



МАТЕМАТИКА

УДК 517.518

О ВЕСОВЫХ АНАЛОГАХ ТЕОРЕМ ВИНЕРА И ЛЕВИ ДЛЯ РЯДОВ ФУРЬЕ – ВИЛЕНКИНА

С. С. Волосивец

Саратовский государственный университет,
кафедра теории функций и приближений
E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

В данной статье мы находим общий вид комплексного гомоморфизма для некоторых подалгебр алгебры абсолютно сходящихся рядов Фурье – Виленкина. Как следствие мы получаем весовые аналоги теорем Винера и Леви для рядов Фурье – Виленкина.

Ключевые слова: система Виленкина, абсолютная сходимость, весовая последовательность, теорема Винера, теорема Леви.

On Weighted Analogs of Wiener's and Levy's Theorems for Fourier – Vilenkin Series

S. S. Volosivets

Saratov State University,
Chair of Function Theory and Applications
E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

In this paper we find the general form of complex homomorphism for some subalgebras of absolutely convergent Fourier – Vilenkin series algebra. As a corollary, we obtain weighted analogs of Wiener's and Levy's theorems for Fourier – Vilenkin series.

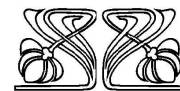
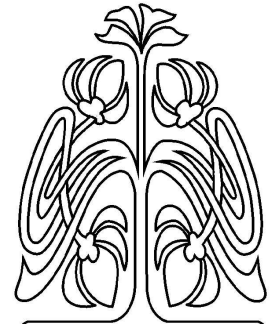
Key words: Vilenkin system, absolute convergence, weight sequence, Wiener's theorem, Levy's theorem.

ВВЕДЕНИЕ

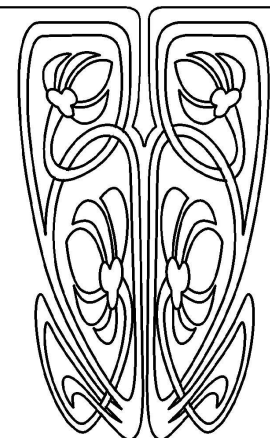
Пусть $\mathbf{P} = \{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, не меньших 2. Обозначим через $\mathbb{Z}(p_k)$ дискретную циклическую группу $\{0, 1, \dots, p_k - 1\}$ порядка p_k со сложением по модулю p_k и определим $G = G(\mathbf{P})$, как прямое произведение $\mathbb{Z}(p_k)$, $k \in \mathbb{N}$, с операцией \oplus , мерой μ и топологией, соответствующими прямому произведению. Элементами G являются последовательности $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$, где $x_k \in \mathbb{Z}(p_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Важную роль при этом играют подгруппы $G_n = \{x \in G : x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0\}$, $n \in \mathbb{N}$ и смежные классы $G_n(y) = y \oplus G_n = \{x \in G : x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $y \in G$. Если $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$ и $m_0 = 1$, то мера $\mu(G_n(y))$ равна m_n^{-1} ($\mu(G) = 1 = m_0^{-1}$). Известно, что $G_n(y)$ являются одновременно открытыми и компактными. Аналоги функций Радемахера на группе G задаются формулами $r_k(x) = \exp(2\pi i x_k / p_k)$. Если

$$n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k m_{k-1}, \quad n_k \in \mathbb{Z}(p_k), \quad (1)$$

есть \mathbf{P} -ичное представление $n \in \mathbb{Z}_+$, то по определению $\chi_n(x) = \prod_{k=1}^{\infty} r_k^{n_k}(x)$, $x \in G$ (на самом деле произведение конечно). Система $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, называемая системой характеров группы G , ортонорми-



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





рована на G и полна в $L^1(G)$. Для любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $x, y \in G$, верны равенства

$$\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y), \quad \chi_k(x \ominus y) = \chi_k(x)\overline{\chi_k(y)}, \quad (2)$$

где \ominus — операция, обратная к \oplus .

Сопоставим каждому $n \in \mathbb{Z}_+$ вида (1) элемент $n^* = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$ группы G . Обратно, каждому финитному элементу $(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots) \in G$, где $n_k = 0$ при $k > k_0$, можно сопоставить число $n \in \mathbb{Z}_+$ по формуле (1). Тогда можно ввести $n \oplus m$, $n \ominus m$, как числа, получающиеся по формуле (1) из $n^* \oplus m^*$, $n^* \ominus m^*$. Для любых $m, n \in \mathbb{Z}_+$, $x \in G$, справедливы равенства

$$\chi_n(x)\chi_m(x) = \chi_{n \oplus m}(x), \quad \chi_n(x)\overline{\chi_m(x)} = \chi_{n \ominus m}(x). \quad (2')$$

Все эти факты можно найти в [1, гл. 1, 3].

Введем коэффициенты Фурье функции $f \in L^1(G)$ по системе $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$:

$$\hat{f}(k) = \int_G f(x)\overline{\chi_k(x)} d\mu(x), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Будем писать $f \in A$, если $\|f\|_A := \sum_{k=0}^\infty |\hat{f}(k)| < \infty$. В этом случае ряд Фурье функции f по системе $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ сходится абсолютно и равномерно на G . Если $f, g \in A$, то, перемножая два абсолютно сходящихся ряда Фурье, в силу (2') получаем

$$f(x)g(x) = \sum_{i=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty \hat{f}(i)\chi_i(x)\hat{g}(j)\chi_j(x) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{i \oplus j = n} \hat{f}(i)\hat{g}(j)\chi_n(x) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{i=0}^\infty \hat{f}(i)\hat{g}(n \ominus i)\chi_n(x).$$

Ясно, что при этом $\|fg\|_A \leq \|f\|_A \|g\|_A$. Для двух произвольных последовательностей $a = \{a_i\}_{i=0}^\infty$, $b = \{b_i\}_{i=0}^\infty$, их \mathbf{P} -ичной сверткой $a * b$ назовем последовательность $c = \{c_n\}_{n=0}^\infty$, такую что $c_n = \sum_{i=0}^\infty a_i b_{n \ominus i}$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Для $a, b \in l^1$ ясно, что $\|a * b\|_{l^1} \leq \|a\|_{l^1} \|b\|_{l^1}$. Пусть $0 < p < \infty$, $\alpha_0 = 1$

и $\alpha_k \geq 1$. Если для $f \in L^1(G)$ имеем $\|f\|_{p, \alpha} = \left(\sum_{k=0}^\infty |\hat{f}(k)|^p \alpha_k \right)^{1/p} < \infty$, то f принадлежит классу A_α^p .

Далее рассматриваем A_α^p как алгебру с поточечным умножением и функцией $e(x) \equiv 1$ в качестве единицы. При доказательстве нам понадобятся определения банаховой алгебры и p -нормированной алгебры. Напомним, что множество B называется коммутативной банаховой алгеброй, если

- а) B — коммутативная алгебра над \mathbb{C} с единицей e относительно умножения;
- б) B — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_B$;
- в) $\|e\|_B = 1$ и $\|fg\|_B \leq C\|f\|_B\|g\|_B$ для всех $f, g \in B$.

Важную роль играет множество нетривиальных комплексных непрерывных гомоморфизмов алгебры B , обозначаемое через $\Gamma(B)$. Спектром $\sigma(f)$ элемента f банаховой алгебры называется множество $\lambda \in \mathbb{C}$, таких что элемент $f - \lambda e$ не обратим. Подробнее об этих понятиях см. [2, гл. 11, §11.4].

Множество B называется коммутативной p -нормированной алгеброй ($0 < p \leq 1$), если

- а) B — коммутативная алгебра над \mathbb{C} с единицей e относительно умножения;
- б) B — полное метрическое пространство с метрикой $\rho(f, g) = \|f - g\|_B$, где $\|cf\|_B = |c|^p \|f\|_B$ при $c \in \mathbb{C}$, $f \in B$, и справедливы другие аксиомы нормы;
- в) $\|e\|_B = 1$ и $\|fg\|_B \leq C\|f\|_B\|g\|_B$ для всех $f, g \in B$.

Множество $\Gamma(B)$ определяется так же, как в случае банаховой алгебры. Спектром $\sigma(f)$ элемента f p -нормированной алгебры B называется множество $\{\gamma(f) : \gamma \in \Gamma(B)\}$. Подробнее о p -нормированных алгебрах и их роли в общей теории топологических алгебр см. работы В. Желязко [3] и [4].

Напомним, что классические теоремы Н. Винера и П. Леви об абсолютно сходящихся рядах Фурье формулируются следующим образом (см. [2, гл. 11, п. 11.4.17]).

Теорема А. Пусть $\Phi(z)$ аналитична на открытом множестве, содержащем множество значений функции $f(x)$. Если $f(x)$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, то ряд Фурье функции $\Phi(f)(x)$ также абсолютно сходится. В частности, если $f(x)$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье и $f(x) \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$, то ряд Фурье функции $1/f(x)$ также абсолютно сходится.



В настоящей работе сначала определяются условия, при которых множество A_α^p является банаховой алгеброй, или p -нормированной алгеброй, вложенной в A . При этих условиях доказываются аналоги известных теорем Винера и Леви. Для тригонометрических рядов в случае $p > 1$ аналогичные результаты установлены в [5]. В случае $0 < p \leq 1$, $\alpha_k \equiv 1$, для тригонометрических рядов также известны аналоги теорем Винера и Леви [4, 6]. Для системы Уолша (система $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ при $p_i \equiv 2$) аналог теоремы Винера доказал Г.Н. Агаев [7].

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1. Пусть $f \in A_\alpha^p$, где $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ и $\sum_{k=0}^\infty \alpha_k^{-p'/p} < \infty$. Тогда $f \in A$.

Доказательство. Из неравенства Гельдера следует, что

$$\sum_{i=0}^\infty |\hat{f}(i)| = \sum_{i=0}^\infty |\hat{f}(i)| \alpha_i^{1/p} \alpha_i^{-1/p} \leq \left(\sum_{i=0}^\infty |\hat{f}(i)|^p \alpha_i \right)^{1/p} \left(\sum_{i=0}^\infty \alpha_i^{-p'/p} \right)^{1/p'} < \infty.$$

Лемма 2. Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ — последовательность, такая что каждое число λ_k равно некоторому корню степени p_k из единицы. Тогда существует элемент $x_0 \in G$, такой что $r_k(x_0) = \lambda_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Из определения r_1 видно, что $r_1(x) = \lambda_1$ на некотором смежном классе $y^{(1)} \oplus G_1$, где $\exp(2\pi i y_1^{(1)}/p_1) = \lambda_1$. Пусть $r_1(x) = \lambda_1, \dots, r_k(x) = \lambda_k$ на некотором смежном классе $y^{(k)} \oplus G_k$. Последний является объединением p_{k+1} смежного класса вида $z \oplus G_{k+1}$, причем в j -м классе z_{k+1} равно $j \in \{0, 1, \dots, p_{k+1} - 1\}$. Подбирая j со свойством $\exp(2\pi i j/p_{k+1}) = \lambda_{k+1}$, получаем смежный класс $y^{(k+1)} \oplus G_{k+1} \subset y^{(k)} \oplus G_k$, на котором $r_{k+1}(x) = \lambda_{k+1}$. Поскольку множества $y^{(k)} \oplus G_k$ вложены друг в друга и компактны, существует элемент x_0 , принадлежащий их пересечению. Очевидно, x_0 — искомый элемент. Лемма доказана.

Для последовательностей $a = \{a_i\}_{i=0}^\infty$, $b = \{b_i\}_{i=0}^\infty$ будем писать $a = b^\beta$, если $a_i = b_i^\beta$ для всех $i \in \mathbb{Z}_+$, $a \leq Cb$, если $a_i \leq Cb_i$ для всех $i \in \mathbb{Z}_+$, и $a \in l_\alpha^p$, если $|a|_{l_\alpha^p} := \left(\sum_{i=0}^\infty |a_i|^p \alpha_i \right)^{1/p} < \infty$. При $\alpha_k \equiv 1$ вместо l_α^p пишем l^p .

Лемма 3. Пусть $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, а последовательность $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$ такова, что

$$\sum_{k=0}^\infty \alpha_k^{-p'/p} < \infty \quad \left(\alpha^{-p'/p} \in l^1 \right) \tag{3}$$

и

$$\alpha^{-p'/p} * \alpha^{-p'/p} \leq C \alpha^{-p'/p}. \tag{4}$$

Тогда l_α^p является банаховой подалгеброй l^1 с \mathbf{R} -ичной сверткой в качестве умножения и $e = \{e_n\}_{n=0}^\infty$, где $e_0 = 1$, $e_n = 0$ при $n \in \mathbb{N}$, в качестве единицы.

Доказательство. Большинство свойств банаховой алгебры для l_α^p очевидны. Докажем, что для $a, b \in l_\alpha^p$ имеет место неравенство $|a * b|_{l_\alpha^p} \leq C_1 |a|_{l_\alpha^p} |b|_{l_\alpha^p}$. Пусть $c = a * b$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда по неравенству Гельдера

$$\begin{aligned} |c_n| &= \left| \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} a_i b_{n \ominus i} \right| = \left| \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} a_i b_{n \ominus i} \alpha_i^{1/p} \alpha_{n \ominus i}^{1/p} \alpha_i^{-1/p} \alpha_{n \ominus i}^{-1/p} \right| \leq \\ &\leq \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}_+} |a_i|^p \alpha_i |b_{n \ominus i}|^p \alpha_{n \ominus i} \right)^{1/p} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}_+} \alpha_i^{-p'/p} \alpha_{n \ominus i}^{-p'/p} \right)^{1/p'}. \end{aligned}$$

Поэтому согласно (4) (знак в (4) меняется при возведении в отрицательную степень)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} |c_n|^p \alpha_n \leq C_2 \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} |c_n|^p \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}_+} \alpha_i^{-p'/p} \alpha_{n \ominus i}^{-p'/p} \right)^{-p/p'} \leq$$



$$\leq C_2 \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} |a_i|^p \alpha_i |b_{n \ominus i}|^p \alpha_{n \ominus i} = C_2 \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} |a_i|^p \alpha_i \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} |b_{n \ominus i}|^p \alpha_{n \ominus i}.$$

Так как отображение $\varphi(i) = n \ominus i$ взаимно однозначно отображает \mathbb{Z}_+ на \mathbb{Z}_+ , то $\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} |b_{n \ominus i}|^p \alpha_{n \ominus i} = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} |b_n|^p \alpha_n$ и нужное неравенство доказано. Тот факт, что l_α^p — подалгебра l^1 , вытекает из (3) аналогично лемме 1. Лемма доказана.

Следствие 1. Множество A_α^p является банаховой алгеброй при $1 < p < \infty$ и α , удовлетворяющей условиям (3) и (4).

Лемма 4. Пусть $0 < p \leq 1$, $\alpha_n \geq 1$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$, и

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_n \alpha_i^{-1} \alpha_{n \ominus i}^{-1} \leq C, \quad n, i \in \mathbb{Z}_+. \quad (5)$$

Тогда A_α^p есть p -нормированная алгебра с p -нормой $\|f\| = \|f\|_{p, \alpha}^p$, с поточечным умножением и $e(x) = 1$ в качестве единицы.

Доказательство. Так как $\alpha_n \geq 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то для $f \in A_\alpha^p$, $0 < p \leq 1$, имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\hat{f}(i)| \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\hat{f}(i)|^p \right)^{1/p} \leq \|f\|_{p, \alpha} < \infty.$$

Значит, ряд Фурье $f \in A_\alpha^p$, $0 < p \leq 1$, сходится абсолютно. Пусть $f, g \in A_\alpha^p$, $0 < p \leq 1$. Тогда, согласно введению, $(fg)(n) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} \hat{f}(i) \hat{g}(n \ominus i)$ и поскольку $0 < p \leq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \|fg\| &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} |(fg)(n)|^p \alpha_n \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} |\hat{f}(i)|^p \alpha_i |\hat{g}(n \ominus i)|^p \alpha_{n \ominus i} \alpha_n \alpha_i^{-1} \alpha_{n \ominus i}^{-1} \leq \\ &\leq C_1 \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} |\hat{f}(i)|^p \alpha_i \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} |\hat{g}(n)|^p \alpha_n = C_1 \|f\| \|g\|. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пример. Пусть $\alpha_n = (n + 1)^\alpha$, где $\alpha \geq 0$ и $\mathbf{P} = \{p_i\}_{i=1}^\infty$ ограничена числом N сверху. Если $n \in [m_k, m_{k+1})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, то при $i \geq m_k$ имеем $\alpha_n \alpha_i^{-1} \leq N^\alpha$. В свою очередь, при $i < m_k$ отмечаем, что $n \ominus i \in [m_k, m_{k+1})$ и тогда $\alpha_n \alpha_{n \ominus i}^{-1} \leq N^\alpha$. Значит, для данной последовательности условие (5) выполнено.

Следующую лемму можно найти, например, в [2, гл. 11, теорема 11.4.15].

Лемма 5. Пусть элемент f принадлежит банаховой алгебре B и $\Phi(z)$ — комплекснозначная функция, аналитическая на некотором открытом множестве U , содержащем спектр $\sigma(f)$. Тогда существует элемент $g \in B$, такой что $\gamma(g) = \Phi(\gamma(f))$ для любого $\gamma \in \Gamma(B)$.

Аналогом леммы 5 для p -нормированных алгебр является лемма 6, доказанная в [4].

Лемма 6. Пусть B — коммутативная p -нормированная алгебра и U — открытое множество, содержащее спектр $\sigma(f)$ элемента $f \in B$. Если функция $\Phi(z)$ аналитична на U , то найдется элемент $g \in B$, такой что $\gamma(g) = \Phi(\gamma(f))$ для любого $\gamma \in \Gamma(B)$.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$ и последовательность $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ удовлетворяет условиям (3) и (4). Тогда любой гомоморфизм $\gamma \in \Gamma(A_\alpha^p)$ имеет вид $\gamma(f) = f(x_0)$, где $x_0 \in G$.

Доказательство. Рассмотрим действие $\gamma \in \Gamma(A_\alpha^p)$ на r_k , $k \in \mathbb{N}$. Поскольку $r_k^{p_k} \equiv 1$, то по определению гомоморфизма $\gamma(r_k)^{p_k} = \gamma(r_k^{p_k}) = \gamma(1) = 1$, т.е. $\gamma(r_k) = \lambda_k$, где λ_k — некоторый корень степени p_k из единицы. Согласно лемме 2 существует элемент $x_0 \in G$, такой что $r_k(x_0) = \lambda_k = \gamma(r_k)$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Отсюда по определению χ_n и гомоморфизма легко следует, что $\chi_n(x_0) = \gamma(\chi_n)$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Поскольку $A_\alpha^p \subset A$, то для любой функции $f \in A_\alpha^p$ имеем

$$f(x_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{f}(i) \chi_i(x_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{f}(i) \gamma(\chi_i) = \gamma \left(\sum_{i=0}^{\infty} \hat{f}(i) \chi_i \right) = \gamma(f).$$



Легко проверить, что $\gamma_{x_0}(f) = f(x_0)$ является непрерывным комплексным гомоморфизмом A_α^p для любого $x_0 \in G$. Теорема доказана.

Следствие 2 (аналог теоремы Винера). Пусть $f \in A_\alpha^p$, где $1 < p < \infty$ и α удовлетворяет условиям (3) и (4). Если $|f(x)| > 0$ на G , то $1/f \in A_\alpha^p$.

Доказательство. По теореме 11.4.10 из [2, гл. 11] элемент $f \in A_\alpha^p$ обратим в том и только том случае, когда для любого $\gamma \in \Gamma(A_\alpha^p)$ имеем $\gamma(f) \neq 0$. По теореме 1 это условие равносильно тому, что $f(x) \neq 0$ на G . Следствие доказано.

Следствие 3 (аналог теоремы Леви). Пусть $f \in A_\alpha^p$, где $1 < p < \infty$ и α удовлетворяет условиям (3) и (4). Если $\Phi(z)$ — комплекснозначная функция, аналитическая на открытом множестве, содержащем множество значений f , то $\Phi(f) \in A_\alpha^p$.

Доказательство. Из следствия 2 вытекает, что функция $f(x) - c_0$ обратима как элемент A_α^p тогда и только тогда, когда c_0 не является значением $f(x)$. Это означает, что в алгебре A_α^p спектр $\sigma(f)$ совпадает с множеством значений f . По лемме 4 найдем $g \in A_\alpha^p$, такую что $\gamma(g) = \Phi(\gamma(f))$ для всех $\gamma \in \Gamma(A_\alpha^p)$. По теореме 1 это означает, что $g(x) = \Phi(f(x))$ для всех $x \in G$. Следствие доказано.

Аналогично теореме 1 доказывается

Теорема 2. Пусть $0 < p \leq 1$, последовательность α удовлетворяет условию (5) и $\gamma \in \Gamma(A_\alpha^p)$. Тогда существует элемент $x_0 \in G$, такой что $\gamma(f) = f(x_0)$. Обратно, для любого $x_0 \in G$ формула $\gamma_{x_0}(f) = f(x_0)$ задает комплексный непрерывный гомоморфизм на алгебре A_α^p .

В доказательстве снова используется включение $A_\alpha^p \subset A$, полученное при доказательстве леммы 4.

Следствие 4. Пусть $0 < p \leq 1$, последовательность α удовлетворяет условию (5) и $f \in A_\alpha^p$. Если $\Phi(z)$ — аналитическая функция на открытом множестве U , содержащем множество значений f , то $\Phi(f) \in A_\alpha^p$.

Доказательство. Согласно лемме 4 в условиях данного следствия множество A_α^p является p -нормированной алгеброй. По определению спектра в p -нормированной алгебре функция $\Phi(z)$ аналитична на открытом множестве, содержащем $\sigma(f)$. По лемме 6 найдем $g \in A_\alpha^p$, такую что $\gamma(g) = \Phi(\gamma(f))$ для всех $\gamma \in \Gamma(A_\alpha^p)$. По теореме 2 отсюда выводим, что $g(x) = \Phi(f(x))$ для всех $x \in G$. Следствие доказано.

Следствие 5. Пусть $f \in L^1(G)$, $0 < p \leq 1$ и $\sum_{i \in \mathbb{Z}_+} |\hat{f}(i)|^p < \infty$, причем $|f(x)| > 0$ для всех $x \in G$. Тогда для $g = 1/f$ справедливо неравенство

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}_+} |\hat{g}(i)|^p < \infty.$$

Как отмечалось ранее, при $p = 1$ и $p_i \equiv 2$ следствие 4 было установлено Г.Н. Агаевым [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270-а) и гранта Президента по государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

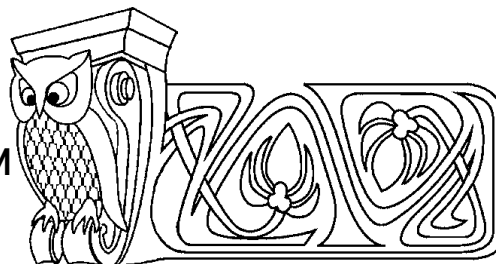
Библиографический список

1. Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981. 180 с.
2. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении: в 2 т. М.: Мир, 1985. Т. 2. 400 с.
3. Zelazko W. On the locally bounded and m -convex topological algebras // Studia Math. 1960. Vol. 19, № 3. P. 333–356.
4. Zelazko W. On the analytic functions in p -normed algebras // Studia Math. 1962. Vol. 21, № 3. P. 345–350.
5. El Kinani A. A version of Wiener's and Levy's theorems // Rend. Circ. Mat. Palermo. 2008. Vol. 57, № 2. P. 343–352.
6. Alpar L. Généralisation d'un théoreme de Wiener et de Lévy // Acta Math. Hung. 1970. Vol. 21, № 1–2. P. 11–19.
7. Агаев Г. Н. Теорема типа Винера для рядов по функциям Уолша // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142, № 4. С. 751–753.



УДК 517.977

ОБ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫМИ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ КВАДРАТИЧНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ



И. В. Гребенникова, А. Г. Кремлев

Уральский федеральный университет, Екатеринбург,
кафедра прикладной математики
E-mail: giv001@usla.ru

Рассматривается задача управления по минимаксному критерию для сингулярно возмущенной системы с запаздыванием при неопределенных начальных условиях и интегральных квадратичных ограничениях на ресурсы управления. Предлагается итерационная процедура построения управляющего воздействия, аппроксимирующего оптимальное решение с заданной степенью точности относительно малого положительного параметра.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система с запаздыванием, оптимальное управление, фундаментальная матрица.

On Iterative Method of Constructing Optimal Control
for Singularly Perturbed Systems with Delay
with Quadratic Constraints

I. V. Grebennikova, A. G. Kremlev

Ural Federal University, Ekaterinburg,
Chair of Applied Mathematics
E-mail: giv001@usla.ru

The control problem for the singularly perturbed system with delay with indeterminate initial conditions and integral quadratic constraints on the control resources according to the minimax criterion is considered. Iterative procedure of constructing control response that approximates the optimal solution with given accuracy with respect to a small positive parameter is proposed.

Key words: singularly perturbed system with delay, optimal control, fundamental matrix.

ВВЕДЕНИЕ

Математическими моделями многих динамических процессов являются сингулярно возмущенные системы (с малым параметром при части производных) с запаздыванием (по состоянию). Решение задач оптимизации для таких объектов основывается на различных асимптотических представлениях их траекторий. Наиболее часто используемые подходы — декомпозиция краевой задачи (полученной из принципа максимума) на основе метода пограничных функций. В последние годы много работ посвящено проблемам оптимального управления такими системами (см. обзоры [1–3]). Зависимость текущей скорости изменения выходных переменных системы от их значений в предшествующие моменты времени приводит к моделям, которые описываются дифференциальными уравнениями с последствием [4].

В данной работе рассматривается задача управления по минимаксному критерию в постановке [5, 6] для сингулярно возмущенных систем с запаздыванием при неопределенных начальных условиях и интегральных квадратичных ограничениях на управляющие воздействия. Терминальный функционал качества зависит как от быстрых, так и от медленных переменных. В основе предлагаемого метода лежит идея представления фундаментальной матрицы решений, разбитой на блоки в соответствии с размерностями быстрых и медленных переменных, в виде равномерно сходящейся последовательности [7]. При реализации метода используются результаты исследований [5–11], а также аппарат выпуклого анализа [12]. Оптимальное решение аппроксимируется с любой заданной точностью (относительного малого параметра), при этом не требуется чрезмерных условий гладкости (дифференцируемость не выше первого порядка), ограничений на класс допустимых управлений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается управляемая сингулярно возмущенная система (с малым параметром $\mu > 0$ при части производных) с запаздыванием $h > 0$ (по состоянию):

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + G_1(t)x(t-h) + B_1(t,\mu)u(t), \\ \mu dy(t)/dt &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t) + G_2(t)x(t-h) + B_2(t,\mu)u(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$, $x \in R^n$, $y \in R^m$, A_{ij} , B_i , G_i , $i, j = 1, 2$, — матрицы соответствующих размеров с непрерывными элементами. Начальное состояние системы $x(t) = \psi(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $x(t_0) = x_0$,



$y(t_0) = y_0$ точно неизвестно и заданы лишь ограничения $x_0 \in X_0, y_0 \in Y_0$, где X_0, Y_0 — выпуклые компакты в соответствующих пространствах, $\psi(t) \in \Psi(t), t_0 - h \leq t < t_0, \Psi(t)$ — заданное многозначное отображение со значениями в виде выпуклых компактов (в R^n), непрерывное по t в метрике Хаусдорфа. Реализации управления $u(t), t \in T$ — измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие условию $u(\cdot) \in P, P$ — слабокомпактное выпуклое множество в $L_2^r(T)$. В данном случае

$$P = \left\{ u(\cdot) \left| \int_{t_0}^{t_1} u'(t)R(t)u(t) dt \leq \lambda^2 \right. \right\}, \quad \lambda = \text{const} > 0,$$

$R(t)$ — симметричная, положительно определенная матрица с непрерывными элементами, штрих — знак транспонирования. Считаем выполненным следующее предположение.

Предположение 1. Собственные значения $\lambda_s(t)$ матрицы $A_{22}(t)$ удовлетворяют неравенству: $\text{Re } \lambda_s(t) < -2c < 0$ при $t \in T, c = \text{const} > 0$.

Тогда [13, с. 69] при достаточно малых μ ($0 < \mu \leq \mu_0$) фундаментальная матрица решений $Y[t, \tau]$ системы $\mu dy/dt = A_{22}(t)y, Y[\tau, \tau] = E_m, E_m$ — единичная матрица $m \times m$, при $t_0 \leq \tau \leq t \leq t_1$ имеет оценку

$$\|Y[t, \tau]\| \leq c_0 \exp\{-c(t - \tau)/\mu\}, \quad (2)$$

$c_0 > 0$ — некоторая постоянная, $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Пусть $Z[t, \tau]$ — фундаментальная матрица решений системы (1) (при $u \equiv 0$), причем $Z[\tau, \tau] = E_{n+m}$. Матрицу $Z[t, \tau]$ представим в следующем блочном виде:

$$Z[t, \tau] = \begin{pmatrix} Z_{11}[t, \tau] & Z_{12}[t, \tau] \\ Z_{21}[t, \tau] & Z_{22}[t, \tau] \end{pmatrix},$$

здесь $Z_{11}[t, \tau], Z_{12}[t, \tau], Z_{21}[t, \tau], Z_{22}[t, \tau]$ — матрицы с размерами соответственно $n \times n, n \times m, m \times n, m \times m$.

Введем следующие обозначения: $z' = (x', y')$, $Z_0 = X_0 \times Y_0, Z(t, u(\cdot), Z_0, \psi(\cdot)), t_0 \leq t \leq t_1$, — множество (ансамбль) траекторий $z(t, u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$ системы (1), исходящих из Z_0 , при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$. Определим функционал $J(\cdot)$:

$$J(u(\cdot)) = \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))),$$

где $\varphi(\cdot) : R^{n+m} \rightarrow R$ — заданная выпуклая функция (с конечными значениями).

Задача 1. Среди управлений $u(\cdot) \in P$ найти оптимальное $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее минимум функционалу J на множестве P : $\varepsilon^0(t_1) = J(u^0) = \min_{u(\cdot) \in P} J(u(\cdot))$.

Запишем систему (1) в виде

$$dz(t)/dt = A(t, \mu)z(t) + G(t, \mu)z(t - h) + B(t, \mu)u(t),$$

где матрицы $A(t, \mu), B(t, \mu), G(t, \mu)$ имеют следующий блочный вид:

$$A(t, \mu) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t)/\mu & A_{22}(t)/\mu \end{pmatrix}, \quad B(t, \mu) = \begin{pmatrix} B_1(t, \mu) \\ B_2(t, \mu)/\mu \end{pmatrix}, \quad G(t, \mu) = \begin{pmatrix} G_1(t) & 0 \\ G_2(t)/\mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 1 описывается следующими соотношениями (используя [6]):

$$\begin{aligned} \varepsilon^0(t_1) &= \min_{u(\cdot) \in P} \max_{l \in R^{n+m}} \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \{l' z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot)) - \varphi^*(l)\} = \\ &= \max\{\chi^0(l, \mu) \mid l \in R^{n+m}\} = \chi^0(l^0, \mu), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\chi^0(l, \mu) = -h^{**}(l) - \rho(-r(\cdot; t_1, l, \mu) \mid P),$$

$$\begin{aligned} h(l) &= \varphi^*(l) - \rho(l'Z[t_1, t_0] \mid Z_0) - \int_{t_0}^{t_0+h} \rho((p'Z_{11}[t, \tau] + q'Z_{21}[t, \tau])G_1(\tau) + \\ &\quad + (1/\mu)(p'Z_{12}[t, \tau] + q'Z_{22}[t, \tau])G_2(\tau) \mid \Psi(\tau - h))d\tau, \end{aligned}$$

$$r(\tau; t, l, \mu) = (p'Z_{11}[t, \tau] + q'Z_{21}[t, \tau])B_1(\tau, \mu) + (1/\mu)(p'Z_{12}[t, \tau] + q'Z_{22}[t, \tau])B_2(\tau, \mu),$$



где $l' = (p', q')$, $p \in R^n$, $q \in R^m$; $\varphi^*(l)$ — функция, сопряженная к $\varphi(z)$ [12]; $h^{**}(l) = \overline{(co h)}(l)$ — замыкание выпуклой оболочки функции $h(l)$ [12]; $\rho(s|X)$ — опорная функция множества X на элементе s . Оптимальное управление $u^0(\cdot, \mu)$ удовлетворяет условию минимума:

$$\min_{u(\cdot) \in P} \int_{t_0}^{t_1} r(\tau; t_1, l^0, \mu) u(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_1} r(\tau; t_1, l^0, \mu) u^0(\tau, \mu) d\tau. \quad (4)$$

Полученные $u^0(\cdot, \mu)$, l^0 , $\varepsilon^0(t_1)$ зависят от параметра μ . Однако эти величины при $\mu \rightarrow +0$ могут не сходиться [9] к соответствующим решениям задачи 1 для вырожденной системы (полученной из исходной при $\mu = 0$). Поэтому важным представляется построить аппроксимацию оптимального управления $u^0(\cdot, \mu)$, доставляющую оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1) = J(u^0(\cdot, \mu))$ с заданной точностью (относительно μ). В данной работе в основе предложенного способа определения требуемых приближений лежит возможность представления блоков $Z_{ij}[t, \tau; \mu]$ ($i, j = 1, 2$) в виде пределов равномерно сходящихся на $[t_0, t_1]$ последовательностей при ($0 < \mu \leq \mu_0$, μ_0 достаточно мало) $Z_{ij}^{(k)}[t, \tau; \mu]$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Прежде всего проведем исследование для случая $B_1(t, \mu) = B_1(t)$, $B_2(t, \mu) = \sqrt{\mu} B_2(t)$. Другие варианты обсудим уже на основе полученных результатов. При указанных условиях вырожденная система, полученная из (1), при $\mu = 0$ имеет вид

$$dx(t)/dt = A_0(t)x(t) + G_0(t)x(t-h) + B_1(t)u(t), \quad (5)$$

$$y(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)x(t) - A_{22}^{-1}(t)G_2(t)x(t-h), \quad (6)$$

где $t \in T$, $A_0(t) = A_{11}(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)$, $G_0(t) = G_1(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)G_2(t)$.

Обозначим через $Z_0(t, u(\cdot), X_0, \psi(\cdot))$, $t_0 \leq t \leq t_1$ — множество (ансамбль) траекторий $z_0(t, u(\cdot), x_0, \psi(\cdot))$ системы (5), (6), исходящих из X_0 , при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$, через $X[t, \tau]$ — фундаментальную матрицу решений системы (5), (при $u \equiv 0$), причем $X[\tau, \tau] = E_n$, $X[t, \tau] = 0$ при $\tau > t$.

В работе [7] приведены оценки для блоков $Z_{ij}[t, \tau]$ ($i, j = 1, 2$), причем последние могут быть представлены в виде пределов равномерно сходящихся на T последовательностей (при $0 < \mu \leq \mu_0$, μ_0 достаточно мало):

$$\begin{aligned} Z_{11}^{(k+1)}[t, \tau] &= X[t, \tau] - \int_{\tau}^t (dZ_{12}^{(0)}[t, s]/ds) A_{22}^{-1}(s) (A_{21}(s) Z_{11}^{(k)}[s, \tau] + G_2(s) Z_{11}^{(k)}[s-h, \tau]) ds, \\ Z_{22}^{(k+1)}[t, \tau] &= Y[t, \tau] + \int_{\tau}^t Z_{21}^{(k)}[t, s] A_{12}(s) Y[s, \tau] ds, \quad Z_{12}^{(k)}[t, \tau] = \int_{\tau}^t Z_{11}^{(k)}[t, s] A_{12}(s) Y[s, \tau] ds, \\ Z_{21}^{(k)}[t, \tau] &= (1/\mu) \int_{\tau}^t Y[t, s] (A_{21}(s) Z_{11}^{(k)}[s, \tau] + G_2(s) Z_{11}^{(k)}[s-h, \tau]) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

причем $Z_{11}^{(0)}[t, \tau] = X[t, \tau]$, $Z_{22}^{(0)}[t, \tau] = Y[t, \tau]$.

Для задачи 1 соотношение (3) можно представить, используя [14], в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0(t_1) &= \min_{u(\cdot) \in P} \max_{p, q} \{ \rho(p' Z_{11}[t_1, t_0] + q' Z_{21}[t_1, t_0] | X_0) + \rho(p' Z_{12}[t_1, t_0] + q' Z_{22}[t_1, t_0] | Y_0) + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} [(p' Z_{11}[t_1, \tau] + q' Z_{21}[t_1, \tau]) B_0(\tau, \mu) + (1/\mu) q' Y[t_1, \tau] B_2(\tau, \mu) - \xi(\tau, t_1, p, q) A_{22}^{-1}(\tau) B_2(\tau, \mu)] u(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+h} \rho((p' Z_{11}[t_1, \tau] + q' Z_{21}[t_1, \tau]) G_0(\tau) - \tilde{\xi}(\tau, t_1, p, q) A_{22}^{-1}(\tau) G_2(\tau) | \Psi(\tau-h)) d\tau - \varphi^*(p, q) \}, \quad (7) \end{aligned}$$



где $B_0(t, \mu) = B_1(t, \mu) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)B_2(t, \mu)$, $\xi(\tau, t_1, p, q) = \frac{d}{d\tau}[p'Z_{12}[t_1, \tau] + (1/\mu) \int_{\tau}^{t_1} q'Y[t_1, s]A_{21}(s) \times$
 $\times Z_{12}[s, \tau] ds]$, $\tilde{\xi}(\tau, t_1, p, q) = \frac{d}{d\tau}[p'Z_{12}[t_1, \tau] + (1/\mu) \int_{\tau}^{t_0+h} q'Y[t_1, s]A_{21}(s)Z_{12}[s, \tau] ds]$.

На основании теоремы А. Лебега [15, с. 259] при $0 < \mu \leq \mu_0$, μ_0 достаточно мало, для любых $u(\cdot) \in P(\cdot)$, $p \in R^n$, $q \in R^m$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(\tilde{\xi}(\tau, t_1, p, q)A_{22}^{-1}(\tau)G_2(\tau)|\Psi(\tau - h))d\tau \right\| &\leq \omega(\mu)[\|p\| + N_2 \|q\|], \\ \left\| \int_{t_0}^{t_1} \xi(\tau, t_1, p, q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau, \mu)u(\tau)d\tau \right\| &\leq \omega(\mu)[\|p\| + N_1 \|q\|], \end{aligned} \quad (8)$$

где $\omega(\mu) = o(1)$; $N_1, N_2 > 0$ — некоторые постоянные.

2. АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Используя последовательности $Z_{ij}^{(k)}[t, \tau, \mu]$, $i, j = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, \dots$, можно аппроксимировать решение задачи 1 с любой заданной точностью (относительно μ , $0 < \mu \leq \mu_0$). Будем предполагать, что элементы матриц $A_{12}(\tau)$, $A_{22}^{-1}(\tau)$ имеют на T ограниченные производные. Построим управляющее воздействие $u_{\mu}^{(k)}(\cdot)$, доставляющее оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1)$ с точностью $o(\mu^k)$.

Из (7) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon^0(t_1) = \min_{u(\cdot) \in P} \max_{p, q} \{ &\rho[p'Z_{11}^{(k)}[t_1, t_0] + q'Z_{21}^{(k)}[t_1, t_0] + \xi_1^{(k)}(t_0, t_1, p, q)|X_0] + \rho[p'Z_{12}^{(k)}[t_1, t_0] + \\ &+ q'Z_{22}^{(k)}[t_1, t_0] + \xi_2^{(k)}(t_0, t_1, p, q)|Y_0] + \int_{t_0}^{t_1} r^{(k)}(\tau, t_1, p, q)u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(r_h^{(k)}(\tau, t_1, p, q)|\Psi(\tau - h))d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} [\xi_1^{(k)}(\tau, t_1, p, q)B_0(\tau, \mu) + \xi^{(k)}(\tau, t_1, p, q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau, \mu)]u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(\xi_1^{(k)}(\tau, t_1, p, q)G_0(\tau) + \\ &+ \tilde{\xi}^{(k)}(\tau, t_1, p, q)A_{22}^{-1}(\tau)G_2(\tau)|\Psi(\tau - h))d\tau - \varphi^*(p, q)\}, \quad p \in R^n, \quad q \in R^m, \end{aligned} \quad (9)$$

где обозначены:

$$\begin{aligned} \xi_i^{(k)}(\tau, t, p, q) &= p'(Z_{1i}[t, \tau] - Z_{1i}^{(k)}[t, \tau]) + q'(Z_{2i}[t, \tau] - Z_{2i}^{(k)}[t, \tau]), \quad i = 1, 2, \\ \xi^{(k)}(\tau, t, p, q) &= -p' \frac{d}{d\tau}(Z_{12}[t, \tau] - Z_{12}^{(k-1)}[t, \tau]) - \frac{1}{\mu} \int_{\tau}^t q'Y[t, s]A_{21}(s) \frac{d}{d\tau}(Z_{12}[s, \tau] - Z_{12}^{(k-1)}[s, \tau]) ds, \\ \tilde{\xi}^{(k)}(\tau, t, p, q) &= -p' \frac{d}{d\tau}(Z_{12}[t, \tau] - Z_{12}^{(k-1)}[t, \tau]) - \frac{1}{\mu} \int_{\tau}^{t_0+h} q'Y[t, s]A_{21}(s) \frac{d}{d\tau}(Z_{12}[s, \tau] - Z_{12}^{(k-1)}[s, \tau]) ds, \\ r^{(k)}(\tau, t, p, q) &= (p'Z_{11}^{(k)}[t, \tau] + q'Z_{21}^{(k)}[t, \tau])B_0(\tau, \mu) + (1/\mu)q'Y[t, \tau]B_2(\tau, \mu) - \\ &- \frac{d}{d\tau}[p'Z_{12}^{(k-1)}[t, \tau] + \frac{1}{\mu} \int_{\tau}^t q'Y[t, s]A_{21}(s)Z_{12}^{(k-1)}[s, \tau] ds]A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau, \mu), \\ r_h^{(k)}(\tau, t, p, q) &= (p'Z_{11}^{(k)}[t, \tau] + q'Z_{21}^{(k)}[t, \tau])G_0(\tau) - \frac{d}{d\tau}(p'Z_{12}^{(k-1)}[t, \tau] + \\ &+ \frac{1}{\mu} \int_{\tau}^{t_0+h} q'Y[t, s]A_{21}(s)Z_{12}^{(k-1)}[s, \tau] ds)A_{22}^{-1}(\tau)G_2(\tau). \end{aligned} \quad (10)$$

Используя оценку (12) из работы [7] и оценки (8), получим следующий результат.



Лемма 1. *Существуют такие достаточно малое число $\mu_0 > 0$ и постоянная $N > 0$, что для любых $t_0 \leq \tau \leq t_1$, $p \in R^n$, $q \in R^m$, $0 < \mu \leq \mu_0$ справедливы неравенства:*

$$\| \text{left} \| \frac{d}{d\tau} (Z_{12}[t, \tau] - Z_{12}^{(k-1)}[t, \tau]) \leq \mu^{k+1} N^{k+2} (c_0/c) (1 - e^{-c(t-\tau)/\mu}),$$

$$\| \xi_i^{(k)}(\tau, t, p, q) \| \leq \mu^{k+1} N^{k+2} (\|p\| + \|q\| (c_0/c) (1 - e^{-c(t-\tau)/\mu})), \quad i = 1, 2.$$

В (3) имеем

$$\chi^0(l) = -h^{**}(l) - \lambda(\sigma^0(l; \mu))^{1/2}, \tag{12}$$

$$\sigma^0(l, \mu) = \int_{t_0}^{t_1} l' Z[t_1, \tau; \mu] B(\tau, \mu) R^{-1}(\tau) B'(\tau, \mu) Z'[t_1, \tau; \mu] l d\tau.$$

Из (9) получим (с учетом введенных обозначений (10), (11)) следующие представления для $\sigma^0(l; \mu)$ и $h(l)$ в (12):

$$\begin{aligned} \sigma^0(l; \mu) = & \int_{t_0}^{t_1 - \alpha_0(\mu)} r^{(k)}(\tau, t_1, p, q; \mu) R^{-1}(\tau) r^{(k)'}(\tau, t_1, p, q; \mu) d\tau + \hat{\xi}_1(l, \mu) + \\ & + \frac{1}{\mu} \left(\int_0^{\alpha_0(\mu)/\mu} \hat{r}^{(k)}(s, t_1, p, q; \mu) R^{-1}(t_1 - \mu s) \hat{r}^{(k)'}(s, t_1, p, q; \mu) ds + \mu \hat{\xi}_2(l, \mu) \right), \end{aligned} \tag{13}$$

где $\alpha_0 = \alpha_0(\mu) \in R$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_0 \rightarrow 0$, $\alpha_0/\mu \rightarrow +\infty$ при $\mu \rightarrow +0$, $h(l) = h_{(k)}(p, q) + \hat{\xi}_3(l, \mu)$,

$$\begin{aligned} h_{(k)}(p, q) = & \varphi^*(p, q) - \rho[p' Z_{11}^{(k)}[t_1, t_0] + q' Z_{21}^{(k)}[t_1, t_0] | X_0] - \\ & - \rho[p' Z_{12}^{(k)}[t_1, t_0] + q' Z_{22}^{(k)}[t_1, t_0] | Y_0] - \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(r_h^{(k)}(\tau, t_1, p, q) | \Psi(\tau - h)) d\tau, \end{aligned}$$

где $\hat{r}^{(k)}(s, t_1, p, q; \mu) = \mu r^{(k)}(t_1 - \mu s, t_1, p, q; \mu)$, $0 \leq s \leq \alpha_0(\mu)/\mu$, $\hat{\xi}_i(l, \mu)$, $i = 1, 2, 3$, имеют по μ порядок малости $O(\mu^{k+1})$ при $0 < \mu \leq \mu_0$.

Так как мы проводим исследование для случая $B_1(t, \mu) = B_1(t)$, $B_2(t, \mu) = \sqrt{\mu} B_2(t)$, то при указанных условиях из (13) получим $\sigma^0(l; \mu) = \sigma_k(p, q) + \hat{\xi}(l; \mu)$, причем $|\hat{\xi}(l; \mu)| \leq \|l\| \hat{\omega}(\mu)$, $\hat{\omega}(\mu) = o(\mu^k)$ при $0 < \mu \leq \mu_0$,

$$\begin{aligned} \sigma_k(p, q) = & \int_{t_0}^{t_1 - \alpha_0(\mu)} r_1^{(k)}(\tau, t_1, p, q; \mu) R^{-1}(\tau) r_1^{(k)'}(\tau, t_1, p, q; \mu) d\tau + \\ & + \int_0^{\alpha_0(\mu)/\mu} r_2^{(k)}(s, t_1, p, q; \mu) R^{-1}(t_1 - \mu s) r_2^{(k)'}(s, t_1, p, q; \mu) ds, \end{aligned} \tag{14}$$

здесь функции $r_i^{(k)}(\tau, t_1, p, q; \mu)$, $i = 1, 2$, суть

$$\begin{aligned} r_1^{(k)}(\tau, t_1, p, q) = & (p' Z_{11}^{(k)}[t_1, \tau] + q' Z_{21}^{(k)}[t_1, \tau]) B_0(\tau, \mu) + \frac{1}{\sqrt{\mu}} q' Y[t_1, \tau] B_2(\tau) - \\ & - \sqrt{\mu} \frac{d}{d\tau} [p' Z_{12}^{(k-1)}[t_1, \tau] + \frac{1}{\mu} \int_{\tau}^{t_1} q' Y[t_1, \sigma] A_{21}(\sigma) Z_{12}^{(k-1)}[\sigma, \tau] d\sigma] A_{22}^{-1}(\tau) B_2(\tau), \\ r_2^{(k)}(s, t_1, p, q) = & \sqrt{\mu} r_1^{(k)}(t_1 - \mu s, t_1, p, q), \quad 0 \leq s < \alpha_0(\mu)/\mu, \end{aligned}$$

причем $B_0(\tau, \mu) = B_1(\tau) - \sqrt{\mu} A_{12}(\tau) A_{22}^{-1}(\tau) B_2(\tau)$.

Таким образом, из представлений (13), (14) получаем следующий результат.



Теорема 1. При $0 < \mu \leq \mu_0$, μ_0 достаточно мало, для любых $p \in R^n$, $q \in R^m$ выполняются соотношения:

$$\chi^0(p, q) = \chi^{(k)}(p, q) + \widehat{\xi}_k(p, q),$$

причем $|\widehat{\xi}_k(p, q)| \leq \|l\| \widehat{\omega}_k(\mu)$, $\widehat{\omega}_k(\mu) = O(\mu^{k+1})$,

$$\varepsilon^0(t_1) = \varepsilon^{(k)}(t_1) + O(\mu^{k+1}), \quad (15)$$

$$\chi^{(k)}(p, q) = -h_{(k)}^{**}(p, q) - \lambda(\sigma_k(p^{(k)}, q^{(k)}))^{1/2},$$

$$\varepsilon^{(k)}(t_1) = \max\{\chi^{(k)}(p, q) | p \in R^n, q \in R^m\} = \chi^{(k)}(p^{(k)}, q^{(k)}). \quad (16)$$

Предположение 2. (i) Система (5) относительно управляема [16] на T .

(ii) Для любого $t \in T$ $\text{rank}\{B_2(t_1), A_{22}(t_1)B_2(t_1), \dots, A_{22}^{m-1}(t_1)B_2(t_1)\} = m$.

(iii) Максимум в (16) достигается на векторе $(l^{(k)})' = (p^{(k)'}, q^{(k)'})$ таком, что $r_1^{(k)}(\tau, t_1, p^{(k)}, q^{(k)}) \neq 0$, $q^{(k)} \neq 0$.

Следует заметить, что в условиях предположения 2 задача 1 разрешима [5, с. 110; 6, с. 76], т. е. существует управление $u^0(\cdot) \in P(\cdot)$, удовлетворяющее (4) при $0 < \mu \leq \mu_0$, причем вектор $(l^0)' = (p^0', q^0')$, максимизирующий (3), отличен от нулевого.

Теорема 2. Пусть выполнено предположение 2. Тогда при $0 < \mu \leq \mu_0$, μ_0 достаточно мало, управляющее воздействие

$$u_\mu^{(k)}(\tau) = \begin{cases} u^{(k)}(\tau), & t_0 \leq \tau \leq t_1 - \alpha_0(\mu), \\ (1/\sqrt{\mu})v^{(k)}((t_1 - \tau)/\mu), & t_1 - \alpha_0(\mu) < \tau \leq t_1, \end{cases}$$

доставляет оценку $\varepsilon^0(t_1)$ с точностью $O(\mu^{k+1})$:

$$\varepsilon^0(t_1) = J(u^0(\cdot)) = J(u_\mu^{(k)}(\cdot)) + O(\mu^{k+1}), \quad (17)$$

причем $u^{(k)}(\cdot)$, $v^{(k)}(\cdot)$ определяются условиями:

$$\begin{aligned} u^{(k)}(\tau) &= -\lambda R^{-1}(\tau) r_1^{(k)}(\tau, t_1, p^{(k)}, q^{(k)}) (\sigma_k(p^{(k)}, q^{(k)}))^{-1/2}, & \tau \in [t_0, t_1 - \alpha_0(\mu)], \\ v^{(k)}(s) &= -\lambda R^{-1}(t_1 - \mu s) r_2^{(k)}(s, t_1, p^{(k)}, q^{(k)}) (\sigma_k(p^{(k)}, q^{(k)}))^{-1/2}, & s \in [0, \alpha_0(\mu)/\mu]. \end{aligned}$$

Доказательство. Утверждение вытекает из свойств функции

$$L_{(k)}(p, q; u(\cdot), v(\cdot)) = -h_{(k)}^{**}(p, q) + \int_{t_0}^{t_1 - \alpha_0(\mu)} r_1^{(k)}(\tau, t_1, p, q; \mu) u(\tau) d\tau + \int_0^{\alpha_0(\mu)/\mu} r_2^{(k)}(s, t_1, p, q; \mu) v(s) ds,$$

при $(u(\cdot), v(\cdot)) \in P^{(k)}$, где $P^{(k)}$ определяется условием

$$\int_{t_0}^{t_1 - \alpha_0(\mu)} u'(\tau) R(\tau) u(\tau) d\tau + \int_0^{\alpha_0(\mu)/\mu} v'(s) R(t_1 - \mu s) v(s) ds \leq \lambda^2,$$

а именно элементы $p^{(k)}$, $q^{(k)}$, $u^{(k)}(\cdot)$, $v^{(k)}(\cdot)$ определяют седловую точку $L_{(k)}(p, q; u(\cdot), v(\cdot))$, т. е. для $p \in R^n$, $q \in R^m$, $u \in P(\cdot)$, $v \in V(\cdot)$:

$$L_{(k)}(p, q; u^{(k)}(\cdot), v^{(k)}(\cdot)) \leq L_{(k)}(p^{(k)}, q^{(k)}; u^{(k)}(\cdot), v^{(k)}(\cdot)) \leq L_{(k)}(p^{(k)}, q^{(k)}; u(\cdot), v(\cdot)),$$

причем (пользуясь (16))

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(k)}(t_1) &= \min_{u(\cdot), v(\cdot)} \max_{p, q} L_{(k)}(p, q; u(\cdot), v(\cdot)) = \max_{p, q} \min_{u(\cdot), v(\cdot)} L_{(k)}(p, q; u(\cdot), v(\cdot)) = \\ &= L_{(k)}(p^{(k)}, q^{(k)}; u^{(k)}(\cdot), v^{(k)}(\cdot)), \quad p \in R^n, q \in R^m, u \in P(\cdot), v \in V(\cdot). \end{aligned}$$

Тогда получим

$$J(u_\mu^{(k)}(\cdot)) = \max_{p \in R^n, q \in R^m} \{L_{(k)}(p, q; u^{(k)}(\cdot), v^{(k)}(\cdot)) + \widehat{\xi}_k(p, q; \mu)\}, \quad (18)$$



где $\hat{\xi}_k(p, q; \mu)$ имеет такой же порядок малости по μ ($0 < \mu \leq \mu_0$), как в (15), и максимум в (18) достигается на некотором векторе $\hat{l} \in \text{co } M^{(k)}$, здесь $M^{(k)} = \{l \in R^{n+m} | l \in \partial\varphi(z), z \in Z(t_1; u_\mu^{(k)}(\cdot), Z_0), \varphi(z) = J(u_\mu^{(k)}(\cdot))\}$, $\partial\varphi(z)$ — субдифференциал функции φ в точке z [12], $\text{co } M^{(k)}$ — выпуклая оболочка $M^{(k)}$ (в данном случае $M^{(k)}$ компакт в R^{n+m}). Таким образом, имеем

$$J(u_\mu^{(k)}(\cdot)) = \varepsilon^{(k)}(t_1) + O(\mu^{k+1})$$

при ($0 < \mu \leq \mu_0$), и, следовательно, справедливо равенство (17). Теорема доказана.

Обсудим теперь другие возможные варианты разложений (по параметру μ) коэффициентов системы (1).

1. Рассмотрим случай $B_1(t, \mu) = B_1(t)$, $B_2(t, \mu) = \sigma(\mu)B_2(t)$, $\sigma(\mu) = o(1)$, $\sigma(\mu)/\sqrt{\mu} \rightarrow +\infty$. Здесь уже могут нарушаться условия регулярности [6], поскольку имеется «излишек» ресурсов управления по быстрой переменной. В этом случае вектор $\|q^0\| = o(\sqrt{\mu}/\sigma(\mu))$, $0 < \mu \leq \mu_0$. Тогда из (13) получим $\sigma^0(l; \mu) = \sigma_k(p, q; \mu) + \hat{\xi}(l; \mu)$, где $\sigma_k(p, q; \mu)$ представимо в виде (14), причем

$$\begin{aligned} B_0(\tau, \mu) &= B_1(\tau) - \sigma(\mu)A_{12}(\tau)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau), \\ r_1^{(k)}(\tau, t_1, p, q) &= (p'Z_{11}^{(k)}[t_1, \tau] + \frac{\sqrt{\mu}}{\sigma(\mu)}\hat{q}'Z_{21}^{(k)}[t_1, \tau])B_0(\tau, \mu) + \frac{1}{\sqrt{\mu}}\hat{q}'Y[t_1, \tau]B_2(\tau) - \\ &- \frac{d}{d\tau}[\sigma(\mu)p'Z_{12}^{(k-1)}[t_1, \tau] + \frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_{\tau}^{t_1}\hat{q}'Y[t_1, \sigma]A_{21}(\sigma)Z_{12}^{(k-1)}[\sigma, \tau]d\sigma]A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau), \\ r_2^{(k)}(s, t_1, p, q) &= \sqrt{\mu}r_1^{(k)}(t_1 - \mu s, t_1, p, q), \quad 0 \leq s < \alpha_0(\mu)/\mu, \end{aligned} \quad (19)$$

$\hat{\xi}(l; \mu)$ имеет по μ порядок малости $O(\mu^{k+1})$ при $0 < \mu \leq \mu_0$; здесь q ищем в виде $q = (\sqrt{\mu}/\sigma(\mu))\hat{q}$. Тогда справедлива теорема 2 с $r_i^{(k)}(\tau, t_1, p, q; \mu)$, $i = 1, 2$, определяемыми (19).

2. Рассмотрим случай $B_1(t, \mu) = B_1(t)$, $B_2(t, \mu) = B_2(t)$. Данный случай аналогичен случаю 1, отмеченные особенности остаются в силе (причем в (14) $B_0(\tau, \mu) = B_1(\tau) - A_{12}(\tau)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau)$). В этом случае в (19) нужно положить $\sigma(\mu) = 1$, $q = \sqrt{\mu}\hat{q}$.

Библиографический список

1. Дмитриев М. Г., Курина Г. А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.
2. Kokotovic P. V., Khalil H. K., O'Reilly J. Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design. Philadelphia: SIAM, 1999. 200 с.
3. Калинин А. И. Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. Минск.: Экоперспектива, 2000. 294 с.
4. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 100 с.
5. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
6. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
7. Гребенникова И. В. Об итерационном методе построения оптимального управления сингулярно возмущенными системами с запаздыванием // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 14–22.
8. Кремлёв А. Г. Асимптотические свойства ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы в задаче оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 1993. № 9. С. 61–78.
9. Кремлёв А. Г. Об оптимальном управлении ансамблем траекторий сингулярно возмущенной квазилинейной системы // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 11. С. 1892–1904.
10. Кремлёв А. Г., Гребенникова И. В. Об асимптотике оптимального управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием // Математика. Информационные технологии. Образование: материалы науч.-практ. конф. Оренбург, 2006. Ч. 1. С. 36–38.
11. Гребенникова И. В., Кремлёв А. Г. О начальной аппроксимации минимаксной задачи управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием // Качество науки — качество жизни: материалы науч.-практ. конф. Тамбов, 2007. С. 89–92.
12. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 492 с.
13. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 192 с.
14. Кремлёв А. Г., Гребенникова И. В. Об асимптотике ансамбля траекторий управляемой сингулярно возмущенной системы с запаздыванием // Новости научной



мысли 2006: материалы науч.-практ. конф. Днепропетровск, 2006. Т. 4. С. 65–69.

15. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной М.: Наука, 1974. 468 с.

16. Кириллова Ф. М., Чуракова С. В. Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1260–1263.

УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СРЕДНИМИ БОРЕЛЯ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Т. В. Иофина

Саратовский государственный университет,
кафедра теории функций и приближений
E-mail: iofinat@mail.ru

В настоящей статье мы рассматриваем средние Бореля по системам Виленкина с ограниченной образующей последовательностью и получаем некоторые оценки приближений этими средними по норме L^p , а также в равномерной норме и норме типа Гельдера в классах функций с заданной мажорантой наилучших приближений или модуля непрерывности. В тригонометрическом случае близкие результаты получены П. Чандрой, Л. Ремпульской и К. Томчаком.

Ключевые слова: системы Виленкина с ограниченной образующей последовательностью, средние Бореля, метрика типа Гельдера, L^p -норма, равномерная норма.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть 2π -периодическая функция $f \in L[0, 2\pi]$, $S_n(f)$ — частичные суммы ее ряда Фурье. Тогда величина $B_r = e^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} r^n S_n(f)/n!$ называется *средними Бореля* функции f . Метод суммирования по Борелю является регулярным [1, §4.12].

Обозначим через H_p^ω пространство Гельдера, т. е. множество функций $f \in L^p[0, 2\pi]$, для которых выполнено неравенство $\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p \leq \omega(h)$, где $\omega(h)$ — некоторый модуль непрерывности. Норму в этих пространствах определим равенством $\|f\|_{\omega, p} = \|f\|_p + \sup_{h \in (0, \pi]} \frac{\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p}{\omega(h)}$. Приближение функций в метрике Гельдера первым начал изучать З. Прёсдорф [2]. В работах [3–5] изучались оценки приближений средними Бореля в метрике Гельдера. Так, в работе [3] была доказана следующая теорема.

Теорема А. Пусть $f \in Lip^\beta[0, 2\pi]$, т. е. $f \in H_\infty^{\omega_\beta}$, где $\omega_\beta(h) = h^\beta$, $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$. Тогда

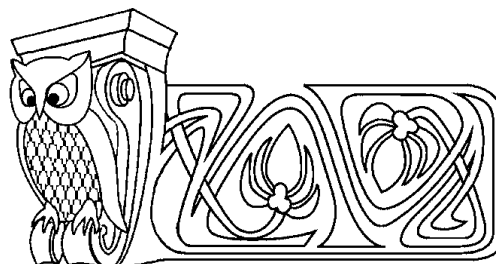
$$\|B_r(f) - f\|_{\omega_\alpha, \infty} = O(r^{\alpha-\beta} \log r).$$

Л. Ремпульска и К. Томчак [5] обобщили результаты, полученные Чандрой, для случая $f \in L^p[0, 2\pi]$, $1 \leq p \leq \infty$, и получили оценки приближений функций средними Бореля через модуль непрерывности различных порядков. Ими были доказаны следующие теоремы.

Теорема В. Для фиксированного $1 \leq p \leq \infty$ и $q \in \mathbb{N}$ существует константа $C = C(p, q)$, что для любой функции $f \in L^p[0, 2\pi]$ справедлива оценка

$$\|B_r(f) - f\|_p \leq CA_{r,p} \omega_q(1/r, f, p),$$

где $\omega_q(1/r; f, p)$ — модуль непрерывности порядка q и $A_{r,p} = \begin{cases} 1, & 1 < p < \infty; \\ \ln(r+2), & p = 1, \infty. \end{cases}$



Approximation of Functions by Borel Means of Fourier Series with Respect to Multiplicative Systems

T. V. Iofina

Saratov State University,
Chair of Theory of Functions and Approximations
E-mail: iofinat@mail.ru

In the present paper we consider Borel means of Fourier series with respect to Vilenkin systems with bounded generating sequence and obtain some estimates of approximation by this means in L^p , uniform and Hölder type norm in classes of functions with given majorant of best approximation or modulus of continuity. In the trigonometric case similar results were established by P.Chandra, L.Rempulska and K.Tomczak.

Key words: Vilenkin systems with bounded generating sequence, Borel means, Hölder type metric, L^p -norm, uniform norm.



Теорема С. Пусть ω_q, μ_q — модули непрерывности порядка q , $q \in \mathbb{N}$, величина $A_{r,p}$ определяется, как в теореме В. Если $\lambda_q := \omega_q/\mu_q$ возрастает, то для любой функции $f \in H_p^{\omega_q}$, $1 \leq p \leq \infty$ справедлива оценка

$$\|B_r(f) - f\|_{\mu_q,p} \leq CA_{r,p}\lambda_q(1/r) \sup_{0 < h \leq \pi} \frac{\omega_q(h; f, p)}{\omega_q(h)}.$$

Метод Бореля в применении к мультипликативным системам, насколько нам известно, еще не рассматривался. В данной работе получены аналоги теорем В и С (см. теоремы 1 и 3). Для рядов Фурье по системам Виленкина удобнее получать оценки в терминах наилучших приближений по системе $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$, а вместо H_p^ω рассматривать $E_p(\varepsilon)$, которые можно назвать пространствами с метрикой типа Гельдера. Приближения в метрике Гельдера другими методами суммирования для системы $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ изучались в [6].

1. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \leq p_i \leq N$, $i \in \mathbb{N}$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 p_2 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$.

Каждое $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \quad 0 \leq x_n < p_n, \quad x_n \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Для $x = k/m_l$, $0 < k < m_l$, $k, l \in \mathbb{N}$ берем разложение с конечным числом $x_n \neq 0$. Для x, y , записанных в виде (1), полагаем $x \ominus y = z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n/m_n$, где $0 \leq z_n < p_n$, $z_n \in \mathbb{Z}$, $z_n = x_n - y_n \pmod{p_n}$. Сумма $x \oplus y$ определяется аналогично. Каждое $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ представимо в виде

$$k = \sum_{n=1}^{\infty} k_n m_{n-1}, \quad k_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq k_n < p_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Для $x \in [0, 1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$, записанных в виде (1) и (2), положим по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j\right)$. Система функций $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ называется мультипликативной системой, или системой Виленкина и является ортонормированной и полной в $L[0, 1)$, причем

$$\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y); \quad \chi_k(x \ominus y) = \chi_k(x)\overline{\chi_k(y)}$$

для почти всех y при фиксированном $x \in [0, 1)$ (см. [7, §1.5]).

Коэффициенты Фурье и частичная сумма Фурье для $f \in L[0, 1)$ по системе Виленкина задаются формулами $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x)\overline{\chi_k(x)} dx$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Для $f, g \in L[0, 1)$ свертка $f * g$ задается формулой $f * g(x) = \int_0^1 f(x \ominus t)g(t) dt = \int_0^1 f(t)g(x \ominus t) dt$. Далее важную роль имеет представление $S_n(f)(x) = \int_0^1 f(x \ominus t)D_n(t) dt$, где $D_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(t)$, $n \in \mathbb{N}$ — ядро Дирихле.

Будем рассматривать пространства $L^p[0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, измеримых интегрируемых в p -й степени функций с нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$, и $C^*[0, 1)$, снабженное нормой $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1)} |f(x)|$ и состоящее из ограниченных функций, для которых справедливо

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f(x) - f(x \ominus h)\|_\infty = 0.$$

Во всех указанных пространствах определим модуль непрерывности следующим образом: $\omega^*(f, \delta)_p = \sup_{0 < h < \delta} \|f(x \ominus h) - f(x)\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$. При $\delta = 1/m_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, величину $\omega^*(f, \delta)_p$ будем обозначать как $\omega_n(f)_p$. Пусть $\mathcal{P}_n := \{f \in L^1[0, 1) : \hat{f}(k) = 0, k \geq n\}$. Тогда наилучшее приближение



по системе Виленкина порядка n вводится следующим образом: $E_n(f)_p := \inf\{\|f - t_n\|_p : t_n \in \mathcal{P}_n\}$. Пусть $\omega(\delta)$ — функция типа модуля непрерывности ($\omega(\delta) \in \Omega$), т.е. $\omega(\delta)$ непрерывна и возрастает на $[0,1)$, причем $\omega(0) = 0$ и $\omega(t) > 0$ при $t > 0$. Тогда пространство $H_p^\omega[0,1)$ состоит из $f \in L^p[0,1)$ ($1 \leq p < \infty$) или $f \in C^*[0,1)$ ($p = \infty$), таких что $\omega^*(f, \delta)_p \leq C\omega(\delta)$, где C зависит только от f . Через h_p^ω обозначим подпространство H_p^ω , такое что для $f \in h_p^\omega$ справедливо $\lim_{h \rightarrow 0} \omega^*(f, h)_p / \omega(h) = 0$. Пространства $h_p^\omega[0,1)$ и $H_p^\omega[0,1)$ с нормой $\|f\|_{p,\omega} = \|f\|_p + \sup_{0 < h < 1} \omega^*(f, h)_p / \omega(h)$ являются банаховыми [2].

При $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $\alpha > 0$, $1 \leq p < \infty$, пространство $H_p^\omega[0,1)$ обозначается через $Lip^*(\alpha, p)$. Ясно, что при $0 < \beta < \alpha$ верно $Lip^*(\alpha, p) \subset Lip^*(\beta, p)$ и $\|f\|_{p,\beta} \leq \|f\|_{p,\alpha}$.

Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ — убывающая к 0 положительная последовательность. Тогда, по определению, $E_p(\varepsilon)$ состоит из $f \in L^p[0,1)$, $1 \leq p < \infty$, или $f \in C^*[0,1)$, $p = \infty$, таких что $\|f\|_{E_p(\varepsilon)} = \|f\|_p + \sup_{k \in \mathbb{N}} E_k(f)_p / \varepsilon_k < \infty$. Через $e_p(\varepsilon)$ обозначим множество функций $f \in E_p(\varepsilon)$, $1 \leq p \leq \infty$, для которых справедливо равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} E_k(f)_p / \varepsilon_k = 0$.

В работе изучаются оценки приближений функций величинами $B_r(f)(x) = e^{-r} \sum_{n=0}^\infty \frac{r^n}{n!} S_{n+1}(f)(x)$, называемыми средними Бореля.

В дальнейшем через C_i , $i \in \mathbb{N}$ и $C(p)$ будем обозначать некоторые константы, зависящие только от обозначенных аргументов.

2. ОЦЕНКИ ПРИБЛИЖЕНИЙ СРЕДНИМИ БОРЕЛЯ В РАВНОМЕРНОЙ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ МЕТРИКАХ

В данном разделе выводятся оценки приближений функций из $L^p[0,1)$, $1 < p < \infty$ и $C^*[0,1)$ средними Бореля.

Лемма 1. Для $f \in L^p[0,1)$, $1 < p < \infty$, верно неравенство $\|S_n(f, x)\|_p \leq C(p)\|f\|_p$, $n \in \mathbb{N}$, где $C(p)$ не зависит от f и n .

Для произвольных (в том числе и неограниченных) последовательностей $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ лемма установлена Шиппом [8] и Сайманом [9].

Лемма 2 ([10, гл. 4, § 3, 4]). 1. Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in (0,1)$ верно неравенство $|D_n(x)| \leq N/x$, где $p_n \leq N$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

2. Существует $C > 0$, такое что для всех $n \in \mathbb{N}$ верна оценка $\|D_n\|_1 \leq C \ln(n+2)$.

Результат следующей леммы принадлежит А.В. Ефимову [7, §10.5].

Лемма 3. Пусть $f \in L^p[0,1)$, $1 \leq p < \infty$, или $f \in C^*[0,1)$ ($p = \infty$). Тогда

$$2^{-1}\omega^*(f, 1/m_n)_p \leq E_{m_n}(f)_p \leq \|f - S_{m_n}(f)\|_p \leq \omega^*(f, 1/m_n)_p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В дальнейшем, следуя обозначениям теоремы В, будем использовать величину $A_{r,p}$ равную 1 при $1 < p < \infty$ и $\ln(r+2)$ при $p = 1, \infty$.

Лемма 4. Для всех $f \in L^p[0,1)$, $1 \leq p < \infty$, и $f \in C^*[0,1)$ ($p = \infty$) при $r \geq 1$ справедлива оценка $\|B_r(f)\|_p \leq C(p)\|f\|_p A_{r,p}$.

Доказательство. По лемме 1 имеем $\|S_k(f)\|_p \leq C_1\|f\|_p$ при $1 < p < \infty$ и по лемме 2 $\|S_k(f)\|_p \leq \|f\|_p \|D_k\|_1 \leq C_2 \ln(k+2)\|f\|_p$ при $p = 1$ или $p = \infty$. Тогда при $1 < p < \infty$ сразу получаем

$$\|B_r(f)\|_p \leq C_1 e^{-r} \sum_{n=0}^\infty \frac{r^n}{n!} \|f\|_p = C_1 \|f\|_p.$$

При $p = 1, \infty$ и $r \geq 1$

$$\begin{aligned} \|B_r(f)\|_p &\leq C_2 e^{-r} \sum_{n=0}^\infty \frac{r^n}{n!} \ln(n+2) \|f\|_p \leq \\ &\leq C_2 e^{-r} \left(\sum_{n=0}^{[r]} \frac{r^n}{n!} \ln(r+2) + \sum_{n=[r]+1}^\infty \frac{r^n}{n!} \ln(n+2) \right) \|f\|_p = C_2 e^{-r} (\Sigma_1 + \Sigma_2) \|f\|_p. \end{aligned}$$

Оценим Σ_2 . Поскольку $\ln x/x$ убывает при $x \geq e$, можно записать при $r \geq 1$

$$\Sigma_2 \leq 3 \sum_{n=[r]+1}^\infty r \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\ln(n+2)}{n+2} \leq 3 \frac{\ln([r]+2)}{[r]+2} r \sum_{n=[r]+1}^\infty \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} \leq 3e^r \ln(r+2).$$



Так как $\Sigma_1 \leq \sum_{n=0}^{\infty} r^n \ln(r+2)/n! = e^r \ln(r+2)$, то оценка леммы 1 верна при $C(p) = C_2(3+1) = 4C_2$. Лемма доказана.

Замечание 1. Аналогично доказательству леммы 4 доказывается оценка

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} D_{n+1} \right\|_1 \leq C \ln(r+2).$$

Следствие 1. Пусть $f \in L^p[0, 1]$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда

$$E_n(B_r(f))_p \leq C(p) E_n(f)_p A_{r,p}, \quad \omega_n(B_r(f))_p \leq C(p) \omega_n(f)_p A_{r,p}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Ясно, что для $t_n \in \mathcal{P}_n$ имеем $B_r(t_n) \in \mathcal{P}_n$. Обозначим через t_n полином наилучшего приближения для f в L^p , т. е. $\|f - t_n\|_p = E_n(f)_p$. Известно, что для любой $f \in L^p[0, 1]$, $1 \leq p \leq \infty$, t_n существует ([11], глава 1, §8). По лемме 4 имеем

$$E_n(B_r(f))_p \leq \|B_r(f) - B_r(t_n)\|_p \leq C_1 \|f - t_n\|_p A_{r,p} = C_1 E_n(f)_p A_{r,p}.$$

Второе неравенство следствия вытекает из первого и леммы 3. При $p = 1, \infty$ оно следует также из неравенства $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$ и замечания 1. Следствие доказано.

Теорема 1. Пусть $f \in L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$ или $f \in C^*[0, 1]$ ($p = \infty$). Тогда

$$\|B_r(f) - f\|_p \leq C(p) A_{r,p} \sum_{k=0}^{[r]} \frac{r^k}{k!} e^{-r} E_{k+1}(f)_p.$$

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $E_n(f)_p = \|f - t_n\|_p$, $t_n \in \mathcal{P}_n$. Тогда в силу оценки леммы 4 имеем

$$\|B_r(f) - f\|_p \leq \|B_r(f) - B_r(t_n)\|_p + \|B_r(t_n) - t_n\|_p + \|t_n - f\|_p \leq \|B_r(t_n) - t_n\|_p + C_1 A_{r,p} E_n(f)_p.$$

Как указано выше, $B_r(t_n) \in \mathcal{P}_n$ и $S_k(t_n) = t_n$ при $k \geq n$, поэтому

$$\|B_r(t_n) - t_n\|_p = \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r^k}{k!} e^{-r} (S_{k+1}(t_n) - t_n) \right\|_p \leq C_2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r^k}{k!} e^{-r} E_{k+1}(t_n)_p A_{r,p}$$

Так как при $k < n$ справедливо $E_{k+1}(t_n)_p \leq E_{k+1}(t_n - f)_p + E_{k+1}(f)_p \leq E_n(f)_p + E_{k+1}(f)_p \leq 2E_{k+1}(f)_p$, оценка для $\|B_r(f) - f\|_p$ примет вид

$$\|B_r(f) - f\|_p \leq C_1 A_{r,p} E_n(f)_p + 2C_2 A_{r,p} \sum_{k=0}^n \frac{r^k}{k!} e^{-r} E_{k+1}(f)_p, \quad (3)$$

где $n \in \mathbb{N}$ произвольно. Докажем, что при $n = [r]$ верно неравенство

$$\sum_{k=0}^n \frac{r^k}{k!} e^{-r} \geq C_4 > 0. \quad (4)$$

Пусть $m = [r^{1/2}]$. Сравним $S_1 = \sum_{k=n-m}^n r^k/k!$ и $S_2 = \sum_{k=n+1}^{n+m} r^k/k!$. Для этого обозначим

$$a_{n,k} = \frac{r^{n-k}}{(n-k)!} : \frac{r^{n+k}}{(n+k)!} = \frac{n(n+k)}{r^2} \left(1 - \frac{1^2}{r^2}\right) \dots \left(1 - \frac{(k-1)^2}{r^2}\right),$$

где $1 \leq k \leq m$. В силу неравенства $\prod_{i=1}^n (1 + h_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n h_i$ при $h_i > -1$, $n \in \mathbb{N}$, получаем, что

$$a_{n,k} \geq 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i^2}{r^2} \geq 1 - \sum_{i=1}^m \frac{i^2}{r^2} = 1 - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6r^2}.$$

В силу определения r последнее выражение стремится к 1 при $r \rightarrow \infty$. При достаточно больших r получаем

$$S_1 > S_2/2. \quad (5)$$



Далее, поскольку $r^k/k!$ убывает при $k \geq n = [r]$ и возрастает при $1 \leq k \leq [r] - 1$, то

$$\begin{aligned} S_3 &:= \sum_{k=n+m}^{2n} \frac{r^k}{k!} \leq \frac{r^{n+m}}{(n+m)!} \left(1 + \frac{r}{(n+m)} + \frac{r^2}{(n+m)^2} + \dots \right) \leq \frac{r^{n+m}}{(n+m)!} \left(1 - \frac{r}{n+m} \right)^{-1} \leq \\ &\leq \frac{2nr^{n+m}}{m(n+m)!} \leq \frac{4nr^{n-m}}{m(n-m)!} \leq 4 \frac{n}{m^2} \sum_{k=n-m}^n \frac{r^k}{k!} \leq 8S_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь в предпоследнем неравенстве использовано неравенство $a_{n,k} > 1/2$ при $k = m$ и достаточно больших r , а в последнем неравенстве применена оценка (5). Наконец, для $S_4 = \sum_{k=2n+1}^{\infty} r^k/k!$ имеем в силу неравенства $r/(2n+1) < 1/2$, убывания $r^k/k!$, а также (5) и (6), что

$$\begin{aligned} S_4 &\leq \frac{r^{2n}}{(2n+1)!} \left(1 + \frac{r}{(2n+1)} + \frac{r^2}{(2n+1)^2} + \dots \right) \leq \frac{2r^{2n}}{(2n+1)!} \leq \\ &\leq \frac{2}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{r^k}{k!} = 2n^{-1}(S_2 + S_3) \leq \frac{20S_1}{n}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из полученных соотношений (5)–(7) следует, что

$$\sum_{k=0}^n \frac{r^k}{(k!)} = e^r - S_2 - S_3 - S_4 \geq e^r - 8S_1 - 2S_1 - \frac{20S_1}{n},$$

откуда $12 \sum_{k=0}^n r^k/k! \geq 12S_1 \geq e^r$ при достаточно больших r . Из последнего неравенства легко следует нужная оценка (4).

В итоге, используя (4) и убывание $E_k(f)_p$ по k , получаем

$$E_n(f)_p \leq C_5 \sum_{k=0}^{[r]} \frac{r^k}{k!} e^{-r} E_{k+1}(f)_p.$$

Подставляя данное неравенство в (3), доказываем теорему.

Замечание 2. Правая часть неравенства в теореме 1, при $p = 1, \infty$ не всегда стремится к 0 при $r \rightarrow \infty$.

Применив теорему 1 для функций из классов Липшица, получим следующую оценку, правая часть которой стремится к 0 для любого p при $r \rightarrow \infty$.

Следствие 2. Пусть $f \in Lip^*(\alpha, p)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > 0$. Тогда при $r \geq 1$

$$\|B_r(f) - f\|_p \leq C(p) A_{r,p} r^{-\alpha}.$$

Доказательство. Так как для $f \in Lip^*(\alpha, p)$, $\alpha > 0$, по лемме 3 верно соотношение $E_k(f)_p = O(k^{-\alpha})$, то согласно теореме 1 имеем $\|B_r(f)_p - f\|_p \leq C_1 A_{r,p} \sum_{k=0}^{[r]} r^k e^{-r} (k+1)^{-\alpha} / k!$. Оценим правую часть неравенства

$$J := A_{r,p} \sum_{k=0}^{[r]} \frac{r^k}{k!} e^{-r} (k+1)^{-\alpha} \leq A_{r,p} (r+1)^{-\alpha} e^{-r} \sum_{k=0}^{[r]} \frac{r^k}{k!} \left(\frac{r+1}{k+1} \right)^\alpha.$$

Пусть $m = [\alpha] + 1 \in \mathbb{N}$. Тогда $\left(\frac{r+1}{k+1} \right)^\alpha \leq \left(\frac{r+1}{k+1} \right)^m \leq \left(\frac{2r}{k+1} \right)^m$ при $0 \leq k \leq [r]$ и мы получаем

$$\begin{aligned} J &\leq A_{r,p} (r+1)^{-\alpha} e^{-r} \sum_{k=0}^{[r]} \frac{r^{k+m} 2^m}{k!(k+1)^m} \leq 2^m A_{r,p} (r+1)^{-\alpha} e^{-r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{k+m}}{(k+m)!} \frac{(k+1) \dots (k+m)}{(k+1)^m} \leq \\ &\leq 2^m m! A_{r,p} (r+1)^{-\alpha} e^{-r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{k+m}}{(k+m)!} = C_1(\alpha) (r+1)^{-\alpha} A_{r,p} \end{aligned}$$

Так как $r \geq 1$, можно записать $J \leq C_2 A_{r,p} r^{-\alpha}$. Следствие доказано.



3. ОЦЕНКИ ПРИБЛИЖЕНИЙ СРЕДНИМИ БОРЕЛЯ В МЕТРИКАХ ТИПА ГЁЛЬДЕРА

В данном разделе мы получаем оценки приближений функций средними Бореля в метриках Гёльдера и типа Гёльдера.

Лемма 5. Пусть $f \in E_p(\varepsilon)$ или $f \in H_p^\omega$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда при фиксированном $r \geq 1$ имеем $B_r(f) \in E_p(\varepsilon)$ или $B_r(f) \in H_p^\omega$ соответственно, причем справедливы оценки

$$\|B_r(f)\|_{E_p(\varepsilon)} \leq C(p)A_{r,p}\|f\|_{E_p(\varepsilon)}, \quad \|B_r(f)\|_{H_p^\omega} \leq C(p)A_{r,p}\|f\|_{H_p^\omega}.$$

Доказательство вытекает из определения норм, леммы 4 и следствия 1.

Следствие 3. Пусть $f \in e_p(\varepsilon)$ или $f \in h_p^\omega$, $1 \leq p \leq \infty$, тогда $B_r(f) \in e_p(\varepsilon)$ или $B_r(f) \in h_p^\omega$ соответственно.

Доказательство. Пусть $f \in e_p(\varepsilon)$, следовательно, $E_n(f)_p \leq \alpha_n \varepsilon_n$, где $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Тогда по следствию 1 $E_n(B_r(f))_p \leq C_1 \alpha_n \varepsilon_n A_{r,p}$. Снова $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(B_r(f))_p / \varepsilon_n = 0$, т.е. $B_r(f) \in e_p(\varepsilon)$. Для h_p^ω доказательство аналогично. Следствие доказано.

Теорема 2. Пусть $f \in E_p(\varepsilon)$, $1 \leq p \leq \infty$, последовательности $\varepsilon, \delta, \lambda$ таковы, что ε_n, δ_n и $\lambda_n = \varepsilon_n / \delta_n$ положительны и убывают к 0, причем

$$\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \varepsilon_{k+1} = O(\varepsilon^n \varepsilon_{n+1}). \quad (8)$$

Тогда справедливо неравенство $\|B_r(f) - f\|_{E_p(\delta)} \leq C(p)A_{r,p}\lambda_{[r]}$.

Доказательство. Оценим следующее выражение с помощью следствия 1

$$\begin{aligned} \sup_{k \geq [r]} \frac{E_k(B_r(f) - f)_p}{\delta_k} &\leq \sup_{k \geq [r]} \frac{E_k(B_r(f))_p + E_k(f)_p}{\delta_k} \leq \\ &\leq \sup_{k \geq [r]} \frac{(1 + A_{r,p})E_k(f)_p}{\delta_k} \leq \sup_{k \geq [r]} \frac{C_1 A_{r,p} \varepsilon_k}{\delta_k} = C_1 A_{r,p} \lambda_{[r]}. \end{aligned}$$

В то же время

$$\sup_{0 \leq k \leq [r]} \frac{E_k(B_r(f) - f)_p}{\delta_k} \leq \frac{\|B_r(f) - f\|_p}{\delta_{[r]}}.$$

В силу теоремы 1 и условия (8) имеем $\|B_r(f) - f\|_p = O(A_{r,p}\varepsilon_{[r]})$, откуда $\sup_{0 \leq k \leq [r]} E_k(B_r(f) - f) / \delta_k = O(A_{r,p}\lambda_{[r]})$. Оценка $\|B_r(f) - f\|_p = O(A_{r,p}\lambda_{[r]})$ очевидна. Объединяя полученные выше результаты, получаем нужное неравенство.

Следствие 4. Пусть $\varepsilon_k = k^{-\beta}$, $\delta_k = k^{-\alpha}$, $0 < \alpha < \beta$. Тогда для $f \in E_p(\varepsilon)$ имеем

$$\|B_r(f) - f\|_{E_p(\delta)} \leq C A_{r,p} r^{\alpha - \beta}.$$

Для доказательства необходимо отметить, что согласно доказательству следствия 2 последовательность $\varepsilon_k = k^{-\beta}$ удовлетворяет условию (8), а ε_n / δ_n убывает к 0.

Будем говорить, что $\omega(\delta)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, если $\omega(2\delta) \leq C\omega(\delta)$.

Лемма 7. Если $\omega(\delta) \in \Omega$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то нормы пространств $E_p(\varepsilon)$, где $\varepsilon_n = \omega(1/n)$, и H_p^ω , $1 \leq p \leq \infty$ эквивалентны.

Доказательство. Пусть $f \in E_p(\varepsilon)$ и $\delta \in [1/(k+1), 1/k) \subset [1/m_{n+1}, 1/m_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$. Согласно Δ_2 -условию и неравенству А.В. Ефимова (лемма 3) имеем при $\alpha = [\log_2 N] + 1$

$$\frac{\omega^*(f, \delta)_p}{\omega(\delta)} \leq \frac{\omega^*(f, 1/m_n)_p}{\omega(1/m_{n+1})} \leq C^\alpha \frac{\omega^*(f, 1/m_n)_p}{\omega(1/m_n)} \leq 2C^\alpha \frac{E_{m_n}(f)_p}{\varepsilon_{m_n}} \leq 2C^\alpha \|f\|_{E_p(\varepsilon)}. \quad (9)$$

Здесь использовалось неравенство $\omega(1/m_n) = \omega(p_{n+1}/m_{n+1}) \leq \omega(2^{[\log_2 N]+1}/m_{n+1}) \leq C^{[\log_2 N]+1} \times \omega(1/m_{n+1})$. Из (9) находим, что $\|f\|_{p,\omega} \leq (2C^\alpha + 1)\|f\|_{E_p(\varepsilon)}$.

Обратно, пусть $f \in H_p^\omega$ и $k \in [m_n, m_{n+1})$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\frac{E_k(f)_p}{\varepsilon_k} \leq \frac{E_{m_n}(f)_p}{\varepsilon_{m_{n+1}}} \leq C^\alpha \frac{E_{m_n}(f)_p}{\varepsilon_{m_n}} \leq C^\alpha \frac{\omega^*(f, 1/m_n)_p}{\omega(1/m_n)} \leq C^\alpha \|f\|_{\omega,p},$$

откуда $\|f\|_{E_p(\varepsilon)} \leq (1 + C^\alpha)\|f\|_{p,\omega}$. Лемма доказана.



Терема 3. Пусть $f \in H_p^\omega$ и $\omega, \mu, \kappa \in \Omega$ и $\omega(\delta)/\mu(\delta) = \kappa(\delta)$. Если для $\varepsilon_k = \omega(1/k)$ выполнено условие (8), ω удовлетворяет Δ_2 -условию, то $\|B_r(f)_p - f\|_{p,\mu} \leq C(p)A_{r,p}\kappa(1/r)$.

Доказательство вытекает из теоремы 2 и леммы 7. Следует отметить, что $\kappa(1/[r]) \leq C\kappa(1/r)$ в силу Δ_2 -условия на κ , которое легко следует из Δ_2 -условия на ω .

Следствие 5. Пусть $f \in Lip^*(\beta, p)$, $\mu(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha < \beta$. Тогда при $r \geq 1$

$$\|B_r(f) - f\|_{p,\mu} \leq C(p)A_{r,p}r^{\alpha-\beta}.$$

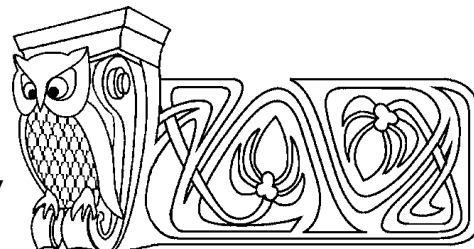
Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

Библиографический список

1. Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.
2. Prössdorf S. Zur Konvergenz der Fourierreihen hölderstetiger Funktionen // Math. Nachr. 1975. Vol. 69. P. 7–14.
3. Chandra P. Degree of approximation of functions in the Hölder metric by Borel means // J. Math. Anal. Appl. 1990. Vol. 149. P. 236–248.
4. Das G., Ojha A. K., Ray B. K. Degree of approximation of functions associated with Hardy – Littlewood series in the Hölder metric by Borel means // J. Math. Anal. Appl. 1998. Vol. 210, № 2. P. 279–293.
5. Rempulska L., Tomczak K. On Euler and Borel means of Fourier series in Hölder spaces // Proc. of A. Razmadze Math. Institute. 2006. Vol. 140. P. 141–153.
6. Iofina T. V., Volosivets S. S. On the degree on approximation by means of Fourier – Vilenkin series in Holder and L^p norm // East J. on Approximations. 2009. Vol. 15, № 2. P. 143–158.
7. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М.: Наука, 1987. 344 с.
8. Schipp F. On L^p -norm convergence of series with respect to product systems // Anal. Math. 1976. Vol. 2. P. 49–64.
9. Simon P. Verallgemeinerte Walsch – Fourierreihen // Acta Math. Hungar. 1976. Vol. 27, № 3–4. P. 329–341.
10. Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981. 180 с.
11. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимаций. М.: ГИТТЛ, 1947. 324 с.

УДК 511.3

К ВОПРОСУ ОПИСАНИЯ РЯДОВ ДИРИХЛЕ С КОНЕЧНОЗНАЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ И УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ТИПА РИМАНА



В. Н. Кузнецов, О. А. Полякова

Саратовский государственный университет,
кафедра компьютерной алгебры и теории чисел
E-mail: KuznetsovVN@info.sgu.ru

В работе получены условия на коэффициенты ряда Дирихле, при которых этот ряд определяет целую функцию и удовлетворяет функциональному уравнению типа Римана. Показано, что существует бесчисленное множество таких рядов, отличных от L -функции Дирихле.

Ключевые слова: ряд Дирихле, функциональное уравнение, L -функция Дирихле.

Известно [1], что L -функции Дирихле для неглавного характера χ определяют целые функции и удовлетворяют функциональному уравнению вида

$$a \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{s+\delta_1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s, \chi) = \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1-s+\delta_1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s+\delta}{2}\right) L(1-s, \bar{\chi}), \quad (1)$$

On Characterization Determining Entire Functions and Consistent with Riman's Type Equation Dirichlet's Series with Finetly-Valued Coefficients

V. N. Kuznetsov, O. A. Polyakova

Saratov State University,
Chair of Computing Algebra and the Number Theory
E-mail: KuznetsovVN@info.sgu.ru

In the investigation were founded specifications for Dirichlet's series coefficients, wherein this series determine entire function and measure up functional Riman's type equation. Were shown that exist infinit multitude of such series that are different from Dirichlet's L -functions.

Key words: Dirichlet's series, functional equation, Dirichlet's L -function.



где a — некоторая константа, δ и δ_1 — величины, равные либо 0, либо 1; k — период характера χ ; $\bar{\chi}$ — сопряженный характер; $\Gamma(s)$ — Γ -функция.

Функциональное уравнение вида (1) называют функциональным уравнением типа Римана. Известно также, что в классе рядов Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad (2)$$

с конечнозначными коэффициентами, функциональное уравнение типа Римана, записанное в виде

$$a \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{s+\delta_1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) f(s) = \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1-s+\delta_1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s+\delta}{2}\right) \hat{f}(1-s), \quad (3)$$

где $\hat{f}(s)$ — функция, определенная рядом Дирихле с коэффициентами, сопряженными к коэффициентам ряда (2), не определяет однозначно L -функцию Дирихле $L(s, \chi)$. Примером тому является известная функция Девенпорта – Хейльбронна. Как показано в [2], она удовлетворяет функциональному уравнению типа Римана (3) и не все нули этой функции, расположенные в критической полосе, лежат на прямой $\sigma = 1/2$.

В данной работе исследуется вопрос относительно того, насколько широк класс рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами, определяющих целые функции и удовлетворяющих функциональному уравнению типа Римана (3).

Следующий результат показывает, что коэффициенты таких рядов являются периодическими, начиная с некоторого номера.

Теорема 1. Пусть ряд Дирихле (2) с конечнозначными коэффициентами определяет целую функцию, удовлетворяющую функциональному уравнению (3). Тогда коэффициенты этого ряда периодичны, начиная с некоторого номера.

Доказательство. Пусть ряд Дирихле (2) удовлетворяет функциональному уравнению (3). Тогда на основании известной асимптотики для Γ -функции [3]:

$$\Gamma(s) = O\left(e^{|\sigma - \frac{1}{2}| \ln |t| - \frac{1}{2} \pi |t| + O(|t|^{-1})}\right)$$

из функционального уравнения получаем оценку модуля функции $f(s)$ в левой полуплоскости

$$|f(s)| = O\left(e^{|s| \ln |s| + A|s|}\right), \quad A > 0, \quad \sigma < 0. \quad (4)$$

В работе [4] показано, что если $f(s)$ — целая функция с условием роста модуля (4), то коэффициенты ряда Дирихле (2) периодичны, начиная с некоторого номера. Это доказывает утверждение теоремы 1.

Для рядов Дирихле с периодическими коэффициентами имеет место

Теорема 2. Ряд Дирихле (2) с периодическими коэффициентами a_n тогда и только тогда определяет целую функцию, когда $\sum_{n \leq x} a_n = O(1)$.

Доказательство. Пусть выполняется условие $\sum_{n \leq x} a_n = O(1)$. Тогда, как легко видеть, соответствующий степенной ряд $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ определяет рациональную функцию вида

$$g(z) = \frac{\sum_{n=1}^d a_n z^n}{1 - z^d}, \quad (5)$$

где d — период последовательности $\{a_n\}$.

Ясно, что $\sum_{n=1}^d a_n = 0$, так как в противном случае $\sum_{n \leq x} a_n \neq O(1)$. Таким образом, рациональная функция (5) регулярна в точке $z = 1$, и, следовательно, у функции $g(z)$ в точке $z = 1$ существуют радиальные производные любого порядка, т. е. существуют пределы вида

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} g^{(n)}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$



Ясно, что существование радиальных производных вида (6) равносильно существованию производных вида

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (g(e^{-x}))^{(n)} = \alpha_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Рассмотрим преобразование Меллина (например, [3]):

$$f(s)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} g(e^{-x}) x^{s-1} dx, \quad \sigma > 1. \quad (8)$$

В силу существования пределов вида (7) запишем для функции $g(e^{-x})$ при $x \geq 0$ формулу Тейлора n -го порядка с остаточным членом в форме Пеано:

$$g(e^{-x}) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k + o(x^n) \quad \text{при } x \rightarrow 0+. \quad (9)$$

Подставим выражение (9) в правую часть равенства (8) и запишем полученное равенство в виде

$$f(s)\Gamma(s) = \int_0^{\rho} \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k x^k \right) x^{s-1} dx + \int_0^{\rho} \left[g(e^{-x}) - \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k \right] x^{s-1} dx + \int_{\rho}^{\infty} g(e^{-x}) x^{s-1} dx, \quad \rho > 0. \quad (10)$$

В этом равенстве первое слагаемое равно $\sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k+s} \rho^{k+s}$, второе слагаемое определяет функцию, регулярную в полуплоскости $\sigma > -n$. Если записать подынтегральную функцию третьего слагаемого в виде $\left(e^{-k/2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(-n+1/2)x} \right) x^{s-1}$, то легко видеть, что последний интеграл абсолютно сходится в любой полуплоскости: $\sigma > N$ и, следовательно, определяет целую функцию.

В силу произвольности n утверждение теоремы 2 доказано в одну сторону.

Докажем обратное утверждение. Предположим противное, т. е. $\sum_{n \leq x} a_n \neq O(1)$. Отсюда следует,

что $\sum_{n=1}^d a_n \neq 0$ и рациональная функция $g(z)$ в силу (5) имеет полюс первого порядка в точке $z = 1$. Следовательно, и функция $g(e^{-z})$ имеет полюс первого порядка в точке $z = 0$. Тогда в окрестности нуля имеет место представление

$$g(e^{-x}) = \frac{A}{x} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k, \quad |x| < \rho. \quad (11)$$

В силу (11) равенство (8) можно представить в виде

$$f(s)\Gamma(s) = \int_0^{\rho} \left(\frac{A}{x} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \right) x^{s-1} dx + \int_{\rho}^{\infty} g(e^{-x}) x^{s-1} dx.$$

Здесь первое слагаемое равно

$$\frac{A\rho^{s-1}}{s-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k \rho^{s+k}}{s+k},$$

а второе слагаемое, как показано выше, определяет целую функцию. Следовательно, функция $f(s)$ имеет полюс первого порядка в точке $s = 1$, что противоречит условию теоремы 2. Тем самым теорема 2 полностью доказана.

Выясним теперь, в каком случае ряд Дирихле (2) с периодическими коэффициентами a_n , для которых $\sum_{n \leq x} a_n = O(1)$, определяет функцию, удовлетворяющую функциональному уравнению типа Римана (3).



Отметим (см. [1]), что при выводе функционального уравнения для L -функции Дирихле $L(s, \chi)$ центральным моментом, в случае четного характера, являлся тот факт, что функция вида

$$\vartheta(x, \chi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(n) e^{-\frac{\pi n^2 x}{d}}, \quad x > 0,$$

где d — период характера χ , удовлетворяет функциональному уравнению вида

$$\vartheta(x, \chi) = \frac{G}{\sqrt{dx}} \vartheta\left(\frac{1}{x}, \bar{\chi}\right),$$

где $\bar{\chi}$ — сопряженный характер, а G — сумма Гаусса

$$G = \sum_{l=1}^d \chi(l) e^{\frac{2\pi i l}{d}}. \quad (12)$$

В нашем случае — случае периодических коэффициентов a_n с периодом d , — рассмотрим функцию вида

$$\vartheta(x, \{a_n\}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-\frac{\pi n^2 x}{d}}, \quad x > 0. \quad (13)$$

Рассмотрим выражения вида

$$G_m = \sum_{l=1}^d a_l e^{\frac{2\pi i l m}{d}}, \quad (14)$$

где m — натуральное.

При данных обозначениях имеет место

Теорема 3. Пусть периодическая последовательность $\{a_n\}$ такова, что для любого натурального m для величин G_m и G , определенных равенствами (14) и (12), выполняется условие

$$G_m = \bar{a}_m \cdot G, \quad (15)$$

где \bar{a}_m — сопряженные к a_m .

Тогда функция (13) удовлетворяет функциональному уравнению вида

$$\vartheta(x, \{a_n\}) = \frac{G}{\sqrt{dx}} \vartheta\left(\frac{1}{x}, \{\bar{a}_n\}\right), \quad x > 0. \quad (16)$$

Доказательство. Преобразуем ряд (13) следующим образом:

$$\vartheta(x, \{a_n\}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-\frac{\pi n^2 x}{d}} = \sum_{l=1}^d a_l \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi (dm+l)^2 x}{d}} = \sum_{l=1}^d a_l \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\pi (m+\frac{l}{d})^2 dx}.$$

Далее, воспользуемся равенством, доказанным в [5]:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\pi (m+d)^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi m^2}{x} + 2\pi i m d}. \quad (17)$$

Тогда в силу (17) и (15) получим

$$\vartheta(x, \{a_n\}) = \frac{1}{\sqrt{dx}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi m^2}{dx}} \sum_{l=1}^d a_l e^{\frac{2\pi i l m}{d}} = \frac{G}{\sqrt{dx}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{a}_m e^{-\frac{\pi m^2}{dx}},$$

что и доказывает утверждение теоремы 3.

Известно (см. [5]), что условие (15) имеет место когда $a_n = \chi(n)$, где χ — примитивный характер по модулю d . Ясно, что тогда условие (15) будет иметь место, когда $a_n = \alpha \chi_1(n) + \beta \chi_2(n)$, где α, β — комплексные числа, а χ_1, χ_2 — примитивные характеры по модулю d . Следовательно, существует достаточно много периодических последовательностей, при которых имеет место теорема 3.



Наконец, если следовать выводу функционального уравнения для L -функции Дирихле, приведенному в [5], то получим основной результат данной работы.

Теорема 4. Пусть $\{a_n\}$ — периодическая последовательность, для которой выполняются условия: 1) $\sum_{n \leq x} a_n = O(1)$; 2) $\sum_{l=1}^d a_l e^{\frac{2\pi i l m}{d}} = \overline{a_m} \sum_{l=1}^d a_l e^{\frac{2\pi i l}{d}}$. Тогда ряд Дирихле (2) определяет функцию, удовлетворяющую функциональному уравнению типа Римана (3).

Библиографический список

1. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1975.
2. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматгиз, 1994.
3. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.
4. Кузнецов В. Н. Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки. 1984. Т. 36, вып. 9. С. 805–813.
5. Чандрасекхаран К. Арифметические функции. М.: Наука, 1975.

УДК 517.51

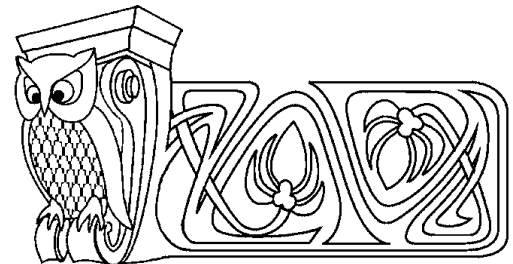
НЕОРТОГОНАЛЬНЫЙ КРАТНОМАСШТАБНЫЙ АНАЛИЗ НА НУЛЬ-МЕРНЫХ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ГРУППАХ

С. Ф. Лукомский

Саратовский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: lukomskisf@info.sgu.ru

Для решения масштабирующего уравнения, преобразование которого имеет компактный носитель, дано необходимое и достаточное условие, при котором это решение порождает неортогональный КМА.

Ключевые слова: нуль-мерные локально компактные группы, сжатия и сдвиги, система Рисса.



Nonorthogonal Multiresolution Analysis on Zero-Dimensional Locally Compact Groups

S. F. Lukomskii

Saratov State University,
Chair of Mathematical Analysis
E-mail: lukomskisf@info.sgu.ru

We give necessary and sufficient condition under which the solution of refinement equation with compactly supported Fourier transform generate the multiresolution analysis.

Key words: zero-dimensional locally compact groups, shifts, dilations, Riesz systems.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы значительный интерес вызывают вопросы построения всплесковых базисов на локально компактных нуль-мерных абелевых группах, как общего вида, так и на конкретных группах. Для построения таких базисов обычно строят кратномасштабный анализ (КМА), а затем по известной схеме получают всплесковые базисы. В работах [1–3] эти вопросы рассмотрены на двоичной группе Кантора. Наибольший всплеск интереса к этой тематике проявился после работ С. В. Козырева [4, 5] в которых были впервые построены p -адические базисы Хаара. В. Ю. Протасов, Ю. А. Фарков в работах [6–8] охарактеризовали все двоичные финитные всплески на \mathbb{R}_+ и указали алгоритм их построения. Ю. А. Фарков в работах [9–10] указал метод построения ортогональных всплесков с компактным носителем на локально компактной группе Виленкина G с постоянной образующей последовательностью и нашел необходимые и достаточные условия, при которых решения масштабирующего уравнения генерируют КМА в $L_2(G)$. Большая группа работ связана с построением КМА на группах всех p -адических чисел. В. М. Шелкович, А. Ю. Хренников, М. А. Скопина в работах [11–13] ввели понятие p -адического КМА с ортогональной масштабирующей функцией и описали общую схему их построения. Отметим, что в работах [10] и [13] решалась одна и та же задача — построение КМА и на его основе построение ортонормированных базисов в $L_2(G)$ как сжатий и сдвигов нескольких функций. В [10] эта задача рассмотрена на группе Виленкина, а в [13] — на поле всех p -адических чисел. В работе [14] вопросы построения ортогонального КМА и ортогональных всплесковых базисов рассмотрены на произвольных локально компактных нуль-мерных группах.



В настоящей статье мы рассмотрим вопросы построения неортогонального КМА на произвольных локально компактных нуль-мерных группах, для которых порядки смежных классов соседних подгрупп совпадают и равны некоторому простому числу. Для решения масштабирующего уравнения, преобразование которого имеет компактный носитель, будет дано необходимое и достаточное условие, при котором это решение порождает неортогональный КМА.

1. ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫЕ НУЛЬ-МЕРНЫЕ ГРУППЫ, ТОПОЛОГИЯ, ХАРАКТЕРЫ

Приведем основные понятия и факты, связанные с анализом на нуль-мерных группах. Более подробную информацию можно найти в [15]. Пусть $(G, \dot{+})$ — локально компактная абелева группа, топология в которой задана счетной системой открытых подгрупп:

$$\supset G_{-n} \supset \dots \supset G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n \supset \dots,$$

таких, что $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = G$, $\bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = \{0\}$ (0 — нулевой элемент группы G). При каждом фиксированном $N \in \mathbb{Z}$ подгруппа G_N является компактной абелевой группой относительно той же операции $\dot{+}$ в топологии, порожденной системой подгрупп

$$G_N \supset G_{N+1} \supset \dots \supset G_n \supset \dots$$

Пусть далее X — совокупность характеров группы G , которая является группой относительно операции умножения, G_n^\perp — аннулятор группы G_n , т. е. $G_n^\perp = \{\chi \in X : \forall x \in G_n, \chi(x) = 1\}$.

Так как каждая группа G_n компактна, то каждая фактор-группа G_n/G_{n+1} конечна, и пусть p_n — ее порядок. Можно считать, что p_n — простые числа, так как используя теорему Силова [16], можно уплотнить цепочку подгрупп так, что порядки фактор-групп G_n/G_{n+1} станут простыми. В этом случае базой топологии являются всевозможные смежные классы $G_n \dot{+} g$ ($g \in G$).

Определим далее числа $(m_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ следующим образом:

$$m_0 = 1, \quad m_{n+1} = m_n \cdot p_n.$$

Ясно, что при $n \geq 1$ $m_n = p_0 p_1 \dots p_{n-1}$,

$$m_{-n} = \frac{1}{p_{-1} p_{-2} \dots p_{-n}}.$$

Смежные классы $G_n \dot{+} g$ ($n \in \mathbb{Z}$) вместе с пустым множеством образуют полукольцо \mathcal{K} . На каждом классе $G_n \dot{+} g$ мера μ определена равенством $\mu(G_n \dot{+} g) = \mu G_n = 1/m_n$. Таким образом, если $n \in \mathbb{N}$ и $p_n = p$, то $\mu G_n \cdot \mu G_{-n} = 1$. Мери μ можно продолжить с полукольца \mathcal{K} на σ алгебру (например, по схеме Каратеодори). Получим меру μ , совпадающую на борелевских множествах с мерой Хаара на G , и которая инвариантна относительно сдвига. Пусть далее $\int_G f(x) d\mu(x)$ абсолютно сходящийся интеграл, порожденный мерой μ .

При каждом $n \in \mathbb{Z}$ выберем элементы $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ и зафиксируем их. Тогда любой элемент $x \in G$ единственным образом представим в виде

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n \quad (a_n = \overline{0, p_n - 1}), \tag{1.1}$$

причем в сумме (1.1) слагаемых с отрицательными номерами конечное число, т. е.

$$x = \sum_{n=N}^{+\infty} a_n g_n \quad (a_n = \overline{0, p_n - 1}, a_N \neq 0). \tag{1.2}$$

Систему элементов (g_n) будем называть базисной.



Каждый аннулятор G_n^\perp есть группа относительно умножения, G_n^\perp образуют возрастающую последовательность:

$$\dots \subset G_{-n}^\perp \subset \dots \subset G_0^\perp \subset G_1^\perp \subset \dots \subset G_n^\perp \subset \dots, \quad (1.3)$$

такую, что

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^\perp = X, \quad \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^\perp = \{1\},$$

причем фактор-группа G_{n+1}^\perp/G_n^\perp имеет порядок p_n .

При каждом $n \in \mathbb{Z}$ выберем элементы $r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$ и зафиксируем их. Тогда любой элемент $\chi \in X$ единственным образом представим в виде

$$\chi = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} r_n^{\alpha_n} \quad (\alpha_n = \overline{0, p_n - 1}),$$

причем в произведении множителей с положительными номерами конечное число. Характеры r_n будем называть функциями Радемахера.

В группе характеров X можно ввести топологию, используя цепочку подгрупп (1.3) и выбирая в качестве базы топологии совокупность смежных классов $G_n^\perp \cdot \chi$ ($\chi \in X$). Совокупность таких смежных классов вместе с пустым множеством образует полукольцо \mathcal{X} . Для каждого смежного класса $G_n^\perp \cdot \chi$ определим его меру ν равенством $\nu(G_n^\perp \cdot \chi) = \nu(G_n^\perp) = m_n$. Таким образом, всегда $\mu(G_n) \nu(G_n^\perp) = 1$. Мера ν продолжается стандартным способом (например, по схеме Каратеодори) на σ -алгебру измеримых множеств. По этой мере строится абсолютно сходящийся интеграл $\int_X F(\chi) d\nu(\chi)$.

Значение $\chi(g)$ характера χ на элементе $g \in G$ будем обозначать через (χ, g) . Преобразование Фурье \hat{f} для $f \in L_2(G)$ определяется равенством

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x) \overline{(\chi, x)} d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_{-n}} f(x) \overline{(\chi, x)} d\mu(x), \quad (1.4)$$

где \lim понимается в смысле сходимости по норме $L_2(X)$. Для $f \in L_2(G)$ справедливо равенство Планшереля

$$f(x) = \int_X \hat{f}(\chi) (\chi, x) d\nu(\chi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n^\perp} \hat{f}(\chi) (\chi, x) d\nu(\chi), \quad (1.5)$$

в котором \lim также понимается в смысле сходимости по норме $L_2(X)$.

Группа характеров X с такой топологией является нуль-мерной локально компактной группой, и имеет место двойственная ситуация: каждый элемент $x \in G$ является характером группы X и G_n есть аннулятор группы G_n^\perp . В дальнейшем в определении 2.1 мы зададим на группе G оператор растяжения. Однако определить такой оператор удастся только в случае, когда $p_n = p$ при любом $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому всюду в дальнейшем будем рассматривать группы G , для которых $p_n = p$. Символом $f_{\dot{+}g}$ будем обозначать сдвиг функции f на элемент $g \in G$ т. е. $f_{\dot{+}g}(x) = f(x \dot{+} g)$.

2. ОПЕРАТОР РАСТЯЖЕНИЯ В НУЛЬ-МЕРНОЙ ГРУППЕ И ГРУППЕ ЕЕ ХАРАКТЕРОВ

В этом и следующем параграфе мы будем рассматривать локально компактную группу $(G, \dot{+})$ с основной цепочкой подгрупп

$$\dots \subset G_n \subset \dots \subset G_1 \subset G_0 \subset G_{-1} \subset \dots \subset G_{-n} \subset \dots,$$

в которой $(G_n/G_{n+1})^\sharp = p$ при всех $n \in \mathbb{Z}$ (символом X^\sharp обозначено количество элементов множества X). Будем также предполагать, что операция $\dot{+}$ в группе G удовлетворяет условию

$$pg_n = \alpha_1 g_{n+1} \dot{+} \alpha_2 g_{n+2} \dot{+} \dots \dot{+} \alpha_s g_{n+s} \quad (2.1)$$

при некоторых фиксированных числах $\alpha_j = \overline{0, p-1}$ ($j = \overline{1, s}$).



Отметим, что если $pg_n = 0$, то группа G есть группа Виленкина, если $pg_n = g_{n+1}$ — группа всех p -адических чисел.

Определение 2.1. Определим оператор $\mathcal{A} : G \rightarrow G$ равенством

$$Ax = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g_{n-1} \tag{2.2}$$

при $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g_n$. Если оператор \mathcal{A} аддитивен, то будем называть его *оператором растяжения*.

Замечание. Оператор \mathcal{A} будет аддитивным, если операция $\dot{+}$ удовлетворяет условию (2.1). Чтобы убедиться в этом, заметим, что каждый элемент $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g_n$ можно отождествить с последовательностью коэффициентов $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ и тогда оператор растяжения \mathcal{A} осуществляет сдвиг последовательности $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ на единицу. В этом случае равенство $\mathcal{A}(x \dot{+} y) = \mathcal{A}(x) \dot{+} \mathcal{A}(y)$ означает, что если мы сложим последовательности коэффициентов элементов x и y и затем сдвинем эту сумму на единицу, то получим последовательность, которая есть сумма сдвигов. Последнее, очевидно, выполняется, если операция $\dot{+}$ удовлетворяет условию (2.1). В частности, оператор \mathcal{A} будет аддитивным в наиболее важных группах: группах Виленкина с условием $pg_n = 0$ и группах p -адических чисел ($pg_n = g_{n+1}$).

Лемма 2.1. Если \mathcal{A} — оператор растяжения, то $\mathcal{A}G_n = G_{n-1}$, $\mathcal{A}^{-1}G_n = G_{n+1}$.

Доказательство. Равенство $\mathcal{A}G_n = G_{n-1}$ очевидно следует из представления $G_n = \{x \in G : x = a_n g_n \dot{+} a_{n+1} g_{n+1} \dot{+} \dots\}$. □

Лемма 2.2. Если $f \in L(G)$, \mathcal{A} — оператор растяжения, то

$$\int_G f(\mathcal{A}x) d\mu x = \frac{1}{p} \int_G f(x) d\mu x. \tag{2.3}$$

Доказательство. Равенство (2.3) очевидно верно, если $f(x) = \mathbf{1}_{G_n \dot{+} g}(x)$. Поэтому (2.3) верно для ступенчатых функций, а значит, и для $f \in L(G)$. □

Обозначим $H_0 = \{x \in G : x = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} a_{-N}g_{-N}, N \in \mathbb{N}, a_{-j} = \overline{0, p-1}\}$. Множество H_0 играет роль натуральных чисел.

Лемма 2.3. Если $h, g \in H_0$, то

$$\int_{G_0^\perp} \overline{(\chi, g)}(\chi, g) d\nu(x) = \delta_{g,h} = \begin{cases} 1, & g = h, \\ 0, & g \neq h. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим элементы $x \in G$ как характеры группы X и пусть $\tilde{x} = x|_{G_0^\perp}$ — сужение этих характеров на группу G_0^\perp . Тогда

$$\tilde{x} = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} a_{-N}g_{-N} \in H_0,$$

(здесь надо учесть, что $(G_0^\perp, g_k) = 1$ при $k \geq 0$). Поэтому H_0 есть группа характеров компактной группы G_0^\perp , и, значит, элементы из H_0 образуют ортонормированную систему в $L_2(G_0^\perp)$. □

Следствие. $\int_{G_0^\perp} (\chi, x) d\nu(\chi) = \mathbf{1}_{G_0}(x)$.

Доказательство. Если $x \in G_0$, то для $\chi \in G_0^\perp$ $(\chi, x) = 1$, и, значит, $\int_{G_0^\perp} (\chi, x) d\nu(\chi) = 1$. Если $x \notin G_0$, то $x \in H_0$ и $x \neq 0$. Поэтому по лемме 2.3

$$\int_{G_0^\perp} (\chi, x) \overline{(\chi, 0)} d\nu(\chi) = 0. \tag{2.4} \quad \square$$

Определение 2.2. Определим действие оператора растяжения \mathcal{A} на характеры $\chi \in X$ равенством $(\chi \mathcal{A})(x) = \chi(\mathcal{A}x)$.

Замечание. Оператор растяжения \mathcal{A} действует на элемент $x \in G$ слева, а на характер $\chi \in X$ — справа.



Лемма 2.4. Пусть \mathcal{A} — оператор растяжения в G . Тогда: 1) $G_n^\perp \mathcal{A} = G_{n+1}^\perp$; 2) $G_n^\perp \mathcal{A}^{-1} = G_{n-1}^\perp$; 3) $G_n^\perp r_n^{\alpha_n} r_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \dots r_{n+s}^{\alpha_{n+s}} \mathcal{A} = G_{n+1}^\perp r_{n+1}^{\alpha_{n+1}} r_{n+2}^{\alpha_{n+2}} \dots r_{n+1+s}^{\alpha_{n+1+s}}$.

Доказательство. 1) пусть $\chi \in G_n^\perp \mathcal{A}$. Это равносильно тому, что $\chi = \chi_n \mathcal{A}$, где $\chi_n \in G_n^\perp$. Последнее верно тогда и только тогда, когда для всех $x \in G_{n+1}$, $\chi(x) = \chi_n \mathcal{A}x = 1$, что эквивалентно принадлежности $\chi \in G_{n+1}^\perp$.

2) очевидно следует из 1).

3) следует из равенств $G_n^\perp \mathcal{A} = G_{n+1}^\perp$ и $r_n \mathcal{A} = r_{n+1}$. □

Лемма 2.5. Пусть $r_0 \in G_1^\perp \setminus G_0^\perp$ — функция Радемахера. Тогда при любом $n \in \mathbb{Z}$ характер $r_0 A^n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$, т. е. является n -й функцией Радемахера.

Доказательство. По лемме 2.4

$$(G_1^\perp \setminus G_0^\perp) A^n = G_1^\perp A^n \setminus G_0^\perp A^n = G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp,$$

откуда и следует утверждение леммы. □

Лемма 2.6. Пусть \mathcal{A} — оператор растяжения в G и $\chi = \prod_{k=-\infty}^N r_k^{\alpha_k}$. Тогда $\chi \mathcal{A} = \prod_{k=-\infty}^N r_{k+1}^{\alpha_k}$.

Доказательство. Пусть $\chi = \prod_{k=-\infty}^N r_k^{\alpha_k}$, т. е. $\chi = \prod_{k=n}^N r_k^{\alpha_k} \cdot \chi_n$, где $\chi_n \in G_n^\perp$. Тогда $\chi \mathcal{A} = \left(\prod_{k=n}^N r_{k+1}^{\alpha_k} \right) \times \chi_n \mathcal{A}$, и $\chi_n \mathcal{A} \in G_{n+1}^\perp$, т. е. $\chi \mathcal{A} = \prod_{k=-\infty}^N r_{k+1}^{\alpha_k}$. □

Замечание. Из леммы 2.6 следует, что оператор \mathcal{A} является оператором растяжения в группе характеров, и по аналогии с леммой 2.2 имеем для $f \in L(X)$

$$\int_X f(\chi \mathcal{A}) d\nu(\chi) = \frac{1}{p} \int_X f(\chi) d\nu(\chi).$$

3. СДВИГИ ФУНКЦИИ КАК СИСТЕМА РИССА

Напомним [17], что система функций $(\varphi_n) \subset L_2(G)$ называется системой Рисса с постоянными A и B ($A, B > 0$), если для любой последовательности $C = (c_j) \in l_2$ ряд $\sum_n c_n \varphi_n$ сходится в $L_2(G)$ и

$$A \|C\|_{l_2}^2 \leq \left\| \sum c_n \varphi_n \right\|_{L_2(G)}^2 \leq B \|C\|_{l_2}^2. \quad (3.1)$$

Отметим, что из условия (3.1) уже следует сходимость ряда $\sum c_n \varphi_n$. Очевидно также, что система Рисса будет базисом в пространстве:

$$V := \left\{ f = \sum c_n \varphi_n : \sum |c_k|^2 < +\infty \right\}.$$

Известно [17, теорема 1.1.7], что если $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, то система сдвигов $(\varphi(x - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ будет системой Рисса с постоянными A и B тогда и только тогда, когда п.в. на \mathbb{R} :

$$A \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(x - k)|^2 \leq B.$$

Следующая теорема является аналогом этого утверждения для локально компактных нуль-мерных групп.

Теорема 3.1. Пусть $\varphi \in L_2(G)$ и $\text{supp } \hat{\varphi}(\chi) \subset G_0^\perp$. Тогда система сдвигов $(\varphi(x - h))_{h \in H_0}$ будет системой Рисса с постоянными A и B тогда и только тогда, когда п.в. на G_0^\perp :

$$A \leq |\hat{\varphi}(\chi)|^2 \leq B. \quad (3.2)$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть $H \subset H_0$ — конечное подмножество. По теореме Планшереля

$$\left\| \sum_{h \in H} c_h \varphi(x - h) \right\|_2^2 = \int_G \left(\sum_{h \in H} c_h \varphi(x - h) \right) \overline{\left(\sum_{h \in H} c_h \varphi(x - h) \right)} d\mu =$$



$$= \int_X \left(\sum_{h \in H} c_h \hat{\varphi}_{-h}(\chi) \right) \overline{\left(\sum_{h \in H} c_h \hat{\varphi}_{-h}(\chi) \right)} d\nu(\chi) = \int_{G_0^\perp} |\hat{\varphi}(\chi)|^2 \left| \sum_{h \in H} c_h \overline{(\chi, h)} \right|^2 d\nu(\chi). \quad (3.3)$$

Так как элементы $h \in H_0$ образуют ортонормированную систему в $L_2(G_0^\perp)$, то отсюда, с учетом (3.2), получается:

$$A \sum_{h \in H} |c_h|^2 \leq \left\| \sum_{h \in H} c_h \varphi(x \dot{-} h) \right\|_2^2 \leq B \sum_{h \in H} |c_h|^2$$

для любого конечного $H \subset H_0$, а значит, и для H_0 .

Необходимость. Пусть

$$A \sum_{h \in H_0} |c_h|^2 \leq \left\| \sum_{h \in H_0} c_h \varphi(x \dot{-} h) \right\|_2^2 \leq B \sum_{h \in H_0} |c_h|^2.$$

Из (3.3) получается неравенство

$$A \sum_{h \in H_0} |c_h|^2 \leq \int_{G_0^\perp} |\hat{\varphi}(\chi)|^2 \left| \sum_{h \in H_0} c_h \overline{(\chi, h)} \right|^2 d\nu\chi \leq B \sum_{h \in H_0} |c_h|^2. \quad (3.4)$$

Правое неравенство в (3.4) означает, что

$$\sup_{\|f\|_{L_2} \leq 1} \int_{G_0^\perp} |\hat{\varphi}(\chi)|^2 |f(\chi)|^2 d\nu(\chi) \leq B,$$

т.е. $\|\hat{\varphi}(\chi)\|_{L^\infty} \leq B$ или иначе $|\hat{\varphi}(\chi)|^2 \leq B$ п.в. на G_0^\perp . Покажем теперь, что $A \leq |\hat{\varphi}(\chi)|^2$ п.в. на G_0^\perp . Пусть это не так, т.е. существует множество $E \subset G_0^\perp$ с $\nu(E) > 0$ и такое, что $|\hat{\varphi}(\chi)|^2 < A - \varepsilon$ на E . Рассмотрим характеристическую функцию $\mathbf{1}_E(\chi)$ и пусть $\mathbf{1}_E(\chi) = \sum_{h \in H_0} c_h \overline{(\chi, h)}$. Тогда

$$\int_{G_0^\perp} |\hat{\varphi}(\chi)|^2 \left| \sum_{h \in H_0} c_h \overline{(\chi, h)} \right|^2 d\nu(\chi) = \int_{G_0^\perp} |\hat{\varphi}(\chi)|^2 \mathbf{1}_E^2(\chi) d\nu(\chi) \leq (A - \varepsilon) \int_{G_0^\perp} \mathbf{1}_E^2(\chi) d\nu(\chi) = (A - \varepsilon) \sum |c_h|^2,$$

что противоречит (3.4). □

В качестве следствия получается

Теорема 3.2. Пусть $\varphi \in L_2(G)$ и $\text{supp } \hat{\varphi}(\chi) \subset G_0^\perp$. Тогда система сдвигов $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ есть ортонормированная система на G_0 тогда и только тогда, когда $|\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$ п.в. на G_0^\perp .

Доказательство. *Необходимость.* Если $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ — ортонормированная система на G_0 , то она есть система Рисса с границами $A = B = 1$ и по теореме 3.1 $1 \leq |\hat{\varphi}(\chi)|^2 \leq 1$ п.в. на G_0^\perp .

Достаточность очевидна. □

4. НЕОРТОГОНАЛЬНЫЙ КМА

Совокупность замкнутых подпространств $V_n \subset L_2(G)$ назовем КМА, если выполнены условия:

A.1. $V_n \subset V_{n+1}$.

A.2. $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n = L_2(G)$; $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \{0\}$.

A.3. $f(x) \in V_n \Leftrightarrow f(\mathcal{A}x) \in V_{n+1}$.

A.4. $f(x) \in V_0 \Rightarrow f(x \dot{-} h) \in V_0$.

A.5. Существует функция $\varphi \in L_2(G)$ такая, что сдвиги $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ образуют базис Рисса в V_0 . КМА с такой аксиомой A.5 будем называть *неортогональным*.

Для построения КМА используем традиционную схему. Выбираем функцию $\varphi \in L_2(G)$, для которой сдвиги $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ образуют систему Рисса с границами $0 < A < B < +\infty$ и положим

$$V_j = \overline{\text{span}(\varphi(A^j x \dot{-} h))_{h \in H_0}}. \quad (4.1)$$



В этом случае система $(\varphi(x \cdot h))_{h \in H_0}$ есть базис Рисса в V_0 , и справедливо неравенство

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{h \in H_0} |(f, \varphi \cdot h)|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (4.2)$$

для любой функции $f \in V_0$. Если подпространства, определенные в (4.1), образуют КМА, то говорят, что φ порождает КМА. Будем искать условия, при которых φ порождает КМА. Условие

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H_0} \beta_h \varphi(Ax \cdot h) \quad (4.3)$$

является необходимым для выполнения аксиомы А.1. Соотношение (4.3) называют масштабирующим уравнением.

Следующие две леммы доказаны в [14].

Лемма 4.1. Если $\varphi \in L_2(G)$ удовлетворяет масштабирующему уравнению (4.3), $\text{supp } \hat{\varphi} \subset G_0^\perp$, то выполнена аксиома А.1.

Лемма 4.2. Пусть $\varphi \in L_2(G)$ — решение уравнения (4.3) и $\text{supp } \hat{\varphi} \subset G_0^\perp$. Равенство $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n = L_2(G)$ выполняется тогда и только тогда, когда $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \text{supp } \hat{\varphi}(\cdot \mathcal{A}^{-n}) = X$.

Следствие. Если $\varphi \in L_2(G)$ решение уравнения (4.3) и $\text{supp } \hat{\varphi} = G_0^\perp$, $A \leq |\hat{\varphi}(\chi)| \leq B$ п.в. на G_0^\perp , то $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n = L_2(X)$.

Лемма 4.3. Пусть $\varphi \in L_2(G)$, $A \leq |\hat{\varphi}(\chi)|^2 \leq B$ п.в. на G_0^\perp и $\text{supp } \hat{\varphi} \subset G_0^\perp$. Тогда $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $f \in V_{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Тогда $f(\mathcal{A}^n x) \in V_0$ и с учетом (4.2) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^n} \sum_{h \in H_0} \left| \int_G f(x) \overline{\varphi(\mathcal{A}^{-n} x \cdot h)} d\mu x \right|^2 &= \sum_{h \in H_0} \left| \int_G f(\mathcal{A}^n x) \overline{\varphi(x \cdot h)} d\mu x \right|^2 \leq \\ &\leq B \|f(\mathcal{A}^n \cdot)\|_{L_2}^2 = B \int_G |f(\mathcal{A}^n x)|^2 d\mu(x) = \frac{B}{p^n} \int_G |f(x)|^2 d\mu(x) = \frac{B}{p^n} \|f\|_{L_2}^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

По теореме 3.1 система $(\varphi(x \cdot h))_{h \in H_0}$ есть базис Рисса в V_0 с границами A и B , поэтому система $(p^{n/2} \varphi(\mathcal{A}^n x \cdot h))_{h \in H_0}$ — базис Рисса в V_n с теми же границами. Следовательно, для $f \in V_n$ ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\|f\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{A} \sum_{h \in H_0} |(f, p^{n/2} \varphi(\mathcal{A}^n \cdot \cdot h))|^2 = \frac{p^n}{A} \sum_{h \in H_0} |(f, \varphi(\mathcal{A}^n \cdot \cdot h))|. \quad (4.5)$$

Соединяя (4.4) и (4.5), получаем, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\|f\|_{L_2}^2 \leq \frac{B}{A} \frac{1}{p^n} \|f\|_{L_2}^2.$$

Отсюда следует $\|f\|_{L_2}^2 = 0$, а значит, $f = 0$ п.в. в G . \square

Теорема 4.4. Пусть $\varphi \in L_2(G)$, $\text{supp } \hat{\varphi}(\chi) = G_0^\perp$, $A \leq |\hat{\varphi}(\chi)|^2 \leq B$ п.в. на G_0^\perp и $\varphi(x)$ — решение масштабирующего уравнения (4.3). Тогда функция φ порождает КМА.

Доказательство. Аксиомы А.3. и А.4. очевидны. Аксиомы А.1. и А.2. вытекают из лемм 4.1–4.3. \square

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00097-а) и гранта Президента по государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

Библиографический список

1. Lang W.C. Orthogonal wavelets on the Cantor dyadic group // SIAM J. Math. Anal. 1996. Vol. 27, № 1. P. 305–312.
2. Lang W.C. Wavelet analysis on the Cantor dyadic group // Houston J. Math. 1998. Vol. 24, № 3. P. 533–544.
3. Lang W.C. Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group // Intern. J. Math. Math. Sci. 1998. Vol. 21, № 2. P. 307–314.



4. Козырев С. В. Вейвлет анализ как p -адический спектральный анализ // Изв. РАН. Сер. математическая. 2002. Т. 66, № 2. С. 149–158.
5. Козырев С. В. p -адические псевдодифференциальные операторы и p -адические вейвлеты // Теор. мат. физ. 2004. Т. 138, № 3. С. 1–42.
6. Протасов В. Ю., Фарков Ю. А. Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Мат. сборник. 2006. Т. 197, № 10. С. 129–160.
7. Фарков Ю. А. Биортогональные диадические вейвлеты на полупрямой // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, № 6. С. 189–190.
8. Протасов В. Ю. Аппроксимация диадическими всплесками // Мат. сборник. 2007. Т. 198, № 11. С. 135–152.
9. Фарков Ю. А. Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных Абелевых группах // Изв. РАН, Сер. математическая. 2005. Т. 69, № 3. С. 193–220.
10. Фарков Ю. А. Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 6. С. 934–952.
11. Shelkovich V. M., Skopina M. A. p -adic Haar multiresolution analysis and pseudo-differential operators // J. Fourier Anal. and Appl. 2009. Vol. 15, № 3. P. 366–393. URL: <http://arxiv.org/abs/0705.2294>.
12. Shelkovich V. M., Khrennikov A. Yu., Skopina M. A. p -adic refinable functions and MRA-based wavelets // J. Approx. Th. 2009. Vol. 161, № 1. P. 226–238.
13. Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M. p -adic nonorthogonal wavelet bases // Тр. МИАН. 2009. Т. 265. С. 7–18.
14. Лукомский С. Ф. Кратномасштабный анализ на нуль-мерных группах и всплесковые базисы // Мат. сборник. 2010. Т. 201, № 5. С. 41–65.
15. Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981. 180 с.
16. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
17. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 616 с.

УДК 517.5

ОБ АСИМПТОТИКЕ МНОГОЧЛЕНОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЕТКАХ

З. М. Магомедова

Филиал Российского государственного университета туризма и сервиса в г. Махачкале,
кафедра экономики, бухгалтерии, финансов и аудита,
E-mail: alimn@mail.ru

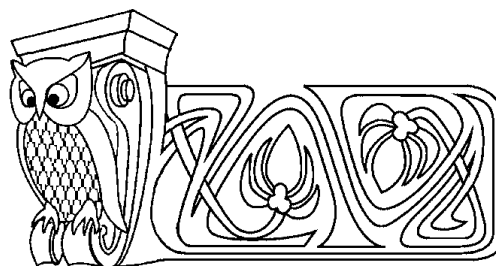
В статье исследуются асимптотические свойства многочленов $l_n(x)$, ортогональных с весом $e^{-x_j} \Delta t_j$ на произвольных сетках, состоящих из бесконечного числа точек полуоси $[0, \infty)$. А именно установлена асимптотическая формула, в которой при возрастании n вместе с N асимптотическое поведение этих многочленов близко к асимптотическому поведению многочленов Лагерра.

Ключевые слова: полином, ортогональная система, сетка, вес, весовая оценка, асимптотическая формула.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $T = \{t_0, t_1, \dots\}$ — дискретное множество (сетка), состоящее из бесконечного числа различных точек, расположенных на $[0, \infty)$, и таких, что $0 = t_0 < t_1 < t_2 \dots$. Рассмотрим также еще одну сетку $X = \{x_0, x_1, \dots\}$, состоящую из бесконечного числа точек x_j , где $x_j = (t_j + t_{j+1})/2$, $j = 0, 1, \dots$. Через $l_k(x) = l_k(x, T)$, $k = 0, 1, \dots$ обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему на сетке X в следующем смысле ($n, m = 0, 1, \dots$):

$$(l_n, l_m) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-x_j} l_n(x_j) l_m(x_j) \Delta t_j = \delta_{nm}, \quad (1)$$



About Asymptotic Polynomials, Orthogonal on Any Grids

Z. M. Magomedova

Branch of the Russian State University of Tourism and Service
in Makhachkala,
Chair of Economy, Book Keeping, Finance and Audit
E-mail: alimn@mail.ru

Asymptotic properties of polynomials orthogonal $l_n(x)$, with weight $e^{-x_j} \Delta t_j$ on any infinite set points from semi-axis $[0, \infty)$ are investigated. Namely an asymptotic formula is proved in which asymptotic behaviour of these polynomials as n tends to infinity together with N is closely related to asymptotic behaviour of the polynomials by Lagerra.

Key words: polynomial, orthogonal system, set, weight, weighted estimate, approximation formula.



где $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $j = 0, 1, \dots$, причем предполагается, что $\sup_{0 \leq j < \infty} \Delta t_j < \infty$, $\sup_{0 \leq j < \infty} t_j = +\infty$.

Обозначим $\delta = \sup_{0 \leq j < \infty} \Delta t_j$. Для определенности будем считать, что старший коэффициент многочлена $l_n(x)$ положителен, т. е.

$$l_n(x) = k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \dots + k_0, \quad k_n > 0. \quad (2)$$

В настоящей работе исследуются асимптотические свойства многочлена $l_n(x)$ при $n, N \rightarrow \infty$, где $N = 1/\delta$. Всюду в дальнейшем через $C, C(\lambda), \dots$ будут обозначаться разные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров.

Сначала приведем некоторые сведения о многочленах Лагерра. Определим многочлены Лагерра с помощью обобщенной формулы Родрига

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}), \quad (3)$$

где α — произвольное действительное число, и отметим следующие их свойства [1, 2]:

ортонормированность

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha \hat{L}_n^\alpha(x) \hat{L}_m^\alpha(x) dx = \delta_{nm}, \quad \alpha > -1,$$

где $\hat{L}_n^\alpha(x) = (h_n^\alpha)^{-1/2} L_n^\alpha(x)$, $h_n^\alpha = \Gamma(\alpha + 1) \binom{n+\alpha}{n}$;
равенства

$$L_n^\alpha(x) = L_n^{\alpha+1}(x) - L_{n-1}^{\alpha+1}(x), \quad (4)$$

$$L_n^{-k} = (-x)^k \frac{(n-k)!}{n!} L_{n-k}^k(x), \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x); \quad (6)$$

весовая оценка

$$|L_n^\alpha(x)| \leq C(\alpha) A_n^\alpha(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (7)$$

где

$$A_n^\alpha(x) = \begin{cases} e^{x/2} s^\alpha, & 0 \leq x \leq 1/s, \\ e^{x/2} s^{\alpha/2-1/4} x^{-\alpha/2-1/4}, & 1/s \leq x \leq s/2, \\ e^{x/2} [s(s^{1/3} + |x-s|)]^{-1/4}, & s/2 \leq x \leq 3s/2, \\ e^{x/4}, & 3s/2 \leq x, \end{cases} \quad (8)$$

$\alpha > -1$, $s = 4n + 2\alpha + 2$.

При $\alpha = 0$ мы будем писать $A_n(x)$ вместо $A_n^0(x)$ и $L_n(x)$ — вместо $L_n^0(x)$.

Ниже нам также понадобится формула Кристоффеля – Дарбу для многочленов Лагерра [1, §5.1, с. 110]

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1) K_n^\alpha(x, y) &= \sum_{\nu=0}^n \left\{ \binom{\nu + \alpha}{\nu} \right\}^{-1} L_\nu^\alpha(x) L_\nu^\alpha(y) = \\ &= (n + 1) \left\{ \binom{n + \alpha}{n} \right\}^{-1} \frac{L_n^\alpha(x) L_{n+1}^\alpha(y) - L_{n+1}^\alpha(x) L_n^\alpha(y)}{x - y}. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть $L_{x^\alpha e^{-x}}^2$ — пространство всех функций f , непрерывных на $[0, \infty)$, для которых $\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} |f(x)|^2 dx < \infty$. Положим

$$\|f\| = \left(\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (10)$$



Тогда, очевидно, что $L_{x^\alpha e^{-x}}^2$ — линейное нормированное пространство с нормой (10).

Пусть далее P_n — множество всех алгебраических полиномов степени не выше n . Очевидно, что если $p_n \in P_n$, то

$$\|p_n'\| \leq M_n \|p_n\|, \tag{11}$$

где $M_n = \sup_{p_n \in P_n} \|p_n'\| / \|p_n\|$.

Для случая $\alpha = 0$ П. Туран в 1960 г. получил результат [3]:

$$M_n = \frac{1}{2 \sin(\pi/(4n+2))}.$$

А в 2000 г. для $\alpha > -1$ А.И. Аптекаревым, А. Дро и В.А. Калягиным получен результат [4]:

$$M_n = \frac{n}{x_1} [1 + O(1)],$$

где x_1 — ближайший к началу координат ноль функции Бесселя $J_\beta(x)$, $\beta = (\alpha - 1)/2$.

Основные результаты настоящей работы приводятся в разд. 2 (теоремы 1 и 2).

Последовательность многочленов, ортогональных на конечном множестве точек, впервые была введена и исследована П.Л. Чебышевым. В работах А.А. Маркова, Шарлье, М.Ф. Кравчука, Мейкснера, Хана и других изучались системы ортогональных многочленов дискретного переменного, различающиеся выбором сетки и веса. В частности, подробно исследовались разностные свойства дискретных аналогов классических многочленов Эрмита и Лагерра — многочленов соответственно Кравчука и Мейкснера. Дальнейшее развитие теории многочленов, ортогональных на дискретных системах точек, связано с работами Хана, Вебера и Эрдейи, А.Ф. Никифорова, В.Б. Уварова, С.К. Сулова и многих других математиков и физиков. Были получены многочисленные приложения многочленов, ортогональных на дискретных системах точек в генетике, теории кодирования, квантовой механике, математической статистике и т.д. В связи с приложениями указанных многочленов часто возникает вопрос об асимптотических свойствах в том случае, когда степень n растет (вместе с параметром N , где N — величина, обратная максимальному шагу сетки). Целенаправленное его изучение было проведено в работах Шарапудинова И.И. Задача состояла в том, чтобы получить такие оценки для остаточных членов асимптотических формул, из которых и известных весовых оценок для классических многочленов Якоби, Лагерра и Эрмита вытекали бы неулучшаемые по порядку при $n \rightarrow \infty$ весовые оценки для многочленов Чебышева, Мейкснера и Кравчука, стремясь одновременно к тому, чтобы эти оценки оставались верны при минимальных ограничениях на рост степени n в зависимости от N . В работе [5, § 4.9, с. 88–90] И.И. Шарапудиновым для ортонормированных на равномерной сетке многочленов Мейкснера $m_{n,N}^\alpha(x)$ доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $0 \leq \alpha$ — целое, $\lambda, \delta > 0$, $N = 1/\delta$, $x \in [0, \infty)$. Тогда имеет место асимптотическая формула:

$$m_{n,N}^\alpha(x) = I_{n,N}^\alpha(x) + v_{n,N}^\alpha(x),$$

для остаточного члена $v_{n,N}^\alpha(x)$ которой при $0 < \delta < 1$, $1 \leq n \leq \lambda N$ справедлива оценка

$$|v_{n,N}^\alpha(x)| \leq C(\alpha, \lambda) A_n^\alpha(x) \sqrt{\frac{n}{N}} n^{-\alpha/2},$$

где $A_n^\alpha(x)$ определена равенством (8).

При $\alpha = 0$ нам удалось перенести эту теорему на произвольный случай.

1. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Докажем некоторые утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1. Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, \infty)$. Тогда, если ряд $\sum_{j=0}^{\infty} |f(x_j)| \Delta t_j$ сходится и интегралы $\int_0^{\infty} |f(x)| dx$, $\int_0^{\infty} |f'(x)| dx$, $\int_0^{\infty} |f''(x)| dx$ сходятся, то имеет место следующее равенство:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \sum_{j=0}^{\infty} f(x_j) \Delta t_j + r(f),$$



в котором для остаточного члена $r(f)$ имеет место следующая оценка:

$$|r(f)| \leq \frac{1}{8} \delta^2 \int_0^{\infty} |f''(t)| dt, \quad (12)$$

где $\delta = \sup_{0 \leq j < \infty} \Delta t_j$.

Доказательство. Имеем

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x) dx.$$

Воспользовавшись формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме и формулой Ньютона – Лейбница, мы можем записать:

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x) dx &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[f(x_j) + f'(x_j)(x - x_j) + \int_{x_j}^x (x - t) f''(t) dt \right] dx = f(x_j) \Delta t_j + f'(x_j) \int_{t_j}^{t_{j+1}} (x - x_j) dx + \\ &+ \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_j}^x (x - t) f''(t) dt dx = f(x_j) \Delta t_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_j}^x (x - t) f''(t) dt dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Интеграл в равенстве (13) запишем в виде

$$J = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_j}^x (x - t) f''(t) dt dx = \int_{t_j}^{x_j} \int_{x_j}^x (x - t) f''(t) dt dx + \int_{x_j}^{t_{j+1}} \int_{x_j}^x (x - t) f''(t) dt dx = J_1 + J_2.$$

Рассмотрим J_1 :

$$|J_1| = \int_{t_j}^{x_j} \int_{x_j}^x (x - t) f''(t) dt dx = - \int_{t_j}^{x_j} f''(t) dt \int_{t_j}^t (x - t) dx = \frac{1}{2} \int_{t_j}^{x_j} (t_j - t)^2 |f''(t)| dt. \quad (14)$$

Займемся теперь J_2 :

$$|J_2| = \int_{x_j}^{t_{j+1}} \int_{x_j}^x (x - t) f''(t) dt dx = \int_{x_j}^{t_{j+1}} f''(t) dt \int_t^{t_{j+1}} (x - t) dx = \frac{1}{2} \int_{x_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1} - t)^2 |f''(t)| dt. \quad (15)$$

Из (14) и (15) имеем

$$|J| \leq |J_1| + |J_2| \leq \frac{1}{8} \delta^2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f''(t)| dt. \quad (16)$$

Тогда из (13) и (16) мы находим

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \sum_{j=0}^{\infty} f(x_j) \Delta t_j + r(f),$$

где

$$|r(f)| = \left| \sum_{j=0}^{\infty} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_j}^x (x - t) f''(t) dt dx \right| \leq \frac{1}{8} \delta^2 \sum_{j=0}^{\infty} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f''(t)| dt = \frac{1}{8} \delta^2 \int_0^{\infty} |f''(t)| dt.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для ортонормированного многочлена Лагерра $L_n(x)$ имеет место формула

$$\sum_{j=0}^{\infty} e^{-x_j} L_n^2(x_j) \Delta t_j = 1 + r_n,$$

в которой $|r_n| \leq C \delta^2 n$.



Доказательство. Полагая $f(x) = e^{-x}L_n^2(x)$ воспользуемся леммой 1. Тогда

$$1 = \int_0^{\infty} e^{-x}L_n^2(x) dx = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-x_j}L_n^2(x_j)\Delta t_j + r_n,$$

где $r_n = r(e^{-x}L_n^2(x))$, и стало быть в силу (12)

$$|r_n| \leq \frac{1}{8}\delta^2 \int_0^{\infty} |(e^{-x}L_n^2(x))''| dx. \tag{17}$$

Далее в силу (6)

$$\begin{aligned} (e^{-x}L_n^2(x))'' &= e^{-x}L_n^2(x) - 4e^{-x}L_n(x)L_n'(x) + 2e^{-x}L_n'^2(x) + 2e^{-x}L_n(x)L_n''(x) = \\ &= e^{-x}(L_n(x))^2 - 4e^{-x}L_{n-1}^1(x)L_n(x) + 2e^{-x}(L_{n-1}^1(x))^2 + 2e^{-x}L_n(x)L_{n-2}^2(x). \end{aligned}$$

Поэтому в силу весовой оценки (7) получим

$$|(e^{-x}L_n^2(x))''| \leq C e^{-x}((A_n(x))^2 + A_{n-1}^1(x)A_n(x) + (A_{n-1}^1(x))^2 + A_n(x)A_{n-2}^2(x)).$$

Из (8) следует, что $A_n(x)A_{n-2}^2(x) \leq C(A_{n-1}^1(x))^2$. Тогда

$$\int_0^{\infty} |(e^{-x}L_n^2(x))''| dx \leq C \int_0^{\infty} e^{-x} [(A_n(x))^2 + A_{n-1}^1(x)A_n(x) + (A_n^1(x))^2] dx. \tag{18}$$

Исходя из (8) имеем

$$\begin{aligned} e^{-x}(A_n(x))^2 &= \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/s, \\ s^{-1/2}x^{-1/2}, & 1/s \leq x \leq s/2, \\ [s(s^{1/3} + |x - s|)]^{-1/2}, & s/2 \leq x \leq 3s/2, \\ e^{-x/2}, & 3s/2 \leq x, \end{cases} \\ e^{-x}A_{n-1}^1(x)A_n^0(x) &\leq C \begin{cases} s, & 0 \leq x \leq 1/s, \\ x^{-1}, & 1/s \leq x \leq s/2, \\ [s(s^{1/3} + |x - s|)]^{-1/2}, & s/2 \leq x \leq 3s/2, \\ e^{-x/2}, & 3s/2 \leq x, \end{cases} \\ e^{-x}(A_n^1(x))^2 &= \begin{cases} s^2, & 0 \leq x \leq 1/s, \\ s^{1/2}x^{-3/2}, & 1/s \leq x \leq s/2, \\ [s(s^{1/3} + |x - s|)]^{-1/2}, & s/2 \leq x \leq 3s/2, \\ e^{-x/2}, & 3s/2 \leq x. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x}(A_n(x))^2 dx &= \left(\int_0^{1/s} + \int_{1/s}^{s/2} + \int_{s/2}^{3s/2} + \int_{3s/2}^{\infty} \right) e^{-x}(A_n(x))^2 dx = \\ &= \int_0^{1/s} dx + \int_{1/s}^{s/2} s^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} dx + \int_{s/2}^{3s/2} [s(s^{\frac{1}{3}} + |x - s|)]^{-\frac{1}{2}} dx + \int_{3s/2}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned} \tag{19}$$

Оценим все интегралы.

$$I_1 = \int_0^{1/s} dx = x|_0^{1/s} \leq C, \quad I_2 = \int_{1/s}^{s/2} s^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} dx = 2s^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}|_{1/s}^{s/2} \leq C,$$



$$I_3 = \int_{s/2}^{3s/2} [s(s^{\frac{1}{3}} + |x-s|)]^{-\frac{1}{2}} dx = s^{-\frac{1}{2}} \int_{-s/2}^{s/2} [s^{\frac{1}{3}} + |t|]^{-\frac{1}{2}} dt = 2s^{-\frac{1}{2}} \int_0^{s/2} (s^{\frac{1}{3}} + t)^{-\frac{1}{2}} dt = 4s^{-\frac{1}{2}} (s^{\frac{1}{3}} + t)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^{s/2} \leq C,$$

$$I_4 = \int_{3s/2}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = -2 e^{-\frac{x}{2}} \Big|_{3s/2}^{\infty} = 2e^{-\frac{3s}{4}} \leq C.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} (A_n(x))^2 dx \leq C. \quad (20)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} A_n(x) A_{n-1}^1(x) dx &\leq \left(\int_0^{1/s} + \int_{1/s}^{s/2} + \int_{s/2}^{3s/2} + \int_{3s/2}^{\infty} \right) e^{-x} A_n(x) A_{n-1}^1(x) dx = \\ &= \int_0^{1/s} s dx + \int_{1/s}^{s/2} \frac{dx}{x} + \int_{s/2}^{3s/2} [s(s^{\frac{1}{3}} + |x-s|)]^{-\frac{1}{2}} dx + \int_{3s/2}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = \\ &= 1 + \ln\left(\frac{s^2}{2}\right) + s^{-\frac{1}{2}} \int_{-s/2}^{s/2} [s^{\frac{1}{3}} + |t|]^{-\frac{1}{2}} dt + 2e^{-\frac{3s}{4}} = 1 + \ln\left(\frac{s^2}{2}\right) + 2s^{-\frac{1}{2}} \int_0^{s/2} (s^{\frac{1}{3}} + t)^{-\frac{1}{2}} dt + 2e^{-\frac{3s}{4}} = \\ &= 1 + \ln\left(\frac{s^2}{2}\right) + 4s^{-\frac{1}{2}} (s^{\frac{1}{3}} + t)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^{s/2} + 2e^{-\frac{3s}{4}} \leq C \ln(n+1). \end{aligned} \quad (21)$$

Оценим следующий интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} (A_n^1(x))^2 dx &= \left(\int_0^{1/s} + \int_{1/s}^{s/2} + \int_{s/2}^{3s/2} + \int_{3s/2}^{\infty} \right) e^{-x} (A_n^1(x))^2 dx = \\ &= \int_0^{1/s} s^2 dx + \int_{1/s}^{s/2} s^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx + \int_{s/2}^{3s/2} [s(s^{\frac{1}{3}} + |x-s|)]^{-\frac{1}{2}} dx + \int_{3s/2}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \end{aligned} \quad (22)$$

Третий и четвертый интегралы ограничены константой по всем s . Оценим первый и второй интегралы:

$$J_1 = \int_0^{1/s} s^2 dx = s^2 x \Big|_0^{1/s} = s, \quad J_2 = \int_{1/s}^{s/2} s^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx = -2s^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \Big|_{1/s}^{s/2} \leq Cs.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} (A_n^1(x))^2 dx \leq Cn. \quad (23)$$

Сопоставляя (18)–(23), получим $\int_0^{\infty} |(e^{-x} L_n^2(x))''| dx \leq Cn$. Отсюда и из (17) следует, что

$$|r_n| \leq \frac{1}{8} \delta^2 \int_0^{\infty} |(e^{-x} L_n^2(x))''| dx \leq C\delta^2 n.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $\frac{\delta^2}{8}(1+2M_n)^2 < 1$. Тогда для ортонормированного многочлена (2) имеет место следующая формула:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} l_n^2(x) dx = 1 + R_n,$$



в которой $|R_n| \leq \frac{\phi_n}{1 - \phi_n}$, где $\phi_n = \phi_n(\delta) = \frac{\delta^2}{8}(1 + 2M_n)^2$, $M_n = \frac{1}{2 \sin(\pi/(4n + 2))}$.

Доказательство. В силу леммы 1

$$\int_0^{\infty} e^{-x} l_n^2(x) dx = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-x_j} l_n^2(x_j) \Delta t_j + R_n, \quad (24)$$

где $R_n = r(e^{-x} l_n^2(x))$, и стало быть в силу (12)

$$|R_n| \leq \frac{1}{8} \delta^2 \int_0^{\infty} |(e^{-x} l_n^2(x))''| dx. \quad (25)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (e^{-x} l_n^2(x))'' dx &= \int_0^{\infty} e^{-x} l_n^2(x) dx - 4 \int_0^{\infty} e^{-x} l_n'(x) l_n(x) dx + \\ &+ 2 \int_0^{\infty} e^{-x} l_n'^2(x) dx + 2 \int_0^{\infty} e^{-x} l_n(x) l_n''(x) dx = I_1 - I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned} \quad (26)$$

К интегралам I_2 , I_3 и I_4 применим неравенство Коши – Буняковского:

$$|I_2| = \int_0^{\infty} e^{-x} |l_n(x) l_n'(x)| dx \leq \left(\int_0^{\infty} e^{-x} l_n^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_0^{\infty} e^{-x} l_n'^2(x) dx \right)^{1/2}, \quad (27)$$

$$|I_3| = \int_0^{\infty} e^{-x} |l_n'^2(x)| dx \leq \left(\int_0^{\infty} e^{-x} l_n'^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_0^{\infty} e^{-x} l_n'^2(x) dx \right)^{1/2}, \quad (28)$$

$$|I_4| = \int_0^{\infty} e^{-x} |l_n(x) l_n''(x)| dx \leq \left(\int_0^{\infty} e^{-x} l_n^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_0^{\infty} e^{-x} l_n''^2(x) dx \right)^{1/2}. \quad (29)$$

Из (26)–(29) и (11) [3, 4] следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (e^{-x} l_n^2(x))'' dx &\leq \int_0^{\infty} e^{-x} l_n^2(x) dx + 4M_n \int_0^{\infty} e^{-x} l_n^2(x) dx + 2M_n^2 \int_0^{\infty} e^{-x} l_n^2(x) dx + 2M_n^2 \int_0^{\infty} e^{-x} l_n^2(x) dx = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x} l_n^2(x) dx + 4M_n \int_0^{\infty} e^{-x} l_n^2(x) dx + 4M_n^2 \int_0^{\infty} e^{-x} l_n^2(x) dx \leq (1 + 2M_n)^2 \int_0^{\infty} e^{-x} l_n^2(x) dx. \end{aligned} \quad (30)$$

Сопоставляя (25) и (30), получим:

$$|R_n| \leq \phi_n \int_0^{\infty} e^{-x} l_n^2(x) dx. \quad (31)$$

Кроме того, из (24) и (31) следует, что $\int_0^{\infty} e^{-x} l_n^2(x) dx \leq 1 + \phi_n \int_0^{\infty} e^{-x} l_n^2(x) dx$. Следовательно,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} l_n^2(x) dx \leq \frac{1}{1 - \phi_n}.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть k_n – старший коэффициент полинома $l_n(x)$, а λ_n – старший коэффициент полинома Лагерра $L_n(x)$. Тогда

$$\frac{k_n}{\lambda_n} \geq \frac{1}{1 + C\delta^2 n}. \quad (32)$$



Доказательство. Как известно [1], минимум суммы $\sum_{j=0}^{\infty} e^{-x_j} p_n^2(x_j) \Delta t_j$ по всевозможным полиномам $p_n(x)$ со старшим коэффициентом, равным единице, доставляет $\frac{l_n(x)}{k_n}$, т. е.

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-x_j} l_n^2(x_j) \Delta t_j}{k_n^2} \leq \sum_{j=0}^{\infty} e^{-x_j} p_n^2(x_j) \Delta t_j.$$

Взяв $p_n(x) = \frac{L_n(x)}{\lambda_n}$, получим:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-x_j} l_n^2(x_j) \Delta t_j}{k_n^2} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-x_j} L_n^2(x_j) \Delta t_j}{\lambda_n^2}.$$

Учитывая, что $\sum_{j=0}^{\infty} e^{-x_j} l_n^2(x_j) \Delta t_j = 1$, приходим к

$$\frac{k_n^2}{\lambda_n^2} \geq \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} e^{-x_j} L_n^2(x_j) \Delta t_j}.$$

Ввиду леммы 2 имеем:

$$\frac{k_n^2}{\lambda_n^2} \geq \frac{1}{1 + C\delta^2 n}.$$

Тогда в силу неравенства $(1 + h)^{1/2} \leq 1 + \frac{1}{2}h$, $h \geq -1$, получим (32). Лемма 4 доказана.

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ $l_n(x)$

Здесь мы получим асимптотическую формулу для многочленов $l_n(x)$, ортонормированных на X в смысле (1).

Теорема 1. Пусть $0 < \lambda < 1$, $0 < \delta \leq 1$, $N = 1/\delta$, $x \in [0, \infty)$. Тогда имеет место асимптотическая формула:

$$l_n(x) = L_n(x) + v_n(x), \tag{33}$$

для остаточного члена которой при $1 \leq n \leq \lambda N^{2/3}$ справедлива оценка

$$|v_n(x)| \leq C(\lambda) \frac{n^{3/2}}{N} A_n(x), \tag{34}$$

где

$$A_n(x) = \begin{cases} e^{x/2}, & 0 \leq x \leq 1/s, \\ e^{x/2} s^{-1/4} x^{-1/4}, & 1/s \leq x \leq s/2, \\ e^{x/2} [s(s^{1/3} + |x - s|)]^{-1/4}, & s/2 \leq x \leq 3s/2, \\ e^{x/4}, & 3s/2 \leq x, \end{cases} \quad s = s(n) = 4n + 2.$$

Доказательство. Оценим следующий интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-x} (v_n(x))^2 dx = \int_0^{\infty} e^{-x} (L_n(x) - l_n(x))^2 dx = \\ & = \int_0^{\infty} e^{-x} L_n^2(x) dx - 2 \int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) l_n(x) dx + \int_0^{\infty} e^{-x} l_n^2(x) dx = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$I_1 = 1, \quad I_2 = -2 \frac{k_n}{\lambda_n}, \quad I_3 \leq 1 + \frac{\phi_n}{1 - \phi_n}.$$



Тогда, учитывая (32) и неравенство $\phi_n \leq C_1 n^2 \delta^2$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} (v_n(x))^2 dx &\leq 2 - 2 \frac{k_n}{\lambda_n} + \frac{\phi_n}{1 - \phi_n} = 2 \left(1 - \frac{k_n}{\lambda_n}\right) + \frac{\phi_n}{1 - \phi_n} \leq 2 \left(1 - \frac{1}{1 + C\delta^2 n}\right) + \frac{\phi_n}{1 - \lambda} = \\ &= \frac{2C\delta^2 n}{1 + C\delta^2 n} + \frac{\phi_n}{1 - \lambda} \leq \frac{2C\delta^2 n}{1 + C\delta^2 n} + \frac{C_1 \delta^2 n^2}{1 - \lambda} \leq \left(2C + \frac{C_1}{1 - \lambda}\right) \delta^2 n^2 \leq C(\lambda) \delta^2 n^2. \end{aligned}$$

Отсюда и из результатов [1, §7.71, с. 189–190] следует, что

$$|v_n(x)| \leq \left(C(\lambda) \delta^2 n^2 \sum_{\nu=0}^n [\hat{L}_\nu(x)]^2 \right)^{1/2}. \quad (35)$$

Далее, в силу (4) формулу Кристоффеля – Дарбу (9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} K_n(t, x) &= \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+1)(x-t)} [L_{n+1}(x)L_{n+1}^{-1}(t) - L_{n+1}^{-1}(x)L_{n+1}(t)] = \\ &= (n+1) \left[L_{n+1}(x) \frac{L_{n+1}^{-1}(x) - L_{n+1}^{-1}(t)}{t-x} - L_{n+1}^{-1}(x) \frac{L_{n+1}(x) - L_{n+1}(t)}{t-x} \right]. \end{aligned}$$

Переходя здесь к пределу при $t \rightarrow x$ и используя равенство (6), имеем

$$\begin{aligned} K_n(x, x) &= \sum_{\nu=0}^n [\hat{L}_\nu(x)]^2 = (n+1) [-L_{n+1}(x)[L_{n+1}^{-1}(x)]' - L_{n+1}^{-1}(x)[L_{n+1}(x)]'] = \\ &= (n+1)[L_{n+1}(x)L_n(x) + L_{n+1}^{-1}(x)L_n^1(x)]. \end{aligned} \quad (36)$$

Сопоставляя (36) с (35), имеем

$$|v_n(x)| \leq C(\lambda) \frac{n^{3/2}}{N} [|L_n(x)L_{n+1}(x)| + |L_n^1(x)L_{n+1}^{-1}(x)|]^{1/2}. \quad (37)$$

Оценим здесь многочлены Лагерра с помощью неравенства (7). Заметим, что

$$C_1 |A_n(x)| \leq |A_{n+1}(x)| \leq C_2 |A_n(x)|, \quad n = 1, 2, \dots$$

равномерно относительно $x \in [0, \infty)$. Поэтому из (37) имеем

$$(|L_n(x)L_{n+1}(x)|)^{1/2} \leq C A_n(x), \quad 0 \leq x < \infty. \quad (38)$$

Из формулы (5) следует, что $L_{n+1}^{-1}(x) = -\frac{x}{n+1} L_n^1(x)$. Следовательно,

$$(|L_n^1(x)L_{n+1}^{-1}(x)|)^{1/2} = \left(\frac{x}{n+1}\right)^{1/2} |L_n^1(x)|. \quad (39)$$

Покажем, что при всех $x > 0$

$$|L_n^1(x)L_{n+1}^{-1}(x)| \leq C \left(\frac{x}{n}\right)^{1/2} A_n^1(x) \leq C A_n(x). \quad (40)$$

Воспользуемся формулой (3) и интегральной формулой Коши. Тогда при $x > 0$ имеем

$$|L_n^1(x)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{e^{x-t} t^n}{(x-t)^{n+1}} \frac{t}{x} dt \right|,$$

где γ – замкнутый контур, охватывающий точку $t = x$. Составим контур γ из отрезка $t = 5x/6 + i\tau$ ($\tau_{-1} \leq \tau \leq \tau_1$) и дуги окружности $|t| = 7x/6$, где τ_{-1} и τ_1 означают точки пересечения прямой $t = 5x/6 + i\tau$ и окружности $|t| = 7x/6$. Будем иметь:

$$|L_n^1(x)| \leq \frac{7}{12\pi} \int_\gamma \left| e^{x-t} \left(\frac{t}{x-t}\right)^n \right| \frac{|dt|}{|x-t|} \leq \frac{1}{6} e^{x/6} 7^{n+2} = \frac{49}{6} 7^n e^{-x/12} e^{x/4}. \quad (41)$$



При $x \geq (12 \ln 7)n$ имеем

$$\left(\frac{x}{n+1}\right)^{1/2} 7^n e^{-x/12} = \exp\left[\frac{(12 \ln 7)n - x}{12} + \frac{1}{2} \ln \frac{x}{n+1}\right] \leq C. \quad (42)$$

Из (41) и (42) находим

$$\left(\frac{x}{n+1}\right)^{1/2} |L_n^1(x)| \leq C e^{x/4} \leq C A_n(x), \quad x \geq (12 \ln 7)n. \quad (43)$$

Сравнивая (39) и (43) убеждаемся в справедливости оценки (40). Утверждение теоремы вытекает из (37), (38) и (40). \square

Сопоставляя (33), (34) с (7), мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существует постоянная $c(\lambda)$ такая, что

$$|l_n(x)| \leq C(\lambda) \left(\frac{n}{N} + 1\right) A_n(x).$$

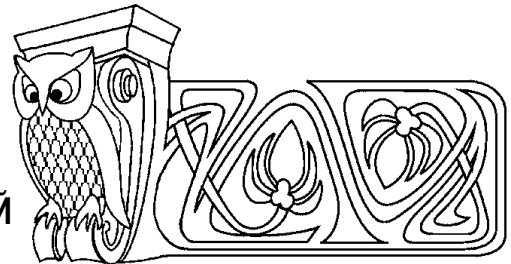
В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю И.И. Шарапудинову и М.Ш. Джамалову за поставленную задачу и ряд полезных замечаний.

Библиографический список

1. Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
2. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979.
3. Turan P. Remarks on a theorem of Erhard Schmidt // *Mathematica*. 1960. Vol. 2, № 25. С. 373–378.
4. Антекарев А. И., Дро А., Калягин В. А. Об асимптотике точных констант в неравенствах Маркова – Бернштейна в интегральных метриках с классическим весом // *Успехи мат. наук*. 2000. Т. 55, № 1. С. 173–174.
5. Шарапудинов И. И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Махачкала: ДНЦ РАН, 2004.

УДК 519.872

АНАЛИЗ НЕОДНОРОДНЫХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ ТРЕБОВАНИЙ



Ю. И. Митрофанов, Е. С. Рогачко, Е. П. Станкевич

Саратовский государственный университет,
кафедра системного анализа и автоматического управления
E-mail: MitrophanovYul@info.sgu.ru, RogachkoES@info.sgu.ru,
StankevichElena@mail.ru

Рассматривается замкнутая экспоненциальная сеть массового обслуживания с несколькими классами требований и групповыми переходами. Для моделирования эволюции данной сети используются цепи Маркова. Приводятся два способа вычисления стационарного распределения сетей обслуживания данного типа. Даются формулы для основных стационарных характеристик сети.

Ключевые слова: сети массового обслуживания, групповые переходы требований, анализ сетей массового обслуживания, стационарные характеристики сетей обслуживания.

Analysis of Heterogeneous Queueing Networks with Batch Movements of Customers

Yu. I. Mitrophanov, E. S. Rogachko, E. P. Stankevich

Saratov State University,
Chair of Systems Analysis and Automatic Control
E-mail: MitrophanovYul@info.sgu.ru, RogachkoES@info.sgu.ru,
StankevichElena@mail.ru

Closed exponential queueing network with different classes of customers and batch movements is considered. To model evolution of given network Markov chains are used. Two approaches to stationary distribution calculation for given type queueing networks are presented. Formulas for basic stationary characteristics are given.

Key words: queueing networks, batch movements of customers, analysis of queueing networks, stationary characteristics of the networks.



ВВЕДЕНИЕ

Для сетей массового обслуживания с одиночными переходами требований получены существенные теоретические результаты и разработаны эффективные методы анализа [1–3]. Сети обслуживания этого типа находят широкое применение в качестве математических моделей сложных дискретных стохастических систем, например, транспортных систем, сетей передачи данных, гибких производственных систем и вычислительных сетей. В последнее время в теории сетей массового обслуживания интенсивно развивается научное направление, связанное с исследованием сетей массового обслуживания с групповыми переходами и групповым обслуживанием требований и разработкой методов их анализа [4–9].

В данной работе рассматривается замкнутая экспоненциальная сеть массового обслуживания с несколькими классами требований и групповыми переходами. Число обслуживающих приборов в каждой системе обслуживания равно числу требований в сети. Изменения состояний сети обслуживания происходят в результате переходов между системами групп требований. Предлагается модель эволюции рассматриваемой сети обслуживания и рассматриваются методы анализа сети, при этом существенное внимание уделяется получению мультипликативной формы стационарного распределения вероятностей состояний сети. Представлены два способа вычисления стационарного распределения рассматриваемой сети — с использованием матрицы вероятностей перехода модельной цепи Маркова и с применением мультипликативной формы стационарного распределения. Приведены также формулы для вычисления основных стационарных характеристик сети обслуживания.

1. ОПИСАНИЕ СЕТИ

Рассмотрим замкнутую экспоненциальную сеть массового обслуживания N с L системами массового обслуживания S_i , $i = 1, \dots, L$, в которой обслуживаются требования K классов. Вероятности перехода требований между системами сети определяются маршрутной матрицей $\Theta = (\theta_{ik,jl})$, $i, j = 1, \dots, L$, $k, l = 1, \dots, K$, где $\theta_{ik,jl}$ — вероятность того, что требование класса k после обслуживания в системе S_i поступает в систему S_j с изменением своего класса на l . Начальное число требований различных классов определяется вектором $H = (H_k)$, $k = 1, \dots, K$, где H_k — начальное число требований класса k в сети, $\hat{H} = \sum_{k=1}^K H_k$. Система S_i , $i = 1, \dots, L$, включает \hat{H} одинаковых обслуживающих приборов. Предполагается, что длительности обслуживания в системе S_i требований класса k имеют экспоненциальное распределение с параметром μ_{ik} , $0 < \mu_{ik} < 1$, $i = 1, \dots, L$, $k = 1, \dots, K$ (данные ограничения на значения μ_{ik} не влияют на общность полученных результатов). Состояние сети N определяется вектором $s = (s_i)$, $s_i = (s_{ik})$, $i = 1, \dots, L$, $k = 1, \dots, K$, где s_{ik} — число требований класса k , находящихся в системе S_i . Множество состояний сети обозначим через X , множество номеров систем массового обслуживания — через $I = \{1, \dots, L\}$, множество номеров классов требований — через $J = \{1, \dots, K\}$. Изменение состояния сети происходит вследствие переходов между системами групп требований и является результатом выполнения рассмотренной далее последовательности действий.

Для синхронизации событий, реализуемых в сети N в процессе ее функционирования, используется последовательность интервалов времени фиксированной длительности, называемых *слотами*. Длительность слота полагается равной единице. Моменты начала и окончания слота z обозначим соответственно через η и τ . В момент η определяется состояние сети s , в котором сеть пребывает в течение слота z . Требования, завершившие обслуживание в системе в течение слота, остаются в обслуживающих приборах до момента τ . В момент τ формируется вектор $d = (d_i)$, $d_i = (d_{ik})$, $i = 1, \dots, L$, $k = 1, \dots, K$, требований, выходящих после завершения обслуживания из систем. Здесь $d_{ik} \leq s_{ik}$ — число требований класса k , выходящих из системы S_i . Вектор d затем преобразуется в вектор $a = (a_j)$, $a_j = (a_{jl})$, $j = 1, \dots, L$, $l = 1, \dots, K$, требований, входящих в конце слота z в системы обслуживания сети. В векторе a компонента a_{jl} — число требований класса l , которые поступают в систему S_j . Так как векторы d и a содержат одинаковое число требований, будет сформировано новое состояние сети $s' = s - d + a$. Все векторы d и a далее будем называть векторами перемещений. Множество всех векторов перемещений обозначим через Y .



В общем, в момент τ в сети N выполняются следующие действия:

- 1) формируется вектор d ;
- 2) реализуется алгоритм маршрутизации требований из группы d_{ik} , $i \in I$, $k \in J$, и формируются подгруппы требований $d_{ik,jl}$, $l \in J$, $j \in V_i$, направляемые из S_i в S_j с возможной сменой класса требований k на класс l , V_i — множество номеров выходных смежных с S_i систем;
- 3) из подгруппы требований $d_{ik,jl}$, $k, l \in J$, $j \in I$, $i \in U_j$, формируются группы поступающих в S_j требований класса l — компоненты a_{jl} вектора a , U_j — множество номеров входных смежных с S_j систем;
- 4) группа a_{jl} , $j \in I$, $l \in J$, требований класса l направляется в систему S_j ;
- 5) формируется новое состояние сети $s' = s - d + a$.

2. МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ СЕТИ

Если сеть N находится в состоянии $s \in X$, то с вероятностью $p(s, d)$ формируется вектор $d \in Y$, который затем с вероятностью $p(d, a)$ преобразуется в вектор $a \in Y$.

Вероятность завершения обслуживания в системе S_i , $i \in I$, требования класса k , $k \in J$, в данном слоте равна μ_{ik} . Если в начале слота в системе S_i в процессе обслуживания находятся s_{ik} требований, то вероятность завершения обслуживания в течение этого слота ровно d_{ik} требований ($0 \leq d_{ik} \leq s_{ik}$) определяется биномиальным распределением с параметром μ_{ik} . Таким образом,

$$p(s, d) = \prod_{i=1}^L \prod_{k=1}^K \binom{s_{ik}}{d_{ik}} (\mu_{ik})^{d_{ik}} (1 - \mu_{ik})^{s_{ik} - d_{ik}}. \quad (1)$$

При независимой маршрутизации требований в сети N вероятности преобразования вектора d в вектор a имеют вид

$$p(d, a) = \sum_{d_{ik,jl} \in D} \prod_{i=1}^L \prod_{k=1}^K \binom{d_{ik}}{d_{ik,11}, \dots, d_{ik,LK}} \prod_{j=1}^L \prod_{l=1}^K \theta_{ik,jl}^{d_{ik,jl}}, \quad d, a \in Y,$$

где $D = \left\{ d_{ik,jl}, i = 1, \dots, L, k, l = 1, \dots, K, j \in V_i : \sum_{i=1}^L \sum_{k=1}^K d_{ik,jl} = a_{jl} \right\}$. Здесь учитываются все возможные переходы требований между системами обслуживания в сети.

Введем в рассмотрение маршрутную цепь Маркова W с дискретным временем и множеством состояний Y [5]. Вероятности перехода цепи W определяются выражением

$$\gamma(d, a) = \begin{cases} p(d, a), & \text{если } p(s, d) > 0 \text{ для некоторого } s \in X, \\ \delta_{da}, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad d, a \in Y,$$

где δ_{da} — символ Кронекера.

Множество состояний Y цепи W разбивается на $\hat{H} + 1$ подмножеств Y^r , $r = 0, 1, \dots, \hat{H}$, — множеств векторов перемещений, содержащих r требований. Так как переходы между векторами перемещений с различным числом требований невозможны, то в общем случае цепь W разложима на $\hat{H} + 1$ эргодических подцепей Маркова W^r с множествами состояний Y^r . Матрица $\Gamma = (\gamma(d, a))$, $d, a \in Y$, вероятностей перехода цепи W имеет блочно-диагональную структуру, в которой отличными от нуля являются элементы диагональных подматриц $\Gamma^r = (\gamma^r(d, a))$, $d, a \in Y^r$. Матрицы Γ^r являются матрицами вероятностей перехода подцепей W^r .

Введем в рассмотрение вектор относительных интенсивностей потоков требований в сети N $\omega = (\omega_i)$, $\omega_i = (\omega_{ik})$, $i = 1, \dots, L$, $k = 1, \dots, K$, который является решением системы уравнений потоков:

$$\omega_{ik} = \sum_{j=1}^L \sum_{l=1}^K \omega_{jl} \theta_{jl,ik}, \quad i = 1, \dots, L, \quad k = 1, \dots, K,$$

с условием

$$\sum_{i=1}^L \sum_{k=1}^K \omega_{ik} = 1.$$



Из результатов работы [5] следует, что для сети N элементы инвариантной меры $\chi = (\chi(d))$, $d \in Y$, маршрутной цепи W определяются выражением

$$\chi(d) = \prod_{i=1}^L \prod_{k=1}^K \frac{\omega_{ik}^{d_{ik}}}{d_{ik}!}. \quad (2)$$

Пусть эволюция сети N описывается цепью Маркова Δ с непрерывным временем и множеством состояний X . Обозначим через $P = (p(s, s'))$, $s, s' \in X$, матрицу вероятностей перехода цепи Δ . Элементы матрицы P определяются выражением

$$p(s, s') = \sum_{\substack{d, a \in Y: \\ s' = s - d + a}} p(s, d, a),$$

где условная вероятность перехода маршрутной цепи W из состояния d в состояние a при пребывании цепи Δ в состоянии s

$$p(s, d, a) = p(s, d)\gamma(d, a), \quad s \in X, \quad d, a \in Y.$$

Стационарное распределение $\pi = (\pi(s))$, $s \in X$, цепи Δ (стационарное распределение сети N) является решением уравнения $\pi P = \pi$ с условием $\sum_{s \in X} \pi(s) = 1$.

3. СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕТИ

При получении мультипликативной формы стационарного распределения сети N используются следующие предположения, приведенные в работе [5].

1. Вероятность формирования вектора $d \in Y$ при пребывании сети в состоянии $s \in X$ имеет вид

$$p(s, d) = \frac{\Psi(s - d)\Xi(d)}{\Phi(s)}, \quad (3)$$

где $\Psi(\cdot)$, $\Xi(\cdot)$ и $\Phi(\cdot)$ — произвольные заданные функции; $\Psi(\cdot) : X \times Y \rightarrow [0, \infty)$, $\Xi(\cdot) : Y \rightarrow [0, \infty)$, а $\Phi(\cdot) : X \rightarrow (0, \infty)$.

2. Для всех $s \in X$, $d, a \in Y$ таких, что $p(s, d)\gamma(d, a) > 0$, существуют функция $f(\cdot) \in F$, где

$$F = \left\{ f(\cdot) : Y \rightarrow (0, \infty), f(d) > 0, \Xi(d)f(d) = \sum_{a \in Y} \Xi(a)f(a)\gamma(a, d), d \in Y \right\},$$

и функция $g(\cdot) : X \rightarrow (0, \infty)$, удовлетворяющие равенству

$$\frac{g(s)}{g(s - d + a)} = \frac{f(d)}{f(a)}. \quad (4)$$

Как показано в [5], сети, для которых выполняются указанные предположения, имеют мультипликативную форму стационарного распределения:

$$\pi(s) = \frac{1}{G}\Phi(s)g(s), \quad s \in X, \quad (5)$$

где нормализующая константа $G = \sum_{s \in X} \Phi(s)g(s) < \infty$.

Для сети N эти предположения выполняются. Используя (1) и (3), получим

$$\begin{aligned} \Psi(s - d) &= \prod_{i=1}^L \prod_{k=1}^K \frac{(1 - \mu_{ik})^{s_{ik} - d_{ik}}}{(s_{ik} - d_{ik})!(\mu_{ik})^{s_{ik} - d_{ik}}}, \\ \Xi(d) &= \prod_{i=1}^L \prod_{k=1}^K \frac{1}{d_{ik}!}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Phi(s) = \prod_{i=1}^L \prod_{k=1}^K \frac{1}{s_{ik}!(\mu_{ik})^{s_{ik}}}. \quad (7)$$

Так как $\Xi(d)f(d)$, $d \in Y$, являются компонентами инвариантной меры маршрутной цепи W , то из выражений (2) и (6) следует, что $f(d) = \prod_{i=1}^L \prod_{k=1}^K \omega_{ik}^{d_{ik}}$, $d \in Y$.



Равенство (4) выполняется для сети N , если

$$g(s) = \prod_{i=1}^L \prod_{k=1}^K \omega_{ik}^{s_{ik}}, \quad s \in X. \quad (8)$$

Действительно,

$$\frac{g(s)}{g(s-d+a)} = \frac{\prod_{i=1}^L \prod_{k=1}^K \omega_{ik}^{s_{ik}}}{\prod_{i=1}^L \prod_{k=1}^K \omega_{ik}^{s_{ik}-d_{ik}+a_{ik}}} = \frac{\prod_{i=1}^L \prod_{k=1}^K \omega_{ik}^{d_{ik}}}{\prod_{i=1}^L \prod_{k=1}^K \omega_{ik}^{a_{ik}}} = \frac{f(d)}{f(a)}.$$

Подставляя в (5) функции (7) и (8), получим, что стационарные вероятности состояний сети N имеют вид

$$\pi(s) = \frac{1}{G} \prod_{i=1}^L \prod_{k=1}^K \frac{\omega_{ik}^{s_{ik}}}{s_{ik}!(\mu_{ik})^{s_{ik}}}, \quad s \in X,$$

где $G = \sum_{s \in X} \prod_{i=1}^L \prod_{k=1}^K \frac{\omega_{ik}^{s_{ik}}}{s_{ik}!(\mu_{ik})^{s_{ik}}}.$

Используя стационарное распределение, можно вычислить основные стационарные характеристики сети N , например:

математическое ожидание (м. о.) числа требований класса k в системе S_i

$$\bar{s}_{ik} = \sum_{m=0}^{\hat{H}} m \sum_{\substack{s \in X: \\ s_{ik}=m}} \pi(s), \quad i \in I, \quad k \in J,$$

интенсивность входящего потока требований класса k в систему S_i

$$\lambda_{ik} = \sum_{s \in X} s_{ik} \mu_{ik} \pi(s), \quad i \in I, \quad k \in J.$$

Стационарные характеристики сети N могут быть вычислены без использования стационарного распределения и вычисления нормализующей константы с применением рекурсивного метода анализа сетей обслуживания данного типа [3, 10] по следующим формулам ($i \in I, k \in J$):

м. о. длительности пребывания требований класса k в системе S_i

$$\bar{v}_{ik} = 1/\mu_{ik}, \quad \lambda_{ik} = c\omega_{ik}, \quad \bar{s}_{ik} = \lambda_{ik}\bar{v}_{ik} = c\omega_{ik}\bar{v}_{ik},$$

где $c = \frac{\hat{H}}{\sum_{i=1}^L \sum_{k=1}^K \omega_{ik}\bar{v}_{ik}},$

м. о. числа требований класса k в сети

$$\bar{H}_k = \sum_{i=1}^L \bar{s}_{ik} = c \sum_{i=1}^L \omega_{ik}\bar{v}_{ik},$$

вероятность того, что в системе S_i находится m требований класса k ,

$$P\{s_{ik} = m\} = \frac{(\lambda_{ik}/\mu_{ik})^m}{m!} e^{-(\lambda_{ik}/\mu_{ik})}, \quad 0 \leq m \leq \hat{H},$$

вероятность пребывания требований класса k в системе S_i

$$r_{ik} = \frac{\omega_{ik}\bar{v}_{ik}}{\sum_{j=1}^L \omega_{jk}\bar{v}_{jk}}.$$

Очевидно, что $\bar{s}_{ik} = \bar{H}_k r_{ik}.$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для моделирования эволюции сети обслуживания N используются две цепи Маркова — цепь Δ и маршрутная цепь W . Формирование параметров этих цепей выполнено на основе параметров и алгоритмов функционирования сети N . Предполагается, что стационарные распределения сети и мо-



дельной цепи Δ совпадают, поэтому способ вычисления стационарного распределения цепи Δ является также и одним из способов определения стационарного распределения сети N . Преимуществом этого способа является возможность его применения для вычисления стационарного распределения достаточно широкого класса сетей обслуживания, а недостатком — необходимость выполнения большого объема вычислений даже для сетей обслуживания средней размерности. Для сетей обслуживания, обладающих свойством локального равновесия, к которым относится сеть N , эффективным в отношении объема вычислений является способ вычисления стационарного распределения с использованием мультипликативной формы стационарного распределения. При решении практических задач анализа сетей обслуживания не всегда требуется определение стационарного распределения. Поэтому в статье предложен также способ вычисления стационарных характеристик сети N с использованием рекурсивного метода анализа сетей обслуживания.

Библиографический список

1. Kelly F.P. Reversibility and stochastic networks. London: Wiley, 1979. 230 p.
2. Уолренд Дж. Введение в теорию сетей массового обслуживания. М.: Мир, 1993. 335 с.
3. Митрофанов Ю.И. Анализ сетей массового обслуживания. Саратов: Научная книга, 2005. 177 с.
4. Henderson W., Pearce C.E.M., Taylor P.G., Dijk N.M. Closed queueing networks with batch services // Queueing Systems. 1990. Vol. 6. P. 59–70.
5. Henderson W., Taylor P.G. Product form in networks of queues with batch arrivals and batch services // Queueing Systems. 1990. Vol. 6. P. 71–88.
6. Boucherie R.J., Dijk N.M. Product forms for queueing networks with state-dependent multiple job transitions // Advances in Applied Probability. 1991. Vol. 23, № 1. P. 152–187.
7. Serfozo R.F. Queueing networks with dependent nodes and concurrent movements // Queueing Systems. 1993. Vol. 13. P. 143–182.
8. Miyazawa M. Structure-reversibility and departure functions of queueing networks with batch movements and state dependent routing // Queueing Systems. 1997. Vol. 25. P. 45–75.
9. Woodward M.E. Towards the accurate modelling of high-speed communication networks with product-form discrete-time networks of queues // Computer Communications. 1998. Vol. 21. P. 1530–1543.
10. Гурьянов А.И., Митрофанов Ю.И. Определение параметров замкнутых линейных сетей систем массового обслуживания // Системное моделирование. Новосибирск, 1970. Вып. 1. С. 39–49.

УДК 519.622

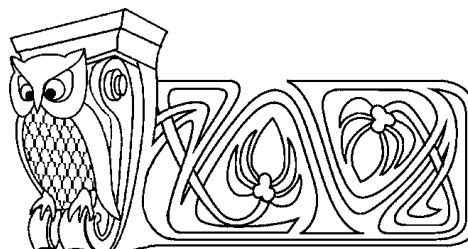
АЛГОРИТМ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА И ШАГА НА ОСНОВЕ ЯВНОГО ТРЕХСТАДИЙНОГО МЕТОДА ТИПА РУНГЕ – КУТТА

Е. А. Новиков

Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Красноярск,
отдел вычислительной математики
E-mail: novikov@icm.krasn.ru

Получено неравенство для контроля устойчивости трехстадийного метода Рунге – Кутта третьего порядка точности. Построен метод первого порядка с расширенной областью устойчивости. Сформулирован алгоритм интегрирования переменного порядка. Приведены результаты расчетов жестких задач, подтверждающие повышение эффективности алгоритма с переменным порядком по сравнению с расчетами по фиксированной схеме.

Ключевые слова: жесткие задачи, явный метод, контроль точности и устойчивости, переменный порядок.



Variable Order and Step Algorithm Based on a Stages of Runge – Kutta Method of Third Order of Accuracy

E. A. Novikov

Institute of Computational Modeling SB RAS, Krasnoyarsk,
Department of Calculus Mathematics
E-mail: novikov@icm.krasn.ru

An inequality for the stability control of 3-stage Runge – Kutta method of 3th order of accuracy is obtained. Method of first order with expanded stability domain is constructed. Algorithm of variable order is formulated. The results of stiff system computations are provided, which confirm an increase in efficiency for the variable order method as compared to a calculation with fixed scheme.

Key words: stiff problems, explicit method, stability and accuracy control, variable order.



ВВЕДЕНИЕ

При решении задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности в ряде случаев возникает необходимость применения алгоритмов на основе явных методов. Алгоритмы интегрирования на основе неявных или полуявных формул, как правило, используют обращение (декомпозицию с выбором главного элемента по строке или столбцу, а иногда и по всей матрице) матрицы Якоби, что в данном случае есть отдельная трудоемкая задача. Затраты на декомпозицию порядка N^3 арифметических операций, где N есть размерность исходной системы. Кроме того, получение элементов матрицы Якоби и составление подпрограммы ее нахождения требуют от вычислителя больших затрат личного времени. В такой ситуации предпочтительнее применять алгоритмы на основе явных формул, если жесткость задачи позволяет за разумное время получить приближенное решение.

Современные алгоритмы на основе явных методов в большинстве своем не приспособлены для решения жестких задач по следующей причине. Обычно алгоритм управления шагом интегрирования строится на контроле точности численной схемы. Это естественно, потому что основным критерием является точность нахождения решения. Однако при применении алгоритмов интегрирования на основе явных формул для решения жестких задач этот подход приводит к потере эффективности и надежности, потому что на участке установления вследствие противоречивости требований точности и устойчивости шаг интегрирования раскачивается. В лучшем случае это приводит к большому количеству возвратов (повторных вычислений решения), а шаг выбирается значительно меньше допустимого. Этого можно избежать, если наряду с точностью контролировать и устойчивость численной схемы.

В настоящее время можно выделить два подхода к контролю устойчивости [1, 2]. Первый связан с оценкой максимального собственного числа матрицы Якоби f_y через ее норму с последующим контролем (наряду с точностью) неравенства $\|hf_y\| \leq D$ [1], где положительная постоянная D зависит от размера области устойчивости. Ясно, что для явных методов, где матрица Якоби не участвует в вычислительном процессе, это приводит дополнительно к ее нахождению и, следовательно, к значительному увеличению вычислительных затрат. Второй подход основан на оценке максимального собственного числа λ_{\max} матрицы Якоби степенным методом через приращения правой части системы дифференциальных уравнений с последующим контролем неравенства $|h\lambda_{\max}| \leq D$ [2]. Во всех рассмотренных ситуациях такая оценка фактически не приводит к увеличению вычислительных затрат [3].

Целью данной работы является разработка алгоритма интегрирования переменного порядка и шага на основе трехстадийной схемы типа Рунге – Кутта.

1. МЕТОД ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Для численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad (1)$$

рассмотрим явный трехстадийный метод типа Рунге – Кутта вида

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2 + p_3 k_3, \\ k_1 &= hf(y_n), \quad k_2 = hf(y_n + \beta_{21} k_1), \quad k_3 = hf(y_n + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2), \end{aligned} \quad (2)$$

где y и f — вещественные N -мерные вектор-функции, t — независимая переменная, h — шаг интегрирования, k_1 , k_2 и k_3 — стадии метода, $p_1, p_2, p_3, \beta_{21}, \beta_{31}, \beta_{32}$ — числовые коэффициенты, определяющие свойства точности и устойчивости (2). В случае неавтономной системы

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k,$$

схема (2) записывается в следующем виде:

$$y_{n+1} = y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2 + p_3 k_3,$$



$$k_1 = hf(t_n, y_n), \quad k_2 = hf(t_n + \beta_{21}h, y_n + \beta_{21}k_1), \quad k_3 = hf(t_n + [\beta_{31} + \beta_{32}]h, y_n + \beta_{31}k_1 + \beta_{32}k_2).$$

Ниже для сокращения выкладок будем рассматривать задачу (1). Однако построенные методы можно применять для решения неавтономных задач. Получим соотношения на коэффициенты метода (2) третьего порядка точности. Для этого разложим стадии k_1 , k_2 и k_3 в ряды Тейлора до членов с h^4 включительно, т.е.

$$k_1 = hf_n, \quad k_2 = hf_n + \beta_{21}h^2 f'_n f_n + \frac{1}{2}\beta_{21}^2 h^3 f''_n f_n^2 + \frac{1}{6}\beta_{21}^3 h^4 f'''_n f_n^3 + O(h^5),$$

$$k_3 = hf_n + (\beta_{31} + \beta_{32})h^2 f'_n f_n + \beta_{21}\beta_{32}h^3 f''_n f_n^2 + \frac{1}{2}(\beta_{31} + \beta_{32})^2 h^3 f''_n f_n^2 + 0.5\beta_{21}^2\beta_{32}h^4 f'_n f''_n f_n^2 +$$

$$+ \beta_{21}(\beta_{31} + \beta_{32})\beta_{32}h^4 f''_n f'_n f_n^2 + \frac{1}{6}(\beta_{31} + \beta_{32})h^4 f'''_n f_n^3 + O(h^5).$$

Подставим полученные разложения в первую формулу (2). В результате получим

$$y_{n+1} = y_n + (p_1 + p_2 + p_3)hf_n + [\beta_{21}p_2 + (\beta_{31} + \beta_{32})p_3]h^2 f'_n f_n + h^3[\beta_{21}\beta_{32}p_3 f''_n f_n^2 + 0.5(\beta_{21}^2 p_2 +$$

$$+ (\beta_{31} + \beta_{32})^2 p_3) f''_n f_n^2] + h^4[0.5\beta_{21}^2\beta_{32}p_3 f'_n f''_n f_n^2 + \beta_{21}(\beta_{31} + \beta_{32})\beta_{32}p_3 f''_n f'_n f_n^2 + \frac{1}{6}(\beta_{31} + \beta_{32})^3 p_3 f'''_n f_n^3] + O(h^5).$$

Здесь элементарные дифференциалы вычислены на приближенном решении y_n , $f'_n = \partial f(y_n)/\partial y$, $f''_n = \partial^2 f(y_n)/\partial y^2$, $f'''_n = \partial^3 f(y_n)/\partial y^3$. Точное решение $y(t_{n+1})$ в окрестности точки t_n имеет вид

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf + 0.5h^2 f' f + \frac{h^3}{6}[f'^2 f + f'' f^2] + \frac{h^4}{24}[f'^3 f + f' f'' f^2 + 3f'' f' f^2 + f''' f^3] + O(h^4),$$

где элементарные дифференциалы вычислены на точном решении $y(t_n)$. Сравнивая полученные ряды для точного и приближенного решений до членов с h^3 включительно при условии $y_n = y(t_n)$, запишем условия третьего порядка точности схемы (2), которые имеют вид

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad \beta_{21}p_2 + (\beta_{31} + \beta_{32})p_3 = \frac{1}{2}, \quad \beta_{21}^2 p_2 + (\beta_{31} + \beta_{32})^2 p_3 = \frac{1}{3}, \quad \beta_{21}\beta_{32}p_3 = \frac{1}{6}. \quad (3)$$

Локальную ошибку δ_n численной формулы (2) можно вычислить по формуле $\delta_n = y(t_{n+1}) - y_{n+1}$. Учитывая представления $y(t_{n+1})$ и y_{n+1} в виде рядов Тейлора, получим

$$\delta_n = h^4 \left\{ \frac{1}{24} f'^3 f + \left[\frac{1}{24} - \frac{1}{2}\beta_{21}^2\beta_{32}p_3 \right] f' f'' f^2 + \left[\frac{1}{8} - \beta_{21}(\beta_{31} + \beta_{32})\beta_{32}p_3 \right] f'' f' f^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{24} - \frac{1}{6}\beta_{21}^3 p_2 - \frac{1}{6}(\beta_{31} + \beta_{32})^3 p_3 \right] f''' f^3 \right\} + O(h^5). \quad (4)$$

В нелинейной системе алгебраических уравнений (3) присутствуют два свободных коэффициента. Исследуем три варианта.

Вариант 1. Положим $\beta_{21} = \beta_{31} + \beta_{32}$ и $\beta_{31} = \beta_{32}$. Это означает, что приращения k_2 и k_3 будут вычислены в одной и той же точке $t_n + \beta_{21}h$, причем вклад k_1 и k_2 при определении k_3 учитывается одинаково. Тогда нелинейную систему (3) можно переписать в виде

$$1) p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad 2) \beta_{21}(p_2 + p_3) = \frac{1}{2}, \quad 3) \beta_{21}^2(p_2 + p_3) = \frac{1}{3}, \quad 4) \beta_{21}\beta_{32}p_3 = \frac{1}{6}.$$

Из второго и третьего уравнений имеем $\beta_{21} = 2/3$. Из соотношений $\beta_{21} = \beta_{31} + \beta_{32}$ и $\beta_{31} = \beta_{32}$ запишем $\beta_{31} = \beta_{32} = 1/3$. Из четвертого уравнения системы получим $p_3 = 3/4$. Из равенства $p_2 + p_3 = 3/4$ имеем $p_2 = 0$. Наконец, из первого соотношения системы получим $p_1 = 1/4$. В результате коэффициенты схемы (2) определяются однозначно и имеют вид

$$\beta_{21} = \frac{2}{3}, \quad \beta_{31} = \beta_{32} = \frac{1}{3}, \quad p_1 = \frac{1}{4}, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = \frac{3}{4}. \quad (5)$$

При данных соотношениях локальную ошибку δ_n схемы (2) можно записать следующим образом:

$$\delta_n = \frac{1}{24} h^4 f'^3 f + \frac{1}{216} h^4 f''' f^3 - \frac{1}{72} h^4 f' f'' f^2 + \frac{1}{72} h^4 f'' f' f^2 + O(h^5).$$



Вариант 2. Минимизируем локальную ошибку (4). Для этого, учитывая вид (4), вместо (3) рассмотрим следующую расширенную нелинейную систему:

$$\begin{aligned} 1) p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad 2) \beta_{21}p_2 + (\beta_{31} + \beta_{32})p_3 = \frac{1}{2}, \quad 3) \beta_{21}^2p_2 + (\beta_{31} + \beta_{32})^2p_3 = \frac{1}{3}, \\ 4) \beta_{21}\beta_{32}p_3 = \frac{1}{6}, \quad 5) \beta_{21}^2\beta_{32}p_3 = \frac{1}{12}, \quad 6) \beta_{21}(\beta_{31} + \beta_{32})\beta_{32}p_3 = \frac{1}{8}. \end{aligned} \quad (6)$$

При $1.5\beta_{21} = \beta_{31} + \beta_{32}$ два последних уравнения (6) совпадают. Из четвертого и пятого соотношений (6) имеем $\beta_{21} = 0.5$. Из второго и третьего равенств получим $p_2 = 1/3$ и $p_3 = 4/9$. Из первого уравнения (6) запишем $p_1 = 2/9$, а из четвертого имеем $\beta_{32} = 3/4$. Наконец, из соотношения $\beta_{31} + \beta_{32} = 3/4$ запишем $\beta_{31} = 0$. В результате коэффициенты метода (2) с минимальной локальной ошибкой можно записать в виде

$$\beta_{21} = \frac{1}{2}, \quad \beta_{31} = 0, \quad \beta_{32} = \frac{3}{4}, \quad p_1 = \frac{2}{9}, \quad p_2 = \frac{1}{3}, \quad p_3 = \frac{4}{9}. \quad (7)$$

При данных соотношениях локальную ошибку δ_n схемы (2) можно записать следующим образом:

$$\delta_n = \frac{h^4}{24}f'^3f - \frac{h^4}{288}f'''f^3 + O(h^5).$$

При использовании (2) с наборами коэффициентов (5) и (7) ни одна стадия не вычисляется в точке t_{n+1} . При быстром изменении решения это может приводить к понижению точности расчетов.

Вариант 3. Положим $\beta_{21} = 0.5$ и $\beta_{31} + \beta_{32} = 1$. Тогда на каждом шаге приращения k_1 , k_2 и k_3 вычисляются в точках t_n , $t_n + h/2$ и $t_n + h$ соответственно. В этом случае условия третьего порядка записываются в виде

$$1) p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad 2) \frac{1}{2}p_2 + p_3 = \frac{1}{2}, \quad 3) \frac{1}{4}p_2 + p_3 = \frac{1}{3}, \quad 4) \beta_{32}p_3 = \frac{1}{3}.$$

Из второго и третьего уравнения данной системы имеем $p_2 = 2/3$ и $p_3 = 1/6$. Из первого и последнего уравнений имеем $p_1 = 1/6$ и $\beta_{32} = 2$. Из равенства $\beta_{31} + \beta_{32} = 1$ следует $\beta_{31} = -1$. В результате коэффициенты метода (2) можно записать в следующем виде:

$$\beta_{21} = \frac{1}{2}, \quad \beta_{31} = -1, \quad \beta_{32} = 2, \quad p_1 = \frac{1}{6}, \quad p_2 = \frac{2}{3}, \quad p_3 = \frac{1}{6}. \quad (8)$$

При данных соотношениях локальную ошибку δ_n схемы (2) можно записать следующим образом:

$$\delta_n = \frac{h^4}{24} \left[f'^3f - f''f'f^2 - \frac{1}{3}f'''f^3 \right] + O(h^5).$$

2. КОНТРОЛЬ ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Неравенство для контроля точности вычислений метода третьего порядка построим с использованием идеи вложенных методов. Для этого рассмотрим вспомогательную схему

$$y_{n+1,1} = y_n + r_1k_1 + r_2k_2,$$

где k_1 и k_2 определены в (2). Потребуем, чтобы данный метод имел второй порядок точности. Разложение приближенного решения $y_{n+1,1}$ в виде ряда Тейлора по степеням h до членов с h^2 включительно имеет вид

$$y_{n+1,1} = y_n + (r_1 + r_2)hf_n + \beta_{21}r_2h^2f'_nf_n + O(h^3).$$

Сравнивая ряды для $y(t_{n+1})$ и $y_{n+1,1}$, видим, что данное требование будет выполнено, если $r_1 + r_2 = 1$, $\beta_{21}r_2 = 0.5$. Отсюда получим $r_2 = 0.5\beta_{21}$, $r_1 = 1 - r_2$, где значение β_{21} определено в (5), (7) или (8).

С помощью идеи вложенных методов оценку ошибки $\varepsilon_{n,3}$ метода третьего порядка можно оценить по формуле $\varepsilon_{n,3} = y_{n+1} - y_{n+1,1} = (p_1 - r_1)k_1 + (p_2 - r_2)k_2 + p_3k_3$ [3]. Тогда неравенство для контроля точности вычислений имеет вид

$$\|(p_1 - r_1)k_1 + (p_2 - r_2)k_2 + p_3k_3\| \leq \varepsilon,$$

где $\|\cdot\|$ — некоторая норма в R^N , ε — требуемая точность интегрирования. В конкретных расчетах применялся метод (2) с коэффициентами (8), как наиболее надежный. Тогда неравенство для контроля точности имеет вид

$$\frac{1}{6}\|k_1 - 2k_2 + k_3\| \leq \varepsilon.$$



3. КОНТРОЛЬ УСТОЙЧИВОСТИ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЫ

Неравенство для контроля устойчивости численной формулы (2) построим предложенным в [3] способом. Запишем стадии k_1 , k_2 и k_3 применительно к задаче $y' = Ay$, где A есть матрица с постоянными коэффициентами. В результате получим

$$k_1 = Xy_n, \quad k_2 = (X + \beta_{21}X^2)y_n, \quad k_3 = [X + (\beta_{31} + \beta_{32})X^2 + \beta_{21}\beta_{32}X^3]y_n,$$

где $X = hA$. Найдем коэффициенты d_1 , d_2 и d_3 из условия выполнения равенства

$$d_1k_1 + d_2k_2 + d_3k_3 = X^3y_n.$$

Легко видеть, что данное требование выполняется при следующих значениях:

$$d_1 = \frac{\beta_{31} + \beta_{32} - \beta_{21}}{\beta_{21}^2\beta_{32}}, \quad d_2 = -\frac{\beta_{31} + \beta_{32}}{\beta_{21}^2\beta_{32}}, \quad d_3 = \frac{1}{\beta_{21}\beta_{32}}.$$

Нетрудно видеть также, что

$$\frac{1}{\beta_{21}}(k_2 - k_1) = X^2y_n.$$

Тогда согласно [3] оценку максимального собственного числа $v_{n,3} = h\lambda_{n \max}$ матрицы Якоби системы (1) можно вычислить по формуле

$$v_{n,3} = \beta_{21} \max_{1 \leq i \leq N} (|d_1k_1^i + d_2k_2^i + d_3k_3^i|/|k_2^i - k_1^i|). \quad (9)$$

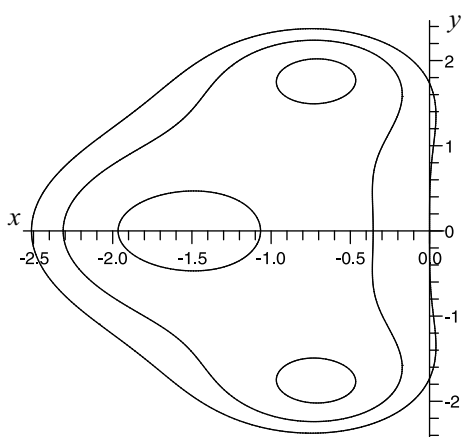


Рис. 1. Область устойчивости метода третьего порядка точности

зададим формулой $h^{st} = q_2h_n$, где q_2 , учитывая равенство $v_{n,3} = O(h_n)$, определяется из уравнения $q_2v_{n,3} = 2.5$. В результате прогнозируемый шаг h_{n+1} вычисляется по следующей формуле:

$$h_{n+1} = \max[h_n, \min(h^{ac}, h^{st})]. \quad (10)$$

где h_n есть последний успешный шаг интегрирования. Отметим, что формула (10) применяется для прогноза величины шага интегрирования h_{n+1} после успешного вычисления решения с предыдущим шагом h_n , и поэтому фактически не приводит к увеличению вычислительных затрат.

Если шаг по устойчивости меньше последнего успешного, то он уменьшен не будет, потому что причиной этого может быть грубость оценки максимального собственного числа. Однако шаг не будет и увеличен, потому что не исключена возможность неустойчивости численной схемы. Если шаг по устойчивости должен быть уменьшен, то в качестве следующего шага будет применяться последний успешный шаг h_n . В результате для выбора шага и предлагается формула (10). Данная формула позволяет стабилизировать поведение шага на участке установления решения, где определяющую роль играет устойчивость. Собственно говоря, именно наличие данного участка существенно ограничивает возможности применения явных методов для решения жестких задач.



4. МЕТОД ПЕРВОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Для численного решения задачи (1) рассмотрим схему вида

$$y_{n+1} = y_n + r_1 k_1 + r_2 k_2 + r_3 k_3, \tag{11}$$

$$k_1 = hf(y_n), \quad k_2 = hf(y_n + \beta_{21} k_1), \quad k_3 = hf(y_n + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2),$$

где коэффициенты β_{21} , β_{31} и β_{32} заданы при описании метода третьего порядка точности, а r_1 , r_2 и r_3 подлежат определению. Построим менее точную схему с максимальным интервалом устойчивости. Для этого применим (11) для решения скалярного тестового уравнения $y' = \lambda y$, $Re(\lambda) < 0$, где λ интерпретируется как некоторое собственное число матрицы Якоби задачи (1). Получим $y_{n+1} = Q(x)y_n$, где функция устойчивости $Q(x)$ имеет вид

$$Q(x) = 1 + (r_1 + r_2 + r_3)x + [\beta_{21}r_2 + (\beta_{31} + \beta_{32})r_3]x^2 + \beta_{21}\beta_{32}r_3x^3, \quad x = h\lambda.$$

Требование первого порядка точности приводит к соотношению $r_1 + r_2 + r_3 = 1$, которое будем считать выполненным. Теперь выберем r_2 и r_3 таким образом, чтобы метод (11) имел максимальный интервал устойчивости. Для этого рассмотрим многочлен Чебышева $T_3(z) = (4z^3 - 3z)$ на промежутке $[-1, 1]$. Проведем замену переменных, полагая $z = 1 - 2x/\gamma$. Получим $T_3(x) = 1 - 18x/\gamma + 48x^2/\gamma^2 - 32x^3/\gamma^3$, при этом отрезок $[\gamma, 0]$ отображается на отрезок $[-1, 1]$. Нетрудно показать, что среди всех многочленов вида $P_3(x) = 1 + x + c_2x^2 + c_3x^3$ для $T_3(x)$ неравенство $|T_3(x)| \leq 1$ выполняется на максимальном интервале $[\gamma, 0]$, $\gamma = -18$ [3]. Потребуем совпадения коэффициентов $Q(x)$ и $T_3(x)$ при $\gamma = -18$. Это приводит к соотношениям $r_1 + r_2 + r_3 = 1$, $\beta_{21}r_2 + (\beta_{31} + \beta_{32})r_3 = 4/27$, $\beta_{21}\beta_{32}r_3 = 4/729$. В результате имеем коэффициенты

$$r_3 = \frac{4}{729\beta_{21}\beta_{32}}, \quad r_2 = \frac{4/27 - (\beta_{31} + \beta_{32})r_3}{\beta_{21}}, \quad r_1 = 1 - r_2 - r_3$$

метода первого порядка точности с максимальным интервалом устойчивости, локальная ошибка $\delta_{n,1}$ которого имеет вид $\delta_{n,1} = \frac{19}{54}h^2 f' f + O(h^3)$. Для контроля точности численной формулы первого порядка будем использовать оценку локальной ошибки. Учитывая, что $k_2 - k_1 = \beta_{21}h^2 f'_n f_n + O(h^3)$ и вид локальной ошибки, неравенство для контроля точности записывается в виде

$$\frac{19}{54|\beta_{21}|} \|k_2 - k_1\| \leq \varepsilon,$$

где $\|\cdot\|$ — некоторая норма в R^N , ε — требуемая точность расчетов.

Построим неравенство для контроля устойчивости метода первого порядка. Область устойчивости метода первого порядка приведена на рис. 2.

Интервал устойчивости численной схемы (11) первого порядка точности равен 18 [3]. Поэтому для ее контроля устойчивости можно применять неравенство $v_{n,3} \leq 18$, где $v_{n,3}$ определяется по формуле (9).

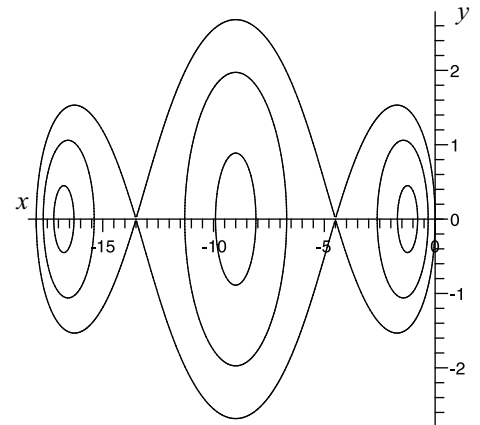


Рис. 2. Область устойчивости метода первого порядка точности

5. АЛГОРИТМ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА И ШАГА

На основе построенных методов первого и третьего порядков точности легко сформулировать алгоритм переменного порядка и шага. Сначала для расчетов используют метод третьего порядка как дающий более точные результаты. Переход на схему первого порядка осуществляется при нарушении неравенства $v_{n,3} \leq 2.5$. Обратный переход на метод третьего порядка происходит в случае выполнения неравенства $v_{n,3} \leq 2.5$. При расчетах по методу первого порядка наряду с точностью контролируется устойчивость, а выбор прогнозируемого шага производится по аналогии с методом третьего порядка точности по формуле (10).



Построенный алгоритм интегрирования будем называть RKЗРР(Ас,St). При значениях параметра Ас, равном 1 или 3, расчеты проводятся соответственно методом первого или третьего порядка точности, при Ас =0 используют расчеты с переменным порядком. Если St = 0, то устойчивость контролируется, при St=1 — не контролируется. При расчетах с переменным порядком устойчивость всегда контролируется.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Расчеты проводились на Intel(R) Core(TM)2 Quad CPU с двойной точностью. В конкретных расчетах левая часть неравенства для контроля точности вычисляется по формуле

$$\|\delta_n\| = \max_{1 \leq i \leq N} \frac{|\delta_n^i|}{|y_n^i| + r},$$

где i — номер компоненты, r — положительный параметр. Если по i -й компоненте решения выполняется неравенство $|y_n^i| < r$, то контролируется абсолютная ошибка $r\varepsilon$, в противном случае — относительная ошибка ε . В расчетах параметр r выбирался таким образом, чтобы по всем компонентам решения фактическая точность соответствовала задаваемой. Значение ε полагалось равным 10^{-3} . При такой точности наиболее эффективны методы третьего порядка.

Сравнение эффективности алгоритма переменного порядка и шага RKЗРР(0,0) проводилось с трехстадийным методом Рунге – Кутты третьего порядка точности с контролем (алгоритм RKЗРР(3,0)) и без контроля (алгоритм RKЗРР(3,1)) устойчивости. Далее через isa , iwo и ifu обозначены соответственно суммарное число шагов интегрирования, число повторных вычислений решения (возвратов) вследствие нарушения требуемой точности расчетов и число вычислений правой части задачи (1).

Пример 1 [4].

$$\begin{aligned} y_1' &= -0.04y_1 + 0.01y_2y_3, & y_2' &= 400y_1 - 100y_2y_3 - 3000y_2^2, & y_3' &= 30y_2^2, \\ t &\in [0, 40], & y_1(0) &= 1, & y_2(0) &= y_3(0) = 0, & h_0 &= 10^{-5}. \end{aligned} \quad (12)$$

Алгоритмом переменного порядка и шага RKЗРР(0,0) решение задачи (12) удалось вычислить с затратами $isa = 6\ 889$, $iwo = 124$, $ifu = 20\ 792$. Для метода третьего порядка RKЗРР(3,1) без контроля устойчивости затраты равны $isa = 44\ 441$, $iwo = 11\ 758$, $ifu = 156\ 839$, а для алгоритма RKЗРР(3,0) с контролем устойчивости — $isa = 44\ 951$, $iwo = 655$, $ifu = 136\ 163$.

Пример 2 [4].

$$\begin{aligned} y_1' &= y_3 - 100y_1y_2, & y_2' &= y_3 + 2y_4 - 100y_1y_2 - 20000y_2^2, & y_3' &= -y_3 + 100y_1y_2, \\ t &\in [0, 20], & y_1(0) &= 0, & y_2(0) &= y_3(0) = 0, & h_0 &= 2.5 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \quad (13)$$

Алгоритмом RKЗРР(0,0) решение задачи (13) вычислено с затратами $isa = 366$, $iwo = 6$, $ifu = 1\ 105$. Для метода третьего порядка RKЗРР(3,1) без контроля устойчивости затраты равны $isa = 2\ 240$, $iwo = 555$, $ifu = 7\ 830$, а для алгоритма RKЗРР(3,0) с контролем устойчивости — $isa = 1\ 032$, $iwo = 20$, $ifu = 3\ 136$.

Пример 3 [4].

$$\begin{aligned} y_1' &= -0.013y_1 - 1000y_2y_3, & y_2' &= -2500y_2y_3, & y_3' &= -0.013y_1 - 1000y_1y_3 - 2500y_2y_3, \\ t &\in [0, 50], & y_1(0) &= 0, & y_2(0) &= y_3(0) = 0, & h_0 &= 2.9 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \quad (14)$$

Алгоритмом RKЗРР(0,0) решение задачи (14) вычислено с затратами $isa = 12\ 689$, $iwo = 106$, $ifu = 38\ 173$. Для метода третьего порядка RKЗРР(3,1) без контроля устойчивости затраты равны $isa = 74\ 281$, $iwo = 19\ 555$, $ifu = 261\ 953$, а для алгоритма RKЗРР(3,0) с контролем устойчивости — $isa = 61\ 047$, $iwo = 1\ 686$, $ifu = 186\ 513$.



Пример 4 [4].

$$y_1' = 77.27(y_2 - y_1 y_2 + y_1 - 8.375 \cdot 10^{-6} y_1^2), \quad y_2' = (-y_2 - y_1 y_2 + y_3)/77.27, \quad y_3' = 0.161(y_1 - y_3), \quad (15)$$

$$t \in [0, 300], \quad y_1(0) = 4, \quad y_2(0) = 1.1, \quad y_3(0) = 4, \quad h_0 = 10^{-3}.$$

Задача (15) является простейшей математической моделью с периодическим решением для описания реакции Белоусова – Жаботинского (орегонатор). Она является «слишком» жесткой для явных методов. Тем не менее пример (15) приведен здесь с целью подчеркнуть преимущество методов с контролем устойчивости, а также алгоритма переменного порядка и шага.

Алгоритмом RKЗРР(0,0) решение задачи (15) вычислено с затратами $isa = 438\ 941$, $iwo = 965$, $ifu = 1\ 317\ 819$. Для метода третьего порядка RKЗРР(3,1) без контроля устойчивости затраты $isa = 2\ 904\ 014$, $iwo = 768\ 860$, $ifu = 10\ 249\ 762$, а для алгоритма RKЗРР(3,0) с контролем устойчивости — $isa = 2\ 871\ 743$, $iwo = 11\ 653$, $ifu = 8\ 638\ 535$.

Из сравнения результатов расчетов жестких задач следует, что контроль устойчивости всегда приводит к повышению эффективности. Это является следствием устранения некоторых возвратов (повторных вычислений решения), возникающих из-за неустойчивости численной формулы. В конце интервала интегрирования фактическая точность вычислений для всех алгоритмов лучше задаваемой. Такая же тенденция сохраняется при интегрировании всех рассмотренных задач [4–5].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование неравенства для контроля устойчивости фактически не приводит к увеличению вычислительных затрат, потому что оценка максимального собственного числа матрицы Якоби системы (1) осуществляется через ранее вычисленные стадии и не приводит к росту числа вычислений функции f . Такая оценка получается грубой. Однако применение контроля устойчивости в качестве ограничителя на рост шага позволяет избежать негативных последствий грубости оценки. Более того, в некоторых случаях это приводит к нестандартно высокому повышению эффективности алгоритма. На участке установления за счет контроля устойчивости старые ошибки стремятся к нулю, а новые невелики за счет малости производных решения. В некоторых случаях вместо оценки максимального собственного числа оценивается следующее по порядку. Шаг интегрирования становится больше максимально допустимого и с таким шагом осуществляется интегрирование до тех пор, пока не нарушается неравенство для контроля точности. Как правило, число таких шагов невелико. Однако величина шага может на порядок превышать максимальный шаг по устойчивости. После нарушения неравенства для контроля точности шаг уменьшается до максимально возможного. Такой эффект может повторяться многократно в зависимости от длины участка установления. В результате средний шаг интегрирования может превышать максимально допустимый.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00106 и 11-01-00224).

Библиографический список

<p>1. <i>Shampine L. M.</i> Implementation of Rosenbrock method // ACM Transaction on Mathematical Software. 1982. Vol. 8, № 5. P. 93–113.</p> <p>2. <i>Новиков Е. А., Новиков В. А.</i> Контроль устойчивости явных одношаговых методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 5. С. 1058–1062.</p>	<p>3. <i>Новиков Е. А.</i> Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука, 1997. 197 с.</p> <p>4. <i>Eright W. H., Hull T. E.</i> Comparing numerical methods for the solutions of systems of ODE's // BIT. 1975. № 15. P. 10–48.</p> <p>5. <i>Хайпер Э., Ваннер Г.</i> Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1990. 685 с.</p>
--	--



УДК 517.51

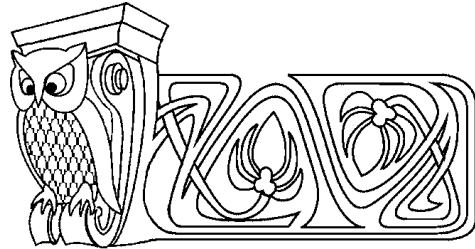
ОБ ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ ОТОБРАЖЕНИИ

В. Г. Тимофеев

Саратовский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: shprotby@gmail.com

Статья посвящена изучению специального отображения, связанного со структурой экстремальных функций в точных неравенствах Колмогорова на полуоси в равномерной метрике.

Ключевые слова: экстремальный сплайн, неравенства Колмогорова.



On One Special Mapping

V. G. Timofeev

Saratov State University,
Chair of Mathematical Analysis
E-mail: shprotby@gmail.com

The paper deals with the study of a special mapping in connection with the structure of extremal functions in exact Kolmogorov inequalities on the half-line in the uniform metrics.

Key words: extremal spline, Kolmogorov inequalities.

Пусть $C_n[0, \infty)$ — множество функций $x(t)$, непрерывных на $[0, \infty)$ вместе с производными $(n-1)$ -го порядка включительно, таких что: 1) $\sup_{0 \leq t < \infty} |x(t)| < \infty$; 2) $x^{(n-1)}(t)$ удовлетворяет на $[0, \infty)$ условию Липшица первого порядка.

Очевидно, что для всякой функции $x(t) \in C_n[0, \infty)$ существует почти всюду на $[0, \infty)$ производная n -го порядка, для которой $\sup_{0 \leq t < \infty} |x^{(n)}(t)| < \infty$.

Положим $\sup_{0 \leq t < \infty} |g(t)| = \|g\|$. Это обозначение сохраним и в том случае, когда $g(t)$ определена лишь почти всюду на $[0, \infty)$. Обозначим через $U_n = U_n[0, \infty)$ множество функций из $C_n[0, \infty)$, для которых $\|x\| \leq 1$, $\|x^{(n)}\| \leq n!$. Из [1] вытекает, что

$$\mu_{nk} = \sup_{x \in U_n} \|x^{(k)}\| < \infty, \quad \|x^{(k)}\| \leq \frac{\mu_{nk}}{\left(\sqrt[n]{n!}\right)^k} \|x\|^{\frac{n-k}{n}} \|x^{(n)}\|^{\frac{k}{n}}, \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (1)$$

Отметим, что неравенства (1) точные.

Представляемая работа посвящена построению одного специального отображения, связанного со структурой экстремальных функций для неравенств (1), известных как неравенства типа Колмогорова об оценках норм промежуточных производных через норму функции и норму старших производных в равномерной метрике на полуоси.

Подобные вопросы часто возникают при решении экстремальных задач типа Ландау, Харди, Турана и т. п.

Отметим, что для $n = 4$ задача о структуре экстремального сплайна в (1) полностью решена Н.П. Купцовым; для $n = 5$ аналогичные исследования проведены автором в работе [2].

При дальнейшем изложении считаем $n = 6$. Пусть G' — открытый прямоугольник в плоскости координат Θ и L , определенный неравенствами $0 < \Theta < 1$, $1 < L < 2/\sqrt[6]{61}$ (рис. 1).

Рассмотрим отображение замкнутого прямоугольника \bar{G}' , задаваемое формулами

$$\begin{cases} x = \frac{L^6(2\Theta^6 - 6\Theta^5 + 10\Theta^3 - 3) + 2}{L^5}, \\ y = \frac{-10 - L^6(10\Theta^6 - 30\Theta^5 + 30\Theta^3 - 5)}{2L^4}. \end{cases} \quad (2)$$

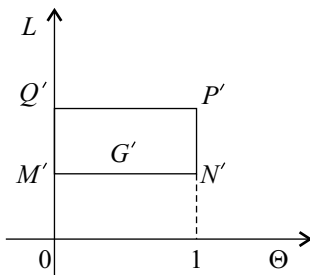


Рис. 1

Открытая область G , являющаяся образом G' при указанном отображении, схематически изображена на рис. 2.



Убедимся, что отображение \bar{G}' на \bar{G} взаимнооднозначное. При $0 < \Theta < 1$ и $1 \leq L \leq 2/\sqrt[6]{61}$ определим знаки частных производных $\partial x/\partial\Theta$, $\partial x/\partial L$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial\Theta} &= L(12\Theta^5 - 30\Theta^4 + 30\Theta^2) = \\ &= 6L\Theta^2(2\Theta^3 + 5(1 - \Theta^2)) > 0, \\ \frac{\partial x}{\partial L} &= 2\Theta^6 - 6\Theta^5 + 10\Theta^3 - 3 - \frac{10}{L^6} = \\ &= 2\Theta^3(\Theta^3 + 2 + 3(1 - \Theta^2)) - 3 - \frac{10}{L^6} < 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что каждая из сторон прямоугольника \bar{G}' отображается на соответствующие участки границы \bar{G} взаимнооднозначно. Очевидно, что параметры L и Θ можно рассматривать как криволинейные координаты на поверхности, задаваемой формулами (2), поскольку Якобиан

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(\Theta, L)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\Theta} & \frac{\partial x}{\partial L} \\ \frac{\partial y}{\partial\Theta} & \frac{\partial y}{\partial L} \end{vmatrix} = 15L^2\Theta^2 \left(-4\Theta^9 + 22\Theta^8 - 30\Theta^7 - 18\Theta^6 + 52\Theta^5 - \right. \\ &\quad \left. -32\Theta^3 + 5\Theta^2 + 1 - \frac{4\Theta^3}{L^6} + \frac{10\Theta^2}{L^6} + \frac{10}{L^6} \right) > 0 \end{aligned}$$

при $0 < \Theta < 1$ и $1 \leq L \leq 2/\sqrt[6]{61}$.

Рассмотрим в плоскости XOY криволинейный четырехугольник $M_1Q_1P_1N_1$. Укажем важные для дальнейшего линии и точки этого четырехугольника: TV — кривая, соответствующая $\Theta = 1/2$, кривая UM_2 симметрична относительно оси OY границе области M_1Q_1 , U — точка пересечения кривых Q_1P_1 и $\tilde{Q}M_2$, F — точка пересечения кривых VT и UM_2 .

Обозначим через K преобразование поверхности \bar{G} , ставящее в соответствие точке $a(\Theta, L)$ точку $Ka(1 - \Theta, L)$, а через S — преобразование области \bar{G} , ставящее в соответствие точке $A(x, y)$ точку $SA(-x, y)$. Очевидно, что преобразование K не выводит точки за пределы области \bar{G} , а S — может вывести преобразуемую точку за ее пределы.

Сформулируем основные свойства рассматриваемых отображений K и S .

Теорема 1. *Найдется по крайней мере одна точка z_0 , принадлежащая дуге UM_2 , параметрическое уравнение которой имеет вид*

$$\begin{cases} x = \frac{3\alpha^6 - 2}{\alpha^5}, \\ y = \frac{5\alpha^6 - 10}{2\alpha^4}, \end{cases} \quad \alpha \in \left[1, \frac{2}{\sqrt[6]{61}} \right], \quad (3)$$

обладающая свойством $(SK)^n z_0 \in G$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть J_1 и J_2 — два множества открытой дуги UM_2 таких, что J_1 (соответственно J_2) состоит из точек дуги, обладающих свойством: существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $(SK)^{n-1}z \in \bar{G}$, а $(SK)^n z \notin \bar{G}$, причем $(SK)^n z$ принадлежит левой (соответственно правой) полуплоскости. Множества J_1 и J_2 не пусты, поскольку J_1 содержит все точки дуги FM_2 , а J_2 содержит все точки той же дуги, близкие к U .

Из непрерывности преобразований K и S вытекает, что J_1 и J_2 — открыты по отношению к дуге UM_2 . Поскольку $J_1 \cap J_2 = \emptyset$, J_1 и J_2 не пусты, то они не могут исчерпать всю дугу UM_2 . Отсюда следует нужное утверждение. \square

Замечание. 1. В дальнейшем будем обозначать через α_0 значение параметра α , соответствующее точке z_0 .

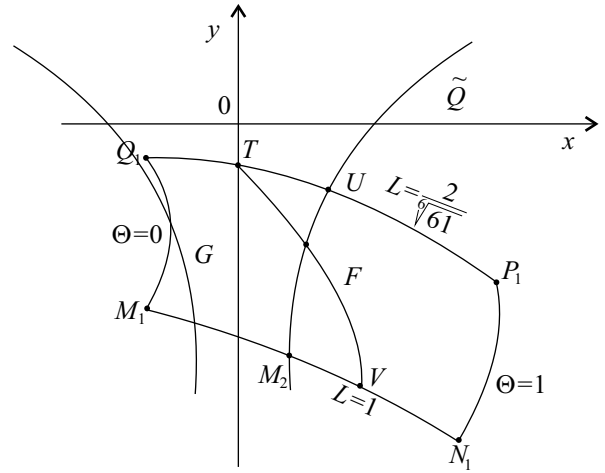


Рис. 2



2. В области G точке z_0 будет соответствовать единственная точка с координатами:

$$\begin{cases} x = \frac{3\alpha_0^6 - 2}{\alpha_0^5}, \\ y = \frac{-10 + 5\alpha_0^6}{2\alpha_0^4}. \end{cases}$$

3. Точка z_0 будет играть важную роль в теореме 5 при построении экстремальных функций для неравенств (1).

Теорема 2. Для всякой точки $z \neq T$ замкнутого четырехугольника Q_1TVM_1 , состоящего из точек области \bar{G} , криволинейные координаты Θ и L которых удовлетворяют неравенствам $0 \leq \Theta \leq 1/2$, $1 \leq L \leq 2/\sqrt[6]{61}$, существует $n \in \mathbb{N}$, что $(SK)^n z \notin \bar{G}$.

Доказательство. От противного. Пусть существует $\tilde{z} \neq T \in Q_1TVM_1$ такая, что $(SK)^n \tilde{z} \in Q_1TVM_1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Обозначим криволинейные координаты точки $(SK)^n \tilde{z}$ через Θ_n и L_n . Тогда

$$\begin{cases} \frac{-2 - L_n^6(2(1 - \Theta_n)^6 - 6(1 - \Theta_n)^5 + 10(1 - \Theta_n)^3 - 3)}{L_n^5} = \\ = \frac{L_{n+1}^6(2\Theta_{n+1}^6 - 6\Theta_{n+1}^5 + 10\Theta_{n+1}^3 - 3) + 2}{L_{n+1}^5}, \\ \frac{-10 - L_n^6(10(1 - \Theta_n)^6 - 30(1 - \Theta_n)^5 + 30(1 - \Theta_n)^3 - 5)}{2L_n^4} = \\ = \frac{-10 - L_{n+1}^6(10\Theta_{n+1}^6 - 30\Theta_{n+1}^5 + 30\Theta_{n+1}^3 - 5)}{2L_{n+1}^4}. \end{cases} \quad (4)$$

Из построения отображений K и S (см. рис. 2) следует, что $L_{n+1} < L_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = L$. Выберем последовательность $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$, чтобы существовали пределы $\lim_{k \rightarrow \infty} \Theta_{n_k} = \Theta_1$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \Theta_{n_k+1} = \Theta_2$. Это всегда возможно сделать. Переходя в (4) к пределу, из второго соотношения получим равенство

$$10(1 - \Theta_1)^6 - 30(1 - \Theta_1)^5 + 30(1 - \Theta_1)^3 = 10\Theta_2^6 - 30\Theta_2^5 + 30\Theta_2^3,$$

которое выполняется, если $1 - \Theta_1 = \Theta_2$. Поскольку $0 \leq \Theta_i \leq 1/2$, $i = 1, 2$, то $\Theta_1 = \Theta_2 = 1/2$. Тогда первое равенство дает $L^6 61/64 = 1$, откуда следует, что $L = 2/\sqrt[6]{61}$. Поскольку $L < L_1 \leq 2/\sqrt[6]{61}$, то полученное противоречие завершает доказательство.

Теорема 3. Единственной неподвижной точкой преобразования SK , принадлежащей области \bar{G} является точка $T(1/2; 2/\sqrt[6]{61})$ (в декартовой системе координат $(0; -15/\sqrt[3]{61})$).

Доказательство. Пусть $z_0(\Theta, L)$ — неподвижная точка преобразования SK . Тогда $z_0 = SK z_0$ и

$$\begin{cases} \frac{L^6(2\Theta^6 - 6\Theta^5 + 10\Theta^3 - 3) + 2}{L^5} = \frac{-2 - L^6(2(1 - \Theta)^6 - 6(1 - \Theta)^5 + 10(1 - \Theta)^3 - 3)}{L^5}, \\ \frac{-10 - L^6(10\Theta^6 - 30\Theta^5 + 30\Theta^3 - 5)}{2L^4} = \frac{-10 - L^6(10(1 - \Theta)^6 - 30(1 - \Theta)^5 + 30(1 - \Theta)^3 - 5)}{2L^4}. \end{cases} \quad (5)$$

Второе соотношение (5) дает $\Theta = 1/2$, а первое приводит к равенству $L = 2/\sqrt[6]{61}$. \square

Исследуем скорость сходимости последовательности точек $(SK)^n z_0$ к неподвижной точке отображения SK .

Теорема 4. Пусть z_0 — точка кривой (3), существование которой установлено в теореме 1. Обозначим $z_n(\Theta_n, L_n) = (SK)^n z_0$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\Theta_n = \frac{1}{2}(1 + \sigma_n), \quad L_n = \frac{2}{\sqrt[6]{61}}(1 - \tau_n),$$

где $\sigma_n > 0$, $\tau_n > 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n < \infty$.



Доказательство. Следствием теоремы 2 является условие $1/2 \leq \Theta_n \leq 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $\sigma_n = 2\Theta_n - 1$, $\tau_n = 1 - \frac{\sqrt[6]{61}}{2}L_n$. Обозначим декартовы координаты точки z_n через (A_n, B_n) . Тогда имеем

$$\begin{cases} A_n = \frac{L_n^6(2\Theta_n^6 - 6\Theta_n^5 + 10\Theta_n^3 - 3) + 2}{L_n^5}, \\ B_n = \frac{-10 - L_n^6(10\Theta_n^6 - 30\Theta_n^5 + 30\Theta_n^3 - 5)}{2L_n^4}, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} A_{n+1} = \frac{-2 - L_n^6(2(1 - \Theta_n)^6 - 6(1 - \Theta_n)^5 + 10(1 - \Theta_n)^3 - 3)}{L_n^5}, \\ B_{n+1} = \frac{-10 - L_n^6(10(1 - \Theta_n)^6 - 30(1 - \Theta_n)^5 + 30(1 - \Theta_n)^3 - 5)}{2L_n^4}. \end{cases} \quad (7)$$

Отсюда при $\Theta_n \in (1/2; 1)$ и (6) и (7) следует $A_{n+1} - A_n \leq 0$ и $B_{n+1} - B_n \geq 0$. Последовательности $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ — монотонны и ограничены. Поэтому существует $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. Преобразование SK непрерывно. Тогда $SKa = a$. По теореме 3 точка $a = T$. Отсюда следует, что существуют $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = 0$.

Для декартовых координат z_{n+1} наряду с (7) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{L_{n+1}^6(2\Theta_{n+1}^6 - 6\Theta_{n+1}^5 + 10\Theta_{n+1}^3 - 3) + 2}{L_{n+1}^5}, \\ B_{n+1} &= \frac{-10 - L_{n+1}^6(10\Theta_{n+1}^6 - 30\Theta_{n+1}^5 + 30\Theta_{n+1}^3 - 5)}{2L_{n+1}^4}. \end{aligned}$$

Сравним две различные записи (7)

$$\begin{aligned} & \frac{-\frac{64}{61}(1 - \tau_n)^6 \left(\frac{1}{32}(1 - \sigma_n)^6 - \frac{3}{16}(1 - \sigma_n)^5 + \frac{5}{4}(1 - \sigma_n)^3 - 3 \right) - 2}{(1 - \tau_n)^5} = \\ &= \frac{\frac{64}{61}(1 - \tau_{n+1})^6 \left(\frac{1}{32}(1 + \sigma_{n+1})^6 - \frac{3}{16}(1 + \sigma_{n+1})^5 + \frac{5}{4}(1 + \sigma_{n+1})^3 - 3 \right) + 2}{(1 - \tau_{n+1})^5}, \\ & \frac{-10 - \frac{64}{61}(1 - \tau_n)^6 \left(\frac{5}{32}(1 - \sigma_n)^6 - \frac{15}{16}(1 - \sigma_n)^5 + \frac{15}{4}(1 - \sigma_n)^3 - 5 \right)}{(1 - \tau_n)^4} = \\ &= \frac{-10 - \frac{64}{61}(1 - \tau_{n+1})^6 \left(\frac{5}{32}(1 + \sigma_{n+1})^6 - \frac{15}{16}(1 + \sigma_{n+1})^5 + \frac{15}{4}(1 + \sigma_{n+1})^3 - 5 \right)}{(1 - \tau_{n+1})^4}. \end{aligned}$$

Учитывая только главные части разложений, имеем

$$\begin{cases} (61 + \varepsilon'_{11}(n))\tau_{n+1} + (16 + \varepsilon'_{12}(n))\sigma_{n+1} = (-61 + \varepsilon''_{11}(n))\tau_n + (16 + \varepsilon''_{12}(n))\sigma_n, \\ (-45 + \varepsilon'_{21}(n))\tau_{n+1} + (-8 + \varepsilon'_{22}(n))\sigma_{n+1} = (-45 + \varepsilon''_{21}(n))\tau_n + (8 + \varepsilon''_{22}(n))\sigma_n, \end{cases}$$

где $\varepsilon'_{\nu\mu}(n) \rightarrow 0$, $\varepsilon''_{\nu\mu}(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ ($\nu, \mu = 1, 2$).

Откуда получаем

$$\begin{cases} \tau_{n+1} = \left(\frac{151}{29} + \varepsilon_{11}(n) \right) \tau_n + \left(-\frac{32}{29} + \varepsilon_{12}(n) \right) \sigma_n, \\ \sigma_{n+1} = \left(-\frac{2745}{116} + \varepsilon_{21}(n) \right) \tau_n + \left(\frac{151}{29} + \varepsilon_{22}(n) \right) \sigma_n, \end{cases} \quad (8)$$

где $\varepsilon_{\nu\mu}(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ ($\nu, \mu = 1, 2$).

Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n$ сходится. От противного. Пусть существуют последовательности $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$, такие что $\sum_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \tau_\nu \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Просуммируем первое соотношение (8) и получим:

$$\tau_{n_k+m_k+1} - \tau_{n_k} + \sum_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \tau_\nu = \frac{151}{29} \sum_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \tau_\nu + \sum_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \varepsilon_{11}(\nu)\tau_\nu - \frac{32}{29} \sum_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \sigma_\nu + \sum_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \varepsilon_{12}(\nu)\sigma_\nu.$$



Откуда

$$\frac{122}{29} = \frac{\tau_{n_k+m_k+1} - \tau_{n_k}}{\sum_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \tau_\nu} - \frac{\sum_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \varepsilon_{11}(\nu)\tau_\nu}{\sum_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \tau_\nu} + \frac{\sum_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \sigma_\nu}{\sum_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \tau_\nu} \left(\frac{32}{29} - \frac{\sum_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \varepsilon_{12}(\nu)\sigma_\nu}{\sum_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \sigma_\nu} \right). \quad (9)$$

Первые два слагаемых справа в (9) при $k \rightarrow \infty$ стремятся к нулю. Если бы ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu$ сходилась, то последнее слагаемое стремилось бы к нулю, что невозможно. Это значит, что $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu = +\infty$. Заметим,

$$\frac{\sum_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \sigma_\nu}{\sum_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \tau_\nu} \rightarrow \frac{61}{16}.$$

Второе соотношение (8) приводит к аналогичному результату

$$\frac{\sum_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \sigma_\nu}{\sum_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \tau_\nu} \rightarrow \frac{90}{16}.$$

Полученное противоречие завершает доказательство, а именно $\sum_{\nu=1}^{\infty} \tau_\nu < \infty$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu < \infty$.

Замечание. Справедливо более сильное утверждение:

$$\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \rightarrow \frac{151 - 6\sqrt{610}}{29} \quad \text{и} \quad \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} \rightarrow \frac{151 - 6\sqrt{610}}{29}.$$

Изученное отображение (2) дает возможность построения функций, определенных на всей полуоси $[0, \infty)$ и обладающих «альтернансными» свойствами. Приведем пример такого построения.

Теорема 5. *Существует последовательность чисел*

$$0 < a < b < c < x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < \dots, \quad (10)$$

$x_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, и функция $\varphi(t)$ такая, что

- 1) $\varphi(t) \in U_6[0, \infty)$,
- 2) $\varphi^{VI}(t) = \begin{cases} (-1)^{n+1}6! & \text{для } t \in (x_n, x_{n+1}) \text{ при } n = \overline{1, \infty}, \\ -6! & \text{для } t \in (0, x_1), \end{cases}$
- 3) $\varphi(0) = \varphi(b) = \varphi(\xi_{2k-1}) = -1, \quad \varphi(a) = \varphi(c) = \varphi(\xi_{2k}) = +1, \quad k = \overline{1, \infty}$,
- 4) если положить

$$\xi_k - x_k = \frac{1}{\sqrt[6]{61}} + \varkappa'_k, \quad x_k - \xi_{k-1} = \frac{1}{\sqrt[6]{61}} + \varkappa''_k, \quad (11)$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varkappa'_k| < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\varkappa''_k| < \infty. \quad (12)$$

Доказательство. Пусть x_0 — точка на дуге UM_2 , существование одной из которых установлено в теореме 1. Положим $x_n = (SK)^n x_0$, A_n, B_n — декартовы координаты точки x_n . Имеем

$$\begin{cases} A_0 = \frac{3\alpha_0^6 - 2}{\alpha_0^5}, \\ B_0 = \frac{5\alpha_0^6 - 10}{2\alpha_0^4}. \end{cases} \quad (13)$$



Криволинейные координаты точки x_n будем обозначать через Θ_n и L_n . В соответствии с определением криволинейных координат имеем

$$\begin{cases} A_n = \frac{L_n^6(2\Theta_n^6 - 6\Theta_n^5 + 10\Theta_n^3 - 3) + 2}{L_n^5}, \\ B_n = \frac{-10 - L_n^6(10\Theta_n^6 - 30\Theta_n^5 + 30\Theta_n^3 - 5)}{2L_n^4}. \end{cases} \quad (14)$$

Из построения операторов K и S следует, что для координат точки $x_{k+1} = SKx_n$ справедливы соотношения

$$\begin{cases} A_{n+1} = \frac{-2 - L_n^6(2(1 - \Theta_n)^6 - 6(1 - \Theta_n)^5 + 10(1 - \Theta_n)^3 - 3)}{L_n^5}, \\ B_{n+1} = \frac{-10 - L_n^6(10(1 - \Theta_n)^6 - 30(1 - \Theta_n)^5 + 30(1 - \Theta_n)^3 - 5)}{2L_n^4}. \end{cases} \quad (15)$$

Построим для $n = \overline{1, \infty}$ алгебраические многочлены $p_n(t) = (-1)^{n+1}(t^6 + A_n t^5 + B_n t^4 + D_n t^2 - 1)$, где

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{L_n^6(10\Theta_n^6 - 18\Theta_n^5 + 10\Theta_n^3 - 1) + 10}{2L_n^2}, \\ D_{n+1} &= \frac{L_n^6(10(1 - \Theta_n)^6 - 18(1 - \Theta_n)^5 + 10(1 - \Theta_n)^3 - 1) + 10}{2L_n^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Определим последовательность (10) следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 - c &= L_0(1 - \Theta_0), \quad \xi_1 - x_1 = L_0\Theta_0, \quad x_n - \xi_{n-1} = L_{n-1}(1 - \Theta_{n-1}), \\ \xi_n - x_n &= L_{n-1}\Theta_{n-1}, \quad n = \overline{2, \infty}. \end{aligned}$$

Положим

$$\varphi(t) = \begin{cases} p_0(t - c), & \text{если } 0 \leq t < x_1, \\ p_n(t - \xi_n), & \text{если } x_n \leq t < x_{n+1}, \quad n = \overline{1, \infty}. \end{cases} \quad (17)$$

Определим точки a , b и c из условий

$$p_0(-c) = -1, \quad b = c - \alpha_0, \quad a = b - \alpha_1 = c - \alpha_0 - \alpha_1, \quad p_0(a) = 1, \quad p'_0(a) = 0. \quad (18)$$

Имеем $\xi_n - \xi_{n-1} = L_{n-1}$ и $L_n \rightarrow 2/\sqrt[6]{61}$ (см. теорему 4). Отсюда следует, что $\xi_n \rightarrow +\infty$ и $x_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$. На основании теоремы 4 получаем, что для последовательности (10) выполнено требование 4) настоящей теоремы (см. (11), (12)).

Требование 2) очевидно выполнено (см. (16)). Имеем далее $\varphi(0) = \varphi(b) = \varphi(\xi_{2k-1}) = -1$, $\varphi(a) = \varphi(c) = \varphi(\xi_{2k}) = 1$, $k = \overline{1, \infty}$ (см. (17)–(18)). Отсюда следует, что требование 3) для $\varphi(t)$ выполнено.

Перейдем к проверке требования 1). Для удобства и универсальности записи полагаем $c = \xi_0$.

Чтобы установить непрерывность $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, $\varphi'''(t)$, $\varphi^{IV}(t)$, $\varphi^V(t)$ достаточно проверить равенства $p_n^{(j)}(x_{n+1} - \xi_n) = p_{n+1}^{(j)}(x_{n+1} - \xi_{n+1})$ для $j = \overline{0, 5}$ и $n = 1, 2, 3, \dots$

Справедливость этих соотношений проверяется непосредственной подстановкой A_n , B_n , D_n и A_{n+1} , B_{n+1} , D_{n+1} из формул (14)–(16).

Чтобы завершить доказательство теоремы 5, проверим соотношения $\|\varphi\| = 1$. На участке $[0, \xi_0]$ функция $\varphi(t)$ по определению равна $-(t - \xi_0)^6 - A_0(t - \xi_0)^5 - B_0(t - \xi_0)^4 - D_0(t - \xi_0)^2 + 1$, где A_0 и B_0 определены формулами (13), а $D_0 = \frac{10 - \alpha_0^6}{2\alpha_0^2}$.

Из равенств $\varphi(0) = \varphi(b) = -1$ и $\varphi(a) = \varphi(c) = +1$ следует, что

$$\max_{0 \leq t \leq \xi_0} |\varphi(t)| = 1.$$



Рассмотрим теперь $\varphi(t)$ на отрезках $[\xi_{2k}, \xi_{2k+1}]$. Имеем по определению

$$\varphi(t) = \begin{cases} -(t - \xi_{2k})^6 - A_{2k}(t - \xi_{2k})^5 - B_{2k}(t - \xi_{2k})^4 - D_{2k}(t - \xi_{2k})^2 + 1 & \text{для } \xi_{2k} < t < x_{2k+1}, \\ (t - \xi_{2k+1})^6 + A_{2k+1}(t - \xi_{2k+1})^5 + B_{2k+1}(t - \xi_{2k+1})^4 + D_{2k+1}(t - \xi_{2k+1})^2 - 1 & \text{для } x_{2k+1} < t < \xi_{2k+1}, \end{cases}$$

где $D_{2k} > 0$ и $D_{2k+1} > 0$. Многочлен $p_{2k}(t - \xi_{2k})$ (соответственно $p_{2k+1}(t - \xi_{2k+1})$) имеет в точке ξ_{2k} (соответственно в точке ξ_{2k+1}) локальный максимум (соответственно локальный минимум). Это означает, что правее (соответственно левее) точки ξ_{2k} (соответственно точки ξ_{2k+1}) имеется один и только один локальный минимум (соответственно максимум) в точке η_{2k} (соответственно η'_{2k}) (см. рис. 3, 4).

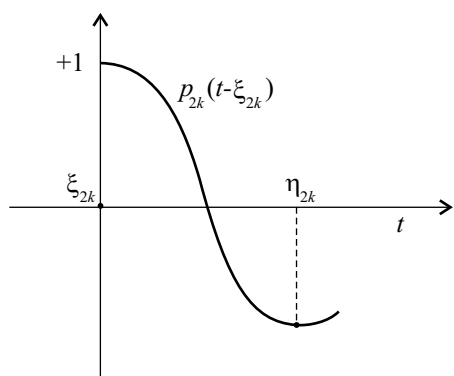


Рис. 3

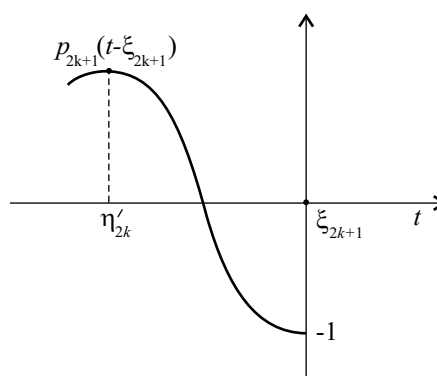


Рис. 4

Точка x_{2k+1} расположена на интервале (ξ_{2k}, ξ_{2k+1}) . Эта точка не может лежать правее η_{2k} , поскольку в этом случае нарушается либо условие

$$p'_{2k}(x_{2k+1} - \xi_{2k}) = p'_{2k+1}(x_{2k+1} - \xi_{2k+1}),$$

либо условие

$$p''_{2k}(x_{2k+1} - \xi_{2k}) = p''_{2k+1}(x_{2k+1} - \xi_{2k+1}).$$

По той же причине x_{2k+1} не может располагаться левее точки η'_{2k} . Поэтому $x_{2k+1} < \eta_{2k}$ и $\eta'_{2k} < x_{2k+1}$. Последнее означает, что $\varphi(t)$ — функция, невозрастающая на $[\xi_{2k}, \xi_{2k+1}]$, а значит,

$$\max_{\xi_{2k} \leq t \leq \xi_{2k+1}} |\varphi(t)| = 1.$$

Такие же рассуждения пригодны и для $t \in [\xi_{2k-1}, \xi_{2k}]$. Теорема доказана. \square

Замечание. Отметим без доказательства, что всякая функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая условиям 1)–3) теоремы 5, обязательно удовлетворяет условию 4).

Библиографический список

1. Schoenberg I.J., Cavaretta A. Solution of Landau's problem concerning higher derivatives on the halfline // Proc. Intern. Conf. Constructive Function Theory. Sofia: Bulgarian Acad. Sci., 1972. P. 297–308.
2. Тимофеев В.Г. Колмогоровские оценки в равномерной метрике на полуоси через функцию и ее пятую производную // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 119–122.



МЕХАНИКА

УДК 517.958

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ — ОБОБЩЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ПРОЦЕДУРЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОР-ФУНКЦИЯМ

Ю. Э. Сеницкий

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
кафедра сопротивления материалов и строительной механики
E-mail: sgasu@sgasu.smr.ru

Показано, что структурный алгоритм метода конечных интегральных преобразований является обобщением классической процедуры разложения по собственным вектор-функциям. Рассматриваются начально-краевые задачи, описываемые гиперболической системой линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Доказывается, что в общем случае несамосопряженного оператора решение путем разложения по собственным вектор-функциям возможно лишь в результате применения биортогональных конечных интегральных преобразований. В частности, для самосопряженных начально-краевых задач решения, полученные методом конечных интегральных преобразований и классической процедурой разложения по собственным вектор-функциям тождественно совпадают, хотя первая из них является предпочтительней. Приведенные утверждения иллюстрируются на примере замкнутого решения динамической задачи для трехслойной анизотропной упругой цилиндрической оболочки при общих условиях ее загрузки и закрепления на контуре.

Ключевые слова: метод, обобщенный алгоритм, конечные интегральные преобразования, многокомпонентность, биортогональность, спектральные разложения, собственные вектор-функции, краевые задачи, самосопряженность, несамосопряженность, гиперболические системы уравнений, существование решения, сходимость, единственность, полнота, цилиндрические оболочки, трехслойность, уточненная теория, замкнутое решение.

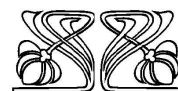
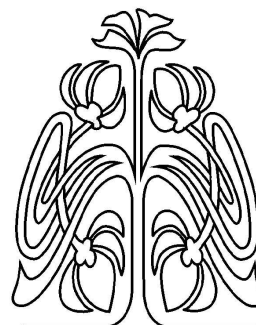
Finite Integral Transformations Method — Generalization of Classic Procedure for Eigenvector Decomposition

Yu. E. Senitsky

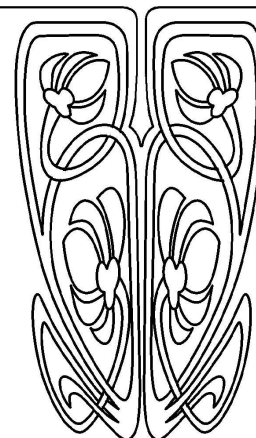
Samara State University of Architecture and Civil Engineering,
Chair of Resistance of Materials and Construction Mechanics
E-mail: sgasu@sgasu.smr.ru

The structural algorithm of the finite integral transformation method is presented as a generalization of the classical procedure of eigenvector decomposition. The initial-boundary problems described with a hyperbolic system of linear partial second order differential equations are considered. The general case of non-self adjoint solution by expansion in the vector-functions is possible only by the use of biorthogonal of finite integral transformations. In particular, for self-adjoint initial-boundary problems solutions obtained by the method of finite integral transforms and the classic procedure of eigenvector decomposition expansion are identical, although the first of these is preferable. These statements are illustrated by the example of a closed solution of the dynamic problem for a three-layer anisotropic elastic cylindrical shell under the general conditions of loading and fastening on the circuit.

Key words: method, generalized algorithm, finite integral transformations, multicomponent ability, biorthogonality, special decomposition, vector-functions, boundary value problems, self-adjoint, non-self adjointness, hyperbolic equations, solution existence, convergency, singularity, integrality, cylindrical shell, tri-plyes, refined theory, closed solution.



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Известно [1, 2], что обычная процедура разложения по собственным функциям представляет эффективный математический аппарат решения линейных краевых задач математической физики. Действительно, в результате разделения переменных, в соответствии с методом Фурье, формируется задача на собственные значения. Окончательное решение записывается в виде спектральных разложений в сходящихся рядах, а для бесконечных областей — в интегральной форме [3] по найденной таким образом системе собственных функций. Следует отметить, что необходимое при этом условие обобщенной ортогональности собственных функций ограничило возможности применения этого метода таким классом задач, математические модели которых порождались самосопряженными дифференциальными операторами.

Более простая процедура построения решений в аналогичной форме основывалась на конечных интегральных преобразованиях (КИП) с наперед заданными ядровыми функциями, представляющими частные решения однородной краевой задачи Штурма – Лиувилля [4] (преобразования Фурье, Ханкеля, Лежандра). Вместе с тем такой подход при всей своей простоте оказался весьма ограниченным, так как ядра преобразований в этом случае выбирались априори в зависимости от вида канонических областей и соответствующих им координатных поверхностей, операторов дифференциальных уравнений и краевых условий задачи. Вследствие этого, результаты были получены для относительно простых граничных условий.

При исследовании краевых задач желательно сохранить относительный произвол выбора компонентов, входящих в формулу обращения КИП, т.е. конструировать конечные интегральные преобразования в процессе их решения. Такой алгоритм, в процедуре которого предусматривалось определение ядра преобразования при решении скалярных краевых задач¹, был применен в книге [5], и изложен в руководстве [2].

В работе автора [6], в классе вектор-функций, интегрируемых с квадратом, построено обобщенное, а в статье [7] — многокомпонентное КИП, и сформулирован матричный структурный алгоритм, предназначенный для решения самосопряженных краевых задач, описываемых системами линейных дифференциальных уравнений в частных производных с переменными (постоянными) коэффициентами. Здесь же приведено вырожденное КИП с различным числом компонент ядровой вектор-функции в выражении трансформанты и формуле обращения. В монографии [6] и статье [8] доказана сходимости и единственность представлений, определяемых формулой обращения введенных КИП, а в [9] сформулированы условия, при которых рассматриваемый метод тождественен процедуре Бубнова – Галеркина. Процедурная часть структурного метода предусматривает при этом определение всех компонентов решения (трансформанты-изображения, вектор-функции ядра, матрицы весовых функций, соотношения обобщенной ортогональности).

Метод КИП и его структурный алгоритм получил дальнейшее развитие, связанное с необходимостью решения несамосопряженных начально-краевых задач, описываемых несимметричными системами дифференциальных уравнений. Для этой цели в работах автора [10, 11] в метрике пространства \bar{L}_2 был введен новый класс векторных КИП, основанный на многокомпонентном соотношении биортогональности собственных вектор-функций двух однородных краевых задач, связанных известным тождеством Лагранжа [12]. Здесь же приведено доказательство интегральной сходимости и единственности построенного биортогонального КИП и сформулирован обобщенный структурный алгоритм, в процедуре которого выделяются две системы собственных вектор-функций, определяющих ядра КИП².

Эффективность структурного метода КИП продемонстрирована на примерах построения замкнутых решений целого ряда сложных начально-краевых задач механики, например [6, 7, 10, 11, 13–19]. Обстоятельный обзор, посвященный основным этапам развития метода КИП и перспективам его применения при решении краевых задач механики и математической физики приведен в работе автора [20].

¹Скалярными являются такие краевые задачи, математические модели которых представляют одно разрешающее дифференциальное уравнение для скалярной функции.

²Наряду с биортогональными в работе [13] построены несимметричные интегральные преобразования, порождаемые пучками несамосопряженных дифференциальных операторов, описывающих диссипативные свойства рассматриваемых математических моделей.



Существенным моментом рассматриваемого алгоритма метода КИП является процедура выделения сопряженного оператора, что позволяет в дальнейшем построить две независимых системы собственных вектор-функций, определяющих структуру решения.

Все отмеченное выше подчеркивает тот факт, что наступило время, когда необходимо разобраться и определить то место, которое занимает метод КИП при исследовании краевых и начально-краевых задач математической физики. Настоящая работа и посвящена этому важному вопросу.

1. ИССЛЕДУЕМАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Будем рассматривать в области $D = \{[a, b] \times [0, T]\}$, $T < \infty$ начально-краевую задачу в стандартной форме [21]³:

$$A[\bar{U}(x, t)] - H \frac{\partial^2 \bar{U}(x, t)}{\partial t^2} = \bar{f}(x, t), \quad (1.1)$$

$$l_a \frac{\partial \bar{U}(x, t)}{\partial x} + C_a \bar{U}(x, t) = 0 \quad \text{при } x = a, \quad l_b \frac{\partial \bar{U}(x, t)}{\partial x} + C_b \bar{U}(x, t) = 0 \quad \text{при } x = b, \quad (1.2)$$

$$\bar{U}(x, t) = \bar{U}_0(x), \quad \frac{\partial \bar{U}(x, t)}{\partial t} = \dot{\bar{U}}_0(x) \quad \text{при } t = 0. \quad (1.3)$$

Здесь

$$A[\bar{U}(x, t)] = \sum_{r=0}^2 a_r(x) \frac{\partial^{2-r} \bar{U}(x, t)}{\partial x^{2-r}}, \quad (1.4)$$

$f(x, t)$, $\bar{U}_0(x)$, $\dot{\bar{U}}_0(x)$, $\bar{U}(x, t)$ — соответственно заданные и искомая вектор-функции размерности $(m \times 1)$, т.е. $\bar{f}(x, t)$, $\bar{U}_0(x)$, $\dot{\bar{U}}_0(x)$, $\bar{U}(x, t) \in R^m$, $x \in I = [a, b]$, $t \in [0, T]$, $a_r(x)$, l_a , l_b , C_a , C_b — матрицы размерностью $(m \times m)$, элементы которых l_{ks}^a , l_{ks}^b , C_{ks}^a , C_{ks}^b ($k, s = 1, \dots, m$), причем l_a , l_b — невырожденные, $H = E$ — единичная матрица той же размерности. Элементы $a_{ks}^r(x)$ ($k, s = 1, \dots, m$) матриц $a_r(x)$ — соответствующее число раз непрерывно дифференцируемые функции.

Система уравнений (1.1) с диагональной матрицей H путем умножения на H^{-1} приводится к соответствующей системе, когда $H = E$. Этот случай и рассматривается ниже (см. пример разд. 5), хотя в общем H может быть и недиагональной матрицей.

Решение $\bar{U}(x, t)$ задачи строится в классе вектор-функций, интегрируемых с квадратом по переменной x и дважды дифференцируемых по переменной t , т.е. $\bar{U}(x, t)$ и $\bar{f}(x, t)$ принадлежат пространству $\bar{L}_2(I)$ с метрикой, определяемой скалярным произведением

$$(\bar{U}, \bar{W})_p = \int_a^b (p\bar{U})^T \bar{W} dx = \int_a^b \bar{U}^T p\bar{W} dx, \quad (1.5)$$

где $\bar{W} \in \bar{L}_2(I)$, а $p(x)$ — симметричная матрица весовых функций $(m \times m)$, т.е.

$$p(x) = p^T(x). \quad (1.6)$$

Здесь T — знак транспонирования.

Соотношения (1.1) представляют гиперболическую систему линейных дифференциальных уравнений, а (1.2), (1.3) — соответствующие краевые (граничные и начальные) условия.

2. КЛАССИЧЕСКАЯ ПРОЦЕДУРА РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОР-ФУНКЦИЯМ ПРИ УДОВЛЕТВОРЕНИИ УСЛОВИЯ ОБОБЩЕННОЙ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ

Рассмотрим решение начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) так, как это принято в классическом методе разложения по собственным вектор-функциям, в два этапа.

а) сначала определяются собственные значения и собственные функции из соответствующей (1.1) - (1.2) однородной краевой задачи, т.е.

$$A\bar{U}_*(x, t) - E \frac{\partial^2 \bar{U}_*(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

³В случае, когда граничные условия неоднородные, линейная краевая задача всегда может быть приведена к стандартной форме [21]. Многочисленные примеры такого приведения содержатся в работах автора, например [15, 19].



и условий (1.2), сформулированных для $\bar{U}_*(x, t)$. Используя процедуру разделения переменных, вводим представление

$$\bar{U}_*(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_i(x) T_i(t), \quad (2.2)$$

где $T_i(t)$ — дважды дифференцируемая скалярная, а $\bar{\vartheta}_i(x)$ — вектор-функция из $\bar{L}_2(I)$ размерности $(m \times 1)$.

В результате подстановки (2.2) в равенства (2.1), (1.2) имеем:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \left[a_0(x) \bar{\vartheta}_i''(x) + a_1(x) \bar{\vartheta}_i'(x) + a_2(x) \bar{\vartheta}_i(x) \right] T_i(t) - E \bar{\vartheta}_i(x) \ddot{T}_i(t) \right\} = 0, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left[l_a \bar{\vartheta}_i'(x) T_i(t) + C_a \bar{\vartheta}_i(x) T_i(t) \right] &= 0 \quad \text{при } x = a, \\ \sum_{i=1}^{\infty} \left[l_b \bar{\vartheta}_i'(x) T_i(t) + C_b \bar{\vartheta}_i(x) T_i(t) \right] &= 0 \quad \text{при } x = b. \end{aligned} \quad (2.4)$$

(Здесь штрих означает производную по x , а точка берется по t .)

Если представить матрицу-столбец $\bar{\vartheta}_i(x)$ в виде диагональной $\text{diag} \bar{\vartheta}_i(x)$ размерности $(m \times m)$ и обратить ее:

$$\bar{\vartheta}_i^{-1}(x) = \begin{vmatrix} \vartheta_{1i}^{-1}(x) & 0 \dots & 0 \\ 0 & \vartheta_{2i}^{-1}(x) \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & \vartheta_{mi}^{-1}(x) \end{vmatrix},$$

то после умножения (2.3) на $E^{-1} \bar{\vartheta}_i^{-1}(x) T_i^{-1}(t)$, ($T_i(t) \neq 0$) и введения параметров разделения λ_i , немедленно получаем для каждого i такое соотношение:

$$\left[a_0(x) \bar{\vartheta}_i''(x) + a_1(x) \bar{\vartheta}_i'(x) + a_2(x) \bar{\vartheta}_i(x) \right] E^{-1} \bar{\vartheta}_i^{-1}(x) = \ddot{T}_i(t) T_i^{-1}(t) = -\lambda_i^2, \quad i = \overline{1, \infty}. \quad (2.5)$$

Соответственно из (2.4) находим:

$$l_a \bar{\vartheta}_i'(x) + C_a \bar{\vartheta}_i(x) = 0 \quad \text{при } x = a, \quad l_b \bar{\vartheta}_i'(x) + C_b \bar{\vartheta}_i(x) = 0 \quad \text{при } x = b. \quad (2.6)$$

Равенство (2.5) позволяет сформулировать два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\ddot{T}_i(t) + \lambda_i^2 T_i(t) = 0, \quad i = \overline{1, \infty}, \quad (2.7)$$

$$a_0(x) \bar{\vartheta}_i''(x) + a_1(x) \bar{\vartheta}_i'(x) + [a_2(x) + \lambda_i^2 E^{-1}] \bar{\vartheta}_i(x) = 0. \quad (2.8)$$

Решение первого из них (2.7) представляется в виде

$$T_i(t) = T_i^{(1)}(t) = A_i \cos \lambda_i t + B_i \sin \lambda_i t. \quad (2.9)$$

Замечание 1. Подробно определение функции $T_i(t)$ приводится на втором этапе решения.

Уравнение (2.8) совместно с граничными условиями (2.6) представляет однородную краевую задачу на собственные значения. Если система уравнений интегрируемая, то считая известными ее частные решения

$$\psi_1^i(x), \psi_2^i(x), \dots, \psi_{2m}^i(x), \quad (2.10)$$

формируется квадратная $(2m \times 2m)$ матрица $\Lambda_i(x)$, элементы которой $\psi_{ln}^i(x)$ ($l, n = 1, \dots, 2m$) представляют линейные комбинации (2.10) [12]. Вектор-функция $\bar{\vartheta}_i(x)$ теперь определяется таким равенством:

$$\bar{\vartheta}_i(x) = \Lambda_i(x) \times \bar{C}^i, \quad (2.11)$$

где

$$\left(\bar{C}^i \right)^T = \| C_1^i C_2^i \dots C_{2m}^i \| ^T \quad (2.12)$$

— матрица-столбец произвольных постоянных интегрирования.



Собственные значения λ_i ($i = \overline{1, \infty}$) простого спектра и произвольные постоянные (2.12) находятся путем подстановки выражения (2.11) в граничные условия (2.6):

$$\left\| \begin{array}{l} \left[l_a \frac{\partial}{\partial x} \Lambda_i(x) + C_a \Lambda_i(x) \right]_{x=a} \\ \left[l_b \frac{\partial}{\partial x} \Lambda_i(x) + C_b \Lambda_i(x) \right]_{x=b} \end{array} \right\| \times \overline{C}^i = 0. \quad (2.13)$$

Разыскивая нетривиальные решения полученной однородной системы алгебраических уравнений (2.13), приравняем ее главный детерминант к нулю. Имеем:

$$D(\lambda_i) = \left| \begin{array}{l} \left[l_a \frac{\partial}{\partial x} \Lambda_i(x) + C_a \Lambda_i(x) \right]_{x=a} \\ \left[l_b \frac{\partial}{\partial x} \Lambda_i(x) + C_b \Lambda_i(x) \right]_{x=b} \end{array} \right| = 0. \quad (2.14)$$

Равенство (2.14) представляет собой трансцендентное уравнение для определения собственных значений λ_i . Имея в виду, что дефект матрицы (2.13) равен единице, составляем $(2m - 1)$ уравнение системы, из которой выражаются постоянные $C_1^i, C_2^i, \dots, C_{2m-1}^i$ через C_{2m}^i . Это возможно, поскольку при условии простоты спектра оператора A полученная система уравнений $(2m - 1)$ порядка невырождена [22]⁴. Принимая без потери общности рассуждений, что последний элемент \overline{C}_{2m}^i вектора \overline{C}^i равен, например, единице, определяем окончательно все компоненты \overline{C}^i ⁵. В соответствии с (2.10), (2.11) тем самым построена система собственных вектор-функций $\overline{\vartheta}_i(x)$.

б) на втором этапе переходим к решению неоднородной начально-краевой задачи (1.1)–(1.3). Для этой цели сформулируем сначала два утверждения.

Теорема 1. Если весовая матрица $p(x)$ является частным решением дифференциального уравнения:

$$2(pa_0)' - pa_1 - a_1^T p = 0, \quad (2.15)$$

а матрицы $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ и $l(x)|_{x=a,b}, c(x)|_{x=a,b}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{array}{l} 1) a_0^T p = pa_0; \\ 2) (pa_1 - a_1^T p)' = 2(pa_2 - a_2^T p); \\ 3) \{(pa_0)' - pa_1 - pa_0 \Gamma + \Gamma^T pa_0\}|_{x=a,b} = 0; \quad \Gamma = \Gamma|_{x=a,b} = -l^{-1}c|_{x=a,b}, \end{array} \quad (2.16)$$

то собственные вектор-функции $\{\overline{\vartheta}_i(x)\}, i = \overline{1, \infty}$ образуют обобщенно ортогональную систему в метрике (1.5), т. е.

$$(\overline{\vartheta}_i, \overline{\vartheta}_j)_p = \int_a^b \overline{\vartheta}_i^T(x) p(x) \overline{\vartheta}_j(x) dx = \delta_i^j \|\overline{\vartheta}_i(x)\|^2. \quad (2.17)$$

Здесь $\overline{\vartheta}_i(x) = \overline{\vartheta}(\lambda_i, x), \overline{\vartheta}_j(x) = \overline{\vartheta}(\lambda_j, x),$

$$\|\overline{\vartheta}_i\|^2 = \int_a^b \overline{\vartheta}_i^T(x) p(x) \overline{\vartheta}_i(x) dx \quad (2.18)$$

— квадрат нормы собственных вектор-функций $\overline{\vartheta}_i(x)$, а δ_i^j — символ Кронекера.

Доказательство. Представим дифференциальные уравнения (2.8) для индексов i и j в следующем виде:

$$\left(\overline{\vartheta}_i^T\right)'' a_0^T + \left(\overline{\vartheta}_i^T\right)' a_1^T + \overline{\vartheta}_i^T a_2^T - \lambda_i^2 \overline{\vartheta}_i^T = 0, \quad a_0 \overline{\vartheta}_j'' + a_1 \overline{\vartheta}_j' + a_2 \overline{\vartheta}_j - \lambda_j^2 \overline{\vartheta}_j = 0.$$

⁴В дальнейшем все рассуждения проводятся по отношению к простой точке спектра λ_i оператора A и это не оговаривается. Случай кратного спектра рассматривается в работах [13, 18].

⁵В общем случае собственные функции могут определяться с точностью до постоянной C_{2m}^i , что не влияет на дальнейшее решение.



Умножая теперь первое из них справа на $p\bar{\vartheta}_j dx$, а второе соответственно слева на $\bar{\vartheta}_i^T p dx$, интегрируя полученные равенства на сегменте $I = [a, b]$, выполняем затем квадратуры по частям и вычитаем из первого результата второй. В итоге получаем:

$$\begin{aligned} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2) \int_a^b \bar{\vartheta}_i^T p \bar{\vartheta}_j dx &= \left\{ (\bar{\vartheta}_i^T)' p a_0 \bar{\vartheta}_j - \bar{\vartheta}_i^T p a_0 \bar{\vartheta}_j' + \bar{\vartheta}_i^T [(p a_0)' - p a_1] \bar{\vartheta}_j \right\} \Big|_{x=a,b} + \\ &+ \int_a^b (\bar{\vartheta}_i^T)'' [a_0^T p - p a_0] \bar{\vartheta}_j dx + \int_a^b (\bar{\vartheta}_i^T)' [p a_1 + a_1^T p - 2(p a_0)'] \bar{\vartheta}_j dx + \\ &+ \int_a^b \bar{\vartheta}_i^T [a_2^T p - p a_2 + (p a_1)' - (p a_0)''] \bar{\vartheta}_j dx. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Из граничных условий (2.6) следует:

$$\bar{\vartheta}_j' \Big|_{x=a,b} = \Gamma \bar{\vartheta}_j \Big|_{x=a,b}, \quad (\bar{\vartheta}_i^T)' \Big|_{x=a,b} = \bar{\vartheta}_i^T \Gamma^T \Big|_{x=a,b}, \quad (2.20)$$

где

$$\Gamma = -l^{-1} c \Big|_{x=a,b}. \quad (2.21)$$

Учитывая соотношения (2.20), внеинтегральные члены в правой части равенства (2.19) принимают следующий вид:

$$\left\{ \bar{\vartheta}_i^T [\Gamma^T p a_0 - p a_0 \Gamma + (p a_0)' - p a_1] \bar{\vartheta}_j \right\} \Big|_{x=a,b}. \quad (2.22)$$

Очевидно, что когда $i \neq j$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$) правая часть выражения (2.19) при наличии (2.22) обращается в нуль, если выполняются равенства (2.15), (2.16). Следует отметить, что соотношение

$$a_2^T p - p a_2 + (p a_1)' - (p a_0)'' = 0$$

тождественно совпадает со вторым равенством (2.16), если принять во внимание уравнение (2.15). Теорема доказана.

Вводим непрерывную переменную $\eta \in [a, b]$, полагая при этом, что на счетном множестве $i = \overline{1, \infty}$, $\eta = \eta_i = \xi_i$, причем $\xi_i = \lambda_i^2$, $\xi_j = \lambda_j^2$.

Теорема 2. В условиях теоремы 1, если λ_i — простая точка спектра оператора A , квадрат нормы его собственной вектор-функции $\bar{\vartheta}_i(x)$ определяется выражением

$$\|\bar{\vartheta}_i(x)\|^2 = (\bar{\vartheta}_i, \bar{\vartheta}_i)_p = \left\{ \left[\bar{\vartheta}^T(\xi_i, x) S \frac{\partial^2 \bar{\vartheta}(\eta, x)}{\partial x \partial \eta} - \bar{\vartheta}^T(\xi_i, x) T \frac{\partial \bar{\vartheta}(\eta, x)}{\partial \eta} \right]_{\eta=\xi_i} \right\} \Big|_{x=a}^{x=b}. \quad (2.23)$$

Доказательство. При условиях (2.15), (2.16) теоремы 1 в случае, когда $i = j$ ($\lambda_i = \lambda_j$) из (2.19) следует, что интеграл (2.18) обращается в неопределенность $0/0$. Преобразуем выражение (2.19), имея в виду (2.20):

$$\begin{aligned} (\bar{\vartheta}_i, \bar{\vartheta}_i)_p &= \int_a^b \bar{\vartheta}_i^T p \bar{\vartheta}_i dx = (\xi_i - \xi_j)^{-1} \left\{ (\bar{\vartheta}_i^T)' p a_0 \bar{\vartheta}_i - \bar{\vartheta}_i^T p a_0 \bar{\vartheta}_i' + \bar{\vartheta}_i^T [(p a_0)' - p a_1] \bar{\vartheta}_i \right\} \Big|_{x=a,b} = \\ &= (\xi_i - \eta)^{-1} \left\{ \bar{\vartheta}_i^T [\Gamma^T p a_0 + (p a_0)' - p a_1] \bar{\vartheta}(\eta, x) - \bar{\vartheta}_i^T p a_0 \frac{\partial \bar{\vartheta}(\eta, x)}{\partial x} \right\} \Big|_{x=a,b}. \end{aligned}$$

Если ввести обозначения

$$T = (p a_0)' + \Gamma^T p a_0 - p a_1, \quad S = p a_0,$$

а затем перейти к пределу при $\eta = \eta_i \rightarrow \xi_i$ и применить правило Лопиталья, то в результате находим

$$\|\bar{\vartheta}_i(x)\|^2 = \int_a^b \bar{\vartheta}_i^T p \bar{\vartheta}_i dx = \lim_{\eta \rightarrow \xi_i} \frac{\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \bar{\vartheta}^T(\xi_i, x) T \bar{\vartheta}(\eta, x) - \bar{\vartheta}^T(\xi_i, x) S \frac{\partial \bar{\vartheta}(\eta, x)}{\partial x} \right\} \Big|_{x=a,b}}{\frac{\partial}{\partial \eta} (\xi_i - \eta)}$$



$$= \left\{ \left[\bar{\vartheta}^T(\xi_i, x) S \frac{\partial^2 \bar{\vartheta}(\eta, x)}{\partial x \partial \eta} - \bar{\vartheta}^T(\xi_i, x) T \frac{\partial \bar{\vartheta}(\eta, x)}{\partial \eta} \right]_{\eta=\xi_i} \right\}_{x=a}^{x=b},$$

что и требовалось доказать.

Полученный результат является исключительно важным. Действительно, поскольку система (1.1) (точнее, (2.8)) представляет дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, то, как правило, решение $\bar{\vartheta}_i(x)$ или $\psi_1^i(x), \psi_2^i(x), \dots, \psi_{2m}^i(x)$ соответствующих начально-краевых задач выражается в специальных функциях. В силу этого операция непосредственного интегрирования при вычислении нормы $\|\bar{\vartheta}_i\|$ является весьма затруднительной. Однако эта процедура становится всегда выполнимой, так как в соответствии с (2.23) определение $\|\bar{\vartheta}_i\|^2$ сводится к простому дифференцированию. Следует отметить, что полученные результаты имеют самостоятельное значение и могут оказаться полезными при вычислении интегралов от специальных функций [23–25], причем в [25] квадрат нормы определяется методом возмущений.

Возвращаемся теперь к начально-краевой задаче (1.1)–(1.3). Разложим сначала правые части $\bar{f}(x, t), \bar{U}_0(x), \dot{\bar{U}}_0(x)$ уравнений (1.1), (1.3) по найденной выше обобщенно ортогональной системе функций $\{\bar{\vartheta}_i(x)\}$, т.е. представим их в виде

$$\bar{f}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i^*(t) \bar{\vartheta}_i(x), \quad \bar{U}_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \bar{\vartheta}_i(x), \quad \dot{\bar{U}}_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \bar{\vartheta}_i(x), \quad (2.24)$$

где $F_i^*(t), \alpha_i, \beta_i$ — скалярные величины.

Составляем теперь скалярные произведения в метрике (1.5), учитывая при этом (2.17). Имеем

$$\begin{aligned} (\bar{\vartheta}_j, \bar{f})_p &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b \bar{\vartheta}_j^T(x) p(x) F_i^*(t) \bar{\vartheta}_i(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} F_i^*(t) \int_a^b \bar{\vartheta}_j(x) p(x) \bar{\vartheta}_i(x) dx = \\ &= F_i^*(t) \int_a^b \bar{\vartheta}_j^T(x) p(x) \vartheta_j(x) dx. \end{aligned}$$

Аналогично

$$(\bar{\vartheta}_j, \bar{U}_0)_p = \alpha_j \int_a^b \bar{\vartheta}_j^T(x) p(x) \bar{\vartheta}_j(x) dx, \quad (\bar{\vartheta}_j, \dot{\bar{U}}_0)_p = \beta_j \int_a^b \bar{\vartheta}_j^T(x) p(x) \bar{\vartheta}_j(x) dx.$$

Возвращаясь к индексу i и принимая во внимание (2.18), окончательно находим:

$$F_i^*(t) = F(\lambda_i, t) \|\vartheta_i\|^{-2}, \quad \alpha_i = W_0(\lambda_i) \|\vartheta_i\|^{-2}, \quad \beta_i = \dot{W}_0(\lambda_i) \|\vartheta_i\|^{-2}. \quad (2.25)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F(\lambda_i, t) &= \int_a^b \bar{\vartheta}_i^T(x) p(x) \bar{f}(x, t) dx, \quad W_0(\lambda_i) = \int_a^b \bar{\vartheta}_i^T(x) p(x) \bar{U}_0(x) dx, \\ \dot{W}_0(\lambda_i) &= \int_a^b \bar{\vartheta}_i^T(x) p(x) \dot{\bar{U}}_0(x) dx. \end{aligned}$$

В соответствии с процедурой разделения переменных принимаем, как и выше (2.2), вектор-функцию $\bar{U}(x, t)$ в виде спектрального разложения по собственным вектор-функциям $\{\bar{U}_i(x)\}$:

$$\bar{U}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_i(x) T_i^*(t). \quad (2.26)$$

Подстановка выражений (2.24), (2.26) в систему дифференциальных уравнений (1.1) и краевые условия (1.2), (1.3) приводит к таким соотношениям:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \left[a_0(x) \bar{\vartheta}_i''(x) + a_1(x) \bar{\vartheta}_i'(x) + a_2(x) \bar{\vartheta}_i(x) \right] T_i^*(t) - E \bar{\vartheta}_i(x) \dot{T}_i^*(t) - \bar{\vartheta}_i(x) F_i^*(t) \right\} = 0, \quad (2.27)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[l_a \bar{\vartheta}_i'(x) + c_a \bar{\vartheta}_i(x) \right] T_i^*(t) = 0 \quad \text{при } x = a, \quad (2.28)$$



$$\sum_{i=1}^{\infty} [l_b \bar{\vartheta}'_i(x) + c_b \bar{\vartheta}_i(x)] T_i^*(t) = 0 \quad \text{при } x = b, \quad (2.29)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_i(x) [T_i^*(t) - \alpha_i] = 0 \quad \text{при } t = 0, \quad (2.30)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_i(x) [\dot{T}_i^*(t) - \beta_i] = 0. \quad (2.31)$$

Принимая во внимание выражение (2.5), равенства (2.27)–(2.31) для каждого i записываются следующим образом:

$$\ddot{T}_i^*(t) + \lambda_i^2 T_i^*(t) = -F_i^*(t), \quad i = \overline{1, \infty}, \quad (2.32)$$

$$T_i^*(t) = \alpha_i, \quad \dot{T}_i^*(t) = \beta_i \quad \text{при } t = 0, \quad (2.33)$$

$$l_a \bar{\vartheta}'_i(x) + c_a \bar{\vartheta}_i(x) = 0 \quad \text{при } x = a, \quad l_b \bar{\vartheta}'_i(x) + c_b \bar{\vartheta}_i(x) = 0 \quad \text{при } x = b. \quad (2.34)$$

Граничные условия (2.34) естественно совпадают с (2.6).

Рассматриваем сначала задачу Коши (2.32), (2.33). Имея в виду общее решение (2.9) соответствующего (2.32) однородного дифференциального уравнения и определяя затем его частное решение методом вариации произвольных постоянных при начальных условиях (2.33) и соотношениях (2.25), окончательно находим:

$$T_i^*(t) = \|\vartheta_i\|^{-2} \left[W_0(\lambda_i) \cos \lambda_i t + \dot{W}_0(\lambda_i) \lambda_i^{-1} \sin \lambda_i t - \lambda_i^{-1} \int_0^t F(\lambda_i, \tau) \sin \lambda_i(t - \tau) d\tau \right]. \quad (2.35)$$

Уравнение (2.5), точнее (2.8), совместно с граничными условиями (2.34) представляет задачу определения собственных значений λ_i ($i = \overline{1, \infty}$) (2.14) и собственных функций $\bar{\vartheta}_i(x)$ (2.11)–(2.13).

Располагая компонентами $T_i^*(t)$ и λ_i , $\bar{\vartheta}_i(x)$ (2.11)–(2.14), (2.35), разложение (2.26) и представляет теперь общее решение начально-краевой задачи (1.1)–(1.3).

Полнота, сходимости и единственность построенного решения, т.е. разложения (2.26) будут обсуждаться в следующем разделе статьи, а его существование следует из сформулированной ниже теоремы.

Теорема 3. Если $\{\bar{\vartheta}_i(x)\}$, λ_i , ($i = \overline{1, \infty}$) – собственные вектор-функции и соответствующие им собственные значения однородной краевой задачи (2.8), (2.34), а $T_i^*(t)$ представляют общее решение счетного множества задач Коши (2.32), (2.33), то разложение (2.26) является решением начально-краевой задачи (1.1)–(1.3).

Доказательство. Полагая $T_i^*(t)$ и $\bar{\vartheta}_i(x)$ соответствующее число раз дифференцируемыми функциями своих аргументов, подставляем разложение (2.26) в левые части равенств (1.1)–(1.3). Принимая во внимание при этом соотношения (2.8), (2.24), (2.32), (2.33), (2.34). В результате получаем:

$$A [\bar{U}(x, t)] - E \frac{\partial^2 \bar{U}(x, t)}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ [a_0(x) \bar{\vartheta}_i''(x) + a_1(x) \bar{\vartheta}_i'(x) + a_2(x) \bar{\vartheta}_i(x)] T_i^*(t) - E \bar{\vartheta}_i(x) \dot{T}_i^*(t) \right\} = - \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_i(x) [\ddot{T}_i^*(t) + \lambda_i^2 T_i^*(t)] = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_i(x) F_i^*(t) = \bar{f}(x, t),$$

что и требовалось доказать.

При $x = a, b$

$$\left[l_{a,b} \frac{\partial}{\partial x} \bar{U}(x, t) + c_{a,b} \bar{U}(x, t) \right] \Big|_{x=a,b} = \sum_{i=1}^{\infty} [l_{a,b} \bar{\vartheta}_i'(x) + c_{a,b} \bar{\vartheta}_i(x)] \Big|_{x=a,b} T_i^*(t) = 0,$$

при $t = 0$

$$\bar{U}(x, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_i(x) T_i^*(0) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_i(x) \alpha_i = \bar{U}_0(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{U}(x, t) \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_i(x) \dot{T}_i^*(t) \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_i(x) \beta_i = \dot{\bar{U}}_0(x),$$

что и требовалось показать. Теорема доказана.



3. СТРУКТУРНЫЙ АЛГОРИТМ МЕТОДА КИП ПРИМЕНИТЕЛЬНО К САМОСОПРЯЖЕННЫМ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ

Рассмотрим решение структурным методом КИП начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) в случае, когда дифференциальный оператор A является самосопряженным. Метод КИП назван так в связи с тем, что все компоненты получающейся структуры решения этим способом определяются непосредственно в процессе применения алгоритмической процедуры без какой-либо априорной информации. Вектор-матричные КИП были введены и математически обоснованы в работах автора [6–8, 10, 11, 13, 20]. Здесь же был сформулирован структурный матричный алгоритм метода, предназначенный для решения задач математической физики, описываемых системами линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Выбор того или иного КИП определяется видом матрицы H рассматриваемой математической модели. В случае, когда матрица H системы (1.1) является диагональной, справедливо следующее представление [6]:

$$\varphi(\lambda_i, t) = \int_a^b [p\bar{U}(x, t)]^T \bar{G}(\lambda_i, t) dx = \int_a^b \bar{U}^T(x, t) p(x) \bar{G}(\lambda_i, t) dx, \quad (3.1)$$

$$\bar{U}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\lambda_i, t) \bar{G}(\lambda_i, t) \|G_i\|^{-2}, \quad \|G_i\|^2 = \int_a^b \bar{G}^T(\lambda_i, x) p(x) \bar{G}(\lambda_i, x) dx. \quad (3.2)$$

Равенство (3.1) определяет прямое КИП на сегменте $I = [a, b]$ (трансформанту), а (3.2) соответственно формулу обращения, справедливую при выполнении обобщенного соотношения ортогональности (2.17):

$$\int_a^b \bar{G}^T(\lambda_i, x) p(x) \bar{G}(\lambda_j, x) dx = \delta_i^j \|G_i\|^2. \quad (3.3)$$

Здесь $\|G_i\|$ — норма ядра преобразования, $\bar{G}^T(\lambda_i, x)$, $p(x)$ — весовая положительно-определенная функция, заданная диагональной матрицей $(m \times m)$.

Вектор-функции размерности $(m \times 1)$ $\{\bar{U}(x, t), \bar{G}(\lambda_i, x)\} \in \bar{L}_2(I)$, т.е. принадлежат сепарабельному пространству $\bar{L}_2(I)$ с метрикой (1.5) и определены в области $D = \{I \times t > 0\}$, λ_i , $(i = \overline{1, \infty})$ — параметры, образующие счетное множество.

Необходимо отметить, что для симметричной матрицы $p(x)$ (1.6) скалярное произведение является коммуникативным, т.е.

$$\int_a^b \bar{U}^T p \bar{G} dx = \int_a^b \bar{G}^T p \bar{U} dx. \quad (3.4)$$

В матрице H соответственно $p(x)$ ряд элементов могут оказаться нулевыми, т.е. не все уравнения (1.1) содержат производные по t . Интегральное преобразование (3.1), (3.2) в этом случае называется вырожденным [6]⁶.

Замечание 2. Следует иметь в виду, что все дальнейшее рассмотрение с некоторыми дополнениями в процедурной части метода справедливо также при исследовании начально-краевых задач (1.1) с симметричной матрицей H и соответственно $p(x)$ [7]. В этом случае конечное интегральное преобразование основано на расширенном по отношению к (3.3) соотношении ортогональности и существенно обобщает (3.1) и (3.2). Подобное КИП представляет многокомпонентное интегральное преобразование. Оно введено и подробно исследовано автором в работах [7, 8]. В разд. 5 настоящей статьи замкнутое решение начально-краевой задачи динамики для анизотропной трехслойной цилиндрической оболочки как раз и построено путем применения алгоритмической процедуры многокомпонентного КИП.

Применяем к дифференциальному уравнению (1.1) и начальным условиям (1.3) КИП (3.1) по переменной x , т.е. умножаем все члены на $\bar{G}^T(\lambda_i, x)p(x)$ и интегрируем в пределах $[a, b]$. Имеем

$$\begin{aligned} (\bar{G}, A[\bar{U}])_p - \left(\bar{G}, \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2}\right)_p &= \int_a^b \bar{G}^T p a_0 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} dx + \int_a^b \bar{G}^T p a_1 \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} dx + \int_a^b \bar{G}^T p a_2 \bar{U} dx - \\ &- E \int_a^b \bar{G}^T p \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} dx = \int_a^b \bar{G}^T p \bar{f} dx, \end{aligned} \quad (3.5)$$

⁶Однокомпонентное ($m = 1$) КИП является частным случаем (3.1), (3.2) и при заданных ядровых функциях из него следуют все известные интегральные преобразования с конечными пределами [4].



$$\int_a^b \bar{G}^T p \bar{U} dx = \int_a^b \bar{G}^T p \bar{U}_0 dx, \quad \int_a^b \bar{G}^T p \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} dx = \int_a^b \bar{G}^T p \dot{\bar{U}}_0 dx \quad \text{при } t = 0. \quad (3.6)$$

Принимая во внимание непрерывность $\bar{U}(x, t)$ в D и существование частных производных $\frac{\partial \bar{U}}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2}$ как непрерывных функций обеих переменных, справедливо представление

$$\int_a^b \bar{G}^T p \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b \bar{G}^T p \bar{U} dx, \quad \int_a^b \bar{G}^T p \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_a^b \bar{G}^T p \bar{U} dx. \quad (3.7)$$

Интегрируя первые две квадратуры (3.5) по частям и учитывая равенства (3.7), (3.4), а также выражение для трансформанты (3.1), уравнение (3.5) и условия (3.6) принимают следующий вид:

$$\phi(\bar{G}, \bar{U})|_a^b + (A^* [p\bar{G}], \bar{U}) - E\dot{\varphi}(\lambda_i, t) = \int_a^b \bar{G}^T p \bar{f}(x, t) dx, \quad (3.8)$$

$$\varphi(\lambda_i, t) = \int_a^b \bar{G}^T p \bar{U}_0 dx, \quad \dot{\varphi}(\lambda_i, t) = \int_a^b \bar{G}^T p \dot{\bar{U}}_0 dx \quad \text{при } t = 0. \quad (3.9)$$

Здесь A^* — сопряженное к A в метрике (1.5) дифференциальное выражение:

$$A^* [p\bar{G}] = (\bar{G}^T)'' pa_0 + (\bar{G}^T)' [2(pa_0)' - pa_1] + \bar{G}^T [(pa_0)'' - (pa_0)' + pa_2], \quad (3.10)$$

$\phi(\bar{G}, \bar{U})$ — билинейная форма вектор-функций \bar{U} и \bar{G} , т.е.

$$\phi(\bar{G}, \bar{U}) = \bar{G}^T pa_0 \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} - \left\{ (\bar{G}^T)' pa_0 - \bar{G}^T [(pa_0)' - pa_1] \right\} \bar{U}. \quad (3.11)$$

Приведенная выше операция (3.5)–(3.11) структурного алгоритма метода КИП по существу представляет процедуру выделения сопряженного к A дифференциального оператора [12], что является не только важным конструктивным этапом в процессе решения начально-краевых задач, но позволяет также использовать свойства линейных дифференциальных операторов для более глубокого понимания сути метода разложения по собственным вектор-функциям.

Действительно, в результате применения КИП (3.1) из равенства (3.8) следует, что

$$(\bar{G}, A[\bar{U}])_p = \phi(\bar{G}, \bar{U})|_a^b + (A^* [p\bar{G}], \bar{U}). \quad (3.12)$$

С другой стороны, известно [12], что для сопряженного к A дифференциального оператора A^* справедливо тождество Лагранжа:

$$(\bar{G}, A[\bar{U}])_p = (\bar{G}^T, pA[\bar{U}]) = (A^* [p\bar{G}], \bar{U}). \quad (3.13)$$

Принимая во внимание коммутативность скалярного произведения (1.5), из (3.13) находим

$$(A^T [\bar{U}] p, \bar{G}) = (A^* [p\bar{G}], \bar{U}), \quad (3.14)$$

где

$$A^T [\bar{U}] p = (\bar{U}^T)'' a_0^T p + (\bar{U}^T)' a_1^T p + \bar{U}^T a_2^T p. \quad (3.15)$$

Таким образом, из операторного равенства (3.13), а точнее (3.14), следует, что дифференциальное выражение A является самосопряженным, если

$$A^T[\dots]p = A^*[p\dots]. \quad (3.16)$$

Подставляя соотношения (3.10), (3.15) в (3.16) немедленно получаем условия, при которых выражение A является самосопряженным. Имеем:

$$pa_0 = a_0^T p, \quad 2(pa_0)' - pa_1 = a_1^T p, \quad (pa_0)'' - (pa_1)' + pa_2 = a_2^T p. \quad (3.17)$$



Третье равенство (3.17) может быть преобразовано с помощью второго, и в этом случае соотношения (3.17) тождественно совпадают с (2.15), (2.16).

Сопоставляя операторные равенства (3.12) и (3.13), замечаем, что условием выделения сопряженного оператора A^* в процедуре структурного метода КИП является обращение в нуль билинейной формы (3.11) на концах интервала $x = a, b$, т.е.

$$1) \quad \phi(\bar{G}, \bar{U})|_a^b = \left\{ G^T p a_0 \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} - \left[(\bar{G}^T)' p a_0 - \bar{G}^T ((p a_0)' - p a_1) \right] \bar{U} \right\} \Big|_a^b = 0. \quad (3.18)$$

Вторым условием, определяющим возможность разделения переменных в дифференциальном уравнении (1.1), является следующее операционное свойство:

$$2) \quad (A^* [p \bar{G}], \bar{U}) = \int_a^b \left\{ (\bar{G}^T)'' p a_0 + (+\bar{G}^T)' [2(p a_0)' - p a_1] + \right. \\ \left. + \bar{G}^T [(p a_0)'' - (p a_1)' + p a_2] \right\} \bar{U} dx = -\lambda_i^2 \int_a^b \bar{G}^T p \bar{U} dx. \quad (3.19)$$

По определению Л. Коллатца [26], равенство (3.19) приводит к одночленному классу краевых задач на собственные значения для ядровой вектор-функции $\bar{G}(\lambda_i, x)$ ⁷. Следует отметить, что спектральный параметр λ_i ($i = \overline{1, \infty}$) в равенстве (3.19) имеет размерность, обратную размерности переменной x , по которой осуществляется интегральное преобразование (3.1).

Самосопряженное дифференциальное выражение $A[\dots]$ представляет самосопряженный дифференциальный оператор, если у $A[\bar{U}]$ и $A^*[\bar{G}]$ совпадают области определения. Это значит, что помимо удовлетворения критериальных соотношений (3.13), (3.17) вектор-функции \bar{U} и \bar{G} должны подчиняться одним и тем же граничным условиям, т.е. аналогично (1.2) имеем

$$l_a \bar{G}'(\lambda_i, x) + c_a \bar{G}(\lambda_i, x) = 0 \quad \text{при } x = a, \quad l_b \bar{G}'(\lambda_i, x) + c_b \bar{G}(\lambda_i, x) = 0 \quad \text{при } x = b. \quad (3.20)$$

Выражая из (1.2) $\frac{\partial \bar{U}}{\partial x}$ и (3.20) \bar{G}' , получаем соответственно

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \Big|_{x=a,b} = \Gamma \bar{U} \Big|_{x=a,b}, \quad \bar{G}' \Big|_{x=a,b} = \Gamma \bar{G} \Big|_{x=a,b} \quad \text{или} \quad (\bar{G}^T)' \Big|_{x=a,b} = \bar{G}^T \Gamma^T \Big|_{x=a,b}. \quad (3.21)$$

В результате подстановки равенств (3.21) в (3.18) находим

$$\left\{ \bar{G}^T [p a_0 \Gamma - \Gamma^T p a_0 - (p a_0)' + p a_1] \bar{U} \right\} \Big|_a^b = 0.$$

Отсюда следует такое критериальное соотношение:

$$\left\{ (p a_0)' - p a_1 - p a_0 \Gamma + \Gamma^T p a_0 \right\} \Big|_{x=a,b} = 0, \quad (3.22)$$

которое полностью совпадает с третьим равенством (2.16).

Из равенств (3.17), (3.22) следует утверждение.

Теорема 4. Если выполняются условия (3.17), (3.22) для весовой матрицы p , матриц переменных коэффициентов a_r ($r = 0, 1, 2$) и матриц l_a, l_b, c_a, c_b , то A — самосопряженный дифференциальный оператор в \bar{L}_2 .

Аналогичная теорема приведена в статье автора [25]. Из теорем 1 и 4 вытекает такое следствие.

Собственные вектор-функции, порождаемые самосопряженным дифференциальным оператором A , образуют обобщенно ортогональную систему $\{\vartheta_i\}$.

Приведенные результаты (теоремы 1, 4 и следствие) представляют конструктивное подтверждение известных положений спектральной теории линейных дифференциальных операторов [12, 22, 28].

⁷Решение начально-краевой задачи методом КИП с использованием в операторном равенстве (3.19) полиномиального пучка приведено в работе автора [27].



Продолжая решение, наряду с (3.18), воспользуемся теперь вторым условием (3.19). Тогда дифференциальное уравнение (3.8) и равенства (3.9) образуют счетное множество задач Коши для трансформанты $\varphi(\lambda_i, t)$, т.е.

$$\ddot{\varphi}(\lambda_i, t) + \lambda_i^2 \varphi(\lambda_i, t) = F(\lambda_i, t), \quad i = \overline{1, \infty}, \quad (3.23)$$

$$\varphi(\lambda_i, t) = W_0(\lambda_i), \quad \dot{\varphi}(\lambda_i, t)|_{t=0} = \dot{W}_0(\lambda_i). \quad (3.24)$$

Здесь $F(\lambda_i, t)$, $W_0(\lambda_i)$, $\dot{W}_0(\lambda_i)$ – трансформанты соответствующих функций:

$$F(\lambda_i, t) = \int_a^b \overline{G}^T(\lambda_i, x) p(x) \overline{f}(x, t) dx, \quad (3.25)$$

$$W_0(\lambda_i) = \int_a^b \overline{G}^T(\lambda_i, x) p(x) \overline{U}_0(x) dx, \quad \dot{W}_0(\lambda_i) = \int_a^b \overline{G}^T(\lambda_i, x) p(x) \dot{\overline{U}}_0(x) dx.$$

С другой стороны, операционное свойство позволяет сформулировать дифференциальное уравнение для ядровой вектор-функции $\overline{G}(\lambda_i, x)$. Имеем

$$\left(\overline{G}^T\right)'' pa_0 + \left(\overline{G}^T\right)' [2(pa_0)' - pa_1] + \left(\overline{G}^T\right) [2(pa_0)'' - (pa_1)' + pa_2 + \lambda_i^2 p] = 0. \quad (3.26)$$

Подставляя в (3.26) равенства (3.17), транспонируя затем полученное матричное уравнение и учитывая, что $p(x)$ – неособенная матрица, находим:

$$a_0(x) \overline{G}''(\lambda_i, x) + a_1(x) \overline{G}'(\lambda_i, x) + [a_2(x) + \lambda_i^2] \overline{G}(\lambda_i, x) = 0. \quad (3.27)$$

Таким образом, исходная начально-краевая задача (1.1)–(1.3) распалась на две подзадачи, а именно (3.23), (3.24) для трансформанты $\varphi(\lambda_i, t)$ и (3.20), (3.27) для вектор-функции ядра преобразования $\overline{G}(\lambda_i, x)$, т.е. произошло разделение переменных. Однородное дифференциальное уравнение (3.27) и соответствующие граничные условия (3.20) представляют краевую задачу определения собственных значений λ_i ($i = \overline{1, \infty}$) и собственных функций $\overline{G}(\lambda_i, x)$. Замечаем, что она с точностью до обозначений тождественно совпадает с (2.8), (2.34), а задача (3.23), (3.24) при наличии связей (2.25) – с (2.32), (2.33). Решения обеих подзадач подробно рассмотрены во втором разделе статьи. Располагая функциями $\varphi(\lambda_i, t)$, $\overline{G}(\lambda_i, x)$ и параметрами λ_i ($i = \overline{1, \infty}$), по формуле обращения (3.2) определяется искомое решение, т.е.

$$\overline{U}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[W_0(\lambda_i) \cos \lambda_i t + \dot{W}_0(\lambda_i) \lambda_1^{-1} \sin \lambda_i t - \lambda_1^{-1} \int_0^t F(\lambda_i, \tau) \sin \lambda_i(t - \tau) d\tau \right] \overline{G}(\lambda_i, x) \|G_i\|^{-2}. \quad (3.28)$$

Приведенные в разд. 2,3 результаты позволяют утверждать, что общее решение рассматриваемой начально-краевой задачи, построенное методами классического разложения по собственным вектор-функциям (2.26) и конечных интегральных преобразований (3.28), в случае, когда оператор A является самосопряженным, тождественно совпадают. Существование построенного решения (3.2) обосновано теоремой 3.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 5. Если трансформанты $\varphi(\lambda_1, t)$, $\varphi(\lambda_2, t)$, $\varphi(\lambda_3, t)$, ... являются ограниченными функциями, причем

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(\lambda_i, t)|^2 < \infty, \quad (3.29)$$

то существует вектор-функция $\overline{U}(x, t) \in \overline{L}_2$ такая, что $\varphi(\lambda_i, t)$ ($i = \overline{1, \infty}$) представляют коэффициенты Фурье соответствующего (3.2) ортонормального разложения и для нее справедливо условие замкнутости:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|\overline{S}_l - \overline{U}\| = 0,$$

т.е. ряд сходится в среднем квадратичном, а функция $\overline{U}(x, t)$, определяемая рядом (3.2), является единственной.



Здесь $\bar{S}_l(x, t)$ — частная сумма, т.е.

$$\bar{S}_l(x, t) = \sum_{i=1}^l \varphi(\lambda_i, t) \bar{K}(\lambda_i, x),$$

$\bar{K}(\lambda_i, x)$ — нормированные собственные функции ядра преобразования

$$\bar{K}(\lambda_i, x) = \bar{G}(\lambda_i, x) \|G_i\|^{-1},$$

$\|G_i\|$ — норма ядровой вектор-функции, определяемая по формуле (2.23).

Подробное доказательство теоремы приведено в работе [8]. По существу, она представляет обобщенный векторный аналог известной теоремы Рисса – Фишера [29]. Поточечная сходимость разложения (3.28) зависит от вида вектор-функции $\bar{f}(x, t)$.

Замечание 3. В статье автора [30] приводится доказательство аналогичной теоремы разложения по собственным вектор-функциям для линейных дифференциальных операторов динамической теории упругости.

Для частного случая весовой матрицы $p(x)$ легко формулируется конструктивное условие полноты ядровых вектор-функций $\bar{G}(\lambda_i, x)$ или $\bar{K}(\lambda_i, x)$.

Теорема 6. В случае, когда весовая матрица вырождается в скаляр $p(x) = p_0(x)E$, то собственные ядровые вектор-функции $\bar{K}(\lambda_i, x)$ ортонормального разложения, определяемого формулой обращения КИП

$$\bar{U}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\lambda_i, x) \bar{K}(\lambda_i, x), \quad (3.30)$$

образуют полную систему, если выполняется соотношение

$$p_0(x_1) \sum_{i=1}^{\infty} \bar{K}(\lambda_i, x_1) K(\lambda_i, x_1) = \delta(x_1 - x). \quad (3.31)$$

Доказательство. При доказательстве, следуя [31], используем физические представления для построенного решения. Для скалярной функции $p(x)$ трансформанта $\varphi(\lambda_i, t)$ записывается в виде

$$\varphi(\lambda_i, t) = \int_a^b \bar{K}^T(\lambda_i, x) p(x) \bar{U}(x, t) dx = \int_a^b p_0(x) \bar{U}^T(x, t) \bar{K}(\lambda_i, x) dx. \quad (3.32)$$

Искомая вектор-функция (3.30) может рассматриваться как отклик (реакция) в точке x на сосредоточенное воздействие, приложенное в точке x_1 . Тогда разложение (3.30) с учетом выражения (3.32) представляется следующим образом:

$$\bar{U}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_a^b p_0(x_1) \bar{U}^T(x_1, t) \bar{K}(\lambda_i, x_1) dx \right] \bar{K}(\lambda_i, x).$$

Транспонируя это равенство, имеем

$$\bar{U}^T(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_a^b p_0(x_1) \bar{U}^T(x_1, t) \bar{K}(\lambda_i, x_1) dx \right] \bar{K}^T(\lambda_i, x). \quad (3.33)$$

С другой стороны, принимая во внимание фильтрующее свойство дельта-функции, получаем

$$\bar{U}(x, t) = \int_a^b \bar{U}(x_1, t) \delta(x_1 - x) dx \quad \text{или} \quad \bar{U}^T(x, t) = \int_a^b \bar{U}^T(x_1, t) \delta(x_1 - x) dx, \quad (3.34)$$

где $\delta(\dots)$ — дельта-функция П.А. Дирака.

Приравнявая выражения (3.33) и (3.34), находим

$$\int_a^b \bar{U}^T(x_1, t) p_0(x_1) dx \sum_{i=1}^{\infty} \bar{K}(\lambda_i, x_1) \cdot \bar{K}(\lambda_i, x) = \int_a^b \bar{U}^T(x_1, t) \delta(x_1 - x) dx.$$

Откуда немедленно следует соотношение (3.31), что и требовалось показать.



4. ОБОБЩЕННЫЙ СТРУКТУРНЫЙ АЛГОРИТМ МЕТОДА КИП ПРИ РЕШЕНИИ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим теперь решение начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) в общем виде, без каких-либо ограничений, накладываемых на коэффициенты $a_r(x)$ дифференциального оператора A . Для этой цели воспользуемся разработанным автором методом биортогональных конечных интегральных преобразований и матричным структурным алгоритмом [10, 11, 20]. В классе вектор-функций, интегрируемых с квадратом в метрике (1.5) сепарабельного пространства $\overline{L}_2(I)$, в области $D : \{I \times t > 0\}$ справедливо следующее представление [10, 11]:

$$\varphi(\lambda_i, t) = (\overline{G}, \overline{U})_p = (\overline{G}^T p, \overline{U}) = \int_a^b \overline{U}^T(x, t) p(x) \overline{G}(\lambda_i, t) dx = \int_a^b \overline{G}^T(\lambda_i, t) p(x) \overline{U}(x, t) dx, \quad (4.1)$$

$$\overline{U}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\lambda_i, t) \cdot \overline{K}(\mu_i, x) \cdot (\overline{G}_i^T p, \overline{K}_i)^{-1}. \quad (4.2)$$

Здесь, как и прежде, $\overline{U}(x, t)$ — искомая вектор-функция $m \times 1$, а $\overline{G}(\lambda_i, x)$, $\overline{K}(\mu_i, x)$ — две ядровые вектор-функции того же порядка, λ_i, μ_i — соответствующие им собственные значения сопряженной и инвариантной однородных краевых задач, формирующихся в процессе решения. Разложение (4.2) справедливо при выполнении такого соотношения биортогональности

$$(\overline{G}_i, \overline{K}_j)_p = \int_a^b \overline{G}^T(\lambda_i, t) p(x) \overline{K}(\mu_j, x) dx = \delta_i^j (\overline{G}_i^T p, \overline{K}_j).$$

Равенства (4.1), (4.2) представляют соответственно прямое и обратное биортогональные конечные интегральные преобразования, т.е. $\varphi(\lambda_i, t)$ является трансформантой, а разложение (4.2) — формулой обращения.

Компоненты вектор-функций $\overline{U}(x, t)$, $\overline{G}(\lambda_i, x)$, $\overline{K}(\mu_i, x)$ — элементы пространства $L_2(I)$ с метрикой (1.5).

$$\{U_k(x, t), G_k(\lambda_i, x), K_k(\mu_i, x)\} \in \overline{L}_2(I) \quad (k = 1, \dots, m).$$

Следует отметить, что в частном случае, когда $\overline{G} = \overline{K}$, $\lambda_i = \mu_i$, то соотношения (4.1), (4.2) становятся обычным векторно-матричным КИП (3.1), (3.2).

Скалярное произведение $(\overline{G}_i^T p, \overline{K}_i)$ представляет аналог квадрата нормы в разложении (3.2).

Для ядровых вектор-функций \overline{K} и \overline{G} существует и другое альтернативное представление биортогонального КИП в метрике (1.5), соответствующее разложению $\overline{U}(x, t)$ в ряд по собственным функциям $\overline{G}(\lambda_i, x)$ [10, 11], т.е.

$$\Omega(\mu_i, t) = (\overline{U}^T, p \overline{K}) = \int_a^b \overline{U}^T(x, t) p(x) \overline{K}(\mu_i, x) dx = \int_a^b \overline{K}^T(\mu_i, x) p(x) \overline{U}(x, t) dx, \quad (4.3)$$

$$\overline{U}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Omega(\mu_i, t) \overline{G}(\lambda_i, x) (\overline{K}_i^T p, \overline{G}_i)^{-1}. \quad (4.4)$$

Равенства (4.1), (4.2) и (4.3), (4.4) являются равноправными.

Для биортогональных преобразований справедливы утверждения, аналогичные теоремам 5 и 6.

Теорема 7. Если трансформанты $\varphi(\lambda_1, t)$, $\varphi(\lambda_2, t)$, ... и $\Omega(\mu_1, t)$, $\Omega(\mu_2, t)$, ... — ограниченные функции, причем таковы, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\lambda_i, t) \cdot \Omega(\mu_i, t) < \infty,$$

то существует вектор-функция $\overline{U}(x, t) \in \overline{L}_2(I)$, для которой $\varphi(\lambda_i, t)$ и $\Omega(\mu_i, t)$ являются коэффициентами Фурье соответственно разложений (4.2) и (4.4). Для ее представлений (4.2), (4.4) справедлива интегральная сходимость:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (\overline{S}_l - \overline{U}, \overline{s}_l - \overline{U}) = 0.$$

Вектор-функция $\overline{U}(x, t)$, определяемая рядами (4.2), (4.4), является единственной.



В формулировке теоремы $\bar{S}_l(x, t)$ и $\bar{s}_l(x, t)$ представляют частные суммы

$$\bar{S}_l(x, t) = \sum_{i=1}^l \varphi(\lambda_i, t) \bar{K}(\mu_i, x) \left(\bar{G}_i^T p, \bar{K}_i \right)^{-1}, \quad \bar{s}_l(x, t) = \sum_{i=1}^l \Omega(\mu_i, t) \bar{G}(\lambda_i, x) \left(\bar{K}_i^T p, \bar{G}_i \right)^{-1}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично приведенному в работе автора [8].

Теорема 8. Если весовая матрица

$$p(x) = p_0(x) \cdot E,$$

то ядровые вектор-функции $\bar{G}(\lambda_i, x)$, $\bar{K}(\mu_i, x)$ разложений (4.2), (4.4) образуют полные системы, когда справедливо равенство

$$p_0(x_1) \sum_{i=1}^{\infty} \bar{G}(\lambda_i, t) \bar{K}(\mu_i, x) \left(\bar{K}_i^T p, \bar{G}_i \right) = \delta(x_1 - x).$$

Здесь, как и выше, $\delta(\dots)$ — дельта-функция П. А. Дирака.

Доказательство, аналогично приведенному ранее (теорема 6).

Ниже приводится разработанная автором алгоритмическая процедура применения биортогонального КИП (4.1), (4.3) к начально-краевой задаче (1.1)–(1.3).

Замечание 4. Структурный алгоритм биортогональных конечных интегральных преобразований впервые сформулирован в работах [10, 11] и подробно описан в статье [32] при исследовании нестационарных задач динамики оболочек вращения.

Подвергаем дифференциальное уравнение (1.1) и начальные условия (1.3) интегральному преобразованию (4.1) по переменной x с ядровой вектор-функцией $\bar{G}(\lambda_i, x)$ и весовой матрицей $p(x)$. Имеем:

$$\left(\bar{G}^T p, A [\bar{U}] \right) - E \left(\bar{G}^T p, \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} \right) = \left(\bar{G}^T p, \bar{f}(x, t) \right), \quad (4.5)$$

$$\left(\bar{G}^T p, \bar{U} \right) = \left(\bar{G}^T p, \bar{U}_0(x) \right), \quad \left(\bar{G}^T p, \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \right) = \left(\bar{G}^T p, \dot{\bar{U}}_0(x) \right) \quad \text{при } t = 0. \quad (4.6)$$

Интегрируем по частям скалярное произведение $\left(\bar{G}^T p, A [\bar{U}] \right)$, в результате чего, как и прежде (п.3), выделяем сопряженное дифференциальное выражение $A^* [p\bar{G}]$:

$$\left(\bar{G}^T p, A [\bar{U}] \right) = \Phi(\bar{G}, \bar{U})|_a^b + (A^* [p\bar{G}], \bar{U})_p. \quad (4.7)$$

Здесь $A^* [p\bar{G}]$ и $\Phi(\bar{G}, \bar{U})$ определяются соотношениями (3.10), (3.11), т.е.

$$\begin{aligned} A^* [p\bar{G}] &= \left(\bar{G}^T p a_0 \right)'' - \left(\bar{G}^T p a_1 \right)' + \bar{G}^T p a_2 = \\ &= \left(\bar{G}^T \right)'' p a_0 + \left(\bar{G}^T \right)' [2(p a_0)' - p a_1] + \bar{G}^T [(p a_0)'' - (p a_1)' + p a_2], \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\Phi(\bar{G}, \bar{U}) = \bar{G}^T p a_0 \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} - \left\{ \left(\bar{G}^T \right)' p a_0 - \bar{G}^T [(p a_0)' - p a_1] \right\} \bar{U}. \quad (4.9)$$

Имея в виду выражения (4.7) и (3.7), т.е.

$$\left(\bar{G}^T p, \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{G}^T p, \bar{U} \right), \quad \left(\bar{G}^T p, \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\bar{G}^T p, \bar{U} \right),$$

и аналогичные (4.1) обозначения трансформант (3.25), равенства (4.5), (4.6) принимают следующий вид:

$$\Phi(\bar{G}, \bar{U})|_a^b + (A^* [\bar{G}], \bar{U})_p - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\bar{G}^T p, \bar{U} \right) = F(\lambda_i, t), \quad (4.10)$$

$$\varphi(\lambda_i, 0) = W_0(\lambda_i), \quad \dot{\varphi}(\lambda_i, t)|_{t=0} = \dot{W}_0(\lambda_i) \quad \text{при } t = 0, \quad (4.11)$$



где $W_0(\lambda_i)$, $\dot{W}_0(\lambda_i)$, $F(\lambda_i, t)$ – трансформанты соответствующих функций (3.25).

Воспользуемся теперь двумя условиями (3.18), (3.19) структурного алгоритма метода КИП. Имеем:

$$\Phi(\bar{G}, \bar{U})|_a^b = 0, \quad (4.12)$$

$$(A^* [p\bar{G}], \bar{U}) = -\lambda_i^2 (\bar{G}^T p, \bar{U}). \quad (4.13)$$

Соотношения (4.12), (4.13) позволяют записать уравнение (4.10) в трансформантах, т.е.

$$\ddot{\varphi}(\lambda_i, t) + \lambda_i^2 \varphi(\lambda_i, t) = F(\lambda_i, t), \quad i = \overline{1, \infty}. \quad (4.14)$$

Таким образом, аналогично (3.23), (3.24) уравнения (4.14) совместно с начальными условиями (4.11) представляют счетное множество задач Коши для $\varphi(\lambda_i, t)$, и ее решение для произвольной правой части записывается в виде

$$\varphi(\lambda_i, t) = W_0(\lambda_i) \cos \lambda_i t + \dot{W}_0(\lambda_i) \lambda_i^{-1} \sin \lambda_i t - \lambda_i^{-1} \int_0^t F(\lambda_i, \tau) \sin \lambda_i(t - \tau) d\tau. \quad (4.15)$$

Равенства (4.12), (4.13) совместно с граничными условиями (1.2) позволяют сформулировать краевую задачу для определения ядра преобразования $\bar{G}(\lambda_i, x)$ и параметров λ_i . Действительно, из (4.13) следует такое дифференциальное уравнение

$$A^* [p\bar{G}] = -\lambda_i^2 \bar{G}^T p,$$

или в раскрытом виде, с учетом выражения (4.8), имеем:

$$\begin{aligned} & (\bar{G}^T p a_0)'' - (\bar{G}^T p a_1)' + \bar{G}^T p a_2 + \bar{G}^T \lambda_i^2 p = (\bar{G}^T(\lambda_i, x))'' p a_0 + \\ & + (\bar{G}^T(\lambda_i, x))' [2(p a_0)' - p a_1] + \bar{G}^T(\lambda_i, x) [(p a_0)'' - (p a_1)' + p a_2 + p \lambda_i^2] = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Выражая производные $\frac{\partial \bar{U}}{\partial x}$ из условий (1.2), получаем аналогичные (3.21) соотношения

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \Big|_{x=a,b} = \Gamma \bar{U} \Big|_{x=a,b}, \quad \Gamma \Big|_{x=a,b} = -e^{-1} c \Big|_{x=a,b}. \quad (4.17)$$

Подстановка (4.17) в равенства (4.9), (4.12) приводит к такому соотношению:

$$\left\{ \bar{G}^T [p a_0 \Gamma - (p a_0)' + p a_1] - [\bar{G}^T]' p a_0 \right\} \Big|_a^b = 0. \quad (4.18)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (4.16) совместно с граничными условиями (4.18), т.е.

$$A^* [p\bar{G}] + \lambda_i^2 \bar{G}^T p = 0, \quad (4.19)$$

$$\bar{G}^T [p a_0 \Gamma - (p a_0)' + p a_1] - (\bar{G}^T)' p a_0 = 0 \quad \text{при } x = a, b \quad (4.20)$$

представляет сопряженную однородную краевую задачу определения собственных значений λ_i ($i = \overline{1, \infty}$) и собственных вектор-функций $\bar{G}(\lambda_i, x)$. Следует отметить, что $A^* [p\bar{G}]$ совместно с условиями (4.20) представляет сопряженный $A[\bar{U}]$ в метрике (1.5) оператор, а приведенный выше алгоритм является процедурой выделения A^* .

Для удобства соотношения (4.16), (4.18) могут быть представлены в виде

$$a_0^T p \bar{G}'' + [2(a_0^T p)' - a_1^T p] \bar{G}' + [(a_0^T p)'' - (a_1^T p)' + a_2^T p + \lambda_i^2 p] \bar{G} = 0,$$

$$a_0^T p \bar{G}' + [\Gamma^T a_0^T p - (a_0^T p)' - a_1^T p] \bar{G} = 0 \quad \text{при } x = a, b.$$



Следующий шаг структурного алгоритма метода конечных биортогональных преобразований состоит в выделении сопряженного к A^* оператора A^{**} и формировании однородной краевой задачи, определяющей вторую ядровую вектор-функцию $\overline{K}(\mu_j, x)$ и соответствующие собственные значения μ_j . Покажем, что сопряженный к сопряженному дифференциальный оператор при этом совпадает с исходным, т.е.

$$A^{**} = A. \quad (4.21)$$

Применяем КИП (4.3) к дифференциальному уравнению (4.16), точнее к (4.19), имея в виду граничные условия (4.18), т.е. (4.20). Находим

$$(A^* [p\overline{G}], p\overline{K}) + \lambda_i^2 (\overline{G}^T p, p\overline{K}) = 0, \quad (4.22)$$

где

$$(A^* [p\overline{G}], p\overline{K}) = \int_a^b (\overline{G}^T p a_0)'' p\overline{K} dx - \int_a^b (\overline{G}^T p a_1)' p\overline{K} dx + \int_a^b \overline{G}^T p a_2 p\overline{K} dx. \quad (4.23)$$

Выполняя первые две квадратуры (4.23) по частям, преобразуем уравнение (4.22) к виду

$$B (\overline{G}^T, \overline{K}) \Big|_a^b + (\overline{G}^T p, A^{**} [p\overline{K}]) + \lambda_i^2 (\overline{G}^T p, p\overline{K}) = 0. \quad (4.24)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A^{**} [p\overline{K}] &= a_0 (p\overline{K})'' + a_1 (p\overline{K})' + a_2 p\overline{K}, \\ B (\overline{G}^T, \overline{K}) &= (\overline{G}^T)' p a_0 p\overline{K} - \overline{G}^T p a_0 p\overline{K}' + \overline{G}^T [(p a_0)' - p a_1] p\overline{K}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Воспользуемся теперь аналогичными (4.12), (4.13) условиями метода КИП, т.е.

$$(\overline{G}^* p, A^{**} [p\overline{K}]) = -\mu_j^2 (\overline{G}^T p, p\overline{K}), \quad (4.26)$$

$$B (\overline{G}^T, \overline{K}) \Big|_a^b = 0. \quad (4.27)$$

Из (4.26) следует такое дифференциальное уравнение для вектор-функции $\overline{K}(\mu_j, x)$, точнее $p\overline{K}(\mu_j, x)$:

$$A^{**} [p\overline{K}] = a_0 (p\overline{K})'' + a_1 (p\overline{K})' + a_2 p\overline{K} = -\mu_j^2 p\overline{K}. \quad (4.28)$$

Имея в виду транспонированное граничное условие (4.18), определяем \overline{G}'

$$\overline{G}' = (a_0^T p)^{-1} [\Gamma^T a_0 p - (a_0^T p)' + a_1^T p] \overline{G} \quad \text{при } x = a, b.$$

После подстановки этого равенства в соотношение (4.27) получаем

$$[\Gamma (p\overline{K}) - (p\overline{K})'] \Big|_a^b = 0.$$

Откуда следует

$$l (p\overline{K})' + c (p\overline{K}) = 0 \quad \text{при } x = a, b. \quad (4.29)$$

Таким образом, сформулирована однородная краевая задача (4.28), (4.29) для ядровой вектор-функции $p\overline{K}(\mu_j, x)$, инвариантная (1.1), (1.2). Действительно, дифференциальное выражение (4.25) и граничные условия (4.29) совпадают с (1.4), (1.2), т.е. справедливо равенство (4.21).

Наконец, трансформированное уравнение (4.24), с учетом равенств (4.26), (4.27) структурного алгоритма метода КИП, приводит к такому соотношению биортогональности ядровых вектор-функций

$$(\overline{G}^T p, p\overline{K}) = 0, \quad \text{если } \lambda_i \neq \mu_j, \quad \text{или} \quad (\overline{G}^T p, \overline{K}_p) = 0, \quad \text{если } \lambda_i \neq \mu_j,$$

где $\overline{G}_p(\lambda_i, x) = p(x)\overline{G}(\lambda_i, x)$, $\overline{K}_p(\mu_j, x) = p(x)\overline{K}(\mu_j, x)$, в случае, когда $p(x)$ — диагональная матрица.

Равенства (4.19), (4.20) и (4.28), (4.29) представляют соответственно сопряженную и инвариантную однородные краевые задачи на собственные значения, предназначенные для определения ядровых



вектор-функций $\overline{G}(\lambda_i, x)$, $\overline{K}(\mu_i, x)$ и параметров λ_i, μ_j ($i = \overline{1, \infty}$) биортогонального КИП (4.1), (4.2). Алгоритм их решения описан в разд. 2 настоящей статьи. Следует при этом подчеркнуть, что интегрируемость систем уравнений (4.19) и (4.28) определяет возможность построения замкнутого решения рассматриваемой начально-краевой задачи (1.1)–(1.3).

Зная теперь компоненты ядровых вектор-функций $\overline{G}(\lambda_i, x)$, $\overline{K}(\mu_i, x)$ и собственные значения λ_i, μ_i , а также трансформанту $\varphi(\lambda_i, t)$ (4.15), по формуле обращения (4.2) биортогонального КИП находится искомая вектор-функция $\overline{U}(x, t)$ (точнее, ее компоненты), т.е. формируется общее решение задачи (1.1)–(1.3). В структуре решения (4.2) остается неизвестной лишь сложная квадратура $(\overline{G}_i^T p, \overline{K}_i) = (\overline{G}_p, \overline{K})$, которая в общем виде может быть вычислена на основе следующей теоремы [33].

Теорема 9. Для собственных функций $\overline{G}(\lambda_i, x)$, $\overline{K}(\mu_i, x)$ и соответствующих им собственных значений (простых точек спектров $\{\lambda_i\}$ и $\{\mu_i\}$) скалярное произведение $(\overline{G}_p, \overline{K}) = (\overline{G}^T p, \overline{K})$ в формуле обращения КИП (4.2) определяется выражением

$$\begin{aligned} (\overline{G}_p, \overline{K}) &= (\overline{G}^T p, \overline{K}) = \\ &= \left\{ \left[(\overline{G}^T p a_0)' - \overline{G}^T p a_1 \right] \frac{\partial}{\partial \xi} \overline{K}(\xi_i, x) \Big|_{\xi=\xi_i} - \overline{G}^T p a_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} \overline{K}(\xi_i, x) \Big|_{\xi=\xi_i} \right\} \Big|_{x=a, b}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Доказательство утверждения (4.30) приводится в статье автора [33]. Необходимо отметить, что в случае, если

$$\overline{K}(\mu_i, x) = \overline{G}(\lambda_i, x), \quad \mu_i = \lambda_i,$$

т.е. когда биортогональное преобразование (4.1), (4.2) совпадает с обычным вектор-матричным КИП (3.1), (3.2), то имея в виду соотношения (2.20), (2.21), из равенства (4.30) немедленно следует выражение для квадрата нормы (2.23).

В заключение этого параграфа необходимо сделать следующее замечание.

Замечание 5. Поскольку в общем случае решение (4.2) несамосопряженной начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) содержит две вектор-функции \overline{G} и \overline{K} , связанные тождеством Лагранжа [12], то для их определения обычный способ разложения по собственным функциям, приведенный в разд. 2 настоящей статьи, должен быть дополнен безальтернативной процедурой выделения сопряженного оператора, являющейся частью изложенного здесь структурного алгоритма метода биортогональных КИП. Это значит, что классический прием разложения по собственным вектор-функциям автоматически становится методом конечных биортогональных интегральных преобразований.

5. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННЫМ СТРУКТУРНЫМ МЕТОДОМ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ КИП НЕСТАЦИОНАРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В качестве примера рассматривается начально-краевая осесимметричная задача динамики для трехслойной упругой анизотропной круговой цилиндрической оболочки при произвольном ее нагружении и закреплении по торцам. Замкнутое решение строится путем применения многокомпонентного биортогонального конечного интегрального преобразования. В цилиндрической системе координат $(r^* = R, x^*, \theta)$ оболочка занимает область $\Omega : \{R, 0 \leq x^* \leq H^*, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Здесь R, H^* — соответственно радиус нейтральной поверхности и длина оболочки. Полагая, что наружные тонкие слои толщиной h_1 и h_2 испытывают мембранное напряженно-деформированное состояние, а кинематика деформирования среднего ортотропного слоя толщиной h основана на гипотезах уточненной технической теории оболочек, дополненной деформациями сдвига и инерцией поворота поперечных сечений. Подробный вывод всех определяющих соотношений для подобных оболочек приведен в статье [34]. При этом исходные матрицы математической модели (1.1)–(1.3) $a_0, a_1, a_2, l_a, l_b, c_a, c_b, \overline{U}(x, t), \overline{f}(x, t)$ имеют такой вид:



$$\begin{aligned}
 a_0 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{13}^0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{31}^0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad a_1 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12}^1 & 0 \\ -a_{31}^1 & 0 & a_{23}^1 \\ 0 & a_{32}^1 & 0 \end{vmatrix}, \quad a_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13}^2 \\ 0 & -a_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{33}^2 \end{vmatrix}, \\
 H_0 &= \begin{vmatrix} -I_{11} & 0 & -I_{13} \\ 0 & -I_{22} & 0 \\ -I_{31} & 0 & -I_{33} \end{vmatrix}, \quad l_a = l_b = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad c_a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{vmatrix}, \\
 c_b &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_3 \end{vmatrix}, \quad \bar{U}(x, t) = \begin{vmatrix} U_1 = U(x, t) \\ U_2 = W(x, t) \\ U_3 = \psi(x, t) \end{vmatrix}, \quad \bar{f}(x, t) = \begin{vmatrix} f_1 = -q_x(x, t) \\ f_2 = -q_R(x, t) \\ f_3 = -m_x(x, t) \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Принимая во внимание (5.1), начально-краевая задача (1.1)–(1.3), т.е. дифференциальные уравнения движения и соответствующие условия, представленные в безразмерной форме, записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a_{13}^0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_{12}^1 \frac{\partial W}{\partial x} + a_{13}^2 \psi - I_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - I_{13} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= -q_x, \\
 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a_{21}^1 \frac{\partial U}{\partial x} + a_{23}^1 \frac{\partial \psi}{\partial x} - a_{22}^2 W - I_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= -q_R, \\
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_{31}^0 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a_{32}^1 \frac{\partial W}{\partial x} - a_{33}^2 \psi - I_{33} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - I_{31} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= -m_x,
 \end{aligned} \right\} \tag{5.2}$$

$$\left. \begin{aligned}
 U = W = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} - \chi_3 \psi &= \text{при } x = 0 \\
 U = W = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} + \chi_3 \psi &= \text{при } x = H,
 \end{aligned} \right\} \tag{5.3}$$

$$\left. \begin{aligned}
 U = U_0(x), \quad W = W_0(x), \quad \psi = \psi_0(x) \quad \text{при } t = 0, \\
 \frac{\partial}{\partial t} U = \dot{U}_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} W = \dot{W}_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \psi = \dot{\psi}_0(x).
 \end{aligned} \right\} \tag{5.4}$$

Здесь элементы матриц a_{ks}^r , I_{ks} ($k, s = 1, 2, 3$; $r = 0, 1, 2$) — безразмерные параметры, зависящие от жесткостных и инерционных характеристик слоев оболочки, χ_3 — безразмерный коэффициент жесткости упругого защемления торцов. $U(x, t)$, $W(x, t)$ и $\psi(x, t)$ — безразмерные компоненты вектора перемещений и углов поворота нормали, $q_x(x, t)$, $q_R(x, t)$, $m_x(x, t)$ — безразмерные компоненты вектора линейной и моментальной нагрузки. $U_0(x)$, $W_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\dot{U}_0(x)$, $\dot{W}_0(x)$, $\dot{\psi}_0(x)$ — заданные в начальный момент времени безразмерные перемещения и скорости перемещений. $\{x, t\}$ — безразмерные продольная координата и время.

Соотношения (5.2)–(5.4) представляют математическую формулировку рассматриваемой начально-краевой задачи.

Замечание 6. Структура биортогонального КИП (4.1), (4.2) определяется матрицей H (5.1). Поскольку эта матрица не диагональная, то следует воспользоваться многокомпонентным биортогональным интегральным преобразованием [11, 7]. Кроме того, замечаем, что система дифференциальных уравнений (5.2) с постоянными коэффициентами, т.е. $a_{ks}^r = \text{const}$ и $I_{ks} = \text{const}$. Это означает, что элементы весовой матрицы $p(x)$ также постоянны, и без ущерба общности матрицу p можно считать единичной, т.е. $p = E$.

Принимая во внимание все отмеченное выше, вводим на сегменте $x \in [0, H]$ следующее многокомпонентное биортогональное КИП:

$$\begin{aligned}
 \varphi(\lambda_i, t) &= \int_0^H \{ [I_{11}U(x, t) + I_{13}\psi(x, t)] G_1(\lambda_i, x) + I_{22}W(x, t)G_2(\lambda_i, x) + \\
 &\quad + [I_{33}\psi(x, t) + I_{31}U(x, t)] G_3(\lambda_i, x) \} dx,
 \end{aligned} \tag{5.5}$$



$$\begin{aligned}
 U(x, t) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \varphi(\lambda_i, t) K_1(\mu_j, x) (\bar{G}_i, \bar{K}_j)_{i=j}^{-1}, \\
 W(x, t) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \varphi(\lambda_i, t) K_2(\mu_j, x) (\bar{G}_i, \bar{K}_j)_{i=j}^{-1}, \\
 \psi(x, t) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \varphi(\lambda_i, t) K_3(\mu_j, x) (\bar{G}_i, \bar{K}_j)_{i=j}^{-1},
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

где $G_k(\lambda_i, x) = G_{ki}$, $K_k(\mu_j, x) = K_{kj}$ ($k = 1, 2, 3$) – компоненты соответствующих ядерных вектор-функций.

Преобразование (5.5), (5.6) справедливо при выполнении следующего обобщенного соотношения биортогональности [11, 7]:

$$\begin{aligned}
 \int_0^H \{ [I_{11}K_1(\mu_j, x) + I_{13}K_3(\mu_j, x)] G_1(\lambda_i, x) + I_{22}K_2(\mu_j, x)G_2(\lambda_i, x) + \\
 + [I_{33}K_3(\mu_j, x) + I_{31}K_1(\mu_j, x)] G_3(\lambda_i, x) \} dx = \delta_i^j (\bar{G}_i, \bar{K}_j).
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

Обобщенное соотношение биортогональности (5.7) в отличие от обычного, наряду с главными, содержит также побочные члены с множителями I_{13} и I_{31} . $(\bar{G}_i, \bar{K}_j)_{i=j}$ – обобщенное скалярное произведение вектор-функций \vec{G}_i и \vec{K}_j , т.е.

$$\begin{aligned}
 (\bar{G}_i, \bar{K}_j)_{i=j} = \int_0^H \{ I_{11}G_1(\lambda_i, x)K_1(\mu_j, x) + I_{22}G_2(\lambda_i, x)K_2(\mu_j, x) + \\
 + I_{33}G_3(\lambda_i, x)K_3(\mu_j, x) + I_{13}G_3(\lambda_i, x)K_1(\mu_j, x) + I_{31}G_1(\lambda_i, x)K_3(\mu_j, x) \} dx.
 \end{aligned}
 \tag{5.8}$$

Применяем биортогональное КИП (5.5) к системе дифференциальных уравнений (5.2) и начальным условиям (5.4)

$$\begin{aligned}
 \int_0^H \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a_{13}^0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_{12}^1 \frac{\partial W}{\partial x} + a_{13}^2 \psi \right) G_{1i} dx - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^H (I_{11}U + I_{13}\psi) G_{1i} dx = - \int_0^H q_x G_{1i} dx, \\
 \int_0^H \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a_{21}^1 \frac{\partial U}{\partial x} + a_{23}^1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_{22}^2 W \right) G_{2i} dx - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^H I_{22}W G_{2i} dx = - \int_0^H q_R G_{2i} dx, \\
 \int_0^H \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_{31}^0 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a_{32}^1 \frac{\partial W}{\partial x} - a_{33}^2 \psi \right) G_{3i} dx - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^H (I_{33}\psi + I_{31}U) G_{3i} dx = - \int_0^H m_x G_{3i} dx,
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

$$\left. \begin{aligned}
 I_{11} \int_0^H U(x, 0) G_{1i} dx &= I_{11} \int_0^H U_0(x) G_{1i} dx, \\
 I_{22} \int_0^H W(x, 0) G_{2i} dx &= I_{22} \int_0^H W_0(x) G_{2i} dx, \\
 I_{33} \int_0^H \psi(x, 0) G_{3i} dx &= I_{33} \int_0^H \psi_0(x) G_{3i} dx, \\
 I_{31} \int_0^H U(x, 0) G_{3i} dx &= I_{31} \int_0^H U_0(x) G_{3i} dx, \\
 I_{13} \int_0^H \psi(x, 0) G_{1i} dx &= I_{13} \int_0^H \psi_0(x) G_{1i} dx, \quad \text{при } t = 0,
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 I_{11} \frac{d}{dt} \int_0^H U(x, 0) G_{1i} dx &= I_{11} \int_0^H \dot{U}_0(x) G_{1i} dx, \\
 I_{22} \frac{d}{dt} \int_0^H W(x, 0) G_{2i} dx &= I_{22} \int_0^H \dot{W}_0(x) G_{2i} dx, \\
 I_{33} \frac{d}{dt} \int_0^H \psi(x, 0) G_{3i} dx &= I_{33} \int_0^H \dot{\psi}_0(x) G_{3i} dx, \\
 I_{31} \frac{d}{dt} \int_0^H U(x, 0) G_{3i} dx &= I_{31} \int_0^H \dot{U}_0(x) G_{3i} dx, \\
 I_{13} \frac{d}{dt} \int_0^H \psi(x, 0) G_{1i} dx &= I_{13} \int_0^H \dot{\psi}_0(x) G_{1i} dx.
 \end{aligned} \right\}
 \tag{5.10}$$



Для членов, содержащих производные по пространственной переменной, выполняя интегрирование по частям, а затем, складывая уравнения (5.9) и соответствующие начальные условия (5.10), приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned} \phi(G_{1i}, G_{2i}, G_{3i}, U, W, \psi) \Big|_0^H + \int_0^H \left[U(G_{1i}'' + a_{21}^1 G_{2i}' + a_{31}^0 G_{3i}) + W(G_{2i}'' - a_{12}^1 G_{1i}' - a_{32}^1 G_{3i}' - a_{22}^2 G_{2i}) + \right. \\ \left. + \psi(G_{3i}'' + a_{13}^0 G_{2i}' + a_{23}^2 G_{1i}' - a_{33}^2 G_{3i}') \right] dx - \frac{d^2}{dt^2} \int_0^H (I_{11} U G_{1i} + I_{22} W G_{2i} + I_{33} \psi G_{3i} + I_{31} U G_{3i} + \\ + I_{13} \psi G_{1i}) dx = - \int_0^H (q_x G_{1i} + q_R G_{2i} + m_x G_{3i}) dx. \end{aligned} \quad (5.11)$$

При $t = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^H [U(x, 0) (I_{11} G_{1i} + I_{31} G_{3i}) + W(x, 0) I_{22} G_{2i} + \psi(x, 0) (I_{33} G_{3i} + I_{13} G_{1i})] dx = \\ = \int_0^H [U_0(x) (I_{11} G_{1i} + I_{31} G_{3i}) + W_0(x) I_{22} G_{2i} + \psi_0(x) (I_{33} G_{3i} + I_{13} G_{1i})] dx, \\ \frac{d}{dt} \int_0^H [U(x, 0) (I_{11} G_{1i} + I_{31} G_{3i}) + W(x, 0) I_{22} G_{2i} + \psi(x, 0) (I_{33} G_{3i} + I_{13} G_{1i})] dx = \\ = \int_0^H [\dot{U}_0(x) (I_{11} G_{1i} + I_{31} G_{3i}) + \dot{W}_0(x) I_{22} G_{2i} + \dot{\psi}_0(x) (I_{33} G_{3i} + I_{13} G_{1i})] dx. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \phi(G_{1i}, G_{2i}, G_{3i}, U, W, \psi) = \left(\frac{\partial U}{\partial x} + a_{13}^0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_{12}^1 W \right) G_{1i} - (U + a_{13}^0 \psi) G_{1i}' + \\ + \left(\frac{\partial W}{\partial x} - a_{21}^1 U + a_{23}^1 \psi \right) G_{2i} - W G_{2i}' + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + a_{31}^0 \frac{\partial U}{\partial x} + a_{32}^1 W \right) G_{3i} - (\psi + a_{31}^0 U) G_{3i}'. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Вводим два обычных условия (3.18), (3.19) структурного алгоритма метода КИП:

$$\phi(G_{1i}, G_{2i}, G_{3i}, U, W, \psi) \Big|_0^H = 0, \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \int_0^H [U(G_{1i}'' + a_{21}^1 G_{2i}' + a_{31}^0 G_{3i}') + W(G_{2i}'' - a_{12}^1 G_{1i}' - a_{22}^2 G_{2i}' - a_{32}^1 G_{3i}') + \\ + \psi(a_{13}^0 G_{1i}'' + a_{23}^2 G_{1i}' - a_{23}^1 G_{2i}' + G_{3i}'' - a_{33}^2 G_{3i}')] dx = \\ = -\lambda_i^2 \int_0^H [U(I_{11} G_{1i} + I_{31} G_{3i}) + W I_{22} G_{2i} + \psi(I_{33} G_{3i} + I_{13} G_{1i})] dx. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Если принять теперь во внимание соотношения (5.14), (5.15) и выражение для трансформанты (5.5), то уравнение (5.11) и условия (5.12) принимают вид (4.14), (4.11), т.е.

$$\frac{d^2 \varphi(\lambda_i, t)}{dt^2} + \lambda_i^2 \varphi(\lambda_i, t) = -F(\lambda_i, t), \quad \varphi(\lambda_i, 0) = \varphi_0(\lambda_i), \quad \frac{d\varphi(\lambda_i, t)}{dt} \Big|_{t=0} = \dot{\varphi}_0(\lambda_i),$$

а это решение записывается следующим образом (4.15):

$$\varphi(\lambda_i, t) = \varphi_0(\lambda_i) \cos \lambda_i t + \dot{\varphi}_0(\lambda_i) \lambda_i^{-1} \sin \lambda_i t - \lambda_i^{-1} \int_0^t F(\lambda_i, \tau) \sin \lambda_i (t - \tau) d\tau. \quad (5.16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F(\lambda_i, t) = \int_0^H [q_x(x, t) G_{1i} + q_R(x, t) G_{2i} + m_x(x, t) G_{3i}] dx, \\ \varphi_0(\lambda_i) = \int_0^H \{ [I_{11} U_0(x) + I_{13} \psi_0(x)] G_{1i} + I_{22} W_0(x) G_{2i} + [I_{33} \psi_0(x) + I_{31} U_0(x)] G_{3i} \} dx, \\ \dot{\varphi}_0(\lambda_i) = \int_0^H \{ [I_{11} \dot{U}_0(x) + I_{13} \dot{\psi}_0(x)] G_{1i} + I_{22} \dot{W}_0(x) G_{2i} + [I_{33} \dot{\psi}_0(x) + I_{31} \dot{U}_0(x)] G_{3i} \} dx. \end{aligned} \quad (5.17)$$



Таким образом, равенства (5.16), (5.17) определяют трансформанту $\varphi(\lambda_i, t)$ в формуле обращения КИП (5.6) рассматриваемой задачи.

С другой стороны, условия (5.14), (5.15) совместно с (5.3) позволяют сформулировать сопряженную краевую задачу (4.19), (4.20) для компонентов G_{1i}, G_{2i}, G_{3i} вектор-функции ядра биортогонального КИП (5.5), (5.6). Действительно, из операционного свойства (5.15) следует такая однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} G''_{1i} + a_{31}^0 G''_{3i} + a_{21}^1 G'_{2i} + \lambda_i^2 (I_{11} G_{1i} + I_{31} G_{3i}) &= 0, \\ G''_{2i} - a_{12}^1 G'_{1i} - a_{32}^1 G'_{3i} + (\lambda_i^2 I_{22} - a_{22}^2) G_{2i} &= 0, \\ G''_{3i} - a_{13}^0 G''_{1i} - a_{23}^1 G'_{2i} + (\lambda_i^2 I_{33} - a_{33}^2) G_{3i} + (\lambda_i^2 I_{13} - a_{13}^2) G_{1i} &= 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Вспользуемся теперь равенством (5.14), которое с учетом выражения (5.13) и условий (5.3) принимает следующий вид:

$$\left\{ \frac{\partial U}{\partial x} (G_{1i} + a_{31}^0 G_{3i}) + \frac{\partial W}{\partial x} G_{2i} + \psi [a_{23}^1 G_{2i} - a_{13}^0 G'_{1i} - G'_{3i} \pm \chi_3 (G_{3i} + a_{13}^0 G_{1i})] \right\} \Big|_0^H = 0.$$

Поскольку производные $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial x}$ и углы поворота ψ не определены на концах интервала $[0, H]$, то обращение в нуль приведенного выше выражения возможно при выполнении таких граничных условий:

$$G_{1i} + a_{31}^0 G_{3i} = 0; \quad G_{2i} = 0, \quad \text{при } x = 0, H; \quad G'_{3i} + a_{13}^0 G'_{1i} \mp \chi_3 (G_{3i} + a_{13}^0 G_{1i}) = 0. \quad (5.19)$$

Дифференциальные уравнения (5.18) и условия (5.19) представляют сопряженную краевую задачу для компонентов G_{1i}, G_{2i}, G_{3i} ядровой вектор-функции биортогонального преобразования (5.5), (5.6).

В соответствии с алгоритмической процедурой метода биортогональных КИП, описанной в разд. 4, действуем на дифференциальные уравнения (5.18) соответствующими интегральными операторами:

$$\int_0^H K_1(\mu_j, x) dx, \quad \int_0^H K_2(\mu_j, x) dx, \quad \int_0^H K_3(\mu_j, x) dx,$$

т.е. имеем

$$\begin{aligned} \int_0^H [G''_{1i} + a_{31}^0 G''_{3i} + a_{21}^1 G'_{2i} + \lambda_i^2 (I_{11} G_{1i} + I_{31} G_{3i})] K_{1j} dx &= 0, \\ \int_0^H [G''_{2i} - a_{12}^1 G'_{1i} - a_{32}^1 G'_{3i} + (\lambda_i^2 I_{22} - a_{22}^2) G_{2i}] K_{2j} dx &= 0, \\ \int_0^H [G''_{3i} + a_{13}^0 G''_{1i} - a_{23}^1 G'_{2i} + (\lambda_i^2 I_{33} - a_{33}^2) G_{3i} + (\lambda_i^2 I_{13} + a_{13}^2) G_{1i}] K_{3j} dx &= 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Повторяя, как и выше, предусмотренную структурным алгоритмом метода КИП процедуру выделения сопряженного оператора, т.е. интегрируя по частям и складывая равенства (5.20), находим:

$$\begin{aligned} \Omega(G_{1i}, G_{2i}, G_{3i}, K_{1j}, K_{2j}, K_{3j}) \Big|_0^H + \int_0^H [G_{1i}(K''_{1j} + a_{12}^1 K'_{2j} + a_{13}^0 K''_{3j} + a_{13}^2 K_{3j}) + \\ + G_{2i}(K''_{2j} - a_{21}^1 K'_{1j} + a_{23}^1 K'_{3j} - a_{22}^2 K_{2j}) + G_{3i}(K''_{3j} + a_{31}^0 K'_{1j} + a_{32}^1 K'_{2j} - a_{33}^2 K_{3j})] dx = \\ = -\lambda_i^2 \int_0^H [(I_{11} G_{1i} + I_{31} G_{3i}) K_{1j} + I_{22} G_{2i} K_{2j} + (I_{33} G_{3i} + I_{13} G_{1i}) K_{3j}] dx, \end{aligned} \quad (5.21)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega(G_{1i}, G_{2i}, G_{3i}, K_{1j}, K_{2j}, K_{3j}) = G'_{1i} K_{1j} - G_{1i} K'_{1j} + a_{31}^0 (G'_{3i} K_{1j} - G_{3i} K'_{1j}) + \\ + a_{21}^1 G_{2i} K_{1j} + G'_{2i} K_{2j} - G_{2i} K'_{2j} - a_{12}^1 G_{1i} K_{2j} - a_{32}^1 G_{3i} K_{2j} + \\ + G'_{3i} K_{3j} - G_{3i} K'_{3j} + a_{13}^0 (G'_{1i} K_{3j} - G_{1i} K'_{3j}) - a_{23}^1 G_{2i} K_{3j}. \end{aligned}$$



Вводя аналогичные (4.26), (4.27) обычные два условия метода КИП, получим:

$$\Omega (G_{1i}, G_{2i}, G_{3i}, K_{1j}, K_{2j}, K_{3j})|_0^H = 0, \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^H \left[G_{1i}(K_{1j}'' + a_{12}^1 K_{2j} + a_{13}^0 K_{3j}'' + a_{13}^2 K_{3j}) + G_{2i}(K_{2j}'' - a_{21}^1 K_{1j}' + a_{23}^1 K_{3j}' - a_{22}^2 K_{2j}) + \right. \\ & \quad \left. + G_{3i}(K_{3j}'' + a_{31}^0 K_{1j}'' + a_{32}^1 K_{2j}' - a_{33}^2 K_{3j}) \right] dx = \\ & = -\mu_j^2 \int_0^H \left[G_{1i}(I_{11}K_{1j} + I_{13}K_{3j}) + G_{2i}I_{22}K_{2j} + G_{3i}(I_{33}K_{3j} + I_{31}K_{1j}) \right] dx \end{aligned} \quad (5.23)$$

Замечаем, что из (5.21) с учетом (5.22), (5.23) следует такое равенство:

$$(\mu_j^2 - \lambda_i^2) \int_0^H \left[G_{1i}(I_{11}K_{1j} + I_{13}K_{3j}) + G_{2i}I_{22}K_{2j} + G_{3i}(I_{33}K_{3j} + I_{31}K_{1j}) \right] dx = 0. \quad (5.24)$$

Соотношение (5.24) представляет условие обобщенной биортогональности (5.7), подтверждающее справедливость формул обращения (5.6) в применении к рассматриваемой задаче.

Операционное свойство (5.23) позволяет сформулировать однородную систему дифференциальных уравнений для компонентов $K_1(\mu_j, x)$, $K_2(\mu_j, x)$, $K_3(\mu_j, x)$ второй ядровой вектор-функции биортогонального КИП (5.5), (5.6). Имеем:

$$\begin{aligned} K_{1j}'' + a_{12}^1 K_{2j} + a_{13}^0 K_{3j}'' + a_{13}^2 K_{3j} + \mu_j^2 (I_{11}K_{1j} + I_{13}K_{3j}) &= 0, \\ K_{2j}'' - a_{21}^1 K_{1j}' + a_{23}^1 K_{3j}' - a_{22}^2 K_{2j} + \mu_j^2 I_{22}K_{2j} &= 0, \\ K_{3j}'' + a_{31}^0 K_{1j}'' + a_{32}^1 K_{2j}' - a_{33}^2 K_{3j} + \mu_j^2 (I_{33}K_{3j} + I_{31}K_{1j}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Равенство (5.22) с учетом (5.21) и первых двух условий (5.19) принимает вид

$$\left[(G_{1i}' + a_{31}^0 G_{3i}')K_{1j} + (G_{2i}' - a_{12}^1 G_{1i}' - a_{13}^2 G_{3i}')K_{2j} + (G_{3i}' + a_{13}^0 G_{1i}')K_{3j} - (G_{3i} + a_{13}^0 G_{1i})K_{3j}' \right] \Big|_0^H = 0.$$

Очевидно, что при наличии третьего соотношения (5.19) оно обращается в тождество при таких граничных условиях для компонентов K_{1j} , K_{2j} , K_{3j} ядровой вектор-функции

$$K_{1j} = 0, \quad K_{2j} = 0, \quad K_{3j}' \pm \chi_3 K_{3j} = 0 \quad \text{при } x = 0, H. \quad (5.26)$$

Таким образом, сформированы две однородных краевых задачи (5.18), (5.19) и (5.25), (5.26) для определения ядровых собственных функций G_{1i} , G_{2i} , G_{3i} и K_{1j} , K_{2j} , K_{3j} , а также соответствующих им собственных значений λ_i и μ_j .

Рассмотрим теперь подробно решения этих задач. Поскольку система дифференциальных уравнений (5.18) с постоянными коэффициентами, то вводя матрицу-столбец $\bar{G}_i = \|G_{1i}, G_{2i}, G_{3i}\|^T$ вектор-функции ядровой сопряженной задачи, представим (5.18) в матричной форме:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda_i^2 I_{11} \right) & a_{21}^1 \frac{d}{dx} & \left(a_{31}^0 \frac{d^2}{dx^2} + \lambda_i^2 I_{31} \right) \\ -a_{12}^1 \frac{d}{dx} & \left(\frac{d^2}{dx^2} - a_{22}^2 + \lambda_i^2 I_{22} \right) & -a_{32}^1 \frac{d}{dx} \\ \left(a_{13}^0 \frac{d}{dx} + a_{13}^2 + \lambda_i^2 I_{13} \right) & -a_{23}^1 \frac{d}{dx} & \left(\frac{d^2}{dx^2} - a_{33}^2 + \lambda_i^2 I_{33} \right) \end{array} \right\| \times \bar{G}(\lambda_i, x) = 0.$$

Отсюда следует такое разрешающее дифференциальное уравнение для $\bar{G}(\lambda_i, x) = \bar{G}_i$:

$$b_{0i} \frac{d^6 \bar{G}_i}{dx^6} + b_{2i} \frac{d^4 \bar{G}_i}{dx^4} + b_{4i} \frac{d^2 \bar{G}_i}{dx^2} + b_{6i} \bar{G}_i = 0. \quad (5.27)$$

Здесь

$$\begin{aligned} b_{0i} &= 1 - a_{13}^0 a_{31}^0, \\ b_{2i} &= \lambda_i^2 [I_{11} + I_{33} + (1 - a_{13}^0 a_{31}^0)I_{22} - a_{31}^0 I_{13} - a_{31}^0 I_{31}] + a_{31}^0 a_{12}^1 a_{23}^1 + a_{13}^0 a_{22}^2 + \\ & \quad + a_{12}^1 a_{21}^1 - a_{13}^0 a_{21}^1 a_{32}^1 - a_{31}^0 a_{13}^0 - a_{22}^2 - a_{33}^2 - a_{23}^1 a_{32}^1, \end{aligned}$$



$$b_{4i} = \lambda_i^4 [I_{11} (I_{22} + I_{33}) + I_{22} (I_{33} - a_{31}^0 I_{13} - a_{13}^0 I_{31}) - I_{13} I_{31}] + \lambda_i^2 [I_{31} (a_{12}^1 a_{13}^1 + a_{13}^0 a_{22}^2 - a_{13}^2) - I_{11} (a_{22}^2 + a_{33}^2) - I_{22} (a_{33}^2 - a_{13}^0 a_{31}^0) + I_{33} (a_{12}^1 a_{21}^1 - a_{22}^2) + a_{12}^1 a_{12}^1 I_{31} + a_{22}^2 a_{31}^1 I_{13} - a_{21}^1 a_{32}^1] + a_{22}^2 (a_{33}^2 + a_{13}^2 a_{31}^0) - a_{21}^1 (a_{32}^1 a_{13}^2 + a_{12}^1 a_{33}^2),$$

$$b_{6i} = \lambda_i^6 I_{22} (I_{11} I_{33} - I_{13} I_{31}) + \lambda_i^4 [I_{31} (a_{22}^2 I_{13} - a_{13}^2 I_{22}) - I_{11} (a_{33}^2 I_{22} + a_{22}^2 I_{33})] + \lambda_i^2 a_{22}^2 (a_{33}^2 I_{11} + a_{13}^2 I_{31}).$$

Оставляя два первых уравнения системы (5.18), т.е.

$$\left\| \begin{pmatrix} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda_i^2 I_{11}\right) & a_{21}^1 \frac{d}{dx} \\ -a_{12}^1 \frac{d}{dx} & \left(\frac{d^2}{dx^2} - a_{22}^2 + \lambda_i^2 I_{22}\right) \end{pmatrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} G_{1i} \\ G_{2i} \end{matrix} \right\| = \left\| - \begin{pmatrix} a_{31}^0 \frac{d^2}{dx^2} + \lambda_i^2 I_{31} \\ a_{32}^1 \frac{d}{dx} G_{3i} \end{pmatrix} \right\|,$$

выражаем компоненты G_{1i} , G_{2i} через G_{3i} . Принимая затем без ущерба общности:

$$G_{3i} = \left\| \begin{pmatrix} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda_i^2 I_{11}\right) & a_{21}^1 \frac{d}{dx} \\ -a_{12}^1 \frac{d}{dx} & \left(\frac{d^2}{dx^2} - a_{22}^2 + \lambda_i^2 I_{22}\right) \end{pmatrix} \right\| \overline{G}(\lambda_i, x),$$

окончательно находим

$$\begin{aligned} G_{1i} &= -a_{31}^0 \overline{G}^{IV}(\lambda_i, x) + [a_{31}^0 a_{22}^2 - a_{32}^1 a_{21}^1 - \lambda_i^1 (I_{31} + a_{31}^0 I_{22})] \overline{G}''(\lambda_i, x) + \\ &\quad + \lambda_i^2 I_{31} (a_{22}^2 - \lambda_i^2 I_{22}) \overline{G}(\lambda_i, x), \\ G_{2i} &= (a_{32}^1 - a_{31}^0 a_{12}^1) \overline{G}^{III}(\lambda_i, x) + \lambda_i^2 (a_{32}^1 I_{11} - a_{12}^1 I_{31}) \overline{G}'(\lambda_i, x), \\ G_{3i} &= \overline{G}^{IV}(\lambda_i, x) + [a_{12}^1 a_{21}^1 - a_{22}^2 + \lambda_i^2 (I_{11} + I_{22})] \overline{G}''(\lambda_i, x) + \lambda_i^2 I_{11} (1 + \lambda_i^2 I_{22}) \overline{G}(\lambda_i, x). \end{aligned} \tag{5.28}$$

Решение разрешающего уравнения (5.27) записывается в экспоненциальной форме, т.е.

$$\overline{G}(\lambda_i, x) = \sum_{k=1}^6 C_{ki} \exp(\rho_{ki} x), \tag{5.29}$$

где ρ_{ki} ($k = 1, \dots, 6$) — корни характеристического бикубического уравнения

$$b_{0i} \rho^6 + b_{2i} \rho^4 + b_{4i} \rho^2 + b_{6i} = 0.$$

Имея в виду (5.29), компоненты G_{1i} , G_{2i} , G_{3i} ядра КИП (5.28) принимают вид

$$\begin{aligned} G_{1i} &= \sum_{k=1}^6 \left\{ -a_{31}^0 \rho_{ki}^4 + [a_{31}^0 a_{22}^2 - a_{32}^1 a_{21}^1 - \lambda_i^2 (I_{31} + a_{31}^0 I_{22})] \rho_{ki}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_i^2 I_{31} (a_{22}^2 - \lambda_i^2 I_{22}) \right\} C_{ki} \exp(\rho_{ki} x); \\ G_{2i} &= \sum_{k=1}^6 [(a_{32}^1 - a_{31}^0 a_{12}^1) \rho_{ki}^3 + \lambda_i^2 (a_{32}^1 I_{11} - a_{12}^1 I_{31}) \rho_{ki}] C_{ki} \exp(\rho_{ki} x); \\ G_{3i} &= \sum_{k=1}^6 \left\{ \rho_{ki}^4 + [a_{12}^1 a_{21}^1 - a_{22}^2 + \lambda_i^2 (I_{11} + I_{22})] \rho_{ki}^2 + \lambda_i^2 I_{11} (1 + \lambda_i^2 I_{22}) \right\} C_{ki} \exp(\rho_{ki} x). \end{aligned} \tag{5.30}$$

Собственные значения (параметры) λ_i ($i = \overline{1, \infty}$) однородной краевой задачи (5.18), (5.19) и произвольные постоянные C_{ki} ($k = 1, \dots, 6$) определяются в результате подстановки выражений (5.30) в граничные условия (5.19). Имеем такую однородную систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^6 \delta_{mk}^i C_{ki} = 0, \quad m = 1, \dots, 6. \tag{5.31}$$



Здесь

$$\begin{aligned}
 \delta_{1k}^i &= \left[a_{31}^0 (a_{12}^1 a_{21}^1 - a_{21}^2 + a_{22}^2) - a_{32}^1 a_{21}^1 + \lambda_i^2 (a_{31}^0 I_{11} - I_{31}) \right] \rho_{ki}^2 + \\
 &\quad + \lambda_i^2 \left[a_{31}^0 I_{11} (1 + \lambda_i^2 I_{22}) + I_{31} (a_{22}^2 - \lambda_i^2 I_{22}) \right], \\
 \delta_{2k}^i &= (a_{32}^1 - a_{31}^0 a_{12}^1) \rho_{ki}^3 + \lambda_i^2 \left[a_{32}^1 I_{11} - a_{12}^1 I_{31} \right] \rho_{ki}, \\
 \delta_{3k}^i &= (1 - a_{31}^0 a_{13}^0) \rho_{ki}^5 - \chi_3 (1 - a_{31}^0 a_{13}^0) \rho_{ki}^4 + \left\{ a_{12}^1 a_{21}^1 - a_{21}^2 + a_{13}^0 (a_{31}^0 a_{22}^2 - a_{32}^1 a_{21}^1) + \right. \\
 &\quad \left. + \lambda_i^2 \left[I_{11} + I_{22} - a_{13}^0 (I_{31} + a_{31}^0 I_{22}) \right] \right\} \rho_{ki}^3 - \chi_3 \left\{ a_{12}^1 a_{21}^1 - a_{21}^2 + a_{31}^0 a_{22}^2 a_{13}^0 - a_{13}^0 a_{32}^1 a_{21}^1 + \right. \\
 &\quad \left. + \lambda_i^2 \left[I_{11} + I_{22} - a_{13}^0 (I_{31} + a_{31}^0 I_{22}) \right] \right\} \rho_{ki}^2 + \lambda_i^2 \left[I_{11} (1 + \lambda_i^2 I_{22}) + a_{31}^0 I_{31} (a_{22}^2 - \lambda_i^2 I_{22}) \right] \rho_{ki} - \\
 &\quad - \chi_3 \lambda_i^2 \left[I_{11} (1 + \lambda_i^2 I_{22}) + a_{13}^0 I_{31} (a_{22}^2 - \lambda_i^2 I_{22}) \right], \\
 \delta_{4k}^i &= \delta_{1k}^i \exp(\rho_{ki} H), \quad \delta_{5k}^i = \delta_{2k}^i \exp(\rho_{ki} H), \\
 \delta_{6k}^i &= \left\langle \left(1 - a_{31}^0 a_{13}^0 \right) \rho_{ki}^5 + \chi_3 (1 - a_{31}^0 a_{13}^0) \rho_{ki}^4 + \left\{ a_{12}^1 a_{21}^1 - a_{21}^2 + a_{13}^0 (a_{31}^0 a_{22}^2 - a_{32}^1 a_{21}^1) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \lambda_i^2 \left[I_{11} + I_{22} - a_{13}^0 (I_{31} + a_{31}^0 I_{22}) \right] \right\} \rho_{ki}^3 + \chi_3 \left\{ a_{12}^1 a_{21}^1 - a_{21}^2 + a_{13}^0 (a_{31}^0 a_{22}^2 - a_{32}^1 a_{21}^1) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \lambda_i^2 \left[I_{11} + I_{22} - a_{13}^0 (I_{31} + a_{31}^0 I_{22}) \right] \right\} \rho_{ki}^2 + \lambda_i^2 \left[I_{11} (1 + \lambda_i^2 I_{22}) + a_{31}^0 I_{31} (a_{22}^2 - \lambda_i^2 I_{22}) \right] \rho_{ki} \right. \\
 &\quad \left. + \chi_3 \lambda_i^2 \left[I_{11} (1 + \lambda_i^2 I_{22}) + a_{13}^0 I_{31} (a_{22}^2 - \lambda_i^2 I_{22}) \right] \right\rangle \exp(\rho_{ki} H), \\
 &\quad k = 1, \dots, 6.
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Дальнейшее решение очевидно. Разыскивая нетривиальные решения однородной системы (5.31) приравняем ее главный детерминант к нулю. В результате получаем такое трансцендентное уравнение для определения собственных значений λ_i , ($i = \overline{1, \infty}$):

$$D(\lambda_i) = \begin{vmatrix} \delta_{11}^i & \delta_{12}^i & \delta_{13}^i & \delta_{14}^i & \delta_{15}^i & \delta_{16}^i \\ \delta_{21}^i & \delta_{22}^i & \delta_{23}^i & \delta_{24}^i & \delta_{25}^i & \delta_{26}^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{61}^i & \delta_{62}^i & \delta_{63}^i & \delta_{64}^i & \delta_{65}^i & \delta_{66}^i \end{vmatrix} = 0. \tag{5.33}$$

Отбрасывая первое уравнение (5.31), из оставшейся системы выражаем постоянные $C_{2i}, C_{3i}, \dots, C_{6i}$ через C_{1i} , т.е.

$$C_{2i} = C_{1i} A_{2i} A_{1i}^{-1}, \quad C_{3i} = C_{1i} A_{3i} A_{1i}^{-1}, \quad C_{4i} = C_{1i} A_{4i} A_{1i}^{-1}, \quad C_{5i} = C_{1i} A_{5i} A_{1i}^{-1}, \quad C_{6i} = C_{1i} A_{6i} A_{1i}^{-1},$$

где

$$A_{1i} = \begin{vmatrix} \delta_{22}^i & \delta_{23}^i & \delta_{24}^i & \delta_{25}^i & \delta_{26}^i \\ \delta_{32}^i & \delta_{33}^i & \delta_{34}^i & \delta_{35}^i & \delta_{36}^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{62}^i & \delta_{63}^i & \delta_{64}^i & \delta_{65}^i & \delta_{66}^i \end{vmatrix}. \tag{5.34}$$

Определители $A_{2i}, A_{3i}, \dots, A_{6i}$ следуют из A_{1i} путем замены в (5.34) каждый раз соответственно первого, второго, третьего, четвертого и пятого столбцов на столбец

$$\left\| -\delta_{21}^i \quad -\delta_{31}^i \quad -\delta_{41}^i \quad -\delta_{51}^i \quad -\delta_{61}^i \right\|^T.$$

Не ограничивая общности рассуждений, принимаем

$$C_{1i} = A_{1i}. \tag{5.35}$$

В результате получаем

$$C_{2i} = A_{2i}, \quad C_{3i} = A_{3i}, \quad C_{4i} = A_{4i}, \quad C_{5i} = A_{5i}, \quad C_{6i} = A_{6i}. \tag{5.36}$$

Соотношения (5.30), (5.32), (5.34), (5.35), (5.36) и уравнение (5.33) представляют решение сопряженной ядровой задачи (5.18), (5.19).



Компоненты K_{1j} , K_{2j} , K_{3j} вектор-функции $\overline{K}(\mu_j, x)$ ядра биортогонального КИП (5.5), (5.6) и трансцендентное уравнение для нахождения собственных значений μ_j ($j = \overline{1, \infty}$) определяются аналогично предыдущему. Окончательно имеем:

$$\begin{aligned} K_{1j} &= - \sum_{j=1}^6 \left\{ a_{13}^0 s_{kj}^4 + \left[\mu_j^2 (I_{13} + a_{13}^0 I_{22}) + a_{13}^2 - a_{13}^0 a_{22}^0 - a_{23}^1 a_{12}^1 \right] s_{kj}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \mu_j^4 I_{13} I_{22} + \mu_j^2 (a_{13}^2 I_{22} - a_{22}^2 I_{13}) - a_{13}^2 a_{22}^2 \right\} B_{kj} \exp(s_{kj} x) \\ K_{2j} &= - \sum_{j=1}^6 \left\{ (a_{23}^1 + a_{21}^1 a_{13}^0) s_{kj}^3 + \left[\mu_j^2 (a_{23}^1 I_{11} + a_{21}^1 I_{13}) + a_{13}^2 a_{21}^1 \right] s_{kj} \right\} B_{kj} \exp(s_{kj} x), \\ K_{3j} &= \sum_{j=1}^6 \left\{ s_{kj}^4 + \left[\mu_j^2 (I_{11} + I_{22}) + (a_{21}^1 a_{13}^2 - a_{22}^2) \right] s_{kj}^2 + \mu_j^2 I_{11} (\mu_j^2 I_{22} + a_{22}^2) \right\} B_{kj} \exp(s_{kj} x), \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$D(\mu_j) = \begin{vmatrix} \Delta_{11}^j & \Delta_{12}^j & \Delta_{13}^j & \Delta_{14}^j & \Delta_{15}^j & \Delta_{16}^j \\ \Delta_{21}^j & \Delta_{22}^j & \Delta_{23}^j & \Delta_{24}^j & \Delta_{25}^j & \Delta_{26}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{61}^j & \Delta_{62}^j & \Delta_{63}^j & \Delta_{64}^j & \Delta_{65}^j & \Delta_{66}^j \end{vmatrix} = 0. \quad (5.38)$$

Здесь s_{kj} ($k = 1, \dots, 6$) — корни характеристического бикубического уравнения:

$$s^6 + g_{2j} s^4 + g_{4j} s^2 + g_{6j} = 0, \quad (5.39)$$

а B_{kj} — соответствующие детерминанты:

$$B_{1j} = \begin{vmatrix} \Delta_{22}^j & \Delta_{23}^j & \Delta_{24}^j & \Delta_{25}^j & \Delta_{26}^j \\ \Delta_{32}^j & \Delta_{33}^j & \Delta_{34}^j & \Delta_{35}^j & \Delta_{36}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{62}^j & \Delta_{63}^j & \Delta_{64}^j & \Delta_{65}^j & \Delta_{66}^j \end{vmatrix}. \quad (5.40)$$

B_{2j} , D_{3j} , ..., B_{6j} следуют из (5.40) путем замены каждый раз первого, второго, третьего, четвертого и пятого столбцов на столбец:

$$\| -\Delta_{21}^j \quad -\Delta_{31}^j \quad -\Delta_{41}^j \quad -\Delta_{51}^j \quad -\Delta_{61}^j \|^T.$$

Элементы Δ_{mk}^j ($m = 1, \dots, 6$) и коэффициенты g_{kj} определяют такими выражениями:

$$\begin{aligned} \Delta_{1k}^j &= a_{13}^0 s_{kj}^4 + \left[\mu_j^2 (I_{13} + a_{13}^0 I_{22}) + a_{13}^2 - a_{13}^0 a_{22}^0 - a_{23}^1 a_{12}^1 \right] s_{kj}^2 + \mu_j^4 I_{13} I_{22} + \\ &\quad + \mu_j^2 (a_{13}^2 I_{22} - a_{22}^2 I_{13}) - a_{13}^2 a_{22}^2, \\ \Delta_{2k}^j &= (a_{23}^1 + a_{21}^1 a_{13}^0) s_{kj}^3 + \left[\mu_j^2 (a_{23}^1 I_{11} + a_{21}^1 I_{13}) + a_{13}^2 a_{21}^1 \right] s_{kj}, \\ \Delta_{3k}^j &= s_{kj}^5 - \chi_3 s_{kj}^4 + \left[\mu_j^2 (I_{11} + I_{22}) + (a_{21}^1 a_{13}^2 - a_{22}^2) \right] s_{kj}^3 - \chi_3 \left[\mu_j^2 (I_{11} + I_{22}) + \right. \\ &\quad \left. + a_{21}^1 a_{12}^1 - a_{22}^2 \right] s_{kj}^2 + \mu_j^2 I_{11} (\mu_j^2 I_{22} + a_{22}^2) s_{kj} - \chi_3 \mu_j^2 I_{11} (\mu_j^2 I_{22} + a_{22}^2), \\ \Delta_{4k}^j &= \Delta_{1k}^j \exp(s_{kj} H), \quad \Delta_{5k}^j = \Delta_{2k}^j \exp(s_{kj} H), \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{6k}^j &= \left\{ s_{kj}^5 + \chi_3 s_{kj}^4 + \left[\mu_j^2 (I_{11} + I_{22}) + (a_{21}^1 a_{12}^1 - a_{22}^2) \right] s_{kj}^3 + \chi_3 \left[\mu_j^2 (I_{11} + I_{22}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a_{21}^1 a_{12}^1 - a_{22}^2 \right] s_{kj}^2 + \mu_j^2 I_{11} (\mu_j^2 I_{22} + a_{22}^2) s_{kj} - \chi_3 \mu_j^2 I_{11} (\mu_j^2 I_{22} + a_{22}^2) \right\} \exp(s_{kj} H), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
g_{2j} &= (1 - a_{31}^0 a_{13}^0)^{-1} \left\{ \mu_j^2 \left[I_{11} + I_{33} + (1 - a_{31}^0 a_{13}^0) I_{22} - a_{13}^0 I_{31} - a_{31}^0 I_{13} \right] + \right. \\
&\quad \left. + a_{12}^1 (a_{21}^1 + a_{23}^1 a_{31}^0) + a_{13}^0 (a_{22}^2 a_{31}^0 - a_{21}^1 a_{32}^1) - a_{22}^2 - a_{23}^2 - a_{31}^0 a_{13}^0 - a_{32}^1 a_{23}^1 \right\}, \\
g_{4j} &= (1 - a_{31}^0 a_{13}^0)^{-1} \left\{ \mu_j^4 \left[I_{11} + (I_{22} + I_{33}) + I_{22}(I_{33} - a_{13}^0 I_{31}) - I_{13}(I_{31} - a_{31}^0 I_{22}) \right] - \right. \\
&\quad \left. - \mu_j^2 \left[I_{11}(a_{22}^2 + a_{33}^2 - a_{32}^1 a_{23}^1) \right] + I_{22}(a_{33}^2 + a_{31}^0 a_{13}^0) + I_{33}(a_{22}^2 - a_{21}^1 a_{12}^1) + I_{13}(a_{21}^1 a_{13}^0 - a_{22}^2 a_{31}^0) + \right. \\
&\quad \left. + I_{31}(a_{13}^2 - a_{12}^1 a_{23}^1 - a_{22}^2 a_{13}^0) \right] + a_{33}^2 (a_{22}^2 - a_{21}^1 a_{12}^1) + I_{13}(a_{22}^2 a_{31}^0 - a_{21}^1 a_{32}^1) \left. \right\}, \\
g_{6i} &= (1 - a_{31}^0 a_{13}^0)^{-1} \left\{ \mu_j^6 \left[I_{22}(I_{11} I_{33} - I_{13} I_{31}) \right] + \mu_j^4 \left[I_{11}(a_{22}^2 I_{33} - a_{33}^2 I_{22}) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \mu_j^2 a_{22}^2 (a_{33}^2 I_{11} + a_{13}^2 I_{31}) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Соотношения (5.37)–(5.42), включая уравнения (5.38), (5.39), представляют решение инвариантной ядровой задачи (5.25), (5.26).

Применяя к выражению (5.16) формулы обращения (5.6), получаем окончательно такие спектральные разложения для функций перемещений трехслойной цилиндрической оболочки:

$$\begin{aligned}
U(x, t) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \left[\varphi_0(\lambda_i) \cos \lambda_i t + \dot{\varphi}_0(\lambda_i) \lambda_i^{-1} \sin \lambda_i t - \right. \\
&\quad \left. - \lambda_i^{-1} \int_0^t F(\lambda_i, \tau) \sin \lambda_i(t - \tau) d\tau \right] K_1(\mu_j, x) (\overline{G}_i, \overline{K}_j)_{i=j}^{-1}, \\
W(x, t) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \left[\varphi_0(\lambda_i) \cos \lambda_i t + \dot{\varphi}_0(\lambda_i) \lambda_i^{-1} \sin \lambda_i t - \right. \\
&\quad \left. - \lambda_i^{-1} \int_0^t F(\lambda_i, \tau) \sin \lambda_i(t - \tau) d\tau \right] K_2(\mu_j, x) (\overline{G}_i, \overline{K}_j)_{i=j}^{-1}, \\
\psi(x, t) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \left[\varphi_0(\lambda_i) \cos \lambda_i t + \dot{\varphi}_0(\lambda_i) \lambda_i^{-1} \sin \lambda_i t - \right. \\
&\quad \left. - \lambda_i^{-1} \int_0^t F(\lambda_i, \tau) \sin \lambda_i(t - \tau) d\tau \right] K_3(\mu_j, x) (\overline{G}_i, \overline{K}_j)_{i=j}^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Здесь трансформанты $\varphi_0(\lambda_i)$, $\dot{\varphi}_0(\lambda_i)$, $F(\lambda_i, t)$ определяются соотношениями (5.17), компоненты G_{1i} , G_{2i} , G_{3i} и K_{1j} , K_{2j} , K_{3j} двух ядровых функций КИП (5.5), (5.6) по формулам (5.30), (5.37), а параметры λ_i , μ_j являются корнями трансцендентных уравнений (5.33), (5.38). Скалярное произведение $(\overline{G}_i, \overline{K}_j)_{i=j}$ в разложениях (5.43) вычисляется квадратурой (5.8) с учетом равенств (5.30), (5.37).

В заключение можно сформулировать такие выводы.

1. Метод КИП является одним из наиболее эффективных аналитических способов решения линейных начально-краевых задач математической физики для тел конечных размеров и представляет перспективное направление в сложнейшей проблеме интегрируемости дифференциальных уравнений. Его достоинством является возможность определения в процессе решения всех компонентов, входящих в формулу обращения без какой-либо априорной информации.

2. В случаях, когда исследуются самосопряженные начально-краевые задачи, решения, построенные методом КИП и классическим методом разложения по собственным вектор-функциям, тождественно совпадают, хотя, первый из них является более предпочтительным, так как позволяет сразу перейти к анализу неоднородной краевой задачи, минуя предварительный этап определения собственных значений и соответствующих собственных функций. Достоинством метода КИП следует считать также возможность построения замкнутых внутри рассматриваемой области решений без дополнительных процедур, и тогда, когда граничные условия задачи неоднородные.

3. Структурный алгоритм метода биортогональных КИП, в процедуре которого предусмотрено выделение сопряженного оператора, является единственно возможной формой решения несамосопряженных начально-краевых задач, поскольку классический способ разложения по собственным вектор-функциям, дополненный указанной процедурой, автоматически становится методом КИП. Таким образом, КИП представляют наиболее общую алгоритмическую процедуру метода разложения по собственным вектор-функциям.



Библиографический список

1. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. шк., 1978. 432 с.
2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. С. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962. 768 с.
3. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 264 с.
4. Снеддон И. Н. Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.
5. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.: Изд-во АН СССР, 1948. 727 с.
6. Сеницкий Ю. Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1985. 176 с.
7. Сеницкий Ю. Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики // Изв. вузов. Математика. 1991, № 4. С. 57–63.
8. Сеницкий Ю. Э. Сходимость и единственность представлений, определяемых формулой обращения многокомпонентного обобщенного конечного интегрального преобразования // Изв. вузов. Математика. 1991, № 9. С. 56–59.
9. Сеницкий Ю. Э. О связи методов Бубнова – Галеркина и конечных интегральных преобразований // Краевые задачи для уравнений математической физики. Куйбышев: КГПИ, 1990. С. 96–101.
10. Сеницкий Ю. Э. Обобщенные биортогональные конечные интегральные преобразования и их приложение к нестационарным задачам механики // Докл. РАН. 1995. Т. 341, № 4. С. 474–477.
11. Сеницкий Ю. Э. Биортогональное многокомпонентное конечное интегральное преобразование и его приложение к краевым задачам механики // Изв. вузов. Математика. 1996. № 8. С. 71–81.
12. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Гостехиздат, 1954. 352 с.
13. Лычев С. А., Сеницкий Ю. Э. Несимметричные интегральные преобразования и их приложения к задачам вязкоупругости // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнoнауч. сер. Спец. выпуск. 2002. С. 16–38.
14. Сеницкий Ю. Э. Вторая связанная динамическая задача термоупругости для плоского слоя // Прикладная механика. 1986. Т. 22, № 11. С. 22–28.
15. Сеницкий Ю. Э. Динамическая задача электроупругости для неоднородного цилиндра // ПММ. 1993. Т. 57, № 1. С. 116–122.
16. Сеницкий Ю. Э. Об интегрируемости начально-краевой задачи динамики для неоднородной полой сферической оболочки // Вестн. Самар. гос. ун-та. 1998. № 2(8). С. 106–121.
17. Сеницкий Ю. Э. К проблеме интегрируемости осесимметричной краевой задачи динамики для неоднородного анизотропного конечного цилиндра // Прикладная механика. 1999. Т. 35, № 4. С. 19–29.
18. Сеницкий Ю. Э. Динамика неоднородной неполой сферической оболочки // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 6. С. 144–157.
19. Сеницкий Ю. Э. Динамическая задача теории упругости для анизотропного конечного толстостенного цилиндра с учетом сил вязкого сопротивления // Вестн. Самар. гос. ун-та. 2008. № 2(61). С. 248–262.
20. Сеницкий Ю. Э. Метод конечных интегральных преобразований. Его перспективы в исследовании краевых задач механики (обзорная статья) // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. математическая. 2003. Вып. 22. С. 10–39.
21. Бутковский А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1979. 224 с.
22. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 543 с.
23. Сеницкий Ю. Э. О вычислении некоторых квадратур, содержащих цилиндрические функции // Расчет пространственных строительных конструкций: сб. тр. Куйбышев, 1974. Вып. 4. С. 102–104.
24. Сеницкий Ю. Э. О некоторых тождествах, используемых при решении краевых задач методом конечных интегральных преобразований // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 9. С. 1636–1638.
25. Сеницкий Ю. Э., Лычев С. А. Определение нормы ядер конечных интегральных преобразований и их приложение // Изв. вузов. Математика. 1999. № 8. С. 60–69.
26. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.
27. Сеницкий Ю. Э. Динамическая задача для неоднородного стержня из неустойчивого материала при действии продольно-поперечной нагрузки // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2009. № 2(19). С. 78–89.
28. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965. 789 с.
29. Рисс Ф., Сакефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 500 с.
30. Сеницкий Ю. Э. Теорема разложения по собственным вектор-функциям в динамической теории упругости // Вестн. Самар. гос. ун-та. 2000. № 4(18). С. 114–127.
31. Мэтьюз Дж., Уокер Р. Математические методы физики. М.: Атомиздат, 1972. 399 с.
32. Сеницкий Ю. Э., Сеницкий А. Ю. К проблеме разложения по собственным вектор-функциям в нестационарных начально-краевых задачах динамики оболочек



вращения // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2004. Вып. 30. С. 83–91.

33. Сеницкий Ю. Э., Сеницкий А. Ю. О вычислении скалярного произведения в формуле обращения биортогонального конечного интегрального преобразования // Математическое моделирование и краевые задачи:

тр. 6-й межвуз. конф. Самара, 1996. Ч. 2. С. 93–94.
34. Сеницкий Ю. Э., Козьма И. Е. Дифференциальные уравнения колебаний трехслойных ортотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью // Тр. XXI Международ. конф. по теории оболочек и пластин. Саратов, 2005. С. 207–216.

УДК 532.517.2:534.2

ПОЛЗУЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В УСЛОВИЯХ НЕИЗОТЕРМИЧНОСТИ

Б. А. Снигерев, К. М. Алиев¹, Ф. Х. Тазюков¹

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань, лаборатория моделирования технологических процессов;
¹ Казанский государственный технологический университет, кафедра теоретической механики и сопротивление материалов
E-mail: snigerev@mail.knc.ru, alievm@rambler.ru, Tazyukov@mail.ru

Работа посвящена моделированию медленного движения вязкоупругой жидкости со свободной поверхностью, реализующейся при входе полимерной жидкости в формующую насадку и выхода из нее. Движение жидкости описывается уравнениями сохранения массы, импульса и энергии, дополненными реологическим уравнением состояния среды Гиезекуса. На основе метода конечных элементов разработан устойчивый численный алгоритм решения задачи. Проведены численные исследования по определению формы выходной струи для различных режимов течения и формы насадки. Исследована картина распределения скорости жидкости, давления, напряжений и температуры при увеличении степени нагрева стенки насадки. Получены численные результаты зависимости эффекта разбухания полимера от параметров реологической модели и температурных факторов.

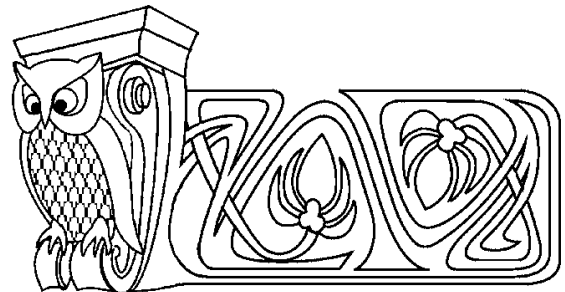
Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, реологическая модель Гиезекуса, течение со свободной поверхностью.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в промышленности переработки полимеров большое внимание уделяется интенсификации существующих процессов и производств, при этом все больше внимания уделяется качеству производимых изделий. Индустрия переработки полимерных материалов базируется в основном на двух основных типах производств — литье под давлением и экструзия [1, 2]. Под термином «экструзия» имеется в виду непрерывный процесс формования длинномерных изделий, заключающийся в придании материалу требуемой формы в результате продавливания его через профилирующий канал. Экструзия дает возможность формовать погонажные профильные изделия, прежде всего пленки во всем их многообразии и длинномерные профили, включая трубы и профильные уплотнения. При помощи литья под давлением производится огромное многообразие объемных изделий.

Экспериментальные и теоретические исследования [1, 2] показывают, что характер течения полимерной жидкости в формующих элементах насадки (фильере) и в выходной струе определяется совокупностью факторов, которые можно разделить на три группы:

– гидродинамические и реологические факторы: расход массы в насадке, определяемый производительностью перерабатываемого оборудования; геометрические характеристики формующей насадки;



Creeping Flow of Viscoelastic Fluid with Free Surface at Non-Isothermal Condition

B. A. Snigerev, K. M. Aliev¹, F. Kh. Tazyukov¹

Institute of Mechanics and Engineering RAS, Kazan, Laboratory of Modelling of Technological Processes;

¹ Kazan State Technological University, Chair of Mechanical Engineering

E-mail: snigerev@mail.knc.ru, alievm@rambler.ru, Tazyukov@mail.ru

Numerical simulation flow of viscoelastic fluid with free surface, which is realized in entrance and output flow in extrusion die was performed. The flow of liquid is described by equations of conservation of mass, momentum and thermal energy with rheological constitutive equation of Giesekes. On basis of finite element method the stable numerical scheme was developed to solve this problem. Different numerical experiments was performed to define the configuration of outflow jet in various regimes and construction of die. The distribution of flow velocity fields, pressure and temperature are investigated on dependence of heating the walls. The ratio of extrusion in dependence of parameters the rheological model are investigated.

Key words: viscoelastic fluid, Giesekes model, free surface flow.



физико-механические свойства полимерной жидкости (плотность, вязкость, реологические характеристики и пр.); массовые силы;

– теплофизические факторы: температурный режим экструзии (температура поступающей полимерной жидкости, температура и изоляционные качества стенок насадки и фильеры, температура окружающего воздуха) и теплофизические свойства полимерной жидкости;

– физико-химические факторы: факторы связанные с процессами отверждения и, в конечном счете, определяющие время и характер действия первых двух факторов.

В соответствии с вышеизложенным особую актуальность приобретает разработка математических моделей, методов расчета и оптимизации процесса экструзии с последующей проверкой и внедрением полученных результатов в производство. К настоящему времени число работ, посвященных исследованию гидродинамических и тепловых процессов в канале формирующей головки и экструзии из формирующей насадки, незначительно.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе рассматривается вытекание упруговязкой жидкости из цилиндрической ступенчатой щелевой насадки, схема которой представлена на рис. 1. На рисунке h обозначает радиус узкого канала выходной части насадки, $4h$ — радиус трубы на входе, $h_1 = 0.5h$ — длина закругленной части, L — длина выходной части насадки.

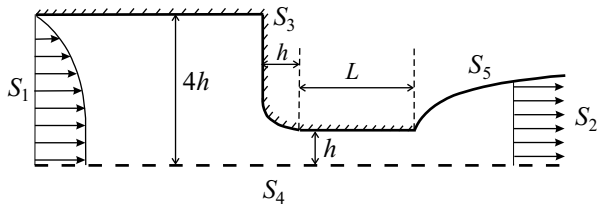


Рис. 1. Схема вытекания упруговязкой жидкости из осесимметричной ступенчатой насадки

Рассматривается влияние длины выходной части насадки L на степень разбухания полимерной жидкости в процессе экструзии. Рассматриваются значения, равные $L = 0, 2h, 4h, 10h$. Анализируются также влияние реологических параметров конститутивного соотношения Гиезекуса на характер истечения из насадки.

Введем следующие обозначения границ: S_1 — входное сечение, S_2 — выходное сечение струи, S_3 — твердая стенка формирующего канала, S_4 — граница, являющаяся осью симметрии области, S_5 — часть границы, приходящаяся на свободную поверхность.

Исходной является система уравнений законов сохранения массы, импульса, энергии, для замыкания которой привлекается конститутивное реологическое соотношение Гиезекуса [3–5]:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^V + 2\eta_N D_{ij}, \quad \frac{\delta \tau_{ij}^V}{\delta t} = \frac{\partial \tau_{ij}^V}{\partial t} + v_k \frac{\partial \tau_{ij}^V}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \tau_{kj}^V - \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \tau_{ik}^V,$$

$$\tau_{ij}^V + \lambda \frac{\delta \tau_{ij}^V}{\delta t} + \frac{\alpha \lambda}{\eta_V} \tau_{ij}^{2V} = 2\eta_V D_{ij}, \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} + (\tau_{ij} D_{ji}). \quad (2)$$

В системе уравнений (1)–(2) v_i — компоненты скорости жидкости, P — давление, τ_{ij} — девиатор напряжения, τ_{ij}^V — вязкоупругая часть напряжения, T — температура жидкости, η_V, η_N — динамические вязкости полимера и растворителя соответственно, c_p — теплоемкость жидкости при постоянном давлении, k — коэффициент теплопроводности, λ — время релаксации напряжений полимерной жидкости. Для зависимости вязкости и времени релаксации от температуры используется соотношение Аррениуса [4]

$$\eta(T) = \eta_0 a(T), \quad \lambda(T) = \lambda_0 a(T), \quad a(T) = \exp[A(1/T - 1/T_0)], \quad A = E/R,$$

где индекс 0 означает, что значение параметра вычисляется при температуре T_0 , E — энергия активации, R — универсальная газовая постоянная.



Граничные условия имеют вид: $S_1: v_2 = v_2(x_2), \tau_{ij}^V = \tau_{ij}^V(x_2), T = T_0(x_1); S_2: v_1 = 0, \partial v_2/\partial x_2 = 0, \partial T/\partial x_2 = 0, \partial \tau_{ij}/\partial x_2 = 0; S_3: v_i = 0, T = T_1; S_4: v_1 = 0, \tau_{12} = 0, \partial T/\partial x_1 = 0, S_5: dx_i/dt = v_i, n_i \tau_{ij} n_j - (P - P_0)n_i = \frac{1}{\sigma_p} 2K, n_j \tau_{ij} t_i = 0, k \partial T/\partial n = -\alpha (T - T_2)$. Здесь n_i, t_j — компоненты единичной нормали и касательной к поверхности S_5, P_0 — давление над свободной поверхностью, σ_p — коэффициент поверхностного натяжения, K — кривизна свободной поверхности, α — коэффициент теплоотдачи с окружающей средой, T_1 — температура стенок канала, T_0 — температура жидкости на входе, T_2 — температура окружающей среды.

В качестве безразмерных переменных используются параметры

$$x_i^* = x_i/L, \quad v_i^* = v_i/U_0, \quad t^* = tU_0/L, \quad p^* = \eta U_0/L p, \quad \tau_{ij}^* = \eta U_0/L \tau_{ij}, \quad \theta = (T - T_1)/(T - T_0),$$

где U_0 — средняя скорость жидкости на входе, L — характерный размер, равный радиусу узкой части канала (далее звездочка над безразмерными величинами опущена).

Исходную систему уравнений запишем в безразмерном виде:

$$Re \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x^j} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0,$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^V + 2\beta D_{ij}, \quad \tau_{ij}^V + We \frac{\delta \tau_{ij}^V}{\delta t} + \frac{\alpha We}{1 - \beta} \tau_{ij}^2 V = 2(1 - \beta) D_{ij},$$

$$Pe \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_j \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i^2} + Br(\tau_{ik} \cdot D_{kj}).$$

Здесь определяющими являются безразмерные комплексы: $Re = Re_0 a(\theta), Re_0 = \rho U_0 L/\eta$ — число Рейнольдса, $Pe = \rho c_p U L/k$ — число Пекле, $We = We_0 a(\theta), We_0 = \lambda U_0/L$ — числа Вайссенберга, $Br = Br_0 a(\theta), Br = \eta U_0^2/(T_1 - T_0)$ — числа Бринкмана, $\beta = \beta_0 a(\theta), \beta_0 = \eta_N/(\eta_N + \eta_V)$ — параметр ретардации.

Граничные условия в безразмерной форме примут вид: $S_1: v_i = v_i(x_1), \theta = 0; S_2: v_1 = 0, \partial v_2/\partial x_2 = 0, \theta = 1; S_3: v_i = 0, \theta = 1; S_4: v_1 = 0, \tau_{12} = 0; S_5: dx_i/dt = v_i, n_i \tau_{ij} n_j - \frac{1}{Ca} 2K = 0; n_j \tau_{ij} t_i = 0, \partial \theta/\partial n = -Bi(\theta - \theta_0)$, где $Ca = \eta U/\sigma_p$ — число капиллярности, $Bi = \alpha L/k$ — параметр Био.

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Аппроксимация уравнений (1–2) и вычисления проводятся методом конечных элементов (МКЭ) второго порядка на нерегулярных сетках, сгущающихся к зоне истечения полимера из насадки. Для расчетов строилась последовательность сгущающихся сеток Ω_e 9-узловых четырехугольных элементов (число узлов 5000, 18400, 26700). Для скоростей применяется квадратичная аппроксимация $\varphi = \{\varphi_i, i = 1, 9\}$ и линейная $\psi = \{\psi_i, i = 1, 4\}$ для давления, напряжений, температуры. После применения стандартной процедуры метода конечных элементов получаем уравнения следующего вида:

$$M_{ij} v_j^{n+1} + A_{ij} v_j^{n+1} - E_{ij} p_i^{n+1} = M_{ij} v_j^n - C_{ij} v_j^n + E_{ik} \tau_{kj}, \quad E_{ij}^T v_i^{n+1} = 0, \quad (3)$$

где M_{ij} — матрица масс, E_{ij} — дискретизация оператора дивергенции, E_{ij}^T —транспонированная матрица оператора дивергенции, A_{ij} — сеточный аналог оператора Лапласа, C_{ij} — дискретизация конвективного члена. Для их вычисления применяются следующие формулы:

$$M_{ij} = \int_{\Omega_e} \varphi_i \varphi_j dx_1 dx_2, \quad E_{ij} = \int_{\Omega_e} (\nabla \psi_i) \varphi_j dx_1 dx_2,$$

$$A_{ij} = \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx_1 dx_2, \quad C_{ij} = \int_{\Omega_e} v_i^n (\nabla \varphi_i) \varphi_j dx_1 dx_2.$$

Интегралы на четырехугольнике вычисляются с помощью 4-точечной квадратурной формулы Гаусса.



Уравнения для напряжений и температуры считаются отдельно при известном распределении поля скоростей из матричного уравнения:

$$M_{ij}\tau_{ik}^{n+1} = M_{ij}\tau_{ij}^n - G_{ij}(v_i^n)\tau_{ij}^n - S_{ij}(v_i^n)\tau_{ij}^n - P_{ij}, \quad (4)$$

$$M_{ij}\theta_j^{n+1} = M_{ij}\theta_j^n - C_{ij}(v_i^n)\theta_j^n + F_{ij}\tau_{ij}^n, \quad (5)$$

где M_{ij} — матрица масс, G_{ij} , S_{ij} — дискретизации оператора верхней конвективной производной и конвективных слагаемых соответственно, F_{ij} , P_{ij} — порождены дополнительными членами в уравнениях для энергии и напряжений. Данные матрицы находятся через

$$G_{ij} = \int_{\Omega_e} [f(v_i^n)]\psi_i\psi_j dx_1dx_2, \quad S_{ij} = \int_{\Omega_e} v_i^n(\nabla\psi_i)\psi_j dx_1dx_2,$$

$$F_{ij} = \int_{\Omega_e} v_i^n(\nabla\psi_i)\psi_j dx_1dx_2, \quad P_{ij} = \int_{\Omega_e} (\psi_i)^2(\psi_j) dx_1dx_2.$$

Для свободной поверхности, описываемой уравнением $F(x_i, t) = 0$, выполняется соотношение

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_i\nabla F = 0. \quad (6)$$

Местоположение деформируемой свободной поверхности находится из аппроксимации кинематического условия (6) методом конечных элементов, затем сетка конечных элементов вблизи нее перестраивается для получения решений матричных уравнений (3)–(5), с помощью которых находится поле скоростей, давлений, напряжений и температур на новом временном слое $t^{n+1} = (n + 1)\Delta t$. Стационарное положение формы выходящей струи находится методом установления эволюционной задачи с использованием традиционных для уравнений данного класса алгоритмов [6, 7].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Для изотермического обтекания значения всех теплофизических параметров рассматриваются при температуре $T_0 = 303$ К. В случае неизотермического обтекания рассматривается истечение полимерной жидкости из насадки с нагретыми стенками, температура которых повышается до $T_1 = 323$ К, 353 К соответственно. Расчеты проводились при следующих значениях теплофизических свойств полимерной жидкости $\rho = 924$ кг/м³, $\eta = 10^4$ Па·с, $c_p = 2300$ Дж/(кг·К), $k = 0.26$ Вт/(м·К), $A = 2000$ К, $\sigma_p = 3 \cdot 10^{-2}$ н/м, $\alpha = 10^2$ Вт/(м²·К). Характерные параметры рассматривались следующие $Re = 10^{-2}$ м,

где Re — число Рейнольдса, $Pe = 180$, $Br = 2 \cdot 10^{-2}$, $Ca = 1.4 \cdot 10^3$, $Bi = 3.8$, а число We изменяется от 0.1 до 5.

На рис. 2 представлена картина течения для насадки с размером выходного канала, равным $L = 0$, в виде изолиний линий тока (рис. 2, а), первой разницы главных нормальных напряжений N_1 (рис. 2, б) и компоненты осевой скорости (рис. 2, в), для изотермической экструзии при $We = 3.0$. Увеличение диаметра выходной струи характеризуется параметром h_f , равным отношению диаметра струи к диаметру канала и называемым эффектом разбухания струи.

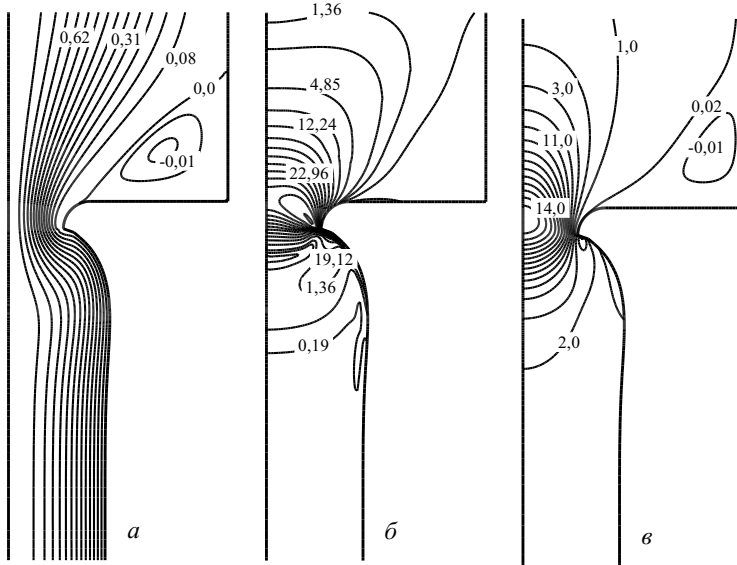


Рис. 2. Изолинии линии тока ψ (а); изолинии N_1 (б); осевой компоненты скорости (в) при $We = 3.0$ для насадки $L = 0$



На рис. 3 приведена зависимость степени разбухания h_f выходящей струи полимерной жидкости от значения числа We для различных насадок. Формы насадок различаются длиной узкой выходной части L , изменяющейся от 0 до $10h$. Результаты показывают, что степень разбухания h_f струи увеличивается при уменьшении длины выходного участка. Видно, что значения h_f зависят от кинематики предшествующего деформирования — скорости сдвига и длины выходной части капилляра. Что можно трактовать тем, что постэкструзионное разбухание при переработке полимеров обусловлено высвобождением упругой энергии, запасенной при предшествующем течении в канале. Вязкоупругие жидкости являются средами, обладающими наследственной памятью. Наследственная жидкость «помнит» предысторию, т. е. изменение поля скоростей в предшествующие моменты времени. Длительность «памяти» характеризуется временем релаксационных процессов λ , что определяется параметром We . Видно, что при увеличении значения числа We степень разбухания увеличивается для всех насадок.

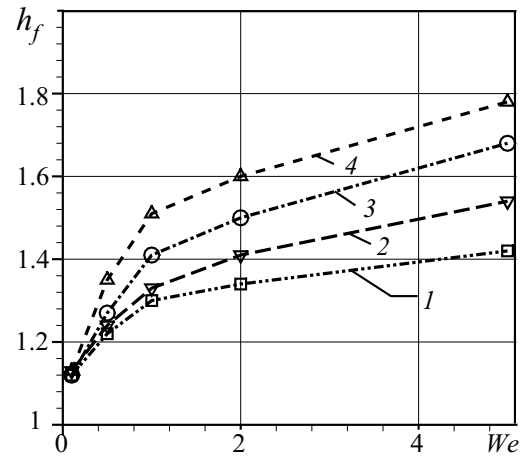


Рис. 3. Степень разбухания выходной струи h_f в зависимости от значения числа We для различных насадок: 1 — $L = 10h$, 2 — $L = 4h$, 3 — $L = 2h$, 4 — $L = 0$

Результаты исследования влияния реологических параметров модели Гиезекуса α и β при изотермическом течении показаны на рис. 4. На рис. 4, а приведена зависимость степени разбухания выходящей струи полимерной жидкости от значения числа We для насадки с длиной $L = 0$ при увеличении параметра α модели Гиезекуса. Увеличение данного параметра для вязкоупругих жидкостей означает, что они обладают большей аномалией вязкости при увеличении скорости сдвига. Жидкости, не обладающие аномалией вязкости, описываются реологическим уравнением Олдройда [4, 5], что соответствует $\alpha = 0$ в модели Гиезекуса. Видно, что для упруговязких жидкостей, проявляющих большую аномалию вязкости, степень разбухания уменьшается при изотермическом выдавливании из насадки. Аналогичные кривые при изменении параметра ретардации β приведены на рис. 4, б. Увеличение параметра β означает увеличение доли растворителя в полимерной смеси. Видно, что разбавление полимерной смеси приводит к более значительному уменьшению степени разбухания выходной струи. Это объясняется тем, что упругие свойства жидкости играют значительную роль в увеличении диаметра выходной струи. Для больших значений данного параметра поведение полимерной смеси близко к ньютоновской жидкости, когда значение h_f не превышает 1.13. В этом случае увеличение диаметра струи в основном определяется резким перераспределением неоднородного поля скорости в однородный.

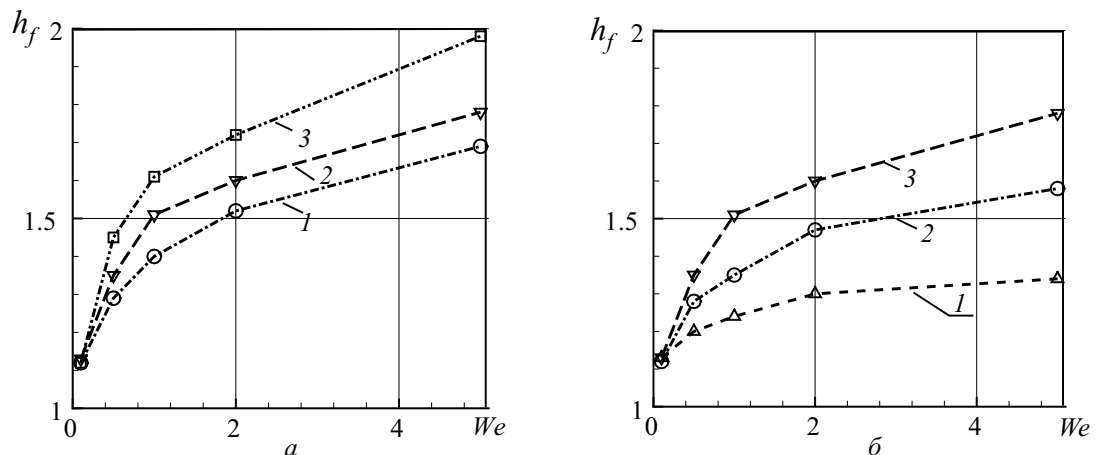


Рис. 4. Степень разбухания выходной струи h_f в зависимости от значения числа We для насадки с длиной $L = 0$ в зависимости от параметра α (а, 1 — $\alpha = 0.86$, 2 — $\alpha = 0.33$, 3 — $\alpha = 0.11$) и для различных значений β (б, 1 — $\beta = 0.8$, 2 — $\beta = 0.5$, 3 — $\beta = 0.11$)



На рис. 5, а показана зависимость h_f от числа We при неизотермической экструзии для ступенчатой формирующей насадки с размером выходной части $L = 0$ в зависимости от температурного напора между стенкой и потоком полимера. На рис. 5, б показана аналогичная зависимость для насадки с размером $L = 2h$. Видно, что нагрев стенки на $\Delta T = 30\text{K}$ (кривая 3) на обоих графиках приводит к уменьшению диаметра выходной струи. Отметим при этом, что для более длинной насадки с ростом числа We и температурного напора наблюдается немонотонный характер увеличения h_f . При небольших числах We ($We < 1$) происходит уменьшение степени разбухания.

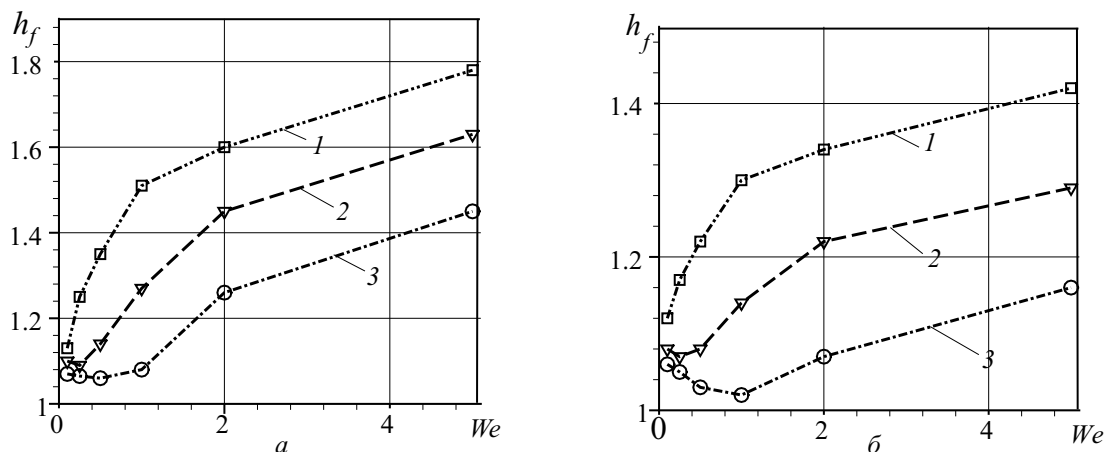


Рис. 5. Степень разбухания выходной струи h_f для неизотермической экструзии в зависимости от значения числа We при увеличении температуры стенки S_3 (1 – $\Delta T = 0\text{ K}$, 2 – $\Delta T = 15\text{ K}$, 3 – $\Delta T = 30\text{ K}$) насадки с длиной $L = 0$ (а) и $L = 2h$ (б)

Приведенные результаты расчетов процесса экструзии упруговязкой жидкости из ступенчатых формирующих насадок с разной длиной выходной части показали, что степень разбухания выходной струи увеличивается для коротких насадок. Данные результаты подтверждают вывод о том, что одним из факторов влияющих на степень разбухания для наследственных вязкоупругих сред является время релаксации напряжений. Неизотермичность потока полимерной массы, определяющаяся разностью температур стенки и основного потока, приводит к уменьшению диаметра выходной струи. Выявлено, что при увеличении температурного напора наблюдается уменьшение диаметра выходной струи с ростом числа We на начальном этапе. Данный характер немонотонного поведения степени разбухания свидетельствует о том, что температурная аномалия вязкости оказывает существенное влияние на форму выходящей струи.

Библиографический список

1. Торнер Р. В. Теоретические основы переработки полимеров. М.: Химия, 1977. 467 с.
2. Раувендаль К. Экструзия полимеров. СПб.: Профессия, 2008. 768 с.
3. Giesekes H. A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation dependent tensorial mobility // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1982. Vol. 11. P. 69–109.
4. Bird R. B., Armstrong R. C., Hassager O. Dynamics of Polymeric Liquids. vol. I. Fluid Mechanics. 2nd ed. N.Y.: John Wiley and Sons, 1987. 565 с.
5. Назмеев Ю. Г. Гидродинамика и теплообмен закрученных потоков реологически сложных жидкостей. М.: Энергоатомиздат, 1996. 304 с.
6. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье – Стокса / В. И. Полежаев, А. В. Бунэ, Н. А. Везуб и др. М.: Наука, 1987. 271 с.
7. Снигерев Б. А., Тазюков Ф. Х., Кутузов А. Г., Амераль Раваиш. Течение упруговязкой жидкости со свободной поверхностью // Вестн. Казан. техн. ун-та. 2007. № 1. С. 86–93.



УДК 517.956

ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Т. А. Солдатова

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
кафедра математического анализа
E-mail: tsoldato@yandex.ru

На гладком контуре рассматриваются обобщенные интегралы типа Коши с ядром, зависящим от разности аргументов. Они охватывают как потенциалы двойного слоя для эллиптических уравнений второго порядка, так и обобщенные интегралы типа Коши для эллиптических систем первого порядка. Для функций, определяемых этими интегралами, найдены достаточные условия, обеспечивающие их принадлежность классу $C^{m,\mu}$, вплоть до границы. Получены соответствующие формулы для их предельных значений.

Ключевые слова: обобщенные интегралы типа Коши, краевые задачи, эллиптические уравнения, граничные свойства.

1. ОДНОРОДНЫЕ ЯДРА

Хорошо известно [1], какое важное значение имеют классические интегралы типа Коши для исследования краевых задач теории функций. Применительно к краевым задачам для эллиптических уравнений второго порядка аналогичную роль играют потенциалы двойного слоя [2]. Интегралы указанных типов можно объединить в форме криволинейных интегралов ядрами однородной степени -1 , зависящими от разности двух комплексных переменных (одна из которых является переменной интегрирования). Данная работа посвящена исследованию граничных свойств этих интегралов в классах $C^{m,\mu}$ для всех $n = 0, 1, \dots$

Рассмотрим непрерывную на $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ функцию $Q(\xi)$, однородную степени $-m$, где m — неотрицательное целое число. Последнее означает, что

$$Q(r\xi) = r^{-m}Q(\xi) \quad (1.1)$$

для любого $r > 0$. Очевидно, функция Q полностью определяется своими значениями на единичной окружности, которую обозначим \mathbb{T} , и допускает оценку $|Q(\xi)| \leq |Q|_{0,\mathbb{T}}|\xi|^{-m}$, где $|Q|_{0,E}$ означает суп-норму функции φ на множестве E . В частности, отсюда

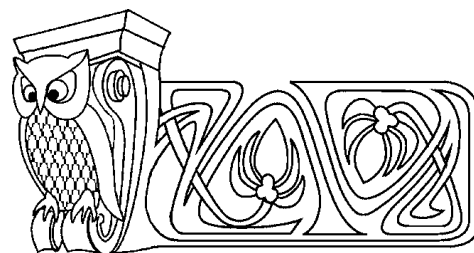
$$|Q(y-x)| \leq 2^m |Q|_{0,\mathbb{T}} |y|^{-m} \quad \text{при} \quad |y| \geq 2|x|. \quad (1.2)$$

В самом деле, в силу (1.1) можем записать $Q(y-x) = |y|^{-m}Q(\xi)$ с вектором $\xi = (y-x)/|y|$, удовлетворяющим условию $1/2 \leq |\xi| \leq 2$.

В дальнейшем будут рассматриваться однородные функции Q , удовлетворяющие на окружности \mathbb{T} условию Липшица. Напомним, что функция φ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $0 < \mu \leq 1$ на множестве E (условию Липшица при $\mu = 1$), если конечна полуорма

$$[\varphi]_{\mu,E} = \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^\mu}.$$

Класс ограниченных функций с конечной нормой $|\varphi|_\mu = |\varphi|_0 + [\varphi]_\mu$ образует банахово пространство Гельдера $C^{0,\mu}(E)$. При $\mu < 1$ для него используем также обозначение $C^\mu(E)$. Символ $C^1(E)$ используется для функций, непрерывно дифференцируемых на E (в случае, когда E является замкнутой областью).



Boundary Properties of Generalized Cauchy Type Integrals in the Space of Smooth Functions

Т. А. Soldatova

Lomonosov Moscow State University,
Chair of Mathematical Analysis
E-mail: tsoldato@yandex.ru

The generalized Cauchy type integrals which kernel depends on the difference of arguments are considered on the smooth contour. These integrals cover as potentials of double layer for second order elliptic equations as generalized Cauchy type integrals for first order elliptic systems on the plane. In the paper the sufficient conditions such that these integrals belong $C^{m,\mu}$ up to the boundary are found.

Key words: generalized Cauchy type integrals, boundary problems, elliptic equations, boundary properties.



Обратимся к однородной функции $Q \in C^{0,1}(\mathbb{T})$. В силу свойства однородности (1.1) она удовлетворяет условию Липшица в каждом слое $G = \{\delta \leq |\xi| \leq \delta^{-1}\}$ с оценкой норм $|Q|_{1,G} \leq C|Q|_{1,\mathbb{T}}$, где постоянная $C > 0$ зависит только от m и δ . В частности, аналогично (1.2) отсюда приходим к оценке

$$|Q(y-x) - Q(y)| \leq C|Q|_{1,\mathbb{T}}|y|^{-m-1} \quad \text{при } |y| \geq 2|x|, \quad (1.3)$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от m .

В дальнейшем основной интерес представляют однородные функции Q степени -1 .

Теорема 1.1 Пусть функция $Q(\xi) \in C^{0,1}(\mathbb{T})$ однородна степени -1 и удовлетворяет условию

$$Q(-e) = -Q(e) \quad (1.4)$$

для некоторого $e \in \mathbb{T}$. Тогда вне прямой $L = \{te \mid t \in \mathbb{R}\}$ сингулярный интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} Q(te-x)dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R Q(te-x)dt \quad (1.5)$$

существует и зависит только от полуплоскости, в которой лежит точка x . Если дополнительно $Q \in C^1(\mathbb{T})$, то

$$\int_L \frac{\partial Q}{\partial \xi_i}(y-x)ds_y = 0, \quad i = 1, 2, \quad x \notin L, \quad (1.6)$$

где интегралы понимаются в обычном смысле.

Наконец, если функция $Q(\xi) \in C^m(\mathbb{T})$ и нечетна, т.е. условие (1.4) выполняется для всех e , то

$$\int_{\mathbb{R}} t^k Q^{(m)}(te-x)dt = 0, \quad x \notin L, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1.7)$$

где $Q^{(m)}$ означает любую из частных производных порядка m .

Доказательство. При $R \geq 2|x|$ в силу (1.4) имеем:

$$\int_{2|x| \leq |t| \leq R} Q(te-x)dt = \int_{2|x|}^R [\varphi_+(t) + \varphi_-(t)]dt, \quad \varphi_{\pm}(t) = Q(\pm te-x) - Q(\pm te).$$

На основании (1.3) функции φ_{\pm} допускают оценку $|\varphi_{\pm}(t)| \leq C|Q|_{\mu}|x|t^{-2}$ при $t \geq 2|x|$. Поэтому интеграл (1.5) действительно существует.

Обозначим $\phi(x)$ функцию на $\mathbb{R}^2 \setminus L$, определяемую этим интегралом. Доказательство того, что она постоянна в каждой из двух полуплоскостей, сводится к соотношениям

$$\phi(rx) = \phi(x), \quad \phi(x + \lambda e) = \phi(x), \quad (1.8)$$

справедливым для любых положительных r и λ . В силу однородности

$$\int_{-R}^R Q(te-rx)dt = \int_{-Rr}^{Rr} Q(te-x)dt,$$

что в пределе дает первое равенство (1.8). Точно так же при $x' = x + \lambda e$ можем записать

$$\int_{-R}^R Q(te-x')dt - \int_{-R}^R Q(te-x)dt = \left(\int_{-R-\lambda}^{-R} + \int_{R-\lambda}^R \right) Q(te-x)dt.$$

Так как

$$\max_{R-\lambda \leq |t| \leq R} |Q(te-x)| \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty,$$

приходим к справедливости и второго равенства в (1.8).

Обратимся ко второму утверждению теоремы. Пусть функция $Q \in C^1(\mathbb{T})$ и точка $c \in P$ фиксирована. Тогда как и выше убеждаемся, что функция $Q(te-x) - Q(te-c)$ суммируема на прямой \mathbb{R} .



Поскольку этим свойством обладают и ее частные производные по x_i , функцию $\phi(x) - \phi(c)$ можно проинтегрировать под знаком интеграла. Поскольку эта функция постоянна в полуплоскости, в результате приходим к равенству (1.6).

Что касается последнего утверждения теоремы, то для $k = 0$ равенство (1.7) получается дифференцированием (1.6). Поэтому доказательство требуется только для $k \geq 1$. Пусть для определенности первая координата e_1 единичного вектора $e = (e_1, e_2)$ отлична от нуля. Тогда, раскладывая $(te_1)^k = [(te_1 - x_1) + x_1]^k$ по степеням $te_1 - x_1$, вместо (1.7) можем доказывать равенство

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{Q}(te - x) dt = 0, \quad \tilde{Q}(\xi) = \xi_1^k Q^{(m)}(\xi).$$

Очевидно, достаточно убедиться, что функция \tilde{Q} представима в виде конечной суммы

$$\xi_1^k Q^{(m)}(\xi) = \sum_i Q_i^{(m_i)}, \quad k < m, \tag{1.9}$$

где функции $Q_i \in C^{m_i}(\mathbb{T})$ нечетны и однородны степени -1 . Тогда указанное равенство будет следствием равенства (1.8) с $k = 0$, справедливость которого была отмечена выше.

Доказательство представления (1.9) проведем индукцией по m . При $m = 1$ оно очевидно, пусть рассматриваемое утверждение справедливо по отношению к $\xi_1^k Q^{(m-1)}(\xi)$, $k < m - 1$. Для производной $Q^{(m)}$ возможны следующие два случая:

$$Q^{(m)} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} Q^{(m-1)}, \quad Q^{(m)} = \frac{\partial}{\partial \xi_2} Q^{(m-1)}.$$

Соответственно этим случаям имеем:

$$\xi_1^k Q^{(m)} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} [\xi_1^k Q^{(m-1)}] - k [\xi_1^{k-1} Q^{(m-1)}], \quad \xi_1^k Q^{(m)} = \frac{\partial}{\partial \xi_2} [\xi_1^k Q^{(m-1)}].$$

Если $k < m - 1$, то к выражениям в квадратных скобках достаточно применить предположение индукции. В случае $k = m - 1$ остается заметить, что функция $Q_0(\xi) = \xi_1^k Q(k)(\xi)$ однородна степени -1 и нечетна. Последнее следует из того, что каждое дифференцирование характер четности или нечетности меняет на противоположный. Тем самым представление (1.9), а вместе с ним и теорема установлены.

Общее значение интеграла (1.5) в полуплоскости D , лежащей слева от вектора e , обозначим $\sigma(Q; e)$. Ясно также, что замена e на $-e$ приводит к общему значению интеграла (1.5) в полуплоскости, лежащей справа от вектора e . Если функция Q нечетна, то замена $t = -t'$ в интеграле (1.5) приводит к равенству $\sigma(Q; -e) = -\sigma(Q; e)$ для любого вектора e . Другими словами, в этом случае σ представляет собой нечетную функцию на \mathbb{T} .

Опишем связь σ с линейными подстановками. Пусть матрица $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ имеет положительный определитель, так что определяемое ею линейное преобразование $\tilde{x} \rightarrow A\tilde{x}$ не меняет ориентации плоскости. В частности, если полуплоскость \tilde{D} лежит слева от \tilde{e} , то образ $A(\tilde{D})$ при этом преобразовании совпадает с D . Поэтому линейная замена переменных в (1.5) приводит к равенству

$$\sigma[Q(\xi); e] = |A\tilde{e}| \sigma[Q(A\xi); \tilde{e}], \quad e = |A\tilde{e}|^{-1} (A\tilde{e}). \tag{1.10}$$

Нетрудно также дать явное выражение для интегралов $\sigma^\pm(Q; e)$. С этой целью положим

$$f(\arg \xi) = Q(\xi), \quad g(\theta) = \begin{cases} f[(\arg e) - \theta], & 0 \leq \theta \leq \pi/2, \\ -f[\pi - (\arg e) - \theta], & -\pi/2 \leq \theta < 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

В терминах функции f условие (1.4) сводится к равенству $f(\pi + \arg e) = -f(\arg e)$, поэтому функция g непрерывна в точке $\theta = 0$. Если $Q \in C^{0,1}(\mathbb{T})$, то, очевидно, и 2π -периодическая функция $f \in C^{0,1}$ и, значит, этим свойством обладает и функция g на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$.

Лемма 1.1. В условиях теоремы 1.1

$$\sigma(Q, e) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{g(\theta)}{\sin \theta} d\theta, \tag{1.12}$$



где интеграл понимается как сингулярный в точке $\theta = 0$, т.е. является пределом при $\varepsilon \rightarrow 0$ интегралов по $\varepsilon \leq |\theta| \leq \pi/2$. В частности, если функция $Q(\xi)$ нечетна, то

$$\sigma(Q, e) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{f[(\arg e) - \theta]}{\sin \theta} d\theta. \quad (1.13)$$

Доказательство. Предположим сначала, что $e = (0, 1)$, и выберем точку $c = (-1, 0) \in D$. Очевидно, $\arg(te - c) = \operatorname{arctg} t$, поэтому

$$\sigma(Q; e) = \int_{\mathbb{R}} Q(te - c) dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\operatorname{arctg} t)}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

Замена $\operatorname{tg} t = \theta$ в этом сингулярном (на ∞) интеграле приводит к равенству

$$\sigma(Q; e) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{f(\theta)}{\cos \theta} d\theta,$$

где интеграл понимается как предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ соответствующих интегралов по $|\theta| \leq \pi/2 - \varepsilon$. Поскольку в обозначениях (1.11)

$$\int_{|\theta| \leq \pi/2 - \varepsilon} \frac{f(\theta)}{\cos \theta} d\theta = \int_{\varepsilon \leq |\theta| \leq \pi/2} \frac{g(\theta)}{\sin \theta} d\theta, \quad g(\theta) = \begin{cases} f(\pi/2 - \theta), & 0 \leq \theta \leq \pi/2, \\ -f(-\pi/2 - \theta), & -\pi/2 \leq \theta \leq 0, \end{cases}$$

отсюда следует справедливость формулы (1.12) в рассматриваемом случае $e = (0, 1)$.

В общем случае произвольного единичного вектора e положим $\tilde{e} = (0, 1)$ и рассмотрим линейное преобразование A , осуществляющее поворот плоскости против часовой стрелки на угол $\alpha - \pi/2$, $\alpha = \arg e$. При этом повороте \tilde{e} переходит в e и, следовательно,

$$Q(A\xi) = \frac{\tilde{f}(\arg \xi)}{|\xi|}, \quad \tilde{f}(\theta) = f(\theta + \alpha - \pi/2).$$

Поэтому на основании (1.10) предыдущая формула, примененная к \tilde{Q} и \tilde{e} , приводит к равенству (1.12) в общем случае.

Наконец, если функция $Q(\xi)$ нечетна, то функция f обладает свойством $f(\theta + \pi) = -f(\theta)$, что доказывает равенство (1.13).

Как будет показано ниже, для $f \in C^{0,1}$ формула (1.13) определяет функцию $\sigma(e)$, принадлежащую $C^\mu(\mathbb{T})$ для любого $0 < \mu < 1$ (класс таких функций естественно обозначить C^{1-0}). Доказательство основывается на следующем вспомогательном предложении, которое представляет собой уточненный вариант одного свойства гельдеровых функций, рассмотренного в известной монографии Н. И. Мухелишвили.

Лемма 1.2. Пусть $\varphi(u, v) \in C^\nu(G \times F)$, $F \subseteq \mathbb{R}^s$ и $0 < \mu < \nu$. Тогда для фиксированных $u', u'' \in G$, $u' \neq u''$, функция

$$\tilde{\varphi}(v) = \frac{\varphi(u', v) - \varphi(u'', v)}{|u' - u''|^\mu}, \quad v \in F,$$

принадлежит классу $C^{\nu-\mu}(F)$ и справедлива оценка

$$|\tilde{\varphi}|_{\nu-\mu} \leq 8|\varphi|_\nu. \quad (1.14)$$

Доказательство. Из определения видно, что функция $\tilde{\varphi}$ ограничена и

$$|\tilde{\varphi}|_0 \leq \max(2|\varphi|_0, [\varphi]_\nu). \quad (1.15)$$

Условимся элементы множества $E = G \times F$ записывать x, y, z и рассмотрим на $E \times E$ функцию

$$\psi(x, y) = \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x - y|^\mu},$$



которая при $x = y$ полагается равной нулю. Оценим разность $\psi(x, z) - \psi(y, z)$. Предполагая для определенности $|y - z| \leq |x - z|$, имеем:

$$|\psi(x, z) - \psi(y, z)| \leq \left(\frac{|x - y|^\nu}{|x - z|^\mu} + \frac{|y - z|^\nu |x - z|^\mu - |y - z|^\mu}{|y - z|^\mu |x - z|^\mu} \right) [\varphi]_\nu = A[\varphi]_\nu |x - y|^{\nu - \mu},$$

$$A = \frac{|x - y|^\mu}{|x - z|^\mu} + \frac{|y - z|^{\nu - \mu} |x - z|^\mu - |y - z|^\mu}{|x - y|^{\nu - \mu} |x - z|^\mu}.$$

Очевидно,

$$A \leq \frac{(|x - z| + |y - z|)^\mu}{|x - z|^\mu} + \frac{|y - z|^{\nu - \mu} |x - z|^\mu - |y - z|^\mu}{||x - z| - |y - z||^{\nu - \mu} |x - z|^\mu} = (1 + t)^\mu + \frac{t^{\nu - \mu} (1 - t)^\mu}{(1 - t)^{\nu - \mu}},$$

где положено $t = |y - z| |x - z|^{-1} \leq 1$. Поскольку $t^\mu + (1 - t)^{\nu - \mu} \geq t + (1 - t) = 1$ и, значит, $1 - t^\mu \leq (1 - t)^{\nu - \mu}$, величина $A \leq 2^\mu + 1 \leq 3$. Таким образом,

$$|\psi(x, z) - \psi(y, z)| \leq 3[\varphi]_\nu |x - y|^{\nu - \mu}.$$

В общем случае произвольных точек $(x, y), (x', y')$ множества $E \times E$ можем записать $|\psi(x, y) - \psi(x', y')| \leq |\psi(x, y) - \psi(x', y)| + |\psi(x', y) - \psi(x', y')|$ и к слагаемым в правой части применить предыдущую оценку. Вспоминая, что $\tilde{\varphi}(v) = \psi[(u', v), (u'', v)]$, в результате получим:

$$|\tilde{\varphi}(v_1) - \tilde{\varphi}(v_2)| \leq 6[\varphi]_\nu |v_1 - v_2|^{\nu - \mu}.$$

Совместно с (1.15) отсюда следует требуемая оценка (1.14).

Обратимся к формуле (1.13). Рассматривая $\arg e$ в ее правой части как дополнительную координату параметра u , докажем следующее утверждение.

Лемма 1.3 Пусть $g(u, \theta) \in C^{0, \nu}(G \times [-\pi/2, \pi/2])$, $0 < \nu \leq 1$. Тогда функция

$$\sigma(u) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{g(u, \theta)}{\sin \theta} d\theta, \tag{1.16}$$

принадлежит классу $C^{\nu-0}(G)$ и справедлива оценка $|\sigma|_{C^\mu} \leq C|g|_{C^\nu}$, $0 < \mu < \nu$, где постоянная $C > 0$ зависит только от μ и ν . Если дополнительно функция g непрерывно дифференцируема по u , причем ее частная производная g'_u удовлетворяет условию Гельдера, то имеет место формула дифференцирования:

$$\sigma'(u) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{g'_u(u, \theta)}{\sin \theta} d\theta. \tag{1.17}$$

Доказательство. Подинтегральное выражение (1.16) представим в виде

$$\frac{\tilde{g}(u, \theta)|\theta|^{\nu - \mu}}{\sin \theta}, \quad \tilde{g}(u, \theta) = \frac{g(u, \theta)}{|\theta|^{\nu - \mu}}.$$

Согласно лемме 1.2 функция $\tilde{g}(u, \theta)$ принадлежит классу $C^\mu(G \times [-\pi/2, \pi/2])$ с соответствующей оценкой норм. Первое утверждение леммы отсюда получается непосредственно.

Что касается формулы дифференцирования (1.17), то без ограничения общности u можно считать одномерным параметром, пробегающим интервал $G \subseteq \mathbb{R}$. Для $u_1, u_2 \in G$ положим

$$\tilde{g}(u_1, u_2, \theta) = \frac{g(u_1, \theta) - g(u_2, \theta)}{u_1 - u_2} = \int_0^1 g'_u[u_1(1 - s) + u_2s] ds,$$

предполагая $\tilde{g}(u_1, u_2, \theta) = g'_u(u, \theta)$ при $u_1 = u_2 = u$. Тогда функция \tilde{g} удовлетворяет условию Гельдера, так что на основании первой части леммы отвечающая ей функция $\tilde{\sigma}$ обладает этим же свойством. Поскольку

$$\tilde{\sigma}(u_1, u_2, \theta) = \frac{\sigma(u_1, \theta) - \sigma(u_2, \theta)}{u_1 - u_2},$$

отсюда следует формула (1.17).



2. ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Напомним обозначения гельдеровых классов дифференцируемых функций. Пространство $C^{n,\mu}(E)$, где $E \subseteq \mathbb{R}^k$ – некоторая замкнутая область, состоит из всех n раз непрерывно дифференцируемых функций φ , которые вместе со своими частными производными принадлежат $C^\mu(E)$. Оно может быть определено индуктивно условием $\varphi, \varphi' \in C^{n-1,\mu}(E)$ с соответствующей нормой, равной сумме норм указанных функций в пространстве $C^{n-1,\mu}(E)$. Когда ясно, о каком множестве E идет речь, удобно эту норму обозначать $|\varphi|_{n,\mu}$. Напомним, что под φ' понимается любая из частных производных первого порядка. Можно также ввести аналогичные пространства с различными дифференциальными свойствами по разным группам переменных. Пусть $E = G \times F$ с замкнутыми областями $G \subseteq \mathbb{R}^r$ и $F \subseteq \mathbb{R}^s$, $r + s = k$, переменных соответственно u и v . Тогда пространство $C^{n,m,\mu}(G \times F)$ определяется индуктивно условиями $\varphi, \varphi'_u \in C^{n-1,m,\mu}(G \times F)$ и $\varphi, \varphi'_v \in C^{n,m-1,\mu}(G \times F)$ и снабжается соответствующей нормой $|\varphi|_{n,m,\mu}$. Таким образом, все частные производные функции φ , суммарный порядок которых по переменным u (v) не превосходит m (n), принадлежат $C^\mu(G \times F)$. Наивысший порядок таких производных, очевидно, совпадает с $m + n$.

Применительно к однородным функциям $Q(x, \xi)$, зависящим от $x \in E$ как от параметра, эти определения модифицируются следующим образом. Пространство $C^{\mu;0}(E \times \mathbb{T})$ состоит из функций $C(E \times \mathbb{T})$ этого типа, которые принадлежат $C^\mu(E)$ по первой переменной равномерно по $\xi \in \mathbb{T}$. Оно снабжается соответствующей нормой $|Q| = \sup_{\xi \in \mathbb{T}} |Q|_{\mu,E}$. Исходя из этого пространства, соответствующие пространства дифференцируемых функций $C^{n,\mu;k}(E \times \mathbb{T})$ и $C^{n,m,\mu;k}[(G \times F) \times \mathbb{T}]$ вводятся индуктивно по каждой из выделенных переменных, как выше. Например, при $n \geq 1$ норма в пространстве $C^{n,\mu;k}(E \times \mathbb{T})$ определяется равенством

$$|Q|_{n,\mu;k} = |Q'_x|_{n-1,\mu;k} + |Q'_\xi|_{n,\mu;k-1}.$$

Перечислим некоторые элементарные свойства введенных пространств, связанные с операциями умножения и суперпозиции функций.

Лемма 2.1. (а) Если $\varphi, \psi \in C^{n,\mu}$, то произведение $\varphi\psi$ принадлежит тому же пространству и справедлива оценка $|\varphi\psi|_{n,\mu} \leq C|\varphi|_{n,\mu}|\psi|_{n,\mu}$, где постоянная $C > 0$ зависит только от n .

(б) Если $\varphi \in C^{n,\mu}(\tilde{E})$, отображение $\alpha : E \rightarrow \tilde{E}$ удовлетворяет условию Липшица и его производная $\alpha' \in C^{n-1,\mu}$ (при $n \geq 1$), то суперпозиция $\varphi \circ \alpha$ принадлежит $C^{n,\mu}(E)$ и справедлива оценка $|\varphi \circ \alpha|_{n,\mu} \leq C|\varphi|_{n,\mu}$, где постоянная $C > 0$ зависит только от n и α .

(в) Если $\varphi \in C^{n,\mu}(E)$, $\tilde{E} = f(E)$ и $f \in C^{n,1}(\tilde{E})$, то суперпозиция $f \circ \varphi$ принадлежит $C^{n,\mu}(E)$ и справедлива оценка $|f \circ \varphi|_{n,\mu} \leq C|f|_{n,1}|\varphi|_{n,\mu}$, где постоянная $C > 0$ зависит только от n .

(г) Пусть \mathcal{S}_δ – вектор-функция $\varphi(y) \in C^{n,\mu}(F)$ и ее значения лежат в некотором круговом слое $S_\delta = \{\delta \leq |\xi| \leq \delta^{-1}\}$. Тогда для $Q(x, \xi) \in C^{n,\mu;n+1}(E \times \mathbb{T})$ функция $\psi(x, y) = Q[x, \varphi(y)]$ принадлежит $C^{n,\mu}(E \times F)$ и справедлива оценка $|\psi|_{n,\mu} \leq C|Q|_{n,\mu;n+1}|\varphi|_{n,\mu}$, где постоянная $C > 0$ зависит только от n , δ и степени однородности функции Q .

Доказательство. При $n = 0$ доказательство утверждений (а) – (в) непосредственно следует из элементарных неравенств для полунормы $[\]_\mu$ от произведения и суперпозиции функций:

$$[\varphi\psi]_\mu \leq [\varphi]_0[\psi]_\mu + [\varphi]_\mu[\psi]_0, \quad [f \circ \varphi]_\mu \leq [f]_1[\varphi]_\mu, \quad [\varphi \circ \alpha]_\mu \leq [\varphi]_\mu[\alpha]_1^\mu.$$

Общий случай в соответствии с индуктивным определением пространств легко получается из последних неравенств индукцией по n . В силу этих же соображений утверждение (г) также достаточно рассмотреть для $n = 0$. Как уже отмечалось в разд. 1, однородная функция $Q(\xi) \in C^1(\mathbb{T})$ удовлетворяет условию Липшица в каждом круговом слое S_δ , причем ее постоянная Липшица в этом слое допускает оценку $|Q|_{0,1} \leq M|Q|_{C^1}$, где константа M зависит только от δ и степени однородности функции Q . Возвращаясь к рассматриваемому случаю, можем утверждать таким образом, что $Q(x, \xi)$ принадлежит $C^\mu(E)$ равномерно по $\xi \in \mathbb{T}$ и $C^{0,1}(S)$ равномерно по $x \in E$. Поэтому остается воспользоваться утверждением (в) леммы.

Пусть, как и в предыдущем разделе, L означает прямую $\{te, t \in \mathbb{R}\}$ и D – полуплоскость дополнения к L , лежащая слева от вектора $e \in \mathbb{T}$. Пусть функция $Q(t, \xi) \in C^{\mu;0}(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ однородна степени



–1 и нечетна по ξ , она служит ядром интеграла

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}} Q(t, te - x)\varphi(t)dt, \quad x \in D, \quad (2.1)$$

с плотностью $\varphi \in C^\mu(\mathbb{R})$. Чтобы исключить сингулярность при $t = \infty$, функцию φ предполагаем с компактным носителем, не ограничивая общности, можно считать, что

$$\varphi(t) = 0, \quad \text{при } |t| \geq 1. \quad (2.2)$$

Тогда интеграл (2.1) определяет функцию, непрерывную в открытой полуплоскости D . Если дополнительно $Q(t, \xi) \in C^{\mu;k}(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$, то функция $\phi \in C^k(D)$ и ее частные производные вычисляются под знаком интеграла:

$$\phi^{(k)}(x) = (-1)^k \int_{\mathbb{R}} Q_\xi^{(k)}(t, te - x)dt. \quad (2.3)$$

Здесь как и в теореме 1.1 под $Q_\xi^{(k)}$ понимается любая из частных производных по ξ_1, ξ_2 порядка k и аналогичный смысл имеет $\phi^{(k)}$. С учетом (2.2) и однородности $Q_\xi^{(k)}$ отсюда следует оценка

$$|\phi^{(k)}|_{0, \tilde{D}} \leq C \max_{|t| \leq 1, \xi \in \mathbb{T}} |Q_\xi^{(k)}(t, \xi)|, \quad (2.4)$$

для суп-нормы этих производных в полуплоскости $\tilde{D} \subseteq D$, отстоящей от L на расстоянии 1.

Возникает вопрос, при каких дополнительных условиях функция $\phi^{(k)}$ непрерывно продолжается на замкнутую полуплоскость и принадлежит $C^\mu(\bar{D})$? Исследование этого вопроса опирается на следующие два вспомогательных предложения.

Лемма 2.2. Пусть функция $\phi(x)$ непрерывно дифференцируема в полуплоскости D и ее вектор-градиент ψ' допускает оценку $|\phi'(x)| \leq Mr^{\mu-1}$, где r означает расстояние от точки x до прямой L . Тогда она удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ , причем $[\phi]_{\mu, D} \leq 4M/\mu$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что D совпадает с полуплоскостью $\{x_2 > 0\}$. В этом случае, очевидно, $r = x_2$. Положим $\varphi(s) = \phi(t_0 \pm s, s)$, $s > 0$, где $t_0 \in \mathbb{R}$ и один из знаков фиксированы. По предположению леммы $|\varphi'(s)| \leq 2Ms^{\mu-1}$, так что

$$|\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| \leq 2\mu^{-1}M|s_1^\mu - s_2^\mu| \leq 2\mu^{-1}M|s_1 - s_2|^\mu.$$

Пусть теперь x и y — произвольные точки полуплоскости D . Проведем через них прямые, параллельные векторам $e^\pm = (\pm 1, 1)$ и рассмотрим вторую пару противоположных вершин полученного прямоугольника. Одна из этих вершин, которую обозначим z , принадлежит D . Применяя предыдущую оценку к сужению ψ на стороны $[x, z]$ и $[y, z]$ прямоугольника, получим неравенство

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq |\phi(x) - \phi(z)| + |\phi(z) - \phi(y)| \leq 4M\mu^{-1}|x - y|^\mu,$$

где учтено, что $|x - z|$ и $|y - z|$ не превосходят $|x - y|$.

Из леммы, в частности, следует, что функция ϕ непрерывно продолжима на замкнутую полуплоскость \bar{D} . Поэтому при дополнительном требовании ограниченности она принадлежит пространству $C^\mu(\bar{D})$. Заметим, что ограниченность ϕ достаточно потребовать в полуплоскости $\tilde{D} \subseteq D$, отстоящей от прямой L на расстоянии 1, соответственно равенство

$$|\phi| = |\phi|_{0, \tilde{D}} + [\phi]_{\mu, D} \quad (2.5)$$

определяет эквивалентную норму в пространстве $C^\mu(\bar{D})$.

Лемма 2.3. Пусть функция $P(t, \xi) \in C^{k, \mu; 0}(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ однородна степени $-k - 2$ по ξ и удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{R}} t^i P(t_0, te - x)dt = 0, \quad x \in D, \quad (2.6)$$

для любых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $i = 0, 1, \dots, k$. Тогда интеграл

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} P(t, te - x)dt, \quad x \in D,$$

допускает оценку

$$|\psi(x)| \leq Cr^{\mu-1}|P|_{C^{k, \mu; 0}},$$



где r означает расстояние от точки x до прямой L и постоянная $C > 0$ зависит только от μ и k .

Доказательство. Запишем формулу Тейлора

$$P(t, \xi) = \sum_{i=0}^k \frac{(t-t_0)^i}{i!} P_t^{(i)}(t_0, \xi) + \Delta(t, \xi) \quad (2.7)$$

с остаточным членом

$$\Delta(t, \xi) = \int_{t_0}^t \frac{(s-t_0)^{k-1}}{(k-1)!} [P^{(k)}(s, \xi) - \tilde{P}^{(k)}(t_0, \xi)] ds.$$

Очевидно, функция $\Delta(t, \xi)$ однородна степени $-m-2$ по ξ и допускает оценку

$$|\Delta(t, \xi)| \leq C_1 |P|_{C^{k, \mu; 0}} |t-t_0|^{k+\mu}, \quad \xi \in \mathbb{T},$$

где постоянная C_1 зависит только от k и μ . Согласно (2.6), (2.7) имеем равенство

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} \Delta(t, te-x) dt,$$

что приводит к оценке

$$|\psi(x)| \leq C_1 |P|_{C^{k, \mu; 0}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|t-t_0|^{m+\mu}}{|te-x|^{k+2}} dt. \quad (2.8)$$

До сих пор $t_0 \in \mathbb{R}$ в этих рассуждениях было произвольным. Пусть t_0 таково, что точка $t_0 e$ является проекцией x на прямую L , тогда $|te-x|^2 = r^2 + |t-t_0|^2$, где r есть расстояние от x до прямой L . В результате интеграл в (2.8) переписется в форме

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|t-t_0|^{k+\mu}}{|te-x|^{k+2}} dt = 2r^{\mu-1} \int_0^{\infty} \frac{s^{k+\mu} ds}{(s^2+1)^{k/2+1}},$$

что завершает доказательство леммы.

Обратимся к функции (2.1) в полуплоскости D , лежащей слева от L . Наряду с ней введем в рассмотрение сингулярный интеграл

$$\phi^*(t_0 e) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|t-t_0| \geq \varepsilon} Q(t, te-t_0 e) \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{Q(t, e) \varphi(t) dt}{t-t_0}, \quad (2.9)$$

где принято во внимание свойство нечетности функции Q . Этот интеграл всегда существует, поскольку по предположению функция $Q(t, \xi) \varphi(t) \in C^{\mu, 0}(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ и, значит,

$$|Q(t, e) \varphi(t) - Q(t_0, e) \varphi(t_0)| \leq C |t-t_0|^\mu. \quad (2.10)$$

Сформулируем теперь основной результат относительно граничных свойств функции ϕ и ее производных.

Теорема 2.1 Пусть ядро $Q(t, \xi) \in C^{n, \mu; n+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$, $n \geq 0$, однородно степени -1 и нечетно по ξ , а функция $\varphi \in C^{n, \mu}(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию (2.2). Тогда функция ϕ непрерывно продолжима с полуплоскости D на ее замыкание, принадлежит пространству $C^{n, \mu}(\bar{D})$ и допускает оценку

$$|\phi|_{C^{n, \mu}} \leq C |Q|_{C^{n, \mu; n+1}} |\varphi|_{C^{n, \mu}}, \quad (2.11)$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от n и μ .

Предельные значения $\phi^+(t_0 e) = \lim \phi(x)$ при $x \rightarrow t_0 e$, $x \in D$, связаны с сингулярным интегралом (2.9) соотношением

$$\phi^+(t_0 e) = \sigma[Q(t_0, \xi); e] \varphi(t_0) + \phi^*(t_0 e), \quad (2.12)$$



Доказательство. Зафиксируем $0 \leq k \leq n$ и рассмотрим функцию $P(t, \xi) = Q_\xi^{(k+1)}(t, \xi)\varphi(t)$. По условию она принадлежит классу $C^{k, \mu; 0}$, причем

$$|P|_{C^{k, \mu; 0}} \leq C|Q|_{C^{n, \mu; n+1}}. \quad (2.13)$$

Кроме того, на основании теоремы 1.1 она удовлетворяет условию (2.6). Поэтому к $\psi = \phi^{(k+1)}$ можем применить лемму 2.3. Следовательно, функция $[\phi^{(k)}]' = \phi^{(k+1)}$ удовлетворяет условию леммы 2.2, на основании которой приходим к оценке

$$[\phi^{(k)}]_{\mu, D} \leq C_k |Q_\xi^{(k+1)}|_{C^{k, \mu; 0}}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

С учетом (2.4) левую часть здесь можно заменить нормой (2.5) в пространстве $C^\mu(\overline{D})$. В соединении с (2.13) отсюда следует оценка (2.11).

Обратимся к обоснованию формулы (2.12). В силу уже доказанной непрерывности функции ϕ в замкнутой полуплоскости \overline{D} ее предельное значение $\phi^\pm(t_0e)$ можно определять вдоль прямой L^0 , ортогональной L и проходящей через точку t_0e . В этом случае, очевидно,

$$|te - x| \geq |t - t_0|, \quad x \in L^0. \quad (2.14)$$

В силу (2.2) интегрирование в (2.1) для $x \in L^0$ и в (2.9) можно вести по $|t - t_0| \leq R = 1 + |t_0|$. Рассмотрим в полуплоскости D функции

$$\psi_0(x) = \int_{|t-t_0| \leq R} Q(t_0, te - x)\varphi(t_0)dt, \quad \psi_1(x) = \int_{|t-t_0| \geq R} Q(t_0, te - x)\varphi(t_0)dt.$$

Последний интеграл здесь понимается как сингулярный на бесконечности, его существование обосновывается аналогично теореме 1.1. Из этой теоремы также следует, что сумма $\psi_0 + \psi_1$ в полуплоскости D тождественно равна $\sigma[Q(t_0, \xi); e]$. Как и при доказательстве соотношения (1.7) теоремы 1.1 убеждаемся, что в выражении $\psi_1(x)$ можно перейти к пределу при $x \rightarrow t_0e$ под знаком интеграла, который в силу нечетности функции Q равен нулю. Поэтому

$$\psi_0^+(t_0e) = \sigma[Q(t_0, \xi); e]\varphi(t_0). \quad (2.15)$$

С другой стороны, на основании (2.10), (2.14) и теоремы Лебега о мажорированной сходимости в выражении

$$\phi(x) - \psi_0(x) = \int_{|t-t_0| \leq R} [Q(t, te - x)\varphi(t) - Q(t_0, te - x)\varphi(t_0)]dt$$

можно перейти к пределу при $x \rightarrow t_0e$, $x \in L^0$, под знаком интеграла. Поэтому

$$\phi^+(t_0e) - \psi_0^+(t_0e) = \int_{|t-t_0| \leq R} \frac{Q(t, e)\varphi(t) - Q(t_0, e)\varphi(t_0)}{t - t_0} dt.$$

Очевидно, интеграл здесь совпадает с сингулярным интегралом (2.9), так что совместно с (2.15) в результате приходим к справедливости формулы (2.12).

Теорему 2.1 дополним случаем, когда ядро $Q(t, \xi) = Q(x, t, \xi)$ зависит от $x \in \overline{D}$, так что (2.1) переходит в интеграл

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}} Q(x, t, te - x)\varphi(t)dt, \quad x \in D. \quad (2.16)$$

Соответственно этому запишется и сингулярный интеграл (2.9):

$$\phi^*(t_0e) = \int_{\mathbb{R}} \frac{Q(t_0e, t, e)\varphi(t)dt}{t - t_0}.$$

Теорема 2.2 Пусть выполнены условия теоремы 2.1 с той разницей, что $Q(x, t, \xi) \in C^{n, \nu; n+1}[(\overline{D} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{T}]$, $0 < \mu < \nu$. Тогда функция ϕ принадлежит пространству $C^{n, \mu}(\overline{D})$ с соответствующей оценкой

$$|\phi|_{C^{n, \mu}} \leq C|Q|_{C^{n, \nu; n+1}}|\varphi|_{C^{n, \mu}}, \quad (2.17)$$

для ее нормы и справедлива формула (2.12) для ее предельных значений.



Доказательство. Рассмотрим сначала случай интеграла

$$\psi(u, x) = \int_{\mathbb{R}} Q(u, t, te - x)\varphi(t)dt, \quad x \in D, \quad (2.18)$$

когда ядро $Q(t, \xi) = Q(u, t, \xi)$ зависит от некоторого параметра $u \in G \subseteq \mathbb{R}^s$ и принадлежит классу $C^{0,n,\nu;n+1}[(G \times \mathbb{R}) \times \mathbb{T}]$. Покажем, что функция $\psi(u, x)$ принадлежат пространству $C^{0,n,\mu}(G \times \overline{D})$ и справедлива соответствующая оценка ее нормы:

$$|\psi|_{C^{0,n,\mu}} \leq C|Q|_{C^{0,n,\nu;n+1}}|\varphi|_{C^{n,\mu}}. \quad (2.19)$$

Как и в случае теоремы 2.1, достаточно установить аналогичные оценки для полунормы $[\psi_x^{(k)}]_{\mu,G \times D}$, $0 \leq k \leq n$. Поскольку $[\psi]_{\mu,G \times D} \leq [\psi]_{\mu,G} + [\psi]_{\mu,D}$ и на основании теоремы 2.1 оценка (2.19) справедлива для полунормы $[\psi_x^{(k)}]_{\mu,P}$. Поэтому дело сводится к доказательству соответствующей оценки для $[\psi_x^{(m)}]_{\mu,G}$.

Зафиксируем $\varepsilon = \min(\nu - \mu, \mu)$, точки $u', u'' \in G$, $u' \neq u''$, и рассмотрим функцию

$$\tilde{\psi}(x) = \frac{\psi(u', x) - \psi(u'', x)}{|u' - u''|^\mu},$$

которая определяется аналогично (2.1) по отношению к ядру

$$\tilde{Q}(t, \xi) = [Q(u', t, \xi) - Q(u'', t, \xi)]|u' - u''|^{-\mu}.$$

На основании леммы 1.2 функция \tilde{Q} принадлежит пространству $C^{n,\varepsilon;0}(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ и ее норма оценивается через норму $|Q|$ пространства $C^{0,n,\nu;n+1}[(G \times \mathbb{R}) \times \mathbb{T}]$ равномерно по u', u'' . Поэтому функции $\tilde{\psi}$ можем применить теорему 2.1, в которой μ следует заменить на ε .

На основании этой теоремы получаем, в частности, оценку вида (2.19) для суп-нормы функции $\tilde{\psi}$, равномерную по $u', u'' \in G$. Остается заметить, что верхняя грань по $u', u'' \in G$ левой части этой оценки совпадает с $[\psi_x^{(m)}]_{\mu,G}$.

Пусть далее G является замкнутой областью и ядро Q принадлежит классу $C^{n,n,\nu;n+1}[(G \times \mathbb{R}) \times \mathbb{T}]$. Тогда при $0 \leq k \leq n$ функция $\psi_u^{(k)}$, определяемая по $Q_u^{(k)}$, аналогично (2.18) удовлетворяет условиям рассмотренного выше случая, в которых n следует заменить на $n-k$. В частности, для нее справедлива оценка (2.19). Следовательно, исходная функция $\psi(u, x)$ принадлежат пространству $C^{n,\mu}(G \times \overline{D})$, и справедлива соответствующая оценка ее нормы. Поскольку при $G = \overline{D}$ функция $\psi(x, x)$ совпадает с (2.16), отсюда следует справедливость первого утверждения теоремы.

Что касается формулы (2.12) для предельных значений, то эта формула, очевидно, справедлива для предельных значений $\psi^+(u, t_0e)$ интеграла (2.18) с соответствующим коэффициентом $\sigma[Q(u, t_0, \xi); e]$ и сингулярным интегралом $\phi^*(u, t_0e)$. В случае $G = \overline{D}$ на основании леммы 1.3 в этой формуле можно перейти к пределу при $u \rightarrow t_0e$. В соответствии с равенством $\psi(x, x) = \phi(x)$ в результате приходим к формуле (2.12) и для функции (2.16).

Заметим, что в силу леммы 1.3 в условиях теоремы 2.2 функция $\sigma[Q(t_0e, t_0, \xi); e]$ принадлежит классу $C^{n,\nu-0}(\mathbb{R})$. Поэтому формула (2.12) показывает, что первая часть теоремы 2.3 справедлива и для сингулярного интеграла $\phi^*(t_0e)$. Удобно эту теорему переформулировать по отношению к сингулярному интегралу непосредственно.

Теорема 2.3 Пусть $k(t_0, t) \in C^{n,\nu}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, функция $\varphi \in C^{n,\mu}(\mathbb{R})$, $0 < \mu < \nu$, и удовлетворяет условию (2.2). Тогда функция ψ , определяемая сингулярным интегралом

$$\psi(t_0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{k(t_0, t)\varphi(t)}{t - t_0} dt, \quad (2.20)$$

принадлежит $C^{n,\mu}(\mathbb{R})$ и справедлива оценка

$$|\psi|_{C^{n,\mu}} \leq |k|_{C^{n,\nu}}|\varphi|_{C^{n,\mu}}.$$



Отметим, что при $n \geq 1$, аналогично лемме 1.3, обосновывается формула дифференцирования

$$\psi'(t_0) = - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t_0} [k(t_0, t_0 - t) \varphi(t_0 - t)] \frac{dt}{t}$$

сингулярного интеграла (2.20), или, в развернутой форме,

$$\psi'(t_0) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial k}{\partial t_0} + \frac{\partial k}{\partial t} \right) (t_0, t) \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt + \int_{\mathbb{R}} \frac{k(t_0, t) \varphi'(t)}{t - t_0} dt. \quad (2.21)$$

Из этой формулы, в частности, следует, что случай $n \geq 1$ теоремы 2.3 является следствием $n = 0$.

3. ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА В ГЛАДКИХ ОБЛАСТЯХ

Напомним, что гладкая дуга Γ на плоскости \mathbb{R}^2 определяется как образ непрерывно дифференцируемой вектор-функции $x = \gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, которая взаимно однозначна и производная которой $\gamma'(t) \neq 0$ для всех t . Эта функция является (гладкой) параметризацией этой дуги. Точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ определяют концы дуги, остальные точки Γ называются внутренними. Очевидно, параметризация задает ориентацию дуги, т.е. естественный порядок следования точек, определяемый параметром. Если, наоборот, указана ориентация дуги, то каждая ее параметризация либо меняет, либо сохраняет эту ориентацию.

Элемент длины дуги с помощью параметризации γ определяется равенством $ds = |\gamma'(t)| dt$. Соответственно интеграл от функции φ на Γ вычисляется по формуле

$$\int_{\Gamma} \varphi(y) ds_y = \int_a^b \varphi[\gamma(t)] |\gamma'(t)| dt.$$

В частности, при $\varphi = 1$ получим длину l всей кривой.

Очевидно, если вещественная функция $f \in C^1[c, d]$ имеет своим образом $[a, b]$, причем f взаимно однозначна и $f'(t) \neq 0$, $c \leq t \leq d$, то функция $\alpha = \gamma \circ f$ будет также гладкой параметризацией дуги Γ . Функцию f можно подобрать так, чтобы $|\alpha'| \equiv 1$. Условимся параметризацию $y = \alpha(s)$ дуги Γ называть естественной, если ее производная α' по модулю тождественно равна единице. Этот термин используем и по отношению к параметру s . Очевидно, любые два естественных параметра отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

По определению заданная на Γ функция $\varphi(y)$ непрерывно дифференцируема, если она обладает этим свойством как функция естественного параметра. Соответственно ее производная $\varphi' = \varphi'_s$ как функция на Γ непрерывна, она может быть определена также равенством

$$\varphi'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0, y \in \Gamma} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{\pm |y - y_0|}, \quad (3.1)$$

где верхний (нижний) знак соответствует точкам y , лежащим слева (справа) от y_0 .

Если $y = (y_1, y_2)$ рассматривать как вектор-функцию на Γ , то, очевидно, эта функция непрерывно дифференцируема и ее производная

$$e(y) = (y|_{\Gamma})' \quad (3.2)$$

представляет собой непрерывно меняющийся единичный касательный вектор на Γ . Ясно, что он определяется однозначно по ориентируемой кривой Γ .

Пример непрерывно дифференцируемой вещественной функции доставляет обращение гладкой параметризации γ дуги, т.е. функция $t = \varphi(y)$, обратная к $y = \gamma(t)$. Ее производная $\varphi'(y) = 1/|\gamma'(t)|$ всюду положительна. Верно и обратное — любая функция $t = \varphi(y) \in C^1(\Gamma)$, производная которой всюду отлична от нуля, определяет гладкую параметризацию. В соответствии с этим ее называем гладким параметром. Гладкий параметр можно вводить и в окрестности фиксированной точки $\tau \in \Gamma$, когда выполнено лишь условие $\varphi'(\tau) \neq 0$. Рассмотрим два типичных параметра этого типа.

В точке τ одна из координат единичного вектора (3.2) отлична от нуля. Если $e_j(\tau) \neq 0$, то декартова координата y_j как функция на Γ является гладким параметром в окрестности точки τ . Следовательно, в этой окрестности Γ является графиком некоторой непрерывно дифференцируемой вещественной



функции h . Другими словами, существуют такие $\delta > 0$, $a \in \mathbb{R}$ и функция $h \in C^1[a - \delta, a + \delta]$, что гладкая дуга $\Gamma(\tau, \delta)$, описываемая соответствующим уравнением

$$\begin{cases} y_2 = h(y_1), |y_1 - a| \leq \delta, \} & e_1(\tau) \neq 0, \\ \{y_1 = h(y_2), |y_2 - a| \leq \delta, \} & e_2(\tau) \neq 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

содержится в Γ , причем τ является ее внутренней точкой. При достаточно малом δ пересечение Γ с соответствующей окрестностью в точности совпадает с этой дугой:

$$\Gamma(\tau, \delta) = \Gamma \cap U(\tau, \delta), \quad (3.4)$$

где $U(\tau, \delta) = \{|y_1 - a| \leq \delta, |y_2 - h(y_1)| \leq \delta\}$ при $e_1(\tau) \neq 0$ и $U(\tau, \delta) = \{|y_2 - a| \leq \delta, |y_1 - h(y_2)| \leq \delta\}$ при $e_2(\tau) \neq 0$. В самом деле, если $\Gamma(\tau, \delta_0)$ имеет тот же смысл, что и выше, то достаточно $\delta < \delta_0$ выбрать так, чтобы множество $U(\tau, \delta)$ не пересекалось с $\Gamma \setminus \Gamma(\tau, \delta)$.

Рассмотрим на Γ функцию $r = \pm|y - \tau|$, где верхний (нижний) знак соответствует точкам $y \in \Gamma$, лежащим справа (слева) от τ . Эта функция непрерывно дифференцируема и ее производная дается равенством

$$r' = \pm \frac{(y - \tau)e(y)}{|y - \tau|},$$

где числитель представляет собой скалярное произведение векторов $y - \tau$ и $e(y)$. В частности, $r'(\tau) = 1$ и, значит, в окрестности τ функция r является гладким параметром. Следовательно, существуют такие $\delta > 0$ и вектор-функция $\omega(r) \in C[-\delta_0, \delta_0]$, непрерывно дифференцируемая при $r \neq 0$, что $|\omega(r)| \equiv 1$, $\omega(0) = e(\tau)$, $r\omega'(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ и гладкая дуга Γ_τ , описываемая уравнением $y = \tau + r\omega(r)$, $|r| \leq \delta$, содержится в Γ . Очевидно, функция $\gamma(r) = \tau + r\omega(r)$ является ее гладкой параметризацией со свойством $|\gamma(r) - \tau| \equiv |r|$, параметризации такого типа называем радиальными (с центром в точке τ). Как и выше убеждаемся, при достаточно малом δ пересечение Γ с кругом $|y - \tau| \leq \delta$ совпадает с Γ_τ .

Условимся вектор-функцию $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in C^1(\Gamma)$ называть сдвигом, если ее производная α' всюду отлична от нуля. В этом случае, очевидно, образ $\Gamma_1 = \alpha(\Gamma)$ является гладкой дугой, а обратное отображение α^{-1} есть также сдвиг. В этом смысле гладкая параметризация и обратное к ней отображение являются сдвигами.

Введем класс $C^{n,\mu}$, $n \geq 1, 0 \leq \mu \leq 1$, гладких дуг, считая по определению принадлежащими этому классу их естественные параметризации. Дуга, принадлежащая классу $C^{1,\mu}$ при некотором μ , называется ляпуновской. На дугах $\Gamma \in C^{n,\mu}$ по отношению к естественному параметру определяется и аналогичный класс функций $C^{n,\mu}(\Gamma)$. Это определение равносильно тому, что $\varphi, \varphi' \in C^{n-1,\mu}(\Gamma)$. Последнее условие можно принять за индуктивное определение класса $C^{n,\mu}$. В частности, по отношению к единичному касательному вектору (3.2) условие $\Gamma \in C^{n,\mu}$ равносильно $e \in C^{n-1,\mu}(\Gamma)$. Ясно также, что если дуга и заданный на ней сдвиг α принадлежат классу $C^{n,\mu}$, то образ $\alpha(\Gamma)$ будет дугой того же класса, а обратное отображение принадлежит классу $C^{n,\mu}$ на этой дуге. Этот факт проще всего установить индукцией по n . Из этих же соображений для дуги $\Gamma \in C^{n,\mu}$ функция h в (3.3) принадлежит классу $C^{n,\mu}[a - \delta, a + \delta]$.

Наряду с гладкими дугами важную роль будут играть и гладкие контуры. По определению простой гладкий контур есть образ непрерывно дифференцируемой на единичной окружности \mathbb{T} вектор-функции, которая взаимно однозначна и производная которой всюду отлична от нуля. Производная здесь определяется аналогично (3.1) или, что равносильно, по отношению к угловой координате точки на окружности. Объединение конечного числа попарно непересекающихся простых контуров дает составной контур. На таком контуре Γ можно ввести локальный естественный параметр длины дуги и производную можно понимать по отношению к этому параметру. Соответственно вводится и класс непрерывно дифференцируемых функций. Ясно, что производная функции $\varphi \in C^1(\Gamma)$ может быть определена и равенством (3.1). Понятие сдвига контуров совершенно аналогично случаю дуг. Точно также определяются классы $C^{n,\mu}$ контуров и функций на этих контурах.

Рассмотрим теперь (конечную или бесконечную) область D , ограниченную контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$. Контур ориентируем положительно по отношению к D , т.е. эта область остается слева. Соответ-



ственно этой ориентации понимается касательный вектор (3.2) и граничные значения $\phi^+(y_0)$, $y_0 \in \Gamma$, функций $\phi \in C(\overline{D})$.

Рассмотрим в области D интеграл

$$\phi(x) = \int_{\Gamma} Q(x, y, y-x)\varphi(y)ds_y, \quad x \in D, \quad (3.5)$$

где ядро Q нечетно и однородно степени -1 по ξ . Функции $\phi(x)$ соответствует на Γ сингулярный интеграл

$$\phi^*(y_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma \cap \{|y-y_0| \geq \varepsilon\}} Q(y_0, y, y-y_0)\varphi(y)ds_y, \quad y_0 \in \Gamma. \quad (3.6)$$

Убедимся, что в предположении $Q(x, y, \xi) \in C^{\mu;1}[(\overline{D} \times \Gamma) \times \mathbb{T}]$, $\varphi \in C^{\mu}(\Gamma)$, $\Gamma \in C^{1,\mu}$ этот интеграл всегда существует.

Доказательство основывается на следующем замечании. Пусть точки $y_{\varepsilon}^{\pm} \in \Gamma$ лежат по разные стороны от y_0 , и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1}|t_{\varepsilon}^{\pm} - t_0| = 1. \quad (3.7)$$

Малую дугу с концами в этих точках обозначим Γ_{ε} . Тогда предел (3.6) и аналогичный предел интегралов по $\Gamma \setminus \Gamma_{\varepsilon}$ существуют одновременно.

В самом деле, подинтегральное выражение $\psi(y) = Q(y_0, y, y-y_0)\varphi(y)$ в окрестности y_0 допускает оценку $|\psi(y)| \leq C|y-y_0|^{-1}$. Поэтому, переходя к радиальному параметру r с центром в точке y_0 , получим оценку

$$\left| \int_{\Gamma \cap \{|y-y_0| \geq \varepsilon\}} \psi(y)dr - \int_{\Gamma \setminus \Gamma_{\varepsilon}} \psi(y)dr \right| \leq C_1 \max_{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{r_{\varepsilon}^{\pm}} \frac{dr}{r}, \quad r_{\varepsilon}^{\pm} = |t_{\varepsilon}^{\pm} - t_0|.$$

Совместно с (3.7) отсюда следует справедливость высказанного утверждения.

С помощью этого замечания на сингулярный интеграл легко распространяется формула замены переменных

$$\int_{\alpha(\tilde{\Gamma})} \psi(y)ds_y = \int_{\tilde{\Gamma}} \psi[\alpha(t)]|\alpha'(t)|ds_t, \quad (3.8)$$

где $\alpha : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ является сдвигом (дуги или контура) $\tilde{\Gamma}$, причем точка y_0 лежит внутри $\alpha(\tilde{\Gamma})$. В частности, если $\tilde{\Gamma}$ есть отрезок $I = [-1, 1]$ действительной оси и $\alpha(0) = y_0$, то в рассматриваемом случае сингулярного интеграла (3.6) можем записать

$$\phi^*(y_0) = \int_I \frac{f(t)}{t} dt, \quad f(t) = Q \left[\alpha(0), \alpha(t), \frac{\alpha(t) - \alpha(0)}{t} \right] |\alpha'(t)|\varphi[\alpha(t)],$$

где принято во внимание нечетность и однородность степени -1 функции Q по ξ . По предположению $\Gamma \in C^{1,\mu}$, и, значит, функцию α можно выбрать в этом же классе. Очевидно, вектор-функция $[\alpha(t) - \alpha(0)]/t = \int_0^1 \alpha'(st)ds$ принадлежит классу $C^{\mu}(I)$ и ее значения лежат в некотором круговом слое $G = \{\delta \leq |x| \leq \delta^{-1}\}$. Поэтому на основании леммы 2.1 (d) функция $f(t) \in C^{\mu}(I)$, и, значит, сингулярный интеграл (3.6) действительно существует.

Теорема 3.1. Пусть ядро $Q(x, y, \xi)$ нечетно и однородно степени -1 по ξ , и для некоторого целого $n \geq 0$ выполнены условия гладкости

$$\Gamma \in C^{n+1,\nu}, \quad Q(x, y, \xi) \in C^{n,\nu;n+1}[(\overline{D} \times \Gamma) \times \mathbb{T}]. \quad (3.9)$$

Тогда для $\varphi \in C^{n,\mu}(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, функция ϕ принадлежит классу $C^{n,\mu}(\overline{D})$ с оценкой

$$|\phi|_{C^{n,\mu}} \leq C|Q|_{C^{n,\nu;n+1}}|\varphi|_{C^{n,\mu}}, \quad (3.10)$$



для ее нормы, где постоянная $C > 0$ зависит только от μ, ν и Γ . Предельные значения ϕ^+ этой функции связаны с сингулярным интегралом (3.6) соотношением

$$\phi^+(y_0) = \sigma(y_0)\varphi(y_0) + \phi^*(y_0), \quad \sigma(y_0) = \sigma[Q(y_0, y_0, \xi); e(y_0)]. \quad (3.11)$$

Доказательство проведем сначала для «криволинейного» варианта теоремы 2.3, когда роль прямой L играет график $\Gamma : y_2 = h(y_1)$ функции $h \in C^{n+1, \nu}(\mathbb{R})$, определяющий область $D = \{x_2 > h(x_1)\}$. Параметрически Γ задается уравнением $y = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2(t) = h(t)$. Требуется установить оценку (3.11) и формулу (3.12) для интеграла (3.5), взятого по данной бесконечной кривой, где плотность $\varphi \in C^{n, \mu}(\Gamma)$ имеет компактный носитель, т.е. для некоторого фиксированного $R > 0$ выполняется условие $\varphi(y) = 0$, $|y| \geq R$.

Рассмотрим преобразование $x = \alpha(\tilde{x})$ плоскости на себя по формуле $x_1 = \tilde{x}_1$, $x_2 = h(\tilde{x}_1) + \tilde{x}_2$, переводящее прямую $\mathbb{R} : x_2 = 0$ и полуплоскость $\tilde{D} = \{\tilde{x}_2 > 0\}$ на соответственно Γ и D . Очевидно, это отображение и обратное к нему как вектор-функции удовлетворяют условию Липшица, а их производные принадлежат классу $C^{n, \mu}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Поэтому на основании леммы 2.1 (b) оценку (3.11) достаточно установить по отношению к преобразованным функциям $\phi[\alpha(\tilde{x})]$ и $\varphi[\gamma(t)]$, связанных соотношением

$$\phi[\alpha(\tilde{x})] = \int_{\mathbb{R}} Q[\alpha(\tilde{x}), \gamma(t), \gamma(t) - \alpha(\tilde{x})] \varphi[\gamma(t)] |\gamma'(t)| dt, \quad \tilde{x}_2 > 0. \quad (3.12)$$

По условию $h \in C^{n+1, \nu}(\mathbb{R})$, так что матрица-функция

$$A(t, s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a(t, s) & 1 \end{pmatrix}, \quad a(t, s) = \frac{h(t) - h(s)}{t - s},$$

принадлежит классу $C^{n, \nu}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Аналогичный вид имеет и обратная матрица с заменой a на $-a$, поэтому найдется такое $\delta > 0$, что выполнены оценки

$$\delta |\xi| \leq |A(t, s)\xi| \leq \delta^{-1} |\xi|, \quad \xi \in \mathbb{R}^2. \quad (3.13)$$

При фиксированных t и s линейное преобразование $\xi \rightarrow A(t, s)\xi$ плоскости на себя обратимо и не меняет ее ориентации, при этом $\gamma(t) - \alpha(\tilde{x}) = A(t, \tilde{x}_2)(t\tilde{e} - \tilde{x})$ с единичным вектором $\tilde{e} = (1, 0)$, касательным к прямой \mathbb{R} . Соответственно этому (3.12) можем переписать в форме

$$\phi[\alpha(\tilde{x})] = \int_{\mathbb{R}} \tilde{Q}(\tilde{x}, t, t\tilde{e} - \tilde{x}) \varphi[\gamma(t)] |\gamma'(t)| dt, \quad \tilde{Q}(\tilde{x}, t, \xi) = Q[\alpha(\tilde{x}), \gamma(t), A(t, \tilde{x}_2)\xi]. \quad (3.14)$$

Из (3.13) и леммы 2.1 следует, что функция \tilde{Q} удовлетворяет условиям гладкости теоремы 2.3, т.е. принадлежит классу $C^{n, \nu; n+1}$. Поэтому на основании этой теоремы приходим к справедливости оценки (3.11).

Согласно формуле замены переменных (3.8), справедливой и для сингулярного интеграла (3.6), имеем:

$$\phi^*[\gamma(t_0)] = \int_{\mathbb{R}} Q[\gamma(t_0), \gamma(t), \gamma(t) - \gamma(t_0)] \varphi[\gamma(t)] |\gamma'(t)| dt.$$

Поскольку $\gamma(t) = \alpha(t\tilde{e})$, аналогично (3.13), это равенство можем записать в форме

$$\phi^*[\gamma(t_0)] = \int_{\mathbb{R}} \tilde{Q}(t_0\tilde{e}, t_0, t\tilde{e} - t_0\tilde{e}) \varphi[\gamma(t)] |\gamma'(t)| dt.$$

Поэтому формула (2.12), примененная к последнему интегралу, дает соотношение

$$\phi^+[\gamma(t_0)] = \sigma[\tilde{Q}(t_0\tilde{e}, t_0, \xi), \tilde{e}] \varphi[\gamma(t_0)] |\gamma'(t_0)| + \phi^*[\gamma(t_0)]. \quad (3.15)$$

Из определения матрицы A видно, что $A(t_0, t_0)\tilde{e} = \gamma'(t_0)$. Очевидно, $\gamma'(t_0)/|\gamma'(t_0)|$ представляет собой единичный касательный вектор $e[\gamma(t_0)]$ к Γ в точке $\gamma(t_0)$. Поэтому на основании (1.10) имеем:

$$\sigma[\tilde{Q}(t_0\tilde{e}, t_0, \xi), \tilde{e}] |\gamma'(t_0)| = \sigma\{Q[\gamma(t_0), \gamma(t_0)], e[\gamma(t_0)]\}.$$



Следовательно, при подстановке γ формула (3.11) переходит в (3.15). Тем самым «криволинейный» вариант теоремы 2.3 установлен полностью.

Случай области $D = \{x_2 < h(x_1)\}$ рассматривается аналогично. Это же относится и к ситуации, когда Γ является графиком вида $x_1 = h(x_2)$.

Обратимся к случаю конечной гладкой области D теоремы. Из (3.9) и леммы 2.1 следует, для любого компакта $K \subseteq D$ функция $k(x, y) = Q(x, y, y - x) \in C^{m, \nu}(K \times \Gamma)$. По этой же причине, если для некоторого $\varepsilon > 0$ ядро Q удовлетворяет условию

$$Q(x, y, \xi) = 0 \quad \text{при} \quad |y - x| \geq \varepsilon, \xi \in \mathbb{T}, \quad (3.16)$$

то $k(x, y) = Q(x, y, y - x) \in C^{m, \nu}(\bar{D} \times \Gamma)$. В этом случае утверждения теоремы очевидны с $\sigma(y) = 0$ в (3.11).

Указанное замечание позволяет локализовать теорему по отношению к окрестности фиксированной точки $\tau \in \Gamma$. Напомним, что в некоторой окрестности U точки τ контур Γ может быть задан уравнением $x_2 = h(x_1)$ или $x_1 = h(x_2)$ соответственно случаям $e_1(\tau) \neq 0$ или $e_2(\tau) \neq 0$. При этом указанную окрестность можно выбрать в форме (3.3). В силу (3.9) вещественная функция h здесь принадлежит классу $C^{m+1, \mu}$. Можно также считать, что этим уравнением описывается и дуга $\Gamma(\tau, \delta) = \Gamma \cap U(\tau, \delta)$. Покроем контур Γ конечным числом таких окрестностей $U_i = U(\tau_i, \delta_i)$, $i = 1, \dots, m$ и рассмотрим разбиение единицы $\chi_i(x) \in C_0^\infty(U_i)$, вписанное в это покрытие. Другими словами, функции χ_i неотрицательны, и их сумма тождественно равна 1 на Γ . Выберем еще срезывающую функцию $\chi_i^1(x) \in C_0^\infty(U_i)$, тождественно равную 1 в окрестности носителя функции χ_i . Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$[1 - \chi_i^1(x)]\chi_i(y) = 0 \quad \text{при} \quad |y - x| \geq \varepsilon. \quad (3.17)$$

Запишем

$$Q(x, y, \xi) = \sum_1^m \chi_j^1(x)Q(x, y, \xi)\chi_j(y) + \sum_1^m [1 - \chi_j^1(x)]Q(x, y, \xi)\chi_j(y).$$

В силу (3.17) слагаемые второй суммы удовлетворяют условию (3.16). Поэтому теорему достаточно установить по отношению к каждому слагаемому первой суммы в отдельности. Итак, опуская индекс j в обозначениях, дело сводится к интегралу

$$\phi(x) = \int_{\Gamma} \chi^1(x)Q(x, y, y - x)\chi(y)\varphi(y)ds_y, \quad x \in D, \quad (3.18)$$

где $\chi, \chi^1 \in C_0^\infty(U)$ в окрестности U вида (3.3) фиксированной точки $\tau \in \Gamma$ и подчинены условию $\chi(y)\chi^1(y) = \chi(y)$.

Пусть U определяется первым равенством в (3.3), так что дуга $\Gamma(\tau) = \Gamma \cap U$ описывается уравнением $y_2 = h(y_1)$, $|y_1 - a| \leq \delta$. Не ограничивая общности можно считать, что $U \cap D$ описывается неравенством $y_2 > h(y_1)$, $|y_1 - a| \leq \delta$. В силу равенства $\chi\chi^1 = \chi$ множитель $\chi^1(y)$ можно ввести под знак интеграла (3.18). В частности, обозначая $\chi^1\varphi$ снова через φ , можно считать, что функция φ обращается в нуль в окрестности концов дуги $\Gamma(\tau)$. Продолжим функцию h , определяющую эту дугу, на всю прямую с сохранением ее гладкости до функции $\tilde{h} \in C^{m+1, \mu}(\mathbb{R})$. Данная функция определяет бесконечную кривую $y_2 = \tilde{h}(y_1)$, которую обозначим $\tilde{\Gamma}$. Соответственно область $\tilde{D} = \{y_2 > \tilde{h}(y_1)\}$ лежит слева от этой кривой, ориентированной параметром y_1 , и содержит исходную область D . Продолжая φ нулем на $\tilde{\Gamma}$, интеграл (3.18) можем брать по $\tilde{\Gamma}$. В результате теорема сводится к рассмотренному выше «криволинейному» варианту теоремы 2.3.

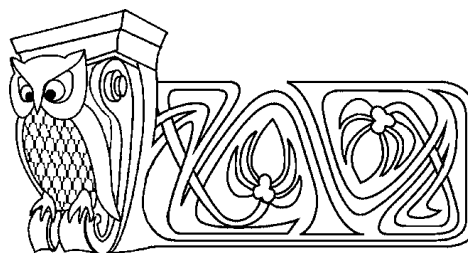
Библиографический список

1. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
2. Миранда К. Уравнения с частными производными из эллиптического типа. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.



УДК 539.374

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБ С УЧЕТОМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ДЛЯ МАТЕРИАЛОВ СО СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИЕЙ



А. Н. Спорыхин, Д. В. Гоцев¹, Л. Г. Плотников

Воронежский государственный университет,
кафедра теоретической и прикладной механики;

¹Военный авиационный инженерный университет, Воронеж,
кафедра математики

E-mail: pmmdeans@main.vsu.ru, rbgotsev@mail.ru,
lavra_net@mail.ru

В рамках метода малого параметра исследуется поле напряжений весомой цилиндрической трубы при моделировании материала несжимаемой упруговязкопластической средой. Дается оценка влияния на величину пластической зоны физико-механических параметров конструкции.

Ключевые слова: плоская деформация, тензор напряжений, упругость, пластичность, упругопластическая граница, упруговязкопластичность.

Stress of Heavy-Wall Tubing Cylindrical Pipes Taking into Account the Gravity for Materials with Difficult Rheology

A. N. Sporykhin, D. V. Gotsev¹, L. G. Plotnikov

Voronezh State University,

Chair of Applied Mathematics, Computer Sciences and Mechanics;

¹Military aviation engineering university, Voronezh,

Chair of Mathematics

E-mail: pmmdeans@main.vsu.ru, rbgotsev@mail.ru,
lavra_net@mail.ru

Within a method of small parametre the field of stresses of heavy tubing cylindrical pipes is investigated at modelling of a material by the incompressible elastic-is viscous-plastic environment. The estimation of influence on size of a plastic zone physicommechanical design parametres is given.

Key words: plane deformation, tensor of deformation, elasticity, plasticity, elastoplastic line, elastic-is viscous-plasticity.

Известно, что одним из основных факторов, влияющих на распределение поля напряжений в толстостенных конструкциях, является их собственный вес. Поэтому учет силы тяжести при расчете напряженно-деформированного состояния толстостенных сооружений является актуальной задачей. Анализ влияния собственного веса в первом приближении на напряженное состояние толстостенных цилиндрических труб для материалов, обладающих упругопластическими свойствами приведен в работе [1]. В настоящей работе ищется напряженное состояние цилиндрической трубы, находящейся под действием собственного веса при моделировании материала трубы несжимаемой упруговязкопластической средой [2].

В этом случае функция нагружения имеет вид

$$F = \left(S_i^j - c_i^{jp} - \eta \dot{\epsilon}_i^{jp} \right) \left(S_j^i - c_j^{ip} - \eta \dot{\epsilon}_j^{ip} \right), \quad (1)$$

где c — коэффициент упрочнения; k — предел текучести, η — коэффициент вязкости; $S_i^j = \sigma_i^j - \sigma \delta_i^j$ — девиатор тензора напряжений; $\sigma = \sigma_k^k/3$; δ_i^j — символ Кронекера; ϵ_i^j — компоненты тензора деформаций; $\dot{\epsilon}_i^j$ — компоненты тензора скоростей деформаций. Индексы i, j принимают значения от 1 до 3, верхние индексы p или e обозначают величины, относящиеся к пластической или упругой областям соответственно.

Рассмотрим толстостенную трубу с внутренним радиусом a и внешним — b (рис. 1). На внутреннем контуре трубы приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью P_0 , моделирующая собой давление жидкости или газа, на внешнем контуре — нагрузка интенсивностью P .

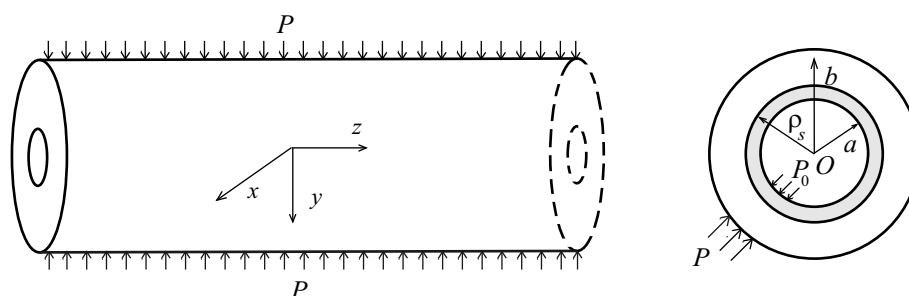


Рис. 1



При нахождении напряженного состояния и радиуса раздела зон упругого и пластического деформирования учитывается влияние силы тяжести. Задача решается в рамках плоскодеформированного состояния.

Уравнения равновесия в декартовой системе координат имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \gamma, \quad (2)$$

где γ — объемная сила.

Частное решение системы уравнений (2) согласно [1] выберем в виде

$$\sigma_x = qy, \quad \sigma_y = \gamma y, \quad \tau_{xy} = 0, \quad (3)$$

где $\gamma, q = \text{const}$.

В полярной системе координат (ρ, θ) уравнения равновесия (2) представимы в форме

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = \gamma \sin \theta, \quad \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = \gamma \cos \theta, \quad (4)$$

частное решение (3) — в форме

$$\sigma_\rho = \frac{q + 3\gamma}{4} \rho \sin \theta + \frac{q - \gamma}{4} \rho \sin 3\theta, \quad \sigma_\theta = \frac{3q + \gamma}{4} \rho \sin \theta - \frac{q - \gamma}{4} \rho \sin 3\theta, \quad (5)$$

$$\tau_{\rho\theta} = \frac{\gamma - q}{4} \rho (\cos \theta - \cos 3\theta),$$

условие пластичности (1) — в форме

$$\left(\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} - c\varepsilon_\rho^p - \eta \dot{\varepsilon}_\rho^p \right)^2 + \left(\tau_{\rho\theta} - c\varepsilon_{\rho\theta}^p - \eta \dot{\varepsilon}_{\rho\theta}^p \right) = 4k^2. \quad (6)$$

Исследуем случай, когда пластическая зона полностью охватывает внутренний контур трубы. При определении напряженного состояния все функции представляются в виде рядов по степеням малого параметра δ , характеризующего отклонение от исходного невозмущенного состояния (от состояния без учета силы тяжести), то есть решение системы (4), (6) ищем в виде [3]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta \sigma_{ij}^{(1)} + \delta^2 \sigma_{ij}^{(2)} + \dots, \quad \rho_s = \rho_s^{(0)} + \delta \rho_s^{(1)} + \delta^2 \rho_s^{(2)} + \dots, \quad (7)$$

где ρ_s — радиус раздела зон упругого и пластического деформирования.

Влияние силы тяжести учтем в первом приближении, положив

$$q = \delta c_1, \quad \gamma = \delta c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const}. \quad (8)$$

В качестве нулевого приближения выберем решение задачи о нахождении напряженно-деформированного состояния толстостенной цилиндрической трубы находящейся под действием сжимающих нагрузок P_0 и P , без учета силы тяжести, которое согласно [2] имеет вид

– в пластической зоне при $(\alpha \leq \rho \leq 1)$

$$\sigma_\rho^p = -P_0 + \frac{4x\mu}{2\mu + c} \left[\frac{c + 2\mu e^{-\xi \cdot t}}{4\mu} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\rho^2} \right) + (1 - e^{-\xi \cdot t}) \ln \frac{\rho}{\alpha} \right],$$

$$\sigma_\theta^p = -P_0 + \frac{4x\mu}{2\mu + c} \left[\frac{c + 2\mu e^{-\xi \cdot t}}{4\mu} \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\rho^2} \right) + (1 - e^{-\xi \cdot t}) \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right], \quad (9)$$

$$\tau_{\rho\theta}^p = 0,$$

где $x = \text{sign}(P_0 - P)$, $\xi = \frac{2\mu + c}{\eta}$.

– в упругой зоне при $(1 \leq \rho \leq \beta)$

$$\sigma_\rho^e = -P + \frac{x}{\beta^2} \left(1 - \frac{\beta^2}{\rho^2} \right), \quad \sigma_\theta^e = -P + \frac{x}{\beta^2} \left(1 + \frac{\beta^2}{\rho^2} \right), \quad \tau_{\rho\theta} = 0. \quad (10)$$

Пластические деформации определяются соотношением

$$\varepsilon_{\theta}^p = -\varepsilon_{\rho}^p = \frac{x(1 - e^{-\xi t})}{2\mu + c} \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right). \quad (11)$$

На упругопластической границе выполняется следующее соотношение для внешних усилий:

$$\left(\frac{1}{\beta^2} + 1 + |P_0 - P| \right) (2\mu + c) - 2\mu + 4\mu \ln \alpha (1 - e^{-\xi t}) - \frac{(2\mu e^{-\xi t} + c)}{\alpha^2} = 0. \quad (12)$$

В (9)–(12) и далее все величины, имеющие размерность напряжения, будем считать безразмерными, отнесенными к величине предела текучести k , все линейные размеры будем считать отнесенными к радиусу пластической зоны в исходном нулевом приближении ρ_s^0 , т. е. $\alpha = \frac{a}{\rho_s^0}$, $\rho = \frac{\rho}{\rho_s^0}$ и $\beta = \frac{b}{\rho_s^0}$.

Согласно (4), (6)–(8) для определения первой итерации первого приближения имеет место система уравнений

$$\frac{\partial \sigma_{\rho(1)}^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta(1)}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{\rho(1)}^{(1)} - \sigma_{\theta(1)}^{(1)}}{\rho} = \gamma \sin \theta, \quad \frac{\partial \tau_{\rho\theta(1)}^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta(1)}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta(1)}^{(1)}}{\rho} = \gamma \cos \theta, \quad (13)$$

$$\sigma_{\rho(1)}^{p(1)} - \sigma_{\theta(1)}^{p(1)} = 2c\varepsilon_{\rho}^{p(0)} + 2\eta\varepsilon_{\rho}^{p(0)}. \quad (14)$$

В (13), (14) и далее нижний индекс в скобках указывает номер итерации, верхний — номер приближения.

Уравнениям равновесия (13) удовлетворим, полагая

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho(1)}^{(1)} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_{(1)}^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi_{(1)}^{(1)}}{\partial \theta^2} + \frac{q + 3\gamma}{4} \rho \sin \theta + \frac{q - \gamma}{4} \rho \sin 3\theta, \\ \sigma_{\theta(1)}^{(1)} &= \frac{\partial^2 \Psi_{(1)}^{(1)}}{\partial \rho^2} + \frac{3q + \gamma}{4} \rho \sin \theta - \frac{q - \gamma}{4} \rho \sin 3\theta, \\ \tau_{\rho\theta(1)}^{(1)} &= -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_{(1)}^{(1)}}{\partial \theta} \right) + \frac{\gamma - q}{4} \rho (\cos \theta - \cos 3\theta), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\Psi_{(1)}^{(1)}$ — функция напряжений Эри, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 \Psi_{(1)}^{(1)}}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_{(1)}^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi_{(1)}^{(1)}}{\partial \theta^2} = \sigma_{\rho(1)}^{p(1)} - \sigma_{\theta(1)}^{p(1)}. \quad (16)$$

Уравнение (16) с учетом (11) и (14) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Psi_{(1)}^{(1)}}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_{(1)}^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi_{(1)}^{(1)}}{\partial \theta^2} = m_1 \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right) + \frac{c_2 - c_1}{2} \rho (\sin \theta - \sin 3\theta), \quad (17)$$

где $m_1 = \frac{2c}{2\mu + c} (1 - e^{-\xi t})$.

Учитывая решение уравнения (17) определим первую итерацию первого приближения для напряжений в пластической области в форме

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho(1)}^{p(1)} &= \frac{m_1}{2} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\rho^2} - 2 \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + c_2 \rho \sin \theta + \frac{C_{11}}{\rho} \sin \theta + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left((-8C_{31} + \sqrt{8}C_{32}) \cos(\sqrt{8} \ln \rho) + (-\sqrt{8}C_{31} - 8C_{32}) \sin(\sqrt{8} \ln \rho) \right) \sin 3\theta, \\ \sigma_{\theta(1)}^{p(1)} &= \frac{m_1}{2} \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\rho^2} - 2 - 2 \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + c_2 \rho \sin \theta + \frac{C_{11}}{\rho} \sin \theta + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left((-8C_{31} + \sqrt{8}C_{32}) \cos(\sqrt{8} \ln \rho) + (-\sqrt{8}C_{31} - 8C_{32}) \sin(\sqrt{8} \ln \rho) \right) \sin 3\theta, \\ \tau_{\rho\theta(1)}^{p(1)} &= -\frac{C_{11}}{\rho} \cos \theta - \frac{1}{\rho} \left(3\sqrt{8} (C_{32} \cos(\sqrt{8} \ln \rho) - C_{31} \sin(\sqrt{8} \ln \rho)) \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где C_{11} , C_{31} , C_{32} — неизвестные константы интегрирования.



Предположим, что на контуре отверстия при $\rho = \alpha$ все самоуравновешивающиеся составляющие напряжения обращаются в ноль. Тогда из (18) получим систему для определения коэффициентов C_{31} и C_{32} :

$$\begin{cases} C_{31}a_{11} + C_{32}a_{12} = 0, \\ C_{31}a_{21} + C_{32}a_{22} = 0, \end{cases} \quad (19)$$

где $a_{11} = -8 \cos(\sqrt{8} \ln \rho) - \sqrt{8} \sin(\sqrt{8} \ln \rho)$, $a_{12} = \sqrt{8} \cos(\sqrt{8} \ln \rho) - 8 \sin(\sqrt{8} \ln \rho)$, $a_{21} = 3\sqrt{8} \sin(\sqrt{8} \ln \rho)$, $a_{22} = -3\sqrt{8} \cos(\sqrt{8} \ln \rho)$.

Откуда находим

$$C_{31} = C_{32} = 0. \quad (20)$$

Составляющие напряжений (18) при $\sin \theta$ и $\cos \theta$ являются несамуравновешивающимися и одновременно не могут обращаться в ноль на контуре отверстия.

Предположим, что

$$\sigma_{\rho(1)}^{p(1)} \Big|_{\rho=\alpha} = 0. \quad (21)$$

Тогда из (20) с учетом (18) получим

$$C_{11} = -c_2 \alpha^2. \quad (22)$$

Если же предположить, что

$$\tau_{\rho\theta(1)}^{p(1)} \Big|_{\rho=\alpha} = 0, \quad (23)$$

то

$$C_{11} = 0. \quad (24)$$

Из условия непрерывности компонент напряжения на упругопластической границе при $\rho = 1$ с учетом (18) имеем

$$\sigma_{\rho(1)}^{e(1)} = b_1'' \sin \theta + a_0'', \quad \tau_{\rho\theta(1)}^{e(1)} = a_1''' \cos \theta, \quad (25)$$

где $b_1'' = c_2 + C_{11}$, $a_0'' = \frac{m_1}{2} \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1 + 2 \ln \alpha \right)$, $a_1''' = -C_{11}$,

Граничные условия на внешней стороне трубы при $\rho = \beta$, согласно [1] запишем в виде

$$\sigma_{\rho}^{e(1)} = b_1 \sin \theta, \quad \tau_{\rho\theta}^{e(1)} = a_1' \cos \theta, \quad (26)$$

где b_1 и a_1' — const.

С учетом граничных условий (25), (26) согласно [3] компоненты напряжений в упругой зоне при $1 \leq \rho \leq \beta$ имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho(1)}^{e(1)} &= \left[\frac{\rho}{\beta} b_1 + \frac{(3m+1)\beta}{4m(\beta^2+1)} (b_1 + a_1') \left(\frac{1+\beta^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^3} - \rho \right) + \frac{1}{\beta^4-1} (b_1 - b_1''\beta) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\rho}{\beta} - \frac{\beta^3}{\rho^3} \right) \right] \sin \theta + \frac{1}{\beta^2-1} \left(-a_0'' + a_0'' \frac{\beta^2}{\rho^2} \right) + \frac{c_1 + 3c_2}{4} \rho \sin \theta + \frac{c_1 - c_2}{4} \rho \sin 3\theta, \\ \sigma_{\theta(1)}^{e(1)} &= \left[3 \frac{\rho}{\beta} b_1 + \frac{(3m+1)\beta}{(\beta^2+1)} (b_1 + a_1') \left(-\frac{m-1}{3m+1} \frac{1+\beta^2}{\rho} + \frac{\beta^2}{\rho^3} - 3\rho \right) + \frac{1}{\beta^4-1} (b_1 - b_1''\beta) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(3 \frac{\rho}{\beta} + \frac{\beta^3}{\rho^3} \right) \right] \sin \theta + \frac{1}{\beta^2-1} \left(-a_0'' - a_0'' \frac{\beta^2}{\rho^2} \right) + \frac{3c_1 + c_2}{4} \rho \sin \theta - \frac{c_1 - c_2}{4} \rho \sin 3\theta, \\ \tau_{\rho\theta(1)}^{e(1)} &= - \left[\frac{\rho}{\beta} b_1 + \frac{(3m+1)\beta}{4m(\beta^2+1)} (b_1 + a_1') \left(-\frac{m-1}{3m+1} \frac{1+\beta^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^3} - \rho \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta^4-1} (b_1 - b_1''\beta) \left(\frac{\rho}{\beta} - \frac{\beta^3}{\rho^3} \right) \right] \cos \theta + \frac{c_2 - c_1}{4} \rho (\cos \theta - \cos 3\theta), \end{aligned} \quad (27)$$

где $m = \mu^{-1}$, причем

$$(b_1 + a_1') \beta - (b_1'' + a_1''') \alpha = 0. \quad (28)$$



Из условий сопряжения компонент тензора напряжений [3] следует, что на невозмущенной упругопластической границе имеет место равенство

$$\left[\sigma_{ij(1)}^{(1)} + \frac{d\sigma_{ij}^{(0)}}{d\rho_{s(1)}^{(0)}} \right] = 0. \quad (29)$$

Откуда, учитывая (9), (10), получим:

$$\rho_{s(1)}^{(1)} = - \left[\sigma_{\theta(1)}^{(1)} \right] \left[\frac{d\sigma_{\theta}^{(0)}}{d\rho} \right]^{-1} = - \frac{2\mu + c}{8\mu(1 - e^{-\xi t})} \left[\sigma_{\theta(1)}^{(1)} \right]. \quad (30)$$

Соотношение для нахождения радиуса упругопластической границы $\rho_{s(1)}^{(1)}$ в первой итерации первого приближения согласно (30) при учете (18), (19) (22), (27) и (28) определим в виде

$$\rho_{s(1)}^{(1)} = M_0 + M_1 \sin \theta + M_3 \sin 3\theta, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} M_0 &= - \frac{2\mu + c}{8\mu(1 - e^{-\xi t})} \left[\frac{1}{\beta^2 - 1} (-a'' - a''\beta^2) - \frac{m_1}{2} \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1 + 2 \ln \alpha \right) \right], \\ M_1 &= - \frac{2\mu + c}{8\mu(1 - e^{-\xi t})} \left[3 \frac{b_1}{\beta} + \frac{(3m + 1)\beta}{4m(\beta^2 + 1)} (b_1 + a'_1) \left(- \frac{m - 1}{3m + 1} (1 + \beta^2) + \beta^2 - 3 \right) + \frac{1}{\beta^4 - 1} (b_1 - b''_1\beta) \left(\frac{3}{\beta} + \beta^3 \right) \right], \\ M_3 &= - \frac{2\mu + c}{8\mu(1 - e^{-\xi t})} \left[\frac{c_2 - c_1}{4} \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Таким образом, поле напряжений в толстостенной цилиндрической трубе, находящейся под действием сжимающих нагрузок при учете силы тяжести определено в нулевом и первом приближениях (первая итерация) при $\alpha \leq \rho \leq 1$ соотношениями (9), (18), (19), (22) (или (24)), а при $1 \leq \rho \leq \beta$ — соотношениями (10), (27), (28). Радиус раздела зон упругого и пластического деформирования находится по формулам (12), (31).

Результаты численного эксперимента представлены на рис. 2, а-г. На этих рисунках показана зависимость радиуса упругопластической границы ρ_s от угла θ в толстостенной трубе, с учетом силы тяжести. При этом значение безразмерных характеристик принимались следующими: внутреннее давление на контуре $q_0 = 0.9$ и внешнее давление на контуре $q = 0.2$; малый параметр $\delta = 0.17$; модуль сдвига $\mu = 1$; радиус отверстия $a = 0.6$; внешний радиус трубы $b = 0.9$.

На рис. 2, а замкнутая кривая 1 соответствует контуру отверстия. Замкнутые кривые 2-4 характеризуют положение упругопластической границы ρ_s в моменты времени $t = 0.001$, $t = 0.0015$, $t = 1$ соответственно. При этом коэффициент упрочнения $c = 0.2$; коэффициент вязкости — $\eta = 0.001$.

На рис. 2, б замкнутая кривая 1 соответствует контуру отверстия. Замкнутые кривые 2-4 характеризуют положение упругопластической границы ρ_s при значениях упрочнения $c = 0.3$, $c = 0.2$, $c = 0.1$ соответственно. При этом коэффициент вязкости $\eta = 0.001$.

На рис. 2, в замкнутая кривая 1 соответствует контуру отверстия. Замкнутые кривые 2-4 характеризуют положение упругопластической границы ρ_s при значениях коэффициентов вязкости $\eta = 0.002$, $\eta = 0.0015$ и $\eta = 0.001$ соответственно. При этом коэффициент упрочнения $c = 0.2$.

На рис. 2, г замкнутая кривая 1 соответствует контуру отверстия. Замкнутые кривые 2-4 характеризуют положение упругопластической границы ρ_s при значениях $c_1 = 0.5$, $c_2 = 15$; $c_1 = 0.2$, $c_2 = 5$ и $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ соответственно. Случай $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ соответствует положению упругопластической границы без учета силы тяжести. При этом коэффициент упрочнения $c = 0.2$, коэффициент вязкости $\eta = 0.001$.

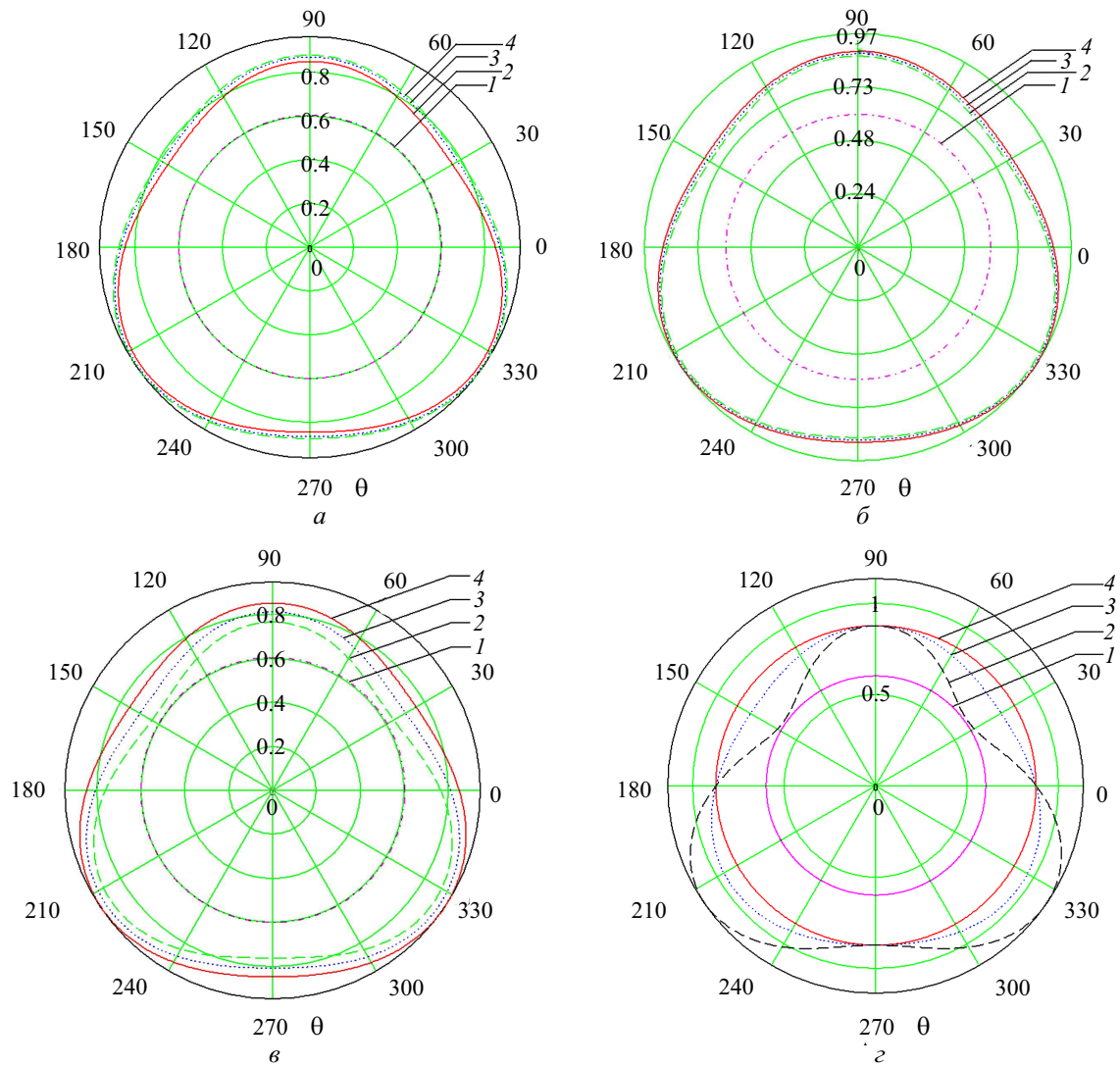


Рис. 2

Из анализа результатов численного эксперимента следует, что учет силы тяжести влияет на форму и размер упругопластической зоны (см. рис. 2, а–г), при этом отмечены следующие закономерности:

- с ростом времени упругопластическая граница увеличивается до определенного значения, которое соответствует упрочняющейся упругопластической среде (рис. 2, а) (имеет место ограниченная ползучесть);

- при увеличении коэффициента упрочнения с пластическая область сужается;

- с ростом коэффициента вязкости η пластическая зона уменьшается, в этом смысле можно говорить о стабилизирующей роли вязкости.

Таким образом, получено первое приближение (в одной итерации), поставленной задачи о напряженном состоянии толстостенных труб из упруговязкопластического материала, при учёте силы тяжести. Очевидно, что полагая в приведенных выше соотношениях $c = 0$, $\eta = 0$ и $t \rightarrow \infty$, приходим к результатам работы С.В. Матвеева [1], соответствующим идеально пластическому материалу. Если положить $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$, то приходим к известным решениям А.Н. Спорыхина [2].

Библиографический список

1. Матвеев С.В. Упругопластическое состояние среды, ослабленной горизонтальной цилиндрической полостью, с учетом силы тяжести // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнауч. сер. 2007. № 2(52). С. 107–114.
2. Спорыхин А. Н., Шашкин А. И. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород. М.: Физматлит, 2004. 232 с.
3. Ивлев Д. Д., Еришов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.

ИНФОРМАТИКА

УДК 512.5

ИНДЕКСЫ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ (B, δ) ДВОИЧНЫХ ВЕКТОРОВ

А. В. Власова

Саратовский государственный университет,
кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии
E-mail: VAnastasiyaV@gmail.com

Описывается алгоритм вычисления индексов состояний динамической системы (B, δ) , состояниями которой являются двоичные векторы, а эволюционная функция δ преобразует вектор с помощью одновременного выполнения следующих действий: начальный 0 (если он есть) заменяется на 1, каждая диграмма 10 – на 01, финальная 1 (если она есть) – на 0. Доказывается корректность алгоритма.

Ключевые слова: динамическая система, эволюционная функция, аттрактор, индекс, плотность, блок.

Indices in Dynamical System (B, δ) of Binary Vectors

A. V. Vlasova

Saratov State University,
Chair of the Theoretical Foundations of Computer Security and Cryptography
E-mail: VAnastasiyaV@gmail.com

An algorithm is proposed for computation of indices of states in dynamical system (B, δ) , whose states are binary vectors and evolutionary function δ transforms vectors according to the following rules: the initial component 0 (if exists) is replaced by 1, every digram 10 by 01, and the final 1 (if exists) by 0. Correctness of the algorithm is proven.

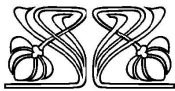
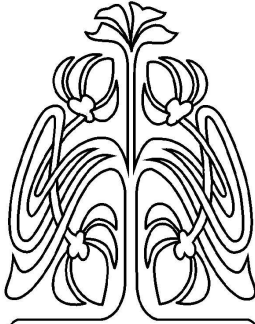
Key words: dynamical system, vector, evolutionary function, attractor, index, density, block.

ВВЕДЕНИЕ

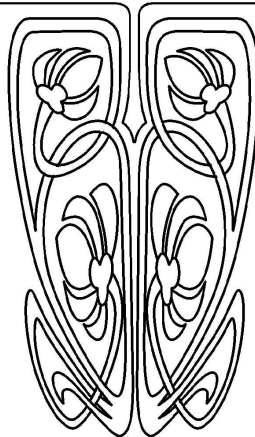
В задачах, связанных с отказоустойчивостью компьютерных сетей, заметное место занимают графовые модели, в которых отказы процессоров интерпретируются как удаление соответствующих вершин, а отказы сетевых каналов — как удаление дуг. Здесь можно выделить следующую конструкцию, получившую и самостоятельное значение в теории графов — ациклический граф с заданной структурой источников и стоков [1]. В модели [1] в качестве механизма восстановления работоспособности сети предлагается так называемая SER-динамика ациклических графов. Это позволяет использовать при изучении модельных графов идеи и методы теории конечных динамических систем, и, в частности, динамических систем двоичных векторов (см., например, [2, 3]) — когда имеется естественная двоичная кодировка графов рассматриваемого класса.

Под *конечной динамической системой* понимается пара (S, δ) , где S — конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями системы*, $\delta: S \rightarrow S$ — отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы*.

Каждой конечной динамической системе сопоставляется *карта* — граф с множеством вершин S и дугами, проведенными из каждой



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Этот граф является функциональным, т.е. из каждой вершины выходит точно одна дуга. Компоненты связности графа, задающего динамическую систему, называются её бассейнами.

Каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контур называется предельным циклом, или аттрактором.

Одной из основных характеристик состояний конечной динамической системы является индекс — расстояние до аттрактора того бассейна, которому принадлежит состояние. Программа [4] предназначена для исследования эволюционных параметров состояний (индекс, недостижимость, ветвление) в динамических системах, состояниями которых являются двоичные векторы, представленные такими графами, как цепи, циклы и пальмы. В настоящей работе описываются индексы динамической системы двоичных векторов, порожденных такими графами, как цепи (см. [5–7]).

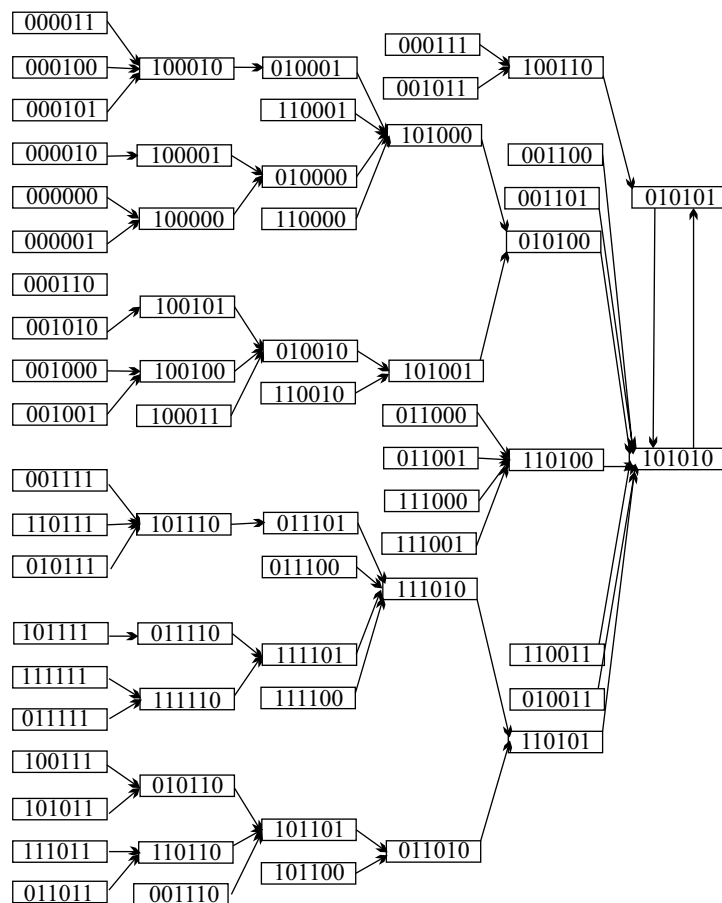
1. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

Пусть $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B^n$, где через B^n , $n > 0$, обозначим множество всех двоичных векторов размерности n . Пусть состоянием динамической системы в данный момент времени является вектор $v \in B$. Тогда в следующий момент времени она окажется в состоянии $\delta(v)$, описываемом следующими правилами:

- 1) если первой компонентой в v является 0, то первой компонентой в $\delta(v)$ будет 1;
- 2) если в составе v имеются диграммы (две соседние компоненты) вида 10, то в $\delta(v)$ каждая из них заменяется на 01;
- 3) если последней компонентой в v является 1, то последней компонентой в $\delta(v)$ будет 0;
- 4) других отличий между v и $\delta(v)$ нет.

Замечание. Вышеперечисленные правила применяются одновременно.

Эта динамика для двоичных векторов определена в [2]. Каждое состояние размерности n при динамике переходит в состояние также размерности n . Таким образом, система B в зависимости от n разбивается на подсистемы (B^n, δ) . На рисунке показана карта динамической системы (B^6, δ) .



Карта динамической системы (B^6, δ)

2. АТТРАКТОРЫ В СИСТЕМЕ (B, δ)

Через $p(v)$ обозначается плотность вектора v , т.е. количество пар совпадающих соседних компонент в нем. Например, $p(111111) = 5$, $p(101010) = 0$, $p(111011) = 3$, $p(\delta(111011)) = p(110110) = 2$. Очевидно, что для $v \in B^n$ будет $0 \leq p(v) \leq n - 1$.

Аттракторы динамической системы (B, δ) были описаны в работе [5], где доказываются следующие три теоремы.

Теорема 1. Для системы (B, δ) при любом v справедливо неравенство $p(\delta(v)) \leq p(v)$.

Теорема 2. Для системы (B, δ) верно $(\forall v)(p(v) \neq 0 \implies (\exists k)(p(\delta^k(v)) < p(v))$.



Теорема 3. При любом $n \geq 2$ система (B^n, δ) имеет единственный бассейн и аттрактор, представляющий собой двухэлементный цикл, образуемый состояниями $(01)^{\lfloor n/2 \rfloor} 0$ и $(10)^{\lfloor n/2 \rfloor} 1$ при нечётном n и состояниями $(01)^{n/2}$ и $(10)^{n/2}$ при чётном n .

3. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНДЕКСА СОСТОЯНИЯ В СИСТЕМЕ (B, δ)

Блок — это подряд стоящие нули (0-блоки) или единицы (1-блоки), в количестве ≥ 2 . Длина блока — это число нулей (единиц) в нем, уменьшенное на 1.

Введем обозначения:

r — порядковый номер последней компоненты последнего 1-блока;

k — количество компонент вектора до первого блока;

f — количество компонент вектора между последним блоком и концом вектора;

i — индекс рассматриваемого состояния;

s — порядковый номер первой компоненты первого 0-блока;

p_0, p_1 — суммы длин рассматриваемых 0-блоков и 1-блоков соответственно;

УНГ — указатель начала группы;

УРС — указатель рассмотрения состояния.

Алгоритм вычисления индекса состояния системы (B, δ) .

Индекс состояния системы (B, δ) высчитывается исходя из его вида как вектора.

I. Если вектор v содержит в себе блоки и все они состоят из 1, то $i(v) = r - 1$;

II. Если вектор v содержит в себе блоки и все они состоят из 0, то $i(v) = n - s$;

III. Если вектор v содержит в себе 1-блоки, после которых идут 0-блоки, то $i(v) = n - s$ при $r - 1 < n - s$, иначе $i(v) = r - 1$;

IV. Если вектор v содержит в себе 0-блоки, после которых идут 1-блоки, то $i(v) = r - 1$ при $p_0 < p_1$, $i(v) = (r - s + 1)/2 - 1$ при $p_0 = p_1$, $i(v) = n - s$ при $p_0 > p_1$;

V. Если вектор v содержит в себе 0-блоки и 1-блоки в произвольном порядке, отличном от описанных в пунктах I — IV алгоритма, то, просматривая его слева направо, выполняем следующие действия:

1. УНГ и УРС ставятся в начале вектора. Если до первого 0-блока есть 1-блоки, то первой группой будет являться отрезок вектора от начальной компоненты до последней компоненты того 1-блока, который стоит перед первым 0-блоком включительно; УНГ и УРС ставятся между последней компонентой того 1-блока, который стоит перед первым 0-блоком, и следующей компонентой.

2. Если вектор уже полностью разбит на группы или если 1-блоков больше нет, то группа заканчивается на последней компоненте вектора и переходим в пункт 6, иначе $p_0 := 0, p_1 := 0$.

3. $p_0 := p_0 +$ сумма длин 0-блоков до первого (следующего) 1-блока от УРС; УРС ставится между последним из таких 0-блоков и следующей компонентой.

4. $p_1 := p_1 +$ сумма длин 1-блоков до первого (следующего) 0-блока от УРС; УРС ставится между последним из таких 1-блоков и следующей компонентой.

5. Если $p_0 \leq p_1$, то группа заканчивается на последней компоненте того 1-блока, который стоит перед УРС, и идём в пункт 2, УНГ ставится между последней компонентой этой группы и следующей компонентой; а если 0-блоков больше нет, то группа заканчивается на последней компоненте состояния, и идём в пункт 6. Если $p_0 > p_1$ и ещё остались 1-блоки, то идём в пункт 3, а если 1-блоков больше нет, то группа заканчивается на последней компоненте состояния и идём в пункт 6.

6. В каждой группе подсчитываем p_0 и p_1 и помечаем группы знаками «-», «=», «+», если в них $p_0 > p_1, p_0 = p_1, p_0 < p_1$ соответственно. Объединяем рядом стоящие группы с одинаковыми пометками «-» или «+» в одну, при этом если между «+»-группами встречаются «=-»-группы, то их также объединяем в «+»-группу. Пусть h — общее количество групп. Считаем групповые индексы $i_j, 1 \leq j \leq h$, согласно следующим правилам: в «-»-группе $i_j = n - s_j$, в «=-»-группе $i_j = (r_j - s_j + 1)/2 - 1$, в «+»-группе $i_j = r_j - 1$. Тогда $i(v) = \max_{1 \leq j \leq h} i_j$.

Теорема 4 (Корректность алгоритма вычисления индекса состояния). Алгоритм вычисления индекса состояния корректен.



Доказательство. I. Если вектор v содержит в себе блоки и все они состоят из 1, то $i(v) = r - 1$. Рассмотрим эволюцию таких состояний в зависимости от количества 1-блоков.

I.1. Вектор имеет единственный 1-блок. Рассмотрим эволюцию таких состояний в зависимости от расположения 1-блока.

а) вектор содержит единственный 1-блок, который расположен в начале вектора.

В табл. 1 приведена схематичная эволюция таких состояний.

Таблица 1

Таким образом, $i(v) = r - 1$.

Заметим, что длина 1-блока на каждом очередном шаге уменьшается на единицу за счёт поглощения самой левой компоненты и за ним следуют чередующиеся нули и единицы, пока все его компоненты не поглотятся.

б) вектор содержит единственный 1-блок, который расположен не в начале вектора.

В табл. 2 приведена схематичная эволюция таких состояний.

Таким образом, $i(v) = k + p_1 = r - 1$.

Заметим, что 1-блок на каждом очередном шаге смещается влево на одну компоненту, пока не встанет в начало состояния, затем длина 1-блока на каждом очередном шаге уменьшается на единицу за счёт поглощения самой левой компоненты и за ним следуют чередующиеся нули и единицы, пока все его компоненты не поглотятся.

I.2. Вектор имеет несколько блоков, и все они состоят из 1.

Из рассмотрения пункта I.1 можно заключить, что 1-блоки на каждом очередном шаге смещаются влево на одну компоненту, пока не встанут в начало состояния, затем длина 1-блока на каждом очередном шаге уменьшается на единицу за счёт поглощения самой левой компоненты и за ним следуют чередующиеся нули и единицы, пока все компоненты 1-блока не поглотятся. Очевидно, что в данном случае последним поглотится самый правый 1-блок и тогда $i = r - 1$.

№ шага	Состояние
0	111...11101...010
1	111...11010...101
2	111...10101...010
...	...
$r - 2$	110...10101...010
$r - 1$	101...01010...101

Таблица 2

№ шага	Состояние
0	01...01011...111101...010
1	10...10111...1111010...101
2	01...01111...1110101...010
3	10...11111...1101010...101
...	...
$k - 1$	01...11110...10101...010
k	11...11101...01010...101
$k + 1$	11...11010...10101...010
$k + 2$	11...10101...01010...101
...	...
$k + p_1 - 1$	11...01010...10101...010
$k + p_1$	10...10101...01010...101

Таким образом, рассмотрев все возможные ситуации, делаем вывод, что пункт I алгоритма корректен.

II. Если вектор v содержит в себе блоки, и все они состоят из 0, то $i(v) = n - s$. Рассмотрим эволюцию таких состояний в зависимости от количества 0-блоков.

II.1. Вектор имеет единственный 0-блок. Рассмотрим эволюцию таких состояний в зависимости от расположения 0-блока.

а) вектор содержит единственный 0-блок, который расположен в конце вектора.

Схематичная эволюция таких состояний: $101000...000 \rightarrow_1 010100...000 \rightarrow_2 101010...000 \rightarrow_3 \dots \rightarrow_{p_0-1} 01010...100 \rightarrow_{p_0} 10101...010$.

Таким образом, $i(v) = p_0 = n - s$. Можно заметить, что длина 0-блока на каждом очередном шаге уменьшается на единицу за счёт поглощения самой правой компоненты и перед ним идут чередующиеся нули и единицы, пока все его компоненты не поглотятся.

б) вектор содержит единственный 0-блок, который расположен не в конце вектора.

Схематичная эволюция таких состояний: $10...1010000...00010...101 \rightarrow_1 01...0101000...00001...010 \rightarrow_2 10...101010...00000...101 \rightarrow_3 \dots \rightarrow_{f-1} 10...10101...01000...001 \rightarrow_f 01...01010...10100...000 \rightarrow_{f+1} 10...10101...01010...000 \rightarrow_{f+2} \dots \rightarrow_{f+p_0-1} 10...10101...01010...100 \rightarrow_{f+p_0} 01...01010...10101...010$.

Таким образом, $i(v) = f + p_0 = n - s$.

Заметим, что 0-блок на каждом очередном шаге смещается вправо на одну компоненту, пока не встанет в конец вектора, затем длина 0-блока на каждом очередном шаге уменьшается на единицу за счёт поглощения самой правой компоненты и перед ним стоят чередующиеся нули и единицы, пока все его компоненты не поглотятся.

II.2. Вектор имеет несколько блоков, и все они состоят из 0.



Из рассмотрения пункта II.1 можно заключить, что каждый 0-блок на очередном шаге смещается вправо на одну компоненту, пока не достигает конца вектора, затем длина 0-блока на каждом очередном шаге уменьшается на единицу за счёт поглощения самой правой компоненты и перед ним следуют чередующиеся нули и единицы, пока все компоненты 0-блока не поглотятся. Очевидно, что в данном случае последним поглотится самый левый 0-блок, и тогда индекс будет равен уменьшенному на единицу порядковому номеру с конца вектора первой компоненты самого левого 0-блока, или $i = n - s$.

Таким образом, рассмотрев все возможные ситуации, делаем вывод, что пункт II алгоритма корректен.

III. Если вектор содержит в себе 1-блоки, после которых идут 0-блоки, то $i = n - s$ при $r - 1 < n - s$, иначе $i = r - 1$.

Исходя из доказательств предыдущих пунктов, можно заключить, что в данном случае на каждом шаге эволюции одновременно 0- и 1-блоки начнут движение вправо или влево соответственно, пока не достигнут своих концов вектора и не начнут поглощаться, т.е. самым последним поглотится тот блок, который дальше всего будет стоять от своего края. Таким образом, нужно определить порядковый номер от конца состояния первой компоненты первого 0-блока, определить порядковый номер последней компоненты последнего 1-блока, выбрать максимальный из них и считать согласно пунктам I или II, т.е. если $r - 1 < n - s$, то $i = n - s$, иначе $i = r - 1$. Таким образом, пункт III алгоритма корректен.

IV. Если вектор содержит в себе 0-блоки, после которых идут 1-блоки, то $i = r - 1$ при $p_0 < p_1$, $i = (r - s + 1)/2 - 1$ при $p_0 = p_1$, $i = n - s$ при $p_0 > p_1$.

Обозначим через g количество компонент вектора между последним 0-блоком и первым 1-блоком.

IV.1. Рассмотрим сначала эволюцию таких состояний, включающих в себя один 0-блок, после которого есть 1-блок, и в зависимости от их значений p_0 и p_1 :

а) состояния, для которых $p_0 < p_1$.

В табл. 3 приведена схематичная эволюция таких состояний. Таким образом, $i(v) = r - 1$.

Заметим, что в этом конкретном случае сначала на каждом шаге эволюции 0-блок начинает двигаться вправо, 1-блок начинает двигаться влево за счёт поглощения компонент, стоящих между блоками; когда блоки оказываются стоящими рядом, то их длины начинают уменьшаться на единицу за счёт поглощения компонент друг друга, пока 0-блок полностью не поглотится. Таким образом, в результате остаётся 1-блок и чередующиеся нули и единицы, дальнейшая эволюция была описана в пункте I, т.е. получается, что в процессе эволюции для подсчёта индекса состояния имеет значение только 1-блок, а точнее порядковый номер

его последней компоненты, так как при эволюции его последняя компонента просто смещается влево на каждом шаге эволюции, пока из всего 1-блока не останется она одна, т.е. $i(v) = r - 1$.

б) состояния, для которых $p_0 = p_1$.

Из рассуждений пункта IV.1.а получаем, что при эволюции 0-блок и 1-блок начнут движение навстречу друг другу, пока не окажутся рядом, а затем начнут поглощать друг друга с каждым следующим шагом эволюции, пока от них не останется по одной компоненте, причём это уже будет вектор, полностью состоящий из чередующихся нулей и единиц. Таким образом, в данном случае индекс будет равен количеству компонент блока и половине количества компонент между блоками.

в) состояния, для которых $p_0 > p_1$.

Здесь ситуация будет аналогична пункту IV.1.а, только в результате остаётся один 0-блок и чередующиеся нули и единицы, дальнейшая эволюция описана в пункте II, т.е. $i(v) = n - s$.

Таблица 3

№ шага	Состояние
0	01...01000...00101...01011...111101...01
1	10...10100...00010...10111...111010...10
2	01...01010...00001...01111...110101...01
...	...
$g/2$	01...0101000...00001111...11110101...01
$g/2 + 1$	10...1010100...00001111...11101010...10
$g/2 + 2$	01...0101010...00001111...11010101...10
...	...
$g/2 + p_0 - 1$	01...0101010011...11010101...10
$g/2 + p_0$	10...1010101011...10101010...01
...	...
$r - 2$	1101...01010...101
$r - 1$	1010...10101...010



IV.2. Рассмотрим теперь состояния, включающие в себя несколько 0-блоков, после которых идут 1-блоки, также в зависимости от значений p_0 и p_1 в векторе.

а) состояния, для которых $p_0 < p_1$.

Из пункта IV.1.а получаем, что здесь на каждом шаге эволюции 0-блоки начинают двигаться вправо, 1-блоки начинают двигаться влево за счёт поглощения компонент, стоящих между блоками; когда они оказываются стоящими рядом, то блоки начинают уменьшаться на единицу за счёт поглощения компонент друг друга, пока один из блоков полностью не поглотится, после чего опять продолжают сдвиги блоков навстречу друг другу, пока не поглотится самый последний 0-блок. Таким образом, останутся только 1-блоки и чередующиеся нули и единицы, дальнейшая эволюция описана в пункте I. Таким образом, получается, что в процессе эволюции для подсчёта индекса состояния имеет значение только последний 1-блок, а точнее порядковый номер его последней компоненты, так как при эволюции его последняя компонента просто смещается влево на каждом шаге эволюции, пока из всего этого 1-блока не останется она одна, т.е. $i(v) = r - 1$.

б) состояния, для которых $p_0 = p_1$.

Из рассуждений пунктов IV.1.б и IV.2.а получаем, что при эволюции 0-блоки и 1-блоки начнут движение навстречу друг другу, пока не окажутся рядом, а затем начнут поглощать друг друга с каждым следующим шагом эволюции, пока не поглотится один из блоков, после чего продолжится аналогичное движение, пока рядом не окажутся последние оставшиеся 0-блок и 1-блок, которые начнут поглощать друг друга с каждым следующим шагом эволюции, пока от них не останутся по одной компоненте, причём это уже будет вектор полностью состоящий из чередующихся нулей и единиц. Таким образом, $i = (r - s + 1)/2 - 1$.

Покажем, что количество компонент от первой компоненты первого 0-блока до последней компоненты последнего 1 блока, т.е. $r - s + 1$, всегда будет чётно. Докажем это индукцией по p_0 .

Базис индукции: $p_0 = 1$. Здесь получается, что длины 0- и 1-блоков равны 1 и в сумме дают чётное число, количество компонент между этими блоками также чётно, так как это чередующиеся нули и единицы, а после 0-блока обязательно будет стоять 1 и перед 1-блоком будет стоять 0, в итоге получаем чётное количество компонент от первой компоненты первого 0-блока до последней компоненты последнего 1-блока.

Шаг индукции. Предположим, что при любом $p_0 \leq m \in \mathbf{N}$ количество компонент от первой компоненты первого 0-блока до последней компоненты последнего 1 блока, т.е. $r - s + 1$, будет чётно. Покажем, что данное условие выполняется при $p_0 = m + 1$. Рассмотрим здесь несколько ситуаций.

1) длины первого 0-блока и последнего 1-блока не равны 1. Тогда отсекаем у этих блоков по одному элементу, получаем случай $p_0 = m$, для которого требуемое условие выполняется, а отсеки мы две компоненты, т.е. в итоге получаем чётное число и выполнение нужного условия.

2) длина первого 0-блока или длина последнего 1-блока равна 1. Например, длина первого 0-блока равна 1. Тогда отсекаем у этих блоков по одной компоненте, получаем случай $p_0 = m$, для которого требуемое условие выполняется. От 0-блока осталась одна компонента, до следующего 0-блока идёт нечётное количество компонент, а отсеки мы две компоненты, т.е. в итоге получаем чётное число и выполнение нужного условия.

3) длины первого 0-блока и последнего 1-блока равны 1. Тогда отсекаем у этих блоков по одному элементу, получаем случай $p_0 = m$, для которого требуемое условие выполняется. От 0-блока и 1-блока осталось по одной компоненте, до следующего 0-блока идёт нечётное количество компонент, от предыдущего 1-блока идёт нечётное количество компонент, а отсеки мы две компоненты, т.е. в итоге получаем чётное число и выполнение нужного условия.

в) состояния, для которых $p_0 > p_1$.

Здесь ситуация будет аналогична пункту IV.2.а, только в состоянии в конце концов остаётся один 0-блок и чередующиеся нули и единицы, дальнейшая эволюция описана в пункте II, т.е. $i(v) = n - s$.

V. Вектор состоит из 0-блоков и 1-блоков в произвольном порядке.

Из доказательств предыдущих пунктов можно заключить, что при эволюции такого состояния 0-блоки будут сдвигаться вправо, при этом если они будут встречаться с 1-блоками, то длина 0-блока будет уменьшаться с очередным шагом эволюции, т.е. если есть подряд стоящие 0-блоки, то они или все поглотятся, если следующие за ними подряд стоящие 1-блоки в сумме имеют равную



или большую длину, или поглотят сами следующие за ними подряд стоящие 1-блоки и продолжают сдвиг вправо, встречая очередные 1-блоки, если сумма длин 0-блоков будет больше суммы длин 1-блоков. С точки зрения 1-блоков ситуация получается аналогичная, но так как на очередном шаге эволюции движение 0- и 1-блоков происходит одновременно, то, не теряя общности, будем рассматривать этот случай с точки зрения движения 0-блоков, т.е. ситуаций, когда 0-блоки будут полностью поглощаться 1-блоками, что возможно в ситуациях, когда суммы длин 1-блоков больше или равны сумме длин 0-блоков, или 0-блоки поглотят 1-блоки, что возможно, когда суммы длин 1-блоков меньше суммы длин 0-блоков. В пунктах V.1–V.5 алгоритма как раз описывается процедура деления состояния на группы, в которых суммы длин 0-блоков или меньше сумм длин 1-блоков, или равны, или больше (в этом случае это может быть только крайняя справа группа). В итоге получаем вектор, разделенный на группы, причём слева будет «+»-группа, справа «-»-группа, а между ними могут быть ещё «=>»-группы. Так как при динамике эти группы (блоки) начинают свои движения одновременно, то индекс будет равен максимальному из групповых индексов. А это описано в пункте V.6 алгоритма подсчёта индекса, т.е. алгоритм верен. \square

Сложность алгоритма равна $O(n)$, где n — количество компонент в состоянии.

Пример. 1011101001101000111010001

Вектор подходит только под V пункт алгоритма. Сначала получаем деление вектора на группы (в результате выполнения переходов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 6$): [10111][010011][01000111][010001]. Подсчитываем групповые индексы: $i_1 = r_1 - 1 = 5 - 1 = 4$ («+»-группа); $i_2 = (r_2 - s_2 + 1)/2 - 1 = (11 - 8 + 1)/2 - 1 = 1$ («=>»-группа); $i_3 = (r_3 - s_3 + 1)/2 - 1 = (19 - 14 + 1)/2 - 1 = 2$ («=>»-группа); $i_4 = n - s_4 = 25 - 22 = 3$ («-»-группа). Таким образом, $i(v) = 4$.

Эволюция состояния:

1011101001101000111010001 \rightarrow 0111010101010100110101000 \rightarrow 1110101010101010101010100 \rightarrow 1101010101010101010101010 \rightarrow 1010101010101010101010101 (аттрактор), т.е. $i(v) = 4$.

Одним из параметров бассейна динамической системы является его *глубина* — наибольший из индексов состояний.

Следствие (глубина бассейна). При любом $n \geq 2$ система (B^n, δ) имеет глубину бассейна, равную $n - 1$.

Доказательство. Рассмотрим формулы вычисления индекса состояния в каждом пункте алгоритма.

I. $i(v) = r - 1$. Здесь значение индекса будет максимальным при $r = n$, например для состояния $(1)^n$.

II. $i(v) = n - s$. Здесь значение индекса будет максимальным при $s = 1$, например для состояния $(0)^n$.

В пунктах III, IV, V ситуация будет аналогична, при этом очевидно, что значение индекса в состоянии, для которого $p_0 = p_1$ (или в «=>»-группе для V пункта), всегда будет меньше $n - 1$.

Таким образом, максимальный индекс в системе (B^n, δ) равен $n - 1$. \square

Библиографический список

1. *Barbosa V. C.* An atlas of edge-reversal dynamics. L.: Chapman&Hall/CRC, 2001. 372 с.
2. *Салий В. Н.* Об одном классе конечных динамических систем // Вестн. Томск. гос. ун-та. Приложение. 2005. № 14. С. 23–26.
3. *Colon-Reyes O., Laubenbacher R., Pareigis B.* Boolean monomial dynamical systems // Ann. Comb. 2004. Vol. 8. P. 425–439.
4. *Власова А. В.* Исследование эволюционных параметров в динамических системах двоичных векторов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009614409, выданное Роспатентом. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 20 августа 2009 г.
5. Аттракторы в динамических системах двоичных векторов / А. В. Власова; Саратов. гос. ун-т. Саратов, 2010. 19 с. Деп. в ВИНТИ 23.06.2010, № 392–В2010.
6. *Власова А. В.* Ветвления в динамической системе n -мерных двоичных векторов // Инновационные технологии XXI века в управлении, информатике и образовании. Нальчик, 2008. С. 109–112.
7. Об одной динамической системе / А. В. Власова; Саратов. гос. ун-т. Саратов, 2007. 17 с. Деп. в ВИНТИ 17.12.07, № 1181–В2007.