(x, \lambda)]_{j,k=\overline{1,m}}$ является решением уравнения (1) при начальных условиях $\varphi(0, \lambda) = I_m$, $\varphi'(0, \lambda) = h$, где I_m — единичная $m \times m$ матрица. Функция $\Delta(\lambda) := \det[V(\varphi)]$ называется *характеристической функцией* краевой задачи L. Функция $\Delta(\lambda)$ является целой по λ и имеет не более чем счетное множество нулей. Нули характеристической функции совпадают с собственными значениями краевой задачи L с учетом кратностей и являются вещественными.

Пусть $\omega = \omega^*$ — некоторая матрица размера $m \times m$. Будем говорить, что задача $L(Q(x), h, H)$ принадлежит классу $A(\omega)$, если она имеет потенциал из $L_2(0, \pi)$ и $h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi Q(x)\,dx = \omega$. Без ограничения общности можно считать, что $L \in A(\omega)$, $\omega \in D = \{\omega : \omega = \mathrm{diag}\{\omega_1, \ldots, \omega_m\}, \omega_1 \le \cdots \le \omega_m\}$. Выполнения этого условия можно добиться применением к задаче L унитарного преобразования.

Для формулировки основной теоремы нам потребуются следующие две леммы, которые будут доказаны в разд. 1.

Лемма 1. *Пусть $L \in A(\omega)$, $\omega \in D$. Краевая задача L имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_{nq}\}_{n\ge 0, q=\overline{1,m}}$. При этом*

$$\rho_{nq} = \sqrt{\lambda_{nq}} = n + \frac{\omega_q}{\pi n} + \frac{\varkappa_{nq}}{n}, \qquad \{\varkappa_{nq}\}_{n\ge 0} \in l_2, \qquad q = \overline{1, m}. \tag{2}$$

Пусть $\Phi(x, \lambda) = [\Phi_{jk}(x, \lambda)]_{j,k=\overline{1,m}}$ — решение уравнения (1) при условиях $U(\Phi) = I_m$, $V(\Phi) = 0_m$ (0_m — нулевая $m \times m$ матрица). Положим $M(\lambda) := \Phi(0, \lambda)$. Матрица $M(\lambda) = [M_{jk}(\lambda)]_{j,k=\overline{1,m}}$ называется *матрицей Вейля* задачи L. Матрица-функция $M(\lambda)$ мероморфна по λ и имеет простые полюса в точках $\{\lambda_{nq}\}$ (см. разд. 1).

Положим $\alpha_{nq} := \mathrm{Res}_{\lambda=\lambda_{nq}} M(\lambda)$. Величины $\Lambda := \{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n\ge 0,\, q=\overline{1,m}}$ будем называть *спектральными данными* задачи L.

Пусть $\{\lambda_{n_k q_k}\}_{k\ge 0}$ — все различные собственные значения из набора $\{\lambda_{nq}\}_{n\ge 0, q=\overline{1,m}}$. Обозначим $\alpha'_{n_k q_k} := \alpha_{n_k q_k}$, $k \ge 0$, $\alpha'_{nq} = 0_m$, $(n, q) \notin \{(n_k, q_k)\}_{k\ge 0}$, $1 = m_1 < \ldots < m_{p+1} = m + 1$, $\omega_{m_s} = \ldots = \omega_{m_{s+1}-1} =: \omega^{(s)}$, $s = \overline{1, p}$ (p — количество различных чисел среди $\{\omega_q\}_{q=\overline{1,m}}$). Пусть $\alpha_n^{(s)} = \sum\limits_{q=m_s}^{m_{s+1}-1} \alpha'_{nq}$, $s = \overline{1, p}$.

Лемма 2. *Пусть $L \in A(\omega)$, $\omega \in D$. Тогда справедливо соотношение*

$$\alpha_n^{(s)} = \frac{2}{\pi} I^{(s)} + \frac{\varkappa_n^{(s)}}{n}, \qquad \{\varkappa_n^{(s)}\}_{n\ge 0} \in l_2, \qquad s = \overline{1, p}, \tag{3}$$

где

$$I^{(s)} = [I_{jk}^{(s)}]_{j,k=\overline{1,m}}, \qquad I_{jk}^{(s)} = \begin{cases} 1, & m_s \le j = k \le m_{s+1} - 1, \\ 0, & \textit{иначе}. \end{cases}$$

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 1. *По заданным спектральным данным Λ построить Q, h и H.*

Будем говорить, что величины $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n\ge 0, q=\overline{1,m}} \in \mathrm{Sp}$, если $\lambda_{nq} = \lambda_{kl}$ всегда соответствуют $\alpha_{nq} = \alpha_{kl}$.

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть $\omega \in D$. Для того чтобы величины $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n\geq 0, q=\overline{1,m}} \in \mathrm{Sp}$ были спектральными данными краевой задачи $L \in A(\omega)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) верны асимптотические формулы (2) *и* (3)*;*

2) все λ_{nq} вещественные, $\alpha_{nq} = (\alpha_{nq})^*$, $\alpha_{nq} \geq 0$ при всех $n \geq 0$, $q = \overline{1,m}$ и ранги матриц α_{nq} равны кратностям λ_{nq};

3) для любого вектора-строки $\gamma(\lambda)$, который является целой функцией и имеет асимптотику $\gamma(\lambda) = O(\exp(|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}|\pi))$ при $|\lambda| \to \infty$, из выполнения условия $\gamma(\lambda_{nq})\alpha_{nq} = 0$ при всех $n \geq 0$, $q = \overline{1,m}$ следует, что $\gamma(\lambda) \equiv 0$.

Необходимость условий теоремы 1 будет доказана в разд. 1, достаточность — в разд. 3. В разд. 2 приведена конструктивная процедура решения обратной задачи 1.

1. НЕОБХОДИМОСТЬ

Используя определение $M(\lambda)$, нетрудно показать, что

$$M(\lambda) = -(V(\varphi))^{-1}V(S), \tag{4}$$

где $S(x,\lambda)$ — матричное решение уравнения (1) при начальных условиях $S(0,\lambda) = 0_m$, $S'(0,\lambda) = I_m$.

Лемма 3. *Все полюса матрицы Вейля $M(\lambda)$ простые и ранги вычетов совпадают с кратностями соответствующих собственных значений задачи L.*

Доказательство. Пусть λ_0 — собственное значение задачи L кратности k, Y_1, Y_2, ..., Y_k — линейно независимые собственные вектор-функции, соответствующие λ_0. Нетрудно видеть, что $Y_q(x) = \varphi(x,\lambda_0)C_q$, $q = \overline{1,k}$, где векторы C_q линейно независимы. Выберем векторы $C_{k+1}, \ldots, C_m$ так, чтобы матрица $C = [C_1, \ldots, C_m]$ была невырожденной, и рассмотрим функцию $Y(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda)C$. Очевидно, что $(V(\varphi))^{-1} = C(V(Y))^{-1}$. Представим $V(Y(x,\lambda))$ в виде

$$V(Y(x,\lambda)) = [(\lambda-\lambda_0)W_1(\lambda), \ldots, (\lambda-\lambda_0)W_k(\lambda), W_{k+1}(\lambda), \ldots, W_m(\lambda)],$$

где $W_q(\lambda) = \frac{V(Y_q(x,\lambda))}{\lambda-\lambda_0}$, $q = \overline{1,k}$, $W_q(\lambda) = V(Y_q(\lambda))$, $q = \overline{k+1,m}$.

Ясно, что $W_q(\lambda)$ — целые функции и $\det W(\lambda) = \det[W_1(\lambda), \ldots, W_m(\lambda)] \neq 0$ при λ из достаточно малой окрестности λ_0 (поскольку иначе кратность собственного значения λ_0 была бы больше k). Нетрудно видеть, что

$$\det V(Y(x,\lambda)) = (\lambda-\lambda_0)^k \det W(\lambda),$$
$$(V(Y(x,\lambda)))^{-1} = \left[\frac{X_1(\lambda)}{\lambda-\lambda_0}, \ldots, \frac{X_k(\lambda)}{\lambda-\lambda_0}, X_{k+1}(\lambda), \ldots, X_m(\lambda)\right]^t,$$

где $X_q(\lambda)$ аналитичны в некоторой окрестности λ_0 (t обозначает транспонирование). Используя (4), получаем

$$\alpha_0 = \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_0} M(\lambda) = -\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_0} (V(\varphi(x,\lambda)))^{-1}V(S(x,\lambda)) =$$
$$= -\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_0} C\left[\frac{X_1(\lambda)}{\lambda-\lambda_0}, \ldots, \frac{X_k(\lambda)}{\lambda-\lambda_0}, X_{k+1}(\lambda), \ldots, X_m(\lambda)\right]^t V(S(x,\lambda)) =$$
$$= -C\left[X_1(\lambda_0), \ldots, X_k(\lambda_0), 0, \ldots, 0\right]^t V(S(x,\lambda_0)) = -XV(S(x,\lambda_0)).$$

Отсюда видно, что полюса матрицы Вейля простые и $\operatorname{rank}\alpha_0 \leq k$. Докажем противоположное неравенство. Заметим, что

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_0} (V(\varphi(x,\lambda)))^{-1}V(\varphi(x,\lambda)) = 0_m = XV(\varphi(x,\lambda_0)).$$

Пусть $\psi(x,\lambda_0)$ — решение уравнения (1) при $\lambda = \lambda_0$, удовлетворяющее условию $V(\psi) = X^*$. Разложим $\psi(x,\lambda_0)$ по фундаментальной системе решений уравнения (1):

$$\psi(x,\lambda_0) = \varphi(x,\lambda_0)A + S(x,\lambda_0)B,$$
$$XX^* = XV(\psi(x,\lambda_0)) = XV(\varphi(x,\lambda_0))A + XV(S(x,\lambda_0))B = -\alpha_0 B.$$

С одной стороны, векторы $X_q(\lambda_0)$ линейно независимы (это следует из $\det W \neq 0$), и поэтому $\operatorname{rank} XX^* = k$. С другой стороны, $\operatorname{rank} \alpha_0 B \leq \operatorname{rank} \alpha_0$. Получаем $\operatorname{rank} \alpha_0 \geq k$, завершая тем самым доказательство леммы. □

Лемма 4. *Пусть λ_0, λ_1 — собственные значения задачи L, $\lambda_0 \neq \lambda_1$, и $\alpha_i = \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_i} M(\lambda)$, $i = 0, 1$. Тогда справедливы соотношения*

$$\alpha_0^* \int\limits_0^\pi \varphi^*(x,\lambda_0)\varphi(x,\lambda_0)\,dx\,\alpha_0 = \alpha_0^*, \qquad \alpha_0^* \int\limits_0^\pi \varphi^*(x,\lambda_0)\varphi(x,\lambda_1)\,dx\,\alpha_1 = 0_m.$$

Из первого соотношения, в частности, следует, что $\alpha_0 = \alpha_0^* \geq 0$.

Доказательство. Введем обозначения: $l^*Z := -Z'' + ZQ(x)$, $V^*(Z) := Z'(\pi) + Z(\pi)H$, $\langle Z, Y\rangle := Z'Y - ZY'$, где $Z = [Z_k]_{k=\overline{1,m}}^t$ — вектор-строка. Тогда $\langle Z, Y\rangle_{x=\pi} = V^*(Z)Y(\pi) - Z(\pi)V(Y)$. Кроме того, если $Y(x,\lambda)$ и $Z(x,\mu)$ удовлетворяют уравнениям $lY(x,\lambda) = \lambda Y(x,\lambda)$ и $l^*Z(x,\mu) = \mu Z(x,\mu)$ соответственно, то $\frac{d}{dx}\langle Z, Y\rangle = (\lambda - \mu)ZY$. В частности, если $\lambda = \mu$, то $\langle Z, Y\rangle$ не зависит от x.

Так как λ_0 — вещественное число, $\varphi^*(x,\lambda_0)$ удовлетворяет уравнению $l^*Z = \lambda_0 Z$. Следовательно,

$$\int_0^\pi \varphi^*(x,\lambda_0)\varphi(x,\lambda_0)\,dx = \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{\langle \varphi^*(x,\lambda_0), \varphi(x,\lambda)\rangle|_0^\pi}{\lambda - \lambda_0} =$$
$$= \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{V^*(\varphi^*(x,\lambda_0))\varphi(x,\lambda) - \varphi^*(x,\lambda_0)V(\varphi(x,\lambda))}{\lambda - \lambda_0}.$$

Из (4) и леммы 3 вытекает

$$V(\varphi(x,\lambda_0))\alpha_0 = -\lim_{\lambda\to\lambda_0} (\lambda - \lambda_0)V(\varphi(x,\lambda))(V(\varphi(x,\lambda)))^{-1}V(S(x,\lambda)) = 0_m.$$

Аналогично $\alpha_0^* V^*(\varphi^*(x,\lambda_0)) = 0_m$. Следовательно, вычисляем

$$\alpha_0^* \int\limits_0^\pi \varphi^*(x,\lambda_0)\varphi(x,\lambda_0)\,dx\,\alpha_0 = \alpha_0^*\varphi^*(\pi,\lambda_0) \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{V(\varphi(x,\lambda))}{\lambda - \lambda_0} \lim_{\lambda\to\lambda_0} (\lambda - \lambda_0)(V(\varphi(x,\lambda)))^{-1}V(S(x,\lambda)) =$$
$$= \alpha_0^*\varphi^*(\pi,\lambda_0)V(S(x,\lambda_0)) = -\alpha_0^*\langle \varphi^*(x,\lambda_0), S(x,\lambda_0)\rangle_{x=\pi} = -\alpha_0^*\langle \varphi^*(x,\lambda_0), S(x,\lambda_0)\rangle_{x=0} = \alpha_0^*.$$

Второе соотношение получаем аналогично. □

Доказательство леммы 1. Так же как и в скалярном случае (см. [1, с. 13]) можно получить асимптотику $\rho_{nq} = n + O(n^{-1})$, $n \to \infty$. Перейдем к уточнению этой оценки.

Обозначим $\rho := \sqrt{\lambda}$, $\operatorname{Re}\rho \geq 0$, $\tau := \operatorname{Im}\rho$. Нетрудно показать, что $V(\varphi) = -\rho\sin\rho\pi \cdot I_m + \omega\cos\rho\pi + \varkappa(\rho)$, где $\varkappa(\rho) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi Q(t)\cos\rho(\pi - 2t)\,dt + O\left(\frac{1}{\rho}\exp(|\tau|\pi)\right)$.

Введем линейные отображения $z_n(\rho)$, переводящие круги $\{\rho : |\rho - n| \leq C/n\}$, в которых при фиксированном достаточно большом C лежат ρ_{nq}, в круг $\{z : |z| \leq R\}$: $\rho = n + \frac{z_n(\rho)}{\pi n}$.

При $|z| \leq R$ имеем

$$V(\varphi) = (-1)^n(\omega - z_n(\rho)I_m + \varkappa_n(z_n(\rho))). \tag{5}$$

Используя представление для $\varkappa(\rho)$, получаем, что $\varkappa_n(z) = o(1)$, $n \to \infty$, причем сходимость равномерная по z в круге $\{z : |z| \leq R\}$. Кроме того, для любой последовательности $\{z_n^0\}_{n\geq 0} \subset \{z : |z| \leq R\}$ $\{\varkappa_n(z_n^0)\}_{n\geq 0} \in l_2$, причем $\sum\limits_{n\geq 0} |\varkappa_n(z_n^0)|^2 < L$, L — некоторая константа. Следовательно,

$$\Delta(\rho^2) = \pm f(z_n(\rho)) + g_n(z_n(\rho)),$$

где $f(z) = \det(\omega - zI_m)$, $g_n(z) = o(1)$, $n \to \infty$ (сходимость равномерная при $|z| \leq R$), выбор знака $\pm$ зависит только от n. Фиксируем $0 < \delta < 1/2 \min\limits_{q,l:\omega_q\neq\omega_l} |\omega_q - \omega_l|$ и введем в рассмотрение контуры $\gamma_q = \{z : |z - \omega_q| = \delta\}$. Очевидно, что при достаточно больших n верно неравенство $|f(z)| > |g_n(z)|$

на γ_q, и по теореме Руше аналитические функции $\Delta(\rho_n^2(z))$ и $f(z)$ имеют одинаковое количество нулей внутри γ_q (ρ_n — обратное отображение к z_n). Таким образом, имеем:

$$\rho_{nq} = \sqrt{\lambda_{nq}} = n + \frac{\omega_q}{\pi n} + \frac{\varkappa_{nq}}{n}, \qquad \varkappa_{nq} = o(1), \qquad n \to \infty, \qquad q = \overline{1,m}.$$

Подставим полученную формулу в (5):

$$V(\varphi) = (-1)^n(\omega - \omega_q I_m - \pi\varkappa_{nq} I_m + \varkappa_n(z_n(\rho_{nq}))).$$

Так как $\{\varkappa_n(z_n(\rho_{nq}))\} \in l_2$, отсюда нетрудно получить, что $\{\varkappa_{nq}\} \in l_2$. $\square$

Доказательство леммы 2. 1. Пусть $\tilde{M}(\lambda)$ — матрица Вейля задачи $\tilde{L}(\tilde{Q}, \tilde{h}, \tilde{H})$, такой что $\tilde{Q}(x) = \frac{2}{\pi}\omega$, $\tilde{h} = \tilde{H} = 0$. Тогда $\tilde{\alpha}^{(s)} = \frac{2}{\pi} I^{(s)}$, $s = \overline{1,p}$.

Введем контуры $\gamma_n^{(s)} = \{\lambda : |\lambda - (n^2 + \frac{2}{\pi}\omega^{(s)})| = R\}$, $R = \frac{1}{\pi} \min\limits_{q,l:\omega_q \neq \omega_l} |\omega_q - \omega_l|$ Учитывая формулу (2), по основной теореме о вычетах получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n^{(s)}} (M(\lambda) - \tilde{M}(\lambda))\, d\lambda = \sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1} \alpha'_{nq} - \sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1} \tilde{\alpha}'_{nq} = \alpha_n^{(s)} - \frac{2}{\pi} I^{(s)}, \qquad n \geq n^*, \qquad s = \overline{1,p}.$$

Нетрудно показать, что $M_{jk}(\lambda) = -\dfrac{\Delta_{jk}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$, где

$$\Delta_{jk}(\lambda) = \det[V(\varphi_1), \ldots, V(\varphi_{j-1}), V(S_k), V(\varphi_{j+1}), \ldots, V(\varphi_m)].$$

Используя это представление, находим:

$$M_{jk}(\lambda) - \tilde{M}_{jk}(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)\tilde{\Delta}_{jk}(\lambda) - \Delta_{jk}(\lambda)\tilde{\Delta}(\lambda)}{\Delta(\lambda)\tilde{\Delta}(\lambda)}, \qquad j,k = \overline{1,m}. \tag{6}$$

Воспользуемся отображениями z_n, введенными при доказательстве леммы 1: $\rho = n + \frac{z_n(\rho)}{\pi n}$. Если $\lambda \in \gamma_n^{(s)}$, то $0 < \delta_1 \leq |z_n(\rho) - \omega_q|$ для всех $q = \overline{1,m}$ и $|z_n(\rho) - \omega^{(s)}| \leq \delta_2$. Следовательно, верна оценка для $\Delta(\lambda)$, полученная при доказательстве леммы 1 (предел равномерный по λ): $\Delta(\lambda) = \pm f(z_n(\rho)) + o(1)$, $\lambda \in \gamma_n^{(s)}$, $n \to \infty$.

Аналогично можно оценить

$$\Delta_{jk}(\lambda) = \pm\frac{f(z_n(\rho))}{z_n(\rho) - \omega_j} + o(1) \qquad \text{при } j = k, \qquad \Delta_{jk}(\lambda) = o(1) \qquad \text{при } j \neq k,$$
$$\lambda \in \gamma_n^{(s)}, \qquad n \to \infty, \qquad j,k = \overline{1,m}.$$

Сходимость остаточных членов равномерна по λ, выбор знака $\pm$ зависит только от n. Аналогичные соотношения верны для $\tilde{\Delta}(\lambda)$ и $\tilde{\Delta}_{jk}(\lambda)$.

Подставляя полученные оценки в (6) и учитывая, что $C_1 \leq |f(z_n(\rho))| \leq C_2$ при $\lambda \in \gamma_n^{(s)}$, в итоге получаем:

$$M_{jk}(\lambda) - \tilde{M}_{jk}(\lambda) = o(1), \qquad j,k = \overline{1,m}, \qquad \lambda \in \gamma_n^{(s)},$$
$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n^{(s)}} (M(\lambda) - \tilde{M}(\lambda))\, d\lambda = o(1), \qquad \alpha_n^{(s)} = \frac{2}{\pi} I^{(s)} + \eta_n^{(s)}, \qquad \eta_n^{(s)} = o(1), \qquad n \to \infty.$$

2. Далее через $\{\varkappa_n\}$ будем обозначать различные последовательности из l_2. Используя асимптотику

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\rho x \cdot I_m + Q_1(x)\frac{\sin\rho x}{\rho} + \int\limits_0^x \frac{\sin\rho(x-2t)}{2\rho} Q(t)\, dt + O\left(\frac{\exp|\tau|x}{\rho}\right), \quad |\rho| \to \infty, \quad x \in [0,\pi],$$

где $Q_1(x) = h + \int\limits_0^x Q(t)\,dt$, нетрудно показать, что

$$\int\limits_0^\pi \varphi^*(x,\lambda_{nq})\varphi(x,\lambda_{nl})\,dx = \frac{\pi}{2}I_m + \frac{\varkappa_n}{n}, \qquad \lambda_{nq} - \lambda_{nl} = \frac{\varkappa_n}{n}.$$

Применяя лемму 4, получаем:

$$\alpha_{nq}\left(\frac{\pi}{2}I_m + \frac{\varkappa_n}{n}\right)\alpha_{nq} = \alpha_{nq}, \qquad n \geq 0, \qquad q = \overline{1,m}.$$

Ясно, что $\|\alpha_{nq}\| \leq C$, $n \geq 0$, $q = \overline{1,m}$ (здесь и далее $\|a\| = \max_{j,k}|a_{jk}|$). Следовательно, $\frac{\pi}{2}\alpha_{nq}^2 = \alpha_{nq} + \frac{\varkappa_n}{n}$. Аналогично выводим $\alpha_{nq}\alpha_{nl} = \frac{\varkappa_n}{n}$, $m_s \leq q,l \leq m_{s+1}-1$, $q \neq l$, $s = \overline{1,p}$. Таким образом,

$$\frac{\pi}{2}(\alpha_n^{(s)})^2 = \frac{\pi}{2}\left(\sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1}\alpha'_{nq}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1}(\alpha'_{nq})^2 + \frac{\varkappa_n}{n} = \sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1}\alpha'_{nq} + \frac{\varkappa_n}{n} = \alpha_n^{(s)} + \frac{\varkappa_n}{n}.$$

Подставим в полученное равенство результат пункта 1:

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{\pi}I^{(s)} + \eta_n^{(s)}\right)^2 = \frac{2}{\pi}I^{(s)} + \eta_n^{(s)} + \frac{\varkappa_n}{n}, \qquad (I_m - 2I^{(s)})\eta_n^{(s)} = \frac{\pi}{2}(\eta_n^{(s)})^2 + \frac{\varkappa_n}{n}.$$

Отсюда вытекает $\eta_n^{(s)} = \frac{\varkappa_n}{n}$, и доказательство леммы завершено. □

Доказательство теоремы 1 (необходимость). Выполнение первых двух условий доказано в леммах 1–4.

Пусть $\gamma(\lambda)$ — функция, описанная в условии 3. Вспомним, что $V(\varphi(x,\lambda_{nq}))\alpha_{nq} = 0_m$. Так как $\operatorname{rank} V(\varphi(x,\lambda_{nq})) + \operatorname{rank}\alpha_{nq} = m$ и $\gamma(\lambda_{nq})\alpha_{nq} = 0$, то $\gamma(\lambda_{nq}) = C_{nq}V(\varphi(x,\lambda_{nq}))$, т. е. строка $\gamma(\lambda_{nq})$ является линейной комбинацией строк матрицы $V(\varphi(x,\lambda_{nq})$ (C_{nq} — строка коэффициентов). Рассмотрим функцию $f(\lambda) = \gamma(\lambda)(V(\varphi(x,\lambda)))^{-1}$. $(V(\varphi(x,\lambda)))^{-1}$ имеет простые полюса в точках $\lambda = \lambda_{nq}$, поэтому вычисляем:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{nq}} f(\lambda) = \gamma(\lambda_{nq})\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{nq}}(V(\varphi(x,\lambda)))^{-1} = C_{nq}\lim_{\lambda\to\lambda_{nq}}V(\varphi(x,\lambda))\lim_{\lambda\to\lambda_{nq}}(\lambda-\lambda_{nq})(V(\varphi(x,\lambda)))^{-1} = 0.$$

Следовательно, $f(\lambda)$ — целая функция. Можно показать, что

$$\|(V(\varphi(x,\lambda)))^{-1}\| \leq C_\delta|\rho|^{-1}\exp(-|\tau|\pi), \qquad \rho \in G_\delta,$$

где $G_\delta = \{\rho : |\rho - k| \geq \delta, k = 0, \pm1, \pm2, \dots\}$, $\delta > 0$. Отсюда заключаем, что $\|f(\lambda)\| \leq \frac{C}{|\rho|}$ в G_δ. По принципу максимума модуля для аналитических функций полученная оценка верна во всей комплексной плоскости. По теореме Лиувилля, $f(\lambda) \equiv 0$ и, следовательно, $\gamma(\lambda) \equiv 0$. □

Заметим, что в скалярном случае выполнение условия 3 следует из первых двух условий теоремы 1 (см. [1, с. 72]). Однако в матричном случае это условие существенно и не может быть опущено, что показывает следующий пример.

Пример 1. Пусть $m = 2$, $\lambda_{01} \neq \lambda_{02}$, $\lambda_{n1} = \lambda_{n2} = n^2$, $n \geq 1$,

$$\alpha_{01} = \alpha_{02} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\pi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \alpha_{n1} = \alpha_{n2} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\pi} \end{bmatrix}, n \geq 1.$$

Приведенные величины $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}$ удовлетворяют условиям 1–2 теоремы 1. Покажем, что они не удовлетворяют условию 3 и, следовательно, не могут быть спектральными данными задачи L. Условия $\gamma(\lambda_{nq})\alpha_{nq} = 0$, $n \geq 0$, $q = \overline{1,m}$ в данном случае можно переписать в виде $\gamma(\lambda) = [\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda)]$, $\gamma_1(\lambda_{01}) = \gamma_1(\lambda_{02}) = \gamma_1(n^2) = 0$, $\gamma_2(n^2) = 0$, $n \geq 1$. Ясно, что если мы положим $\gamma_1(\lambda) = 0$, $\gamma_2(\lambda) = \frac{\sin\rho\pi}{\rho}$, то получим противоречие с условием 3.

2. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 1

Предположим, что нам известны спектральные данные Λ задачи $L \in A(\omega)$.

Обозначим

$$D(x,\lambda,\mu) = \frac{\langle \varphi^*(x,\bar{\mu}), \varphi(x,\lambda)\rangle}{\lambda-\mu} = \int\limits_0^x \varphi^*(t,\bar{\mu})\varphi(x,\lambda)\,dt. \tag{7}$$

Выберем модельную краевую задачу $\tilde{L} = L(\tilde{Q}(x), \tilde{h}, \tilde{H}) \in A(\omega)$ (например, можно взять $\tilde{Q}(x) = \frac{2}{\pi}\omega$, $\tilde{h} = 0_m$, $\tilde{H} = 0_m$). Условимся, что если некоторый символ γ обозначает объект, относящийся к задаче L, то символ $\tilde{\gamma}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\tilde{L}$. Положим

$$\xi_n = \sum_{q=1}^{m} |\rho_{nq} - \tilde{\rho}_{nq}| + \sum_{s=1}^{p} \sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1} |\rho_{nq} - \rho_{nm_s}| + \sum_{s=1}^{p} \sum_{q=m_s}^{m_{s+1}-1} |\tilde{\rho}_{nq} - \tilde{\rho}_{nm_s}| + \sum_{s=1}^{p} \|\alpha_n^{(s)} - \tilde{\alpha}_n^{(s)}\|.$$

Согласно леммам 1 и 2 $\Omega := \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} ((n+1)\xi_n)^2\right)^{1/2} < \infty$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi_n < \infty$.

Обозначим $\lambda_{nq0} = \lambda_{nq}$, $\lambda_{nq1} = \tilde{\lambda}_{nq}$, $\rho_{nq0} = \rho_{nq}$, $\rho_{nq1} = \tilde{\rho}_{nq}$, $\alpha'_{nq0} = \alpha'_{nq}$, $\alpha'_{nq1} = \tilde{\alpha}'_{nq}$, $\varphi_{nqi}(x) = \varphi(x,\lambda_{nqi})$, $\tilde{\varphi}_{nqi}(x) = \tilde{\varphi}(x,\lambda_{nqi})$, $F_{klj,nqi}(x) = \alpha'_{klj} D(x,\lambda_{nqi},\lambda_{klj})$, $\tilde{F}_{klj,nqi}(x) = \alpha'_{klj}\tilde{D}(x,\lambda_{nqi},\lambda_{klj})$, $n,k \geq 0$, $q,l = \overline{1,m}$, $i,j = 0,1$.

Стандартным образом (см. [1, с. 62]), используя лемму Шварца, можно доказать следующее утверждение.

Лемма 5. *При $x \in [0,\pi]$, $n,k \geq 0$, $r,s = \overline{1,m}$, $m_r < q < m_{r+1}$, $m_s < l < m_{s+1}$, $i,j = 0,1$ имеют место оценки:*

$$\|\varphi_{nqi}(x)\| \leq C, \qquad \|\varphi_{nm_r0}(x) - \varphi_{nm_r1}(x)\|, \|\varphi_{nqi}(x) - \varphi_{nm_ri}(x)\| \leq C\xi_n,$$

$$\|F_{klj,nqi}(x)\| \leq \frac{C}{|n-k|+1}, \qquad \left\|\sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} (F_{kl0,nm_r1}(x) - F_{kl1,nm_r1}(x))\right\| \leq \frac{C\xi_k}{|n-k|+1},$$

$$\|F_{klj,nqi}(x) - F_{klj,nm_ri}(x)\|, \|F_{klj,nm_r0}(x) - F_{klj,nm_r1}(x)\| \leq \frac{C\xi_n}{|n-k|+1},$$

$$\left\|\sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} (F_{kl0,nqi}(x) - F_{kl0,nm_ri}(x) - F_{kl1,nqi}(x) + F_{kl1,nm_ri}(x))\right\| \leq \frac{C\xi_n\xi_k}{|n-k|+1},$$

$$\left\|\sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} (F_{kl0,nm_r0}(x) - F_{kl0,nm_r1}(x) - F_{kl1,nm_r0}(x) + F_{kl1,nm_r1}(x))\right\| \leq \frac{C\xi_n\xi_k}{|n-k|+1}.$$

Аналогичные оценки верны также для $\tilde{\varphi}_{nqi}(x)$, $\tilde{F}_{klj,nqi}(x)$.

Лемма 6. *При $n \geq 0, q = \overline{1,m}$, $i = 0,1$ справедливо соотношение*

$$\tilde{\varphi}_{nqi}(x) = \varphi_{nqi}(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m} (\varphi_{kl0}(x)\tilde{F}_{kl0,nqi}(x) - \varphi_{kl1}(x)\tilde{F}_{kl1,nqi}(x)). \tag{8}$$

Доказательство леммы 6 см. в работе [5]. При любом фиксированном $x \in [0,\pi]$ соотношения (8) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно $\varphi_{nqi}(x)$, $n \geq 0$, $q = \overline{1,m}$, $i = 0,1$. Но ряд в (8) сходится лишь «со скобками». Поэтому неудобно использовать (8) в качестве основного уравнения обратной задачи. Ниже мы преобразуем (8) к линейному уравнению в соответствующем банаховом пространстве последовательностей.

Введем обозначение $\chi_n := \xi_n^{-1}$ при $\xi_n \neq 0$ и $\chi_n = 0$ при $\xi_n = 0$. Пусть V — множество индексов $u = (n,q,i)$, $n \geq 0$, $q = \overline{1,m}$, $i = 0,1$. При каждом фиксированном $x \in [0,\pi]$ определим вектор-строку

$\psi(x) = [\psi_u(x)]_{u\in V}$ и матрицу $R(x) = [R_{v,u}(x)]_{v,u\in V}$, $v = (k,l,j)$, $u = (n,q,i)$, по формулам

$$\psi_{nm_s0}(x) = \chi_n(\varphi_{nm_s0}(x) - \varphi_{nm_s1}(x)), \qquad \psi_{nm_s1}(x) = \varphi_{nm_s1}(x), \qquad \psi_{nqi}(x) = \chi_n(\varphi_{nqi}(x) - \varphi_{nm_si}(x)),$$

$$R_{km_s0,nm_r0}(x) = \chi_n\xi_k \sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} (F_{kl0,nm_r0}(x) - F_{kl0,nm_r1}(x)), \qquad R_{km_s0,nm_r1}(x) = \xi_k \sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} F_{kl0,nm_r1}(x),$$

$$R_{km_s0,nqi}(x) = \chi_n\xi_k \sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} (F_{kl0,nqi}(x) - F_{kl0,nm_ri}(x)),$$

$$R_{klj,nm_r0}(x) = (-1)^j\chi_n\xi_k(F_{klj,nm_r0}(x) - F_{klj,nm_r1}(x)), \qquad R_{klj,nm_r1}(x) = (-1)^j\xi_k F_{klj,m_r1}(x),$$

$$R_{klj,nqi}(x) = (-1)^j\chi_n\xi_k(F_{klj,nqi}(x) - F_{klj,nm_ri}(x)),$$

$$R_{km_s1,nm_r0}(x) = \chi_n \sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} (F_{kl0,nm_r0}(x) - F_{kl0,nm_r1}(x) - F_{kl1,nm_r0}(x) + F_{kl1,nm_r1}(x)),$$

$$R_{km_s1,nqi}(x) = \chi_n \sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} (F_{kl0,nqi}(x) - F_{kl0,nm_ri}(x) - F_{kl1,nqi}(x) + F_{kl1,nm_ri}(x)),$$

$$R_{km_s1,nm_r1}(x) = \sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1} (F_{kl0,nm_r1}(x) - F_{kl1,nm_r1}(x)),$$

$$n,k \geq 0, \qquad r,s = \overline{1,p}, \qquad m_s < l < m_{s+1}, \qquad m_r < q < m_{r+1}.$$

Аналогично определяются $\tilde{\psi}(x)$, $\tilde{R}(x)$ заменой в предыдущих определениях $\varphi_{nqi}(x)$ на $\tilde{\varphi}_{nqi}(x)$ и $F_{klj,nqi}(x)$ на $\tilde{F}_{klj,nqi}(x)$.

В силу леммы 5

$$\|\psi_{nqi}(x)\|,\ \|\tilde{\psi}_{nqi}(x)\| \leq C, \qquad \|R_{klj,nqi}(x)\|,\ \|\tilde{R}_{klj,nqi}(x)\| \leq \frac{C\xi_k}{|n-k|+1}, \tag{9}$$

где C не зависит от x, n, q, i, k, l, j

Рассмотрим банахово пространство B ограниченных последовательностей вида $a = [a_u]_{u\in V}$ с нормой $\|a\|_B = \sup\limits_{u\in V} \|a_u\|$, где a_u, $u \in V$ — $m \times m$ матрицы. Будем рассматривать $R(x)$ и $\tilde{R}(x)$ при фиксированном $x \in [0,\pi]$ как операторы, действующие из B в B. Из (9) вытекает, что при каждом $x \in [0,\pi]$ оператор $I + \tilde{R}(x)$ (I — единичный оператор) является линейным ограниченным оператором.

Можно показать (аналогично [3]), что при каждом фиксированном $x \in [0,\pi]$ вектор $\psi(x) \in B$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x)(I + \tilde{R}(x)) \tag{10}$$

в банаховом пространстве B, и это уравнение однозначно разрешимо. Уравнение (10) называется *основным уравнением* обратной задачи.

Используя решение основного уравнения, можно построить $\varphi_{nqi}(x)$ по формулам

$$\begin{gathered} \varphi_{nm_s1}(x) = \psi_{nm_s1}(x), \qquad \varphi_{nm_s0}(x) = \varphi_{nm_s1}(x) + \xi_n\psi_{nm_s0}(x), \\ \varphi_{nqi}(x) = \varphi_{nm_si}(x) + \xi_n\psi_{nqi}(x), \qquad n \geq 0, \qquad s = \overline{1,p}, \qquad m_s < q < m_{s+1}, \qquad i = 0,1, \end{gathered} \tag{11}$$

и затем восстановить потенциал $Q(x)$ и коэффициенты краевых условий h и H, используя соотношения

$$Q(x) = \tilde{Q}(x) + \varepsilon(x), \qquad h = \tilde{h} - \varepsilon_0(0), \qquad H = \tilde{H} + \varepsilon_0(\pi), \tag{12}$$

где $\varepsilon_0(x) = \sum\limits_{(k,l,j)\in V} (-1)^j\varphi_{klj}(x)\alpha'_{klj}\tilde{\varphi}^*_{klj}(x), \qquad \varepsilon(x) = -2\varepsilon'_0(x).$

Таким образом, мы получили следующий алгоритм решения обратной задачи 1.

Алгоритм 1. Пусть даны спектральные данные Λ краевой задачи $L \in A(\omega)$.

1. Выбираем $\tilde{L} \in A(\omega)$ и вычисляем $\tilde{\psi}(x)$ и $\tilde{R}(x)$.
2. Находим $\psi(x)$ из уравнения (10) и вычисляем $\varphi_{nqi}(x)$.
3. Строим $Q(x)$, h и H по формулам (12).

3. ДОСТАТОЧНОСТЬ

Пусть задан набор $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n\geq 0, q=\overline{1,m}} \in \mathrm{Sp}$, удовлетворяющий условиям теоремы 1. Выберем задачу $\tilde{L} \in A(\omega)$, построим $\tilde{\psi}(x)$, $\tilde{R}(x)$ и рассмотрим уравнение (10).

Лемма 7. *При каждом фиксированном $x \in [0,\pi]$ оператор $I + \tilde{R}(x)$, действующий из B в B, имеет ограниченный обратный, и основное уравнение (10) имеет единственное решение $\psi(x) \in B$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что однородное уравнение $\beta(x)(I + \tilde{R}(x)) = 0$, где $\beta(x) = [\beta_u(x)]_{u\in V}$, $\beta_u(x)$ — матрицы $m \times m$, имеет только нулевое решение.

Обозначим $\gamma_{nm_s1}(x) = \beta_{nm_s1}(x)$, $\gamma_{nm_s0}(x) = \gamma_{nm_s1}(x) + \xi_n\beta_{nm_s0}(x)$, $\gamma_{nqi}(x) = \gamma_{nm_si}(x) + \xi_n\beta_{nqi}(x)$, $n \geq 0$, $s = \overline{1,p}$, $m_s < q < m_{s+1}$, $i = 0, 1$. Тогда $\gamma_{nqi}(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_{nqi}(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}(\gamma_{kl0}(x)\tilde{F}_{kl0,nqi}(x) - \gamma_{kl1}(x)\tilde{F}_{kl1,nqi}(x)) = 0_m, \qquad n \geq 0, \tag{13}$$

и справедливы оценки

$$\|\gamma_{nqi}(x)\| \leq C(x), \qquad n \geq 0, \qquad q = \overline{1,m}, \tag{14}$$
$$\|\gamma_{nm_s0}(x) - \gamma_{nm_s1}(x)\|,\ \|\gamma_{nqi}(x) - \gamma_{nm_si}(x)\| \leq C(x)\xi_n, \qquad s = \overline{1,p}, \quad m_s < q < m_{s+1}.$$

Построим матрицы-функции $\gamma(x,\lambda)$, $\Gamma(x,\lambda)$ и $B(x,\lambda)$ по формулам

$$\gamma(x,\lambda) = -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}\Big[\gamma_{kl0}(x)\alpha'_{kl0}\frac{\langle\tilde{\varphi}^*_{kl0}(x), \tilde{\varphi}(x,\lambda)\rangle}{\lambda - \lambda_{kl0}} - \gamma_{kl1}(x)\alpha'_{kl1}\frac{\langle\tilde{\varphi}^*_{kl1}(x), \tilde{\varphi}(x,\lambda)\rangle}{\lambda - \lambda_{kl1}}\Big], \tag{15}$$

$$\Gamma(x,\lambda) = -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}\Big[\gamma_{kl0}(x)\alpha'_{kl0}\frac{\langle\tilde{\varphi}^*_{kl0}(x), \tilde{\Phi}(x,\lambda)\rangle}{\lambda - \lambda_{kl0}} - \gamma_{kl1}(x)\alpha'_{kl1}\frac{\langle\tilde{\varphi}^*_{kl1}(x), \tilde{\Phi}(x,\lambda)\rangle}{\lambda - \lambda_{kl1}}\Big], \tag{16}$$
$$B(x,\lambda) = \gamma^*(x,\bar{\lambda})\Gamma(x,\lambda).$$

В силу (7) функция $\gamma(x,\lambda)$ является целой по λ при каждом фиксированном x. Функции $\Gamma(x,\lambda)$ и $B(x,\lambda)$ являются мероморфными по λ с простыми полюсами λ_{nqi}. Согласно (13) имеем: $\gamma(x,\lambda_{nqi}) = \gamma_{nqi}(x)$. Вычислим вычеты функции $B(x,\lambda)$ относительно ее полюсов, для простоты предполагая, что $\{\lambda_{nq0}\} \cap \{\lambda_{nq1}\} = \varnothing$:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{nq0}} B(x,\lambda) = \gamma^*(x,\lambda_{nq0})\gamma(x,\lambda_{nq0})\alpha_{nq0}, \qquad \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{nq1}} B(x,\lambda) = 0_m.$$

Рассмотрим контурный интеграл $I_N(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_N} B(x,\lambda)\,d\lambda$, где $\Gamma_N = \{\lambda : |\lambda| = (N+1/2)^2\}$. Покажем, что при фиксированном $x \in [0,\pi]$ $\lim\limits_{N\to\infty} I_N(x) = 0_m$.

В самом деле, из (7) и (15) вытекает

$$-\gamma(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{p}\sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1}\Big[\gamma_{kl0}(x)\alpha'_{kl0}\tilde{D}(x,\lambda,\lambda_{kl0}) - \gamma_{kl1}(x)\alpha'_{kl1}\tilde{D}(x,\lambda,\lambda_{kl1})\Big] =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{p}\Big[(\gamma_{km_s0}(x) - \gamma_{km_s1}(x))\sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1}\alpha'_{kl0}\tilde{D}(x,\lambda,\lambda_{kl0}) + \gamma_{km_s1}(x)\alpha_k^{(s)}(\tilde{D}(x,\lambda,\lambda_{km_s0}) -$$
$$-\tilde{D}(x,\lambda,\lambda_{km_s1})) + \gamma_{km_s1}(x)(\alpha_k^{(s)} - \tilde{\alpha}_k^{(s)})\tilde{D}(x,\lambda,\lambda_{km_s1}) + \gamma_{km_s1}(x)\sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1}\sum_{j=0}^{1}\alpha'_{klj}\times$$
$$\times(\tilde{D}(x,\lambda,\lambda_{klj}) - \tilde{D}(x,\lambda,\lambda_{km_sj})) + \sum_{l=m_s}^{m_{s+1}-1}\sum_{j=0}^{1}(\gamma_{klj}(x) - \gamma_{km_sj}(x))\alpha'_{klj}\tilde{D}(x,\lambda,\lambda_{klj})\Big].$$

Используя оценки леммы 5, (3) и (14), получаем

$$\|\gamma(x,\lambda)\| \leq C(x)\exp(|\tau|x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi_k}{|\rho - k| + 1}, \qquad \operatorname{Re}\rho \geq 0.$$

Аналогично из (16) получаем при достаточно большом $\rho^* > 0$:

$$\|\Gamma(x,\lambda)\| \le \frac{C(x)}{|p|}\exp(-|\tau|x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi_k}{|\rho-k|+1}, \qquad \operatorname{Re}\rho \ge 0, \qquad |\rho| \ge \rho^*, \qquad \rho \in G_\delta.$$

Тогда

$$\|B(x,\lambda)\| \le \frac{C(x)}{|\rho|}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi_k}{|\rho-k|+1}\right)^2 \le \frac{C(x)}{|\rho|^3}, \qquad \lambda \in \Gamma_N.$$

Из полученной оценки вытекает $\lim\limits_{N\to\infty} I_N(x) = 0_m$.

С другой стороны, вычисляя интеграл $I_N(x)$ по основной теореме о вычетах, заключаем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{m}\gamma_{kl0}^*(x)\gamma_{kl0}(x)\alpha'_{kl0} = 0_m.$$

Так как $\alpha_{kl0} = \alpha_{kl0}^* \ge 0$, отсюда следует $\gamma_{kl0}^*(x)\gamma_{kl0}(x)\alpha_{kl0} = 0_m$ и $\gamma(x,\lambda_{kl0})\alpha_{kl0} = 0_m$, $k \ge 0$, $l = \overline{1,m}$.

Поскольку $\gamma(x,\lambda)$ — целая функция по λ, $\gamma(x,\lambda) = O(\exp(|\tau|x))$ при каждом фиксированном $x \in [0,\pi]$, согласно условию 3 теоремы 1, $\gamma(x,\lambda) \equiv 0_m$. Поэтому $\gamma_{nqi}(x) = 0_m$ при всех $n \ge 0$, $q = \overline{1,m}$, $i = 0,1$, т. е. однородное уравнение имеет только тривиальное решение. □

Далее приведем общую схему доказательства достаточности условий теоремы 1. Доказательства лемм 8–10 аналогичны описанным в [1, п. 1.4.2].

Пусть $\psi(x) = [\psi_u(x)]_{u\in V}$ — решение основного уравнения (10).

Лемма 8. *При $n \ge 0$, $q = \overline{1,m}$, $i = 0,1$, справедливы соотношения*

$$\psi_{nqi}(x) \in C^1[0,\pi], \qquad \|\psi_{nqi}^{(\nu)}\| \le C(n+1)^\nu, \qquad \nu = 0,1 \qquad x \in [0,\pi],$$
$$\|\psi_{nqi}(x) - \tilde\psi_{nqi}(x)\| \le C\Omega\eta_n, \qquad \|\psi'_{nqi}(x) - \tilde\psi'_{nqi}(x)\| \le C\Omega, \qquad x \in [0,\pi],$$

где

$$\eta_n := \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2(|n-k|+1)^2}\right).$$

Построим матрицы-функции $\varphi_{nqi}(x)$ по формулам (11). Тогда в силу леммы 8 справедливы соотношения

$$\begin{gathered}\|\varphi_{nqi}^{(\nu)}(x)\| \le C(n+1)^\nu, \qquad \nu = 0,1,\\ \|\varphi_{nqi}(x) - \tilde\varphi_{nqi}(x)\| \le C\Omega\eta_n, \qquad \|\varphi'_{nqi}(x) - \tilde\varphi'_{nqi}(x)\| \le C\Omega, \qquad q = \overline{1,m}\\ \|\varphi_{nm_s0}(x) - \varphi_{nm_s1}(x)\|,\ \|\varphi_{nqi}(x) - \varphi_{nm_si}(x)\| \le C\xi_n, \qquad s = \overline{1,p}, \quad m_s < q < m_{s+1}.\end{gathered} \tag{17}$$

Далее, построим функции $\varphi(x,\lambda)$ и $\Phi(x,\lambda)$ по формулам

$$\varphi(x,\lambda) = \tilde\varphi(x,\lambda) - \sum_{(k,l,j)\in V}(-1)^j\varphi_{klj}(x)\alpha'_{klj}\frac{\langle\tilde\varphi_{klj}^*(x),\tilde\varphi(x,\lambda)\rangle}{\lambda-\lambda_{klj}},$$

$$\Phi(x,\lambda) = \tilde\Phi(x,\lambda) - \sum_{(k,l,j)\in V}(-1)^j\varphi_{klj}(x)\alpha'_{klj}\frac{\langle\tilde\varphi_{klj}^*(x),\tilde\Phi(x,\lambda)\rangle}{\lambda-\lambda_{klj}},$$

а также краевую задачу $L(Q(x),h,H)$, используя соотношения (12). Ясно, что $\varphi(x,\lambda_{nqi}) = \varphi_{nqi}(x)$.

Применяя оценки (17), можно показать, что компоненты $\varepsilon_0(x)$ абсолютно непрерывны и компоненты $\varepsilon(x)$ принадлежат $L_2(0,\pi)$. Следовательно, верна

Лемма 9. $Q_{jk}(x) \in L_2(0,\pi)$, $j,k = \overline{1,m}$.

Лемма 10. *Справедливы соотношения*

$$l\varphi_{nqi}(x) = \lambda_{nqi}\varphi_{nqi}(x), \qquad l\varphi(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda), \qquad l\Phi(x,\lambda) = \lambda\Phi(x,\lambda),$$
$$\varphi(0,\lambda) = I_m, \qquad \varphi'(0,\lambda) = h, \qquad U(\Phi) = I_m, \qquad V(\Phi) = 0_m.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что набор $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}$ совпадает со спектральными данными построенной краевой задачи $L(Q, h, H)$. По лемме 10 матрица-функция $\Phi(x, \lambda)$ является решением Вейля задачи L. Получим выражение для матрицы Вейля:

$$M(\lambda) = \Phi(0, \lambda) = \tilde{M}(\lambda) - \sum_{(k,l,j)\in V} \varphi_{klj}(0)\alpha'_{klj} \frac{\langle \tilde{\varphi}^*_{klj}(x), \tilde{\Phi}(x, \lambda)\rangle_{x=0}}{\lambda - \lambda_{klj}} =$$

$$= \tilde{M}(\lambda) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m} \left(\frac{\alpha'_{kl0}}{\lambda - \lambda_{kl1}} - \frac{\alpha'_{kl1}}{\lambda - \lambda_{kl1}} \right).$$

Используя равенство (см. [2]) $\tilde{M}(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{m} \frac{\alpha'_{kl1}}{\lambda - \lambda_{kl1}}$, приходим к соотношению $M(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{m} \frac{\alpha'_{kl0}}{\lambda - \lambda_{kl0}}$. Отсюда вытекает, что $\{\lambda_{kl0}\}$ являются полюсами матрицы Вейля $M(\lambda)$, а $\{\alpha_{kl0}\}$ — вычетами относительно этих полюсов. Заметим, что кратности собственных значений также совпадают с количествами одинаковых чисел в наборе $\{\lambda_{kl0}\}$, потому что эти количества равны рангам вычетов $\{\alpha_{kl0}\}$. Теорема 1 полностью доказана. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (*проекты* 10-01-00099, 10-01-92001-ННС).

Библиографический список

1. *Юрко, В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач / В.А. Юрко. – М.: Физматлит, 2007. – 384 с.
2. *Yurko, V.A.* Inverse problems for matrix Sturm – Liouville operators / V.A. Yurko // Russian J. of Math. Physics. – 2006. – V. 13, № 1. – P. 111–118.
3. *Carlson, R.* An inverse problem for the matrix Schrödinger equation / R. Carlson // J. of Math. Analysis and Applications. – 2002. – № 267. – P. 564–575.
4. *Malamud, M.M.* Uniqueness of the matrix Sturm – Liouville equation given a part of the monodromy matrix and borg type results / M.M. Malamud // Sturm – Liouville theory. Past and present. – Birkhauser; Basel, 2005. – P. 237–270,
5. *Yurko, V.A.* Inverse problems for the matrix Sturm – Liouville equation on a finite interval / V.A. Yurko // Inverse Problems. – 2006. – № 22. – P. 1139–1149.
6. *Chelkak, D.* Weyl – Titchmarsh functions of vector-valued Sturm – Liouville operators on the unit interval / D. Chelkak, E. Korotyaev // J. of Functional Analysis. – 2009. – V. 257, iss. 5, 1 September. – P. 1546–1588.

УДК 519.853.3

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОБ АСФЕРИЧНОСТИ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА

С.И. Дудов, Е.А. Мещерякова

Саратовский государственный университет,
кафедра математической экономики
E-mail: DudovSI@info.sgu.ru

Рассматривается конечномерная задача о минимизации отношения радиуса описанного шара заданного выпуклого компакта (в произвольной норме) к радиусу вписанного шара за счет выбора единого центра этих шаров. Предлагается подход к построению численного метода её решения. На каждом шаге итерационного процесса требуется решать задачу выпуклого программирования, целевая функция которой является разностью радиуса описанного шара и, с некоторым варьируемым положительным множителем, радиуса вписанного шара. Показано, что эта вспомогательная задача, в случае, когда сам выпуклый компакт, а также шар используемой нормы являются многогранниками, сводится к задаче линейного программирования.

Ключевые слова: выпуклый компакт, асферичность, субдифференциал, аппроксимация.

On a Approximate Solution of the Problem of Aspherical Convex Compact Set

S.I. Dudov, E.A. Mesheryakova

Saratov State University,
Chair of Mathematical Economy
E-mail: DudovSI@info.sgu.ru

We examine a finite-dimensional problem of minimizing the ratio radius of the ball given a compact convex set (in an arbitrary norm) to the radius of the inscribed sphere through the choice of a common center of these balls. The article offers an approach to building the numerical method of its solution. At each step of the iterative process it is required to solve the problem of convex programming, target function of which is the difference between the radius of a circumscribed sphere, and scalable, with some positive factor, the radius of the inscribed sphere. It is shown that this auxiliary problem, in case of convex compact, and the ball of the used norm being polyhedral, can be reduced to a linear programming problem.

Key words: compact convex set, asphericity, subdifferential, approximation.

© С.И. Дудов, Е.А. Мещерякова, 2010

1. Задачей об асферичности выпуклого компакта D из конечномерного пространства $\mathbb{R}^p$ с непустой внутренностью называют

$$\varphi(x) \equiv \frac{R(x)}{\rho(x)} \longrightarrow \min_{x\in D}, \tag{1}$$

где функции $R(x) = \max\limits_{y\in D} n(x-y)$, $\rho(x) = \min\limits_{y\in\Omega} n(x-y)$ выражают соответственно расстояние от точки x до самой удаленной точки компакта D и до самой близкой точки множества $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \backslash D}$ в заданной норме $n(\cdot)$.

Функция $R(x)$ является выпуклой на $\mathbb{R}^p$, а $\rho(x)$-вогнута на D. Известны соответствующие формулы субдифференциала и супердифференциала этих функций [1, 2]. Показатель асферичности $\varphi^* \equiv \min\{\varphi(x) : x \in D\}$ используется (обычно для случая евклидовой нормы) при описании свойств выпуклого тела и построении методов его приближения (см. напр. [3]). Однако результатов по характеризации и построению численных методов решения задачи (1) обнаружить не удалось. Трудности ее исследования, видимо, связаны с тем обстоятельством, что целевая функция является негладкой и при этом она не выпукла и не вогнута, в общем случае, даже локально. Однако выяснилось, что она является на D субдифференцируемой в смысле определения В.Ф. Демьянова – А.М. Рубинова [4, 5]. В [6] установлена соответствующая формула ее субдифференциала. На этой основе в статье [7] получены необходимые и достаточные условия решения, а так же пример условия единственности решения задачи (1).

2. Ниже предлагается подход к построению численного метода приближенного решения задачи (1). Пусть x_0 — произвольная внутренняя точка из D и $\alpha_0 = \varphi(x_0)$. Принципиальная схема построения последовательности приближений заключается в следующем.

Если уже построена точка $x_k \in D$ и $\alpha_k = \varphi(x_k)$, то в качестве точки x_{k+1} берем решение задачи

$$\psi_k(x) \equiv R(x) - \alpha_k\rho(x) \longrightarrow \min_{x\in D}, \tag{2}$$

т. е. $x_{k+1} \in D$ и $\psi_k(x_{k+1}) = \min\limits_{x\in D} \psi_k(x)$.

Главная идея здесь заключается в том, что $\psi_k(x_k) = 0$ и поэтому, если точка x_k не является решением задачи (2), то $\psi_k(x_{k+1}) < 0$, что эквивалентно неравенству $\varphi(x_{k+1}) < \varphi(x_k)$. Таким образом последовательность $\{\varphi(x_k)\}_{k=1,2,\ldots}$ монотонно убывает. В качестве обоснования сходимости процесса докажем, что справедлива

Теорема 1. *Любая предельная точка последовательности* $\{x_k\}_{k=1,2,\ldots}$ *является решением задачи* (1).

Доказательство. Будем считать, без потери общности, что $x_k \to x^* \in D$ при $k \to \infty$. Предположим противное, что есть точка x^* не является решением, а значит существует положительное a такое, что

$$\varphi(x^*) = \varphi^* + \mathrm{a}, \quad \varphi^* = \min_{x\in D} \varphi(x). \tag{3}$$

Пусть $\hat{x} \in D$ и $\varphi(\hat{x}) = \varphi^*$, т. е. точка $\hat{x}$ - решение или одно из решений задачи (1). По построению $\psi_k(\hat{x}) \geq \psi_k(x_{k+1})$ или

$$R(\hat{x}) - \alpha_k\rho(\hat{x}) \geq R(x_{k+1}) - \alpha_k\rho(x_{k+1}). \tag{4}$$

Функции $R(x)$ и $-\rho(x)$ выпуклые конечные, а значит, и непрерывные [4, с. 43]. Поэтому, переходя в (4) к пределу по $k \to \infty$, получаем

$$R(\hat{x}) - \varphi(x^*)\rho(\hat{x}) \geq R(x^*) - \varphi(x^*)\rho(x^*) = 0. \tag{5}$$

С другой стороны, в силу (3) имеем

$$R(\hat{x}) - \varphi(x^*)\rho(\hat{x}) = \rho(\hat{x})\left(\frac{R(\hat{x})}{\rho(\hat{x})} - \varphi^* - a\right) = -a\rho(\hat{x}) < 0,$$

что противоречит (5). Теорема доказана. □

Важное обстоятельство для нас в этом подходе заключается в том, что целевая функция $\psi_k(x)$ вспомогательной задачи (2), решаемой на каждом шаге, является выпуклой на выпуклом компакте D.

Это легко следует из выпуклости функции $R(x)$ и вогнутости функции $\rho(x)$ на D. Следовательно, для решения задачи (2) можно использовать наработанный широкий спектр численных методов выпуклого программирования (см. напр. [8–9]).

3. Рассмотрим важный частный случай, когда вспомогательная задача (2) сводится к задаче линейного программирования.

Предположим, что выпуклый компакт D является многогранником, заданным в виде

$$D = \left\{ y \in \mathbb{R}^p : \langle A_i, y \rangle + a_i \geq 0, i = \overline{1,m} \right\}, \tag{6}$$

где $A_i \in \mathbb{R}^p$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение.

Обозначим через $Bn(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x-y) \leq r\}$ — шар в норме $n(\cdot)$ с центром в точке x и радиуса r. Предположим норма такова, что ее единичный шар с центром в начале координат также является многогранником, имеющим вид

$$Bn(0_p, 1) = \left\{ y \in \mathbb{R}^p : \langle B_j, y \rangle + b_j \geq 0,\ j = \overline{1,l} \right\}, \tag{7}$$

где $B_j \in \mathbb{R}^p$, $b_j \in \mathbb{R}$, $b_j > 0$, $j = \overline{1,m}$.

Напомним, что полярной нормой к норме $n(\cdot)$ называется функция $n^*(x) = \max\limits_{n(v) \leq 1} \langle v, x \rangle$.

Конкретизируем вид функций $R(x)$ и $\rho(x)$ в рассматриваемом случае.

Лемма 1. *Если единичный шар нормы $n(\cdot)$ можно представить в виде* (7)*, то*

$$R(x) = \max_{j=\overline{1,l}} \left\{ \langle D_j, x \rangle + d_j \right\},$$

где

$$D_j = -\frac{B_j}{b_j}, \quad d_j = \max_{y \in D} \langle D_j, y \rangle. \tag{8}$$

Доказательство. Известно (см. [1, 10]), что исходная норма $n(\cdot)$ выражается через полярную к ней норму $n^*(\cdot)$ формулой

$$n(x) = \max_{n^*(v) \leq 1} \langle v, x \rangle, \tag{9}$$

причем единичный шар полярной нормы является полярой, в привычном смысле выпуклого анализа [10], единичного шара исходной нормы. Нетрудно убедиться, что полярой к шару (7) является множество

$$\{y \in \mathbb{R}^p : n^*(y) \leq 1\} = \operatorname{co} \left\{ -\frac{B_j}{b_j} : j = \overline{1,l} \right\}. \tag{10}$$

Здесь $\operatorname{co} A$ — выпуклая оболочка множества A.

Теперь используя (9), (10), обозначения (8), а также известный из выпуклого анализа факт [4, с. 26], что для произвольного компакта $A \subset \mathbb{R}^p$ выполняется равенство

$$\max_{v \in A} \langle v, g \rangle = \max_{v \in \operatorname{co} A} \langle v, g \rangle, \quad \forall\ g \in \mathbb{R}^p,$$

получаем

$$R(x) = \max_{y \in D} \max_{n^*(v) \leq 1} \langle v, x-y \rangle = \max_{y \in D} \max_{v \in \operatorname{co} \left\{ -\frac{B_j}{b_j} : j = \overline{1,l} \right\}} \langle v, x-y \rangle = \max_{y \in D} \max_{v \in \left\{ -\frac{B_j}{b_j} : j = \overline{1,l} \right\}} \langle v, x-y \rangle =$$

$$= \max_{j=\overline{1,l}} \max_{y \in D} \langle D_j, x-y \rangle = \max_{j=\overline{1,l}} \left\{ \langle D_j, x \rangle + \max_{y \in D} \langle D_j, -y \rangle \right\} = \max_{j=\overline{1,l}} \left\{ \langle D_j, x \rangle + d_j \right\}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2. *Если компакт D задан в виде* (6) *и точка $x \in D$, то*

$$\rho(x) = \min_{i=\overline{1,m}} \left\{ \langle C_i, x \rangle + c_i \right\}, \tag{11}$$

где

$$C_i = \frac{A_i}{n^*(A_i)}, \qquad c_i = \frac{a_i}{n^*(a_i)}. \tag{12}$$

Доказательство. Известно, что расстояние в норме $n(\cdot)$ от точки до гиперплоскости $\pi = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle A, y\rangle + a = 0\}$, где $A \in \mathbb{R}^p, a \in \mathbb{R}$, выражается формулой

$$\rho_\pi(x) = \frac{|\langle A, x\rangle +|}{n^*(A)}. \tag{13}$$

Очевидно, для точки $x \in D$, учитывая вид (6) множества D, выполняется

$$\rho(x) = \min_{i=\overline{1,m}} \rho_{\pi_i}(x),$$

где $\pi_i = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle A_i, y\rangle + a_i = 0\}$ — гиперплоскости, образующие грани многогранника D. Теперь, используя (13) и учитывая, что $\langle A_i, x\rangle + a_i \geq 0$ для $x \in D$, имеем

$$\rho(x) = \min_{i=\overline{1,m}} \left\{ \frac{\langle A_i, x\rangle + a_i}{n^*(A_i)} \right\}.$$

Принимая во внимание обозначения (12), мы получим (11). Лемма доказана. □

Из лемм 1–2 непосредственно вытекает

Следствие. *Если выпуклый компакт D задан в виде* (6)*, а единичный шар нормы в виде* (7)*, то задача* (2) *эквивалентна задаче*

$$\max_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,l}} \{\langle D_j - \alpha_k C_i, x\rangle + d_j - \alpha_k c_i\} \to \min_{x \in D}. \tag{14}$$

Далее рассуждениями, аналогичными [11, с. 244], приходим к выводу, что справедлива

Теорема 2. *Задача* (14) *эквивалентна задаче линейного программирования следующего вида:*

$$\begin{cases} z \to \min, \\ \langle D_j - \alpha_k C_i, x\rangle + d_j - \alpha_k c_i \leq z, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,l}, \\ x \in D. \end{cases} \tag{15}$$

При этом если пара (x^*, z^*) — решение задачи (15)*, то x^* — решение задачи* (14)*. И наоборот, если x^* — решение задачи* (14)*, то пара (x^*, z^*), где $z^* = \max\limits_{j=\overline{1,l}}\{\langle D_j, x^*\rangle + d_j\} - \alpha_k \min\limits_{i=\overline{1,m}}\{\langle C_i, x^*\rangle + c_i\}$, является решением задачи* (15).

Замечание. Таким образом мы можем предложить следующий путь получения приближенного решения задачи (1). Сначала аппроксимировать выпуклый компакт D и единичный шар нормы многогранниками с некоторой точностью. Отметим, что методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел существует довольного много (см. напр. [3, 12] и библиографию в них). А далее воспользоваться предложенным в п. 2 численным методом для решения уже замененной задачи, решая на каждом шаге задачу линейного программирования вида (15). В связи с этим предстоит ответить на вопрос, как точность аппроксимации компакта D и такой способ аппроксимации нормы $n(\cdot)$ отразятся на точности решения исходной задачи?

Работа выполнена при поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00270) *и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ* (*проект* НШ-4383.2010.1).

Библиографический список

1. *Пшеничный, Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б.Н. Пшеничный. – М.: Наука, 1980.
2. *Дудов, С.И.* Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы / С.И. Дудов, И.В. Златорунская // Мат. сб. – 2000. – Т. 191, № 10. – С. 13–38.
3. *Каменев, Г.К.* Скорость сходимости адаптивных методов полиэдромной аппроксимации выпуклых тел на начальном этапе / Г.К. Каменев // ЖВМ и МФ. – 2008. – Т. 48, № 5. – С. 763–778.
4. *Демьянов, В.Ф.* Недифференцируемая оптимизация / В.Ф. Демьянов, Л.В. Васильев. – М.: Наука, 1981.
5. *Демьянов, В.Ф.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление / В.Ф. Демьянов, А.М. Рубинов. – М.: Наука, 1990.
6. *Мещерякова, Е.А.* О двух задачах по оценке выпуклого компакта шаром / Е.А. Мещерякова // Математика. Механика: сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. – Вып. 10. – С. 48–50.

7. *Дудов, С.И.* Об асферичности выпуклого компакта / С.И. Дудов, Е.А. Мещерякова // Математика. Механика: сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. – Вып. 11. – С. 24–27.
8. *Васильев, Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1988.
9. *Карманов, В.Г.* Математическое программирование / В.Г. Карманов. – М.: Наука, 1986.
10. *Рокафеллар, Р.* Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. – М.: Мир, 1973.
11. *Зуховицкий, С.И.* Линейное и выпуклое программирование / С.И. Зуховицкий, Л.И. Авдеева. – М.: Наука, 1964.
12. *Половинкин, Е.С.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е.С. Половинкин, М.В. Балашов. – М.: Физматлит, 2004.

УДК 517.984

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ И ПОТЕНЦИАЛОМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А.П. Хромов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Для решения некоторой смешанной задачи с инволюцией и вещественным симметричным потенциалом найдено явное аналитическое представление методом Фурье. При этом использованы приемы, позволяющие избегать почленного дифференцирования функционального ряда и накладывать минимальные условия на начальные данные задачи.

Ключевые слова: смешанная задача, инволюция, метод Фурье, классическое решение.

The Mixed Problem for the Differential Equation with Involution and Potential of the Special Kind

A.P. Khromov

Saratov State University,
Chair of Differential Equations and Applied Mathematics
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

For the solution of some mixed problem with involution and real symmetrical potential, explicit analytical formula has been found with the use of the Fourier method. Techniques allowing to avoid term-by-term differentiation of the functional series and impose the minimum conditions for initial problem data, are used.

Key words: mixed problem, involution, Fourier method, classical solution.

Рассматривается следующая смешанная задача:

$$\frac{1}{\beta i}u_t(x,t) = u_\xi(\xi,t)|_{\xi=1-x} + q(x)u(x,t), \qquad x\in[0,1], \qquad t\in(-\infty,+\infty), \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad u(0,t)=0. \tag{2}$$

Предполагаем выполненными следующие условия: 1) β — вещественное число, $\beta\neq 0$, 2) $q(x)\in C[0,1]$, $q(x)=q(1-x)$, $q(x)$ — вещественная функция; 3) $\varphi\in C^1[0,1]$ и $\varphi(0)=0$, $\varphi'(1)=0$.

Уравнение (1) представляет собой простейшее уравнение в частных производных, содержащее инволюцию $\nu(x)=1-x$. Краевые задачи с инволюцией активно исследуются (см., например, работу [1] и библиографию в ней).

Решение задачи (1)–(2) будем искать методом Фурье. Наши предположения позволяют получить классическое решение, т. е. решение, непрерывно дифференцируемое по обеим переменным. Условия на $\varphi(x)$ являются естественными, так как им удовлетворяют собственные функции порождаемой (1)–(2) краевой задачи. Условия на $q(x)$ снимают многие трудности при исследовании задачи и позволяют дать хорошую структурную форму для решения.

В работе широко используются приемы из [2], позволяющие получить решение, избегая почленного дифференцирования функционального ряда.

1. Согласно методу Фурье положим $u(x,t)=y(x)T(t)$. Тогда получим следующую задачу на собственные значения для $y(x)$:

$$y'(1-x)+q(x)y(x)=\lambda y(x), \tag{3}$$

$$y(0)=0, \tag{4}$$

а для $T(t)$ имеем $T(t)=ce^{\lambda\beta it}$.

© А.П. Хромов., 2010

2. Найдем решение задачи (3)–(4). Выполняя в (3) замену x на $1-x$ и полагая $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1-x)$, получим следующую систему уравнений относительно $z(x)$:

$$Bz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x), \tag{5}$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P(x) = \operatorname{diag}(q(x), q(1-x)) = \operatorname{diag}(q(x), q(x))$.

Верно и обратное: если $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ — решение (5) и $z_1(x) = z_2(1-x)$, то $y(x) = z_1(x)$ есть решение уравнения (3).

Лемма 1. *Общее решение системы* (5) *имеет вид*

$$z(x) = z(x, \lambda) = \Gamma V(x, \lambda)c, \tag{6}$$

где $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, $V(x,\lambda) = \operatorname{diag}\left(u_1(x)e^{-\lambda ix}, u_2(x)e^{\lambda ix}\right)$, $u_1(x) = \exp\left(i\int\limits_0^x q(t)\,dt\right)$, $u_2(x) = \exp\left(-i\int\limits_0^x q(t)\,dt\right)$, $c = (c_1, c_2)^T$, c_k — *произвольные постоянные.*

Доказательство. Матрицу B в системе (5) можно привести к диагональному виду с помощью преобразования $\Gamma^{-1}B\Gamma = D$, где $D = \operatorname{diag}(i, -i)$ ($\pm i$ — собственные значения матрицы B), Γ — невырожденная матрица, определяемая неоднозначно. В качестве Γ выберем матрицу, указанную в условии леммы. Выполнив в (5) замену $z = \Gamma v$, $v = (v_1, v_2)^T$, придем к системе

$$v'(x) + P_1(x)v(x) = \lambda D^{-1}v(x), \tag{7}$$

где $D^{-1} = \operatorname{diag}(-i, i)$, $P_1(x) = D^{-1}\Gamma^{-1}P(x)\Gamma = D^{-1}q(x)$ (благодаря симметричности $q(x)$ матрица $P_1(x)$ также диагональна).

Система (7) распадается на два уравнения:

$$v_1'(x) - iq(x)v_1(x) = -\lambda i v_1(x), \qquad v_2'(x) + iq(x)v_2(x) = \lambda i v_2(x),$$

общие решения которых соответственно есть

$$v_1(x) = v_1(x,\lambda) = c_1u_1(x)e^{-\lambda ix}, \qquad v_2(x) = v_2(x,\lambda) = c_2u_2(x)e^{\lambda ix},$$

где $u_k(x)$ — функции, определенные в условии леммы, c_1, c_2 — произвольные постоянные. Записывая решение (7) в матричной форме, придем к (6).

Лемма 2. *Общее решение системы* (3) *имеет вид*

$$y(x) = y(x,\lambda) = c\varphi(x,\lambda), \tag{8}$$

где $\varphi(x,\lambda) = u_1(x)e^{-i\int\limits_0^1 q(t)\,dt}e^{\lambda i(1-x)} - iu_2(x)e^{\lambda ix}$, c — *произвольная постоянная.*

Доказательство. Как было показано выше, функция $y(x) = z_1(x)$ является решением (3), если $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ удовлетворяет (5) и $z_1(x) = z_2(1-x)$. Отсюда, в частности, получаем условие

$$z_1(0) = z_2(1). \tag{9}$$

В силу (6) и (9) имеем

$$c_1u_1(0) - ic_2u_2(0) = -c_1iu_1(1)e^{-\lambda i} + c_2u_2(1)e^{\lambda i},$$

или

$$c_1[u_1(0) + iu_1(1)e^{-\lambda i}] = c_2[u_2(1)e^{\lambda i} + iu_2(0)]. \tag{10}$$

Так как $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = 1$, $u_2(1) = e^{-i\int\limits_0^1 q(t)\,dt} = u_1^{-1}(1)$, то из (10) получим

$$c_1[1 + iu_1(1)e^{-\lambda i}] = c_2u_2(1)e^{\lambda i}[1 + iu_1(1)e^{-\lambda i}],$$

откуда $c_1 = c_2 u_2(1) e^{\lambda i}$. Тогда $y(x) = z_1(x) = c_1 u_1(x) e^{-\lambda i x} - i c_2 u_2(x) e^{\lambda i x} = c_2 \varphi(x, \lambda)$, что доказывает (8). □

Лемма 3. *Собственные значения краевой задачи* (3)–(4) *есть*

$$\lambda_n = 2\pi n + a, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

где $a = \pi/2 + \int\limits_0^1 q(t)\,dt$, *а соответствующие собственные функции*

$$y_n(x) = p(1-x) e^{2\pi n i (1-x)} - i p(x) e^{2\pi n i x}, \tag{12}$$

где $p(x) = u_2(x) e^{aix}$.

Доказательство. Согласно (4) и (8) для собственных значений имеем уравнение $\varphi(0, \lambda) = 0$, корни которого есть (11).

Найдем собственные функции $y_n(x) = \varphi(x, \lambda_n)$. Учитывая, что $u_1(x) = \exp\Big\{i \int\limits_0^1 q(t)\,dt - i \int\limits_x^1 q(t)\,dt\Big\} = \exp\Big\{a - i \int\limits_0^{1-x} q(t)\,dt\Big\} = e^{ia} u_2(1-x)$ (здесь снова использована симметричность $q(x)$), получим $y_n(x) = u_1(x) e^{-ia} e^{2\pi n i (1-x)} e^{ia(1-x)} - i u_2(x) e^{2\pi n i x} e^{aix} = u_2(1-x) e^{ia(1-x)} e^{2\pi n i (1-x)} - i u_2(x) e^{aix} e^{2\pi n i x}$, откуда следует (12). □

3. Исследуем свойства системы $y_n(x)$.

Лемма 4. *Функции* $y_n(x)$, $(n \in \mathbb{Z})$ *образуют ортогональную систему, полную в* $L_2[0,1]$.

Доказательство. Обозначим через L оператор

$$Ly = y'(1-x) + q(x) y(x), \quad y(0) = 0,$$

собственными функциями которого являются $y_n(x)$. Найдем сопряженный оператор L^*. Пусть $z(x) \in W_2^1[0,1]$. Тогда

$$(Ly, z) = \int\limits_0^1 y'(x) \overline{z(1-x)}\,dx + \int\limits_0^1 q(x) y(x) \overline{z(x)}\,dx = y(x)\overline{z(1-x)}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 y(x) \overline{z'(1-x)}\,dx +$$
$$+ \int\limits_0^1 q(x) y(x) \overline{z(x)}\,dx = y(1)\overline{z(0)} + \int\limits_0^1 y(x) \overline{(z'(1-x) + \overline{q(x)} z(x))}\,dx,$$

откуда $L^* z(x) = z'(1-x) + \overline{q(x)} z(x)$, $z(0) = 0$. Так как $q(x)$ — вещественная функция, то $L = L^*$, откуда следует ортогональность собственных функций.

Докажем полноту. Пусть $f \in L[0,1]$ и f ортогональна y_n, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$(y_n, f) = \int\limits_0^1 y_n(x) \overline{f(x)}\,dx = \int\limits_0^1 \overline{f(x)} \Big[p(1-x) e^{2\pi n i (1-x)} - i p(x) e^{2\pi n i x}\Big]\,dx =$$
$$= \int\limits_0^1 \overline{f(1-x)} p(x) e^{2\pi n i x}\,dx - i \int\limits_0^1 \overline{f(x)} p(x) e^{2\pi n i x}\,dx = \int\limits_0^1 \Big[\overline{f(1-x)} - i \overline{f(x)}\Big] p(x) e^{2\pi n i x}\,dx = 0.$$

Отсюда в силу полноты тригонометрической системы $\{e^{2\pi n i x}\}$ имеем

$$f(1-x) + i f(x) \equiv 0, \quad x \in [0,1]. \tag{13}$$

Заменим в (13) x на $1-x$ и полученное уравнение умножим на i:

$$i\, f(x) + i^2\, f(1-x) \equiv 0. \tag{14}$$

Сложив (13) и (14), получим, что $f(x) \equiv 0$, и лемма доказана. □

Замечание. Из леммы 4 следует, что собственные значения (11) однократны.

Лемма 5. *Пусть* $y_n^0(x) = y_n(x)/\|y_n\|$ *(*$\|\cdot\|$ *— норма в* $L_2[0,1]$*). Тогда* $y_n^0(x) = \gamma_n y_n(x)$*, где константы* γ_n *имеют асимптотику*

$$\gamma_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[1], \qquad [1] = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказательство. Имеем

$$\|y_n\|^2 = \int\limits_0^1 y_n(x)\overline{y_n(x)}\,dx = \int\limits_0^1 p(1-x)\overline{p(1-x)}\,dx + \int\limits_0^1 p(x)\overline{p(x)}\,dx +$$
$$+i\int\limits_0^1 p(1-x)\overline{p(x)}e^{-4\pi nix}\,dx - i\int\limits_0^1 p(x)\overline{p(1-x)}e^{4\pi nix}\,dx.$$

Выполняя в третьем и четвертом интегралах интегрирование по частям и учитывая ограниченность входящих в них экспонент, а также, что $\|p(x)\| = 1$, получим $\|y_n\|^2 = 2 + O(1/n)$, откуда следует утверждение леммы. □

Лемма 6. *Если* $f(x) \in D_L$ *(*D_L *— область определения оператора* L *в пространстве* $L_2[0,1]$*), то ее ряд Фурье по системе* $\{y_n(x)\}$ *сходится абсолютно и равномерно на* $[0,1]$.

Доказательство. Ряд Фурье функции $f(x)$ по системе $\{y_n(x)\}$ есть

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(f, y_n)\gamma_n^2 y_n(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}(f, y_n^0)y_n^0(x).$$

Пусть вещественное число μ_0 не является собственным значением оператора L. Положим $(L - \mu_0 E)f = g$ (E — единичный оператор). Тогда $f = R_{\mu_0}g$, где R_λ есть резольвента оператора L. Далее,

$$(L - \mu_0 E)y_n^0 = (\lambda_n - \mu_0)y_n^0,$$

откуда $y_n^0 = (\lambda_n - \mu_0)R_{\mu_0}y_n^0$ и

$$(f, y_n^0) = (R_{\mu_0}g, y_n^0) = (g, R_{\mu_0}y_n^0) = \frac{1}{\overline{\lambda_n} - \mu_0}\,(g, y_n^0).$$

Поэтому

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(f, y_n^0)y_n^0(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\overline{\lambda_n} - \mu_0}(g, y_n^0)y_n^0(x).$$

Так как $\frac{1}{\lambda_n - \mu_0} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, а $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|(g, y_n^0)|^2 < \infty$, то утверждение леммы следует из неравенства Коши – Буняковского и равномерной ограниченности $y_n^0(x)$. □

4. Из леммы 6 следует, что ряд $\sum|c_n|$ сходится. Поэтому функция $f_0(x) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi nix}$ непрерывна на $(-\infty, \infty)$ и периодическая с периодом 1.

Лемма 7. *При* $x \in [0,1]$ *имеет место формула*

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)}\left[i\varphi(x) + \varphi(1-x)\right]. \tag{15}$$

Доказательство. Согласно лемме 6 при $x \in [0,1]$ имеем

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}(\varphi, y_n)\gamma_n^2 y_n(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n y_n(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n\left[p(1-x)e^{2\pi ni(1-x)} - ip(x)e^{2\pi nix}\right],$$

откуда

$$\varphi(x) = p(1-x)f_0(1-x) - ip(x)f_0(x). \tag{16}$$

Отсюда

$$\varphi(1-x) = p(x)f_0(x) - ip(1-x)f_0(1-x). \tag{17}$$

Из (16) и (17) получаем

$$i\varphi(x) + \varphi(1-x) = 2p(x)f_0(x). \tag{18}$$

Из (18) следует (15). □

Замечание. Функция $f_0(x)$ в силу своей периодичности однозначно определяется на всей оси заданием ее лишь на отрезке $[0,1]$. Таким образом, $f_0(x)$ определяется не рядом, а по формуле (15).

Лемма 8. *Если $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$, то $f_0(x)$ непрерывно дифференцируема на всей вещественной оси.*

Доказательство. Из (15) следует, что $f_0(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0,1]$ (в концевых точках имеются в виду односторонние производные). В силу периодичности функция $f_0(x)$ непрерывно дифференцируема всюду на $(-\infty,+\infty)$, кроме точек $x = n$ (n – целое). Покажем, что $f_0'(n-0) = f_0'(n+0)$. В силу периодичности функции $f_0(x)$ достаточно установить, что

$$f_0'(0+0) = f_0'(0-0). \tag{19}$$

Дифференцируя (18), получим:

$$i\varphi'(x) - \varphi'(1-x) = 2p'(x)f_0(x) + 2p(x)f_0'(x). \tag{20}$$

Из (20), условия леммы и соотношений

$$f_0(0) = f_0(1), \qquad f_0'(1-0) = f_0'(0-0)$$

имеем

$$2p'(0)f_0(0) + 2p(0)f_0'(0+0) = i\varphi'(0), \qquad 2p'(1)f_0(0) + 2p(1)f_0'(0-0) = -\varphi'(0),$$

откуда

$$2[p'(0) + ip'(1)]f_0(0) + 2[p(0)f_0'(0+0) + ip(1)f_0'(0-0)] = 0. \tag{21}$$

Так как $p(0) = 1$, $p(1) = \exp\left(-i\int_0^1 q(t)\,dt\right)e^{ia} = e^{\pi i/2} = i$, $u_2'(x) = -iq(x)u_2(x)$, $p'(0) = -iq(0) + ia$, $p'(1) = q(1) - a$, а также $q(0) = q(1)$, то $p'(0) + ip'(1) = 0$, и из (21) следует (19). Лемма доказана. □

Замечание. Условие $\varphi'(1) = 0$ является естественным, так как ему удовлетворяют все собственные функции.

5. Согласно методу Фурье, решение $u(x,t)$ задачи (1)–(2) представляется формальным рядом

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(\varphi, y_n^0)y_n^0(x)e^{\lambda_n\beta it} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n y_n(x)e^{\lambda_n\beta it}, \tag{22}$$

где $c_n = (\varphi, y_n)\gamma_n^2$.

Лемма 9. *Ряд (22) сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in (-\infty,\infty)$, и для его суммы имеет место формула*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n y_n(x)e^{\lambda_n\beta it} = e^{a\beta it}\big[p(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(x)f_0(x+\beta t)\big], \tag{23}$$

где $p(x) = u_2(x)e^{iax}$.

Доказательство. Сходимость ряда (22) следует из леммы 6. Далее, имеем

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n y_n(x)e^{\lambda_n\beta it} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\big[p(1-x)e^{2\pi ni(1-x)} - ip(x)e^{2\pi nix}\big]e^{\lambda_n\beta it} =$$

$$= e^{a\beta it}\big[p(1-x)\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi ni(1-x+\beta t)} - ip(x)\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi ni(x+\beta t)}\big],$$

откуда следует (23). □

Теорема. *Если* $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$, $q(x) \in C[0,1]$, $q(x) = q(1-x)$, *то классическое решение задачи* (1)–(2) *существует и имеет вид*

$$u(x,t) = e^{a\beta it}\big[p(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(x)f_0(x+\beta t)\big], \tag{24}$$

где $p(x) = \exp\left(aix - i\int\limits_0^x q(t)\,dt\right)$, $f_0(x)$ — *периодическая с периодом* 1 *функция, причем на отрезке* $[0,1]$

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)}\big[i\varphi(x) + \varphi(1-x)\big]. \tag{25}$$

Доказательство. Как установлено выше, если функцию $f_0(x)$, заданную с помощью (25), продолжить периодически с периодом 1 на всю ось, то получим непрерывно дифференцируемую всюду функцию. Проверим теперь, что $u(x,t)$, заданная формулой (24), является решением смешанной задачи (1)–(2).

Сначала покажем, что $u(x,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1). Имеем

$$\frac{1}{\beta i}u_t(x,t) = ae^{a\beta it}\big[p(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(x)f_0(x+\beta t)\big] +$$
$$+\frac{1}{i}e^{a\beta it}\big[p(1-x)f_0'(1-x+\beta t) - ip(x)f_0'(x+\beta t)\big],$$
$$u_\xi(\xi,t)\Big|_{\xi=1-x} = e^{a\beta it}\big[-p'(1-\xi)f_0(1-\xi+\beta t) - p(1-\xi)f_0'(1-\xi+\beta t) -$$
$$-ip'(\xi)f_0(\xi+\beta t) - ip(\xi)f_0'(\xi+\beta t)\big]\Big|_{\xi=1-x} = e^{a\beta it}\big[-p'(x)f_0(x+\beta t) - p(x)f_0'(x+\beta t) -$$
$$-ip'(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(1-x)f_0'(1-x+\beta t)\big].$$

Подставляя данные соотношения в (1), получим

$$e^{a\beta it}\Big\{f_0(1-x+\beta t)\big[ap(1-x) + ip'(1-x) - p(1-x)q(x)\big] + f_0(x+\beta t)\big[-aip(x) + p'(x) +$$
$$+ip(x)q(x)\big] + f_0'(1-x+\beta t)\big[\frac{1}{i}p(1-x) + ip(1-x)\big] + f_0'(x+\beta t)\big[-p(x) + p(x)\big]\Big\}.$$

Последние две квадратные скобки равны нулю. Подставляя явные выражения для $p(x)$ и $p'(x)$, получим, что первая и вторая квадратные скобки также равны нулю, т. е. $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1).

Далее, при $x \in [0,1]$ имеем $u(x,0) = p(1-x)f_0(1-x) - ip(x)f_0(x) = \varphi(x)$. Наконец,

$$u(0,t) = e^{a\beta it}\big[p(1)f_0(\beta t) - ip(0)f_0(\beta t)\big] = 0,$$

т.е. начальное и краевое условие выполнены. Теорема доказана. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00270) *и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ* (*проект* НШ-4383.2010.1) .

Библиографический список

1. *Андреев, А.А.* О корректности краевых задач для некоторых уравнений в частных производных с карлемановским сдвигом/ А.А. Андреев // Дифференциальные уравнения и их приложения: Тр. 2-го Междунар. семинара. – Самара, 1998. – С. 5–18.
2. *Чернятин, В.А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных / В.А. Чернятин. – М., 1991. – 112 с.

МЕХАНИКА

УДК 539.3

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАСЧЕТА ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ ПК ОБОЛОЧКА И ПК ANSYS

Д.А. Баранова, А.Л. Волынин, В.В. Карпов

Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет,
кафедра прикладной математики и информатики
E-mail: vvkarpov@lan.spbgasu.ru

Для обоснования эффективности использования ПК ОБОЛОЧКА для исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек дается сравнение полученных результатов расчета с результатами, найденными с использованием ПК ANSYS.

Ключевые слова: устойчивость оболочек, программный комплекс ОБОЛОЧКА, программный комплекс ANSYS.

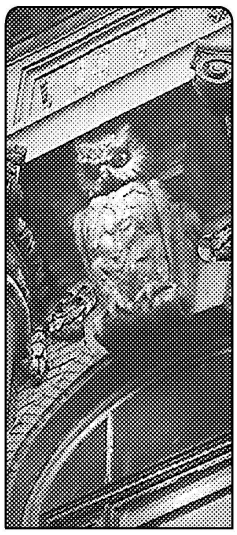
The Comparative Analysis of Calculation of Durability and Stability of the Supported Shells on the Basis of the PC OBOLOCHKA and PC ANSYS

D.A. Baranova, A.L. Volynin, V.V. Karpov

Sanct-Petersburg State Architectural- University,
Chair of Applied Mathematics and Informatics
E-mail: vvkarpov@lan.spbgasu.ru

To substantiate the efficiency of the PC OBOLOCHKA use for research of durability and stability of the supported shells the article compares the received results of calculation with the results found through PC ANSYS use.

Key words: stability of the shells, PC OBOLOCHKA, PC ANSYS.



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

Проведение комплексных исследований подкрепленных оболочек по наиболее точным математическим моделям позволит аргументированно назначать коэффициент запаса прочности, что будет способствовать уменьшению материалоемкости конструкции и снижению ее себестоимости.

Необходимость разработки программного комплекса расчетов прочности и устойчивости подкрепленных оболочек обусловлена тем, что современные программные комплексы расчета строительных конструкций, рассчитанные на решение широкого круга задач, не могут с достаточной степенью точности проводить исследование устойчивости подкрепленных оболочек с учетом различных свойств материала.

ПК ОБОЛОЧКА, разработанный на кафедре прикладной математики и информатики Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета, предназначен для исследования прочности и устойчивости оболочечных конструкций (пологие оболочки прямоугольного плана, цилиндрические, конические, сферические, тороидальные оболочки), подкрепленных ребрами жесткости, проходящими по координатным линиям, с учетом не-

© Д.А. Баранова, А.Л. Волынин, В.В. Карпов, 2010

линейных факторов (геометрической и физической нелинейности, ползучести материала). Используется теория оболочек, учитывающая поперечные сдвиги, сдвиговую и крутильную жесткости ребер.

ПК ОБОЛОЧКА позволяет исследовать местную и общую потерю устойчивости, симметричные и несимметричные формы потери устойчивости, находить нагрузку, соответствующую точкам бифуркации.

Основное применение ПК ОБОЛОЧКА — научные исследования и учебный процесс, хотя он может найти применение и в расчетах строительных конструкций при их проектировании.

Математическая модель деформирования подкрепленных оболочек представляет собой функционал полной энергии деформации оболочки в соответствии с поставленной задачей исследования (линейно-упругая, нелинейно-упругая, с учетом ползучести материала). К соответствующему функционалу применяется метод Ритца с последующим решением нелинейных систем алгебраических уравнений методом итераций или метод наискорейшего спуска при дискретной аппроксимации искомых функций.

Нагрузка, соответствующая максимуму кривой «нагрузка – прогиб» принимается за критическую нагрузку. При этой нагрузке происходит скачкообразный переход на новое равновесное состояние (оболочка прохлопывается).

Составлено несколько программных модулей, подробное описание которых можно найти в работе [1].

Функционал полной энергии деформации ребристой оболочки имеет вид:

– при линейно-упругом деформировании (учитывается геометрическая нелинейность)

$$Э = Э_{У}, \tag{1}$$

– при нелинейно-упругом деформировании (учитывается геометрическая и физическая нелинейность на основе деформационной теории пластичности [2, 3])

$$Э = Э_{У} - Э_{П}, \tag{2}$$

– при учете ползучести материала (на основе линейной теории наследственной ползучести [2, 4])

$$Э = Э_{У} - Э_{С}. \tag{3}$$

Здесь

$$Э_{У} = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int\limits_0^a \int\limits_0^b \Big\{(h+\overline{F})(\varepsilon_x^2 + 2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \mu_1\gamma_{xy}^2 + \mu_1 k(\psi_x-\theta_1)^2 + \mu_1 k(\psi_y-\theta_2)^2) +$$
$$+2\overline{S}(\varepsilon_x\chi_1 + \mu\varepsilon_x\chi_2 + \varepsilon_y\chi_2 + \mu\varepsilon_y\chi_1 + 2\mu_1\gamma_{xy}\chi_{12}) + \left(\frac{h^3}{12} + \overline{J}\right)(\chi_1^2 + 2\mu\chi_1\chi_2 + \chi_2^2 + 4\mu_1\chi_{12}^2) -$$
$$-\frac{2(1-\mu^2)}{E}(P_xU + P_yV + qW)\Big\} AB\,dx\,dy; \tag{4}$$

$$Э_{П} = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int\limits_0^a \int\limits_0^b \{\varepsilon_x[I_1(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + I_2(\chi_1 + \mu\chi_2)] + \chi_1[I_2(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + I_3(\chi_1 + \mu\chi_2)] +$$
$$+\varepsilon_y[I_1(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + I_2(\chi_2 + \mu\chi_1)] + \chi_2[I_2(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + +I_3(\chi_2 + \mu\chi_1)] + \mu_1\gamma_{xy}[I_1\gamma_{xy} + 2I_2\chi_{12}] +$$
$$+2\mu_1\chi_{12}[I_2\gamma_{xy} + 2I_3\chi_{12}] + \mu_1 k^2 I_1(\psi_x-\theta_1)^2 + \mu_1 k^2 I_1(\psi_y-\theta_2)^2\Big\} AB\,dx\,dy; \tag{5}$$

$$Э_{С} = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int\limits_0^a \int\limits_0^b 2\Big\{\varepsilon_x(t_k)\sum_{i=1}^{k}[(h+\overline{F})(\varepsilon_x(t_{i-1}) + \mu\varepsilon_y(t_{i-1})) + \overline{S}(\chi_1(t_{i-1}) + \mu\chi_2(t_{i-1}))]\overline{R}_1 +$$
$$+\chi_1(t_k)\sum_{i=1}^{k}\left[\overline{S}(\varepsilon_x(t_{i-1}) + \mu\varepsilon_y(t_{i-1})) + \left(\frac{h^3}{12} + \overline{J}\right)(\chi_1(t_{i-1}) + \mu\chi_2(t_{i-1}))\right]\overline{R}_1 +$$
$$+\varepsilon_y(t_k)\sum_{i=1}^{k}[(h+\overline{F})(\varepsilon_y(t_{i-1}) + \mu\varepsilon_x(t_{i-1})) + \overline{S}(\chi_2(t_{i-1}) + \mu\chi_1(t_{i-1}))]\overline{R}_1 +$$

$$+\chi_2(t_k)\sum_{i=1}^{k}\left[\overline{S}(\varepsilon_y(t_{i-1})+\mu\varepsilon_x(t_{i-1}))+\left(\frac{h^3}{12}+\overline{J}\right)(\chi_2(t_{i-1})+\mu\chi_1(t_{i-1}))\right]\overline{R}_1+$$

$$+\mu_1\gamma_{xy}(t_k)\sum_{i=1}^{k}[(h+\overline{F})\gamma_{xy}(t_{i-1})+2\overline{S}\chi_{12}(t_{i-1})]\overline{R}_2+$$

$$+2\mu_1\chi_{12}(t_k)\sum_{i=1}^{k}\left[\overline{S}\gamma_{xy}(t_{i-1})+2\left(\frac{h^3}{12}+\overline{J}\right)\chi_{12}(t_{i-1})\right]\overline{R}_2+$$

$$+k\mu_1(\psi_x(t_k)-\theta_1(t_k))\sum_{i=1}^{k}(h+\overline{F})(\psi_x(t_{i-1})-\theta_1(t_{i-1}))\overline{R}_2+$$

$$+k\mu_1(\psi_y(t_k)-\theta_2(t_k))\sum_{i=1}^{k}(h+\overline{F})(\psi_y(t_{i-1})-\theta_2(t_{i-1}))\overline{R}_2\Big\}AB\,dx\,dy. \qquad (6)$$

В выражениях (4)–(6) ε_x, ε_y, γ_{xy} — деформации в координатной поверхности оболочки, за которую принята срединная поверхность обшивки [5]; χ_1, χ_2, χ_{12} — функции изменения кривизны и кручения [5]; U, V, W — перемещения точек координатной поверхности вдоль осей x, y, z; ψ_x, ψ_y — функции, характеризующие поперечные сдвиги в соответствующих плоскостях; A, B — параметры Ляме; E, μ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала; P_x, P_y, q — составляющие нагрузки; h — толщина оболочки; a, b — предельные значения координат x, y; $I_k=\int\limits_{-h/2}^{h/2+H}\omega(\varepsilon_i)z^{k-1}\,dz$, $k=1,2,3$, при этом секущий модуль принимается в виде $E_{\text{C}}=E(1-\omega(\varepsilon_i))$; $\overline{R}_1=R_1(t_k,t_{i-1})\Delta t$, $\overline{R}_2=R_2(t_k,t_{i-1})\Delta t$, где $R_1(t,\tau)$, $R_2(t,\tau)$ — функции влияния (ядра релаксации для соответствующего материала).

Высота и расположение ребер задается функцией

$$H(x,y)=\sum_{j=1}^{m}h^j\overline{\delta}(x-x_j)+\sum_{i=1}^{n}h^i\overline{\delta}(y-y_i)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}h^{ij}\overline{\delta}(x-x_j)\overline{\delta}(y-y_i),$$

где h^i, h^j — высота ребер параллельных осям y и x соответственно; $h^{ij}=\min\{h^i,h^j\}$; $\overline{\delta}(x-x_j)$, $\overline{\delta}(y-y_i)$ — единичные столбчатые функции, равные единице в местах присоединения ребер и равные нулю вне таких мест. Контакт ребра и обшивки происходит по полосе.

Таким образом, толщина всей конструкции равна $h+H$. Если $H>0$, то оболочка подкреплена ребрами или накладками, а если $H<0$, то она ослаблена вырезами;

$$\overline{F}=\int\limits_{h/2}^{h/2+H}dz=H,\quad \overline{S}=\int\limits_{h/2}^{h/2+H}z\,dz=\frac{H(h+H)}{2},\quad \overline{J}=\int\limits_{h/2}^{h/2+H}z^2\,dz=0.25\,h^2\,H+0.5\,h\,H^2+\frac{1}{3}\,H^3.$$

Программа исследования устойчивости оболочек вращения разработана на языке C# Д.А. Барановой. Использован метод LBFGS (усовершенствованный метод наискорейшего спуска), для аппроксимации искомых функций используются NURBS (дискретная аппроксимация). Программа исследования устойчивости пологих оболочек разработана на языке Delphi Р.Т. Беркалиевым, аппроксимирующие функции представляют собой синусы различных аргументов. Нагрузка может быть произвольной.

Программный комплекс снабжен удобным интерфейсом. При открытии программы и создании нового проекта задаются вид оболочки, ее размеры, размеры ребер, нагрузка, материал оболочки, задача исследования. Подготовительный процесс занимает не более 5 минут.

Во время расчета можно просматривать промежуточные результаты: графики перемещений, напряжений, зависимостей прогиба от нагрузки и времени. На графиках перемещений верхнее значение на вертикальной оси является максимальным значением перемещений.

После того как задача решена, окончательные результаты можно просмотреть и вывести на печать.

Программный комплекс ANSYS обладает широкими возможностями в области решения сложных проблем механики деформируемого твердого тела, теплообмена, гидродинамики и электромагнитных полей, а также адаптированностью программы к конечному пользователю [6].

К сожалению, отсутствует описание математической модели деформирования оболочек. Алгоритм исследования устойчивости оболочек основан на МКЭ.

Работу в ANSYS целесообразно начинать с построения геометрической модели рассматриваемой системы (оболочки). Для проведения расчетов необходима 3D-модель конструкции, так как задание оболочки при помощи формул невозможно. Средства препроцессорного твердотельного моделирования программы ANSYS очень трудоемки и значительно уступают специально ориентированным CAD-системам. На создание одной расчетной модели, описывающей оболочку, уходит от одного до двух часов в случае, если пользователь знаком со средой ANSYS.

В качестве примера использования разработанного программного комплекса ОБОЛОЧКА ниже приведены результаты исследования устойчивости пологих ребристых оболочек прямоугольного плана, шарнирно-неподвижно закрепленных по контуру и находящихся под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки q. Рассматриваются три вида оболочек с параметрами $a = b = 600h$. Для 1-го вида оболочек радиусы кривизны $R_1 = R_2 = 377.5h$, безразмерная кривизна $k_\xi = k_\eta = 953.64$ $(k_\xi = a^2/(R_1 h))$, для 2 вида — $R_1 = R_2 = 755h$, $k_\xi = k_\eta = 476.82$, для 3 вида — $R_1 = R_2 = 1510h$, $k_\xi = k_\eta = 238.41$. Оболочки могут быть подкреплены различным числом ребер высотой $3h$ и шириной $2h$. Первое и последнее ребро в каждом направлении является контурным.

В табл. 1 представлены для некоторых материалов размерные критические нагрузки при удержании в разложении искомых функций 16-ти членов ($N = 16$). В скобках указаны значения нагрузок при потере прочности (на основе критерия Мизеса).

Таблица 1

Размерные критические нагрузки для некоторых материалов

k_ξ	Число ребер	$q_{\text{кр}}$, МПа, для соответствующего материала		
		Сталь, $E = 2.1 \cdot 10^5$ МПа	Технический титан, $E = 1.1 \cdot 10^5$ МПа	Оргстекло, $E = 0.033 \cdot 10^5$ МПа
953.64	0	4.86 (4.2)	2.552 (1.31)	0.076
	18	6.2 (4.3)	3.249 (1.32)	0.97
	36	7.178 (4.1)	3.763 (1.26)	0.114
476.82	0	0.641	0.335	0.001
	18	1.045	0.55 (0.53)	0.0167
	36	1.323	0.693 (0.52)	0.0208
238.41	0	0.096	0.05	0.0015
	18	0.19	0.1	0.003
	36	0.218	0.114	0.0033

При исследовании несимметричных форм потери устойчивости к нагрузке q добавляется возмущающая несимметричная нагрузка $q_{\text{н}}xy$. При этом значения критических нагрузок понижается (на 20—30 %, если прогиб при возмущающей нагрузке составляет около $0.5h$).

Был проведен расчет с помощью ПК ANSYS для стальной оболочки вида 3. В табл. 2 представлены значения критической нагрузки (МПа), полученные при использовании ПК ANSYS ($q^A_{\text{кр}}$), с помощью ПК ОБОЛОЧКА ($q_{\text{кр}}$) и при наличии несимметричных возмущений ($q^H_{\text{кр}}$) при различном числе подкрепляющих оболочку ребер.

Таблица 2

Зависимость критических нагрузок $q^A_{\text{кр}}$ и $q^H_{\text{кр}}$ от числа ребер

Число ребер	$q^A_{\text{кр}}$	$q_{\text{кр}}$	$q^H_{\text{кр}}$
0	0.068	0.096	0.067
18	0.161	0.19	0.152
36	0.273	0.218	0.196

Как видно из табл. 2, расхождение в критических нагрузках составило для оболочки без ребер — 0 %, для оболочки, подкрепленной 18-ю ребрами, — 6 %, для оболочки, подкрепленной 36-ю ребрами, — 39 %. Такое расхождение объясняется тем, что в ПК ANSYS ребра вводятся как одномерные элементы. Введение ребер по линиям, как принято в ANSYS, без учета их взаимодействия с обшивкой по полосе, сдвиговой и крутильной жесткости ребер, приводит к тому, что жесткость конструкции завышается, и критические нагрузки получаются завышенными. Распределение прогибов и интенсивности напряжений по полю оболочки качественно совпадают с найденными по ПК ОБОЛОЧКА.

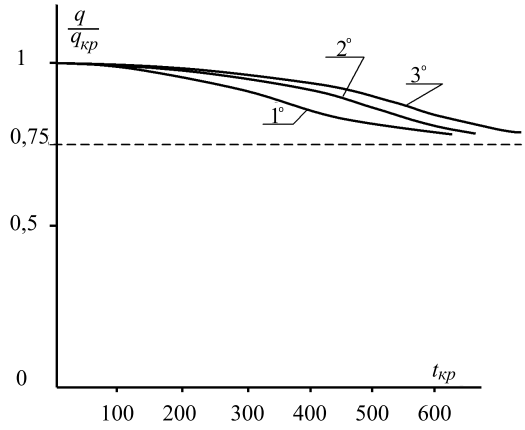
Исследование устойчивости при учете геометрической и физической нелинейности с помощью ПК ОБОЛОЧКА показали, что для гладкой оболочки вида 3 снижения критической нагрузки не наблюдается (оболочка теряет устойчивость, находясь в упругой зоне). Для оболочки, подкрепленной 18-ю и 36-ю ребрами, снижение критической нагрузки составило соответственно 3 и 4 %. Расчет с помощью ПК ANSYS показал те же результаты.

При учете ползучести материала деформации со временем при постоянной нагрузке начинают расти, при этом оболочка может потерять устойчивость. На рисунке показаны кривые снижения критической нагрузки в результате развития ползучести в материале оболочки, найденные с помощью ПК ОБОЛОЧКА. Номер кривой означает вариант оболочки, индекс 0 означает, что оболочка не подкреплена ребрами.

Как видно из рисунка, чем больше кривизна оболочки, тем круче кривая снижения критической нагрузки, т. е. быстрее развивается ползучесть.

В ПК ANSYS построение графиков снижения критической нагрузки со временем требует самостоятельных действий пользователя, хотя возможности исследования ползучести в материале оболочек гораздо шире, так как имеется возможность использования различных теорий ползучести.

Таким образом, ПК ОБОЛОЧКА позволяет исследовать прочность и устойчивость подкрепленных оболочек при учете различных свойств материала с достаточно высокой точностью, при этом он прост в использовании.



Кривые снижения критической нагрузки от ползучести материала для оболочек различной кривизны

Библиографический список

1. *Карпов, В.В.* Программный комплекс исследования устойчивости оболочек / В.В. Карпов, Д.А. Баранова, Р.Т. Беркалиев. – СПб.: СПбГАСУ, 2009. – 102 с.
2. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. – М.: Машиностороение, 1968. – 400 с.
3. *Качанов, Л.М.* Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
4. *Ржаницын, А.Р.* Строительная механика / А.Р. Ржаницын. – М.: Высшая школа, 1982. – 400 с.
5. *Новожилов, В.В.* Теория тонких оболочек / В.В. Новожилов. – Л.: Судпромиздат, 1962. – 431 с.
6. *Каплун, А.Б.* ANSYS в руках инженера: практическое руководство / А.Б. Каплун, Е.М. Морозов, М.А. Олферьева. – М.: Едиториал УРСС, 2003. — 272 с.

УДК 532.529.5

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ В ПУЗЫРЬКОВЫХ ЗОНАХ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

М.Н. Галимзянов

Институт механики Уфимского научного центра РАН,
лаборатория дифференциальных уравнений механики
E-mail: monk@anrb.ru

Изучаются особенности эволюции волн в жидкости, содержащей область с пузырьками газа. Задача рассматривается с учетом двумерных эффектов. Представлены результаты исследований воздействия волнового импульса на твердую стенку, частично покрытую пузырьковой завесой.

Ключевые слова: волна давления, пузырьковая жидкость, пузырьковая область.

Propagation of Pressure Waves in Finite-Size Bubbles Zones

M.N. Galimzyanov

Institute of Mechanics, Ufa Science Center, RAS,
Laboratory of Differential Equations of Mechanics
E-mail: monk@anrb.ru

Peculiarities of pressure waves propagation in liquids with bubbly zones have been studied. The problem is studied taking into account two-dimensional effects. Results of the research of a wave impulse influence on the firm wall partially covered with a bubble screen are presented.

Key words: pressure wave, bubble liquid, bubble zone

© М.Н. Галимзянов, 2010

К настоящему времени одномерные волны в пузырьковой жидкости достаточно подробно изучены [1, 2]. В данной работе исследована эволюция волн давления в жидкости, в которой находится пузырьковая зона конечных размеров. В связи с этим учитываются двумерные эффекты. Представлены также результаты исследования по действию волнового импульса на твердую стенку, частично покрытую пузырьковой завесой.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в жидкости находится зона, заполненная смесью жидкости с пузырьками газа, ограниченная в общем случае цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси z (продольные размеры зоны значительно больше, чем поперечные размеры). Рассмотрим двумерные волновые возмущения. Такие возмущения могут инициироваться воздействием на систему граничным давлением, независящим от координаты z (например, $p = p^0(t, y)$ при $x = x_0$)(рис. 1).

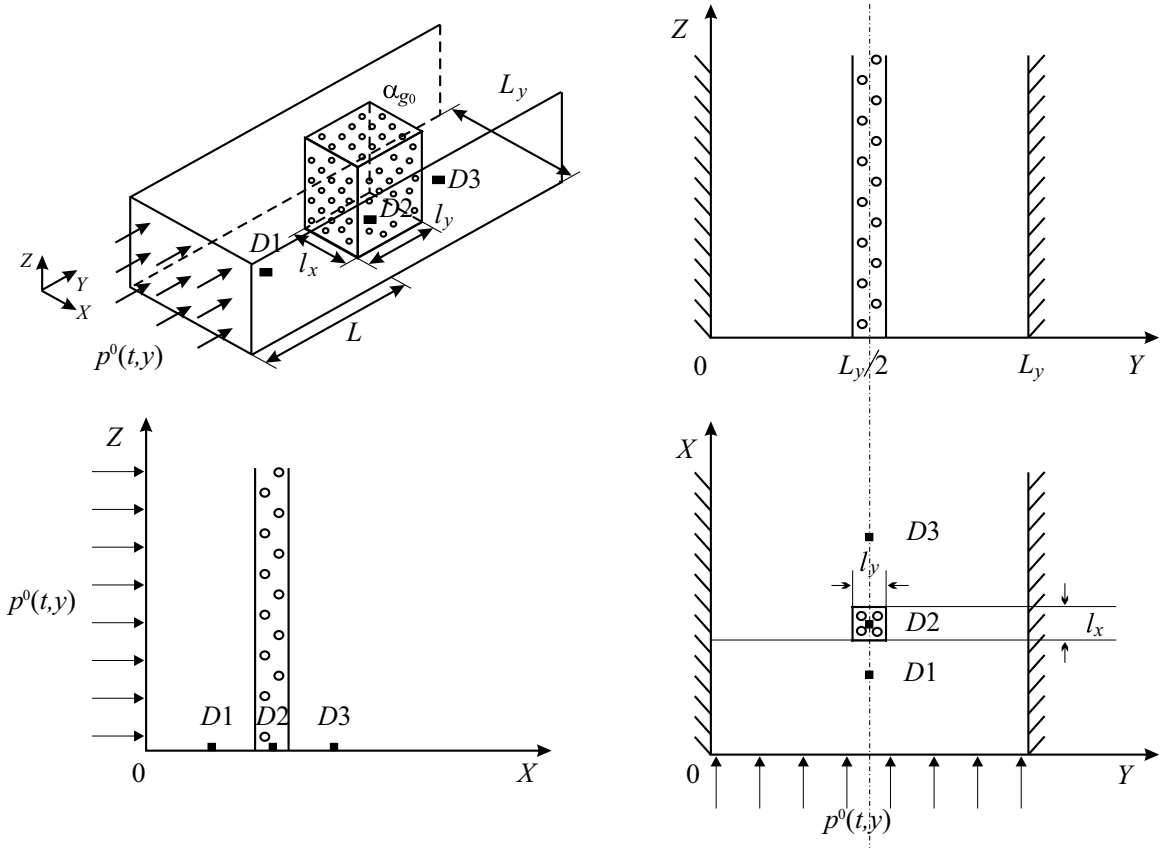


Рис. 1. Схематическое изображение расчетной области в пространстве и проекциях на оси координат: l_x, l_y — характерные линейные размеры пузырьковой зоны, L — расстояние по оси $0X$, на котором формируется импульс, L_y — ширина канала, $D1$, $D2$, $D3$ — датчики давления

Для описания движения в пузырьковой жидкости примем следующие основные допущения. В каждом элементарном объеме все пузырьки сферические и одного радиуса, вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессе межфазного взаимодействия и, в частности, при пульсации пузырьков отсутствуют дробление и слипание пузырьков. Кроме того, будем рассматривать случай, когда отсутствует массообмен между фазами, а температуру жидкости (в отличие от температуры газа в пузырьках) можно считать постоянной. Для рассматриваемой смеси запишем систему макроскопических уравнений сохранения масс, числа пузырьков, импульса и давления в пузырьках в односкоростном приближении [1]:

$$\frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \quad (i = l, g), \qquad \frac{dn}{dt} + n\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0,$$

$$\rho\frac{du}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial x} = 0, \qquad \rho\frac{dv}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial y} = 0, \qquad \frac{dp_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_g}{a}w - \frac{3(\gamma-1)}{a}q,$$

$$w = \frac{da}{dt} \qquad \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\alpha_l + \alpha_g = 1, \qquad \alpha_g = \frac{4}{3}\pi a^3 n, \qquad \rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \qquad \rho = \rho_g + \rho_l,$$

где a — радиус пузырьков, γ — показатель адиабаты для газа, p_i — давления фаз, ρ_i^0 — истинные плотности фаз, α_i — объемные содержания фаз, q — интенсивность теплообмена, n — число пузырьков в единице объема, w — радиальная скорость движения стенки пузырька. Скорости u и v соответствуют движению по координатам x и y. Нижними индексами $i = l, g$ отмечены параметры жидкой и газовой фаз.

При описании радиального движения в соответствии с уточнением, предложенным в работе [3], будем полагать, что $w = w_R + w_A$, где w_R описывается уравнением Рэлея – Ламба:

$$a\frac{dw_R}{dt} + \frac{3}{2}w_R^2 + 4\nu_l\frac{w_R}{a} = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0},$$

ν_l — вязкость жидкости. Добавка w_A определяется из решения задачи о сферической разгрузке на сфере радиуса a в несущей жидкости в акустическом приближении

$$w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}}.$$

Здесь C_l — скорость звука в «чистой» (без пузырьков) жидкости. Жидкость примем акустически сжимаемой, а газ — калорически совершенным

$$p_l = p_0 + C_l^2(\rho_l^0 - \rho_{l0}^0), \quad p_g = \rho_g^0 R T_g,$$

где R — газовая постоянная, T_g — температура. Здесь и далее индексами 0 внизу снабжены параметры, относящиеся к начальному невозмущенному состоянию.

Тепловой поток q задается приближенным конечным соотношением [1]:

$$q = \mathrm{Nu}\lambda_g \frac{T_g - T_0}{2a}, \qquad \frac{T_g}{T_0} = \frac{p_g}{p_0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^3,$$

$$\mathrm{Nu} = \begin{cases} \sqrt{\mathrm{Pe}}, & \mathrm{Pe} \geq 100, \\ 10, & \mathrm{Pe} < 100, \end{cases} \qquad \mathrm{Pe} = 12(\gamma - 1)\frac{T_0}{|T_g - T_0|}\frac{a|w|}{\kappa_g}, \qquad \kappa_g = \frac{\lambda_g}{c_{pg}\rho_g^0},$$

где $T_0 = \mathrm{const}$ — температура жидкости, λ_g и c_{pg} — теплопроводность и теплоемкость газа при постоянном давлении, Nu — число Нуссельта.

Для пузырьковой смеси, описанной выше, известна частота собственных колебаний пузырьков (частота Миннаэрта) ω_M и равновесная скорость звука C:

$$\omega_M = \sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\rho_{l0}}}\frac{1}{a_0}, \qquad C = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\alpha_{g0}\rho_{l0}}}.$$

Принятая система уравнений позволяет адекватно описывать динамику волн с достаточно «крутыми» участками, когда сжатие пузырьков определяется не только эффектами радиальной инерции несущей жидкости, но и акустической разгрузкой на пузырьках, и, следовательно, сжимаемостью жидкости. Кроме того, из этой математической модели в частном случае при $\alpha_g = 0$ следует волновое уравнение для акустически сжимаемой жидкости. При исследовании взаимодействия волн в «чистой» жидкости с пузырьковой зоной это обстоятельство, в свою очередь, позволяет использовать сквозные методы расчета.

2. МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА

Для численного анализа задачи об эволюции волн в жидкости при наличие в ней пузырьковой зоны удобнее пользоваться системой уравнений, приведенной ранее, записанной в лагранжевых переменных. Это, в частности, связано с тем, что в лагранжевых координатах пузырьковая зона непо-

движна. Из приведенных уравнений после некоторых преобразований можно получить следующую систему в лагранжевых переменных:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho J}\left(\frac{\partial p_l}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial p_l}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x_0}\right), \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho J}\left(\frac{\partial p_l}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial x_0} - \frac{\partial p_l}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial y_0}\right), \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = v,$$

$$\frac{\partial p_l}{\partial t} = \frac{C_l^2\rho_l^0}{1-\alpha_g}\left[\frac{3\alpha_g}{a}w + \left(\frac{\alpha_g}{J} + \frac{\rho_{l0}}{J^2\rho_l^0}\right)\frac{\partial J}{\partial t}\right],$$

$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} = \frac{3\alpha_g}{a}w - \frac{\alpha_g}{J}\frac{\partial J}{\partial t}, \qquad \frac{\partial p_g}{\partial t} = -\frac{3\gamma p_g}{a}w - \frac{3(\gamma-1)}{a}q, \tag{1}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = w = w_R + w_A,$$

$$\frac{\partial w_R}{\partial t} = \left[\frac{p_g - p_l}{\rho_l^0} - \frac{3}{2}w_R^2 - 4\nu_l\frac{w_R}{a}\right]\frac{1}{a}, \qquad w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}}$$

$$\left(J = \frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x_0}, \qquad \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial u}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial v}{\partial y_0} - \frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial v}{\partial x_0}\right),$$

где x_0 и y_0 — лагранжевые переменные, в качестве которых берутся начальные эйлеровы координаты, J — якобиан перехода от лагранжевых к эйлеровым переменным [4].

Система (1) решается численно по явной схеме. Причем не требуется вводить искусственную вязкость, поскольку приведенные уравнения из-за учета межфазного теплообмена и акустической разгрузки являются системой с естественной диссипацией [4].

Приведем принцип построения разностной схемы, которая принята для решения данной задачи. Для аппроксимации дифференциальных уравнений используем равномерную шахматную сетку:

$$(x_{0i}, y_{0j}, t_k), \qquad (x_{0i+1/2}, y_{0j+1/2}, t_k),$$

$$x_{0i+1} = x_{0i} + h_{x_0}, \qquad x_{0i+1/2} = x_{0i} + 0,5h_{x_0}, \qquad i = 0, 1, \ldots, N_1 - 1,$$

$$y_{0j+1} = y_{0j} + h_{y_0}, \qquad y_{0j+1/2} = y_{0j} + 0,5h_{y_0}, \qquad j = 0, 1, \ldots, N_2 - 1,$$

$$x_{00} = 0, \qquad x_{0N_1} = M_1, \qquad y_{00} = 0, \qquad y_{0N_2} = M_2,$$

$$t_{k+1} = t_k + \tau, \qquad t_k = k\tau, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где h_{x_0}, h_{y_0} и τ — соответственно шаги по координатам X, Y и времени. К узлам сетки (x_{0i}, y_{0j}, t_k) будем относить сеточные функции скоростей u_{ij}^k, v_{ij}^k и эйлеровых переменных x_{ij}^k и y_{ij}^k, к «полуцелым» точкам $(x_{0i+1/2}, y_{0j+1/2}, t_k)$ — сеточные функции всех остальных параметров. Такая аппроксимация обеспечивает устойчивость решения волновых задач в однофазных системах (жидкостях и газах) конечно-разностным методом [4].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

На рис. 2 представлены результаты расчетов для случая, когда колоколообразный волной импульс

$$p^0(t, y) = p_0 + \Delta p_0 \cdot \exp\left[-\left(\frac{t - \delta t/2}{\delta t/2}\right)^2\right], \tag{2}$$

образованный плоским ударом на границе x_0, распространяется в полубесконечном канале, наполненном водой, при наличии в середине канала зоны конечных размеров, заполненной водовоздушной смесью (рис. 1). Здесь $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Па — первоначальное давление, $\Delta p_0 = 3 \cdot 10^5$ Па — амплитуда импульса, $\delta t = 10^{-3}$ с — характерная временная протяженность импульса. Здесь и далее на рисунках импульс падает на завесу, полностью сформировавшись в области «чистой» жидкости ($C_l \delta t < L$). Расчетная область взята достаточно широкой, так, чтобы вторичные сигналы, образованные от стенок области в период взаимодействия волнового импульса с завесой, не сказывались.

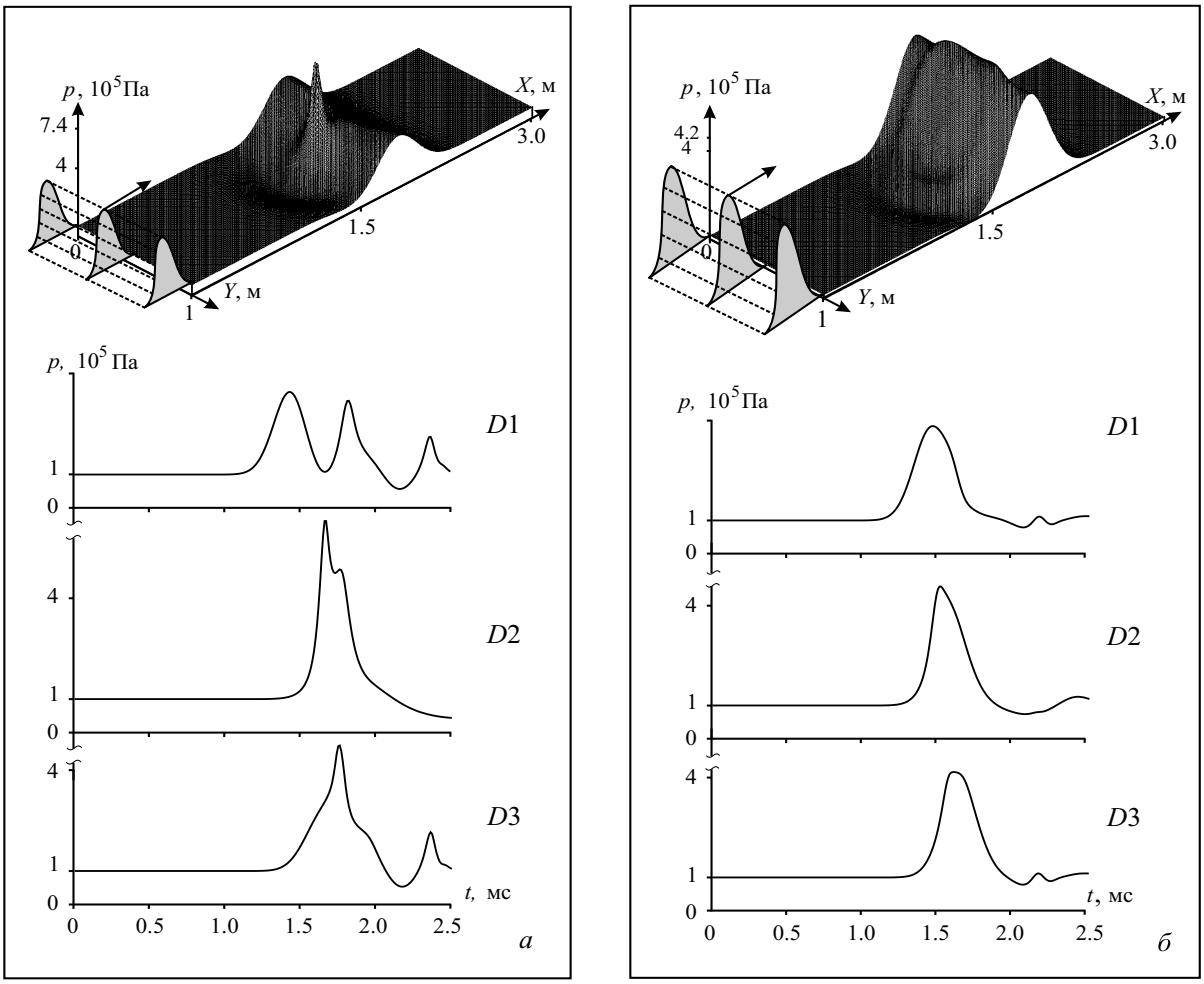


Рис. 2. Влияние начального объемного содержания газа в пузырьковой зоне на динамику волнового импульса. Случаи *а* и *б* соответствуют $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ и 10^{-3}

На рис. 2 представлены расчеты, которые иллюстрируют влияние начального объемного содержания газа в пузырьковой зоне на динамику волнового импульса. Приведены расчетные осцилограммы $p(t)$ для датчиков $D1$, $D2$ и $D3$, которые расположены соответственно перед пузырьковой зоной на расстоянии 0.1 м, в середине пузырьковой зоны и за зоной на расстоянии 0.05 м от ее задней границы. Распределения давления для обеих случаев приведены для момента времени $t = 1.7 \cdot 10^{-3}$ с. Остальные параметры системы: $a_0 = 10^{-3}$ м, $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Па, $T_0 = 300$ К, $\lambda = 2.6 \cdot 10^{-2}$ Дж/(К·с· м), $\rho_l^0 = 1000$ кг/м^3, $\rho_g^0 = 1.29$ кг/м^3, $c_g = 1006$ Дж/(К·кг), $l_x = l_y = 0.05$ м, $\Delta p_0 = 3{\cdot}10^{-5}$ Па, $\delta t = 10^{-3}$ с. Видно, когда $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ (см. рис. 2, *а*) из-за двумерных эффектов внутри пузырьковой зоны в некоторые моменты времени могут реализовываться башнеобразные распределения давления. При этом датчик давления, расположенный в середине пузырьковой области, будет регистрировать всплески давления, превышающие амплитуду исходного импульса. Для представленного примера датчик $D2$ регистрирует сигнал с амплитудой около $6 \cdot 10^5$ Па, что на $2 \cdot 10^5$ Па превышает амплитуду первоначального сигнала. Этот башнеобразный всплеск давления, уменьшаясь по амплитуде, «сносится» по направлению движения основной волны. Такая картина видна из расчетной осцилограммы для датчика $D3$ (регистрируемая амплитуда превышает первоначальный сигнал примерно на $1 \cdot 10^5$ Па). Когда $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ (см. рис. 2, *б*), внутри пузырьковой области тоже могут реализовываться всплески давления, превышающие по амплитуде первоначальный сигнал, но при этом разница амплитуд первоначального импульса и давления, реализованного в середине области, небольшая, примерно $0.5 \cdot 10^5$ Па. Из анализа рис. 2 следует, что из-за большого объемного содержания пузырьков сильно снижается скорость распространения возмущений в пузырьковой зоне, что, в свою очередь, обеспечивает более симметричную картину куммуляции волны в центр зоны.

Рис. 3 иллюстрирует влияние начального размера пузырьков в завесе на характер эволюции волнового импульса, заданного в виде (2), в полубесконечном канале, содержащем пузырьковую зону. На рис. 3 представлены осцилограммы для датчиков $D1$, $D2$ и $D3$. Из рис. 3 следует, что для более крупных пузырьков датчик, расположенный в середине пузырьковой зоны, фиксирует сигнал, меньший по амплитуде, чем первоначальный, в то время как для более мелких пузырьков $a_0 = 10^{-3}$ м (см. рис. 2, *а*), прохождение волнового импульса сопровождается проявлением в области пузырьковой зоны башнеобразных распределений давления, амплитуда которого превышает амплитуду первоначального сигнала. Из волновой динамики пузырьковой жидкости известно, что при прохождении волны пузырьки начинают осцилировать с характерными временами пульсации ω_M^{-1}. При этом если это время пульсации близко по значению с характерной протяженностью импульса, т. е. $\omega_M^{-1} \simeq \delta t$, то это приводит к значительному увеличению эффектов диссипации и дисперсии [1]. Таким образом, для $a_0 = 10^{-2}$ м (см. рис. 3) $\omega_M^{-1} \simeq \delta t$, и внутри завесы происходит сильное затухание возмущения. Когда $a_0 = 10^{-3}$ м (см. рис. 2, *а*), $\omega_M^{-1} < \delta t$, при этом затухание волновых возмущений происходит слабее, и в некоторых точках внутри пузырьковой завесы могут наблюдаться башнеобразные распределения давления, превышающие по амплитуде первоначальный импульс. Отметим, что затухание волнового импульса для более крупных пузырьков может быть еще обусловлено диссипацией, связанной с акустической разгрузкой на пузырьках [3].

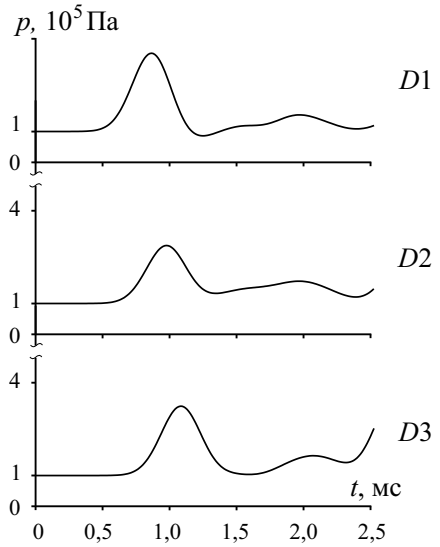


Рис. 3. Влияние начального размера пузырьков в завесе на характер эволюции волнового импульса. Расположение датчиков, параметры исходного импульса и смеси, кроме радиуса пузырьков такие же, как на рис. 2. Начальный радиус пузырьков $a_0 = 10^{-2}$ м

Численные исследования показали, что эволюция волнового импульса в жидкости, содержащей пузырьковую зону конечных размеров, сопровождалась образованием в завесе башнеобразных распределений давлений, превышающих амплитуду первоначального сигнала, необходимо выполнение следующего условия

$$\lambda_b \gg l_y, \tag{3}$$

где $\lambda_b = C\delta t$ — характерная пространственная ширина импульсного сигнала в пузырьковой жидкости, в противном случае ($\lambda_b \leq l_y$), частицы двухфазной системы, находящиеся внутри пузырьковой зоны, «не чувствуют» внешний импульсный сигнал [5, 6]. Из анализа рис. 2 и 3 следует, что только этого условия недостаточно. Наряду с условием (3), для реализации более симметричной кумуляции волны в завесе необходимо, чтобы в завесе было большое объемное содержание газа, а также необходимо подобрать пузырьки такого радиуса, чтобы сигнал в завесе затухал как можно меньше.

Пусть одна из боковых границ расчетной области, которая является жесткой стенкой, частично покрыта пузырьковой завесой (рис. 4, *а*). Исследуем воздействие волнового импульса на участок твердой поверхности, которая покрыта завесой (рис. 5). Случаи *а* и *б* на рис. 5 соответствуют протяженностям импульсов $\delta t = 10^{-4}$ и 10^{-3} с. Распределения давления $p(x, y)$ приведены в моменты $t = 6 \cdot 10^{-4}$ с (см. рис. 5, *а*) и $1.5 \cdot 10^{-3}$ с (см. рис. 5, *б*). Остальные параметры импульса и сигнала такие же, как на рис. 2. Из расчетных осцилограмм, соответствующих показаниям датчика $D2$, видно, что при распространении более длительного сигнала (см. рис. 5, *б*) из-за двумерных эффектов участок стены, который покрыт завесой, может «почувствовать» башнеобразное распределение давления с амплитудой, превышающей амплитуду первоначального сигнала (для данного случая разница амплитуд составляет приблизительно $2 \cdot 10^5$ Па). Этот башнеобразный всплеск давления, уменьшаясь по амплитуде, «скользит» по стенке по направлению распространения основной волны. Такая картина видна из расчетной осцилограммы для датчика $D3$ (регистрируемая амплитуда превышает первоначальную примерно на $1 \cdot 10^5$ Па). В случае коротковолнового сигнала (см. рис. 5, *а*) датчик $D2$ практически «не чувствует» внешний импульсный сигнал, а датчик $D3$ фиксирует ослабленный сигнал с амплитудой $1 \cdot 10^5$ Па.

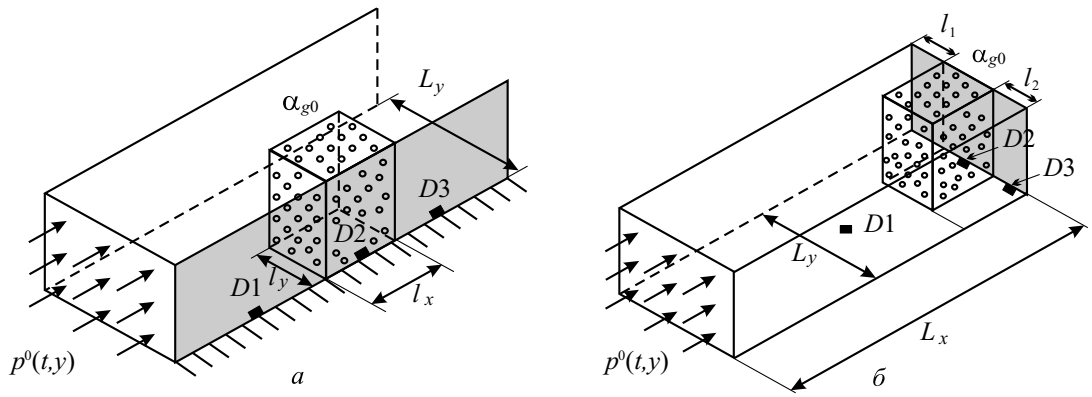


Рис. 4. Схематическое изображение расчетной области в пространстве. Представлено схематическое расположение датчиков $D1$, $D2$ и $D3$

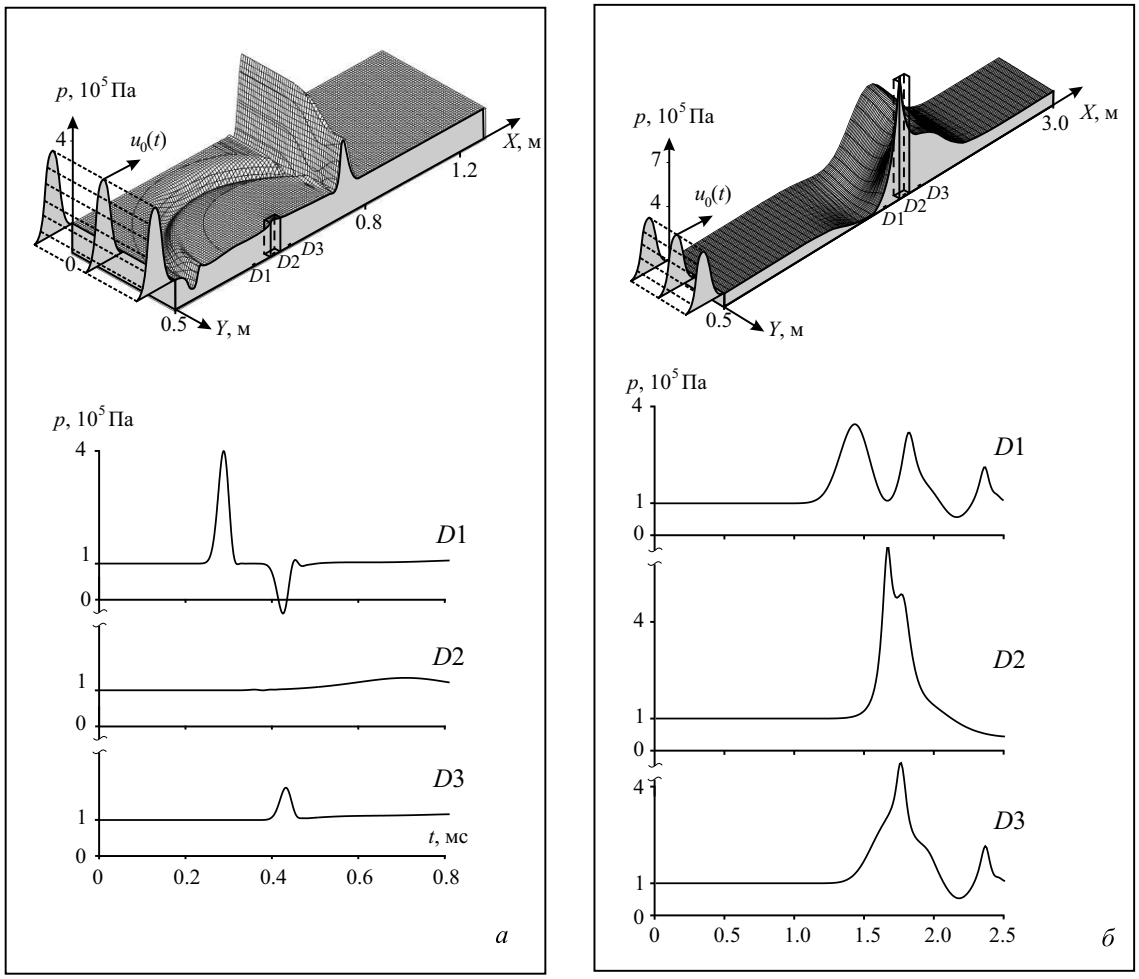


Рис. 5. Воздействие импульсного сигнала на боковую стенку, которая частично покрыта пузырьковой зоной. Датчик $D1$ расположен на стенке на расстоянии 0.1 м от передней границы завесы, $D2$ — в середине завесы, $D3$ — на расстоянии 0.05 м от задней границы завесы

Для результатов приведенных выше, расчеты проводились для полубесконечного канала, ограниченного с двух боков жесткими стенками. Рассмотрим ситуацию, когда канал ограничен и по направлению оси $0x$, т. е. на некотором расстоянии L_x от места инициализации сигнала ($x = x_0$) расположена твердая стенка. Изучим фронтальное воздействие импульсного сигнала на стенку, частично покрытую пузырьковой завесой. Будем полагать, что завеса расположена в середине канала, т. е. $l_1 = l_2$ (см. рис. 4, *б*). Видно (рис. 6), что датчик $D1$ фиксирует первоначальный импульс (обращенный вверх), отраженный сигнал (волну разряжения, обращенную вниз) и сигнал, отраженный

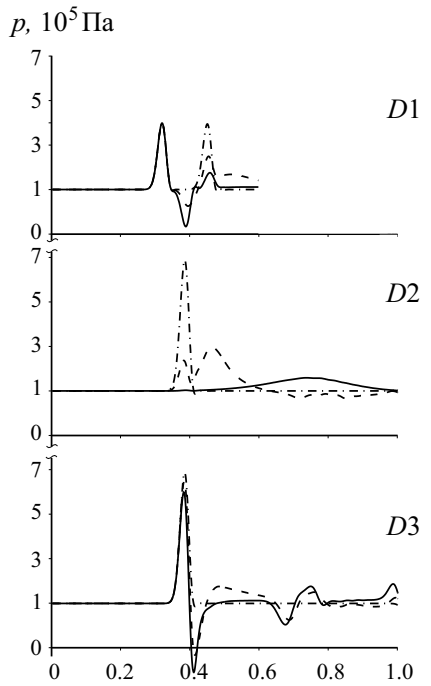


Рис. 6. Фронтальное воздействие импульсного сигнала на твердую стенку, частично покрытую пузырьковой зоной. Расположение датчиков $D1$ и $D2$ см. на рис. 2. Датчик $D3$ расположен на стенке, но вне участка стенки, покрытого завесой, на расстоянии 0.05 м от боковой границы пузырьковой зоны

от твердой стенки (волну сжатия). Штрихпунктирная линия соответствует случаю отсутствия перед стенкой завесы. Сплошная и пунктирная линии соответствуют объемному содержанию газа в завесе $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ и 10^{-3}. Параметры импульса и системы следующие: $\delta t = 10^{-4}$ с, $L_y = 0.95$ м, $l_1 = l_2 = 0.45$ м, $L_x = 0.5$ м. Остальные параметры такие же как на рис. 2. Из показаний датчика $D2$ следует, что пузырьковая завеса конечных размеров в зависимости от объемного содержания газа существенно уменьшает амплитуду воздействия на стенку волнового импульса. Видно, что импульс, первоначально имевший амплитуду $3 \cdot 10^5$ Па, пройдя через завесу с объемным содержанием $\alpha_{g0} = 10^{-2}$ или 10^{-3}, воздействует на стенку с амплитудой $0.5 \cdot 10^5$ Па или $2 \cdot 10^5$ Па соответственно. В случае отсутствия завесы на стенку воздействует сигнал с амплитудой около $6 \cdot 10^5$ Па. При этом необходимо отметить, что в случае наличия завесы увеличивается время воздействия на стенку. Датчик $D3$ фиксирует падающий сигнал (обращенный вверх), и «пристегнутый» к нему сигнал, отраженный от границы завесы (волна разряжения, обращенная вниз), фиксирует остальные всплески давления, это возмущения, отраженные от боковой границы рассчетной области. Из показаний этого датчика следует, что для некоторых точек жесткой стенки наличие на расстоянии 0.05 м от них прямоугольной пузырьковой зоны, во-первых, уменьшает амплитуду воздействия импульсного сигнала примерно на $1 \cdot 10^5$ Па, во-вторых, эти точки «чувствуют» волну разряжения, которая в зависимости от длительности и амплитуды может вызвать откольные разрушения объектов, находящихся на твердой стенке.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установлено, что эволюция импульсного сигнала в полубесконечном канале, содержащем пузырьковую завесу конечных размеров, и воздействие такого сигнала на боковую границу канала, содержащего пристеночную пузырьковую завесу конечных размеров, может сопровождаться проявлением башнеобразных распределений давления, превосходящих по амплитуде первоначальный сигнал. Эти всплески давления проявляются при следующих условиях. Во-первых, необходимо, чтобы характерная длина импульсного сигнала превышала размеры пузырьковой зоны. Во-вторых, для более симметричной картины кумуляция возмущений необходимо наличие большого количества газа (для результатов, приведенных в данной работе $\alpha_{g0} > 10^{-3}$) и, в-третьих, нужно подобрать пузырьки такого размера, чтобы сигнал в завесе затухал как можно меньше.

Когда по твердой стенке, имеющей пристеночную пузырьковую завесу конечных размеров, «бьет» волновой импульс, завеса в зависимости от параметров может существенно уменьшить воздействие импульсного сигнала. Пристеночная пузырьковая завеса влияет и на участки, которые находятся на некотором расстоянии от завесы. Эти участки могут почувствовать ослабленный сигнал на стенке и «пристегнутую» к основному импульсу волну разряжения.

Автор выражает благодарность научному руководителю д-ру физ.-мат. наук, профессору Владиславу Шайхулагзамовичу Шагапову за полезные замечания и постоянный интерес к исследовательской работе автора.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 08-01-97033), *Программы Фонда фундаментальных исследования ОЭММПУ РАН* (*проект* ОЕ-15) *и Программы Фонда фундаментальных исследований Президиума РАН* (*проект* П-17).

Библиографический список

1. *Нигматулин, Р.И.* Динамика многофазных сред: в 2 т. / Р.И. Нигматулин. – М.: Наука, 1987. – Т. 1, 2. – 360 с.
2. *Кутателадзе, С.С.* Тепло-, массообмен и волны в газожидкостных системах / С.С. Кутателадзе, В.Е. Накоряков. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987. – 302 с.
3. *Нигматулин, Р.И.* Проявление сжимаемости несущей фазы при распространении волн в пузырьковой среде / Р.И. Нигматулин, В.Ш. Шагапов, Н.К. Вахитова // Докл. АН СССР. – 1989. – Т. 304, № 5. – С. 1077–1088.
4. *Самарский, А.А.* Разностные методы решения задач газовой динамики / А.А. Самарский, Ю.П. Попов. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
5. *Нигматулин, Р.И.* Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьковые зоны / Р.И. Нигматулин, В.Ш. Шагапов, И.К. Гималтдинов, М.Н. Галимзянов // Докл. АН. – 2001. – Т. 378, № 6. – С. 763–767.
6. *Шагапов, В.Ш.* Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьки / В.Ш. Шагапов, И.К. Гималтдинов, М.Н. Галимзянов // Механика жидкости и газа. – 2002. – № 2. – С. 139–147.

УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

РАЗРЕШИМОСТЬ В ЦЕЛОМ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ В СЛАБОСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

С.А. Гриценко

Белгородский государственный университет,
кафедра прикладной математики и механики
E-mail: sgritsenko@bsu.edu.ru

В работе рассматривается система уравнений, состоящая из уравнений Стокса, описывающих движение слабосжимаемой вязкой жидкости, в которой кинематическая вязкость жидкости зависит от концентрации примеси, и конвективного уравнения диффузии. Доказывается существование обобщенного решения начально-краевой задачи в ограниченной области с однородным условием Дирихле для скорости жидкости и однородным условием Неймана для концентрации примеси.

Ключевые слова: слабосжимаемая вязкая жидкость, уравнение Стокса, конвективное уравнение диффузии.

The Global Solvability of the Problem of Nonlinear Diffusion and Slow Convection in Slightly Compressible Viscous Fluid

S.A. Gritsenko

Belgorod State University,
Chair of Applied Mathematics and Mechanics
E-mail: sgritsenko@bsu.edu.ru

The paper deals with Stokes system, corresponding to the motion of slightly compressible viscous fluid where kinematic viscous depends on the admixture concentration. The system also contains the convective diffusion equation. The article proves the existence of generalized solution of the initial-boundary problem for this system in the limited domain with the homogeneous Dirichlet condition for the fluid velocity and the homogeneous Neumann condition for the concentration of admixture on the boundary of domain.

Key words: slightly compressible viscous fluid, Stokes equation, convective diffusion equation.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^3$ — ограниченная связная область с липшицевой границей Γ, $\mathbf{v}(x,t) = (v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t))$ — скорость жидкости, $p(x,t)$ — давление, $c(x,t)$ — концентрация примеси.

В безразмерных (не отмеченных звездочкой) переменных $\mathbf{x}_* = \mathbf{x}L$, $t_* = t\tau$, $\mathbf{v}_* = \mathbf{v}L$, $\mathbf{F}_* = \mathbf{F}g$, $p_* = pp_0$ изучаемая система уравнений для скорости жидкости $\mathbf{v}(x,t)$, давления $p(x,t)$ и концентрации примеси $c(x,t)$ имеет вид

$$\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\alpha_\mu \mu(c)\nabla\mathbf{v} + (\alpha_\nu \operatorname{div}\mathbf{v} - p)\mathbb{I}\right) + \mathbf{F}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_p \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{v}(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \qquad \mathbf{v}(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla c = \alpha_D \,\Delta c \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \qquad c(x,0) = c_0(x), \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{1.5}$$

© С.А. Гриценко, 2010

где $\mu(c)$ — безразмерная вязкость, $\mathbb{I}$ — единичная матрица, $\mathbf{F}$ — заданная плотность внешних массовых сил, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Γ.

Безразмерные положительные постоянные α_i $(i = \tau, \nu, \mu, \ldots)$ определяются формулами:

$$\alpha_\tau = \frac{L}{g\tau^2}, \qquad \alpha_\nu = \frac{\nu}{\tau L g \rho_0}, \qquad \alpha_\mu = \frac{2\mu_0}{\tau L g \rho_0}, \qquad \alpha_p = \frac{p_0}{L g \rho_0}, \qquad \alpha_D = \frac{D\tau}{L},$$

где L — характерный макроскопический размер (диаметр рассматриваемой физической области), τ — характерное время данного физического процесса, ρ_0 — средняя плотность воздуха при атмосферном давлении, g — ускорение силы тяжести, p_0 — атмосферное давление, μ_0 — вязкость жидкости при нулевой концентрации примеси, D — коэффициент диффузии.

Функциональные пространства и нормы в них обозначаются, как принято в работе [1].

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определение 1. Функции $\mathbf{v}(x,t)$, $p(x,t)$ и $c(x,t)$ называются *обобщенным решением задачи* (1.1)–(1.5) в области $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, если

1) $\partial p/\partial t \in \mathbb{L}_2(\Omega_T)$, $\quad \mathbf{v} \in \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$, $\quad c \in \mathbb{L}_\infty(\Omega_T) \bigcap \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$;

2) почти всюду в области Ω_T выполнено уравнение неразрывности (1.2);

3) функции $\mathbf{v}$, p и c удовлетворяют интегральному тождеству:

$$\int_{\Omega_T} \left(\alpha_\tau \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha_\mu \mu(c) \nabla \mathbf{v} : \nabla \varphi - \alpha_\nu \operatorname{div} \mathbf{v} \operatorname{div} \varphi + p \operatorname{div} \varphi + \mathbf{F} \cdot \varphi \right) dx\, dt = 0 \tag{2.1}$$

для произвольной гладкой вектор-функции $\varphi(\mathbf{x},t)$, равной нулю на границе Γ и при $t = T$, и интегральному тождеству

$$\int_{\Omega_T} \left(-c \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{v}\, \nabla c \xi + \alpha_D\, \nabla c \cdot \nabla \xi \right) dx\, dt = \int_\Omega c_0(x) \xi(x,0)\, dx \tag{2.2}$$

для произвольной гладкой функции ξ, равной нулю при $t = T$.

Здесь используются обозначения:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i\, v_i, \qquad \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Пусть выполнено следующее предположение: $\mu(c) \in \mathbb{C}^2(0,+\infty)$, $|\mu|^{(1)}_{\Omega_T} < {\nu_0}^{-1}$, $0 < \nu_0 \le \mu(c) \le \frac{1}{\nu_0}$, $0 \le c_0(x) \le 1$, $c_0(x) \in \mathbb{L}_\infty(\Omega)$, $\int_{\Omega_T} |\mathbf{F}|^2\, dx\, dt = F^2 < \infty$.

Теорема 1. *Задача* (1.1)–(1.5) *имеет хотя бы одно обобщенное решение и для него справедливы оценки:*

$$\max_{0<t<T} \int_\Omega \left(\alpha_\tau |\mathbf{v}|^2 + \frac{1}{\alpha_p} p^2 \right) dx + \int_{\Omega_T} (\alpha_\nu (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \alpha_\mu |\nabla \mathbf{v}|^2)\, dx\, dt \leqslant M F^2, \tag{2.3}$$

$$0 \leqslant c(x,t) \leqslant 1. \tag{2.4}$$

где M — постоянная, зависящая только от ν_0 и T.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Пусть множество $\mathfrak{M}$ определено как $\mathfrak{M} = \{\bar{c} \in \mathbb{C}(\Omega_T) \mid 0 \leqslant \bar{c} \leqslant 1\}$. Для $\bar{c} \in \mathfrak{M}$ определим функцию $\mathbf{u}(x,t)$ как решение задачи

$$\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \operatorname{div} (\alpha_\mu \mu(\bar{c}) \nabla \mathbf{u} + (\alpha_\nu \operatorname{div} \mathbf{u} - q) \mathbb{I}) + \mathbf{F}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \alpha_p \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{u}(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \qquad \mathbf{u}(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{3.3}$$

Определение 2. Функции $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ и $q(\mathbf{x},t)$ называются *обобщенным решением задачи* (3.1)–(3.3) в области Ω_T, если

1) $\partial q/\partial t \in \mathbb{L}_2(\Omega_T)$, $\quad \mathbf{u} \in \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$;

2) почти всюду в области Ω_T выполнено уравнение неразрывности (3.2);

3) функции $\mathbf{u}$ и q удовлетворяют интегральному тождеству:

$$\int_{\Omega_T} \left(\alpha_\tau \mathbf{u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \alpha_\mu \mu(\bar{c})\nabla\mathbf{u} : \nabla\varphi - \alpha_\nu \operatorname{div}\mathbf{u}\operatorname{div}\varphi + q\operatorname{div}\varphi + \mathbf{F}\cdot\varphi\right) dx\,dt = 0 \tag{3.4}$$

для произвольной гладкой вектор-функции $\varphi(\mathbf{x},t)$, равной нулю на границе Γ и при $t=T$.

Лемма 1. *Для каждого фиксированного $\bar{c}\in\mathfrak{M}$ существует единственное обобщенное решение задачи* (3.1)–(3.3) *и для него справедлива оценка*

$$\max_{0<t<T}\int_\Omega \left(\alpha_\tau|\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p}q^2\right)dx + \int_{\Omega_T}\left(\alpha_\nu(\operatorname{div}\mathbf{u})^2 + \alpha_\mu|\nabla\mathbf{u}|^2\right)dx\,dt \leqslant MF^2. \tag{3.5}$$

Доказательство. Полагая в тождестве (3.4) $\mathbf{u}=\varphi$ и выражая в нем $\operatorname{div}\mathbf{u}$ в третьем слагаемом из уравнения неразрывности (3.2), получим стандартным образом равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(\alpha_\tau|\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p}q^2\right)dx + \alpha_\nu\int_\Omega(\operatorname{div}\mathbf{u})^2\,dx + \alpha_\mu\int_\Omega\mu(\bar{c})|\nabla\mathbf{u}|^2\,dx = \int_\Omega \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}\,dx.$$

Проинтегрируем его по времени в пределах от 0 до T, учтем предположение $0<\nu_0\leqslant\mu(c)\leqslant 1/\nu_0$, а правую часть оценим с помощью неравенства Коши с ε:

$$\frac{1}{2}\max_{0<t<T}\int_\Omega\left(\alpha_\tau|\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p}q^2\right)dx + \alpha_\nu\int_{\Omega_T}(\operatorname{div}\mathbf{u})^2\,dx\,dt + \alpha_\mu\nu_0\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}|^2\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\Omega_T}|\mathbf{F}|^2\,dx\,dt + \frac{\varepsilon T}{2}\max_{0<t<T}\int_\Omega|\mathbf{u}|^2\,dx, \quad \forall\,\varepsilon>0.$$

Полагая $\varepsilon=\alpha_\tau/2T$, получим требуемую оценку (3.5).

Она позволяет доказать существование и единственность обобщенного решения методом Фаэдо – Галеркина, подробное изложение можно найти, например, в работе [2, с. 88]. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{N}$ — нормированное пространство с нормой:

$$(\|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{N}})^2 = \max_{0<t<T}\int_\Omega|\mathbf{u}|^2\,dx + \int_{\Omega_T}\left((\operatorname{div}\mathbf{u})^2 + |\nabla\mathbf{u}|^2\right)dx\,dt. \tag{3.6}$$

В силу леммы 1 определен оператор $\mathbb{A}:\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$ такой, что $\mathbf{u}=\mathbb{A}(\bar{c})$.

Лемма 2. *Оператор $\mathbb{A}$ — непрерывный.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{u}_1=\mathbb{A}(\bar{c}_1)$, $\mathbf{u}_2=\mathbb{A}(\bar{c}_2)$, $\mathbf{u}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$, $\bar{c}=\bar{c}_1-\bar{c}_2$, $q=q_1-q_2$. Тогда разность $(\mathbf{u},\,q)$ является решением следующей начально-краевой задачи:

$$\alpha_\tau\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\alpha_\mu\mu(\bar{c}_1)\nabla\mathbf{u} + (\alpha_\nu\operatorname{div}\mathbf{u} - q)I\right) + \alpha_\mu\operatorname{div}\left((\mu(\bar{c}_1)-\mu(\bar{c}_2))\,\nabla\mathbf{u_2}\right), \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \alpha_p\operatorname{div}\mathbf{u} = 0,$$

$$\mathbf{u}(x,t)=0 \quad \text{при} \quad x\in\Gamma, \qquad \mathbf{u}(x,0)=0 \quad \text{при} \quad x\in\Omega.$$

Умножим уравнение (3.7) на функцию $\mathbf{u}$ и проинтегрируем по области Ω:

$$\alpha_\tau\int_\Omega\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\cdot\mathbf{u}\,dx - \alpha_\mu\int_\Omega\operatorname{div}\left(\mu(\bar{c}_1)\,\nabla\mathbf{u}\right)\cdot\mathbf{u}\,dx - \int_\Omega\operatorname{div}\left((\alpha_\nu\operatorname{div}\mathbf{u}-q)\mathbb{I}\right)\cdot\mathbf{u}\,dx =$$

$$= \alpha_\mu\int_\Omega\operatorname{div}\left((\mu(\bar{c}_1)-\mu(\bar{c}_2))\nabla\mathbf{u}_2\right)\cdot\mathbf{u}\,dx.$$

Выполняя интегрирование по частям и выражая $\operatorname{div}\mathbf{u}$ из уравнения неразрывности, имеем:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(\alpha_\tau|\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p}q^2\right)dx + \alpha_\nu\int_\Omega(\operatorname{div}\mathbf{u})^2\,dx + \alpha_\mu\int_\Omega\mu(\bar{c}_1)|\nabla\mathbf{u}|^2\,dx =$$

$$= -\alpha_\mu \int_\Omega (\mu(\bar{c}_1) - \mu(\bar{c}_2))(\nabla \mathbf{u}_2 : \nabla \mathbf{u})\, dx.$$

Проинтегрировав последнее равенство по времени в пределах от 0 до T, получаем

$$\max_{0<t<T} \int_\Omega \left(\alpha_\tau |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p} q^2\right) dx + 2\alpha_\nu \int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{u})^2\, dx\, dt + 2\alpha_\mu \int_\Omega \mu(\bar{c_1}) |\nabla \mathbf{u}|^2\, dx\, dt =$$

$$= -2\alpha_\mu \int_{\Omega_T} (\mu(\bar{c}_1) - \mu(\bar{c}_2))(\nabla \mathbf{u}_2 : \nabla \mathbf{u})\, dx\, dt. \tag{3.8}$$

Оценим теперь правую часть (3.8), пользуясь ограниченностью производной $\mu'(\bar{c})$, неравенством Гельдера и неравенством Коши с ε:

$$\Big| -2\alpha_\mu \int_\Omega (\mu(\bar{c}_1) - \mu(\bar{c}_2))(\nabla \mathbf{u}_2 : \nabla \mathbf{u})\, dx\, dt \Big| \leqslant \frac{2\alpha_\mu}{\nu_0} \int_{\Omega_T} |\bar{c} \nabla \mathbf{u}_2 : \nabla \mathbf{u}|\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\alpha_\mu}{\nu_0} \sqrt{\int_{\Omega_T} |\bar{c} \nabla \mathbf{u}_2|^2\, dx\, dt} \sqrt{\int_{\Omega_T} |\nabla \mathbf{u}|^2\, dx\, dt} \leqslant \frac{2\alpha_\mu}{\nu_0} \left(\frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla \mathbf{u}|^2\, dx\, dt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega_T} |\bar{c} \nabla \mathbf{u}_2|^2\, dx\, dt \right).$$

Учитывая строгую положительность функции $\mu(c)$ оценим левую часть (3.8) снизу выражением $M_0 \|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{N}}$.

Далее положим $\varepsilon = \nu_0^2/2$ и воспользуемся оценкой (3.5) для $|\nabla \mathbf{u}_2|$. Имеем:

$$(\|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{N}})^2 \leqslant M_1 F^2 \int_{\Omega_T} |\bar{c}|^2\, dx\, dt = M_1 F^2 \left(\|\bar{c}\|_{2,\Omega_T}\right)^2 \leqslant M_1 F^2 |\Omega_T| (\max_{\Omega_T} |\bar{c}|)^2 = M_2 \left(|\bar{c}|^{(0)}_{\Omega_T}\right)^2.$$

Таким образом, $\|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{N}} \leqslant \sqrt{M_2}\, |\bar{c}|^{(0)}_{\Omega_T}$, что и доказывает непрерывность оператора $\mathbb{A}$. Лемма доказана.

Полученная таким образом функция $\mathbf{u}$, вообще говоря, не является достаточно гладкой, поэтому далее она сглаживается с использованием следующего оператора усреднения по переменным x и t:

$$\mathbf{w}_h(x,t) = \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}(x,t)) = \frac{1}{h^4} \int_t^{t+h} d\tau \int_{R^3} \eta\left(\frac{|x-y|}{h}\right) \mathbf{u}(y,\tau)\, dy,$$

где усредняющее ядро $\eta(s) \in \mathbb{C}(R^3)$ — четная неотрицательная функция, $\eta(s) = 0$, если $|s| \geqslant 1$, $\int_{|s|\leqslant 1} \eta(|s|)\, ds = 1$. Функции $\mathbf{w}_h$ являются гладкими, финитными и при $h \to 0$ сходятся к $\mathbf{u}$ по норме $L_2(\Omega'_{T-\delta})$ в любой строго внутренней подобласти $\Omega'_{T-\delta} \subset \Omega_T$, $h \leqslant \delta$.

Определим теперь функцию $c_h(x,t)$ как решение задачи

$$\frac{\partial c_h}{\partial t} + \mathbf{w_h} \nabla c_h = \alpha_D\, \Delta c_h, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial c_h(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \qquad c_h(x,0) = \mathbf{M_1}^{(h)}(c_0(x)) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{3.10}$$

где

$$\mathbf{M_1}^{(h)}(c_0(x)) = \frac{1}{h^3} \int_{R^3} \eta\left(\frac{|x-y|}{h}\right) c_0(y)\, dy.$$

Задача (3.9)–(3.10) как задача с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами имеет единственное бесконечно дифференцируемое решение $c_h(x,t)$, для которого справедлив принцип максимума:

$$0 \leqslant c_h(x,t) \leqslant \max c_0(x) \leqslant 1. \tag{3.11}$$

Таким образом, для каждой фиксированной функции $\mathbf{u} \in \mathfrak{N}$ существует единственная функция $\bar{c}_h \in \mathfrak{M}$, т. е. определен оператор $\mathbb{B} : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$ такой, что $c_h = \mathbb{B}(\mathbf{u})$.

Лемма 3. *Оператор $\mathbb{B}$ — непрерывный.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{w}_1 = \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_1)$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_2)$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$, $c_1 = \mathbb{B}(\mathbf{u}_1)$, $c_2 = \mathbb{B}(\mathbf{u}_2)$ (индекс h для краткости опускаем), $c = c_1 - c_2$.

Тогда разность c является решением следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{w_1} \cdot \nabla c = \alpha_D\, \Delta c - \mathbf{w} \cdot \nabla c_2, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \qquad c(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Умножим (3.12) на c и проинтегрируем по области Ω, применяя в двух слагаемых формулу интегрирования по частям:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega c^2\,dx + \alpha_D \int_\Omega |\nabla c|^2\,dx = \int_\Omega \frac{c^2}{2}\operatorname{div}\mathbf{w}_1\,dx - \int_\Omega c\mathbf{w}\cdot\nabla c_2\,dx. \tag{3.13}$$

По построению $|\operatorname{div}\mathbf{w}_1| \leqslant N_1(h)$, $|\nabla c_2| \leqslant N_1(h)$. Оценим последнее слагаемое

$$\left|\int_\Omega c\mathbf{w}\cdot\nabla c_2\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_\Omega |c\,\nabla c_2|^2\,dx}\sqrt{\int_\Omega |\mathbf{w}|^2\,dx} \leqslant \sqrt{N_1(h)}\sqrt{\int_\Omega c^2\,dx}\sqrt{\int_\Omega |\mathbf{w}|^2\,dx} \leqslant$$

$$\leqslant N_2(h)\frac{1}{2}\left(\int_\Omega c^2\,dx + \int_\Omega |\mathbf{w}|^2\,dx\right).$$

Обозначим $y = \int_\Omega c^2\,dx$, тогда (3.13) влечет за собой неравенство

$$\frac{dy}{dt} \leqslant N_2(h)\left(y + \int_\Omega |\mathbf{w}|^2\,dx\right).$$

Воспользовавшись неравенством из [1, с. 112], получим

$$\max_{0<t<T}\int_\Omega c^2\,dx \leqslant N_3\int_{\Omega_T}|\mathbf{w}|^2\,dx\,dt,$$

или

$$\|c\|_{2,\Omega_T} \leqslant N_3\|\mathbf{w}\|_{2,\Omega_T}. \tag{3.14}$$

Чтобы получить оценку (2.14) для $|c|^{(0)}$, обратимся к лемме 3.3 из [1, с. 95].

В нашем случае $c(x,t) \in \mathbb{W}_2^{4,2}(\Omega_T)$, т. е. $l = 2$, $r = 0$, $s = 0$, $n = 3$, $\lambda = 0$,

$$|c|^{(0)}_{\Omega_T} \leqslant b_1\delta^{\frac{3}{2}}\langle\langle c\rangle\rangle^{(4)}_{2,\Omega_T} + b_2\delta^{-\frac{5}{2}}\|c\|_{2,\Omega_T} \equiv A\delta^{\frac{3}{2}} + B\delta^{-\frac{5}{2}} \equiv f(\delta).$$

Функция $f(\delta)$ достигает минимума при $\delta = \left(\frac{5B}{3A}\right)^{1/4}$, в этом случае $f(\delta) = b_3A^{5/8}B^{3/8}$ и

$$|c|^{(0)}_{\Omega_T} \leqslant b_4\left(\langle\langle c\rangle\rangle^{(4)}_{2,\Omega_T}\right)^{5/8}\left(\|c\|_{2,\Omega_T}\right)^{3/8}.$$

Окончательно получаем оценку

$$|c|^{(0)}_{\Omega_T} \leqslant b_5\|c\|_{2,\Omega_T} \leqslant b_6\|\mathbf{w}\|_{2,\Omega_T} \leqslant b_7\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega_T}.$$

Таким образом, $|c|^{(0)}_{\Omega_T} \leqslant b_7\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega_T}$, что и означает непрерывность оператора $\mathbb{B}$. Лемма доказана.

Определим теперь оператор $\mathbf{\Phi} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, $c_h = \mathbf{\Phi}(\bar{c}) = \mathbb{B}\left(\mathbb{A}(\bar{c})\right)$.

Лемма 4. *Оператор* $\mathbf{\Phi}$ *имеет хотя бы одну неподвижную точку.*

Доказательство. Оператор $\mathbf{\Phi}$ непрерывен как суперпозиция непрерывных операторов. Более того, можно доказать, что он вполне непрерывен. Для доказательства воспользуемся теоремой Арцела о том, что множество M непрерывных функций, определенных в M, компактно тогда и только тогда, когда входящие в M функции равномерно ограничены и равностепенно непрерывны.

В нашей задаче для фиксированного $h > 0$ функции $c_h(x,t)$ по построению обладают ограниченными производными по x и по t, поэтому

$$|c_h(x',t) - c_h(x'',t)| \leqslant \frac{\partial c_h(x^*,t)}{\partial x_j}\,|x'_j - x''_j| \leqslant N_j|x' - x''|, \qquad j = 1,2,3,$$

$$|c_h(x,t') - c_h(x,t'')| \leqslant \frac{\partial c_h(x,t^*)}{\partial t}\,|t' - t''| \leqslant N|t' - t''|,$$

т. е. функции $c_h(x,t)$ равностепенно непрерывны по x и по t. Равномерная ограниченность очевидна. Таким образом, оператор Φ переводит любое ограниченное множество в компактное, т. е. является вполне непрерывным.

Множество $\mathfrak{M}$, очевидно, является выпуклым.

Все вышесказанное позволяет применить к оператору $\mathbf{\Phi} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ теорему Шаудера о неподвижной точке [3, с. 411]. Лемма доказана.

Пусть $c_h^* = \mathbf{\Phi}(c_h^*)$ — неподвижная точка оператора $\mathbf{\Phi}$, и пусть $\mathbf{u}_h^* = \mathbb{A}(c_h^*)$. Тогда

$$\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{u}_h^*}{\partial t} = \operatorname{div}\,(\alpha_\mu \mu(c_h^*)\nabla \mathbf{u}_h^* + (\alpha_\nu \operatorname{div} \mathbf{u}_h^* - q_h^*)\mathbb{I}) + \mathbf{F}, \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial q_h^*}{\partial t} + \alpha_p \operatorname{div} \mathbf{u}_h^* = 0, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial c_h^*}{\partial t} + \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h^*) \cdot \nabla c_h^* = \alpha_D\, \Delta c_h^*, \tag{3.17}$$

$$\mathbf{u}_h^*(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \qquad \mathbf{u}_h^*(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial c_h^*(x,t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \qquad c_h^*(x,0) = \mathbf{M_1}^{(h)}(c_0(x)) \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \tag{3.19}$$

4. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

Лемма 5. *Решение* $(\mathbf{v}, p, c)$ *исходной задачи* (1.1)–(1.5) *есть предел при* $h \to 0$ *решений* $(\mathbf{u}_h^*, q_h^*, c_h^*)$ *задачи* (3.15)–(3.19).

Доказательство. Индекс $*$ опускаем. Умножим (3.15) на произвольную гладкую вектор-функцию $\varphi(\mathbf{x},t)$, равную нулю на границе Γ и при $t = T$, и проинтегрируем по области Ω_T.

$$\int_{\Omega_T} \left(\alpha_\tau \mathbf{u_h} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha_\mu \mu(c_h) \nabla \mathbf{u_h} : \nabla \varphi - \alpha_\nu \operatorname{div} \mathbf{u_h} \operatorname{div} \varphi + q_h \operatorname{div} \varphi + \mathbf{F} \cdot \varphi\right) dx\, dt = 0.$$

Пусть $h \to 0$. Легко видеть, что оценки (3.5) и (3.11) справедливы для всех h с постоянными, не зависящими от h. Оценка (3.5) позволяет из последовательности $\{\mathbf{u}_h\}$ выбрать подпоследовательность такую, что $\mathbf{u}_h \rightharpoonup \mathbf{u}$ слабо в $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$.

Согласно [2, с. 18] имеем компактное вложение $\mathbb{W}_2^1(\Omega) \subset \mathbb{L}_2(\Omega) \subset (\mathbb{W}_2^1(\Omega))^*$. Обозначим $W = \left\{v |\, v \in \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T);\, \frac{\partial v}{\partial t} \in (\mathbb{W}_2^1(\Omega))^*\right\}$. Очевидно, что $\mathbf{u}_h \in W$. По теореме о компактности [2, с. 70, теорема 5.1] вложение $W \subset \mathbb{L}_2(\Omega_T)$ компактно. Это означает, что $\mathbf{u}_h \to \mathbf{v}$ сильно в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$.

Аналогично в силу оценки (3.11) из последовательности $\{c_h\}$ можно выбрать подпоследовательность такую, что $c_h \rightharpoonup c$ слабо в $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$. Согласно той же теореме о компактности $c_h \to c$ сильно в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$, а так как $\mu(c_h)$ непрерывна, то $\mu(c_h) \to \mu(c)$ сильно в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$. Отсюда мы имеем слабую сходимость

$$\alpha_\mu \mu(c_h) \nabla \mathbf{u} : \nabla \varphi \rightharpoonup \alpha_\mu \mu(c) \nabla \mathbf{u} : \nabla \varphi.$$

Из оценки (3.5) заключаем также, что $q_h \rightharpoonup p$ слабо в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$, $\frac{\partial q_h}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial p}{\partial t}$ слабо в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$, и выполняем предельный переход в остальных слагаемых тождества (3.15), а также в уравнении (3.16).

Рассмотрим теперь предельный переход в уравнении диффузии (3.17), которое представим в виде интегрального тождества. Умножим (3.17) на произвольную гладкую функцию $\xi(x,t)$, равную нулю при $t = T$, и проинтегрируем по Ω_T:

$$\int_{\Omega_T} \left(-c_h \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)\, \nabla c_h \xi + \alpha_D\, \nabla c_h \cdot \nabla \xi\right) dx\, dt = \int_\Omega \mathbf{M}^{(h)}(c_0(x)) \xi(x,0)\, dx. \tag{4.1}$$

Получим оценку для ∇c_h. Умножим (3.17) на c_h и проинтегрируем по Ω:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega c_h^2\, dx + \int_\Omega c_h \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h) \cdot \nabla c_h\, dx = \alpha_D \int_\Omega |\nabla c_h|^2\, dx. \tag{4.2}$$

Учитывая (3.11), оценим второе слагаемое:

$$\int_\Omega c_h \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h) \cdot \nabla c_h\, dx \leqslant \int_\Omega \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h) \cdot \nabla c_h\, dx \leqslant \sqrt{\int_\Omega |\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)|^2\, dx} \sqrt{\int_\Omega |\nabla c_h|^2\, dx} \leqslant$$

$$\leqslant N\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega}\cdot\|\nabla c_h\|_{2,\Omega}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega})^2+\frac{1}{2\varepsilon}(\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega})^2.$$

Положим $\varepsilon=\alpha_D$ и проинтегрируем (4.2) по времени, получим

$$\alpha_D(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T})^2\leqslant\frac{1}{2}(\|c_h\|_{2,\Omega_T})^2+\frac{\alpha_D}{2}(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T})^2+\frac{1}{2\alpha_D}(\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega_T})^2,$$

откуда $(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T})^2\leqslant N_1(\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega_T})^2$. Следовательно, $\nabla c_h\rightharpoonup\nabla c$ слабо в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$.

Таким образом, в уравнении диффузии есть сложность в одном слагаемом:

$$\int_{\Omega_T}\xi\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)\cdot\nabla c_h\,dx\,dt\equiv I_h,$$

поскольку оба сомножителя всего лишь слабо сходятся. Из свойств усреднений имеем $\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u})\to\mathbf{u}$ сильно в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$, $\|\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)\|_{2,\Omega_T}\leqslant N\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega_T}$. Поэтому

$$I_h=\int_{\Omega_T}\xi(\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)-\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}))\cdot\nabla c_h\,dx\,dt+\int_{\Omega_T}\xi(\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u})-\mathbf{u})\cdot\nabla c_h\,dx\,dt+\int_{\Omega_T}\xi\mathbf{u}\cdot\nabla c_h\,dx\,dt\equiv I_1+I_2+I_3,$$

$$|I_1|\leqslant\max_{x,t}|\xi|\,\|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T}\,\|\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h-\mathbf{u})\|_{2,\Omega_T}\leqslant N\|\mathbf{u}_h-\mathbf{u}\|_{2,\Omega_T}\to 0,\qquad h\to 0,$$

$$|I_2|\leqslant N_1\|\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u})-\mathbf{u}\|_{2,\Omega_T}\to 0,\quad h\to 0.$$

Окончательно получаем

$$I_h\to\int_{\Omega_T}\xi\mathbf{u}\cdot\nabla c\,dx\,dt,\quad h\to 0.$$

В остальных слагаемых интегрального тождества (4.1) предельный переход будет стандартным. Лемма доказана.

Из доказанных лемм следует утверждение теоремы 1.

Библиографический список

1. *Ладыженская, О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

2. *Лионс, Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 588 с.

3. *Треногин, В.А.* Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980. – 496 с.

УДК 517.956

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В НЕСИММЕТРИЧНОЙ ОБЛАСТИ

О.В. Лаштабега, А.Н. Зарубин

Орловский государственный университет,
кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений
E-mail: aleks_zarubin@mail.ru, tanda80@yandex.ru

В работе исследуется краевая задача для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения и запаздыванием в производной.

Ключевые слова: уравнение, краевая задача, смешанный тип, линия вырождения, запаздывание.

Tricomi Problem for Differential-Difference Equations of Mixed Type in the Asymmetric Field

O.V. Lashtabega, A.N. Zarubin

Orel State University,
Chair of Mathematical Analysis and Differential Equations
E-mail: aleks_zarubin@mail.ru, tanda80@yandex.ru

The paper examines the boundary value problem for mixed type equations with two perpendicular lines of degeneracy and the delay in the derivative.

Key words: equation, boundary value problem, mixed type, the line of degeneracy, the delay.

© О.В. Лаштабега, А.Н. Зарубин, 2010

Уравнение

$$Lu(x,y) \equiv u_{xx}(x,y) + \operatorname{sign}(xy)u_{yy}(x,y) - H(x-\tau)u_x(x-\tau,y) = 0, \tag{1}$$

$0 < \tau \equiv \mathrm{const}$, $H(\xi)$ — функция Хевисайда, рассмотрим в несимметричной полубесконечной области $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup J_1 \cup J_2$, где $D_1 = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} D_{1k}$, $D_2 = \{(x,y) : -h/2 < x < 0,\ -x < y < x+h\}$ и $D_3 = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} D_{3k} = \{(x,y) : x > 0,\ 0 < y < h\}$ — гиперболические и эллиптическая части области D, причем $D_{1k} = \{(x,y) : k\tau - y < x < (k+1)\tau + y, -\tau/2 < y < 0\}$, $D_{3k} = \{(x,y) : k\tau < x \le (k+1)\tau,\ 0 < y < h\}$, $0 < h \equiv \mathrm{const}$, $J_1 = \{(x,y) : x > 0,\ y = 0\}$, $J_2 = \{(x,y) : x = 0,\ 0 < y < h\}$.

Задача T. *Найти в области D решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D \setminus (J_1 \cup J_2))$, исчезающее на бесконечности, производные которого $u_x(0,y)$, $u_y(x,0)$ в точке $(0,0)$ ограничены, в точке $(0,h)$ функция $u_x(0,y)$ допускает особенность не выше $1/2$ $(u_x(0,y) = o((h-y)^{-1/2}))$, а $u_y(x,0)$ исчезает при $x \to +\infty$ $\big(u_y(x,0) = o\big(\exp\big(-(1/4+\varepsilon)\big)x\big)$ $(0 < \varepsilon \le 1/4)\big)$; удовлетворяющее граничным условиям:*

$$u(x,h) = f(x), \qquad 0 \le x < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x, k\tau - x) = \psi_{1k}(x), \qquad k\tau \le x \le (2k+1)\tau/2, \tag{3}$$

$$u(-y,y) = \psi_2(y), \qquad 0 \le y \le h/2; \tag{4}$$

условиям сопряжения

$$u(x,-0) = u(x,+0) = \omega_1(x), \qquad u(-0,y) = u(+0,y) = \omega_2(y), \tag{5}$$

$$u_y(x,-0) = u_y(x,+0) = \nu_1(x), \qquad u_x(-0,y) = u_x(+0,y) = \nu_2(y), \tag{6}$$

где $f(x)$, $\psi_{1k}(x)$, $\psi_2(y)$ — заданные непрерывные достаточно гладкие функции; $\omega_j(t)$ и $\nu_j(t)$ $(j = 1,2)$ — соответственно дважды и один раз непрерывно дифференцируемые функции, подлежащие определению.

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in C[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty), f(+\infty) = 0$, $f(x) = o(x^2)$ при $x \to 0$; $\psi_1(0) = \psi_2(0)$, $\psi_1(+\infty) = 0$ и $\psi_i'(t)$, $\psi_i''(t)$ $(i = 1,2)$ принадлежат классу Гельдера внутри соответствующих промежутков, причем $\psi_1'(t) = o\big(\exp(\gamma t)\big)$ $(\gamma < -1/2)$ при $t \to +\infty$; $(h/2 - t)^{1/2}\psi_2'(t) \to 0$ при $t \to h/2$, а $\psi_1(t) = \big\{\psi_{1k}(t),\ k\tau \le t \le (2k+1)\tau/2\ (k = 0,1,2,\ldots)\big\}$. Тогда существует единственное при $h \le 2\sqrt{2}$ решение $u(x,y)$ задачи T.*

Доказательство теоремы разобьем на ряд этапов.

I. *Единственность* решения задачи T вытекает из следующих утверждений.

Лемма 1. *Если $u(x,y)$ — решение уравнения (1) в области D_3 из класса $C(\overline{D}_3) \cap C^2(D_3)$, исчезающее на бесконечности с однородным условием (2) и $h \le 2\sqrt{2}$, то*

$$\beta = \int\limits_0^{+\infty} \omega_1(x)\nu_1(x)\,dx + \int\limits_0^h \omega_2(y)\nu_2(y)\,dy \le 0 \tag{7}$$

и

$$\beta + \iint\limits_{D_3} \left[u_x^2(x,y)\big(1 - (h^2 - y^2)/8\big) + \left(u_y(x,y) - \frac{1}{2}H(x-\tau)\int\limits_0^y u_x(x-\tau,\xi)\,d\xi \right)^2 \right] dx\,dy \le 0. \tag{8}$$

Доказательство получим из тождества

$$u(x,y)Lu(x,y) \equiv \big(u(x,y)u_x(x,y)\big)_x + \big(u(x,y)u_y(x,y)\big)_y -$$

$$-u_x^2(x,y) - u_y^2(x,y) - H(x-\tau)u(x,y)u_x(x-\tau,y) = 0,$$

интегрируя которое по области $D_3^{\varepsilon\rho} = \{(x,y) : \varepsilon < x < \rho,\ \varepsilon < y < h\}$ $(0 < \varepsilon < \rho \equiv \mathrm{const})$, применяя формулу Грина [1] и условия леммы, в пределе при $\rho \to +\infty$, $\varepsilon \to 0$, найдем в силу (5)–(6), что

$$\beta + \iint\limits_{D_3} \left[u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y) + H(x-\tau)u(x,y)u_x(x-\tau,y) \right] dx\,dy = 0. \tag{9}$$

Так как в силу интегрирования по частям и однородности условия (2)

$$\iint\limits_{D_3} H(x-\tau)u(x,y)u_x(x-\tau,y)\,dx\,dy = -\iint\limits_{D_3} u_y(x,y)\Big(H(x-\tau)\int\limits_0^y u_x(x-\tau,\xi)\,d\xi\Big)\,dx\,dy,$$

то (9) можно записать в форме

$$\beta + \iint\limits_{D_3}\left[u_x^2(x,y) + \Big(u_y(x,y) - \frac{1}{2}H(x-\tau)\int\limits_0^y u_x(x-\tau,\xi)\,d\xi\Big)^2\right]dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{4}\iint\limits_{D_3}\Big(H(x-\tau)\int\limits_0^y u_x(x-\tau,\xi)\,d\xi\Big)^2\,dx\,dy,$$

что в силу неравенства Коши – Буняковского [2] для интеграла

$$\iint\limits_{D_3}\Big(H(x-\tau)\int\limits_0^y u_x(x-\tau,\xi)\,d\xi\Big)^2\,dx\,dy = \iint\limits_{D_3}\Big(\int\limits_0^y u_x(x,\xi)\,d\xi\Big)^2\,dx\,dy \le$$

$$\le \iint\limits_{D_3}\Big(y\int\limits_0^y u_x^2(x,\xi)\,d\xi\Big)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_3}\big(h^2-y^2\big)u_x^2(x,y)\,dx\,dy$$

приводит при $h \le 2\sqrt{2}$ к утверждениям леммы (7) и (8).

Лемма 2. *Если* $u(x,y) \in C(\overline{D}_1)\cap C^2(D_1)$ $(u(x,y) \in C(\overline{D}_2)\cap C^2(D_2))$ *— решение уравнения (1), обращающееся в нуль на характеристиках* $y = k\tau - x$ $(x = -y)$, *то*

$$\int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau} \omega_1(x)\nu_1(x)\,dx \ge 0 \qquad \Big(\int\limits_0^h \omega_2(y)\nu_2(y)dy \ge 0\Big).$$

Утверждение леммы доказывается аналогично [3].

II. Для доказательства *существования* решения задачи T отдельно рассмотрим:

а) в гиперболической области D_1 задачу Коши:

$$\begin{gathered} u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) - H(x-\tau)u_x(x-\tau,y) = 0, \qquad (x,y)\in D_1,\\ u(x,0) = \omega_1(x), \qquad 0 \le x < +\infty,\\ u_y(x,0) = \nu_1(x), \qquad 0 < x < +\infty,\\ \omega_1'(0) = 0, \qquad \omega_1(+\infty) = 0; \end{gathered} \tag{10}$$

б) в гиперболической области D_2 задачу Коши:

$$\begin{gathered} u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) = 0, \qquad (x,y)\in D_2,\\ u(0,y) = \omega_2(y), \qquad 0 \le y \le h,\\ u_x(0,y) = \nu_2(y), \qquad 0 < y < h,\\ \omega_2'(0) = 0, \qquad \omega_2(h) = f(0); \end{gathered} \tag{11}$$

в) в эллиптической области D_3 задачу Неймана – Дирихле:

$$\begin{gathered} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) - H(x-\tau)u_x(x-\tau,y) = 0, \qquad (x,y)\in D_3,\\ u_y(x,0) = \nu_1(x), \qquad 0 < x < +\infty,\\ u_x(0,y) = \nu_2(y), \qquad 0 < y < h,\\ u(x,h) = f(x), \qquad 0 \le x < +\infty,\\ \lim_{x\to+\infty} u(x,y) = 0, \qquad 0 \le y \le h,\\ f(0) = \omega_2(h), \qquad f(+\infty) = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Исходя из функциональных соотношений между $\omega_j(t)$ и $\nu_j(t)$ $(j = 1, 2)$, полученных из решений задач Коши (10)–(11) и Неймана – Дирихле (12), в силу условий (3), (4) и (5) составим полную сингулярную интегральную систему относительно $\nu_j(t)$.

Лемма 3. *Пусть* $\omega_1(x) \in C[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$, $\nu_1(x) \in C^1(0, +\infty)$, *абсолютно интегрируемы на* $[0, +\infty)$, $\omega_1'(0) = 0$, $\omega_1(+\infty) = 0$. *Тогда существует единственное решение задачи Коши* (10), *имеющее вид*

$$u(x, y) = \{u_k(x, y),\ (x, y) \in \overline{D}_{1k}\ (k = 0, 1, 2, \ldots)\}, \tag{13}$$

если

$$u_k(x, y) = \phi_k(x, y)H(x) + \sum_{m=1}^{k} \gamma_m H(x - m\tau)\frac{d^m}{dx^m} \int\limits_0^{x-m\tau} (x - m\tau)\big((x - m\tau)^2 - \eta^2\big)^{m-1}\phi(\eta, y)\, d\eta, \tag{14}$$

где $\gamma_m = \big(m!\Gamma(m)2^{2m-1}\big)^{-1}$,

$$\phi(x, y) = \{\phi_k(x, y),\ (x, y) \in \overline{D}_{1k}\ (k = 0, 1, 2, \ldots)\}, \tag{15}$$

а

$$\phi_k(x, y) = \frac{1}{2}\big[z_k^{\omega_1}(x - y) + z_k^{\omega_1}(x + y)\big] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} z^{\nu_1}(\xi)\, d\xi, \tag{16}$$

$$z^{\omega_1}(x) = \{z_k^{\omega_1}(x),\ k\tau \le x \le (k + 1)\tau\ (k = 0, 1, 2, \ldots)\}, \tag{17}$$

когда

$$z_k^{\omega_1}(x) = \omega_1(x)H(x) + \sum_{m=1}^{k} (-1)^m \gamma_m 2^{m-1}(m - 1)!H(x - m\tau)\frac{d}{dx}\left[x^{m-1}(x - m\tau) \int\limits_0^{x-m\tau} \omega_1(\xi)\, d\xi\right] +$$
$$+ \sum_{m=1}^{k} \gamma_m H(x - m\tau)\frac{d}{dx} \int\limits_0^{x-m\tau} \eta\left(\int\limits_0^{\eta} \omega_1(\xi)\, d\xi\right)\frac{d^m}{d\eta^m}\left(x^2 - \big(\eta + m\tau\big)^2\right)^{m-1} d\eta, \tag{18}$$

причем $z^{\nu_1}(x)$ *совпадает с* $z^{\omega_1}(x)$ *из* (17)–(18), *если заменить* $\omega_1(x)$ *на* $\nu_1(x)$.

Доказательство утверждения леммы следует из непосредственно проверяемого [4] общего решения уравнения (10_1) в области D_1 вида (13), если

$$u_k(x, y) = [g_1(x - y) + g_2(x + y)]H(x) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{k} \gamma_m H(x - m\tau)\frac{d^m}{dx^m} \int\limits_0^{x-m\tau} (x - m\tau)\big((x - m\tau)^2 - \eta^2\big)^{m-1}\big[g_1(\eta - y) + g_2(\eta + y)\big]\, d\eta, \tag{19}$$

где $g_i(t)$ $(i = 1, 2)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые на отрезке $[k\tau, (k + 1)\tau]$ функции.

Действительно, в силу (10_2)–(10_3) и

$$g_1(x) + g_2(x) = z^{\omega_1}(x),\ -g_1'(x) + g_2'(x) = z^{\nu_1}(x) \tag{20}$$

из (19) получим интегродифференциально-разностное уравнение Вольтерра:

$$z_k^{\omega_1}(x) + \sum_{m=1}^{k} \gamma_m H(x - m\tau)\frac{d^m}{dx^m} \int\limits_0^{x-m\tau} (x - m\tau)\times$$
$$\times\big((x - m\tau)^2 - \eta^2\big)^{m-1} z^{\omega_1}(\eta)\, d\eta = \omega_1(x), \qquad k\tau \le x \le (k + 1)\tau, \tag{21}$$

решение [5] которого имеет форму (18), или относительно $z^{\nu_1}(x)$ также уравнение типа (21) с правой частью $\nu_1(x)$.

Функции $g_i(t)$ $(i = 1, 2)$, найденные из системы (20), на основании (19) приведут к обобщенной формуле Даламбера (13)–(14), которая будет решением задачи Коши (10), единственным в силу построения.

Лемма 4. *Пусть* $\omega_2(y) \in C[0,h] \cap C^2(0,h)$, $\nu_2(y) \in C^1(0,h)$, *абсолютно интегрируемы на* $[0,h]$ *и* $\omega_2'(0) = 0$, $\omega_2(h) = f(0)$. *Тогда существует единственное решение задачи Коши* (11), *имеющее вид*

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\big[\omega_2(y-x) + \omega_2(x+y)\big] + \frac{1}{2}\int\limits_{y-x}^{y+x} \nu_2(\xi)\,d\xi, \qquad (x,y) \in \overline{D}_2. \tag{22}$$

Доказательство леммы проводится аналогично лемме 3.

Форма (22) решения задачи Коши (11) может быть найдена из (13)–(18) при $k = 0$ с учетом данных задачи и области ее решения.

Лемма 5. *Если* $\nu_1(x) \in C^1(0,+\infty)$, $f(x) \in C[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty)$ *и* $\nu_2(y) \in C^1(0,h)$, *абсолютно интегрируемы на* $[0,+\infty)$ *и* $[0,h]$ *соответственно, причем* $f(0) = \omega_2(h)$, $f(+\infty) = 0$, $f(x) = o(x^2)$ *при* $x \to 0$, *то существует единственное при* $h \le 2\sqrt{2}$ *решение задачи Неймана – Дирихле (12) в области* D_3, *которое имеет вид*

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y) = \{u_{1k}(x,y) + u_{2k}(x,y),\ (x,y) \in \overline{D}_{3k}\ (k = 0,1,2,\ldots)\}, \tag{23}$$

где

$$u_{1k}(x,y) = \int\limits_0^h \nu_2(t) G_k^-(x,y;\xi,t)\big|_{\xi=0}\,dt, \tag{24}$$

$$u_{2k}(x,y) = \int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(\xi) G_k^+(x,y;\xi,t)\big|_{t=0}\,d\xi + \int\limits_0^{+\infty} z^f(\xi) G_{kt}^+(x,y;\xi,t)\big|_{t=h}\,d\xi, \tag{25}$$

а

$$G_k^{\mp}(x,y;\xi,t) = \overline{G}(x,y;\xi,t)H(x) + \sum_{m=1}^{k} \big(\mp 1\big)^m \gamma_m H(x - m\tau)\times$$

$$\times \frac{d^m}{dx^m} \int\limits_0^{+\infty} \big(x - m\tau\big)^{(1\mp1)/2} \eta^{(1\pm1)/2} \big((x-m\tau)^2 - \eta^2\big)_{\mp}^{m-1} \overline{G}(\eta,y;\xi,t)\,d\eta, \tag{26}$$

$$\overline{G}(x,y;\xi,t) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\big((x-\xi)\pi/2h\big) - \cos\big((y-t)\pi/2h\big)}{\operatorname{ch}\big((x-\xi)\pi/2h\big) + \cos\big((y-t)\pi/2h\big)}\,\frac{\operatorname{ch}\big((x+\xi)\pi/2h\big) - \cos\big((y+t)\pi/2h\big)}{\operatorname{ch}\big((x+\xi)\pi/2h\big) + \cos\big((y+t)\pi/2h\big)}\right), \tag{27}$$

$$\big(\xi^2 - \eta^2\big)_-^\alpha = \begin{cases} 0, & \xi \ge \eta, \\ \big(\eta^2 - \xi^2\big)^\alpha, & \xi < \eta, \end{cases} \qquad \big(\xi^2 - \eta^2\big)_+^\alpha = \begin{cases} \big(\xi^2 - \eta^2\big)^\alpha, & \xi > \eta, \\ 0, & \xi \le \eta, \end{cases}$$

причем $z^{\nu_1}(x)$ *и* $z^f(x)$ *определяются равенствами типа* (17)–(18), *в которых следует заменить* $\omega_1(x)$ *на* $\nu_1(x)$ *и* $f(x)$ *соответственно.*

Доказательство единственности решения задачи Неймана – Дирихле (12) в области D_3 из класса $C(\overline{D}_3) \cap C^2(D_3)$ следует из того, что однородная задача (12) имеет при $h \le 2\sqrt{2}$ тривиальное решение, так как по лемме 1 в силу (8)

$$\iint\limits_{D_3} \left[u_x^2(x,y)\big(1 - (h^2 - y^2)/8\big) + \left(u_y(x,y) - \frac{1}{2}H(x-\tau)\int\limits_0^y u_x(x-\tau,\xi)\,d\xi\right)^2\right] dx\,dy = 0.$$

Решение задачи Неймана – Дирихле (12) в области D_3 найдено в виде суммы (23) решений двух вспомогательных задач:

$$\begin{gathered} u_{jxx}(x,y) + u_{jyy}(x,y) - H(x-\tau)u_{jx}(x-\tau,y) = 0, \\ u_j(x,h) = (j-1)f(x), \qquad 0 \le x < +\infty, \\ u_{jy}(x,0) = (j-1)\nu_1(x), \qquad 0 < x < +\infty, \\ u_{jx}(0,y) = (2-j)\nu_2(y), \qquad 0 < y < h, \\ \lim_{x\to+\infty} u_j(x,y) = 0, \qquad 0 \le y \le h, \\ f(0) = \omega_2(h), \qquad f(+\infty) = 0 \qquad (j = 1,2). \end{gathered} \tag{28}$$

1. Функция $u_1(x,y) = \{u_{1k}(x,y), (x,y) \in \overline{D}_{3k}\ (k = 0,1,2,\ldots)\}$ получена в форме

$$u_{1k}(x,y) = \sum_{l=0}^{+\infty} R_k(x,\lambda_l)\cos\lambda_l y, \tag{29}$$

где

$$R_k(x,\lambda_l) = -\frac{2}{h\lambda_l} T_k(x,\lambda_l) \int\limits_0^h \nu_2(t)\cos\lambda_l t\,dt, \tag{30}$$

а

$$T_k(x,\lambda_l) = e^{-\lambda_l x} H(x) + \sum_{m=1}^{k} (-1)^m \gamma_m H(x - m\tau) \frac{d^m}{dx^m} \int\limits_{x-m\tau}^{+\infty} \eta\big(\eta^2 - (x - m\tau)^2\big)^{m-1} e^{-\lambda_l \eta}\,d\eta, \tag{31}$$

$k\tau \le x \le (k+1)\tau$, является решением [4, 5] уравнения

$$T''(x,\lambda_l) - \lambda_l^2 T(x,\lambda_l) - H(x-\tau)T'(x-\tau,\lambda_l) = 0,$$

удовлетворяющим условиям $T'(0,\lambda_l) = -\lambda_l$, $T(+\infty,\lambda_l) = 0$, причем $\lambda_l = (l + 1/2)\pi/h$.

Подставляя (31), (30) в (29), учитывая [6], что

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} e^{-(2n+1)a} = \frac{1}{4}\ln\frac{\operatorname{ch} a + \cos x}{\operatorname{ch} a - \cos x},$$

найдем $u_{1k}(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_{3k}$ в форме (24).

2. Решение $u_2(x,y) = \{u_{2k}(x,y), (x,y) \in \overline{D}_{3k}\ (k = 0,1,2,\ldots)\}$ построено в виде

$$u_{2k}(x,y) = \int\limits_0^{+\infty} A_k(x,\lambda)\Pi(y,\lambda)d\lambda, \tag{32}$$

где

$$A_k(x,\lambda) = H(x)\cos\lambda x + \sum_{m=1}^{k} \gamma_m H(x - m\tau) \frac{d^m}{dx^m} \int\limits_0^{x-m\tau} \big((x-m\tau)^2 - \eta^2\big)^{m-1}\big(x - m\tau\big)\cos\lambda\eta\,d\eta \tag{33}$$

удовлетворяет [4, 5] уравнению $A''(x,\lambda) + \lambda^2 A(x,\lambda) - H(x-\tau)A'(x-\tau,\lambda) = 0$, и условию $A'(0,\lambda) = 0$, а

$$\Pi(y,\lambda) = c_1(\lambda)e^{\lambda y} + c_2(\lambda)e^{-\lambda y}, \qquad 0 \le y \le h, \tag{34}$$

$c_i(\lambda) \equiv \mathrm{const}$ $(i = 1,2)$, является общим решением уравнения $\Pi''(y,\lambda) - \lambda^2\Pi(y,\lambda) = 0$.

Подставляя (34), (33) в (32), на основании условий (28_2)–(28_3) $(j = 2)$ получим для определения $c_i(\lambda)$ $(i = 1,2)$ систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^{+\infty} \big(c_1(\lambda)e^{\lambda h} + c_2(\lambda)e^{-\lambda h}\big)A_k(x,\lambda)d\lambda = f(x), \qquad k\tau \le x \le (k+1)\tau, \\ &\int\limits_0^{+\infty} \lambda\big(c_1(\lambda) - c_2(\lambda)\big)A_k(x,\lambda)d\lambda = \nu_1(x), \qquad k\tau \le x \le (k+1)\tau. \end{aligned} \tag{35}$$

Пусть

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^{+\infty} \big(c_1(\lambda)e^{\lambda h} + c_2(\lambda)e^{-\lambda h}\big)\cos\lambda x d\lambda = z_k^f(x), \qquad k\tau \le x \le (k+1)\tau, \\ &\int\limits_0^{+\infty} \lambda\big(c_1(\lambda) - c_2(\lambda)\big)\cos\lambda x d\lambda = z_k^{\nu_1}(x), \qquad k\tau \le x \le (k+1)\tau. \end{aligned} \tag{36}$$

Тогда из (35) в силу (33) получим относительно $z_k^f(x)$ и $z_k^{\nu_1}(x)$ интегродифференциально-разностные уравнения Вольтерра типа (21) с правой частью $f(x)$ и $\nu_1(x)$ соответственно, решения [5] которых $z_k^f(x)$ и $z_k^{\nu_1}(x)$ будут иметь вид (18) относительно $f(x)$ и $\nu_1(x)$.

Так как функции $f(x) \in C[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty)$, $f(+\infty) = 0$, $f(x) = o(x^2)$ при $x \to 0$, $\nu_1(x)$ принадлежит классу Гельдера внутри $(0,+\infty)$ и абсолютно интегрируемы на $[0,+\infty)$, то, очевидно, в силу (18) этими свойствами обладает $z^f(x)$ и $z^{\nu_1}(x)$.

Поэтому, обратив косинус–преобразования Фурье (36) [7] с правыми частями $z^f(x)$, $z^{\nu_1}(x)$ при $x > 0$, получим систему:

$$c_1(\lambda)e^{\lambda h} + c_2(\lambda)e^{-\lambda h} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} z^f(t)\cos\lambda t\,dt,$$

$$c_1(\lambda) - c_2(\lambda) = \frac{2}{\pi\lambda}\int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(t)\cos\lambda t\,dt,$$

из которой

$$c_i(\lambda) = \frac{1}{\pi\operatorname{ch}\lambda h}\int\limits_0^{+\infty}\left[z^f(t) + (-1)^{i+1}\frac{1}{\lambda}e^{(-1)^i\lambda h}z^{\nu_1}(t)\right]\cos\lambda t\,dt \qquad (i = 1,2). \tag{37}$$

Подставляя (34), (33), (37) в (32), используя [6] формулы

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{ch}ax}{\operatorname{ch}cx}\cos bx\,dx = \frac{\pi}{c}\cdot\frac{\cos(a\pi/2c)\operatorname{ch}(b\pi/2c)}{\operatorname{ch}(b\pi/c)+\cos(a\pi/c)},$$

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}ax}{x\operatorname{ch}cx}\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{\operatorname{ch}(b\pi/2c)+\sin(a\pi/2c)}{\operatorname{ch}(b\pi/2c)-\sin(a\pi/2c)}, \qquad \operatorname{Re}c > |\operatorname{Re}a| + |\operatorname{Im}b|,$$

получим $u_{2k}(x,y)$ в виде (25).

III. 1. *Функциональное соотношение* между $\omega_1(x)$ и $\nu_1(x)$, принесенное на линию $y = 0$, $0 < x < +\infty$ из области D_1, получим в силу (13)–(18) и (3) из интегродифференциально-разностного уравнения Вольтерра:

$$\phi_k(x, r_k(x))H(x) + \sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x-m\tau)\frac{d^m}{dx^m}\int\limits_0^{x-m\tau}(x-m\tau)\times$$

$$\times\big((x-m\tau)^2-\eta^2\big)^{m-1}\phi(\eta, r_k(x))\,d\eta = \psi_{1k}(x), \qquad k\tau \le x \le (2k+1)\tau/2,$$

$r_k(x) = k\tau - x$, решение [4, с. 51; 5] которого

$$\phi_k(x, r_k(x)) = \psi_{1k}(x)H(x) - \sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x-m\tau)\frac{d^m}{dx^m}\Bigg\{\int\limits_{(k-m)\tau}^{x-m\tau}(x-m\tau)\big((x-m\tau)^2-\eta^2\big)^{m-1}\times$$

$$\times\phi(\eta, r_{k-m}(x))\,d\eta + \sum_{\theta=0}^{k-m-1}\int\limits_{\theta\tau}^{(\theta+1)\tau}(x-m\tau)\big((x-m\tau)^2-\eta^2\big)^{m-1}\phi(\eta, r_\theta(x))\,d\eta\Bigg\} \tag{38}$$

после подстановки в (16) дает искомое соотношение

$$z_k^{\omega_1}(2x-k\tau) + z_k^{\omega_1}(k\tau) + \int\limits_{2x-k\tau}^{k\tau} z^{\nu_1}(\xi)\,d\xi = 2\phi_k(x, r_k(x)), \qquad k\tau \le x \le (2k+1)\tau/2,$$

или

$$z_k^{\omega_1}(x) + z_k^{\omega_1}(k\tau) + \int\limits_{x}^{k\tau} z^{\nu_1}(\xi)\,d\xi = F_k(x), \qquad k\tau \le x \le (k+1)\tau,$$

где $F_k(x) = 2\phi_k\big((x+k\tau)/2, r_k((x+k\tau)/2)\big)$.

Значит,

$$z_k^{\nu_1}(x) = \big(z_k^{\omega_1}(x)\big)' - F_k'(x), \qquad k\tau \le x \le (k+1)\tau, \tag{39}$$

искомое функциональное соотношение из D_1.

2. Аналогично из (22), (4) найдем *функциональное* соотношение между $\omega_2(y)$ и $\nu_2(y)$, принесенное на линию $x = 0$, $0 < y < h$ из области D_2:

$$\nu_2(y) = \omega_2'(y) - \psi_2'(y/2), \qquad 0 < y < h. \tag{40}$$

3. *Функциональные* соотношения между $\omega_j(x)$ и $\nu_j(x)$ $(j = 1, 2)$ на линиях $x = 0$, $0 < y < h$ $(j = 2)$, $y = 0$, $0 < x < +\infty$ $(j = 1)$, принесенные из области D_3, найдем из (23)–(27), используя условия сопряжения (5):

$$\omega_2(y) = \int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(\xi)\overline{G}(0, y; \xi, t)\big|_{t=0}\, d\xi + \int\limits_0^{h} \nu_2(t)\overline{G}(0, y; \xi, t)\big|_{\xi=0}\, dt +$$
$$+ \int\limits_0^{+\infty} z^{f}(\xi)\overline{G}_t(0, y; \xi, t)\big|_{t=h}\, d\xi, \qquad 0 \le y \le h, \tag{41}$$

$$\omega_1(x) = \int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(\xi)G_k^{+}(x, 0; \xi, t)\big|_{t=0}\, d\xi + \int\limits_0^{h} \nu_2(t)G_k^{-}(x, 0; \xi, t)\big|_{\xi=0}\, dt +$$
$$+ \int\limits_0^{+\infty} z^{f}(\xi)G_{kt}^{+}(x, 0; \xi, t)\big|_{t=h}\, d\xi, \qquad k\tau \le x \le (k+1)\tau. \tag{42}$$

Пусть

$$R(x) = \int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(\xi)\overline{G}(x, 0; \xi, t)\big|_{t=0}\, d\xi. \tag{43}$$

Тогда в силу (26) равенство (42) можно записать в форме интегродифференциально-разностного уравнения Вольтерра:

$$R(x)H(x) + \sum_{m=1}^{k} \gamma_m H(x - m\tau)\frac{d^m}{dx^m} \int\limits_0^{x-m\tau} \big(x - m\tau\big)\big((x - m\tau)^2 - \eta^2\big)^{m-1} R(\eta)\, d\eta =$$
$$= \omega_1(x) - \int\limits_0^{h} \nu_2(t)G_k^{-}(x, 0; \xi, t)\big|_{\xi=0}\, dt - \int\limits_0^{+\infty} z^{f}(\xi)G_{kt}^{+}(x, 0; \xi, t)\big|_{t=h}\, d\xi, \qquad k\tau \le x \le (k+1)\tau, \tag{44}$$

которое совпадает с уравнением (21).

Поэтому в силу (18) из (44) найдем

$$R(x) = z_k^{\omega_1}(x) - \int\limits_0^{h} \nu_2(t)\overline{\overline{G}}_k^{-}(x, 0; \xi, t)\big|_{\xi=0}\, dt - \int\limits_0^{+\infty} z^{f}(\xi)\overline{\overline{G}}_{kt}^{+}(x, 0; \xi, t)\big|_{t=h}\, d\xi, \quad k\tau \le x \le (k+1)\tau, \tag{45}$$

где $z_k^{\omega_1}(x)$ совпадает с (17)–(18), а $\overline{\overline{G}}_k^{-}$ и $\overline{\overline{G}}_k^{+}$ — с (38), если заменить $\psi_{1k}(x)$ на G_k^{-} и G_k^{+}.

На основании (45), (43) равенство (42) примет вид

$$z_k^{\omega_1}(x) = \int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(\xi)\overline{G}(x, 0; \xi, t)\big|_{t=0}\, d\xi + \int\limits_0^{h} \nu_2(t)\overline{\overline{G}}_k^{-}(x, 0; \xi, t\big|_{\xi=0}\, dt +$$
$$+ \int\limits_0^{+\infty} z^{f}(\xi)\overline{\overline{G}}_{kt}^{+}(x, 0; \xi, t)\big|_{t=h}\, d\xi, \qquad k\tau \le x \le (k+1)\tau. \tag{46}$$

Выражения (41), (46) — искомые функциональные соотношения из D_3.

IV. Используя условия сопряжения (5)–(6), функциональные соотношения (39), (40), и после дифференцирования (41), (46) придем к полной системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\nu_2(y) - \frac{2}{h}\sin\frac{\pi y}{2h}\int\limits_0^h \nu_2(t)\frac{\cos(\pi t/2h)}{\cos(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}\,dt-$$

$$-\frac{2}{h}\sin\frac{\pi y}{2h}\int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(t)\frac{\operatorname{ch}(\pi t/2h)}{\operatorname{ch}(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}\,dt = W_1(y), \qquad 0<y<h, \tag{47}$$

$$z^{\nu_1}(x) + \frac{2}{h}\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2h}\int\limits_0^h \nu_2(t)\frac{\cos(\pi t/2h)}{\cos(\pi t/h)-\operatorname{ch}(\pi x/h)}\,dt+$$

$$+\frac{2}{h}\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2h}\int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(t)\frac{\operatorname{ch}(\pi t/2h)}{\operatorname{ch}(\pi t/h)-\operatorname{ch}(\pi x/h)}\,dt = W_2(x), \qquad 0<x<+\infty, \tag{48}$$

где

$$W_1(y) = -\psi_2'(y/2) - \frac{2}{h}\sin\frac{\pi y}{2h}\int\limits_0^{+\infty} z^f(t)\frac{\operatorname{ch}(\pi t/2h)\big(\operatorname{sh}^2(\pi t/2h)-\cos^2(\pi y/2h)\big)}{\big(\operatorname{ch}(\pi t/h)+\cos(\pi y/h)\big)^2}\,dt, \tag{49}$$

$$W_2(x) = -F'(x) + \int\limits_0^{+\infty} z^f(\xi)\Phi(x,\xi)\,d\xi + \int\limits_0^h \nu_2(t)T(x,t)\,dt, \tag{50}$$

причем $F(x) = \big\{F_k(x),\ k\tau \le x \le (k+1)\tau,\ (k=0,1,2,\ldots)\big\}$, $\Phi(x,\xi) = \Big\{\overline{\overline{G}}{}^{+}_{ktx}(x,0;\xi,h),\ k\tau \le x \le \le (k+1)\tau\ (k=0,1,2,\ldots)\Big\}$, $T(x,t) = \Big\{\overline{\overline{G}}{}^{-}_{kx}(x,0;0,t) - \overline{G}_x(x,0;0,t),\ k\tau \le x \le (k+1)\tau\ (k=0,1,2,\ldots)\Big\}$.

Интеграл в формуле (49) и его производная по y сходятся, так как $z^f(+\infty)=0$, а при $y\to h$, $t\to 0$, в силу условия $z^f(t)=o(t^2)$.

Первый интеграл в (50) и его производная по x также сходятся, что следует из аналогичных предыдущему рассуждений, например, для интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} z^f(\xi)\overline{\overline{G}}{}^{+}_{0tx}(x,0;\xi,h)\,d\xi = \int\limits_0^{+\infty} z^f(\xi)\overline{G}_{tx}(x,0;\xi,h)\,d\xi =$$

$$= \frac{2}{h}\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2h}\int\limits_0^{+\infty} z^f(t)\frac{\operatorname{ch}(\pi t/2h)\big(\operatorname{sh}^2(\pi t/2h)-\operatorname{ch}^2(\pi x/2h)\big)}{\big(\operatorname{ch}(\pi t/h)+\operatorname{ch}(\pi x/h)\big)^2}\,dt, \qquad 0<x<\tau.$$

Сходимость второго интеграла в (50) и производной по x обеспечена абсолютной интегрируемостью $\nu_2(y)$ на $[0,h]$ и гельдеровостью внутри $(0,h)$, которая следует из гельдеровости $\psi_2'(y)$.

Интегралы в формулах (49) $\big((50)\big)$ имеют вторые производные по y (по x) на $(0,h)$ $\big((0,+\infty)\big)$, то есть их первые производные удовлетворяют там условию Липшица.

Значит, функции W_j', как и ψ_j'', удовлетворяют условию Гельдера внутри своих промежутков определения, а $W_j \in H_1$.

Регуляризация системы (47)–(48) в классе функций $\nu_2(y)$, $z^{\nu_1}(x)$, ограниченных в нуле, когда $\nu_2(y) = o\big[(h-y)^{-1/2}\big]$ при $y\to h$ и $z^{\nu_1}(x) = o\big(\exp(-(1/4+\varepsilon)x)\big)$ $(\varepsilon>0)$ при $x\to+\infty$, проведена аналогично [8]:

$$\nu_2(y) = \frac{1}{2}W_1(y) + \frac{1}{2h}\int\limits_0^h W_1(t)\left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}\,dt-$$

$$-\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty} W_2(t)\left(\frac{\operatorname{ch}(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\operatorname{sh}(\pi t/h)}{\operatorname{ch}(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}\,dt, \qquad 0<y<h, \tag{51}$$

$$z^{\nu_1}(x) = \frac{1}{2}W_2(x) + \frac{1}{2h}\int\limits_0^h W_1(t)\left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\operatorname{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h)-\operatorname{ch}(\pi x/h)}\,dt-$$

$$-\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty} W_2(t)\left(\frac{\operatorname{ch}(\pi t/2h)}{\operatorname{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\operatorname{sh}(\pi t/h)}{\operatorname{ch}(\pi t/h)-\operatorname{ch}(\pi x/h)}\,dt, \qquad 0<x<+\infty. \tag{52}$$

Из системы (51)–(52), в силу (49)–(50), получим систему

$$\nu_2(y) + \int\limits_0^h \nu_2(s)B(y,s)\,ds = A(y), \qquad 0<y<h, \tag{53}$$

$$z^{\nu_1}(x) - \int\limits_0^h \nu_2(s)\Theta(x,s)\,ds = L(x), \qquad 0<x<+\infty, \tag{54}$$

где

$$B(y,s) = \frac{1}{4h^2}\int\limits_0^{+\infty} T(t,s)\left(\frac{\operatorname{ch}(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\operatorname{sh}(\pi t/h)}{\operatorname{ch}(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}\,dt,$$

$$A(y) = -\frac{1}{2}\psi_2'\left(\frac{y}{2}\right)-\frac{1}{2h}\int\limits_0^h \psi_2'\left(\frac{t}{2}\right)\left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}\,dt+$$

$$+\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty} F'(t)\left(\frac{\operatorname{ch}(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\operatorname{sh}(\pi t/h)}{\operatorname{ch}(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}\,dt-$$

$$-\frac{1}{h}\int\limits_0^{+\infty} z^f(s)\Bigg\{\sin\frac{\pi y}{2h}\frac{\operatorname{ch}(\pi s/2h)\big(\operatorname{sh}^2(\pi s/2h)-\cos^2(\pi y/2h)\big)}{\big(\operatorname{ch}(\pi s/h)+\cos(\pi y/h)\big)^2}+$$

$$+\frac{1}{h}\int\limits_0^h\left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}\sin\frac{\pi t}{2h}\frac{\operatorname{ch}(\pi s/2h)\big(\operatorname{sh}^2(\pi s/2h)-\cos^2(\pi t/2h)\big)}{\big(\operatorname{ch}(\pi s/h)+\cos(\pi t/h)\big)^2}\,dt+$$

$$+\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{ch}(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\operatorname{sh}(\pi t/h)}{\operatorname{ch}(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}\Phi(t,s)\,dt\Bigg\}\,ds,$$

$$\Theta(x,s) = \frac{1}{4h}T(x,s) - \frac{1}{4h^2}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{ch}(\pi t/2h)}{\operatorname{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\operatorname{sh}(\pi t/h)}{\operatorname{ch}(\pi t/h)-\operatorname{ch}(\pi x/h)}T(t,s)\,dt,$$

$$L(x) = -\frac{1}{2}F'(x) - \frac{1}{2h}\int\limits_0^h \psi_2'\left(\frac{t}{2}\right)\left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\operatorname{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h)-\operatorname{ch}(\pi x/h)}\,dt+$$

$$+\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty} F'(t)\left(\frac{\operatorname{ch}(\pi t/2h)}{\operatorname{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\operatorname{sh}(\pi t/h)}{\operatorname{ch}(\pi t/h)-\operatorname{ch}(\pi x/h)}\,dt+$$

$$+\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty} z^f(s)\Bigg\{\Phi(x,s) - \frac{2}{h}\int\limits_0^h\left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\operatorname{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h)-\operatorname{ch}(\pi x/h)}\times$$

$$\times\sin\frac{\pi t}{2h}\frac{\operatorname{ch}(\pi s/2h)\big(\operatorname{sh}^2(\pi s/2h)-\cos^2(\pi t/2h)\big)}{\big(\operatorname{ch}(\pi s/h)+\cos(\pi t/h)\big)^2}\,dt-$$

$$-\frac{1}{h}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{ch}(\pi t/2h)}{\operatorname{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\operatorname{sh}(\pi t/h)}{\operatorname{ch}(\pi t/h)-\operatorname{ch}(\pi x/h)}\Phi(t,s)\,dt\Bigg\}\,ds.$$

Функции $A(y)$, $A'(y)$, $L(x)$, $L'(x)$ принадлежат классу Гельдера; $A(x)$, $L(x) \to 0$ при $x \to 0$; $L(x) = o(\exp(\gamma x))$, $\gamma < -1/2$ при $x \to +\infty$; $\big(h/2 - y\big)^{1/2} A(y) \to 0$ при $y \to h/2$.

Ядра $B(x,t)$, $\Theta(x,t)$ непрерывно дифференцируемы в областях определения, ограничены в точке $(0,0)$, допускают обращение в ∞ порядка не выше $1/2$ вблизи $(0,h)$, а вблизи $(+\infty,0)$ исчезают.

Система (53)–(54) является системой уравнений Фредгольма, безусловная разрешимость которой следует из единственности решения задачи T.

Библиографический список

1. *Архипов, Г.И.* Лекции по математическому анализу / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. – М.: Высш. шк., 1999. – 695 с.
2. *Ильин, В.А.* Основы математического анализа: в 2 ч. / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Наука, 1982. – Ч. 1. – 616 с.
3. *Франкль, Ф.И.* Избранные труды по газовой динамике / Ф.И. Франкль. – М.: Наука, 1973. – 712 с.
4. *Зарубин, А.Н.* Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом / А.Н. Зарубин / Орел. гос. ун-т. – Орел, 1999. – 225 с.
5. *Зарубин, А.Н.* Интегродифференциально-разностные уравнения Вольтерра и интегральные преобразования / А.Н. Зарубин // Современная математика и проблемы математического образования: Тр. Всерос. науч.-практ. конф. – Орел, 2009. – С. 48–49.
6. *Прудников, А.П.* Интегралы и ряды. Элементарные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1981. – 799 с.
7. *Диткин, В.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление / В.П. Диткин, А.П. Прудников. – М.: Наука, 1974. – 544 с.
8. *Маричев, О.И.* Об уравнении смешанного типа с двумя линиями вырождения в несимметричной области / О.И. Маричев // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1969. – № 6. – С. 74–80.

УДК 004.942

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ УДАРНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ СИЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

В.К. Манжосов, Д.А. Новиков

Ульяновский государственный технический университет,
кафедра теоретической и прикладной механики
E-mail: v.maniosov@ulstu.ru, tpm@ulstu.ru

Разработана модель движения ударной системы при периодическом силовом воздействии с учетом возможных многократных ударов за период силового воздействия. Осуществлено моделирование режимов движения ударной системы. Сделан выбор параметров системы, реализующих требуемые характеристики движения.

Ключевые слова: удар, модель удара, движение ударной системы, многократный удар, ударный механизм.

Impact System Motion Modes Simulation at Periodic Force Effect

V.K. Manzhosov, D.A. Novikov

Ulyanovsk State Technical University,
Chair of Theoretical and Applied Mechanics
E-mail: v.maniosov@ulstu.ru, tpm@ulstu.ru

A model of impact system motion at periodic force effect taking into account possible multiple impacts during the period of the force effect has been developed. Simulation of impact system motion modes has been carried out. Choice of system parameters realizing the required motion characteristics has been made.

Key words: impact, impact model, impact system motion, multiple impact, impact mechanism.

ВВЕДЕНИЕ

Удар — физический процесс, который часто используется в практической деятельности [1]. Технологии с использованием удара перспективны, они позволяют воздействовать на обрабатываемый объект с огромными усилиями [2, 3]. Реализация периодического удара осуществляется с использованием механизмов ударного действия [4]. При создании ударных механизмов возникает необходимость построения рациональных законов движения ударной массы [4, 5]. На режим движения ударной массы оказывает влияние множество факторов, к числу которых можно отнести силы, разгоняющие массу для нанесения удара и отводящие ее в исходное состояние, заданный период между ударами, время переключения сил, восстановление скорости ударника и другие. Эффективный анализ влияния этих факторов и построение требуемого режима движения ударной системы могут быть достигнуты при моделировании движения виброударной системы.

© В.К. Манжосов, Д.А. Новиков, 2010

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрена ударная система, схема которой приведена на рис. 1. Масса m движется вдоль оси x под действием периодической силы $P(t)$, диаграмма которой представлена на рис. 1.

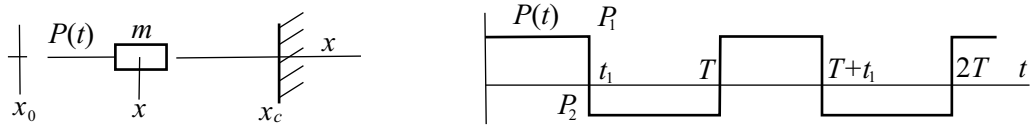


Рис. 1. Схема виброударной системы и диаграмма силы $P(t)$

Движение рассматриваемой виброударной системы описывается уравнениями:

$$m \cdot \ddot{x} = P(t), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \tag{1}$$

$$P(t) = \begin{cases} P_1, & (n-1)T \le t < (n-1)T + t_1, \\ P_2, & (n-1)T + t_1 \le t < nT, \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

$$\text{при} \quad \mathrm{x} = \mathrm{x_c} \quad \text{если} \quad \dot{x}^- > 0, \quad \text{то} \quad \dot{x}^+ = -R\dot{x}^-, \tag{3}$$

где x_0 — координата массы в начальный момент времени при $t = t_0$, $\dot{x}_0$ — скорость ударной массы в начальный момент времени, P_1, P_2 — силы, действующие на массу m в течение периода, T — период силового воздействия, t_1 — длительность действия силы P_1, n — номер цикла силового воздействия, $\mathrm{x_c}$ — координата ограничителя, $\dot{x}^-$ — скорость ударной массы перед столкновением с ограничителем, $\dot{x}^+$ — скорость ударной массы после столкновения с ограничителем, R — коэффициент восстановления скорости при ударе.

2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЯ

2.1. Удар на интервале $t_0 \le t < t_1$

Время первого удара обозначим t_{c_1}, причем $t_0 < t_{c_1} < t_1$. Координата массы совпадает в этот момент с положением ограничителя $x(t_{c_1}) = x_c$. Используя теорему об изменении кинетической энергии материальной точки применительно к движению ударной массы, на интервале $t_0 \le t \le t_{c_1}$ имеем

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2(t) - \dot{x}_0^2) = P_1(x - x_0), \qquad \dot{x}(t) = \pm\sqrt{\dot{x}_0^2 + 2A_1(x - x_0)}, \qquad A_1 = \frac{P_1}{m}. \tag{4}$$

В момент первого удара $t = t_{c_1}$, $x = x_c$. Так как предударная скорость массы по условию (3) является положительной величиной, то при $t = t_{c_1}$ из (4) для $(\dot{x}(t_{c_1}))^-$ оставляем знак «+»:

$$t = t_{c_1}, \qquad (\dot{x}(t_{c_1}))^- = \sqrt{\dot{x}_0^2 - 2A_1(x_0 - x_c)}. \tag{5}$$

При интегрировании (1) до нанесения первого удара на интервале $t_0 \le t \le t_{c_1}$ имеем $\dot{x}(t) = \dot{x}_0 + A_1(t - t_0)$. При $t = t_{c_1}$ получим значение $(\dot{x}(t_{c_1}))^-$, равное

$$(\dot{x}(t_{c_1}))^- = \dot{x}_0 + A_1(t_{c_1} - t_0). \tag{6}$$

Время первого удара t_{c_1} определим, приравняв (5) и (6):

$$t_{c_1} = t_0 + \frac{-\dot{x}_0 + \sqrt{\dot{x}_0^2 - 2A_1(x_0 - x_c)}}{A_1}. \tag{7}$$

Начальная скорость $\dot{x}_0$ может быть как положительной ($\dot{x}_0 > 0$), так и отрицательной ($\dot{x}_0 < 0$) величиной. При $\dot{x}_0 < 0$ из (7) следует, что время первого удара наступит позднее, чем при $\dot{x}_0 > 0$.

Скорость массы после удара при $t = t_{c_1}$ в соответствии с равенством (3) равна

$$t = t_{c_1}, \qquad (\dot{x}(t_{c_1}))^+ = -R(\dot{x}(t_{c_1}))^-. \tag{8}$$

На первой фазе действия усилия на интервале $t_{c_1} \le t \le t_1$ скорость ударной массы и ее координата определяются равенствами:

$$\dot{x} = (\dot{x}(t_{c_1}))^+ + A_1(t - t_{c_1}), \qquad x = x_c + (\dot{x}(t_{c_1}))^+(t - t_{c_1}) + \frac{1}{2}A_1(t - t_{c_1})^2. \tag{9}$$

Удар массы об ограничитель может многократно повторяться на интервале $t_{c_1} < t < t_1$. Если в первой фазе действия силы в момент времени $t = t_{c_i}$ происходит i-й удар, то на интервале $t_{c_{i-1}} \le t \le t_{c_i}$

$$\dot{x}(t) = (\dot{x}(t_{c_{i-1}}))^+ + A_1(t - t_{c_{i-1}}), \qquad x(t) = x_c + (\dot{x}(t_{c_{i-1}}))^+(t - t_{c_{i-1}}) + \frac{1}{2}A_1(t - t_{c_{i-1}})^2, \tag{10}$$

где $t_{c_{i-1}}$ — время нанесения $(i-1)$-го удара, $(\dot{x}(t_{c_{i-1}}))^+ = -R(\dot{x}(t_{c_{i-1}}))^-$ — скорость массы после нанесения $(i-1)$-го удара, являющаяся начальной скоростью движения массы на интервале $t_{c_{i-1}} \le t \le t_{c_i}$.

В момент нанесения i-го удара при $t = t_{c_i}$ масса соприкасается с ограничителем и ее координата $x(t_{c_i}) = x_c$. Тогда из (10)

$$x_c = x_c + (\dot{x}(t_{c_{i-1}}))^+(t_{c_i} - t_{c_{i-1}}) + \frac{1}{2}A_1(t_{c_i} - t_{c_{i-1}})^2, \qquad t_{c_i} - t_{c_{i-1}} = -\frac{2(\dot{x}(t_{c_{i-1}}))^+}{A_1}. \tag{11}$$

Время между двумя последовательными ударами пропорционально зависит от послеударной скорости предыдущего удара и оно уменьшается в геометрической прогрессии. Возникает явление «дребезга». Координата ударной массы интенсивно стремиться к x_c.

Общее время таких соударений при числе соударений, стремящихся к бесконечности, конечно и определяется следующим образом:

$$t_{c_\infty} = t_{c_1} + \frac{2R}{A_1(1-R)}(\dot{x}(t_{c_1}))^-.$$

Если $t_{c_\infty} < t_1$, то многократный ударный режим движения ударной массы заканчивается еще в первой фазе действия силы $P(t)$ и следует переходить к рассмотрению движения во второй фазе действия силы при следующих начальных условиях: $x(t_1) = x_c$, $\dot{x}(t_1) = 0$.

Если неравенство $t_{c_\infty} < t_1$ не выполняется, то возникает необходимость определения конечного числа ударов массы об ограничитель до начала второй фазы действия силы $P(t)$. Число ударов j определится как

$$j = \frac{\ln[1 - \frac{t_1 - t_{c_1}}{a_1}(R-1)]}{\ln R} + 1, \qquad a_1 = \frac{2}{A_1}R(\dot{x}(t_{c_1}))^-.$$

При режиме многократных ударов скорость каждого последующего удара интенсивно уменьшается по закону геометрической прогрессии, причем $(\dot{x}(t_{c_i}))^- = R^{i-1}(\dot{x}(t_{c_1}))^-$.

Так как $R < 1$, то R^{i-1} при увеличении i стремится к нулю. Если рассмотреть отношение $(\dot{x}(t_{c_i}))^-/(\dot{x}(t_{c_1}))^- = R^{i-1}$, то отношение скорости удара на i-м соударении к предударной скорости первого удара при достаточно большом числе соударений становится малой величиной.

Если задаться величиной этой малости ε и учитывать

$$(\dot{x}(t_{c_i}))^- = \begin{cases} (\dot{x}(t_{c_i}))^-, & \text{если} \quad R^{i-1} \ge \varepsilon, \\ 0, & \text{если} \quad R^{i-1} < \varepsilon, \end{cases}$$

то можно определить минимальное число ударов $i_{\min}$, после которого можно считать практически, что ударная масса находится в покое у ограничителя, пока $t < t_1$, т. е. не наступила вторая фаза действия усилия $P(t)$:

$$i_{\min} = \frac{\ln \varepsilon}{\ln R} + 1.$$

Если $i > i_{\min}$, то можно считать, что $(\dot{x}(t_{c_i}))^- = 0$, $x(t_{c_i}) = x_c$, т. е. становятся известными начальные условия для следующего этапа расчета.

2.2. Удар на интервале $t_1 \le t \le T$

Если первый удар не произошел на интервале $t_0 \le t \le t_1$, то он может произойти на интервале $t_1 \le t \le T$, когда на массу действует сила P_2. Начальные условия для этого этапа движения таковы: $x|_{t=t_1} = x(t_1) < x_c$, $\dot{x}|_{t=t_1} = \dot{x}(t_1)$. Время первого удара обозначим t_{c_1}, причем $t_1 < t_{c_1} < T$.

Используя теорему об изменении кинетической энергии материальной точки применительно к движению ударной массы, на интервале $t_1 \le t \le t_{c_1}$ имеем

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2(t) - \dot{x}^2(t_1)) = P_2(x - x(t_1)), \qquad \dot{x}(t) = \pm\sqrt{\dot{x}^2(t_1) + 2A_2(x - x(t_1))}, \qquad A_2 = \frac{P_2}{m}. \tag{12}$$

В момент первого удара $t = t_{c_1}$, $x = x_c$. Тогда предударная скорость массы, будучи по условию (3) положительной величиной, из (12) равна

$$t = t_{c_1}, \qquad (\dot{x}(t_{c_1}))^- = \sqrt{\dot{x}^2(t_1) + 2A_2(x_c - x(t_1))}. \tag{13}$$

При интегрировании (1) до нанесения первого удара на интервале $t_1 \le t \le t_{c_1}$ имеем $\dot{x}(t) = \dot{x}(t_1) + A_2(t - t_1)$. При $t = t_{c_1}$ получим значение $(\dot{x}(t_{c_1}))^-$, равное

$$(\dot{x}(t_{c_1}))^- = \dot{x}(t_1) + A_2(t_{c_1} - t_1). \tag{14}$$

Время первого удара t_{c_1} во второй фазе действия усилия определим, приравняв (13) и (14),

$$t_{c_1} = t_1 + \frac{-\dot{x}(t_1) + \sqrt{\dot{x}^2(t_1) + 2A_2(x_c - x(t_1))}}{A_2}, \qquad A_2 = \frac{P_2}{m}. \tag{15}$$

Чтобы произошел удар во второй фазе действия силы $t_1 \le t \le T$, подкоренное выражение должно удовлетворять неравенству

$$\dot{x}^2(t_1) + 2A_2(x_c - x(t_1)) > 0. \tag{16}$$

Скорость массы после удара в соответствии с равенством (3) равна $t = t_{c_1}$, $(\dot{x}(t_{c_1}))^+ = -R(\dot{x}(t_{c_1}))^-$.

Рассмотрим возможность возникновения повторных ударов во второй фазе действия силы на интервале $t_{c_1} \le t \le T$. Аналогично, как и для (12), имеем

$$\dot{x}(t) = \pm\sqrt{\dot{x}^2(t_{c_1}) + 2A_2(x - x(t_{c_1}))}. \tag{17}$$

В момент повторного удара $t = t_{c_2}$, $x = x_c$. Тогда предударная скорость массы, будучи по условию (3) положительной величиной, из (17) равна

$$t = t_{c_2}, \qquad (\dot{x}(t_{c_2}))^- = \sqrt{(\dot{x}^2(t_{c_1}))^+ + 2A_2(x_c - x(t_{c_1}))}. \tag{18}$$

Так как $x(t_{c_1}) = x_c$, то $(\dot{x}(t_{c_2}))^- = -(\dot{x}(t_{c_1}))^+ = R(\dot{x}(t_{c_1}))^-$.

При интегрировании (1) на интервале $t_{c_1} \le t \le t_{c_2}$ имеем

$$\dot{x}(t) = (\dot{x}(t_{c_1}))^+ + A_2(t - t_{c_1}).$$

Если $A_2 < 0$, повторный удар во второй фазе действия силы невозможен, так как $(\dot{x}(t_{c_1}))^+ = -R(\dot{x}(t_{c_1}))^- < 0$, $\dot{x}(t) < 0$, и ударная масса перемещается от ограничителя. В этом случае далее расчет производится по формулам ($t_{c_1} < t < t_1$):

$$\dot{x} = (\dot{x}(t_{c_1}))^+ + A_2(t - t_{c_1}), \qquad x = x_c + (\dot{x}(t_{c_1}))^+(t - t_{c_1}) + \frac{1}{2}A_2(t - t_{c_1})^2. \tag{19}$$

При $t = T$ скорость ударной массы и ее координата примут следующие значения:

$$\dot{x}(T) = (\dot{x}(t_{c_1}))^+ + A_2(T - t_{c_1}), \qquad x(T) = x_c + (\dot{x}(t_{c_1}))^+(T - t_{c_1}) + \frac{1}{2}A_2(T - t_{c_1})^2.$$

Если $A_2 > 0$, повторный удар во второй фазе действия силы возможен при условии, что время повторного удара $t_{c_1} < t_{c_2} < T$, причем

$$t_{c_2} > t_{c_1} + \frac{-(\dot{x}(t_{c_1}))^+}{A_2} = t_{c_1} + \frac{R(\dot{x}(t_{c_1}))^-}{A_2}.$$

Если во второй фазе действия силы возникают многократные удары, то для i-го удара (при условии $t_{c_i} < T$)

$$t_{c_i} > t_{c_{i-1}} + \frac{R(\dot{x}(t_{c_{i-1}}))^-}{A_2}.$$

Время между двумя последовательными ударами пропорционально зависит от послеударной скорости предыдущего удара и оно уменьшается в геометрической прогрессии. Возникает явление «дребезга» во второй фазе действия силы. Координата ударной массы интенсивно стремиться к x_c, а предударная скорость уменьшается по закону $(\dot{x}(t_{c_i}))^- = R^{i-1}(\dot{x}(t_{c_1}))^-$.

Явление «дребезга» во второй фазе действия силы, возникающее при условии $A_2 > 0$, явно нежелательно, так как в следующем периоде на интервале $T < t < T + t_1$ начинается новая фаза силового воздействия на ударную массу ($A_1 > 0$), и процесс периодических ударов может прекратиться.

Если начинается второй период движения, координата ударной массы $x(T)$ и ее скорость $\dot{x}(T)$ принимаются за начальные для следующего цикла и процедура расчета повторяется.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Осуществлено моделирование движения ударной массы при периодическом силовом воздействии с учетом возможных многократных ударов массы об ограничитель.

На рис. 2 представлены результаты моделирования (диаграммы положения x и скорости v ударной массы в зависимости от времени t) при следующих параметрах ударной системы: $m = 1$ кг, $x_0 = -0.5$ м, $\dot{x}_0 = 0$ м/с, $T = 0.05$ с, $t_1 = 0.035$ с, $R = 0.3$, $P_1 = 1000$ Н, $P_2 = -500$ Н.

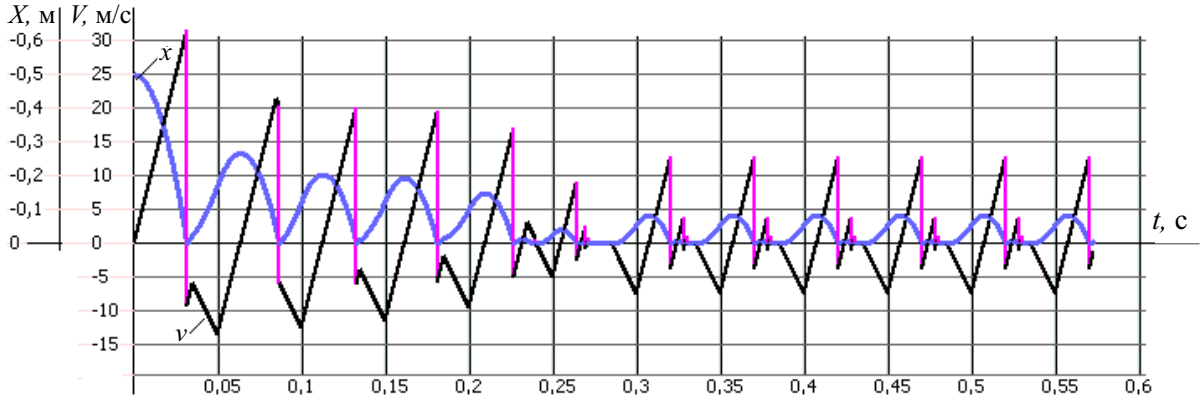


Рис. 2. Диаграммы положения x и скорости v ударной массы при выходе системы на установившийся режим движения

В установившемся режиме движения предударная скорость массы существенно ниже, чем на первых циклах движения. Кроме этого возникает явление «дребезга». Влияет на режим движения время переключения силы $P(t)$ со значения P_1 на значение P_2. На рис. 3 представлены диаграммы $x = x(t)$, $v = v(t)$ движения ударной массы и фазовые диаграммы $v = v(x)$ при значениях времени переключения $t_1 = 0.025$ с (см. рис. 3, *а*) и $t_1 = 0.03$ с (см. рис. 3, *б*).

Параметры ударной системы: $m = 1$ кг, $x_0 = -0.5$ м, $v_0 = 0$ м/с, коэффициент $R = 0.3$; период $T = 0.05$ с, $P_1 = 1000$ Н, $P_2 = -500$ Н.

В обоих случаях режим движения существенно нестабильный. Возникают пропуски ударов, удар массы об ограничитель происходит с различной скоростью.

Построим закон движения $x = x(t)$ ударной массы m, совершающей прямолинейное движение вдоль оси x с одним соударением об ограничитель за период (x_c — координата ограничителя) с заданной скоростью v^- под действием периодического силового воздействия $P(t)$ с периодом T с одним переключением силы за период в моменты времени $(t_1)_i$.

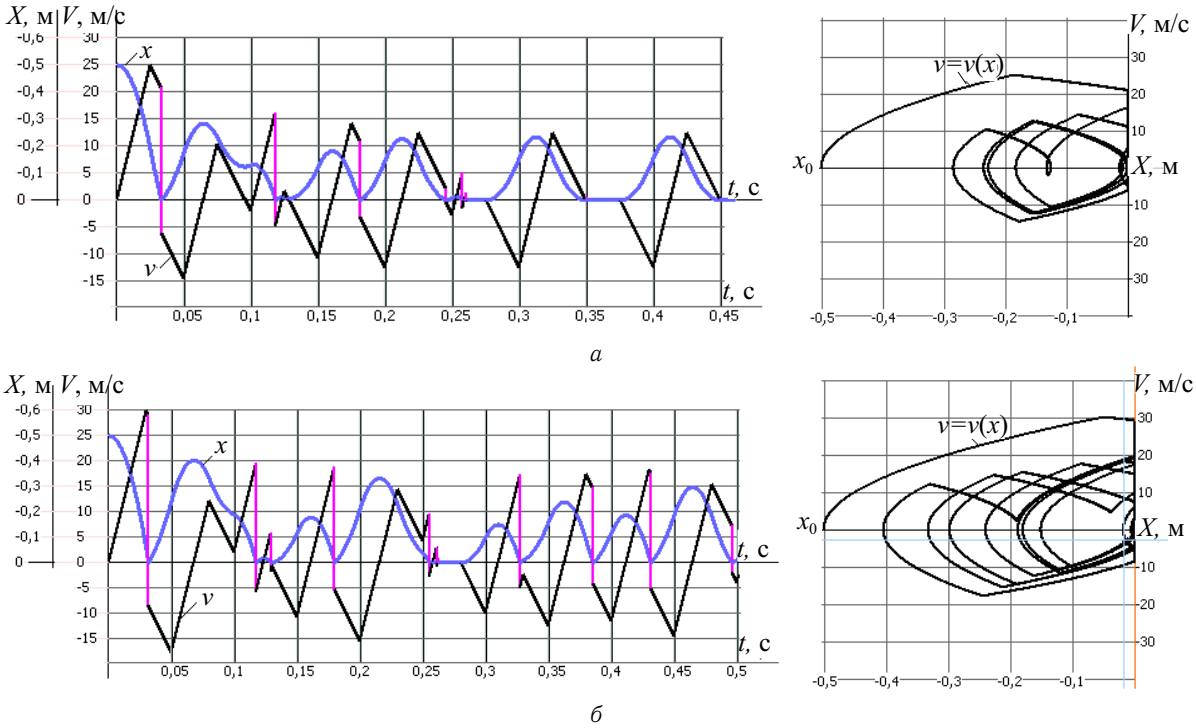


Рис. 3. Диаграммы движения ударной массы $x = x(t)$, $v = v(t)$ и фазовые диаграммы $v = v(x)$ при различных значениях времени переключения t_1

Предполагается, что удар массы m об ограничитель является мгновенным, модель удара описывается равенством $v^+ = -Rv^-$, где v^+ — скорость массы после удара, R — коэффициент восстановления скорости $(0 \le R \le 1)$.

Предполагается, что сила $P(t)$ за период ее действия имеет две фазы с постоянными по модулю значениями сил P_1 и P_2: $P(t) = P_1$, $(t_н)_i \le t \le (t_1)_i$, $P(t) = P_2$, $(t_1)_i \le t \le (t_н)_i + T$, где $(t_н)_i = (i-1)T$ — время начала периода действия силы, $(t_1)_i = (t_н)_i + k_t T$ — время переключения действия силы, $k_t = ((t_1)_i - (t_н)_i)/T$ — коэффициент $(0 < k_t < 1)$, i — номер периода действия силы.

Периодический характер движения ударной массы описывается равенствами $x((t_k)_i) = x((t_н)_i)$, $\dot{x}((t_k)_i) = \dot{x}((t_н)_i)$, где $(t_k)_i = iT$ — время окончания периода действия силы, $x((t_н)_i)$ и $x((t_k)_i)$ — положение ударной массы в начале и конце периода, $\dot{x}((t_k)_i)$ и $\dot{x}((t_н)_i)$ — скорость ударной массы в начале и конце периода соответственно.

Из условия $0 < k_t < 1$ следует, что начальная скорость $\dot{x}_0 < Rv^-$.

Энергия удара будет наибольшей, если в момент $(t_1)_i$ переключения силы $P(t)$ масса m достигнет ограничителя и произведет удар. Этому условию соответствует равенство $x((t_н)_i) = x_c$.

Определим закон движения ударной массы m при значении массы m, положении ограничителя x_c, предударной скорости v^-, коэффициенте восстановления R, начальных условиях x_0 и $\dot{x}_0$ $(\dot{x}_0 < Rv^-)$. Для решения задачи необходимо найти значения $(t_1)_i$, P_1 и P_2, v^+, T.

Из условий обеспечения периодичности движения, условий соударения следует, что

$$T = \frac{2(x_c - x_0)}{v^- + \dot{x}_0} + \frac{2(x_0 - x_c)}{v^+ + \dot{x}_0}, \qquad (t_1)_i = \frac{2(x_c - x_0)}{v^- + \dot{x}_0} + (i-1)T, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

$$P_1 = m\frac{(v^-)^2 - (\dot{x}_0)^2}{2(x_c - x_0)}, \qquad v^+ = -Rv^-, \qquad P_2 = m\frac{\dot{x}_0 - v^+}{T - \frac{2(x_c - x_0)}{\dot{x}_0 + v^-}}.$$

При начальных условиях $x_0 = -0.5$ м и $\dot{x}_0 = 0$ м/с, значении массы $m = 1$ кг, положении ограничителя $x_c = 0$, предударной скорости $v^- = 20$ м/с и коэффициенте восстановления $R = 0.3$ будем иметь следующие характеристики цикла:

$$v^+ = -Rv^- = -6\,\text{м/с}, \qquad T = \frac{2(x_c - x_0)}{v^- + \dot{x}_0} + \frac{2(x_0 - x_c)}{v^+ + \dot{x}_0} = 0.05 + 0.166 = 0.216\,\text{с},$$

$$(t_1)_i = \frac{2(x_c - x_0)}{v^- + \dot{x}_0} + (i-1)T = (0.05 + (i-1)\cdot 0.216)\,\text{с}, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

$$P_1 = m\,\frac{(v^-)^2 - (\dot{x}_0)^2}{2(x_c - x_0)} = 400\,\text{Н}, \qquad P_2 = m\,\frac{\dot{x}_0 - v^+}{T - \frac{2(x_c - x_0)}{\dot{x}_0 + v^-}} = 36\,\text{Н}.$$

На рис. 4 представлены результаты моделирования движения ударной системы при реализации вычисленных характеристик цикла. Процесс периодический, с одним соударением ударной массы об ограничитель и с требуемой скоростью соударения.

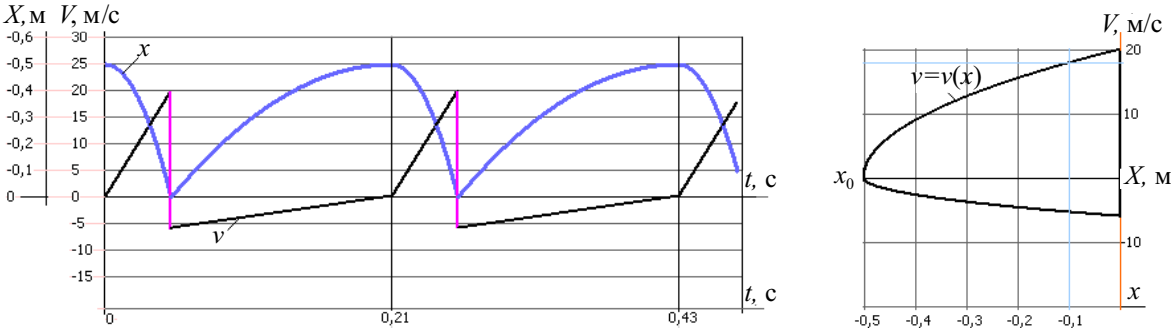


Рис. 4. Диаграммы движения ударной массы

Не возникает явления «дребезга», связанного с многократными ударами, с малой предударной скоростью, после нанесения основного удара. Фазовая диаграмма имеет четко выраженную характеристику с определенными значениями скорости ударной массы в зависимости от ее положения.

ВЫВОДЫ

При описании движения ударной массы под действием периодической силы возникает вероятность многократных ударов массы об ограничитель (явление «дребезга») в случае, если время переключения силы для отвода ударника от ограничителя запаздывает по отношению к моменту нанесения удара.

Моделирование движения ударной массы в процессе дребезга проблематично, так как этот процесс бесконечно ударный с интенсивным уменьшением предударной скорости и сокращением времени между двумя последовательными ударами. Решение этой проблемы найдено путем определения минимального числа последовательных ударов, превышение которого позволяет с заданным уровнем погрешности отсекать последующие малые перемещения ударника и определять начальные значения для следующего цикла движения.

Разработана процедура моделирования режимов движения ударной системы при периодическом силовом воздействии с учетом возможных многократных ударов за период силового воздействия.

Результаты моделирования показывают существенное влияние на движение ударной массы параметров виброударной системы. При неблагоприятных их значениях режим движения нестабильный. Возникают пропуски ударов, удар массы об ограничитель происходит с различной скоростью.

Предложенные расчетные зависимости позволяют определить параметры ударной системы, обеспечивающие заданные характеристики цикла.

Работа выполнена в рамках реализации Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (*ГК* № П 1122).

Библиографический список

1. *Алимов, О.Д.* Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах / О.Д. Алимов, В.К. Манжосов, В.Э. Еремьянц. – М.: Наука, 1985. – 354 с.
2. *Дворников, Л.Т.*Продольный удар полукатеноидальным бойком / Л.Т. Дворников, И.А. Жуков. – Новокузнецк, 2006. – 80 с.
3. *Манжосов, В.К.* Продольный удар / В.К. Манжосов; Ульяновск. гос. тех. ун-т. – Ульяновск, 2007. – 358 с.
4. *Алимов, О.Д.* Гидравлические виброударные системы / О.Д. Алимов, С.А. Басов. – М.: Наука, 1990. – 352 с.
5. *Манжосов, В.К.* Динамика и синтез кулачковых ударных механизмов / В.К. Манжосов; Ульяновск. гос. тех. ун-т. – Ульяновск, 2006. – 219 с.

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.713, 519.718.7

АВТОМАТНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

А.С. Епифанов

Саратовский государственный университет,
кафедра дискретной математики и информационных технологий
E-mail: epifanovas@list.ru

Преобразование фазовых картин в геометрические образы законов функционирования автоматов, предложенное и разработанное В.А. Твердохлебовым, позволило представлять фазовые картины едиными математическими структурами –- ломаными линиями с числовыми координатами точек. В.А.Твердохлебовым показано, что последовательность элементов из конечного множества, совмещенная с линейным порядком на множестве входных слов, определяет законы функционирования дискретной детерминированной динамической системы (автомата). Это позволяет проводить анализ законов функционирования автоматов на основе исследования свойств числовых последовательностей, а также исследовать свойства числовых последовательностей на основе анализа свойств автоматов.

Ключевые слова: конечный детерминированный автомат, геометрический образ автомата, целочисленные последовательности.

The Automata Interpretation of Integer Sequences

A.S. Epifanov

Saratov State University,
Chair of Discrete Mathematic and Information Technologies
E-mail: epifanovas@list.ru

Transformation of phase pictures to geometrical images of laws of functioning of state machines, offered and developed by V.A.Tverdokhlebov , has allowed to represent phase pictures by uniform mathematical structures –- broken lines with numerical coordinates of points. V.A.Tverdokhlebov shows, that sequence of elements from the finite set, combined with linear order on set of input words, defines laws of functioning of the discrete determined dynamic system (state machine). It allows carry out the analysis of laws of functioning of state machines on the basis of research of properties of numerical sequences, and also it allows to research properties of numerical sequences by the analysis of properties of state machines.

Key words: finite state machine, geometrical image of state machine, integer sequences.

ВВЕДЕНИЕ

Методы решения задач управления, синтеза и анализа дискретных детерминированных динамических систем используют задание законов функционирования систем. В фазовых картинах систематизированы и представлены фазовые траектории, определяющие поведение систем. Большое разнообразие фазовых картин в работе [1] сведено к единой форме — символьным и числовым графикам, точки которых размещаются на геометрических кривых линиях. Это позволяет не только сводить фазовые картины к удобной стандартной форме, но и использовать для постановок и решения задач средства непрерывной математики. Существенной оказывается возможность доопределения фазовых картин, представленных частично заданными геометрическими образами, с использованием классических ме-

© А.С. Епифанов, 2010

тодов интерполяции. При задании автомата геометрическим образом соответствующее автоматное отображение преобразуется в точечный числовой график с точками, расположенными на геометрических кривых линиях (см. [1]). При таком задании законов функционирования автомата мощность множества состояний может быть бесконечной или, для удобства математических вычислений, полагаться бесконечной. В данной работе содержатся результаты исследований законов функционирования дискретных детерминированных динамических систем (автоматов), представленных в форме числовых последовательностей (последовательностей вторых координат точек геометрических образов) длиной до 1000000 знаков. Оценка сложности и классификация математических структур в форме последовательностей производится на основе спектра динамических параметров рекуррентного описания последовательностей.

Данная работа является продолжением работ [2–3], в которых осуществлены построение и анализ классов автоматов, законы функционирования которых заданы в форме числовых последовательностей, и содержат результаты более детального исследования 10-ти математических величин: π, e, ϕ (так называемое золотое сечение), $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\ln(2)$, $\ln(10)$, $\zeta(3)$, константы Каталана и константы Эйлера. Исследуется зависимость числа состояний у минимального автомата, построенного по последовательности, от мощности входного алфавита автомата и способа доопределения функции переходов автомата.

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ ЗАКОНОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ АВТОМАТОВ

Преобразование символьной формы автоматной модели в числовую структуру (геометрический образ законов функционирования автомата) включает линейное упорядочивание автоматного отображения $\rho_s = \bigcup\limits_{p \in X^*} \{(p, \lambda(s,p))\}$ для инициального автомата $A_s = (S, X, Y, \delta, \lambda, s)$, где S, X и Y — соответственно множества состояний, входных и выходных сигналов, $\delta : S \times X \to S$ — функция переходов, $\lambda : S \times X \to Y$ — функция выходов, а $s \in S$ — начальное состояние автомата. Автоматное отображение ρ_s взаимнооднозначно преобразуется в автоматное отображение вида $\rho'_s = \bigcup\limits_{p \in X^*} \{(p, \lambda'(s,p))\}$, где $\lambda'(s,p)$ — последний знак последовательности $\lambda(s,p)$. После введения на множестве X^* линейного порядка ω_1 множество пар ρ_s оказывается линейно упорядоченным множеством (ρ_s, ω_1), которое при любом линейном порядке ω_2 на множестве Y становится графиком $\gamma_s = (\rho_s, \omega_1, \omega_2)$ в системе координат с осью абсцисс (X^*, ω_1) и осью ординат (Y, ω_2). Для преобразования множества пар ρ_s и ρ'_s в графики принципиально важным является задание линейного порядка ω_1 на множестве X^* (см., например, [1]).

Правило 1. На множестве X вводится линейный порядок $\omega_1(\prec_1)$: $x_1 \prec_1 x_2 \prec_1 \ldots \prec_1 x_k$.

Правило 2. Порядок ω_1 на X распространяется до линейного порядка на множестве X^*:

– для любых слов $p_1, p_2 \in X^*$ неодинаковой длины $|p_1| < |p_2| \to p_1 \prec_1 p_2$;

– для любых слов $p_1, p_2 \in X^*$, для которых $|p_1| = |p_2|$ и $p_1 \neq p_2$, их отношение по порядку ω_1 повторяет отношение ближайших слева несовпадающих букв в словах p_1 и p_2.

На множестве $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_l\}$ определяется некоторый линейный порядок ω_2. Упорядоченные множества пар (ρ_s, ω_1) и (ρ'_s, ω_1) дополняются линейными порядками ω_0 на Y^* и ω_2 на Y. В результате получаем графики $(\rho_s, \omega_1, \omega_0)$ и $(\rho'_s, \omega_1, \omega_2)$. Построенные графики размещены в системе координат с осью абсцисс (X^*, ω_1) и осями ординат соответственно (Y^*, ω_0) и (Y, ω_2). Замена элементов $p \in X^*$, $p = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$, и $y \in Y$ в графике $\gamma_s = (\rho'_s, \omega_1, \omega_2)$ их номерами $r_1(p)$ по порядку ω_1 и $r_2(y)$ по порядку ω_2 позволяет преобразовать символьный график γ_s в числовой график в системе координат с осью абсцисс N^+ и осью ординат $\{1, 2, \ldots, l\}$, где $|Y| = l$.Возможны и другие варианты линейных порядков на X^* (см., например, [1]).

В данной работе исследование законов функционирования автоматов проводится с использованием порядка ω_1. Из геометрического образа γ_s автомата A_s выделяется последовательность вторых координат точек геометрического образа, которая взаимнооднозначно соответствует полному геометрическому образу (при выбранных множестве входных сигналов X и линейном порядке ω_1 на множестве входных слов X^*). Произвольная последовательность элементов из конечного множества может рас-

сматриваться как последовательность вторых координат точек геометрического образа и, следовательно, как задание законов функционирования автомата. Это позволяет некоторые свойства законов функционирования автомата представлять свойствами последовательностей.

2. СПЕКТР ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ РЕКУРРЕНТНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В работе [1] предложен спектр динамических параметров, характеризующих сложность правил порождения последовательности. Пусть $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ — конечное множество и ξ — последовательность элементов из множества U : $\xi =< u(1), u(2), \ldots, u(t), \ldots >$. Спектр $\Omega =< \Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4 >$ вводится как многоуровневая структура, в которой на каждом уровне представлены наборы характеристик использованных рекуррентных форм $F_i^m(z_1, z_2, \ldots, z_m) = z_{m+1}$, где m — порядок рекуррентной формы, m=1,2,.... Каждая рекуррентная форма F_i^m, с учетом отношения $\xi \in U^*$, описывается функцией $f_i^m : U^* \to U$ и применяется для определения одного или нескольких отрезков в зависимости от структуры последовательности ξ. Исследования свойств спектров, соответствующих последовательностям, имеет общее значение для конструктивных объектов.

Определим понятие спектра.

Определение 1. Для любой последовательности $\overline{\xi} \in U^v$ ($|\overline{\xi}| = v$) наименьший порядок рекуррентной формы, определяющей последовательность $\overline{\xi}$, будем обозначать $m_0(\overline{\xi})$.

Определение 2. Для любой последовательности $\overline{\xi} \in U^v$ и $m \in N^+$, где $1 \le m \le m_0(\overline{\xi})$, наибольшую длину начального отрезка последовательности $\overline{\xi}$, определяемого рекуррентной формой порядка m, будем обозначать $d^m(\overline{\xi})$.

Определение 3. Для любой последовательности $\overline{\xi} \in U^v$ и $m \in N^+$, где $1 \le m \le m_0(\overline{\xi})$, число смен рекуррентных форм порядка m, требующихся при определении последовательности $\overline{\xi}$, будем обозначать $r^m(\overline{\xi})$.

Определение 4. Для любой последовательности $\overline{\xi} \in U^v$ и $m \in N^+$, где $1 \le m \le m_0(\overline{\xi})$ и j, где $1 \le j \le r^m(\overline{\xi})$, длину j-го отрезка в определении последовательности $\overline{\xi}$ будем обозначать $d_j^m(\overline{\xi})$.

Используя введенные обозначения, определим спектр параметров, характеризующих последовательность, как следующую структуру: $\Omega_0(\overline{\xi}) =< m_0(\overline{\xi}) >$, $\Omega_1(\overline{\xi}) =< d^1(\overline{\xi}), d^2(\overline{\xi}), \ldots, d^\alpha(\overline{\xi}) >$, $\Omega_2(\overline{\xi}) =< r^1(\overline{\xi}), r^2(\overline{\xi}), \ldots, r^\alpha(\overline{\xi}) >$, $\Omega_3(\overline{\xi}) =< \Omega_3^1(\overline{\xi}), \Omega_3^2(\overline{\xi}), \ldots, \Omega_3^\alpha(\overline{\xi}) >$, где $\alpha = m_0(\overline{\xi})$ и $\Omega_3^m(\overline{\xi}) =< d_1^m(\overline{\xi}), d_2^m(\overline{\xi}), \ldots, d_{n_m}^m(\overline{\xi}) >$ (n_m — номер последнего отрезка в определении последовательности $\overline{\xi}$ как последовательности отрезков, определяемых отдельными рекуррентными формами порядка m). Формально $\Omega_4(\overline{\xi}) = \Theta(\Omega_3(\overline{\xi}))$, где Θ — оператор замены в $\Omega_3(\overline{\xi})$ величин длин отрезков весами использованных рекуррентных форм для определения отрезков. В качестве примера в табл. 1 приведены числовые показатели на уровнях Ω_0–Ω_3 спектра Ω для последовательности $\xi =< 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, 7, 9, 3, 2, 3, 8, 4, 6, 2, 6, 4, 3, 3, 8, 3, 2, 7, 9, 5, 0, 2, 8, 8, 4, 1, 9, 7, 1, 6, 9, 3, 9, 9, 3, 7, 5, 1 >$ длины 50-ти знаков, задающей приближение числа π.

Таблица 1

Числовые показатели на уровнях Ω_0–Ω_3 спектра Ω для последовательности длины 50-ти знаков, задающей приближение числа π

Уровни спектра	Числовые показатели спектра
Ω_0	$< m_0(\xi) = 3 >$
Ω_1	$< d^1(\xi) = 4, d^2(\xi) = 23, d^3(\xi) = 50 >$
Ω_2	$< r^1(\xi) = 14, r^2(\xi) = 3, r^3(\xi) = 1 >$
Ω_3	$< \Omega_3^1(\xi) =< d_1^1(\xi) = 3, d_2^1(\xi) = 5, d_3^1(\xi) = 2, d_4^1(\xi) = 4, d_5^1(\xi) = 3,$ $d_6^1(\xi) = 5, d_7^1(\xi) = 3, d_8^1(\xi) = 2, d_9^1(\xi) = 6, d_{10}^1(\xi) = 2, d_{11}^1(\xi) = 5,$ $d_{12}^1(\xi) = 4, d_{13}^1(\xi) = 1, d_{14}^1(\xi) = 4 >,$ $\Omega_3^2(\xi)=< d_1^2(\xi) = 21, d_2^2(\xi) = 24, d_3^2(\xi) = 3 >,$ $\Omega_3^3(\xi)=< d_1^3(\xi) = 47 >\rangle$

3. ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ КЛАССОВ $(H, M, D(H))$-АВТОМАТОВ

В работе [1] предложены и разработаны методы синтеза автомата по последовательностям и геометрическим кривым. Последовательность элементов из конечного множества, совмещенная с линейным порядком на множестве входных слов, определяет законы функционирования дискретной детерминированной динамической системы (автомата). В.А. Твердохлебовым предложен новый тип автомата — $(H, m, d(H))$-автомат. Законы функционирования данного типа автомата задаются числовой последовательностью H, которая полагается последовательностью вторых координат точек геометрического образа. Рассматривается начальный отрезок длины $d(H)$ последовательности H. Величина m — мощность входного алфавита автомата, количество выходных сигналов определяется спецификой начального отрезка последовательности H длины $d(H)$ (число различных значений элементов в начальном отрезке длины $d(H)$).

В данной работе содержатся результаты по построению и анализу конечных детерминированных автоматов, законы функционирования которых определены начальными отрезками геометрических образов и выбором числа входных сигналов автомата. Для этого из банка последовательностей [5] извлечены 12 последовательностей длины 1000000 знаков, задающих приближения следующих математических величин: π, e, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (так называемое золотое сечение), $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\ln(2)$, $\ln(10)$, $\zeta(3) = \sum\limits_{x=1}^{\infty}(\frac{1}{x^3})$, константы Каталана $C = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1^n)}{(2n+1)^2}$, константы Эйлера $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log(n))$, χ_F(характеристическая последовательность для чисел Фибоначчи) и χ_P (характеристическая последовательность для простых чисел). Каждая последовательность представлена набором начальных отрезков, имеющих длины d_k знаков,где $d_k = 10000 \cdot k$, $k = 1, 2, \ldots, 100$. Полученное множество из 1200 последовательностей рассматривается как множество начальных отрезков последовательностей вторых координат точек геометрических образов законов функционирования автоматов. Соответствующие последовательности первых координат точек геометрического образа определялись вариантами выбора числа входных сигналов автомата и линейным порядком ω_1 на множестве входных последовательностей. Рассматриваются множества входных сигналов, содержащие 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000 и 2000 элементов. Подробное описание метода синтеза автомата по последовательности, а также метода проверки эквивалентности состояний автомата по геометрическому образу содержится в монографии [1]. Отметим принципиальные моменты метода синтеза автомата по последовательности. Если в качестве задания законов функционирования автомата рассматривается последовательность $\xi =< u(1), u(2), \ldots, u(t), \ldots\rangle$, то в ее интерпретацию включается разбиение последовательности ξ на отрезки длины m, где $m = |X|$. Каждый отрезок при таком разбиении определяет функционирование автомата для конкретного состояния памяти. Если множеством состояний автомата полагать множество $S = \{s_p\}_{p\in X^*}$, а функцию переходов δ определить правилами $s_0 = s_\varepsilon$ и $\delta(s_p, x) = s_{px}$, то функция δ оказывается стандартной для всех автоматов с множеством входных сигналов X. Специфика автоматов проявляется в том, что на бесконечном (счетном) множестве состояний для каждого автомата выделяются классы эквивалентных состояний. Существенным при синтезе законов функционирования автомата является способ доопределения функции переходов δ автомата. Возможно циклическое доопределение, доопределение в начальное состояние, генерация состояния псевдослучайным образом (из множества возможных состояний). В случае, когда $\frac{d(H)}{|X|} \neq [\frac{d(H)}{|X|}]$, где $|X|$ — мощность входного алфавита автомата, а $d(H)$ — длина начального отрезка последовательности H (по которой строятся законы функционирования автомата), доопределение требуется и для функции выходов λ.

В данной работе доопределение функции переходов осуществляется всеми указанными способами, а значение мощности входного алфавита и длины начальных отрезков последовательностей выбраны таким образом, что $\frac{d(H)}{|X|} = [\frac{d(H)}{|X|}]$, поэтому доопределение функции λ не требуется. Рассматриваемое множество из 1200 последовательностей при десяти различных значениях мощности входного алфавита и трех способах доопределения функции переходов сопоставляется с классом автоматов, состоящем из 36000 элементов. Далее осуществляется минимизация автоматов из построенного класса и разбиение на подклассы автоматов по числу состояний в автоматах после минимизации. Для построения семейства автоматов по заданной последовательности при различных значениях мощности входного алфавита, минимизации построенных автоматов по числу состояний на основе уже существующих

методов разработаны соответствующие алгоритмы, составлены и отлажены программы, реализующие данные алгоритмы. В результате получен программный комплекс, позволяющий по заданному в файле массиву последовательностей осуществлять построение семейств автоматов, минимизацию автоматов по числу состояний и классификацию по сложности на основе числа состояний в минимальном автомате, построенном по последовательности. В программном комплексе реализовано три указанных выше способа доопределения функции переходов автомата. В качестве примера в табл. 2 приведены табличные задания функций переходов и выходов автомата, построенного по начальному отрезку длины 60 числа π. В данном примере использовано циклическое доопределение функции переходов автомата, а значение мощности входного алфавита равно 5. В результате анализа класса π-автоматов, т. е. класса автоматов, построенных по последовательностям, задающим приближение фундаментальной математической величины π длины d_k знаков, где $d_k = 10000 \cdot k$, k=1,2,. . . ,100, при рассмотрении различных вариантов мощности входного алфавита ($|X| = 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000$) отмечено, что при некоторых из указанных способах доопределения функции переходов уменьшается число состояний у автоматов после минимизации.

Таблица 2

Табличное задание функций переходов δ и выходов λ (π,5,60)-автомата

δ	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}
x_1	s_1	s_6	s_{11}	s_4	s_9	s_2	s_7	s_0	s_5	s_{10}	s_3	s_8
x_2	s_2	s_7	s_0	s_5	s_{10}	s_3	s_8	s_1	s_6	s_{11}	s_4	s_9
x_3	s_3	s_8	s_1	s_6	s_{11}	s_4	s_9	s_2	s_7	s_0	s_5	s_{10}
x_4	s_4	s_9	s_2	s_7	s_0	s_5	s_{10}	s_3	s_8	s_1	s_6	s_{11}
x_5	s_5	s_{10}	s_3	s_8	s_1	s_6	s_{11}	s_4	s_9	s_2	s_7	s_0
λ	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}
x_1	y_3	y_9	y_5	y_3	y_6	y_3	y_9	y_8	y_1	y_9	y_0	y_9
x_2	y_1	y_2	y_8	y_2	y_2	y_8	y_5	y_4	y_6	y_3	y_5	y_7
x_3	y_4	y_6	y_9	y_3	y_6	y_3	y_0	y_1	y_9	y_7	y_8	y_4
x_4	y_1	y_5	y_7	y_8	y_4	y_2	y_2	y_9	y_3	y_5	y_2	y_9
x_5	y_5	y_3	y_9	y_4	y_3	y_7	y_8	y_7	y_9	y_1	y_0	y_4

При доопределении в начальное состояние из 3000 постренных π-автоматов менее чем у 100 автоматов после минимизации число состояний уменьшилось. Например, у (π,2,10000)-автомата, (π,2,50000)-автомата и (π,2,100000)-автомата число состояний после минимизации сокращается почти в 2 раза. У всех построенных π-автоматов при доопределении функции переходов на основе использования генератора случайных чисел (состояний выбирается из множества возможных состояний случайным образом) число классов эквивалентности совпадает с числом состояний, т. е. автоматы являются минимальными по числу состояний. Используемый аппарат геометрических образов автоматов позволяет рассматривать с автоматной интерпретацией как сами классические последовательности чисел Фибоначчи (и другие так называемые возвратные последовательности) и простых чисел, так и их характеристические последовательности. Автором статьи на основе автоматной интерпретации проведен анализ как самих классических последовательностей чисел Фибоначчи и простых чисел, так и их характеристических последовательностей. При построении автоматов по самим классическим последовательностям отмечено, что такие автоматы являются минимальными по числу состояний (при анализируемых значениях мощности входного алфавита и рассмотренных начальных отрезках таких последовательностей). Кроме того, характеристики данных последовательностей по спектру Ω (на рассмотренных в работе первых четырех уровнях Ω_0–Ω_3) также являются «тривиальными» (так как формально для определения рекуррентной формой последовательности, в которой все элементы различны (например,последовательности простых чисел), достаточно порядка рекуррентной формы, равного единице, а характеристики на первом, втором и третьем уровнях спектра «вырождаются» из наборов чисел в одно число на каждом уровне). Ввиду ограничений на объем статьи приводятся результаты исследования не самих классических последовательностей, а только характеристических последовательностей (как более интересных, по мнению автора, с точки зрения полученных результа-

тов их анализа). Проведенный анализ класса (χ_F,m,$d(\chi_F)$)-автоматов, где χ_F — характеристическая последовательность чисел Фибоначчи, показал, что и при циклическом доопределении функции переходов, и при доопределении в начальное состояние, а также и при доопределении функции переходов на основе использования генератора случайных чисел возможно уменьшение числа состояний у автомата после минимизации. Например, при доопределении в начальное состояние у (χ_F,2,10000), (χ_F,2,20000), (χ_F,2,30000), (χ_F,2,40000), (χ_F,2,50000) и (χ_F,2,100000)-автоматов после минимизации число состояний уменьшается более чем в 60 раз. Кроме того, проведено дополнительное исследование автоматов из класса $(\chi_P, m, d(\chi_P))$-автоматов, где χ_P — характеристическая последовательность простых чисел при значениях $d(\chi_P) \leq 100$ и циклическом доопределении функции переходов.

Отмечены следующее свойства: $(\chi_P, 2, 60)$-автомат после минимизации имеет 19 состояний (число состояний до минимизации 30), $(\chi_P, 2, 70)$-автомат после минимизации имеет 35 состояний (число состояний не уменьшилось после минимизации), $(\chi_P, 2, 80)$-автомат после минимизации имеет 31 состояние (число состояний до минимизации 40), $(\chi_P, 2, 90)$-автомат после минимизации имеет 45 состояний (число состояний не уменьшилось после минимизации), $(\chi_P, 2, 100)$-автомат после минимизации имеет 38 состояний (число состояний до минимизации 50). Аналогичное свойство отмечено при построении автоматов (при циклическом доопределении функции переходов) по характеристической последовательности чисел Фибоначчи при $d(\chi_F) \leq 100$. На основе этих данных выдвигается гипотеза, что в случаях $d(\chi_P) \leq 100$, когда при построении автомата используется циклическое доопределение функции переходов и величина $\frac{d(\chi_P)}{m}$ является четным числом, после минимизации число состояний у автомата уменьшается, если же $\frac{d(\chi_P)}{m}$ является нечетным числом, то число состояний после минимизации не уменьшается.

4. ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ И КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАКОНОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ $(H, M, D(H))$-АВТОМАТОВ

В данной работе на основе использования аппарата геометрических образов автоматов и спектра динамических параметров, предложенных и разработанных В.А. Твердохлебовым [1], осуществляется оценка сложности и классификация законов функционирования дискретных детерминированных динамических систем (автоматов). Сравнение по сложности таких автоматов может быть сделано на основе сравнения математических структур, представляющих специфику законов функционирования автомата. В качестве таких структур могут быть использованы геометрические образы законов функционирования автоматов. Геометрический образ построен на основе, во-первых, линейного упорядочивания элементов автоматного отображения, а во-вторых, извлечения из линейно упорядоченного автоматного отображения последовательности вторых координат точек [1]. Сравнение по сложности законов функционирования автоматов производится на основе сравнения спектров последовательностей. На основании того, что на структуру характеристических последовательностей ограничения не накладываются и она может быть любой последовательностью элементов из конечного множества, метод сравнения моделей по сложности допускает интерпретацию на любых, в частности, числовых последовательностях. Уровни спектра построены иерархически по добавлению в спектр новых параметров. В связи с этим эквивалентность последовательностей представляется через t-эквивалентности, определяемые уровнем Ω_t,$0 \leq t \leq 3$.

В результате вычисления и анализа спектров для рассматриваемых математических последовательностей построены классы эквивалентных по сложности последовательностей и соответствующие им классы эквивалентных по сложности законов функционирования автоматов. Например, среди классов $(\pi, m, 1000)$-автоматов, $(e, m, 1000)$-автоматов, $(\chi_P, m, 1000)$-автоматов и $(\chi_F, m, 1000)$-автоматов с точки зрения используемого спектра Ω самым сложным оказался класс $(\chi_F, m, 1000)$-автоматов, а самым простым класс $(\pi, m, 1000)$-автоматов. При этом на нулевом уровне Ω_0 спектра Ω отмечена следующая специфика: в классе $(\pi, m, 1000)$-автоматов значение $\Omega_0 =< 6 >$, в классе $(e, m, 1000)$-автоматов $\Omega_0 =< 7 >$, в классе $(\chi_P, m, 1000)$-автоматов $\Omega_0 =< 60 >$, а в классе $(\chi_F, m, 1000)$-автоматов $\Omega_0 =< 377 >$. Также отмечено, что при увеличении параметра $d(H)$ в классах (π,m,$d(\pi)$)-автоматов и (e,m,$d(e)$)-автоматов от 1000 до 10000 сложность с точки зрения спектра динамических параметров существенно не увеличивается, кроме того, и в классе (π,m,10000)-автоматов $\Omega_0 =< 8 >$, и в классе (e,m,10000)-автоматов $\Omega_0 =< 8 >$, т. е. при таком значении величины $d(H)$ данные клас-

сы автоматов имеют одинаковую сложность. Подробное описание проведенного исследования всех 150000 целочисленных последовательностей из банка [5] содержится в монографии [2].

ВЫВОДЫ

Использование геометрических образов позволяет сопоставлять последовательности (а соответственно и той величине, приближение которой она задает) дискретную детерминированную динамическую систему (автомат) и изучать свойства последовательностей, а также объектов, процессов и явлений, представленных в виде последовательностей, на основе анализа свойств автоматов.

В работе построены и проанализированы классы автоматов, законы функционирования которых представлены в форме последовательностей из банка целочисленных последовательностей [5]. Проведена оценка сложности последовательностей на основе числа состояний в минимальном автомате, построенном по последовательности. Для рассматриваемых последовательностей построены и проанализированы спектры числовых показателей. На основе совпадения показателей на соответствующих уровнях спектра проведена оценка сложности и классификация последовательностей (и соответствующих им законов функционирования автоматов).

Библиографический список

1. *Твердохлебов, В.А.* Геометрические образы законов функционирования автоматов / В.А. Твердохлебов. – Саратов, 2008. – 183 с.

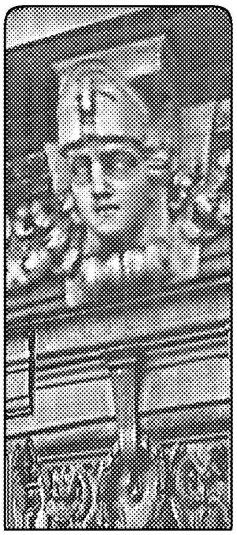
2. *Епифанов, А.С.* Анализ фазовых картин дискретных динамических систем / А.С. Епифанов. – Саратов, 2008. – 156 с.

3. *Епифанов, А.С.* Анализ геометрических образов законов функционирования автоматов / А.С. Епифанов // Управление большими системами. – 2009. – Вып. 24. – С. 81–98.

4. *Епифанов, А.С.* Построение и анализ классов $(H, m, d(H))$-автоматов / А.С. Епифанов // Управление большими системами: V Всерос. школа-семинар молодых ученых. – Липецк, 2008. – С. 23–30.

5. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences [Электронный ресурс]. URL: www.research.att.com (дата обращения: 11.09.2010).

ПРЕДСТАВЛЯЕМ КНИГУ



Критика и библиография

Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. – 328 с. – ISBN 978-5-91899-012-4.

Представляемая монография посвящена теоретико-полевому подходу к волновой термомеханике сплошных сред и охватывает также прикладные исследования, касающиеся распространения связанного незатухающего термоупругого сигнала вдоль цилиндрического волновода. Главы 1–6 книги содержат предварительные сведения из теории поля[1], необходимые для понимания глав 7 и 8, в которых, собственно, и приводится теоретико-полевая формулировка гиперболической термоупругости. Главы 9–11 полностью посвящены решению задачи о передаче связанного термоупругого сигнала через длинный цилиндрический волновод. Впоследствии мы остановимся на особенностях теоретико-полевого подхода к проблемам волновой термомеханики.

К началу XX в. уже сложилось понимание того, что различные физические поля настолько родственны друг другу в плане общих законов, определяющих их поведение, что наблюдение и изучение одного из таких полей позволяет предсказывать состояние и эволюцию другого поля. Так, развитие в течение двух предшествующих десятилетий теории поля, суперсимметрии и теории струн позволило увидеть, что приложения общей теории относительности выходят далеко за рамки астрофизики и космологии. Происхождение и эволюция Вселенной, проблемы темной энергии и темного вещества оказались связанными с физикой элементарных частиц. По существу, формализм и физические представления общей теории относительности стали обязательными элементами теоретической физики высоких энергий.

Теория поля первоначально выделялась из множества физических теорий именно в курсах теоретической физики. На этом этапе ее становления она, как правило, объединяла основы векторного и тензорного анализа с теорией потенциала и теорией волновых функций в различных «канонических» областях. Были созданы систематические математические описания, опирающиеся на формализм векторного и тензорного анализа, ряда классических полей[2]. Большое значение при этом придавалось различным методам графического анализа физического поля и, в частности, построению «силовых линий» и «вихревых трубок» поля. Современная теория поля давно ушла от таких «примитивных» воззрений на физическое поле, а теория потенциала, по-видимому, окончательно определилась со своим местом в качестве раздела математической физики.

Теория поля, без всякого сомнения, должна быть выделена как самостоятельная научная дисциплина по нескольким причинам. Во-

[1]См.: *Ковалев В.А.*, *Радаев Ю.Н.* Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. – М.: Физматлит, 2009. – 156 с.

[2]См.: *Эддингтон А.С.* Математическая теория относительности. – Харьков; Киев: Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1933. – 358 с.; *Стрэттон Дж.А.* Теория электромагнетизма. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. – 540 с.; *Синг Дж.Л.* Общая теория относительности. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 432 с.

первых, теория поля есть та самая основа, на которой формируется весь комплекс знаний современной теоретической физики, поскольку мы изучаем процессы и состояния, развивающиеся в пространстве – времени. Во-вторых, теория поля сочетает физику и геометрию; геометрия поля сама по себе образует важнейший комплекс теорий, для правильного понимания которых их необходимо «отделить» от собственно физики поля. В-третьих, формализм теории поля настолько универсален, что позволяет избегать повторения одних и тех же теорем в различных разделах механики и физики. Поэтому представляемая монография отвечает, в частности, запросам современной математической и теоретической физики как обстоятельное дедуктивное изложение классической теории поля. Книгу отличает не только полнота и систематичность построения основ волновой теории поля, но и отчетливо выраженная направленность в сторону наиболее актуальных проблем термомеханики сплошных деформируемых сред. Теория волнового поля находит применение в теории упругости, гидродинамике, акустике, оптике, распространении радиоволн и тепловых сигналов. Актуальная проблема гравитационных волн[3] также относится к этому кругу задач, поскольку гравитационные волны описываются волновыми решениями уравнений гравитационного поля. Благодаря построению новых волновых решений уравнений гравитационного поля оказалось возможным предложить экспериментальные установки для генерирования и детектирования космических волн гравитации.

В 1918 г. была опубликована знаменитая работа Э. Нетер[4]. Можно сказать, что она оказала определяющее воздействие на все последующее развитие теоретической и математической физики. В этой работе впервые было дано понятие инвариантности интегрального функционала относительно непрерывных групп преобразований и найдены законы сохранения, соответствующие вариационным симметриям поля. Работа Э. Нетер коренным образом изменила теорию поля и математическую физику XX столетия, указав совершенно четкий познавательный ориентир — поиск симметрий и законов сохранения, выполняющихся в силу дифференциальных уравнений поля. Термомеханика сплошных сред до последнего времени оставалась в стороне от влияния теории поля и теории симметрий и в принципе никак не затрагивалась указанными результатами математической физики, пребывая в тех формах, которые были ей приданы теоретиками школы рациональной механики Нолла – Трусделла. Для того чтобы отдавать себе отчет о вкладе школы рациональной механики в построение термомеханики континнума, укажем на два известных сочинения[5]. Ясно, что современный теоретико-полевой подход к проблемам термомеханики, которому целиком посвящены главы 7 и 8, является не только следующим этапом развития термомеханики, но и программой обоснования термомеханики в рамках теории поля и последующего анализа уравнений термомеханики с позиций теории вариационных симметрий и в сочетании с теоретико-групповым анализом дифференциальных уравнений термомеханического поля. Прикладной частью этой программы как раз и выступает моделирование связанных гиперболических термоупругих полей и распространения незатухающих волн «второго звука» в твердых телах связанными гиперболическими уравнениями в частных производных, следующими из вариационного принципа наименьшего действия. В области сверхнизких температур наличие тепловых волн подтверждается экспериментально[6], и в этом смысле гиперболические уравнения термомеханики и соответствующие волновые решения этих уравнений имеют огромную познавательную и прикладную ценность.

Волновая теория поля — интенсивно развивающаяся наука, впитывающая новые современные принципы и методы физики и математической физики. Поэтому в книге используется весьма сложный аналитический аппарат: риманова дифференциальная геометрия, вариационное исчисление, теория однопараметрических групп Ли, теория вариационных симметрий, спектральные разложения решений уравнений в частных производных, специальные волновые функции математической физики.

[3]См.: *Вебер Дж.* Общая теория относительности и гравитационные волны. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 272 с.

[4]См.: *Noether E.* Invariante Variationsprobleme // Kgl. Ges. Wiss. Nachr. Gottingen. Math.-Physik. – 1918. – Kl. 2. – S. 235–257.

[5]См.: *Truesdell C.*, *Toupin R.A.* The Classical Field Theories / Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Encyclopedia of Physics, Vol. III/1 (Ed. S. Flugge). – Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. – P. 226–793; *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.

[6]В литературе известны описания экспериментов по идентификации тепловых волн. В целом ряде работ приводятся экспериментальные доказательства существования «второго звука», хотя его обнаружение всегда сопряжено с очень большими трудностями, поскольку в твердых телах волновой характер распространения тепла проявляется лишь в кристаллах высокой чистоты и лишь в узком диапазоне весьма низких температур. Первоначально (1946 г.) термические волны «второго звука» были экспериментально обнаружены в жидком гелии и позднее (1966 г.) — в твердом гелии.

Теоретико-полевой аспект термомеханики сплошных сред до настоящего времени не был в достаточной степени выражен, что хорошо прослеживается по публикациям, посвященным как теории поля, так и теории теплопроводности. Принцип наименьшего действия может быть сформулирован для связанного термомеханического поля и приводит, в частности, к термодинамически корректной нелинейной теории гиперболической термоупругости GNII и нелинейным уравнениям поля. Возможность формулировки гиперболической термомеханики как теории поля (глава 7) и вывода дифференциальных уравнений гиперболической термомеханики из принципа наименьшего действия с естественным лагранжианом является веским дополнительным аргументом в ее пользу, добавляя при этом также и аргумент эстетической привлекательности[7].

Нелинейные уравнения волновой гиперболической термомеханики весьма сложны для анализа, мало изучены и пока не получили широкого распространения в прикладных разделах механики. В книге, точнее, в той ее части, которая касается прикладных задач связанной термоупругости, используются линеаризованные уравнения гиперболической связанной термоупругости с целью исследования распространения гармонического теплового сигнала в форме волны, бегущей вдоль оси длинного цилиндрического волновода, боковая стенка которого непроницаема для тепла. Решения получены методом разделения переменных и при заданном азимутальном числе выражены в специальных волновых цилиндрических функциях; они приводятся для трех термодинамически корректных вариантов термоупругого поведения: GNI/CTE (глава 10), GNII (глава 9), GNIII (глава 11). Точно такой же подход может быть использован и для волноводов другой геометрической формы (например, прямоугольного или эллиптического). В этом случае необходимо, прежде всего, определить волновые функции для соответствующих пространственных областей. Волновые числа связанных термоупругих волн удается получить только численно. Исключительный интерес представляют вещественные волновые числа, существование которых в гиперболической термоупругости GNII подтверждается численным анализом частотного уравнения. Вещественные волновые числа отвечают незатухающим термическим волнам «второго звука», распространение которых, как предсказывает теория гиперболической термоупругости GNII, не сопровождается производством энтропии.

Вопросы распространения чисто упругих продольных гармонических волн в бесконечных цилиндрических волноводах привлекают внимание исследователей, начиная с основополагающих работ Л. Похгаммера (Pochhammer, 1876) и К. Кри (Chree, 1889). Точная теория приводит здесь к весьма сложным частотным уравнениям, с трудом поддающимся анализу даже в случае невысоких азимутальных чисел. Вычисление корней частотного уравнения при больших азимутальных числах сопряжено с преодолением трудностей, связанных с анализом весьма сложного и запутанного поведения частотного детерминанта.

Считаю необходимым привести здесь некоторые замечания, касающиеся терминологии, обозначений и всего стиля изложения теории поля и термомеханики. В некоторых отношениях представляется сверх- или даже ультрасовременным, поскольку опирается не просто на дифференциальные операторы и канонические тензоры, обычно используемые в теории поля, а на четкие, следующие из вариационных симметрий поля координатные представления, обладающие свойствами ковариантности. Формализм теории поля сам по себе компактен и изящен. Достаточно вспомнить о временной координате как особого рода четвертом измерении и стремлении (под влиянием теории относительности) представить уравнения поля с помощью 4-формализма. Достаточно указать на оператор Гамильтона как универсальный дифференциальный оператор, с помощью которого можно просто и компактно выражать уравнения поля. Тем не менее, ковариантные координатные представления с точки зрения поиска вариационных симметрий поля совершенно необходимы и не могут быть просто замещены «прямыми» символьными представлениями дифференцирований поля и самого поля. По этой причине на протяжении всего изложения используется символ полного дифференцирования по пространственно-временным координатам в качестве основного дифференциального оператора. Такое положение дел характерно для вариационного исчисления. Применение методов группового анализа к волновым задачам термомеханики также вынуждает следовать созданным в его рамках рекурсивным процедурам за-

[7] Точно такие же аргументы можно высказать в пользу, например, общей теории относительности: уравнения гравитационного поля в вакууме можно вывести из принципа наименьшего действия (соответствующее действие известно как действие Гильберта) с варьируемыми метрическими компонентами в качестве полевых переменных.

мены зависимых и независимых переменных, индуцированной действием однопараметрических групп Ли, что помимо всего прочего отражается на терминологии и на всей системе обозначений. Книга оставляет впечатление о том, что авторы постоянно стремятся к совершенствованию формализма теории поля и теории симметрий, а также к формированию системы только таких понятий и терминов, которые допускали бы формализацию. В монографии подробно обсуждаются (см. раздел 1.5) такие понятия, как «ковариантность» и «инвариантность» уравнений поля. Оба понятия требуют уточнения смысла, который в них вкладывается, так как в известных литературных источниках их употребление сопровождается совершенно различными смысловыми характеристиками. Последний из указаннных терминов строго определяется только в теории группового анализа дифференциальных уравнений и означает сохранение *формы* дифференциальных уравнений после замены зависимых и независимых переменных и частных производных в соответствии с действием однопараметрической группы при условии выполнения уравнений поля. К тому же следует остановиться на понятиях эквивалентности и симметрии действия. Эквивалентность действия подразумевает неизменность его величины вне зависимости от того, какие координатные представления пространства –времени и физических полевых переменных используются для его вычисления. Следовательно, корректно, например, определено понятие эквивалентности действия при заменах переменных, вызванных однопараметрическими группами Ли. Симметрия функционала действия тогда выступает как его самоэквивалентность (точнее, группа самоэквивалентности) и тождественна однопараметрической группе инвариантности действия, в том самом смысле, который был указан Э. Нетер. Такая точка зрения полностью согласуется с той, что была изложена в известной монографии П. Олвера[8].

Публикуемая монография, без сомнения, будет с интересом встречена как механиками, так и физиками-теоретиками, и будет служить важной альтернативой для тех, кто пытается изучать волновую термомеханику только при помощи известных подходов и сложившихся представлений.

Л.Ю. Коссович,
доктор физико-математических наук, профессор

[8]См.: *Olver P.J.* Equivalence, Invariants and Symmetry. – Cambridge; N.Y.; Melbourne: Cambridge University Press, 1995. – 526 p.

PERSONALIA

ПРОФЕССОР ДЮИС ДАНИЛОВИЧ ИВЛЕВ (к 80-летию со дня рождения)

6 сентября 2010 года исполнилось 80 лет Дюису Даниловичу Ивлеву — доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному деятелю науки Российской Федерации. Д.Д. Ивлеву принадлежит свыше двухсот опубликованных научных работ, в том числе и семь монографий. Д.Д. Ивлев — основатель и руководитель научной школы механики идеально пластических тел и конструкций, базирующейся в университетских и академических центрах Воронежа, Самары, Владивостока, Чебоксар. Его вклад в математическую теорию пластичности и механику деформируемого твердого тела с полным правом можно назвать выдающимся. Огромная часть научной и педагогической деятельности Д.Д. Ивлева связана с подготовкой кадров в области механики деформируемого твердого тела. В настоящее время в рамках возглавляемой им научной школы работает свыше 20 докторов и более 100 кандидатов наук. Главное в творческой деятельности Д.Д. Ивлева — бескомпромиссное служение научной истине и неустанный поиск на самых передовых рубежах современной науки. 55 лет своей жизни Д.Д. Ивлев отдал служению науке. Д.Д. Ивлев может быть причислен к категории мыслителей, являющихся национальным достоянием России.

Д.Д. Ивлев родился 6 сентября 1930 г. в г. Чебоксары Чувашской Республики. После окончания средней школы в 1948 г. он поступает на механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, который заканчивает в 1953 г. После окончания аспирантуры при Институте механики МГУ в 1956 г. он успешно защищает диссертацию на тему «Приближенное решение упругопластических задач методом малого параметра» (оппонентами по этой работе выступили В.В. Соколовский и Г.С. Шапиро; председательствовал на защите А.Ю. Ишлинский). Дюис Данилович получает ученую степень кандидата физико-математических наук. С февраля 1957 г. по октябрь 1958 г. он работает в должности младшего научного сотрудника Института механики АН СССР. В 1959 г. после защиты диссертационной работы «Пространственная задача теории идеальной пластичности», которая также представлялась в совет при МГУ, Д.Д. Ивлев получает степень доктора физико-математических наук. Оппонентами по докторской диссертационной работе выступили Л.А. Галин, Л.М. Качанов и Г.С. Шапиро.

В октябре 1959 г. Д.Д. Ивлев приезжает в г. Воронеж по приглашению ректора Воронежского университета Б.И. Михантьева. Ему 29 лет. Он известный ученый в области нового направления математической теории пластичности — теории течения. В декабре 1959 г. Д.Д. Ивлев возглавляет созданную им в ВГУ кафедру теории упругости и пластичности. Талантливый ученый, прекрасный организатор и педагог Дюис Данилович сумел в короткий срок активизировать научную и методическую работу. Лекции и научные семинары проф. Д.Д. Ивлева поражали способностью глубоко проникать в суть об-

суждаемых вопросов. Созданная им воронежская школа механики деформируемого твердого тела быстро получила всесоюзное признание. Проводимые исследования были связаны с фундаментальными и прикладными проблемами механики сплошных сред. Работы Д.Д. Ивлева и его учеников всегда вызывали интерес у ученых нашей страны и зарубежья, их существенное влияние на формирование математической теории пластичности было и остается общепризнанным. Под руководством проф. Д.Д. Ивлева ежегодно проводились научные конференции и школы, в работе которых принимали участие ученые из Москвы, Ленинграда, Киева, Новосибирска, Ростова-на-Дону, Казани, Перми, Харькова, Краснодара, Куйбышева, Риги и других городов СССР.

В Воронежском государственном университете, на математико-механическом факультете Д.Д. Ивлев работал вместе с профессорами М.А. Красносельским, С.Г. Крейном, В.И. Соболевым. Творческое взаимодействие механиков и математиков Воронежского университета было заложено именно в те годы.

Параллельно с заведованием кафедрой теории упругости и пластичности в ВГУ проф. Д.Д. Ивлев в течение ряда лет заведовал кафедрой сопротивления материалов в Воронежском политехническом институте, куда его пригласил ректор В.С. Постников. В эти же годы Д.Д. Ивлев по просьбе ректора Л.Н. Талова читает лекции в Воронежском педагогическом институте. Следует отметить, что уже в годы работы в Воронежском университете началось сотрудничество Д.Д. Ивлева с одним из своих аспирантов — Геннадием Ивановичем Быковцевым, которое вскоре дало превосходные плоды — научные результаты, имеющие фундаментальное значение для механики деформируемого твердого тела. Одним из талантливых учеников Д.Д. Ивлева той поры также был В.В. Дудукаленко. Г.И. Быковцев стал первым деканом нового факультета — прикладной математики и механики, возглавил созданную им кафедру технической кибернетики и теории автоматического регулирования. Через несколько лет Геннадий Иванович возглавил кафедру механики деформируемого твердого тела в Куйбышевском (Самарском) государственном университете.

В 1966 г. Д.Д. Ивлев возвращается в Москву, где сначала работает профессором МВТУ им. Н.Э. Баумана (1966–1970 гг.) и заведует кафедрой высшей математики, а затем (1971–1982 гг.) — заведующим кафедрой высшей математики во Всесоюзном заочном политехническом институте (сейчас Московский государственный открытый университет). Вместе со своими учениками профессорами Г.И. Быковцевым и И.А. Бережным он активно участвует в создании научной школы механики деформируемого твердого тела в г. Куйбышеве.

В 1982 г. Д.Д. Ивлев приезжает на родину в г. Чебоксары, где работает заведующим кафедрой математического анализа, затем — заведующим кафедрой механики деформируемого твердого тела в Чувашском государственном университете. В 1985–1993 гг. он является деканом физико-математического факультета. В 1993 г. Д.Д. Ивлев переходит на работу в Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, где в настоящее время заведует кафедрой математического анализа.

Работы Д.Д. Ивлева посвящены механике деформируемого тела, в основном математической теории пластичности[1]. Ряд результатов Д.Д. Ивлева имеет фундаментальный характер для всей механики деформируемого твердого тела.

Первая математическая теория пластичности была создана Сен-Венаном (Saint-Venant, 1870) [1, 2] на основе гипотезы о пропорциональности девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций при условии текучести Треска (H. Tresca). Сен-Венаном на основании опытов Треска по истечению металлов через отверстия было предложено условие пластичности, заключающееся в том, что пластическое состояние наступает, как только максимальное касательное напряжение достигает некоторого определенного предельного значения k. Впрочем, идея такого условия принадлежит Кулону и была высказана им в работе [3]. В этой работе Кулон указывает на то, что разрушение сжатой призмы происходит в результате скольжения одной ее части относительно другой по неко-

[1]Среди них семь монографий: «Теория идеальной пластичности» (1966); «Теория упрочняющегося пластического тела» (в соавторстве с Г.И. Быковцевым, 1971); «Метод возмущений в теории упругопластического тела» (в соавторстве с Л.В. Ершовым, 1978); «Теория пластичности» (в соавторстве с Г.И. Быковцевым, 1998); «Математическая теория пластичности» (в соавторстве с А.Ю. Ишлинским, 2001); фундаментальная 2-томная монография «Механика пластических сред» (2001, 2002); «Предельное состояние деформируемых тел и горных пород» (в соавторстве с Л.А. Максимовой, Р.И. Непершиным, Ю.Н. Радаевым, С.И. Сенашевым, Е.И. Шемякиным, 2008).

торой плоскости, составляющей угол в сорок пять градусов с направлением сжатия. Скольжение возникает при достижении составляющей сжимающей силы в указанной плоскости предельной величины, достаточной для преодоления обусловленного сцеплением сопротивления скалыванию по этой плоскости.

Сен-Венан рассматривал задачу о пластическом плоском деформированном состоянии и шел по пути обобщения уравнений движения вязкой жидкости Навье – Стокса, опираясь на гидродинамическое представление о течении металлов. Сен-Венан ограничился исследованием плоского деформированного состояния, и поэтому его теория нуждалась в дальнейшем обобщении на случай трехмерного состояния. Соответствующее обобщение было сразу же выполнено: уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности впервые были получены Леви (Levy, 1871) [4]. Статьи Сен-Венана и Леви появились одна за другой в Journal de Mathématiques Pures et Appliquées за 1871 г. Леви принял в качестве условия текучести уравнение грани призмы Кулона – Треска и присоединил в качестве определяющего уравнение, выражающее пропорциональность девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций[2]. Теория Леви, поскольку она основана на «неассоциированном» законе пластического течения, не нашла применения и представляет ныне лишь исторический интерес, отчетливо указывая на то, что на ранних этапах развития математической теории пластичности условие пластичности и определяющий закон течения рассматривались совершенно независимо друг от друга[3].

Соотношения Сен-Венана для плоской пластической деформации — статически определимая система уравнений гиперболического типа, что и позволило позднее развить теорию полей скольжения, связываемую обычно с именами Генки (Hencky, 1923) и Гейрингер (Geiringer, 1930). Математический аппарат, соответствующий соотношениям Сен-Венана для плоской задачи, оказался, таким образом, вполне адекватным экспериментальным и теоретическим представлениям о течении идеально пластического материала.

Уравнения пространственной задачи математической теории пластичности длительное время оставались неизученными. В настоящее время теория трехмерной задачи математической теории пластичности далека от завершения. Имеется весьма ограниченный круг методов и результатов, которые проливали бы свет на свойства пространственного пластического напряженно-деформированного состояния[4].

Пространственная задача в общем случае при условии пластичности Мизеса (R. von Mises) и ассоциированным с ним законом течения Леви – Мизеса является статически неопределимой, и, кроме того, уравнения пространственной задачи не гиперболичны. Так, система уравнений пространственной и осесимметричной задачи теории идеальной пластичности при условии пластичности Мизеса, вообще говоря, не имеет вещественных характеристических направлений (см., например, [6, с. 144–146]). Точнее говоря, уравнения пространственной задачи либо полностью эллиптичны (т. е. не существует действительных характеристических направлений), либо (если в рассматриваемой точке медианная главная скорость пластической деформации равна нулю) имеется только два поверхностных характеристических элемента, совпадающих с площадками максимального касательного напряжения. Все это свидетельствует о том, что в подавляющем большинстве пространственных состояний, описываемых согласно условию пластичности Мизеса и ассоциированному с ним закону течения Леви – Мизеса, действительные характеристики отсутствуют[5]. Все это не оставляет шансов обобщить методы

[2]В настоящее время закон течения, устанавливающий пропорциональность девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций, называют законом Леви – Мизеса.

[3]Об этом ярко свидетельствуют работы: *Михлин, С.Г.* Основные уравнения математической теории пластичности / С.Г. Михлин. – Л.: Изд-во АН СССР, 1934. – 71 с.; *Христианович, С.А.* Некоторые новые вопросы механики сплошной среды: Неустановившееся движение в каналах и реках. Математическая теория пластичности. Движение грунтовых вод / Под ред. Н.Е. Кочина / С.А. Христианович, С.Г. Михлин, Б.Б. Девисон. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1938. – 407 с. (См. ч. II: *Михлин, С.Г.* Математическая теория пластичности. С. 157–218. На с. 163 приводятся пространственные уравнения Леви.)

[4]Оценивая состояние пространственной задачи теории идеальной пластичности Л. Прандтль (L. Prandtl) в 1921 г. указывал, что для разработки пространственной задачи до сих пор еще не найдено надлежащего пути и пока, пожалуй, имеется мало перспектив ее решения. «Задачи трехмерного пластического течения трудны и мало изучены». Так сформулировано отношение к вопросам пространственной задачи математической теории пластичности авторов известной обзорной статьи [5].

[5]Как представляется, задача поиска такой математической теории идеальной пластичности, которая приводила бы в зоне пластического течения к соотношениям гиперболического типа для произвольных пространственных состояний, по-прежнему

интегрирования (см. [7–12]), развитые ранее для плоской задачи, соотношения которой формально статически определимы и гиперболичны, что в конце концов и позволяет построить теорию полей скольжения, адекватно представляющую сдвиговой механизм пластического течения. Заметим, что уравнения теории плоского напряженного состояния (в отличие от случая плоской деформации) не могут быть получены как частный случай пространственных уравнений.

Принципиально иная ситуация наблюдается в пространственной задаче при использовании критерия текучести Кулона – Треска. Здесь уравнения пластического равновесия в ряде важных случаев становятся гиперболическими. Существование действительных характеристических поверхностей является большим математическим преимуществом. Если еще учесть, что характеристические поверхности суть поверхности скольжения, то с физической точки зрения трудно объяснить отсутствие действительных характеристических поверхностей в случае уравнений пространственной задачи при использовании критерия текучести Мизеса.

Поверхности и линии скольжения не являются только математическим понятием. Они существуют в действительности и их можно выявить травлением отполированной поверхности или разреза деформированного металла. Фигуры скольжения часто появляются в виде узоров с правильной лучистой симметрией на поверхностях или на разрезах твердых тел, испытавших деформации за пределом упругости. Линии скольжения (линии сдвигов) играют чрезвычайно важную роль как в теоретических, так и в прикладных исследованиях напряженного состояния пластически деформированного тела. Геометрия линий скольжения во многих случаях вполне определяет напряженное состояние и такое напряженное состояние реализуется в условиях предельного равновесия тела. На этот факт, по-видимому, впервые указал Д.К. Чернов[6]. Фигуры скольжения, которые наблюдались Д.К. Черновым при различных схемах нагружения (например, при растяжении плоских образцов, при пробивке круглых отверстий), воспроизводятся в известной монографии [13, с. 103]. Значительно позже линии скольжения стали исследоваться за рубежом. В начальный период развития теории пластичности при изучении пластического течения широко использовались представления о линиях и поверхностях скольжения, подчиняющихся поразительным законам, установленным математиками и инженерами в начале XX столетия[7]. Мы уже говорили о соответствии между изменениями в структуре сильно деформированных металлов и при формации горных пород, отмечаемыми и описываемыми в петрографии. Поэтому теория линий скольжения в руках геологов может служить средством расшифровки процессов образования горных цепей и континентальных плато, восстановления истории движения земной коры (в том числе и ее континентальной части)[8]. Таким образом, теория скольжения находит свое подтверждения на двух существенно отличающихся масштабных уровнях.

К настоящему времени уже стало ясно, что предельные состояния твердых тел должны также описываться статически определимыми уравнениями гиперболического типа[9]. Теория предельного состояния первоначально развивалась в рамках механики сыпучих сред. Основоположник теории К. Кулон сформулировал (1773 г.) основные положения теории предельного состояния и ввел пред-

---

сохраняет свою актуальность, поскольку при использовании условий пластичности, отличных от условия пластичности Кулона – Треска, для огромного большинства пространственных состояний уравнения теории пластичности не имеют вещественных характеристических направлений. Не спасает положения учет упругих деформаций и различных гипотез упрочнения. Все равно для абсолютного большинства пространственных состояний соответствующие уравнения эллиптичны. Аналогичное заключение остается справедливым и для теории малых упругопластических деформаций, и для редко применяемых в настоящее время «неассоциированных» законов пластического течения.

[6]Дмитрий Константинович Чернов (1839–1921 гг.) — великий русский инженер и ученый, основатель металлографии, разработавший учение о кристаллах и кристаллографии, создатель научных основ обработки металлов давлением. Как ученый Д.К. Чернов оставался вне поля зрения официальной русской науки, даже когда его заслуги в области металлургии и металловедения были признаны всем миром. Жизнь, научное творчество и практическая инженерная деятельность Д.К. Чернова подробно освещены в кн.: Д.К. Чернов и наука о металлах / Под ред. акад. Н.Т. Гудцова. – М.; Л.: Металлургиздат, 1950. – 564 с. В это издание включены основные научные труды этого выдающегося ученого. Его научная биография опубликована также в кн.: *Гумилевский, Л.И.* Чернов / Науч. ред. проф. И.Я. Конфедератов / Л.И. Гумилевский. – М.: Мол. гвардия, 1975. – 208 с.

[7]В настоящее время более эффективными являются прямой конечно-разностный численный анализ.

[8]Применение математической теории пластичности и концепции скольжения к задачам геологии и геофизики читатель может найти в кн.: *Надаи, А.* Пластичность. Механика пластического состояния вещества / А. Надаи. – М., Л.: ОНТИ, 1936. – 280 с.; *Надаи, А.* Пластичность и разрушение твердых тел: в 2 т. / А. Надаи. – М.: Изд-во Мир, 1969. – Т. 2. – 864 с.

[9]См.: *Ивлев, Д.Д.* Мир эллиптический и мир гиперболический / Д.Д. Ивлев // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественно-науч. сер. – 2005. – № 5(39). – С. 33-41.

ставление о поверхности сползания, которые были применены для решения ряда важных прикладных задач. Систематическое изложение теории предельного состояния сыпучих сред на основе представления о сетке скольжения было дано В.В. Соколовским в 1942 г. [14]. Теории предельного состояния и идеальной пластичности, таким образом, имеют общие основы, однако они далеко не тождественны. Теория идеальной пластичности основана на представлении об условии пластичности, которое, вообще говоря, может приводить либо к статически определимым, либо к статически неопределимым состояниям. Теория предельного состояния в качестве своего предмета исследования берет лишь статически определимые состояния, которые могут быть достигнуты, скажем, при пропорциональном возрастании внешних нагрузок. Для предельного состояния все «предыдущие» свойства материала не играют никакой роли, поскольку предельное состояние определяется из замкнутой системы формально статически определимых соотношений, не имеющих ничего общего с допредельным поведением тела.

Экспериментальные исследования показывают, что условие пластичности Мизеса значительно лучше согласуется с опытными данными, чем условие пластичности Кулона – Треска[10]. Сомневаться в достоверности данных многочисленных экспериментов не приходится, тем более что они указывают на систематическое отклонение поведения металлов в состоянии текучести от условия Кулона – Треска. Тем не менее можно предположить, что лучшее соответствие условия Мизеса опытным данным объясняется влиянием различных посторонних факторов, таких как упрочнение, деформационная анизотропия, поврежденность, элиминировать которые при проведении экспериментов до конца не удается. Известно также, что чем ярче у материала на диаграмме одноосного растяжения выражена площадка текучести (т. е. чем ближе его поведение к идеально пластическому), тем лучше данные испытаний согласуются с критерием пластичности Кулона – Треска. Таким образом, критерий текучести Кулона – Треска, по-видимому, действительно, лучше, чем все остальные мыслимые критерии, выражает сущность идеальной пластичности. В пользу этого вывода, т. е. бóльшего соответствия условия Кулона – Треска физике пластической деформации, высказывались многие авторы[11].

Итак, формально статически определимая задача о плоской пластической деформации вместе с ее гиперболическими соотношениями послужила отправной точкой развития всей математической теории идеальной пластичности. Распространение математического аппарата гиперболических уравнений, описывающего плоское течение идеально пластического материала на общий трехмерный случай, явилось предметом целого ряда исследований.

В 1909 г. Хаар и Карман (A. Haar, Th. von Karman) выдвинули условие «полной пластичности» [16], которое, по существу, устанавливает соответствие напряженного состояния ребру призмы Кулона – Треска[12], и оказалось, что соотношения пространственной задачи теории идеальной пластичности при условии полной пластичности являются статически определимыми.

В 1923 г. Генки (H. Hencky) [17] предложил использовать условие полной пластичности Хаара – Кармана в случае осесимметричного напряженного состояния, что привело его к статически определимой системе уравнений равновесия, которая, как он установил, оказывается гиперболической. Позднее уравнения осесимметричной задачи с условием текучести Кулона – Треска исследовались Р. Шилдом (R.T. Shield) [18] для ребер и граней призмы Кулона – Треска. В той же работе Р. Шилдом были построены осесимметричные автомодельные решения, соответствующие течению на ребре призмы Кулона – Треска. В частности, им было произведено вычисление автомодельного поля скольжения вблизи свободной прямолинейной границы.

В 1944 г. А.Ю. Ишлинский [19] исследовал осесимметричную задачу теории пластичности, пред-

[10] См., например, [7, с. 29–34; 15, с. 55, 57]. Обычно при этом указывают на экспериментальные данные А. Надаи (A. Nadai) и Лоде (W. Lode, 1928 г.). Именно в результате выполненных ими экспериментов в Геттингене при участии Прандтля и был сделан вывод о предпочтительности условия пластичности Мизеса. *В опытах Надаи и Лоде окончательно установлено условие пластичности Мизеса, причем показано его преимущество перед условием наибольших касательных напряжений.* (Цит. по [15, с. 57]) Имеется перевод оригинальной работы Лоде: *Лоде В.* Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов / В. Лоде // Теория пластичности: сб. ст. – М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 168–205.

[11] Дискуссия по этому поводу имеется на с. 86, 87 обзорной статьи А.А. Вакуленко и Л.М. Качанова [5].

[12] Сформулируем ту же самую мысль, но в более отчетливой форме: состояние полной пластичности описывается в рамках условия пластичности Кулона – Треска и соответствует ребру призмы Кулона – Треска. Ясно, что состояние полной пластичности может быть описано также в рамках условия пластичности Мизеса. Однако в этом случае ассоциированный с условием пластичности Мизеса закон течения приводит к неправильно определенной системе кинематических уравнений.

полагая выполнение условия полной пластичности Хаара – Кармана, доказав статическую определимость и гиперболичность основных уравнений. С помощью численного метода в этой же работе было получено решение задачи о вдавливании твердого шарика в идеально пластическую среду. Решение А.Ю. Ишлинского вызвало критические замечания Р. Хилла, полагавшего, что »такие вычисления имеют небольшое или не имеют никакого значения, так как гипотеза Хаара – Кармана для металлов физически нереальна и она вводит ошибку неизвестной величины» [20, с. 321]. Свои возражения Хилл основывал на невозможности в рамках теории течения Леви – Мизеса определить связанное с распределением напряжений, удовлетворяющим условию полной пластичности, поле скоростей из-за неправильной определенности (переопределенности) системы соотношений кинематики. Выход из сложившейся ситуации, как показало последующее развитие математической теории пластичности, состоял в последовательном использовании гипотезы Хаара – Кармана и замене закона течения Леви – Мизеса на *обобщенный* ассоциированный с условием пластичности Кулона – Треска закон течения.

Соотношения пространственной задачи теории пластичности, когда аналогично условию полной пластичности Хаара – Кармана имеется два соотношения между главными напряжениями, были предложены и проанализированы А.Ю. Ишлинским [21], который использовал определяющие зависимости в форме соотношений перестановочности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций[13], следующие из *обобщенного* ассоциированного закона пластического течения в случае течения на ребре призмы Кулона – Треска и не предполагающие столь жестких ограничений на скорости пластических деформаций, устанавливаемые традиционным для того времени требованием пропорциональности тензора скорости пластических деформаций и девиатора тензора напряжений. Впервые в явной форме он указал на необходимость при построении теории пространственной задачи *двух* условий пластичности, уравнения несжимаемости и условий соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, которые он принял в форме трех уравнений, следующих из перестановочности этих тензоров [22]. В своей работе А.Ю. Ишлинский пишет: «Согласно предлагаемой теории идеальной пластичности два главных напряжения должны быть непременно равны друг другу, а третье отличаться от них на удвоенное критическое значение $2k$. Таким образом для пространственной задачи пластичности имеют место два соотношения между главными напряжениями, подобно гипотезе полной пластичности Хаара и Кармана. Этим предлагаемая теория отличается от теорий Леви и Мизеса, в которых принимается единственное соотношение». Таким образом, А.Ю. Ишлинский отказался от «неассоциированного» определяющего закона Леви [4] и дал корректное обобщение теории течения Сен-Венана [1, 2] на трехмерный случай. Пространственные соотношения Ишлинского полностью сохраняют свое значение в современной математической теории пластичности и их можно испо‘льзовать при постановке и решении задач теории идеальной пластичности, поскольку они являются следствиями обобщенного ассоциированного закона течения в случае течения на ребре призмы Кулона – Треска.

Результаты А.Ю. Ишлинского предвосхитили более поздние исследования Д.Д. Ивлева [23, 24], в которых было показано фундаментальное значение условия полной пластичности Хаара – Кармана для всей теории пластичности. Был развит соответствующий вариант теории пластичности: сингулярное условие текучести (в частности, ребро призмы Кулона – Треска) и *обобщенный* ассоциированный закон пластического течения.

Ассоциированный закон течения однозначно определяет направление вектора, представляющего приращения пластических деформаций в пространстве главных напряжений, только в *регулярных* точках поверхности текучести. Если напряженное состояние соответствует ребру (угловой точке) или конической особенности на поверхности текучести, то необходимы дальнейшие предположения для вывода корректного определяющего закона. Обобщение ассоциированного закона на случай поверхности текучести с угловой точкой предложено Койтером (W.T. Koiter) в 1953 г.[14] Это обобщение основано на следующем принципе суперпозиции: особые точки поверхности текучести представляются как пересечение конечного числа гладких поверхностей текучести, каждая из гладких поверхностей

[13] А.Ю. Ишлинский называл эти зависимости условиями соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций.

[14] См.: *Koiter, W.T.* Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic material with a singular yield surface / W.T. Koiter // Quart. Appl. Math. – 1953. – V. 11, № 3. – P. 350–354.

текучести дает аддитивный вклад (с соответствующим неопределенным множителем) в величину приращения пластической деформации.

Обобщенный ассоциированный закон течения, сформулированный на основе условия пластичности Треска, устанавливает, что пластические деформации появляются в результате сдвига (скольжения) на тех площадках, где касательные напряжения по абсолютной величине достигают предельно возможного значения, причем скольжение происходит в направлении действия максимального касательного напряжения так, что оно совершает положительную работу.

В работах Д.Д. Ивлева было установлено, что при условии полной пластичности (т. е. когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона – Треска) уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности являются статически определимыми и принадлежат к гиперболическому типу. Нормали к характеристическим поверхностным элементам уравнений статики при этом образуют конус, касающийся площадок максимальных касательных напряжений, построенных в вершине конуса. Характеристическими будут также поверхностные элементы, нормали к которым ортогональны главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) главному напряжению. Кинематические уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности в случае, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона – Треска, также гиперболичны и имеют точно такие же директоры характеристических поверхностных элементов, как и статические уравнения[15].

Было таким образом доказано, что именно условие полной пластичности и только оно позволяет сформулировать общую теорию идеальной пластичности с единым математическим аппаратом статически определимых уравнений гиперболического типа, соответствующим сдвиговой природе идеально пластического деформирования. Эта точка зрения разделяется далеко не всеми. Так, А.А. Вакуленко и Л.М. Качанов полагают, что доводы физического характера в пользу схемы полной пластичности «продиктованы, скорее, заманчивой простотой математического анализа, нежели существом вопроса» [5, с. 100]. Тем не менее они замечают, что решения, полученные по схеме полной пластичности, могут иметь несомненный интерес, полемизируя при этом с Р. Хиллом, критически оценившим условие полной пластичности Хаара – Кармана как «искусственное и нереальное условие текучести» (см. [7, с. 320–321]). Не вызывает возражений высказываемая ими мысль о том, что ценность того или иного решения пространственной задачи устанавливается возможностью либо построить согласованное кинематически допустимое поле, либо продолжить поле напряжений в жесткие зоны, не нарушая условия текучести. В противном случае вопрос о значимости решения остается открытым. Ясно, что исключительную ценность представляют полные решения, когда удается построить согласованное кинематически допустимое поле и продолжить поле напряжений в жесткие зоны, не нарушая условия текучести. Таким образом, неполные решения обладают лишь относительной ценостью, а полные — абсолютной. На практике, однако, чаще всего удается построить неполное поле напряжений (поле напряжений в пластической зоне) и возникает проблема его продолжения в жесткую зону так, чтобы в жесткой зоне и на границе раздела выполнялись условия равновесия и не превышался предел текучести. Общая процедура такого продолжения (или хотя бы существование такого продолжения) для сколько-нибудь широкого класса задач в настоящее время неизвестны. Учитывая все сказанное, нетрудно заключить, что по большому счету неполные решения с теоретической точки зрения вообще никакой ценности не представляют. Однако их практическая ценность часто может быть очень высокой. Так или иначе, но большинство прикладных задач решены по жесткопластической схеме не полно.

В дальнейшем Д.Д. Ивлевым была исследована пространственная задача при произвольном кусочно-линейном условии текучести. В результате было показано, что как в пространственном, так и в осесимметричном случае на ребре кусочно-линейного условия текучести уравнения математической теории пластичности являются гиперболическими и имеют характеристические элементы, совпадающие с площадками максимальных касательных напряжений.

Любопытно отметить, что и статические, и кинематические уравнения осесимметричной задачи

[15]Этот результат был получен в работе [25]. Классическое изложение теории пространственной задачи теории идеальной пластичности для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона – Треска, имеется в монографии [12, с. 205–246].

теории идеальной пластичности для граней призмы Кулона – Треска, соответствующих кинематически определимым режимам течения, также являются гиперболическими. Характеристические направления ориентированы так же, как и главные направления тензора напряжений, т. е. характеристики касаются главных направлений тензора напряжений[16].

Подобным же образом дело обстоит и в пространственной задаче: в случае грани произвольного кусочно-линейного условия текучести характеристические поверхности касаются главных направлений тензора напряжений.

В 1971 г. Д.Д. Ивлев и Г.И. Быковцев предприняли исследование общих соотношений теории пластичности идеального и упрочняющегося тела с учетом упругих деформаций и без их учета, на предмет их классификации, определения характеристических поверхностей и поверхностей разрыва скоростей, скоростей деформаций и напряжений[17]. Полученные ими результаты устанавливают, что (1) дифференциальные уравнения теории устойчивого упрочняющегося упругопластического тела не имеют действительных характеристик, т. е. эллиптичны; (2) если в качестве критерия текучести взят критерий, отличный от критерия текучести Треска, то для большинства пространственных состояний дифференциальные уравнения теории идеально упругопластического тела эллиптичны.

В 1966 г. выходит в свет монография Д.Д. Ивлева «Теория идеальной пластичности». В этом оригинальном сочинении с высоким мастерством были изложены новые результаты и принципы математической теории идеальной пластичности и, прежде всего, теория пространственной и обобщенной плоской задачи. Заметим, что указанная работа стоит в одном ряду с замечательными руководствами по теории пластичности, написанными советскими учеными-механиками, которые по мастерству изложения и богатству результатов до сих пор остаются непревзойденными образцами [9, 10, 15]. В настоящее время «Теория идеальной пластичности» Д.Д. Ивлева служит незаменимым руководством для тех, кто пытается глубже проникнуть в основы математической теории идеальной пластичности, опираясь на блестящее и последовательное изложение, данное грандом этой науки.

В механике упрочняющихся пластических тел Д.Д. Ивлев (совместно с Г.И. Быковцевым) последовательно развивал представления, основанные на трансляционном механизме упрочнения и предложенные ранее А.Ю. Ишлинским и В. Прагером (W. Prager). Результаты их совместных исследований легли в основу классической монографии, которая, по сути, представляет собой каноническое изложение математической теории пластичности упрочняющегося тела в случае малых деформаций. В этой монографии читатель найдет исчерпывающий анализ общих уравнений теории течения и свойств их решений, включая анализ сильных и слабых разрывов, с помощью аппарата геометрических и кинематических условий совместности Адамара – Томаса (J. Hadamard, T. Tomas).

Исследования Д.Д. Ивлева в области математической теории пластичности подытожены в фундаментальной двухтомной монографии «Механика пластических сред» [27, 28].

Д.Д. Ивлеву принадлежат различные результаты в области предельного состояния конструкций, статики и динамики сыпучих сред, устойчивости равновесия упругопластических тел, гидродинамики, теории трещин и механики разрушения. Следует отметить обстоятельный обзор работ по механике разрушения с изложением основных результатов этой части механики деформируемого твердого тела, сделанный им в момент острой дискуссии, посвященной механике трещин [29]. Дискуссиям в механике посвящена статья [30]. В ней Д.Д. Ивлев с присущей ему корректностью, тактом и бережным отношением к научным фактам затрагивает важную тему о дискуссии по механике квазихрупкого разрушения и дает свою оценку имевшим место событиям, тем более что Д.Д. Ивлев участвовал в этой дискуссии (см. [31]). Наши оценки результатов имевшей место более сорока лет назад дискуссии совпадают. В частности, Д.Д. Ивлев в указанной статье пишет: «Прав Ю.Н. Радаев, когда написал: „*Через сорок лет после этой дискуссии стало очевидным, что она нанесла значительный ущерб российской науке*“».

В Самарском государственном университете в течение трех десятилетий проводятся исследования

[16]См. работу [26]. Полное исследование характеристик уравнений осесимметричной задачи при условии пластичности Треска для различных режимов пластического течения читатель может найти в работе [9, с. 258–268].

[17]См.: *Ивлев, Д.Д.* Теория упрочняющегося пластического тела / Д.Д. Ивлев, Г.И. Быковцев. – М.: Наука, 1971. – 232 с. Научную биографию Г.И. Быковцева, отражающую его выдающийся вклад в развитие теории пространственной задачи математической теории пластичности см.: *Яровой, Г.П.* К 70-летию Г.И. Быковцева / Г.П. Яровой, Ю.Н. Радаев // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественно-науч. сер. – 2007. – № 9/1(59). – С. 9–30.

в рамках научного направления, вектор которого был задан Д.Д. Ивлевым в его работах по теории пространственной задачи математической теории пластичности в конце 50-х годов. Как уже указывалось, это один из самых сложных и наименее изученных разделов механики деформируемого твердого тела. Тем не менее за последние два десятилетия удалось существенно продвинуться в создании общей теории трехмерных уравнений математической теории пластичности с условием пластичности Треска и ассоциированным законом течения для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести, и предложить общую схему интегрирования пространственных статических уравнений. Основой теории выступает ряд геометрических результатов по исследованию поля главных направлений тензора напряжений, характеризуемых наибольшим (или наименьшим) главным нормальным напряжением, полученных в [32] и [33]. Исследования в области пространственной задачи теории идеальной пластичности были подытожены в работах [34, 35].

В первой из указанных монографий мы стремились дать полное и систематическое изложение методов и результатов, связанных с исследованием трехмерных уравнений математической теории пластичности в изостатической координатной сетке, делая акцент на новых общих методах, которые обеспечивают решение прикладных задач механики деформируемого твердого тела. Исходной точкой построения общей теории пространственных уравнений выступает одна замечательная инвариантная векторная форма пространственных уравнений, анализ которой позволяет сделать заключение о расслоенности поля направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению. Затем рассматриваются уравнения обобщенного ассоциированного закона течения, основные кинематические соотношения для приращений перемещений, следующие из него, а также исследуется кинематика течения на поверхностях максимальной скорости сдвига. Скольжения на указанной поверхности (сильные разрывы приращений перемещений) могут происходить только вдоль асимптотических направлений, если поверхность максимальной скорости сдвига имеет отрицательную Гауссову кривизну. Поэтому сдвиговое пластическое течение вблизи поверхности максимальной скорости сдвига (отрицательной Гауссовой кривизны) реализуется как результат микроскольжений в асимптотических направлениях. Получены интегрируемые соотношения для разрывов касательных составляющих приращений перемещений вдоль асимптотических линий поверхности максимальной скорости сдвига. Рассмотрены кинематические соотношения в областях эллиптичности, т. е. когда Гауссова кривизна положительна, на поверхности максимальной скорости сдвига. Интегралы уравнений равновесия для расслоенного поля напряжений вдоль изостатических траекторий выводятся преобразованием векторного уравнения равновесия к изостатической координатной сетке. Устанавливается возможность отделения одной из изостатических координат, поверхности уровня которой как раз и являются слоями поля направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению.

Значительное внимание уделяется исследованию трехмерных уравнений математической теории пластичности в триортогональных изостатических координатах [36]. Основной интерес здесь представляют уравнения совместности приращений деформаций и пространственные соотношения Коши. Уравнения совместности для приращений малых деформаций в триортогональной изостатической системе координат исследуются вместе с дополнительными соотношениями, связывающими физические компоненты тензора несовместности. Существенных уравнений совместности 6. Для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона – Треска, имеется лишь 3 независимых уравнения совместности. Явно указываются и рассматриваются системы независимых уравнений совместности, сформулированные в изостатической координатной сетке. Определены условия, достаточные для того, чтобы при выполнении 3-х независимых уравнений совместности удовлетворялись 3 оставшихся уравнения совместности. Показано, что нарушения сплошности на поверхности идеально пластического тела распространяются в глубь тела вдоль асимптотических линий на слоях векторного поля, указывающего направления наибольшего главного нормального напряжения. Поскольку асимптотические линии наименее искривлены по сравнению с любыми другими линиями на поверхности (в том смысле, что нормальная кривизна асимптотических линий равна нулю), то нарушения сплошности проникают в глубь идеально пластического тела по наименее искривленным траекториям. Именно в этом смысле можно вести речь о минимальном искривлении траекторий распространения трещин в твердых телах.

Анализ плоской и осесимметричной задач выполнен с использованием аппарата производящих функций, определяющих канонические преобразования пространственных координат. Альтернативный вариант вывода всех основных геометрических соотношений теории плоской деформации идеально пластического тела, исходя из условия интегрируемости трехмерных пространственных уравнений, сформулированных для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона – Треска, был выполнен в статье [37] простым понижением на одну единицу их размерности.

В рамках построения математической теории пластичности с уравнениями гиперболического аналитического типа был выполнен групповой анализ уравнений пространственной, плоской и осесимметричной задачи. Методы группового анализа все шире проникают в механику деформируемого твердого тела, позволяя в некоторых случаях получать точные решения важнейших прикладных задач[18]. Получены результаты применения классических методов Ли к уравнениям теории пластичности. Определены группы симметрий уравнений в частных производных теории пластичности, алгебры симметрий (алгебры Ли) и оптимальные системы одномерных подалгебр для пространственной, плоской и осесимметричной задач. Оптимальные системы позволяют найти ряд новых решений трехмерных уравнений теории пластичности инвариантно-групповой природы. Применение групповых методов (особенно это касается пространственной задачи) требует выполнения огромного объема рутинных преобразований и вычислений, которые были проведены с помощью систем символьных вычислений.

Чтобы оценить примерный объем вычислительной работы заметим, что лишь для одной естественной конечномерной (размерности 12) подалгебры алгебры симметрий, соответствующей группе симметрий трехмерных уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности, оптимальная система одномерных подалгебр насчитывает один трехпараметрический элемент, 9 двухпараметрических, 45 однопараметрических элементов и 95 индивидуальных элементов. Алгебра симметрий уравнений осесимметричной задачи имеет размерность 5; оптимальная система одномерных подалгебр состоит из одного однопараметрического элемента и 20 индивидуальных элементов. Алгебра симметрий уравнений плоской задачи (плоское деформированное состояние) имеет размерность 7; оптимальная система одномерных подалгебр состоит из одного двухпараметрического элемента, 9 однопараметрических и 19 индивидуальных элементов.

Преподавание математической теории пластичности в Самарском государственном университете имеет свою историю и традиции, связанные прежде всего с именем известного специалиста в теории упрочняющихся идеально пластических тел — Г.И. Быковцева. Для него всегда было характерно сочетание собственно механического содержания теории пластичности с глубоким и изящным математическим исследованием гиперболических задач для дифференциальных уравнений в частных производных, к которым приводит изучение полей напряжений и скоростей деформаций в зонах пластического течения[19]. Такой синтез требовал также особого курса по теории дифференциальных уравнений в частных производных математической физики, в котором излагались такие редко освещаемые в современной учебной литературе темы, как общая теория характеристик для нелинейных уравнений первого и второго порядков, метод каскадного интегрирования Лапласа, метод тангенциального преобразования, метод фазового преобразования.

Д.Д. Ивлев — член Национального комитета РАН по теоретической и прикладной механике, член редколлегий журналов «Известия РАН — Механика твердого тела» и «Прикладная математика и механика», член экспертного совета по математике и механике ВАК Минобразования и науки РФ, председатель диссертационного совета по присуждению ученой степени доктора физико-математических наук, действительный член Национальной академии наук и искусств Чувашской Республики, заслуженный деятель науки и техники РФ. Среди учеников Д.Д. Ивлева — доктора и кандидаты наук, которые работают в различных городах России — Москве, Воронеже, Самаре, Чебоксарах, Владивостоке.

Мы поздравляем Дюиса Даниловича с 80-летием и желаем ему здоровья и творческих успехов в научной и педагогической деятельности.

Л.Ю. Коссович, Ю.Н. Радаев

[18]Не следует однако преувеличивать возможности группового анализа. В настоящее время его роль как средства нахождения новых точных решений задач механики деформируемого твердого тела является более чем скромной.

[19]С избранными научными статьями Г.И. Быковцева можно познакомиться по кн.: *Быковцев, Г.И.* Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: сб. ст. / Г.И. Быковцев. – Владивосток: Дальнаука, 2002. – 566 с.

Библиографический список

1. *Saint-Venant, de B.* Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delá des limites oú l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état / B. De Saint-Venant // Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences. – 1870. – Т. 70. – P. 473–480.

2. *Saint-Venant, de B.* Memóire sur l'établissement des équations differéntielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delá des limites oú l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état / B. De Saint-Venant // Liouville J. d. Math. Pures et Appl. Ser. II. – 1871. – Т. 16. – P. 308–316, 373–382[20].

3. *Coulomb, C.A.* Essay sur l'application des régles de maximes et minimis á quelques problemes de statique, relatifs a l'architecture / C.A. Coulomb // Mémoirs de mathematique et de physique, présentés a l'académie Royale des Sciences, Année 1773. – Paris: de l'imprimerie Royale, 1776.

4. *Леви, М.* К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости: сб. ст. / М. Леви // Теория пластичности. – М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 20–23[21].

5. *Вакуленко, А.А.* Теория пластичности / А.А. Вакуленко, Л.М. Качанов // Механика в СССР за 50 лет: в 4 т. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1972. – С. 79–118.

6. *Томас, Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. – М.: Мир, 1964. – 308 с.

7. *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 407 с.

8. *Фрейденталь, А.* Математические теории неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. – М.: Физматгиз, 1962. – 432 с.

9. *Качанов, Л.М.* Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.[22]

10. *Соколовский, В.В.* Теория пластичности / В.В. Соколовский. – М.: Высш. шк., 1969. – 608 с.[23]

11. *Ивлев, Д.Д.* Теория идеальной пластичности / Д.Д. Ивлев. – М.: Наука, 1966. – 232 с.

12. *Быковцев, Г.И.* Теория пластичности / Г.И. Быковцев, Д.Д. Ивлев. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528 с.

13. *Фридман, Я.Б.* Механические свойства металлов / Я.Б. Фридман. – М.: Оборонгиз, 1952. – 556 с.

14. *Соколовский, В.В.* Статика сыпучей среды / В.В. Соколовский. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1942. – 208 с.[24]

15. *Ильюшин, А.А.* Пластичность Ч. 1. Упругопластические деформации / А.А. Ильюшин. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. – 376 с.

16. *Хаар, А.* К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах: сб. ст. / А. Хаар, Т. Карман // Теория пластичности. – М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 41–56[25].

17. *Генки, Г.* О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических телах: сб. ст. / Г. Генки // Теория пластичности. – М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 80–101.

18. *Шилд, Р.Т.* О пластическом течении металлов в условиях осевой симметрии / Р.Т. Шилд // Механика: сб. пер. – 1957. – № 1. – С. 102–122[26].

19. *Ишлинский, А.Ю.* Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля / А.Ю. Ишлинский // Прикл. мат. и механика. – 1944. – Т. 8, вып. 3. – С. 201–224[27].

20. *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – С. 321.

21. *Ишлинский, А.Ю.* Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости / А.Ю. Ишлинский // Учен. зап. МГУ. Механика. – 1946. – Вып. 117. – С. 90–108[28].

22. *Радаев, Ю.Н.* О соотношениях перестановочности Ишлинского в математической теории пластичности / Ю.Н. Радаев // Вестн. Самар. гос. ун-та.

[20]См. пер. на рус. яз.: *Сен-Венан, Б.* Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости: сб. ст. / Б. Сен-Венан // Теория пластичности. – М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 11–19.

[21]Оригинальная работа: *Levy, M.* Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delá des limites oú l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état / M. Levy // Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences. – 1870. – V. 71. – P. 1323–1325.

[22]Первое издание этой книги: *Качанов, Л.М.* Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 324 с.

[23]Это последнее 3-е издание; 2-е издание: *Соколовский, В.В.* Теория пластичности / В.В. Соколовский. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. – 396 с.; 1-е издание книги было выпущено в свет издательством АН СССР в 1946 г.

[24]См. также 3-е изд. этой книги: *Соколовский, В.В.* Статика сыпучей среды / В.В. Соколовский. – М.: Физматгиз, 1960. – 244 с.

[25]Оригинальная работа: *Haar, A.* Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien / A. Haar, Th. Karman // Nachr., kgl. Ges. Wiss. Gött. Math.-phys. Kl., 1909. – H. 2. – S. 204–218.

[26]Оригинальная работа: *Shield, R.T.* On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry / R.T. Shield // Proc. Roy. Soc. Lond. – 1955. – V. 233A, № 1193. – P. 267–287.

[27]См. также: *Ишлинский, А.Ю.* Прикладные задачи механики: в 2 т. Т. 1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел / А.Ю. Ишлинский. – М.: Наука, 1986. – С. 17–42.

[28]См. с. 62–83. В заключительном подстрочном замечании А.Ю. Ишлинский указывает на то, что статья была написана и представлена в редакцию в начале 1941 г.

Естественно-науч. сер. – 2007. – № 6(56). – С. 102–114.

23. *Ивлев, Д.Д.* Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучих сред / Д.Д. Ивлев // Прикл. мат. и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 1. – С. 90–96[29].

24. *Ивлев, Д.Д.* О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях / Д.Д. Ивлев // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 124, № 3. – С. 546–549[30].

25. *Ивлев, Д.Д.* О выводе соотношений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности / Д.Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1959. – № 3. – С. 137.[31].

26. *Ивлев, Д.Д.* К теории осесимметричного напряженного состояния при условии пластичности Треска / Д.Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1959. – № 6. – С. 112–114, 263–267.

27. *Ивлев, Д.Д.* Механика пластических сред: в 2 т. Т. 1. Теория идеальной пластичности / Д.Д. Ивлев. – М.: Физматлит, 2001. – 448 с.

28. *Ивлев, Д.Д.* Механика пластических сред: в 2 т. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды / Д.Д. Ивлев. – М.: Физматлит, 2002. – 448 с.

29. *Ивлев, Д.Д.* О теории трещин квазихрупкого разрушения / Д.Д. Ивлев // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1967. – № 6. – С. 88–128.

30. *Ивлев, Д.Д.* Три дискуссии в механике / Д.Д. Ивлев // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественно-науч. сер. – 2007. – № 4 (54). – С. 115–123.

31. *Радаев, Ю.Н.* К 75-летию Д.Д. Ивлева / Ю.Н. Радаев // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественно-науч. сер. – 2005. – № 5 (39). – С. 5–32.

32. *Радаев, Ю.Н.* О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия / Ю.Н. Радаев // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1990. – № 1. – С. 86–94.

33. *Радаев, Ю.Н.* К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности / Ю.Н. Радаев // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 5. – С. 102–120.

34. *Радаев, Ю.Н.* Пространственная задача математической теории пластичности / Ю.Н. Радаев. – Самара: Изд-во Самар. гос. ун-та, 2006. – 340 с.

35. *Ивлев, Д.Д.* Предельное состояние деформируемых твердых тел и горных пород / Д.Д. Ивлев, Л.А. Максимова, Р.И. Непершин, Ю.Н. Радаев, С.И. Сенашов, Е.И. Шемякин. – М.: Физматлит, 2008. – 832 с.

36. *Радаев, Ю.Н.* О гиперболичности пространственных уравнений теории пластичности в изостатической координатной сетке / Ю.Н. Радаев // Изв. РАН. Механика твердого тела. – № 5. – 2008. – С. 79–89.

37. *Радаев, Ю.Н.* К теории плоской деформации идеально пластического тела / Ю.Н. Радаев // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественно-науч. сер. – 2008. – № 3(62). – С. 272–289.

СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ Д.Д. ИВЛЕВА

1955

К теории простого деформирования пластических тел // Прикл. мат. и механика. – 1955. – Т. 19, вып. 6. – С. 734–735.

1956

К использованию линейной тензорной связи в пластичности // Прикл. мат. и механика. – 1956. – Т. 20, вып. 2. – С. 289–292.

Выпучивание эксцентричной трубы // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1956. – № 10. – С. 112–166.

1957

О потере несущей способности вращающихся дисков, близких круговому // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1957. – № 1. – С. 141–144.

Упруго-пластическое состояние конической трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестн. МГУ. – 1957. – № 2. – С. 51–52 (совм. с Л.В. Ершовым).

Выпучивание толстостенной трубы, ослабленной пологой осесимметричной выточкой // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1957. – № 5. – С. 113–118.

Приближенное решение упруго-пластических задач теории идеальной пластичности // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 113, № 2. – С. 294–296.

Приближенное решение задач теории малых упруго-пластических деформаций // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 113, № 2. – С. 527–528.

Упруго-пластическое напряженное состояние полого толстостенного тора, находящегося под дей-

[29]См. также [27, с. 5–14].
[30]См. также [27, с. 15–20].
[31]См. также [27, с. 20–21].

ствием внутреннего давления // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1957. – № 7. – С. 129–131 (совм. с Л.В. Ершовым).

О выпучивании толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1957. – № 8. – С. 149–152 (совм. с Л.В. Ершовым).

Упруго-пластическое состояние эллиптической трубы, находящейся под действием внутреннего давления //Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1957. – № 9. – С. 130–134 (совм. с Л.В. Ершовым).

Вдавливание тонкого лезвия в пластическую среду // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1957. – № 10. – С. 89–93.

Об определении перемещений в задаче Л.А. Галина // Прикл. мат. и механика. – 1957. – Т. 21, вып. 5. – С. 716–718.

Приближенное решение плоских упругопластических задач теории идеальной пластичности // Вестн. МГУ. – 1957. – № 5. – С. 17–26 (совм. с Л.В. Ершовым).

1958

О потере устойчивости вращающихся дисков // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1958. – № 1. – С. 124–125 (совм. с Л.В. Ершовым).

О некоторых работах К.Н. Шевченко по теории пластичности // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1958. – № 2. – С. 159–162.

Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды // Прикл. мат. и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 1. – С. 90–96.

Приближенное решение упругопластических осесимметрических задач теории идеальной пластичности // Вестн. МГУ. – 1958. – № 2. – С. 47–56 (совм. с Л.В. Ершовым).

О разрывных решениях пространственных задач теории идеальной пластичности // Прикл. мат. и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 4. – С. 480–486.

О некоторых частных решениях уравнений осесимметричной теории идеальной пластичности и обобщение решения Л. Прандтля о сжатии пластической полосы шероховатыми плитами // Прикл. мат. и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 5. – С. 673–678.

К построению теории идеальной пластичности // Прикл. мат. и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 6. – С. 850–855.

Об одном классе решений общих уравнений теории идеальной пластичности // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1958. – № 11. – С. 107–109.

Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах // Докл. АН СССР. – 1958. – Т. 123, № 6. – С. 488–490.

1959

Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах при условии пластичности Треска // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1959. – № 1. – С. 132–133.

О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 124, № 6. – С. 546–549.

О вдавливании жестких штампов в пластическое полупространство // Прикл. мат. и механика. – 1959. – Т. 23, вып. 2. – С. 247–281.

К теории разрушения твердых тел // Прикл. мат. и механика. – 1959. – Т. 23, вып. 3. – С. 618–624.

О выводе соотношений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1959. – № 3. – С. 137.

Об изотропном упрочнении пластических тел // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 127, № 4. – С. 777–779.

К определению перемещений в задаче Л.А. Галина // Прикл. мат. и механика. – 1959. – Т. 23, вып. 5. – С. 987–988.

К теории идеальной пластической анизотропии // Прикл. мат. и механика. – 1959. – Т. 23, вып. 6. – С. 1107–1114.

К теории осесимметричного напряженного состояния при условии пластичности Треска // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1959. – № 6. – С. 112–114.

1960

К теории идеально затвердевающих сред // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 130, № 4. – С. 742–745.

Об уравнениях линеаризованных пространственных задач теории идеальной пластичности // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 130, № 6. – С. 1232–1235.

О границе пластического состояния материала // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1960. – № 1. – С. 161.

О свойствах соотношений закона анизотропного упрочнения пластического материала // Прикл. мат. и механика. – 1960. – Т. 24, вып. 1. – С. 144–146.

О постулате изотропии в теории пластичности // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1960. – № 2. – С. 125–127.

К теории плоской деформации упрочняющегося пластического материала // Прикл. мат. и механика. – 1960. – Т. 24, вып. 4. – С. 707–710.

Об экстремальных свойствах условий пластичности // Прикл. мат. и механика. – 1960. – Т. 24, вып. 5. – С. 951–955.

К построению гидродинамики вязкой жидкости // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 135, № 2. – С. 280–282.

О работе В.С. Ленского «Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении» // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1960. – № 6. – С. 179–180.

К теории вдавливания штампа в пластическую среду // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1960. – № 3. – С. 214–216 (совм. с В.А. Жалниным).

0 вдавливании тонкого тела вращения в пластическое полупространство // Журн. прак. механики и техн. физики. – 1960. – № 4. – С. 75–78.

1961

Об определении предельной нагрузки тел, вдавливаемых в пластическую среду // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1961. – № 1. – С. 173–174 (совм. с Г.И. Быковцевым).

К теории неустановившейся ползучести // Проблемы механики сплошной среды: сб. статей, посвящ. 70-летию акад. Н.И. Мусхелишвили. – М., 1961. – С. 157–160.

Об определении поверхности выпучивающегося материала при вдавливании тонкого лезвия в пластическое полупространство // Прикл. мат. и механика. – 1961. – Т. 25, вып. 2. – С. 332–335.

К теории сферического деформированного состояния идеально пластических сред // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1961. – № 1. – С. 72–75 (совм. с Т.Н. Мартыновой).

Об устойчивости полосы при сжатии // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 138, № 5. – С. 1047–1049 (совм. с Л.В. Ершовым).

К построению теории упругости // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 138, № 6. – С. 1321–1324.

Об основных соотношениях теории анизотропной сыпучей среды // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1961. – № 2. – С. 116–121 (совм. с Т.Н. Мартыновой).

О математическом описании поведения упругого изотропного тела при помощи кусочнолинейного потенциала // Прикл. мат. и механика. – 1961. – Т. 25, вып. 5. – С. 897–905.

О кручении винтовых стержней из идеально жесткопластического материала // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1961. – № 5. – С. 124–126.

О вдавливании кольцевого штампа в пластическое полупространство // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1961. – № 6. – С. 153–154 (совм. с В.А. Жалниным, В.С. Мищенко).

Об учете сжимаемости в теории идеально пластических сред // Прикл. мат. и механика. – 1961. – Т. 25, вып. 6. – С. 1126–1128 (совм. с Т.Н. Мартыновой).

О двойных числах и их функциях // Математическое просвещение. – 1961. – № 6. – С. 197–203.

1962

Об идеально пластическом течении материала с учетом остаточных микронапряжений // Прикл. мат. и механика. – 1962. – Т. 26, вып. 4. – С. 709–714.

К теории предельного равновесия оболочек вращения при кусочнолинейных условиях пластичности // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1962. – № 6. – С. 95–102.

1963

К теории сжимаемых идеально пластических сред // Прикл. мат. и механика. – 1963. – Т. 27, вып. 3. – С. 589–592 (совм. с Т.Н. Мартыновой).

О кручении призматических стержней из упрочняющегося материала при линеаризованном условии пластичности // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1963. – № 3. – С. 115–118 (совм. с В.В. Дудукаленко).

К теории сложных сред // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 148. – № 1. – С. 64–67.

Об условии полной пластичности для осесимметричного состояния // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1963. – № 3. – С. 102–104 (совм. с Т.Н. Мартыновой).

О предельном состоянии осесимметричных тел при условиях сопротивления сдвигу и отрыву // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1963. – № 5. – С. 79–85 (совм. с Т.Н. Мартыновой).

О кручении анизотропно упрочняющихся стержней при линеаризованном законе пластического течения // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1963. – № 5. – С. 173–175 (совм. с В.В. Дудукаленко).

О кручении призматических стержней из идеально пластического материала с учетом микронапряжений // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1963. – № 5. – С. 154–157 (совм. с И.А. Бережным).

Об уравнениях вязкопластического тела при кусочнолинейных потенциалах // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1963. – № 6. – С. 12–16 (совм. с В.А. Знаменским).

О сжатии полосы из упрочняющегося пластического материала жесткими шероховатыми плитами // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 153, № 5. – С. 1024–1026 (совм. с В.В. Дудукаленко).

1964

К теории осесимметричного состояния идеально пластического материала // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1964. – № 5. – С. 102–108 (совм. с Г.И. Быковцевым, Т.Н. Мартыновой).

О функциях нагружения анизотропного упрочняющегося пластического материала // Прикл. мат. и механика. – 1964. – Т. 28, вып. 4. – С. 794–797 (совм. с Г.И. Быковцевым, В.В. Дудукаленко).

О предельном состоянии слоистых пластин и оболочек вращения // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1964. – № 4. – С. 77–86 (совм. с Ю.П. Листровой, Ю.В. Немировским).

Об устойчивости пластин в общем случае нелинейной деформационной теории при малых деформациях // Прикл. механика. – 1964. – № 2. – С. 117–123 (совм. с И.Д. Легеней).

Пластичности теория (мат.) // Физ. энцикл. словарь. – М., 1964. – С. 37–39.

Пластический шарнир // Физ. энцикл. словарь. – М., 1964. – С. 37.

Пластичности условия // Физ. энцикл. словарь. – М., 1964. – С. 39.

1965

О влиянии вязкости на механическое поведение упруго-пластических сред // Докл. АН СССР. – 1965. – Т. 163, № 3. – С. 595–598 (совм. с И.А. Бережным).

О свойствах общих уравнений теории идеальной пластичности // Докл. АН СССР. – 1965. – Т. 164, № 4. (совм. с Т.Н. Мартыновой).

О свойствах общих уравнений теории идеальной пластичности при кусочнолинейных потенциалах // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1965. – № 1. – С. 56–69 (совм. с Г.И. Быковцевым, Т.Н. Мартыновой).

К теории устойчивости пластины в общем случае деформационной теории: Тр. всесоюз. конф. по устойчивости. – М., 1965.

1966

Теория идеальной пластичности. – М., 1966. – 232 с.

1967

О некоторых случаях интегрируемости соотношений теории упрочняющихся пластических сред при сингулярных поверхностях текучести // Инженер. журн. Механика твердого тела. – 1967. – № 1. – С. 143–144 (совм. с Л.В. Ершовым).

О диссипативной функции в теории упрочняющихся пластических сред // Прикл. мат. и механика. – 1967. – Т. 31, вып. 2. – С. 346–348.

Об условиях квазихрупкого разрушения // Прикл. мат. и механика. – 1967. – Т. 31, вып. 5. – С. 537–542 (совм. с Л.В. Ершовым).

О деформационных теориях пластичности при сингулярных поверхностях нагружения // Прикл. мат. и механика. – 1967. – Т. 32, вып. 5. – С. 887–889.

О диссипативной функции в теории пластических сред // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 5. – С. 1037–1039.

О соотношениях на поверхностях разрыва напряжений в трехмерных идеально-пластических телах // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 5. – С. 1039–1042 (совм. с Г.И. Быковцевым, Ю.М. Мяснянкиным).

Об одном построении теории трещин // Инженер. журн. Механика твердого тела. – 1967. – № 6. – С. 91–94.

О теории трещин квазихрупкого разрушения // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1967. – № 6. – С. 88–128.

1968

О соотношениях на поверхности разрыва напряжений в трехмерных идеально жесткопластических телах // Прикл. мат. и механика. – 1968. – Т. 38, вып. 3. – С. 472–477 (совм. с Г.И. Быковцевым, Ю.М. Мяснянкиным).

О кинематических соотношениях на поверхности скольжения в идеальных жесткопластических телах // Прикл. мат. и механика. – 1968. – Т. 38, вып. 4. – С. 623–631 (совм. с Г.И. Быковцевым, Ю.М. Мяснянкиным).

К задаче о внедрении гладкого клинообразного в плане штампа с плоским основанием в жесткопластическое пространство // Инженер. журн. Механика твердого тела. – 1968. – № 6. – С. 115–118 (совм. с Р.И. Непершиным).

1969

О деформационных теориях пластичности // Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды: сб. статей, посвящ. 60-летию акад. Л.И. Седова. – М., 1969. – С. 233–239.

1970

О диссипативных функциях в теории вязкопластических сред // Проблемы механики сплошной среды (К 60-летию акад. В.В. Новожилова). – 1970. – С. 67–70. (совм. с И.А. Бережным, Е.В. Макаровым)

Об одной неполной задаче теории идеальной пластичности // Тр. НИИ математики ВГУ. – 1970. – С. 145–148.

О деформационных моделях теории пластичности и сплошных сред // Прикл. мат. и механика. – 1970. – Т. 40, вып. 3. – С. 553–557 (совм. с И.А. Бережным, Е.В. Макаровым).

1971

Об уравнениях теории идеальной пластичности в компонентах скоростей перемещений // Прикл. мат. и механика. – 1971. – Т. 41, вып. 1. – С. 183–185 (совм. с А.Д. Чернышевым).

Теория упрочняющегося пластического тела. – М., 1971. – 232 с. (совм. с Г.И. Быковцевым).

1972

О приобретенной анизотропии пластических тел // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа: сб. статей, посвящ. 80-летию акад. Н.И. Мусхелишвили. – М., 1972. – С. 601–605 (совм. с И.А. Бережным, В.В. Дудукаленко).

Об общих соотношениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды // Прикл. мат. и механика. – 1972. – Т. 42, вып. 5. – С. 957–959.

О построении модели сыпучих сред исходя из определения диссипативной функции // Основы пластичности: сб. трудов симпозиума. Варшава, 1973. – С. 601–605 (совм. с И.А. Бережным, В.Б. Чадовым).

1973

О построении модели сыпучих сред на основе диссипативных функций // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 123, № 6. (совм. с И.А. Бережным, В.Б. Чадовым).

Внедрение гладкого сферического штампа в жесткопластическое полупространство // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 159–166 (совм. с Р.И. Непершиным).

Об одном обобщении решения Прандтля для сферического деформированного состояния // Тр. НИИ математики ВГУ. – Воронеж, 1973. – Вып. 10. – С. 1–3.

1974

О диссипативной функции в теории анизотропных пластических сред // Изв. вузов. Машиностр. МВТУ. – 1974. – С. 21–24 (совм. с В.Б. Чадовым).

О некоторых моделях, построенных на основе механизмов упругости, вязкости и пластичности с переменными определяющими параметрами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1974. – № 1. (совм. с И.А. Бережным, Н.В. Герасимовым).

О функции нагружения для идеально пластических моделей // Избр. проблемы прикл. механики: сб. статей, посвящ. 60-летию акад. В.Н. Челомея. – М., 1974. – С. 113–117 (совм. с И.А. Бережным, В.И. Цейлером).

1975

Об определении перемещений в упруго-пластических задачах теории идеальной пластичности // Успехи механики деформируемых сред (К 100-летию со дня рождения акад. Б.Г. Галеркина). – М., 1975. – С. 236–240.

О построении поверхностей сложных жесткопластических моделей // Механика деформируемых тел и конструкций: сб. статей. – М., 1975. – С. 62–70 (совм. с И.А. Бережным, В.И. Цейлером).

О течении жидкости с управляемой вязкостью // Докл. АН СССР. – 1975. – Т. 223, № 3. – С. 582–584 (совм. с И.А. Бережным, Н.В. Герасимовым, В.И. Цейлером).

О некоторых экспериментах со сходящимися кольцевыми волнами на поверхности тяжелой жидкости // Докл. АН СССР. – 1975. – Т. 223, № 4. – С. 810–811 (совм. с И.А. Бережным, Р.К. Логвиновой).

1976

Об определяющих неравенствах в теории пластичности // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 227, № 4. – С. 824–826. (совм. с И.А. Бережным)

1977

Диссипативная функция в теории пластичности // Механика деформируемого тела: межвуз. сб. – Куйбышев, 1977. – Вып. 3. – С. 5–22 (совм. с И.А. Бережным).

1978

Метод возмущений в теории упругопластического тела. – М., 1978. – 208 с. (совм. с Л.В. Ершовым).

Об условиях пластичности сжимаемого упругопластического материала при плоской деформации // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1978. – № 4. – С. 80–87. (совм. с Е.В. Макаровым, Ю.М. Марушкей)

1980

Об интегральных неравенствах теории упругопластического тела // Прикл. мат. и механика. – 1980. – Т. 44, № 3. – С. 540–549 (совм. с И.А. Бережным).

1981

Определяющие неравенства в теории упругопластического тела // V Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике: тез. докл. – Алма-Ата, 1981. (совм. с И.А. Бережным).

1982

Об уравнениях стареющих пластических тел // Изв. АН Арм. ССР. Механика. – 1982. – Т. XXV, № 5. – С. 22–25 (совм. с Н.Х. Арутюняном).

Об обобщении решения Л. Прандтля о сжатии пластического слоя шероховатыми плитами // Современные проблемы механики и авиации: сб. статей в честь 60-летия акад. И.Ф. Образцова. – М., 1982. – С. 137–144 (совм. с Л.В. Ершовым, А.В. Романовым).

Об обобщении решения Прандтля в сферической системе координат // Прикл. мат. и механика. – 1982. – Т. 46, вып. 5. – С. 524–527 (совм. с А.В. Романовым).

1983

О влиянии внутреннего механизма вязкости на поведение идеально пластических сред // Прикл. мат. и механика. – 1983. – Т. 47, вып. 3. – С. 524–527 (совм. с М.А. Артемовым).

Об одной предельной модели сплошной среды // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 273, № 5. – С. 1074–1076 (совм. с И.Т. Артемьевым).

1984

К теории предельного состояния хрупких тел с разрывными решениями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 1. – С. 111–116 (совм. с И.Т. Артемьевым).

Об одном точном неавтомодельном решении теории идеальной пластичности // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 275, № 5. – С. 1080–1083 (совм. с А.В. Романовым).

Об одном классе точных неавтомодельных задач теории идеальной пластичности // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела: сб. статей, посвящ. 60-летию акад. Ю.Н. Работнова. – М., 1984. – С. 90–97 (совм. с А.В. Романовым).

1985

Краевая задача для сред с предельным сопротивлением всестороннему растяжению // Краевые задачи и их приложение. – Чебоксары, 1985. – С. 3–9 (совм. с И.Т. Артемьевым).

1986

О течении идеально вязкой среды // Краевые задачи и их приложение. – Чебоксары, 1986. – С. 33–42 (совм. с А.А. Горбуновым).

Об упругопластическом состоянии клина при предельном сопротивлении сдвигу и отрыву // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1986. – № 1. – С. 157–161 (совм. с И.Т. Артемьевым).

О нижней границе несущей способности тел, определяемой условиями, предельного состояния // VI Всесоюзн. съезда по теоретической и прикладной механике: аннотации докл. – Ташкент, 1986. – С. 51 (совм. с И.Т. Артемьевым, А.А. Горбуновым).

Об определяющих соотношениях в теории предельного сопротивления сдвигу и среднему напряжению // Актуальные задачи механики сплошных сред. – Чебоксары, 1986. – С. 45–52 (совм. с А.А. Горбуновым).

Об изгибе пластической полосы, ослабленной пологими выточками // Взаимодействие тел в жидкости со свободными границами. – Чебоксары, 1986. – С. 57–60 (совм. с Л.Б. Шитовой).

1988

Определение напряженного состояния в деформируемом объеме порошкового материала методом характеристик // Порошковая металлургия. – 1988. – № 1. – С. 6–10 (совм. с Н.А. Чайниковым).

Упругопластические равновесия остроугольного клина при предельном сопротивлении сдвигу, среднему растягивающему напряжению и отрыву // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1988. – № 4. – С. 157–162 (совм. с И.Т. Артемьевым).

Линеаризированные уравнения теории анизотропного идеального жесткопластического тела // Актуальные вопросы теории краевых задач и их приложений. – Чебоксары, 1988. – С. 55–58 (совм. с Л.Б. Шитовой).

1989

Об образовании шейки при течении анизотропной жесткопластической полосы // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 2. – С. 183–185 (совм. с Е.А. Григорьевым, Л.Б. Шитовой).

Об образовании шейки при растяжении плоского образца с учетом влияния среднего напряжения // Краевые задачи и их приложения. – Чебоксары, 1989. – С. 117–119 (совм. с Л.Б. Шитовой).

1992

Пластичности теория (математическая) // Физ. энцикл.: в 5 т. – М., 1992. – Т. 3. – С. 628–631.

Пластический шарнир // Физ. энцикл.: в 5 т. – М., 1992. – Т. 3. – С. 628.

Пластичности условие // Физ. энцикл.: в 5 т. – М., 1992. – Т. 3. – С. 631.

К теории предельного состояния пластических пористых тел // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1992. – № 3. – С. 163–165.

Об условиях текучести идеально пластического тела // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1992. – № 5. – С. 107–109 (совм. с А.В. Романовым).

О свойствах основных соотношений теории идеальной пластической анизотропии // Актуальные проблемы механики деформ. тверд. тела: сб. статей, посвящ. 70-летию Ж.С. Ержанова. – Алма-Ата, 1992. – С. 69–75 (совм. с И.Т. Артемьевым).

1993

Теория идеальной пластической анизотропии // Прикл. механика. – 1993. – Т. 29, № 1. – С. 73–78 (совм. с И.Т. Артемьевым).

Линеаризированные уравнения теории идеальной пластичности // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1993. – № 5. – С. 107–113 (совм. с И.Т. Артемьевым).

О применении обобщенных функций комплексного переменного к двумерной задаче теории упругости // Прочность и надежность конструкций: сб. статей, посвящ. 50-летию В.Д. Кулиева. – М., 1993. – С. 83–89 (совм. с М.В. Михайловой).

1994

Об общих соотношениях теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Изв. АН Чувашской Республ. – 1994. – № 2. – С. 16–21 (совм. с М.А. Артемовым).

К теории идеально затвердевающих сред // Изв. АН Чувашской Республ. – 1994. – № 2. – С. 22–25 (совм. с М.А. Артемовым).

К теории предельного состояния сыпучих сред. Деп. в ВИНИТИ 16.12.94. 2918-в94. 5 с. (совм. с Л.Б. Шитовой).

1995

О статических и кинематических соответствиях в теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1995. – № 3. – С. 104–110 (совм. с М.А. Артемовым).

О линеаризованных уравнениях кинематически определимых задач // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1995. – № 6. – С. 104–110 (совм. с М.А. Артемовым).

К теории затвердевающих сред // Изв. Инженерно-технологической академии Чувашской Республ. – 1995. – № 1. – С. 14–21 (совм. с М.А. Артемовым).

О растяжении полосы и бруса переменного прямоугольного сечения из идеально-пластического материала // Изв. Инженерно-технологической академии Чувашской Республ. – 1995. – № 1. – С. 39–48 (совм. с А.М. Васильевой, М.В. Михайловой).

Приближенное решение плоских задач для идеальных упругопластических неоднородных тел // Изв. Инженерно-технологической академии Чувашской Республ. – 1995. – № 1. – С. 27–38 (совм. с Т.Л. Захаровой).

Об идеально пластическом состоянии полого кругового цилиндра при произвольном возмущении боковой поверхности // Изв. Инженерно технологической академии Чувашской Республ. – 1995. – № 1. – С. 29–36 (совм. с А.М. Васильевой).

1996

Об одной модели предельного состояния тел // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 1. – С. 61–64 (совм. с Л.Б. Шитовой).

О пластическом течении бруса прямоугольного сечения при растяжении // Динамика сплошных сред со свободной границей. – Чебоксары, 1996. – С. 8–17 (совм. с М.А. Артемовым).

О соотношениях теории пластической анизотропии // Динамика сплошных сред со свободной границей. – Чебоксары, 1996. – С. 121–125.

Об общих уравнениях теории идеальной пластичности // Проблемы механики сплошной среды. – Владивосток, 1996. – С. 112–115.

О статической определимости предельного состояния твердого тела при отрыве // Проблемы механики. – 1996. – Т. 32, № 6. – С. 48–51.

О разрывных решениях теории пластичности // Проблемы механики. – 1996. – Т. 32, № 7. – С. 65–68 (совм. с М.А. Артемовым).

Об одном случае предельного состояния тел // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 3. – С. 43–45 (совм. с М.А. Артемовым).

К теории дифференциальных соответствий в механике сплошной среды // Изв. Инженерно-технологической академии Чувашской Республ. – 1996. – № 2. – С. 5–7.

Об общих соотношениях теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Докл. РАН. – 1996. – Т. 350, № 3. – С. 332–334 (совм. с М.А. Артемовым).

О течении трубы, ослабленной пологими выточками // Изв. Нац. акад. наук и искусств Чувашской Республ. – 1996. – № 6. – С. 28–31 (совм. с Т.Л. Захаровой).

О растяжении полосы и бруса переменного прямоугольного сечения из идеально пластического материала // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 6. – С. 79–87 (совм. с А.М. Васильевой, М.В. Михайловой).

Об общих уравнениях теории идеальной пластичности // Изв. Нац. акад. наук и искусств Чувашской Республ. – 1996. – № 6. – С. 32–34.

Об образовании шейки в растягиваемой вязкопластической полосе // Изв. Нац. акад. наук и искусств Чувашской Республ. – 1996. – № 6. – С. 35–38 (совм. с Т.И. Рыбаковой).

1997

Об идеально пластическом состоянии призматических тел переменного прямоугольного сечения // Докл. РАН. – 1997. – Т. 353, № 1. – С. 47–50 (совм. с М.А. Артемовым).

К теории идеально затвердевающих сред // Докл. РАН. – 1997. – Т. 355, № 5. – С. 623–625 (совм. с М.А. Артемовым).

О напряженном состоянии идеально пластического полого цилиндра, близкого к круговому // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1997. – № 4. – С. 113–119 (совм. с А.М. Васильевой).

Приближенное решение плоских задач для идеальных упругопластических неоднородных тел // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1997. – Т. 38, № 5. – С. 165–172 (совм. с Т.Л. Захаровой).

О соотношениях ассоциированного закона течения и нагружения в теории идеальной пластичности // Изв. Нац. акад. наук и искусств Чувашской Республ. – 1997. – № 4. – С. 78–94.

1998

О пространственном течении идеально пластического материала, сжатого шероховатыми плитами // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 1. – С. 5–12.

О течении трубы, ослабленной выточками // Докл. РАН. – 1998. – Т. 359, № 1. – С. 40–42 (совм. с Т.Л. Захаровой).

Об устойчивости вязкопластической полосы // Докл. РАН. – 1998. – Т. 358, № 4. – С. 490–491 (совм. с Т.И. Рыбаковой).

Об общих соотношениях теории идеальной пластичности // Докл. РАН. – 1998. – Т. 361, № 6. – С. 765–767.

Об идеальном жесткопластическом течении плоской полосы // Докл. РАН. – 1998. – Т. 363, № 4. – С. 483–485 (совм. с Л.А. Максимовой).

О возмущенном течении растягиваемой идеально пластической полосы // Докл. РАН. – 1998. – Т. 363, № 5. – С. 632–633 (совм. с Л.А. Максимовой).

О соотношениях ассоциированного закона пластического течения в обобщенных переменных // Докл. РАН. – 1998. – Т. 363, № 6. – С. 775–776.

О предельном состоянии идеально пластического прямоугольного бруса, ослабленного пологими выточками // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 4. – С. 173–179 (совм. с М.А. Артемовым).

Теория пластичности. – Владивосток, 1998. – 528 с. (совм. с Г.И. Быковцевым).

Изменение жесткости и процессы микроповреждений в хрупком материале // Изв. Нац. акад. наук и искусств Чувашской Республ. – 1998. – № 5. – С. 18–28 (совм. с В.В. Дудукаленко).

1999

Об определении соотношений ассоциированного закона идеально-пластического течения // Прикладные задачи механики сплошных сред. – Воронеж, 1999. – С. 116–123.

К теории кинематически определимых состояний идеальнопластических тел // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 1. – С. 92–98 (совм. с М.А. Артемовым).

О соотношениях общей плоской задачи теории идеальной пластичности // Изв. Инженерно-технологической академии Чувашской Республ. Сводный том. – Чебоксары, 1998. – № 3,4; – 1999. – № 1,2. – С. 13–16 (совм. с Л.А. Максимовой).

Условия изотропии и обобщенный ассоциированный закон пластического течения // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 6. – С. 39–54 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).

Полная пластичность в теории идеально пластического тела // Докл. РАН. – 1999. – Т. 368, № 3. – С. 333–334 (совм. с А.Ю. Ишлинским).

2000

О сдавливании круглого в плане идеально пластического слоя шероховатыми плитами // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 1. – С. 129–140 (совм. с И.П. Григорьевым).

О плоских течениях идеально жесткопластической среды // Докл. РАН. – 2000. – Т. 370, № 1. – С. 43–45 (совм. с Л.А. Максимовой).

О вдавливании индентора в идеальную жесткопластическую полосу // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 3. – С. 131–136 (совм. с Л.А. Максимовой).

О течениях изотропных сред // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 5. – С. 5–12 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).

Условия изотропии и обобщенный ассоциированный закон пластического течения // Докл. РАН. – 2000. – Т. 371, № 1. – С. 49–51 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).

О свойствах соотношений общей плоской задачи теории идеальной пластичности // Докл. АН РАН. – 2000. – Т. 373, № 1. – С. 39–41 (совм. с Л.А. Максимовой).

О свойствах течений изотропной среды // Докл. РАН. – 2000. – Т. 375, № 2. – С. 191–194 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).

Об определении связи «деформация – напряжение» в теории сложного нагружения при выполнении постулата изотропии А.А. Ильюшина // Изв. Нац. акад. наук и искусств Чувашской Республ. – 2000. – № 4. – С. 15–28.

2001

О вдавливании жесткого штампа в идеально пластическое полупространство с учетом сдвиговых усилий // Докл. РАН. – 2001. – Т. 379, № 2. – С. 196–199 (совм. с Л.А. Максимовой, Р.И. Непершиным).

Об определении поля скоростей идеально пластического течения в случае общей плоской задачи // Докл. РАН. – 2001. – Т. 379, № 6. – С. 758–763 (совм. с Л.А. Максимовой, Р.И. Непершиным).

О характеристических соотношениях для напряжений и скоростей перемещений пространственной задачи идеально пластического тела при условии полной пластичности // Докл. РАН. – 2001. – Т. 381, № 5. – С. 616–622 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Р.И. Непершиным).

Математическая теория идеальной пластичности. Состояние и развитие: Доклад на VIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике // Изв. Инженерно-технологической акад. Чувашской Республ. Сводный том. – Чебоксары, 1999. – № 3,4; – 2000. – № 1–4; – 2001. – № 1–4. – С. 32–44 (совм. с А.Ю. Ишлинским).

О представлении состояния полной пластичности на диаграмме Мора // Изв. Инженерно-технологической акад. Чувашской Республ. Сводный том. – Чебоксары, 1999. – № 3,4; – 2000. – № 1–4; – 2001. – № 1–4. – С. 45–51 (совм. с Л.А. Максимовой).

О соотношениях плоской задачи теории упругопластического тела для неоднородного материала // Изв. Инженерно-технологической акад. Чувашской Республ. Сводный том. – Чебоксары, 1999. – № 3,4; – 2000. – № 1–4; – 2001. – № 1–4. – С. 52–59 (совм. с А.В. Горским, П.В. Горским).

Механика пластических сред: в 2 т. Т. 1. Теория идеальной пластичности. – М., 2001. – 448 с.

Математическая теория пластичности. – М., 2001. – 704 с. (совм. с А.Ю. Ишлинским).

О предельных течениях изотропных сред // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. – Минск, 2001. – С. 223–227 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).

Условия изотропии и ассоциированный закон пластического деформирования // Проблемы механики деформируемых тел и горных пород: сб. статей, посвящ. 70-летию проф. Л.В. Ершова. – М., 2001. – С. 93–116 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).

2002

Механика пластических сред: в 2 т. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. – М., 2002. – 448 с.

О характеристических соотношениях для напряжений пространственной задачи сыпучей среды

при полном предельном равновесии // Докл. РАН. – 2002. – Т. 383, № 5. – С. 638–642 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Р.И. Непершиным).

О характеристических соотношениях для скоростей перемещений в пространственной задаче полного предельного равновесия сыпучей среды // Докл. РАН. – 2002. – Т. 384, № 1. – С. 57–61 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Р.И. Непершиным).

Внедрение пирамиды в идеально пластическое полупространство // Докл. РАН. – 2002. – Т. 385, № 6. – С. 766–769 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Р.И. Непершиным).

О вдавливании плоского штампа в идеальное жесткопластическое полупространство при действии контактных касательных напряжений // Прикл. мат. и механика. – 2002. – Т. 66, вып. 1. – С. 134–139 (совм. с Л.А. Максимовой, Р.И. Непершиным).

О внедрении жесткой пирамиды в идеально пластическое полупространство // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2002. – № 4. – С. 57–62 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Р.И. Непершиным).

О свойствах моделей изотропных сред // Проблемы механики деформируемого твердого тела: сб. статей к 70-летию акад. Н.Ф. Морозова. – СПб., 2002. – С. 149–153 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).

2003

О сдавливании идеально пластической пирамиды плоским штампом // Докл. РАН. – 2003. – Т. 391, № 3. – С. 337–339 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Р.И. Непершиным).

О статически определимых соотношениях теории идеальной пластичности // Докл. РАН. – 2003. – Т. 391, № 4. – С. 483–486.

Статически определимые соотношения теории идеальной пластичности // Докл. РАН. – 2003. – Т. 391, № 5. – С. 634–637 (совм. с М.В. Михайловой).

О линеаризированных уравнениях статически определимых соотношений теории идеальной пластичности // Докл. РАН. – 2003. – Т. 391, № 6. – С. 769–771 (совм. с М.В. Михайловой).

К теории статически определимых соотношений и предельного состояния пластических тел // Докл. РАН. – 2003. – Т. 392, № 1. – С. 59–62 (совм. с А.Ю. Ишлинским).

Статически определимые соотношения теории пластичности и предельное состояние и разрушение тел // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 3. – С. 84–89 (совм. с А.Ю. Ишлинским).

Идеи и результаты А.Ю. Ишлинского в теории пластичности // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 4. – С. 167–174.

Идеи и результаты А.Ю. Ишлинского в теории пластичности // Проблемы механики: сб. статей к 90-летию А.Ю. Ишлинского. – М., 2003. – С. 30–38.

О соотношениях теории идеальной пластичности при условии пластичности максимального приведенного напряжения // Проблемы нелинейной механики: сб. статей к 80-летию Л.А. Толоконникова. – Тула, 2003. – С. 178–184 (совм. с А.Ю. Ишлинским).

Статически определимые состояния теории идеальной пластичности // Современные проблемы математики, механики, информатики: тез. докл. Междунар. конф. – Тула. – 2003. – С. 147.

Статически определимые соотношения теории идеальной пластичности // Изв. Нац. акад. наук и искусств Чуваш. Республ. – 2003. – № 3. – С. 36–46 (совм. с М.В. Михайловой).

Теория идеальной пластичности. Состояние и развитие // Прикладная механика. – 2003. – № 11. – С. 6–46.

2005

Мир эллиптический и Мир гиперболический // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественно-науч. сер. – 2005. – № 5(39). – С. 33–41.

Теория предельного состояния и идеальной пластичности: избранные работы. – Воронеж, 2005. – 357 с.

О статически определимых состояниях в теории идеальной пластичности // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. – 2005. – № 2(44). – С. 13–18 (совм. с Л.А. Максимовой).

Статически определимые соотношения теории сжимаемых идеально-пластических сред // Теоретическая и прикладная механика: межвед. сб. науч.-метод. статей. – Минск, 2005. – Вып. 19. – С. 21–24.

О соотношениях ассоциированного закона течения теории сжимаемых идеальнопластических сред // Докл. РАН. – 2005. – Т. 406, № 4. – С. 478–479.

О статически определимых соотношениях сжимаемых идеально пластических сред // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 5. – С. 131–134.

2006

К теории статически определимых состояний деформируемых тел // Механика твердого тела. – 2006. – № 4. – С. 131–136 (совм. с Л.А. Максимовой).

О развитии идеально пластического состояния // Механика твердого тела. – 2006. – № 6. – С. 130–133 (совм. с Н.М. Матченко).

Об идеях и результатах Е.И. Шемякина в механике предельного состояния твердых деформируемых тел и конструкций // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: сб. статей к 75-летию Е.И. Шемякина. – М., 2006. – С. 46–51.

О предельном состоянии при отрыве // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: сб. статей к 75-летию Е.И. Шемякина. – М., 2006. – С. 287–290 (совм. с Н.М. Матченко).

Предельное состояние твердых тел как состояние статической определимости // IX Всерос. съезд по теоретической и прикладной механике: аннотации докл. – Н. Новгород, 2006. – Т. III. – С. 100.

Об эволюции идеальнопластического состояния // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. – 2006. – № 1(48). – С. 58–61.

Механика сплошной среды как раздел дифференциальной геометрии // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. – 2006. – № 5(52). – С. 215–220.

2007

О переходе статически неопределимого состояния в статически определимое // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2007. – № 1. – С. 5–9.

Три дискуссии // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2007. – № 1. – С. 157—163.

Чем отличается теория идеальной пластичности от теории предельного состояния // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2007. – № 3. – С. 3—10.

Три дискуссии в механике // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественно-науч. сер. – 2007. – № 4(54). – С. 115—123.

О предельных соотношениях при отрыве для анизотропного материала // Математические модели и методы механики сплошных сред: сб. науч. тр. к 60-летию А.А. Буренина. – Владивосток, 2007. – С. 106—107 (совм. с А.Н. Роштовой).

2008

Предельное состояние деформируемых тел и горных пород. – М., 2008. – 832 с. (совм. с Л.А. Максимовой, Р.И. Непершиным, Ю.Н. Радаевым, С.И. Сенашевым, Е.И. Шемякиным).

2009

Коэффициент интенсивности статистической неопределимости и достижение состояния полной пластичности // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2009. – № 1 (6). – С. 76—80.

2010

Об одном вопросе в теории предельного состояния // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (66). – С. 19–24.