

ISSN 1816-9791 (Print)  
ISSN 2541-9005 (Online)

# ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия



Серия Математика. Механика. Информатика

2020

Том 20

Выпуск 2





Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

# ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 2

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,  
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал  
2020 Том 20

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издаётся с 2005 года

## СОДЕРЖАНИЕ

### Научный отдел

#### Математика

**Абрамова В. В., Дудов С. И., Осипцев М. А.** Внешняя оценка компакта лебеговым множеством выпуклой функции 142

**Danchev P. V.** A Symmetrization in Clean and Nil-Clean Rings  
[Данчев П. В. Симметризация в чистых и ниль-чистых кольцах] 154

**Кобилзода М. М., Наимов А. Н.** О положительных решениях модельной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 161

**Можей Н. П.** О геометрии трехмерных псевдоримановых однородных пространств. II 172

**Перельман Н. Р.** Об одном исключительном случае первой основной трехэлементной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций в круге 185

#### Механика

**Зверев Н. А., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В.** Нестационарная электромагнитоупругость пьезоэлектриков с учетом диффузии 193

**Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Bessonov L. V., Petraikin A. V., Dol A. V., Ahmad E. S., Morozov S. P., Vladymyrskyy A. V., Sergunova K. A., Kharlamov A. V.** Influence of Convolution Kernel and Beam-Hardening Effect on the Assessment of Trabecular Bone Mineral Density Using Quantitative Computed Tomography  
[Иванов Д. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Бессонов Л. В., Петрайкин А. В., Доль А. В., Ахмад Е. С., Морозов С. П., Владзимирский А. В., Сергунова К. А., Харламов А. В.]  
Влияние конволюционных ядер и эффекта «упрочнения луча» на оценку минеральной плотности губчатой костной ткани с использованием количественной компьютерной томографии] 205

**Кучумов А. Г.** Математическое моделирование накопления частиц на поверхности пластикового билиарного стента для прогнозирования его окклюзии 220

**Шагапов В. Ш., Галимзянов Н. М., Агишева У. О.** Уединенные волны в газожидкостной пузырьковой смеси 232

#### Информатика

**Иванко Е. Е., Червинский С. М.** Исследование выживаемости модельной популяции в зависимости от стратегии энергообмена между организмами 241

**Кочеганов В. М.** Классификация состояний марковской цепи в модели тандема с циклическим управлением с продлением 257

**Тананко И. Е., Фокина Н. П.** Метод анализа открытой сети массового обслуживания с деградируемой структурой и мгновенным восстановлением систем 266

Журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика»» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.  
Запись о регистрации СМИ ПИ No ФС77-76640 от 26 августа 2019 года

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (специальности: 01.01.01; 01.01.02; 01.01.06; 01.01.07; 01.01.09; 01.02.04; 01.02.05; 01.02.06; 01.02.08; 05.13.01; 05.13.18).

Журнал входит в международные базы данных Emerging Sources Citation Index, Scopus, MathSciNet, zbMATH, DOAJ

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год

**Директор издательства**  
Бучко Ирина Юрьевна

**Редактор**  
Каргин Игорь Анатольевич

**Художник**  
Соколов Дмитрий Валерьевич

**Редактор-стилист**  
Кочкаева Инна Анатольевна

**Верстка**  
Халова Виктория Анатольевна

**Технический редактор**  
Каргин Игорь Анатольевич

**Корректор**  
Кочкаева Инна Анатольевна

**Адрес учредителя, издателя и издательства (редакции):**  
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83  
**Тел.:** +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89  
**E-mail:** izvestiya@info.sgu.ru

Подписано в печать 25.05.20.  
Подписано в свет 01.06.20.  
Формат 60x84 1/8.  
Усл. печ. л. 16,04(17,25).  
Тираж 500 экз. Заказ 36-Т.

Отпечатано в типографии  
Саратовского университета.  
**Адрес типографии:**  
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2020



## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <http://mmi.sgu.ru/ru/dlya-avtorov>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования в журнале. В случае положительного решения об опубликовании статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трех месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <http://mmi.sgu.ru>.

### Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,  
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,  
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: [mmi@info.sgu.ru](mailto:mmi@info.sgu.ru)

Website: <http://mmi.sgu.ru/>

### Ответственный секретарь серии:

Шевцова Юлия Владиславовна

## CONTENTS

### Scientific Part

#### Mathematics

**Abramova V. V., Dudov S. I., Osiptsev M. A.** The External Estimate of the Compact Set by Lebesgue Set of the Convex Function 142

**Danchev P. V.** A Symmetrization in Clean and Nil-Clean Rings 154

**Kobilzoda M. M., Naimov A. N.** On the Positive Solutions of a Model System of Nonlinear Ordinary Differential Equations 161

**Mozhey N. P.** On the Geometry of Three-dimensional Pseudo-Riemannian Homogeneous Spaces. II 172

**Perelman N. R.** On One Exceptional Case of the First Basic Three-Element Carleman-Type Boundary Value Problem for Banalytic Functions in a Circle 185

#### Mechanics

**Zverev N. A., Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V.** Unsteady Electromagnetic Elasticity of Piezoelectrics Considering Diffusion 193

**Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Bessonov L. V., Petraikin A. V., Dol A. V., Ahmad E. S., Morozov S. P., Vladymyrsky A. V., Sergunova K. A., Kharlamov A. V.** Influence of Convolution Kernel and Beam-Hardening Effect on the Assessment of Trabecular Bone Mineral Density Using Quantitative Computed Tomography 205

**Kuchumov A. G.** Mathematical Modeling of Deposits Accumulation on the Plastic Biliary Stent for Predicting Its Occlusion 220

**Shagapov V. Sh., Galimzyanov M. N., Agisheva U. O.** Single Waves in a Gas-Liquid Bubble Mixture 232

#### Computer Sciences

**Ivanko E. E., Chervinsky S. M.** Survival Rate of Model Populations as a Function of the Strategy of Energy Exchange Between the Populations Organisms 241

**Kochegarov V. M.** Markov Chain States Classification in a Model of Tandem with Cyclic Service Algorithm with Prolongation 257

**Tananko I. E., Fokina N. P.** An Analysis Method of Open Queueing Networks with a Degradable Structure and Instantaneous Repair Times of Systems 266



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА**  
**«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.**  
**СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

**Главный редактор**

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Заместитель главного редактора**

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Ответственный секретарь**

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

**Члены редакционной коллегии:**

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

dell'Isola Francesco, доктор наук, профессор (Рим, Италия)

Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Омск, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)

Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)

Индейцев Дмитрий Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Республика Беларусь)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, акад. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Пархоменко Павел Павлович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук (Долгопрудный, Московская обл., Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Ратеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ульяновск, Россия)

Резчиков Александр Фёдорович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)

Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Республика Беларусь)

Субботин Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Екатеринбург, Россия)

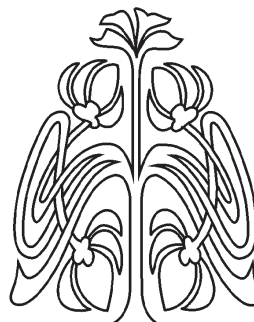
Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чунань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)



**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL**  
**«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.**  
**SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

**Editor-in-Chief** – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

**Deputy Editor-in-Chief** – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

**Executive Secretary** – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

**Members of the Editorial Board:**

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Francesco dell'Isola (Rome, Italy)

Dmitry A. Indeitsev (St. Petersburg, Russia)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

Avzug P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Nikita F. Morozov (St. Petersburg, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan', Russia)

Pavel P. Parkhomenko (Moscow, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)

Alexander F. Rezhnikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Shoji IMATANI (Kyoto, Japan)

Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny, Moscow region, Russia)

Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

Yurii N. Subbotin (Ekaterinburg, Russia)

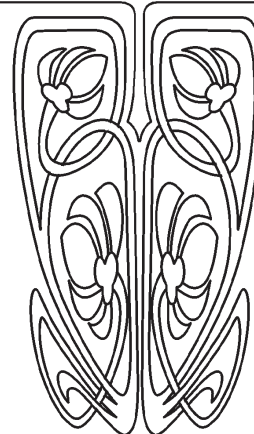
Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

Vjacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)

Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)

**РЕДАКЦИОННАЯ**  
**КОЛЛЕГИЯ**



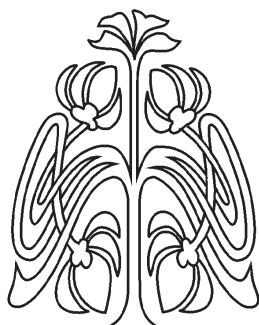


# МАТЕМАТИКА

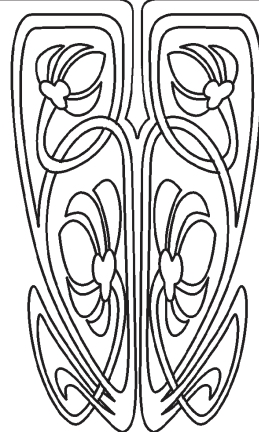
УДК 519.853

## Внешняя оценка компакта лебеговым множеством выпуклой функции

В. В. Абрамова, С. И. Дудов, М. А. Осипцев



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ



Абрамова Вероника Валерьевна, аспирант кафедры математической экономики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, Veronika0322@rambler.ru

Дудов Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической экономики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, DudovSI@info.sgu.ru

Осипцев Михаил Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, Osipcevm@gmail.com

Рассматривается конечномерная задача о вложении заданного компакта  $D \subset \mathbb{R}^p$  в нижнее лебегово множество  $G(\alpha) = \{y \in \mathbb{R}^p : f(y) \leq \alpha\}$  выпуклой функции  $f(\cdot)$  с наименьшим значением  $\alpha$  за счет смещения  $D$ . Ее математическая формализация приводит к задаче минимизации функции  $\phi(x) = \max_{y \in D} f(y - x)$  на  $\mathbb{R}^p$ . Исследованы свойства функции  $\phi(x)$ , получены необходимые и достаточные условия и условия единственности решения задачи. В качестве базового для приложений выделен случай, когда  $f(\cdot)$  — калибровочная функция Минковского некоторого выпуклого тела  $M$ . Показано, что если  $M$  — многогранник, то задача сводится к задаче линейного программирования. Предложен подход к получению приближенного решения, в котором при построении последовательности приближений  $\{x_i\}_{i=0,1,\dots}$ , зная приближение  $x_i$ , для получения  $x_{i+1}$  требуется решить более простую задачу вложения компакта  $D$  в лебегово множество калибровочной функции множества  $M_i = G(\alpha_i)$ , где  $\alpha_i = \phi(x_i)$ . Дается обоснование сходимости последовательности приближений к решению задачи.





**Ключевые слова:** калибровочная функция, внешняя оценка, субдифференциал, квазивыпуклая функция, сильно выпуклое множество, сильно выпуклая функция.

Поступила в редакцию: 12.03.2019 / Принята: 05.06.2019 / Опубликовано: 01.06.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-142-153>

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Оценка сложных множеств множествами простой структуры — одно из актуальных направлений негладкого анализа [1–4]. В рамках этого направления находится и рассматриваемая здесь задача.

Пусть  $D$  — ограниченное замкнутое множество из конечномерного пространства  $\mathbb{R}^p$ , а  $f(\cdot)$  — выпуклая конечная на  $\mathbb{R}^p$  функция. Требуется вложить множество  $D$  в нижнее лебегово множество  $G(\alpha) = \{y \in \mathbb{R}^p : f(y) \leq \alpha\}$  этой функции с наименьшим значением  $\alpha$  за счет смещения  $D$ , т. е. решить задачу

$$\begin{cases} \alpha \rightarrow \min_{(\alpha, x) \in \mathbb{R}^{p+1}}, \\ D - x \subset G(\alpha). \end{cases} \quad (1)$$

Задача такого вида возникает, например, при расчете параметров проектируемого технического устройства [5, 6]. При этом компакт  $D$  может отражать точностные возможности оборудования, используемого при изготовлении устройства, а функция  $f(\cdot)$  — качественные характеристики проектируемого устройства.

Для корректности и нетривиальности задачи будем предполагать, что функция  $f(\cdot)$  ограничена снизу на  $\mathbb{R}^p$ , ее минимальное значение достигается, множество  $G(\alpha_0)$ , где  $\alpha_0 = \min_{x \in \mathbb{R}^p} f(x)$ , является ограниченным и при этом

$$G(\alpha_0)^* - D = \{z \in \mathbb{R}^p : z + D \subset G(\alpha_0)\} = \emptyset.$$

Нетрудно видеть, что задача (1) эквивалентна следующей минимаксной задаче

$$\phi(x) \equiv \max_{y \in D} f(y - x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}. \quad (2)$$

При этом, если  $\phi(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \phi(x)$ , то пара  $(\phi^*, x^*)$ , где  $\phi^* = \phi(x^*)$ , является решением задачи (1).

Нетрудно заключить, что при сделанных предположениях решение задачи существует. Отметим также, что на задачу (2) можно смотреть как на обобщение задачи о чебышевском центре множества  $D$  (случай, когда  $f(\cdot)$  — некоторая норма на  $\mathbb{R}^p$ ).

Цель работы — указать на основные свойства целевой функции задачи (2), получить критерий решения и условия единственности решения, а также предложить подход к получению приближенного решения задачи.

Далее используются следующие обозначения:

$\bar{A}$ ,  $\text{int } A$ ,  $\text{co } A$  — соответственно замыкание, внутренность, выпуклая оболочка множества  $A$ ;

$\|x\|$  — евклидова норма элемента  $x \in \mathbb{R}^p$ ;



$\partial f(x)$  — субдифференциал выпуклой функции  $f(x)$  в точке  $x$ ;

$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : \|x - y\| \leq r\}$  — шар с центром в точке  $x$  и радиусом  $r$ ;

$\langle x, y \rangle$  — скалярное произведение элементов  $x$  и  $y$  из  $\mathbb{R}^p$ ;

$s(\cdot, A) = \sup_{a \in A} \langle \cdot, a \rangle$  — опорная функция множества  $A$ ,  $0_p = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$ .

## 2. СВОЙСТВА ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ. КРИТЕРИЙ РЕШЕНИЯ

Основные свойства функции  $\phi(x)$  отражает следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $f(x)$  является выпуклой конечной на  $\mathbb{R}^p$  функцией. Тогда функция  $\phi(x)$  является:

1) выпуклой конечной на  $\mathbb{R}^p$  функцией, а ее субдифференциал в любой точке  $x \in \mathbb{R}^p$  может быть выражен в виде

$$\partial \phi(x) = -\text{co}\{\partial f(z - x) : z \in Q^\phi(x)\}, \quad (3)$$

где  $Q^\phi(x) = \{z \in D : f(z - x) = \phi(x)\}$ ;

2) строго выпуклой, если функция  $f(\cdot)$  строго выпукла на  $\mathbb{R}^p$ ;

3) сильно выпуклой на  $\mathbb{R}^p$  с константой  $C > 0$ , т. е. для любых точек  $x_0, x_1$  из  $\mathbb{R}^p$  и  $\alpha \in [0, 1]$  выполняется

$$\phi((1 - \alpha)x_0 + \alpha x_1) \leq (1 - \alpha)\phi(x_0) + \alpha\phi(x_1) - \frac{C}{2}\alpha(1 - \alpha)\|x_0 - x_1\|^2,$$

если функция  $f(\cdot)$  сильно выпукла на  $\mathbb{R}^p$  с константой  $C$ ;

4) строго квазивыпуклой, т. е. для любых точек  $x_0 \neq x_1$  из  $\mathbb{R}^p$  и  $\alpha \in (0, 1)$  выполняется

$$\phi((1 - \alpha)x_0 + \alpha x_1) < \max\{\phi(x_0), \phi(x_1)\},$$

если функция  $f(\cdot)$  строго квазивыпукла на  $\mathbb{R}^p$ .

**Доказательство.** 1) Функция  $\phi(x)$ , как функция максимума от семейства выпуклых конечных функций  $f(y - x)$  по параметру  $y$  на компакте  $D$ , также является выпуклой конечной на  $\mathbb{R}^p$ . Кроме того, функция  $\Psi(x, y) = f(y - x)$  является непрерывной всюду по  $x$  и по  $y$ . Тогда, по известной в выпуклом анализе теореме о субдифференциале функции супремума от семейства выпуклых функций по параметру (см. [1, гл. 2, § 1], [7, гл. 4, § 4.2] или [8, гл. 1, § 1.17]), получаем

$$\partial \phi(x) = -\overline{\text{co}}\{\partial f(z - x) : z \in Q^\phi(x)\}.$$

Знак замыкания здесь можно снять. Действительно, непрерывность выпуклой конечной функции  $f(\cdot)$  и замкнутость множества  $D$  дают замкнутость множества  $Q^\phi(x)$ . Кроме того, субдифференциал  $\partial f(\cdot)$ , как многозначное отображение, обладает полунепрерывностью сверху. Отсюда следует замкнутость множества в фигурной скобке.

Свойства 2)–4) легко вытекают из дополнительных условий, накладываемых на функцию  $f(\cdot)$ .  $\square$

**Теорема 2.** 1. Для того чтобы точка  $x^*$  была точкой минимума функции  $\phi(x)$  на  $\mathbb{R}^p$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$0_p \in \text{co}\{\partial f(z - x^*) : z \in Q^\phi(x^*)\}. \quad (4)$$



2. Если существует  $\delta > 0$  такое, что

$$B(0_p, \delta) \subset \text{co}\{\partial f(z - x^*) : z \in Q^\phi(x^*)\}, \quad (5)$$

то  $x^*$  является единственной точкой минимума функции  $\phi(x)$  на  $\mathbb{R}^p$ , причем

$$\phi(x) \geq \phi(x^*) + \delta \|x - x^*\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^p. \quad (6)$$

**Доказательство.** 1. Первое утверждение теоремы вытекает из формулы субдифференциала (3) и известного в выпуклом анализе критерия достижения выпуклой функции своего минимального значения (например, [1, гл. 4, § 2])

$$\phi(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \phi(x) \Leftrightarrow 0_p \in \partial \phi(x^*).$$

2. Из (3)–(5), в соответствии с определением субдифференциала [1–3]

$$\partial \phi(x) = \{v \in \mathbb{R}^p : \phi(y) - \phi(x) \geq \langle v, y - x \rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^p\},$$

следует

$$\phi(x) - \phi(x^*) \geq \langle v, x - x^* \rangle, \quad \forall v \in B(0_p, \delta), x \in \mathbb{R}^p.$$

Отсюда, положив  $v = \frac{\delta}{\|x - x^*\|}(x - x^*)$ , получаем (6).  $\square$

**Замечание.** Очевидно, единственность решения задачи (2), кроме соотношения (5), обеспечивает также строгая квазивыпуклость выпуклой функции  $f(\cdot)$  и тем более ее строгая или сильная выпуклость. Это вытекает из теоремы 1.

### 3. БАЗОВЫЙ СЛУЧАЙ

Базовым для предлагаемого далее подхода к получению приближенного решения задачи (2) является случай, когда функция  $f(\cdot)$  является калибром (калибровочной функцией Минковского) некоторого выпуклого телесного компакта  $M$ , причем  $0_p \in \text{int } M$ , т. е.

$$f(x) = k(x, M) \equiv \inf\{\alpha \geq 0 : x \in \alpha M\}. \quad (7)$$

Напомним основные свойства калибра (например, [1, 9]):

- а) если  $\lambda > 0$ , то  $k(\lambda x, M) = \lambda k(x, M)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^p$ ;
- б) если  $x \in M$ , то  $k(x, M) \leq 1$ , а если  $x \notin M$ , то  $k(x, M) > 1$ ;
- в)  $k(x + y, M) \leq k(x, M) + k(y, M)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^p$ .

Свойства выпуклого тела  $M$  могут отражаться как на свойствах решения задачи, так и на сходимости предлагаемого метода получения приближенного решения.

Выделим для рассмотрения два частных случая.

**3.1.** Пусть выпуклое тело  $M$  является многогранником, заданным в виде

$$M = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle A_i, y \rangle \leq 1, \quad i = \overline{1, m}\},$$

где  $A_i \in \mathbb{R}^p$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $0_p \in \text{int } \text{co}\{A_i : i = \overline{1, m}\}$ .

Из свойств калибра следует: если  $\max_{i=\overline{1, m}} \langle A_i, x \rangle = 1$ , то точка  $x$  является граничной для  $M$  и  $k(x, M) = 1$ . А поскольку калибр является положительно однородной функцией, мы получаем для него формулу

$$k(x, M) = \max_{i=\overline{1, m}} \langle A_i, x \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^p.$$





Тогда задача (2) принимает вид

$$\max_{y \in D} \max_{i=\overline{1,m}} \langle A_i, y - x \rangle \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}$$

или

$$\max_{i=\overline{1,m}} \{a_i - \langle A_i, x \rangle\} \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}, \quad (8)$$

где  $a_i = \max_{y \in D} \langle A_i, y \rangle$ .

Задача (8) известным приемом [10] сводится к задаче линейного программирования. А именно справедлива

**Теорема 3.** *Задача (8) эквивалентна следующей задаче линейного программирования:*

$$\begin{cases} x^{(p+1)} \rightarrow \min_{(x, x^{(p+1)}) \in \mathbb{R}^{p+1}}, \\ \langle A_i, x \rangle + x^{(p+1)} - a_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (9)$$

Причем, если  $\tilde{x}_0 = (x_0, x_0^{(p+1)})$  — решение задачи (9), то  $x_0$  — решение задачи (8). А если  $x_0$  — решение задачи (8), то  $\tilde{x}_0 = (x_0, x_0^{(p+1)})$ , где  $x_0^{(p+1)} = \max_{i=\overline{1,m}} \{a_i - \langle A_i, x_0 \rangle\}$ , решение задачи (9).

**3.2.** Теперь предположим, что  $M$  является сильно выпуклым множеством. Посмотрим, как это отразится на свойствах функции  $f(\cdot)$  вида (7) и, соответственно, на функции  $\phi(\cdot)$ .

Сначала напомним некоторые понятия и факты из параметрически выпуклого анализа [8, 11].

**Определение 1.** Множество  $A \subset \mathbb{R}^p$  называется  $r$ -сильно выпуклым, если оно представимо в виде пересечения евклидовых шаров радиуса  $r$ .

Наряду с давно введенными понятиями сильно и слабо выпуклых (вогнутых) функций (см. [8, 11–13]) имеют место эквивалентные им альтернативные определения, которыми мы и будем пользоваться.

**Определение 2.** Пусть задано выпуклое множество  $X \subset \mathbb{R}^p$  и функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Функция  $f(\cdot)$  называется *сильно (слабо) выпуклой* с константой  $C > 0$  на множестве  $X$ , если функция  $f(x) - \frac{C}{2}\|x\|^2$  ( $f(x) + \frac{C}{2}\|x\|^2$ ) выпукла на  $X$ .

Функция  $f(\cdot)$  называется *сильно (слабо) вогнутой* с константой  $C > 0$  на множестве  $X$ , если функция  $-f(\cdot)$  сильно (слабо) выпукла на  $X$  с константой  $C > 0$ .

**Лемма 1.** ([11, гл. 2, § 2.8]). Если функция  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  слабо вогнута с константой  $C > 0$ , то ее сопряженная функция

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^p} \{\langle x, y \rangle - f(x)\}$$

сильно выпукла с константой  $\frac{1}{C}$ .

**Лемма 2.** ([11, гл. 3, § 3.7]). Пусть  $M \subset \mathbb{R}^p$  является  $r$ -сильно выпуклым множеством и задана дифференцируемая, слабо вогнутая с константой  $C > 0$  функция  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что  $|F'(t)| \leq L|t|$  для любого  $t \in \mathbb{R}$ . Тогда функция  $f(x) = F(s(x, M))$  слабо вогнута на  $\mathbb{R}^p$  с константой  $C_M^2 C + LC_M r$ , где  $C_M = \sup_{x \in M} \|x\|$ .



Теперь докажем важное свойство калибра.

**Лемма 3.** Пусть  $M \subset \mathbb{R}^p$  является  $r$ -сильно выпуклым множеством и  $C_M = \sup_{x \in M} \|x\|$ . Тогда функция  $\Psi(\cdot) = k^2(\cdot, M)$  является сильно выпуклой на  $\mathbb{R}^p$  с константой, равной  $\frac{2}{C_M(C_M + r)}$ .

**Доказательство.** Для сопряженной к  $\Psi(\cdot)$  функции получаем

$$\begin{aligned} \Psi^*(y) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^p} \{\langle y, x \rangle - k^2(x, M)\} = \sup_{\lambda \geq 0} \sup_{x: k(x, M)=1} \{\langle y, \lambda x \rangle - \lambda^2 k^2(x, M)\} = \\ &= \sup_{\lambda \geq 0} \{\lambda \sup_{x: k(x, M)=1} \langle y, x \rangle - \lambda^2\} = \sup_{\lambda \geq 0} \{\lambda s(y, M) - \lambda^2\} = \frac{s^2(y, M)}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом, сопряженная функция имеет вид

$$\Psi^*(y) = F(s(y, M)), \quad F(t) = \frac{t^2}{4}.$$

Функция  $F(\cdot)$  является дифференцируемой,  $|F'(t)| \leq L|t|$  для  $L = 1/2$  и, в соответствии с определением 2, слабо вогнута с константой  $1/2$ . Поэтому по лемме 2 функция  $\Psi^*(y)$  слабо вогнута с константой  $\frac{1}{2}C_M(C_M + r)$ . Тогда по лемме 1 функция  $\Psi^{**}(\cdot) = (k^2)^{**}(\cdot, M)$  будет сильно выпуклой с константой  $2(C_M(C_M + r))^{-1}$ . Остается заметить, что функция  $k^2(\cdot, M)$  является выпуклой, как квадрат выпуклой функции с неотрицательными значениями, и непрерывной на  $\mathbb{R}^p$ . Поэтому по теореме Фенхеля – Моро [7–9, 11] выполняется  $(k^2)^{**}(\cdot, M) = k^2(\cdot, M)$ .  $\square$

Очевидным следствием леммы 3 является

**Теорема 4.** Если множество  $M$  является  $r$ -сильно выпуклым и  $C_M = \sup_{x \in M} \|x\|$ , то функция  $\phi^2(x) = \max_{y \in D} k^2(y - x, M)$  является сильно выпуклой на  $\mathbb{R}^p$  с константой  $\frac{2}{C_M(C_M + r)}$ .

**Замечание.** Сама функция  $\phi(\cdot)$ , как и  $f(\cdot)$  вида (7), не является сильно выпуклой независимо от свойств множества  $M$ . Минимизация функции  $\phi(\cdot)$  при  $f(\cdot)$ , имеющей вид (7), эквивалентна минимизации функции  $\phi^2(x)$ . А применение к минимизации сильно выпуклой функции численных методов (например, субградиентного типа, см. [2, 14]) позволяет рассчитывать на сходимость последовательности приближений к решению со скоростью геометрической прогрессии.

#### 4. ПОДХОД К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ

Поскольку  $\phi(\cdot)$  является выпуклой функцией, известна формула ее субдифференциала, то для получения приближенного решения задачи минимизации этой функции можно применять хорошо известные численные методы выпуклого программирования (см., например, [2, 14]). Мы обозначим здесь еще один возможный подход к получению приближенного решения задачи (2) с произвольной выпуклой функцией  $f(x)$  и компактом  $D$ , удовлетворяющих заявленным в п. 1 условиям.



## Принципиальная схема метода

Пусть  $f(y_0) = \min_{y \in \mathbb{R}^p} f(y)$ . По исходному предположению  $G(\alpha_0)^* - D = \emptyset$ , где  $\alpha_0 = f(y_0)$ . Поэтому в силу непрерывности выпуклой конечной функции  $f(\cdot)$  выполняется  $y_0 \in \text{int} G(\alpha)$  для любого  $\alpha > \alpha_0$  (или  $0_p \in \text{int}(G(\alpha) - y_0)$ ). Последовательность приближений  $\{x_i\}_{i=0,1,\dots}$  строится следующим образом. Точка начального приближения  $x_0$  выбирается произвольно. Предположим, уже получена точка  $x_i$ . Возьмем в качестве  $M_i = G(\alpha_i) - y_0$ , где  $\alpha_i = \phi(x_i)$ . После этого решаем задачу

$$\phi_i(x) \equiv \max_{y \in D - y_0} k(y - x, M_i) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p} \quad (10)$$

и в качестве  $x_{i+1}$  берем одно из ее решений, т.е.  $\phi_i(x_{i+1}) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \phi_i(x)$ . Если при этом окажется, что  $\phi(x_i) = \phi(x_{i+1})$ , то, как будет доказано, это будет означать, что  $\phi(x_i) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \phi(x)$  и итерационный процесс на этом заканчивается. В противном случае, т.е. при  $\phi(x_i) \neq \phi(x_{i+1})$ , процесс построения последовательности продолжается.

## Обоснование сходимости

Без потери общности будем далее считать  $y_0 = 0_p$ . Из предполагаемой ограниченности множества  $G(\alpha_0)$  и выпуклости функции  $f(\cdot)$  следует ограниченность множества  $G(\alpha)$  при любом  $\alpha > \alpha_0$  [2, гл. 1, § 9]. Напомним также, что выпуклая конечная функция удовлетворяет условию Липшица на любом ограниченном множестве [2, 8, 9].

Докажем следующий вспомогательный факт.

**Лемма 4.** Пусть  $\alpha > \phi^* = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \phi(x)$ ,  $L$  — константа Липшица для функции  $f(\cdot)$  на множестве  $G(\alpha)$  и  $C \geq \sup_{x \in G(\alpha)} \|x\|$ . Если точка  $x^*(\alpha)$  такова, что

$$\max_{y \in D} k(y - x^*(\alpha), G(\alpha)) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \max_{y \in D} k(y - x, G(\alpha)), \quad (11)$$

то

$$\phi(x^*(\alpha)) \leq \alpha - \frac{(\alpha - \alpha_0)(\alpha - \phi^*)}{LC + \alpha - \phi^*}. \quad (12)$$

**Доказательство.** Из липшицевости функции  $f(\cdot)$  следует

$$G(\phi^*) + B(0_p, \Delta) \subset G(\alpha), \quad (13)$$

где  $\Delta = \frac{\alpha - \phi^*}{L}$ . С другой стороны, поскольку  $G(\alpha^*) \subset G(\alpha)$  и  $\frac{1}{C}G(\alpha) \subset B(0_p, 1)$ , то

$$\frac{C + \Delta}{C}G(\phi^*) \subset G(\phi^*) + B(0_p, \Delta). \quad (14)$$

Если  $x^* \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbb{R}^p} \phi(x)$ , то  $D - x^* \subset G(\phi^*)$ . Поэтому, учитывая (13)–(14), имеем

$$D - x^* \subset \frac{C}{C + \Delta}G(\alpha). \quad (15)$$





Из (11), (15) и определения калибра вытекает

$$\max_{y \in D} k(y - x^*(\alpha), G(\alpha)) \leq \max_{y \in D} k(y - x^*, G(\alpha)) \leq \frac{C}{C + \Delta}. \quad (16)$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi(x, \alpha) = \alpha_0 + (\alpha - \alpha_0)k(x, G(\alpha)). \quad (17)$$

Нетрудно видеть, что в силу выпуклости функции  $f(\cdot)$  и свойств калибра

$$f(x) \leq \Psi(x, \alpha), \quad \forall x \in G(\alpha). \quad (18)$$

Очевидно  $D - x^*(\alpha) \subset G(\alpha)$ . Тогда, используя (16)–(18), получаем

$$\begin{aligned} \phi(x^*(\alpha)) &= \max_{y \in D} f(y - x^*(\alpha)) \leq \max_{y \in D} \Psi(y - x^*(\alpha), \alpha) = \\ &= \alpha_0 + (\alpha - \alpha_0) \max_{y \in D} k(y - x^*(\alpha), G(\alpha)) \leq \alpha_0 + (\alpha - \alpha_0) \frac{C}{C + \Delta}. \end{aligned}$$

После очевидного преобразования этого неравенства и подстановки  $\Delta = \frac{\alpha - \phi^*}{L}$  получаем (12).  $\square$

Обозначим через  $\rho(x, S^*) = \inf_{y \in S^*} \|x - y\|$  — расстояние от точки  $x$  до  $S^* = \{y \in \mathbb{R}^p : \phi(y) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \phi(x)\}$  — множества решений задачи (2).

**Теорема 5.** Если последовательность  $\{x_i\}_{i=0,1,\dots}$  строится в соответствии с указанной схемой, то возможны два варианта:

1) на некотором конечном шаге  $i_0 + 1$  будет выполняться равенство  $\phi(x_{i_0}) = \phi(x_{i_0+1})$ , что будет означать  $\phi(x_{i_0}) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \phi(x)$ ;

2) последовательность  $\{\phi(x_i)\}_{i=0,1,\dots}$  является строго убывающей и бесконечной, причем

$$\phi(x_{i+1}) \leq \phi(x_i) - \frac{(\phi(x_i) - \alpha_0)(\phi(x_i) - \phi^*)}{LC + \phi(x_i) - \phi^*}, \quad (19)$$

где  $L$  — константа Липшица для функции  $f(\cdot)$  на множестве  $G(\alpha_0)$ , а  $C \geq \sup_{x \in G(\alpha_0)} \|x\|$ . Кроме того, имеет место

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \rho(x_i, S^*) = 0. \quad (20)$$

**Доказательство.** В соответствии со схемой метода точка  $x_{i+1}$  является одним из решений задачи (10). Если  $\alpha_i = \phi(x_i) > \phi^*$ , то по лемме 4, при  $\alpha = \alpha_i$  и  $x^*(\alpha_i) = x_{i+1}$ , получаем  $\phi(x_{i+1}) < \phi(x_i)$ . Следовательно, если на конечном шаге  $i_0 + 1$  выполняется равенство  $\phi(x_{i_0}) = \phi(x_{i_0+1})$ , то это будет означать  $\phi(x_{i_0}) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \phi(x) = \phi^*$ .

В противном случае, т. е. если такое равенство не достигается на конечном шаге, последовательность  $\{\phi(x_i)\}_{i=0,1,\dots}$ , подчиняясь, по лемме 4, неравенству (19), будет строго убывающей и бесконечной.

Предположим, (20) неверно. Тогда существует подпоследовательность  $\{x_{i_j}\}_{j=0,1,\dots}$  такая, что для некоторого  $a > 0$  выполняется

$$\rho(x_{i_j}, S^*) \geq a, \quad j = 0, 1, \dots \quad (21)$$



Последовательность  $\{x_i\}_{i=0,1,\dots}$  является ограниченной, поскольку

$$D - x_i \subset G(\phi(x_i)) \subset G(\phi(x_0)),$$

а любое множество  $G(\alpha)$ , как уже отмечалось, в силу исходных требований функции к  $f(\cdot)$  и множеству  $D$  является ограниченным. Поэтому без потери общности можно считать подпоследовательность  $\{x_{i_j}\}_{j=0,1,\dots}$  сходящейся:  $x_{i_j} \rightarrow x^*$ ,  $j \rightarrow \infty$ . Известно, что функция расстояния является непрерывной. Поэтому, переходя к пределу по  $j \rightarrow \infty$  в неравенстве (21), получаем  $\rho(x^*, S^*) \geq a$  и, следовательно,  $x^* \notin S^*$  и  $\phi(x^*) > \phi^*$ .

С другой стороны, и функция  $\phi(x)$ , как выпуклая и конечная на  $\mathbb{R}^p$ , является непрерывной. Поэтому из монотонности последовательности  $\{\phi(x_i)\}_{i=0,1,\dots}$  следует  $\lim_{i \rightarrow \infty} \phi(x_i) = \lim_{j \rightarrow \infty} \phi(x_{i_j}) = \phi(x^*)$ . Тогда, переходя в (19) к пределу по  $i \rightarrow \infty$ , получаем неравенство

$$\phi(x^*) \leq \phi(x^*) - \frac{(\phi(x^*) - \alpha_0)(\phi(x^*) - \phi^*)}{LC + \phi(x^*) - \phi^*},$$

которое является противоречивым ввиду полученного выше неравенства  $\phi(x^*) > \phi^*$ . Теорема доказана полностью.  $\square$

Авторы еще раз подчеркивают, что лишь обозначили альтернативный применению известных методов выпуклого программирования подход к получению приближенного решения рассматриваемой задачи. Практическая реализация предполагает умение решать на каждом шаге некоторые нетривиальные (но более простые по отношению к исходной) вспомогательные задачи. В связи с этим приведем ряд комментариев, которые будут полезны при реализации данного подхода. При этом сразу отметим, что компакт  $D$  будем считать выпуклым, поскольку в случае невыпуклости его замена в задаче (2) на  $co D$  дает новую задачу, эквивалентную прежней.

1. Изначально можно аппроксимировать выпуклый компакт  $D$  выпуклым многогранником  $D_\varepsilon$  с некоторой погрешностью  $\varepsilon > 0$ . Тогда подсчет приближенного к  $\phi(x)$  значения  $\phi^\varepsilon(x) = \max_{y \in D_\varepsilon} f(y - x)$  будет сведен к вычислению значений  $f(y - x)$  для  $y$  из конечного множества вершин многогранника  $D_\varepsilon$  и выбору максимального из них.

2. Множество  $M_i = G(\alpha_i) - y_0$  на каждом шаге также можно аппроксимировать многогранником. Отметим наличие обширного спектра методов полиэдральной аппроксимации (см., например, обзор [15]). В частности, в нашем случае из точки  $y_0$ , которая является внутренней для  $G(\alpha)$  при  $\alpha > \alpha_0$ , можно провести лучи до пересечения с границей  $M_i$  и в этих граничных точках построить опорные к  $M_i$  гиперплоскости, которые и образуют многогранник  $M_i^\delta$ , аппроксимирующий многогранник  $M_i$ . Направление этих лучей можно задать сеткой точек «мелкости»  $\delta > 0$  на единичной сфере (см. [8, § 4.9]).

3. В качестве приближенного значения  $k(x, M_i)$  можно брать  $k(x, M_i^\delta)$ . Если многогранник  $M_i^\delta$  выражен в форме  $M_i^\delta = \{x \in \mathbb{R}^p : \langle A_j, x \rangle \leq 1, j = \overline{1, m}\}$ , то, как отмечалось в п. 3.1, справедлива формула

$$k(x, M_i^\delta) = \max_{j=1, m} \langle A_j, x \rangle.$$

Следовательно, в качестве приближенного значения для  $\phi_i(x)$  можно брать

$$\phi_i^{\varepsilon, \delta}(x) = \max_{y \in D_\varepsilon} k(y - x, M_i^\delta) = \max_{j=1, m} \{a_j - \langle A_j, x \rangle\},$$

где  $a_j = \max_{y \in D_\varepsilon} \langle A_j, y \rangle$ .



4. Решение задачи (10) можно заменить решением «приближенной» задачи

$$\phi_i^{\varepsilon, \delta}(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p},$$

которая, как отмечалось в п. 3.1, может быть сведена к задаче линейного программирования.

5. Конечно, такой подход потребует исследования устойчивости и чувствительности решения задачи к погрешности полиэдрального приближения выпуклого компакта  $D$  и множеств  $M_i$ .

**Благодарности.** Авторы выражают признательность рецензенту за указанные погрешности и конструктивную критику.

### Библиографический список

1. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980. 320 с.
2. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М. : Наука, 1981. 384 с.
3. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М. : Наука, 1990. 431 с.
4. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М. : Наука, 1988. 280 с.
5. Брейтон Р. К., Хэтел Г. Д., Санджованни-Винчензелли А. Л. Обзор методов оптимального проектирования интегральных схем // ТИИЭР. 1981. Т. 69, № 10. С. 180–215.
6. Дудов С. И., Мещанов В. П. Параметрическая оптимизация проектируемых устройств по критериям стоимости и качества // Обзоры по электронике. Сер. 1. Электроника СВЧ. М. : ЦНИИ «Электроника», 1990. Вып. 1 (1512). 40 с.
7. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М. : Наука, 1974. 481 с.
8. Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физматлит, 2004. 240 с.
9. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. М. : Мир, 1973. 340 с.
10. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. М. : Наука, 1964. 460 с.
11. Иванов Г. Е. Слабо выпуклые множества и функции. М. : Физматлит, 2006. 352 с.
12. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. М. : Наука, 1983. 384 с.
13. Vial J.-P. Strong and weak convexity of set and funtions // Math. Ops. Res. 1983. Vol. 8, № 2. P. 231–259.
14. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М. : МЦНМО, 2011. 433 с.
15. Бронштейн Е. М. Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками // СМФН. 2007. Т. 22. С. 5–37.

### Образец для цитирования:

Абрамова В. В., Дудов С. И., Осипцев М. А. Внешняя оценка компакта лебеговым множеством выпуклой функции // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 142–153. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-142-153>





## The External Estimate of the Compact Set by Lebesgue Set of the Convex Function

V. V. Abramova, S. I. Dudov, M. A. Osiptsev

Veronika V. Abramova, <https://orcid.org/0000-0002-7926-1347>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, [Veronika0322@rambler.ru](mailto:Veronika0322@rambler.ru)

Sergei I. Dudov, <https://orcid.org/0000-0002-7926-1347>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, [DudovSI@info.sgu.ru](mailto:DudovSI@info.sgu.ru)

Mikhail A. Osiptsev, <https://orcid.org/0000-0002-7926-1347>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, [Osipcevm@gmail.com](mailto:Osipcevm@gmail.com)

The finite-dimensional problem of embedding a given compact  $D \subset \mathbb{R}^p$  into the lower Lebesgue set  $G(\alpha) = \{y \in \mathbb{R}^p : f(y) \leq \alpha\}$  of the convex function  $f(\cdot)$  with the smallest value of  $\alpha$  due to the offset of  $D$  is considered. Its mathematical formalization leads to the problem of minimizing the function  $\phi(x) = \max_{y \in D} f(y - x)$  on  $\mathbb{R}^p$ . The properties of the function  $\phi(x)$  are researched, necessary and sufficient conditions and conditions for the uniqueness of the problem solution are obtained. As an important case for applications, the case when  $f(\cdot)$  is the Minkowski gauge function of some convex body  $M$  is singled out. It is shown that if  $M$  is a polyhedron, then the problem reduces to a linear programming problem. The approach to get an approximate solution is proposed in which, having known the approximation of  $x_i$  to obtain  $x_{i+1}$  it is necessary to solve the simpler problem of embedding the compact set  $D$  into the Lebesgue set of the gauge function of the set  $M_i = G(a_i)$ , where  $a_i = f(x_i)$ . The rationale for the convergence for a sequence of approximations to the problem solution is given.

**Keywords:** gauge function, external estimate, subdifferential, quasiconvex function, strongly convex set, strongly convex function.

Received: 12.03.2019 / Accepted: 05.06.2019 / Published: 01.06.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

**Acknowledgements:** The authors are grateful to the referee for the indicated errors and constructive criticism.

### References

1. Pschenichnyi B. N. *Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi* [Convex Analysis and Extremal Problems]. Moscow, Nauka, 1980. 320 p. (in Russian).
2. Demyanov V. F., Vasiliev L. V. *Nondifferentiable Optimization*. New York, Springer-Optimization Software, 1986. 452 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1981. 384 p.).
3. Demyanov V. F., Rubinov A. V. *Osnovy negladkogo analiza i kvazidifferentsial'noe ischislenie* [Elements of nonsmooth analysis and quasidifferential calculus]. Moscow, Nauka, 1990. 431 p. (in Russian).
4. Clarke F. H. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. SIAM, 1990. 308 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1988. 280 p.).
5. Brayton R. K., Hachtel G. D., Sangiovanni-Vincentelli A. L. A survey of optimization techniques for integrated-circuit design. *Proceedings of the IEEE*, 1981, vol. 69, iss. 10, pp. 1334–1362.



6. Dudov S. I., Meshchanov V. P. Parametric optimization of the designed devices according to the criteria of cost and quality. *Obzory po elektronike. Ser. 1. Elektronika SVCh* [Reviews on Electronics. Ser. 1. Electronics Microwave]. Moscow, TsNII "Elektronika", 1990, iss. 1 (1512). 40 p. (in Russian).
7. Ioffe A. D., Tikhomirov V. M. *Theory of extremal problems*. Amsterdam, Nord Holland PC, 1979. 460 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1974. 481 p.).
8. Polovinkin E. S., Balashov M. V. *Elementy vypuklogo i sil'no vypuklogo analiza* [Elements of convex and strongly convex analysis]. Moscow, Fizmatlit, 2004. 240 p. (in Russian).
9. Rockafellar R. T. *Convex Analysis*. Princeton, Princeton Univ. Press, 1970. 472 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1973. 340 p.).
10. Zukhovitski S. I., Avdeeva L. I. *Linejnoe i vypukloe programmirovaniye* [Linear and Convex Programming]. Moscow, Fizmatlit, 1967. 460 p. (in Russian).
11. Ivanov G. E. *Slabo vypuklye funktsii i mnozhestva* [Weakly convex sets and functions]. Moscow, Fizmatlit, 2004. 352 p. (in Russian).
12. Poliak B. T. *Introduction to optimization*. New York, Optimization Software, 1987. 460 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1983. 384 p.).
13. Vial J.-P. Strong and weak convexity of set and funtions. *Math. Ops. Res.*, 1983, vol. 8, no. 2, pp. 231–259.
14. Vasiliev F. P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow, MTsNMO, 2011. 433 p. (in Russian).
15. Bronstein E. M. Approximation of convex sets by polytopes. *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 153, iss. 6, pp. 727–762.

---

**Cite this article as:**

Abramova V. V., Dudov S. I., Osipov M. A. The External Estimate of the Compact Set by Lebesgue Set of the Convex Function. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 142–153 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-142-153>

---



# Symmetrization in Clean and Nil-Clean Rings

P. V. Danchev

Peter V. Danchev, <https://orcid.org/0000-0002-2016-2336>, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, 8 Acad. G. Bonchev St., Sofia 1113, Bulgaria, [danchev@math.bas.bg](mailto:danchev@math.bas.bg), [pvdanchev@yahoo.com](mailto:pvdanchev@yahoo.com)

We introduce and investigate *D-clean* and *D-nil-clean* rings as well as some other closely related symmetric versions of cleanness and nil-cleanness. A comprehensive structural characterization is given for these symmetrically clean and symmetrically nil-clean rings in terms of Jacobson radical and its quotient. It is proved that strongly clean (resp., strongly nil-clean) rings are always *D-clean* (resp., *D-nil-clean*). Our results corroborate our recent findings published in Bull. Irkutsk State Univ., Math. (2019) and Turk. J. Math. (2019). We also show that weakly nil-clean rings defined as in Danchev-McGovern (J. Algebra, 2015) and Breaz–Danchev–Zhou (J. Algebra & Appl., 2016) are actually weakly nil clean in the sense of Danchev–Šter (Taiwanese J. Math., 2015). This answers the question of the reviewer D. Khurana (Math. Review, 2017).

**Keywords:** L-clean rings, R-clean rings, D-clean rings, symmetrization, weakly nil(-)clean rings.

Received: 03.12.2019 / Accepted: 22.01.2020 / Published: 01.06.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-154-160>

## 1. Introduction and Background

Throughout this paper, all rings  $R$  are assumed to be associative and unital with identity element 1 different from the zero element 0 of  $R$ . Our standard terminology and notations are mainly in agreement with [1]. For instance,  $U(R)$  denotes the set of all units in  $R$ ,  $Id(R)$  denotes the set of all idempotents in  $R$ ,  $Nil(R)$  denotes the set of all nilpotents in  $R$ , and  $J(R)$  denotes the Jacobson radical of  $R$ . The specific notions will be provided in the present article.

The fundamental paper [2] introduced and studied the class of *clean* rings  $R$  as those rings for which  $R = U(R) + Id(R)$ . Correspondingly, a *nil-clean* ring  $R$  is one for which  $R = Nil(R) + Id(R)$  (see [3] and [4]). It is pretty easy to check that nil-clean rings are always clean, but not the converse.

In making up an attempt to simplify these two too complicated ring structures, in [5] we defined both L-clean and R-clean rings (resp., L-nil-clean and R-nil-clean rings) as members of subclasses of the classes of clean and nil-clean rings, respectively, possessing left or right symmetric property of the existing idempotent elements. For instance, a ring  $R$  is called *L-clean* if, for any  $a \in R$ , there is  $e \in aR \cap Id(R)$  with  $a = (1 - e) + u$  for some  $u \in U(R)$  and, resp., it is called *R-clean* if, for any  $a \in R$ , there is  $e \in Ra \cap Id(R)$  with  $a = (1 - e) + u$  for some  $u \in U(R)$ . Analogous way of defining *L-nil-clean* and *R-nil-clean* leads to  $q \in Nil(R)$  with  $a = e + q$ , where either  $e \in aR \cap Id(R)$  or  $e \in Ra \cap Id(R)$ . It was proved there that L-nil-clean (resp., R-nil-clean) rings are L-clean (resp., R-clean).

This provides us with our first basic tool.

**Definition 1.** A ring  $R$  is said to be *double nil-clean* or just *D-nil-clean* for short if, for every  $a \in R$ , there exists  $e \in (aRa) \cap Id(R)$  such that  $a = e + q$  for some  $q \in Nil(R)$ .





Certainly, D-nil-clean rings are nil-clean. As an immediate example, Boolean rings are clearly of a such kind. Besides, the condition  $e \in aRa$  is obviously equivalent to  $e \in aR \cap Ra$  as  $aRa \subseteq aR \cap Ra$  and if  $e = ab = ca$  for some  $b, c \in R$  then it follows that  $e = e.e = abca \in aRa$  as needed. This illustrates that D-nil-clean rings are both L-nil-clean and R-nil-clean; however, the converse is still unknown.

Another, non-commutative, example is the ring  $R = M_2(\mathbb{Z}_2)$ . In fact, all elements of this matrix ring are nilpotents, idempotents and nil-clean units. If  $q \in R$  is a nilpotent, then  $q = 0 + q$  and  $0 \in qRq$ . Next, if  $e \in R$  is an idempotent, then  $e = e + 0$  and  $e \in eRe$  because  $e = e.1.e$  or  $e = e.e.e$ . If  $u \in R$  is a unit with  $u = e + q$  for some idempotent  $e \in R$  and a nilpotent  $q \in R$ , then  $e = u - q = u(u^{-1} - u^{-1}qu^{-1})u \in uRu$ , as we need. Q.E.D.

This provides us with our second basic tool.

**Definition 2.** A ring  $R$  is said to be *double clean* or just *D-clean* for short if, for each  $a \in R$ , there exists  $e \in (aRa) \cap Id(R)$  such that  $a = (1 - e) + u$  for some  $u \in U(R)$ .

Certainly, D-clean rings are clean. As an example of a D-clean ring, strongly regular rings are clearly of a such kind. As above demonstrated, D-clean rings are both L-clean and R-clean; however, the converse is still unknown. What may also be observed is that D-nil-clean rings are themselves D-clean. Indeed, for any  $a \in R$ , in view of Definition 1  $a = e + q$  for some  $e \in Id(R) \cap (aRa)$  and  $q \in Nil(R)$ . Therefore  $a = (1 - e) + (2e + q - 1)$ . Since  $2 \in Nil(R)$  (see, for instance, [3]) by simple operations — omitting some details — we find that  $2e + q \in Nil(R)$  and  $2e + q - 1 \in U(R)$ . It meets our needs.

However, in [6] we defined the two concepts of *regularly nil clean rings* and *Utumi rings* as follows: a ring  $R$  is regularly nil clean if, for every  $a \in R$ , there is  $e \in Ra \cap Id(R)$  such that  $a(1 - e) \in Nil(R)$  and  $(1 - e)a \in Nil(R)$  or, in an equivalent form, there is  $f \in aR \cap Id(R)$  such that  $a(1 - f) \in Nil(R)$  and  $(1 - f)a \in Nil(R)$ . It was also shown in [6, Proposition 2.5] that all regularly nil clean rings are Utumi rings in the sense that, for each  $x \in R$ , there is  $y \in R$  depending on  $x$  such that  $x - x^2y \in Nil(R)$ .

So, analyzing all the above, the aim of the present article is to develop a theory of double cleanness, nil-cleanness and regular nil cleanness as well as some their modifications caused by the symmetry of idempotents. Specifically, we will give a satisfactory (complete) description of these three classes of rings. We will also settle a recent question in [6, p. 703], on whether or not Utumi rings are somewhat left-right symmetric in the sense that  $x - yx^2 \in Nil(R)$ .

The work is structured as follows: the next section states and proves our major results (see, respectively, Propositions 1, 2 and 3, Lemma 1, as well as Remark 1 listed below): the final part consists of some useful commentaries on the more insightful exploration of the current subject and a list of problems that remain open.

## 2. Preliminary and Main Results: Symmetrically Clean and Nil-Clean Rings

We begin here with our first main result concerning a symmetrization of Utumi rings (actually, this was stated as a problem that remains open in [6, p. 703]).

**Proposition 1.** *The rings of Utumi are left-right symmetric.*

**Proof.** Let  $x \in R$  be an arbitrary element. Hence, by definition, there is  $y \in R$  depending on  $x$  such that  $x - x^2y \in Nil(R)$ . We claim that  $x - yx^2 \in Nil(R)$  shows the desired symmetry. In fact, for all  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(x - x^2y)^n = [x(1 - xy)]^n = x(x - xyx)^{n-1}(1 - xy)$ . Thus, if  $(x - x^2y)^n = 0$ , then one observes that  $(x - xyx)^{n+1} = (1 - xy)(x - x^2y)^n x = 0$ .



Since analogously  $(x - yx^2)^{n+2} = (1 - yx)(x - xyx)^{n+1}x$ , we see that this is zero as well, i.e.,  $(x - yx^2)^{n+2} = 0$ .  $\square$

The following lemma is useful for our investigation.

**Lemma 1.** *Suppose that  $R$  is a ring. Then the following items are valid:*

- (1)  *$R$  is D-nil-clean if and only if  $R/J(R)$  is D-nil-clean and  $J(R)$  is nil;*
- (2)  *$R$  is D-clean if and only if  $R/J(R)$  is D-clean, provided that  $J(R)$  is nil.*

**Proof.** Before proving the two statements separately, we need the following fact:

*If  $K$  is a ring with a nil-ideal  $I$  and if  $d \in K$  with  $d+I \in Id(K/I)$ , then  $d+I = e+I$  for some  $e \in Id(K) \cap dKd$  such that  $de = ed$ .*

(1) The left-to-right implication being elementary, let us focus on the right-to-left one. So, given  $r \in R$ , one writes by assumption that  $r + J(R) = (e + J(R)) + (q + J(R))$  for some  $e, q \in R$  such that  $e + J(R)$  is an idempotent in  $R/J(R)$  having the property  $e + J(R) \in (a + J(R))(R/J(R))(a + J(R))$ , and  $q + J(R)$  is a nilpotent in  $R/J(R)$ . As  $J(R)$  is nil, one easily understands that  $q$  has to be a nilpotent as well. As for the element  $e$ , there is  $c \in R$  such that  $e + J(R) = aca + J(R)$ . In view of the aforementioned fact,  $e + J(R) = f + J(R)$  for some idempotent  $f$  of  $R$  possessing the property that  $f \in (aca)R(aca) \subseteq aRa$ . Thus,  $e \in f + J(R)$  and, finally,  $r \in f + Nil(R)$ , because  $q + J(R) \subseteq Nil(R)$ .

(2) The left-to-right implication being trivial, let us concentrate on the right-to-left one. So, given  $r \in R$ , one writes that  $e + J(R)$  is an idempotent in  $R/J(R)$  possessing the property  $e + J(R) \in (a + J(R))(R/J(R))(a + J(R))$ , and  $u + J(R)$  is a unit in  $R/J(R)$ . Since the containment  $1 + J(R) \subseteq U(R)$  holds, it is obvious that  $u \in U(R)$ . The rest of the proof is hereafter identical to that in point (1). Q.E.D.  $\square$

Let us recall that a ring is termed *strongly nil-clean* if its elements are sums of a nilpotent and an idempotent which commute.

The next implication is of interest.

**Proposition 2.** *Strongly nil-clean rings are D-nil-clean.*

**Proof.** For an arbitrary element  $r$  of such a ring  $R$ , such that  $r = q + e$  for some  $q \in Nil(R)$  and  $e \in Id(R)$  with  $qe = eq$ , it follows that  $r - e = q$  with  $re = er$ . Thus  $(r - e)^k = 0$  for some  $k \in \mathbb{N}$  and, expanding this by the classical binomial formula, one derives by a direct inspection that  $e \in rR \cap Rr$ . It leads to  $e = e.e \in rRr$ . Q.E.D.  $\square$

Let us notice that an alternative proof could also be deduced by using the fact from [7, Theorem B] that a ring  $R$  is strongly nil-clean if, and only if, the factor-ring  $R/J(R)$  is boolean and the ideal  $J(R)$  is nil, as stated in Lemma 1 (1) and the simple but useful observation that boolean rings are always D-nil-clean being commutative rings containing only idempotents.

Let us recall that a ring  $R$  is termed *strongly  $\pi$ -regular* if, for each  $a \in R$ , there is  $n \in \mathbb{N}$  depending on  $a$  having the property  $a^n \in a^{n+1}R \cap Ra^{n+1}$  (see, e.g., [8]). It is well known that strongly nil-clean rings are always strongly  $\pi$ -regular rings, whereas strongly  $\pi$ -regular rings are always *strongly clean* rings (see, e.g., [9]) in the sense that their elements are sums of a unit and an idempotent that commute.

**Proposition 3.** *Strongly clean rings (and, in particular, strongly  $\pi$ -regular rings) are D-clean.*

**Proof.** For an arbitrary element  $r$  of such a ring  $R$ , we may write that  $1 - r = u + e$  for some  $u \in U(R)$  and  $e \in Id(R)$  with  $ue = eu$ . Hence  $r = (-u) + (1 - e)$  with  $ru = ur$



and  $re = er$ , so that  $re = (-u)e$  with  $e \in (-u)^{-1}re = r(-u)^{-1}e = (-u)^{-1}er \in rR \cap Rr$ . By a direct inspection, one deduces that  $e = e.e \in rRr$ . Q.E.D.  $\square$

We will be further concerned with the clarifications of two concepts concerning weakly nil(-)clean rings.

### 3. Appendix: Two notions of weak nil-cleanness

Let  $R$  be an arbitrary associative ring with identity element 1 which differs from the zero element 0. The notations and a part of the terminology used in the current section are mainly in agreement with [1]. As above,  $Id(R)$  denotes the set of all idempotents in  $R$ ,  $Nil(R)$  the set of all nilpotents in  $R$ , and  $J(R)$  the Jacobson radical of  $R$ .

Referring to the original source [3], a ring  $R$  is called *nil clean* if, for each  $a \in R$ , there are  $q \in Nil(R)$  and  $e \in Id(R)$  such that  $a = q + e$  (see [10] for further information on this topic). In some literature, and especially in some recent important works (see, e.g., [11]), this concept is equivalently written by using the hyphen “-” like *nil-clean*.

This was substantially extended to the so-called weakly nil-clean rings in the commutative case [4] and in the general case [12] as follows: a ring  $R$  is said to be *weakly nil-clean* if, for every  $a \in R$ , there are  $q \in Nil(R)$  and  $e \in Id(R)$  such that  $a = q + e$  or  $a = q - e$ .

Nevertheless, using the same notion in [13] were generalized both the classical  $\pi$ -regular rings and the defined above nil clean rings in the following way: a ring  $R$  is said to be *weakly nil clean* if, for any  $a \in R$ , there exist  $e \in Id(R)$  and  $q \in Nil(R)$  such that  $a - e - q \in eRa$  (see, for more account, [10] as well). Note that this concept was originally written without the usage of the hyphen “-”.

Resuming, both notions of weak nil-cleanness and weak nil cleanness expanded the notion of nil-cleanness (written as nil cleanness, too) in the sense of [3].

Reviewing the article [13], the reviewer in [14] was right to ask why the same notion is used as that in [12]. So, the objective of this section is to answer that question by using mathematical arguments only showing that one weak nil-cleanness is contained in the other weak nil cleanness as the evidences are not too obvious.

Our basic observation is the following one:

**Proposition 4.** *All weakly nil-clean rings in the sense of [12] are weakly nil clean in the sense of [13]. In other words, weakly nil-clean rings are always weakly nil clean.*

**Proof.** Utilizing the complete description of weakly nil-clean rings  $R$ , established independently and subsequently in [15] and [11], respectively, one writes that  $R \cong R_1 \times R_2$ , where  $R_1$  is nil-clean and  $R_2$  is a ring such that either  $R_2 = \{0\}$  or  $R_2/J(R_2) \cong \mathbb{Z}_3$  with nil  $J(R_2)$ . It can be checked that  $R_2$  is strongly  $\pi$ -regular, itself. So, it follows directly from [13, Propositions 2.4 (ii), 3.2] that  $R$  is necessarily weakly nil clean, as claimed.

As a parallel verification of our initial assertion, the above decomposition for  $R$  implies that  $R/J(R) \cong [R_1/J(R_1)] \times \mathbb{Z}_3$ , where  $R_1/J(R_1)$  is still nil-clean and, moreover,  $J(R) \cong J(R_1) \times J(R_2)$  is nil because so is  $J(R_1)$  (compare, resp., with [12] and [3]). Therefore, it follows immediately from [13, Propositions 2.4 (ii)] that  $R/J(R)$  is weakly nil clean and hence so is  $R$  in view of [13, Proposition 2.8] since  $J(R)$  is nil.  $\square$

As final comments, we may say that the next hopeful implications are fulfilled:

$$\text{nil clean} = \text{nil-clean} \Rightarrow \text{weakly nil-clean} \Rightarrow \text{weakly nil clean}.$$





#### 4. Concluding Discussion and Open Questions

In conclusion, the next comments could be worthwhile.

Firstly, we ask of whether or not any semiprimitive (= Jacobson semi-simple) periodic ring (or even a semiprimitive (strongly)  $\pi$ -regular ring) is always von Neumann regular.

Secondly, we partially answer [16, Question 3.17] concerning those rings  $R$  such that for some fixed natural number  $n \geq 2$  all elements of  $R$  satisfy the equation  $x^n - x \in Nil(R)$ . It is not too hard to verify that such a ring  $R$  is strongly  $\pi$ -regular. We, however, will detect a new property of these rings as follows: writing  $(x^n - x)^m = 0$ , we have  $x^m(1 - x^{n-1})^m = 0$  and, consequently,  $(x^{n-1})^m(1 - x^{n-1})^m = 0$ , i.e.,  $(x^{n-1} - (x^{n-1})^2)^m = 0$ . Then we can find an idempotent, say  $e \in \mathbb{Z}[x]$  such that  $x^{n-1} = e + t$ , where  $t \in Nil(R)$ . Hence  $[x(1-e)]^{n-1} = x^{n-1}(1-e) = t(1-e)$  is a nilpotent because  $t$  and  $e$  will commute as  $x$  and  $e$  do that. That is,  $x - xe$  is a nilpotent. Q.E.D.

The next critical commentaries could be helpful to the interested in that subject reader.

**Remark 1.** It is worth to notice that [16, Theorem 2.6] is already well-known and is a simple consequence of [17, Theorem A1]. Indeed,  $Nil(R)$  forms an ideal whence  $Nil(R) = J(R)$  and thus the properties  $P_n(R)$  and  $Q_n(R)$  are equivalent at once, that is,  $P_n(R) \iff Q_n(R)$ . By the way, on line 6 of the Abstract in [16] there is a misprint, namely it should be “ $n$  is even with  $n \not\equiv 1(mod\ 3)$ ” instead of “ $n$  is even with  $n \equiv 1(mod\ 3)$ ”.

Finally, we would like to avoid some bugs by successfully correcting them in the next lines. Precisely, we correct the following issues:

**Corrections.** On p. 29, after Definition 1 from [5], there is a technical error, namely the element 0 has to be represented as  $0 = 1 + (-1)$  with  $1 = 1.1 \in 1P \cap P1$  (compare also with the truly given presentation of such an element, being an idempotent, stated at the end of p. 29). Also, on p. 30, line 3 in the proof of Proposition 1, the sign “-” is involuntarily omitted in the formulas which, however, does *not* affect the final conclusion. Moreover, on p. 31, line 4 of Remark 1 in [5] the intersection “ $xR \cap eR = \{0\}$ ” must be “ $xK \cap eK = \{0\}$ ”. And finally, on bottom of p. 32, “ $x \in e + J(P)$ ” should be stated as “ $x \in e + Nil(P)$ ”.

Likewise, on p. 709, at the beginning of line 3 of Proof in [6, Example 2.13] also there is a typo, namely “ $\pi$  regular” should be written as “ $\pi$ -regular”.

**Acknowledgements:** The author would like to thank the expert referee for his/her careful reading of the article and for the constructive comments and suggestions made. This investigation was partially supported by the Bulgarian National Science Fund (project No. KP-06 32/1 of 07 December, 2019).

#### References

1. Lam T. Y. *A First Course in Noncommutative Rings*. 2nd ed. (Graduate Texts in Math. Vol. 131). Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 2001. 388 p.
2. Nicholson W. K. Lifting idempotents and exchange rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1977, vol. 229, pp. 269–278.
3. Diesl A. J. Nil clean rings. *J. Algebra*, 2013, vol. 383, pp. 197–211. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2013.02.020>



4. Danchev P. V., McGovern W. Wm. Commutative weakly nil clean unital rings. *J. Algebra*, 2015, vol. 425, pp. 410–422. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2014.12.003>
5. Danchev P. V. Left-right cleanness and nil cleanness in unital rings. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2019, vol. 27, pp. 28–35. DOI: <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.27.28>
6. Danchev P. V. A generalization of  $\pi$ -regular rings. *Turk. J. Math.*, 2019, vol. 43, pp. 702–711.
7. Danchev P. V., Lam T. Y. Rings with unipotent units. *Publ. Math. Debrecen*, 2016, vol. 88, pp. 449–466. DOI: <https://doi.org/10.5486/PMD.2016.7405>
8. Azumaya G. Strongly  $\pi$ -regular rings. *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. (Ser. I, Math.)*, 1954, vol. 13, pp. 34–39.
9. Nicholson W. K. Strongly clean rings and Fitting's lemma. *Commun. Algebra*, 1999, vol. 27, pp. 3583–3592.
10. Danchev P. V. Generalizing nil clean rings. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2018, vol. 25, no. 1, pp. 13–29. DOI: <https://doi.org/10.36045/bbms/1523412048>
11. Šter J. Nil-clean quadratic elements. *J. Algebra & Appl.*, 2017, vol. 16, no. 10, p. 1750197. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219498817501973>
12. Breaz S., Danchev P., Zhou Y. Rings in which every element is either a sum or a difference of a nilpotent and an idempotent. *J. Algebra & Appl.*, 2016, vol. 15, no. 08, p. 1650148. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219498816501486>
13. Danchev P., Šter J. Generalizing  $\pi$ -regular rings. *Taiwanese J. Math.*, 2015, vol. 19, no. 6, pp. 1577–1592. DOI: <https://doi.org/10.11650/tjm.19.2015.6236>
14. Khurana D. Math. Review 3528770 (2017).
15. Danchev P. V. Weakly UU rings. *Tsukuba J. Math.*, 2016, vol. 40, no. 1, pp. 101–118.
16. Koşan M. T., Yildirim T., Zhou Y. Rings with  $x^n - x$  nilpotent. *J. Algebra & Appl.*, 2020, vol. 19. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219498820500656>
17. Hirano Y., Tominaga H., Yaquub A. On rings in which every element is uniquely expressible as a sum of a nilpotent element and a certain potent element. *Math. J. Okayama Univ.*, 1988, vol. 30, pp. 33–40.

---

**Cite this article as:**

Danchev P. V. Symmetrization in Clean and Nil-Clean Rings. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 154–160. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-154-160>

---

УДК 512.552.13

## Симметризация в чистых и ниль-чистых кольцах

П. В. Данчев

Данчев Петр Васильевич, кандидат физико-математических наук, Институт математики и информатики, Болгарская академия наук, Болгария, 1113, г. София, ул. Акад. Г. Бончева, д. 8, danchev@math.bas.bg, pvdanchev@yahoo.com

Мы вводим и исследуем  $D$ -чистые и  $D$ -ниль-чистые кольца, а также некоторые другие тесно связанные симметричные версии чистоты и ниль-чистоты. Дана исчерпывающая структурная характеристика для этих симметрично чистых и симметрично ниль-чистых колец в терминах радикала Джекобсона и его частного. Доказано, что сильно чистые (соот-



ветственно, сильно ниль-чистые) кольца всегда D-чистые (соответственно, D-ниль-чистые). Наши результаты подтверждают недавние публикации в Вестн. Иркутск. гос. ун-та, Матем. (2019) и Turk. J. Math. (2019). Мы также показываем, что слабо ниль-чистые кольца, определенные как в Danchev – McGovern (J. Algebra, 2015) и Breaz – Danchev – Zhou (J. Algebra & Appl., 2016), на самом деле слабо ниль-чистые в смысле Danchev – Šter (Taiwanese J. Math., 2015). Это отвечает на вопрос рецензента из-за D. Khurana (Math. Review, 2017).

**Ключевые слова:** L-чистые кольца, R-чистые кольца, D-чистые кольца, симметризация, слабо ниль-чистые кольца.

Поступила в редакцию: 03.12.2019 / Принята: 22.01.2020 / Опубликовано: 01.06.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

**Благодарности.** Автор благодарит рецензента за внимательное прочтение статьи и конструктивные замечания и предложения. Исследование выполнено при частичной поддержке Болгарского национального научного фонда (проект № КП-06 32/1 от 07 декабря 2019 г.).

---

#### **Образец для цитирования:**

Danchev P. V. Symmetrization in Clean and Nil-Clean Rings [Данчев П. В. Симметризация в чистых и ниль-чистых кольцах] // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 154–160. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-154-160>

---





УДК 517.925.4

## О положительных решениях модельной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

М. М. Кобилзода, А. Н. Наимов

Кобилзода Мирзоодил Мирзомалик, аспирант, Научно-исследовательский институт, Таджикский национальный университет, Республика Таджикистан, 734025, г. Душанбе, просп. Рудаки, д. 17, kobilzoda94@mail.ru

Наимов Алижон Набиджанович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и информационных технологий, Вологодский государственный университет, Россия, 160000, г. Вологда, ул. Ленина, д. 15, nan67@rambler.ru

В статье исследованы свойства положительных решений модельной системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Найдены новые условия на коэффициенты, при выполнении которых произвольное решение  $(x(t), y(t))$  с положительными начальными значениями  $x(0)$  и  $y(0)$  положительно, нелокально продолжимо и ограничено при  $t > 0$ . В этих условиях исследован вопрос о глобальной устойчивости положительных решений методом построения направляющей функции и методом предельных уравнений. Методом построения направляющей функции доказано, что если система уравнений имеет положительное постоянное решение  $(x_*, y_*)$ , то любое положительное решение  $(x(t), y(t))$  при  $t \rightarrow +\infty$  приближается к  $(x_*, y_*)$ . А в случае, когда коэффициенты системы уравнений имеют конечные пределы при  $t \rightarrow +\infty$  и предельная система уравнений имеет положительное постоянное решение  $(x_\infty, y_\infty)$ , методом предельных уравнений доказано, что любое положительное решение  $(x(t), y(t))$  при  $t \rightarrow +\infty$  приближается к  $(x_\infty, y_\infty)$ . Полученные результаты впоследствии можно обобщить для многомерного аналога исследуемой системы уравнений.

**Ключевые слова:** модельная система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, положительное решение, нелокальное продолжение, глобальная устойчивость положительных решений, метод построения направляющей функции, метод предельных уравнений.

Поступила в редакцию: 17.06.2019 / Принята: 30.09.2019 / Опубликовано: 01.06.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-161-171>

### ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена исследованию положительных решений модельной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$x'(t) = c(t)(Y(t) - y(t))x(t) - k_1(t)x(t), \quad y'(t) = a(t)(Y(t) - y(t))x(t) - k_2(t)y(t). \quad (1)$$

Здесь коэффициенты  $c(t)$ ,  $a(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $k_1(t)$ ,  $k_2(t)$  считаются заданными и непрерывными при  $t \geq 0$ . Положительным решением системы уравнений (1) называем пару  $(x(t), y(t))$  функций  $x(t)$  и  $y(t)$ , определенных, непрерывных и положительных



на некотором максимальном полуинтервале  $[0, T)$  и внутри данного полуинтервала удовлетворяющих уравнениям системы (1). Если  $T = +\infty$ , то решение  $(x(t), y(t))$  называем нелокально продолжимым при  $t > 0$ .

Система уравнений (1) в случае постоянных и положительных коэффициентов исследована в работах [1–3] как динамическая модель производства и продажи товара. Данной моделью адекватно описываются темпы производства и продажи определенного вида товара, если произвольное решение  $(x(t), y(t))$  системы уравнений (1) с положительными начальными значениями  $x(0)$  и  $y(0)$  остается положительным и ограниченным при  $t > 0$ . Если к тому же любое положительное решение системы уравнений (1) при  $t \rightarrow +\infty$  приближается к единственному положительному постоянному решению  $(x_*, y_*)$ , то это интерпретируется как самостабилизация рынка товара. В работах [1, 3] доказано, что динамическая модель (1) обладает указанными свойствами положительности и самостабилизации, если коэффициенты постоянны, положительны и  $cY > k_1$ . В связи с этим представляется актуальным исследование свойств положительности и самостабилизации динамической модели (1) с переменными коэффициентами.

В работе [4] исследованы свойства положительных и периодических решений системы уравнений вида (1) в случае, когда коэффициенты  $c, a, Y, k_1, k_2$  зависят от  $t, x$  и  $y$ . В частности, исследована диссипативность положительных решений, состоящая в том, что любое положительное решение  $(x(t), y(t))$  при  $t > t_0$  остается в фиксированном ограниченном множестве. Отметим, что общие свойства диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений исследованы в монографии [5, с. 29–70].

В настоящей работе найдены новые условия на коэффициенты, при выполнении которых произвольное решение  $(x(t), y(t))$  с положительными начальными значениями  $x(0)$  и  $y(0)$  положительно, нелокально продолжимо и ограничено при  $t > 0$ . В этих условиях исследован вопрос о глобальной устойчивости положительных решений методом построения направляющей функции и методом предельных уравнений. Глобальная устойчивость положительных решений понимается в следующем смысле: все положительные решения определены на промежутке  $[0, +\infty)$  и при  $t \rightarrow +\infty$  приближаются к одному фиксированному решению. Методом построения направляющей функции доказано, что если система уравнений имеет положительное постоянное решение  $(x_*, y_*)$ , то любое положительное решение  $(x(t), y(t))$  при  $t \rightarrow +\infty$  приближается к  $(x_*, y_*)$ . А в случае, когда коэффициенты системы уравнений имеют конечные пределы при  $t \rightarrow +\infty$  и предельная система уравнений имеет положительное постоянное решение  $(x_\infty, y_\infty)$ , методом предельных уравнений доказано, что любое положительное решение  $(x(t), y(t))$  при  $t \rightarrow +\infty$  приближается к  $(x_\infty, y_\infty)$ . Полученные результаты впоследствии можно обобщить для многомерного аналога исследуемой системы уравнений.

## 1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сначала исследуем условия, при которых произвольное решение  $(x(t), y(t))$  системы уравнений (1) с положительными начальными значениями  $x(0)$  и  $y(0)$  положительно, нелокально продолжимо и ограничено при  $t > 0$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть функции  $c(t), a(t), Y(t), k_1(t), k_2(t)$  определены и непрерывны на промежутке  $[0, +\infty)$  и пусть  $(x(t), y(t)), t \in [0, T)$  — произвольное решение системы уравнений (1). Тогда:



1) решение  $(x(t), y(t))$  положительно, т. е.  $x(t) > 0$  и  $y(t) > 0$  при  $t \in (0, T)$ , если положительны  $x(0)$ ,  $y(0)$  и  $a(t)Y(t) \geq 0$  при  $t > 0$ ;

2) решение  $(x(t), y(t))$  определено на промежутке  $[0, +\infty)$ , т. е.  $T = +\infty$ , если  $(x(t), y(t))$  положительно и для любого  $t_2 > 0$  существует  $t_1 \in (0, t_2)$  такое, что на отрезке  $[t_1, t_2]$  одна из функций  $c(t)$  и  $a(t)$  неотрицательна;

3) решение  $(x(t), y(t))$  ограничено, если оно определено и положительно на промежутке  $[0, +\infty)$  и выполнены условия:

а) функции  $Y(t)$  и  $k_2(t)$  ограничены;

б) существуют  $\tau > 0$  и  $k_1^0 > 0$  такие, что при  $t > \tau$  имеют место неравенства  $a(t) \geq 0$ ,  $k_1(t) > k_1^0$ ,  $k_2(t) > 0$ ;

в) при некотором положительном числе  $\mu$  имеет место предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (a(t) - \mu c(t)) = 0.$$

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

**Следствие 1.** Произвольное решение  $(x(t), y(t))$  системы уравнений (1) с положительными начальными значениями  $x(0)$  и  $y(0)$  определено, положительно и ограничено на промежутке  $[0, +\infty)$ , если:

г) функции  $c(t)$ ,  $a(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $k_1(t)$ ,  $k_2(t)$  определены и непрерывны на промежутке  $[0, +\infty)$ ;

д)  $a(t)Y(t) \geq 0$  при  $t > 0$ ;

е) функции  $c(t)$ ,  $a(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $k_1(t)$ ,  $k_2(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$  приближаются к положительным числам  $c_\infty$ ,  $a_\infty$ ,  $Y_\infty$ ,  $k_{1,\infty}$ ,  $k_{2,\infty}$  соответственно и  $c_\infty Y_\infty > k_{1,\infty}$ .

Исследуем глобальную устойчивость положительных решений системы уравнений (1), предполагая, что среди положительных решений есть постоянное.

**Теорема 2.** Пусть функции  $c(t)$ ,  $a(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $k_1(t)$ ,  $k_2(t)$  определены и непрерывны на промежутке  $[0, +\infty)$ , ограничены снизу и сверху соответствующими положительными числами. И пусть система уравнений (1) имеет положительное постоянное решение  $(x_*, y_*)$  такое, что функция

$$B(t) = y_* \frac{k_2(t)}{k_1(t)} (Y(t) - y_*)$$

определена и непрерывно дифференцируема на промежутке  $(0, +\infty)$ , ограничена снизу и сверху положительными числами  $B_1$  и  $B_2$  и, кроме того,  $B'(t) \leq 0$  при  $t > 0$ . Тогда любое положительное решение  $(x(t), y(t))$  системы уравнений (1) при  $t \rightarrow +\infty$  приближается к  $(x_*, y_*)$ .

Теорема 2 доказана методом построения направляющей функции [6, с. 75–84], убывающей вдоль положительных решений системы уравнений (1). Из следствия 1 и теоремы 2 вытекает

**Следствие 2.** В автономной системе

$$x' = c_0(Y_0 - y)x - k_{10}x, \quad y' = a_0(Y_0 - y)x - k_{20}y, \quad (2)$$

где  $c_0$ ,  $a_0$ ,  $Y_0$ ,  $k_{10}$ ,  $k_{20}$  — положительные числа и  $c_0 Y_0 > k_{10}$ , любая траектория, выпущенная из первой четверти координатной плоскости  $Oxy$ , остается в этой четверти при возрастании времени и приближается к стационарной точке

$$x_0 = \frac{k_{20}}{a_0 k_{10}} (c_0 Y_0 - k_{10}), \quad y_0 = \frac{1}{c_0} (c_0 Y_0 - k_{10})$$



при неограниченном возрастании времени. Стационарная точка  $(x_0, y_0)$  является единственной траекторией автономной системы (2), лежащей в первой четверти, отделенной от нуля и ограниченной при возрастании и убывании времени.

Следующая теорема является дополнением к теореме 2.

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия г), д) и е). Тогда любое положительное решение  $(x(t), y(t))$  системы уравнений (1) при  $t \rightarrow +\infty$  приближается к точке  $(x_\infty, y_\infty)$ , где

$$x_\infty = \frac{k_{2,\infty}}{a_\infty k_{1,\infty}} (c_\infty Y_\infty - k_{1,\infty}), \quad y_\infty = \frac{1}{c_\infty} (c_\infty Y_\infty - k_{1,\infty}).$$

Теорема 3 доказана методом предельных уравнений. Данный метод применяется в работах [7, 8] при исследовании ограниченных решений систем линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

## 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

1. Пусть  $(x(t), y(t))$ ,  $t \in [0, T)$  — решение системы уравнений (1) с положительными начальными значениями  $x(0)$ ,  $y(0)$  и пусть  $a(t)Y(t) \geq 0$  при  $t > 0$ . Проверим, что  $x(t) > 0$  и  $y(t) > 0$  при  $t \in (0, T)$ .

Из первого уравнения системы (1) находим

$$x(t) = x(0)e^{\int_0^t (c(s)(Y(s)-y(s))-k_1(s))ds}.$$

Отсюда следует, что  $x(t) > 0$  при  $t \in [0, T)$ . Второе уравнение системы (1) представляя в следующем виде:

$$y'(t) + (a(t)x(t) + k_2(t))y(t) = a(t)Y(t)x(t),$$

находим

$$y(t) = e^{-\int_0^t (a(\tau)x(\tau)+k_2(\tau))d\tau} \left( y(0) + \int_0^t a(s)Y(s)x(s)e^{\int_0^s (a(\tau)x(\tau)+k_2(\tau))d\tau} ds \right).$$

Отсюда следует, что  $y(t) > 0$  при  $t \in [0, T)$ .

2. Пусть  $(x(t), y(t))$ ,  $t \in [0, T)$  — положительное решение системы уравнений (1) и пусть для любого  $t_2 > 0$  существует  $t_1 \in (0, t_2)$  такое, что на отрезке  $[t_1, t_2]$  одна из функций  $c(t)$  и  $a(t)$  неотрицательна. Покажем, что  $T = +\infty$ .

Предположим, что  $T < +\infty$ . Тогда на полуинтервале  $[0, T)$  одна из функций  $x(t)$ ,  $y(t)$  неограничена. Заметим, что если одна из функций  $x(t)$ ,  $y(t)$  ограничена, то в силу системы уравнений (1) другая также ограничена. Поэтому обе функции  $x(t)$ ,  $y(t)$  неограничены на полуинтервале  $[0, T)$ .

Для  $t_2 = T$ , согласно нашим условиям, существует  $t_1 \in (0, T)$  такое, что на отрезке  $[t_1, T]$  одна из функций  $c(t)$  и  $a(t)$  неотрицательна. Если  $c(t) \geq 0$  при  $t \in [t_1, T]$ , то из первого уравнения системы (1) выводим:

$$\begin{aligned} x'(t) &\leq (c(t)Y(t) - k_1(t))x(t), \quad t \in (0, T), \\ x(t) &\leq x(t_1)e^{\int_{t_1}^t (c(s)Y(s)-k_1(s))ds} \leq x(t_1)e^{R_T(T-t_1)}, \quad t \in (0, T), \end{aligned}$$

где  $R_T = \max_{0 \leq s \leq T} |c(s)Y(s) - k_1(s)|$ . Пришли к противоречию.





Если  $a(t) \geq 0$  при  $t \in [t_1, T]$ , то выберем число  $Y_1$  так, чтобы имели место неравенства  $Y_1 > y(t)$  при  $t \in [0, t_1]$  и  $Y_1 > Y(t)$  при  $t \in [t_1, T]$ . Очевидно, при любом  $t \in (t_1, T)$  либо  $y(t) \leq Y_1$ , либо  $y(t) > Y_1$ . На любом максимальном интервале  $(\tau_1, \tau_2) \subset (t_1, T)$ , где  $y(t) > Y_1$ , в силу второго уравнения системы (1) имеем:

$$\begin{aligned} y'(t) &\leq -k_2(t)y(t), \quad t \in (\tau_1, \tau_2), \\ y(\tau_1) &= Y_1, \quad y(t) \leq Y_1 e^{K_T T}, \quad t \in (\tau_1, \tau_2), \end{aligned}$$

где

$$K_T = \max_{0 \leq t \leq T} |k_2(t)|.$$

Следовательно,  $y(t) \leq Y_1 e^{K_T T}$  при любом  $t \in [0, T]$ , пришли к противоречию.

3. Пусть решение  $(x(t), y(t))$  системы уравнений (1) определено и положительно на промежутке  $[0, +\infty)$  и пусть выполнены условия:

- а) функции  $Y(t)$  и  $k_2(t)$  ограничены;
- б) существуют  $\tau > 0$  и  $k_1^0 > 0$  такие, что при  $t > \tau$  имеют место неравенства  $a(t) \geq 0$ ,  $k_1(t) > k_1^0$ ,  $k_2(t) > 0$ ;
- в) при некотором положительном числе  $\mu$  имеет место предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (a(t) - \mu c(t)) = 0.$$

Покажем, что  $(x(t), y(t))$  ограничено на промежутке  $[0, +\infty)$ .

Сперва покажем ограниченность  $y(t)$  на промежутке  $[0, +\infty)$ . Для этого выберем  $Y_0 > 0$  так, чтобы выполнялись неравенства  $y(\tau) < Y_0$  и  $Y(t) < Y_0$  при  $t \geq 0$ . Проверим, что  $y(t) < Y_0$  при  $t > \tau$ . Действительно, в противном случае в первой точке  $t_0 > \tau$ , где имеет место равенство  $y(t_0) = Y_0$ , должно выполняться неравенство  $y'(t_0) \geq 0$ . С другой стороны, в силу второго уравнения системы (1), учитывая  $a(t_0) \geq 0$ ,  $Y(t_0) - y(t_0) < 0$ ,  $k_2(t_0) > 0$ , имеем  $y'(t_0) \leq -k_2(t_0)y(t_0) < 0$ , приходим к противоречию.

Ограниченность  $x(t)$  будет доказана, если покажем, что существуют  $\tau_1 > \tau$  и  $M > 0$  такие, что при  $x(t) > M$  и  $t > \tau_1$  имеет место неравенство  $y(t) - \mu(x(t) - x(\tau_1)) > 0$ . Для этого достаточно подобрать  $\tau_1 > \tau$  и  $M > 0$  так, чтобы при  $x(t) > M$  и  $t > \tau_1$  имело место неравенство  $y'(t) - \mu x'(t) > 0$ . Найдем разность  $y'(t) - \mu x'(t)$  из системы уравнений (1):

$$y'(t) - \mu x'(t) = [(a(t) - \mu c(t))(Y(t) - y(t)) + \mu k_1(t)]x(t) - k_2(t)y(t). \quad (3)$$

Воспользовавшись условиями а), б) и в), выберем  $\tau_1 > \tau$  так, чтобы при  $t > \tau_1$  выполнялось неравенство

$$(a(t) - \mu c(t))(Y(t) - y(t)) + \mu k_1(t) > \mu \frac{k_1^0}{2}.$$

А число  $M > 0$  выберем из условия

$$\mu \frac{k_1^0}{2} M - Y_0 \sup_{t \geq 0} k_2(t) > 0.$$

Тогда из (3) следует, что  $y'(t) - \mu x'(t) > 0$  при  $x(t) > M$  и  $t > \tau_1$ .

Теорема 1 доказана.



### 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть  $(x(t), y(t))$ ,  $t \in [0, T)$  — произвольное положительное решение системы уравнений (1). Рассмотрим функцию

$$v(t) = \frac{1}{2}(y(t) - y_*)^2 + B(t) \left( \frac{x(t)}{x_*} - \ln \frac{x(t)}{x_*} \right). \quad (4)$$

Функция  $v(t)$  снизу ограничена числом  $B_1$ :

$$v(t) \geq B(t) \left( \frac{x(t)}{x_*} - \ln \frac{x(t)}{x_*} \right) \geq B(t) \geq B_1,$$

так как  $s - \ln s \geq 1$  при всех  $s > 0$ . Покажем, что для производной  $v'(t)$  функции  $v(t)$  имеет место неравенство

$$v'(t) \leq -k_2(t)(y(t) - y_*)^2 \left( 1 + \frac{y_*}{x_*} \frac{x(t)}{Y(t) - y_*} \right). \quad (5)$$

Для этого представим систему уравнений (1) в следующем виде:

$$x'(t) = A(t)(y_* - y(t))x(t), \quad y'(t) = k_2(t) \left( \frac{y_*}{x_*} \frac{Y(t) - y(t)}{Y(t) - y_*} x(t) - y(t) \right), \quad (6)$$

где  $A(t) = y_* k_2(t) / B(t)$ . Для функции  $A(t)$  верна оценка  $A_1 \leq A(t) \leq A_2$ , где

$$A_1 = y_* \frac{\alpha_1}{B_2}, \quad A_2 = y_* \frac{\alpha_2}{B_1}, \\ B_1 = \inf_{t \geq 0} B(t), \quad B_2 = \sup_{t \geq 0} B(t), \quad \alpha_1 = \inf_{t \geq 0} k_2(t) > 0, \quad \alpha_2 = \sup_{t \geq 0} k_2(t).$$

Теперь вычислим  $v'(t)$  и оценим ее сверху, учитывая условие  $B'(t) \leq 0$  и систему уравнений (6):

$$\begin{aligned} v'(t) &= (y(t) - y_*)y'(t) + B(t) \left( \frac{1}{x_*} - \frac{1}{x(t)} \right) x'(t) + B'(t) \left( \frac{x(t)}{x_*} - \ln \frac{x(t)}{x_*} \right) \leq \\ &\leq (y(t) - y_*)y'(t) + \frac{B(t)}{x_*} (x(t) - x_*) \frac{x'(t)}{x(t)} = (y(t) - y_*) \left( y'(t) - \frac{B(t)}{x_*} (x(t) - x_*) A(t) \right) = \\ &= (y(t) - y_*) \left( k_2(t) \left[ \frac{y_*}{x_*} \frac{Y(t) - y(t)}{Y(t) - y_*} x(t) - y(t) \right] - \frac{y_*}{x_*} k_2(t) (x(t) - x_*) \right) = \\ &= k_2(t)(y(t) - y_*) \left( y_* - y(t) + \frac{y_*}{x_*} \frac{y_* - y(t)}{Y(t) - y_*} x(t) \right) = -k_2(t)(y(t) - y_*)^2 \left( 1 + \frac{y_*}{x_*} \frac{x(t)}{Y(t) - y_*} \right). \end{aligned}$$

Из доказанного неравенства (5) следует, что  $v(t) \leq v(0)$  и

$$\begin{aligned} (y(t) - y_*)^2 + 2B_1 \left( \frac{x(t)}{x_*} - \ln \frac{x(t)}{x_*} \right) &\leq 2v(0), \\ y(t) - y_* &\leq \sqrt{2v(0)}, \quad \frac{x(t)}{x_*} - \ln \frac{x(t)}{x_*} \leq \frac{v(0)}{B_1}, \\ y(t) &\leq y_* + \sqrt{2v(0)}, \quad x_* \xi_1 \leq x(t) \leq x_* \xi_2, \end{aligned} \quad (7)$$



где  $\xi_1, \xi_2$  — корни скалярного уравнения

$$\xi - \ln \xi = \frac{v(0)}{B_1}.$$

Таким образом, в силу полученных оценок (7) решение  $(x(t), y(t))$  определено и ограничено на промежутке  $[0, +\infty)$ . Покажем, что  $(x(t), y(t)) \rightarrow (x_*, y_*)$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Из  $v(t) \geq B_1$  и  $v'(t) \leq 0$  следует существование и конечность предела

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v_\infty.$$

Из неравенства (5) выводим:

$$\begin{aligned} v'(t) &\leq -k_2(t)(y(t) - y_*)^2, & \alpha_1(y(t) - y_*)^2 &\leq -v'(t), \\ \alpha_1 \int_0^{+\infty} (y(t) - y_*)^2 dt &\leq v(0) - v_\infty, \\ \int_0^{+\infty} (y(t) - y_*)^2 dt &< \infty. \end{aligned} \quad (8)$$

Подынтегральная функция  $\varphi(t) = (y(t) - y_*)^2$  ограничена вместе со своей производной на промежутке  $[0, +\infty)$ . Отсюда следует, что  $\varphi(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Действительно, из (8) следует существование последовательности  $s_n \rightarrow +\infty$ , вдоль которой функция  $\varphi$  стремится к нулю. Предположим, что существует другая последовательность  $t_n \rightarrow +\infty$ , вдоль которой функция  $\varphi$  не стремится к нулю, т. е.  $\varphi(t_n) > 2\sigma$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , где  $\sigma$  — фиксированное положительное число. При каждом  $n = 1, 2, \dots$  существует  $\tau_n \in (t_n, s_{p_n})$  такое, что  $\varphi(\tau_n) = \sigma$  и  $\varphi(t) > \sigma$  при  $t \in (t_n, \tau_n)$ . Можно считать, что  $\tau_n < t_{n+1}$ . Оценим снизу длину отрезка  $[t_n, \tau_n]$ :

$$\tau_n - t_n \geq \int_{t_n}^{\tau_n} \frac{-\varphi'(t)}{M_{\varphi'}} dt = \frac{\varphi(t_n) - \varphi(\tau_n)}{M_{\varphi'}} > \frac{\sigma}{M_{\varphi'}}, \quad \text{где} \quad M_{\varphi'} = \sup_{s \geq 0} |\varphi'(s)|.$$

На основе этой оценки приходим к противоречию:

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt > \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_n}^{\tau_n} \varphi(t) dt \geq \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(\tau_n - t_n) > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2}{M_{\varphi'}} = +\infty.$$

Таким образом,  $y(t) \rightarrow y_*$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

В равенстве (4), переходя к пределу при  $t \rightarrow +\infty$ , получим

$$B_1 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{x(t)}{x_*} - \ln \frac{x(t)}{x_*} \right) = v_\infty.$$

Такое возможно лишь в том случае, когда  $x(t) \rightarrow x_* \xi_*$  при  $t \rightarrow +\infty$ , где  $\xi_*$  — корень уравнения  $\xi - \ln \xi = v_\infty/B_1$ . Проверим, что  $\xi_* = 1$ . Для этого возьмем последовательность  $t_n \rightarrow +\infty$ , вдоль которой  $y'(t)$  стремится к нулю, и во втором уравнении системы (6) перейдем к пределу вдоль этой последовательности. В результате получаем  $(y_*/x_*)x_*\xi_* - y_* = 0$ , откуда следует  $\xi_* = 1$ . Теорема 2 доказана.

Проверим справедливость следствия 2. Любое решение автономной системы (2) с положительными начальными значениями, согласно следствию 1, определено, положительно и ограничено на промежутке  $[0, +\infty)$ . Другими словами, траектория



решения остается в первой четверти координатной плоскости  $Oxy$  и ограничена. Такая траектория в силу теоремы 2 приближается к точке  $(x_0, y_0)$  при неограниченном возрастании времени. Если к тому же траектория ограничена при убывании времени и остается в первой четверти, отделяясь от нуля, то, согласно общей теории автономных систем на плоскости [9, с. 226], множество ее  $\alpha$ -предельных точек состоит из предельных циклов и стационарных точек, лежащих в первой четверти. У автономной системы (2) в первой четверти имеется лишь одна стационарная точка, а предельных циклов не может быть, так как они при неограниченном возрастании времени не могут приближаться к стационарной точке  $(x_0, y_0)$ . Следовательно, стационарная точка  $(x_0, y_0)$  является единственной траекторией автономной системы (2), лежащей в первой четверти, отделенной от нуля и ограниченной при возрастании и убывании времени.

#### 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

В силу условий г), д), е) и следствия 1 любое положительное решение  $(x(t), y(t))$  системы уравнений (1) определено и ограничено на промежутке  $[0, +\infty)$ . Покажем, что  $(x(t), y(t)) \rightarrow (x_\infty, y_\infty)$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Сперва предположим, что выполнено условие

$$\inf_{t \geq 0} x(t) > 0. \quad (9)$$

Возьмем произвольную возрастающую последовательность  $t_n \rightarrow +\infty$  и рассмотрим последовательности функций

$$x_n(t) = x(t + t_n), \quad y_n(t) = y(t + t_n), \quad t \in [-t_n, +\infty), \quad n = 1, 2, \dots$$

При каждом  $n = 1, 2, \dots$  для  $(x_n(t), y_n(t))$  имеем

$$\begin{cases} x'_n(t) = c(t + t_n)(Y(t + t_n) - y_n(t))x_n(t) - k_1(t + t_n)x_n(t), \\ y'_n(t) = a(t + t_n)(Y(t + t_n) - y_n(t))x_n(t) - k_2(t + t_n)y_n(t), \end{cases} \quad t \in (-t_n, +\infty). \quad (10)$$

Последовательность  $\{(x_n(t), y_n(t))\}_{n=1}^\infty$  равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на каждом конечном отрезке  $[\alpha, \beta] \subset (-\infty, +\infty)$ . Без ограничения общности можно считать, что данная последовательность сходится к паре функций  $(x_0(t), y_0(t))$  равномерно на каждом конечном отрезке из  $(-\infty, +\infty)$ . Тогда в силу (10) последовательность производных  $\{(x'_n(t), y'_n(t))\}_{n=1}^\infty$  сходится к  $(x'_0(t), y'_0(t))$  равномерно на каждом конечном отрезке. Для функций  $x_n(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , согласно предположению (9), имеет место оценка

$$\inf_{t \geq -t_n} x_n(t) = \inf_{t \geq 0} x(t) > 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

В системе уравнений (10), переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем, что  $(x_0(t), y_0(t))$  является неотрицательным и ограниченным на промежутке  $(-\infty, +\infty)$  решением системы уравнений

$$\begin{cases} \xi'(t) = c_\infty(Y_\infty - \eta(t))\xi(t) - k_{1,\infty}\xi(t), \\ \eta'(t) = a_\infty(Y_\infty - \eta(t))\xi(t) - k_{2,\infty}\eta(t), \end{cases} \quad (11)$$

и для функции  $x_0(t)$  имеет место оценка

$$\inf_{t \in (-\infty, +\infty)} x_0(t) > 0.$$





Из последней оценки в силу второго уравнения системы (11) и неотрицательности  $y_0(t)$  следует, что  $y_0(t) > 0$  при всех  $t \in (-\infty, +\infty)$ . К системе уравнений (11) и к решению  $(x_0(t), y_0(t))$  этой системы применяя следствие 2, выводим, что  $x_0(t) \equiv x_\infty$ ,  $y_0(t) \equiv y_\infty$ . Следовательно,  $(x(t_n), y(t_n)) \rightarrow (x_\infty, y_\infty)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Доказательство теоремы 3 завершим следующей леммой.

**Лемма 1.** Если выполнены условия г), д) и е), то любое положительное и ограниченное решение  $(x(t), y(t))$ ,  $t \in [0, +\infty)$  системы уравнений (1) удовлетворяет условию (9).

**Доказательство.** Предположим, что условие (9) нарушено для какого-нибудь положительного и ограниченного решения  $(x(t), y(t))$ ,  $t \in [0, +\infty)$  системы уравнений (1). Тогда существует последовательность  $\tau_n \rightarrow +\infty$  такая, что

$$\min_{0 \leq t \leq \tau_n} x(t) = x(\tau_n), \quad x'(\tau_n) \leq 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad x(\tau_n) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Из неравенства  $x'(\tau_n) \leq 0$  в силу первого уравнения системы (1) следует, что  $y(\tau_n) \geq Y(\tau_n) - k_1(\tau_n)/c(\tau_n)$  при  $c(\tau_n) > 0$ . Можно считать, что при всех  $n = 1, 2, \dots$  имеют место неравенства  $x(\tau_n) < 1$  и  $y(\tau_n) > r$ , где  $r = (Y_\infty - k_{1,\infty}/c_\infty)/2$ .

При каждом  $n = 1, 2, \dots$  рассмотрим наибольший интервал  $(s_n, \tau_n)$ , где выполняются неравенства

$$x(t) < \sqrt{x(\tau_n)}, \quad y(t) > r, \quad t \in (s_n, \tau_n).$$

На этом интервале в силу второго уравнения системы (1) имеем

$$y'(t) < R\sqrt{x(\tau_n)} - k_2(t)y(t), \quad \text{где} \quad R > \sup_{t \geq 0} |a(t)(Y(t) - y(t))|.$$

В дальнейшем полагаем, что

$$R > \sup_{t \geq 0} |c(t)(Y(t) - y(t)) - k_1(t)|, \quad R > y(t).$$

Так как  $x(\tau_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $k_2(t) \rightarrow k_{2,\infty}$  при  $t \rightarrow +\infty$ , можно считать, что

$$R\sqrt{x(\tau_n)} - k_2(t)y(t) < -\sigma, \quad t \in (s_n, \tau_n),$$

где  $\sigma > 0$  и зависит лишь от  $R$ ,  $r$  и  $k_{2,\infty}$ . Таким образом,  $y'(t) < -\sigma$  при  $t \in (s_n, \tau_n)$ . Отсюда следует, что  $\tau_n - s_n \leq (R - r)/\sigma$  и  $x(s_n) = \sqrt{x(\tau_n)}$ . Теперь оценим снизу  $x(\tau_n)$ , воспользовавшись первым уравнением системы (1):

$$x(\tau_n) = x(s_n)e^{\int_{s_n}^{\tau_n} [c(s)(Y(s) - y(s)) - k_1(s)] ds} \geq \sqrt{x(\tau_n)}e^{-R(\tau_n - s_n)},$$

$$\sqrt{x(\tau_n)} \geq e^{-R(R-r)/\sigma}.$$

Полученная оценка противоречит тому, что  $x(\tau_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . □

**Благодарности.** Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-47-350001 р-а, № 19-01-00103а).



## Библиографический список

1. Горский А. А., Локшин Б. Я., Розов Н. Х. Режим обострения в одной системе нелинейных уравнений // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 11. С. 1571–1581.
2. Горский А. А., Локшин Б. Я. Математическая модель производства и продажи для управления и планирования производства // Фундамент. и прикл. матем. 2002. Т. 8, вып. 1. С. 39–45.
3. Мухамадиев Э., Наимов А. Н., Собиров М. К. Исследование положительных решений динамической модели производства и продажи товара // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий : сб. тр. X междунар. конф. («ПМТУКТ-2017»). Воронеж : Научная книга, 2017. С. 268–271.
4. Кобилзода М. М., Наимов А. Н. О положительных и периодических решениях одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости // Вестн. ВГУ. Сер. Физика. Математика. 2019. № 1. С. 117–127.
5. Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М. : Наука, 1964. 367 с.
6. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. М. : Наука, 1975. 511 с.
7. Мухамадиев Э. К теории ограниченных решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 4. С. 635–646.
8. Мухамадиев Э. Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Матем. заметки. 1981. Т. 30, вып. 3. С. 443–460.
9. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. : Мир, 1970. 720 с.

---

### Образец для цитирования:

Кобилзода М. М., Наимов А. Н. О положительных решениях модельной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 161–171. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-161-171>

---

## On the Positive Solutions of a Model System of Nonlinear Ordinary Differential Equations

M. M. Kobilzoda, A. N. Naimov

Mirzoodil M. Kobilzoda, Tajik National University, 17 Rudaki Ave., Dushanbe 734025, Republic of Tajikistan, [kobilzoda94@mail.ru](mailto:kobilzoda94@mail.ru)

Alizhon N. Naimov, <https://orcid.org/0000-0002-6194-7164>, Vologda State University, 15 Lenin St., Vologda 160000, Russia, [nan67@rambler.ru](mailto:nan67@rambler.ru)

This article investigates the properties of positive solutions of a model system of two nonlinear ordinary differential equations with variable coefficients. We found the new conditions on coefficients for which an arbitrary solution  $(x(t), y(t))$  with positive initial values  $x(0)$  and  $y(0)$  is positive, nonlocally continued and bounded at  $t > 0$ . For this conditions we investigated the question of global stability of positive solutions via method of constructing the guiding function and the method of limit equations. Via the method of constructing the guide function we proved that if the system of equations has a positive constant solution  $(x_*, y_*)$ , then any positive solution  $(x(t), y(t))$  at  $t \rightarrow +\infty$  approaches  $(x_*, y_*)$ . And in the case when the coefficients of the system of equations have finite limits at  $t \rightarrow +\infty$  and the limit system of equations has a positive constant solution  $(x_\infty, y_\infty)$ , via method of limit equations we proved that any positive solution  $(x(t), y(t))$  at  $t \rightarrow +\infty$  approaches  $(x_\infty, y_\infty)$ . The results obtained can be generalized for the multidimensional analog of the investigated system of equations.



**Keywords:** a model system of nonlinear ordinary differential equations, positive solution, nonlocal continuation, global stability of positive solutions, method of constructing the guiding function, method of limit equations.

Received: 17.06.2019 / Accepted: 30.09.2019 / Published: 01.06.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects No. 18-47-350001 p-a, No. 19-01-00103a).

## References

1. Gorsky A. A., Lokshin B. Y., Rozov N. Kh. The regime intensified in one system of nonlinear equations. *Differential Equations*, 1999, vol. 35, no. 11, pp. 1571–1581 (in Russian).
2. Gorsky A. A., Lokshin B. Y. A mathematical model of goods production and sale for production supervision and planning. *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika*, 2002, vol. 8, no. 1, pp. 39–45 (in Russian).
3. Mukhamadiev E., Naimov A. N., Sobirov M. K. Research positive solutions of dynamic model of production and sale goods. *Sovremennye metody prikladnoi matematiki, teorii upravleniya i komp'yuternykh tekhnologii: sbornik trudov X mezhdunarodnoi konferentsii ("PMTUKT-2017")* [Modern methods of applied mathematics, control theory and computer technology: proceedings of X Int. Conf. ("PMTUKT-2017")]. Voronezh, Nauchnaia kniga, 2017, pp. 268–271 (in Russian).
4. Kobilzoda M. M., Naimov A. N. On positive and periodic solutions of one class of systems of nonlinear ordinary differential equations on a plane. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Fizika. Matematika* [Proceedings of Voronezh State University. Ser. Physics. Mathematics], 2019, no. 1, pp. 117–127 (in Russian).
5. Pliss V. A. *Nonlocal problems of the theory of oscillations*. New York, London, Acad. Press, 1966. 306 p. (Rus. ed.: Moscow, Nauka, 1964. 367 p.).
6. Krasnosel'skii M. A., Zabreiko P. P. *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, Springer Verlag, 1984. 409 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1975. 11 p.).
7. Mukhamadiev E. On the theory of bounded solutions of ordinary differential equations. *Differ. Uravn.*, 1974, vol. 10, no. 4, pp. 635–646 (in Russian).
8. Mukhamadiev E. Research on the theory of periodic and bounded solutions of differential equations. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1981, vol. 30, no. 3, pp. 713–722. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01141630>
9. Hartman P. *Ordinary Differential Equations*. New York, John Wiley and Sons, 1964. 612 p. (Rus. ed.: Moscow, Mir, 1970. 720 p.).

## Cite this article as:

Kobilzoda M. M., Naimov A. N. On the Positive Solutions of a Model System of Nonlinear Ordinary Differential Equations. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 161–171 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-161-171>



УДК 514.765

## О геометрии трехмерных псевдоримановых однородных пространств. II

Н. П. Можей

Можей Наталья Павловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Беларусь, 220013, г. Минск, ул. П. Бровки, д. 6, [mozheynatalya@mail.ru](mailto:mozheynatalya@mail.ru)

Одной из важных проблем геометрии является задача об установлении связей между кривизной и топологической структурой многообразия. В общем случае задача исследования многообразий различных типов является достаточно сложной. Поэтому естественно рассматривать данную задачу в более узком классе псевдоримановых многообразий, например в классе однородных псевдоримановых многообразий. Настоящая статья является продолжением одноименной работы (части 1). В статье определены основные понятия – изотропно-точная пара, псевдориманово однородное пространство, аффинная связность, тензоры кривизны и кручения, связность Леви–Чевита, тензор Риччи, Риччи-плоское, Эйнштейново, Риччи-параллельное, локально-симметрическое, конформно-плоское пространства. В работе для трехмерных псевдоримановых однородных пространств определено, при каких условиях пространство является Риччи-плоским, Эйнштейновым, Риччи-параллельным, локально-симметрическим или конформно-плоским. Кроме этого, для всех указанных пространств выписаны в явном виде связности Леви–Чевита, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии, скалярные кривизны, тензоры Риччи. Полученные результаты могут найти приложения в математике и физике, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях сводятся к изучению инвариантных объектов на однородных пространствах.

**Ключевые слова:** группа преобразований, псевдориманово многообразие, тензор Риччи, Эйнштейново пространство, конформно-плоское пространство.

Поступила в редакцию: 03.11.2018 / Принята: 31.01.2019 / Опубликовано: 01.06.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-172-184>

*Окончание. Начало см.: Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 29–41.*

### ВВЕДЕНИЕ

Исследованию многообразий Эйнштейна, локально-симметрических, Риччи-параллельных и конформно-плоских многообразий посвящены работы многих математиков. Локально-симметрические пространства введены П. А. Широковым и Э. Картаном. Естественные обобщения симметрических пространств привели к другим, не менее интересным классам пространств, одним из которых является класс псевдоримановых пространств с параллельным тензором Риччи, теория которых сводится к теории Эйнштейновых пространств (в книге А. Бессе [1] собраны факты по Эйнштейновым многообразиям, полученные различными авторами, см. также обзор М. Вана [2]). Многомерным обобщением двумерных





многообразий с локально изотермической координатной системой [3] являются конформно-плоские многообразия (см., например, [1]). В случае многообразий постоянной скалярной кривизны класс конформно-плоских многообразий содержится в классе эйнштейновоподобных многообразий в смысле А. Грея [4]. Исследованию многообразий указанных классов посвящены работы М. А. Акивиса, В. В. Гольдберга, Н. Кюпера, Д. В. Алексеевского, Б. Н. Кимельфельда, Е. Д. Родионова, В. В. Славского, О. Ковальского, С. Никшевича и др. (см., например, [5–8]); задача описания многообразий каждого типа не решена в полном объеме, но для некоторых классов пространств получен ответ (подробнее см. обзор [9]).

Настоящая статья является продолжением одноименной работы (части 1), при изложении сохранены обозначения, введенные ранее. В работе продолжается изучение геометрических свойств трехмерных псевдоримановых однородных пространств, в части 2 внимание сосредоточено на однородных пространствах, не допускающих риманову метрику. В ней приведены основные факты по указанным пространствам и их классификация, далее изучена геометрия каждого класса, а именно для трехмерных псевдоримановых однородных пространств выписаны в явном виде связности Леви – Чевита, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии, тензоры Риччи и определено, в каких случаях пространство является Риччи-плоским, Эйнштейновым, Риччи-параллельным, локально-симметрическим либо конформно-плоским.

## 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть  $M$  — дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа  $\bar{G}$ ,  $G = \bar{G}_x$  — стабилизатор произвольной точки  $x \in M$ . Проблема классификации однородных пространств  $(M, \bar{G})$  равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли  $(\bar{G}, G)$ , где  $G \subset \bar{G}$  (см., например, [10]). Пусть  $\bar{\mathfrak{g}}$  — алгебра Ли группы Ли  $\bar{G}$ , а  $\mathfrak{g}$  — подалгебра, соответствующая подгруппе  $G$ . Пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры  $\mathfrak{g}$ .

*Псевдориманово однородное пространство* задается тройкой  $(\bar{G}, M, \mathfrak{g})$ , где  $\bar{G}$  — связная группа Ли,  $M$  является связным гладким многообразием с транзитивным действием  $\bar{G}$ , а  $\mathfrak{g}$  — инвариантная псевдориманова метрика на  $M$ . Инвариантные псевдоримановы метрики  $\mathfrak{g}$  на  $M$  находятся во взаимно-однозначном соответствии с инвариантными симметрическими невырожденными билинейными формами  $B$  на  $G$ -модуле  $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$  ([11]). Существует единственное (с точностью до эквивалентности) псевдориманово однородное пространство  $(\bar{G}, M, \mathfrak{g})$ , соответствующее  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ , такое, что  $M$  односвязно и  $G$  связна [12]. Будем называть тройку  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$  *локально псевдоримановым однородным пространством*. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к  $\mathfrak{g}$  в  $\bar{\mathfrak{g}}$ , и факторпространство  $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ .

## 2. ТРЕХМЕРНЫЕ ПСЕВДОРИМАНОВЫ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Локально псевдоримановы однородные пространства, не допускающие риманову метрику (только псевдориманову), описаны в работе [13]:

**Теорема 1.** Пусть  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$  — локально псевдориманово однородное пространство, не допускающее риманову метрику,  $\text{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}} \mathfrak{g} = 3$  и  $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ . Оно эквивалентно только одной из троек, приведенных в табл. 1 ( $e_i$  ( $i = 1, 3$ ) — базис  $\mathfrak{g}$ ,  $u_1, u_2, u_3$  — базис  $\mathfrak{m}$ , нумерация пар соответствует приведенной в [14]).



Таблица 1 / Table 1

Локально псевдоримановы пространства / Locally pseudo-Riemannian spaces

$B$	Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ / Pair $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$						
$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$	1.1.1, $\lambda = -1$ , $\bar{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{so}(1, 1) \ltimes \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}$ , $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$ ,						
		$e_1$	$u_1$	$u_2$	$u_3$		
	$e_1$	0	$u_1$	$-u_2$	0		
	$u_1$	$-u_1$	0	0	0		
	$u_2$	$u_2$	0	0	0		
	$u_3$	0	0	0	0		
$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, a \neq 0$	1.1.2, $\lambda = -1$		$e_1$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
	$e_1$		0	$u_1$	$-u_2$	0	
	$u_1$		$-u_1$	0	0	0	
	$u_2$		$u_2$	0	0	$u_2$	
	$u_3$		0	0	$-u_2$	0	
	1.1.6		$e_1$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
	$e_1$		0	$u_1$	$-u_2$	0	
	$u_1$		$-u_1$	0	$u_3$	0	
	$u_2$		$u_2$	$-u_3$	0	0	
	$u_3$		0	0	0	0	
$B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, a \neq 0$	1.1.5, $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ , $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, 1)$ ,						
		$e_1$	$u_1$	$u_2$	$u_3$		
	$e_1$	0	$u_1$	$-u_2$	0		
	$u_1$	$-u_1$	0	$e_1$	0		
	$u_2$	$u_2$	$-e_1$	0	0		
	$u_3$	0	0	0	0		
$B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, ab \neq 0$	1.1.7, $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$		$e_1$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
	$e_1$		0	$u_1$	$-u_2$	0	
	$u_1$		$-u_1$	0	$e_1 + u_3$	0	
	$u_2$		$u_2$	$-e_1 - u_3$	0	0	
	$u_3$		0	0	0	0	
$B = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1.8.1, 1.8.4, 1.8.5		$e_1$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
	$e_1$		0	0	$u_1$	$u_2$	
	$u_1$		0	0	0	0	
	$u_2$		$-u_1$	0	0	$\delta e_1$	
	$u_3$		$-u_2$	0	$-\delta e_1$	0	
	1.8.3		$e_1$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
	$e_1$		0	0	$u_1$	$u_2$	
	$u_1$		0	0	0	$u_1$	
	$u_2$		$-u_1$	0	0	$u_2 + \alpha e_1$	
	$u_3$		$-u_2$	$-u_1$	$-u_2 - \alpha e_1$	0	
	2.21.1, $\lambda = 0$		$e_1$	$e_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
	$e_1$		0	$e_2$	$u_1$	0	$-u_3$
	$e_2$		$-e_2$	0	0	$u_1$	$u_2$
	$u_1$		$-u_1$	0	0	0	0
	$u_2$		0	$-u_1$	0	0	0
	$u_3$		$u_3$	$-u_2$	0	0	0



Окончание табл. 1 / End of Table 1

$B$	Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ / Pair $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$																																																																																																																																						
$B = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	<div>3.4.1, <math>\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(2, 1) \ltimes \mathbb{R}^3</math>, <math>\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 1)</math>,</div> <table><tr><td></td><td><math>e_1</math></td><td><math>e_2</math></td><td><math>e_3</math></td><td><math>u_1</math></td><td><math>u_2</math></td><td><math>u_3</math></td></tr><tr><td><math>e_1</math></td><td>0</td><td><math>e_2</math></td><td><math>-e_3</math></td><td><math>u_1</math></td><td>0</td><td><math>-u_3</math></td></tr><tr><td><math>e_2</math></td><td><math>-e_2</math></td><td>0</td><td><math>e_1</math></td><td>0</td><td><math>u_1</math></td><td><math>u_2</math></td></tr><tr><td><math>e_3</math></td><td><math>e_3</math></td><td><math>-e_1</math></td><td>0</td><td><math>u_2</math></td><td><math>u_3</math></td><td>0</td></tr><tr><td><math>u_1</math></td><td><math>-u_1</math></td><td>0</td><td><math>-u_2</math></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td><math>u_2</math></td><td>0</td><td><math>-u_1</math></td><td><math>-u_3</math></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td><math>u_3</math></td><td><math>u_3</math></td><td><math>-u_2</math></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>		$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$e_1$	0	$e_2$	$-e_3$	$u_1$	0	$-u_3$	$e_2$	$-e_2$	0	$e_1$	0	$u_1$	$u_2$	$e_3$	$e_3$	$-e_1$	0	$u_2$	$u_3$	0	$u_1$	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	$u_2$	0	$-u_1$	$-u_3$	0	0	0	$u_3$	$u_3$	$-u_2$	0	0	0	0																																																																																					
	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$																																																																																																																																	
$e_1$	0	$e_2$	$-e_3$	$u_1$	0	$-u_3$																																																																																																																																	
$e_2$	$-e_2$	0	$e_1$	0	$u_1$	$u_2$																																																																																																																																	
$e_3$	$e_3$	$-e_1$	0	$u_2$	$u_3$	0																																																																																																																																	
$u_1$	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0																																																																																																																																	
$u_2$	0	$-u_1$	$-u_3$	0	0	0																																																																																																																																	
$u_3$	$u_3$	$-u_2$	0	0	0	0																																																																																																																																	
$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \\ a & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad a \neq 0, \quad \varepsilon = \pm 1, 0$	<div>1.8.2, <math>\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}</math></div> <table><tr><td></td><td><math>e_1</math></td><td><math>u_1</math></td><td><math>u_2</math></td><td><math>u_3</math></td></tr><tr><td><math>e_1</math></td><td>0</td><td>0</td><td><math>u_1</math></td><td><math>u_2</math></td></tr><tr><td><math>u_1</math></td><td>0</td><td>0</td><td><math>u_1</math></td><td><math>u_2</math></td></tr><tr><td><math>u_2</math></td><td><math>-u_1</math></td><td><math>-u_1</math></td><td>0</td><td><math>u_3</math></td></tr><tr><td><math>u_3</math></td><td><math>-u_2</math></td><td><math>-u_2</math></td><td><math>-u_3</math></td><td>0</td></tr></table>		$e_1$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$e_1$	0	0	$u_1$	$u_2$	$u_1$	0	0	$u_1$	$u_2$	$u_2$	$-u_1$	$-u_1$	0	$u_3$	$u_3$	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0																																																																																																													
	$e_1$	$u_1$	$u_2$	$u_3$																																																																																																																																			
$e_1$	0	0	$u_1$	$u_2$																																																																																																																																			
$u_1$	0	0	$u_1$	$u_2$																																																																																																																																			
$u_2$	$-u_1$	$-u_1$	0	$u_3$																																																																																																																																			
$u_3$	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0																																																																																																																																			
$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0$	<div>2.21.4</div> <table><tr><td></td><td><math>e_1</math></td><td><math>e_2</math></td><td><math>u_1</math></td><td><math>u_2</math></td><td><math>u_3</math></td></tr><tr><td><math>e_1</math></td><td>0</td><td><math>e_2</math></td><td><math>u_1</math></td><td>0</td><td><math>-u_3</math></td></tr><tr><td><math>e_2</math></td><td><math>-e_2</math></td><td>0</td><td>0</td><td><math>u_1</math></td><td><math>u_2</math></td></tr><tr><td><math>u_1</math></td><td><math>-u_1</math></td><td>0</td><td>0</td><td><math>u_1</math></td><td><math>u_2</math></td></tr><tr><td><math>u_2</math></td><td>0</td><td><math>-u_1</math></td><td><math>-u_1</math></td><td>0</td><td><math>u_3</math></td></tr><tr><td><math>u_3</math></td><td><math>u_3</math></td><td><math>-u_2</math></td><td><math>-u_2</math></td><td><math>-u_3</math></td><td>0</td></tr></table> <div>3.4.2, <math>\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(2, 2) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})</math>, <math>\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 1) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})</math>,</div> <table><tr><td></td><td><math>e_1</math></td><td><math>e_2</math></td><td><math>e_3</math></td><td><math>u_1</math></td><td><math>u_2</math></td><td><math>u_3</math></td></tr><tr><td><math>e_1</math></td><td>0</td><td><math>e_2</math></td><td><math>-e_3</math></td><td><math>u_1</math></td><td>0</td><td><math>-u_3</math></td></tr><tr><td><math>e_2</math></td><td><math>-e_2</math></td><td>0</td><td><math>e_1</math></td><td>0</td><td><math>u_1</math></td><td><math>u_2</math></td></tr><tr><td><math>e_3</math></td><td><math>e_3</math></td><td><math>-e_1</math></td><td>0</td><td><math>u_2</math></td><td><math>u_3</math></td><td>0</td></tr><tr><td><math>u_1</math></td><td><math>-u_1</math></td><td>0</td><td><math>-u_2</math></td><td>0</td><td><math>e_2</math></td><td><math>-e_1</math></td></tr><tr><td><math>u_2</math></td><td>0</td><td><math>-u_1</math></td><td><math>-u_3</math></td><td><math>-e_2</math></td><td>0</td><td><math>-e_3</math></td></tr><tr><td><math>u_3</math></td><td><math>u_3</math></td><td><math>-u_2</math></td><td>0</td><td><math>e_1</math></td><td><math>e_3</math></td><td>0</td></tr></table> <div>3.4.3, <math>\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3, 1) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}</math>, <math>\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 1) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})</math>,</div> <table><tr><td></td><td><math>e_1</math></td><td><math>e_2</math></td><td><math>e_3</math></td><td><math>u_1</math></td><td><math>u_2</math></td><td><math>u_3</math></td></tr><tr><td><math>e_1</math></td><td>0</td><td><math>e_2</math></td><td><math>-e_3</math></td><td><math>u_1</math></td><td>0</td><td><math>-u_3</math></td></tr><tr><td><math>e_2</math></td><td><math>-e_2</math></td><td>0</td><td><math>e_1</math></td><td>0</td><td><math>u_1</math></td><td><math>u_2</math></td></tr><tr><td><math>e_3</math></td><td><math>e_3</math></td><td><math>-e_1</math></td><td>0</td><td><math>u_2</math></td><td><math>u_3</math></td><td>0</td></tr><tr><td><math>u_1</math></td><td><math>-u_1</math></td><td>0</td><td><math>-u_2</math></td><td>0</td><td><math>-e_2</math></td><td><math>e_1</math></td></tr><tr><td><math>u_2</math></td><td>0</td><td><math>-u_1</math></td><td><math>-u_3</math></td><td><math>e_2</math></td><td>0</td><td><math>e_3</math></td></tr><tr><td><math>u_3</math></td><td><math>u_3</math></td><td><math>-u_2</math></td><td>0</td><td><math>-e_1</math></td><td><math>-e_3</math></td><td>0</td></tr></table>		$e_1$	$e_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$e_1$	0	$e_2$	$u_1$	0	$-u_3$	$e_2$	$-e_2$	0	0	$u_1$	$u_2$	$u_1$	$-u_1$	0	0	$u_1$	$u_2$	$u_2$	0	$-u_1$	$-u_1$	0	$u_3$	$u_3$	$u_3$	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0		$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$e_1$	0	$e_2$	$-e_3$	$u_1$	0	$-u_3$	$e_2$	$-e_2$	0	$e_1$	0	$u_1$	$u_2$	$e_3$	$e_3$	$-e_1$	0	$u_2$	$u_3$	0	$u_1$	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$e_2$	$-e_1$	$u_2$	0	$-u_1$	$-u_3$	$-e_2$	0	$-e_3$	$u_3$	$u_3$	$-u_2$	0	$e_1$	$e_3$	0		$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$e_1$	0	$e_2$	$-e_3$	$u_1$	0	$-u_3$	$e_2$	$-e_2$	0	$e_1$	0	$u_1$	$u_2$	$e_3$	$e_3$	$-e_1$	0	$u_2$	$u_3$	0	$u_1$	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$-e_2$	$e_1$	$u_2$	0	$-u_1$	$-u_3$	$e_2$	0	$e_3$	$u_3$	$u_3$	$-u_2$	0	$-e_1$	$-e_3$	0
	$e_1$	$e_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$																																																																																																																																		
$e_1$	0	$e_2$	$u_1$	0	$-u_3$																																																																																																																																		
$e_2$	$-e_2$	0	0	$u_1$	$u_2$																																																																																																																																		
$u_1$	$-u_1$	0	0	$u_1$	$u_2$																																																																																																																																		
$u_2$	0	$-u_1$	$-u_1$	0	$u_3$																																																																																																																																		
$u_3$	$u_3$	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0																																																																																																																																		
	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$																																																																																																																																	
$e_1$	0	$e_2$	$-e_3$	$u_1$	0	$-u_3$																																																																																																																																	
$e_2$	$-e_2$	0	$e_1$	0	$u_1$	$u_2$																																																																																																																																	
$e_3$	$e_3$	$-e_1$	0	$u_2$	$u_3$	0																																																																																																																																	
$u_1$	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$e_2$	$-e_1$																																																																																																																																	
$u_2$	0	$-u_1$	$-u_3$	$-e_2$	0	$-e_3$																																																																																																																																	
$u_3$	$u_3$	$-u_2$	0	$e_1$	$e_3$	0																																																																																																																																	
	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$																																																																																																																																	
$e_1$	0	$e_2$	$-e_3$	$u_1$	0	$-u_3$																																																																																																																																	
$e_2$	$-e_2$	0	$e_1$	0	$u_1$	$u_2$																																																																																																																																	
$e_3$	$e_3$	$-e_1$	0	$u_2$	$u_3$	0																																																																																																																																	
$u_1$	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$-e_2$	$e_1$																																																																																																																																	
$u_2$	0	$-u_1$	$-u_3$	$e_2$	0	$e_3$																																																																																																																																	
$u_3$	$u_3$	$-u_2$	0	$-e_1$	$-e_3$	0																																																																																																																																	

### 3. ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Аффинной связностью на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  называется такое отображение  $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ , что его ограничение на  $\mathfrak{g}$  есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является  $\mathfrak{g}$ -инвариантным. Тензоры кручения  $T \in \text{Inv } T_2^1(\mathfrak{m})$  и кривизны  $R \in \text{Inv } T_3^1(\mathfrak{m})$  для всех  $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$  имеют вид  $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$ ,  $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$ . Псевдориманова связность, соответствующая фор-



ме  $B$ , находится из соотношения

$$\Lambda(x)y_m = \frac{1}{2}[x, y]_m + u(x, y), \quad \text{где} \quad 2B(u(x, y), z) = B(x, [z, y]_m) + B([z, x]_m, y)$$

для всех  $x, y, z \in \mathfrak{m}$ . Существует единственная псевдориманова связность без кручения, называемая *Леви – Чевита связностью*. Тензор Риччи определяется через тензор кривизны следующим образом:  $\text{Ric}(x, y) = \text{tr}\{z \rightarrow R(z, x)y\}$ , где  $x, y, z$  — произвольные касательные вектора на многообразии.

С тензором Риччи связано несколько геометрических свойств многообразия. Многообразие  $(M, \mathbf{g})$  называется *Риччи-плоским*, если тензор Риччи тождественно равен нулю. Более общее условие — многообразие является *Эйнштейновым*, если  $\text{Ric} = \lambda \mathbf{g}$  для некоторой константы  $\lambda$ . Условие *Риччи-параллельности* — ковариантная производная тензора Риччи равна нулю. Если ковариантная производная тензора кривизны равна нулю, т.е.  $\Lambda(R) = 0$ , многообразие называется *локально-симметрическим*.

Равенство нулю тензора Коттона (тензора Схоутена – Вейля):

$$C(x, y, z) = \nabla_z \text{Ric}(x, y) - \nabla_y \text{Ric}(x, z) + \frac{1}{2(n-1)} (\nabla_y R \mathbf{g}(x, z) - \nabla_z R \mathbf{g}(x, y)),$$

где  $x, y, z \in \mathfrak{m}$  (а  $R$  — скалярная кривизна) в размерности  $n = 3$  является необходимым и достаточным условием того, что многообразие является *конформно-плоским* [15].

**Теорема 2.** Пусть  $(\bar{\mathbf{g}}, \mathbf{g}, B)$  — одно из трехмерных локально псевдоримановых однородных пространств, представленных в теореме 1. Риччи-плоские, Эйнштейновы, Риччи-параллельные, локально-симметрические и конформно-плоские пространства выписаны в табл. 2 и 3.

Таблица 2 / Table 2

Риччи-плоские, Эйнштейновы и Риччи-параллельные пространства  
Ricci-flat, Einstein and Ricci-parallel spaces

Пара Pair	Риччи-плоское Ricci-flat	Эйнштейново Einstein	Риччи-параллельное Ricci-parallel
1.1.1	да	да ( $\lambda = 0$ )	да
1.1.2	нет	да ( $\lambda = -1/(2a)$ )	да
1.1.5	нет	нет	да
1.1.6	нет	нет	нет
1.1.7	нет	при $b = a$ ( $\lambda = -1/(2a)$ )	при $b = a$
1.8.1	да	да ( $\lambda = 0$ )	да
1.8.2	нет	при $\varepsilon = 0$ ( $\lambda = 1/(2a)$ )	при $\varepsilon = 0$
1.8.3	при $\alpha = 0$	при $\alpha = 0$ ( $\lambda = 0$ )	при $\alpha = 0$
1.8.4	нет	нет	да
1.8.5	нет	нет	да
2.21.1	да	да ( $\lambda = 0$ )	да
2.21.4	нет	да ( $\lambda = 1/(2a)$ )	да
3.4.1	да	да ( $\lambda = 0$ )	да
3.4.2	нет	да ( $\lambda = 2/a$ )	да
3.4.3	нет	да ( $\lambda = -2/a$ )	да





Таблица 3 / Table 3

Локально-симметрические и конформно-плоские пространства

Locally symmetric and conformally flat spaces

Пара Pair	Локально-симметрическое Locally-symmetric	Конформно-плоское Conformally-flat
1.1.1	да	да ( $R = 0$ )
1.1.2	да	да ( $R = -3/(2a)$ )
1.1.5	да	да ( $R = -2/a$ )
1.1.6	нет	нет ( $R = a/2$ )
1.1.7	при $b = a$	при $b = a$ ( $R = (b - 4a)/(2a^2)$ )
1.8.1	да	да ( $R = 0$ )
1.8.2	при $\varepsilon = 0$	при $\varepsilon = 0$ ( $R = 3/(2a)$ )
1.8.3	при $\alpha = 0$	да ( $R = 0$ )
1.8.4	да	да ( $R = 0$ )
1.8.5	да	да ( $R = 0$ )
2.21.1	да	да ( $R = 0$ )
2.21.4	да	да ( $R = 3/(2a)$ )
3.4.1	да	да ( $R = 0$ )
3.4.2	да	да ( $R = 6/a$ )
3.4.3	да	да ( $R = -6/a$ )

**Доказательство.** Поскольку ограничение  $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$  на  $\mathfrak{g}$  есть изотропное представление подалгебры, связность однозначно определяется значениями на  $\mathfrak{m}$ . Будем выписывать ее через  $\Lambda(u_1)$ ,  $\Lambda(u_2)$ ,  $\Lambda(u_3)$ , тензор кривизны  $R$  будем выписывать значениями  $R(u_1, u_2)$ ,  $R(u_1, u_3)$ ,  $R(u_2, u_3)$ , а кручения  $T$  — значениями  $T(u_1, u_2)$ ,  $T(u_1, u_3)$ ,  $T(u_2, u_3)$ .

Рассмотрим, например, случай 1.8.2. Аффинная связность имеет вид [13] (по умолчанию все параметры принадлежат  $\mathbb{R}$ )

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -p_{12} & q_{12} & q_{13} \\ 0 & q_{11} + p_{12} & q_{12} + p_{13} \\ 0 & 0 & q_{11} + 2p_{12} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ -p_{12} & r_{11} + q_{12} & r_{12} + q_{13} \\ 0 & -p_{12} & r_{11} + 2q_{12} + p_{13} \end{pmatrix}.$$

Связность является связностью Леви – Чевита при выполнении следующих условий:

$$\begin{aligned} (2p_{12} - 1)a = 0, \quad -(2p_{12} - 1)a = 0, \quad 2p_{13}a = 0, \quad -(2p_{12} - 1)a = 0, \quad 2q_{12}a = 0, \\ (2p_{12} - 1)a = 0, \quad -2(q_{12} + p_{13})a = 0, \quad 2q_{13}a + 2\varepsilon p_{12} = 0, \quad (2p_{12} - 1)a = 0, \quad 2r_{11}a = 0, \\ -(2p_{12} - 1)a = 0, \quad -2(r_{11} + q_{12})a = 0, \quad 2r_{12}a - 2\varepsilon p_{12} + 2\varepsilon = 0, \quad 2(r_{11} + 2q_{12} + p_{13})a = 0, \\ -2r_{12}a - 2q_{13}a - 2\varepsilon = 0, \quad 2r_{13}a + 2\varepsilon r_{11} + 4\varepsilon q_{12} + 2\varepsilon p_{13} = 0, \end{aligned}$$

т.е. при  $r_{12} = -\varepsilon/(2a)$ ,  $p_{12} = 1/2$ ,  $p_{13} = 0$ ,  $q_{12} = 0$ ,  $q_{13} = r_{12}$ ,  $r_{11} = 0$ ,  $r_{13} = 0$ . Полученная связность имеет вид, представленный в табл. 4.

Тензор кривизны  $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$  инвариантной аффинной связности:

$$R(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 0 & p_{12}^2 - p_{12} & 3p_{13}p_{12} - p_{13} \\ 0 & 0 & p_{12}^2 - p_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$



$$R(u_1, u_3) = \begin{pmatrix} -p_{12}^2 + p_{12} & q_{12}p_{12} - p_{13}p_{12} - q_{12} & p_{12}q_{13} + 2p_{13}q_{12} + p_{13}^2 - q_{13} \\ 0 & -q_{11} - p_{12} & q_{12}p_{12} + 2p_{13}p_{12} - q_{12} - p_{13} \\ 0 & 0 & p_{12}^2 - q_{11} - 2p_{12} \end{pmatrix},$$

$$R(u_2, u_3) =$$

$$= \begin{pmatrix} -q_{12}p_{12} - r_{11} & -r_{12}p_{12} + q_{12}^2 - p_{12}q_{13} - r_{12} & -2p_{12}r_{13} + 3q_{12}q_{13} + q_{13}p_{13} - r_{12}p_{13} - r_{13} \\ -p_{12}^2 + p_{12} & -p_{13}p_{12} - r_{11} - q_{12} & q_{12}^2 + 2p_{13}q_{12} + p_{13}^2 - r_{12}p_{12} - r_{12} - q_{13} \\ 0 & -p_{12}^2 + p_{12} & q_{12}p_{12} + p_{13}p_{12} - r_{11} - 2q_{12} - p_{13} \end{pmatrix}.$$

Таблица 4 / Table 4

## Аффинные связности / Affine connections

Пара / Pair	Аффинная связность / Affine connection
1.1.1, 1.1.5	нулевая
1.1.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/(2a) & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ -1/(2a) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.1.6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a/2 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a/2 & 0 & 0 \\ 0 & a/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.1.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -b/(2a) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b/(2a) \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b/(2a) & 0 & 0 \\ 0 & b/(2a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.8.1	нулевая
1.8.2	$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -\varepsilon/(2a) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon/(2a) & 0 \\ -1/2 & 0 & -\varepsilon/a \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$
1.8.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
1.8.4, 1.8.5	нулевая
2.21.1	нулевая
2.21.4	$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$
3.4.1–3.4.3	нулевая

Алгебра Ли группы голономии инвариантной связности  $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$  на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  — это подалгебра алгебры Ли  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$  вида  $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \dots$ , где  $V$  — подпространство, порожденное множеством  $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) | x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$ .

Для связности Леви – Чевита (т.е. при  $r_{12} = -\varepsilon/(2a)$ ,  $p_{12} = 1/2$ ,  $p_{13} = 0$ ,  $q_{12} = 0$ ,  $q_{13} = r_{12}$ ,  $r_{11} = 0$ ,  $r_{13} = 0$ ) тензор кривизны имеет вид, представленный в табл. 5, а алгебра голономии — вид, представленный в табл. 6.

Тензор кручения примет вид  $T(u_1, u_2) = (2p_{12} - 1, 0, 0)$ ,  $T(u_1, u_3) = (p_{13} - r_{11}, 2p_{12} - 1, 0)$ ,  $T(u_2, u_3) = (q_{13} - r_{12}, p_{13} - r_{11}, 2p_{12} - 1)$ , при  $r_{12} = -\varepsilon/(2a)$ ,  $p_{12} = 1/2$ ,  $p_{13} = 0$ ,  $q_{12} = 0$ ,  $q_{13} = r_{12}$ ,  $r_{11} = 0$ ,  $r_{13} = 0$  тензор кручения нулевой. Тогда тензор Риччи  $\text{Ric}(x, y) = \text{tr}\{z \rightarrow R(z, x)y\}$  имеет вид

$$\text{Ric} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2p_{12}^2 + 2p_{12} \\ 0 & 2p_{12}^2 - 2p_{12} & 2p_{13}p_{12} - q_{12}p_{12} + r_{11} + 2q_{12} \\ -2p_{12}^2 + 2p_{12} & q_{12}p_{12} - 2p_{13}p_{12} - 2q_{12} - r_{11} & S \end{pmatrix},$$



где  $S = p_{12}q_{13} + 4p_{13}q_{12} + 2p_{13}^2 - 2q_{13} + q_{12}^2 - r_{12}p_{12} - r_{12}$ , т.е. для связности Леви – Чевита тензор Риччи примет вид, представленный в табл. 7.

Таблица 5 / Table 5

## Тензоры кривизны / Curvature tensors

Пара / Pair	Тензор кривизны / Curvature tensor
1.1.1	нулевой
1.1.2	$\begin{pmatrix} -1/(4a) & 0 & 0 \\ 0 & 1/(4a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(4a) & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ 1/(4a) & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.1.5	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.1.6	$\begin{pmatrix} 3a/4 & 0 & 0 \\ 0 & -3a/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a^2/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a/4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2/4 \\ a/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.1.7	$\begin{pmatrix} -(-3b+4a)/(4a) & 0 & 0 \\ 0 & (-3b+4a)/(4a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b^2/(4a^2) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b/(4a) & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b^2/(4a^2) \\ b/(4a) & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.8.1	нулевой
1.8.2	$\begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & \varepsilon/(4a) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon/a & 0 \\ 1/4 & 0 & 5\varepsilon/(4a) \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$
1.8.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.8.4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.8.5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.21.1	нулевой
2.21.4	$\begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$
3.4.1	нулевой
3.4.2	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3.4.3	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$



Таблица 6 / Table 6

Алгебры голономии / Holonomy algebras

Пара Pair	Алгебра голономии Holonomy algebra	Пара Pair	Алгебра голономии Holonomy algebra
1.1.1	нулевая	1.8.1	нулевая
1.1.5	$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1.1.6	$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & -ap_2 \\ 0 & -p_1 & -ap_3 \\ p_3 & p_2 & 0 \end{pmatrix}$
1.1.7	$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & -(b/a)p_2 \\ 0 & -p_1 & -(b/a)p_3 \\ p_3 & p_2 & 0 \end{pmatrix}$	1.1.2	$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & -ap_2 \\ 0 & -p_1 & -ap_3 \\ p_3 & p_2 & 0 \end{pmatrix}$
1.8.2	$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 - (\varepsilon/a)p_3 & (\varepsilon/a)p_1 \\ p_3 & 0 & p_2 \\ 0 & p_3 & -p_1 \end{pmatrix}$	1.8.3	при $\alpha \neq 0$ — $\begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.8.4	$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	при $\alpha = 0$ — нулевая	$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.21.1	нулевая	3.4.1	нулевая
2.21.4	$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & 0 \\ p_3 & 0 & p_2 \\ 0 & p_3 & -p_1 \end{pmatrix}$	3.4.2, 3.4.3	$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & 0 \\ p_3 & 0 & p_2 \\ 0 & p_3 & -p_1 \end{pmatrix}$

Таблица 7 / Table 7

Тензоры Риччи / Ricci tensors

Пара Pair	Тензор Риччи Ricci tensor	Пара Pair	Тензор Риччи Ricci tensor
1.1.1	нулевой	1.8.1	нулевой
1.1.5	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1.1.6	$\begin{pmatrix} 0 & a/2 & 0 \\ a/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2/2 \end{pmatrix}$
1.1.7	$\begin{pmatrix} 0 & (b-2a)/(2a) & 0 \\ (b-2a)/(2a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b^2/(2a^2) \end{pmatrix}$	1.1.2	$\begin{pmatrix} 0 & -1/(2a) & 0 \\ -1/(2a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$
1.8.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 3\varepsilon/(2a) \end{pmatrix}$	1.8.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$
1.8.4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	1.8.5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2.21.1	нулевой	3.4.1	нулевой
2.21.4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	3.4.2, 3.4.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 2 \\ 0 & \mp 2 & 0 \\ \pm 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



Пространство является Риччи-плоским (тензор Риччи равен нулю) при  $p_{12} = 0$ ,  $q_{13} = 2p_{13}q_{12} + p_{13}^2 + q_{12}^2/2 - r_{12}/2$ ,  $r_{11} = -2q_{12}$  либо при  $p_{12} = 1$ ,  $q_{13} = 4p_{13}q_{12} + 2p_{13}^2 + q_{12}^2 - 2r_{12}$ ,  $r_{11} = -2p_{13} - q_{12}$ . Для метрической связности получаем, что пространство не может являться Риччи-плоским.

Пространство является Эйнштейновым при  $\text{Ric} = \lambda B$ , т.е. при  $\lambda a = -2p_{12}(p_{12} - 1)$ ,  $\lambda \varepsilon = (p_{12}q_{13} + 4p_{13}q_{12} + 2p_{13}^2 - 2q_{13} + q_{12}^2 - r_{12}p_{12} - r_{12})$ ,  $r_{11} = -2p_{13}p_{12} + q_{12}p_{12} - 2q_{12}$  либо при  $\lambda = 0$ ,  $p_{12} = 0$ ,  $q_{13} = 2p_{13}q_{12} + p_{13}^2 + q_{12}^2/2 - r_{12}/2$ ,  $r_{11} = -2q_{12}$ , либо при  $\lambda = 0$ ,  $p_{12} = 1$ ,  $q_{13} = 4p_{13}q_{12} + 2p_{13}^2 + q_{12}^2 - 2r_{12}$ ,  $r_{11} = -2p_{13} - q_{12}$ . Для случая  $r_{12} = -\varepsilon/(2a)$ ,  $p_{12} = 1/2$ ,  $p_{13} = 0$ ,  $q_{12} = 0$ ,  $q_{13} = r_{12}$ ,  $r_{11} = 0$ ,  $r_{13} = 0$  (т.е. для связности Леви – Чевита) получаем, что пространство является Эйнштейновым при  $\varepsilon = 0$  ( $\lambda = 1/(2a)$ ).

Пространство является Риччи-параллельным, если ковариантная производная тензора Риччи равна нулю, т.е. если либо  $p_{13} = 0$ ,  $q_{12} = 0$ ,  $q_{13} = -r_{12}(p_{12} + 1)/p_{12}$ ,  $r_{11} = 0$ ,  $r_{13} = 0$ , либо  $p_{12} = 0$ ,  $q_{13} = 2p_{13}q_{12} + p_{13}^2 + q_{12}^2/2 - r_{12}/2$ ,  $r_{11} = -2q_{12}$ , либо  $p_{12} = 0$ ,  $q_{13} = 2p_{13}q_{12} + p_{13}^2 + q_{12}^2/2 - r_{12}/2$ ,  $r_{11} = -3q_{12}/2 - p_{13}/2$ , либо  $p_{12} = 0$ ,  $p_{13} = -q_{12}$ ,  $r_{11} = -q_{12}$ , либо  $p_{12} = 1$ ,  $p_{13} = -r_{11}/2 - q_{12}/2$ ,  $q_{13} = -r_{11}q_{12} - q_{12}^2/2 + r_{11}^2/2 - 2r_{12}$ . Для связности Леви – Чевита видим, что пространство является Риччи-параллельным при  $\varepsilon = 0$ .

Пространство является локально-симметрическим при  $\Lambda(R) = 0$ , т.е. при  $p_{12} = 0$ ,  $q_{12} = -2p_{13}$ ,  $q_{13} = -3p_{13}^2$ ,  $r_{11} = 2p_{13}$ ,  $r_{12} = 4p_{13}^2$ ,  $r_{13} = p_{13}(\varepsilon + 11ap_{13}^2)/a$  либо при  $p_{12} = 0$ ,  $p_{13} = 0$ ,  $q_{12} = 0$ ,  $q_{13} = 0$ ,  $r_{11} = 0$ , либо при  $p_{12} = 0$ ,  $p_{13} = 0$ ,  $q_{12} = 0$ ,  $r_{11} = -5/4q_{12}$ ,  $r_{12} = q_{12}^2$ ,  $r_{13} = -\varepsilon q_{12}/a$ , либо при  $p_{12} = 1$ ,  $p_{13} = 0$ ,  $q_{13} = q_{12}^2 - 2r_{12}$ ,  $r_{11} = -q_{12}$ ,  $r_{13} = q_{12}(q_{12}^2 - 2r_{12})$ , либо при  $\varepsilon p_{12}^2 = ar_{12}(p_{12} + 1)$ ,  $p_{13} = 0$ ,  $q_{12} = 0$ ,  $q_{13}p_{12} = -r_{12}(p_{12} + 1)$ ,  $r_{11} = 0$ ,  $r_{13} = 0$ . Для метрической связности, т.е. случая  $r_{12} = -\varepsilon/(2a)$ ,  $p_{12} = 1/2$ ,  $p_{13} = 0$ ,  $q_{12} = 0$ ,  $q_{13} = r_{12}$ ,  $r_{11} = 0$ ,  $r_{13} = 0$ , пространство является локально-симметрическим при  $\varepsilon = 0$ .

Пространство является конформно-плоским при равенстве нулю тензора Коттона (скалярная кривизна  $R = -6p_{12}(p_{12} - 1)/a$ ). В случае связности Леви – Чевита пространство является конформно-плоским при  $\varepsilon = 0$  ( $R = 3/(2a)$ ).

Рассмотрим теперь, например, случай 2.21.4. Аффинная связность имеет вид [13]

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & 0 \\ 0 & 0 & p_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{12} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Связность является связностью Леви – Чевита при  $(2p_{12} - 1)a = 0$ , т.е. при  $p_{12} = 1/2$ , и имеет вид, представленный в табл. 4.

Тензор кривизны инвариантной аффинной связности:

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{12}^2 - p_{12} & 0 \\ 0 & 0 & p_{12}^2 - p_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -p_{12}^2 + p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{12}^2 - p_{12} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{12}^2 + p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{12}^2 + p_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

При  $p_{12} = 1/2$  тензор кривизны имеет вид, представленный в табл. 5, а алгебра голономии — вид, представленный в табл. 6. Тензор кручения —  $(2p_{12} - 1, 0, 0)$ ,  $(0, 2p_{12} - 1, 0)$ ,  $(0, 0, 2p_{12} - 1)$ , при  $p_{12} = 1/2$  тензор кручения нулевой. Тензор Риччи

$$\text{Ric} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2p_{12}^2 + 2 \cdot p_{12} \\ 0 & 2p_{12}^2 - 2p_{12} & 0 \\ -2p_{12}^2 + 2p_{12} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$





т. е. для связности Леви – Чевита тензор Риччи имеет вид, представленный в табл. 7.

Пространство является Риччи-плоским (тензор Риччи равен нулю) при  $p_{12} = 0$  или  $p_{12} = 1$ , т.е. для метрической связности пространство не является Риччи-плоским. Пространство всегда является Эйнштейновым, так как  $\text{Ric} = \lambda B$  при  $\lambda = -2(p_{12} - 1)p_{12}/a$ . Для случая  $p_{12} = 1/2$  получаем, что пространство является Эйнштейновым (при  $\lambda = 1/(2a)$ ). Пространство является Риччи-параллельным при любых значениях параметра, в том числе и для  $p_{12} = 1/2$  (т.е. для связности Леви – Чевита). Пространство всегда является локально-симметрическим (в том числе и для случая  $p_{12} = 1/2$ ). Пространство является конформно-плоским при любых значениях параметра (скалярная кривизна  $R = -6(p_{12} - 1)p_{12}/a$ ), в том числе и для связности Леви – Чевита ( $R = 3/(2a)$ ).

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Прямыми вычислениями для всех псевдоримановых однородных пространств получаем, что связности Леви – Чевита имеют вид, приведенный в табл. 4, а их тензоры кривизны – вид, приведенный в табл. 5 (тензоры кручения во всех случаях нулевые).

Алгебры голономии указанных связностей приведены в табл. 6.

Тензоры Риччи найденных связностей приведены в табл. 7, а скалярные кривизны  $R$  – в табл. 3.  $\square$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, для трехмерных псевдоримановых однородных пространств, не допускающих риманову метрику (только псевдориманову), определено, при каких условиях пространство является Риччи-плоским, Эйнштейновым, Риччи-параллельным, локально-симметрическим или конформно-плоским. Кроме этого, для всех указанных пространств выписаны в явном виде связности Леви – Чевита, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии, скалярные кривизны, тензоры Риччи. Полученные результаты могут найти приложения в математике и физике, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях сводятся к изучению инвариантных объектов на однородных пространствах.

## Библиографический список

1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна : в 2 т. М. : Мир, 1990. Т. 1, 318 с. ; Т. 2, 384 с.
2. Wang M. Einstein metrics from symmetry and Bundle Constructions // Surveys in Differential Geometry. VI : Essays on Einstein Manifolds. Boston, MA : International Press, 1999. P. 287–325.
3. Решетняк Ю. Г. Изотермические координаты в многообразиях ограниченной кривизны // Сиб. матем. журн. 1960. Т. 1, № 1. С. 88–116 ; Т. 1, № 2. С. 248–276.
4. Gray A. Einstein-like manifolds which are not Einstein // Geom. Dedicata. 1978. Vol. 7, iss. 3. P. 259–280. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00151525>
5. Алексеевский Д. В., Кимельфельд Б. Н. Классификация однородных конформно плоских римановых многообразий // Матем. заметки. 1978. Т. 24, № 1. С. 103–110.
6. Kowalski O., Nikčević S. On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds // Geom. Dedicata. 1996. Vol. 62. P. 65–72. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00240002>
7. Родионов Е. Д., Славский В. В., Чибрикова Л. Н. Локально конформно однородные псевдоримановы пространства // Матем. тр. 2006. Т. 9, № 1. С. 130–168.
8. Родионов Е. Д. Односвязные компактные стандартные однородные Эйнштейновы многообразия с группой голономии  $SO(n)$  // Изв. АлтГУ. 1997. № 1 (3). С. 7–10.



9. Никонов Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В. Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. 2006. Т. 37. Геометрия. С. 1–78.
10. Онищук А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований. М. : Физматлит, 1995. 384 с.
11. Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of differential geometry : in 2 vols. N.Y. : John Wiley and Sons. Vol. 1, 1963. 330 p. ; Vol. 2, 1969. 488 p.
12. Можей Н. П. Аффинные связности на трехмерных псевдоримановых однородных пространствах. I // Изв. вузов. Матем. 2013. № 12. С. 51–68.
13. Можей Н. П. Аффинные связности на трехмерных псевдоримановых однородных пространствах. II // Изв. вузов. Матем. 2014. № 6. С. 33–48.
14. Можей Н. П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. 394 с.
15. Garcia A., Hehl F. W., Heinicke C., Macias A. The Cotton tensor in Riemannian spacetimes // Classical and Quantum Gravity. 2004. Vol. 21, № 4. P. 1099–1118.

---

**Образец для цитирования:**

Можей Н. П. О геометрии трехмерных псевдоримановых однородных пространств. II // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 172–184. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-172-184>

---

## On the Geometry of Three-dimensional Pseudo-Riemannian Homogeneous Spaces. II

**N. P. Mozhey**

Natalya P. Mozhey, <https://orcid.org/0000-0001-9237-7208>, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 6 P. Brovki St., Minsk 220013, Belarus, [mozheynatalya@mail.ru](mailto:mozheynatalya@mail.ru)

The problem of establishing links between the curvature and the topological structure of a manifold is one of the important problems of the geometry. In general, the purpose of the research of manifolds of various types is rather complicated. Therefore, it is natural to consider this problem in a narrower class of pseudo-Riemannian manifolds, for example, in the class of homogeneous pseudo-Riemannian manifolds. This paper is a continuation of the part I. The basic notions, such as an isotropically-faithful pair, a pseudo-Riemannian homogeneous space, an affine connection, curvature and torsion tensors, Levi–Cevita connection, Ricci tensor, Ricci-flat, Einstein, Ricci-parallel, locally symmetric, conformally flat space are defined. In this paper, for all three-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces, it is determined under what conditions the space is Ricci-flat, Einstein, Ricci-parallel, locally symmetric or conformally flat. In addition, for all these spaces, Levi–Cevita connections, curvature and torsion tensors, holonomy algebras, scalar curvatures, Ricci tensors are written out in explicit form. The results can find applications in mathematics and physics, since many fundamental problems in these fields are reduced to the study of invariant objects on homogeneous spaces.

**Keywords:** transformation group, pseudo-Riemannian manifold, Ricci tensor, Einstein space, conformally flat space.

Received: 03.11.2018 / Accepted: 31.01.2019 / Published: 01.06.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)



The end. The previous part was published in: *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 29–41.

## References

1. Besse A. *Mnogoobraziya Eynshteyna* [Einstein Manifolds: in 2 vols]. Moscow, Mir, 1990, vol. 1, 318 p.; vol. 2, 384 p. (in Russian).
2. Wang M. Einstein metrics from symmetry and Bundle Constructions. In: *Surveys in Differential Geometry. VI: Essays on Einstein Manifolds*. Boston, MA, International Press, 1999, pp. 287–325.
3. Reshetnyak Yu. G. Isothermal coordinates in manifolds of bounded curvature. *Sib. Matem. Zhurn.*, 1960, vol. 1, no. 1, pp. 88–116; vol. 1, no. 2, pp. 248–276 (in Russian).
4. Gray A. Einstein-like manifolds which are not Einstein. *Geom. Dedicata*, 1978, vol. 7, iss. 3, pp. 259–280. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00151525>
5. Alekseevsky D. V., Kimelfeld B. N. Classification of homogeneous conformally flat Riemannian manifolds. *Math. Notes*, 1978, vol. 24, no. 1, pp. 559–562.
6. Kowalski O., Nikčević S. On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds. *Geom. Dedicata*, 1996, vol. 62, pp. 65–72. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00240002>
7. Rodionov E. D., Slavsky V. V., Chibrikova L. N. Locally conformally homogeneous pseudo-Riemannian spaces. *Sib. Adv. Math.*, 2007, vol. 17, pp. 186–212. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1055134407030030>
8. Rodionov E. D. Compact simply connected standard homogeneous Einstein manifolds with holonomy group  $SO(n)$ . *Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta* [Izvestiya of Altai State University], 1997, no. 1 (3), pp. 7–10 (in Russian).
9. Nikonorov Yu. G., Rodionov E. D., Slavsky V. V. Geometry of homogeneous Riemannian manifolds. *J. Math. Sci.*, 2007, vol. 146, pp. 6313–6390. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-007-0472-z>
10. Onishchik A. L. *Topologiya tranzitivnykh grupp Li preobrazovaniy* [Topology of transitive transformation groups]. Moscow, Fizmatlit, 1995. 384 p. (in Russian).
11. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of differential geometry*: in 2 vols. New York, John Wiley and Sons, 1963, vol. 1, 330 p.; 1969, vol. 2, 448 p.
12. Mozhey N. P. Affine connections on three-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces. I. *Russ. Math.*, 2013, vol. 57, iss. 12, pp. 44–62. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X13120050>
13. Mozhei N. P. Affine connections on three-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces. II. *Russ. Math.*, 2014, vol. 58, iss. 6, pp. 28–43. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X14060048>
14. Mozhey N. P. *Trekhmernye izotropno-tochnye odnorodnye prostranstva i svyaznosti na nikh* [Three-dimensional isotropy-faithful homogeneous spaces and connections on them]. Kazan, KFU Publishing House, 2015. 394 p. (in Russian).
15. Garcia A., Hehl F. W., Heinicke C., Macias A. The Cotton tensor in Riemannian space-times. *Classical and Quantum Gravity*, 2004, vol. 21, no. 4, pp. 1099–1118.

---

## Cite this article as:

Mozhey N. P. On the Geometry of Three-dimensional Pseudo-Riemannian Homogeneous Spaces. II. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 172–184 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-172-184>

---



УДК 517.968.23

## **Об одном исключительном случае первой основной трехэлементной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций в круге**

**Н. Р. Перельман**

Перельман Наталья Романовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры аналитических и цифровых технологий, Смоленский государственный университет, Россия, 214000, г. Смоленск, ул. Пржевальского, д. 4, perelmannr@gmail.com

В данной статье рассматривается невырожденная (не редуцируемая к двухэлементной) трехэлементная задача типа Карлемана для бианалитических функций в исключительном случае, т. е. когда один из коэффициентов краевого условия обращается в нуль в конечном числе точек контура. В качестве контура берется единичная окружность. Для этого случая строится алгоритм решения задачи, заключающийся в сведении краевых условий данной задачи к системе из четырех уравнений типа Фредгольма второго рода. Для этого краевая задача для бианалитических функций представляется в виде двух краевых задач типа Карлемана в классе аналитических функций, затем с помощью введения вспомогательных функций эти задачи представляются в виде скалярных задач Римана в исключительном случае. Воспользовавшись известными формулами для решения таких задач, сводим каждое из краевых условий задач типа Карлемана для аналитических функций к паре хорошо изученных уравнений типа Фредгольма второго рода.

*Ключевые слова:* краевая задача, сдвиг Карлемана, бианалитическая функция.

Поступила в редакцию: 25.03.2019 / Принята: 28.06.2019 / Опубликовано: 01.06.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-185-192>

### **ВВЕДЕНИЕ**

Важным направлением в современной теории краевых задач комплексного анализа является изучение многоэлементных краевых задач для аналитических и полианалитических функций. При этом особое место занимают так называемые задачи со сдвигом, т. е. задачи, краевые условия которых представляют собой линейные соотношения между предельными значениями искомых функций, вычисленными в различных точках границы.

Одной из таких задач и является первая основная трехэлементная задача типа Карлемана для бианалитических функций. Впервые эта задача была поставлена в монографии К. М. Расулова [1, с. 287] и в дальнейшем исследовалась при различных предположениях относительно коэффициентов задачи (см. [2–4]). В частности, в совместной статье К. М. Расулова и автора [2] рассматривался невырожденный случай этой задачи, т. е. ситуация, когда данная задача не вырождается в двухэлементные краевые задачи без сдвига.

Однако в указанной работе рассматривался только так называемый нормальный подслучай невырожденного случая, когда коэффициенты задачи нигде не обращаются в нуль на контуре. Поэтому в настоящей работе будем рассматривать исключительный случай данной задачи, т. е. ситуацию, когда один из коэффициентов задачи может обращаться в нуль на контуре (в конечном числе точек).



## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть  $L$  — единичная окружность на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ ,  $T^+$  — единичный круг, ограниченный  $L$ , а  $T^-$  — дополнение  $T^+ \cup L$  до полной комплексной плоскости.

Будем говорить, что бианалитическая в области  $T^+$  функция, т.е. решение уравнения  $\partial^2 F(z)/\partial \bar{z}^2 = 0$  в  $T^+$ , принадлежит классу  $A_2(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ , если она непрерывно продолжима на контур  $L$  вместе со своими частными производными первого порядка, причем так, что граничные значения этой функции и указанных производных удовлетворяют условию Гёльдера.

Рассмотрим следующую краевую задачу.

Найти все функции  $F(z) \in A_2(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ , удовлетворяющие на  $L$  следующим краевым условиям:

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial x} = G_{11}(t) \frac{\partial F^+(t)}{\partial x} + G_{12}(t) \frac{\partial \overline{F^+(t)}}{\partial x} + g_1(t); \quad (1)$$

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial y} = G_{21}(t) \frac{\partial F^+(t)}{\partial y} - G_{22}(t) \frac{\partial \overline{F^+(t)}}{\partial y} + ig_2(t). \quad (2)$$

Здесь  $G_{kj}(t), g_k(t) (k = 1, 2; j = 1, 2)$  — заданные на  $L$  функции класса  $H^{(1)}(L)$ ,  $G_{k1}(t) \neq 0$ ,  $\alpha(t)$  — функция сдвига контура  $L$ , удовлетворяющая условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] \equiv t,$$

причем  $\alpha'(t) \in H(L)$  и  $\alpha'(t) \neq 0$ .

В краевом условии (2) множитель  $(-1)$  перед  $G_{22}(t)$  и  $i$  перед  $g_2(t)$  берутся для удобства в дальнейших обозначениях.

Также, без ограничения общности, целесообразно добавить к условиям рассматриваемой задачи следующее «начальное» условие:

$$F(0) = 0.$$

Следуя монографии [1], сформулированную задачу назовем *первой основной трехэлементной краевой задачей типа Карлемана для бианалитических функций* (кратко —  $K_{1,2}$ ).

## 2. УСТАНОВЛЕНИЕ УСЛОВИЙ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ЗАДАЧИ $K_{1,2}$

Как уже показано в статье [2], задача  $K_{1,2}$  легко редуцируется к двум следующим задачам:

$$\Phi_k^+[\alpha(t)] = t^{-1} \alpha(t) G_{k1} \Phi_k^+(t) + t \alpha(t) G_{k2} \overline{\Phi_k^+(t)} + \alpha(t) g_k(t), \quad k = 1, 2, \quad (3)$$

где  $\Phi_k^+(z) = z \varphi_0'(z) + \varphi_1'(z) + (-1)^{k-1} z \varphi_1(z)$ ;  $\varphi_0(z), \varphi_1(z)$  — аналитические компоненты искомой бианалитической функции  $F(z)$ , т.е.  $F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z} \varphi_1(z)$  и  $\varphi_0(z), \varphi_1(z) \in A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ .

Задача (3) (для каждого фиксированного  $k$ ) является трехэлементной односторонней задачей типа Карлемана в классе  $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$  аналитических в круге  $T^+$  функций, непрерывно продолжимых на контур  $L$  вместе со своими частными производными первого порядка (см., например, [2]).





В работе [2] также сформулированы условия

$$\begin{cases} a_{1,0} - a_{2,0} = 0, \\ a_{1,0} + a_{2,0} - a_{1,2} + a_{2,2} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

(где  $a_{k,m} = \Phi_k^{+(m)}(0)/m!$ ,  $k = 1, 2$ ,  $m = 0, 2$ ) равносильности задачи  $K_{1,2}$  паре краевых задач типа (3), а также указан способ получения решений задачи  $K_{1,2}$  из решений задач (3).

Там же показано, что при выполнении следующих условий относительно коэффициентов задач (3)

$$G_{k1}(t)G_{k1}[\alpha(t)] + \overline{G_{k2}(t)}G_{k2}[\alpha(t)] \equiv 1, \quad (5)$$

$$G_{k1}[\alpha(t)]G_{k2}(t) + \overline{G_{k1}(t)}G_{k2}[\alpha(t)] \equiv 0, \quad (6)$$

$$G_{k1}[\alpha(t)]g_k(t) + G_{k2}[\alpha(t)]\overline{g_k(t)} + g_k[\alpha(t)] \equiv 0 \quad (7)$$

указанные задачи не редуцируются к двухэлементным задачам без сдвига (см. также [5]).

Будем называть задачу  $K_{1,2}$ , которая равносильна паре задач вида (3) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (5)–(7), *невыврожденной*.

Следуя [2], будем решать задачу (3) (для каждого фиксированного значения  $k$ ) при следующих предположениях:

- 1)  $\alpha(t)$  — обратный сдвиг контура  $L$ ;
- 2) на контуре  $L$  выполняются условия (5)–(7).

Отметим, что предположение 1) сделано для определенности и случай прямого сдвига исследуется совершенно аналогично.

Если выполняются указанные предположения, то возникают следующие три важных подслучая (см., например, [6], [7, с. 114]):

- а)  $G_{k1}[\alpha(t)]G_{k1}(t) - 1 \equiv 0$ ;
- б)  $G_{k1}[\alpha(t)]G_{k1}(t) - 1 \neq 0$ ;
- в)  $G_{k1}[\alpha(t)]G_{k1}(t) - 1$  обращается в нуль в отдельных точках контура  $L$ .

В работе [2] подробно рассмотрены случаи а) и б). Здесь же остановимся на исследовании подслучая в).

### 3. О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ (3) В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

Пусть  $\alpha(t)$  — функция обратного сдвига контура  $L$ , для коэффициентов задачи (3) выполняются условия невырожденности (5)–(7), а также

$$G_{k1}[\alpha(t_n)]G_{k1}(t_n) - 1 = 0, \quad t_n \in L, \quad k = 1, 2. \quad (8)$$

Заметим, что в силу условий (5) в тех точках  $t_n \in L$ , где выполняется (8), будет также верно равенство  $G_{k2}(t_n) = 0$ , т. е.  $t_n$  являются нулями функции  $G_{k2}(t)$ .

Заметим, что последнее условие может выполняться для функций  $G_{2k}(t)$  различных видов. В данной работе остановимся на следующем конкретном, но достаточно общем виде функции  $G_{k2}(t)$ :

$$G_{k2}(t) = b_k(t) \prod (t - \beta_{j_k})^{\rho_{j_k}}, \quad t, \beta_{j_k} \in L, \quad k = 1, 2, \quad (9)$$

где  $b_k(t) \in H(L)$ ,  $b_k(t) \neq 0$  на  $L$ ,  $\beta_{j_k}$  ( $j_k = 1, 2, \dots, \nu_k$ ) — нули  $G_{k2}(t)$ ,  $\rho_{j_k}$  — кратности этих нулей.



Назовем задачу (3), в которой коэффициент  $G_{k2}(t)$  имеет вид (9), *трехэлементной односторонней задачей типа Карлемана в исключительном случае*. Построим конструктивный алгоритм решения этой задачи.

1. Рассмотрим более общую, чем (3), задачу для двух неизвестных аналитических функций класса  $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$   $\Phi_k^+(z)$  и  $\tilde{\Phi}_k^+(z)$ :

$$\Phi_k^+(t) = B_k(t)\overline{\Phi_k^+(t)} + A_k(t)\tilde{\Phi}_k^+(t) + H_k(t), \quad (10)$$

где  $B_k(t) = t^2 G_{k2}(t)/G_{k1}(t)$ ,  $A_k(t) = t/(\alpha(t)G_{k1}(t))$ ,  $H_k(t) = -tg_k(t)/G_{k1}(t)$ .

2. Введем вспомогательную функцию

$$\Phi_k^-(z) = \overline{\Phi_k^+(\frac{1}{z})}, \quad z \in T^-, \quad k = 1, 2.$$

Она обладает тем свойством, что во всех точках единичной окружности будет выполняться следующее условие «симметрии» (см. [8, с. 97]):

$$\Phi_k^-(t) = \overline{\Phi_k^+(t)}, \quad t \in L, \quad k = 1, 2. \quad (11)$$

3. Представим краевое условие (10) для каждого фиксированного  $k$  ( $k = 1, 2$ ) в следующем виде:

$$\Phi_k^+(t) = \prod (t - \beta_{jk})^{\rho_{jk}} B_k^*(t) \Phi_k^-(t) + H_k^*(t), \quad (12)$$

где  $B_k^*(t) = -t^2 b_k(t)/G_{k1}(t)$ ,  $H_k^*(t) = A_k(t)\phi(t) + H_k(t)$ ,  $\phi_k(t) = \overline{\Phi_k^+[\alpha(t)]}$ .

Заметим, что считая  $H_k^*(t)$  временно известной функцией, получаем из (12) краевое условие «исключительного случая» скалярной задачи Римана, подробно изученной Л. А. Чикиным (см. [9]).

4. Если  $\chi_k^* = \text{Ind} B_k^*(t) \geq 0$ , то общее решение (12) имеет вид (см., например, [7, 10])

$$\begin{cases} \Phi_k^+(z) = Y_k^+(z) + X_{1k}^+(z) \prod (t - \beta_{jk})^{\rho_{jk}} P_{\chi_k^*}(z), & z \in T^+, \\ \Phi_k^-(z) = Y_k^-(z) + X_{1k}^-(z) P_{\chi_k^*}(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} Y_k^+(z) &= X_{1k}^+(z)[\Psi_k^+(z) - Q_{\rho_k-1}(z)], \quad z \in T^+, \\ Y_k^-(z) &= \frac{X_{1k}^-(z)[\Psi_k^-(z) - Q_{\rho_k-1}(z)]}{\prod (t - \beta_{jk})^{\rho_{jk}}}, \quad z \in T^-, \\ \Psi_k(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{H_k^*(\tau)}{X_{1k}^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}, \end{aligned}$$

$Q_{\rho_k-1}(z) = C_{\rho_k-1} z^{\rho_k-1} + \dots + C_1 z + C_0$  — определенный многочлен, для которого выполняются равенства

$$Q_{\rho_k-1}^{(m)}(\beta_{jk}) = \Psi_k^{-(m)}(\beta_{jk}),$$

$$m = 0, 1, \dots, \rho_{jk-1}; j_k = 1, 2, \dots, \nu_k; \rho_k = \sum_{j_k=1}^{\nu_k} \rho_{jk};$$

$X_{1k}^\pm(z)$  — канонические функции обычной задачи Римана с коэффициентом  $B_k^*(t)$ ,  $P_{\chi_k^*}(z)$  — многочлен степени  $\chi_k^*$  с произвольными комплексными коэффициентами.



Если  $\chi_k^* < 0$ , то при условии выполнения  $-\chi_k^* - 1$  условий разрешимости

$$C_{\rho_k-1} = C_{\rho_k-2} = \dots = C_{\rho_k+\chi_k^*+1} = 0, \quad (14)$$

где  $C_n$  — комплексные числа, являющиеся коэффициентами разложения

$$\begin{aligned} \Psi_k^-(z) - Q_{\rho_k-1}(z) &= -C_{\rho_k-1}z^{\rho_k-1} - C_{\rho_k-2}z^{\rho_k-2} - \dots - C_0 + C_{-1}\frac{1}{z} + C_{-2}\frac{1}{z^2} + \dots, \\ C_{-n} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{H_k^*(\tau)\tau^{n-1}}{X_{1k}^+(\tau)} d\tau, \end{aligned}$$

задача (12) имеет единственное решение, которое задается формулой (13), где  $P_{\chi_k^*}(z) \equiv 0$ .

5. Перейдя с использованием формул Сохоцкого (см. [11, с. 238]) к предельным значениям функций  $\Phi_k^+(z)$  и  $\Phi_k^-(z)$  и потребовав от этих предельных значений, чтобы они удовлетворяли условию «симметрии» (11), получаем следующее интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода относительно функции  $\phi_k(t) = \tilde{\Phi}_k^+[\alpha(t)]$ :

$$(T_1\phi_k)(t) \equiv \phi_k(t) + \int_L D_{1k}(t, \tau)\phi_k(\tau)d\tau + \overline{\int_L R_{1k}(t, \tau)\phi_k(\tau)d\tau} = r_{1k}(t), \quad (15)$$

ядра и свободный член которого определенным образом выражаются через коэффициенты задачи (12).

Заметим, что уравнения такого типа подробно исследованы, например, в монографии Н. И. Мусхелишвили [12, с. 364] (см. также [13–15]).

6. Если уравнение (15) разрешимо и найдено его общее решение  $\phi_k(t) = \tilde{\Phi}_k^+[\alpha(t)]$ , то находим с использованием (13) пару функций  $(\Phi_k^+(z), \tilde{\Phi}_k^+(z))$ , являющихся общим решением вспомогательной задачи (10).

7. Чтобы выбрать из полученных пар функций решение задачи (3), нужно потребовать выполнения условия  $\Phi_k^+(z) \equiv \tilde{\Phi}_k^+(z)$  всюду в  $T^+$  или, как следствие,  $\Phi_k^+(t) = \tilde{\Phi}_k^+(t) = \phi_k[\alpha(t)], t \in L$ , что с учетом вида граничных значений функций  $\Phi_k^+(t)$  равносильно интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$(T_2\phi_k)(t) \equiv \phi_k(t) + \int_L D_{2k}(t, \tau)\phi_k(\tau)d\tau = r_{2k}(t), t \in L,$$

где  $D_{2k}(t, \tau), r_{2k}(t)$  определенным образом выражается через коэффициенты исходной задачи.

#### 4. ОБЩИЕ ВЫВООДЫ

Таким образом, все вышесказанное можно подытожить следующей теоремой.

**Теорема.** Пусть в краевых условиях (1)–(2) задачи  $K_{1,2}$   $\alpha(t)$  — обратный сдвиг контура  $L$  ( $L$  — единичная окружность),  $G_{k1}(t) \neq 0$ , коэффициенты задачи удовлетворяют условиям невырожденности (5)–(7) и  $G_{k2}(t)$  имеет вид (9).

Тогда решение задачи  $K_{1,2}$  в классе  $A_2(T^+) \cap H^{(1)}(L)$  при  $\chi_k^* \geq 0$  равносильно решению четырех уравнений типа Фредгольма следующего вида:

$$(T_m\phi_m)(t) \equiv \phi_m(t) + \int_L D_m(t, \tau)\phi_m(\tau)d\tau + \overline{\int_L R_m(t, \tau)\phi_m(\tau)d\tau} = r_m(t), \quad m = 1, 2, 3, 4$$



(где  $\phi_m$  — неизвестные функции,  $D_m(t, \tau)$ ,  $R_m(t, \tau)$ ,  $r_m(t)$  — определенным образом выражаются через коэффициенты исходной задачи, причем  $R_2(t, \tau) = R_4(t, \tau) \equiv 0$ ), для решений которых выполняются условия (4).

Если же  $\chi_k^* < 0$ , то добавляются условия разрешимости (14) и все многочлены с произвольными комплексными коэффициентами  $P_{\chi_m^*}(z)$ , входящие в состав ядер и правых частей уравнений, полагаются тождественно равными нулю.

## Библиографический список

1. Расулов К. М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск : Изд-во СГПУ, 1998. 345 с.
2. Перельман Н. Р., Расулов К. М. Трехэлементная задача типа Карлемана для бианалитических функций в круге // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 18–26. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-2-18-26>
3. Расулов К. М., Титов О. А. Об исследовании первой основной трехэлементной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций в круге // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы междунар. конф. Смоленск : Изд-во СмолГУ, 2005. Вып. 6. С. 148–154.
4. Перельман Н. Р. О решении первой трехэлементной задачи типа Карлемана для бианалитических функций в невырожденном случае // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования : материалы междунар. конф. «Герценовские чтения–2011». LXIV. СПб. : БАН, 2011. С. 152–156.
5. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М. : Наука, 1977. 448 с.
6. Расулов К. М. Метод интегральных «ловушек» для решения трехэлементной краевой задачи со сдвигом Карлемана в классах аналитических функций // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы междунар. конф. Смоленск : Изд-во СмолГУ, 2012. Вып. 2. С. 191–212.
7. Расулов К. М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск : Изд-во СмолГУ, 2013. 189 с.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.
9. Чикин Л. А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений // Учен. зап. Казан. ун-та. 1953. Т. 113, № 10. С. 57–105.
10. Перельман Н. Р., Расулов К. М. Трехэлементная односторонняя краевая задача для аналитических функций с обратным сдвигом Карлемана в исключительном случае // Вестн. БГУ. 2012. № 4 (2). С. 44–51.
11. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций : в 2 т. М. : Наука, 1967–1968. Т. 1. Начала теории. 488 с.
12. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968. 513 с.
13. Расулов К. М. Трехэлементная односторонняя краевая задача со сдвигом Карлемана в классах аналитических функций в круге // Изв. СмолГУ. 2008. № 2 С. 94–104.
14. Расулов К. М. О решении трехэлементной односторонней краевой задачи со сдвигом Карлемана в классах аналитических функций в круге // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка. 2010. № 3 (102). С. 31–37.
15. Расулов К. М. О решении трехэлементной краевой задачи со сдвигом Карлемана для аналитических функций в невырожденном случае // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика. 2012. № 34. С. 43–52.



**Образец для цитирования:**

Перельман Н. Р. Об одном исключительном случае первой основной трехэлементной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций в круге // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 185–192. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-185-192>

## **On One Exceptional Case of the First Basic Three-Element Carleman-Type Boundary Value Problem for Bianalytic Functions in a Circle**

**N. R. Perelman**

Natalia R. Perelman, <https://orcid.org/0000-0002-3792-9134>, Smolensk State University, 4 Przhval'skogo St., Smolensk 214000, Russia, [perelmannr@gmail.com](mailto:perelmannr@gmail.com)

This article considers a non-degenerate (nonreducible to two-element) three-element problem of Carleman type for bianalytic functions in an exceptional case, that is, when one of the coefficients of the boundary condition vanishes at a finite number of contour points. The unit circle is taken as the contour. For this case, an algorithm for solving the problem is constructed, which consists in reducing the boundary conditions of this problem to a system of four Fredholm type equations of the second kind. For this, the boundary value problem for bianalytic functions is represented as two boundary value problems of Carleman type in the class of analytic functions, then, by introducing auxiliary functions, these problems are represented as scalar Riemann problems in the exceptional case. Using the well-known formulas for solving such problems, we reduce each of the boundary conditions of Carleman-type problems for analytic functions to a pair of well-studied equations of the Fredholm type of the second kind.

**Keywords:** boundary value problem, Carleman shift, bianalytic function.

Received: 25.03.2019 / Accepted: 28.06.2019 / Published: 01.06.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

### **References**

1. Rasulov K. M. *Kraevye zadachi dlya polianaliticheskikh funktsiy i nekotorye ikh prilozheniya* [Boundary-value problems for polyanalytic functions and some of their applications]. Smolensk, Izd-vo Smolenskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta, 1998. 345 p. (in Russian).
2. Perelman N. R., Rasulov K. M. Three-element problem of Carleman type for bianalytic functions in a circle. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 2, pp. 18–26 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-2-18-26>
3. Rasulov K. M., Titov O. A. On the study of the first basic three-element Carleman type boundary value problem for bianalytic functions in a circle. *Sistemy komp'yuternoy matematiki i ikh prilozheniya* [Computer mathematics systems and their applications: Proc. Int. Conf.]. Smolensk, Izd-vo Smolenskogo gosudarstvennogo universiteta, 2005, iss. 6, pp. 148–154 (in Russian).
4. Perelman N. R. On the solution of the first three-element Carleman type problem for bianalytic functions in the nondegenerate case. *Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoy*





- matematiki i matematicheskogo obrazovaniya: materialy mezhdunar. konf. "Gertsenovskie chteniya-2011". LXIV* [Some Pressing Problems of Modern Mathematics and Mathematical Education: Proc. Int. Conf. "Herzen Readings-2011". LXIV]. St. Petersburg, BAN Publ., 2011, pp. 152–156 (in Russian).
5. Litvinchuk G. S. *Solvability theory of boundary value problems and singular integral equations with shift*. Dordrecht, Boston, Kluwer Academic Publ., 2000. 378 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-011-4363-9> (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1977. 448 p.).
  6. Rasulov K. M. The integral trap method for solving a three-element boundary value problem with Carleman shift in classes of analytic functions. *Sistemy komp'yuternoy matematiki i ikh prilozheniya* [Computer mathematics systems and their applications: Proc. Int. Conf.]. Smolensk, Izd-vo Smolenskogo gosudarstvennogo universiteta, 2012, iss. 2, pp. 191–212 (in Russian).
  7. Rasulov K. M. *Metod sopriazheniya analiticheskikh funktsiy i nekotorye ego prilozheniya* [Conjugation method of analytic functions and some of its applications]. Smolensk, Izd-vo Smolenskogo gosudarstvennogo universiteta, 2013. 189 p. (in Russian).
  8. Gakhov F. D. *Kraevye zadachi* [Boundary value problems]. Moscow, Nauka, 1977. 640 p. (in Russian).
  9. Chikin L. A. Special cases of the Riemann boundary value problem and singular integral equations. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta* [Scientific Notes of Kazan University], 1953, vol. 113, no. 10, pp. 57–105 (in Russian).
  10. Perelman N. R., Rasulov K. M. Three-Element One-Sided Boundary Value Problem for Analytic Functions with a Reverse Shift of Carleman in Exceptional Case. *Izv. Brjanskogo Gos. Univ.* [The Bryansk State University Herald], 2012, no. 4 (2), pp. 44–51 (in Russian).
  11. Markushevich A. I. *Teoriya analiticheskikh funktsiy* [The theory of analytic functions: in 2 vols.]. Moscow, Nauka, 1967–1968. Vol. 1. 488 p. (in Russian).
  12. Mushelishvili N. I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow, Nauka, 1968. 513 p. (in Russian).
  13. Rasulov K. M. Three-element one-sided boundary value problem with Carleman shift in classes of analytic functions in a circle. *Izvestiya SmolGU*, 2008, no. 2, pp. 94–104 (in Russian).
  14. Rasulov K. M. On the solution of a three-element one-sided boundary value problem with a Carleman shift in classes of analytic functions in a circle. *Vesnik Hrodzienskaha dziiaranaha univiersiteta imia Janki Kupaly. Ser. 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka*, 2010, no. 3 (102), pp. 31–37 (in Russian).
  15. Rasulov K. M. On the solution of a three-element boundary value problem with a Carleman shift for analytical functions in the nondegenerate case. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika. Fizika*, 2012, no. 34, pp. 43–52 (in Russian).

---

**Cite this article as:**

Perelman N. R. On One Exceptional Case of the First Basic Three-Element Carleman-Type Boundary Value Problem for Banalytic Functions in a Circle. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 185–192 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-185-192>

---



# МЕХАНИКА

УДК 539.3

## Нестационарная электромагнитоупругость пьезоэлектриков с учетом диффузии

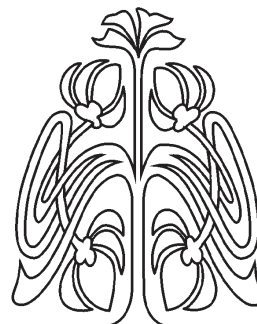
**Н. А. Зверев, А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский**

Зверев Николай Андреевич, магистрант кафедры сопротивления материалов, динамики и прочности машин, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, nikolayzverev1995@gmail.com

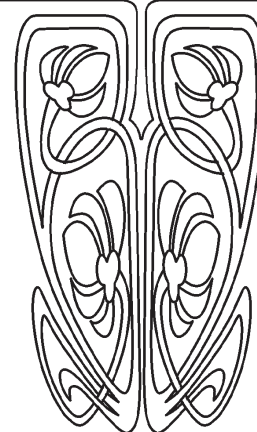
Земсков Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладных программных средств и математических методов, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4; старший научный сотрудник лаборатории динамических испытаний, НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова, Россия, 119192, г. Москва, Мичуринский просп., д. 1, azemskov1975@mail.ru

Тарлаковский Дмитрий Валентинович, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией динамических испытаний, НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова, Россия, 119192, г. Москва, Мичуринский просп., д. 1; заведующий кафедрой сопротивления материалов, динамики и прочности машин, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, tdvhome@mail.ru

В работе рассматривается модель линейной теории деформирования упругих сред с учетом диффузии и пьезоэффекта, описывающая связь между механическими деформациями, массопереносом и внутренним электрическим полем. Используется одномерная модель электромагнитомехано-диффузии в прямоугольной декартовой системе координат. На современном уровне излагаются методы решения соответствующих начально-краевых задач, основанные на применении интегрального преобразования Лапласа и разложении в тригонометрические ряды Фурье. На основе решения модельных задач показано влияние эффекта связанности полей на процессы динамического деформирования, массопереноса и распространения электромагнитных волн. Результаты вычислений представлены в аналитической форме и в виде графиков.



**НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ**





**Ключевые слова:** электромагнитоупругость, пьезоэлектромагнетизм, механодиффузия, нестационарные задачи.

Поступила в редакцию: 25.04.2019 / Принята: 26.06.2019 / Опубликовано: 01.06.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-193-204>

## ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени в научной литературе накопилось достаточно много работ, посвященных моделированию взаимодействия нестационарных полей различной физической природы. Постоянно возрастающий интерес к исследованиям в этой области связан с необходимостью получения качественных и количественных оценок взаимодействия механических, диффузионных, электромагнитных и прочих процессов как для практического применения, так и во избежание негативных эффектов, проявляющихся в результате воздействия указанных возмущений на конструкции и их отдельные элементы.

Среди современных публикаций, посвященных этой проблеме, можно отметить [1–19]. В частности, в работах [1–11] дополнительно учитывается влияние температурного поля, а в работах [12–19] учитываются электромагнитные эффекты. Анализ нестационарных процессов в начальный момент времени, помимо всего прочего, требует учета релаксации тепловых и диффузионных возмущений [1, 2, 4–6, 8, 9, 11–13].

Следует отметить, что связанность физических полей, анизотропия и нестационарность рассматриваемых процессов вносят существенные трудности в моделирование процессов, проходящих в твердых телах. В работе рассматривается нестационарная задача электромагнитоупругой диффузии в пьезоэлектрических телах. Для преодоления сложностей, связанных с решением соответствующей начально-краевой задачи, предполагается, что обратный пьезоэффект отсутствует, что, в свою очередь, позволяет рассматривать задачу упругой диффузии отдельно от задачи электродинамики. В этом случае возможно представление искомых величин (перемещений, приращений концентрации диффузанта, напряженностей электрического и магнитного полей) в виде рядов по системе собственных функций упругодиффузионного оператора. Аналогичный подход был использован при моделировании электромагнитоупругих процессов при наличии обратного пьезоэффекта [20].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается одномерная нестационарная задача об определении напряженно-деформированного состояния и распространении электромагнитных волн в  $N$ -компонентном пьезоэлектрическом слое, находящемся под воздействием поверхностных электромагнитоупругодиффузионных возмущений. Физико-механические процессы в прямоугольной декартовой системе координат описываются системой, состоящей из линейных уравнений движения и массопереноса, а также из линеаризованных уравнений Максвелла [12–15, 20] (штрих означает производную по координате,



точка — производную по времени):

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= u'' - \sum_{q=1}^N \alpha_q \dot{\eta}'_q, \quad \dot{\eta}_q = D_q \eta''_q - \Lambda_q u''' \quad (q = \overline{1, N}), \\ E' &= -\mu_h \dot{H} - \Gamma \dot{u}' - \sum_{q=1}^N X_q \dot{\eta}_q, \quad -H' = \varepsilon_e \dot{E} + K \dot{u}' + \sum_{q=1}^N B_q \dot{\eta}_q. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь все величины являются безразмерными и для них приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1}{L}, \quad u = \frac{u_1}{L}, \quad \tau = \frac{Ct}{L}, \quad E = \frac{E_2}{E^*}, \quad H = \frac{4\pi c H_3}{E^*}, \quad C_{ijkl} = \frac{C_{ijkl}^*}{C_{1111}^*}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}^*}{\rho}, \\ \alpha_q &= \frac{\alpha_{11}^{(q)}}{C_{1111}}, \quad D_q = \frac{D_{11}^{(q)}}{CL}, \quad \Lambda_q = \frac{m^{(q)} n_0^{(q)} D_{11}^{(q)} \alpha_{11}^{(q)}}{\rho R T_0 C L}, \quad \varepsilon_e = \frac{C \varepsilon_{22}^{(e)}}{4\pi c^2}, \quad \mu_h = 4\pi C \mu_{33}^{(h)}, \\ \Gamma &= \frac{C \gamma_{112}}{c E^*}, \quad K = \frac{4\pi C \kappa_{113}}{E^*}, \quad B_q = \frac{m^{(q)} n_0^{(q)} D_{11}^{(q)} E^* \beta_2^{(q)}}{4\pi \rho R T_0 C L}, \quad X_q = \frac{m^{(q)} n_0^{(q)} D_{11}^{(q)} \chi_3^{(q)} E^*}{(4\pi)^2 \rho c R T_0 C L}, \end{aligned}$$

где  $t$  — время;  $x_i$  — прямоугольные декартовы координаты;  $\rho$  — плотность среды;  $u_i$  — компоненты вектора перемещений;  $T_0$  — начальная температура среды;  $n_0^{(q)}$ ,  $\eta^{(q)}$  и  $m^{(q)}$  — начальная концентрация, приращение концентрации и молярная масса  $q$ -го компонента вещества;  $c$  — скорость света;  $C_{ijkl}^*$  — компоненты тензора упругих постоянных;  $\varepsilon_{ij}^{(e)}$  и  $\mu_{ij}^{(h)}$  — компоненты тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей;  $\kappa_{ijk}$  и  $\gamma_{ijk}$  — компоненты тензоров пьезоэлектрических и пьезомагнитных постоянных;  $\alpha_{ij}^{(q)}$  — коэффициенты объемного расширения вследствие диффузии;  $D_{ij}^{(q)}$  — коэффициенты самодиффузии;  $E_i$  и  $H_i$  — компоненты векторов электрической и магнитной напряженностей;  $L$  — толщина слоя;  $E^*$  — масштабное значение электрической напряженности. Коэффициенты  $\beta_i^{(q)}$  и  $\chi_i^{(q)}$  характеризуют связь электромагнитного и диффузионного полей.

Начально-краевые условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} E|_{x=0} &= 0, \quad E|_{x=1} = 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad (\Lambda_q u'' - D \eta'_q)|_{x=1} = 0, \\ u|_{x=0} &= f_1(\tau), \quad (\Lambda_q u'' - D \eta'_q)|_{x=0} = f_{q+1}(\tau), \\ E|_{\tau=0} &= 0, \quad H|_{\tau=0} = 0, \quad u|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{u}|_{\tau=0} = 0, \quad \eta|_{\tau=0} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $f_k$  ( $k = \overline{1, N+1}$ ) — поверхностные возмущения.

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Задача решается в два этапа. Вначале рассматриваем задачу механодиффузии. Ее решение в пространстве преобразования Лапласа имеет вид [21] (индекс  $L$  означает трансформанту Лапласа,  $s$  — параметр преобразования Лапласа,  $\lambda_n = \pi n$ ):

$$u^L(x, s) = \sum_{k=1}^{N+1} G_{1k}^L(x, s) f_k^L(s), \quad \eta_q^L(x, s) = \sum_{k=1}^{N+1} G_{q+1,k}^L(x, s) f_k^L(s). \quad (3)$$

Здесь  $G_{mk}^L(x, s)$  — трансформанты Лапласа поверхностных функций Грина задачи упругой диффузии, которые определяются следующим образом [21]:

$$G_{1k}^L(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{1k}^{Ls}(\lambda_n, s) \sin \lambda_n x, \quad G_{q+1,k}^L(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{q+1,k}^{Lc}(\lambda_n, s) \cos \lambda_n x, \quad (4)$$



$$\begin{aligned}
G_{1k}^{Ls}(\lambda_n, s) &= \frac{P_{1k}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)}, \quad G_{q+1,k}^{Lc}(\lambda_n, s) = \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)} - \frac{2\Lambda_q \lambda_n^2 \delta_{k1}}{s + D_q \lambda_n^2} + \frac{2\delta_{q+1,k}}{s + D_q \lambda_n^2}, \\
P(\lambda_n, s) &= (s^2 + \lambda_n^2) \prod_{j=1}^N (s + D_j \lambda_n^2) - \lambda_n^4 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \prod_{r=1, r \neq j}^N (s + D_r \lambda_n^2), \\
Q_q(\lambda_n, s) &= (s + D_q \lambda_n^2) P(\lambda_n, s), \\
P_{11}(\lambda_n, s) &= 2\lambda_n \left[ \prod_{j=1}^N (s + D_j \lambda_n^2) - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \lambda_n^2 \prod_{r=1, r \neq j}^N (s + D_r \lambda_n^2) \right], \\
P_{1,q+1}(\lambda_n, s) &= 2\lambda_n \alpha_q \prod_{r=1, r \neq q}^N (s + D_r \lambda_n^2), \quad P_{q+1,k}(\lambda_n, s) = \Lambda_q \lambda_n^3 P_{1k}(\lambda_n, s).
\end{aligned}$$

Решение задачи электродинамики ищем в форме ( $0 < \xi < 1$ )

$$\begin{Bmatrix} E(x, \tau) \\ H(x, \tau) \end{Bmatrix} = \sum_{l=1}^2 \int_0^\tau \int_0^1 \begin{Bmatrix} G_l^E(x, \xi, \tau - t) \\ G_l^H(x, \xi, \tau - t) \end{Bmatrix} F_l(\xi, t) dt d\xi,$$

что соответствует следующему представлению в пространстве преобразования Лапласа:

$$\begin{Bmatrix} E^L(x, s) \\ H^L(x, s) \end{Bmatrix} = \sum_{l=1}^2 \int_0^1 \begin{Bmatrix} G_l^{EL}(x, \xi, s) \\ G_l^{HL}(x, \xi, s) \end{Bmatrix} F_l^L(\xi, s) d\xi. \quad (5)$$

Здесь  $G_l^{EL}$  и  $G_l^{HL}$  — трансформанты объемных функций Грина задачи электродинамики. Сами функции Грина  $G_l^E$  и  $G_l^H$  являются решением следующих задач ( $\delta_{ml}$  — символ Кронекера,  $\delta(x - \xi, \tau)$  — функция Дирака):

$$G_l^{E'} = -\mu_h \dot{G}_l^H - \delta_{1l} \delta(x - \xi, \tau), \quad -G_l^{H'} = \varepsilon_e \dot{G}_l^E + \delta_{2l} \delta(x - \xi, \tau), \quad (6)$$

$$G_l^E|_{x=0} = 0, \quad G_l^E|_{x=1} = 0. \quad (7)$$

Функции  $F_l(x, \tau)$  в соответствии с (1) определяются следующим образом:

$$F_1(x, \tau) = \Gamma \dot{u}' + \sum_{q=1}^N X_q \dot{\eta}_q, \quad F_2(x, \tau) = K \dot{u}' + \sum_{q=1}^N B_q \dot{\eta}_q.$$

В пространстве преобразования Лапласа они имеют вид

$$F_1^L(x, s) = s \left( \Gamma u^{L'} + \sum_{q=1}^N X_q \eta_q^L \right), \quad F_2^L(x, s) = s \left( K u^{L'} + \sum_{q=1}^N B_q \eta_q^L \right). \quad (8)$$

Теперь для нахождения объемных функций Грина  $G_l^E$  и  $G_l^H$  применяем интегральное преобразование Лапласа по времени к задаче (6), (7) и разложение искомых функций в тригонометрические ряды Фурье по синусам и по косинусам:

$$\mu_h s G_1^{HLc}(0, s) = -1, \quad (9)$$

$$\lambda_n G_l^{ELs}(\lambda_n, s) + \mu_h s G_l^{HLc}(\lambda_n, s) = -2\delta_{1l} \cos \lambda_n \xi, \quad (10)$$

$$-\varepsilon_e s G_l^{ELs}(\lambda_n, s) + \lambda_n G_l^{HLc}(\lambda_n, s) = 2\delta_{2l} \sin \lambda_n \xi; \quad (11)$$





$$\begin{Bmatrix} G_l^{EL}(x, \xi, s) \\ G_l^{HL}(x, \xi, s) \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} G_l^{ELs}(\lambda_n, \xi, s) \sin \lambda_n x \\ G_l^{HLc}(\lambda_n, \xi, s) \cos \lambda_n x \end{Bmatrix}; \quad (12)$$

$$\begin{Bmatrix} G_l^{ELs}(\lambda_n, \xi, s) \\ G_l^{HLc}(\lambda_n, \xi, s) \end{Bmatrix} = 2 \int_0^1 \begin{Bmatrix} G_l^{EL}(x, \xi, s) \sin \lambda_n x \\ G_l^{HL}(x, \xi, s) \cos \lambda_n x \end{Bmatrix} dx, \quad (13)$$

$$G_l^{HLc}(0, \xi, s) = \int_0^{1v} G_l^{HL}(x, \xi, s) dx. \quad (14)$$

Решение системы (9)–(11) находим по формулам Крамера

$$\begin{aligned} G_1^{ELs}(\lambda_n, \xi, s) &= -2W_1^L(\lambda_n, s) \cos \lambda_n \xi, & G_2^{ELs}(\lambda_n, \xi, s) &= -2\mu_h W_2^L(\lambda_n, s) \sin \lambda_n \xi, \\ G_1^{HLc}(\lambda_n, \xi, s) &= -2\varepsilon_e W_2^L(\lambda_n, s) \cos \lambda_n \xi, & G_2^{HLc}(\lambda_n, \xi, s) &= 2W_1^L(\lambda_n, s) \sin \lambda_n \xi, \\ G_1^{HLc}(0, \xi, s) &= -\varepsilon_e W_2^L(0, s), & a^2 &= \varepsilon_e \mu_h, \\ W_1^L(\lambda_n, s) &= \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + a^2 s^2}, & W_2^L(\lambda_n, s) &= \frac{s}{\lambda_n^2 + a^2 s^2}, & W_2^L(0, s) &= \frac{c}{a^2 s}. \end{aligned}$$

Переходя в пространство оригиналов, в соответствии с (12)–(14) получаем функции Грина задачи (6) и (7) [22]:

$$\begin{aligned} G_l^E(x, \xi, \tau) &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} [\delta_{1l} W_1(\lambda_n, \tau) \cos \lambda_n \xi + \mu_h \delta_{2l} W_2(\lambda_n, \tau) \sin \lambda_n \xi] \sin \lambda_n x, \\ G_l^H(\lambda_n, \xi, \tau) &= -\delta_{1l} \varepsilon_e \left[ W_2(0, \tau) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} W_2(\lambda_n, \tau) \cos \lambda_n \xi \cos \lambda_n x \right] + \\ &\quad + 2\delta_{2l} \sum_{n=1}^{\infty} W_1(\lambda_n, s) \sin \lambda_n \xi \cos \lambda_n x, \end{aligned}$$

где

$$W_1(\lambda_n, \tau) = \frac{1}{a} \sin \frac{\lambda_n \tau}{a}, \quad W_2(\lambda_n, s) = \frac{1}{a^2} \cos \frac{\lambda_n \tau}{a}, \quad W_2(0, \tau) = \frac{1}{a^2} H(\tau).$$

Далее, для упрощения вычислений в граничных условиях (2) полагаем  $f_{q+1}(\tau) \equiv 0$ .

По формулам (8) с учетом (3) находим трансформанты объемных возмущений задачи электродинамики, которые представляем следующим образом [23]:

$$\begin{aligned} F_k^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} s f_1^L(s) F_k^{Lc}(\lambda_n, s) \cos \lambda_n x = \sum_{n=1}^{\infty} s f_1^L(s) F_k^{Ls}(\lambda_n, s) \sin \lambda_n x, \\ F_1^{Lc}(\lambda_n, s) &= \Gamma \lambda_n G_{11}^{Ls}(\lambda_n, s) + \sum_{q=1}^N X_q G_{q+1,1}^{Lc}(\lambda_n, s), \\ F_2^{Lc}(\lambda_n, s) &= K \lambda_n G_{11}^{Ls}(\lambda_n, s) + \sum_{q=1}^N B_q G_{q+1,1}^{Lc}(\lambda_n, s), \\ F_k^{Ls}(\lambda_n, s) &= -2\lambda_n \sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} \Delta_{kn} F_k^{Lc}(\lambda_n, s), \quad \Delta_{kn} = \frac{1 - (-1)^{k-n}}{\lambda_k^2 - \lambda_n^2}. \end{aligned} \quad (15)$$



Теперь, подставляя полученные равенства в (5), получаем напряженности электрического и магнитного полей в пространстве преобразования Лапласа:

$$E^L(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} E^{Ls}(\lambda_n, s) \sin \lambda_n x, \quad H^L(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} H^{Lc}(\lambda_n, s) \cos \lambda_n x, \quad (16)$$

$$\begin{Bmatrix} E^{Ls}(\lambda_n, s) \\ H^{Lc}(\lambda_n, s) \end{Bmatrix} = -\frac{s f_1^L(s)}{\lambda_n^2 + a^2 s^2} \begin{Bmatrix} \lambda_n F_1^{Lc}(\lambda_n, s) + \mu_h s F_2^{Ls}(\lambda_n, s) \\ \varepsilon_e s F_1^{Lc}(\lambda_n, s) - \lambda_n F_2^{Ls}(\lambda_n, s) \end{Bmatrix}. \quad (17)$$

### 3. РАСЧЕТНЫЙ ПРИМЕР

Для расчета рассматриваем пьезокерамический материал со следующими характеристиками [24]:

$$\kappa_{112} = -1.8381 \cdot 10^8 \text{ Гс}, \quad \gamma_{112} = 2 \cdot 10^{-11} \text{ Гс}, \quad \varepsilon_{22}^{(e)} = 1.59, \quad \mu_{33}^{(h)} = 1.244 \cdot 10^{-8},$$

$$\alpha_{11}^{(1)} = 5 \cdot 10^{13} \frac{\text{Эрг}}{\text{моль}}, \quad D_{11}^{(1)} = 7.74 \cdot 10^{-10} \frac{\text{см}^2}{\text{с}}, \quad T_0 = 800 \text{ К}, \quad L = 0.1 \text{ см},$$

$$R = 8.31 \cdot 10^7 \frac{\text{Эрг}}{\text{моль} \cdot \text{К}}, \quad \rho = 3.96 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \quad \nu = 0.25, \quad m^{(q)} = 26.98 \frac{\text{г}}{\text{моль}},$$

$$C_{1111} = 4.44 \cdot 10^{12} \frac{\text{дин}}{\text{см}^2}, \quad \beta_2^{(1)} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Гс}, \quad \chi_2^{(1)} = 1 \cdot 10^{-23} \text{ Гс}, \quad n_0^{(q)} = 0.95.$$

Полагаем в граничных условиях (2)  $f_1(\tau) = \tau e^{-\alpha\tau}$ ,  $f_{q+1}(\tau) = 0$ . Тогда коэффициенты рядов в формулах (3), (16) и (17) с учетом (4) примут вид

$$u^{Ls}(\lambda_n, s) = \frac{G_{11}^{Ls}(\lambda_n, s)}{(s + \alpha)^2}, \quad \eta_q^{Lc}(\lambda_n, s) = \frac{G_{q+1,1}^L(\lambda_n, s)}{(s + \alpha)^2},$$

$$\begin{Bmatrix} E^{Ls}(\lambda_n, s) \\ H^{Lc}(\lambda_n, s) \end{Bmatrix} = -\frac{s}{(s + \alpha)^2(\lambda_n^2 + a^2 s^2)} \begin{Bmatrix} \lambda_n F_1^{Lc}(\lambda_n, s) + \mu_h s F_2^{Ls}(\lambda_n, s) \\ \varepsilon_e s F_1^{Lc}(\lambda_n, s) - \lambda_n F_2^{Ls}(\lambda_n, s) \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

Оригиналы этих выражений определяются следующим образом:

$$u^s(\lambda_n, \tau) = \sum_{j=1}^{N+2} A_{11}^{(j)}(\lambda_n) e^{s_j(\lambda_n)\tau} + B_{11}(\lambda_n, \tau),$$

$$\eta_q^c(\lambda_n, \tau) = \sum_{j=1}^{N+3} A_{q+1,1}^{(j)}(\lambda_n) e^{s_j(\lambda_n)\tau} + \tilde{A}_{q+1,1}(\lambda_n) e^{-D_q \lambda_n^2 \tau} + B_{q+1,1}(\lambda_n, \tau). \quad (19)$$

Здесь  $s_j(\lambda_n)$  ( $j = \overline{1, N+2}$ ) — нули многочлена  $P(\lambda_n, s)$ ,  $s_{N+3}(\lambda_n) = -D_q \lambda_n^2$ ,  $s_{N+4}(\lambda_n) = -\alpha$ , коэффициенты  $A_{km}^{(j)}(\lambda_n)$ ,  $\tilde{A}_{q+1,1}(\lambda_n)$  и  $B_{km}(\lambda_n, \tau)$  находятся по формулам (штрих означает производную по параметру  $s$ )

$$A_{11}^{(j)}(\lambda_n) = \left. \frac{P_{11}(\lambda_n, s)}{[(s + \alpha)^2 P(\lambda_n, s)]'} \right|_{s=s_j(\lambda_n)} \quad (j = \overline{1, N+2}),$$

$$A_{q+1,1}^{(r)}(\lambda_n) = \left. \frac{P_{q+1,1}(\lambda_n, s)}{[(s + \alpha)^2 Q_q(\lambda_n, s)]'} \right|_{s=s_r(\lambda_n)} \quad (r = \overline{1, N+3}),$$

$$\tilde{A}_{q+1,1}(\lambda_n) = - \left. \frac{2\Lambda_q \lambda_n^2}{[(s + \alpha)^2 (s + D_q \lambda_n^2)]'} \right|_{s=-D_q \lambda_n^2}, \quad \tilde{B}_{11}(\lambda_n) = \lim_{s \rightarrow -\alpha} \left[ \frac{P_{11}(\lambda_n, s) e^{s\tau}}{P(\lambda_n, s)} \right]',$$



$$\tilde{B}_{q+1,1}^{(p)}(\lambda_n) = \lim_{s \rightarrow -\alpha} \left[ \frac{P_{q+1,1}(\lambda_n, s)e^{s\tau}}{Q_q(\lambda_n, s)} - \frac{2\Lambda_q \lambda_n^2 e^{s\tau}}{(s + \alpha)^2(s + D_q \lambda_n^2)} \right]'.$$

Далее, для напряженностей электрического и магнитного полей с учетом (18) получаем

$$\begin{aligned} E^s(\lambda_n, \tau) &= - \sum_{j=1}^{N+6} \text{Res}_{s=s_j(\lambda_n)} \left\{ \frac{se^{s\tau}}{(s + \alpha)^2(s + D_q \lambda_n^2)} [\lambda_n F_1^{Lc}(\lambda_n, s) + \mu_h s F_2^{Ls}(\lambda_n, s)] \right\}, \\ H^c(\lambda_n, \tau) &= - \sum_{j=1}^{N+6} \text{Res}_{s=s_j(\lambda_n)} \left\{ \frac{se^{s\tau}}{(s + \alpha)^2(s + D_q \lambda_n^2)} [\varepsilon_e s F_1^{Lc}(\lambda_n, s) - \lambda_n F_2^{Ls}(\lambda_n, s)] \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь  $s_{N+5}(\lambda_n) = i\lambda_n/a$ ,  $s_{N+6}(\lambda_n) = -i\lambda_n a$ , величины  $F_1^{Lc}(\lambda_n, s)$  и  $F_2^{Ls}(\lambda_n, s)$  определяются по формулам (15) с учетом равенств (4).

Окончательное решение задачи записывается в виде

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} u^s(\lambda_n, \tau) \sin \lambda_n x, & \eta_q(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \eta_q^c(\lambda_n, \tau) \cos \lambda_n x, \\ E(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} E^s(\lambda_n, \tau) \sin \lambda_n x, & H(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} H^c(\lambda_n, \tau) \cos \lambda_n x, \end{aligned}$$

где коэффициенты рядов определяются по формулам (19), (20).

Результаты вычислений представлены на рис. 1–3. Выполненный расчет наглядно демонстрирует эффект связанности механического, диффузионного и электромагнитного полей. Так, несмотря на то что на поверхности слоя задано только поле перемещений, а объемные возмущения отсутствуют, за счет взаимодействия полей индуцируются массоперенос и электромагнетизм (рис. 1, б, рис. 2, а). При этом механические и диффузионные поля оказывают также и взаимное влияние друг на друга (рис. 1, а, б).

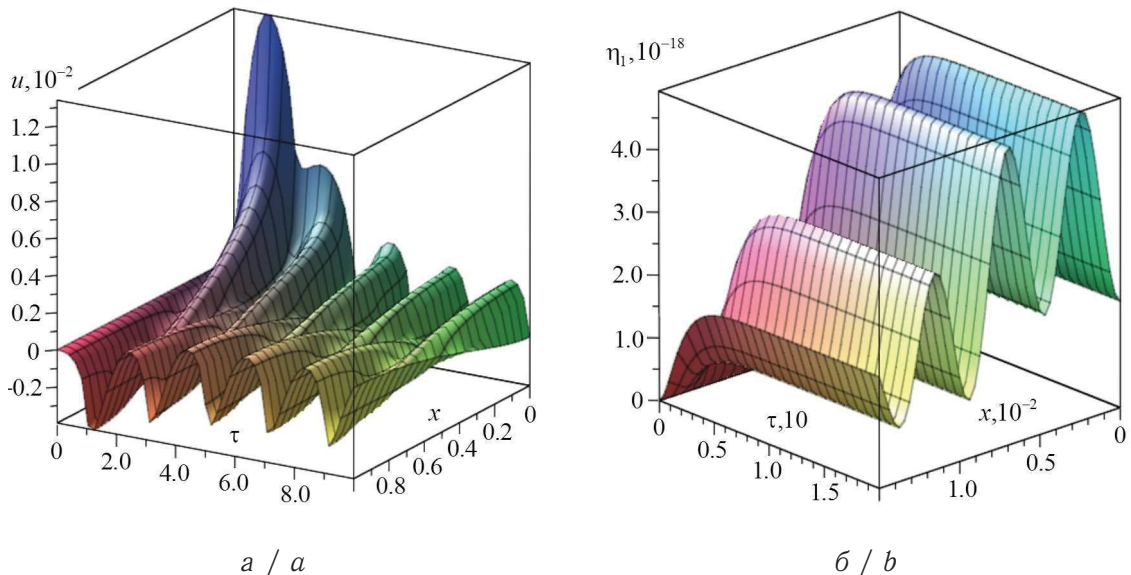


Рис. 1. Зависимости от времени  $\tau$  и от координаты  $x$ : *a* — перемещения  $u$ ; *б* — приращения концентрации  $\eta$  (цвет online)

Fig. 1. Dependencies on the time  $\tau$  and on the coordinate  $x$  of *a* — displacement  $u$ ; *b* — concentration increment  $\eta$  (color online)

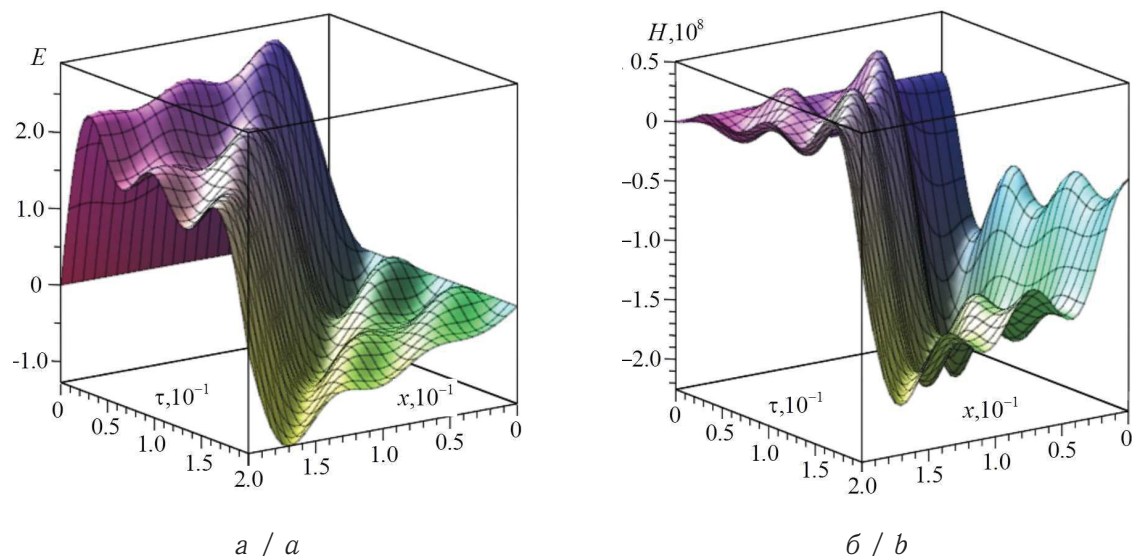


Рис. 2. Зависимости от времени  $\tau$  и от координаты  $x$ :  $a$  — напряженности электрического поля  $E$ ;  $b$  — напряженности магнитного поля  $H$  (цвет online)

Fig. 2. Dependencies on the time  $\tau$  and on the coordinate  $x$  of  $a$  — electric field strength  $E$ ;  $b$  — magnetic field strength  $H$  (color online)

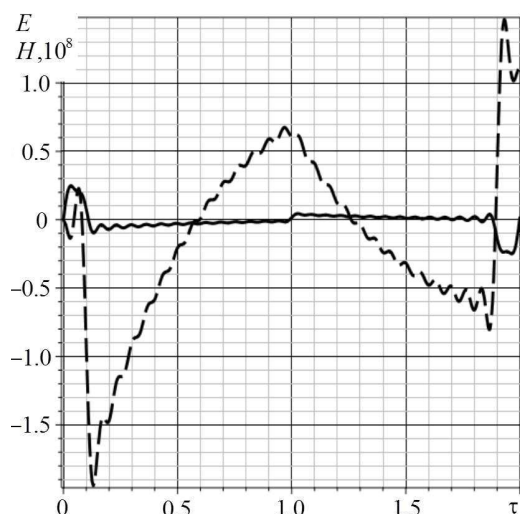


Рис. 3. Зависимости напряженности электрического поля  $E$  (сплошная линия) и напряженности магнитного поля  $H$  (пунктирная линия) от времени  $\tau$  при  $x = 0.1$

Fig. 3. Dependencies of the electric field strength  $E$  (solid line) and the magnetic field strength  $H$  (dashed line) on the time  $\tau$  at  $x = 0.1$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью предложенного алгоритма решена одномерная нестационарная задача электромагнитоупругости с учетом диффузии для многокомпонентного пьезоэлектромеханического слоя. Основным достоинством данного подхода является возможность аналитически найти оригиналы по Лапласу функций Грина и провести их анализ. Эффективность метода продемонстрирована на конкретном расчетном примере для однородного однокомпонентного слоя, выполненного из пьезокерамического материала.



## Библиографический список

1. *Afram A. Y., Khader S. E.* 2D Problem for a Half-Space under the Theory of Fractional Thermoelastic Diffusion // American Journal of Scientific and Industrial Research. 2014. Vol. 6, № 3. P. 47–57. DOI: <https://doi.org/10.5251/ajsir.2015.6.3.47.57>
2. *Atwa S. Y., Egypt Z.* Generalized Thermoelastic Diffusion with Effect of Fractional Parameter on Plane Waves Temperature-Dependent Elastic Medium // Journal of Materials and Chemical Engineering. 2013. Vol. 1, № 2. P. 55–74.
3. *Belova I. V., Murch G. E.* Thermal and diffusion-induced stresses in crystalline solids // Journal of Applied Physics. 1995. Vol. 77, № 1. P. 127–134.
4. *Choudhary S., Deswal S.* Mechanical loads on a generalized thermoelastic medium with diffusion // Meccanica. 2010. Vol. 45. P. 401–413. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-009-9260-9>
5. *Elhagary M. A.* Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times // Acta Mech. 2011. Vol. 218. P. 205–215. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-010-0415-5>
6. *El-Sayed A. M.* A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space // Mathematics and Mechanics of Solids. 2016. Vol. 21, № 9. P. 1045–1060. DOI: <https://doi.org/10.1177/1081286514549877>
7. *Knyazeva A. G.* Model of medium with diffusion and internal surfaces and some applied problems // Mater. Phys. Mech. 2004. Vol. 7, № 1. P. 29–36.
8. *Kumar R., Chawla V.* Green's Functions in Orthotropic Thermoelastic Diffusion Media // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2012. Vol. 36, № 8. P. 1272–1277. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.02.017>
9. *Olesiak Z. S., Pyryev Yu. A.* A coupled quasi-stationary problem of thermodiffusion for an elastic cylinder // International Journal of Engineering Science. 1995. Vol. 33, iss. 6. P. 773–780.
10. *Pidstryhach Ya. S.* Differential equations of the problem of thermodiffusion in a solid deformable isotropic body // Dopov. Akad. Nauk Ukr. RSR. 1961. № 2. P. 169–172.
11. *Sherief H. H., El-Maghraby N. M.* A Thick Plate Problem in the Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion // Int. J. Thermophys. 2009. Vol. 30. P. 2044–2057. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10765-009-0689-9>
12. *Aouadi M.* Variable electrical and thermal conductivity in the theory of generalized thermoelastic diffusion // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. 2006. Vol. 57, № 2. P. 350–366. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00033-005-0034-5>
13. *Deswal S., Kalkal K.* A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion // International Journal of Thermal Sciences. 2011. Vol. 50, № 5. P. 749–759. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2010.11.016>
14. *Tarlakovskii D. V., Vestyak V. A., Zemskov A. V.* Dynamic Processes in Thermo-Electro-Magneto-Elastic and Thermo-Elasto-Diffusive Media // Hetnarski R. B. (eds.). Encyclopedia of Thermal Stresses. Vol. 6. Dordrecht ; Heidelberg ; N. Y. ; London : Springer, 2014. P. 1064–1071. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7\\_609](https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_609)
15. *Zhang J., Li Y.* A Two-Dimensional Generalized Electromagnetothermoelastic Diffusion Problem for a Rotating Half-Space // Mathematical Problems in Engineering. 2014. Vol. 2014. P. 1–12. Article ID 964218. DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/964218>
16. *Chu J. L., Lee S.* Diffusion-induced stresses in a long bar of square cross section // J. Appl. Phys. 1993. Vol. 73, iss. 7. P. 3211–3219.





17. *Freidin A. B., Korolev I. K., Aleshchenko S. P., Vilchevskaya E. N* Chemical affinity tensor and chemical reaction front propagation: theory and FE-simulations // *Int. J. Fract.* 2016. Vol. 202, № 2. P. 245–259. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10704-016-0155-1>
18. *Hwang C. C., Chen K. M., Hsieh J. Y.* Diffusion-induced stresses in a long bar under an electric field // *J. Phys. D : Appl. Phys.* 1994. Vol. 27, № 10. P. 2155–2162. DOI: <https://doi.org/10.1088/0022-3727/27/10/025>
19. *Indeitsev D. A., Semenov B. N., Sterlin M. D.* The Phenomenon of Localization of Diffusion Process in a Dynamically Deformed Solid // *Doklady Physics.* 2012. Vol. 57, № 4. P. 171–173. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335812040052>
20. *Земсков А. В., Тарлаковский Д. В.* Постановка одномерной задачи термо-электромагнитоупругой диффузии // *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXIV Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова. Т. 2. М. : ТРП, 2018. С. 157–163*
21. *Давыдов С. А., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В.* Поверхностные функции Грина в нестационарных задачах термомеханодиффузии // *Проблемы прочности и пластичности.* 2017. Т. 79, № 1. P. 38–47. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2017-79-1-38-47>
22. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. М. : Высш. шк., 1965. 466 с.
23. *Zverev N. A, Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V.* One-dimensional problem of piezoelectric electromagnetic diffusion for a layer // *Journal of Physics : Conference Series.* 2018. Vol. 1129. 012040. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1129/1/012040>
24. *Бардзокас Д. И., Зобнин А. И., Сеник Н. А., Фильштинский М. Л.* Математическое моделирование в задачах механики связанных полей : в 2 т. Т. 1. Введение в теорию пьезоэлектричества. М. : КомКнига, 2005. 312 с.

---

**Образец для цитирования:**

*Зверев Н. А., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В.* Нестационарная электромагнитоупругость пьезоэлектриков с учетом диффузии // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2020. Т. 20, вып. 2. С. 193–204. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-193-204>

---

## **Unsteady Electromagnetic Elasticity of Piezoelectrics Considering Diffusion**

**N. A. Zverev, A. V. Zemskov, D. V. Tarlakovskii**

Nikolay A. Zverev, <https://orcid.org/0000-0002-0813-2863>, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Shosse, Moscow 125993, Russia, [nikolayzverev1995@gmail.com](mailto:nikolayzverev1995@gmail.com)

Andrei V. Zemskov, <https://orcid.org/0000-0002-2653-6378>, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Shosse, Moscow 125993, Russia; Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, 1 Michurinsky Prospekt, Moscow 119192, Russia, [azemskov1975@mail.ru](mailto:azemskov1975@mail.ru)

Dmitry V. Tarlakovskii, <https://orcid.org/0000-0002-5694-9253>, Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, 1 Michurinsky Prospekt, Moscow 119192, Russia; Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Shosse, Moscow 125993, Russia, [tdvhome@mail.ru](mailto:tdvhome@mail.ru)



The paper considers a model of the linear theory of deformation of elastic continuum with diffusion and piezoelectric effect taken into account, which describes the relationship between mechanical deformations, mass transfer, and the internal electric field. A one-dimensional model of electromagnetic diffusion in a rectangular Cartesian coordinate system is used. At the present level, the methods of solving the corresponding initial-boundary value problems based on the application of the integral Laplace transform and decomposition into trigonometric Fourier series are described. Based on the solution of model problems, the effect of the fields coupling on the processes of dynamic deformation are shown. The results of the calculations are presented in analytical form and in the form of graphs.

**Keywords:** electromagnetic elasticity, piezoelectromagnetism, elastic diffusion, unsteady problems.

Received: 25.04.2019 / Accepted: 26.06.2019 / Published: 01.06.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

## References

1. Afram A. Y., Khader S. E. 2D Problem for a Half-Space under the Theory of Fractional Thermoelastic Diffusion. *American Journal of Scientific and Industrial Research*, 2014, vol. 6, no. 3, pp. 47–57. DOI: <https://doi.org/10.5251/ajsir.2015.6.3.47.57>
2. Atwa S. Y., Egypt Z. Generalized Thermoelastic Diffusion with Effect of Fractional Parameter on Plane Waves Temperature-Dependent Elastic Medium. *Journal of Materials and Chemical Engineering*, 2013, vol. 1, no. 2, pp. 55–74.
3. Belova I. V., Murch G. E. Thermal and diffusion-induced stresses in crystalline solids. *Journal of Applied Physics*, 1995, vol. 77, no. 1, pp. 127–134.
4. Choudhary S., Deswal S. Mechanical loads on a generalized thermoelastic medium with diffusion. *Meccanica*, 2010, vol. 45, pp. 401–413. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-009-9260-9>
5. Elhagary M. A. Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times. *Acta Mech.*, 2011, vol. 218, pp. 205–215. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-010-0415-5>
6. El-Sayed A. M. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2016, vol. 21, no. 9, pp. 1045–1060. DOI: <https://doi.org/10.1177/1081286514549877>
7. Knyazeva A. G. Model of medium with diffusion and internal surfaces and some applied problems. *Mater. Phys. Mech.*, 2004, vol. 7, no. 1, pp. 29–36.
8. Kumar R., Chawla V. Green's Functions in Orthotropic Thermoelastic Diffusion Media. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2012, vol. 36, no. 8, pp. 1272–1277, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.02.017>
9. Olesiak Z. S., Pyryev Yu. A. A coupled quasi-stationary problem of thermodiffusion for an elastic cylinder. *International Journal of Engineering Science*, 1995, vol. 33, iss. 6, pp. 773–780.
10. Pidstryhach Ya. S. Differential equations of the problem of thermodiffusion in a solid deformable isotropic body. *Dopov. Akad. Nauk Ukr. RSR*, 1961, no. 2, pp. 169–172 (in Ukrainian).
11. Sherief H. H., El-Maghraby N. M. A Thick Plate Problem in the Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion. *Int. J. Thermophys.*, 2009, vol. 30, pp. 2044–2057. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10765-009-0689-9>
12. Aouadi M. Variable electrical and thermal conductivity in the theory of generalized thermoelastic diffusion. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2005, vol. 57, no. 2, pp. 350–366. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00033-005-0034-5>



13. Deswal S., Kalkal K. A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion. *International Journal of Thermal Sciences*, 2011, vol. 50, no. 5, pp. 749–759. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2010.11.016>
14. Tarlakovskii D. V., Vestyak V. A., Zemskov A. V. Dynamic Processes in Thermo-Electro-Magneto-Elastic and Thermo-Elasto-Diffusive Media. In: *Hetnarski R. B. (eds.). Encyclopedia of Thermal Stresses*. Vol. 6. Dordrecht, Heidelberg, New York, London, Springer, 2014, pp. 1064–1071. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7\\_609](https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_609)
15. Zhang J., Li Y. A Two-Dimensional Generalized Electromagnetothermoelastic Diffusion Problem for a Rotating Half-Space. *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering*, 2014, vol. 2014, pp. 1–12, Article ID 964218. DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/964218>
16. Chu J. L., Lee S. Diffusion-induced stresses in a long bar of square cross section. *J. Appl. Phys.*, 1993, vol. 73, iss. 7, pp. 3211–3219.
17. Freidin A. B., Korolev I. K., Aleshchenko S. P., Vilchevskaya E. N. Chemical affinity tensor and chemical reaction front propagation: theory and FE-simulations. *Int. J. Fract.*, 2016, vol. 202, no. 2, pp. 245–259. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10704-016-0155-1>
18. Hwang C. C., Chen K. M., Hsieh J. Y. Diffusion-induced stresses in a long bar under an electric field. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1994, vol. 27, no. 10, pp. 2155–2162. DOI: <https://doi.org/10.1088/0022-3727/27/10/025>
19. Indeitsev D. A., Semenov B. N., Sterlin M. D. The Phenomenon of Localization of Diffusion Process in a Dynamically Deformed Solid. *Doklady Physics*, 2012, vol. 57, no. 4, pp. 171–173. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335812040052>
20. Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V. Statement of the one-dimensional problem of thermo-electromagnetoelastic diffusion. *Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruktiv i sploshnykh sred: materialy XXIV Mezhdunar. simpoziuma im. A. G. Gorshkova* [Dynamic and Technological Problems of a Mechanics of Constructions and Continuous Mediums. Proc. XXIV Int. Symposium Dedicated to A. G. Gorshkov]. Vol. 2. Moscow, TRP, 2018, pp. 157–163 (in Russian).
21. Davydov S. A., Zemskov A. V., Tarlakovskiy D. V. Surface Green's function in non-stationary problems of thermomechanical diffusion. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Journal Problems of Strength and Plasticity], 2017, vol. 79, no. 1. pp. 38–47 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2017-79-1-38-47>
22. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu* [Handbook of operational calculus]. Moscow, Vysshaya shkola, 1965. 466 p. (in Russian).
23. Zverev N. A., Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V. One-dimensional problem of piezoelectric electromagnetic diffusion for a layer. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, no. 1129, 012040. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1129/1/012040>
24. Bardzokas D. I., Zobnin A. I., Senik N. A., Fil'shtinskii M. L. *Matematicheskoe modelirovaniye v zadachakh mekhaniki svyazannykh polei: v 2 t. T. 1. Vvedeniye v teoriyu p'ezoelektrichestva* [Mathematical modeling in problems of mechanics of related fields: in 2 vols. Vol. 1. Introduction to the theory of piezoelectricity]. Moscow, KomKniga, 2005. 312 p. (in Russian).

---

**Cite this article as:**

Zverev N. A., Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V. Unsteady Electromagnetic Elasticity of Piezoelectrics Considering Diffusion. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 193–204 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-193-204>

---



# Influence of Convolution Kernel and Beam-Hardening Effect on the Assessment of Trabecular Bone Mineral Density Using Quantitative Computed Tomography

**D. V. Ivanov, I. V. Kirillova, L. Yu. Kossovich, L. V. Bessonov,  
A. V. Petraikin, A. V. Dol, E. S. Ahmad, S. P. Morozov,  
A. V. Vladzimirskyy, K. A. Sergunova, A. V. Kharlamov**

Dmitriy V. Ivanov, <https://orcid.org/0000-0003-1640-6091>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, [ivanovdv@gmail.com](mailto:ivanovdv@gmail.com)

Irina V. Kirillova, <https://orcid.org/0000-0001-8053-3680>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, [nano-bio@info.sgu.ru](mailto:nano-bio@info.sgu.ru)

Leonid Yu. Kossovich, <https://orcid.org/0000-0002-4775-7348>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, [president@info.sgu.ru](mailto:president@info.sgu.ru)

Leonid V. Bessonov, <https://orcid.org/0000-0002-5636-1644>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, [bessonov@sgu.ru](mailto:bessonov@sgu.ru)

Alexey V. Petraikin, <https://orcid.org/0000-0003-1694-4682>, State Budget-Funded Health Care Institution of the City of Moscow "Research and Practical Clinical Center for Diagnostics and Telemedicine Technologies of Moscow Health Care Department", 28-1 Srednyaya Kalitnikovskaya St., Moscow 109029, Russia, [alexeypetraikin@gmail.com](mailto:alexeypetraikin@gmail.com)

Aleksandr V. Dol, <https://orcid.org/0000-0001-5842-1615>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, [dzero@pisem.net](mailto:dzero@pisem.net)

Ekaterina S. Ahmad, <https://orcid.org/0000-0002-4293-2514>, State Budget-Funded Health Care Institution of the City of Moscow "Research and Practical Clinical Center for Diagnostics and Telemedicine Technologies of Moscow Health Care Department", 28-1 Srednyaya Kalitnikovskaya St., Moscow 109029, Russia, [e.ahmad@npcmr.ru](mailto:e.ahmad@npcmr.ru)

Sergey P. Morozov, <https://orcid.org/0000-0001-6545-6170>, State Budget-Funded Health Care Institution of the City of Moscow "Research and Practical Clinical Center for Diagnostics and Telemedicine Technologies of Moscow Health Care Department", 28-1 Srednyaya Kalitnikovskaya St., Moscow 109029, Russia, [npcmr@zdrav.mos.ru](mailto:npcmr@zdrav.mos.ru)

Anton V. Vladzimirskyy, <https://orcid.org/0000-0002-2990-7736>, State Budget-Funded Health Care Institution of the City of Moscow "Research and Practical Clinical Center for Diagnostics and Telemedicine Technologies of Moscow Health Care Department", 28-1 Srednyaya Kalitnikovskaya St., Moscow 109029, Russia, [info@npcmr.ru](mailto:info@npcmr.ru)

Kristina A. Sergunova, <https://orcid.org/0000-0002-9596-7278>, State Budget-Funded Health Care Institution of the City of Moscow "Research and Practical Clinical Center for Diagnostics and Telemedicine Technologies of Moscow Health Care Department", 28-1 Srednyaya Kalitnikovskaya St., Moscow 109029, Russia, [sergunova@rpcmr.org.ru](mailto:sergunova@rpcmr.org.ru)

Aleksandr V. Kharlamov, <https://orcid.org/0000-0002-1709-6518>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, [harlamovav@info.sgu.ru](mailto:harlamovav@info.sgu.ru)

Quantitative computed tomography along with densitometry is used to assess mineral density and strength of bone tissue. Raw data obtained by computed tomography are converted by software using convolution kernels. It is known that the use of convolution kernels can significantly change tissue density, which is measured in Hounsfield units. The beam-hardening effect is described in literature: when x-ray passes through an object, the absorption of lower-energy x-ray photons occurs. Therefore, scanning objects "in the air" without surrounding soft tissues of the human body gives distorted Hounsfield units relative to their real values. This work is aimed at assessing



the effect of various convolution kernels, beam-hardening effect, as well as other CT scanner settings for Hounsfield units. In this work, we studied samples of trabecular bone tissue of the femoral heads and calibrated samples of an aqueous solution of dipotassium hydrogen phosphate with known mineral density. Trabecular bone tissue samples of the femoral heads and calibrated samples of an aqueous solution of dipotassium hydrogen phosphate with known mineral density were scanned on Toshiba Aquilion 64 scanner. The samples were scanned in various modes: at different tube currents, "in the air" and inside the calibration phantom. The resulting images processed by the FC17 and FC03 convolution kernels were analyzed. It was shown that tube current magnitude practically does not affect the Hounsfield units. Different convolution kernels demonstrate significantly different Hounsfield units when scanning the same samples "in the air". It has been confirmed that the beam-hardening effect significantly affects the Hounsfield units and should be considered when evaluating bone mineral density. No differences were found in measurements "in the air" and in the phantom at a significance level of 5% for the FC03 kernel, which confirms the fact that FC03 is intended to correct the beam-hardening effect. An ambiguous relationship was noted between the Hounsfield units and the mineral density for low-density samples when scanned with the FC03 kernel. FC17 kernel, in comparison with FC03, is considered more preferable and suitable for assessing bone mineral density. However, pre-calibration with phantom is required for a wide range of preset mineral densities. Regression dependencies were obtained for recalculation of Hounsfield units from experiments "in the air" to Hounsfield units of the same samples scanned in surrounding tissues (in the phantom).

**Keywords:** computed tomography, quantitative computed tomography, bone mineral density, Hounsfield unit, convolution kernel.

Received: 15.12.2019 / Accepted: 22.01.2020 / Published: 01.06.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-205-219>

## INTRODUCTION

Quantitative computed tomography (QCT) along with dual energy x-ray absorptiometry (DXA) are used to assess mineral density and strength of bone tissue. According to computed tomography (Hounsfield units), bone density is known to strongly correlate with volume mineral density [1, 2] as well as with the mechanical strength of bone tissue [3, 4]. Asynchronous QCT is the most advanced technology that allows obtaining data on the bone mineral density (BMD) of patients without simultaneously scanning a calibration phantom, conducting periodic calibrations of an asynchronous phantom [5, 6].

When performing computed tomography (CT), the projections of the scanned object (synograms) using the reconstruction kernel are converted into a series of images. The result is parallel slices located at equal distances from each other. Further, these data are converted by means of convolution kernels. Convolution kernels are used to achieve greater visual expressiveness of objects on the tomogram. In other words, they are needed for a more detailed and informative presentation of objects of a certain density range. For example, there are kernels designed for soft tissue and kernels for bone tissue [7]. The use of convolution kernels can significantly change the Hounsfield units (HU) of tissues relative to their initial values [8]. Different convolution kernels change HU differently [4, 7, 9]. Therefore, the problem of choosing an appropriate convolution kernel when performing QCT is nontrivial. Manufacturers of CT do not allow to upload raw data that has not been processed using convolution kernels. Moreover, mathematical





descriptions of such kernels are not available in the public literature.

According to the literature, not only the type of convolution kernel affects the absolute values of the Hounsfield units (HU). Tube voltage, table height and field of view (FOV) also have a significant impact on quantitative scan results [10]. It is also known that different CT scanners give different Hounsfield units for the same objects, which complicates the problem of calculating the BMD [10].

The beam-hardening effect is described in literature: when x-ray passes through an object, the absorption of lower-energy x-ray photons occurs [11]. Therefore, when scanning bones not surrounded by soft tissues of the human body (“in the air”), HU are overestimated [12]. This effect can be avoided by scanning objects in special phantoms that simulate human body. There are computational algorithms that allow one to eliminate the beam-hardening effect. Such algorithms are implemented by manufacturers of CT scanners into convolution kernels. However, the effectiveness of these algorithms is not well understood, and their mathematical description is not presented in the literature.

The domestic and foreign scientific groups and companies develop and use various phantoms for calibrating CT scanners [4, 13, 14]. Phantoms are special devices that simulate soft tissues of the human body. Special calibrated samples with known mineral density are placed inside these phantoms. Scanning such phantoms allows one to develop a relationship between the Hounsfield unit and mineral density of the scanned object.

The objectives of this work were:

- to illustrate the work of convolution matrices (the simplest version of the convolution kernel) on the example of spine CT images;
- to assess the influence of various convolution kernels, the beam-hardening effect, as well as some other settings of CT scanners on HU of the femoral heads trabecular bone tissue and calibrated samples of an aqueous solution of dipotassium hydrogen phosphate [14] with known mineral density.

## 1. MATERIALS AND METHODS

### 1.1. Threshold filters and convolution kernels to CT images application

Within the framework of this section, we will consider CT images as an  $N \times M$  matrix

$$I = \begin{pmatrix} i(1,1) & \dots & i(N,1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ i(1,M) & \dots & i(N,M) \end{pmatrix}$$

that corresponds to the horizontal (N) and vertical (M) image dimensions in pixels.

The numbers  $i(x, y)$  at the nodes of the matrix represent the number of the shades of gray color from 0 to a certain maximum value (corresponding to the pixel of the CT image), where 0 corresponds to black and the maximum value corresponds to white.

This paper illustrates and evaluates the effect of two types of image transformations: the “threshold cutoff” and the “detection of boundaries”.

The simplest method is “threshold cutoff”. With this conversion, image sections that do not correspond to a given range of interest are replaced with some fixed color (for example, black).

$$i_{new}(x, y) = \begin{cases} i(x, y), & t_1 < i(x, y) < t_2, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where  $t_1$  and  $t_2$  are the left and right boundaries of the range of interest (in terms of tissue density).

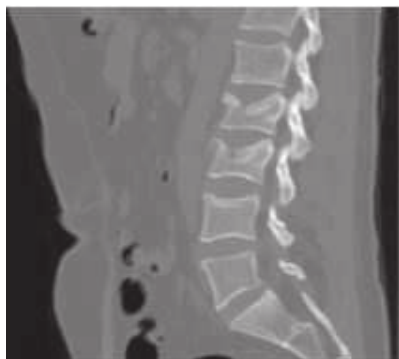
Using this transformation, all areas of the CT image, except those that have the density of interest (for example, bone tissue), can be excluded from consideration

A more complex example is the boundary detection transformation. This is a processing aimed at identifying image points in the vicinity of which a change in brightness occurs. This algorithm is most effective in cases where the brightness change in the figure is insignificant, so the visualization of the boundaries of the objects is improved due to the conversion.

As a rule, a discrete 2D convolution with a kernel specified by matrix is used for this processing. The operation is indicated as follows:  $I_{new} = k * I$ , where  $k$  is a matrix with dimensions of  $(2a + 1) \times (2b + 1)$ , where  $a$  and  $b$  are positive integers. Such convolution operation is defined as follows:

$$i_{new}(x, y) = \sum_{u=-a}^a \sum_{v=-b}^b k(u, v) * i(x - u, y - v).$$

Each pixel of the new image is obtained from the corresponding pixel of the original image, taking into account its neighboring pixels, which are no more than  $a$  pixels along the  $Ox$  axis and no more than  $b$  pixels along the  $Oy$  axis.



This paper shows the application of convolution matrices  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  to the original image (Fig. 1) of the patient's spine CT

$$k_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad k_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Fig. 1. Sagittal CT scan of the lumbar spine

The source image is shown in Fig. 1 was processed using an application written in Python. In the software, the image was presented in matrix form, which was then convoluted with the kernels given by the matrices  $k_1, k_2, k_3$ . The original images were obtained by exporting DICOM images to a PNG image containing grayscale from 0 to 256. As a result of the software, three processed PNG images were obtained from the source file.

## 1.2. Experiments on CT scanner

Samples of trabecular bone tissue of the femoral heads, taken during surgical treatment of arthrosis of the hip joints of NIITON SSMU patients, were scanned on a Toshiba Aquilion 64 CT scanner. The bone tissue transfer of NIITON SSMU patients was approved by the ethics committee and was carried out under the agreement on the implementation of the project approved by Russian Foundation for Advanced Research Projects in the Defense Industry. Calibrated samples of an aqueous solution of dipotassium hydrogen phosphate with known mineral density were also scanned on CT scanner.

Samples of the trabecular bone and an aqueous solution of dipotassium hydrogen phosphate ( $K_2HPO_4$ ) were scanned on a CT scanner table ("in the air") and in the calibration phantom PHK (PHantom Kalium). PHK is a special test object, which is a



cylinder filled with liquid with the ability to simulate the subcutaneous fat layer of a human [14]. Samples of  $K_2HPO_4$  and the phantom were provided by “Scientific and Practical Clinical Center for Diagnostics and Telemedicine Technologies” of the Moscow Department of Health.

Five samples of trabecular bone tissue and eight samples of  $K_2HPO_4$  simulating a specific BMD were scanned. There were four cylindrical specimens with mineral density 50 mg/sm<sup>3</sup>, 100 mg/sm<sup>3</sup>, 150 mg/sm<sup>3</sup> and 200 mg/sm<sup>3</sup> simulating trabecular bone and four hexahedral samples with mineral density 250 mg/sm<sup>3</sup>, 350 mg/sm<sup>3</sup>, 450 mg/sm<sup>3</sup> and 550 mg/sm<sup>3</sup> simulating cortical bone.

Before scanning, each trabecular bone tissue sample was wrapped in a thin layer of plastic film so that water could not enter the bone tissue and could not change its density, and also so that the bone tissue could not dry in the air. Circular thin plastic plates with a low X-ray density and a thickness of 4 mm were placed between the trabecular bone samples during scanning in the phantom. Scanned samples were installed in the center of the phantom using a retaining frame. The phantom was filled with deionized water. Figure 2 shows the samples on the table of a CT scanner and “in phantom”.

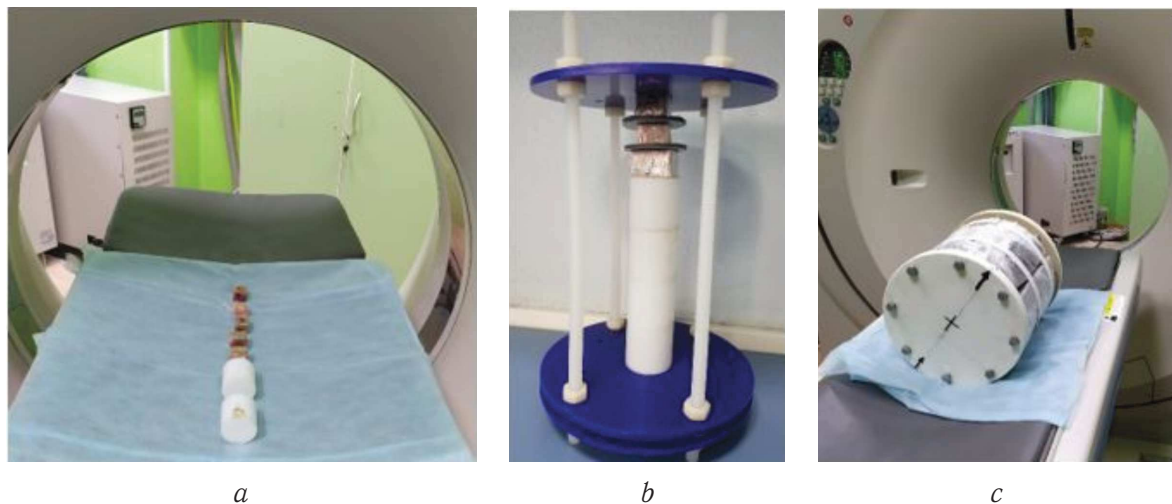


Fig. 2. Samples before scanning in CT scanner: *a* — on the table of the CT scanner, “in the air”; *b* — in the retaining frame of the phantom PHK; *c* — on the table of the CT scanner inside the phantom PHK filled with water, “in phantom”

Scanning of the samples was carried out in various modes (Table 1). Each scan was repeated three times. The table of the CT scanner was fixed in such a position that the scanned samples were located in the center of the aperture of the CT scanner.

Table 1

Investigated CT scan modes and settings						
Scanning modes	“In the Air”				“In phantom”	
Voltage	120 kV					
Tube current	40 mA		300 mA		300 mA	
Convolution kernel	FC17	FC03	FC17	FC03	FC17	FC03
FOV	400 mm					

Slice thickness in each scan was 1 mm. The HU were analyzed using RadiAnt DICOM Viewer 5.0.1. For each sample and each scanning mode, average HU and standard deviation were obtained.

Figure 3 shows the region of interest (circles or ellipses) over which HU in slices of scanned samples were averaged; a standard tool Region-Of-Interest of RadiAnt DICOM Viewer 5.0.1 was used.

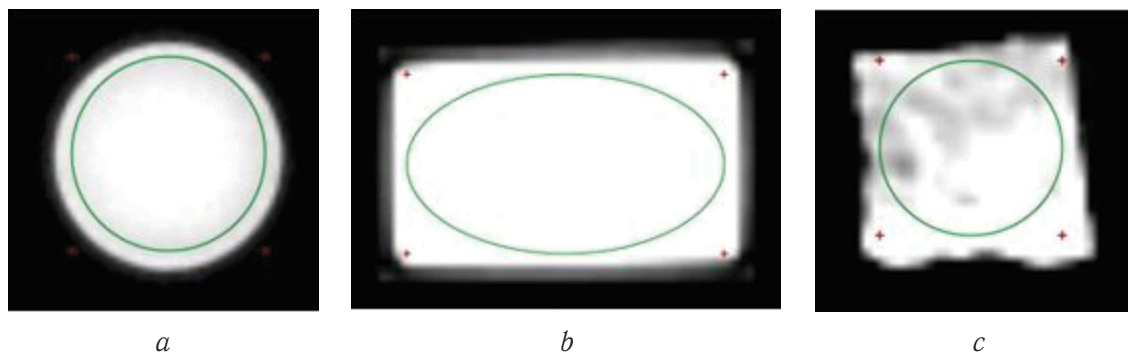


Fig. 3. Areas of interest: *a* — cylindrical sample of an aqueous  $K_2HPO_4$  solution; *b* — a hexahedral sample of an aqueous  $K_2HPO_4$  solution; *c* — trabecular bone sample

For each sample, from four to ten values of the average cross-sectional numbers of HU were obtained, which were then converted to the average HU for each sample.

Statistical processing [15, 16] of the results was performed in Microsoft Excel.

## 2. RESULTS

### 2.1. Convolution matrices application

The new image containing only the boundaries of the vertebrae and some other objects (Fig. 4, *a*) was obtained after applying the convolution kernel  $k_1(1)$  to the matrix of the original image in Fig. 1.

The new image containing only the boundaries of the vertebrae and some other objects (Fig. 4, *b*) was obtained after applying the convolution kernel  $k_2(1)$  to the matrix of the original image in Fig. 1.

The new image containing only the boundaries of the vertebrae and some other objects (Fig. 4, *c*) was obtained after applying the convolution kernel  $k_3(1)$  to the matrix of the original image in Fig. 1.

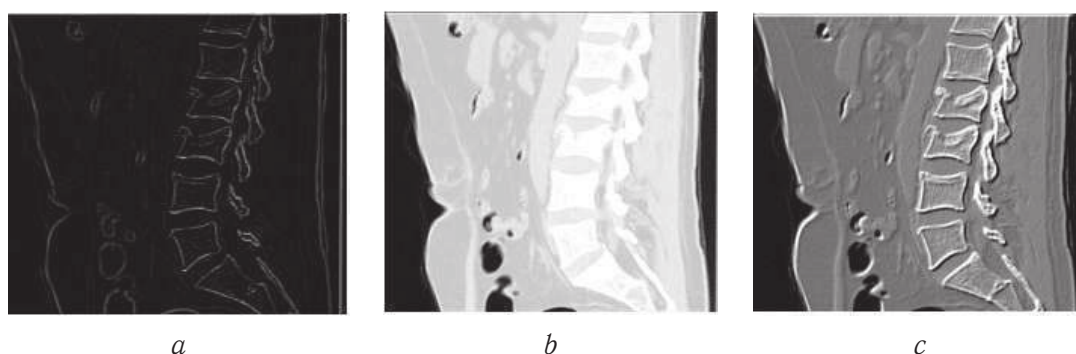


Fig. 4. Sagittal CT scan of the lumbar spine after convolution kernels  $k_1$  (*a*),  $k_2$  (*b*) and  $k_3$  (*c*) application

### 2.2. Experiments in CT scanner

Mean HU values of HU and standard deviation (SD) for each trabecular bone or  $K_2HPO_4$  sample were obtained (Tables 2 and 3) with a series of CT scans using various scanning modes.



Table 2

Mean HU and SD for three experiments for calibrated  $K_2HPO_4$  samples at various scanning modes

Volume mineral density, $mg/sm^3$	“In the Air”								“In phantom”			
	40 mA				300 mA				300 mA			
	FC17		FC03		FC17		FC03		FC17		FC03	
	Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD
550	983.1	28.9	760.3	13.9	986.3	29.6	762.1	14.3	687.0	14.7	705.7	12.0
	984.9	29.6	760.3	13.9	984.7	28.7	762.4	13.6	686.8	14.0	705.8	12.3
	984.4	29.4	760.0	14.8	985.4	29.6	760.1	14.7	686.8	13.8	705.7	12.7
450	834.8	23.1	613.0	14.4	837.4	24.0	612.6	15.4	572.8	12.4	583.4	11.4
	836.4	25.0	611.1	15.4	836.4	24.3	612.6	15.3	574.7	12.8	585.2	11.5
	836.0	24.8	612.6	14.6	837.9	25.5	610.8	16.1	574.0	12.4	584.6	11.0
350	679.9	19.3	458.5	16.1	679.8	18.3	459.8	15.6	454.7	10.7	459.0	10.1
	678.9	18.6	458.3	16.0	679.4	18.0	459.9	15.4	443.0	11.1	446.9	10.6
	680.4	21.1	456.0	18.6	680.9	20.1	458.4	16.0	455.6	11.1	459.3	10.6
250	513.0	13.3	300.9	15.0	513.0	12.3	302.5	14.3	331.0	10.3	321.0	11.0
	513.4	13.3	301.7	14.6	512.6	12.1	302.4	14.1	331.2	10.3	320.3	11.0
	512.7	13.0	301.3	15.0	513.9	13.4	300.3	15.3	331.3	10.1	320.6	11.0
200	421.1	11.3	226.1	20.1	423.0	10.8	229.2	19.4	272.2	8.2	259.6	8.2
	421.6	10.8	227.0	19.8	422.6	10.8	228.6	19.4	271.8	8.4	259.2	8.2
	422.2	11.4	226.0	20.8	426.2	13.2	227.2	20.6	271.8	8.6	259.4	8.6
150	334.2	8.2	145.2	17.4	336.4	9.2	144.6	18.4	206.4	7.8	196.8	8.0
	334.0	8.4	145.2	17.4	336.2	8.6	145.2	18.4	206.4	8.2	196.6	8.2
	335.4	9.6	143.2	18.6	336.6	9.2	144.0	18.2	206.8	8.4	196.6	8.4
100	237.0	6.0	204.8	5.2	238.6	5.6	206.4	4.2	134.6	7.6	128.6	8.0
	236.8	6.2	205.0	5.2	238.0	5.6	205.6	4.0	134.8	8.0	128.2	8.0
	237.4	6.2	205.6	5.4	238.2	5.6	206.0	4.2	134.4	7.8	127.8	8.0
50	139.0	4.0	108.4	3.0	139.2	3.2	108.8	2.2	63.2	8.0	60.6	8.0
	138.8	4.0	108.4	3.0	139.4	2.8	109.0	2.0	63.4	7.6	60.6	8.0
	138.6	4.0	108.6	3.4	139.4	3.2	108.4	2.2	63.2	8.0	60.4	8.0

Table 3

Mean HU and SD for three experiments for trabecular bone samples at various scanning modes

Sample No	“In the Air”				“In phantom”			
	300 mA				300 mA			
	FC17		FC03		FC17		FC03	
	Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD
1	633.2	172.7	331.2	133.5	420.0	139.4	405.8	126.6
	631.2	170.3	361.0	185.5	417.3	130.8	400.3	126.8
	639.2	177.0	360.5	136.7	413.6	150.6	395.2	140.4
2	739.4	140.8	426.0	119.6	456.5	107.3	436.5	103.8
	731.2	136.8	432.6	124.0	458.0	127.3	441.0	100.5
	756.0	156.6	432.6	127.4	452.5	111.3	437.3	105.3
3	264.0	93.4	136.0	46.8	144.8	54.3	139.3	53.0
	260.4	94.4	135.5	47.1	143.3	56.8	140.0	51.0
	261.3	89.6	134.1	44.9	146.0	58.8	139.0	52.8





End of Table 3

Sample No	“In the Air”				“In phantom”			
	300 mA				300 mA			
	FC17		FC03		FC17		FC03	
	Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD
4	782.0	159.0	502.2	135.2	527.2	125.0	540.8	122.8
	781.0	158.0	502.5	136.0	527.5	124.5	541.0	123.0
	783.0	159.0	503.0	135.5	527.0	123.0	539.0	122.5
5	802.0	196.4	499.0	163.4	554.6	141.0	561.2	141.8
	801.0	196.0	500.0	164.0	554.5	142.0	561.5	142.0
	800.0	197.0	498.0	163.0	555.0	141.5	562.0	141.0
6	774.2	166.6	444.2	133.6	503.5	127.3	510.5	126.0
	774.0	167.0	444.0	134.0	504.0	127.5	510.0	125.0
	775.0	166.0	443.0	133.0	503.0	128.0	511.0	127.0
7	190.0	135.5	101.0	79.5	100.0	69.8	99.8	65.0
	191.0	135.5	101.0	80.0	100.0	70.0	99.0	65.0
	190.0	136.0	102.0	79.0	99.0	69.0	100.0	66.0
8	484.6	129.2	213.0	87.0	314.6	91.0	310.2	88.0
	485.0	129.0	214.0	87.0	315.0	91.0	310.0	88.0
	484.0	130.0	213.0	88.0	314.0	90.0	309.5	89.0

The values in Tables 2 and 3 were analyzed using statistical methods. The task was to evaluate how strongly different convolution kernels, different tube current values, and also the beam-hardening affect the HU of the same samples.

The hypothesis about the normal distribution of the examined data from Table 2 using the Kolmogorov – Smirnov criterion was confirmed at 5% significance level. This allowed a further analysis using the parametric Student’s t-test.

### 2.3. “In the air”

To test the hypothesis that there were no differences in Hounsfield units “in the air” for 40 mA and 300 mA tube current, the Student’s t-test was used for paired observations. This hypothesis was confirmed at a significance level of 5% for both investigated convolution kernels (FC17 and FC03). The correlation coefficients between the corresponding data sets in the case of both kernels exceeded the value of 0.999, which in this case also indicates the coincidence of the measurement results.

Application of the same criterion to test the hypothesis that the Hounsfield numbers “in the air” coincided for different kernels (FC17 and FC03) at a fixed tube current value (40 mA and 300 mA) showed a shift in the measurements at less than 0.001% significance level.

The determined x-ray density (HU) is higher for the FC 17 convolution kernel. This difference is caused by beam hardening correction applied in the FC03 convolution kernel (CT Manual Toshiba 14.1.5. P. 204). The effects are not described in detail.

Nevertheless, a high correlation was found between the samples for different kernels (0.963 in case of 40 mA tube current and 0.959 in case of 300 mA tube current), which indicates the presence of interdependencies. This was confirmed by the linear regression equations:



For 40 mA tube current:

$$Hu_{FC03} = 0.66 * Hu_{FC17}, \quad R^2 = 0.978.$$

For 300 mA tube current:

$$Hu_{FC03} = 0.64 * Hu_{FC17}, \quad R^2 = 0.978.$$

The Chow test at a significance level of 5% showed the absence of structural shifts in two regressions for different tube current values, which indicates the coincidence of the dependencies.

It was shown that an increase in density does not always entail an increase in Hounsfield units for calibrated samples with mineral density corresponding to trabecular bone. This conclusion is valid for scans “in the air” processed with FC03 kernel for both tube currents (Fig. 5, Table 2). A nonlinear dependence was noted for mineral density values of 50–250 mg/ml. Correct interpretation of experimental data for a given density range is difficult.

In phantom (for the both FC03 and FC17 kernels) this effect was absent in the same way as in the air with FC17 kernel. The reason for this “paradoxical” dependence of Hounsfield units on volume mineral density is the calculated nature of HU.

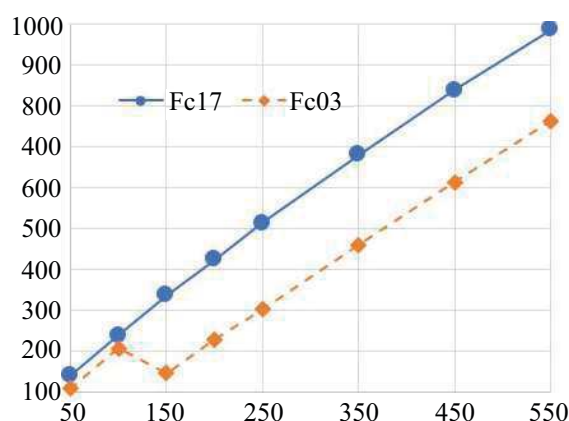


Fig 5. Hounsfield units' dependence (vertical) of  $K_2HPO_4$  samples on their mineral density (horizontal  $mg/sm^3$ ). Scanning “in the air”, 300 mA (color online)

## 2.4. “In phantom”

Student's t-test was used for paired observations to test the hypothesis of coincidence of measurements made “in phantom” with different kernels (FC17 and FC03) at a fixed 300 mA tube current. There were no differences in measurements at 5% significance level. The value of the correlation coefficient was 0.999.

## 2.5. “In the air” versus “in phantom”

Student's t-test for paired observations was used to test the hypothesis that the results of measurements performed “in the air” and “in phantom” for each kernel (FC17 and FC03) coincided at fixed 300 mA tube current.

A statistically significant difference in measurement results “in the air” and “in phantom” at significance levels of less than 0.001% was found for the FC17 kernel. It was shown that there were no differences in measurements “in the air” and “in phantom” at 5% significance level for the FC03 kernel.

The obtained regression dependences made it possible to recalculate HU of  $K_2HPO_4$  samples from “in the air” experiments into HU of  $K_2HPO_4$  “in the phantom” for both FC17 and FC03 kernels. Regression dependences are demonstrated in Fig. 6 a, b.

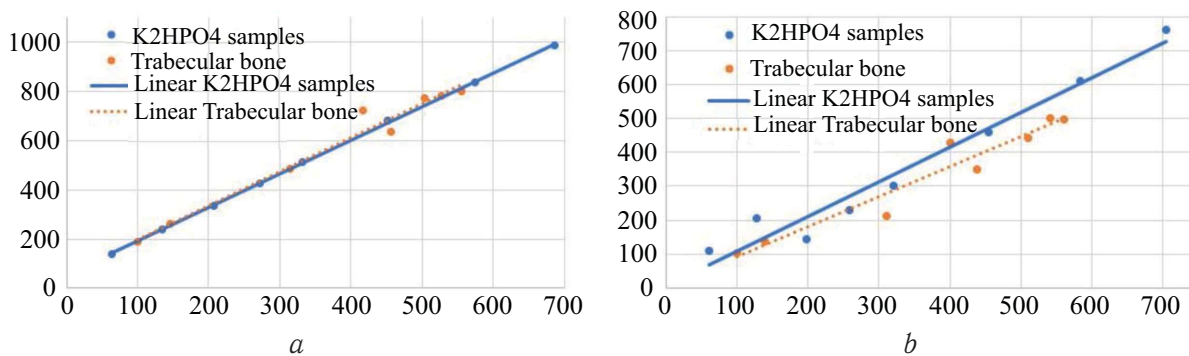


Fig. 6. Regression dependences of recalculation of HU from “in the air” (horizontal axis) to “in phantom” (vertical axis) for calibrated  $K_2HPO_4$  samples and trabecular bone samples:  $a$  — for FC17 kernel (solid line  $y = 0.7 \cdot x - 40.8$ ,  $R^2 = 0.99$  is a linear regression for  $K_2HPO_4$  samples, dotted line  $y = 0.7 \cdot x - 33.9$ ,  $R^2 = 0.97$  is a linear regression for trabecular bone samples);  $b$  — for FC03 kernel (solid line  $y = 1.0 \cdot x + 22.0$ ,  $R^2 = 0.94$  is a linear regression for  $K_2HPO_4$  samples, dotted line  $y = 0.9 \cdot x + 7.0$ ,  $R^2 = 0.96$  is a linear regression for trabecular bone samples) (color online)

### 3. DISCUSSION

In this paper, it is shown that processing of CT images using discrete convolution matrix can significantly change them (Fig. 4  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ). This is very important for optimal visualization. Convolution kernels of CT scanners are much more complicated, since they can include the sequential use of several convolution algorithms. It should be understood that such processing can slightly shift the contours of the objects which is shown in Fig. 4,  $c$ .

Unfortunately, image conversion by convolution kernel is an irreversible operation. This means that even if one has the exact formula for direct image conversion, no algorithm allows restoring the original image. Moreover, manufacturers of CT scanners do not disclose the mathematical formulas of the convolution kernels and the conditions for their use.

This paper also investigated the influence of various effects and CT scanner settings on HUs of trabecular bone tissue samples and  $K_2HPO_4$  samples with known mineral density. A series of scans were carried out on Toshiba CT with samples “in the air”, that is, on the table of the CT scanner without taking into account the surrounding tissues, and “in phantom” that simulates human soft tissues.

In this work, the effect of FOV and slice thickness were not investigated, since it was previously shown [10] that a change in these parameters has practically no effect on HU.

At the same time, these [10] and other authors [4] noted a significant dependence of the HU on the convolution kernel, as well as the presence or absence of the environment of the scanned samples; and the influence of the object geometry on its density, expressed in HU during CT scanning. It was associated with the beam-hardening effect and its adjustment during the image reconstruction [11].

In this work, it was shown that the tube current practically does not affect HU. Different convolution kernels give significantly different HUs when scanning “in the air»” of the same samples. At the same time, the absence of differences in measurements “in the air” and “in phantom” at a significance level of 5% for FC03 kernel was shown, which confirms the fact that it was developed to correct “beam-hardening” effect [7].



However, at low mineral densities of the scanned samples, an ambiguous relationship was observed between HU and mineral density (Fig. 5). Such an ambiguity was not found for the FC17 kernel; therefore, we consider it more preferable and suitable for estimating BMD in comparison with the FC03 kernel under the conditions of the performed experimental work. This is important for acquiring phantom scan data from air scan data for bone samples.

The nonlinearity of this filter can be verified by qualitatively analyzing the dependence for FC17 in Fig. 5. At high concentrations, a slight underestimation of HU occurs. But this is enough for patients to record underestimated BMD values in comparison with conventional densitometry.

The beam-hardening effect significantly affects the HU and should be considered when evaluating BMD which could be seen from data in Tables 2 and 3. The difference in HU for FC03 and FC17 kernels for the same samples when scanning “in the air” reached 130% (on average about 56%) for  $K_2HPO_4$  samples and up to 128% (on average about 81%) for trabecular bone samples tissue.

The difference in HU in case of FC17 kernel for the same samples when scanning “in the air” and “in the phantom” reached 120% (on average about 65%) for  $K_2HPO_4$  samples and up to 90% (on average about 61%) for samples of sponge bone tissue. At the same time, the character of the dependence of HU on mineral density was completely preserved (Fig. 5). This made it possible to obtain an almost “ideal” regression dependence for a given filter when comparing scans “in the air” and phantom modes (Fig. 6 a).

Nevertheless, the regression dependences in Fig. 6 a, b make it possible to recalculate the HU from the “in the air” experiments into HU for the same samples considering the surrounding tissues (“in phantom”). The dependences for calibrated samples and trabecular bone tissue samples for FC17 kernel practically coincide, which is confirmed by the same angles of inclination of these lines. For FC03 kernel, the line angles for calibrated and trabecular bone samples differ insignificantly. It is more efficient to use FC17 kernel, which does not have pronounced nonlinearity in the initial portion of the curve of the dependence of HU on the mineral density.

The data obtained during phantom modeling allow scanning bone tissue “in the air” and recalculating the obtained data into mineral density, or into Hounsfield units “in phantom” imitating a patient. For these purposes, the FC17 convolution kernel is more suitable. This greatly simplifies the scanning procedure.

## CONCLUSION

In this paper, it was shown that tube current value does not significantly affect HU during CT scanning. It was revealed that different convolution kernels of a Canon (Toshiba) CT scanner give significantly different HU when scanning “in the air” for the same bone tissue samples and calibrated samples with known mineral density. It has been confirmed that “beam-hardening” effect significantly affects the HU and should be considered when evaluating the BMD. We did not reveal differences in measurements “in the air” and “in the phantom” at a significance level of 5% for the FC03 kernel, which confirms the fact that it was developed to correct the effect of “beam-hardening”. An ambiguous relationship was found between the HU and the mineral density for the FC03 kernel when scanning samples with a low mineral density. Therefore, we consider the FC17 convolution kernel (in comparison with FC03) of the Toshiba CT scanner to be more preferable and suitable for assessing BMD under the given experimental condi-



tions. Regression dependencies were obtained for recalculation of HU from experiments “in the air” to HU of the same samples considering the surrounding tissues.

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Foundation for Advanced Research.

## References

1. Patel S. P., Lee J. J., Hecht G. G., Holcombe S. A., Wang S. C., Goulet G. A. Normative Vertebral Hounsfield Unit Values and Correlation with Bone Mineral Density. *J Clin Exp Orthop.*, 2016, vol. 2, no. 14. DOI: <https://doi.org/10.4172/2471-8416.100014>
2. Kim K. J., Kim D. H., Lee J. I., Choi B. K., Han I. H., Nam K. H. Hounsfield Units on Lumbar Computed Tomography for Predicting Regional Bone Mineral Density. *Open Med.*, 2019, vol. 14, iss. 1, pp. 545–551. DOI: <https://doi.org/10.1515/med-2019-0061>
3. Khan S. N., Warkhedkar R. M., Shyam A. K. Analysis of Hounsfield Unit of Human Bones for Strength Evaluation. *Procedia Materials Science*, 2014, vol. 6, pp. 512–519. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mspro.2014.07.065>
4. Giambini H., Dragomir-Daescu D., Huddleston P. M., Camp J. J., An K. N., Nassr A. The Effect of Quantitative Computed Tomography Acquisition Protocols on Bone Mineral Density Estimation. *J Biomech Eng.*, 2015, vol. 137, no. 11, p. 114502. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4031572>
5. Pickhardt P. J., Bodeen G., Brett A., Brown J. K., Binkley N. Comparison of femoral neck BMD evaluation obtained using lunar DXA and QCT with asynchronous calibration from CT colonography. *J Clin Densitom*, 2015, vol. 18, no. 1, pp. 5–12. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jocd.2014.03.002>
6. Brown J. K., Timm W., Bodeen G., Chason A., Perry M., Vernacchia F., Delourne R. Asynchronously Calibrated Quantitative Bone Densitometry. *J Clin Densitom*, 2017, vol. 20, no. 2, pp. 216–225. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jocd.2015.11.001>
7. Andersen H. K., Jensen K., Berstad A. E., Aalokken T. M., Kristiansen J., von Gohren Edwin B., Hagen G., Martinsen A. C. Choosing the best reconstruction technique in abdominal computed tomography: a systematic approach. *J Comput Assist Tomogr*, 2014, vol. 38, no. 6, pp. 853–858. DOI: <https://doi.org/10.1097/RCT.0000000000000139>
8. Michalski A. S., Edwards W. B., Boyd S. K. The Influence of Reconstruction Kernel on Bone Mineral and Strength Estimates Using Quantitative Computed Tomography and Finite Element Analysis. *J Clin Densitom*, 2019, vol. 22, no. 2, pp. 219–228. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jocd.2017.09.001>
9. Birnbaum B. A., Hindman N., Lee J., Babb J. S. Multi-detector row CT attenuation measurements: assessment of intra- and interscanner variability with an anthropomorphic body CT phantom. *Radiology*, 2007, vol. 242, no. 1, pp. 109–119. DOI: <https://doi.org/10.1148/radiol.2421052066>
10. Free J., Eggermont F., Derikx L., van Leeuwen R., van der Linden Y., Jansen W., Raaijmakers E., Tanck E., Kaatee R. The effect of different CT scanners, scan parameters and scanning setup on Hounsfield units and calibrated bone density: a phantom study. *Biomed. Phys. Eng. Express*, 2018, vol. 4, no. 5, p. 055013. DOI: <https://doi.org/10.1088/2057-1976/aad66a>
11. Gromov A. I., Petraikin A. V., Kulberg N. S., Kim S. Yu., Morozov S. P., Sergunova K. A., Usanov M. S. The Problem of X-Ray Attenuation Estimation Accuracy in Multislice Computed Tomography. *Medical Visualization*, 2016, no. 6, pp. 133–142 (in Russian).
12. Crookshank M., Ploeg H.-L., Ellis R., Macintyre N. J. Repeatable calibration of Hounsfield units to mineral density and effect of scanning medium. *Advances in Biomechanics and Applications*, 2013, vol. 1, no. 1, pp. 015–022. DOI: <http://dx.doi.org/10.12989/aba.2013.1.1.015>
13. Witt R. M., Cameronand J. R. Improved bone standard containing dipotassium hydro-





- gen phosphate solution for the intercomparison of different transmission bone scanning systems. *Technical Report*. 1970. NTIS Issue Number 197112. 6 p.
14. Morozov S. P., Sergunova K. A., Petryaykin A. V., Semenov D. S., Petryaykin F. A., Akhmad E. S., Nizovtsova L. A., Vladzimirsky A. V. Phantom device for testing x-ray methods of osteodensitometry. Utility Model Patent 186961. RF. No. 2018125297; declared 10.07.2018; published 11.02.2019. Bull. no. 5. 11 p. (in Russian).
15. Glantz S. A. *Primer of biostatistics*. Seventh Edition. New York, McGraw-Hill, 2011. 320 p.
16. Kobzar A. I. *Applied Mathematical Statistics. For Engineers and Scientists*. Moscow, Fizmatlit, 2006. 816 p. (in Russian).

---

**Cite this article as:**

Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Bessonov L. V., Petraikin A. V., Dol A. V., Ahmad E. S., Morozov S. P., Vladzimirsky A. V., Sergunova K. A., Kharlamov A. V. Influence of Convolution Kernel and Beam-Hardening Effect on the Assessment of Trabecular Bone Mineral Density Using Quantitative Computed Tomography. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 205–219. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-205-219>

---

УДК 539.3/617.547

## **Влияние конволюционных ядер и эффекта «упрочнения луча» на оценку минеральной плотности губчатой костной ткани с использованием количественной компьютерной томографии**

**Д. В. Иванов, И. В. Кириллова, Л. Ю. Коссович, Л. В. Бессонов,  
А. В. Петрайкин, А. В. Доль, Е. С. Ахмад, С. П. Морозов,  
А. В. Владзимирский, К. А. Сергунова, А. В. Харламов**

Иванов Дмитрий Валерьевич, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории систем поддержки принятия врачебных решений, Образовательно-научный институт наноструктур и биосистем, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, [ivanovdv@gmail.com](mailto:ivanovdv@gmail.com)

Кириллова Ирина Васильевна, кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией систем поддержки принятия врачебных решений, Образовательно-научный институт наноструктур и биосистем, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, [nano-bio@info.sgu.ru](mailto:nano-bio@info.sgu.ru)

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физико-математических наук, президент, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, [president@info.sgu.ru](mailto:president@info.sgu.ru)

Бессонов Леонид Валентинович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории систем поддержки принятия врачебных решений, Образовательно-научный институт наноструктур и биосистем, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, [bessonov@sgu.ru](mailto:bessonov@sgu.ru)



Петряйкин Алексей Владимирович, кандидат медицинских наук, доцент, ведущий научный сотрудник отдела разработки средств контроля и технического мониторинга, Научно-практический клинический центр диагностики и телемедицинских технологий Департамента здравоохранения города Москвы, Россия, 109029, г. Москва, ул. Средняя Калитниковская, д. 28, стр. 1, alexeypetraikin@gmail.com

Доль Александр Викторович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории систем поддержки принятия врачебных решений, Образовательно-научный институт наноструктур и биосистем, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, dzero@pisem.net

Ахмад Екатерина Сергеевна, научный сотрудник отдела разработки средств контроля и технического мониторинга, Научно-практический клинический центр диагностики и телемедицинских технологий Департамента здравоохранения города Москвы, Россия, 109029, г. Москва, ул. Средняя Калитниковская, д. 28, стр. 1, e.ahmad@npcmr.ru

Морозов Сергей Павлович, доктор медицинских наук, профессор, директор, Научно-практический клинический центр диагностики и телемедицинских технологий Департамента здравоохранения города Москвы, Россия, 109029, г. Москва, ул. Средняя Калитниковская, д. 28, стр. 1, npcmr@zdrav.mos.ru

Владимирский Антон Вячеславович, доктор медицинских наук, заместитель директора по научной работе, Научно-практический клинический центр диагностики и телемедицинских технологий Департамента здравоохранения города Москвы, Россия, 109029, г. Москва, ул. Средняя Калитниковская, д. 28, стр. 1, info@npcmr.ru

Сергунова Кристина Анатольевна, руководитель отдела разработки средств контроля и технического мониторинга, Научно-практический клинический центр диагностики и телемедицинских технологий Департамента здравоохранения города Москвы, Россия, 109029, г. Москва, ул. Средняя Калитниковская, д. 28, стр. 1, sergunova@npcmr.org.ru

Харламов Александр Владимирович, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории систем поддержки принятия врачебных решений, Образовательно-научный институт наноструктур и биосистем, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, harlamovav@info.sgu.ru

Для оценки минеральной плотности и прочности костных тканей наряду с денситометрией применяется количественная компьютерная томография. «Сырые» данные, полученные при компьютерной томографии, преобразуются программным обеспечением томографа посредством сверточных (конволюционных) ядер. Известно, что при применении конволюционных ядер может существенно изменяться плотность тканей, выраженная в единицах Хаунсфилда. Описан эффект «упрочнения луча» (beam-hardening effect): при прохождении рентгеновского луча через объект происходит поглощение фотонов рентгеновского излучения с более низкой энергией. Поэтому сканирование объектов «на воздухе» без окружения мягких тканей тела человека дает искаженные числа Хаунсфилда относительно их реальных значений. Данная работа нацелена на то, чтобы оценить влияние различных конволюционных ядер, эффекта «упрочнения луча», а также других параметров настройки компьютерного томографа на единицы Хаунсфилда губчатой костной ткани головок бедра и калиброванных образцов водного раствора гидроортофосфата калия с известной минеральной плотностью. Образцы губчатой костной ткани головок бедра и калиброванные образцы водного раствора гидроортофосфата калия с известной минеральной плотностью сканировали на компью-



терном томографе Toshiba Aquilion 64. Сканирование образцов осуществляли в различных режимах: при разном токе, «на воздухе» и внутри калибровочного фантома. При этом анализировались результирующие изображения, обработанные конволюционными ядрами FC17 и FC03. Было показано, что величина тока практически не влияет на числа Хаунсфилда. Различные конволюционные ядра демонстрируют существенно разные числа Хаунсфилда при сканировании «на воздухе» одних и тех же образцов. Эффект «beam hardening» существенно влияет на числа Хаунсфилда и должен учитываться при оценке минеральной плотности костной ткани. Не выявлены различия в измерениях «на воздухе» и в фантоме на уровне значимости 5% для ядра FC03, что подтверждает тот факт, что оно предназначено для корректировки эффекта «beam-hardening». Однако при малых минеральных плотностях сканируемых образцов отмечается неоднозначная зависимость между числами Хаунсфилда и минеральной плотностью для ядра FC03. Ядро FC17 считаем более предпочтительным и пригодным для оценки минеральной плотности костной ткани с учетом предварительной калибровки с помощью фантома для широкого диапазона заданных минеральных плотностей. Получены регрессионные зависимости для пересчета чисел Хаунсфилда из экспериментов «на воздухе» в числа Хаунсфилда тех же образцов с учетом окружающих тканей (в фантоме).

**Ключевые слова:** компьютерная томография, количественная компьютерная томография, минеральная плотность костной ткани, число Хаунсфилда, конволюционное ядро.

Поступила в редакцию: 15.12.2019 / Принята: 22.01.2020 / Опубликовано: 01.06.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда перспективных исследований.

---

**Образец для цитирования:**

Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Bessonov L. V., Petraikin A. V., Dol A. V., Ahmad E. S., Morozov S. P., Vladzimirskyy A. V., Sergunova K. A., Kharlamov A. V. Influence of Convolution Kernel and Beam-Hardening Effect on the Assessment of Trabecular Bone Mineral Density Using Quantitative Computed Tomography [Иванов Д. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Бессонов Л. В., Петрайкин А. В., Доль А. В., Ахмад Е. С., Морозов С. П., Владзимирский А. В., Сергунова К. А., Харламов А. В. Влияние конволюционных ядер и эффекта «упрочнения луча» на оценку минеральной плотности губчатой костной ткани с использованием количественной компьютерной томографии] // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 205–219. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-205-219>

---



УДК 517.958:531.32

## **Математическое моделирование накопления частиц на поверхности пластикового билиарного стента для прогнозирования его окклюзии**

**А. Г. Кучумов**

Кучумов Алексей Геннадьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики, механики и биомеханики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Россия, 614990, г. Пермь, Комсомольский просп., д. 29, kuchumov@inbox.ru

Эндопротезирование пластиковыми стентами применяется для восстановления желчеотока чрескожным или эндоскопическим способом с конца 1970-х годов. Отдаленные результаты применения данных конструкций нельзя назвать удовлетворительными в связи с высокой частотой рецидивов желтухи, что обусловлено окклюзией пластиковых стентов билиарным сладжем (скопление кристаллов холестерина, пигментных кристаллов, бактерий и солей кальция). Основным компонентом билиарного сладжа, стимулирующим уменьшение просвета стента, принято считать холестерин. Средний срок службы стентов составляет 3–6 месяцев. Несмотря на многочисленные экспериментальные исследования процесса окклюзии, не установлены оптимальные сроки замены билиарного пластикового стента. Слишком частая замена стента может привести к дополнительным осложнениям, поэтому необходим индивидуализированный прогноз срока службы стента для конкретного пациента. В данной работе разработана модель течения литогенной желчи как неньютоновской жидкости с учетом транспорта частиц, описывающих поведение кристаллов холестерина, которые накапливаются на внутренней поверхности стента, стимулируя уменьшение его просвета. Была найдена корреляция между концентрацией холестерина и временем окклюзии на основе применения специально разработанной итерационной процедуры. Результаты вычислений показывают, что индивидуальные параметры (возраст, пол, вязкость желчи, концентрация холестерина) оказывают существенное влияние на скорость окклюзии стента.

*Ключевые слова:* желчь, билиарный стент, неньютоновская жидкость.

Поступила в редакцию: 20.05.2019 / Принята: 17.07.2019 / Опубликовано: 01.06.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-220-231>

### **ВВЕДЕНИЕ**

Билиарные стенты используются для облегчения дренирования желчи в пищеварительный тракт при доброкачественных и злокачественных стриктурах (сужениях просвета протока). Билиарное стентирование предусматривает введение небольших трубчатых протезов (стентов) из пластика, металла или биоразлагаемого материала, которые, поддерживая стенки желчного протока, позволяют сохранить просвет в желчных протоках для течения желчи. Эндоскопическая установка пластиковых билиарных стентов является одним из способов лечения обструктивной желтухи. Однако ограничением этого метода является окклюзия (уменьшение просвета) стента в период 3–6 месяцев, что требует его замены. Окклюзия



стентов вызвана изменением химического состава желчи (связанного с повышением содержания кристаллов холестерина, билирубината кальция, протеинов и наличием бактерий). Холестерин является основным веществом, стимулирующим окклюзию стента. Несмотря на многочисленные экспериментальные исследования процесса закупорки, не установлены оптимальные сроки замены билиарного пластикового стента, поэтому обычно рекомендуются интервалы в 3–6 месяцев. Тем не менее, для пожилых пациентов с многочисленными сопутствующими заболеваниями слишком частая замена стента может привести к дополнительным осложнениям. Таким образом, существует потребность в создании математической модели, позволяющей описать процесс отложений холестерина на стенке пластикового стента.

С точки зрения биомеханики модели, описывающие накопление частиц на стенках биологических сосудов, в основном разрабатывались для решения проблем, связанных с атеросклерозом. В данном разделе обсуждаются работы по моделированию образования атеросклеротических бляшек, поскольку работ, связанных с накоплением билиарного сладжа на поверхности стента, в доступной авторам литературе найдено не было.

В работе [1] представлена вычислительная модель образования и развития бляшек. Рассмотрено влияние веществ, которые играют ключевую роль в атерогенезе. Решение проблемы разделено на два этапа. На первом этапе рассматривается транспорт липопротеинов низкой плотности (ЛПНП) с кровью. Далее моделируется проникновение ЛПНП в эндотелий и артериальную стенку. Проникновение и движение частиц в артериальной стенке предполагает диффузионно-конвективный подход, зависящий от времени. Другой подход был реализован в работе [2], где для прогнозирования развития атеросклеротических бляшек использовалась вычислительная процедура, основанная на обобщенных уравнениях конечных разностей и томографических снимках. 2D-анализ был адаптирован для расчета атерогенеза в персонализированной модели сонной артерии пациента. В работе [3] предложена новая теория локализации сосудистых заболеваний. Идея состоит в том, что поляризация концентраций ЛПНП (области с очень высокими и очень низкими значениями касательных напряжений в стенке) приводит к возникновению и развитию атеросклероза. U. Olgas и соавт. в работе [4] сделали аналогичный вывод о том, что накопление ЛПНП зависит от локализации касательных напряжений в стенке. Хорошие обзоры по исследованиям биомеханических факторов, влияющих на формирование и развитие атеросклероза, можно найти в статьях [5, 6].

Нами рассмотрена модель течения литогенной желчи как неньютоновской жидкости Каро и транспорта частиц холестерина для прогноза окклюзии билиарного стента. Особенностью подхода, предлагаемого в данной статье, является численная итерационная процедура, которая предполагает, что накопление и отложение билиарного сладжа начинаются с некоторого критического значения концентрации холестерина.

В последнее время появился ряд работ, посвященных проведению экспериментальных исследований *in vitro* по анализу пропускной способности стента при протекании биожидкости для скрининга материалов при разработке более функциональных стентов и исследованиях природы окклюзии. Обзор и сравнение экспериментальных работ можно найти в статье [7]. В одних исследованиях использовалась желчь человека, в других — желчь животных. При изучении окклюзии стента желчью человека, несмотря на похожие условия испытаний, были получены различные



результаты. Это показывает, что экспериментальные методы не способны описать текущую ситуацию в организме человека. Данные эксперименты дорогие, затратные по времени, а также не учитывают степень патологии, возраст, пол, концентрацию холестерина.

В нашем исследовании была построена биомеханическая модель течения желчи с транспортом частиц, описывающих поведение кристаллов холестерина, которые накапливаются на внутренней поверхности стента, стимулируя уменьшение его просвета. Была найдена корреляция между концентрацией холестерина и временем окклюзии на основе применения специально разработанной итерационной процедуры. Модель позволила оценить реальные сроки службы стента для практических рекомендаций по его замене с учетом анализа реальных клинических данных.

## 1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОККЛЮЗИИ СТЕНТА

### 1.1. Концептуальная постановка задачи

Рассматривается течение литогенной желчи как жидкости Каро в пластиковом стенте с учетом накопления отложений холестерина. Пластиковый стент представляет собой трубку постоянного радиуса и переменной кривизны (рис. 1).

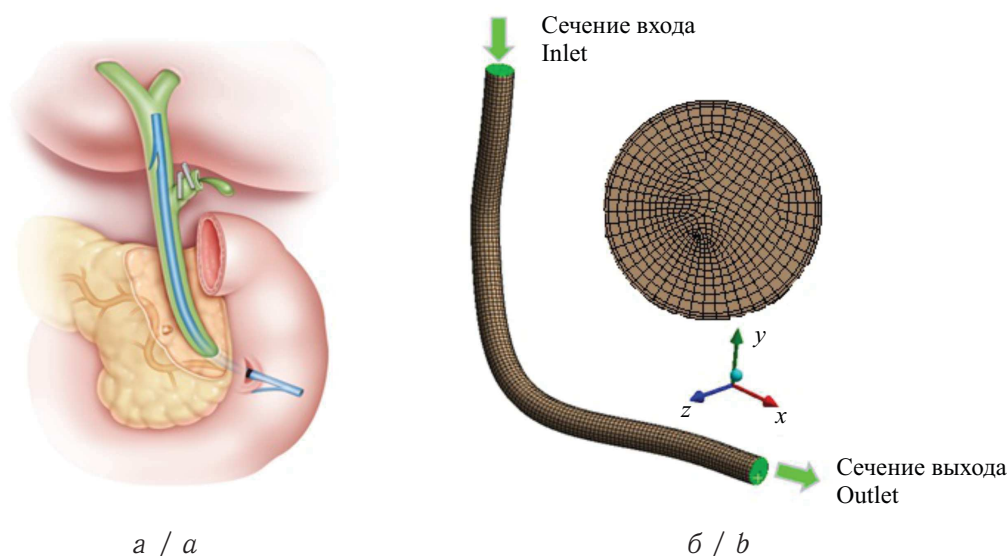


Рис. 1. Геометрия пластикового стента: *a* — схема положения стента; *b* — конечно-элементная сетка и граничные условия (цвет online)

Fig. 1. The geometry of the plastic stent: *a* — a diagram of the position of the stent; *b* — finite element mesh and boundary conditions (color online)

Основная гипотеза заключается в том, что при течении литогенной желчи в стенте обнаруживаются области повышенных концентраций холестерина, именно в этих областях будет наблюдаться окклюзия. По мере накопления отложений геометрические характеристики трубки изменяются, что приводит к изменению характеристик течения и, соответственно, скоростей накопления отложений холестерина. Считается, что при малых концентрациях холестерина на стенке не происходит образования твердой фазы, а ее формирование на поверхности стента начинается лишь тогда, когда значения концентрации превысят некоторое пороговое значение  $c^*$ . Свойства желчи, в том числе концентрация холестерина на входе



в трубку, являются индивидуальными параметрами модели и могут быть определены из данных клинических анализов. Нами предлагается проанализировать время окклюзии стента в зависимости от его размера (анализируются три диаметра коммерческих стентов, применяемых при эндобилиарных вмешательствах) и индивидуальных свойств желчи, а также оценить гидродинамические особенности течения среды в стенте.

## 1.2. Математическая постановка задачи

Математическая постановка задачи может быть записана в следующем виде:

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) = \nabla \cdot \sigma + f, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (2)$$

$$\sigma = -pI + \tau, \quad (3)$$

$$\tau = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}, \quad (4)$$

$$\eta = \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{(1 + (a\dot{\gamma})^2)^k} + \eta_\infty, \quad (5)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \cdot \nabla c = D \nabla^2 c. \quad (6)$$

Граничные условия:

$$v|_{inlet} = -v_y, \quad (7)$$

$$p|_{outlet} = p_{\text{ДПК}}, \quad (8)$$

$$c|_{inlet} = c_0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}|_{outlet} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial c}{\partial n}|_{wall} = 0, \quad (11)$$

где  $\rho$  — плотность желчи,  $v$  — скорость желчи,  $t$  — время,  $\sigma$  — тензор напряжений,  $f$  — массовые силы,  $p$  — давление,  $I$  — единичный тензор,  $\tau$  — девиаторная часть тензора напряжений,  $\eta$  — вязкость,  $\dot{\gamma}$  — скорость сдвига. Уравнение (5), представляющее собой модель Каро, описывает неньютоновское поведение жидкости. В работе [8] было показано, что модель Каро описывает поведение литогенной желчи ( $\eta_\infty$  — вязкость среды при предельно большой скорости сдвига,  $\eta_0$  — вязкость при предельно малой скорости сдвига,  $a$  — параметр модели Каро,  $k$  — показатель степени,  $c$  — концентрация холестерина (ммоль/л),  $D$  — коэффициент диффузии). Уравнения (1)–(5) описывают течение жидкости; уравнение (6) — транспорт частиц холестерина вместе с жидкостью (уравнение диффузии); уравнения (7)–(11) — граничные условия, где  $v|_{inlet}$  — скорость на входном сечении стента,  $p|_{outlet}$  — давление на выходном сечении стента,  $p_{\text{ДПК}}$  — давление в двенадцатиперстной кишке,  $c|_{inlet}$  — концентрация на входе,  $c_0$  — начальная концентрация (индивидуальный параметр). Значения параметров:  $\rho = 1020 \text{ кг/м}^3$  [9],  $D = 7 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2/\text{с}$  [10],  $v_y = 3 \text{ мм/с}$  [8],  $p_{\text{ДПК}} = 1 \text{ кПа}$  [11].

## 1.3. Алгоритм накопления отложений холестерина на стенке стента

Алгоритм накопления отложений холестерина на стенке стента можно описать следующим образом. Первым шагом является задание индивидуальных парамет-



ров — свойств желчи (жидкости Каро) и концентрации холестерина. На втором шаге выполняется расчет стационарного течения, определяется поле концентраций в стенке, в том числе концентрации холестерина вблизи стенки пластикового стента. На третьем шаге рассчитываются изменения радиуса стента из-за отложения холестерина согласно уравнению, которое выполняется на больших временных масштабах (более суток):

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\beta \left( \frac{c}{c^*} - 1 \right) \quad \text{при } c > c^*, \quad (12)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = 0 \quad \text{при } c \leq c^*, \quad (13)$$

где  $R$  — радиус стента,  $\beta$  — коэффициент, описывающий скорость уменьшения радиуса,  $c^*$  — критическая пристеночная концентрация холестерина, при достижении которой начинается процесс отложения холестерина (рис. 2).

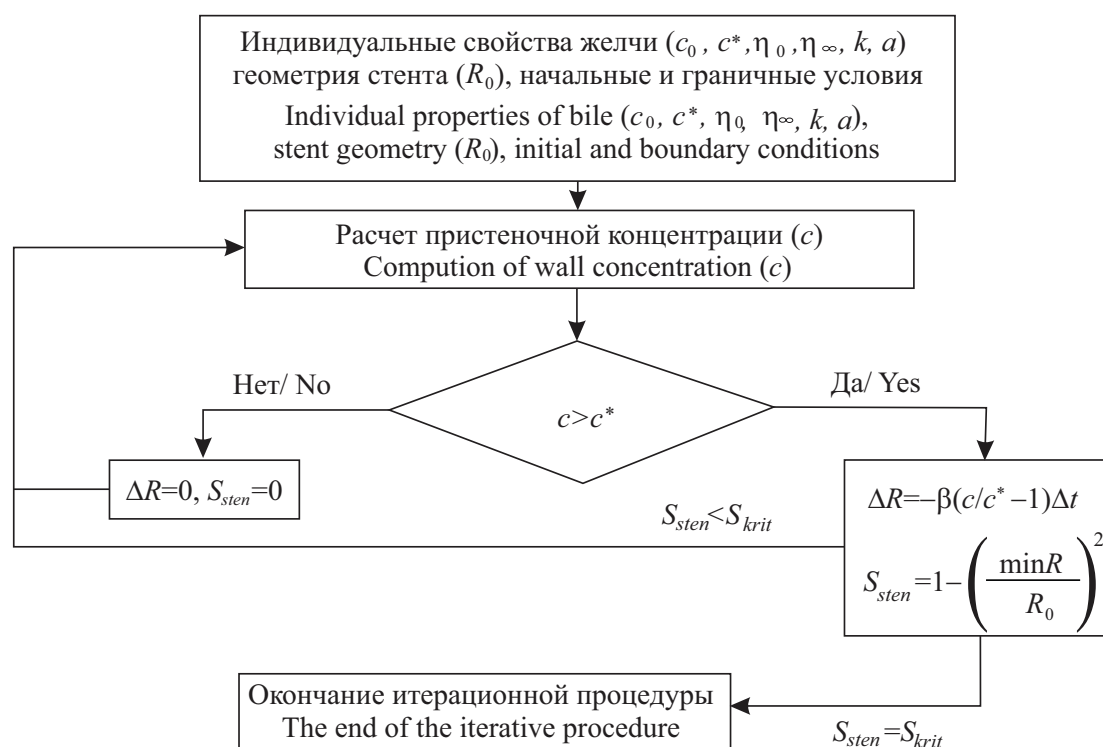


Рис. 2. Алгоритм расчета по моделированию накопления отложений холестерина  
Fig. 2. The computation algorithm for modeling the accumulation of cholesterol deposits

В соответствии с уравнениями (12)–(13) выполняется смещение граничных узлов расчетной сетки и возврат ко второму шагу алгоритма, если текущая площадь поперечного сечения меньше критической степени стеноза. При достижении критической степени стеноза  $S_{krit}$  определяется финальное значение  $S_{sten}$  (степень окклюзии стента) в сечении с минимальным радиусом стента. В данном случае критическим являлось значение, когда 75% поперечного сечения было закупорено.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ

### 2.1. Распределение доли холестерина

В данном разделе рассмотрен пример численной реализации модели для конкретного пациента. Радиус сечения стента без отложений холестерина составляет



3.3 мм (10  $Fr$ ). Экспериментальные исследования показывают, что концентрация холестерина в желчных протоках составляет от 2.4 до 5.9 г/л у пациентов с желче-каменной болезнью, от 1.1 до 5 г/л у здоровых людей [12]. В расчетах использованы параметры  $c_0 = 5.5$  г/л,  $c^* = 5$  г/л,  $\eta_0 = 62.5$  мПа·с,  $\eta_\infty = 4.5$  мПа·с,  $a = 0.033$  1/с,  $k = 0.56$ . У пациента с представленными выше индивидуальными параметрами подобная степень стеноза развивалась после 4 месяцев наблюдений (120 дней) (рис. 3).

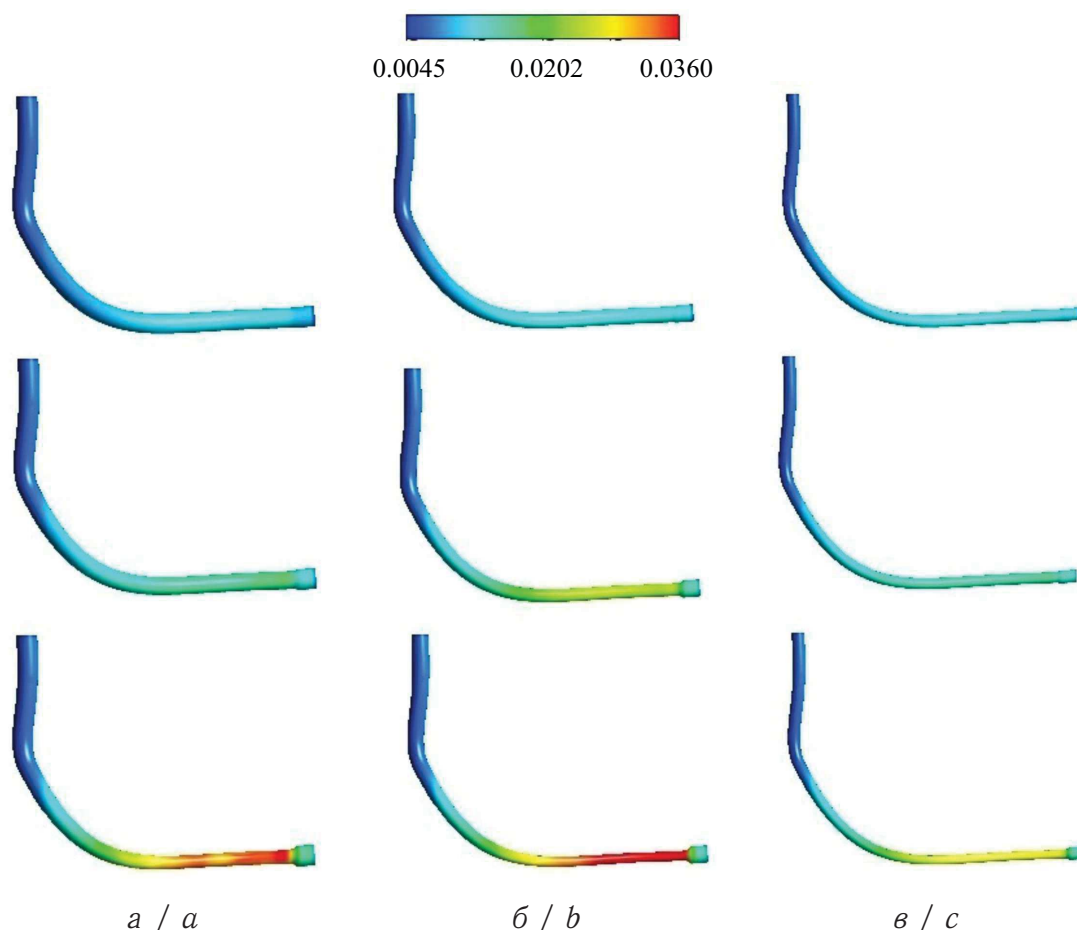


Рис. 3. Распределение концентрации холестерина на стенке стента, кг/л ( $c_0 = 5.5$  г/л,  $\eta_0 = 62.5$  мПа·с,  $\eta_\infty = 4.5$  мПа·с,  $a = 0.033$  1/с,  $k = 0.56$ ): а —  $R_0 = 3.3$  мм,  $t = 40, 80, 120$  дней; б —  $R_0 = 2.7$  мм,  $t = 40, 80, 100$  дней, в —  $R_0 = 2$  мм,  $t = 20, 40, 60$  дней (цвет online)

Fig. 3. The distribution of cholesterol concentration on the stent wall, kg/l ( $c_0 = 5.5$  g / l,  $\eta_0 = 62.5$  mPa·sec,  $\eta_\infty = 4.5$  mPa·sec,  $a = 0.033$  1/sec,  $k = 0.56$ ): а —  $R_0 = 3.3$  mm,  $t = 40, 80, 120$  days; б —  $R_0 = 2.7$  mm,  $t = 40, 80, 100$  days, с —  $R_0 = 2$  mm,  $t = 20, 40, 60$  days (color online)

Таким образом, один шаг алгоритма соответствует реальному времени 4 дня. Исходя из этих данных, выполнена оценка параметра  $\beta$ , значение которого составило  $5 \cdot 10^{-3}$  мм/день. В стенте меньшего радиуса концентрация холестерина на стенке возрастает быстрее, причем зависимость от времени носит экспоненциальный характер (рис. 4). На 60-й день в стенте с наименьшим радиусом (2 мм) наблюдаются пристеночные концентрации холестерина, равные 29.2 г/л, в стенте радиусом 2.7 мм — 18.1 г/л, радиусом 3.3 мм — 14.7 г/л, в стенте радиусом 4 мм — 12.1 г/л.

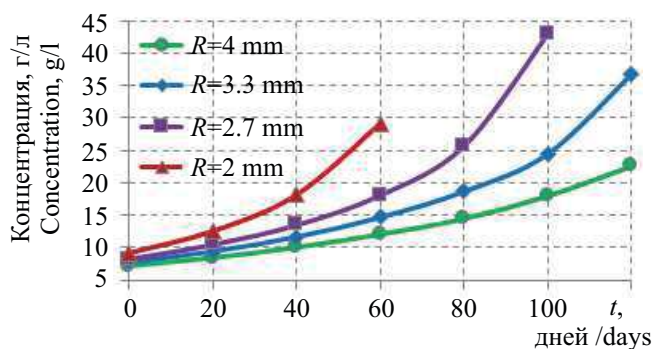


Рис. 4. Максимальная пристеночная концентрация в зависимости от времени и радиуса стента ( $c_0 = 5.5$  г/л,  $\eta_0 = 62.5$  мПа·с,  $\eta_\infty = 4.5$  мПа·с,  $a = 0.033$  1/с,  $k = 0.56$ )

Fig. 4. Maximum parietal concentration depending on the time and radius of the stent ( $c_0 = 5.5$  g/l,  $\eta_0 = 62.5$  mPa·sec,  $\eta_\infty = 4.5$  mPa·sec,  $a = 0.033$  1/sec,  $k = 0.56$ )

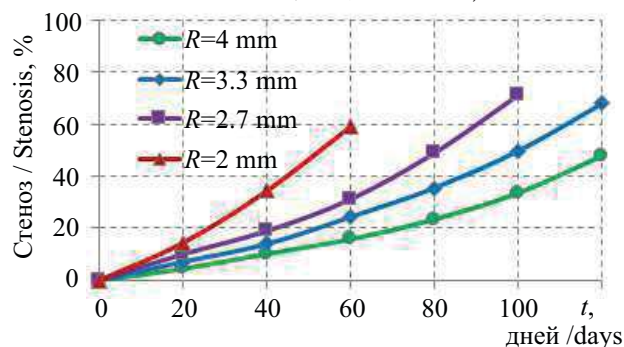


Рис. 5. Окклюзия стента в зависимости от времени ( $c_0 = 5.5$  г/л,  $\eta_0 = 62.5$  мПа·с,  $\eta_\infty = 4.5$  мПа·с,  $a = 0.033$  1/с,  $k = 0.56$ )

Fig. 5. Stent occlusion versus time ( $c_0 = 5.5$  g/l,  $\eta_0 = 62.5$  mPa·sec,  $\eta_\infty = 4.5$  mPa·sec,  $a = 0.033$  1/sec,  $k = 0.56$ )

## 2.2. Изменение просвета

Результаты показывают, что в стенте радиусом 4 мм на 40-й день обнаруживается сужение, площадь которого меньше на 10.2% от начального, на 80-й день стеноз составляет 23.4%, на 120-й день — 47.8% (рис. 5). В стенте радиусом 3.3 мм на 40-й день обнаруживается сужение, площадь которого меньше на 14.0% от начального, на 80-й день стеноз составляет 35.5%, на 120-й день — 67.9%. Стеноз в стенте радиусом 2.7 мм на 40-й день составляет 19.0%, на 80-й день — 48.9%, на 100-й день — 71.2%. В стенте с наименьшим радиусом (2 мм) уже на 60-й день обнаруживается снижение площади просвета на 59.0%. Результаты расчетов показывают, что при прочих равных параметрах стент с меньшим радиусом закупоривается быстрее. Результаты согласуются с экспериментальными данными [12], которые показывают, что стент радиусом  $10 Fr$  (3.3 мм) закупоривается медленнее стента  $8 Fr$  (2.7 мм).

## 2.3. Влияние возраста, пола и реологии на время закупорки стента

В данном разделе показаны результаты исследования по оценке влияния возраста, пола, вязкости, концентрации холестерина, билирубина, кальция и радиуса стента на время закупорки. Индивидуальные параметры желчи определены из эксперимента, проведенного в работе [13]. По результатам замеров было выделено три возрастных группы, для которых определены средние значения параметров реологической модели. Результаты расчетов приведены в таблице.

Результаты численных экспериментов показали, что на время закупорки стента существенное влияние оказывают вязкость желчи, концентрация частиц и радиус стента. Влияние пола выражено в меньшей степени (в среднем у мужчин закупорка стента происходит медленнее, однако при высоких долях холестерина в старшей возрастной группе закупорка происходит быстрее у мужчин). Следует отметить, что с увеличением радиуса стента увеличивается время его закупорки. Однако для женщин старше 60 лет при радиусах стента 2.0 и 2.7 мм наблюдались практически одинаковые результаты. Таким образом, установка стентов с минимальными радиу-



Сроки окклюзии стента в зависимости от персонализированных параметров и радиуса стента

Stent occlusion terms depending on personalized parameters and stent radius

Пол Gender	Возраст, лет Age, years	Параметры модели Каро Parameters of the Carreau Model				Радиус стента, мм Stent radius, mm	Время окклюзии, мес. Occlusion time, months		
		$\eta_0$ , мПа·с	$\eta_\infty$ , мПа·с	$a$ , с <sup>-1</sup>	$k$		$c_0 \leq 3.5$ г/л	$3.5 < c_0 \leq 5.5$ г/л	$c_0 > 5.5$ г/л
Жен.	<35	21.7	2.1	0.006	0.91	2.0	3.5	3.0	2.5
						2.7	5.5	4.0	3.5
						3.3	7.0	5.0	4.0
						4.0	8.5	6.5	5.5
	36–60	42.5	1.2	0.041	0.49	2.0	2.0	2.0	1.5
						2.7	4.0	3.0	2.5
						3.3	5.0	4.0	3.0
						4.0	6.0	4.5	4.0
	>60	62.5	4.5	0.033	0.56	2.0	2.0	1.5	1.0
						2.7	2.0	1.5	1.0
						3.3	2.5	2.0	1.5
						4.0	3.0	2.5	2.0
Муж.	<35	23	1.3	0.021	0.48	2.0	4.5	4.0	3.5
						2.7	9.0	5.5	4.5
						3.3	10.0	6.5	5.5
						4.0	10.5	8.5	7.0
	36–65	36.7	1.1	0.036	0.49	2.0	2.5	2.0	1.5
						2.7	3.0	2.5	2.0
						3.3	4.0	3.5	3.0
						4.0	5.0	4.0	3.5
	>65	84.9	1.1	0.010	0.47	2.0	1.5	1.0	0.75
						2.7	2.0	1.5	1.0
						3.3	2.5	2.0	1.5
						4.0	3.0	2.5	2.0





сами не повлияет на существенное изменение скорости их закупорки. Минимальное время закупорки (0.75 мес.) наблюдается в сценарии с высоким уровнем концентрации — 5.5 г/л, маленьким радиусом стента (2 мм) и свойствами желчи, характерными для мужчины старше 65 лет. Максимальное время закупорки (10.5 мес.) наблюдалось в сценарии с наибольшим радиусом стента при начальной концентрации холестерина менее 3.5 г/л и вязкости желчи, характерной для мужчин младше 35 лет. Можно отметить, что время окклюзии возрастает с ростом концентрации при любом возрасте и свойствах желчи.

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ

Окклюзия пластиковых стентов – одно из самых частых осложнений при лечении билиарной обструкции. В данной работе предложен подход к междисциплинарному изучению этой проблемы с помощью численного моделирования. Известно, что билиарный сладж, бактерии, образования биопленок стимулируют накопление частиц на поверхности стента, что приводит к его закупорке. Однако основным компонентом билиарного сладжа является холестерин. В статье было рассмотрено влияние концентрации данного вещества на окклюзию, хотя в разработанном подходе могут учитываться и другие факторы. Полученные значения коррелируют как с лабораторными данными [7], так и клиническими результатами [12]. Процесс накопления частиц на внутренней поверхности стента похож на процесс образования атеросклеротической бляшки на стенке кровеносного сосуда. Отличие заключается в том, что при образовании осадка на стенте частицы, в отличие от липопротеинов, не проникают внутрь стента. Согласно биомеханическим моделям и гипотезам, образование бляшек может быть связано с повреждением внутренней поверхности стенки. При осаждении липопротеинов они проникают внутрь сосуда и продолжают развитие бляшки. Возможно, накопление частиц на поверхности стента может быть связано с неоднородностью и дефектами внутренней поверхности стента. Разработанная модель имеет хорошие перспективы в реализации численного алгоритма по поддержке принятия решений при установке пластикового стента, что является актуальным трендом на сегодняшний день.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье разработана модель накопления частиц на поверхности пластикового стента для прогноза срока функциональной эффективности билиарного стента. Связь между концентрацией холестерина и временем закупорки была найдена с использованием разработанной итерационной процедуры. Динамика изменения просвета стента также была смоделирована. Результаты показали, что параметры стента, вязкость желчи и начальная концентрация оказывают значительное влияние на время окклюзии. Разработанная модель имеет хорошие перспективы для реализации в виде программного продукта по поддержке принятия решений при установке пластикового стента и способна улучшить результаты данного эндобилиарного вмешательства.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10020) и гранта на развитие научной школы Пермского края «Компьютерная биомеханика и цифровые технологии в биомедицине». Автор благодарит канд. физ.-мат. наук М. Р. Камалтдинова (Федеральный научный центр медико-профилактических технологий управления рисками здоровью населения, г. Пермь) и д-ра мед. наук, проф. В. А. Самарцева (Пермский государственный медицинский университет имени академика Е. А. Вагнера) за ценные замечания при обсуждении статьи.



## Библиографический список

1. Cilla M., Pena E., Martinez M. A. Mathematical modelling of atheroma plaque formation and development in coronary arteries // *Journal of Royal Society Interface*. 2014. Vol. 11, № 90. P. 20130866. DOI: <https://doi.org/0.1098/rsif.2013.0866>
2. Yang C., Tang D., Yuan C., Kerwin W., Liu F., Canton G., Hatsukami T. S., Atluri S. Meshless generalized finite difference method and human carotid atherosclerotic plaque progression simulation using multi-year MRI patient-tracking data // *CMES*. 2008. Vol. 28, № 2. P. 95–107.
3. Wada S., Koujiya M., Karino T. Theoretical study of the effect of local flow disturbances on the concentration of low-density lipoproteins at the luminal surface of end-to-end anastomosed vessels // *Medical and Biological Engineering and Computing*. 2002. Vol. 40, iss. 5. P. 576–587. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02345458>
4. Olgac U., Kurtcuoglu V., Poulikakos V. Computational modeling of coupled blood-wall mass transport of LDL: effects of local wall shear stress // *American Journal of Physiology-Heart and Circulatory Physiology*. 2008. Vol. 294, № 2. P. 909–919. DOI: <https://doi.org/10.1152/ajpheart.01082.2007>
5. Kwak B. R., Back M., Bochaton-Piallat M. L., Caligiuri G., Daemen M. J., Davies P. F., Hoefer I. E., Holvoet P., Jo H., Krams R., Lehoux S., Monaco C., Steffens S., Virmani R., Weber C., Wentzel J. J., Evans P. C. Biomechanical factors in atherosclerosis: mechanisms and clinical implications // *European Heart Journal*. 2014. Vol. 35, № 43. P. 3013–3020. DOI: <https://doi.org/10.1093/eurheartj/ehu353>
6. Thondapu V., Bourantas C. V., Foin N., Jang I. K., Serruys P. W., Barlis P. Biomechanical stress in coronary atherosclerosis: emerging insights from computational modelling // *European Heart Journal*. 2017. Vol. 38, № 2. P. 81–92. DOI: <https://doi.org/10.1093/eurheartj/ehv689>
7. Surwase S., Balakrishnan H., Acharya S., Makharia G., Kumaraswamy G., Prasad B. L. V. Accelerated in vitro model for occlusion of biliary stents: investigating the role played by dietary fibre // *BMJ Innovations*. 2018. Vol. 4, № 1. P. 39–45. DOI: <https://doi.org/10.1136/bmjinnov-2017-000209>
8. Kuchumov A. G., Gilev V., Popov V., Samartsev V., Gavrilov V. Non-Newtonian flow of pathological bile in the biliary system: experimental investigation and CFD simulations // *Korea-Australia Rheology Journal*. 2014. Vol. 26, № 1. P. 81–90. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13367-014-0009-1>
9. Ooi R. C., Luo X. Y., Chin S. B., Johnson A. G., Bird N. C. The flow of bile in the human cystic duct // *Journal of Biomechanics*. 2004. Vol. 37, iss. 12. P. 1913–1922. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2004.02.029>
10. Scheidt H. A., Huster D., Gawrisch K. Diffusion of cholesterol and its precursors in lipid membranes studied by 1H pulsed field gradient magic angle spinning NMR // *Biophysical Journal*. 2005. Vol. 89, iss. 4. P. 2504–2512. DOI: <https://doi.org/10.1529/biophysj.105.062018>
11. Kuchumov A., Tuktamyshev V., Kamaltdinov M. Peristaltic flow of lithogenic bile in the Vater's papilla as non-Newtonian fluid in the finite-length tube: analytical and numerical results for reflux study and optimization // *Lekar a tehnika – Clinician and Technology*. 2017. Vol. 47, № 2. P. 35–42.
12. Speer A. G., Cotton P. B., MacRae K. D. Endoscopic management of malignant biliary obstruction: stents of 10 French gauge are preferable to stents of 8 French gauge // *Gastrointestinal Endoscopy*. 1988. Vol. 34, iss. 5. P. 412–417. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0016-5107\(88\)71407-8](https://doi.org/10.1016/S0016-5107(88)71407-8)
13. Кучумов А. Г., Гилев В. Г., Попов В. А., Самарцев В. А., Гаврилов В. А. Экспериментальное исследование реологии патологической желчи // *Российский журнал биомеханики*. 2011. Т. 15, № 3 (53). С. 52–60.



**Образец для цитирования:**

Кучумов А. Г. Математическое моделирование накопления частиц на поверхности пластикового билиарного стента для прогнозирования его окклюзии // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 220–231. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-220-231>

## **Mathematical Modeling of Deposits Accumulation on the Plastic Biliary Stent Surface for Predicting Its Occlusion**

**A. G. Kuchumov**

Alex G. Kuchumov, <https://orcid.org/0000-0002-0466-175X>, Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolskiy Prospect, Perm 614990, Russia, [kuchymov@inbox.ru](mailto:kuchymov@inbox.ru)

Endoprosthetics with plastic stents has been used to restore bile drainage through the percutaneous or endoscopic method since the late 1970s. The long-term results cannot be considered satisfactory due to the high incidence of jaundice recurrence which is caused by the occlusion of plastic stents with a biliary sludge (accumulation of cholesterol crystals, pigment crystals, bacteria and calcium salts). Cholesterol is considered to be the main component of biliary sludge that stimulates the reduction of the stent lumen. The average lifetime of stents is 3–6 months. Despite numerous experimental studies of the occlusion process, the optimal timing for the replacement of the biliary plastic stent has not been established. Too frequent replacement of the stent can lead to additional complications, so an individualized forecast of the stent's lifetime for a particular patient is needed. In this paper, a model of the flow of lithogenic bile as a non-Newtonian fluid is developed taking into account the transport of particles describing the behavior of cholesterol crystals that accumulate on the inner surface of the stent, stimulating a decrease in its lumen. A correlation was found between cholesterol concentration and occlusion time based on the use of a specially developed iterative procedure. The results of the numerical computations show that individual parameters (age, gender, bile viscosity, cholesterol concentration) have a significant impact on the rate of occlusion of the stent.

**Keywords:** bile, biliary stent, non-Newtonian fluid.

Received: 20.05.2019 / Accepted: 17.07.2019 / Published: 01.06.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects No. 18-29-10020) and by the Perm Region government grant for the development of the scientific school “Computer biomechanics and digital technologies in biomedicine”. Author acknowledges the input of M. R. Kamaltdinov, PhD in Physics and Mathematics (Federal Scientific Center for Medical and Preventive Health Risk Management Technologies, Perm) and Prof. V. A. Samartsev, PhD in Medicine (E. A. Wagner Perm State Medical University) and their valuable comments when discussing the work.

## **References**

1. Cilla M., Pena E., Martinez M. A. Mathematical modelling of atheroma plaque formation and development in coronary arteries. *Journal of Royal Society Interface*, 2014, vol. 11, no. 90, p. 20130866. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsif.2013.0866>
2. Yang C., Tang D., Yuan C., Kerwin W., Liu F., Canton G., Hatsukami T. S., Atluri S. Meshless generalized finite difference method and human carotid atherosclerotic plaque progression simulation using multi-year MRI patient-tracking data. *CMES*, 2008, vol. 28, no. 2, pp. 95–107.



3. Wada S., Koujiya M., Karino T. Theoretical study of the effect of local flow disturbances on the concentration of low-density lipoproteins at the luminal surface of end-to-end anastomosed vessels. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 2002, vol. 40, iss. 5, pp. 576–587. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02345458>
4. Olgac U., Kurtcuoglu V., Poulikakos V. Computational modeling of coupled blood-wall mass transport of LDL: effects of local wall shear stress. *American Journal of Physiology-Heart and Circulatory Physiology*, 2008, vol. 294, no. 2, pp. 909–919. DOI: <https://doi.org/10.1152/ajpheart.01082.2007>
5. Kwak B. R., Back M., Bochaton-Piallat M. L., Caligiuri G., Daemen M. J., Davies P. F., Hofer I. E., Holvoet P., Jo H., Krams R., Lehoux S., Monaco C., Steffens S., Virmani R., Weber C., Wentzel J. J., Evans P. C. Biomechanical factors in atherosclerosis: mechanisms and clinical implications. *European Heart Journal*, 2014, vol. 35, no. 43, pp. 3013–3020. DOI: <https://doi.org/10.1093/eurheartj/ehu353>
6. Thondapu V., Bourantas C. V., Foin N., Jang I. K., Serruys P. W., Barlis P. Biomechanical stress in coronary atherosclerosis: emerging insights from computational modelling. *European Heart Journal*, 2017, vol. 38, no. 2, pp. 81–92. DOI: <https://doi.org/10.1093/eurheartj/ehv689>
7. Surwase S., Balakrishnan H., Acharya S., Makharia G., Kumaraswamy G., Prasad B. L. V. Accelerated in vitro model for occlusion of biliary stents: investigating the role played by dietary fibre. *BMJ Innovations*, 2018, vol. 4, no. 1, pp. 39–45. DOI: <https://doi.org/10.1136/bmjinnov-2017-000209>
8. Kuchumov A. G., Gilev V., Popov V., Samartsev V., Gavrilov V. Non-Newtonian flow of pathological bile in the biliary system: experimental investigation and CFD simulations. *Korea-Australia Rheology Journal*, 2014, vol. 26, no. 1, pp. 81–90. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13367-014-0009-1>
9. Ooi R. C., Luo X. Y., Chin S. B., Johnson A. G., Bird N. C. The flow of bile in the human cystic duct. *Journal of Biomechanics*, 2004, vol. 37, iss. 12, pp. 1913–1922. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2004.02.029>
10. Scheidt H. A., Huster D., Gawrisch K. Diffusion of cholesterol and its precursors in lipid membranes studied by 1H pulsed field gradient magic angle spinning NMR. *Biophysical Journal*, 2005, vol. 89, iss. 4, pp. 2504–2512. DOI: <https://doi.org/10.1529/biophysj.105.062018>
11. Kuchumov A., Tuktamyshev V., Kamaltdinov M. Peristaltic flow of lithogenic bile in the Vater's papilla as non-Newtonian fluid in the finite-length tube: analytical and numerical results for reflux study and optimization. *Lekar a tehnika – Clinician and Technology*, 2017, vol. 47, no. 2, pp. 35–42.
12. Speer A. G., Cotton P. B., MacRae K. D. Endoscopic management of malignant biliary obstruction: stents of 10 French gauge are preferable to stents of 8 French gauge. *Gastrointestinal Endoscopy*, 1988, vol. 34, iss. 5, pp. 412–417. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0016-5107\(88\)71407-8](https://doi.org/10.1016/S0016-5107(88)71407-8)
13. Kuchumov A. G., Gilev V. G., Popov V. A., Samartsev V. A., Gavrilov V. A. Experimental investigation of the pathologic bile rheology. *Russian Journal of Biomechanics*, 2011, vol. 15, no. 3 (53), pp. 43–50.

---

**Cite this article as:**

Kuchumov A. G. Mathematical Modeling of Deposits Accumulation on the Plastic Biliary Stent Surface for Predicting Its Occlusion. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 220–231 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-220-231>

---





УДК 532.529

## Уединенные волны в газожидкостной пузырьковой смеси

**В. Ш. Шагапов, М. Н. Галимзянов, У. О. Агишева**

Шагапов Владислав Шайхулагазович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт механики имени Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Россия, 450054, г. Уфа, Проспект Октября, д. 71, shagapov@rambler.ru

Галимзянов Марат Назипович, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, Институт механики имени Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Россия, 450054, г. Уфа, Проспект Октября, д. 71, monk@anrb.ru

Агишева Ульяна Олеговна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт механики имени Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Россия, 450054, г. Уфа, Проспект Октября, д. 71, agisheva\_u@mail.ru

Нелинейные волновые процессы в двухфазной среде (пузырьковой жидкости) не теряют актуальности как объект исследования в силу широкого распространения в различных областях физики, техники, химической и нефтегазовой промышленности. В последние десятилетия скачок развития вычислительной техники расширил возможности в исследовании существенно нелинейных задач. Целью данной работы стало получение стационарного решения уравнений, описывающих движение уединенной волны в газожидкостной смеси без учета диссипативных процессов. Было рассмотрено одномерное стационарное течение жидкости с газовыми пузырьками при следующих предположениях: смесь монодисперсная, т.е. в каждом элементарном объеме все пузырьки сферические и одного радиуса; вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессе межфазного взаимодействия и, в частности, при пульсациях пузырьков. Кроме того, предполагается, что массообмен между фазами отсутствует, а температура жидкости постоянна, в отличие от температуры газа в пузырьке. Последнее всегда выполняется при не очень высоких давлениях из-за преобладающего массового содержания жидкости (что позволяет считать ее термостатом) и существенно упрощает задачу, так как отпадает необходимость рассмотрения уравнения энергии жидкости. Давление в пузырьке предполагалось однородным, что обеспечивается, если радиальная скорость стенок пузырька значительно меньше скорости звука в газе. Давление фаз и размер пузырьков были связаны условием совместного деформирования. В качестве такого условия в данном случае принималось уравнение Рэлея, соответствующее пульсациям одиночного сферического пузырька в безграничной несжимаемой жидкости. Для поведения газа в пузырьках был принят политропический закон. На основе одномерных стационарных уравнений течения жидкости с газовыми пузырьками построено решение типа «уединенная волна», частным случаем которого для слабых солитонов являются результаты, полученные на основе модели Кортевега – де Вриза для пузырьковых сред.

*Ключевые слова:* уединенная волна, солитон, пузырьковая жидкость.

Поступила в редакцию: 12.03.2019 / Принята: 08.08.2019 / Опубликовано: 01.06.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-232-240>



## ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена аналитическому описанию нелинейного движения пузырьковой среды без учета диссипативных процессов. На основе одномерных стационарных уравнений течения жидкости с газовыми пузырьками построено решение типа «уединенная волна», частным случаем которого для слабых солитонов являются результаты, полученные на основе модели Кортевега – де Вриза для пузырьковых сред.

Нелинейные волновые процессы в двухфазной среде (пузырьковой жидкости) не теряют актуальности как объект исследования в силу широкого распространения в различных областях физики, техники, химической и нефтегазовой промышленности. В [1–3] подробно описаны аналитические, численные и экспериментальные исследования динамики акустических волн в жидкости с пузырьками. В последние десятилетия скачок развития вычислительной техники расширил возможности в исследовании существенно нелинейных задач. Но численные методы требуют верификации результатов, и аналитически построенные решения классических систем уравнений подходят для этой цели.

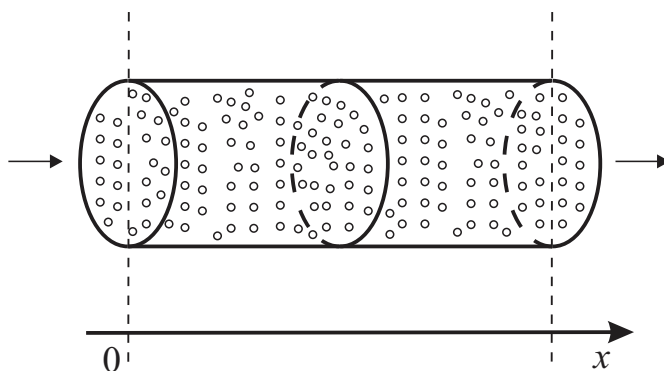
В работе [4] проведено сравнение трех различных численных моделей учета нелинейности при распространении волн в пузырьковой жидкости. Показано, что нелинейность газовых включений имеет определяющее значение, в длинноволновом приближении полулинейная гамильтонова модель является самодостаточной замкнутой моделью Кортевега – де Вриза, которая точно решается аналитическим методом обратной задачи рассеяния. В [5] проанализировано влияние вязкости и процесса теплообмена на межфазной границе на волновые процессы в пузырьковой жидкости. Построено семейство нелинейных эволюционных уравнений для описания волн давления в газожидкостной смеси. Построены точные решения полученных уравнений. В работах [6, 7] показано, что точные солитоноподобные решения эволюционных уравнений нелинейной волновой механики можно получать прямым методом возмущений на основе решения линеаризованного уравнения.

Авторами настоящей статьи был проведен ряд численных расчетов по распространению двумерных волн в пузырьковых и пенных структурах [8–11]. В [8] изучались особенности эволюции двумерных волн в жидкости, содержащей область с пузырьками газа, были установлены критерии усиления и ослабления сигнала. В [9] в двумерной постановке для случая цилиндрической симметрии численно исследован процесс формирования и распространения ударных волн в пузырьковых и пенных структурах, проведено сравнение с экспериментом. Особенности ударного и изоэнтропического воздействия на газожидкостные среды исследованы в [10] с использованием широкодиапазонного уравнения состояния воды и пара. На основе соотношений Рэнкина – Гюгонио получены параметры падающих и отраженных ударных волн в газожидкостной среде для случаев изотермического, адиабатического и ударного сжатий газовой компоненты. В [11] изучено распространение слабых возмущений в водовоздушной пузырьковой среде в условиях, когда в пузырьках помимо нерастворимого в воде газа присутствуют пары воды. Проанализировано влияние начальных параметров двухфазной смеси на эволюцию гармонических волн в пузырьковой жидкости. Данная работа является продолжением цикла работ [12, 13].

Цель настоящей работы — получение стационарного решения уравнений, описывающих движение уединенной волны в газожидкостной смеси без учета диссипативных процессов. Результаты аналитического построения существенно нелинейного солитонного решения расширят знания в области механики многофазных систем и могут быть использованы для тестирования численных моделей.

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим одномерное стационарное течение жидкости с газовыми пузырьками при следующих предположениях: смесь монодисперсная, т. е. в каждом элементарном объеме все пузырьки сферические и одного радиуса; вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессе межфазного взаимодействия и, в частности, при пульсациях пузырьков. Такое течение, например, может возникнуть при ламинарном движении пузырьковой жидкости в канале постоянного сечения, когда влияние стенок канала на внутриканальные процессы отсутствует (рисунок).



Схематическое изображение одномерного стационарного течения  
Schematic representation of a one-dimensional stationary flow

Кроме того, предполагается, что массообмен между фазами отсутствует, а температура жидкости  $T_\ell$  постоянна, в отличие от температуры газа в пузырьке. Последнее ( $T_\ell = T_0 = \text{const}$ ) всегда выполняется при не очень высоких давлениях из-за преобладающего массового содержания жидкости (что позволяет считать ее термостатом) и существенно упрощает задачу, так как отпадает необходимость рассмотрения уравнения энергии жидкости.

Расчеты [14] показывают, что даже при очень сильном сжатии пузырька ( $p_\ell/p_0 \sim 10$ ), когда в центре пузырька реализуются высокие значения температуры (газа), температура поверхности пузырька повышается незначительно ( $T_a \approx 1.1T_0$ ). Давление в пузырьке достигает при этом значений, многократно превосходящих парциальное давление насыщенных паров, соответствующее таким значениям температуры поверхности пузырька. Это обстоятельство свидетельствует в пользу допущения о несущественности межфазного массообмена.

Для рассматриваемой смеси в рамках представлений сплошной среды запишем дифференциальные уравнения сохранения массы каждой фазы, числа пузырьков и импульса всей смеси в одномерном стационарном движении:

$$\frac{d(\rho_i v)}{dx} = 0, \quad \frac{d(nv)}{dx} = 0, \quad \rho v \frac{dv}{dx} + \frac{dp_\ell}{dx} = 0, \quad (1)$$

$$\rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \quad \alpha_\ell + \alpha_g = 1, \quad \alpha_g = \frac{4}{3} \pi a^3 n, \quad \rho = \rho_\ell + \rho_g,$$

где индекс  $i = \ell$  и  $g$  относится соответственно к параметрам жидкости и газа,  $a$  – радиус пузырька.

Уравнения состояния фаз примем в виде

$$p_g = \rho_g^0 B T_g, \quad u_g = c_{vg} T_g, \quad \rho_\ell^0 = \text{const}.$$



Для удобства использования уравнения теплопроводности внутри пузырька запишем его в переменных Лагранжа:

$$\rho_g^0 c_{pg} v \frac{dT_g}{dx} = \frac{\rho_g^0}{\rho_{g0}^0 \xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda_g \frac{\rho_g^0 r^4}{\rho_{g0}^0 \xi^2} \cdot \frac{\partial T_g}{\partial \xi} \right) + v \frac{dp_g}{dt}, \quad (2)$$

где  $r$  — сферическая эйлерова координата,  $0 \leq r \leq a(x)$ ;  $\xi$  — лагранжева координата,  $0 \leq \xi \leq a_0$ . Для малых объемных содержаний газа ( $\alpha_g < 0.1$ ) и не очень сильных волн ( $p_\ell/p_0 \leq 10$ ), как показано в [14], граничное условие на поверхности пузырька можно представить в виде  $T_g = T_0 = \text{const}$ , так как обычно жидкость обладает значительно большей теплопроводностью и значительно меньшей температуропроводностью, чем газ.

Из микроуравнения неразрывности для газа внутри пузырьков в лагранжевых координатах имеем

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{\rho_{g0}^0 \xi^2}{\rho_g^0 r^2}.$$

Давление в пузырьке предполагается однородным (гомобаричность [15]), что обеспечивается, если радиальная скорость стенок пузырька значительно меньше скорости звука в газе.

Уравнение для давления, являющееся интегралом уравнения (2) при сделанных допущениях и граничных условиях, имеет вид

$$v \frac{dp_g}{dx} = -3\gamma p_g \frac{w}{a} - \frac{3(\gamma - 1)}{a} q, \quad w = v \frac{da}{dx}, \quad q = -\lambda_0 \left( \frac{\rho_g^0}{\rho_{g0}^0} \frac{\partial T_g}{\partial \xi} \right)_{a_0},$$

где  $q$  — поток тепла из пузырька в жидкость,  $w$  — радиальная скорость стенок пузырька.

Давление фаз и размер пузырьков должны быть связаны условием совместного деформирования. Таким условием в данном случае является уравнение Рэлея, соответствующее пульсациям одиночного сферического пузырька в безграничной несжимаемой жидкости. Для рассматриваемого случая оно имеет вид

$$av \frac{dw}{dx} + \frac{3}{2} w^2 + 4\nu_\ell \frac{w}{a} = \left( p_g - p_\ell - \frac{2\sigma}{a} \right) / \rho_\ell^0. \quad (3)$$

Уравнения (1) полностью интегрируются. Интегралы запишем в виде

$$\rho_\ell v = \rho_{\ell 0} v_0, \quad \rho_g v = \rho_{g0} v_0, \quad nv = n_0 v_0, \quad \rho v^2 + p_\ell = \rho_0 v_0^2 + p_0. \quad (4)$$

Здесь и в дальнейшем индекс (0) внизу относится к равновесному состоянию перед волной.

Отметим, что при умеренных давлениях  $p_\ell \sim 10^{-1} \div 10$  МПа отношение истинных плотностей фаз  $\rho_g^0/\rho_\ell^0 \ll 1$  (при  $p_\ell \sim 10^{-1}$  МПа имеем  $\rho_g^0/\rho_\ell^0 \sim 10^{-3}$ ). В этом случае массовым содержанием газа можно пренебречь по сравнению с  $\rho_\ell$  (т.е. можно положить  $\rho \approx \rho_\ell$ ). В настоящей работе речь идет о пузырьковых жидкостях, для которых выполнено условие  $\alpha_g \gg \alpha_{gk}$ , где  $\alpha_{gk} = p_0/\rho_\ell C_\ell^2$ ,  $C_\ell$  — скорость звука в жидкости. Для таких сред рассмотренные давления  $p_0 = 0.1$  МПа могут считаться умеренными. В частности, для воды с пузырьками при  $p_0 = 0.1$  МПа имеем  $\alpha_{gk} \approx 0.5 \cdot 10^{-4}$ .

Тогда систему первых интегралов (4) с учетом кинематических зависимостей (1) можно привести к виду

$$v - v_0 = \alpha_{g0} v_0 (\bar{a}^3 - 1), \quad p_\ell = p_{\ell 0} + \rho_\ell^0 \alpha_{\ell 0} \alpha_{g0} v_0^2 (1 - \bar{a}^3), \quad (\bar{a} = a/a_0). \quad (5)$$



## 2. УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ ПУЗЫРЬКОВОЙ СМЕСИ

Рассмотрим стационарные решения уравнений пузырьковой жидкости, пренебрегая диссипативными процессами из-за межфазного теплообмена и вязкости. Для поведения газа в пузырьках примем политропический закон

$$\frac{p_g}{p_{g0}} = \left( \frac{\rho_g^0}{\rho_{g0}^0} \right)^n. \quad (6)$$

Значения  $n = 1$  и  $n = \gamma$  соответствуют изотермическому и адиабатическому процессам. При  $n = 0$  имеем предельный закон для парового пузырька. При отсутствии массообмена между пузырьками и жидкостью, т. е.

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_g^0 = \frac{4}{3}\pi a_0^3 \rho_{g0}^0, \quad (7)$$

из (6) и (7) получим

$$p_g/p_{g0} = \bar{a}^{-3n}. \quad (8)$$

Тогда уравнение (3), пренебрегая капиллярными силами и с учетом (5) и (8), можно привести к виду

$$\bar{a} \frac{d}{d\bar{a}} \left( \frac{w^2}{2} \right) + \frac{3}{2} w^2 = \frac{p_0}{\rho_\ell^0} (\bar{a}^{-3n} - 1) + \alpha_{g0} \alpha_{\ell 0} v_0^2 (\bar{a}^3 - 1). \quad (9)$$

Нетривиальное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию  $w = 0$  при  $\bar{a} = 1$ , имеет вид

$$w^2 = f(\bar{a}), \quad (10)$$

$$f(\bar{a}) = \frac{2p_0}{3\rho_\ell^0} \left( \frac{n\bar{a}^{-3} - \bar{a}^{-3n}}{n-1} - 1 \right) + \frac{1}{3} \alpha_{g0} \alpha_{\ell 0} v_0^2 (\bar{a}^{3/2} - \bar{a}^{-3/2})^2.$$

Чтобы это решение имело физический смысл в окрестности  $\bar{a} = 1$ , его правая часть должна быть положительной ( $f(\bar{a}) > 0$ ). Как следует из (9) и (10), функция  $f(\bar{a})$  удовлетворяет условиям  $f(1) = 0$ ,  $f'(1) = 0$ . Следовательно, для положительности  $f'(\bar{a})$  достаточно выполнения условия  $f''(1) > 0$  [16]. Уравнение (9) с учетом (10) запишем в виде

$$\bar{a} f'(\bar{a}) + 3f(\bar{a}) = \frac{2p_0}{\rho_\ell^0} (\bar{a}^{-3n} - 1) + 2\alpha_{g0} \alpha_{\ell 0} v_0^2 (\bar{a}^3 - 1).$$

Продифференцируем это уравнение по  $\bar{a}$  и запишем полученное выражение при  $\bar{a} = 1$ . Тогда будем иметь

$$f''(1) = -\frac{6np_0}{\rho_\ell^0} + 6\alpha_{g0} \alpha_{\ell 0} v_0^2 > 0.$$

Отсюда получим условие  $v_0 > C$ ,  $C = \sqrt{\frac{np_0}{\rho_\ell^0 \alpha_{\ell 0} \alpha_{g0}}}$ . Приравняв к нулю правую часть (10), получим уравнение, связывающее скорость волны  $v_0$  с минимальным безразмерным радиусом  $\bar{a}_s$ :

$$\frac{v_0^2}{C^2} = \frac{2}{n} \left( 1 + \frac{n\bar{a}_s^{-3} - \bar{a}_s^{-3n}}{n-1} \right) / (\bar{a}_s^{3/2} - \bar{a}_s^{-3/2})^2. \quad (11)$$





Кроме того, из интеграла импульса для амплитуды уединенной волны имеем

$$\frac{\Delta p_{\ell s}}{p_0} = n \frac{v_0^2}{C^2} (1 - \bar{a}_s^3) \quad (\Delta p_{\ell s} = p_{\ell s} - p_0). \quad (12)$$

Соотношения (11) и (12) описывают зависимость скорости  $v_0$  уединенной волны от ее амплитуды в параметрической форме ( $\bar{a}_s$  — параметр). В случае слабых волн ( $\Delta p_{\ell s} \ll p_0$ ) можно получить явную зависимость, описываемую формулой Накорякова – Шрейбера [17]:

$$v_0 = C \left( 1 + \frac{n+1}{6n} \frac{\Delta p_{\ell s}}{p_0} \right).$$

С помощью выражения  $v da/dx = w$ , используя формулы (5) и (10) соответственно для  $v$  и  $w$ , связь между безразмерным радиусом и текущей координатой имеет вид

$$\int_{\bar{a}_s}^{\bar{a}} \frac{v d\bar{a}}{\sqrt{f(\bar{a})}} = \pm \frac{x}{a_0}. \quad (13)$$

При записи (13) полагалось, что минимальное значение радиуса достигается в начале координат ( $x = 0$ ). Таким образом, выражения (5), (10) и (13) задают решение в виде уединенной волны или солитона. В работах [18, 19] рассмотрен частный случай, а именно получено лишь одно решение в виде уединенной волны. В настоящей же работе получено одно общее волновое уравнение, которое, в частности, допускает известные решения в виде уединенной волны, когда сжимаемость несущей жидкости незначительна.

Соотношения (5), (10) и (13) задают солитонное решение в параметрической форме. В случае слабых солитонов ( $\Delta p_{\ell s} \ll p_0$ ) из (5), (8), (10) и (13) следуют зависимости

$$\begin{aligned} p_{\ell} &= p_{\ell 0} + \Delta p_{\ell s} \operatorname{sech}^2(2x/L), \quad p_g = p_{\ell}, \quad \bar{a} = 1 + \Delta a_s \operatorname{sech}^2(2x/L)/a_0, \\ u &= v_0 - v = \alpha_{g0} C(1 - \bar{a}), \quad f(\bar{a}) = (n+1) \frac{\Delta p_{\ell s}}{\rho_{\ell}^0} (\bar{a} - 1)^2 \operatorname{th}^2(2x/L)/a_0^2, \\ &\left( L = 4a_0 C \sqrt{\rho_{\ell}^0 / (n+1) \Delta p_{\ell s}} \right), \end{aligned}$$

совпадающие с решением, полученным на основе модели Кортевега – де Вриза для пузырьковых сред [17].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе аналитически построена система соотношений, задающих в параметрической форме солитонное решение в газожидкостной смеси без учета диссипативных процессов. Записано нетривиальное решение уравнения Рэлея как условия совместного деформирования фаз. В случае слабых возмущений данная система сводится к результатам, получаемым на основе модели Кортевега – де Вриза.

**Благодарности.** Работа поддержана средствами государственного бюджета по госзаданию на 2019–2023 годы (проект № 0246-2019-0052).

## Библиографический список

1. Нигматуллин Р. И. Динамика многофазных сред : в 2 т. М. : Наука, 1987. Т. 1, 360 с. ; Т. 2, 464 с.



2. Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е. Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск : Наука, 1984. 301 с.
3. Кедринский В. К. Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2000. 435 с.
4. Ким Д. Ч. Физическая природа акустических солитонов в жидкости с распределенными пузырьками газа // Докл. АН. 2008. Т. 418, № 5. С. 619–623.
5. Кудряшов Н. А., Синельщиков Д. И. Нелинейные волны в жидкости с пузырьками газа при учете вязкости и теплообмена // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 1. С. 108–127. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462810010114>
6. Землянухин А. И., Бочкарев А. В. Новые точные решения обобщенного уравнения Конно – Камеямы – Сануки // Вест. СГТУ. 2015. Т. 2, вып. 1. С. 5–9.
7. Землянухин А. И., Бочкарев А. В. Точные уединенно-волновые решения уравнений Бюргерса – Хаксли и Бредли – Харпера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 62–70. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-1-62-70>
8. Галимзянов М. Н. Распространение волн давления в пузырьковых зонах конечных размеров // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 27–35. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2010-10-4-27-35>
9. Агишева У. О. Воздействие ударных волн на пузырьковые и пенные структуры в двумерных осесимметричных объемах // Вестн. Башкир. ун-та. 2013. Т. 18. № 3. С. 640–645.
10. Агишева У. О., Болотнова Р. Х., Бузина В. А., Галимзянов М. Н. Параметрический анализ режимов ударно-волнового воздействия на газожидкостные среды // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 2. С. 15–28. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462813020038>
11. Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Вдовенко И. И., Хабеев Н. С. Особенности распространения звука в теплой воде с воздушными пузырьками // ИФЖ. 2018. Т. 91, № 4. С. 912–921. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-018-1809-9>
12. Галимзянов М. Н., Шагапов В. Ш. Аналитические исследования акустики суспензий // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 1. С. 27–35. DOI: <https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.004>
13. Galimzyanov M. N., Agisheva U. O. Wave equation for bubble liquid in Lagrangian variables // Lobachevskii Journal Mathematics. 2019. Vol. 40, № 11. P. 1922–1928. DOI: <https://doi.org/10.1134/S199508021911009X>
14. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М. : Наука, 1978. 306 с.
15. Нигматулин Р. И. Мелкомасштабные течения и поверхностные эффекты в гидродинамике многофазных сред // ПММ. 1971. Т. 35, № 3. С. 451–465.
16. Гончаров В. В., Наугольных К. А., Рыбах С. А. Стационарные возмущения в жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ. 1976. № 6. С. 90–96.
17. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р. Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск : Ин-т теплофизики, 1983. 237 с.
18. Богуславский Ю. Я., Григорьев С. Б. О распространении волн произвольной амплитуды в газожидкостной смеси // Акустический журнал. 1977. Т. 23. № 4. С. 636–639.
19. Ляпидевский В. Ю., Плаксин С. И. Структура ударных волн в газожидкостной среде с нелинейным уравнением состояния // Динамика сплошной среды : сб. науч. тр. Новосибирск : Ин-т гидродинамики, 1983. Вып. 62. С. 75–92.

---

**Образец для цитирования:** Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Агишева У. О. Уединенные волны в газожидкостной пузырьковой смеси // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 232–240. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-232-240>

---



## Single Waves in a Gas-Liquid Bubble Mixture

V. Sh. Shagapov, M. N. Galimzyanov, U. O. Agisheva

Vladislav Sh. Shagapov, <https://orcid.org/0000-0002-3650-971X>, Mavlyutov Institute of Mechanics, 71 Prospekt Oktyabrya, Ufa 450054, Russia, shagapov@rambler.ru

Marat N. Galimzyanov, <https://orcid.org/0000-0001-6548-5174>, Mavlyutov Institute of Mechanics, 71 Prospekt Oktyabrya, Ufa 450054, Russia, monk@anrb.ru

Uliana O. Agisheva, <https://orcid.org/0000-0002-7470-7303>, Mavlyutov Institute of Mechanics, 71 Prospekt Oktyabrya, Ufa 450054, Russia, agisheva\_u@mail.ru

Nonlinear wave processes in a two-phase medium (bubbly liquid) do not lose their relevance as an object of study due to their wide use in various fields of physics, engineering, chemical and petroleum industries. Last decades the jump in the development of computing has expanded the possibilities for the study of significantly nonlinear problems. The aim of this work was to obtain a stationary solution of equations describing the motion of a solitary wave in a gas-liquid mixture without taking into account dissipative processes. A one-dimensional stationary flow of a liquid with gas bubbles was considered under the following assumptions: the mixture is monodisperse, i.e. in each elemental volume all bubbles are spherical and of the same radius; viscosity and thermal conductivity are considerable only in the process of interfacial interaction and during bubble pulsations. Moreover, it is assumed that there is no mass transfer between the phases, and the liquid temperature is constant unlike the gas temperature in a bubble. This is always fulfilled under not very high pressures due to the bigger mass content of the liquid (therefore it can be considered as a thermostat). It greatly simplifies the task since there is no need to consider the equation of the energy in the liquid. The pressure in the bubble was assumed to be uniform. It is ensured if the radial velocity of the bubble walls is significantly less than the speed of sound in the gas. Phase pressure and bubble size were bound by the condition of combined deformation. The Rayleigh equation corresponding to the pulsations of a single spherical bubble in an infinite incompressible fluid was taken as the condition in this case. Properties of the gas in bubbles were described by the polytropic law. Based on one-dimensional stationary equations of fluid flow with gas bubbles, a solution of the “solitary wave” type is constructed. This solution in a special case of weak solitons is equal to the results taken on the basis of the Korteweg–de Vries equation for bubble media.

**Keywords:** solitary wave, soliton, bubbly liquid.

Received: 12.03.2019 / Accepted: 08.08.2019 / Published: 01.06.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

**Acknowledgements:** This work was supported by the government budget for the state task for 2019–2023 years (project No. 0246-2019-0052).

### References

1. Nigmatulin R. I. *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media: in 2 vols.]. Moscow, Nauka, 1987. Vol. 1, 360 p.; vol. 2, 464 p. (in Russian).
2. Kutateladze S. S., Nakoriakov V. E. *Teplomassoobmen i volny v gazozhidkostnykh sistemakh* [Heat and mass transfer and waves in gas-liquid systems]. Novosibirsk, Nauka, 1984. 301 p. (in Russian).
3. Kedrinskii V. K. *Gidrodinamika vzryva: eksperiment i modeli* [Explosion hydrodynamics: experiment and models]. Novosibirsk, Publishing House SB RAS, 2000. 435 p. (in Russian).



4. Kim D. Ch. Physical nature of acoustical solitons in liquid with distributed gas bubbles. *Doklady Physics*, 2008, vol. 53, iss. 2, pp. 66–70. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11446-008-2004-9>
5. Kudriashov N. A., Sinelshchikov D. I. Nonlinear waves in liquids with gas bubbles with account of viscosity and heat transfer. *Fluid Dynamics*, 2010, vol. 45, iss. 1, pp. 96–112. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462810010114>
6. Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V. New Exact Solutions to the Generalized Konno – Kameyama – Sanuki Equation. *Vestnik Saratov State Technical University*, 2015, vol. 2, iss. 1, pp. 5–9 (in Russian).
7. Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V. Exact Solitary-wave Solutions of the Burgers – Huxley and Bradley – Harper Equations. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 62–70 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-1-62-70>
8. Galimzyanov M. N. Propagation of Pressure Waves in Finite-Size Bubbles Zones. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol. 10, iss. 4, pp. 27–35 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2010-10-4-27-35>
9. Agisheva U. O. Shock wave impact on bubble and foam structures in two-dimensional axisymmetric volumes. *Vestnik Bashkirskogo Universiteta*, 2013, vol. 18, no. 3, pp. 640–645 (in Russian).
10. Agisheva U. O., Bolotnova R. Kh., Buzina V. A., Galimzyanov M. N. Parametric analysis of the regimes of shock-wave action on gas-liquid media. *Fluid Dynamics*, 2013, vol. 48, iss. 2, pp. 151–162. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462813020038>
11. Shagapov V. S., Galimzyanov M. N., Vdovenko I. I., Khabeev N. S. Characteristic Features of Sound Propagation in a Warm Bubble-Laden Water. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2018, vol. 91, no. 4, pp. 854–863. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-018-1809-9>
12. Galimzyanov M. N., Shagapov V. Sh. Analytical studies of suspension acoustics. *Multiphase Systems*, 2019, vol. 14, no. 1, pp. 27–35 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.004>
13. Galimzyanov M. N., Agisheva U. O. Wave equation for bubble liquid in Lagrangian variables. *Lobachevskii Journal Mathematics*, 2019, vol. 40, no. 11, pp. 1922–1928. DOI: <https://doi.org/10.1134/S199508021911009X>
14. Nigmatulin R. I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* [Fundamentals of Heterogeneous Media Mechanics]. Moscow, Nauka, 1978. 306 p. (in Russian).
15. Nigmatulin R. I. Small-scale flows and surface effects in the hydrodynamics of multiphase media. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1971, vol. 35, iss. 3, pp. 409–423.
16. Goncharov V. V., Naugol'nykh K. A., Rybakh S. A. Steady-state perturbations in a liquid containing gas bubbles. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1976, vol. 17, iss. 6, pp. 824–829. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00858105>
17. Nakoriakov V. E., Pokusaev B. G., Shreiber I. R. *Rasprostraneniye voln v gazo- i paro-zhidkostnykh sredakh* [Wave propagation in gas and vapor-liquid environments]. Novosibirsk, Institut teplofiziki, 1983. 237 p. (in Russian).
18. Boguslavskii Yu. Ya., Grigor'ev S. B. On arbitrary amplitude sound propagation in gas-liquid mixture. *Akusticheskij Zhurnal*, 1977, vol. 23, iss. 4, pp. 636–639 (in Russian).
19. Lyapidevskiy V. Yu., Plaksin S. I. The structure of shock waves in a gas-liquid medium with nonlinear state equation. *Dinamika sploshnoi sredy* [Continuous Media Dynamics]. Novosibirsk, Institut gidrodinamiki, 1983, iss. 62, pp. 75–92 (in Russian).

---

**Cite this article as:**

Shagapov V. Sh., Galimzyanov M. N., Agisheva U. O. Single Waves in a Gas-Liquid Bubble Mixture. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 232–240 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-232-240>

---





# ИНФОРМАТИКА

УДК 519.688:519.876.5

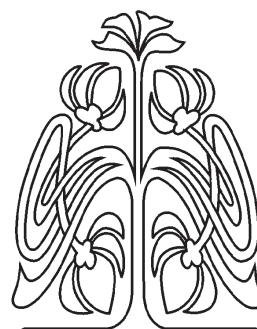
## Исследование выживаемости модельной популяции в зависимости от стратегии энергообмена между организмами

Е. Е. Иванко, С. М. Червинский

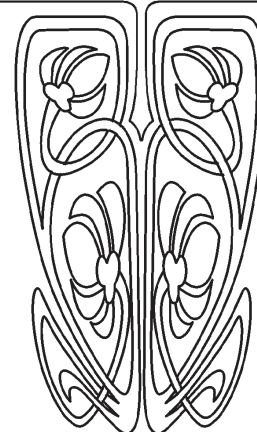
Иванко Евгений Евгеньевич, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией анализа сложных систем, отдел вычислительных систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН, Россия, 620990, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, д. 16; ведущий научный сотрудник, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, д. 19, [evgeny.ivanko@gmail.com](mailto:evgeny.ivanko@gmail.com)

Червинский Сергей Миронович, кандидат технических наук, научный сотрудник лаборатории анализа сложных систем, отдел вычислительных систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН, Россия, 620990, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, д. 16, [serge.chervinsky@gmail.com](mailto:serge.chervinsky@gmail.com)

В работе исследуется влияние стратегии энергообмена между организмами популяции на выживаемость данной популяции в постепенно изменяющейся внешней среде. На первом этапе вычислительных экспериментов определяется «пограничная» область в пространстве двух параметров (скорости мутации и скорости подачи энергии в систему), внутри которой выживаемость популяций с нулевым энергообменом лежит в интервале от 5 до 95% (т.е. выявляются условия эксперимента, лежащие между условиями, характерными для вероятного вымирания, и условиями, обеспечивающими уверенное процветание популяции). На втором этапе на основе случайной выборки параметров эксперимента из пограничной области строится зависимость выживаемости модельных популяций от доли энергии, передаваемой при взаимодействии от организма с большей энергией к организму с меньшей (уровня «альтруистичности»). Проведенные эксперименты демонстрируют: 1) положительное влияние альтруистического энергообмена (организм с большей энергией выступает донором) на выживаемость популяции и 2) отсутствие существенного влияния на выживаемость



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ







популяции пропорции, в которой делится энергия между родительским и новорожденным организмом. Полученные результаты могут представлять интерес при построении искусственных популяций, например, при проектировании роев медицинских нанороботов или при разработке эволюционных метаэвристических алгоритмов для решения разнообразных оптимизационных задач.

**Ключевые слова:** альтруизм, энергообмен, популяция, выживание.

Поступила в редакцию: 16.05.2019 / Принята: 08.12.2019 / Опубликовано: 01.06.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-241-256>

## ВВЕДЕНИЕ

Системы, состоящие из взаимодействующих по относительно простым законам элементов, могут демонстрировать сложное слабо предсказуемое поведение (см., например, аттрактор Лоренца [1], модель песчаной кучи [2], логистическое отображение [3]).

Ограниченная эффективность математических моделей при изучении сложных систем компенсируется возможностью непосредственного численного моделирования (например, RePast [4], NetLogo [5], MASON [6], Golly [7], PyCX [8]). Подобные экспериментальные исследования служат основой как для развития теоретического понимания процессов зарождения и эволюции сложности [9, 10], так и для множества актуальных приложений (например, управление роями роботов [11], изучение механизмов возбуждения нейронов [12], построение моделей эпидемий и лесных пожаров [13], исследование синхронизации множества связанных осцилляторов [14]). Нередко сложную систему делают именно законы *взаимодействия* (даже очень простые) между элементами этой системы (см., например, клеточные автоматы [15], chip-firing games [16], voter model [17]). При этом математическую модель, позволяющую удовлетворительно теоретически предсказывать поведение такой системы как единого целого, как правило, не удается построить на основе моделей поведения элементов системы.

В настоящей работе мы экспериментально изучаем влияние стратегии энергетического взаимодействия между элементами модельной популяции на выживание этой популяции в условиях умеренно изменяющейся внешней среды. Исследованию влияния энергообмена на жизнеспособность популяций посвящено относительно мало работ, в основном они сосредоточены на: 1) изучении влияния вклада особей в «общественное благо» (public good) на функционирование всей популяции [18–20] либо 2) изучении различных ролей элементов популяции в зависимости от их геометрического положения в модельных колониях микроорганизмов (например, поверхность/внутренность) [21–23]. Предыдущая работа Е. Е. Иванко [24] была посвящена исследованию влияния двух диаметрально противоположных стратегий энергообмена между организмами («альтруистической» и «эгоистической») на выживаемость минималистичной модели популяции в условиях катастрофических изменений внешней среды. Отметим, что в работах, связанных с исследованием альтруизма, обыкновенно рассматривается не конструктивное использование данного феномена, а механизмы его *возникновения* [25–30].

По сравнению с [24], в данной статье: 1) направление и сила энергообмена определяются численным параметром эксперимента, принимающим 7 значений от



выраженно-альтруистического до нейтрального и далее до выраженно-эгоистического; 2) существенно расширена модель популяции, в частности, добавлены функции роста и естественного умирания организмов; 3) изменения окружающей среды выражены умеренно (имеют прототипом реальные изменения средней температуры Земли), катастрофы отсутствуют.

Помимо чисто теоретического интереса, полученные результаты могут послужить при проектировании автономных роев роботов, где конструктивное использование энергообмена между элементами роя позволит эффективнее противостоять неблагоприятной внешней среде. Одним из примеров такого рода может служить рой медицинских нанороботов, существующих автономно в организме пациента и решающих задачи комплексной диагностики или борьбы со сложными заболеваниями (см., например, [31]).

## 1. МОДЕЛЬ

В данном разделе приводится концептуальное описание использовавшейся в экспериментах модели. Строгая формализация рассматривается в следующем разделе в ходе изложения алгоритма эксперимента. Моделируемая популяция состоит из «организмов», находящихся во «внешней среде», характеризующейся единственным изменяющимся во времени параметром — температурой (рассчитывается на основе исторических значений средней годовой температуры поверхности Земли за 168 лет [32]). Каждый организм популяции: 1) обладает неизменным геномом и меняющейся в течение жизни энергией (скалярные величины); 2) способен к накоплению энергии (рост), порождению новых организмов (размножение) и обмену энергией с другими организмами (взаимодействие); 3) подвержен старению и смерти. Предполагается, что в силу ограниченности ресурсов среды размер популяции ограничен сверху.

Близость величины генома к значению текущей температуры окружающей среды влияет на две важные характеристики организма: 1) «приспособленность», выражающаяся в успешности потребления ресурсов среды и соответствующей скорости роста энергии; 2) «плодовитость» — вероятность порождения нового организма при достижении пубертатного уровня энергии. Геном потомка наследуется от родителя с небольшими мутациями, а изначальная энергия новорожденного вычитается из энергии родителя. Помимо описанных «индивидуальных» событий — рост, размножение, умирание, — в популяции могут происходить взаимодействия между двумя организмами, характеризующиеся обменом энергией. В зависимости от параметра эксперимента при встрече организм с большим значением энергии может либо отдавать часть своей энергии организму с меньшим значением («альтруизм»), либо забирать («эгоизм»). В результате такого энергообмена уровень энергии одного из организмов может опуститься ниже порога жизнеспособности, что влечет гибель организма.

Объем передаваемой при взаимодействии энергии (включая знак, определяющий направление передачи) является параметром, влияние которого на эффективность выживания популяции в изменяющейся внешней среде выступает основным предметом нашего исследования. Для решения данной задачи проводится масштабный вычислительный эксперимент, в котором жизненный цикл модельной популяции повторяется при различных значениях параметров, определяющих (помимо силы и направления энергообмена) скорость роста организма, уровень мутации при размножении, а также начальный объем энергии у новорожденного. В следующем разделе формально описывается модель популяции и рассматривается алгоритм проведенного вычислительного эксперимента.



## 2. АЛГОРИТМ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА ПОПУЛЯЦИИ

Пусть  $T^0: \overline{1, 168} \rightarrow \mathbb{R}$  – массив значений средней температуры поверхности Земли с 1850 по 2017 г. (см. [32]). Сдвинем начало массива к нулю: рассмотрим  $T'$  такой, что  $T'[i] := T^0[i] - T^0[1]$ . Построим инвертированный массив со сдвинутым вновь к нулю стартом:  $T''[i] := -T'[i]$ . Пусть  $T_1 = T'$  и далее для всякого  $j \in \overline{2, 60}$   $T_j: T_j[i] = \tilde{T}[i] + T_{j-1}[168]$ , где массив  $\tilde{T}$  равномерно выбран из  $\{T', T''\}$ . Составим массив  $T$ , начиная с пустого и последовательно конкатенируя справа массивы  $T_j$  для  $j \in \overline{1, 60}$ . Нормализуя  $T$  для удобства в интервал  $[0, 1000]$

$$t[i] = \frac{1000 \cdot (T[i] - \min(T))}{(\max(T) - \min(T))}, \quad (1)$$

получим входные данные  $t: \overline{1, 168 \cdot 60} \rightarrow [0, 1000]$ .

**Алгоритм**  $\text{Life}(t, \alpha, k, \beta, E) \rightarrow \{True, False\}$  *Модель жизненного цикла популяции*

##### *Входные данные*

I. Функция  $t$  (см. (1));

##### *Входные параметры*

- II.  $\alpha$  — коэффициент, определяющий направление и интенсивность энергообмена между организмами при взаимодействии (см. уравнения (2), (3));
- III.  $k$  — коэффициент, определяющий скорость роста организма (см. уравнение (5));
- IV.  $\beta$  — коэффициент, определяющий процент мутаций, отличающих потомка от родителя (см. шаг XIV.3.в);
- V.  $E$  — величина энергии каждого «новорожденного» организма (см. шаг XIV.3.в), выраженная в долях от *puberty* (см. шаг IX);

##### *Результат работы алгоритма*

- VI. Для каждого набора входных данных и входных параметров  $(\alpha, k, \beta, E)$  алгоритм возвращает значение *True* или *False*;

##### *Константы и обозначения*

- VII.  $N = 10$ , начальный размер каждой из исследуемых популяций;
- VIII.  $\text{max\_pop\_size} = 100$ , искусственно установленный максимальный размер популяции (считаем, что среда не может прокормить большее число особей);
- IX.  $\text{puberty} = 2000$ , минимальный уровень энергии организма, при котором становится потенциально возможным его воспроизведение (далее в некоторых формулах для удобства записи вместо *puberty* будем использовать краткое обозначение *ppb*);
- X.  $\text{ipy} = 0.1 \cdot n(n-1)/2$ , где  $n$  — текущий размер популяции, есть количество событий энергообмена (пропорциональное числу различных неупорядоченных пар в популяции, см. XIV.1), происходящих между организмами популяции в течение года (годом считаем единицу дискретного жизненного цикла популяции, в течение которой температура поверхности остается неизменной (см. I));
- XI.  $\text{ad} = 0.001$ , вероятность «случайной» смерти в течение одного года (7);
- XII.  $\text{bd} = 5$ , параметр, определяющий скорость «старения» в соответствии с (7) так, чтобы к возрасту в 100 лет вероятность смерти достигла 1;



### ##### Инициализация

- XIII. Создается популяция  $Pop = \{org_1, \dots, org_N\}$ ; при создании для каждого организма  $org \in Pop$  случайно равномерно выбираются: энергия  $e(org) \in [1, ppb]$ , геном  $g(org) \in [0, 1000]$  и возраст  $a(org) \in \overline{0, 99}$ ;

### ##### Жизненный цикл популяции

- XIV. Для каждого года  $y$ , последовательно принимающего значения от 1 до  $168 \cdot 60 = 10080$ , выполним следующие действия:

#### // Моделирование взаимодействия организмов

- 1) выберем наудачу (с возможным повторением)  $ipy$  неупорядоченных пар организмов из множества  $Pop^2$  так, чтобы внутри каждой пары организмы не совпадали между собой; каждую выбранную пару упорядочим в виде  $(org_1, org_2)$  так, чтобы  $e(org_1) \geq e(org_2)$ ; определим направление и интенсивность энергообмена в зависимости от параметра  $\alpha$ :

$$\text{при } \alpha \geq 0 \quad \begin{cases} e(org_1) += |\alpha| \cdot e(org_2), \\ e(org_2) -= |\alpha| \cdot e(org_2), \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{при } \alpha < 0 \quad \begin{cases} e(org_1) -= |\alpha| \cdot e(org_1), \\ e(org_2) += |\alpha| \cdot e(org_1); \end{cases} \quad (3)$$

- 2) все организмы, чья энергия в процессе энергообмена становится меньше энергии новорожденного  $e(org) < E \cdot ppb$ , считаются погибшими (см. также шаг XIV.3.г);

#### // Моделирование индивидуальных организмов

- 3) для всякого  $org \in Pop$ :
- рассчитаем коэффициент «генетической приспособленности» организма к текущей температуре окружающей среды:

$$\Delta = 1 - \frac{|t(y) - g(org)|}{\max\{\max_{o \in Pop}\{g(o)\}, t(y)\} - \min\{\min_{o \in Pop}\{g(o)\}, t(y)\}}; \quad (4)$$

- рост* — увеличим энергию организма в зависимости от его «приспособленности» (соответствия между геномом и температурой окружающей среды):

$$\forall org \in Pop \quad e(org) += k \cdot ppb \cdot \Delta; \quad (5)$$

- размножение* — (этот шаг пропускается, если достигнут максимальный размер популяции  $|Pop| \geq max\_pop\_size$ ) всякий  $org \in Pop$  с вероятностью  $p_{gen}$  порождает новый организм  $org'$ , где

$$p_{gen} = \Delta \cdot \begin{cases} 0, & e(org) < ppb, \\ \frac{1}{2} + \frac{e(org)}{4ppb}, & ppb \leq e(org) \leq 2ppb, \\ 1, & e(org) > 2ppb, \end{cases} \quad (6)$$

$g(org')$  — случайная величина, равномерно выбранная из промежутка  $[\max\{0, g(org)(1 - \beta)\}, \min\{g(org)(1 + \beta), 1000\}]$ , а  $e(org') = E \cdot ppb$  (рис. 1);

г) *смерть* — вероятность гибели организма  $org$  в текущий год, основанная на модели смертности Гомпертца – Мэйкхэма [33]:

$$pd = \begin{cases} 1, & \text{если } e(org) < E \cdot ppb, \\ \min \left\{ 1, ad + e^{\frac{a(org)-100}{bd}} \right\}, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (7)$$

где  $a(org)$  — возраст организма (см. XIII, XIV.3.д),  $E \cdot ppb$  — минимально допустимый уровень энергии для поддержания жизни (также «размер» новорожденного, см. XIV.3.в),  $ad = 10^{-3}$  — вероятность смерти от несчастного случая (см. XI), а  $bd = 5$  подобран так, чтобы вероятность гибели «от старости» «плавно» увеличивалась, достигая единицы к 100 итерациям (см. XII, рис. 2);

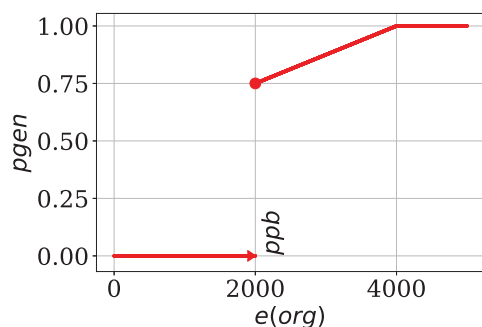


Рис. 1. График зависимости вероятности размножения  $pgen$  от энергии организма  $e(org)$  в идеальном случае  $\Delta = 1$  (см. (6))

Fig. 1. Dependence of the reproduction probability  $pgen$  on the energy of the organism  $e(org)$  in the ideal case  $\Delta = 1$  (see (6))

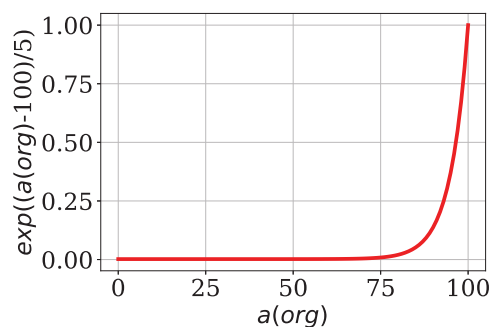


Рис. 2. График зависимости вероятности смерти «от старости»  $\exp((a(org) - 100)/5)$  от возраста  $a(org)$ , использовавшийся в модели (см. (7))

Fig. 2. Dependence of the probability of death “because of age”  $\exp((a(org)-100)/5)$  on the age  $a(org)$  used in the model (see (7))

д) *старение*

$$\forall org \in Pop \quad a(org) += 1; \quad (8)$$

4) если  $|Pop| < 2$ , то останавливаем работу алгоритма и возвращаем 0 (*False*); XV. Возвращаем 1 (*True*) (если выполнение алгоритма не было досрочно прервано на шаге XIV.4, значит, популяция успешно прожила 10080 лет).

### 3. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ АЛГОРИТМА: ЭМПИРИЧЕСКИЕ РАССУЖДЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Жизненный цикл популяции, формализованный в Алгоритме Life, параметризован четырьмя величинами  $\alpha, k, \beta, E$  (см. шаги II–V). Обсудим содержательные интервалы, в которых эти величины могли бы варьироваться для постановки репрезентативного, но избыточного вычислительного эксперимента.

Содержательные значения параметра энергообмена  $\alpha$  по построению лежат в интервале  $[-1, +1]$  (см. (2), (3)). В вычислительных экспериментах настоящей работы использовались значения, выбранные в данном интервале с фиксированным шагом 0.25:

$$\alpha \in M_\alpha \triangleq \{-0.75, -0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5, 0.75\}. \quad (9)$$





Параметр  $E$  определяет долю энергии родителя, отдаваемую новорожденному потомку. В некоторой степени величина  $E$  характеризует выраженность г- или К-стратегии размножения [34]. Действительно, при малом  $E$  родительский организм порождает менее энергетически оснащенных потомков, однако при каждом делении теряет меньше энергии и быстрее оказывается способным к новому делению. При больших значениях  $E$  возникает обратная ситуация. В настоящей работе эксперименты проводились для каждого из следующих значений  $E$ , отражающих некоторые характерные для биосферы Земли стратегии разделения энергии при размножении:

$$E \in M_E \triangleq \{0.01, 0.1, 0.25, 0.5\}. \quad (10)$$

Доля мутации  $\beta$  при порождении нового организма, очевидно, ограничена интервалом  $[0, 1]$ . В экспериментах настоящей работы мы сузили этот интервал до  $\beta \in [0.01, 1/2]$ , используя значения

$$\beta \in M_\beta \triangleq \{0.01m, m \in \overline{1, 50}\}, \quad (11)$$

считая, что более чем пятидесятипроцентная мутация при размножении слабо соответствует идее эволюционных изменений. Нижняя граница  $\beta = 0.01$  равна выбранному шагу изменения интенсивности мутации.

Параметр  $k$  влияет на скорость роста организма (или иначе на скорость поступления энергии в систему) посредством уравнения (5) в Алгоритме Life наряду с константой  $ppb$  и коэффициентом приспособленности  $\Delta$ . Поскольку содержательный интервал варьирования  $k$  неочевиден (кроме того, что  $k > 0$ ), изначально полагалось, что

$$k \in M_k \triangleq \{0.01m, m \in \mathbb{N}\}, \quad (12)$$

а для дальнейшего уточнения границ изменения  $k$  использовался следующий вычислительный эксперимент.

Пусть при фиксированных  $\mathbf{t}$  из (1) и  $\alpha \equiv 0$  (упрощенный эксперимент без энергообмена) функция  $Succ$  для каждой тройки  $(k, \beta, E)$  показывает среднюю долю успехов в 100 независимых экспериментах по выживанию популяций (напомним, что Алгоритм Life недетерминирован):

$$Succ(k, \beta, E) = \frac{1}{100} \sum_{100} \text{Life}(\mathbf{t}, \alpha \equiv 0, k, \beta, E). \quad (13)$$

С содержательной точки зрения нас интересуют промежуточные значения скорости подачи энергии в систему: не слишком малые (способные обеспечить базовую жизнеспособность популяции, компенсируя смерть организмов от несчастных случаев, возраста и взаимодействий), но и не слишком большие (когда поток энергии в организмы настолько велик, что популяции стабильно выживают практически вне зависимости от значений других параметров). В дальнейших экспериментах желаемые интервалы варьирования  $k$  для фиксированных значений  $\beta$  и  $E$  определялись с использованием (13) следующим образом:

$$M'_k(\beta, E) = \{k \in M_k : 0.05 \leq Succ(k, \beta, E) \leq 0.95\}. \quad (14)$$

В ходе вычислительных экспериментов выяснилось, что при  $\beta = 0.01$  (и меньших:  $0.005 + 0.001i$ , где  $i \in \overline{0, 4}$ ) верхняя граница множества (14) для любого  $E \in M_E$  лежит выше величины  $2^{20}$ . В дальнейших экспериментах было принято решение отказаться



от рассмотрения случая  $\beta = 0.01$ , заменив  $M_\beta$  на  $\overline{M}_\beta = M_\beta \setminus \{0.01\}$ . На рис. 3 приводятся примеры вычислительных экспериментов по выявлению интервалов (14) для разных значений  $\beta$  и  $E$ .

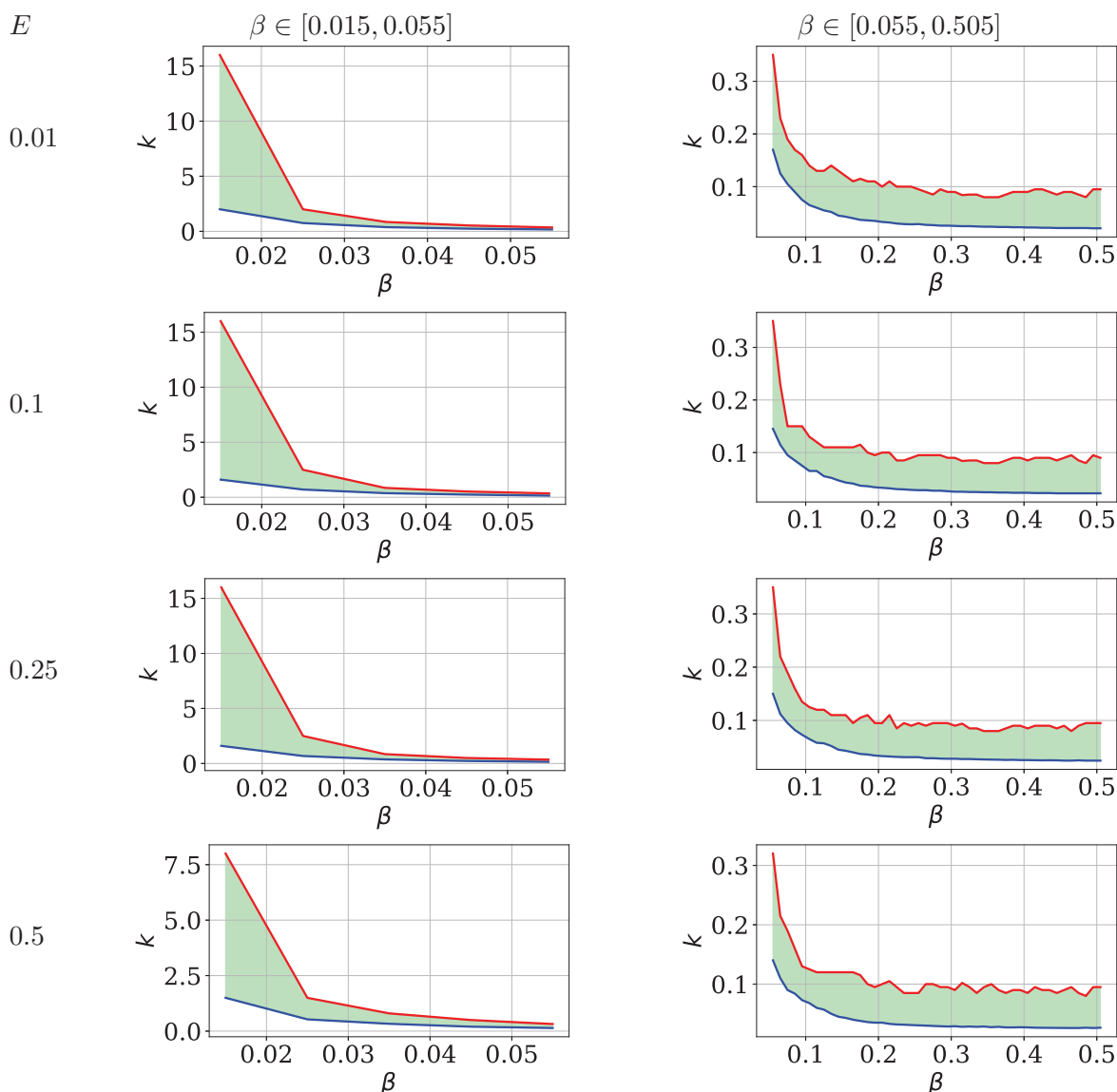


Рис. 3. Области параметров  $M'_k(\beta, E)$  для различных значений  $E$  в различных масштабах  
Fig. 3. Parameter areas  $M'_k(\beta, E)$  for different values of  $E$  at different scales

Из данных рис. 3 видно, что форма областей  $M'_k(\beta, E)$  слабо зависит от параметра  $E$ , поэтому для последующих расчетов было принято решение усреднить области  $M'_k(\beta, E)$  по  $E$  (рис. 4):

$$M''_k(\beta) = \left\{ k \in M_k : 0.05 \leq \frac{1}{4} \sum_{E \in M_E} \text{Succ}(k, \beta, E) \leq 0.95 \right\}. \quad (15)$$

Как уже упоминалось выше, при построении  $M''_k(\beta)$  в (15) пространство параметров эксперимента фактически разделяется на три качественно различных области (см. рис. 4): 1) выжившие популяции практически отсутствуют (незакрашенная область под нижним графиком); 2) популяция может как выжить, так и



погибнуть (закрашенная область между графиками); 3) практически все популяции выживают (незакрашенная область над верхним графиком).

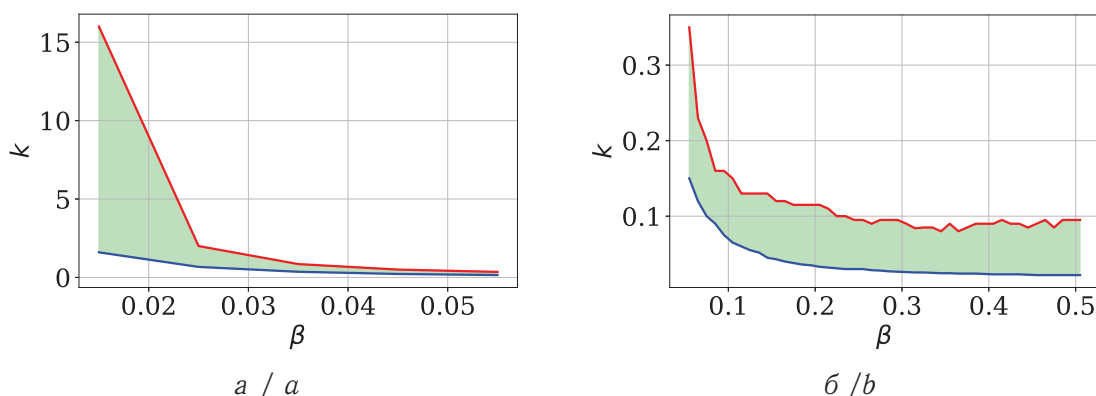


Рис. 4. «Усредненная» область параметров  $M_k''(\beta)$ :  $a - \beta \in [0.015, 0.055]$ ;  
 $b - \beta \in [0.055, 0.505]$

Fig. 4. “Averaged” parameter area  $M_k''(\beta)$ :  $a - \beta \in [0.015, 0.055]$ ;  
 $b - \beta \in [0.055, 0.505]$

Из графиков видно, что попадание условий эксперимента в первую область может быть связано, например, одновременно с малой скоростью мутации  $\beta$ , недостаточной для поддержания соответствия геномов организмов популяции изменяющейся среде ( $\Delta \rightarrow 0$ ), и малой скоростью  $k$  потока энергии в систему, недостаточной для компенсации смертности. Мы предполагаем, что в этом случае варьирование параметра энергообмена  $\alpha$  не изменит причин вымирания популяции. Третья область соответствует «тепличным» условиям, когда, с одной стороны, скорость мутации позволяет популяции не отставать от скорости перемен в среде, а с другой, энергопоток в систему настолько велик, что варьирование стратегии энергообмена предположительно теряет значение — любая стратегия с высокой вероятностью окажется успешной. Дальнейший интерес представляет исследование второй — *пограничной* — области, где отсутствие избытка энергии в системе делает существенным закон ее перераспределения.

В завершение раздела отметим, что хотя пограничная область имеет небольшую площадь относительно всего прямоугольника параметров (по построению  $(k, \beta) \in [0, 16] \times [0.015, 0.5]$ , см. рис. 4), ее величина экспоненциально увеличивается при приближении  $\beta$  к нулю. При этом малые значения процента мутации не только интересны с прикладной точки зрения при конструировании искусственных популяций, но и являются наиболее правдоподобными (фактически единственно известными нам на примере биосферы Земли).

#### 4. СВЯЗЬ ПАРАМЕТРА ЭНЕРГООБМЕНА И ВЫЖИВАЕМОСТИ В ПОГРАНИЧНОЙ ОБЛАСТИ ПАРАМЕТРОВ

Напомним, что основной целью настоящей работы является численное исследование зависимости выживаемости модельной популяции в постепенно изменяющейся в течение длительного времени среде от стратегии энергообмена между организмами (степени «альтруистичности», формализованной в (2), (3)). В предыдущем разделе мы привели ряд аргументов в пользу ограничения области пространства параметров  $k, \beta$ , внутри которой будет проводиться данное исследование (см. (15), рис. 4). Обозначим эту область как  $\mathcal{M}$  (где  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^2$ ) и выпишем ее

в явном виде как объединение треугольников, полученных при построении триангуляции Делоне [35] на дискретном множестве  $\{(k, \beta) \in M_k \times \bar{M}_\beta : k \in M_k''(\beta)\}$ . Пусть множество  $A$  состоит из 1000 точек, равновероятно выбранных из  $\mathcal{M}$ . Для ответа на основной вопрос настоящей работы определим формально функцию  $q(x)$ , показывающую относительное число успехов в экспериментах по выживанию модельной популяции при  $(k, \beta)$  из  $A$  в зависимости от параметра энергообмена  $x \in M_\alpha$ :

$$q(x) = \frac{1}{|A||M_E|} \sum_{\substack{(k, \beta) \in A \\ E \in M_E}} \text{Life}(t, \alpha = x, k, \beta, E). \quad (16)$$

График  $q(x)$  (рис. 5) показывает, что при пограничных параметрах эксперимента («умеренном» энергопотоке в систему при достаточной скорости мутации) существенно более выгодным с точки зрения выживания популяции являются «альтруистические» стратегии энергообмена между организмами.

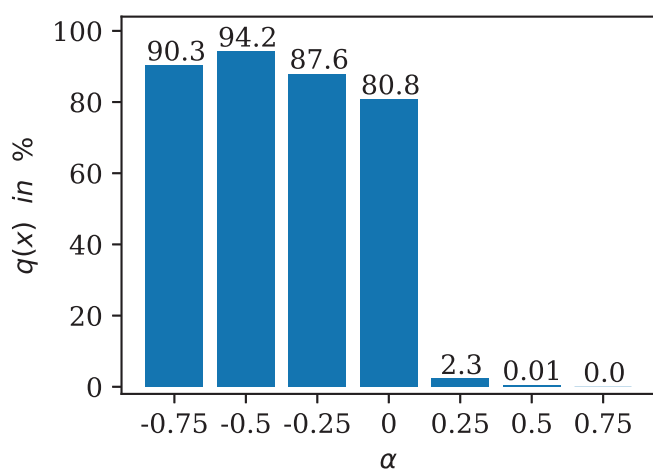


Рис. 5. Зависимость успешности (16) выживания модельных популяций в пограничной области параметров от стратегии энергообмена, параметризованной  $\alpha \in M_\alpha$

Fig. 5. Dependence of the success (16) of survival of model populations with the borderline parameters on the energy exchange strategy parameterized by  $\alpha \in M_\alpha$

при построении множеств (14), (15) и функции (16) Алгоритм Life был запущен около 450 000 раз, суммарное время выполнения — около 16 часов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные исследования дополняют предыдущую работу [24], демонстрируя положительное влияние «альтруистического» энергообмена на выживание популяций в условиях не только резко, но и постепенно изменяющейся внешней среды. Помимо демонстрации ожидаемого положительного эффекта от альтруистического энергообмена, в новых условиях проведенные эксперименты позволили сделать дополнительный вывод: доля энергии, передаваемой новорожденному организму ( $E$ ), по-видимому, слабо влияет на выживаемость популяции. Полученные результаты могут представлять чисто теоретический интерес, связанный с изучением правдо-

При построении множеств (14), (15) и функции (16) использовался гибридный вычислитель кластерного типа УРАН [36], включающий в себя 2264 ядер CPU типа Xeon (3.0 ГГц) и 216 ядер GPU типа NVIDIA Tesla, из которых для экспериментов было выделено 1000 ядер CPU. Программы были написаны на языке Python3 и выполнялись под управлением операционной системы Linux. Для построения множеств (14), (15) использовался метод экспоненциального поиска по  $k$  (20 итераций для каждой пары  $(\beta, E)$ ). Как уже упоминалось при формализации (13), для каждой тройки  $(k, \beta, E)$  было проведено 100 независимых экспериментов. В общей сложности



подобных моделей зарождения и адаптации потенциально возможных биосистем. В прикладных задачах альтруистический энергообмен может быть конструктивно использован при проектировании самоорганизующихся сообществ виртуальных агентов (как чисто программных [37, 38], так и воплощенных в инженерных устройствах [11]). В частности, перспективным видится использование альтруистического энергообмена при создании роев медицинских нанороботов, функционирующих в слабо, но непредсказуемо изменяющейся биохимической среде организма пациента [31].

В ходе дальнейших исследований предполагается добавить в модель два новых параметра. Первый из них, параметр  $\gamma$ , будет определять степень зависимости приспособленности организма от соответствия его генома окружающей среде, для чего уравнение (4) будет заменено на

$$\Delta = 1 - \gamma \sqrt{\frac{|t(y) - g(org)|}{\max\{\max_{o \in Pop}\{g(o)\}, t(y)\} - \min\{\min_{o \in Pop}\{g(o)\}, t(y)\}}}.$$

Второй, параметр  $\delta$ , определит число событий энергообмена в течение года: на шаге X Алгоритма Life выражение  $ipy = 0.1 \cdot n(n - 1)/2$  предполагается заменить на  $ipy = \delta \cdot n(n - 1)/2$ . Наконец, в будущей работе предполагается изучить изменение формы графика на рис. 5 при вариации каждого из параметров  $k, \beta, E, \gamma, \delta$  вычислительного эксперимента по отдельности.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-07-00637, № 19-01-00573).

## Библиографический список

1. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // Journal of the Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20, № 2. P. 130–141.
2. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality: An explanation of the  $1/f$  noise // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 59, iss. 4. P. 381–384. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.59.381>
3. May R. Simple mathematical models with very complicated dynamics // Nature. 1976. Vol. 261, № 5560. P. 459–467. DOI: <https://doi.org/10.1038/261459a0>
4. Collier N. RePast: An extensible framework for agent simulation // Natural Resources and Environmental Issues. 2001. Vol. 8. Article 4. URL: <https://digitalcommons.usu.edu/nrei/vol8/iss1/4> (дата обращения: 07.03.2019).
5. Tisue S., Wilensky U. NetLogo: A simple environment for modeling complexity // International Conference on Complex Systems. 2004. Vol. 21. P. 16–21.
6. Luke S., Cioffi-Revilla C., Panait L., Sullivan K., Balan G. Mason: A multiagent simulation environment // Simulation. 2005. Vol. 81, № 7. P. 517–527. DOI: <https://doi.org/10.1177/0037549705058073>
7. Trevorrow A., Rokicki T., Hutton T., Greene D., Summers J., Verver M. Golly – a game of life simulator. URL: <http://golly.sourceforge.net/> (дата обращения: 07.03.2019).
8. Sayama H. PyCX: A Python-based simulation code repository for complex systems education // Complex Adaptive Systems Modeling. 2013. Vol. 1. P. 2. DOI: <https://doi.org/10.1186/2194-3206-1-2>
9. Waldrop M. M. Complexity: The Emerging Science at the Edge of Order and Chaos. N. Y. : Simon & Schuster, 1992. 380 p.





10. *Sayama H.* Introduction to the Modeling and Analysis of Complex Systems. N. Y. : SUNY Binghamton, 2015. 478 p.
11. *Hamann H.* Swarm Robotics: A Formal Approach. N. Y. : Springer International Publishing, 2018. 210 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-74528-2>
12. *Fitzhugh R.* Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane // Biophysical Journal. 1961. Vol. 1, № 6. P. 445–466. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0006-3495\(61\)86902-6](https://doi.org/10.1016/S0006-3495(61)86902-6)
13. *Drossel B., Schwabl F.* Self-organized criticality in a forest-fire model // Physica A : Statistical Mechanics and its Applications. 1992. Vol. 191, № 1. P. 47–50. DOI: [https://doi.org/10.1016/0378-4371\(92\)90504-J](https://doi.org/10.1016/0378-4371(92)90504-J)
14. *Strogatz S.* Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order. N. Y. : Penguin, 2004. 339 p.
15. *Wolfram S.* A New Kind of Science. N. Y. : Wolfram Media, 2002. 1197 p.
16. *Bjorner A., Lovasz L., Shor P. W.* Chip-firing games on graphs // European Journal of Combinatorics. 1991. Vol. 12, № 4. P. 283–291. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0195-6698\(13\)80111-4](https://doi.org/10.1016/S0195-6698(13)80111-4)
17. *Clifford P., Sudbury A.* A model for spatial conflict // Biometrika. 1973. Vol. 60, № 3. P. 581–588. DOI: <https://doi.org/10.1093/biomet/60.3.581>
18. *Kagel H. J., Roth E. A.* The Handbook of Experimental Economics. N. J. : Princeton Univ. Press, 1997. 744 p.
19. *Levin S. A.* Public goods in relation to competition, cooperation, and spite // PNAS. 2014. Vol. 111 (Supplement 3). P. 10838–10845. DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.1400830111>
20. *Obolski U., Lewin-Epstein O., Even-Tov E., Ram Y., Hadany L.* With a little help from my friends: cooperation can accelerate the rate of adaptive valley crossing // BMC Evolutionary Biology. 2017. Vol. 17. Article 143. DOI: <https://doi.org/10.1186/s12862-017-0983-2>
21. *Pfeiffer T., Bonhoeffer S.* An evolutionary scenario for the transition to undifferentiated multicellularity // PNAS. 2003. Vol. 100, № 3. P. 1095–1098. DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.0335420100>
22. *Kreft J.-U.* Biofilms promote altruism // Microbiology. 2004. Vol. 150, iss. 8. P. 2751–2760. DOI: <https://doi.org/10.1099/mic.0.26829-0>
23. *Cesta A., Miceli M., Rizzo P.* Coexisting agents: Experiments on basic interaction attitude // Journal of Intelligent Systems. 2001. Vol. 11, iss. 1. P. 1–42. DOI: <https://doi.org/10.1515/JISYS.2001.11.1.1>
24. *Ivanko E.* Is evolution always “*egolution*”: Discussion of evolutionary efficiency of altruistic energy exchange // Ecological Complexity. 2018. Vol. 34. P. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2018.02.001>
25. *Hamilton W. D.* The genetical evolution of social behaviour // Journal of Theoretical Biology. 1964. Vol. 7, № 1. P. 1–52. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5193\(64\)90038-4](https://doi.org/10.1016/0022-5193(64)90038-4)
26. *Trivers R. L.* The evolution of reciprocal altruism // The Quarterly Review of Biology. 1971. Vol. 46, № 1. P. 35–57. DOI: <https://doi.org/10.1086/406755>
27. *Axelrod R., Hamilton W. D.* The evolution of cooperation // Science. 1981. Vol. 211, № 4489. P. 1390–1396. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.7466396>
28. *Nowak M. A.* Five rules for the evolution of cooperation // Science. 2006. Vol. 314, iss. 5805. P. 1560–1563. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.1133755>
29. *Stuart A., West A., Griffin S., Gardner A.* Evolutionary explanations for cooperation // Current Biology. 2007. Vol. 17, iss. 16. P. R661–R672. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cub.2007.06.004>



30. *Lewin-Epstein O., Aharonov R., Hadany L.* Microbes can help explain the evolution of host altruism // *Nature Communications*. 2017. Vol. 8. Article 14040. DOI: <https://doi.org/10.1038/ncomms14040>
31. *Esteban-Fernández de Ávila B., Angsantikul P., Ramírez-Herrera D. E., Soto F., Teymourian H., Dehaini D., Chen Y., Zhang L., Wang J.* Hybrid biomembrane-functionalized nanorobots for concurrent removal of pathogenic bacteria and toxins // *Science Robotics*. 2018. Vol. 3, iss. 18, eaat0485. DOI: <https://doi.org/10.1126/scirobotics.aat0485>
32. *Morice C. P., Kennedy J. J., Rayner N. A., Jones P. D.* Quantifying uncertainties in global and regional temperature change using an ensemble of observational estimates: The HadCRUT4 dataset // *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*. 2012. Vol. 117. D08101. DOI: <https://doi.org/10.1029/2011JD017187>
33. *Makeham W. M.* On the Law of Mortality and the Construction of Annuity Tables // *The Assurance Magazine, and Journal of the Institute of Actuaries*. 1860. Vol. 8, № 6. P. 301–310. DOI: <https://doi.org/10.1017/S204616580000126X>
34. *MacArthur R. H., Wilson E. O.* The theory of island biogeography. N.J. : Princeton Univ. Press, 2001. 224 p.
35. *Aurenhammer F., Klein R., Lee D.-T.* Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulations. N.J. : World Scientific Publishing, 2013. 348 p.
36. Uran cluster. URL: <http://parallel.uran.ru/node/419> (дата обращения: 07.03.2019).
37. *Simon D.* Evolutionary Optimization Algorithms. N. Y. : Wiley, 2013. 772 p.
38. *Schapire R. E., Freund Y. Y.* Boosting: Foundations and Algorithms. Cambridge : The MIT Press, 2012. 544 p.

---

**Образец для цитирования:**

Иванко Е. Е., Червинский С. М. Исследование выживаемости модельной популяции в зависимости от стратегии энергообмена между организмами // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 241–256. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-241-256>

---

## Survival Rate of Model Populations Depending on the Strategy of Energy Exchange Between the Organisms

E. E. Ivanko, S. M. Chervinsky

Evgeny E. Ivanko, <https://orcid.org/0000-0003-3248-5885>, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620990, Russia; Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, 19 Mira St., Ekaterinburg 620002, Russia, [evgeny.ivanko@gmail.com](mailto:evgeny.ivanko@gmail.com)

Serge M. Chervinsky, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620990, Russia, [serge.chervinsky@gmail.com](mailto:serge.chervinsky@gmail.com)

The paper addresses the influence of the energy exchange strategy between the organisms of a population in a gradually changing environment on the survival rate of this population. At the first stage of computational experiments, a “boundary” region is determined in the space of two parameters (mutation rate and energy supply rate), within which the survival of populations with zero energy exchange is ambiguous (lies in the interval from 5 to 95%). At the second stage, on the basis of a random sampling of experimental conditions from the boundary region, the dependence of the survival rate of model populations on the fraction of energy transferred during interaction from an organism with larger energy to an organism with smaller one is constructed.



The performed experiments demonstrate: 1) the positive effect of altruistic energy exchange (where the organism with larger energy plays the role of a donor) on the survival rate of the populations and 2) the absence of an observable influence of the amount of energy transferred by the parent to the newborn on the survival rate of the populations. The results obtained may be of interest for the construction of artificial populations, for example, in the design of swarms of medical nanorobots or in the development of evolutionary metaheuristic algorithms for solving various optimization problems.

**Keywords:** altruism, energy exchange, population, survival rate.

Received: 16.05.2019 / Accepted: 08.12.2019 / Published: 01.06.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

**Acknowledgements:** This work was supported by Russian Foundation for Basic Research (projects No. 18-07-00637, No. 19-01-00573).

## References

1. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1963, vol. 20, no. 2, pp. 130–141.
2. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality: An explanation of the  $1/f$  noise. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, vol. 59, iss. 4, pp. 381–384. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.59.381>
3. May R. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 1976, vol. 261, no. 5560, pp. 459–467. DOI: <https://doi.org/10.1038/261459a0>
4. Collier N. RePast: An extensible framework for agent simulation. *Natural Resources and Environmental Issues*, 2001, vol. 8, Article 4. Available at: <https://digitalcommons.usu.edu/nrei/vol8/iss1/4> (accessed 7 March 2019).
5. Tisue S., Wilensky U. NetLogo: A simple environment for modeling complexity. *International Conference on Complex Systems*, 2004, vol. 21, pp. 16–21.
6. Luke S., Cioffi-Revilla C., Panait L., Sullivan K., Balan G. Mason: A multi-agent simulation environment. *Simulation*, 2005, vol. 81, no. 7, pp. 517–527. DOI: <https://doi.org/10.1177/0037549705058073>
7. Trevorrow A., Rokicki T., Hutton T., Greene D., Summers J., Verver M. Golly – a game of life simulator. Available at: <http://golly.sourceforge.net/> (accessed 7 March 2019).
8. Sayama H. PyCX: A Python-based simulation code repository for complex systems education. *Complex Adaptive Systems Modeling*, 2013, vol. 1, p. 2. DOI: <https://doi.org/10.1186/2194-3206-1-2>
9. Waldrop M. M. *Complexity: The Emerging Science at the Edge of Order and Chaos*. New York, Simon & Schuster, 1992. 380 p.
10. Sayama H. *Introduction to the Modeling and Analysis of Complex Systems*. New York, SUNY Binghamton, 2015. 478 p.
11. Hamann H. *Swarm Robotics: A Formal Approach*. New York, Springer International Publishing, 2018. 210 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-74528-2>
12. Fitzhugh R. Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane. *Biophysical Journal*, 1961, vol. 1, no. 6, pp. 445–466. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0006-3495\(61\)86902-6](https://doi.org/10.1016/S0006-3495(61)86902-6)
13. Drossel B., Schwabl F. Self-organized criticality in a forest-fire model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 1992, vol. 191, no. 1, pp. 47–50. DOI: [https://doi.org/10.1016/0378-4371\(92\)90504-J](https://doi.org/10.1016/0378-4371(92)90504-J)



14. Strogatz S. *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*. New York, Penguin, 2004. 339 p.
15. Wolfram S. *A New Kind of Science*. New York, Wolfram Media, 2002. 1197 p.
16. Bjorner A., Lovasz L., Shor P. W. Chip-firing games on graphs. *European Journal of Combinatorics*, 1991, vol. 12, no. 4, pp. 283–291. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0195-6698\(13\)80111-4](https://doi.org/10.1016/S0195-6698(13)80111-4)
17. Clifford P., Sudbury A. A model for spatial conflict. *Biometrika*, 1973, vol. 60, no. 3, pp. 581–588. DOI: <https://doi.org/10.1093/biomet/60.3.581>
18. Kagel H. J., Roth E. A. *The Handbook of Experimental Economics*. New Jersey, Princeton Univ. Press, 1997. 744 p.
19. Levin S. A. Public goods in relation to competition, cooperation, and spite. *PNAS*, 2014, vol. 111 (Supplement 3), pp. 10838–10845. DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.1400830111>
20. Obolski U., Lewin-Epstein O., Even-Tov E., Ram Y., Hadany L. With a little help from my friends: Cooperation can accelerate the rate of adaptive valley crossing. *BMC Evolutionary Biology*, 2017, vol. 17, Article 143. DOI: <https://doi.org/10.1186/s12862-017-0983-2>
21. Pfeiffer T., Bonhoeffer S. An evolutionary scenario for the transition to undifferentiated multicellularity. *PNAS*, 2003, vol. 100, no. 3, pp. 1095–1098. DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.0335420100>
22. Kreft J.-U. Biofilms promote altruism. *Microbiology*, 2004, vol. 150, iss. 8, pp. 2751–2760. DOI: <https://doi.org/10.1099/mic.0.26829-0>
23. Cesta A., Miceli M., Rizzo P. Coexisting agents: Experiments on basic interaction attitude. *Journal of Intelligent Systems*, 2001, vol. 11, iss. 1, pp. 1–42. DOI: <https://doi.org/10.1515/JISYS.2001.11.1.1>
24. Ivanko E. Is evolution always “*egolution*”: Discussion of evolutionary efficiency of altruistic energy exchange. *Ecological Complexity*, 2018, vol. 34, pp. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2018.02.001>
25. Hamilton W. D. The genetical evolution of social behaviour. *Journal of Theoretical Biology*, 1964, vol. 7, no. 1, pp. 1–52. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5193\(64\)90038-4](https://doi.org/10.1016/0022-5193(64)90038-4)
26. Trivers R. L. The evolution of reciprocal altruism. *The Quarterly Review of Biology*, 1971, vol. 46, no. 1, pp. 35–57. DOI: <https://doi.org/10.1086/406755>
27. Axelrod R., Hamilton W. D. The evolution of cooperation. *Science*, 1981, vol. 211, no. 4489, pp. 1390–1396. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.7466396>
28. Nowak M. A. Five rules for the evolution of cooperation. *Science*, 2006, vol. 314, iss. 5805, pp. 1560–1563. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.1133755>
29. Stuart A., West A., Griffin S., Gardner A. Evolutionary explanations for cooperation. *Current Biology*, 2007, vol. 17, iss. 16, pp. R661–R672. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cub.2007.06.004>
30. Lewin-Epstein O., Aharonov R., Hadany L. Microbes can help explain the evolution of host altruism. *Nature Communications*, 2017, vol. 8, Article 14040. DOI: <https://doi.org/10.1038/ncomms14040>
31. Esteban-Fernández de Ávila B., Angsantikul P., Ramírez-Herrera D. E., Soto F., Teymourian H., Dehaini D., Chen Y., Zhang L., Wang J. Hybrid biomembrane–functionalized nanorobots for concurrent removal of pathogenic bacteria and toxins. *Science Robotics*, 2018, vol. 3, iss. 18, eaat0485. DOI: <https://doi.org/10.1126/scirobotics.aat0485>
32. Morice C. P., Kennedy J. J., Rayner N. A., Jones P. D. Quantifying uncertainties in global and regional temperature change using an ensemble of observational estimates: The HadCRUT4 dataset. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 2012, vol. 117, D08101. DOI: <https://doi.org/10.1029/2011JD017187>
33. Makeham W. M. On the Law of Mortality and the Construction of Annuity Tables. *The*



- Assurance Magazine, and Journal of the Institute of Actuaries*, 1860, vol. 8, no. 6, pp. 301–310. DOI: <https://doi.org/10.1017/S204616580000126X>
34. MacArthur R. H., Wilson E. O. *The theory of island biogeography*. New Jersey, Princeton Univ. Press, 2001. 224 p.
35. Aurenhammer F., Klein R., Lee D.-T. *Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulations*. New Jersey, World Scientific Publishing, 2013. 348 p.
36. Uran cluster. Available at: <http://parallel.uran.ru/node/419> (accessed 7 March 2019).
37. Simon D. *Evolutionary Optimization Algorithms*. New York, Wiley, 2013. 772 p.
38. Schapire R. E., Freund Y. Y. *Boosting: Foundations and Algorithms*. Cambridge, The MIT Press, 2012. 544 p.

---

**Cite this article as:**

Ivanko E. E., Chervinsky S. M. Survival Rate of Model Populations Depending on the Strategy of Energy Exchange Between the Organisms. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 241–256 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-241-256>

---





УДК 519.248

## Классификация состояний марковской цепи в модели тандема с циклическим управлением с продлением

В. М. Кочеганов

Кочеганов Виктор Михайлович, аспирант кафедры программной инженерии, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, Россия, 603950, г. Н. Новгород, просп. Гагарина, д. 23, kocheganov@gmail.com

На данный момент существует ограниченное число работ, посвященных тандемам перекрестков. В литературе, как правило, изучаются следующие виды алгоритмов управления: циклический алгоритм с фиксированной длительностью, циклический алгоритм с петлей, циклический алгоритм со сменой режимов и т. д. При построении математических моделей сетей массового обслуживания и тандемов в частности, как правило, применяется описательный подход. При таком подходе задание входных потоков и алгоритмов обслуживания производится на содержательном уровне, законы распределения длительностей обслуживания требований считаются известными и задаются с помощью интегральной функции распределения времени обслуживания произвольного требования. При этом не удается решить проблему изучения выходящих потоков из узлов, а также рассмотреть сети с мгновенным перемещением требований между узлами и с зависимыми, разнораспределенными длительностями обслуживания требований. В настоящей работе применяется новый подход к построению вероятностных моделей тандемов конфликтных систем массового обслуживания с различными алгоритмами управления в узлах. В рамках этого подхода удастся решить проблему выбора описаний  $\omega$  элементарных исходов случайного эксперимента и математически корректно определить случайный процесс, описывающий эволюцию рассматриваемой системы, а также решить перечисленные выше частные задачи. На основе конструктивно заданного вероятностного пространства удастся строго обосновать достижимость одних состояний из других, тем самым полностью описав единственный класс существенных состояний марковской цепи, описывающей динамику тандема.

*Ключевые слова:* стационарное распределение, управляющая система массового обслуживания, циклический алгоритм с продлением, конфликтные потоки, многомерная счетная марковская цепь, существенные состояния.

Поступила в редакцию: 07.11.2019 / Принята: 30.12.2019 / Опубликовано: 01.06.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-257-265>

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В работах [1–8] представлены различные модели тандемов управляющих систем обслуживания в постановке задач автомобильного трафика. Исходной задачей для исследования в настоящей работе является анализ тандема двух последовательных перекрестков, автомобили между которыми перемещаются мгновенно и обслуживание на одном из перекрестков допускает продление. Формулируя задачу в терминах управляющих систем обслуживания, будем предполагать, что в первой

системе тандема обслуживаются конфликтные потоки по циклическому алгоритму, а во второй — по алгоритму с продлением. Данная тандемная сеть подробно описана в работах [9, 10]. Развиваемый там подход позволил представить тандем систем как единую систему массового обслуживания. Напомним существенные моменты из описания системы. На вход обслуживающему устройству поступают четыре входных потока требований:  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  и  $\Pi_4$ . Требования входного потока  $\Pi_j$  поступают в очередь  $O_j$  с неограниченной вместимостью,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Требования из очереди  $O_j$  обслуживаются в порядке поступления. Требования входных потоков  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  формируются внешней средой, имеющей всего одно состояние. Каждый из этих потоков является неординарным пуассоновским потоком. Обозначим  $\lambda_1$  и  $\lambda_3$  интенсивности потоков групп требований потоков  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  соответственно. Производящая функция количества требований в группе по потоку  $\Pi_j$  имеет вид  $f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{\nu}^{(j)} z^{\nu}$ ,  $j \in \{1, 3\}$ . Предполагается, что  $f_j(z)$  сходится для любого  $z \in \mathbb{C}$  такого, что  $|z| < (1+\varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ . После обслуживания требования из очереди  $O_1$  поступают обратно в систему как требования потока  $\Pi_4$ . Требования потока  $\Pi_4$ , в свою очередь, после обслуживания поступают в систему в качестве требований потока  $\Pi_2$ . Потоки  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$  конфликтные в том смысле, что их требования не могут быть обслужены одновременно.

Зафиксируем положительные целые числа  $d$ ,  $n_0$ ,  $n_1$ , ...,  $n_d$ . Тогда множество состояний обслуживающего устройства будет выглядеть следующим образом:  $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)} : k = 0, 1, \dots, d; r = 1, 2, \dots, n_k\}$ . В состоянии  $\Gamma^{(k,r)}$  сервер находится в течение неслучайного времени  $T^{(k,r)}$ . Алгоритм смены состояний учитывает как предыдущее состояние прибора, так и длину очереди  $O_3$  в момент принятия решения и формально описан в работе [9].

Для задания процесса обслуживания используются потоки насыщения  $\Pi_1^{\text{нас}}$ ,  $\Pi_2^{\text{нас}}$ ,  $\Pi_3^{\text{нас}}$ ,  $\Pi_4^{\text{нас}}$ . Число требований в потоке насыщения  $\Pi_j^{\text{нас}}$  за время  $T^{(k,r)}$  неслучайно и равно  $\ell(k, r, j)$ , если обслуживающее устройство находится в состоянии  $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ .

Представленная система массового обслуживания может рассматриваться как кибернетическая управляющая система. Схема управляющей системы представлена на рисунке.

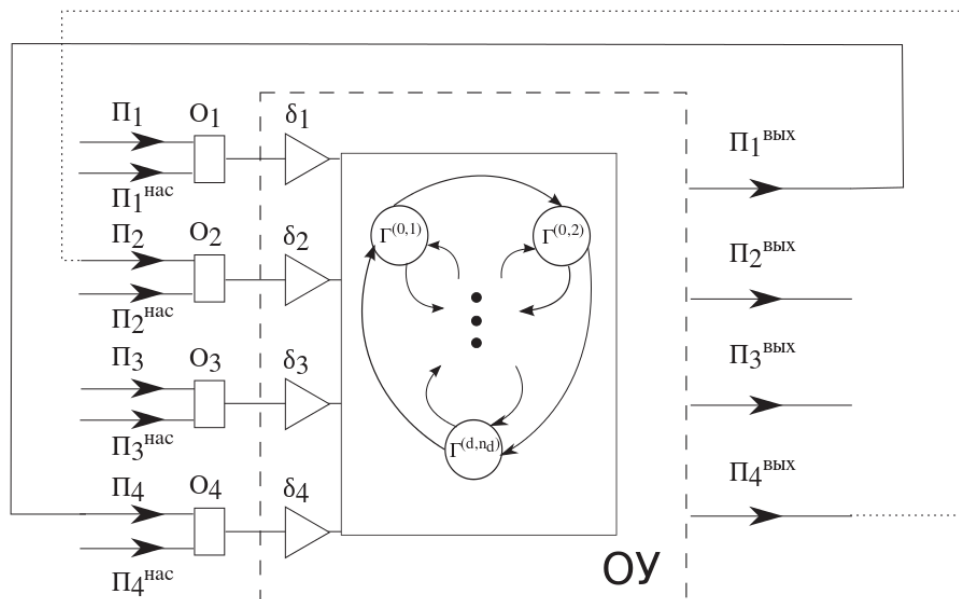


Схема СМО как управляющей кибернетической системы  
The queuing system as a cybernetic system scheme



На схеме присутствуют следующие блоки: внешняя среда с одним состоянием, входные полюса (входные потоки  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$  и потоки насыщения  $\Pi_1^{\text{нас}}, \Pi_2^{\text{нас}}, \Pi_3^{\text{нас}}, \Pi_4^{\text{нас}}$ ), внешняя память (очереди  $O_1, O_2, O_3, O_4$ ), устройство по переработке внешней памяти (устройства поддержания дисциплин очередей  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ ), внутренняя память (обслуживающее устройство, ОУ), устройство по переработке внутренней памяти (граф переходов из одного состояния ОУ в другое), выходные полюса (выходные потоки  $\Pi_1^{\text{вых}}, \Pi_2^{\text{вых}}, \Pi_3^{\text{вых}}, \Pi_4^{\text{вых}}$ ).

В работе [2] были выделены информация, координаты и функция данной системы. Это позволило конструктивно задать последовательности случайных величин и случайных элементов, описывающих дискретную временную шкалу наблюдения и состояния всех блоков схемы. В частности, в качестве дискретной временной шкалы выбрана последовательность  $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots$  моментов смены состояния обслуживающего устройства. Обозначим  $\Gamma_i \in \Gamma, i = 1, 2, \dots$ , состояние обслуживающего устройства в течение времени  $(\tau_{i-1}; \tau_i]$  и  $\Gamma_0 \in \Gamma$  — его состояние в момент времени  $\tau_0$ , и пусть  $\kappa_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$  — количество требований в очереди  $O_j$  в момент времени  $\tau_i, i \geq 0$ . Было доказано, что стохастическая последовательность  $\{(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}, \kappa_{3,i}, \kappa_{4,i}); i = 0, 1, \dots\}$  является однородной цепью Маркова.

## 2. КЛАССИФИКАЦИЯ СОСТОЯНИЙ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ

$\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \dots\}$

Теперь поставим вопрос о существенных состояниях марковской цепи

$$\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \dots\},$$

которая описывает динамику исследуемой в работе кибернетической системы. Мы последовательно рассмотрим состояния разного вида и определим сообщающиеся подклассы. На первом этапе выясним, что состояния вида

$$(\Gamma^{(0, \tilde{r})}, \tilde{x}), \quad \tilde{r} = \overline{1, n_0}, \quad \tilde{x} = (0, 0, L + 1, 0)$$

являются существенными (леммы 1, 2, 3). Лемма 1, в частности, говорит о том, что из состояний продления с произвольным количеством требований в очередях  $O_1, O_2$  и  $O_4$  можно перейти с ненулевой вероятностью также в состояние продления, но с пустыми очередями  $O_1, O_2$  и  $O_4$ .

**Лемма 1.** *Состояния вида*

$$(\Gamma^{(0, \tilde{r})}, (0, 0, \tilde{x}_3, 0)), \quad \tilde{r} = \overline{1, n_0}, \tilde{x}_3 \geq x_{3,0}$$

*достижимы из состояний вида*

$$(\Gamma^{(0, r_0)}, x^0), \quad r_0 = \overline{1, n_0}, x^0 \in \mathbb{Z}_+^4, x^0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0}), x_{3,0} \leq L.$$

**Доказательство.** Доказательство состоит из нескольких этапов. Сначала, основываясь на заложенных в построенное вероятностное пространство свойствах, доказывается, что вероятность каждого шага в цепочке

$$(\Gamma^{(0, r_0)}, x^0) \rightarrow (\Gamma^{(0, r_0 \oplus 01)}, x^1) \rightarrow (\Gamma^{(0, r_0 \oplus 02)}, x^2) \rightarrow \dots \rightarrow (\Gamma^{(0, r_0 \oplus 0N_2)}, x^{N_2})$$

для любого  $N_2 > 0$  положительна. Вектора  $x^j, j > 1$ , определим ниже.



Пусть система стартовала в состоянии  $(\Gamma_0, \varkappa_0) = (\Gamma^{(0,r_0)}, x^0)$ . Из построения следует, что

$$\Gamma_1 = h(\Gamma_0, \varkappa_{3,0}) = h(\Gamma^{(0,r_0)}, x_{3,0}) = \Gamma^{(0,r_0 \oplus 01)},$$

где отображение  $h(\cdot, \cdot)$  определено в работе [10].

Положим

$$x^1 = (x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, x_{4,1}) = (\max \{0, x_{1,0} - \ell(0, r_0 \oplus 01, 1)\}; \\ \max \{0, x_{2,0} + x_{4,0} - \ell(0, r_0 \oplus 01, 2)\}; x_{3,0}; \min \{x_{1,0}, \ell(0, r_0 \oplus 01, 1)\}).$$

В общем случае

$$\Pr(\{\omega: \Gamma_{j+1} = \Gamma^{(0,r_0 \oplus 0j+1)}, \varkappa_{j+1} = x^{j+1}\} | \{\omega: \Gamma_j = \Gamma^{(0,r_0 \oplus 0j)}, \varkappa_j = x^j\}) > 0$$

для

$$x^{j+1} = (\max \{0, x_{1,j} - \ell(0, r_0 \oplus 0j+1, 1)\}; \\ \max \{0, x_{2,j} + x_{4,j} - \ell(0, r_0 \oplus 0j+1, 2)\}; x_{3,0}; \min \{x_{1,j}, \ell(0, r_0 \oplus 0j+1, 1)\}),$$

где  $j = 1, 2, \dots, N_2$ . Число  $N_2$  будет определено ниже.

Для некоторого  $N_1 > 0$  количества требований  $x_{1,N_1}$ ,  $x_{2,N_1}$  и  $x_{4,N_1}$  в соответствующих очередях  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_4$  рано или поздно станут равными нулю, т.е.

$$\Pr(\{\omega: \Gamma_{N_1} = \Gamma^{(0,r_0 \oplus 0N_1)}, \varkappa_{N_1} = x^{N_1}\} | \{\omega: \Gamma_{N_1-1} = \Gamma^{(0,r_0 \oplus 0(N_1-1))}, \varkappa_{N_1-1} = x^{N_1-1}\}) > 0,$$

для  $x^{N_1} = (0; 0; x_{3,0}; 0)$ . Поскольку все состояния продления образуют цикл (а только такие графы переходов рассматриваются в работе), то существует такое число  $N_2 > N_1$ , что  $r_0 \oplus 0N_2 = \tilde{r} \oplus 01$  и

$$\Pr(\{\omega: \Gamma_{N_2} = \Gamma^{(0,r_0 \oplus 0N_2)}, \varkappa_{N_2} = x^{N_2}\} | \{\omega: \Gamma_{N_2-1} = \Gamma^{(0,r_0 \oplus 0(N_2-1))}, \varkappa_{N_2-1} = x^{N_2-1}\}) > 0,$$

где  $x^{N_2} = (0, 0, x_{3,0}, 0)$ . Для завершения доказательства теперь необходимо рассмотреть переход

$$(\Gamma^{(0,r_0 \oplus 0N_2)}, x^{N_2}) \rightarrow (\Gamma^{(0,\tilde{r})}, x^{N_2+1}),$$

т.е. оценить вероятность

$$\Pr(\{\omega: \Gamma_{N_2+1} = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_{N_2+1} = x^{N_2+1}\} | \{\omega: \Gamma_{N_2} = \Gamma^{(0,r_0 \oplus 0N_2)}, \varkappa_{N_2} = x^{N_2}\}),$$

где

$$(\Gamma_{N_2+1}, \varkappa_{N_2+1}) = (\Gamma^{(0,r_0 \oplus 0N_2)}, x^{N_2+1}) = (\Gamma^{(0,\tilde{r})}, (0, 0, \tilde{x}_3, 0))$$

есть конечное состояние.

Положим  $N = N_2 + 1$  и соберем все воедино:

$$\Pr(\{\omega: \Gamma_N = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_N = x^N\} | \{\omega: \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) = \\ = \Pr(\{\omega: \Gamma_{N_2+1} = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_{N_2+1} = x^{N_2+1}\} | \{\omega: \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) \geq \\ \geq \Pr(C | \{\omega: \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}),$$

где

$$C = \{\omega: \Gamma_{N_2+1} = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_{N_2+1} = x^{N_2+1}\} \cap \{\omega: \Gamma_{N_2} = \Gamma^{(0,\tilde{r} \oplus 01)}, \varkappa_{N_2} = x^{N_2}\} \cap \dots$$



$$\dots \cap \{\omega: \Gamma_2 = \Gamma^{(0, r_0 \oplus 0^2)}, \varkappa_2 = x^2\} \cap \{\omega: \Gamma_1 = \Gamma^{(0, r_0 \oplus 0^1)}, \varkappa_1 = x^1\}.$$

Наконец, из теоремы умножения и марковского свойства заключаем, что

$$\begin{aligned} & \Pr\left(\left\{\omega: \Gamma_N = \Gamma^{(0, \tilde{r})}, \varkappa_N = x^N\right\} \middle| \left\{\omega: \Gamma_0 = \Gamma^{(0, r_0)}, \varkappa_0 = x^0\right\}\right) \geq \\ & \geq \Pr\left(\left\{\omega: \Gamma_{N_2+1} = \Gamma^{(0, \tilde{r})}, \varkappa_{N_2+1} = x^{N_2+1}\right\} \middle| \left\{\omega: \Gamma_{N_2} = \Gamma^{(0, \tilde{r} \oplus 0^1)}, \varkappa_{N_2} = x^{N_2}\right\}\right) \times \\ & \times \Pr\left(\left\{\omega: \Gamma_{N_2} = \Gamma^{(0, \tilde{r} \oplus 0^1)}, \varkappa_{N_2} = x^{N_2}\right\} \middle| \left\{\omega: \Gamma_{N_2-1} = \Gamma^{(0, \tilde{r} \oplus 0^2)}, \varkappa_{N_2-1} = x^{N_2-1}\right\}\right) \times \\ & \times \dots \times \Pr\left(\left\{\omega: \Gamma_2 = \Gamma^{(0, r_0 \oplus 0^2)}, \varkappa_2 = x^2\right\} \middle| \left\{\omega: \Gamma_1 = \Gamma^{(0, r_0 \oplus 0^1)}, \varkappa_1 = x^1\right\}\right) \times \\ & \times \Pr\left(\left\{\omega: \Gamma_1 = \Gamma^{(0, r_0 \oplus 0^1)}, \varkappa_1 = x^1\right\} \middle| \left\{\omega: \Gamma_0 = \Gamma^{(0, r_0)}, \varkappa_0 = x^0\right\}\right) > 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Таким образом, каждый переход в цепочке переходов

$$(\Gamma^{(0, r_0)}, x^0) \rightarrow (\Gamma^{(0, r_0 \oplus 0^1)}, x^1) \rightarrow (\Gamma^{(0, r_0 \oplus 0^2)}, x^2) \rightarrow \dots \rightarrow (\Gamma^{(0, r_0 \oplus 0^{N_2})}, x^{N_2}) \rightarrow (\Gamma^{(0, \tilde{r})}, x^{N_2+1})$$

от начального до конечного состояния имеет ненулевую вероятность.  $\square$

Дальнейшие результаты приведем без доказательства.

В лемме 2 показано, как из произвольного состояния цикла  $k_0 > 0$  перейти в состояние продления с заданным количеством требований 0, 0,  $L + 1$ , 0 в очередях  $O_1, O_2, O_3, O_4$  соответственно.

**Лемма 2.** *Состояния вида*

$$(\Gamma^{(0, \tilde{r})}, \tilde{x}), \quad \tilde{r} = \overline{1, n_0}, \quad \tilde{x} = (0, 0, L + 1, 0)$$

*достижимы из состояний вида*

$$(\Gamma^{(k_0, r_0)}, x^0), \quad k_0 > 0, \quad r_0 = \overline{1, n_{k_0}}, \quad x^0 \in \mathbb{Z}_+^4.$$

Лемма 3 заключает о том, что состояния вида  $(\Gamma^{(0, \tilde{r})}, (0, 0, L + 1, 0))$  являются существенными. Наличие некоторого множества существенных состояний позволит в дальнейшем найти все оставшиеся существенные состояния.

**Лемма 3.** *Состояния вида*

$$(\Gamma^{(0, \tilde{r})}, \tilde{x}), \quad \tilde{r} = \overline{1, n_0}, \quad \tilde{x} = (0, 0, L + 1, 0)$$

*достижимы из любых состояний системы, т. е. из состояний вида*

$$(\Gamma^{(k_0, r_0)}, x^0), \quad k_0 = \overline{0, d}, \quad r_0 = \overline{1, n_{k_0}}, \quad x^0 \in \mathbb{Z}_+^4.$$

*Таким образом, состояния  $(\Gamma^{(0, \tilde{r})}, \tilde{x})$  являются существенными.*

В леммах 4, 5, 6 определяются состояния, сообщаемые с существенными состояниями  $(\Gamma^{(0, r_0)}, x^0)$ ,  $x^0 = (0, 0, L + 1, 0)$ ,  $r_0 = \overline{1, n_0}$ . Таким способом определится все множество существенных состояний. В частности, лемма 4 касается состояний циклов.





**Лемма 4.** *Состояния вида*

$$(\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, \tilde{x}), \quad \tilde{x} = (0, 0, \tilde{x}_3, 0), \quad \tilde{x}_3 \geq \max \left\{ 0, L + 1 - \sum_{s=1}^{\tilde{r}} \ell(\tilde{k}, s, 3) \right\},$$

$$\tilde{r} = \overline{1, n_{\tilde{k}}}, \quad \tilde{k} > 0, \quad \Gamma^{(\tilde{k}, 1)} = h_3(r_0)$$

достижимы из состояний вида

$$(\Gamma^{(0, r_0)}, x^0), \quad x_0 = (0, 0, L + 1, 0), \quad r_0 = \overline{1, n_0}.$$

**Лемма 5.** *Состояния вида*

$$(\Gamma^{(0, \tilde{r})}, \tilde{x}), \quad \tilde{x} = (0, 0, \tilde{x}_3, 0), \quad \tilde{x}_3 \geq \max \left\{ 0, L + 1 - \sum_{s=1}^{n_{\tilde{k}}} \ell(\tilde{k}, s, 3) \right\},$$

где  $\tilde{k} = \overline{1, d}$ ,  $\tilde{r} = \overline{1, n_0}$ , достижимы из состояний вида

$$(\Gamma^{(0, r_0)}, x^0), \quad x_0 = (0, 0, L + 1, 0), \quad r_0 = \overline{1, n_0}.$$

**Лемма 6.** *Состояния вида*

$$(\Gamma^{(0, \tilde{r})}, \tilde{x}),$$

где

$$\tilde{x} = (0, 0, \tilde{x}_3, 0), \quad \tilde{x}_3 \geq \max \left\{ 0, L + 1 - \max_{k=1, d} \left\{ \sum_{s=1}^{n_k} \ell(k, s, 3) \right\} \right\}, \quad \tilde{r} = \overline{1, n_0},$$

достижимы из состояний вида

$$(\Gamma^{(0, r_0)}, x^0), \quad x^0 = (0, 0, L + 1, 0), \quad r_0 = \overline{1, n_0}.$$

**Лемма 7.** *Если состояния вида*

$$(\Gamma^{(0, \tilde{r})}, (0, 0, \min\{L, \tilde{x}_3\}, 0)), \quad \tilde{r} = \overline{1, n_0}, \quad \tilde{x}_3 \geq 0$$

достижимы из начальных состояний вида

$$(\Gamma^{(0, r_0)}, x^0), \quad x^0 = (0, 0, L + 1, 0), \quad r_0 = \overline{1, n_0},$$

то тогда из начальных состояний достижимы и состояния вида

$$(\Gamma^{(0, \tilde{r})}, \tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \{y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in Z_+^4 : y_3 = \tilde{x}_3; \quad (y_1 > 0) \rightarrow (y_4 \geq \ell(0, \tilde{r}, 1))\}.$$

**Лемма 8.** *Состояния вида  $(\Gamma^{(0, \tilde{r})}, \tilde{x})$ , где  $\tilde{x}$  таково, что  $\tilde{x}_1 \geq 0$ ,  $\tilde{x}_2 \geq 0$ , а также*

$$\tilde{x}_3 \geq \max \left\{ 0, L + 1 - \max_{k=1, d} \left\{ \sum_{s=1}^{n_{\tilde{k}}} \ell(\tilde{k}, s, 3) \right\} \right\},$$

и

$$\tilde{x}_4 \geq 0 \text{ и } (x_1 > 0) \Rightarrow (x_4 \geq \ell(0, \tilde{r}, 1))$$

достижимы из состояний вида

$$(\Gamma^{(0, r_0)}, x^0), \quad x^0 = (0, 0, L + 1, 0), \quad \Gamma^{(0, r_0)} \in \Gamma.$$

**Лемма 9.** *Состояния вида*

$$(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0), \quad x_0 = (0, 0, L + 1, 0), \quad r_0 = \overline{1, n_0}$$

достижимы из состояний вида  $(\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, \tilde{x})$ , где  $\tilde{k} = \overline{1, d}$ ,  $\tilde{r} = \overline{1, n_{\tilde{k}}}$  и  $\tilde{x}$  таково, что

$$\tilde{x}_3 \geq \max \left\{ 0, L + 1 - \sum_{s=1}^{\tilde{r}} \ell(\tilde{k}, s, 3) \right\},$$

и

$$(\tilde{x}_1 > 0) \Rightarrow (\tilde{x}_4 \geq \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)).$$

**Теорема 1.** *Состояния вида  $(\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, \tilde{x})$ , где  $\tilde{k} = \overline{0, d}$ ,  $\tilde{r} = \overline{1, n_{\tilde{k}}}$ ,  $\tilde{x} \in \mathbb{Z}_+^4$ ,*

$$(\tilde{x}_1 > 0) \Rightarrow (\tilde{x}_4 \geq \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)), \quad (1)$$

$$\tilde{x}_3 \geq \max \left\{ 0, L + 1 - \sum_{s=1}^{\tilde{r}} \ell(k, s, 3) \right\}, \quad \text{если } \tilde{k} > 0, \quad (2)$$

$$\tilde{x}_3 \geq \max \left\{ 0, L + 1 - \max_{k=1, d} \left\{ \sum_{s=1}^{n_{\tilde{k}}} \ell(\tilde{k}, s, 3) \right\} \right\}, \quad \text{если } \tilde{k} = 0, \quad (3)$$

и только они достижимы из состояний

$$(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0), \quad x^0 = (0, 0, L + 1, 0), \quad r_0 = \overline{1, n_0}$$

и, следовательно, являются существенными.

В заключение введем множества

$$S_{0,r}^3 = \left\{ (\Gamma^{(0,r)}, x_3) : x_3 \in Z_+, x_3 > L - \max_{k=1,2,\dots,d} \left\{ \sum_{t=1}^{n_k} \ell(k, t, 3) \right\} \right\}, \quad 1 \leq r \leq n_0,$$

$$S_{k,r}^3 = \left\{ (\Gamma^{(k,r)}, x_3) : x_3 \in Z_+, x_3 > L - \sum_{t=1}^r \ell(k, t, 3) \right\}, \quad 1 \leq k \leq d, \quad 1 \leq r \leq n_k.$$

Из доказанных лемм 3–9 также следует другая теорема.

**Теорема 2.** *Множество существенных состояний марковской цепи  $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i = 0, 1, \dots\}$  имеет вид  $\left( \bigcup_{1 \leq r \leq n_0} S_{0,r}^3 \right) \cup \left( \bigcup_{\substack{1 \leq k \leq d \\ 1 \leq r \leq n_k}} S_{k,r}^3 \right)$ .*

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Проведенная классификация позволяет сузить множество состояний марковской цепи  $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i = 0, 1, \dots\}$  до множества существенных состояний. В дальнейшем исследовании, связанном с поиском необходимых и достаточных условий существования стационарного распределения, несущественные состояния могут быть отброшены, поскольку марковская цепь в них никогда не вернется.



## Библиографический список

1. *Haight F. A.* Mathematical Theories of Traffic Flow. N. Y : Academic, 1963. 241 p.
2. *Inose H., Hamada T.* Road Traffic Control. Tokyo : Univ. of Tokyo Press, 1975. 331 p.
3. *Drew D. R.* Traffic Stream Theory and Control. N. Y : McGraw-Hill, 1968. 467 p.
4. *Fedotkin M. A.* On a class of stable algorithms for control of conflicting flows or arriving airplanes // Problems of Control and Information Theory. 1977. Vol. 6, № 1. P. 17–27.
5. *Fedotkin M. A.* Construction of a model and investigation of nonlinear algorithms for control of intense conflict flows in a system with variable structure of servicing demands. I // Lithuanian mathematical journal. 1977. Vol. 7, № 1. P. 129–137. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00968503>
6. *Литвак Н. В., Федоткин М. А.* Вероятностная модель адаптивного управления конфликтными потоками // Автомат. и телемех. 2000. № 5. С. 67–76.
7. *Пройдакова Е. В., Федоткин М. А.* Управление выходными потоками в системе с циклическим обслуживанием и переналадками // Автомат. и телемех. 2008. № 6. С. 96–106.
8. *Yamada K., Lam T. N.* Simulation analysis of two adjacent traffic signals // Proceedings of the 17th Winter Simulation Conference. N. Y. : ACM, 1985. P. 454–464.
9. *Кочеганов В. М., Зорин А. В.* Достаточное условие существования стационарного режима низкоприоритетной очереди в тандеме систем массового обслуживания // Вестн. ВГАВТ. 2017. Вып. 50. С. 47–55.
10. *Кочеганов В. М., Зорин А. В.* Достаточное условие существования стационарного режима очередей первичных требований в тандеме систем массового обслуживания // Вестн. ТвГУ. Сер. Прикладная математика. 2018. № 2. С. 49–74. DOI: <https://doi.org/https://doi.org/10.26456/vtppmk193>

---

### Образец для цитирования:

*Кочеганов В. М.* Классификация состояний марковской цепи в модели тандема с циклическим управлением с продлением // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 257–265. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-257-265>

---

## Markov Chain States Classification in a Tandem Model with a Cyclic Service Algorithm with Prolongation

V. M. Kochegarov

Victor M. Kochegarov, <https://orcid.org/0000-0001-5575-2224>, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, 23 Prospekt Gagarina (Gagarin Avenue), Nizhnij Novgorod 603950, Russia, [kochegarov@gmail.com](mailto:kochegarov@gmail.com)

There is a limited list of papers about crossroads tandems. Usually the following service algorithms are under consideration: a cyclic algorithm with fixed duration, a cyclic algorithm with a loop a cyclic algorithm with regime changes etc. To construct a formal mathematical model of queuing systems nets and crossroads tandems in particular a descriptive approach is usually used. Using this approach input flows and service algorithms are set at the level of content, service duration distribution is known and set via a particular customer service distribution function. However with this approach one can not find nodes output flows distribution, as well as investigate customers' noninstantaneous transferring between systems and with dependent, different service time distributions. In this paper a new approach is utilized to construct probability models of tandems for conflict queuing systems with different service algorithms in subsystems. Within this approach



one can solve a problem of choosing the description for  $\omega$  elementary outcomes of the stochastic experiment and mathematically correctly define the stochastic process, which describes the entire system, as well as solve the above mentioned problems. Based on a constructively given probabilistic space one can strictly justify the reachability of one state from another the other which in turn gives a full description of the entire essential state space.

**Keywords:** stationary distribution, cybernetic control system, cyclic algorithm with prolongations, conflict flows, multidimensional denumerable discrete-time Markov chain, essential state.

Received: 07.11.2019 / Accepted: 30.12.2019 / Published: 01.06.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

## References

1. Haight F. A. *Mathematical Theories of Traffic Flow*. New York, Academic, 1963. 241 p.
2. Inose H., Hamada T. *Road Traffic Control*. Tokyo, Univ. of Tokyo Press, 1975. 331 p.
3. Drew D. R. *Traffic Stream Theory and Control*. New York, McGraw-Hill, 1968. 467 p.
4. Fedotkin M. A. On a class of stable algorithms for control of conflicting flows or arriving airplanes. *Problems of Control and Information Theory*, 1977, vol. 6, no. 1, pp. 17–27.
5. Fedotkin M. A. Construction of a model and investigation of nonlinear algorithms for control of intense conflict flows in a system with variable structure of servicing demands. I. *Lithuanian mathematical journal*, 1977, vol. 7, no. 1, pp. 129–137. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00968503>
6. Litvak N. V., Fedotkin M. A. A probabilistic model for the adaptive control of conflict flows. *Automation and Remote Control*, 2000, vol. 61, no. 5, pp. 777–784.
7. Proidakova E. V., Fedotkin M. A. Control of output flows in the system with cyclic servicing and readjustments. *Automation and Remote Control*, 2008, vol. 69, no. 6, pp. 993–1002.
8. Yamada K., Lam T. N. Simulation analysis of two adjacent traffic signals. *Proceedings of the 17th Winter Simulation Conference*. New York, ACM, 1985, pp. 454–464.
9. Kochegarov V. M., Zorine A. V. Sufficient condition of low-priority queue stationary distribution existence in a tandem of queuing systems. *Vestnik Volzhskoi gosudarstvennoi akademii vodnogo transporta* [Bulletin of the Volga State Academy of Water Transport], 2017, vol. 50, pp. 47–55 (in Russian).
10. Kochegarov V., Zorine A. V. Sufficient condition for primary queues stationary distribution existence in a tandem of queuing systems. *Vestnik TVGU. Ser. Prikl. Matem.* [Herald of Tver State University. Ser. Appl. Math.], 2018, no. 2, pp. 49–74 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.26456/vtpmk193>

---

## Cite this article as:

Kochegarov V. M. Markov Chain States Classification in a Tandem Model with a Cyclic Service Algorithm with Prolongation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 257–265 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-257-265>

---



УДК 519.872

## Метод анализа открытой сети массового обслуживания с деградируемой структурой и мгновенным восстановлением систем

И. Е. Тананко, Н. П. Фокина

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой системного анализа и автоматического управления, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, TanankolE@info.sgu.ru

Фокина Надежда Петровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, FokinaNP.sgu@gmail.com

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания с ненадежными системами массового обслуживания. В сеть из внешнего источника поступает пуассоновский поток требований одного класса. Для каждой системы длительность обслуживания требований в период ее бесперебойной работы и длительность наработки на отказ являются экспоненциально распределенными случайными величинами с известными параметрами. Последовательный выход из строя систем приводит к изменению в структуре и соответствующему изменению характеристик сети. Предполагается, что интервалы времени между изменениями структуры сети достаточны для наступления стационарного режима функционирования. Характеристикой качества функционирования сети на каждом интервале постоянства структуры является математическое ожидание длительности реакции сети. Мгновенное восстановление всех систем осуществляется в моменты, когда математическое ожидание длительности реакции сети становится больше заданного порогового значения или нарушается связность сети. Показано, что стационарное распределение вероятностей состояний ненадежной сети обслуживания имеет мультипликативную форму. Предложен метод анализа сети с использованием цепей Маркова с непрерывным временем и получены выражения для определения стационарных характеристик ненадежных систем и сети обслуживания, в том числе математического ожидания длительности интервала времени между моментами восстановления систем. На численном примере проведены исследования зависимостей характеристик сети от некоторых ее параметров.

**Ключевые слова:** сети массового обслуживания, цепи Маркова, метод анализа сетей массового обслуживания, ненадежные системы обслуживания.

Поступила в редакцию: 23.11.2018 / Принята: 05.04.2019 / Опубликовано: 01.06.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-266-276>

### ВВЕДЕНИЕ

Сети массового обслуживания используются в качестве математических моделей дискретных стохастических систем с сетевой структурой и с ненадежными





элементами. Например, для моделирования систем, в которых учитывается реакция на появление нежелательных изменений в обслуживаемых элементах, используются сети массового обслуживания с системами или группами систем обслуживания с обратной связью. Так, для оценки требуемого объема памяти и производительности проектируемой мультимедийной системы использована открытая сеть массового обслуживания, в которой системы массового обслуживания с обратной связью отображают процессы возникновения ошибок при передаче данных по ненадежным коммуникационным устройствам мультимедийной системы [1]. В работе [2] рассматривается сеть передачи пакетов и исследуется эффект влияния интенсивности возникновения ошибки в канале на среднюю задержку пакета. Каждый из ненадежных каналов моделируется системой массового обслуживания с обратной связью, отображающей повтор передачи пакета, если тот передан с ошибкой. Для моделирования производственных систем с ненадежными элементами может быть использована сеть массового обслуживания, состоящая из нескольких последовательно соединенных многоприборных систем обслуживания. Приборы систем последовательно переходят из работоспособного состояния в неработоспособное. После завершения обслуживания в последней системе требование с определенной вероятностью может перейти в первую систему цепи систем обслуживания [3].

Решение задач анализа и синтеза реальных систем с учетом выхода из строя и восстановления отдельных элементов приводит к необходимости развития теории и методов анализа сетей массового обслуживания с изменяемой структурой. Так, для сетей массового обслуживания с переменным числом систем обслуживания [4–6] и сетей массового обслуживания с включением и отключением связей между системами обслуживания [6, 7] получено стационарное распределение вероятностей числа требований в системах сетей. Для замкнутой сети обслуживания с переменной структурой использован метод формирования маршрутных матриц, обеспечивающих одинаковые средние длительности пребывания требований в системах обслуживания [8]. В работе [9] использован метод производящих функций для нахождения переходных вероятностей числа требований в ненадежных системах обслуживания открытой сети массового обслуживания. В работах [10, 11] рассматривается экспоненциальная сеть массового обслуживания, в которой любая из систем обслуживания может выходить из строя, т. е. прекращать обслуживание требований, и восстанавливаться. Требования в период восстановления приборов продолжают поступать в системы обслуживания. Предполагается, что интенсивности восстановления приборов систем обслуживания намного больше интенсивностей наработки на отказ этих приборов. Используя метод уменьшения интенсивностей обслуживания требований в системах сети, задача анализа ненадежной сети массового обслуживания сведена к решению задачи анализа абсолютно надежной экспоненциальной сети обслуживания. Открытая сеть с переменным числом параллельных систем обслуживания [12] используется в качестве математической модели GRID-системы. Ненадежные системы обслуживания отображают независимые процессы подключения и отключения вычислительных ресурсов GRID-системы.

В данной работе рассматривается сеть Джексона, в которой системы обслуживания в процессе функционирования сети последовательно выходят из строя. Длительности наработки на отказ систем обслуживания являются экспоненциально распределенными случайными величинами. В момент отказа очередной системы обслуживания все требования, находящиеся в этой системе, мгновенно теряются. При



этом маршрутная матрица сети обслуживания изменяется таким образом, чтобы требования не поступали в данную систему обслуживания. Предполагается, что как только среднее время реакции сети обслуживания будет превосходить предельное заданное значение из-за последовательного выхода из строя систем обслуживания, все отказавшие системы обслуживания мгновенно восстанавливаются. Мгновенное восстановление ранее отказавших систем обслуживания производится и тогда, когда выход из строя очередной системы обслуживания нарушает связность сети оставшихся работоспособными систем обслуживания. Случайный процесс отказов систем обслуживания с мгновенным их восстановлением представлен цепью Маркова с непрерывным временем. Для определения времени между моментами восстановления систем обслуживания используется поглощающая цепь Маркова. Получены выражения для определения стационарных характеристик систем и сети обслуживания с деградируемой структурой. Представлен численный пример расчета характеристик гипотетической сети массового обслуживания рассматриваемого типа.

## 1. ОПИСАНИЕ СЕТИ

Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания  $\Gamma$ , состоящую из  $L$  систем массового обслуживания  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ , типа  $M/M/\kappa_i$  с интенсивностями обслуживания  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ . Из источника  $S_0$  в сеть поступает пуассоновский поток требований одного класса с интенсивностью  $\lambda_0$ . Переходы требований между всеми системами обслуживания в сети определяются начальной маршрутной матрицей  $\Theta = (\theta_{ij})$ ,  $i, j = 0, \dots, L$ .

Предполагается, что системы сети могут выходить из строя независимо друг от друга. Длительность наработки на отказ системы  $S_i$  имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ . При отказе системы все требования, находящиеся в ней, теряются. Выход системы из строя приводит к изменению топологии сети и соответствующему изменению маршрутной матрицы  $\Theta$  с тем, чтобы исключить поступление требований в неработоспособную систему.

Пусть  $b = (b_i)$ ,  $i = 1, \dots, L$ , — вектор, определяющий структуру сети, где  $b_i = 0$ , если система  $S_i$  вышла из строя, иначе  $b_i = 1$ . Пусть  $\Theta(b)$  — маршрутная матрица сети со структурой  $b$ . Рассмотрим смежные структуры  $b$  и  $\tilde{b}$ , отличающиеся только одной компонентой с номером  $m$ ,  $m \in \{1, \dots, L\}$ , причем  $b_m = 1$ ,  $\tilde{b}_m = 0$ . В момент выхода из строя системы  $S_m$  вектор структуры сети  $b$  преобразуется в  $\tilde{b}$ , а маршрутная матрица  $\Theta(b)$  — в матрицу  $\Theta(\tilde{b})$ . Элементы матрицы  $\Theta(\tilde{b})$  определяются по формулам:

$$\begin{aligned}\theta_{ik}(\tilde{b}) &= \theta_{ik}(b)/(1 - \theta_{im}(b)), \quad i, k = 0, \dots, L, \quad i, k \neq m, \\ \theta_{mk}(\tilde{b}) &= 0, \quad k = 0, \dots, L, \quad k \neq m, \\ \theta_{im}(\tilde{b}) &= 0, \quad i = 0, \dots, L, \quad i \neq m, \\ \theta_{mm}(\tilde{b}) &= 1.\end{aligned}$$

Пусть  $n = (n_i)$ ,  $i = 1, \dots, L$ , — состояние сети, где  $n_i$  — число требований в системе  $S_i$ , тогда в момент выхода из строя системы  $S_m$   $n_m = 0$ . Основной характеристикой, определяющей качество работы сети со структурой  $b$ , будем считать математическое ожидание (м.о.) длительности реакции сети  $\tau_0(b)$ . Пусть для сети обслуживания задано пороговое значение м.о. длительности реакции  $\hat{\tau}_0$ . Процесс функционирования сети с нестационарной структурой осуществляется следующим



образом. Системы обслуживания выходят из строя независимо друг от друга с экспоненциальной длительностью наработки на отказ с разными интенсивностями, вызывая изменения в структуре сети  $b$ . Пока

$$\tau_0(b) < \hat{\tau}_0, \quad (1)$$

не предпринимается действий по восстановлению вышедших из строя систем. Если

$$\tau_0(b) \geq \hat{\tau}_0, \quad (2)$$

то предполагается, что все неработоспособные системы мгновенно восстанавливаются. Если при выходе из строя очередной системы обслуживания связность сети нарушается, то все системы также мгновенно восстанавливаются.

Требуется найти вероятностно-временные характеристики сети обслуживания.

## 2. МЕТОД АНАЛИЗА СЕТИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Эволюция сети  $\Gamma$  представляется множеством реализаций подсетей  $\Gamma(b)$ . Каждая реализация подсети обслуживания однозначно определяется вектором структуры  $b$  и маршрутной матрицей  $\Theta(b)$ . Другие параметры реализаций подсетей совпадают.

Пусть  $B$  — множество всевозможных векторов структур  $b$ . Подсеть  $\Gamma(b)$  назовем подсетью со связной конфигурацией, если маршрутная матрица множества исправных систем обслуживания является неприводимой. Пусть  $D$  — подмножество векторов  $b$ , образующих подсети  $\Gamma(b)$  со связной конфигурацией, для которых выполнено условие (1). Тогда  $B \setminus D$  — подмножество векторов структур  $b$ , для которых выполнено условие (2), включая случаи нарушения связности, для которых полагаем  $\tau_0(b) = \infty$ .

Эволюцию сети  $\Gamma$  можно рассматривать как два протекающих параллельно процесса: процесс отказов систем обслуживания с мгновенным их восстановлением по событию (2) и вложенный в него процесс функционирования сети с фиксированной топологией.

Изменение структуры сети приводит к возникновению переходного процесса, длительность которого будем считать существенно меньше длительности функционирования сети со структурой  $b \in D$ . Поэтому будем пренебрегать переходным процессом и считать, что сеть  $\Gamma(b)$  мгновенно переходит в стационарный режим функционирования. Стационарные характеристики сети  $\Gamma(b)$ ,  $b \in D$ , могут быть получены известными методами [13].

Случайный процесс отказов систем обслуживания с мгновенным их восстановлением по событию (2) может быть описан цепью Маркова  $M$  с непрерывным временем и множеством состояний  $D$ . Перенумеруем состояния множества  $D$  таким образом, что  $b^{(1)}$  — структура, при которой все системы сети работоспособны, нумерация остальных состояний — произвольная. В дальнейшем, если из контекста ясно, о каком состоянии идет речь, то нумерация состояний будет опускаться. Пусть  $\tilde{D} \subset D$  — подмножество граничных состояний  $b^{(i)} \in D$ , из которых возможен выход из множества  $D$ . Для состояния  $b^{(i)} \in \tilde{D}$  обозначим через  $T_i \subset B \setminus D$  подмножество смежных состояний таких, что  $b \in T_i$  тогда и только тогда, когда  $\|b^{(i)} - b\| = 1$  и выполнено условие (2). Интенсивность перехода из  $b^{(i)} \in \tilde{D}$  в  $T_i$  равна

$$\alpha(b^{(i)}, T_i) = \sum_{b \in T_i} \sum_{k=1}^L \gamma_k(b_k^{(i)} - b_k).$$



Интенсивности переходов из  $b^{(i)} \in D$  в  $b^{(j)} \in D$  цепи Маркова  $M$

$$\alpha(b^{(i)}, b^{(j)}) = \begin{cases} \sum_{k=1}^L \gamma_k(b_k^{(i)} - b_k^{(j)}), & \text{если } \|b^{(i)} - b^{(j)}\| = 1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

и интенсивность выхода из состояния  $b^{(i)} \in D$  при  $i \neq 1$

$$\alpha(b^{(i)}) = \sum_{k=1}^L \gamma_k b_k^{(i)}.$$

Мгновенное восстановление систем при выполнении условия (2) в модели означает, что для состояний  $b^{(i)} \in \tilde{D}$  при  $i \neq 1$  осуществляется переход в состояние  $b^{(1)}$  с интенсивностью

$$\alpha(b^{(i)}, b^{(1)}) = \alpha(b^{(i)}, T_i).$$

Если  $b^{(1)} \in \tilde{D}$ , то интенсивность выхода из состояния  $b^{(1)}$

$$\alpha(b^{(1)}) = \sum_{k=1}^L \gamma_k b_k^{(1)} - \alpha(b^{(1)}, T_1).$$

Обозначим инфинитезимальный оператор цепи Маркова через  $A = (a_{ij})$ , где

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \alpha(b^{(i)}, b^{(j)}) \quad \text{для } b^{(i)}, b^{(j)} \in D, \quad i \neq j, \\ a_{ii} &= -\alpha(b^{(i)}). \end{aligned}$$

Стационарное распределение вероятностей состояний цепи  $\pi = (\pi(b))$ ,  $b \in D$ , является решением уравнения  $\pi A = 0$  с условием нормировки  $\sum_{b \in D} \pi(b) = 1$ .

Тогда стационарные характеристики систем обслуживания сети  $\Gamma$  могут быть определены по формуле

$$\chi_k = \sum_{b \in D} \chi_k(b) \pi(b), \quad k = 1, \dots, L,$$

где  $\chi_k$  — интегральная характеристика системы  $S_k$ ,  $\chi_k(b)$  — характеристика системы  $S_k$  сети обслуживания  $\Gamma(b)$ , а м.о. длительности реакции сети  $\Gamma$

$$\tau_0 = \sum_{b \in D} \tau_0(b) \pi(b).$$

В частности, средняя интенсивность входящего потока в систему  $S_k$  равна

$$\lambda_k = \sum_{b \in D} \lambda_k(b) \pi(b), \quad k = 1, \dots, L.$$

Тогда пропускная способность ненадежной сети определяется выражением

$$\Lambda = \sum_{k=1}^L \lambda_k.$$

Покажем, что стационарные вероятности структур имеют мультипликативную форму и могут быть определены следующим образом.



Пусть  $L(b)$  — множество номеров отказавших систем обслуживания в структуре  $b$ ,  $A(b)$  — множество перестановок из элементов  $L(b)$ . Будем считать, что в каждой из  $|L(b)|!$  возможных перестановок слева направо указана последовательность номеров систем обслуживания в порядке их отказа. Обозначим номера этих систем через  $k_1, k_2, \dots, k_{|L(b)|}$  и определим

$$\rho(b) = \sum_{A(b)} \frac{\gamma_{k_1}}{\sum_{i=1}^L \gamma_i} \frac{\gamma_{k_2}}{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k_1}}^L \gamma_i} \dots \frac{\gamma_{k_{|L(b)|}}}{\sum_{\substack{i=1 \\ i \notin L(b) \setminus k_{|L(b)|}}}^L \gamma_i}.$$

Математическое ожидание длительности пребывания сети в структуре  $b \in D$  равна

$$d(b) = \left( \sum_{i=1}^L \gamma_i b_i \right)^{-1}.$$

Тогда вероятности состояний структур

$$\pi(b) = \frac{\rho(b)d(b)}{G}, \quad b \in D,$$

где  $G = \sum_{b \in D} \rho(b)d(b)$  — нормализующая константа.

Определим м.о. времени функционирования сети между моментами восстановления. Пусть  $d = |D|$  — мощность множества  $D$ . Обозначим через  $M^*$  поглощающую цепь Маркова, отличающуюся от цепи  $M$  наличием поглощающего состояния  $b^{(1)}$ . Очевидно, что инфинитезимальный оператор  $A^*$  цепи  $M^*$  отличается от оператора  $A$  только строкой, соответствующей состоянию  $b^{(1)}$ , и имеет вид

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^1 & S \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{S}^1$  — вектор вероятностей поглощения размерности  $(d-1) \times 1$ ,  $S$  — субгенератор, матрица интенсивностей перехода в множестве невозвратных состояний размерности  $(d-1) \times (d-1)$ ,  $\mathbf{0}$  — нулевой вектор размерности  $1 \times (d-1)$ . Начальное распределение цепи  $M^*$  положим равным  $\beta = (\beta_i)$ ,  $i = 1, \dots, d-1$ , где  $\beta_i = a_{1,i+1}/(-a_{ii})$ . Известно [14], что время до поглощения имеет фазовое распределение с математическим ожиданием, равным  $-\beta S^{-1} \mathbf{1}$ , где  $\mathbf{1}$  — единичный вектор-столбец. Тогда м.о. времени между моментами восстановления равно

$$g = -\beta S^{-1} \mathbf{1} + (-a_{11})^{-1}.$$

### 3. ПРИМЕР

Рассмотрим открытую экспоненциальную сеть массового обслуживания с одним классом требований,  $L = 8$ ,  $\lambda_0 = 1.1$ ,  $\hat{\tau}_0 = 9.2$ , вектор числа приборов  $\kappa = (1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1)$ , вектор интенсивностей обслуживания требований одним прибором  $\mu = (1.8, 1.0, 1.7, 1.0, 1.9, 2.0, 1.1, 1.9)$ , вектор интенсивностей наработки на отказ систем обслуживания  $\gamma = (0.01, 0.02, 0.04, 0.03, 0.04, 0.02, 0.01, 0.01)$ , ненулевые элементы исходной маршрутной матрицы равны  $\theta_{01} = 0.2$ ,  $\theta_{03} = 0.3$ ,  $\theta_{05} = 0.3$ ,  $\theta_{07} = 0.2$ ,  $\theta_{12} = 1$ ,  $\theta_{20} = 1$ ,  $\theta_{34} = 1$ ,  $\theta_{40} = 1$ ,  $\theta_{56} = 1$ ,  $\theta_{60} = 1$ ,  $\theta_{78} = 1$ ,  $\theta_{80} = 1$ .

При данных значениях параметров ненадежной сети обслуживания получены следующие значения характеристик:  $|D| = 325$ ,  $\tau_0 = 2.627$ ,  $\Lambda = 3.143$ , вероятность того,





что все системы обслуживания находятся в исправном состоянии, равна 0.202. Для сравнения, аналогичная сеть массового обслуживания, но с абсолютно надежными системами имеет следующие характеристики:  $\tau_0 = 2.531$ ,  $\Lambda = 3.203$ .

Проведены исследования зависимостей характеристик сети от ее параметров. Графики функции  $\tau_0$  при изменении интенсивности входящего потока требований  $\lambda_0$  для сети с ненадежными и абсолютно надежными системами при пороговых значениях  $\hat{\tau}_0 = 15$ ,  $\hat{\tau}_0 = 3$  и  $\hat{\tau}_0 = 2$  представлены на рис. 1, а, б, в соответственно.

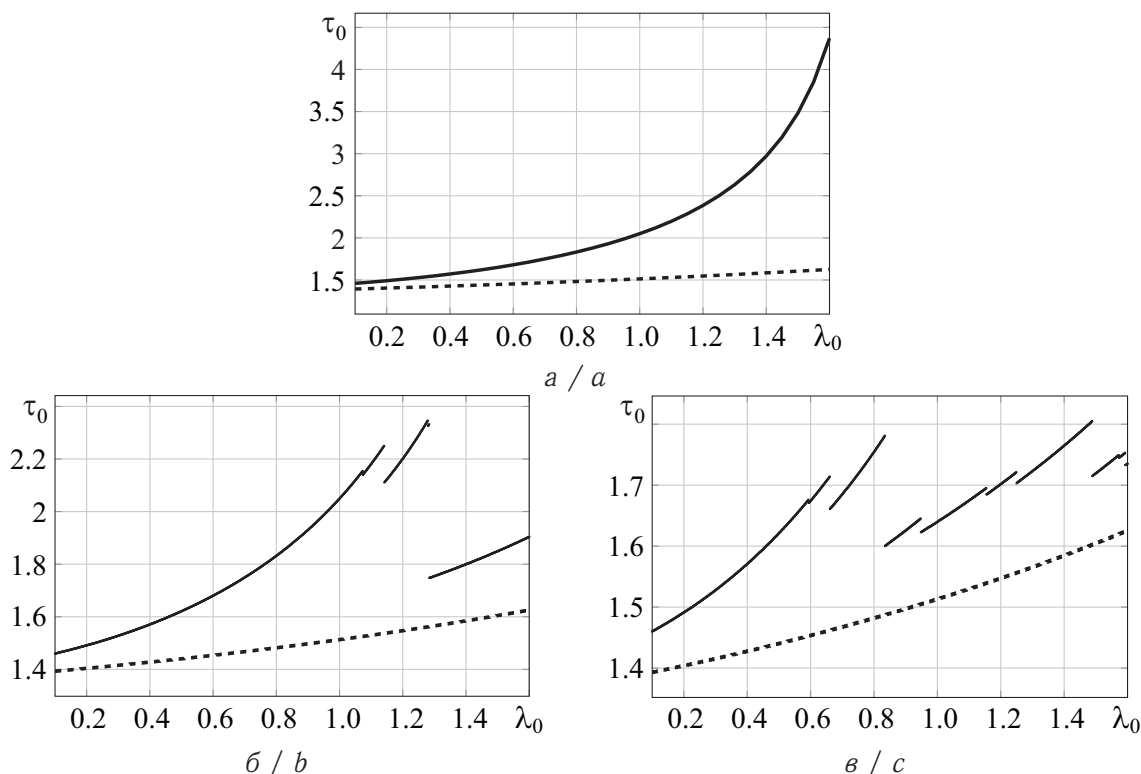


Рис. 1. Математическое ожидание длительности реакции абсолютно надежной (пунктирная линия) и ненадежной сетей (сплошная линия) при пороговом значении:

а —  $\hat{\tau}_0 = 15$ ; б —  $\hat{\tau}_0 = 3$ ; в —  $\hat{\tau}_0 = 2$

Fig. 1. The average response time for a reliable network (dashed line) and an unreliable network (solid line) at the threshold value: а —  $\hat{\tau}_0 = 15$ ; б —  $\hat{\tau}_0 = 3$ ; в —  $\hat{\tau}_0 = 2$

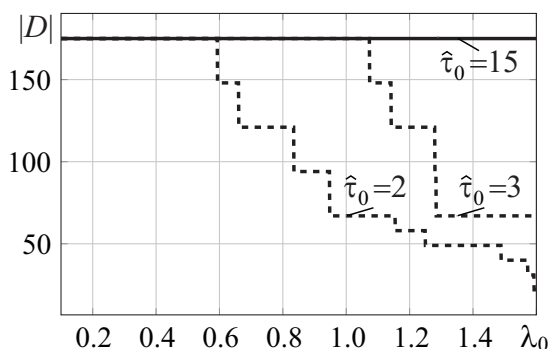


Рис. 2. Мощности множества допустимых состояний для ненадежной сети

Fig. 2. The cardinality of the set of admissible states for an unreliable network

Из результатов экспериментов, представленных на рис. 1, ясно, что  $\tau_0$  — кусочно-непрерывная функция. Точки разрыва функции  $\tau_0$  соответствуют изменению мощности множества  $D$  из-за состояний, в которых  $\tau_0$  становится больше порогового значения  $\hat{\tau}_0$ . График скачков мощности множества  $D$  показан на рис. 2.

Чем меньше пороговое значение  $\hat{\tau}_0$ , тем чаще происходит изменение состава множества  $D$  и тем больше точек разрыва — скачков имеет функция  $\tau_0$ . На каждом интервале непрерывности функция  $\tau_0$



имеет тенденцию к экспоненциальному росту при увеличении интенсивности входящего потока  $\lambda_0$ .

На рис. 3, а показан график зависимости м.о. времени между моментами восстановления  $g$  от порогового значения длительности реакции сети  $\hat{\tau}_0$  при фиксированном значении интенсивности входящего потока  $\lambda_0$ . Мощность множества  $D$  скачкообразно возрастает при увеличении  $\hat{\tau}_0$  и фиксированном  $\lambda_0$ , поэтому значение  $g$  ведет себя аналогично и имеет постоянные значения на интервалах изменения  $\hat{\tau}_0$ , для которых структуры  $D$  постоянны.

На рис. 3, б показан график зависимости м.о. времени между моментами восстановления  $g$  от интенсивности входящего потока  $\lambda_0$  при  $\hat{\tau}_0 = 2$ . Скачки функции  $g$  на этом графике соответствуют изменениям структуры множества  $D$ , которые отражены на рис. 2, когда  $\hat{\tau}_0 = 2$ .

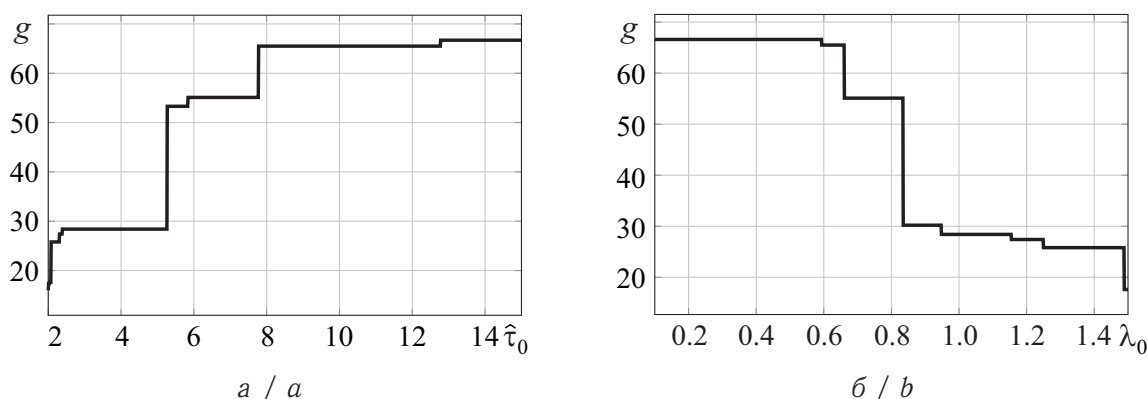


Рис. 3. Математическое ожидание длительности функционирования сети между восстановлениями: а — как функция порогового значения математического ожидания длительности реакции при интенсивности входящего потока  $\lambda_0 = 1.6$ ; б — как функция интенсивности входящего потока при пороговом значении математического ожидания длительности реакции  $\hat{\tau}_0 = 2$

Fig. 3. The average of repair time intervals: а — as a function of the threshold value at the arrival rate  $\lambda_0 = 1.6$ ; б — as a function of the arrival rate at the threshold value  $\hat{\tau}_0 = 2$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен метод анализа сети массового обслуживания с последовательно отключающимися многоприборными системами обслуживания и их последующим мгновенным восстановлением, когда математическое ожидание времени реакции сети превышает заданное пороговое значение или выход из строя очередной системы обслуживания приводит к нарушению связности сети. Разработанный метод может быть использован для решения задач проектирования и анализа сетей передачи информации с ненадежными элементами. В модельной сети обслуживания реализован метод технического обслуживания, суть которого состоит в том, что восстановление отказавших элементов сети начинается после того, как качество функционирования сети достигло критического уровня.

## Библиографический список

1. Park K., Kim S. A capacity planning model of unreliable multimedia service systems // Journal of Systems and Software. 2002. Vol. 63, iss. 1. P. 69–76. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0164-1212\(01\)00141-8](https://doi.org/10.1016/S0164-1212(01)00141-8)



2. *Economides A. A., Silvester J. A.* Optimal routing in a network with unreliable links // IEEE INFOCOM'88. 1988. P. 288–297. DOI: <https://doi.org/10.1109/CNS.1988.5007>
3. *Thomas N., Thornley D., Zatschler H.* Approximate solution of a class of queueing networks with breakdowns // Proc. of 17th European Simulation Multiconference. Nottingham, UK : SCS Publishers, 2003. P. 251–256.
4. *Chao X.* A queueing network model with catastrophes and product form solution // Operations Research Letters. 1995. Vol. 18, iss. 2. P. 75–79. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-6377\(95\)00029-0](https://doi.org/10.1016/0167-6377(95)00029-0)
5. *Тананко И. Е.* О замкнутых сетях массового обслуживания с переменным числом систем обслуживания // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 5, вып. 1. С. 138–141.
6. *Цициашвили Г. Ш., Осипова М. А.* Предельные распределения в сетях массового обслуживания с ненадежными элементами // Пробл. передачи информ. 2008. Т. 44, вып. 4. С. 109–119.
7. *Tassiulas L.* Scheduling and performance limits of networks with constantly changing topology // IEEE Transactions on Information Theory. 1997. Vol. 43, iss. 3. P. 1067–1073. DOI: <https://doi.org/10.1109/18.568722>
8. *Фокина Н. П., Тананко И. Е.* Метод управления маршрутизацией в сетях массового обслуживания с переменной топологией // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 2, ч. 2. С. 82–88. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-2-2-82-88>
9. *Статкевич С. Э., Маталыцкий М. А.* Исследование сети массового обслуживания с ненадежными системами в переходном режиме // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1 (18). С. 112–125.
10. *Chakka R., Mitrani I.* Approximate solutions for open networks with breakdowns and repairs // Stochastic Networks : Theory and Applications (Royal Statistical Society Series) / eds. F. P. Kelly, S. Zachary, I. Ziedins. Oxford : Clarendon Press, 1996. Vol. 4. P. 267–280.
11. *Vinod B., Altiok T.* Approximating Unreliable Queueing Networks Under the Assumption of Exponentiality // J. Opl. Res. Soc. 1986. Vol. 37, № 3. P. 309–316. DOI: <https://doi.org/10.1057/jors.1986.49>
12. *Thomas N., Bradley J. T., Knottenbelt W. J.* Stochastic analysis of scheduling strategies in a Grid-based resource model // IEEE Proceedings – Software. 2004. Vol. 151, iss. 5. P. 232–239. DOI: <https://doi.org/10.1049/ip-sen:20041091>
13. *Митрофанов Ю. И.* Анализ сетей массового обслуживания. Саратов : Научная книга, 2005. 175 с.
14. *He Q.-M.* Fundamentals of matrix-analytic methods. N. Y. : Springer, 2014. 349 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7330-5>

---

#### Образец для цитирования:

Тананко И. Е., Фокина Н. П. Метод анализа открытой сети массового обслуживания с деградируемой структурой и мгновенным восстановлением систем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 266–276. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-266-276>

---



# An Analysis Method of Open Queueing Networks with a Degradable Structure and Instantaneous Repair Times of Systems

I. E. Tananko, N. P. Fokina

Igor E. Tananko, <https://orcid.org/0000-0001-8960-9709>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, TanankoIE@info.sgu.ru

Nadezhda P. Fokina, <https://orcid.org/0000-0002-8085-609X>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, FokinaNP.sgu@gmail.com

An unreliable open queueing network with Poisson arrivals is considered. For each queueing system the service and failures times are exponentially distributed random variables. The failures of systems lead to changes in the structure of the network and corresponding changes in the performance measures of the queueing network. It is assumed that the times between changes in the network structure are sufficient for the steady-state regime. The main measure of the quality for the network at each structure constancy interval is the average response time. Repairs of all queueing systems occur immediately when the average response time becomes greater than the threshold value. This article presents a method of the network analysis using continuous time Markov chains. It is shown that the steady-state probability distribution of the unreliable queueing network has a product form solution. Expressions for the stationary performance measures of queueing systems and the network including the average of system repair time intervals are obtained. A numerical example to investigate the dependence of the performance measures on some network parameters is demonstrated.

**Keywords:** queueing networks, Markov chains, unreliable queueing systems, degradable structure of queueing network.

Received: 23.11.2018 / Accepted: 05.04.2019 / Published: 01.06.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

## References

1. Park K., Kim S. A capacity planning model of unreliable multimedia service systems. *Journal of Systems and Software*, 2002, vol. 63, iss. 1, pp. 69–76. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0164-1212\(01\)00141-8](https://doi.org/10.1016/S0164-1212(01)00141-8)
2. Economides A. A., Silvester J. A. Optimal routing in a network with unreliable links. *IEEE INFOCOM'88*, 1988, pp. 288–297. DOI: <https://doi.org/10.1109/CNS.1988.5007>
3. Thomas N., Thornley D., Zatschler H. Approximate solution of a class of queueing networks with breakdowns. *Proc. of 17th European Simulation Multiconference*. Nottingham, UK, SCS Publishers, 2003, pp. 251–256.
4. Chao X. A queueing network model with catastrophes and product form solution. *Operations Research Letters*, 1995, vol. 18, iss. 2, pp. 75–79. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-6377\(95\)00029-0](https://doi.org/10.1016/0167-6377(95)00029-0)
5. Tananko I. E. About closed queueing networks with a variable number of queues. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2005, vol. 5, iss. 1, pp. 138–141 (in Russian).
6. Tsitsiashvili G. Sh., Osipova M. A. Limiting distributions in queueing networks with unreliable elements. *Probl. Inf. Transm.*, 2008, vol. 44, iss. 4, pp. 385–394. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0032946008040091>



7. Tassiulas L. Scheduling and performance limits of networks with constantly changing topology. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1997, vol. 43, iss. 3, pp. 1067–1073. DOI: <https://doi.org/10.1109/18.568722>
8. Fokina N. P., Tananko I. E. The Method of Routing in Queueing Networks with Variable Topology. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013. vol. 13, iss. 2, pt. 2, pp. 82–88 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-2-2-82-88>
9. Statkevich C. E., Matalytsky M. A. Investigation of queueing network with unreliable systems at transient regime. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2012, no. 1 (18), pp. 112–125 (in Russian).
10. Chakka R., Mitrani I. Approximate solutions for open networks with breakdowns and repairs. In: *Stochastic Networks: Theory and Applications (Royal Statistical Society Series)* / eds. F. P. Kelly, S. Zachary, I. Ziedins. Oxford, Clarendon Press, 1996. Vol. 4, pp. 267–280.
11. Vinod B., Altiok T. Approximating Unreliable Queueing Networks Under the Assumption of Exponentiality. *J. Opl. Res. Soc.*, 1986, vol. 37, no. 3, pp. 309–316. DOI: <https://doi.org/10.1057/jors.1986.49>
12. Thomas N., Bradley J. T., Knottenbelt W. J. Stochastic analysis of scheduling strategies in a Grid-based resource model. *IEEE Proceedings – Software*, 2004, vol. 151, iss. 5, pp. 232–239. DOI: <https://doi.org/10.1049/ip-sen:20041091>
13. Mitrophanov Yu. I. *Analiz setei massovogo obsluzhivaniia* [Analysis of Queueing Networks]. Saratov, Nauchnaya kniga, 2005. 175 p. (in Russian).
14. He Q.-M. *Fundamentals of matrix-analytic methods*. New York, Springer, 2014. 349 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7330-5>

---

**Cite this article as:**

Tananko I. E., Fokina N. P. An Analysis Method of Open Queueing Networks with a Degradable Structure and Instantaneous Repair Times of Systems. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 266–276 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-266-276>

---