

ISSN 1816-9791 (Print)  
ISSN 2541-9005 (Online)

# ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия



Серия Математика. Механика. Информатика

2020

Том 20

Выпуск 3



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

# ИЗВЕСТИЯ

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 3

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,  
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004

САРАТОВСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА  
Новая серия



Научный журнал  
2020 Том 20

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издается с 2005 года

## СОДЕРЖАНИЕ

### Научный отдел

#### Математика

Bredikhin D. A. On Semigroups of Relations with the Operation of Left and Right Rectangular Products [Бредихин Д. А. О полугруппах отношений с операцией левого и правого прямоугольного произведения]	280
Raeev C. M., Cherevatenko O. I. O customary-prostранствах алгебр Лейбница–Пуассона [Раеев С. М., Череватенко О. И. О customary-пространствах алгебр Лейбница–Пуассона]	290
Salimov R. B., Xasanova E. N. Новый метод исследования краевой задачи Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка [Салимов Р. Б., Хасанова Э. Н. Новый метод исследования краевой задачи Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка]	297
Xalilov E. G. О приближенном решении одного класса слабо сингулярных интегральных уравнений [Халилов Э. Г. О приближенном решении одного класса слабо сингулярных интегральных уравнений]	310
Chumachenko S. A. Гладкие аппроксимации в $C[0, 1]$ [Чумаченко С. А. Гладкие аппроксимации в $C[0, 1]$ ]	326
Yurko V. A. On Determination of Functional-Differential Pencils on Closed Sets from the Weyl-Type Function [Юрко В. А. Об определении функционально-дифференциальных пучков на замкнутых множествах по функции типа Вейля]	343

#### Механика

Bykova T. B., Grushenkova E. D., Popov V. S., Popova A. A. Гидроупругая реакция трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, взаимодействующей со штампом через слой вязкой жидкости [Быкова Т. В., Грушенкова Е. Д., Попов В. С., Попова А. А. Гидроупругая реакция трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, взаимодействующей со штампом через слой вязкой жидкости]	351
---	-----

#### Информатика

Bespalov M. S. Троичный дискретный вейвлетный базис [Беспалов М. С. Троичный дискретный вейвлетный базис]	367
Vlaschina A. S., Poljakov N. A., Gudkova I. A., Gaidamaka Yu. B. Анализ вероятностно-временных характеристик обслуживания эластичного трафика с минимальной скоростью в сегменте беспроводной сети с нарезкой радиоресурсов [Власкина А. С., Поляков Н. А., Гудкова И. А., Гайдамака Ю. В. Анализ вероятностно-временных характеристик обслуживания эластичного трафика с минимальной скоростью в сегменте беспроводной сети с нарезкой радиоресурсов]	378
Polin E. P., Moiseeva S. P., Moiseev A. N. Анализ вероятностных характеристик гетерогенной СМО вида $MR(S)/M(S)/\infty$ с параметрами обслуживания, зависящими от состояния вложенной цепи Маркова [Полин Е. П., Моисеева С. П., Моисеев А. Н. Анализ вероятностных характеристик гетерогенной СМО вида $MR(S)/M(S)/\infty$ с параметрами обслуживания, зависящими от состояния вложенной цепи Маркова]	388
Chernyshova E. N., Lysovskaya E. Yu. Суммарный объем занятого ресурса в системе с параллельным обслуживанием и входящим MMPP-потоком [Чернышова Е. Н., Лисовская Е. Ю. Суммарный объем занятого ресурса в системе с параллельным обслуживанием и входящим MMPP-потоком]	400

Журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Запись о регистрации СМИ ПИ № ФС77-76640 от 26 августа 2019 года

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (специальности: 01.01.01; 01.01.02; 01.01.06; 01.01.07; 01.01.09; 01.02.04; 01.02.05; 01.02.06; 01.02.08; 05.13.01; 05.13.18). Журнал входит в международные базы данных Emerging Sources Citation Index, Scopus, MathSciNet, zbMATH, DOAJ

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год

Директор издательства  
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор  
Каргин Игорь Анатольевич

Художник  
Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист  
Кочкаева Инна Анатольевна

Верстка  
Халова Виктория Анатольевна

Технический редактор  
Каргин Игорь Анатольевич

Корректор  
Кочкаева Инна Анатольевна

Адрес учредителя, издателя и издательства (редакции):  
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83  
Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89  
E-mail: izvestiya@info.sgu.ru

Подписано в печать 25.08.20.  
Подписано в свет 31.08.20.  
Формат 60x84 1/8.  
Усл. печ. л. 16,04(17,25).  
Тираж 500 экз. Заказ 70-Т.

Отпечатано в типографии  
Саратовского университета.

Адрес типографии:  
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2020



## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <http://mmi.sgu.ru/ru/dlya-avtorov>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редакцией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редакция принимает решение о возможности их опубликования в журнале. В случае положительного решения об опубликовании статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензирована.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редакции высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <http://mmi.sgu.ru>.

### Адрес редакции серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,  
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,  
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: [mmi@info.sgu.ru](mailto:mmi@info.sgu.ru)

Website: <http://mmi.sgu.ru/>

### Ответственный секретарь серии:

Шевцова Юлия Владиславовна

## CONTENTS

### Scientific Part

#### Mathematics

<b>Bredikhin D. A.</b> On Semigroups of Relations with the Operation of Left and Right Rectangular Products	280
<b>Ratseev S. M., Cherevatenko O. I.</b> On Customary Spaces of Leibniz–Poisson Algebras	290
<b>Salimov R. B., Khasanova E. N.</b> New Method for Investigating the Hilbert Boundary Value Problem with an Infinite Logarithmic Order Index	297
<b>Khalilov E. H.</b> On the Approximate Solution of a Class of Weakly Singular Integral Equations	310
<b>Chumachenko S. A.</b> Smooth Approximations in $C[0, 1]$	326
<b>Yurko V. A.</b> On Determination of Functional-Differential Pencils on Closed Sets from the Weyl-Type Function	343

#### Mechanics

<b>Bykova T. V., Grushenkova E. D., Popov V. S., Popova A. A.</b> Hydroelastic Response of a Sandwich Plate Possessing a Compressible Core and Interacting with a Rigid Die Via a Viscous Fluid Layer	351
---	-----

#### Computer Sciences

<b>Bespalov M. S.</b> Ternary Discrete Wavelet Basis	367
<b>Vlaskina A. S., Polyakov N. A., Gudkova I. A., Gaidamaka Yu. V.</b> Performance Analysis of Elastic Traffic with Minimum Bit Rate Guarantee Transmission in Wireless Network under Network Slicing	378
<b>Polin E. P., Moiseeva S. P., Moiseev A. N.</b> Heterogeneous Queueing System $MR(S)/M(S)/\infty$ with Service Parameters Depending on the State of the Underlying Markov Chain	388
<b>Chernishova E. N., Lisovskaya E. Yu.</b> On a Total Resource Amounts at the System with Parallel Service and MMPP Arrivals	400

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА  
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.  
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

**Главный редактор**

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Заместитель главного редактора**

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Ответственный секретарь**

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

**Члены редакционной коллегии:**

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)  
Ватулин Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

dell'Isola Francesco, доктор наук, профессор (Рим, Италия)

Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Омск, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)

Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)

Индайцев Дмитрий Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Республика Беларусь)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Матвеенко Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, акад. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Пархоменко Павел Павлович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук (Долгопрудный, Московская обл., Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ульяновск, Россия)

Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)

Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Республика Беларусь)

Субботин Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Екатеринбург, Россия)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шалыто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чуань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL  
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.  
SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

**Editor-in-Chief** – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

**Deputy Editor-in-Chief** – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

**Executive Secretary** – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

**Members of the Editorial Board:**

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Francesco dell'Isola (Rome, Italy)

Dmitry A. Indeitsev (St. Petersburg, Russia)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

Avgust P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Nikita F. Morozov (St. Petersburg, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan', Russia)

Pavel P. Parkhomenko (Moscow, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)

Alexander F. Rezhikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Shoji IMATANI (Kyoto, Japan)

Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny, Moscow region, Russia)

Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

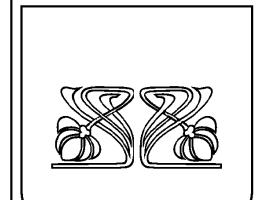
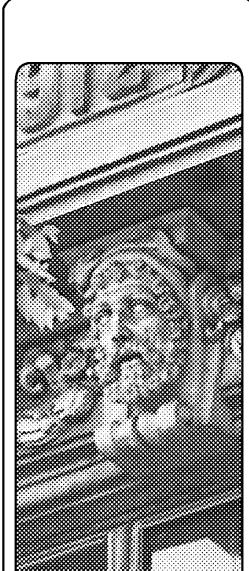
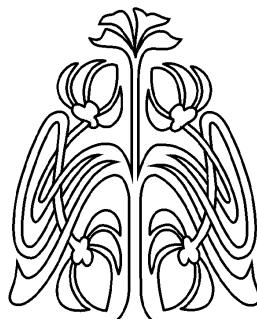
Yurii N. Subbotin (Ekaterinburg, Russia)

Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

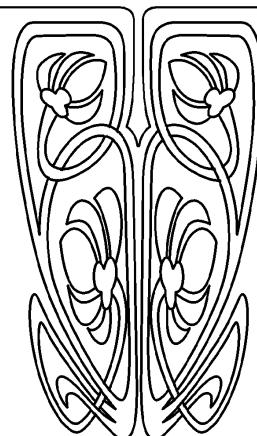
Vjacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

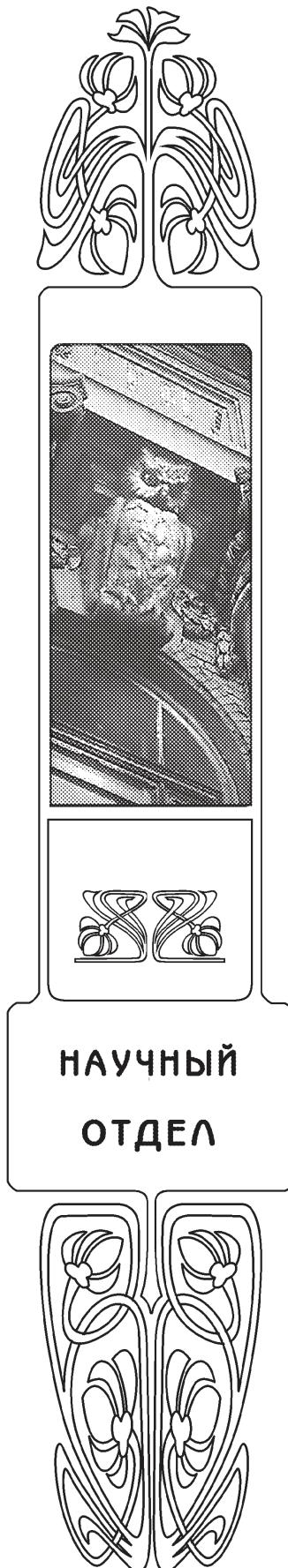
Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)

Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ  
КОЛЛЕГИЯ**





# MATEMATIKA

## On Semigroups of Relations with the Operation of Left and Right Rectangular Products

D. A. Bredikhin

Dmitry A. Bredikhin, <https://orcid.org/0000-0003-3600-1294>, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politehnicheskaya St., Saratov 410054, Russia, bredikhin@mail.ru

A set of binary relations closed with respect to some collection of operations on relations forms an algebra called an algebra of relations. The class of all algebras (partially ordered algebras) isomorphic to algebras (partially ordered by set-theoretic inclusion  $\subseteq$ ) of relations with operations from  $\Omega$  is denoted by  $R\{\Omega\}$  ( $R\{\Omega, \subseteq\}$ ). An operation on relations is called primitive-positive if it can be defined by a formula of the first-order predicate calculus containing only existential quantifiers and conjunctions in its prenex normal form. We consider algebras of relations with associative primitive-positive operations  $*$  and  $\star$ , defined by the following formulas  $\rho * \sigma = \{(u, v) : (\exists s, t, w)(u, s) \in \rho \wedge (t, w) \in \sigma\}$  and  $\rho \star \sigma = \{(u, v) : (\exists s, t, w)(s, t) \in \rho \wedge (w, v) \in \sigma\}$  respectively. The axiom systems for the classes  $R\{*\}$ ,  $R\{*, \subseteq\}$ ,  $R\{\star\}$ ,  $R\{\star, \subseteq\}$ , and bases of quasi-identities and identities for quasi-varieties and varieties generated by these classes are found.

**Keywords:** algebra of relations, primitive positive operation, identity, variety, quasi-identity, quasi-variety, semigroup, partially ordered semigroup.

Received: 11.06.2019 / Accepted: 28.06.2019 /

Published: 31.08.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-280-289>

### INTRODUCTION

Let  $\text{Rel}(U)$  be the set of all binary relations on a base set  $U$ . A set of binary relations  $\Phi \subseteq \text{Rel}(U)$  closed with respect to some collection  $\Omega$  of operations on relations forms an algebra  $(\Phi, \Omega)$  called an *algebra of relations*. Theory of algebras of relations is an essential part of modern algebraic logic and has numerous applications in theory of semigroups [1].



Operations on relations are usually determined using first-order predicate calculus formulas. Such operations are called *logical*. It is known that classes of algebras of relations with logical operations are axiomatizable [1]. Logical operations can be classified by the type of formulas defining them. An operation on relations is called *primitive-positive* [2] (in other terminology — Diophantine operations [3, 4], generalized superpositions [5]) if it can be defined by a formula of the first-order predicate calculus containing only existential quantifiers and conjunctions in its prenex normal form.

Note that the set-theoretical inclusion  $\subseteq$  is compatible with all primitive-positive operations. Thus, any algebra of relations with primitive-positive operations  $(\Phi, \Omega)$  can be considered as partially ordered  $(\Phi, \Omega, \subseteq)$ . We denote by  $R\{\Omega\}$  (respectively,  $R\{\Omega, \subseteq\}$ ) the class of all algebras (partially ordered algebras) isomorphic to the ones whose elements are binary relations and whose operations are members of  $\Omega$ . Let  $V\{\Omega\}$  ( $V\{\Omega, \subseteq\}$ ) be the variety and let  $Q\{\Omega\}$  ( $Q\{\Omega, \subseteq\}$ ) be the quasi-variety generated by  $R\{\Omega\}$  (generated by  $R\{\Omega, \subseteq\}$ ) in the class of all partially ordered algebras of the corresponding type).

The following problems naturally arise when the class  $R\{\Omega\}$  ( $R\{\Omega, \subseteq\}$ ) is considered.

1. *Find a system of axioms for the class  $R\{\Omega\}$  ( $R\{\Omega, \subseteq\}$ ).*
2. *Find a basis of quasi-identities for the quasi-variety  $Q\{\Omega\}$  ( $Q\{\Omega, \subseteq\}$ ).*
3. *Find a basis of identities for the variety  $V\{\Omega\}$  ( $V\{\Omega, \subseteq\}$ ).*
4. *Does the class  $R\{\Omega\}$  ( $R\{\Omega, \subseteq\}$ ) form a quasi-variety?*
5. *Does the quasi-variety  $Q\{\Omega\}$  ( $Q\{\Omega, \subseteq\}$ ) form a variety?*

Numerous studies have been devoted to solving these problems for various classes of algebras of relations. The first mathematician who treated algebras of relations from the point of view of universal algebra was A. Tarski [6]. He considered algebras of relations (Tarski's algebras of relations) with the following operations: Boolean operations  $\cup, \cap, \neg$ ; operations of relational product  $\circ$  and relational inverse  $^{-1}$ ; constant operations  $\Delta$  (diagonal relation),  $\emptyset$  (empty relation),  $\nabla = U \times U$  (universal relation). He showed that the class  $R\{\circ, ^{-1}, \cup, \cap, \neg, \Delta, \emptyset, \nabla\}$  is not a quasi-variety and the quasi-variety generated by this class forms a variety [7]. R. Lyndon [8] found the infinite base of identities for this variety.

In this paper, we will consider algebras of relations with one associative primitive-positive operation, i. e., semigroup of relations. Note that the operation  $\circ, \cap$  of Tarski's algebras of relations are primitive-positive. These operations are determined by the formulas:

$$\rho \circ \sigma = \{(u, v) : (\exists s)(u, s) \in \rho \wedge (s, v) \in \sigma\}, \quad \rho \cap \sigma = \{(u, v) : (u, v) \in \rho \wedge (u, v) \in \sigma\}.$$

It is well known that the class  $R\{\circ\}$  coincides with the class of all semigroups and the class  $R\{\cap\}$  coincides with the class of all semilattices. The class  $R\{\circ, \subseteq\}$  coincides with the class of all partially ordered semigroups.

The associative operations  $\triangleright, \triangleleft$  of restrictive multiplication were introduced and investigated in [9]. These operations are defined as follows:

$$\rho \triangleright \sigma = \{(u, v) : (\exists s)(u, s) \in \rho \wedge (s, v) \in \sigma\}, \quad \rho \triangleleft \sigma = \{(u, v) : (\exists s)(u, v) \in \rho \wedge (s, v) \in \sigma\}.$$

The classes  $R\{\triangleright\}$  and  $R\{\triangleleft\}$  coincide with the following varieties of semigroups given by the identities  $x^2 = x$ ,  $xyz = yxz$  and  $x^2 = x$ ,  $xyz = xzy$  respectively. Characterization of the corresponding partially ordered semigroups requires the additional identities  $xy \leqslant y$  and  $xy \leqslant x$  respectively.



There are other associative primitive-positive operations on relations [5]. It is interesting to consider problems 1–5 for classes of semigroups of relations with these operations. We concentrate our attention on the following associative binary primitive-positive operations  $*$  and  $\star$  on  $\text{Rel}(U)$  that is defined in the following way:

$$\begin{aligned}\rho * \sigma &= \{(u, v) : (\exists s, t, w)(u, s) \in \rho \wedge (t, w) \in \sigma\}, \\ \rho \star \sigma &= \{(u, v) : (\exists s, t, w)(s, t) \in \rho \wedge (w, v) \in \sigma\}.\end{aligned}$$

Since relations  $\rho * \sigma$  and  $\rho \star \sigma$  are rectangular, we will treat these operations as the operations of left and right *rectangular products* respectively. Note that the mapping  $f(\rho) = \rho^{-1}$  is an antiisomorphism of the partially ordered semigroups of relations  $(\text{Rel}(U), *, \subseteq)$  and  $(\text{Rel}(U), \star, \subseteq)$ . Therefore, it will be sufficient to study only one of these operations.

## 1. MAIN RESULTS

A *partially ordered semigroup* is an algebraic system  $(A, \cdot, \leqslant)$ , where  $(A, \cdot)$  is a semigroup and  $\leqslant$  is a partial order relation on  $A$  that is compatible with multiplication, i. e.,  $x \leqslant y$  implies  $xz \leqslant yz$  and  $zx \leqslant zy$  for all  $x, y, z \in A$ .

The main results are formulated in the following theorems and corollaries. These results provide a solution to problems 1–5 for classes  $R\{*\}$  and  $R\{\star, \subseteq\}$ . Their proofs are based on the description of quasi-equational theories of algebras of relations with primitive-positive operations [3].

**Theorem 1.** *The quasi-variety  $Q\{\star, \subseteq\}$  forms a variety in the class of all partially ordered semigroups. A partially ordered semigroup  $(A, \cdot, \leqslant)$  belongs to the quasi-variety  $Q\{\star, \subseteq\}$  if and only if it satisfies the identities:*

$$x^2y = xy, \tag{1}$$

$$xy^2 = xy, \tag{2}$$

$$xyz = xzy, \tag{3}$$

$$x \leqslant x^2, \tag{4}$$

$$xy \leqslant x^2. \tag{5}$$

**Corollary 1.** *The quasi-variety  $Q\{\star\}$  forms a variety. A semigroup  $(A, \cdot)$  belongs to the quasi-variety  $Q\{\star\}$  if and only if it satisfies the identities (1)–(3).*

**Theorem 2.** *The class  $R\{\star, \subseteq\}$  does not form a quasi-variety. For a partially ordered semigroup  $(A, \cdot, \leqslant)$  the following three conditions are equivalent.*

1.  $(A, \cdot, \leqslant)$  belongs to the class  $R\{\star, \subseteq\}$ .
2. One of the following conditions holds:
  - a)  $(A, \cdot, \leqslant)$  satisfies identity (4) and the identity

$$xy = x^2; \tag{6}$$

- b)  $(A, \cdot, \leqslant)$  contains the zero element  $o$ , satisfies identity (4) and the axioms:

$$y \neq o \Rightarrow xy = x^2, \tag{7}$$

$$o \leqslant x. \tag{8}$$



3.  $(A, \cdot, \leq)$  satisfies identity (4) and the axioms:

$$xy = x^2 \vee yz = zy = y, \quad (9)$$

$$xy = yx = x \Rightarrow x \leq z. \quad (10)$$

**Corollary 2.** *The class  $R\{*\}$  does not form a quasi-variety. For a semigroup  $(A, \cdot)$  the following three conditions are equivalent.*

1.  $(A, \cdot)$  belongs to the class  $R\{*\}$ .
2. One of the following conditions holds:
  - a)  $(A, \cdot)$  satisfies identity (6);
  - b)  $(A, \cdot)$  contains the zero element and satisfies axiom (7).
3.  $(A, \cdot)$  satisfies axiom (9).

## 2. PROOFS OF RESULTS

**Step 1.** First of all, let us prove the necessity of the conditions of Theorems and Corollaries. Let  $(\Phi, *, \subseteq)$  be the partially ordered semigroup of relations on  $U$  with the operation of left rectangular product and let  $pr_1\rho = \{x : (\exists y)(x, y) \in \rho\}$  be the first projection of the relation  $\rho \in \Phi$ . It is clear that  $\rho * \sigma = pr_1\rho \times U = \rho * \rho$  if  $\sigma \neq \emptyset$ , and  $\rho * \sigma = \emptyset$  otherwise. It easily follows that the identities (1)–(5) hold. It also follows that if  $\emptyset \notin \Phi$ , then  $(\Phi, *)$  satisfies identity (6), and if  $\emptyset \in \Phi$ , then  $\emptyset$  is a zero element and axioms (7) and (8) hold.

Conditions 2 and 3 of Theorem 2 and Corollary 2 are equivalent. Indeed, axiom (6) can be represented as  $(\neg(\forall w) yw = wy = y) \Rightarrow xy = x^2$ . It follows that this axiom is equivalent to identity (6) if  $A$  does not contain a zero element, and it is equivalent to axiom (7) otherwise. Axiom (10) just expresses axiom (8) as a universal formula of the first-order language.

**Step 2.** The proof of sufficiency of conditions of Theorem 1 is based on the result of [3]. Let us give some definitions and notations to formulate this result.

For any formula  $\varphi(z_0, z_1, r_1, \dots, r_m)$  of the first-order predicate calculus with the set of free variables included in  $\{z_0, z_1\}$  and having  $m$  binary predicate symbols  $r_1, \dots, r_m$ , we can associate an  $m$ -ary operation  $F_\varphi$  on  $\text{Rel}(U)$  defined in the following way:

$$F_\varphi(\rho_1, \dots, \rho_m) = \{(u, v) \in U \times U : \varphi(u, v, \rho_1, \dots, \rho_m)\},$$

where  $\varphi(u, v, \rho_1, \dots, \rho_m)$  means that the formula  $\varphi$  holds whenever  $z_0, z_1$  are interpreted as  $u, v$ , and  $r_1, \dots, r_m$  are interpreted as relations  $\rho_1, \dots, \rho_m$  from  $\text{Rel}(U)$ . As we stated earlier an operation on relations is called primitive-positive if it can be defined by a first-order formula containing only existential quantifiers and conjunctions in its prenex normal form. Let us describe primitive-positive operations by using graphs [2].

Let  $\mathbb{N}$  be the set of all natural numbers and  $\mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ . A *labeled graph* is a pair  $G = (V(G), E(G))$ , where  $V(G)$  is a finite set (called a vertex set) and  $E(G) \subseteq V(G) \times \mathbb{N} \times V(G)$  is a ternary relation. A triple  $(u, k, v) \in E(G)$  is called an edge from  $u$  to  $v$  labeled by  $k$ , and it will be graphically represented by  $u \xrightarrow{k} v$ . An *input-output-pointed labeled graph* is a structure  $G = (V(G), E(G), \text{in}(G), \text{out}(G))$ , where  $(V(G), E(G))$  is a labeled graph,  $\text{in}(G)$  and  $\text{out}(G)$  are two distinguished vertices called input and output vertices respectively. The input-output-pointed labeled graph  $G$  with  $\text{in}(G) = i$  and  $\text{out}(G) = o$  is also denoted by  $G^{i,o}$ . So, we will just call them graphs as it does not lead to confusion. The concept of graph isomorphism is defined



in a natural way. All graphs will be considered up to isomorphism. Moreover, we will identify graphs differing only in the number of isolated vertices that are distinct from *in* and *out*. These isolated vertices will be omitted.

For a given  $u \in V(G)$ , the number of edges of the form  $(u, k, v)$  [respectively,  $(v, k, u)$ ] we denote by  $\deg^+(u)$  [respectively,  $\deg^-(u)$ ]. Given two input-output-pointed labeled graphs  $G_1 = (V_1, E_1, \text{in}_1, \text{out}_1)$  and  $G_2 = (V_2, E_2, \text{in}_2, \text{out}_2)$ , a mapping  $f: V_2 \rightarrow V_1$  is called a homomorphism from  $G_2$  to  $G_1$  if  $f(\text{in}_2) = \text{in}_1$ ,  $f(\text{out}_2) = \text{out}_1$ , and  $(f(u), k, f(v)) \in E_1$  whenever  $(u, k, v) \in E_2$ . We write  $G_1 \prec G_2$  if there exists a homomorphism from  $G_2$  to  $G_1$ .

Let  $F = F_\varphi$  be a primitive positive operation determined by a formula  $\varphi$ . Then the input-output-pointed labeled graph  $G = G_F = G_\varphi$  associated with  $F$  is defined as follows (see [2]). Let  $\{0, 1, \dots, n\}$  be the set of all subscripts of individual variables of  $\varphi$ . We put  $G = (V, E, \text{in}, \text{out})$ , where  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ ;  $\text{in} = v_0$ ,  $\text{out} = v_1$ ;  $(i, k, j) \in E$  if and only if the atomic formula  $r_k(z_i, z_j)$  occurs in  $\varphi$ .

Note that the graph  $G_* = (V, E, \text{in}, \text{out})$  corresponding to the considered operation  $*$  of rectangular product can be described in the following way:

$$\begin{aligned} V &= \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad E = \{(v_0, 1, v_3), (v_2, 2, v_4)\}, \quad \text{in} = v_0, \quad \text{out} = v_1, \\ \text{in} &= v_0 \cdot \xrightarrow{1} \cdot v_3 \quad v_2 \cdot \xrightarrow{2} \cdot v_4 \quad \cdot v_1 = \text{out}. \end{aligned}$$

Let  $G = (V, E, \text{in}, \text{out})$  and  $G_k = (V_k, E_k, \text{in}_k, \text{out}_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) be graphs with pairwise disjoint vertex sets. The composition  $G(G_1, G_2, \dots, G_n)$  is the graph constructed as follows [3]: take  $G$  and substitute every edge  $(u, k, v) \in E$  by the graph  $G_k$  identifying the input vertex  $\text{in}_k$  with  $u$  and the output vertex  $\text{out}_k$  with  $v$ .

Let us consider the set  $\Lambda = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$  of individual variables that are interpreted as elements of a semigroup. A semigroup term  $p$  is a word in the alphabet  $\Lambda$ , i.e., an expression of the form  $x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_{m-1}}x_{j_m}$ . For convenience, we will also use other letters of the Latin alphabet as variables.

Suppose that  $p = x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_{m-1}}x_{j_m}$  be the term of a semigroup that satisfies identities (1)–(3). Then without loss of generality, we can assume that all variables  $x_{j_1}, \dots, x_{j_m}$  are different. Moreover, we can also presume that variables  $x_{j_2}, \dots, x_{j_m}$  can be arbitrarily permuted. In what follows, we will use these properties without special mentions.

For any semigroup term  $p$  we define the graph  $G(p) = (V(p), E(p), \text{in}(p), \text{out}(p))$  in the following inductive way:

- 1) if  $p = x_k$ , then  $G(p)$  is the following graph:  $\text{in} \xrightarrow{k} \text{out}$ ;
- 2) if  $p = p_1p_2$ , then  $G(p) = G_*(G(p_1), G(p_2))$ .

For any term  $p = x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_{m-1}}x_{j_m}$  the graph  $G(p)$  has the following form:

$$\text{in} = v_0 \xrightarrow{j_1} \cdot \dots \xrightarrow{j_2} \cdot \dots \dots \xrightarrow{j_{m-1}} \cdot \dots \xrightarrow{j_m} \cdot \dots v_1 = \text{out}.$$

Let  $G$  be a labeled graph,  $u, v \in V(G) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ , and  $Q$  be an input-output-pointed labeled graph. Without loss of generality, we can suppose that  $V(Q) = \{w_0, w_1, \dots, w_m\}$ ,  $\text{in}(Q) = w_0 = u$ ,  $\text{out}(Q) = w_1 = v$ , and  $V(G) \cap V(Q) = \{u, v\}$ . The labeled graph  $(V(G) \cup V(Q), E(G) \cup E(Q))$  we denote by  $G[u, v, Q]$ . Note that the edges set of  $G[u, v, Q]$  can be represented as  $\{v_0, v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{n+m-1}\}$ , where  $v_{n+1} = w_2, \dots, v_{n+m-1} = w_m$ . Virtually, the graph  $G[u, v, Q]$  is obtained from the graph  $G$  by “gluing” the graph  $Q$  to the vertices  $u$  and  $v$ .



Define an *n-system* to be a pair  $\omega = (\alpha, \beta)$ , where  $\alpha, \beta : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{N}^0$  are mappings,  $\alpha(k), \beta(k) < 2 + (k - 1)(m - 2)$  for all  $k = 1, \dots, n$ , and  $m$  is the number of vertices of the graph that determines the considered operation on relations (for the operation  $*$  we have  $m = 5$  and  $\alpha(k), \beta(k) < 3k - 1$ ).

Given an *n-system*  $\omega = (\alpha, \beta)$ , we construct by induction the sequence of graphs  $G_0 \subseteq \dots \subseteq G_n = G_\omega$ . We put  $G_0: v_0 \xrightarrow{1} \cdot v_1$ , and for  $k = 1, \dots, n$  we put:

$$G_k = G_{k-1}[v_{\alpha(k)}, v_{\beta(k)}, G(x_{2k}x_{2k+1})].$$

The following proposition presents the result of [3] formulated for the class  $R\{\ast, \subseteq\}$ .

**Proposition 1.** *A partially ordered semigroup  $(A, \cdot, \leqslant)$  belongs to the quasi-variety  $Q\{\ast, \subseteq\}$  if and only if it satisfies the quasi-identity*

$$\left( \bigwedge_{k=1}^n p_k \leqslant x_{2k}x_{2k+1} \right) \Rightarrow x_1 \leqslant p_0 \quad (11)$$

for every *n-system*  $\omega = (\alpha, \beta)$  and arbitrary terms  $p_0, \dots, p_n$  such that  $G_\omega^{v_0, v_1} \prec G(p_0)$  and  $G_{k-1}^{v_{\alpha(k)}, v_{\beta(k)}} \prec G(p_k)$ .

**Step 3.** We are ready to prove the sufficiency of the conditions of Theorem 1. Let  $\omega = (\alpha, \beta)$  be the *n-system* and  $p_0, p_1, \dots, p_n$  be the terms such that  $G_\omega^{v_0, v_1} \prec G(p_0)$  and  $G_{k-1}^{v_{\alpha(k)}, v_{\beta(k)}} \prec G(p_k)$  for  $k = 1, \dots, n$ . This system corresponds to the sequence of graphs  $G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_n = G_\omega$ , where  $G_k = (V_k, E_k)$  for  $k = 0, \dots, n$ . For any  $k \leqslant n$  we have that  $V_k = \{v_0, v_1, \dots, v_{3k-1}, v_{3k}, v_{3k+1}\}$  and

$$E_k = \{(v_0, 1, v_1)\} \cup \{(v_{\alpha(i)}, 2i, v_{3i-1}), (v_{3i}, 2i+1, v_{3i+1}) : i = 1, \dots, k\}.$$

Let us prove by induction on  $k$  that  $\alpha(k) = 3j$  for some  $j = 0, \dots, k$ ;  $\deg^- v_{3i} = 0$ ,  $\deg^+ v_{3i} > 0$  for any  $i = 0, \dots, k$ , and  $\deg^- v = 1$ ,  $\deg^+ v = 0$  for all other vertices  $v$  of the graph  $G_k$ .

Let  $k = 1$ . Since  $G_0^{v_{\alpha(1)}, v_{\beta(1)}} \prec G(p_1)$ , we have  $p_1 = x_1$  or  $p_1 = x_1^2$ , and  $\alpha(1) = 0$ ,  $\beta(1) = 1$ ;  $\deg^- v_0 = 0$ ,  $\deg^+ v_0 = 2$ ;  $\deg^- v_1 = 1$ ,  $\deg^+ v_1 = 0$ ;  $\deg^- v_2 = 1$ ,  $\deg^+ v_2 = 0$ ;  $\deg^- v_3 = 0$ ,  $\deg^+ v_3 = 1$ ;  $\deg^- v_4 = 1$ ,  $\deg^+ v_4 = 0$ .

Suppose now that it holds for  $k - 1$ , and let us show that this is true for  $k$ . Since  $G_{k-1}^{v_{\alpha(k)}, v_{\beta(k)}} \prec G(p_k)$ , according to the definition of a graph homomorphism, we get  $\deg^+ v_{\alpha(k)} > 0$ . Then according to the induction assumption we get  $\alpha(k) = 3j$  for some  $j = 0, \dots, k$ ;  $\deg^- v_{3i} = 0$ ,  $\deg^+ v_{3i} > 0$  for any  $i = 0, \dots, k$ , and  $\deg^- v = 1$ ,  $\deg^+ v = 0$  for all other vertices  $v$  of the graph  $G_k$ .

Let  $(A, \cdot, \leqslant)$  be a partially ordered semigroup satisfying identities (1)–(5). Suppose that the premise of quasi-identity (11) holds for some values of the variables  $x_1 = a_1$ ,  $x_2 = a_2$ ,  $x_3 = a_3, \dots, x_{2n} = a_{2n}$ ,  $x_{2n+1} = a_{2n+1}$ , i.e.,  $p_k(\vec{a}) \leqslant a_{2k}a_{2k+1}$  for all  $k = 1, \dots, n$ , where  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{2n+1})$ . Let  $p_0 = x_{j_1}x_{j_2} \dots x_{j_{m-1}}x_{j_m}$ . Note that  $G_k^{v_0, v_1} \prec G(p_0)$  if and only if  $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{m-1}}, x_{j_m}\} \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_{2k}, x_{2k+1}\}$ ,  $x_{j_1} = x_1$  or  $x_{j_1} = x_{3i}$  for some  $0 < i \leqslant k$  such that  $\alpha(i) = 0$ .

Let  $\max(p_0)$  be the greatest  $k$  such that at least one of the variables  $x_{2k}$  or  $x_{2k+1}$  is included in the term  $p_0$ . Let us prove by induction on  $\max(p_0)$  that  $a_1 \leqslant p_0(\vec{a})$ . If  $\max(p_0) = 0$ , then  $p = x_1$  or  $p_0 = x_1^2$ . Thus, using identity (4) we obtain  $a_1 \leqslant p_0(\vec{a})$ .



Suppose now that  $a_1 \leq p_0(\vec{a})$  holds for  $\max(p_0) = k - 1$ , and let us show that this is true for  $\max(p_0) = k$ .

If both variables  $x_{2k}, x_{2k+1}$  are included in  $p_0$ , then the following cases are possible:

1)  $p_0 = x_{2k}x_{2k+1}x_{j_3} \dots x_{j_{m-1}}x_{j_m}$ , then  $\alpha(k) = 0$ . It follows that  $G_k^{v_0, v_1} \prec G(p_k x_{j_3} \dots x_{j_m})$ , and by the induction assumption we get

$$a_0 \leq p_k(\vec{a})a_{j_3} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} \leq a_{2k}a_{2k+1}a_{j_3} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} = p_0(\vec{a});$$

2)  $p_0 = x_{j_1}x_{2k}x_{2k+1}x_{j_4} \dots x_{j_{m-1}}x_{j_m}$ , then using the induction assumption we get

$$a_0 \leq a_{j_1}p_k(\vec{a})a_{j_4} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} \leq a_{j_1}a_{2k}a_{2k+1}a_{j_4} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} = p_0(\vec{a}).$$

If only one of the variables  $x_{2k}$  or  $x_{2k+1}$  is included in  $p_0$ , then the following cases are possible:

3)  $p_0 = x_{2k}x_{j_2} \dots x_{j_{m-1}}x_{j_m}$ , then  $\alpha(k) = 0$ . It follows that  $G_k^{v_0, v_1} \prec G(p_k x_{j_2} \dots x_{j_m})$ , and by the induction assumption we get

$$\begin{aligned} a_0 &\leq p_k(\vec{a})a_{j_2} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} \leq a_{2k}a_{2k+1}a_{j_3} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} \leq \\ &\stackrel{(5)}{\leq} a_{2k}^2a_{j_2} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} \stackrel{(1)}{=} a_{2k}a_{j_2} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} = p_0(\vec{a}); \end{aligned}$$

4)  $p_0 = x_{j_1}x_{2k}x_{j_3} \dots x_{j_{m-1}}x_{j_m}$ , then using the induction assumption we get

$$\begin{aligned} a_0 &\leq a_{j_1}p_k(\vec{a})a_{j_3} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} \leq a_{j_1}a_{2k}a_{2k+1}a_{j_3} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} \leq \\ &\stackrel{(5)}{\leq} a_{j_1}a_{2k}^2a_{j_3} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} \stackrel{(2)}{=} a_{j_1}a_{2k}a_{j_3} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} = p_0(\vec{a}); \end{aligned}$$

5)  $p_0 = x_{j_1}x_{2k+1}x_{j_3} \dots x_{j_{m-1}}x_{j_m}$ , then using the induction assumption we get

$$\begin{aligned} a_0 &\leq a_{j_1}p_k(\vec{a})a_{j_4} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} \leq a_{j_1}a_{2k}a_{2k+1}a_{j_4} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} \leq \\ &\stackrel{(5)}{\leq} a_{j_1}a_{2k+1}^2a_{j_4} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} \stackrel{(2)}{=} a_{j_1}a_{2k+1}a_{j_4} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} = p_0(\vec{a}). \end{aligned}$$

Thus, we have proved that the partially ordered semigroup  $(A, \cdot, \leq)$  satisfies quasi-identity (11). Therefore, according to Proposition 1 we have  $(A, \cdot, \leq) \in Q\{\ast, \subseteq\}$ . This completes the proof of Theorem 1.

**Step 4.** Let us prove Corollary 1. Suppose that a semigroup  $(A, \cdot)$  satisfies identities (1)–(3) and  $A^2 = \{a^2 : a \in A\}$ . We define the relation  $\leq$  on the set  $A$  by setting

$$\leq = \{(x, y) \in A \times A^2 : x^2 = yx\} \cup \{(x, x) \in A \times A : x \in A\}.$$

Let us show that  $(A, \cdot, \leq)$  is the partially ordered semigroup satisfying identities (4) and (5). The reflexivity of the relation  $\leq$  follows directly from the definition.

To prove the transitivity assume that  $x \leq y$  and  $y \leq z$ . Without loss of generality, we can suppose that  $x \neq y$  and  $y \neq z$ . Then  $x^2 = yx$ ,  $y^2 = zy$  and  $y^2 = y$ ,  $z^2 = z$ , hence  $x^2 = yx = zyx = zx^2 \stackrel{(2)}{=} zx$ , i.e.,  $x \leq z$ . Thus,  $\leq$  is transitive.

Assume that  $x \leq y$ ,  $y \leq x$  and  $x \neq y$ . Then  $x^2 = yx$ ,  $y^2 = xy$  and  $x^2 = x$ ,  $y^2 = y$ , hence  $x = x^2 = yx \stackrel{(1)}{=} y^2x = xyx \stackrel{(3)}{=} x^2y \stackrel{(1)}{=} xy = y^2 = y$ . This contradicts the assumption  $x \neq y$ . Thus,  $\leq$  is a partially order relation.



Let us show that the relation  $\leqslant$  is compatible with multiplication. Suppose that  $x \leqslant y$  and  $x \neq y$ . Then  $x^2 = yx$  and  $y^2 = y$ , hence  $(xz)^2 = xzxz \stackrel{(3)}{=} x^2z^2 = yxz^2 \stackrel{(3)}{=} (yz)(xz)$  and  $(yz)^2 = yzyz \stackrel{(3)}{=} y^2z^2 \stackrel{(1)}{=} yz^2 \stackrel{(2)}{=} yz$ . Thus,  $xz \leqslant yz$ . Further,  $(zx)^2 = zxzx \stackrel{(3)}{=} z^2x^2 = z^2yx \stackrel{(3)}{=} (zy)(zx)$  and  $(zy)^2 = zyzy \stackrel{(3)}{=} z^2y^2 \stackrel{(1)}{=} zy^2 \stackrel{(2)}{=} zy$ . Thus,  $zx \leqslant zy$ .

Since  $x^2 \stackrel{(3)}{=} x^3 = x^2x$  and  $(x^2)^2 = x^4 \stackrel{(1)}{=} x^2$ , we have  $x \leqslant x^2$ . Since  $(xy)^2 = xyxy \stackrel{(3)}{=} xxy^2 \stackrel{(1)}{=} x^2xy^2 \stackrel{(2)}{=} x^2xy$  and  $(x^2)^2 = x^4 \stackrel{(1)}{=} x^2$ , we have  $xy \leqslant x^2$ . Therefore,  $(A, \cdot, \leqslant)$  satisfies identities (1) and (2), hence  $(A, \cdot, \leqslant) \in Q\{\ast, \subseteq\}$  and  $(A, \cdot) \in Q\{\ast\}$ . This completes the proof of Corollary 1.

**Step 5.** Let us prove Theorem 2 and Corollary 2. First of all, it is easy to see that for  $U \neq \emptyset$ , the Cartesian square of the semigroup  $(\text{Rel}(U), \ast)$  of relations contains the zero element  $(\emptyset, \emptyset)$  and does not satisfy axiom (7). It follows that the classes  $R\{\ast\}$  and  $R\{\ast, \subseteq\}$  do not form quasi-varieties.

**Lemma 1.** *Let  $\{U_j : j \in J\}$  be a family of pairwise non-intersecting sets and  $U = \bigcup\{U_j : j \in J\}$ . If a partially ordered semigroup  $(A, \cdot, \leqslant)$  is a subdirect product of a family  $\{(\Phi_j, \ast, \subseteq) : j \in J\}$  of partially ordered semigroups of relations on  $U_j$  and satisfies identity (6), then  $(A, \cdot, \leqslant)$  isomorphically embedded in  $(\text{Rel}(U), \ast, \subseteq)$ .*

**Proof.** Let  $\varphi_j : A \rightarrow \Phi_j$  be the corresponding surjective homomorphisms from  $A$  on the components of the direct product  $\prod\{\Phi_j : j \in J\}$ . According to the properties of homomorphic images, we have that all components  $(\Phi_j, \ast, \subseteq)$  satisfy identity (6). Hence, for all  $j \in J$  we have  $\emptyset \notin \Phi_j$  or  $\Phi_j = \{\emptyset\}$ . It follows that  $(A, \cdot, \leqslant)$  is a subdirect product of the family  $\{(\Phi_j, \ast, \subseteq) : j \in J_0\}$ , where  $J_0 = \{j \in J : \emptyset \notin \Phi_j\}$ .

For a given  $a \in A$ , we put  $\rho_j^a = \varphi_j(a)$ . We define a mapping  $\varphi : A \rightarrow \text{Rel}(U)$  in the following way. We put  $\varphi(a) = \bigcup\{pr_1\rho_j^a : j \in J_0\} \times U$ , if  $a^2 = a$ , and  $\varphi(a) = \bigcup\{\rho_j^a : j \in J_0\} \cup \bigcup\{\varphi(b) : b^2 = b \leqslant a\}$  otherwise. Let us show that  $\varphi$  is an isomorphic embedding  $(A, \cdot, \leqslant)$  in  $(\text{Rel}(U), \ast, \subseteq)$ .

Note that  $\varphi(a) \cap U_j \times U_j = \rho_j^a$  for all  $a \in A$ . It follows that  $\varphi(a) \subseteq \varphi(a)$  if and only if  $a \leqslant b$ . Furthermore, since  $\emptyset \notin \Phi_j$  and  $(ab)^2 = abab \stackrel{(3)}{=} aabb \stackrel{(2)}{=} aab \stackrel{(1)}{=} ab$ , we have

$$\begin{aligned}\varphi(ab) &= \bigcup\{pr_1\rho_j^{ab} : j \in J_0\} \times U = (\bigcup\{pr_1\rho_j^a : j \in J_0\} \times U = \\ &= pr_1\varphi(a) \times U = \varphi(a) * \varphi(b).\end{aligned}$$

□

**Lemma 2.** *Suppose that  $(A, \cdot, \leqslant)$  satisfies identities (4) and (6). Then  $(A, \cdot, \leqslant)$  belongs to  $R\{\ast, \subseteq\}$ .*

**Proof.** It is easy to see that identity (6) implies identities (1)–(3) and (5). Hence, if  $(A, \cdot, \leqslant)$  satisfies identities (4) and (6), then according to Theorem 1 we have that  $(A, \cdot, \leqslant) \in Q\{\ast, \subseteq\}$ . In respect that the class  $R\{\ast, \subseteq\}$  is axiomatizable [1], we obtain that  $(A, \cdot, \leqslant)$  is a subdirect product of a family of partially ordered semigroups from  $R\{\ast, \subseteq\}$ . Hence, according to Lemma 1, we obtain that  $(A, \cdot, \leqslant)$  belongs to  $R\{\ast, \subseteq\}$ . □

**Lemma 3.** *Suppose that  $(A, \cdot)$  satisfies identity (6). Then  $(A, \cdot)$  belongs to  $R\{\ast\}$ .*

**Proof.** If  $(A, \cdot)$  satisfies identity (6), then it satisfies identities (1)–(3). Let  $\leqslant$  be the partial order relation constructed in the proof of Corollary 1. Then by Lemma 3 we have  $(A, \cdot, \leqslant) \in R\{\ast, \subseteq\}$ . Therefore,  $(A, \cdot) \in R\{\ast\}$ . □



**Lemma 4.** Suppose that  $(A, \cdot)$  contains the zero element  $o$  and satisfies axiom (7). Then  $(A, \cdot)$  satisfies identity (6) or  $ab \neq o$  for all  $a, b \neq o$ .

**Proof.** If there exist elements  $a \neq o$  and  $b \neq o$  such that  $ab = o$ , then for all  $x, y \neq o$  we have  $xa \stackrel{(7)}{=} x^2$ ,  $yb \stackrel{(7)}{=} y^2$ , and  $xab = o$ , hence  $xy \stackrel{(1)}{=} x^2y \stackrel{(2)}{=} x^2y^2 = xayb \stackrel{(3)}{=} xyab = xyo = o$ . It follows that  $xy = x^2$  for all  $x, y, z \in A$ , i. e.,  $(A, \cdot)$  satisfies identity (6).  $\square$

Suppose that  $(A, \cdot, \leq)$  contains the zero element  $o$  and satisfies identity (4) and axioms (7) and (8). We put  $B = A \setminus \{o\}$ . According to Lemmas 3 and 4 we can suppose that  $xy \in B$  for all  $x, y \in B$ , and  $(B, \cdot, \leq)$  satisfies identities (4) and (6), hence  $(B, \cdot, \leq)$  belongs to  $R\{\ast, \subseteq\}$ . It means that there exists an isomorphism  $F$  from the partially ordered semigroup  $(B, \cdot, \leq)$  to some partially ordered semigroup of relations  $(\Phi, \ast, \subseteq)$  and  $\emptyset \notin \Phi$ . Putting  $F(o) = \emptyset$ , we get the isomorphism from  $(A, \cdot, \leq)$  to  $(\Phi \cup \{\emptyset\}, \ast, \subseteq)$ . Therefore,  $(A, \cdot, \leq)$  belongs to  $R\{\ast, \subseteq\}$ . This completes the proof of Theorem 2.

Suppose that  $(A, \cdot)$  contains the zero element  $o$  and satisfies axiom (7),  $B = A \setminus \{o\}$ , and let  $\leq$  be the partial order relation on  $B$  constructed in the proof of Theorem 2. Extend the relation  $\leq$  on  $A$  by putting  $o \leq a$  for all  $a \in A$ . Then  $(A, \cdot, \leq)$  satisfies the conditions of Theorem 2, hence  $(A, \cdot, \leq) \in R\{\ast, \subseteq\}$ . Therefore,  $(A, \cdot)$  belongs to  $R\{\ast\}$ . This completes the proof of Corollary 2.

## CONCLUSION

The results of the article show that the classes  $R\{\ast\}$ ,  $R\{\ast, \subseteq\}$ ,  $R\{\star\}$ ,  $R\{\star, \subseteq\}$  are finitely axiomatizable and are not quasi-varieties; the quasivarieties generated by these classes are finitely based varieties, and also that  $R\{\triangleleft\} \subset V\{\ast\}$ ,  $R\{\triangleleft, \subseteq\} \subset V\{\ast, \subseteq\}$ ,  $R\{\triangleright\} \subset V\{\star\}$ ,  $R\{\triangleright, \subseteq\} \subset V\{\star, \subseteq\}$ .

## References

1. Schein B. M. Relation algebras and function semigroups. *Semigroup Forum*, 1970, vol. 1, pp. 1–62.
2. Böner P., Pöschel F. R. Clones of operations on binary relations. *Contributions to general algebra*, 1991, vol. 7, pp. 50–70.
3. Bredikhin D. A. On quasi-identities of algebras of relations with Diophantine operations. *Sib. Math. J.*, 1997, vol. 38, pp. 23–33. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02674896>
4. Bredikhin D. A. On algebras of relations with Diophantine operations. *Dokl. Math.*, 1998, vol. 57, no. 3, pp. 435–436.
5. Bredikhin D. A. On relation algebras with general superpositions. *Algebraic Logic*, 1998, vol. 54, pp. 111–124.
6. Tarski A. On the calculus of relations. *J. Symbolic Logic*, 1941, vol. 6, pp. 73–89.
7. Tarski A. Contributions to the theory of models, III. *Proc. Konikl. Nederl. Akad. Wet.*, 1956, vol. 58, pp. 56–64.
8. Lyndon R. C. The representation of relation algebras, II. *Ann. Math.*, 1956, vol. 63, no. 2, pp. 294–307. DOI: <https://doi.org/10.2307/1969611>
9. Wagner V. V. Restrictiv semigroups. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1962, no. 6, pp. 19–27 (in Russian).

## Cite this article as:

Bredikhin D. A. On Semigroups of Relations with the Operation of Left and Right Rectangular Products. *Izv. Saratov Univ. (N. S.)*, Ser. Math. Mech. Inform., 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 280–289. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-280-289>



УДК 501.1

## О полугруппах отношений с операцией левого и правого прямоугольного произведения

Д. А. Бредихин

Бредихин Дмитрий Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и моделирования, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77, bredikhin@mail.ru

Множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности операций над ними, образует алгебру, называемую алгеброй отношений. Класс всех алгебр (частично упорядоченных алгебр), изоморфных алгебрам (частично упорядоченным теоретико-множественным включением  $\subseteq$  алгебрам) отношений с операциями из  $\Omega$ , обозначим  $R\{\Omega\}$  ( $R\{\Omega, \subseteq\}$ ). Операция над бинарными отношениями называется примитивно-позитивной, если она может быть определена формулой, содержащей в своей префиксной нормальной форме лишь кванторы существования и операцию конъюнкции. В работе рассматриваются алгебры отношений с ассоциативными примитивно-позитивными операциями  $*$  и  $\star$ , определяемыми следующими формулами:  $\rho * \sigma = \{(u, v) : (\exists s, t, w)(u, s) \in \rho \wedge (t, w) \in \sigma\}$  и  $\rho \star \sigma = \{(u, v) : (\exists s, t, w)(s, t) \in \rho \wedge (w, v) \in \sigma\}$  соответственно. Найдены системы аксиом для классов  $R\{*\}$ ,  $R\{\star, \subseteq\}$ ,  $R\{\star\}$ ,  $R\{\star, \subseteq\}$  и базисы тождеств для порожденных этими классами квазимногообразий и многообразий.

**Ключевые слова:** алгебра отношений, примитивно-позитивная операция, тождество, многообразие, квазитождество, квазимногообразие, полугруппа, частично упорядоченная полугруппа.

Поступила в редакцию: 11.06.2019 / Принята: 28.06.2019 / Опубликована: 31.08.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

---

### Образец для цитирования:

Bredikhin D. A. On Semigroups of Relations with the Operation of Left and Right Rectangular Products [Бредихин Д. А. О полугруппах отношений с операцией левого и правого прямоугольного произведения] // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 280–289. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-280-289>

---



УДК 512.572

## О customary-пространствах алгебр Лейбница – Пуассона

С. М. Рацеев, О. И. Череватенко

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, Россия, 432017, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42, ratseevsm@mail.ru

Череватенко Ольга Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова, Россия, 432071, г. Ульяновск, площадь Ленина, д. 4/5, chai@pisem.net

Пусть  $K$  – основное поле нулевой характеристики. Хорошо известно, что в этом случае вся информация о многообразии линейных алгебр  $\mathbf{V}$  содержится в его полилинейных компонентах  $P_n(\mathbf{V})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , где  $P_n(\mathbf{V})$  – линейная оболочка полилинейных слов от  $n$  различных букв в свободной алгебре  $K(X, \mathbf{V})$ . Д. Фаркаш для случая алгебр Пуассона ввел понятие customary-полиномов и доказал, что любое нетривиальное многообразие алгебр Пуассона удовлетворяет некоторому customary- тождеству. Алгебры Лейбница – Пуассона являются обобщениями алгебр Пуассона. В работе исследуется последовательность customary-пространств свободной алгебры Лейбница – Пуассона  $\{Q_{2n}\}_{n \geq 1}$ . Приводится базис и размерность пространств  $Q_{2n}$ . Доказан аналог теоремы Д. Фаркаша для случая алгебр Лейбница – Пуассона: в случае основного поля нулевой характеристики любое нетривиальное тождество свободной алгебры Лейбница – Пуассона имеет в качестве своих следствий нетривиальные тождества в customary-пространствах.

**Ключевые слова:** алгебра Пуассона, алгебра Лейбница – Пуассона, многообразие алгебр, прост многообразия.

Поступила в редакцию: 20.05.2019 / Принята: 09.09.2019 / Опубликована: 31.08.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-290-296>

Линейная алгебра  $A(+, \{, \}, K)$  с  $K$ -билинейной операцией умножения  $\{, \}$  над полем  $K$  называется алгеброй Лейбница, если в ней выполнено тождество

$$\{\{x, y\}, z\} = \{\{x, z\}, y\} + \{x, \{y, z\}\}.$$

Алгебры Лейбница являются обобщениями алгебр Ли.

Далее везде предполагается, если это специально не оговорено, что основное поле  $K$  произвольно.

Векторное пространство  $A$  над полем  $K$  с двумя  $K$ -билинейными операциями умножения  $\cdot$  и  $\{, \}$  называется алгеброй Лейбница – Пуассона, если относительно операции  $\cdot$  пространство  $A$  является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции  $\{, \}$  – алгеброй Лейбница, и данные операции связаны правилами

$$\begin{aligned} \{a \cdot b, c\} &= a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \\ \{c, a \cdot b\} &= a \cdot \{c, b\} + \{c, a\} \cdot b, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $a, b, c \in A$ . Если в алгебре Лейбница – Пуассона выполнено тождество  $\{x, x\} = 0$ , то данная алгебра будет являться алгеброй Пуассона. Таким образом, алгебры



Лейбница – Пуассона являются обобщениями алгебр Пуассона, которые возникают естественным образом в некоторых разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физике и т.д. Обзоры работ по PI-алгебрам Пуассона и Лейбница – Пуассона можно найти в работах [1, 2].

Договоримся опускать скобки  $\{, \}$  при их левонормированной расстановке:  $\{\{a, b\}, c\} = \{a, b, c\}$ .

Пусть  $L(X)$  – свободная алгебра Лейбница,  $F(X)$  – свободная алгебра Лейбница – Пуассона, где  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  – счетное множество свободных образующих. Обозначим через  $P_n$  пространство в  $F(X)$ , состоящее из всех полилинейных элементов степени  $n$  от переменных  $x_1, \dots, x_n$ .

Определение тождества, PI-алгебры, многообразия алгебр Лейбница – Пуассона вводятся стандартным образом. Все необходимые сведения о многообразиях PI-алгебр можно найти, например, в монографиях [3–5].

**Лемма 1** (см. [2]). *Базис пространства  $P_n$  состоит из всех элементов вида*

$$x_{k_1} \cdot \dots \cdot x_{k_r} \cdot \{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\} \cdot \dots \cdot \{x_{j_1}, \dots, x_{j_t}\}, \quad (2)$$

для каждого из которых выполнены следующие условия:

- (i)  $r \geq 0$ , причем  $k_1 < \dots < k_r$  при  $r > 0$ , а при  $r = 0$  моном  $x_{k_1} \cdot \dots \cdot x_{k_r}$  отсутствует;
- (ii) каждая из переменных  $x_1, \dots, x_n$  встречается в (2) ровно один раз;
- (iii) каждый множитель  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\}, \dots, \{x_{j_1}, \dots, x_{j_t}\}$  в (2) левонормирован и имеет длину  $\geq 2$ ;
- (iv) множители в (2) упорядочены по длине:  $s \leq \dots \leq t$ ;
- (v) если два соседних множителя в (2), являющиеся скобками  $\{, \}$ , имеют одинаковую длину

$$\dots \cdot \{x_{p_1}, \dots, x_{p_s}\} \cdot \{x_{q_1}, \dots, x_{q_s}\} \cdot \dots,$$

то  $p_1 < q_1$ .

Обозначим через  $\Gamma_n$  подпространство в  $P_n$ , являющееся линейной оболочкой элементов вида

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\} \cdot \dots \cdot \{x_{j_1}, \dots, x_{j_t}\}, \quad s \geq 2, \dots, \quad t \geq 2.$$

Тогда из сказанного выше следует, что базисом пространства  $\Gamma_n$  будут являться все элементы вида (2) с условиями (ii)–(v) из леммы 1 при  $r = 0$ .

Выделим в пространстве  $\Gamma_{2n}$  подпространство  $Q_{2n}$ , порожденное элементами вида

$$\{x_{a_1}, x_{a_2}\} \cdot \{x_{a_3}, x_{a_4}\} \cdot \dots \cdot \{x_{a_{2n-1}}, x_{a_{2n}}\}.$$

По аналогии со случаем алгебр Пуассона пространства  $Q_{2n}$  назовем customary-пространствами. Пусть  $S_n$  – симметрическая группа степени  $n$ .

**Лемма 2.** 1. Следующие полилинейные элементы от переменных  $x_1, \dots, x_{2n}$

$$\{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \{x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}\} \cdot \dots \cdot \{x_{\tau(2n-1)}, x_{\tau(2n)}\}, \quad (3)$$

$$\tau \in S_{2n}, \quad \tau(1) < \tau(3) < \dots < \tau(2n-1), \quad (4)$$

образуют базис пространства  $Q_{2n}$ ;

$$2. \dim Q_{2n} = \frac{(2n)!}{n!}.$$



**Доказательство.** Понятно, что пространство  $Q_{2n}$  является линейной оболочкой элементов вида (3) с условием (4). Покажем, что данные элементы линейно независимы.

Пусть  $A_L$  — некоторая алгебра Ли с умножением  $[,]$ . В векторном пространстве  $A = A_L \oplus A_L$  над полем  $K$  определим операцию умножения  $[,]$  следующим образом:

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_1]), \quad (5)$$

где  $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in A$ . Полученная алгебра  $A$  будет являться алгеброй Лейбница. Действительно, нетрудно проверить, что  $A$  является линейной алгеброй над полем  $K$ . Покажем, что в  $A$  выполнено тождество Лейбница. Учитывая, что  $A_L$  является алгеброй Ли, получаем:

$$\begin{aligned} [(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)] &= ([x_1, y_1, z_1], [x_2, y_1, z_1]), \\ [(x_1, x_2), (z_1, z_2), (y_1, y_2)] &= ([x_1, z_1, y_1], [x_2, z_1, y_1]) = -([z_1, x_1, y_1], [z_1, x_2, y_1]), \\ [(x_1, x_2), [(y_1, y_2), (z_1, z_2)]] &= ([x_1, [y_1, z_1]], [x_2, [y_1, z_1]]) = -([y_1, z_1, x_1], [y_1, z_1, x_2]). \end{aligned}$$

Для доказательства тождества Лейбница для левых частей данных трех равенств остается применить тождество Якоби для правых частей.

Далее, пусть  $A$  — некоторая алгебра Лейбница с умножением  $[,]$  над полем  $K$ . Пусть  $v_1, v_2, \dots$  — линейный базис пространства  $A$  над  $K$ . Рассмотрим коммутативное кольцо полиномов  $K[v_1, v_2, \dots]$ . Скобки  $\{, \}$  для элементов  $v_i$  определим как умножение в  $A$ :  $\{v_i, v_j\} = [v_i, v_j]$ . Распространим скобки  $\{, \}$  на все  $K[v_1, v_2, \dots]$ , используя линейность и правила (1). Построенная таким образом алгебра будет являться алгеброй Лейбница – Пуассона, которую обозначим через  $LP(A)$ .

Пусть  $H_{2n} = K[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]$  — ассоциативное коммутативное кольцо многочленов. Превратим  $H_{2n}$  в алгебру Пуассона, введя в  $H_{2n}$  скобки Пуассона  $\{, \}$  следующим образом:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\partial g}{\partial Y_i} - \frac{\partial f}{\partial Y_i} \frac{\partial g}{\partial X_i} \right), \quad f, g \in H_{2n}.$$

Полученная алгебра называется *алгеброй Гамильтона* [6].

Пусть  $\tilde{H}_{2n} = H_{2n} \oplus H_{2n}$  — алгебра Лейбница с операцией умножения (5). Рассмотрим алгебру Лейбница – Пуассона  $LP(\tilde{H}_{2n})$ .

Обозначим через  $T_{2n}$  — множество всех перестановок из  $S_{2n}$  с условием (4). Предположим, что для некоторого  $n$  элементы вида (3) линейно зависимы:

$$\sum_{\tau \in T_{2n}} \alpha_\tau \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \dots \cdot \{x_{\tau(2n-1)}, x_{\tau(2n)}\} = 0, \quad \alpha_\tau \in K,$$

где не все  $\alpha_\tau$  равны нулю. Пусть  $\alpha_\sigma \neq 0$ ,  $\sigma \in T_{2n}$ . В данной линейной комбинации сделаем такие подстановки элементов алгебры  $LP(\tilde{H}_{2n})$ :

$$x_{\sigma(1)} \rightarrow (0, X_1), \quad x_{\sigma(2)} \rightarrow (Y_1, 0),$$

...

$$x_{\sigma(2n-1)} \rightarrow (0, X_n), \quad x_{\sigma(2n)} \rightarrow (Y_n, 0).$$



Тогда рассматриваемая линейная комбинация превратится в равенство

$$\alpha_\sigma(0, 1)^n = (0, 0),$$

что является верным только при  $\alpha_\sigma = 0$ . Противоречие.

Условие 2 следует из условия 1.  $\square$

Моном  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$ ,  $n \geq 2$ , свободной алгебры Лейбница  $L(X)$  назовем лейбницевым мономом длины  $n$ . Будем говорить, что элемент вида  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\} \cdot \dots \cdot \{y_{j_1}, \dots, y_{j_m}\}$  свободной алгебры Лейбница – Пуассона  $F(X)$  является произведением лейбницевых мономов.

**Лемма 3.** В полилинейном лейбницевом мономе  $\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$  от переменных  $x_1, \dots, x_n$  вместо переменной  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , подставим  $x_i \cdot x_{n+1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \{x_1, \dots, x_i \cdot x_{n+1}, \dots, x_n\} = \\ & = x_i \cdot \{x_1, \dots, x_{n+1}, \dots, x_n\} + x_{n+1} \cdot \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\} + g(x_1, \dots, x_{n+1}), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $g$  – полилинейный элемент от переменных  $x_1, \dots, x_{n+1}$  свободной алгебры Лейбница – Пуассона, являющийся линейной комбинацией произведений лейбницевых мономов, длина каждого из которых не превосходит значения  $n - 1$ , в случае если  $i < n$ , и  $g = 0$ , если  $i = n$ .

**Доказательство.** Обозначим  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}\}$ . Применим математическую индукцию по параметру  $n - i$ . При  $n - i = 0$  тождество (6) выполнено. Пусть  $n - i = 1$ . Тогда

$$\{A, x_{n-1} \cdot x_{n+1}, x_n\} = \{A, x_n, x_{n-1} \cdot x_{n+1}\} + \{A, \{x_{n-1} \cdot x_{n+1}, x_n\}\}.$$

При этом для первого и второго слагаемых выполнены соответствующие тождества:

$$\begin{aligned} \{A, x_n, x_{n-1} \cdot x_{n+1}\} &= x_{n-1} \cdot \{A, x_n, x_{n+1}\} + x_{n+1} \cdot \{A, x_n, x_{n-1}\}, \\ \{A, \{x_{n-1} \cdot x_{n+1}, x_n\}\} &= \{A, x_{n-1} \cdot \{x_{n+1}, x_n\}\} + \{A, x_{n+1} \cdot \{x_{n-1}, x_n\}\} = \\ &= x_{n-1} \cdot \{A, \{x_{n+1}, x_n\}\} + \{x_{n+1}, x_n\} \cdot \{A, x_{n-1}\} + \\ &\quad + x_{n+1} \cdot \{A, \{x_{n-1}, x_n\}\} + \{x_{n-1}, x_n\} \cdot \{A, x_{n+1}\} = \\ &= x_{n-1} \cdot \{A, x_{n+1}, x_n\} - x_{n-1} \cdot \{A, x_n, x_{n+1}\} + \{x_{n+1}, x_n\} \cdot \{A, x_{n-1}\} + \\ &\quad + x_{n+1} \cdot \{A, x_{n-1}, x_n\} - x_{n+1} \cdot \{A, x_n, x_{n-1}\} + \{x_{n-1}, x_n\} \cdot \{A, x_{n+1}\}. \end{aligned}$$

В итоге

$$\begin{aligned} \{A, x_{n-1} \cdot x_{n+1}, x_n\} &= x_{n-1} \cdot \{A, x_{n+1}, x_n\} + x_{n+1} \cdot \{A, x_{n-1}, x_n\} + \\ &\quad + \{x_{n+1}, x_n\} \cdot \{A, x_{n-1}\} + \{x_{n-1}, x_n\} \cdot \{A, x_{n+1}\}. \end{aligned}$$

Предположим, что утверждение верно для  $n - i < k$ ,  $k \geq 2$ . Пусть  $n - i = k$ . Тогда

$$\{A, x_i \cdot x_{n+1}, \dots, x_n\} = \{A, x_{i+1}, x_i \cdot x_{n+1}, \dots, x_n\} + \{A, \{x_i \cdot x_{n+1}, x_{i+1}\}, \dots, x_n\}.$$

Применяя предположение индукции, получаем:

$$\begin{aligned} \{A, x_{i+1}, x_i \cdot x_{n+1}, \dots, x_n\} &= x_i \cdot \{A, x_{i+1}, x_{n+1}, \dots, x_n\} + x_{n+1} \cdot \{A, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n\} + g_1, \\ &\quad \{A, \{x_i \cdot x_{n+1}, x_{i+1}\}, \dots, x_n\} = \\ &= x_i \cdot \{A, \{x_{n+1}, x_{i+1}\}, \dots, x_n\} + \{x_{n+1}, x_{i+1}\} \cdot \{A, x_i, x_{i+2}, \dots, x_n\} + \end{aligned}$$



$$+x_{n+1} \cdot \{A, \{x_i, x_{i+1}\}, \dots, x_n\} + \{x_i, x_{i+1}\} \cdot \{A, x_{n+1}, x_{i+2}, \dots, x_n\} + g_2,$$

где  $g_1, g_2$  — линейные комбинации произведений лейбницевых мономов, длина каждого из которых не превосходит значения  $n - 1$ . В итоге

$$\begin{aligned} \{A, x_i \cdot x_{n+1}, \dots, x_n\} &= x_i \cdot \{A, x_{n+1}, x_{i+1}, \dots, x_n\} + x_{n+1} \cdot \{A, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n\} + \\ &+ \{x_{n+1}, x_{i+1}\} \cdot \{A, x_i, x_{i+2}, \dots, x_n\} + \{x_i, x_{i+1}\} \cdot \{A, x_{n+1}, x_{i+2}, \dots, x_n\} + g_1 + g_2. \quad \square \end{aligned}$$

Следующая теорема является аналогом теоремы Фаркаша [7, 8] для случая алгебр Лейбница – Пуассона и показывает важность исследования пространств  $Q_{2n}$ .

**Теорема.** *Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие алгебр Лейбница – Пуассона над полем нулевой характеристики, в котором выполнено нетривиальное тождество. Тогда в  $\mathbf{V}$  выполняется нетривиальное тождество вида*

$$\sum_{\tau \in T_{2m}} \alpha_\tau \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \dots \cdot \{x_{\tau(2m-1)}, x_{\tau(2m)}\} = 0. \quad (7)$$

**Доказательство.** Из леммы 3 работы [2] следует, что в случае основного поля нулевой характеристики идеал тождеств  $Id(\mathbf{V})$  многообразия алгебр Лейбница – Пуассона  $\mathbf{V}$  порождается совокупностью полилинейных тождеств из последовательности  $\Gamma_n \cap Id(\mathbf{V})$ ,  $n \geq 2$ . Поэтому пусть  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  — нетривиальное тождество многообразия  $\mathbf{V}$ , где  $f \in \Gamma_n \cap Id(\mathbf{V})$  для некоторого  $n$ .

Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  является нетривиальной линейной комбинацией элементов вида (2) при  $r = 0$ . Предположим, что элемент  $f$  не имеет требуемый вид (7). Тогда в элементе  $f$  среди всех слагаемых с ненулевыми коэффициентами зафиксируем такое, которое имеет лейбницевый моном максимальной длины. Пусть это слагаемое имеет вид

$$\alpha \{\dots\} \cdot \dots \cdot \{\dots\} \cdot \{x_{i_1}, \dots, x_{i_d}\}, \quad 0 \neq \alpha \in K,$$

где  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_d}\}$  — лейбницевый моном максимальной длины  $d > 2$ . Без ограничения общности можно считать, что  $i_1 = n$ . В элементе  $f$  вместо переменной  $x_n$  подставим  $x_n \cdot x_{n+1}$ . Тогда из леммы 3 следует, что

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \cdot x_{n+1}) = x_n \cdot f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}) + x_{n+1} \cdot f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) + g, \quad (8)$$

где  $g = g(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \Gamma_{n+1}$ , причем ни одно слагаемое с ненулевым коэффициентом элемента  $g$  не содержит лейбницевых мономов длины  $d$ , в которых на первом месте находится либо переменная  $x_n$ , либо переменная  $x_{n+1}$ . Так как левая часть равенства (8), а также первые два слагаемых правой части данного равенства принадлежат  $Id(\mathbf{V})$ , то  $g \in \Gamma_{n+1} \cap Id(\mathbf{V})$ .

Если элемент  $g$  имеет вид (7), то все доказано. Иначе применяем к тождеству  $g = 0$  многообразия  $\mathbf{V}$  аналогичную процедуру и т. д. В результате получим тождество требуемого вида (7).  $\square$

Заметим, что в работе [9] доказан аналог теоремы Фаркаша для унитарных обобщенных PI алгебр Пуассона и унитарных PI алгебр жордановых скобок, а в работе [10] доказана теорема Фаркаша для многообразий общих алгебр Пуассона.

## Библиографический список

1. Рацеев С. М. Числовые характеристики многообразий алгебр Пуассона // Фундамент. и прикл. матем. 2016. Т. 21, вып. 2. С. 217–242.



2. Рацеев С. М., Череватенко О. И. Числовые характеристики алгебр Лейбница – Пуассона // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 1. С. 143–159.
3. Бахтирин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М. : Наука, 1985. 448 с.
4. Giambruno A., Zaicev M. V. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. AMS Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 122. Providence R.I., 2005. 352 p.
5. Drensky V. Free algebras and PI-algebras : Graduate course in algebra. Singapore : Springer-Verlag, 2000. 271 p.
6. Mishchenko S. P., Petrogradsky V. M., Regev A. Poisson PI algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 2007. Vol. 359, № 10. P. 4669–4694.
7. Farkas D. R. Poisson polynomial identities // Comm. Algebra. 1998. Vol. 26, № 2. P. 401–416.
8. Farkas D. R. Poisson polynomial identities II // Arch. Math. 1999. Vol. 72, iss. 4. P. 252–260. DOI: <https://doi.org/10.1007/s000130050329>
9. Kaygorodov I. Algebras of Jordan brackets and generalized Poisson algebras // Linear and Multilinear Algebra. 2017. Vol. 65, iss. 6. P. 1142–1157. DOI: <https://doi.org/10.1080/03081087.2016.1229257>
10. Kolesnikov P., Makar-Limanov L., Shestakov I. The Freiheitssatz for generic Poisson algebras // SIGMA. 2014. Vol. 10, iss. 115. 15 p. DOI: <https://doi.org/10.3842/SIGMA.2014.115>

---

**Образец для цитирования:**

Рацеев С. М., Череватенко О. И. О customary-пространствах алгебр Лейбница – Пуассона // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 290–296. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-290-296>

---

## On Customary Spaces of Leibniz – Poisson Algebras

**S. M. Ratseev, O. I. Cherevatenko**

Sergey M. Ratseev, <http://orcid.org/0000-0003-4995-9418>, Ulyanovsk State University, 42 Leo Tostoy St., Ulyanovsk 432017, Russia, ratseevsm@mail.ru

Olga I. Cherevatenko, <http://orcid.org/0000-0003-3931-9425>, Ilya Ulyanov State Pedagogical University, 4/5 Lenina Sq., Ulyanovsk 432071, Russia, chai@pisem.net

Let  $K$  be a base field of characteristic zero. It is well known that in this case all information about varieties of linear algebras  $\mathbf{V}$  contains in its polylinear components  $P_n(\mathbf{V})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , where  $P_n(\mathbf{V})$  is a linear span of polylinear words of  $n$  different letters in a free algebra  $K(X, \mathbf{V})$ . D. Farkas defined customary polynomials and proved that every Poisson PI-algebra satisfies some customary identity. Poisson algebras are special case of Leibniz – Poisson algebras. In the paper the sequence of customary spaces of the free Leibniz – Poisson algebra  $\{Q_{2n}\}_{n \geq 1}$  is investigated. The basis and dimension of spaces  $Q_{2n}$  are given. It is also proved that in case of a base field of characteristic zero any nontrivial identity of the free Leibniz – Poisson algebra has nontrivial identities in customary spaces.

*Keywords:* Poisson algebra, Leibnitz – Poisson algebra, variety of algebras, growth of variety.

Received: 20.05.2019 / Accepted: 09.09.2019 / Published: 31.08.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)



## References

1. Ratseev S. M. Numerical characteristics of varieties of Poisson algebras. *J. Math. Sci.*, 2019, vol. 237, iss. 2, pp. 304–322.
2. Ratseev S. M., Cherevatenko O. I. Numerical characteristics of Leibniz – Poisson algebras. *Chebyshevskii Sbornik*, 2017, vol. 18, no. 1, pp. 143–159 (in Russian).
3. Bahturin Yu. A. *Identical relations in Lie algebras*. Utrecht, VNU Science Press, 1987. 310 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1985. 448 p.).
4. Giambruno A., Zaicev M. V. *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*. AMS Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 122. Providence R.I., 2005. 352 p.
5. Drensky V. *Free algebras and PI-algebras: Graduate course in algebra*. Singapore, Springer-Verlag, 2000. 271 p.
6. Mishchenko S. P., Petrogradsky V. M., Regev A. Poisson PI algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2007, vol. 359, no. 10, pp. 4669–4695. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-07-04008-1>
7. Farkas D. R. Poisson polynomial identities. *Comm. Algebra*, 1998, vol. 26, no. 2, pp. 401–416.
8. Farkas D. R. Poisson polynomial identities II. *Arch. Math.*, 1999, vol. 72, iss. 4, pp. 252–260. DOI: <https://doi.org/10.1007/s000130050329>
9. Kaygorodov I. Algebras of Jordan brackets and generalized Poisson algebras. *Linear and Multilinear Algebra*, 2017, vol. 65, iss. 6, pp. 1142–1157. DOI: <https://doi.org/10.1080/03081087.2016.1229257>
10. Kolesnikov P., Makar-Limanov L., Shestakov I. The Freiheitssatz for generic Poisson algebras. *SIGMA*, 2014, vol. 10, iss. 115, 15 p. DOI: <https://doi.org/10.3842/SIGMA.2014.115>

---

### Cite this article as:

Ratseev S. M., Cherevatenko O. I. On Customary Spaces of Leibniz – Poisson Algebras. *Izv. Saratov Univ. (N. S.)*, Ser. Math. Mech. Inform., 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 290–296 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-290-296>

---



УДК 517.54

# Новый метод исследования краевой задачи Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка

Р. Б. Салимов, Э. Н. Хасанова

Салимов Расих Бахтигареевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Россия, 420043, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1, salimov.rsb@gmail.com

Хасанова Энже Назиповна, старший преподаватель кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Россия, 420043, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1, enkarabasheva@bk.ru

Рассматривается задача об определении аналитической в ограниченной действительной осью верхней части комплексной плоскости по краевому условию на всей действительной оси, согласно которому реальная часть произведения заданной на действительной оси комплексной функции, называемой коэффициентом краевого условия, и граничных значений искомой аналитической функции на этой оси равна нулю всюду на действительной оси. Предполагается, что аргумент коэффициента краевого условия обращается в бесконечность, как та или иная степень логарифма модуля координаты точки оси при неограниченном удалении этой точки от начала отсчета в том или ином направлении. Выводится формула, определяющая аналитическую в верхней полуплоскости функцию, мнимая часть которой при стремлении координаты точки оси положительной полуоси к бесконечности является бесконечно большой того же порядка, что и аргумент коэффициента краевого условия. Далее выводится аналогичная аналитическая функция, мнимая часть которой обращается в бесконечность того же порядка, что и аргумент коэффициента краевого условия, когда точки отрицательной действительной оси удаляются в бесконечность. Использование указанных двух функций позволяет устраниТЬ бесконечный разрыв аргумента коэффициента краевого условия. На основе приемов, аналогичных применяемым Ф. Д. Гаховым, задача приводится к задаче с конечным индексом. Для решения последней задачи используется метод Ф. Д. Гахова. Найденное решение зависит от произвольной целой функции нулевого порядка, модуль которой подчинен дополнительному условию.

**Ключевые слова:** краевая задача Гильберта, аналитическая функция, бесконечный индекс, логарифмический порядок.

Поступила в редакцию: 16.04.2019 / Принята: 15.03.2020 / Опубликована: 31.08.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-297-309>

## ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работах [1, 2] дано решение задачи Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости путем сведения ее к соответствующей задаче Римана методом Н. И. Мусхелишвили [3, с. 130–155]. При решении задачи Римана с бесконечным индексом и краевым условием на действительной оси авторами используются результаты, аналогичные разработанным ранее Н. В. Говоровым [4].



В статье [5] решение задачи Гильберта с бесконечным индексом получено непосредственно (без использования вспомогательного решения задачи Римана с бесконечным индексом) путем обобщения на рассматриваемый случай метода Ф. Д. Гахова [6, с. 273], позволяющего задачу с бесконечным индексом привести к соответствующей задаче с конечным индексом.

В работе [7] при решении однородной задачи Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка путем перехода к задаче с конечным индексом использованы результаты П. Г. Юрова [8], определяющие поведение на бесконечности интеграла типа Коши, взятого по бесконечной полупрямой, в которой плотность интеграла имеет особенность логарифмического порядка.

В настоящей статье однородная задача Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка с краевым условием на действительной оси решается путем построения двух функций, аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскостях с мнимыми частями, имеющими нужное поведение на бесконечности в точках действительной оси, с помощью которых осуществляется переход к краевому условию с конечным индексом (одна из них была использована в работе [9]).

Эти две функции на бесконечности имеют очевидное поведение, что облегчает исследование задачи и может быть использовано при построении частного решения соответствующей неоднородной задачи Гильберта без приведения последней к задаче Римана.

Пусть  $L$  — действительная ось в плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ ,  $D$  — полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$ . Требуется найти функцию  $\Phi(z)$ , аналитическую ограниченную в области  $D$ , непрерывно продолжимую во все точки контура  $L$  и удовлетворяющую краевому условию

$$a(t) \operatorname{Re} \Phi(t) - b(t) \operatorname{Im} \Phi(t) = 0, \quad (1)$$

где  $a(t), b(t)$  — заданные на  $L$  действительные непрерывные функции,  $a(t)^2 + b(t)^2 \neq 0$  всюду на  $L$ , включая бесконечно удаленную точку. Обозначая  $G(t) = a(t) - ib(t)$ , условие (1) запишем так:

$$\operatorname{Re} [e^{-i \arg G(t)} \Phi(t)] = 0, \quad t \in L, \quad (2)$$

и будем считать, что имеют место представления

$$\arg G(t) = \begin{cases} \nu(t) + \nu^-(\ln t)^\alpha, & t > 1, \\ \nu(t), & t \in [-1, 1], \\ \nu(t) + \nu^+(\ln |t|)^{\alpha^*}, & t < -1, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\alpha, \alpha^*, \nu^-, \nu^+$  — действительные числа,  $\alpha > 0, \alpha^* > 0, (\ln t)^\alpha > 0$ , при  $t > 1$ ,  $(\ln |t|)^{\alpha^*} > 0$ , при  $t < -1$ ,  $\nu(t)$  — функция, удовлетворяющая условию Гельдера  $H$  всюду на  $L$ , включая бесконечно удаленную точку ( $\nu(t) \in H, t \in L$ ). Поэтому  $\nu(-\infty) = \nu(+\infty)$ .

По аналогии со случаем задачи с конечным индексом, под индексом задачи (2) с условиями (3) нужно понимать величину  $\pi^{-1} \overline{\lim} [\arg G(t_1) - \arg G(t_2)]$ , при  $t_1 \rightarrow +\infty, t_2 \rightarrow -\infty$ .



## ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Положим  $\alpha$  — действительное положительное число. Для  $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ ,  $0 \leq \arg z \leq \pi$ , где  $(\ln z - i\pi)^\alpha$  будем рассматривать как непрерывную однозначную в полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  аналитическую функцию, которая при  $z = |x|e^{i\pi}$ ,  $|x| > 1$  принимает положительное значение  $(\ln|x|)^\alpha$ ,  $(\arg(\ln|x|)^\alpha = 0)$ , и  $\arg(\ln z - i\pi)^\alpha \rightarrow 0$  при  $z = x \rightarrow +\infty$ .

Обозначим

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{j} &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-j+1)}{j!}, \quad j > 0, \\ \binom{\alpha}{j} &= 1, \quad j = 0,\end{aligned}$$

где  $\alpha$  — произвольное действительное число,  $j$  — целое число. Запишем [10, с. 302]

$$(1+z)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} z^j, \quad |z| < 1. \quad (4)$$

Для  $z = x > 1$  имеем

$$(\ln x - i\pi)^{\alpha+1} = (\ln x)^{\alpha+1} \left(1 - \frac{i\pi}{\ln x}\right)^{\alpha+1}, \quad (5)$$

считая, что  $(\ln x)^{\alpha+1} > 0$ ,  $\left(1 - \frac{i\pi}{\ln x}\right)^{\alpha+1} \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

При  $x > e^\pi$  второй множитель правой части последней формулы представим как сумму степенного ряда с учетом разложения, полученного из (4) заменой  $\alpha$  на  $\alpha+1$ , и придем к соотношению

$$\operatorname{Im}(\ln x - i\pi)^{\alpha+1} = (\ln x)^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha+1}{2j+1} \pi(-1)^{j+1} \left(\frac{\pi}{\ln x}\right)^{2j}, \quad x > e^\pi. \quad (6)$$

Предположим, что  $\alpha > 1$ . Подберем целое число  $k$  так, чтобы было справедливо соотношение

$$-3 < \alpha - 2k \leq -1 \quad (7)$$

(когда  $k \geq 2$ ). В разложении (6) выделим первые  $k$  слагаемых и запишем его так:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(\ln x - i\pi)^{\alpha+1} &= -\pi(\alpha+1)(\ln x)^\alpha + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{\alpha+1}{2j+1} \pi^{2j+1} (-1)^{j+1} (\ln x)^{\alpha-2j} + \\ &\quad + r_{\alpha-2k}(x, \alpha), \quad x > e^\pi,\end{aligned} \quad (8)$$

где

$$r_{\alpha-2k}(x, \alpha) = (\ln x)^{\alpha-2k} \pi^{2k+1} \sum_{j=k}^{\infty} \binom{\alpha+1}{2j+1} (-1)^{j+1} \left(\frac{\pi}{\ln x}\right)^{2j-2k}. \quad (9)$$

В формуле (8) число  $\alpha$  заменим на  $\alpha-2m$ , число  $k$  на  $k-m$ , когда  $m$  принимает последовательно значения  $1, 2, \dots, k-1$ , и получим

$$\sum_{j=m}^{k-1} \binom{\alpha-2m+1}{2(j-m)+1} \pi^{2(j-m)+1} (-1)^{j-m+1} (\ln x)^{j-2k} =$$



$$= \operatorname{Im} (\ln x - i\pi)^{\alpha+1} - r_{\alpha-2k}(x, \alpha - 2m), \quad m = \overline{1, k-1}, \quad x > e^\pi, \quad (10)$$

где

$$r_{\alpha-2k}(x, \alpha - 2m) = (\ln x)^{\alpha-2k} \pi^{2(k-m)+1} \sum_{j=k}^{\infty} \binom{\alpha - 2m + 1}{2(j-m) + 1} (-1)^{j-m+1} \left( \frac{\pi}{\ln x} \right)^{2j-2k}. \quad (11)$$

Соотношения (10) представляют собой систему равенств, содержащих величины  $(\ln x)^{\alpha-2j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k-1$ . Коэффициенты при этих величинах образуют треугольную матрицу  $\|a_{mj}\|$ , элементы которой  $a_{mj} = 0$  при  $j < m$ ,  $a_{mm} = (\alpha - 2m + 1)(-\pi)$ ,  $m = \overline{1, k-1}$ . Определитель этой матрицы равен

$$\Delta = -(\pi)^{k-1} \prod_{m=1}^{k-1} (\alpha - 2m + 1),$$

причем  $\Delta \neq 0$ , так как согласно (7) имеем  $-3 < \alpha - 2k$  и  $0 < \alpha - 2(k-1) + 1$ . Пусть  $A_{mj}$  — алгебраическое дополнение для элемента  $a_{mj}$  определителя  $\Delta$ .

Из системы (10), используя формулы Крамера, запишем  $(\ln x)^{\alpha-2j}$ ,  $j = \overline{1, k-1}$ , через правые части соотношений системы

$$(\ln x)^{\alpha-2j} = \frac{1}{\Delta} \sum_{m=1}^{k-1} A_{mj} [\operatorname{Im} (\ln x - i\pi)^{\alpha-2m+1} - r_{\alpha-2k}(x, \alpha - 2m)]$$

и подставим полученные выражения в формулу (8).

Обозначая

$$B_m = \frac{1}{\Delta} \sum_{m=1}^{k-1} A_{mj} \binom{\alpha + 1}{2j + 1} \pi^{2j+1} (-1)^{j+1},$$

получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left[ (\ln x - i\pi)^{\alpha+1} - \sum_{m=1}^{k-1} B_m (\ln x - i\pi)^{\alpha-2m+1} \right] = \\ = -\pi(\alpha + 1)(\ln x)^\alpha + R_{\alpha-2k}(x, \alpha), \quad x > e^\pi, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$R_{\alpha-2k}(x, \alpha) = r_{\alpha-2k}(x, \alpha) - \sum_{m=1}^{k-1} B_m r_{\alpha-2k}(x, \alpha - 2m). \quad (13)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$T_0(z) = (\ln x - i\pi)^{\alpha+1} - \sum_{m=1}^{k-1} B_m (\ln x - i\pi)^{\alpha-2m+1}, \quad (14)$$

каждое слагаемое которой есть однозначная ветвь в полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$ , определяемая, как указано выше. Мнимая часть этой функции при  $z = |x|e^{i\pi}$ ,  $|x| > 1$ , обращается в нуль, а при  $z = x$ ,  $x > e^\pi$ , определяется формулой (12), где  $R_{\alpha-2k}(x, \alpha) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$  в силу (7), (11), (13).



Функция  $T_0(z)$  является вспомогательной в связи с тем, что она имеет особенность в точке  $z = 0$ . В связи с этим введем непрерывную, аналитическую и однозначную и во всех конечных точках полуплоскости  $\operatorname{Im} z \geq 0$  функцию

$$T(z) = (\ln(z + i) - i\pi)^{\alpha+1} - \sum_{m=1}^{k-1} B_m (\ln(z + i) - i\pi)^{\alpha-2m+1}, \quad (15)$$

считая, что  $T(z) = T_0(z + i)$ ,  $\operatorname{Im} z \geq 0$ .

Для  $\operatorname{Im} T(x)$  при  $x > e^\pi$  можно получить соотношение, схожее с формулой (12).

Но легче использовать формулу (12), имея в виду  $\operatorname{Im}(T(x) - T_0(x)) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

Обозначим

$$V(z) = \operatorname{Im}(T(x) - T_0(x)). \quad (16)$$

Подставляя сюда выражения для  $T_0(z)$  и  $T(z)$ , учитывая формулы (4), (5), при  $z = x > e^\pi$  покажем, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} V(x) &\sim -\frac{\alpha+1}{x} (\ln x)^\alpha, \quad x \rightarrow +\infty, \\ V'(x) &\sim -\frac{\alpha+1}{x^2} (\ln x)^\alpha, \quad x \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (17)$$

а при  $x \rightarrow -\infty$  выполняются соотношения, получаемые из предыдущих заменой  $\ln x$  на  $\ln|x|$ . Используя высказанные поведение производной  $V'(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , опираясь на результаты [3, с. 127], получим, что  $V(x)$  — функция, удовлетворяющая условию Гельдера в окрестности точки  $x = +\infty$  (дифференцируемая в любой конечной точке  $x > e^\pi$ ). В том числе это верно и для окрестности точки  $x = -\infty$ .

Формулу (13) с учетом соотношений (9), (11) запишем так:

$$R_{\alpha-2k}(x, \alpha) = (\ln x)^{\alpha-2k} \sum_{j=k}^{\infty} N_j(\alpha, x) \left( \frac{\pi}{\ln x} \right)^{2j-2k}, \quad x > e^\pi, \quad (18)$$

где

$$N_j(\alpha, x) = (-1)^{j+1} \pi^{2k+1} \left[ \binom{\alpha+1}{2j+1} - \sum_{m=1}^{k-1} B_m \binom{\alpha-2m+1}{2(j-m)+1} (-1)^m \pi^{-2m} \right]. \quad (19)$$

При  $0 < \alpha \leq 1$  согласно (7) мы должны взять  $k = 1$ , и в предыдущих формулах будут отсутствовать конечные суммы, в которых  $m = \overline{1, k-1}$ ; при  $k = 1$  дополнительно будем иметь  $r_{\alpha-2k}(x, \alpha) \equiv 0$ ,  $R_{\alpha-2k}(x, \alpha) \equiv 0$ , причем последние два равенства выполняются и в случае  $\alpha = 2k-1 > 1$ .

В дальнейшем будем считать, что  $\alpha-2k < -1$ , помня, что в полученных формулах при  $\alpha = 2k-1$  надо положить  $r_{\alpha-2k}(x, \alpha) \equiv 0$ ,  $m = \overline{0, k-1}$ .

В силу (18), (19) имеем

$$R_{\alpha-2k}(x, \alpha) = \frac{M(x, \alpha, k)}{(\ln x)^{\alpha-2k}}, \quad x > e^\pi, \quad (20)$$

где  $M(x, \alpha, k)$  — сумма ряда правой части формулы (18) с производной

$$M'_x(x, \alpha, k) = -\frac{\pi}{x(\ln x)^2} \sum_{j=k+1}^{\infty} N_j(\alpha, x) (2j-2k) \left( \frac{\pi}{\ln x} \right)^{2j-2k-1}.$$



С учетом (14), (18) формулу (12) представим так:

$$\operatorname{Im} T_0(x) = -\pi(\alpha + 1)(\ln x)^\alpha + R_{\alpha-2k}(x, \alpha), \quad x > e^\pi.$$

Беря в расчет (16), получим

$$\operatorname{Im} T(x) = V(x) - \pi(\alpha + 1)(\ln x)^\alpha + R_{\alpha-2k}(x, \alpha), \quad x > e^\pi. \quad (21)$$

Для  $z = x = |x|e^{i\pi} < 0$ ,  $|x| > e^\pi$  по формуле (14) имеем  $\operatorname{Im} T_0(x) = 0$ , и с учетом (16) получим равенство

$$\operatorname{Im} T(x) = V(x), \quad x < -e^\pi. \quad (22)$$

На основании изложенного сформулируем лемму для случая  $\alpha > 0$ .

**Лемма 1.** При вышеуказанных условиях для значений мнимой части аналитической в полуплоскости  $\operatorname{Im} z \geq 0$  функции  $T(z)$  формулы (15) при  $z = x$ ,  $|x| > e^\pi$  справедливы представления (21), (22), в которых  $V(x)$  — функция, удовлетворяющая условию Гельдера и обращающаяся в нуль на бесконечности,  $R_{\alpha-2k}(x, \alpha)$  выражается формулой (20) и исчезает при натуральном числе  $\alpha$ .

Пусть  $\alpha^*$  — действительное положительное число. Под  $(\ln z)^{\alpha^*}$ , когда  $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ ,  $-\pi \leq \arg z < 0$ , будем понимать непрерывную однозначную в полуплоскости  $\operatorname{Im} z < 0$  функцию, которая при  $z = x > 1$  принимает положительное значение  $(\ln z)^{\alpha^*}$ ,  $(\arg(\ln z))^{\alpha^*} = 0$ , и при  $z = |x|e^{-i\pi}$ ,  $|x| > 1$ ,  $\arg(\ln |x| - i\pi)^{\alpha^*} \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Здесь при  $x < -e^\pi$ , т. е.  $|x| > e^\pi$  для  $z = |x|e^{-i\pi}$ , и  $(\ln z)^{\alpha^*+1} = (\ln |x| - i\pi)^{\alpha^*+1}$  согласно формуле (6) имеем

$$\operatorname{Im} (\ln |x| - i\pi)^{\alpha^*+1} = (\ln |x|)^{\alpha^*} \sum_{j=1}^{\infty} \binom{\alpha^* + 1}{2j + 1} \pi(-1)^{j+1} \left( \frac{\pi}{\ln x} \right)^{2j}.$$

Считая пока  $\alpha^* > 1$ , выберем целое число  $k^*$  так, чтобы имело место соотношение (когда  $k^* \geq 2$ )

$$-3 < \alpha^* - 2k^* \leq -1. \quad (23)$$

Отсюда ясно, что в полученных на основании (6) формулах, включая (13), величины  $\alpha$ ,  $k$ ,  $x$  в случае  $x < -e^\pi$  можно заменить соответственно на  $\alpha^*$ ,  $k^*$ ,  $|x|^*$ .

При этом определитель системы, получаемой из (10), с элементами  $a_{mj}^*$  будет равен

$$\Delta^* = -(\pi)^{k^*-1} \prod_{m=1}^{k^*-1} (\alpha^* - 2m + 1),$$

причем

$$a_{mj}^* = 0 \text{ при } j < m, \quad a_{mm}^* = (\alpha^* - 2m + 1)(-\pi), \quad m = \overline{1, k^*-1}.$$

По значениям  $A_{mj}^*$  — алгебраического дополнения для  $a_{mj}^*$ , вычисляется

$$B_m^* = \frac{1}{\Delta^*} \sum_{m=1}^{k^*-1} A_{mj}^* \binom{\alpha^* + 1}{2j + 1} \pi^{2j+1} (-1)^{j+1}.$$



При вышеуказанной замене из (12) получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left[ \left( \ln(|x|e^{-2\pi}) \right)^{\alpha^*+1} - \sum_{m=1}^{k^*-1} B_m^* \left( \ln(|x|e^{-2\pi}) \right)^{\alpha^*-2m+1} \right] = \\ = -\pi(\alpha^* + 1)(\ln|x|)^* + R_{\alpha^*-2k^*}(|x|, \alpha^*), \quad x < -e^\pi, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$R_{\alpha^*-2k^*}(|x|, \alpha^*) = r_{\alpha^*-2k^*}(|x|, \alpha^*) - \sum_{m=1}^{k^*-1} B_m^* r_{\alpha^*-2k^*}(|x|, \alpha^* - 2m). \quad (25)$$

В формуле (24) выражение в квадратных скобках левой части есть значение при  $z = |x|e^{-i\pi}$  функции

$$T_0^*(z) = (\ln z)^{\alpha^*+1} - \sum_{m=1}^{k^*-1} B_m^* (\ln z)^{\alpha^*-2m+1}, \quad (26)$$

каждое слагаемое которой является однозначной непрерывной ветвью в полуплоскости  $\operatorname{Im} z < 0$ , определяемой, как указано выше.

Заменяя в формуле (26)  $z$  на  $z - i$ , получим функцию

$$T_0^*(z) = (\ln(z - i))^{\alpha^*+1} - \sum_{m=1}^{k^*-1} B_m^* (\ln(z - i))^{\alpha^*-2m+1}, \quad (27)$$

непрерывную аналитическую в полу平面ости  $\operatorname{Im} z \leq 0$  с единственной особой точкой  $z = \infty$ .

Введем в рассмотрение функцию

$$V^*(z) = \operatorname{Im}(T^*(z) - T_0^*(z)), \quad (28)$$

значения которой  $V^*(x)$  на действительной оси в окрестности точки  $x = \infty$  обладают теми же свойствами, что и  $V(x)$  (при  $x < -e^\pi$  и  $x > e^\pi$ ).

На основании формул (18)–(20) получаем

$$R_{\alpha^*-2k^*}(|x|, \alpha^*) = \frac{M^*(|x|, \alpha^*, k^*)}{(\ln|x|)^{-\alpha^*+2k^*}}, \quad x < -e^\pi,$$

где

$$\begin{aligned} M^*(|x|, \alpha^*, k^*) &= \sum_{j=k^*}^{\infty} N_j^*(\alpha^*, k^*) \left( \frac{\pi}{\ln|x|} \right)^{2j-2k^*-1}, \\ M'_{|x|}(|x|, \alpha^*, k^*) &= -\frac{\pi}{|x|(\ln|x|)^2} \sum_{j=k^*+1}^{\infty} N_j^*(\alpha^*, k^*)(2j-2k^*) \left( \frac{\pi}{\ln|x|} \right)^{2j-2k^*-1}, \end{aligned}$$

$N_j^*(\alpha^*, k^*)$  определяется формулой, получаемой из (19) заменой  $N_j$ ,  $k$ ,  $\alpha$ ,  $B_m$  соответственно на  $N_j^*$ ,  $k^*$ ,  $\alpha^*$ ,  $B_m^*$ . При  $0 < \alpha^* \leq 1$  в силу (23) здесь и в формулах (24), (25) будут отсутствовать конечные суммы, в которых  $m = \overline{1, k^*-1}$ ; при  $k^* = 1$  дополнительно будем иметь  $r_{\alpha^*-2k^*}(|x|, \alpha^*) \equiv 0$ ,  $R_{\alpha^*-2k^*}(|x|, \alpha^*) \equiv 0$ , причем последние два равенства выполняются и в случае  $\alpha^* = 2k^* - 1 > 1$ .



В дальнейшем будем считать, что  $\alpha^* - 2k^* < -1$ , учитывая, что при  $\alpha^* = 2k^* - 1$  формулы упростятся.

При  $z = x, x > 1$  согласно (26) имеем  $\operatorname{Im} T_0^*(x) = 0$ , поэтому с учетом (28) получаем

$$\operatorname{Im} T^*(x) = V^*(x), \quad x > e^\pi. \quad (29)$$

Принимая во внимание формулы (24), (26), имеем

$$\operatorname{Im} T_0^*(x) = -\pi(\alpha^* + 1)(\ln|x|)^{\alpha^*} + R_{\alpha^*-2k^*}(|x|, \alpha^*), \quad x < -e^\pi,$$

следовательно, с учетом (28) приходим к соотношению

$$\operatorname{Im} T^*(x) = V^*(x) - \pi(\alpha^* + 1)(\ln|x|)^{\alpha^*} + R_{\alpha^*-2k^*}(|x|, \alpha^*), \quad x < -e^\pi. \quad (30)$$

Таким образом, мы получили соотношения (29), (30), аналогичные приведенным в вышеуказанной лемме.

Как и выше, имея функцию  $T^*(z)$  формулы (27), определим аналитическую в полуплоскости  $\operatorname{Im} z \geq 0$  функцию

$$\bar{T}^*(z) = \overline{T^*(\bar{z})}, \quad (31)$$

для значений которой в точках действительной оси  $z = \bar{z} = x$  имеем

$$\operatorname{Re} \bar{T}^*(x) = \operatorname{Re} T^*(x), \quad \operatorname{Im} \bar{T}^*(x) = -\operatorname{Im} T^*(x). \quad (32)$$

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Краевое условие (2) запишем так:

$$\operatorname{Re} [e^{-i\tilde{\nu}(t)} \frac{\Phi(t)}{e^{\beta T(t) + \beta^* \bar{T}^*(t)}}] = 0, \quad t \in L, \quad (33)$$

где  $\beta, \beta^*$  — действительные постоянные,

$$\tilde{\nu}(t) = \arg G(t) - \beta \operatorname{Im} T(t) - \beta^* \operatorname{Im} \bar{T}^*(t). \quad (34)$$

Согласно (3) с учетом (21), (22), (29)–(32) получим

$$\tilde{\nu}(t) = \nu(t) + \nu^-(\ln t)^\alpha - \beta[V(t) - \pi(\alpha + 1)(\ln t)^\alpha + R_{\alpha-2k}(t, \alpha)] + \beta^*V^*(t), \quad t > e^\pi,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(t) = \nu(t) + \nu^+(\ln t)^{\alpha^*} - \beta V(t) + \beta^*[V^*(t) - \pi(\alpha^* + 1)(\ln|t|)^{\alpha^*} + \\ + R_{\alpha^*-2k^*}(|t|, \alpha^*)], \quad t < -e^\pi. \end{aligned}$$

В дальнейшем будем считать, что числа  $\beta, \beta^*$  выбраны равными

$$\beta = -\frac{\nu^-}{\pi(\alpha + 1)}, \quad \beta^* = \frac{\nu^+}{\pi(\alpha^* + 1)}. \quad (35)$$

Тогда

$$\tilde{\nu}(t) = \nu(t) - \beta[V(t) + R_{\alpha-2k}(t, \alpha)] + \beta^*V^*(t), \quad t > e^\pi, \quad (36)$$

$$\tilde{\nu}(t) = \nu(t) - \beta V(t) + \beta^*[V^*(t) + R_{\alpha^*-2k^*}(|t|, \alpha^*)], \quad t < -e^\pi, \quad (37)$$



кроме того, в силу (32), (34) имеем

$$\tilde{\nu}(t) = \arg G(t) - \beta \operatorname{Im} T(t) + \beta^* \operatorname{Im} \bar{T}^*(t), \quad -e^\pi \leq t \leq e^\pi,$$

причем  $\tilde{\nu}(t)$  — непрерывная на  $L$  функция, удовлетворяющая условию  $H$  на любой конечной части  $L$ ,  $\tilde{\nu}(-\infty) = \tilde{\nu}(+\infty)$ .

Далее определим аналитическую в полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  функцию

$$\Gamma(z) = \frac{1}{\pi} \int_L \tilde{\nu}(\tau) \frac{d\tau}{\tau - z},$$

граничное значение которой выражается формулой

$$\Gamma^+(t) = i\tilde{\nu}(t) + \Gamma_0(t), \quad (38)$$

где

$$\Gamma_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_L \tilde{\nu}(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t}. \quad (39)$$

Учитывая последнее, краевое условие (33) запишем так:

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-\Gamma^+(t)} \Phi(t)}{e^{\beta T(t) + \beta^* \bar{T}^*(t)}} \right] = 0, \quad t \in L.$$

Отсюда ясно, что функция

$$F(z) = \frac{e^{-\Gamma(z)} \Phi(z)}{e^{\beta T(z) + \beta^* \bar{T}^*(z)}}, \quad z \in D, \quad (40)$$

допускает аналитическое продолжение на полуплоскость  $\operatorname{Im} z < 0$ . При этом приходим к заключению, что  $F(z)$  является целой функцией.

Функция  $\Gamma^+(t)$  формулы (38) удовлетворяет условию  $H$  на любой конечной части  $L$ , так как этим свойством обладают  $\tilde{\nu}(t)$  и интеграл  $\Gamma_0(t)$  формулы (39) с плотностью  $\tilde{\nu}(t)$  [3, с. 61].

Принимая во внимание представления (36), (37), представления (17) для  $V(x)$ ,  $V'(x)$  и аналогичные для  $V^*(x)$ ,  $V^{**}(x)$ , а также формулу (20) для  $R_{\alpha-2k}(x, \alpha)$  и аналогичную для  $R_{\alpha^*-2k^*}(|x|, \alpha^*)$ , придем к заключению, что интеграл (39) стремится к нулю как при  $t \rightarrow +\infty$ , так и при  $t \rightarrow -\infty$ . Следовательно, интеграл  $\Gamma_0(t)$  является ограниченной непрерывной функцией на  $L$ .

Если  $\Phi(z)$  — ограниченное решение задачи (33), то

$$|e^{-\Gamma(z)} \Phi(z)| < C = \text{const}, \quad z \in D. \quad (41)$$

Тогда, принимая во внимание формулы (15), (27), легко прийти к заключению, что порядок целой функции  $F(z)$ , для которой справедлива формула (40), равен нулю [11, с. 245].

Из формулы (40) находим функцию

$$\Phi(z) = e^{\Gamma(z)} e^{\beta T(z) + \beta^* \bar{T}^*(z)} F(z), \quad (42)$$



которая удовлетворяет краевому условию (2), равносильному (33), т. е. является решением краевой задачи (2) и содержит произвольную целую функцию  $F(z)$  нулевого порядка. В силу (40), (41) имеем

$$|F(z)| < Ce^{-\beta \operatorname{Re} T(z) - \beta^* \operatorname{Re} \bar{T}^*(z)}, \quad z \in D,$$

и, в частности, согласно (32)

$$|F(t)| < Ce^{-\beta \operatorname{Re} T(t) - \beta^* \operatorname{Re} \bar{T}^*(t)}, \quad t \in L. \quad (43)$$

Таким образом, мы пришли к следующей теореме.

**Теорема 1.** *Если краевая задача (2) имеет ограниченное решение  $\Phi(z)$ , то оно определяется формулой (42), в которой  $F(z)$  — целая функция нулевого порядка, удовлетворяющая условию (43).*

Справедлива и обратная теорема.

**Теорема 2.** *Если  $F(z)$  — любая целая функция нулевого порядка, удовлетворяющая условию (43), то ограниченное решение краевой задачи (2) определяется формулой (42).*

В самом деле, функция (42) с указанной в теореме функцией  $F(z)$  удовлетворяет краевому условию (2). Остается установить ограниченность этого решения. Учитывая, что  $F(z)$  — функция нулевого порядка и выражения для  $T(z)$ ,  $\bar{T}^*(z)$ , придем к заключению, что порядок функции  $\Phi(z)$  формулы (42) в полуплоскости  $D$  не может быть положительным [12, с. 69], так как [11, с. 244] для любого малого  $\epsilon > 0$   $\max |F(z)| < \exp r^\epsilon$  при  $r \rightarrow \infty$  и в силу (42) справедливо

$$\ln \max_{|z|=r} |\Phi(z)| < r^\epsilon + \max_{|z|=r} \operatorname{Re} \Gamma(z) + |\beta| \max_{|z|=r} \operatorname{Re} T(z) + |\beta^*| \max_{|z|=r} \operatorname{Re} T^*(z), \quad r \rightarrow \infty.$$

Но в силу условия (43) и формулы (42) будет выполняться неравенство  $|\Phi(t)| < \tilde{C} = \text{const}$ ,  $t \in L$ . Поэтому, согласно теореме Фрагмена–Линделефа [12, с. 69, 206, 211], всюду в области  $D$  будем иметь  $|\Phi(z)| < \tilde{C}$ , что и требовалось установить.

Показатель правой части формулы (43) с учетом (35) можно записать так:

$$-\beta \operatorname{Re} T(t) - \beta^* \operatorname{Re} T^*(t) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\nu^-}{\alpha + 1} \operatorname{Re} T(t) - \frac{\nu^+}{\alpha^* + 1} \operatorname{Re} T^*(t) \right]. \quad (44)$$

На основании формул (15), (27) имеем соответственно

$$\operatorname{Re} T(t) \sim (\ln |t|)^{\alpha+1}, \quad \operatorname{Re} T^*(t) \sim (\ln |t|)^{\alpha^*+1}, \quad |t| \rightarrow \infty. \quad (45)$$

Если выполняется условие

$$\left( \beta \operatorname{Re} T(t) + \beta^* \operatorname{Re} T^*(t) \right) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow -\infty \text{ или } t \rightarrow +\infty, \quad (46)$$

то целая функция нулевого порядка  $F(z)$ , удовлетворяющая неравенству (43), обращается в нуль тождественно:  $F(z) \equiv 0$  [11, с. 256]. В этом случае по формуле (42) мы получаем только нулевое решение краевой задачи (2).



Из формул (44), (45) видно, что при выполнении любого из следующих условий:

- а)  $\alpha > \alpha^*$  и  $\nu^- < 0$ ,
  - б)  $\alpha < \alpha^*$  и  $\nu^+ > 0$ ,
  - в)  $\alpha = \alpha^*$  и  $\nu^- - \nu^+ < 0$ ,
- (47)

будет иметь место соотношение (46) и краевая задача (2) будет иметь только нулевое решение.

Итак, справедлива

**Теорема 3.** *Если выполняется условие (46), в частности, имеет место любое из трех условий (47), то краевая задача (2) имеет только нулевое решение.*

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, дано новое прозрачное решение задачи Гильберта с краевым условием на действительной оси, когда индекс задачи обращается в бесконечность логарифмического порядка и  $\arg G(t) \sim \nu^-(\ln|t|)^\alpha$  при  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\arg G(t) \sim \nu^+(\ln|t|)^{\alpha^*}$  при  $t \rightarrow -\infty$ , с различными, вообще говоря, показателями  $\alpha$  и  $\alpha^*$ . Это решение в общем случае содержит произвольную целую функцию нулевого порядка, удовлетворяющую действительному условию (43), т. е. задача имеет бесконечное множество решений. В отдельных случаях рассматриваемая задача имеет только нулевое решение.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00060).

## Библиографический список

1. Сандрыгайло И. Е. О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1974. № 6. С. 16–23.
2. Алекна П. Ю. Краевая задача Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости // Литов. матем. сб. 1977. Т. XVII, № 6. С. 5–12.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968. 511 с.
4. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М. : Наука, 1986. 289 с.
5. Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. К решению задачи Гильберта с бесконечным индексом // Матем. заметки. 2003. Т. 73, вып. 5. С. 724–734. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm221>
6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.
7. Карабашева Э. Н. О разрешимости однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним разного порядка завихрением на бесконечности // Изв. КГАСУ. 2014. № 1 (27). С. 242–252.
8. Юров П. Г. Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического типа // Изв. вузов. Матем. 1966. № 2. С. 158–163.
9. Салимов Р. Б., Хасанова Э. Н. Решение однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка налуче новым методом // Изв. Сарат. ун.-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017 Т. 17, вып. 2. С. 160–171. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-160-171>
10. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций : в 2 т. М. : Наука, 1967. Т. 1. 486 с.
11. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций : в 2 т. М. : Наука, 1967. Т. 2. 624 с.
12. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М. : Гостехиздат, 1956. 632 с.



**Образец для цитирования:**

Салимов Р. Б., Хасанова Э. Н. Новый метод исследования краевой задачи Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 297–309. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-297-309>

## New Method for Investigating the Hilbert Boundary Value Problem with an Infinite Logarithmic Order Index

R. B. Salimov, E. N. Khasanova

Rasih B. Salimov, <https://orcid.org/0000-0003-4177-4830>, Kazan State University of Architecture and Engineering, 1 Zelenaya St., Kazan 420043, Russia, salimov.rsb@gmail.com

Enzhe N. Khasanova, <https://orcid.org/0000-0002-0067-2224>, Kazan State University of Architecture and Engineering, 1 Zelenaya St., Kazan 420043, Russia, enkarabasheva@bk.ru.

We consider the problem of identification of the analytical in the complex upper half plane by boundary condition on the entire real axis, according to which, the real part of the product, by the given on the real axis complex function and the boundary values of the desired analytical function equal zero everywhere on the real axis. It is assumed that the argument of the coefficient of the boundary condition turns to infinity as one or another degree of the logarithm of the module of the coordinate of the axis point with unlimited distance of this point from the origin in one or another direction. Derived the formula that defines an analytical function in the upper half-plane, the imaginary part of which, when the coordinate of the axis point of the positive half-axis tends to infinity, is infinitely large of the same order as the argument of the coefficient of the boundary condition. Then derived a similar analytical function, the imaginary part of which turns to infinity of the same order as the argument of the coefficient of the boundary condition, when the points of the negative real axis are removed to infinity. We eliminate the infinite gap of the argument of the coefficient of the boundary condition by using these two functions. So the problem reduced to a finite index problem by techniques similar to F. D. Gakhov method. The method of F. D. Gakhov is used to solve the last problem. The solution depends on an arbitrary integer function of zero order, whose module satisfy to an additional condition.

**Keywords:** Hilbert boundary value problem, analytical function, infinite index, logarithmic order.

Received: 16.04.2019 / Accepted: 15.03.2020 / Published: 31.08.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 18-31-00060).

### References

1. Sandrygailo I. E. On Hilbert's boundary-value problem with infinite index for the half-plane. *Izv. Akad. nauk Belorus. SSR. Ser. fiz.-mat. nauk*, 1974, no. 6, pp. 16–23 (in Russian).
2. Alekna P. The Hilbert boundary-value problem with infinite index of logarithmic orden in the half-plane. *Lith. Math. J.*, 1978, vol. 17, pp. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00968485>
3. Muskhelishvili N. I. *Singuliarnye integral'nye uravneniya* [Singular Integral Equations]. Moscow, Nauka, 1968. 511 p. (in Russian).



4. Govorov N. V. *Kraevaia zadacha Rimana s beskonechnym indeksom* [Riemann Boundary Problem with Infinite Index]. Moscow, Nauka, 1986. 289 p. (in Russian).
5. Salimov R. B., Shabalin P. L. To the solution of the Hilbert problem with infinite index. *Math. Notes*, 2003, vol. 73, no. 5, pp. 680–689. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1024064822157>
6. Gakhov F. D. *Kraevye zadachi* [Boundary-Value Problems]. Moscow, Nauka, 1977. 640 p. (in Russian).
7. Karabasheva E. N. On solvability of homogeneous Hilbert problem with countable set of points discontinuities and of a different order two-side curling at infinity. *News of the KSUAE*, 2014, no. 1 (27), pp. 242–252 (in Russian).
8. Yurov P. G. The homogeneous Riemann boundary value problem with an infinite index of logarithmic type. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1966, no. 2, pp. 158–163 (in Russian).
9. Salimov R. B., Khasanova E. N. The Solution of the Homogeneous Boundary Value Problem of Riemann with Infinite Index of Logarithmic Order on the Beam by a New Method. *Izv. Saratov Univ. (N. S.)*, Ser. Math. Mech. Inform., 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 160–171 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-160-171>
10. Markushevich A. I. *Teoriia analiticheskikh funktsii: v 2 t.* [The theory of analytic functions: in 2 vols.]. Vol. 1. Moscow, Nauka, 1968. 486 p. (in Russian).
11. Markushevich A. I. *Teoriia analiticheskikh funktsii: v 2 t.* [The theory of analytic functions: in 2 vols.]. Vol. 2. Moscow, Nauka, 1968. 624 p. (in Russian).
12. Levin B. Ya. *Raspredelenie kornei tselykh funktsii* [Distribution of Zeros of Entire Functions]. Moscow, Gostechizdat, 1956. 632 p. (in Russian).

---

**Cite this article as:**

Salimov R. B., Khasanova E. N. New Method for Investigating the Hilbert Boundary Value Problem with an Infinite Logarithmic Order Index. *Izv. Saratov Univ. (N. S.)*, Ser. Math. Mech. Inform., 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 297–309 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-297-309>

---



УДК 519.64,517.2

## О приближенном решении одного класса слабо сингулярных интегральных уравнений

Э. Г. Халилов

Халилов Эльнур Гасан оглы, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и прикладной математики, Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, Азербайджан, AZ1010, г. Баку, просп. Азадлыг, 20, elnurkhalil@mail.ru

Работа посвящена исследованию решения одного класса слабо сингулярных поверхностных интегральных уравнений второго рода. Сначала дается разбиение поверхности Ляпунова на «регулярные» элементарные части, а затем в опорных точках строится кубатурная формула для одного класса слабо сингулярных поверхностных интегралов. Используя построенную кубатурную формулу, рассматриваемое интегральное уравнение заменяется системой алгебраических уравнений. В результате при дополнительно налагаемых условиях на ядро интеграла доказывается, что рассматриваемое интегральное уравнение и полученная система алгебраических уравнений имеют единственные решения, причем решение системы алгебраических уравнений сходится к значению решения интегрального уравнения в опорных точках. Кроме того, используя эти результаты, дано обоснование метода коллокации для различных интегральных уравнений внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца.

**Ключевые слова:** метод коллокации, интегральные уравнения второго рода, кубатурная формула, слабо сингулярный поверхностный интеграл, краевые задачи для уравнения Гельмгольца.

Поступила в редакцию: 04.06.2019 / Принята: 11.09.2019 / Опубликована: 31.08.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-310-325>

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Известно, что многочисленные теоретические и прикладные задачи математики, физики и механики (например, внешние краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца и др.) приводят к различным классам интегральных уравнений (ИУ) второго рода. Отметим, что основное преимущество применения метода граничных интегральных уравнений к исследованию внешних краевых задач заключается в том, что подобный подход позволяет свести задачу, поставленную для неограниченной области, к задаче для ограниченной области меньшей размерности.

Поскольку ИУ точно решаются лишь в очень редких случаях, первостепенное значение как для теории, так и в особенности для ее приложений приобретает разработка приближенных методов решения ИУ с соответствующим теоретическим обоснованием. Отметим, что приближенное решение для некоторых классов слабо сингулярных интегральных уравнений исследовано в работах [1–6], а для некоторых классов сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений — в



работах [7–11]. Мы же в настоящей работе рассмотрим следующее более общее ИУ, к которому может быть приведен целый ряд пространственных краевых задач:

$$\rho + A\rho = f, \quad (1)$$

где

$$(A\rho)(x) = \int_S \frac{K(x, y)}{|x - y|^n} \rho(y) dS_y, \quad x \in S, \quad (2)$$

$S \subset \mathbb{R}^3$  — поверхность Ляпунова,  $n$  — натуральное число,  $K(x, y)$  — непрерывная функция на  $S \times S$  и существует число  $\lambda \in (0, 2)$  такое, что

$$|K(x, y)| \leq M|x - y|^{n-\lambda}, \quad \forall x, y \in S, \quad (3)$$

$f(x)$  — непрерывная функция на поверхности  $S$ , а  $\rho(x)$  — искомая непрерывная функция на  $S$ . Здесь и далее через  $M$  обозначены положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

Настоящая работа посвящена обоснованию метода коллокации для ИУ (1).

## 2. КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СЛАБО СИНГУЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Разобьем  $S$  на элементарные части  $S = \bigcup_{l=1}^N S_l$ .

1. Для каждого  $l \in \{1, 2, \dots, N\}$  элементарная часть  $S_l$  замкнута и множество  $S_l^0$  ее внутренних относительно  $S$  точек не пусто, причем  $\text{mes } S_l^0 = \text{mes } S_l$  и  $S_l^0 \cap S_j^0 = \emptyset$  при  $j \in \{1, 2, \dots, N\}, j \neq l$ , где через  $\text{mes } S_l$  обозначена площадь элементарной части  $S_l$ .
2. Для каждого  $l \in \{1, 2, \dots, N\}$  элементарная часть  $S_l$  представляет собой связной кусок поверхности  $S$  с непрерывной границей.
3. Для каждого  $l \in \{1, 2, \dots, N\}$  существует так называемая опорная точка  $x_l \in S_l$  такая, что:
  - 3.1.  $r_l(N) \sim R_l(N)$  ( $r_l(N) \sim R_l(N) \rightarrow C_1 \leq r_l(N)/R_l(N) \leq C_2$ ,  $C_1$  и  $C_2$  — положительные постоянные, не зависящие от  $N$ ), где  $r_l(N) = \min_{x \in \partial S_l} |x - x_l|$  и  $R_l(N) = \max_{x \in \partial S_l} |x - x_l|$ ;
  - 3.2.  $R_l(N) \leq d/2$ , где  $d$  — радиус стандартной сферы [12, с. 400];
  - 3.3. Для всех  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$  выполняется  $r_j(N) \sim r_l(N)$ .

Очевидно, что  $r(N) \sim R(N)$  и  $\lim_{N \rightarrow \infty} R(N) = 0$ , где  $R(N) = \max_{l=1,N} R_l(N)$ ,  $r(N) = \min_{l=1,N} r_l(N)$ .

**Пример 1.** Проведем разбиение единичной сферы Т на элементарные части. Переайдем к сферической системе координат. Тогда для любой точки  $Q(y_1, y_2, y_3) \in T$

$$\begin{cases} y_1 = \sin u \cos v, \\ y_2 = \sin u \sin v, \\ y_3 = \cos u. \end{cases} .$$

Здесь  $u \in [0, \pi]$  есть угол, образованный вектором  $\vec{OQ}$  с осью  $y_3$ , а  $v \in [0, 2\pi]$  есть двугранный угол, образованный плоскостью, проходящей через полярную ось  $y_3$  и точку  $Q$ , с плоскостью  $y_2 = 0$ . Проведем на сфере Т параллель  $u = \frac{\pi}{2}$ . Тогда  $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ , где  $T_1 = \{Q \in T : 0 \leq u < \pi/2\}$  — верхняя полусфера,  $T_2 = \{Q \in T : u = \pi/2\}$  — экватор, а  $T_3 = \{Q \in T : \pi/2 < u \leq \pi\}$  — нижняя полусфера.  $T_1$  равномерно покроем семейством параллелей  $u_i = \frac{\pi i}{2\ell}$ ,  $i = \overline{1, \ell - 1}$ , где  $\ell \geq 2$  и  $\ell$ -я параллель совпадает с экватором. Каждую  $i$ -ю параллель, начиная от точки пересечения с плоскостью  $y_2 = 0$  ( $y_1 > 0$ ), разделим на  $4m_i$  ( $m_i = 2^{\lceil \log_2 i \rceil}$  ( $\lceil \cdot \rceil$  — целая часть) равных частей  $v_j^{(i)} = \frac{\pi j}{2m_i}$ ,  $j = \overline{0, 4m_i - 1}$ ,  $i = \overline{1, \ell - 1}$ . Из каждой точки деления проведем часть меридиана вплоть до экватора  $T_2$ . Нижняя полусфера  $T_3$ , ввиду симметричности Т относительно плоскости  $y_3 = 0$ , разобьется следующим образом:

$$\begin{cases} u_{2\ell-i} = \pi - u_i, & i = \overline{1, \ell - 1}, \\ v_j^{(2\ell-i)} = v_j^{(i)}, & j = \overline{0, 4m_i - 1}. \end{cases}$$

Точки пересечения параллелей с меридианами назовем узлами и обозначим их через  $Q_{k,l}$  ( $k = \overline{1, 2\ell - 1}$ ,  $l = \overline{0, 4m_k - 1}$ ). Пусть  $\widehat{Q_{k_1,l}Q_{k_2,l}}$  ( $\widehat{Q_{k,l_1}Q_{k,l_2}}$ ) есть дуга по меридиану (параллели), соединяющая узлы  $Q_{k_1,l}$  ( $Q_{k,l_1}$ ) и  $Q_{k_2,l}$  ( $Q_{k,l_2}$ ) и содержащая их. Построенная географическая сеть разбивает  $T_k$  ( $k = \overline{1, 3}$ ) следующим образом:

$$T_1 = T_{0,\ell} \bigcup \left( \bigcup_{i=1}^{\ell-1} \left( \bigcup_{j=0}^{4m_i-1} T_{ij} \right) \right), \quad T_2 = \bigcup_{j=0}^{4m_\ell-1} \left( \widehat{Q_{\ell,j}Q_{\ell,j+1}} \setminus \{Q_{\ell,j+1}\} \right),$$

$$T_3 = T_{2\ell,\ell} \bigcup \left( \bigcup_{i=1}^{\ell-1} \left( \bigcup_{j=0}^{4m_i-1} T_{2\ell-i,j} \right) \right),$$

где

$$T_{0,\ell} = \left\{ Q \in T_1 : 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2\ell}, 0 \leq v \leq 2\pi \right\},$$

$$T_{2\ell,\ell} = \left\{ Q \in T_3 : \pi - \frac{\pi}{2\ell} \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi \right\},$$

$$T_{ij} = \{Q \in T_1 : u_i \leq u < u_{i+1}, v_j^{(i)} \leq v < v_{j+1}^{(i)}\},$$

$$T_{2\ell-i,j} = \{Q \in T_3 : \pi - u_{i+1} < u \leq \pi - u_i, v_j^{(i)} \leq v < v_{j+1}^{(i)}\}.$$

Элементы  $T_2$  включим в  $T_{\ell-1,j}$  и  $T_{\ell+1,j}$  по следующему закону: если  $j$  — нечетное, то  $\widehat{Q_{\ell,j}Q_{\ell,j+1}} \setminus \{Q_{\ell,j+1}\}$  присоединим к  $T_{\ell-1,j}$ , а если  $j$  — четное, то к  $T_{\ell+1,j}$ . В результате каждая точка сферы принадлежит одному из элементарных множеств  $T_{0,\ell}$ ,  $T_{i,j}$ ,  $T_{2\ell-i,j}$  и  $T_{2\ell,\ell}$ . При этом координаты опорных точек  $P_{0,\ell} \in T_{0,\ell}$ ,  $P_{i,j} \in T_{i,j}$ ,  $P_{2\ell-i,j} \in T_{2\ell-i,j}$  и  $P_{2\ell,\ell} \in T_{2\ell,\ell}$  находятся по следующим формулам:

для верхней полусфера —

$$\begin{cases} \bar{u}_0 = 0, & 0 \leq \bar{v}_0 \leq 2\pi, \\ \bar{u}_i = \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}), & \bar{v}_j^{(i)} = \frac{1}{2}(v_j^{(i)} + v_{j+1}^{(i)}); \end{cases}$$

для нижней полусфера —

$$\begin{cases} \bar{u}_{2\ell-i} = \pi - \bar{u}_i, & \bar{v}_j^{(2\ell-i)} = \bar{v}_j^{(i)}, \\ \bar{u}_{2\ell} = \pi, & 0 \leq \bar{v}_\ell \leq 2\pi. \end{cases}$$



Нетрудно подсчитать общее количество опорных точек:

$$N_1 = 2 \left( 4 \left( 2^m \ell - \frac{2^{2m+1} + 1}{3} \right) + 1 \right),$$

где  $m$  — наибольшее число, удовлетворяющее неравенству  $2^m \leq \ell - 1$ . Пусть  $Q_{i,j}^*$  — точка с координатами  $(u_i, \bar{v}_j^{(i)})$  и

$$\begin{aligned} R_{0,\ell} &= \max_{Q \in \partial T_{0,\ell}} |P_{0,\ell} - Q|, & R_{i,j} &= \max_{Q \in \partial T_{i,j}} |P_{i,j} - Q|, \\ R_{2\ell-i,j} &= \max_{Q \in \partial T_{2\ell-i,j}} |P_{2\ell-i,j} - Q|, & R_{2\ell,\ell} &= \max_{Q \in \partial T_{2\ell,\ell}} |P_{2\ell,\ell} - Q|, \\ r_{0,\ell} &= \min_{Q \in \partial T_{0,\ell}} |P_{0,\ell} - Q|, & r_{i,j} &= \min_{Q \in \partial T_{i,j}} |P_{i,j} - Q|, \\ r_{2\ell-i,j} &= \min_{Q \in \partial T_{2\ell-i,j}} |P_{2\ell-i,j} - Q|, & r_{2\ell,\ell} &= \min_{Q \in \partial T_{2\ell,\ell}} |P_{2\ell,\ell} - Q|. \end{aligned}$$

Принимая во внимание разбиение единичной сферы  $T$  на элементарные части, имеем  $R_{2\ell,\ell} = r_{2\ell,\ell} = r_{0,\ell} = R_{0,\ell}$ ,  $R_{2\ell-i,j} = R_{i,j} = R_{i,0}$  и  $r_{2\ell-i,j} = r_{i,j} = r_{i,0}$ . Очевидно, что

$$R_{0,\ell} = |P_{0,\ell} - Q_{1,0}| = \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{2\ell} + (1 - \cos \frac{\pi}{2\ell})^2} = 2 \sin \frac{\pi}{4\ell}.$$

Кроме того, учитывая, что  $T_{i,j}$  является равнобедренной трапециеобразной фигурой, находим:

$$\begin{aligned} R_{i,0} &= |P_{i,0} - Q_{i+1,0}| = \\ &= \sqrt{(\sin \bar{u}_i \cos \bar{v}_0^{(i)} - \sin u_{i+1})^2 + (\sin \bar{u}_i \sin \bar{v}_0^{(i)})^2 + (\cos \bar{u}_i - \cos u_{i+1})^2} = \\ &= 2 \sqrt{\sin^2 \frac{\bar{u}_i - u_{i+1}}{2} + \sin^2 \frac{\bar{v}_0^{(i)}}{2} \sin \bar{u}_i \sin u_{i+1}} = \\ &= 2 \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{8\ell} + \sin^2 \frac{\pi}{8m_i} \sin \frac{\pi(2i+1)}{4\ell} \sin \frac{\pi(i+1)}{2\ell}} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} r_{i,0} &= |P_{i,0} - Q_{i,0}^*| = \\ &= \sqrt{(\sin \bar{u}_i \cos \bar{v}_0^{(i)} - \sin u_i \cos \bar{v}_0^{(i)})^2 + (\sin \bar{u}_i \sin \bar{v}_0^{(i)} - \sin u_i \sin \bar{v}_0^{(i)})^2 + (\cos \bar{u}_i - \cos u_i)^2} = \\ &= 2 \sqrt{\sin^2 \frac{\bar{u}_i - u_i}{2}} = 2 \sin \frac{\pi}{8\ell}. \end{aligned}$$

В результате получаем  $R(N_1) = \max_{i=1, \ell-1} R_{i,0}$  и  $r(N_1) = 2 \sin \frac{\pi}{8\ell}$ . Так как

$$R_{i,0} \leq \frac{\pi}{4\ell} \sqrt{\frac{\pi^2(i+1)(i+1/2)}{i^2} + 1} \leq \frac{\pi \sqrt{3\pi^2 + 1}}{4\ell}, i = \overline{1, \ell-1},$$

то  $R(N_1) \leq \frac{\pi \sqrt{3\pi^2 + 1}}{4\ell}$ . Как видно,  $r(N_1) \sim R(N_1) \sim \frac{1}{\ell}$ .

Таким же способом можно разбить эллипсоид.



Пусть  $S_d(x)$  и  $\Gamma_d(x)$  есть, соответственно, части поверхности  $S$  и касательной плоскости  $\Gamma(x)$  в точке  $x \in S$ , заключенные внутри сферы  $B_d(x)$  радиуса  $d$  с центром в точке  $x$ . Кроме того, пусть  $\tilde{y} \in \Gamma(x)$  есть проекция точки  $y \in S$ . Тогда

$$|x - \tilde{y}| \leq |x - y| \leq C_1(S)|x - \tilde{y}| \quad \text{и} \quad \operatorname{mes} S_d(x) \leq C_2(S)\operatorname{mes} \Gamma_d(x), \quad (4)$$

где  $C_1(S)$ ,  $C_2(S)$  — положительные постоянные, зависящие лишь от  $S$  (если  $S$  — сфера, то  $C_1(S) = \sqrt{2}$ ,  $C_2(S) = 2$ ).

Справедлива следующая лемма.

**Лемма 1.** *Существуют такие постоянные  $C'_0 > 0$  и  $C'_1 > 0$ , не зависящие от  $N$ , для которых при всех  $l, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $j \neq l$ , и всех  $y \in S_j$  справедливо следующее неравенство:*

$$C'_0|y - x_l| \leq |x_j - x_l| \leq C'_1|y - x_l|. \quad (5)$$

**Доказательство.** Принимая во внимание способ разбиения поверхности  $S$  на элементарные части, имеем:

$$|x_j - x_l| \leq |y - x_l| + |y - x_j| \leq |y - x_l| + R_j(N) \leq |y - x_l| + Mr_l(N) \leq (1 + M)|y - x_l|$$

и

$$|y - x_l| \leq |x_j - x_l| + |y - x_j| \leq |x_j - x_l| + R_j(N) \leq |x_j - x_l| + Mr_l(N) < (1 + M)|x_j - x_l|,$$

чем и завершается доказательство леммы.  $\square$

Для непрерывной на  $S$  функции  $\varphi(x)$  введем модуль непрерывности  $\omega(\varphi, \delta) = \delta \sup_{\tau \geq \delta} \frac{\bar{\omega}(\varphi, \tau)}{\tau}$ ,  $\delta > 0$ , где  $\bar{\omega}(\varphi, \tau) = \max_{|x-y| \leq \tau; x, y \in S} |\varphi(x) - \varphi(y)|$ . Кроме того, пусть

$$a_{lj} = 0 \quad \text{при} \quad l = j, \quad a_{lj} = \frac{K(x_l, x_j)}{|x_l - x_j|^n} \operatorname{mes} S_j \quad \text{при} \quad l \neq j.$$

**Теорема 1.** *Пусть непрерывная на  $S \times S$  функция  $K(x, y)$  удовлетворяет условию (3) и существует натуральное число  $m$  такое, что*

$$|K(x, y') - K(x, y'')| \leq M \sum_{j=1}^m |y' - y''|^{\alpha_j} |x - y'|^{\beta_j} |x - y''|^{\gamma_j}, \quad \forall x, y', y'' \in S, \quad (6)$$

где  $0 < \alpha_j \leq 1$ ,  $\beta_j \geq 0$ ,  $\gamma_j \geq 0$  и  $\alpha_j + \beta_j + \gamma_j > n - 2$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Тогда выражение

$$A^N(x_l) = \sum_{j=1}^N a_{lj} \rho(x_j) \quad (7)$$

в точках  $x_l$ ,  $l = \overline{1, N}$ , является кубатурной формулой для интеграла (2) с непрерывной на  $S$  плотностью  $\rho$ , причем справедлива следующая оценка:

$$\max_{l=\overline{1, N}} |(A\rho)(x_l) - A^N(x_l)| \leq M[\|\rho\|_\infty (R(N))^\gamma |\ln R(N)| + \omega(\rho, R(N))],$$

где  $\|\rho\|_\infty = \max_{x \in S} |\rho(x)|$ ,  $\gamma = \min\{\alpha, 2 - \lambda, \alpha + \beta + 2 - n\}$ ,  $\alpha = \min_{j=\overline{1, m}} \alpha_j$ ,  $\beta = \min_{j=\overline{1, m}} \{\alpha_j + \beta_j + \gamma_j\} - \alpha$ .



**Доказательство.** Очевидно, что

$$\begin{aligned}
 (A\rho)(x_l) - A^N(x_l) &= \int_{S_l} \frac{K(x_l, y)}{|x_l - y|^n} \rho(y) dS_y + \sum_{j=1, j \neq l}^N \int_{S_j} \frac{K(x_l, y) - K(x_l, x_j)}{|x_l - y|^n} \rho(y) dS_y + \\
 &+ \sum_{j=1, j \neq l}^N \int_{S_j} \left( \frac{1}{|x_l - y|^n} - \frac{1}{|x_l - x_j|^n} \right) K(x_l, x_j) \rho(y) dS_y + \\
 &+ \sum_{j=1, j \neq l}^N \int_{S_j} \frac{K(x_l, x_j)}{|x_l - x_j|^n} (\rho(y) - \rho(x_j)) dS_y.
 \end{aligned}$$

Слагаемые в последнем равенстве обозначим через  $r_1^N(x_l)$ ,  $r_2^N(x_l)$ ,  $r_3^N(x_l)$ ,  $r_4^N(x_l)$  соответственно.

Учитывая (3) и (4) и применяя формулу сведения поверхностного интеграла к двойному, получим:

$$\begin{aligned}
 |r_1^N(x_l)| &\leq M \|\rho\|_\infty \int_{S_l} \frac{1}{|x_l - y|^\lambda} dS_y \leq \\
 &\leq M \|\rho\|_\infty C_2(S) \int_0^{2\pi} \int_0^{R(N)} \frac{1}{t^{\lambda-1}} dt d\varphi = M \|\rho\|_\infty (R(N))^{2-\lambda}.
 \end{aligned}$$

Пусть  $y \in S_j$  и  $j \neq l$ . Тогда по неравенству (5)

$$|y - x_j| \leq (1 + C'_1) |y - x_l|,$$

а, значит, по условию (6)

$$|K(x_l, y) - K(x_l, x_j)| \leq M |x_j - y|^\alpha |x_l - y|^\beta.$$

Тогда имеем:

$$|r_2^N(x_l)| \leq M (R(N))^\alpha \|\rho\|_\infty \int_{S \setminus S_l} \frac{1}{|x_l - y|^{n-\beta}} dS_y \leq M \|\rho\|_\infty (R(N))^{\alpha+\beta+2-n}$$

при  $\beta < n - 2$ ;

$$\begin{aligned}
 |r_2^N(x_l)| &\leq M \|\rho\|_\infty (R(N))^\alpha |\ln R(N)| \quad \text{при } \beta = n - 2; \\
 |r_2^N(x_l)| &\leq M \|\rho\|_\infty (R(N))^\alpha \quad \text{при } \beta > n - 2.
 \end{aligned}$$

Более того, принимая во внимание неравенства (3) и (5), имеем

$$|(\frac{1}{|x_l - y|^n} - \frac{1}{|x_l - x_j|^n}) K(x_l, x_j)| \leq M \frac{|x_j - y|}{|x_l - y|^{1+\lambda}}.$$

Отсюда находим, что

$$|r_3^N(x_l)| \leq M R(N) \|\rho\|_\infty \int_{S \setminus S_l} \frac{1}{|x_l - y|^{1+\lambda}} dS_y \leq M \|\rho\|_\infty R(N) \quad \text{при } \lambda < 1;$$



$$\begin{aligned}|r_3^N(x_l)| &\leq M\|\rho\|_\infty R(N)|\ln R(N)| \quad \text{при } \lambda = 1; \\ |r_3^N(x_l)| &\leq M\|\rho\|_\infty (R(N))^{2-\lambda} \quad \text{при } \lambda > 1.\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$|r_4^N(x_l)| \leq M\omega(\rho, R(N)) \int_{S \setminus S_l} \frac{1}{|x_l - y|^\lambda} dS_y \leq M\omega(\rho, R(N)).$$

В результате, суммируя полученные оценки для выражений  $r_1^N(x_l)$ ,  $r_2^N(x_l)$ ,  $r_3^N(x_l)$  и  $r_4^N(x_l)$ , получаем доказательство теоремы.  $\square$

### 3. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ

Пусть  $\mathbb{C}^N$  — пространство  $N$ -мерных векторов  $z^N = (z_1^N, z_2^N, \dots, z_N^N)$ ,  $z_l^N \in \mathbb{C}$ ,  $l = \overline{1, N}$ , с нормой  $\|z^N\| = \max_{l=1, N} |z_l^N|$ , а  $C(S)$  — пространство непрерывных функций на  $S$  с нормой  $\|f\|_\infty = \max_{x \in S} |f(x)|$ . Для  $z^N \in \mathbb{C}^N$  положим

$$A^N z^N = (A_1^N z^N, A_2^N z^N, \dots, A_N^N z^N), \quad A_l^N z^N = \sum_{j=1}^N a_{lj} z_j^N, \quad l = \overline{1, N}.$$

Используя кубатурную формулу (7), ИУ (1) заменяем системой алгебраических уравнений относительно  $z_l^N$  — приближенных значений  $\rho(x_l)$ ,  $l = \overline{1, N}$ , которую запишем в виде

$$z^N + A^N z^N = f^N, \tag{8}$$

где  $f^N = p^N f = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ ,  $f_l = f(x_l)$ ,  $l = \overline{1, N}$ ,  $p^N : C(S) \rightarrow \mathbb{C}^N$  — оператор простого сноса и  $A^N \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^N)$  (здесь через  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^N)$  обозначено пространство линейных ограниченных операторов, отображающих пространство  $\mathbb{C}^N$  в пространство  $\mathbb{C}^N$ ).

Обоснование метода коллокации получим из теоремы Г. М. Вайникко о сходимости для линейных операторных уравнений [13]. Для ее формулировки приведем в обозначениях работы [13] необходимые определения и утверждения.

**Определение 1** ([13]). Систему  $Q = \{q^N\}$  операторов  $q^N : C(S) \rightarrow \mathbb{C}^N$  будем называть *связывающей* для  $C(S)$  и  $\mathbb{C}^N$ , если:

- 1)  $\|q^N \varphi\| \rightarrow \|\varphi\|_\infty$  при  $N \rightarrow \infty$  для всех  $\varphi \in C(S)$ ;
- 2)  $\|q^N(a\varphi + a'\varphi') - (aq^N\varphi + a'q^N\varphi')\| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$  для всех  $\varphi, \varphi' \in C(S)$ ,  $a, a' \in \mathbb{C}$ .

**Определение 2** ([13]). Последовательность  $\{\varphi_N\}$  элементов  $\varphi_N \in \mathbb{C}^N$  *Q-сходится* к  $\varphi \in C(S)$ , если  $\|\varphi_N - q^N \varphi\| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . При этом будем писать  $\varphi_N \xrightarrow{Q} \varphi$ .

**Определение 3** ([13]). Последовательность  $\{\varphi_N\}$  элементов  $\varphi_N \in \mathbb{C}^N$  *Q-компактна*, если любая ее подпоследовательность  $\{\varphi_{N_m}\}$  содержит *Q-сходящуюся* подпоследовательность  $\{\varphi_{N_{m_k}}\}$ .

**Предложение 1** ([13]). Пусть  $q^N : C(S) \rightarrow \mathbb{C}^N$  линейны и ограничены. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) последовательность  $\{\varphi_N\}$  *Q-компактна* и множество ее *Q-пределных* точек компактно в  $C(S)$ ;



2) существует относительно компактная последовательность  $\{\varphi^{(N)}\} \subset C(S)$  такая, что  $\|\varphi_N - q^N \varphi^{(N)}\| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ .

**Определение 4** ([13]). Последовательность операторов  $B^N : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$  *QQ-сходится* к оператору  $B : C(S) \rightarrow C(S)$ , если для любой  $Q$ -сходящейся последовательности  $\{\varphi_N\}$  имеем  $\varphi_N \xrightarrow{Q} \varphi \Rightarrow B^N \varphi_N \xrightarrow{Q} B\varphi$ . При этом будем писать  $B^N \xrightarrow{QQ} B$ .

**Определение 5** ([13]). Последовательность операторов  $B^N \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^N)$  *компактно сходится* к оператору  $B \in \mathcal{L}(C(S), C(S))$ , если  $B^N \xrightarrow{QQ} B$  и выполнено следующее условие компактности:  $\varphi_N \in \mathbb{C}^N$ ,  $\|\varphi_N\| \leq M \Rightarrow \{B^N \varphi_N\}$ ,  $Q$ -компактна.

**Теорема 2** ([13]). Пусть выполнены следующие условия:

- 1)  $\text{Ker}(I + B) = \{0\}$ , где  $I$  — единичный оператор в пространстве  $C(S)$ ;
- 2)  $I^N + B^N$  фредгольмовы операторы с нулевым индексом, где  $I^N$  — единичный оператор в пространстве  $\mathbb{C}^N$ ;
- 3)  $\psi_N \xrightarrow{Q} \psi$ ,  $\psi_N \in \mathbb{C}^N$ ,  $\psi \in C(S)$ ;
- 4)  $B^N \rightarrow B$  компактно.

Тогда уравнение  $(I + B)\varphi = \psi$  имеет единственное решение  $\tilde{\varphi} \in C(S)$ , уравнение  $(I^N + B^N)\varphi_N = \psi_N$  имеет единственное решение  $\tilde{\varphi}_N \in \mathbb{C}^N$  и  $\tilde{\varphi}_N \xrightarrow{Q} \tilde{\varphi}$  с оценкой

$$c_1 \|(I^N + B^N)q^N \tilde{\varphi} - \psi_N\| \leq \|\tilde{\varphi}_N - q^N \tilde{\varphi}\| \leq c_2 \|(I^N + B^N)q^N \tilde{\varphi} - \psi_N\|,$$

где

$$c_1 = \frac{1}{\sup_N \|I^N + B^N\|} > 0, \quad c_2 = \sup_N \|(I^N + B^N)^{-1}\| < +\infty.$$

Сформулируем теперь основной результат данной работы.

**Теорема 3.** Пусть  $\text{Ker}(I + A) = \{0\}$ , функция  $K(x, y)$  удовлетворяет условиям (3) и (6) и существует натуральное число  $n_0$  такое, что

$$|K(x', y) - K(x'', y)| \leq M \sum_{j=1}^{n_0} |x' - x''|^{a_j} |x' - y|^{b_j} |x'' - y|^{c_j}, \quad \forall x', x'', y \in S, \quad (9)$$

где  $0 < a_j \leq 1$ ,  $b_j \geq 0$ ,  $c_j \geq 0$  и  $a_j + b_j + c_j > n - 2$ ,  $j = \overline{1, n_0}$ . Тогда уравнения (1) и (8) имеют единственное решения  $\rho_* \in C(S)$  и  $z_*^N \in \mathbb{C}^N$  соответственно, причем  $\|z_*^N - p^N \rho_*\| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$  с оценкой

$$\|z_*^N - p^N \rho_*\| \leq M [\|f\|_\infty (R(N))^\eta |\ln R(N)| + \omega(f, R(N))],$$

где  $\eta = \min\{\gamma, c\}$ ,  $c = \min\{a, 2 - \lambda, a + b + 2 - n\}$ ,  $a = \min_{j=1, n_0} a_j$ ,  $b = \min_{j=1, n_0} \{a_j + b_j + c_j\} - a$ .

**Доказательство.** Очевидно, что операторы  $I^N + A^N$  фредгольмовы с нулевым индексом и система операторов простого сноса  $P = \{p^N\}$  является связывающей для пространств  $C(S)$  и  $\mathbb{C}^N$ . Тогда  $f^N \xrightarrow{P} f$  и из теоремы 1 получаем, что  $I^N + A^N \xrightarrow{PP} I + A$ . По определению 5 осталось проверить условие компактности, которое ввиду предложения 1 равносильно следующему условию: для всех  $\{z^N\}$ ,  $z^N \in \mathbb{C}^N$ ,  $\|z^N\| \leq M$ ,



существует относительно компактная последовательность  $\{A_N z^N\} \subset C(S)$ , такая, что

$$\|A^N z^N - p^N(A_N z^N)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

В качестве  $\{A_N z^N\}$  выберем последовательность

$$(A_N z^N)(x) = \sum_{j=1}^N z_j^N \int_{S_j} \frac{K(x, y)}{|x - y|^n} dS_y, \quad x \in S.$$

Возьмем любые точки  $x', x'' \in S$ , такие, что  $|x' - x''| = \delta < d/2$ . Очевидно, что

$$\begin{aligned} |(A_N z^N)(x') - (A_N z^N)(x'')| &\leq \|z^N\| \int_S \left| \frac{K(x', y)}{|x' - y|^n} - \frac{K(x'', y)}{|x'' - y|^n} \right| dS_y \leq \\ &\leq \|z^N\| \int_{S_{\delta/2}(x')} \left| \frac{K(x', y)}{|x' - y|^n} \right| dS_y + \|z^N\| \int_{S_{\delta/2}(x'')} \left| \frac{K(x'', y)}{|x'' - y|^n} \right| dS_y + \\ &+ \|z^N\| \int_{S_{\delta/2}(x')} \left| \frac{K(x'', y)}{|x'' - y|^n} \right| dS_y + \|z^N\| \int_{S_{\delta/2}(x'')} \left| \frac{K(x', y)}{|x' - y|^n} \right| dS_y + \\ &+ \|z^N\| \int_{S_d(x') \setminus (S_{\delta/2}(x') \cup S_{\delta/2}(x''))} \left| \left( \frac{1}{|x' - y|^n} - \frac{1}{|x'' - y|^n} \right) K(x', y) \right| dS_y + \\ &+ \|z^N\| \int_{S_d(x') \setminus (S_{\delta/2}(x') \cup S_{\delta/2}(x''))} \left| \frac{K(x', y) - K(x'', y)}{|x'' - y|^n} \right| dS_y + \\ &+ \|z^N\| \int_{S \setminus S_d(x')} \left| \frac{K(x', y)}{|x' - y|^n} - \frac{K(x'', y)}{|x'' - y|^n} \right| dS_y. \end{aligned}$$

Используя (3) и формулу сведения поверхностного интеграла к двойному, получим:

$$\begin{aligned} \int_{S_{\delta/2}(x')} \left| \frac{K(x', y)}{|x' - y|^n} \right| dS_y &\leq M \int_{S_{\delta/2}(x')} \frac{1}{|x' - y|^\lambda} dS_y \leq M \delta^{2-\lambda}, \\ \int_{S_{\delta/2}(x'')} \left| \frac{K(x'', y)}{|x'' - y|^n} \right| dS_y &\leq M \delta^{2-\lambda}. \end{aligned}$$

Кроме того, принимая во внимание неравенства  $|x'' - y| \geq \delta/2$  для всех  $y \in S_{\delta/2}(x')$  и  $|x' - y| \geq \delta/2$  для всех  $y \in S_{\delta/2}(x'')$ , имеем:

$$\begin{aligned} \int_{S_{\delta/2}(x')} \left| \frac{K(x'', y)}{|x'' - y|^n} \right| dS_y &\leq M \int_{S_{\delta/2}(x'')} \frac{1}{|x'' - y|^\lambda} dS_y \leq M \left( \frac{2}{\delta} \right)^\lambda \operatorname{mes}(S_{\delta/2}(x'')) \leq M \delta^{2-\lambda}, \\ \int_{S_{\delta/2}(x'')} \left| \frac{K(x', y)}{|x' - y|^n} \right| dS_y &\leq M \delta^{2-\lambda}. \end{aligned}$$

Так как

$$|x' - y| \leq 3|x'' - y| \quad \text{и} \quad |x'' - y| \leq 3|x' - y| \quad (10)$$



для всех  $y \in S_d(x') \setminus (S_{\delta/2}(x') \cup S_{\delta/2}(x''))$ , то, учитывая неравенство (3), получаем

$$\left| \left( \frac{1}{|x' - y|^n} - \frac{1}{|x'' - y|^n} \right) K(x', y) \right| \leq \frac{M\delta}{|x' - y|^{1+\lambda}}, \quad \forall y \in S_d(x') \setminus (S_{\delta/2}(x') \cup S_{\delta/2}(x'')).$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} & \int_{S_d(x') \setminus (S_{\delta/2}(x') \cup S_{\delta/2}(x''))} \left| \left( \frac{1}{|x' - y|^n} - \frac{1}{|x'' - y|^n} \right) K(x', y) \right| dS_y \leq \\ & M\delta \int_{S_d(x') \setminus S_{\delta/2}(x')} \frac{1}{|x' - y|^{1+\lambda}} dS_y \leq M\delta \quad \text{при } 0 < \lambda < 1; \\ & \int_{S_d(x') \setminus (S_{\delta/2}(x') \cup S_{\delta/2}(x''))} \left| \left( \frac{1}{|x' - y|^n} - \frac{1}{|x'' - y|^n} \right) K(x', y) \right| dS_y \leq M\delta |\ln \delta| \quad \text{при } \lambda = 1; \\ & \int_{S_d(x') \setminus (S_{\delta/2}(x') \cup S_{\delta/2}(x''))} \left| \left( \frac{1}{|x' - y|^n} - \frac{1}{|x'' - y|^n} \right) K(x', y) \right| dS_y \leq M\delta^{2-\lambda} \quad \text{при } 1 < \lambda < 2. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (9) и (10), имеем

$$|K(x', y) - K(x'', y)| \leq M\delta^a |x' - y|^b, \quad \forall y \in S_d(x') \setminus (S_{\delta/2}(x') \cup S_{\delta/2}(x'')).$$

Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} & \int_{S_d(x') \setminus (S_{\delta/2}(x') \cup S_{\delta/2}(x''))} \left| \frac{K(x', y) - K(x'', y)}{|x'' - y|^n} \right| dS_y \leq \\ & M\delta^a \int_{S_d(x') \setminus S_{\delta/2}(x')} \frac{1}{|x' - y|^{n-b}} dS_y \leq M\delta^a \quad \text{при } b > n - 2; \\ & \int_{S_d(x') \setminus (S_{\delta/2}(x') \cup S_{\delta/2}(x''))} \left| \frac{K(x', y) - K(x'', y)}{|x'' - y|^n} \right| dS_y \leq M\delta^a |\ln \delta| \quad \text{при } b = n - 2; \\ & \int_{S_d(x') \setminus (S_{\delta/2}(x') \cup S_{\delta/2}(x''))} \left| \frac{K(x', y) - K(x'', y)}{|x'' - y|^n} \right| dS_y \leq M\delta^{a+b+2-n} \quad \text{при } b < n - 2. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\int_{S \setminus S_d(x')} \left| \frac{K(x', y)}{|x' - y|^n} - \frac{K(x'', y)}{|x'' - y|^n} \right| dS_y \leq M\delta^a.$$

Суммируя полученные выше оценки, получим

$$|(A_N z^N)(x') - (A_N z^N)(x'')| \leq M \|z^N\| \delta^c |\ln \delta|, \quad (11)$$

а, значит,  $\{A_N z^N\} \subset C(S)$ . Относительная компактность последовательности  $\{A_N z^N\}$  следует из теоремы Арцеля. Действительно, равномерная ограниченность



вытекает непосредственно из условия  $\|z^N\| \leq M$ , а равностепенная непрерывность следует из оценки (11). Кроме того, поступая точно так же, как и в доказательстве теоремы 1, получаем

$$\|A^N z^N - p^N(A_N z^N)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

В результате получаем, что выполняются все условия теоремы 2. Тогда уравнения (1) и (8) имеют единственные решения  $\rho_* \in C(S)$  и  $z_*^N \in \mathbb{C}^N$  соответственно, причем

$$c_1 \delta_N \leq \|z_*^N - p^N \rho_*\| \leq c_2 \delta_N,$$

где

$$c_1 = \frac{1}{\sup_N \|I^N + A^N\|} > 0, \quad c_2 = \sup_N \|(I^N + A^N)^{-1}\| < +\infty,$$
$$\delta_N = \max_{l=1,N} |A_l^N(p^N \rho_*) - (A \rho_*)(x_l)|.$$

По теореме 1

$$\delta_N \leq M[\|\rho_*\|_\infty (R(N))^\gamma |\ln R(N)| + \omega(\rho_*, R(N))].$$

Очевидно, что

$$\omega(\rho_*, R(N)) = \omega(f - A\rho_*, R(N)) \leq \omega(f, R(N)) + \omega(A\rho_*, R(N)).$$

Поступая точно так же, как и при доказательстве оценки (11), нетрудно показать, что

$$|(A\rho_*)(x') - (A\rho_*)(x'')| \leq M\|\rho_*\|_\infty |x' - x''|^c |\ln |x' - x''||, \quad \forall x', x'' \in S,$$

а значит,

$$\omega(A\rho_*, R(N)) \leq M\|\rho_*\|_\infty (R(N))^c |\ln R(N)|.$$

Кроме того, учитывая

$$\|\rho_*\|_\infty = \|(I + A)^{-1}f\|_\infty \leq \|(I + A)^{-1}\| \|f\|_\infty,$$

получаем доказательство теоремы.  $\square$

**Замечание 1.** Используя теорему 3, также можно исследовать приближенное решение некоторых классов ИУ более общего вида

$$\rho + A\rho = Gg,$$

где  $G$  — некоторый ограниченный оператор, а  $g$  — заданная функция на  $S$ , причем  $Gg \in C(S)$ . Действительно, в теореме 3 достаточно взять  $f = Gg$ .

**Пример 2.** Рассмотрим внешнюю краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца: найти функцию  $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ , удовлетворяющую уравнению Гельмгольца  $\Delta u + \chi^2 u = 0$  в  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ , условию излучения Зоммерфельда на бесконечности и граничному условию  $u(x) = f(x)$  на  $S$ , где  $D \subset \mathbb{R}^3$  — ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей  $S$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\chi$  — волновое число, причем  $Im \chi \geq 0$ , а  $f$  — заданная непрерывная функция на  $S$ .



Разыскивая решение внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в виде комбинации простого и двойного слоев

$$u(x) = \int_S \left( \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} - i\mu \Phi(x, y) \right) \rho(y) dS_y,$$

в работе [14, с. 104] показано, что плотность  $\rho(x)$  является решением однозначно разрешимого ИУ

$$\rho + B\rho = 2f, \quad (12)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\vec{n}(y)$  — единичная внешняя нормаль в точке  $y \in S$ ,  $\Phi(x, y) = e^{i\chi|x-y|}/(4\pi|x-y|)$  — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца,  $\mu \neq 0$  — произвольное вещественное число, причем  $\mu \operatorname{Re} \chi \geq 0$ ,

$$(B\rho)(x) = 2 \int_S \left( \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} - i\mu \Phi(x, y) \right) \rho(y) dS_y, \quad x \in S.$$

Нетрудно убедиться, что

$$(B\rho)(x) = \int_S \frac{K(x, y)}{|x - y|^3} \rho(y) dS_y,$$

где  $K(x, y) = -\frac{1}{2\pi} e^{i\chi|x-y|} (i\mu|x-y|^2 + (\overrightarrow{xy}, \vec{n}(y)) (1 - i\chi|x-y|))$ .

Очевидно, что для любых  $x, y, y' \in S$

$$\begin{aligned} |K(x, y)| &\leq M|x - y|^2, \\ |K(x, y) - K(x, y')| &\leq M(|y - y'|^2 + |y - y'||x - y| + |y - y'||x - y'|). \end{aligned}$$

Тогда, применяя теорему 1, получаем, что выражение

$$B^N(x_l) = \sum_{j=1}^N b_{lj} \rho(x_j) \quad (13)$$

в точках  $x_l$ ,  $l = \overline{1, N}$ , является кубатурной формулой для интеграла  $(B\rho)(x)$ , где

$$\begin{aligned} b_{lj} &= 0 \quad \text{при } l = j, \\ b_{lj} &= 2 \left( \frac{\partial \Phi(x_l, x_j)}{\partial \vec{n}(x_j)} - i\mu \Phi(x_l, x_j) \right) \operatorname{mes} S_j \quad \text{при } l \neq j, \end{aligned}$$

причем

$$\max_{l=1, N} |(B\rho)(x_l) - B^N(x_l)| \leq M(\|\rho\|_\infty R(N) |\ln R(N)| + \omega(\rho, R(N))).$$

Используя кубатурную формулу (13), ИУ (12) заменяем системой алгебраических уравнений относительно  $w_l^N$  — приближенных значений  $\rho(x_l)$ ,  $l = \overline{1, N}$ , которую запишем в виде

$$w^N + B^N w^N = 2f^N, \quad (14)$$

где

$$B^N w^N = (B_1^N w^N, B_2^N w^N, \dots, B_N^N w^N), \quad B_l^N w^N = \sum_{j=1}^N b_{lj} w_j^N, \quad l = \overline{1, N}.$$



Нетрудно показать, что для любых  $x', x'', y \in S$

$$|K(x', y) - K(x'', y)| \leq M(|x' - x''|^2 + |x' - x''||y - x'| + |x' - x''||y - x''|).$$

Тогда по теореме 3 при любом значении волнового числа  $\chi$ , удовлетворяющего условию  $\operatorname{Im} \chi \geq 0$ , уравнения (12) и (14) имеют единственное решения  $\rho_* \in C(S)$  и  $w_*^N = (w_1^*, w_2^*, \dots, w_N^*) \in \mathbb{C}^N$  соответственно, причем  $\|w_*^N - p^N \rho_*\| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$  с оценкой

$$\|w_*^N - p^N \rho_*\| \leq M(\|f\|_\infty R(N) |\ln R(N)| + \omega(f, R(N))).$$

Можно показать, что последовательность

$$u_N(x_0) = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial \Phi(x_0, x_j)}{\partial \vec{n}(x_j)} - i\mu \Phi(x_0, x_j) \right) w_j^* \operatorname{mes} S_j, \quad x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D},$$

сходится к решению  $u(x)$  внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в точке  $x_0$ , причем

$$|u_N(x_0) - u(x_0)| \leq M(\|f\|_\infty R(N) |\ln R(N)| + \omega(f, R(N))).$$

**Пример 3.** В работе [14, с. 116] показано, что если функция  $u(x)$  имеет нормальную производную в смысле равномерной сходимости, то внешняя краевая задача Дирихле для уравнения Гельмгольца приводится к разрешимому единственным образом ИУ

$$\rho + \tilde{A}\rho = \tilde{G}f, \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned} (\tilde{A}\rho)(x) &= 2 \int_S \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \vec{n}(x)} \rho(y) dS_y - 2i\eta \int_S \Phi(x, y) \rho(y) dS_y, \quad x \in S, \\ (\tilde{G}f)(x) &= 2 \frac{\partial}{\partial \vec{n}(x)} \int_S \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} f(y) dS_y - i\eta \left( 2 \int_S \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} f(y) dS_y - f(x) \right), \quad x \in S, \end{aligned}$$

а  $\eta \neq 0$  — произвольное действительное число, причем  $\eta \operatorname{Re} \chi \geq 0$ . Известно, что внешнюю краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца можно привести к различным граничным интегральным уравнениям. Однако уравнение (15) имеет то преимущество, что его решение является нормальной производной решения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца на  $S$ . При этом функция

$$u(x) = \int_S \left\{ f(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} - \rho(y) \Phi(x, y) \right\} dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D},$$

является решением внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца. Кроме того, решение уравнения (15) является решением уравнения моментов (см. [14, с. 118]). Отметим, что, принимая во внимание замечание 1 и доказанные свойства в работе [15] для оператора, порожденного нормальной производной акустического потенциала двойного слоя, так же, как и в примере 2, можно исследовать приближенное решение ИУ (15) методом коллокации.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке «Университетского гранта» Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности (проект № ADNSU-2018-1-01).



## Библиографический список

1. Abdullayev F. A., Khalilov E. H. Constructive method for solving the external Neumann boundary-value problem for the Helmholtz equation // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan. 2018. Vol. 44, № 1. P. 62–69.
2. Bremer J., Gimbutas Z. A Nyström method for weakly singular integral operators on surfaces // J. Comput. Phys. 2012. Vol. 231, № 14. P. 4885–4903. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.04.003>
3. Gonzalez O., Li J. A convergence theorem for a class of Nyström methods for weakly singular integral equations on surfaces in  $\mathbb{R}^3$  // Mathematics of Computation. 2015. Vol. 84, № 292. P. 675–714.
4. Graham I. G., Sloan I. H. Fully discrete spectral boundary integral methods for Helmholtz problems on smooth closed surfaces in  $\mathbb{R}^3$  // Numer. Math. 2002. Vol. 92, iss. 2. P. 289–323. DOI: <https://doi.org/10.1007/s002110100343>
5. Harris P. J., Chen K. On efficient preconditioners for iterative solution of a Galerkin boundary element equation for the three-dimensional exterior Helmholtz problem // J. Comput. Appl. Math. 2003. Vol. 156, iss. 2. P. 303–318. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(02\)00918-4](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(02)00918-4)
6. Kress R. Boundary integral equations in time-harmonic acoustic scattering // Math. Comput. Modelling. 1991. Vol. 15, iss. 3–5. P. 229–243. DOI: [https://doi.org/10.1016/0895-7177\(91\)90068-I](https://doi.org/10.1016/0895-7177(91)90068-I)
7. Cai T. A fast solver for a hypersingular boundary integral equation // Appl. Numer. Math. 2009. Vol. 59. P. 1960–1969. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2009.02.005>
8. Farina L., Martinc P. A., Péron V. Hypersingular integral equations over a disc: Convergence of a spectral method and connection with Tranter's method // J. Comput. Appl. Math. 2014. Vol. 269. P. 118–131. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.03.014>
9. Халилов Э. Г. Конструктивный метод решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца с импедансным условием // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 4. С. 544–555. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064118040106>
10. Kress R. A collocation method for a hypersingular boundary integral equation via trigonometric differentiation // J. Integral Equations Applications. 2014. Vol. 26, № 2. P. 197–213. DOI: <https://doi.org/10.1216/JIE-2014-26-2-19>
11. Лифанов И. К., Ставцев С. Л. Интегральные уравнения и распространение звука в мелком море // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 9. С. 1256–1270.
12. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1976. 527 с.
13. Вайникко Г. М. Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. Т. 16. М. : ВИНИТИ, 1979. С. 5–53.
14. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. : Мир, 1987. 311 с.
15. Халилов Э. Г. Некоторые свойства оператора, порожденного производной акустического потенциала двойного слоя // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55, № 3. С. 690–700.

---

### Образец для цитирования:

Халилов Э. Г. О приближенном решении одного класса слабо сингулярных интегральных уравнений // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 310–325. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-310-325>

---



## On the Approximate Solution of a Class of Weakly Singular Integral Equations

E. H. Khalilov

Elnur H. Khalilov, <https://orcid.org/0000-0001-7603-5072>, Azerbaijan State Oil and Industry University, 20 Azadlig Ave., Baku AZ1010, Azerbaijan, elnurkhalil@mail.ru

The work is devoted to the study of the solution of one class of weakly singular surface integral equations of the second kind. First, a Lyapunov surface is partitioned into “regular” elementary parts, and then a cubature formula for one class of weakly singular surface integrals is constructed at the control points. Using the constructed cubature formula, the considered integral equation is replaced by a system of algebraic equations. As a result, under the additional conditions imposed on the kernel of the integral, it is proved that the considered integral equation and the resulting system of algebraic equations have unique solutions, and the solution of the system of algebraic equations converges to the value of the solution of the integral equation at the control points. Moreover, using these results, we substantiate the collocation method for various integral equations of the external Dirichlet boundary-value problem for the Helmholtz equation.

**Keywords:** collocation method, integral equations of the second kind, cubature formula, weakly singular surface integral, boundary-value problems for the Helmholtz equation.

Received: 04.06.2019 / Accepted: 11.09.2019 / Published: 31.08.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

**Acknowledgements:** This work was supported by the “University Grant” of the ASOIU (project No. ADNSU-2018-1-01).

### References

1. Abdullayev F. A., Khalilov E. H. Constructive method for solving the external Neumann boundary-value problem for the Helmholtz equation. *Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan*, 2018, vol. 44, no. 1, pp. 62–69.
2. Bremer J., Gimbutas Z. A Nyström method for weakly singular integral operators on surfaces. *J. Comput. Phys.*, 2012, vol. 231, no. 14, pp. 4885–4903. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.04.003>
3. Gonzalez O., Li J. A convergence theorem for a class of Nyström methods for weakly singular integral equations on surfaces in  $\mathbb{R}^3$ . *Mathematics of Computation*, 2015, vol. 84, no. 292, pp. 675–714.
4. Graham I. G., Sloan I. H. Fully discrete spectral boundary integral methods for Helmholtz problems on smooth closed surfaces in  $\mathbb{R}^3$ . *Numer. Math.*, 2002, vol. 92, iss. 2, pp. 289–323. DOI: <https://doi.org/10.1007/s002110100343>
5. Harris P. J., Chen K. On efficient preconditioners for iterative solution of a Galerkin boundary element equation for the three-dimensional exterior Helmholtz problem. *J. Comput. Appl. Math.*, 2003, vol. 156, iss. 2, pp. 303–318. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(02\)00918-4](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(02)00918-4)
6. Kress R. Boundary integral equations in time-harmonic acoustic scattering. *Math. Comput. Modelling*, 1991, vol. 15, iss. 3–5, pp. 229–243. DOI: [https://doi.org/10.1016/0895-7177\(91\)90068-I](https://doi.org/10.1016/0895-7177(91)90068-I)
7. Cai T. A fast solver for a hypersingular boundary integral equation. *Appl. Numer. Math.*, 2009, vol. 59, pp. 1960–1969. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2009.02.005>



8. Farina L., Martinc P. A., Péron V. Hypersingular integral equations over a disc: Convergence of a spectral method and connection with Tranter's method. *J. Comput. Appl. Math.*, 2014, vol. 269, pp. 118–131. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.03.014>
9. Khalilov E. H. Constructive Method for Solving a Boundary Value Problem with Impedance Boundary Condition for the Helmholtz Equation. *Differ. Equ.*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 539–550. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266118040109>
10. Kress R. A collocation method for a hypersingular boundary integral equation via trigonometric differentiation. *J. Integral Equations Applications*, 2014, vol. 26, no. 2, pp. 197–213. DOI: <https://doi.org/10.1216/JIE-2014-26-2-19>
11. Lifanov I. K., Stavtsev S. L. Integral equations and sound propagation in a shallow sea. *Differ. Equ.*, 2004, vol. 40, iss. 9, pp. 1330–1344. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10625-005-0012-x>
12. Vladimirov V. S. *Equations of mathematical physics*. New York, Marcel Dekker Inc., 1971. 426 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1976. 527 p.).
13. Vainikko G. M. Regular convergence of operators and approximate solution of equations. *Journal of Soviet Mathematics*, 1981, vol. 15, iss. 6, pp. 675–705. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01377042>
14. Colton D. L., Kress R. *Integral equation methods in scattering theory*. John Wiley and Sons, 1983. 271 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1987. 311 p.).
15. Khalilov E. H. Some properties of the operators generated by a derivative of the acoustic double layer potential. *Sib. Math. J.*, 2014, vol. 55, iss. 3, pp. 564–573. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446614030173>

---

**Cite this article as:**

Khalilov E. H. On the Approximate Solution of a Class of Weakly Singular Integral Equations. *Izv. Saratov Univ. (N. S.)*, Ser. Math. Mech. Inform., 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 310–325 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-310-325>

---



УДК 501.1

## Гладкие аппроксимации в $C[0, 1]$

С. А. Чумаченко

Чумаченко Сергей Алексеевич, аспирант кафедры математического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, chumachenkosergei@gmail.com

Первый ортонормированный базис в пространстве непрерывных функций был построен Хааром в 1909 г. Фабер в 1910 г. проинтегрировал систему Хаара и получил первый пример базиса в пространстве непрерывных функций, состоящего из непрерывных функций. Этую систему переоткрыл в 1927 г. Шаудер. Все функции Фабера–Шаудера являются кусочно-линейными, а частичные суммы есть вписанные ломаные. В дальнейшем предпринимались попытки построить гладкие аналоги базиса Фабера–Шаудера. В 1965 г. это удалось К. М. Шайдукову. Построенные им функции были гладкими, но состояли из дуг парабол. Шайдукову удалось доказать равномерную сходимость полученных разложений, но не удалось получить оценки отклонения. Иной аналог системы Фабера–Шаудера в 2007 г. предложили Т. У. Аубакиров и Н. А. Бокаев. Они построили класс функций, которые образуют базис в пространстве непрерывных функций, получили оценки отклонения частичных сумм от приближаемой функции. Построенные в их работе функции были, как и в системе Фабера–Шаудера, кусочно-линейными. Система Фабера–Шаудера входит в построенный ими класс систем. В настоящей статье мы строим гладкие аналоги системы Фабера–Шаудера и получаем оценки отклонения частичных сумм от приближаемой функции. Построенные системы являются системами сжатий и сдвигов одной функции, которую мы называем двоичным базисным сплайном. Каждый такой двоичный базисный сплайн есть интеграл  $n$ -го порядка от функции Уолша  $W_{2^n-1}$ . Таким образом, нам удалось построить аналоги системы Фабера–Шаудера со сколь угодно большой степенью гладкости и получить для разложений по этим системам оценки отклонения в терминах модулей непрерывности.

**Ключевые слова:** базисные сплайны, гладкая интерполяция, кратномасштабный анализ.

Поступила в редакцию: 18.12.2019 / Принята: 01.04.2020 / Опубликована: 31.08.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-326-342>

### ВВЕДЕНИЕ

Система Фабера – Шаудера является одним из простейших базисов в пространстве  $C[0, 1]$ . Впервые она встречается в результатах Фабера в 1910 г. [1], в дальнейшем была переоткрыта Шаудером в 1927 г. [2]. Простота представления и широкий спектр базисных и аппроксимационных свойств системы Фабера – Шаудера позволяют решать широкий спектр прикладных задач [3–10]. Т. У. Аубакировым и Н. А. Бокаевым рассмотрена система, включающая в себя систему Фабера – Шаудера [11]. К недостаткам систем Фабера – Шаудера и Аубакирова – Бокаева надо отнести отсутствие гладкости.



Гладкий аналог системы Фабера – Шаудера рассмотрен К. М. Шайдуковым в [12]. Однако в этой работе, хоть и была получена базисность системы в пространстве  $C[0, 1]$ , не были получены оценки скорости приближения.

В данной работе мы построим семейство систем типа Фабера – Шаудера, имеющих заданный порядок гладкости. Также мы докажем базисность этих систем в пространстве  $C[0, 1]$  и получим оценки отклонения частичных сумм от приближаемой функции в терминах модуля непрерывности.

В первой части статьи вводится двоичный базисный сплайн, который является обобщением системы Фабера – Шаудера с заданным порядком гладкости, и рассматриваются свойства антипериодичности. Во второй части статьи рассматривается система сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна и доказывается, что это базис в  $C[0, 1]$ .

## 1. ДВОИЧНЫЕ БАЗИСНЫЕ СПЛАЙНЫ

Пусть

$$If(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \in [0, 1] \text{ — оператор интегрирования,} \quad (1)$$

$$r_k(x) = \operatorname{sign}(\sin(2^{k+1}\pi x)) \text{ — функции Радемахера,} \quad (2)$$

$$W_{2^n-1}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} r_k(x) \text{ — функции Уолша.} \quad (3)$$

Тогда функцию

$$\psi_{n,N}(x) = Q(n, N) I^N W_{2^n-1}(x), \quad x \in [0, 1], \quad n, N \in \mathbb{N}, \quad N \leq n,$$

будем называть *двоичным базисным сплайном  $N$ -й степени от  $n$ -й функции Уолша*, где  $Q(n, N)$  — нормирующий коэффициент  $\psi_{n,N}(x)$ .

На рис. 1 приведен график функции  $\psi_{n,N}(x)$ . При  $N = n - 1$  данная система будет базисом Рисса в  $L_2$  [13]. Во второй части статьи будем рассматривать случай  $N = n$ , но для начала выведем несколько общих свойств для произвольного  $N$ .

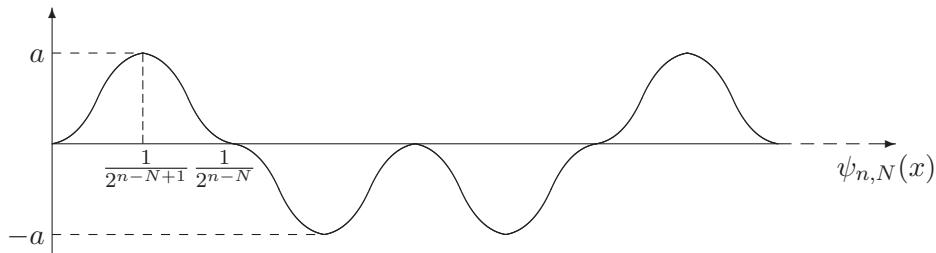


Рис. 1. Двоичный базисный сплайн / Fig. 1. Binary basic spline

**Замечание 1.** Функция  $\psi_{n,N}(x)$  имеет непрерывные производные до порядка  $N - 1$  включительно.

**Определение 1.** Функцию  $f$  будем называть *антипериодической на двоичном интервале  $\Delta_j^{(n)}$  с периодом  $\frac{1}{2^{n+1}}$* , если для любых  $x, y \in \Delta_j^{(n)}$ , связанных соотношением  $x + \frac{1}{2^{n+1}} = y$ , справедливо равенство  $f(x) = -f(y)$ .



**Замечание 2.** Функция Радемахера  $r_k$  периодична с периодом  $\frac{1}{2^k}$  и антiperiodична на любом интервале  $\Delta_j^{(k)}$  с периодом  $\frac{1}{2^{k+1}}$ .

**Лемма 1.** Справедливы следующие утверждения:

- 1) функция Уолша  $r_k r_{k+1} \dots r_{n-1}$  периодична с периодом  $\frac{1}{2^k}$ ;
- 2) функция Уолша  $r_k r_{k+1} \dots r_{n-1}$  антiperiodична на любом интервале  $\Delta_\nu^{(k)}$  с периодом  $\frac{1}{2^{k+1}}$ ,  $\nu = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ ;
- 3) функция Уолша  $W_{2^n-1}(x) = r_0 r_1 \dots r_{n-1}$  антiperiodична на любом интервале  $\Delta_\nu^{(k)}$  с периодом  $\frac{1}{2^{k+1}}$ ,  $\nu = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ ,  $k = 0, \dots, n - 1$ .

**Доказательство.** Утверждение 1) очевидно из замечания 2). Для доказательства утверждения 2) заметим, что функция  $r_{k+1} r_{k+2} \dots r_{n-1}$  периодична с периодом  $\frac{1}{2^{k+1}}$  и  $r_k(\Delta_{2\nu}^{(k+1)}) = -r_k(\Delta_{2\nu+1}^{(k+1)})$ .

Для доказательства утверждения 3) запишем  $W_{2^n-1}$  в виде:

$$W_{2^n-1} = r_0 r_1 \dots r_{k-1} r_k \dots r_{n-1}.$$

По доказанному ранее произведение  $r_k \dots r_{n-1}$  антiperiodично на любом интервале  $\Delta_\nu^{(k)}$  с периодом  $\frac{1}{2^{k+1}}$ , а произведение  $r_0 r_1 \dots r_{k-1}$  постоянно на интервале  $\Delta_\nu^{(k)}$ . Поэтому  $W_{2^n-1}$  антiperiodична на  $\Delta_\nu^{(k)}$  с периодом  $\frac{1}{2^{k+1}}$ .  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $I$  — оператор интегрирования (1). Тогда функция  $I^N(W_{2^n-1})(x)$  антiperiodична на любом интервале  $\Delta_\nu^{(k)}$  ( $k = 0, \dots, n - 1 - N$ ,  $N = 0, 1, \dots, n - 1$ ) и  $\int_{\Delta_j^{(n-1-N)}} I^N W_{2^n-1} dx = 0$ .

**Доказательство.** Случай  $N = 0$  доказан в лемме 1, п. 3. Пусть утверждение леммы верно при некотором  $N$ , т. е.  $I^N W_{2^n-1}$  антiperiodична на всех интервалах  $\Delta_\nu^{(k)}$  ( $k = 0, \dots, n - 1 - N$ ). Зафиксируем  $k$  из  $[0, n - 1 - N]$  и покажем, что  $I^{N+1} W_{2^n-1}$  антiperiodичны в интервалах  $\Delta_\nu^{(k-1)}$ . Выберем интервал

$$\begin{aligned} \Delta_\nu^{(k-1)} &= \left( \frac{\nu}{2^{k-1}}, \frac{\nu+1}{2^{k-1}} \right) = \left( \frac{2\nu}{2^k}, \frac{2\nu+2}{2^k} \right) = \\ &= \left( \frac{2\nu}{2^k}, \frac{2\nu+1}{2^k} \right) \sqcup \left( \frac{2\nu+1}{2^k}, \frac{2\nu+2}{2^k} \right) \sqcup \left\{ \frac{2\nu+1}{2^k} \right\}. \end{aligned}$$

Функция  $I^N W_{2^n-1}$  антiperiodична на  $\Delta_\nu^{(k-1)}$  и на интервалах  $\Delta_{2\nu}^{(k)}$  и  $\Delta_{2\nu+1}^{(k)}$  по предположению. Тогда при  $x \in (0, \frac{1}{2^k})$  имеем

$$\begin{aligned} (I^{N+1} W_{2^n-1}) \left( \frac{2\nu+1}{2^k} + x \right) &= \int_0^{\frac{2\nu+1}{2^k}+x} (I^N W_{2^n-1})(t) dt = \int_{\frac{2\nu+1}{2^k}}^{\frac{2\nu+1}{2^k}+x} (I^N W_{2^n-1})(t) dt = \\ &= - \int_{\frac{2\nu}{2^k}}^{\frac{2\nu+x}{2^k}} (I^N W_{2^n-1})(t) dt = - \int_0^{\frac{2\nu+x}{2^k}} (I^N W_{2^n-1})(t) dt = -(I^{N+1} W_{2^n-1}) \left( \frac{2\nu}{2^k} + x \right), \end{aligned}$$

т. е.  $I^{N+1} W_{2^n-1}$  антiperiodичны на интервале  $(\frac{\nu}{2^{k-1}}, \frac{\nu+1}{2^{k-1}})$ .  $\square$



**Лемма 3.** Функция  $\psi_{n,N}$ :

- 1) равна нулю в точках  $\frac{\nu}{2^{n-N}}$ ;
- 2) имеет максимум по модулю в точках  $\frac{\nu+1/2}{2^{n-N}}$ ;
- 3) знак функции определяется аналогично  $W_{2^{n-N}-1}(x)$ .

**Доказательство.** Проведем доказательство методом математической индукции.

1. Для  $N = 0$  все утверждения леммы очевидны, так как  $\psi_{n,0}$  является функцией Уолша.

2. Пусть все утверждения верны для  $N - 1$ . Докажем эти утверждения для  $N$ .

Согласно лемме 2,  $I^N W_{2^n-1}$  антипериодичны на интервале  $(\frac{\nu}{2^{k-1}}, \frac{\nu+1}{2^{k-1}})$ . Следовательно, знак функции  $\psi_{n,N}$  определяется как произведение функций Радемахера  $r_0 r_1 \dots r_{n-N-1}$ , или согласно функции Уолша  $W_{2^{n-N}-1}$ . Таким образом, утверждение 3) доказано.

Для того чтобы доказать утверждения 1) и 2), достаточно рассмотреть отрезок  $[0, \frac{1}{2^{n-N}}]$ , поскольку тогда для остальных отрезков данные утверждения будут получаться из-за антипериодичности.

Так как при  $N = 1$  на отрезке  $[0, \frac{1}{2^{n-N}}]$  знак функции  $\psi_{n,N-1}$  положителен, то  $\psi_{n,N}$  на этом отрезке возрастает. На отрезке  $[\frac{1}{2^{n-N}}, \frac{1}{2^{n-N}}]$ , вследствие антипериодичности, — убывает, причем с такими же значениями производных. Из этого следуют сразу 1), и 2) утверждения.  $\square$

**Замечание 3.** Согласно определению,  $\left| \max_x (\psi(n, N)(x)) \right| = 1$ ,  $x \in [0, 1]$ .

**Лемма 4.** Пусть  $\psi_{n,N}(x) = Q(n, N) I^N W_{2^n-1}(x)$  ( $x \in [0, 1]$ ). Тогда

$$\psi_n \left( \frac{4 \cdot \nu + 1}{4 \cdot 2^{n-N}} \right) = \psi_n \left( \frac{4 \cdot \nu + 3}{4 \cdot 2^{n-N}} \right) = \frac{1}{2}.$$

**Доказательство.** Согласно лемме 3 и замечанию 3,  $|\psi_{n,N}(\frac{2 \cdot \nu + 1}{2 \cdot 2^{n-N}})| = 1$ . С другой стороны,

$$\left| \psi_{n,N} \left( \frac{2 \cdot \nu + 1}{2 \cdot 2^{n-N}} \right) \right| = Q(n, N) I^N W_{2^n-1} \left( 2^n \cdot \frac{1}{2} \right) = 1.$$

Согласно лемме 2,  $\psi'_{n,N}$  будет антипериодична на интервале  $[\frac{2\nu}{2^{n-N}}, \frac{2\nu+2}{2^{n-N}}]$ , а  $\psi''_{n,N}$  — на интервале  $[\frac{2\nu}{2^{n-N}}, \frac{2\nu+1}{2^{n-N}}]$ . Тогда

$$\int_{\frac{4\nu}{4 \cdot 2^{n-N}}}^{\frac{4\nu+1}{4 \cdot 2^{n-N}}} (I^{N-2} W_{2^n-1})(t) dt = - \int_{\frac{4\nu}{4 \cdot 2^{n-N}}}^{\frac{4\nu+1}{4 \cdot 2^{n-N}}} (I^{N-2} W_{2^n-1})(t) dt.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \psi_{n,N} \left( \frac{2 \cdot \nu + 1}{2 \cdot 2^{n-N}} \right) &= Q(n, N) \int_{\frac{4\nu}{4 \cdot 2^{n-N}}}^{\frac{4\nu+2}{4 \cdot 2^{n-N}}} (I^{N-1} W_{2^n-1})(t) dt = \\ &= 2 \cdot Q(n, N) \int_{\frac{4\nu}{4 \cdot 2^{n-N}}}^{\frac{4\nu+1}{4 \cdot 2^{n-N}}} (I^{N-1} W_{2^n-1})(t) dt = 2\psi_{n,N} \left( \frac{1}{4 \cdot 2^{n-N}} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,  $\psi_{n,N}(\frac{1}{4 \cdot 2^{n-N}}) = \frac{1}{2}$ .

Аналогично показывается, что  $\psi_{n,N}(\frac{3}{4 \cdot 2^{n-N}}) = \frac{1}{2}$ .  $\square$



**Теорема 1.** Нормирующий коэффициент вычисляется следующим образом:

$$Q(n, N) = 2^{\frac{2nN+3N-N^2-2}{2}}, \quad 1 \leq N \leq n. \quad (4)$$

**Доказательство.** Разберем два случая.

1. «Первое» интегрирование — интегрирование  $n$ -й производной функции  $\psi_n(x)$ , т. е. самой функции Уолша. На каждом отрезке функция равна либо 1, либо  $-1$ , а длина каждого отрезка равна  $\frac{1}{2^n}$ . Значит, значение функции в точке  $\frac{1}{2^n}$  будет равно  $\frac{1}{2^n}$ . Аналогично и в остальных точках вида  $\frac{i}{2^n}$  оно будет равно либо  $\frac{1}{2^n}$ , либо 0, либо  $-\frac{1}{2^n}$ . Но нам необходимо, чтобы после каждого интегрирования значение в точках локального максимума (минимума) было равно 1 ( $-1$ ). Значит, нормирующий коэффициент после первого интегрирования должен быть  $Q(n, 1) = 2^n$ . Если в формулу (4) поставить  $N = 1$ , мы также получим  $Q(n, 1) = 2^n$ .

2. Каждое последующее интегрирование: пусть мы проводим  $i$ -е интегрирование, т. е. от функции  $\psi_n^{(n-i+1)}(x)$  переходим к функции  $\psi_n^{(n-i)}(x)$ . В отличие от первого случая, функция не является кусочно-постоянной. Однако, по лемме 3, значение функции будет равно  $\frac{1}{2}$  в точках  $x = \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{2^{n-i+1}})$  и  $x = \frac{3}{4} \cdot (\frac{1}{2^{n-i+1}})$ . Используя свойство антипериодичности (лемма 2), получаем, что  $\psi(x) = 1 - \psi(\frac{1}{2} - x)$ . Следовательно, среднее значение функции на отрезке  $[0, \frac{1}{2^{n-i+1}}]$  равно  $\frac{1}{2}$ . Значит, значение функции  $\psi_n^{(n-i)}(x)$  в точке  $x = \frac{1}{2^{n-i+1}}$  будет равно  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-i+1}}$ . Но аналогично п. 1 оно должно быть равно единице, поэтому нормирующий коэффициент после второго и каждого последующего интегрирования должен быть  $Q(n, i) = Q(n, i-1) \cdot 2^{n-i+2}$ .

Отсюда находим

$$\begin{aligned} Q(n, N) &= 2^n \cdot \prod_{i=2}^N 2^{n-i+2} = 2^{n+\sum_{i=2}^N (n-N+2)} = \\ &= 2^{n+(N-1)\frac{2+2\cdot n-N}{2}} = 2^{n+\frac{2nN+2N-N^2-2-2\cdot n+N}{2}} = 2^{\frac{2nN+3N-N^2-2}{2}}. \end{aligned} \quad \square$$

## 2. СИСТЕМА СЖАТИЙ И СДВИГОВ ДВОИЧНОГО БАЗИСНОГО СПЛАЙНА В $C[0, 1]$

**Определение 2.** Функцию  $\psi_n(x) = Q(n, n)I^nW_{2^n-1}(x)$ ,  $x \in [0, 1]$ , будем называть двоичным базисным сплайном  $n$ -й степени, где  $Q(n, n)$  — нормирующий коэффициент в  $C[0, 1]$ .

**Замечание 4.** При  $n = 1$  двоичный базисный сплайн  $\psi_n(x)$  совпадает с точностью до множителя с образующей функцией системы Фабера – Шаудера.

Покажем, что система сжатия и сдвигов двоичного базисного сплайна является базисом в  $C_0[0, 1]$  (этот факт без доказательства в случае  $n = 2$  присутствует в работе [14]), а при добавлении двух дополнительных функций — в  $C[0, 1]$ .

Рассмотрим систему

$$\phi_{m,j}(x) = \psi_n(2^m x - j), \quad m \in Z_0, \quad j \in [0, 2^m - 1].$$

Пусть  $f(x)$  — функция из  $C_0[0, 1]$ . Обозначим

$$R_0(x) = f(x), \quad (5)$$



$$S_0(x) = R_0 \left( \frac{0 + 1/2}{2^0} \right) \phi_{0,0}(x).$$

В общем случае полагаем:

$$S_m(x) = R_m \left( \frac{j + 1/2}{2^m} \right) \phi_{m,j}(x), \quad x \in \left[ \frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m} \right], \quad (6)$$

$$R_{m+1}(x) = R_m(x) - S_m(x). \quad (7)$$

На рис. 2 изображен процесс приближения, где  $R_m$ ,  $R_{m+1}$  — график остатка после  $m$ -го и  $(m+1)$ -го шага соответственно,  $\phi_{m,j}$  — сжатие и сдвиг основной базисной функции,  $S_m$  — приближение на  $m$ -м шаге, которое строится не по частичным суммам ряда, а по остаткам.

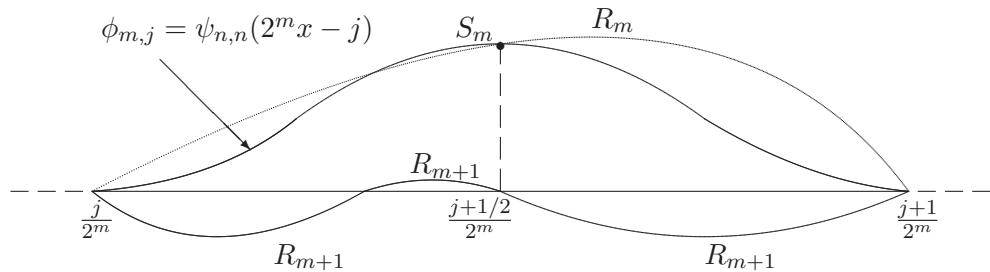


Рис. 2. Процесс приближения по остаткам  
Fig. 2. Approximation process by residual

**Определение 3.** Назовем *модулем непрерывности* выражение

$$\omega_f(\delta) = \sup_{0 \leq h \leq \delta} (f(x+h) - f(x)), \quad x \in [0, 1-h], \quad (8)$$

*модулем непрерывности второго порядка (модулем гладкости) —*

$$\omega_f^2(\delta) = \sup_{0 \leq h \leq \delta} (f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)), \quad x \in [0, 1-2h]. \quad (9)$$

**Теорема 2.** Пусть  $\phi_{m,j}(x)$  — базис в  $C_0[0, 1]$ . Имеет место следующая оценка через модуль непрерывности:

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^m S_i(x) \right| \leq \omega_f \left( \frac{1}{2^{m+2}} \right) + \frac{17}{2} \omega_f^2 \left( \frac{1}{2^{\frac{m-3}{2}}} \right) + 5 \cdot 2^{-\frac{3}{10}(m-1)} \|f\| + 2^{4-\frac{3}{5}m} \|f\|$$

(здесь и далее используется норма в  $C_0[0, 1]$ ).

**Доказательство.** Для начала докажем

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^m S_i(x) \right| = |R_{m+1}(x)|. \quad (10)$$

В самом деле, используя (5) и (7), получим

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^m S_i(x) \right| = \left| R_0(x) - S_0(x) - \sum_{i=1}^m S_i(x) \right| =$$

$$= R_1(x) - S_1(x) - \sum_{i=2}^m S_i(x) = \dots = R_{m+1}(x).$$

Теперь докажем

$$R_{m+1}(x) \leq \omega_f \left( \frac{1}{2^{m+2}} \right) + \frac{17}{2} \omega_f^2 \left( \frac{1}{2^{\frac{m-3}{2}}} \right) + 5 \cdot 2^{-\frac{3}{10}(m-1)} \|f\| + 2^{4-\frac{3}{5}m} \|f\|.$$

Пусть  $j \in [0, 2^n - 1]$ . Определим модуль двоичной непрерывности

$$\tilde{\omega}_{f,n} = \sup_j \left| f \left( \frac{j+1}{2^n} \right) - f \left( \frac{j}{2^n} \right) \right|$$

и модуль двоичной непрерывности второго порядка при  $j \in [0, 2^n - 2]$

$$\tilde{\omega}_{f,n}^2 = \sup_j \left| f \left( \frac{j+2}{2^n} \right) - 2f \left( \frac{j+1}{2^n} \right) + f \left( \frac{j}{2^n} \right) \right|. \quad (11)$$

По построению очевидно, что  $R_m \left( \frac{j}{2^m} \right) = 0$ . Из (6) и (7) следует

$$\begin{aligned} R_{m+1} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) &= R_m \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) - S_m \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) = \\ &= R_m \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) - \left( R_m \left( \frac{j+1/2}{2^m} \right) + R_m \left( \frac{j}{2^m} \right) \right) \phi_{m,j} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\phi_{m,j} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) = \frac{1}{2}$ , получаем

$$\begin{aligned} \left| R_{m+1} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| &= \\ &= \left| \frac{1}{2} \left( 2R_m \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) - \left( R_m \left( \frac{j+1/2}{2^m} \right) + R_m \left( \frac{j}{2^m} \right) \right) \right) \right| \leq \frac{1}{2} \cdot \tilde{\omega}_{R_m, m+2}^2. \quad (12) \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\tilde{\omega}_{R_m, m+2}^2 \leq \tilde{\omega}_{R_{m-1}, m+2}^2 + 1/4 \cdot \tilde{\omega}_{R_{m-2}, m}^2. \quad (13)$$

В самом деле, используя (12), имеем

$$\begin{aligned} \left| R_{m+1} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| &= \left| \frac{1}{2} \left( 2R_m \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) - \left( R_m \left( \frac{j+1/2}{2^m} \right) + R_m \left( \frac{j}{2^m} \right) \right) \right) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \left( \sup_j \left| 2R_{m-1} \left( \frac{4j+1}{2^{m+2}} \right) - \left( R_{m-1} \left( \frac{4j+2}{2^{m+2}} \right) + R_{m-1} \left( \frac{4j}{2^{m+2}} \right) \right) \right| + \right. \\ &\quad \left. + \sup_j \left| 2S_{m-1} \left( \frac{4j+1}{2^{m+2}} \right) - \left( S_{m-1} \left( \frac{4j+2}{2^{m+2}} \right) + S_{m-1} \left( \frac{4j}{2^{m+2}} \right) \right) \right| \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$S_{m-1} \left( \frac{4j+1}{2^{m+2}} \right) = R_{m-1} \left( \frac{j \text{ div } 2 + \frac{1}{2}}{2^{m-1}} \right) \phi_{m-1, j \text{ div } 2} \left( \frac{4j+1}{2^{m+2}} \right),$$



$$\begin{aligned} S_{m-1} \left( \frac{4j+2}{2^{m+2}} \right) &= R_{m-1} \left( \frac{j \operatorname{div} 2 + \frac{1}{2}}{2^{m-1}} \right) \phi_{m-1,j \operatorname{div} 2} \left( \frac{4j+2}{2^{m+2}} \right), \\ S_{m-1} \left( \frac{4j+0}{2^{m+2}} \right) &= R_{m-1} \left( \frac{j \operatorname{div} 2 + \frac{1}{2}}{2^{m-1}} \right) \phi_{m-1,j \operatorname{div} 2} \left( \frac{4j+0}{2^{m+2}} \right), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{R_m, m+2}^2 &\leq \tilde{\omega}_{R_{m-1}, m+2}^2 + \left| R_{m-1} \left( \frac{j \operatorname{div} 2 + \frac{1}{2}}{2^{m-1}} \right) \right| \times \\ &\times \left| 2\phi_{m-1,j \operatorname{div} 2} \left( \frac{4j+1}{2^{m+2}} \right) - \phi_{m-1,j \operatorname{div} 2} \left( \frac{4j+2}{2^{m+2}} \right) - \phi_{m-1,j \operatorname{div} 2} \left( \frac{4j+0}{2^{m+2}} \right) \right|. \end{aligned}$$

Последнюю сумму, стоящую под модулем, записываем в виде

$$\left| 2\phi_{m-1,k} \left( \frac{\frac{j}{2} + \frac{1}{8}}{2^{m-1}} \right) - \phi_{m-1,k} \left( \frac{\frac{j}{2} + \frac{1}{4}}{2^{m-1}} \right) - \phi_{m-1,k} \left( \frac{\frac{j}{2}}{2^{m-1}} \right) \right|. \quad (14)$$

Рассмотрим 2 случая.

1. Пусть  $j$  четное, т. е.  $j = 2k$ . Тогда выражение (14) принимает вид

$$\left| 2\phi_{m-1,k} \left( \frac{k + \frac{1}{8}}{2^{m-1}} \right) - \phi_{m-1,k} \left( \frac{k + \frac{1}{4}}{2^{m-1}} \right) - \phi_{m-1,k} \left( \frac{k}{2^{m-1}} \right) \right|. \quad (15)$$

Из леммы 4 следует

$$\phi_{m-1,k} \left( \frac{k + \frac{1}{4}}{2^{m-1}} \right) = \frac{1}{2}. \quad (16)$$

Так как функция  $\phi_{m-1,0}$  является выпуклой на отрезке  $[0, \frac{1}{4}]$ , то

$$\phi_{m-1,k} \left( \frac{k + \frac{1}{8}}{2^{m-1}} \right) = d \leq \frac{1}{4}. \quad (17)$$

Тогда выражение под знаком модуля в (15) равно  $4d - \frac{1}{2}$  и для него выполняется неравенство

$$-\frac{1}{2} \leq 4d - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}. \quad (18)$$

2. Пусть  $j$  нечетное, т. е.  $j = 2k + 1$ . Тогда выражение (14) принимает вид

$$\left| 2\phi_{m-1,k} \left( \frac{\frac{2k+1}{2} + \frac{1}{8}}{2^{m-1}} \right) - \phi_{m-1,k} \left( \frac{\frac{2k+1}{2} + \frac{1}{4}}{2^{m-1}} \right) - \phi_{m-1,k} \left( \frac{\frac{2k+1}{2}}{2^{m-1}} \right) \right|. \quad (19)$$

Из (16) и (17) следует, что выражение под знаком модуля в (19) равно  $2(1-d) - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} - 2d$  и для него выполняется неравенство

$$0 \leq \frac{1}{2} - 2d \leq \frac{1}{2}. \quad (20)$$

Из (18) и (20) следует

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{R_m, m+2}^2 &\leq \tilde{\omega}_{R_{m-1}, m+2}^2 + \frac{1}{2} \left| R_{m-1} \left( \frac{j \operatorname{div} 2 + 1/4}{2^{m-1}} \right) \right| \leq \\ &\leq \tilde{\omega}_{R_{m-1}, m+2}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \tilde{\omega}_{R_{m-2}, m}^2 = \tilde{\omega}_{R_{m-1}, m+2}^2 + \frac{1}{4} \cdot \tilde{\omega}_{R_{m-2}, m}^2, \end{aligned}$$

что доказывает неравенство (13).



Покажем, что при всех  $t \geq 2$

$$\tilde{\omega}_{R_m, m+t}^2 \leq \tilde{\omega}_{R_{m-1}, m+t}^2 + \frac{1}{4^{t-1}} \cdot \tilde{\omega}_{R_{m-2}, m}^2. \quad (21)$$

В самом деле, из (11)

$$\tilde{\omega}_{R_m, m+t}^2 = \sup_{j \in [0, 2^n - 2]} \left| \left( 2R_m \left( \frac{j+1}{2^{m+t}} \right) - \left( R_{m-1} \left( \frac{j+2}{2^{m+t}} \right) + R_{m-1} \left( \frac{j}{2^{m+t}} \right) \right) \right) \right|.$$

Применив (7), получим

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{R_m, m+t}^2 &\leq \sup_{j \in [0, 2^n - 2]} \left| \left( 2R_{m-1} \left( \frac{j+1}{2^{m+t}} \right) - \left( R_{m-1} \left( \frac{j+2}{2^{m+t}} \right) + R_{m-1} \left( \frac{j}{2^{m+t}} \right) \right) \right) \right| + \\ &+ \sup_{j \in [0, 2^n - 2]} \left| \left( 2S_{m-1} \left( \frac{j+1}{2^{m+t}} \right) - \left( S_{m-1} \left( \frac{j+2}{2^{m+t}} \right) + S_{m-1} \left( \frac{j}{2^{m+t}} \right) \right) \right) \right|. \end{aligned}$$

Теперь используем (6):

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{R_m, m+t}^2 &\leq \sup_{j \in [0, 2^n - 2]} \left| \left( 2R_{m-1} \left( \frac{j+1}{2^{m+t}} \right) - \left( R_{m-1} \left( \frac{j+2}{2^{m+t}} \right) + R_{m-1} \left( \frac{j}{2^{m+t}} \right) \right) \right) \right| + \\ &+ \sup_{j \in [0, 2^n - 2]} \left| \left( 2\phi_{m-1, j \text{ div } 2^{t+1}} \left( \frac{j+1}{2^{m+t}} \right) - \left( \phi_{m-1, j \text{ div } 2^{t+1}} \left( \frac{j+2}{2^{m+t}} \right) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \phi_{m-1, j \text{ div } 2^{t+1}} \left( \frac{j}{2^{m+t}} \right) \right) \right) R_{m-1} \left( \frac{j \text{ div } 2^{t+1}}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m} \right) \right| \leq \\ &\leq \tilde{\omega}_{R_{m-1}, m+t}^2 + \tilde{\omega}_{(\phi_{m-1, j \text{ div } 2^{t+1}}), m+t}^2 \cdot \left| R_{m-1} \left( \frac{j \text{ div } 2^{t+1}}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m} \right) \right|. \end{aligned}$$

Далее для оценки  $\omega_{(\phi_{m-1, j \text{ div } 2^{t+1}}), m+t}^2$  снова применим (11):

$$\begin{aligned} &\omega_{(\phi_{m-1, j \text{ div } 2^{t+1}}), m+t}^2 = \\ &= \sup_{k \in [0, 2^n - 2]} \left| \phi_{m-1, j \text{ div } 2^{t+1}} \left( \frac{k+2}{2^{m+t}} \right) - 2\phi_{m-1, j \text{ div } 2^{t+1}} \left( \frac{k+1}{2^{m+t}} \right) + \phi_{m-1, j \text{ div } 2^{t+1}} \left( \frac{k}{2^{m+t}} \right) \right| = \\ &= \sup_{k \in [0, 2^n - 2]} \left| \psi_n \left( 2^{m-1} \frac{k+2}{2^{m+t}} - j \text{ div } 2^{t+1} \right) - 2\psi_n \left( 2^{m-1} \frac{k+1}{2^{m+t}} - j \text{ div } 2^{t+1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \psi_n \left( 2^{m-1} \frac{k}{2^{m+t}} - j \text{ div } 2^{t+1} \right) \right| = \\ &= \sup_{k \in [0, 2^n - 2]} \left| \psi_n \left( \frac{k+2}{2^{t+1}} - j \text{ div } 2^{t+1} \right) - 2\psi_n \left( \frac{k+1}{2^{t+1}} - j \text{ div } 2^{t+1} \right) + \psi_n \left( \frac{k}{2^{t+1}} - j \text{ div } 2^{t+1} \right) \right|. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $k \in [0, 2^n - 2]$ ,  $j \in [0, 2^n - 2]$ ,  $k, j \in \mathbb{Z}_0$ , имеем

$$\begin{aligned} \omega_{(\phi_{m-1, j \text{ div } 2^{t+1}}), m+t}^2 &= \sup_{k \in [0, 2^n - 2]} \left| \psi_n \left( \frac{k+2}{2^{t+1}} \right) - 2\psi_n \left( \frac{k+1}{2^{t+1}} \right) + \psi_n \left( \frac{k}{2^{t+1}} \right) \right| \leq \\ &\leq \sup_{x \in [0, 1]} \left| \psi_n \left( x + \frac{2}{2^{t+1}} \right) - 2\psi_n \left( x + \frac{1}{2^{t+1}} \right) + \psi_n(x) \right| \leq \left( \frac{1}{2^{t+1}} \right)^2 \cdot \sup_{x \in [0, 1]} |\psi_n''(x)|. \end{aligned}$$



Стоит отметить, что при  $n = 2$  в точках  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$  второй производной не существует, однако существуют вторые производные слева и справа, и этого вполне достаточно. Следовательно, данное доказательство справедливо для  $n \geq 2$ .

Согласно теореме 1,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0,1]} |\psi_n''(x)| &= \sup_x |\psi_{n,n}''(x)| = \frac{Q(n,n)}{Q(n,n-2)} \sup_{x \in [0,1]} |\psi_{n,n-2}(x)| = \\ &= \frac{2^{\frac{n^2+3n-2}{2}}}{2^{\frac{n^2+3n-12}{2}}} \cdot |\psi_{n,n-2}(x)| = 2^5 |\psi_{n,n-2}(x)|. \end{aligned}$$

Согласно замечанию 3,  $|\psi_{n,n-2}(x)| \leq 1$ . Тогда

$$\tilde{\omega}_{(\phi_{(m-1),j} \text{ div } 2^{t+1}),m+t}^2 \leq \left( \frac{1}{2^{t+1}} \right)^2 2^5 \leq \frac{1}{2^{2t-3}}. \quad (22)$$

В свою очередь,

$$\tilde{\omega}_{R_m,m+t}^2 \leq \tilde{\omega}_{R_{m-1},m+t}^2 + \frac{1}{2^{2t-3}} \left| R_{m-1} \left( \frac{j \text{ div } 2^t + 1/4}{2^{m-1}} \right) \right|. \quad (23)$$

Следовательно,

$$\tilde{\omega}_{R_m,m+t}^2 \leq \tilde{\omega}_{R_{m-1},m+t}^2 + \frac{1}{2^{2t-2}} \tilde{\omega}_{R_{m-2},m}^2 = \tilde{\omega}_{R_{m-1},m+t}^2 + \frac{1}{4^{t-1}} \tilde{\omega}_{R_{m-2},m}^2,$$

и неравенство (21) доказано.

Вернемся к неравенству (12):

$$\left| R_{m+1} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| \leq \frac{1}{2} \tilde{\omega}_{R_m,m+2}^2.$$

Учитывая (13), получим

$$\left| R_{m+1} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| \leq \frac{1}{2} \left( \tilde{\omega}_{R_{m-1},m+2}^2 + \frac{1}{4} \tilde{\omega}_{R_{m-2},m}^2 \right).$$

Преобразуем его с помощью неравенства (21):

$$\begin{aligned} \left| R_{m+1} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| &\leq \frac{1}{2} \left( \left( \tilde{\omega}_{R_{m-2},m+2}^2 + \frac{1}{16} \tilde{\omega}_{R_{m-3},m-1}^2 \right) + \frac{1}{4} \tilde{\omega}_{R_{m-2},m}^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \tilde{\omega}_{R_{m-2},m+2}^2 + \frac{1}{8} \tilde{\omega}_{R_{m-2},m}^2 + \frac{1}{32} \tilde{\omega}_{R_{m-3},m-1}^2. \end{aligned}$$

На следующем шаге преобразуем все слагаемые с индексом  $R_{m-2}$

$$\begin{aligned} \left| R_{m+1} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| &\leq \frac{1}{2} \left( \tilde{\omega}_{R_{m-3},m+2}^2 + \frac{1}{64} \tilde{\omega}_{R_{m-4},m-2}^2 \right) + \frac{1}{8} \left( \tilde{\omega}_{R_{m-3},m}^2 + \frac{1}{4} \tilde{\omega}_{R_{m-4},m-2}^2 \right) + \\ &+ \frac{1}{32} \tilde{\omega}_{R_{m-3},m-1}^2 = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_{R_{m-3},m+2}^2 + \frac{1}{8} \tilde{\omega}_{R_{m-3},m}^2 + \frac{1}{32} \tilde{\omega}_{R_{m-3},m-1}^2 + \frac{1+4}{128} \tilde{\omega}_{R_{m-4},m-2}^2. \end{aligned}$$



Покажем с помощью метода математической индукции, что после  $k$ -го шага последнее неравенство примет вид

$$\left| R_{m+1} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| \leq \frac{1}{2} \left( \sum_{t=-2}^{k-1} C_t \tilde{\omega}_{R_{m-k-1}, m-t}^2 + C_k \omega_{R_{m-k-2}, m-k}^2 \right), \quad (24)$$

где

$$C_{-2} = 1, \quad C_{-1} = 0, \quad C_k = \frac{1}{4}(C_{k-1} + C_{k-2}). \quad (25)$$

Пусть при  $k-1$  справедливо

$$\left| R_{m+1} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| \leq \frac{1}{2} \left( \sum_{t=-2}^{(k-1)-1} C_t \tilde{\omega}_{R_{m-(k-1)-1}, m-t}^2 + C_{k-1} \omega_{R_{m-(k-1)-2}, m-(k-1)}^2 \right). \quad (26)$$

Выполним преобразование (26) с помощью неравенства (21):

$$\begin{aligned} & \left| R_{m+1} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \left( \sum_{t=-2}^{k-2} C_t \left( \tilde{\omega}_{R_{m-(k-1)-1-1}, m-t}^2 + \frac{1}{4^{m-t-(m-(k-1)-1)-1}} \tilde{\omega}_{R_{m-(k-1)-1-2}, m-(k-1)-1}^2 \right) + \right. \\ & \quad \left. + C_{k-1} \omega_{R_{m-(k-1)-2}, m-(k-1)}^2 \right) = \\ & = \frac{1}{2} \left( \sum_{t=-2}^{(k-1)-1} C_t \left( \tilde{\omega}_{R_{m-k-1}, m-t}^2 + \frac{1}{4^{k-t-1}} \tilde{\omega}_{R_{m-k-2}, m-k}^2 \right) + C_{k-1} \omega_{R_{m-k-1}, m-k+1}^2 \right) = \\ & = \frac{1}{2} \left( \sum_{t=-2}^{k-1} C_t \tilde{\omega}_{R_{m-k-1}, m-t}^2 + C_k^* \omega_{R_{m-k-2}, m-k}^2 \right), \end{aligned}$$

где

$$C_k^* = \sum_{t=-2}^{k-2} \frac{1}{4^{k-t-1}} C_t = \frac{1}{4} \sum_{t=-2}^{k-3} \frac{1}{4^{(k-1)-t-1}} C_t + \frac{1}{4} C_{k-2} = \frac{1}{4} (C_{k-1} + C_{k-2}),$$

т. е.  $C_k^* = C_k$ . Неравенство (24) доказано.

В итоге после  $k = m - 2$  шагов имеем

$$\left| R_{m+1} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| \leq \frac{1}{2} \left( \sum_{t=-2}^{m-3} C_t \tilde{\omega}_{R_1, m-t}^2 + C_{m-2} \omega_{R_0, 2}^2 \right). \quad (27)$$

Слагаемые вида  $\tilde{\omega}_{R_1, m-t}^2$  мы можем переписать с помощью неравенства (23) следующим образом:

$$\tilde{\omega}_{R_1, m-t}^2 \leq \tilde{\omega}_{R_0, m-t}^2 + \frac{1}{2^{2(m-t-1)-3}} \left| R_0 \left( \frac{j \operatorname{div} 2^{m-1} + \frac{1}{2}}{2} \right) \right|^2.$$

Но  $R_0 = f$ , следовательно,

$$\tilde{\omega}_{R_1, (m-t)}^2 \leq \tilde{\omega}_{f, (m-t)}^2 + \frac{1}{2^{2(m-t-1)-3}} \|f\|^2 = \tilde{\omega}_{f, (m-t)}^2 + \frac{1}{2^{2(m-t)-5}} \|f\|^2. \quad (28)$$



Подставим (28) в (27), получим

$$\begin{aligned} \left| R_{m+1} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| &\leq \frac{1}{2} \left( \sum_{t=-2}^{m-2} C_t \tilde{\omega}_{f,m-t}^2 + \sum_{t=-2}^{m-3} \frac{C_t}{2^{2(m-t)-5}} \|f\| \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{t=-2}^{m-2} C_t \tilde{\omega}_{f,m-t}^2 + 8\|f\| \sum_{t=-2}^{m-3} \frac{C_t}{4^{m-t-1}} \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_{t=-2}^{m-2} C_t \tilde{\omega}_{f,m-t}^2 + 8\|f\| C_{m-1} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом, в двоично-рациональных точках получена предварительная оценка через модуль двоичной непрерывности.

Теперь возьмем произвольный  $x$  из  $\varepsilon = \frac{1}{2^{(m+2)}}$  — окрестности точки  $\frac{j+1/4}{2^m}$ . Тогда

$$\begin{aligned} |R_{m+1}(x)| &\leq \left| R_{m+1}(x) - R_{m+1} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) + R_{m+1} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| \leq \\ &\leq \left| R_{m+1}(x) - R_{m+1} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| + \left| R_{m+1} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right|. \end{aligned} \quad (30)$$

Учитывая (10), неравенство (30) примет вид

$$\begin{aligned} |R_{m+1}(x)| &\leq \left| \left( f(x) - \sum_{i=0}^m S_i(x) \right) - \left( f \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) - \sum_{i=0}^m S_i \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right) \right| + \\ &\quad + \left| R_{m+1} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| \leq \\ &\leq \left| f(x) - f \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| + \sum_{i=0}^m \left| S_i(x) - S_i \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| + \left| R_{m+1} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right|. \end{aligned} \quad (31)$$

Оценим второе слагаемое в (31). Заметим, что если  $x \in \left[ \frac{j}{2^m}, \frac{j+1/2}{2^m} \right]$ , то  $x \in \left[ \frac{j \operatorname{div} 2^{m-i}}{2^i}, \frac{j \operatorname{div} 2^{m-i} + 1}{2^i} \right]$ . Учитывая (6) и равенство

$$\sup_{x \in [0,1]} |\psi'_n(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |\psi'_{n,n}(x)| = \frac{Q(n,n)}{Q(n,n-1)} \sup_{x \in [0,1]} |\psi_{n,n-1}(x)|,$$

имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m \left| S_i(x) - S_i \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| &\leq \sum_{i=0}^m \left| R_i \left( \frac{j \operatorname{div} 2^{m-i} + \frac{1}{2}}{2^i} \right) \phi_{i,j \operatorname{div} 2^{m-i}}(x) - \right. \\ &\quad \left. - R_i \left( \frac{j \operatorname{div} 2^{m-i} + \frac{1}{2}}{2^i} \right) \phi_{i,j \operatorname{div} 2^{m-i}} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^m \left| \left( \phi_{i,j \operatorname{div} 2^{m-i}}(x) - \phi_{i,j \operatorname{div} 2^{m-i}} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right) R_i \left( \frac{j \operatorname{div} 2^{m-i} + \frac{1}{2}}{2^i} \right) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^m \left| \psi_n \left( 2^i x - j \operatorname{div} 2^{m-i} \right) - \psi_n \left( 2^i \left( \frac{j+1/4}{2^m} - j \operatorname{div} 2^{m-i} \right) \right) \cdot R_i \left( \frac{j \operatorname{div} 2^{m-i} + \frac{1}{2}}{2^i} \right) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^m \left( \frac{Q(n,n)}{Q(n,n-1)} \sup_{x \in [0,1]} |\psi_{n,n-1}(x)| \cdot \left| 2^i \left( x - \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| \cdot \left| R_i \left( \frac{j \operatorname{div} 2^{m-i} + \frac{1}{2}}{2^i} \right) \right| \right) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^m \left( \frac{4}{2^{m-i+2}} \left| R_i \left( \frac{j \operatorname{div} 2^{m-i} + \frac{1}{2}}{2^i} \right) \right| \right) \leq \sum_{i=0}^m \left( \frac{1}{2^{m-i}} \left| R_i \left( \frac{j \operatorname{div} 2^{m-i} + \frac{1}{2}}{2^i} \right) \right| \right). \end{aligned} \quad (32)$$



Подставим (32) в (31)

$$|R_{m+1}(x)| \leq \left| f(x) - f\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right) \right| + \sum_{i=0}^m \left( \frac{1}{2^{m-i}} \cdot \left| R_{(i-1)+1} \left( \frac{2(j \operatorname{div} 2^{m-i}) + \frac{1}{4}}{2^{(i-1)}} \right) \right| \right) + \\ + \left| R_{m+1} \left( \frac{j+1/4}{2^m} \right) \right|. \quad (33)$$

Из определения модуля гладкости в (9) и определения модуля двоичной непрерывности второго порядка в (11) очевидно, что  $\tilde{\omega}_{f,m}^2 \leq \omega_f^2 \left( \frac{1}{2^m} \right)$ . Первое слагаемое оценим с помощью (8). Второе и третье слагаемые содержат только двоично-рациональные точки, оценка для которых получена в (29).

Тогда (33) примет вид

$$|R_{m+1}(x)| \leq \omega_f \left( \frac{1}{2^{m+2}} \right) + \sum_{i=0}^m \left( \frac{1}{2^{m-i}} \cdot \frac{1}{2} \left( \sum_{t=-2}^{i-2} C_t \omega_f^2 \left( \frac{1}{2^{i-t}} \right) + 8 \|f\| C_{i-1} \right) \right) + \\ + \frac{1}{2} \left( \sum_{t=-2}^{m-2} C_t \omega_f^2 \left( \frac{1}{2^{m-t}} \right) + 8 \|f\| C_{m-1} \right) = \\ = \omega_f \left( \frac{1}{2^{m+2}} \right) + \sum_{i=0}^m \sum_{t=-2}^{i-2} \frac{C_t}{2^{m+1-i}} \omega_f^2 \left( \frac{1}{2^{i-t}} \right) + \sum_{i=0}^m \frac{C_{i-1}}{2^{m-2-i}} \|f\| + \sum_{t=-2}^{m-2} \frac{C_t}{2} \omega_f^2 \left( \frac{1}{2^{m-t}} \right) + \\ + 4 C_{m-1} \|f\| = \omega_f \left( \frac{1}{2^{m+2}} \right) + \sum_{t_1=-2}^{m-2} \sum_{i_1=t_1+2}^m \frac{C_{t_1}}{2^{m+1-i_1}} \omega_f^2 \left( \frac{1}{2^{i_1-t_1}} \right) + \\ + \sum_{t=-2}^{m-2} \frac{C_t}{2} \omega_f^2 \left( \frac{1}{2^{m-t}} \right) + \left( \sum_{i=0}^m \frac{C_{i-1}}{2^{m-2-i}} + 4 C_{m-1} \right) \|f\|. \quad (34)$$

Произведем замену переменных в двойной сумме в (34). Пусть  $m-t = i_1 - t_1$ ,  $i = m - i_1$ . Так как  $i_1 - t_1 \geq 2$ ,  $i_1 - t_1 \leq m+2$ , то  $-2 \leq t \leq m-2$ . С другой стороны,  $m+t_1 - i_1 \geq -2 + m - i_1$ , а значит,  $i \leq t+2$ . Так как  $i_1 \leq m$ , то  $i \geq 0$ . Окончательно получим

$$|R_{m+1}(x)| \leq \omega_f \left( \frac{1}{2^{m+2}} \right) + \sum_{t=-2}^{m-2} \left( \sum_{i=0}^{t+2} \frac{C_{t-i}}{2^{i+1}} + \frac{C_t}{2} \right) \omega_f^2 \left( \frac{1}{2^{m-t}} \right) + \\ + \left( \sum_{i=0}^m \frac{C_{m-i-1}}{2^{i-2}} + 4 C_{m-1} \right) \|f\|. \quad (35)$$

Покажем с помощью метода математической индукции, что для всех  $k \geq -2$

$$C_k \leq 2^{-\frac{3}{5}k}. \quad (36)$$

Из (25) для  $k = -2$  и  $k = -1$  имеем

$$1 = C_{-2} \leq 2^{\frac{6}{5}}, \quad 0 = C_{-1} \leq 2^{\frac{3}{5}}.$$

Пусть утверждение доказано для  $k-2$  и  $k-1$ , следовательно,

$$C_{k-2} \leq 2^{-\frac{3}{5}(k-2)}, \quad C_{k-1} \leq 2^{-\frac{3}{5}(k-1)}.$$



Пользуясь неравенством (25),

$$C_k = \frac{1}{4} (C_{k-2} + C_{k-1}) \leqslant \frac{1}{4} \left( 2^{-\frac{3}{5}(k-2)} + 2^{-\frac{3}{5}(k-1)} \right) \leqslant 2^{-\frac{3}{5}k} \left( \frac{2^{\frac{6}{5}} + 2^{\frac{3}{5}}}{4} \right) \leqslant 2^{-\frac{3}{5}k},$$

что доказывает неравенство (36).

Из (35) и (36) получим

$$\begin{aligned} |R_{m+1}(x)| &\leqslant \omega_f \left( \frac{1}{2^{m+2}} \right) + \sum_{t=-2}^{m-2} \left( \sum_{i=0}^{t+2} \frac{2^{-\frac{3}{5}(t-i)}}{2^{i+1}} + 2^{-\frac{3}{5}t-1} \right) \omega_f^2 \left( \frac{1}{2^{m-t}} \right) + \\ &\quad + \left( \sum_{i=0}^m \frac{2^{-\frac{3}{5}(m-i-1)}}{2^{i-2}} + 2^{2-\frac{3}{5}(m-1)} \right) \|f\| \leqslant \\ &\leqslant \omega_f \left( \frac{1}{2^{m+2}} \right) + \sum_{t=-2}^{m-2} 2^{-\frac{3}{5}t-1} \left( \frac{1}{1-2^{-\frac{8}{5}}} + 1 \right) \omega_f^2 \left( \frac{1}{2^{m-t}} \right) + 2^{\frac{13}{5}-\frac{3}{5}m} \left( \frac{1}{1-2^{-\frac{8}{5}}} + 1 \right) \|f\| \leqslant \\ &\leqslant \omega_f \left( \frac{1}{2^{m+2}} \right) + \frac{5}{2} \left( \sum_{t=-2}^{m-2} 2^{-\frac{3}{5}t-1} \omega_f^2 \left( \frac{1}{2^{m-t}} \right) + 2^{\frac{13}{5}-\frac{3}{5}m} \|f\| \right). \end{aligned} \quad (37)$$

При больших  $t$  модуль гладкости

$$\omega_f^2 \left( \frac{1}{2^{m-t}} \right) = \left| f \left( x + \frac{2}{2^{m-t}} \right) - 2f \left( x + \frac{1}{2^{m-t}} \right) + f(x) \right|$$

нельзя оценить лучше, чем  $4\|f\|$ . Однако при таких значениях  $t$  коэффициенты  $C_t$  будут малы. С другой стороны, когда  $C_t$  недостаточно малы, модуль двоичной непрерывности  $\tilde{\omega}_{f,m-t}^2$  становится достаточно мал из-за величины интервала разбиения. Перепишем (37) следующим образом:

$$|R_{m+1}(x)| \leqslant \omega_f \left( \frac{1}{2^{m+2}} \right) + \frac{5}{2} \left( \sum_{t=-2}^k 2^{-\frac{3}{5}t-1} \omega_f^2 \left( \frac{1}{2^{m-k}} \right) + \sum_{t=k+1}^{m-2} 2^{-\frac{3}{5}t-1} 4\|f\| + 2^{\frac{13}{5}-\frac{3}{5}m} \|f\| \right) \quad (38)$$

и выберем  $k = m \operatorname{div} 2 - 1$ . Следовательно, (38) будет иметь вид

$$\begin{aligned} |R_{m+1}(x)| &\leqslant \omega_f \left( \frac{1}{2^{m+2}} \right) + \frac{5}{2} \left( \frac{2^{\frac{1}{5}}}{1-2^{-\frac{3}{5}}} \omega_f^2 \left( \frac{1}{2^{m \operatorname{div} 2-1}} \right) + \left( 2^{-\frac{3}{5}m \operatorname{div} 2+1} + 2^{\frac{13}{5}-\frac{3}{5}m} \right) \|f\| \right) \leqslant \\ &\leqslant \omega_f \left( \frac{1}{2^{m+2}} \right) + \frac{17}{2} \omega_f^2 \left( \frac{1}{2^{m \operatorname{div} 2-1}} \right) + 5 \cdot 2^{-\frac{3}{5}m \operatorname{div} 2} \|f\| + 2^{4-\frac{3}{5}m} \|f\|, \end{aligned} \quad (39)$$

или, подставив в (39)  $m \operatorname{div} 2 \geqslant \frac{m-1}{2}$ ,

$$|R_{m+1}(x)| \leqslant \omega_f \left( \frac{1}{2^{m+2}} \right) + \frac{17}{2} \omega_f^2 \left( \frac{1}{2^{\frac{m-3}{2}}} \right) + 5 \cdot 2^{-\frac{3}{10}(m-1)} \|f\| + 2^{4-\frac{3}{5}m} \|f\|.$$

Теперь необходимо доказать, что разложение в ряд по системе единственno. Возьмем произвольную функцию  $f_0(x) \in C_0[0, 1]$ . Рассмотрим двоично-рациональную точку  $\frac{1}{2}$ . В этой точке  $f_0(x)$  принимает произвольное значение. Единственная функция из системы  $\phi_{m,j}(x)$ , коэффициент которой не определен в этой точке и которая



не равна нулю, —  $\phi_{0,0}(x)$ . Следовательно,  $f_0(x)$  должна быть приближена с помощью коэффициента при  $\phi_{0,0}(x)$ . Таким образом, коэффициент при  $\phi_{0,0}(x)$  определяется однозначно. Далее рассмотрим точки  $\frac{1}{4}$  и  $\frac{3}{4}$ . В каждой из этих точек из системы  $\phi_{m,j}(x)$  существует ровно одна функция, не равная нулю в этой точке и коэффициент которой не был определен ранее (соответственно  $\phi_{1,0}(x)$  и  $\phi_{1,1}(x)$ ). Продолжая далее данный процесс, заметим, что для каждой двоично-рациональной точки существует ровно одна функция, коэффициент которой не был определен на предыдущих шагах, и при этом отличная от нуля в этой двоично-рациональной точке. Таким образом, коэффициенты каждой функции при разложении в ряд определяются однозначно.

Для того чтобы система была базисом в  $[0, 1]$ , дополним ее следующими функциями:  $\phi_{-1,1} = \psi_{n,N}(2x)$  ( $x \in [0, \frac{1}{2}]$ ) и  $\phi_{-1,0} = \psi(2x - 1)$  ( $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ ). Приблизив произвольную функцию  $f(x) \in C[0, 1]$ , соответственно,  $\phi_{-1,0}$  в  $x = 0$  и  $\phi_{-1,1}$  в  $x = 1$ , получим произвольную функцию  $f_0(x) \in C_0[0, 1]$   $\square$

## Библиографический список

1. *Faber G.* Über die orthogonalfunktionen des Herrn Haar // Jahresber. Deutsch Math. Verein. 1910. Vol. 19. P. 104–112.
2. *Schauder J.* Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen // Math. Z. 1927. Bd. 26. P. 47–65.
3. *Матвеев В. А.* О рядах по системе Шаудера // Матем. заметки. 1967. Т. 2, вып. 3. С. 267–278.
4. *Ciesielski Z.* Some properties of Schauder basis of space  $C[0, 1]$  // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 1960. Vol. 3. P. 141–144.
5. *Бочкарёв С. В.* О рядах по системе Шаудера // Матем. заметки. 1968. Т. 4, вып. 4. С. 453–460.
6. *Ульянов П. Л.* О некоторых свойствах рядов по системе Шаудера // Матем. заметки. 1970. Т. 7, вып. 4. С. 431–442.
7. *Сабурова Т. Н.* Суперпозиции функций и их ряды по системе Фабера – Шаудера // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36, вып. 2. С. 401–422.
8. *Горячев А. П.* О коэффициентах Фурье по системе Фабера – Шаудера // Матем. заметки. 1974. Т. 15, вып. 2. С. 341–352.
9. *Абрамова В. В.* О системе Фабера – Шаудера на треугольнике // Математика. Механика. 2015. Вып. 17. С. 3–6.
10. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды : М. : АФЦ, 1999. 550 с.
11. *Аубакиров Т. У., Бокаев Н. А.* О новом классе систем функций типа Фабера – Шаудера // Матем. заметки. 1974. Т. 82, вып. 5. С. 643–651. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3840>
12. *Шайдуков К. М.* О базисах в пространстве непрерывных функций, построенных из дуг парабол // Учен. зап. Казан. ун-та. 1965. Т. 125, № 2. С. 133–142.
13. *Лукомский С. Ф., Терехин П. А., Чумаченко С. А.* Хаосы Радемахера в задачах построения сплайновых аффинных систем // Матем. заметки. 2018. Т. 103, вып. 6. С. 863–874. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11654>
14. *Чумаченко С. А.* Об одном из аналогов системы Фабера – Шаудера // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. Казань, 2016. Т. 53. С. 163–164.

## Образец для цитирования:

Чумаченко С. А. Гладкие аппроксимации в  $C[0, 1]$  // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 326–342. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-326-342>



## Smooth Approximations in $C[0, 1]$

**S. A. Chumachenko**

Sergei A. Chumachenko, <https://orcid.org/0000-0001-7088-3740>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, chumachenkosergei@gmail.com

The first orthonormal basis in the space of continuous functions was constructed by Haar in 1909. In 1910, Faber integrated the Haar system and obtained the first basis of continuous functions in the space of continuous functions. Schauder rediscovered this system in 1927. All functions of Faber–Schauder are piecewise linear, and partial sums are inscribed polygons. There were many attempts to build smooth analogues of the Faber–Schauder basis. In 1965, K. M. Shaidukov succeeded. The functions he constructed were smooth, but consisted of parabolic arcs. Shaidukov proved the uniform convergence of the obtained expansions, but failed to obtain deviation estimates. Another analogue of the Faber–Schauder system was proposed by T. U. Aubakirov and N. A. Bokaev in 2007. They built a class of functions that form a basis in the space of continuous functions, obtained estimates of the deviation of partial sums from the approximated function. The functions constructed were piecewise linear, as in the Faber–Schauder system. We construct smooth analogues of the Faber–Schauder system and obtain estimates of the deviation of partial sums from the approximate function. Those are systems of compressions and shifts of a single function, which we call the binary basic spline. The binary basic spline is an integral of the  $n$ -th order of the Walsh function  $W_{2^n-1}$ . Thus, we were able to construct analogues of the Faber–Schauder system with a large degree of smoothness and obtain deviations in terms of module of continuity.

*Keywords:* basic splines, smooth interpolation, multi-scale analysis.

Received: 18.12.2019 / Accepted: 01.04.2020 / Published: 31.08.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

### References

1. Faber G. Über die orthogonalenfunctionen des Herrn Haar. *Jahresber. Deutsch Math. Verein.*, 1910, vol. 19, pp. 104–112.
2. Schauder J. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen. *Math. Z.*, 1927, Bd. 26, pp. 47–65.
3. Matveev V. A. On Schauder system series. *Math. Notes*, 1967, vol. 2, iss. 3, pp. 646–652. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01094054>
4. Ciesielski Z. Some properties of Schauder basis of space  $C[0, 1]$ . *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 1960, vol. 3, pp. 141–144.
5. Bochkarev S. V. Series with respect to the Schauder system. *Math. Notes*, 1968, vol. 4, iss. 4, pp. 763–767. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01093716>
6. Ulianov P. L. On series with respect to a Schauder system. *Math. Notes*, 1970, vol. 7, iss. 4, pp. 261–268. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01151699>
7. Saburova T. N. Composite functions and their series in the Faber–Schauder system. *Math. USSR-Izv.*, 1972, vol. 6, iss. 2, pp. 395–415. DOI: <https://doi.org/10.1070/IM1972v006n02ABEH001879>
8. Goryachev A. P. The Fourier coefficients with respect to the Faber–Schauder system. *Math. Notes*, 1974, vol. 15, iss. 2, pp. 192–198. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02102406>
9. Abramova V. V. Faber–Schauder system on the triangular mesh. *Mathematics. Mechanics*, 2015, iss. 17, pp. 3–6 (in Russian).



10. Kashin B. S., Saakian A. A. *Ortogonal'nye riady* [Orthogonal series]. Moscow, AFC, 1999. 550 p. (in Russian).
11. Aubakirov T. U., Bokaev N. A. On a new class of function systems of Faber – Schauder type. *Math. Notes*, 1974, vol. 82, iss. 5, pp. 643–651. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434607110016>
12. Shaidukov K. M. Parabolic basis in continuos function space. *Uchenie zapiski Kazanskogo universiteta*, 1965, vol. 125, no. 2, pp. 133–142 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3840>
13. Lukomskii S. F., Terekhin P. A., Chumachenko S. A. Rademacher Chaoses in Problems of Constructing Spline Affine Systems. *Math. Notes*, 2018, vol. 103, iss. 6, pp. 919–928. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434618050280>
14. Chumachenko S. A. One analogue of Faber – Schauder system. *Trudy matematicheskogo tsentra imeni Lobachevskogo*. Kazan, 2016, vol. 53, pp. 163–164 (in Russian).

---

**Cite this article as:**

Chumachenko S. A. Smooth Approximations in  $C[0, 1]$ . *Izv. Saratov Univ. (N.S.)*, Ser. Math. Mech. Inform., 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 326–342 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-326-342>

---



# On Determination of Functional-Differential Pencils on Closed Sets from the Weyl-Type Function

V. A. Yurko

Vjacheslav A. Yurko, <https://orcid.org/0000-0002-4853-0102>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., 410012 Saratov, Russia, YurkoVA@info.sgu.ru

Second-order functional-differential pencils on closed sets are considered with nonlinear dependence on the spectral parameter. Properties of their spectral characteristics are obtained and the inverse problem is studied, which consists in recovering coefficients of the pencil from the given Weyl-type function. The statement and the study of inverse spectral problems essentially depend on the structure of the closed set. We consider an important subclass of closed sets when the set is a unification of a finite number of closed intervals and isolated points. In order to solve the inverse spectral problem for this class of closed sets, we develop ideas of the method of spectral mappings. We also establish and use connections between the Weyl-type functions related to different subsets of the main closed set. Using these ideas and properties we obtain a global constructive procedure for the solution of the nonlinear inverse problem considered, and we establish the uniqueness of the solution of the inverse problem.

*Keywords:* functional-differential pencils, closed sets, inverse spectral problems.

Received: 10.12.2019 / Accepted: 15.02.2020 / Published: 31.08.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-343-350>

## INTRODUCTION

We study inverse spectral problems for pencils of functional-differential operators on a closed set of the real line (in literature it is sometimes called a time scale). Such problems often appear in natural sciences and engineering [1]. Inverse spectral problems consist in constructing operators with given spectral characteristics. For differential operators *on an interval* inverse problems have been studied fairly completely; the main results can be found in the monographs [2, 3]. Inverse spectral problems for differential pencils *on an interval* were considered in [4–10] and other works. Inverse problems for functional-differential operators for Sturm–Liouville operators defined on time scales were investigated in [11]. Inverse problems for pencils of functional-differential operators have not been studied yet. In Section 1. of this paper we present main notions and establish properties of spectral characteristics for pencils of functional-differential operators on closed sets, and formulate the statement of the inverse problem. In Section 2. we develop an algorithm for solution of the inverse problem of recovering the pencil from the given Weyl-type function, and prove the uniqueness of the solution.

## 1. STATEMENT OF THE INVERSE PROBLEM

Let  $T$  be a closed subset of the real line; it is sometimes called a time scale. Consider the following equation on  $T$ :

$$y^{\Delta\Delta}(x) + (\rho^2 + \rho p(x) + q(x))y(\sigma(x)) = 0, \quad x \in T. \quad (1)$$



Here  $\rho$  is the spectral parameter,  $q(x) \in C_T$ ,  $p(x) \in C_T^1$  are complex-valued functions,  $y^\Delta$  is the delta-derivative,  $\sigma(x) = \inf\{s \in T : s > x\}$  for  $x \neq \sup T$ ,  $\sigma(\sup T) = \sup T$  (see [11] for notions related to equations on closed sets such as delta-derivative,  $C_T$  and others). The statement and the study of inverse spectral problems essentially depend on the structure of the time scale  $T$ . In this paper we consider an important subclass of time scale, namely, the so-called  $Y1$ -structure [11]. Let the set  $T$  have the following structure:

$$T = \bigcup_{k=1}^N [a_k, b_k], \quad N \geq 2, \quad b_{k-1} < a_k \leq b_k < a_{k+1}, \quad a_1 < b_1, \quad a_N < b_N, \quad a_k = b_k, \quad k = \overline{2, N-1}.$$

For  $Y1$ -structure one has

$$y^\Delta(b_k) = \frac{y(a_{k+1}) - y(b_k)}{a_{k+1} - b_k}, \quad k = \overline{1, N-1}, \quad y^\Delta(x) = y'(x), \quad x \in [a_1, b_1] \cup [a_N, b_N]. \quad (2)$$

In particular, this yields  $y^\Delta(b_1) = y'(b_1)$ , and consequently,

$$y(a_2) = y(b_1) + (a_2 - b_1)y'(b_1). \quad (3)$$

Using (1) and (2) we obtain

$$\begin{aligned} y''(x) + (\rho^2 + \rho p(x) + q(x))y(x) &= 0, \quad x \in [a_1, b_1] \cup [a_N, b_N], \\ y^{\Delta\Delta}(b_k) &= \frac{1}{a_{k+1} - b_k} \left( \frac{y(a_{k+2}) - y(b_{k+1})}{a_{k+2} - b_{k+1}} - \frac{y(a_{k+1}) - y(b_k)}{a_{k+1} - b_k} \right) = \\ &= ((i\rho)^2 - \rho p(b_k) - q(b_k))y(a_{k+1}), \quad k = \overline{1, N-2}, \\ y^{\Delta\Delta}(b_{N-1}) &= \frac{1}{a_N - b_{N-1}} \left( y'(a_N) - \frac{y(a_N) - y(b_{N-1})}{a_N - b_{N-1}} \right) = \\ &= ((i\rho)^2 - \rho p(b_{N-1}) - q(b_{N-1}))y(a_N). \end{aligned} \quad (4)$$

Therefore

$$\begin{aligned} y(a_{k+2}) &= y(b_{k+1}) + \frac{a_{k+2} - b_{k+1}}{a_{k+1} - b_k} (y(a_{k+1}) - y(b_k)) + \\ &+ (a_{k+1} - b_k)(a_{k+2} - b_{k+1}) ((i\rho)^2 - \rho p(b_k) - q(b_k))y(a_{k+1}), \quad k = \overline{1, N-2}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$y'(a_N) = \frac{y(a_N) - y(b_{N-1})}{a_N - b_{N-1}} + (a_N - b_{N-1}) ((i\rho)^2 - \rho p(b_{N-1}) - q(b_{N-1}))y(a_N). \quad (6)$$

Denote  $Q = \{p, q\}$ . It follows from (3), (5), (6) that

$$\left. \begin{aligned} y(a_N) &= \alpha_{11}(\rho)y(b_1) + \alpha_{12}(\rho)y'(b_1), \\ y'(a_N) &= \alpha_{21}(\rho)y(b_1) + \alpha_{22}(\rho)y'(b_1), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

where  $\alpha_{jk}(\rho)$  are polynomials with respect to  $\rho$  of degree  $2(N+j-3)$ , and they depend on  $Q(b_1), \dots, Q(b_{N+j-3})$ . Moreover,

$$\alpha_{jk}(\rho) = (i\rho)^{2(N+j-3)} \alpha_{jk}^0[1], \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad (8)$$



where  $\alpha_{11}^0 = (a_2 - b_1)(a_N - b_{N-1}) \prod_{k=2}^{N-2} (a_{k+1} - b_k)^2$  ( $\alpha_{11}^0 = 1$  for  $N = 2$ , and  $\alpha_{11}^0 = (a_2 - b_1)(a_3 - b_2)$  for  $N = 3$ ),  $\alpha_{12}^0 = (a_2 - b_1)\alpha_{11}^0$ ,  $\alpha_{21}^0 = (a_N - b_{N-1})\alpha_{11}^0$ ,  $\alpha_{22}^0 = (a_2 - b_1)(a_N - b_{N-1})\alpha_{11}^0$ ,  $[1] = 1 + O(\rho^{-1})$ . Without loss of generality, we assume that  $a_1 = 0$ .

We denote by  $L_0$  the boundary value problem for Eq. (1) on  $T$  with the boundary conditions  $y(0) = y(b_N) = 0$ . Let  $S(x, \rho)$  and  $C(x, \rho)$  be solutions of Eq. (1) on  $T$  satisfying the initial conditions  $C(0, \rho) = S^\Delta(0, \rho) = 1$ ,  $S(0, \rho) = C^\Delta(0, \rho) = 0$ . Denote  $\Delta_0(\rho) := S(b_N, \rho)$ . The eigenvalues  $\{\rho_{n0}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  of the boundary value problem  $L_0$  coincide with the zeros of the entire function  $\Delta_0(\rho)$ . The function  $\Delta_0(\rho)$  is called the characteristic function for  $L_0$ .

Let  $\Phi(x, \rho)$  be the solution of Eq. (1) on  $T$  satisfying the boundary conditions

$$\Phi(0, \rho) = 1, \quad \Phi(b_N, \rho) = 0. \quad (9)$$

We put  $M(\rho) := \Phi^\Delta(0, \rho)$ . The function  $M(\rho)$  is called the Weyl-type function. Clearly,

$$\Phi(x, \rho) = C(x, \rho) + M(\rho)S(x, \rho), \quad (10)$$

$$M(\rho) = -\Delta_1(\rho)/\Delta_0(\rho), \quad (11)$$

where  $\Delta_1(\rho) := C(b_N, \rho)$  is the characteristic function for the boundary value problem  $L_1$  for Eq. (1) on  $T$  with the boundary conditions  $y^\Delta(0) = y(b_N) = 0$ . The zeros  $\{\rho_{n1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  of  $\Delta_1(\rho)$  coincide with the eigenvalues of  $L_1$ .

Now we need to study the asymptotical behavior of the solutions  $\Phi(x, \rho)$  and  $S(x, \rho)$ . For this purpose we extent the functions  $Q(x)$  on the whole segment  $[a_1, b_N]$  such that  $q(x) \in C[a_1, b_N]$ ,  $p(x) \in C^1[a_1, b_N]$  and arbitrary in the rest. Consider the equation

$$y''(x) + (\rho^2 + pp(x) + q(x))y(x) = 0, \quad x \in [0, b_N]. \quad (12)$$

Denote

$$E(x) = \frac{1}{2} \int_0^x p(t) dt, \quad \Pi_\pm = \{\rho : \pm \operatorname{Im} \rho > 0\},$$

$$\Pi_\delta^+ = \{\rho : \arg \rho \in [\delta, \pi - \delta]\}, \quad \Pi_\delta^- = \{\rho : \arg \rho \in [\pi + \delta, 2\pi - \delta]\}.$$

It is known (see, for example, [2]) that there exist fundamental systems of solutions of Eq. (12)  $\{Y_1^\pm(x, \rho), Y_2^\pm(x, \rho)\}$ ,  $x \in [0, b_N]$ ,  $\rho \in \overline{\Pi_\pm}$ ,  $|\rho| > \rho_0$ , having the following asymptotical behavior for each fixed  $x \in [0, b_N]$ ,  $\nu = 0, 1$  as  $|\rho| \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^\nu}{dx^\nu} Y_1^\pm(x, \rho) &= (i\rho)^\nu \exp(i(\rho x + E(x)))[1], \\ \frac{d^\nu}{dx^\nu} Y_2^\pm(x, \rho) &= (-i\rho)^\nu \exp(-i(\rho x + E(x)))[1]. \end{aligned} \quad (13)$$

Taking (7) into account we conclude that the function  $\Phi(x, \rho)$  is the solution of Eq. (4) satisfying the boundary conditions (9) and the jump conditions

$$\left. \begin{aligned} \Phi(a_N, \rho) &= \alpha_{11}(\rho)\Phi(b_1, \rho) + \alpha_{12}(\rho)\Phi'(b_1, \rho), \\ \Phi'(a_N, \rho) &= \alpha_{21}(\rho)\Phi(b_1, \rho) + \alpha_{22}(\rho)\Phi'(b_1, \rho). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$



Using the fundamental system of solutions  $\{Y_1^+(x, \rho), Y_2^+(x, \rho)\}$ , for  $\rho \in \overline{\Pi_+}$  one has:

$$\left. \begin{array}{l} \Phi(x, \rho) = A_1(\rho)Y_1^+(x, \rho) + A_2(\rho)Y_2^+(x, \rho), \quad x \in [0, b_1], \\ \Phi(x, \rho) = B_1(\rho)Y_1^+(x, \rho) + B_2(\rho)Y_2^+(x, \rho), \quad x \in [a_N, b_N]. \end{array} \right\} \quad (15)$$

Substituting (15) into (9) and (14) and using (13), we obtain the following linear algebraic system with respect to  $A_k(\rho)$  and  $B_k(\rho)$ :

$$\begin{aligned} & A_1(\rho)[1] + A_2(\rho)[1] = 1, \\ & B_1(\rho) \exp(i(\rho b_N + E(b_N)))[1] + B_2(\rho) \exp(-i(\rho b_N + E(b_N)))[1] = 0, \\ & B_1(\rho) \exp(i(\rho a_N + E(a_N)))[1] + B_2(\rho) \exp(-i(\rho a_N + E(a_N)))[1] = \\ & = \alpha_{11}(\rho) \left( A_1(\rho) \exp(i(\rho b_1 + E(b_1)))[1] + A_2(\rho) \exp(-i(\rho b_1 + E(b_1)))[1] \right) + \\ & + \alpha_{12}(\rho) \left( A_1(\rho)(i\rho) \exp(i(\rho b_1 + E(b_1)))[1] + A_2(\rho)(-i\rho) \exp(-i(\rho b_1 + E(b_1)))[1] \right), \\ & B_1(\rho)(i\rho) \exp(i(\rho a_N + E(a_N)))[1] + B_2(\rho)(-i\rho) \exp(-i(\rho a_N + E(a_N)))[1] = \\ & = \alpha_{21}(\rho) \left( A_1(\rho) \exp(i(\rho b_1 + E(b_1)))[1] + A_2(\rho) \exp(-i(\rho b_1 + E(b_1)))[1] \right) + \\ & + \alpha_{22}(\rho) \left( A_1(\rho)(i\rho) \exp(i(\rho b_1 + E(b_1)))[1] + A_2(\rho)(-i\rho) \exp(-i(\rho b_1 + E(b_1)))[1] \right). \end{aligned}$$

Taking (8) into account we deduce that the determinant  $D(\rho)$  of this system has the form

$$\begin{aligned} D(\rho) = & (i\rho)\alpha_{22}(\rho) \left( \exp(i\rho(b_N - a_N)) \exp(i(E(b_N) - E(a_N)))[1] - \right. \\ & \left. - \exp(-i\rho(b_N - a_N)) \exp(-i(E(b_N) - E(a_N)))[1] \right) \times \\ & \times \left( \exp(i(\rho b_1 + E(b_1)))[1] - \exp(-i(\rho b_1 + E(b_1)))[1] \right), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \rho \in \overline{\Pi_+}. \end{aligned} \quad (16)$$

Solving this algebraic system by Cramer's rule and using (8) and (16), for  $|\rho| \rightarrow \infty$ ,  $\rho \in \Pi_\delta^+$  we get:

$$\begin{aligned} A_1(\rho) &= [1], \quad A_2(\rho) = \exp(2i\rho b_1)[1], \\ B_1(\rho) &= \exp(-i\rho(a_N - b_1))O(\rho^{2N-4})[1], \\ B_2(\rho) &= \exp(-i\rho(a_N - b_1))\exp(2i\rho b_N)O(\rho^{2N-4})[1]. \end{aligned}$$

In particular for each fixed  $x \in (0, b_1)$  this yields:

$$\Phi^{(\nu)}(x, \rho) = (i\rho)^\nu \exp(i(\rho x + E(x)))[1], \quad \nu = 0, 1, |\rho| \rightarrow \infty, \rho \in \Pi_\delta^+. \quad (17)$$

Repeating these calculations for  $\rho \in \overline{\Pi_-}$ , for each fixed  $x \in (0, b_1)$  we get:

$$\Phi^{(\nu)}(x, \rho) = (-i\rho)^\nu \exp(-i(\rho x + E(x)))[1], \quad \nu = 0, 1, |\rho| \rightarrow \infty, \rho \in \Pi_\delta^-. \quad (18)$$

Similarly, we obtain

$$S^{(\nu)}(x, \rho) = -\frac{(-i\rho)^\nu}{2i\rho} \exp(-i(\rho x + E(x)))[1], \quad \nu = 0, 1, |\rho| \rightarrow \infty, \rho \in \Pi_\delta^+, \quad (19)$$

$$S^{(\nu)}(x, \rho) = \frac{(i\rho)^\nu}{2i\rho} \exp(i(\rho x + E(x)))[1], \quad \nu = 0, 1, |\rho| \rightarrow \infty, \rho \in \Pi_\delta^-, \quad (20)$$

for each fixed  $x \in (0, b_1)$ .



## 2. SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM

Let the numbers  $Q(b_2), \dots, Q(b_{N-1})$  be known a priori. The inverse problem is formulated as follows: given  $M(\rho)$ , construct  $Q = \{p, q\}$  on  $T$ .

In order to solve this inverse problem we will use the ideas of the method of spectral mappings [3]. Let us prove the uniqueness theorem for the solution of the inverse problem. For this purpose together with  $L_0$  we consider a boundary value problem  $\tilde{L}_0$  of the same form but with another potentials  $\tilde{Q}$ . We agree that if a certain symbol  $\theta$  denotes an object related to  $L_0$ , then  $\tilde{\theta}$  will denote an analogous object related to  $\tilde{L}_0$ .

**Theorem 1.** *If  $M(\rho) = \tilde{M}(\rho)$ , then  $Q = \tilde{Q}$  on  $T$ . Thus, the specification of the Weyl-type function  $M(\rho)$  uniquely determines the potential  $Q$ .*

**Proof.** For  $x \in (0, b_1)$ , we define the matrix  $P(x, \rho) = [P_{jk}(x, \rho)]_{j,k=1,2}$  by the formula

$$P(x, \rho) \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}(x, \rho) & \tilde{S}(x, \rho) \\ \tilde{\Phi}'(x, \rho) & \tilde{S}'(x, \rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(x, \rho) & S(x, \rho) \\ \Phi'(x, \rho) & S'(x, \rho) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Since  $\Phi(x, \rho)S'(x, \rho) - \Phi'(x, \rho)S(x, \rho) \equiv 1$ , it follows from (21) that

$$\left. \begin{aligned} P_{11}(x, \rho) &= \Phi(x, \rho)\tilde{S}'(x, \rho) - S(x, \rho)\tilde{\Phi}'(x, \rho), \\ P_{12}(x, \rho) &= S(x, \rho)\tilde{\Phi}(x, \rho) - \Phi(x, \rho)\tilde{S}(x, \rho), \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, \rho) &= P_{11}(x, \rho)\tilde{\Phi}(x, \rho) + P_{12}(x, \rho)\tilde{\Phi}'(x, \rho), \\ S(x, \rho) &= P_{11}(x, \rho)\tilde{S}(x, \rho) + P_{12}(x, \rho)\tilde{S}'(x, \rho). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

It follows from (17)–(20) that for each fixed  $x \in (0, b_1)$ ,

$$P_{11}(x, \rho) = \Omega(x) + O(\rho^{-1}), \quad P_{12}(x, \rho) = O(\rho^{-1}), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad \rho \in \Pi_\delta^\pm, \quad (24)$$

where  $\Omega(x) = \cos(E(x) - \tilde{E}(x))$ . On the other hand, using (10) and the assumption of the theorem, we get

$$\begin{aligned} P_{11}(x, \rho) &= C(x, \rho)\tilde{S}'(x, \rho) - \tilde{C}'(x, \rho)S(x, \rho), \\ P_{12}(x, \rho) &= \tilde{C}(x, \rho)S(x, \rho) - C(x, \rho)\tilde{S}(x, \rho), \end{aligned}$$

and consequently, for each fixed  $x \in (0, b_1)$ , the functions  $P_{11}(x, \rho)$  and  $P_{12}(x, \rho)$  are entire in  $\rho$  of exponential type. Together with (24) this yields

$$P_{11}(x, \rho) \equiv \Omega(x), \quad P_{12}(x, \rho) \equiv 0. \quad (25)$$

It follows from (23) that

$$\Phi(x, \rho) = \Omega(x)\tilde{\Phi}(x, \rho), \quad S(x, \rho) = \Omega(x)\tilde{S}(x, \rho), \quad x \in (0, b_1), \quad (26)$$

for all complex  $\rho$ . Therefore,

$$\frac{\Phi(x, \rho)}{\tilde{\Phi}(x, \rho)} = \frac{S(x, \rho)}{\tilde{S}(x, \rho)} = \Omega(x), \quad x \in (0, b_1).$$

Taking (17)–(20) into account for  $|\rho| \rightarrow \infty$  we infer that:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(x, \rho)}{\tilde{\Phi}(x, \rho)} &= \exp(i(E(x) - \tilde{E}(x))), \quad \frac{S(x, \rho)}{\tilde{S}(x, \rho)} = \exp(-i(E(x) - \tilde{E}(x))), \quad \rho \in \Pi_\delta^+, \\ \frac{\Phi(x, \rho)}{\tilde{\Phi}(x, \rho)} &= \exp(-i(E(x) - \tilde{E}(x))), \quad \frac{S(x, \rho)}{\tilde{S}(x, \rho)} = \exp(i(E(x) - \tilde{E}(x))), \quad \rho \in \Pi_\delta^-. \end{aligned}$$

Together with (22) this yields  $\exp(2i(E(x) - \tilde{E}(x))) \equiv 1$ . Since  $E(0) - \tilde{E}(0) = 0$ , it follows that  $E(x) - \tilde{E}(x) \equiv 0$ . Hence  $\Omega(x) \equiv 1$  for  $x \in [0, b_1]$ . Using (25) we calculate  $P_{11}(x, \rho) = 1$ , and  $p(x) = \tilde{p}(x)$  for all  $x \in [0, b_1]$ . It follows from (26) that

$$\Phi(x, \rho) = \tilde{\Phi}(x, \rho), \quad S(x, \rho) = \tilde{S}(x, \rho), \quad (27)$$

for all  $x \in [0, b_1]$ , and consequently,  $Q(x) = \tilde{Q}(x)$  for all  $x \in [0, b_1]$ . Using the method of spectral mappings [3] we also obtain an algorithm for constructing the potentials  $p(x)$  and  $q(x)$  for  $x \in [0, b_1]$ .

Denote

$$\Phi_1(x, \rho) := \frac{\Phi(x, \rho)}{\Phi(a_N, \rho)}, \quad M_1(\rho) := \Phi'_1(a_N, \rho) = \frac{\Phi'(a_N, \rho)}{\Phi(a_N, \rho)}. \quad (28)$$

Since  $\Phi_1(a_N, \rho) = 1$ ,  $\Phi_1(b_N, \rho) = 0$ , it follows that the function  $M_1(\rho)$  is the Weyl-type function for Eq. (4) on the segment  $[a_N, b_N]$ . Taking (14) and (27) into account we infer  $M_1(\rho) = \tilde{M}_1(\rho)$ . The specification of the Weyl-type function  $M_1(\rho)$  uniquely determines the potentials  $p(x)$  and  $q(x)$  for  $x \in [a_N, b_N]$ . This means that Theorem 1 is proved, and the solution of the inverse problem can be found by the following algorithm.  $\square$

**Algorithm 1.** Let the function  $M(\rho)$  be given.

1. Construct  $p(x), q(x)$  and  $\Phi(x, \rho)$  for  $x \in [a_1, b_1]$  using the method of spectral mappings.
2. Find  $\Phi(a_N, \rho)$  and  $\Phi'(a_N, \rho)$  via (14).
3. Calculate  $M_1(\rho)$  by (28).
4. Construct  $p(x), q(x)$  and  $\Phi(x, \rho)$  for  $x \in [a_N, b_N]$  by the method of spectral mappings.

We note that the inverse problem of recovering the potentials  $p(x)$  and  $q(x)$  from the given two spectra  $\{\rho_{nj}\}_{n \geq 1}$ ,  $j = 0, 1$ , can be reduced to the solution of the inverse problem from the Weyl-type function. Indeed, using Hadamard's factorization theorem one can uniquely reconstruct the characteristic functions  $\Delta_j(\rho)$ ,  $j = 0, 1$ , and then calculate  $M(\rho)$  by (11).

**Acknowledgements:** This investigation was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-01-00102).

## References

1. Bohner M., Peterson A. *Dynamic Equations on Time Scales*. Boston, MA, Birkhäuser, 2001. 358 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0201-1>
2. Freiling G., Yurko V. A. *Inverse Sturm–Liouville Problems and Their Applications*. New York, NOVA Science Publ. Inc., 2001. 305 p.
3. Yurko V. A. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*. Utrecht, VSP, 2002. 316 p. Inverse and Ill-posed Problems Series.



4. Gasymov M. G., Gusejnov G. S. Determination of diffusion operators from the spectral data. *DAN Azer. SSR*, 1981, vol. 37, no. 2, pp. 19–23.
5. Yurko V. A. Boundary value problems with a parameter in the boundary conditions. *Soviet J. Contemporary Math. Anal.*, 1984, vol. 19, no. 5, pp. 62–73.
6. Yurko V. A. An inverse problem for pencils of differential operators. *Sb. Math.*, 2000, vol. 191, iss. 10, pp. 1561–1586. DOI: <http://dx.doi.org/10.1070/SM2000v191n10ABEH000520>
7. Nabiev I. M. Inverse spectral problem for the diffusion operator on an interval. *Mat. Fiz. Anal. Geom.*, 2004, vol. 11, no. 3, pp. 302–313.
8. Guseinov I., Nabiev I. The inverse spectral problem for pencils of differential operators. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, iss. 11, pp. 1579–1598. DOI: <http://dx.doi.org/10.1070/SM2007v198n11ABEH003897>
9. Buterin S. A., Yurko V. A. Inverse problems for second-order differential pencils with Dirichlet boundary conditions. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2012, vol. 20, iss. 5–6, pp. 855–881. DOI: <https://doi.org/10.1515/jip-2012-0062>
10. Yurko V. A. Inverse problems for non-selfadjoint quasi-periodic differential pencils. *Anal. Math. Phys.*, 2012, vol. 2, no. 3, pp. 215–230. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13324-012-0030-9>
11. Yurko V. A. Inverse problems for Sturm–Liouville differential operators on closed sets. *Tamkang Journal of Mathematics*, 2019, vol. 50, no. 3, pp. 199–206. DOI: <https://doi.org/10.5556/j.tkjm.50.2019.3343>

**Cite this article as:**

Yurko V. A. On Determination of Functional-Differential Pencils on Closed Sets from the Weyl-Type Function. *Izv. Saratov Univ. (N. S.)*, Ser. Math. Mech. Inform., 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 343–350. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-343-350>

УДК 517.984

## **Об определении функционально-дифференциальных пучков на замкнутых множествах по функции типа Вейля**

**В. А. Юрко**

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической физики и вычислительной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, YurkoVA@info.sgu.ru

Рассматриваются функционально-дифференциальные пучки на замкнутых множествах вещественной оси с нелинейной зависимостью от спектрального параметра. Получены свойства их спектральных характеристик и исследуется обратная задача, которая состоит в восстановлении коэффициентов пучка по заданной функции типа Вейля. Постановка и исследование обратных задач существенно зависят от структуры замкнутого множества. Рассматривается важный класс замкнутых множеств, когда множество является объединением конечного набора отрезков и изолированных точек. Чтобы решить обратную задачу для этого класса замкнутых множеств, дается развитие идей метода спектральных отображений. Также установлены и используются связи между функциями типа Вейля, относящиеся к разным подмножествам основного замкнутого множества. С помощью этих идей и свойств получена глобальная конструктивная процедура решения рассматриваемой нелинейной обратной задачи, а также установлена единственность решения этой обратной задачи.



**Ключевые слова:** функционально-дифференциальные пучки, замкнутые множества, обратная спектральная задача.

Поступила в редакцию: 10.12.2019 / Принята: 15.02.2020 / Опубликована: 31.08.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

**Благодарности.** Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00102).

---

**Образец для цитирования:**

Yurko V. A. On Determination of Functional-Differential Pencils on Closed Sets from the Weyl-Type Function [Юрко В. А. Об определении функционально-дифференциальных пучков на замкнутых множествах по функции типа Вейля] // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 343–350. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-343-350>

---



# МЕХАНИКА

УДК 517.958

## Гидроупругая реакция трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, взаимодействующей со штампом через слой вязкой жидкости

Т. В. Быкова, Е. Д. Грушеникова,  
В. С. Попов, А. А. Попова

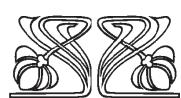
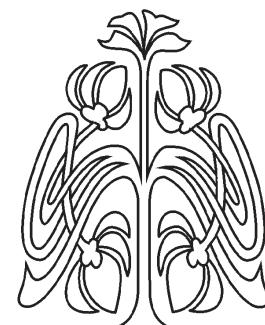
Быкова Татьяна Викторовна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77, tbykova69@mail.ru

Грушеникова Екатерина Дмитриевна, аспирант кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77, katenok.09041992@gmail.com

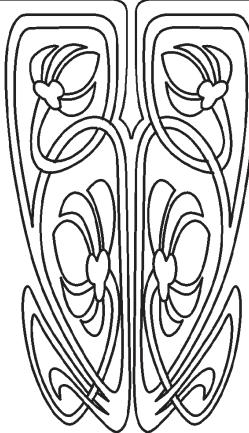
Попов Виктор Сергеевич, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77, vic\_p@bk.ru

Попова Анна Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77, anay\_p@bk.ru

Исследовано взаимодействие трехслойной пластины с вибрирующим жестким штампом через тонкий слой вязкой жидкости. Пластина и штамп образуют узкий канал с параллельными прямоугольными стенками. Канал полностью заполнен вязкой несжимаемой жидкостью. Движение жидкости в канале изучается как ползущее. Закон движения штампа считается заданным как гармонический по времени, и исследуется вопрос о вынужденных установившихся колебаниях трехслойной пластины. Верхний и нижний слои пластины удовлетворяют гипотезам Кирхгофа. Заполнитель пластины рассматривается как сжимаемый. Полагается, что амплитуда колебаний стенок канала значительно меньше расстояния между ними, а продольный размер канала значительно больше его поперечного размера. Исследуется



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





плоская задача гидроупругости, состоящая из уравнений Навье–Стокса, уравнения неразрывности и уравнений динамики трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем. Граничными условиями задачи являются: условия совпадения скоростей жидкости и ограничивающих ее стенок канала, условия совпадения давления на торцах канала с давлением в окружающей жидкости и условия свободного опирания пластины на торцах. При исследовании были учтены нормальные и касательные напряжения жидкости, действующие на верхний слой пластины. Форма упругих перемещений трехслойной пластины выбрана в виде рядов по тригонометрическим функциям продольной координаты. Из решения задачи найдены выражения для гидродинамических параметров слоя жидкости и упругих перемещений слоев пластины. Построены частотозависимые функции распределения амплитуд упругих перемещений слоев пластины и давления в слое вязкой жидкости.

**Ключевые слова:** гидроупругость, колебания, трехслойная пластина, вязкая жидкость, вибрирующий штамп.

Поступила в редакцию: 13.03.2019 / Принята: 09.04.2019 / Опубликована: 31.08.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-351-366>

## ВВЕДЕНИЕ

Исследования колебаний упругих конструкций, взаимодействующих с жидкостью, имеют большое значение как для развития современной механики, так и для различных инженерных приложений. В большинстве случаев изучение данной проблемы сводится к постановке и решению задачи гидроупругости, в рамках которой совместно рассматриваются уравнения динамики упругой конструкции и жидкости с соответствующими начальными и граничными условиями. Одним из первых исследований данной проблемы можно считать работу [1], в которой рассмотрены колебания круглой пластины, жестко защемленной на контуре с абсолютно жесткой плоской стенкой, с одной стороны которой находится неограниченный объем идеальной несжимаемой жидкости. Решение задачи основывается на энергетическом подходе (метод Рэлея) определения собственных частот колебаний упругой конструкции при задании формы прогиба пластины, как в задаче статического прогиба. Учет влияния жидкости приводит к снижению частот колебаний за счет эффекта увеличения инерции в колебательной системе (присоединенная масса) и демпфированию колебаний за счет преобразования энергии на волнообразование в жидкости. В [2] решение указанной выше задачи осуществлено на базе рассмотрения задачи гидроупругости. В [3] исследуются свободные колебания круглой пластины на свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости, находящейся в жестком цилиндре. Аналогичная задача для круглой пластины, погруженной под свободную поверхность идеальной жидкости, находящейся в жестком цилиндре, рассмотрена в [4]. Собственные колебания пластины, плавающей на свободной поверхности идеальной несжимаемой тяжелой жидкости конечной глубины, исследованы в [5]. В [6] рассмотрена плоская задача изгибных колебаний и устойчивости пластины, являющейся частью абсолютно жесткой стенки проточного канала с идеальной сжимаемой жидкостью, а в [7] исследована задача собственных гидроупругих колебаний и устойчивости прямоугольной пластины, являющейся стенкой канала заполненного идеальной сжимаемой жидкостью. Хаотические колебания пластины, взаимодействующей с обеих сторон с идеальным потоком несжимаемой жидкости.



ти, изучены в [8]. Работа [9] посвящена моделированию изгибных колебаний прямоугольной пластины, погруженной в идеальную несжимаемую жидкость со свободной поверхностью. Задача о распространении акустической волны в идеальной несжимаемой жидкости, вызванной вынужденными колебаниями пластины, соединенной с одной стороны с вибрирующей машиной, а с другой стороны контактирующей с жидкостью, рассмотрена в [10]. В [11] исследованы свободные изгибные колебания консольных пластин, частично погруженных в идеальную несжимаемую жидкость со свободной поверхностью.

Исследования колебаний упругих элементов конструкций, взаимодействующих с вязкой жидкостью, также представляют интерес, так как вязкость определяет демпфирующие свойства в колебательной системе упругое тело – жидкость. Например, в [12] решение Г. Ламба [1] обобщено учетом вязкости жидкости. В [13] исследованы колебания бесконечной пластинки-полоски, взаимодействующей со слоем вязкой жидкости. Гидроупругая реакция упругих стенок плоского канала, взаимодействующих со слоем вязкой жидкости, в условиях вибрации основания канала исследована в [14]. Задача о гидроупругих колебаниях консольнозакрепленной балки-полоски, погруженной в неограниченный объем вязкой жидкости, решена в [15]. Поперечные колебания дисков, взаимодействующих со слоем вязкой несжимаемой жидкости между ними, изучены в [16]. Гидроупругие колебания пластин, опирающихся на упругие основания различных типов, изучены в [17–19].

Трехслойные элементы конструкций в виде балок и пластин широко применяются в различных отраслях современной промышленности в связи с одновременным обеспечением необходимой жесткости при сохранении малой массы конструкции, а также возможностью выполнения защиты от агрессивных воздействий различной природы (температура, радиация и т. д.). Подходы к изучению их статики и динамики достаточно хорошо разработаны и представлены, например, в обзорной части монографии [20]. Термосиловой изгиб упругопластического трехслойного стержня с несжимаемым жестким заполнителем на упругом основании Винклера исследован в [21]. Изгибные колебания круглой трехслойной пластины, установленной на винклеровском основании и имеющей несжимаемый легкий заполнитель, при воздействии на пластину теплового удара изучены в [22]. В обеих работах для описания кинематики трехслойного пакета использована гипотеза ломаной нормали. Исследование деформирования трехслойной балки со сжимаемым заполнителем под действием локальной синусоидальной нагрузки и теплового потока проведено в [23]. В [24] изучена статическая и динамическая устойчивость трехслойной пластины с вязкоупругим заполнителем, установленной на основании Пастернака с переменной жесткостью, под действием пульсирующей осевой нагрузки и температурного градиента. Изучение изгиба трехслойного упругопластического стержня с учетом сжимаемости его заполнителя под воздействием непрерывных и локально распределенных нагрузок и находящегося в нейтронном потоке выполнено в [25].

Исследования гидроупругих колебаний многослойных балок и пластин недостаточно отражены в современной научной литературе. Например, в [26] исследованы свободные гидроупругие колебания многослойных пластин, взаимодействующих с идеальной жидкостью. В частности, рассмотрены случаи колебаний пластин в воздухе и погруженных в воду. Задачи вынужденных колебаний трехслойных пластин с несжимаемым заполнителем, контактирующих со слоем вязкой жидкости, при описании их кинематики в рамках гипотезы ломаной нормали по [20] рассмотрены в [27, 28], а с дополнительным учетом упругого основания Винклера, на котором



установлена трехслойная балка, в [29]. С другой стороны, за рамками рассмотрения указанных выше работ остались вопросы изучения гидроупругой реакции трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, взаимодействующей с вибрирующим штампом, через слой вязкой жидкости, находящейся между ними. Рассмотрим ниже данную задачу при учете действующих на пластину нормальных и касательных напряжений со стороны жидкости, а также особенностей торцевого истечения и закрепления пластины.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ГИДРОУПРУГОСТИ

Рассмотрим прямоугольную трехслойную пластину, образующую стенку плоского канала (рис. 1). Пластина свободно опирается на торцы, толщины ее верхнего и нижнего несущих слоев 1 и 2 полагаем равными  $h_1$  и  $h_2$ , толщина заполнителя 3 равна 2. Центр декартовой системы координат  $xz$  свяжем с центром срединной плоскости заполнителя пластины в недеформированном состоянии. Вторая стенка канала представляет собой прямоугольный абсолютно жесткий штамп, совершающий колебания вдоль оси  $z$ , амплитуда его колебаний  $z_m$ . Размер обеих стенок канала в плане  $2\ell \times b$ .

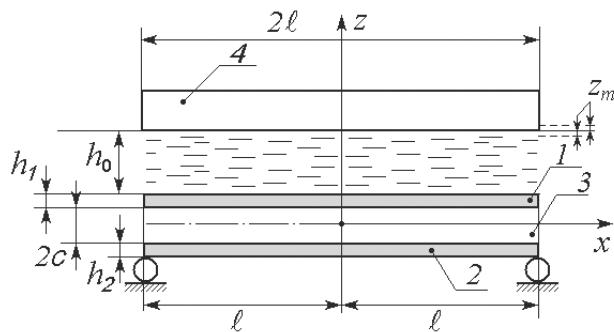


Рис. 1. Плоский канал, нижняя стенка которого образована трехслойной пластиной: 1, 2 — несущие слои пластины, 3 — заполнитель пластины, 4 — вибрирующий штамп

Fig. 1. Flat channel, the lower wall of which is formed by a three-layer plate: 1, 2 — plate carrier layers, 3 — plate filler, 4 — vibrating stamp

которой на торцах можно считать свободным в торцевом сечении канала совпадает с давлением в окружающей жидкости. Будем полагать данное давление  $p_0$  постоянным. Амплитуды упругих перемещений трехслойной пластины и колебаний штампа значительно меньше  $h_0$ . Таким образом, будем изучать гидроупругие колебания пластины, вызванные ее взаимодействием с вибрирующим штампом через тонкий слой вязкой несжимаемой жидкости. Принимая во внимание, что в узком канале возникают существенные силы трения [30], обусловливающие быстрое затухание переходных процессов, будем опускать влияние начальных условий [31], т. е. ограничимся рассмотрением установившихся вынужденных колебаний.

Закон движения штампа представим в виде

$$h = z_0 + z_m f(\omega t), \quad z_0 = c + h_1 + h_0, \quad (1)$$

где  $z_m$  — амплитуда колебаний штампа,  $\omega$  — частота колебаний,  $t$  — время.

Трехслойная пластина состоит из верхнего и нижнего несущих слоев, между которыми находится заполнитель, обеспечивающий их совместную работу как единого пакета. Для описания кинематики пластины воспользуемся подходом, предложенным в [20], т. е. считаем, что несущие слои изотропны, несжимаемы в по-



перечном направлении и удовлетворяют гипотезам Кирхгофа. Заполнитель считается жестким с учетом его обжатия, т. е. для него выполняются точные соотношения теории упругости, а зависимость перемещений его точек от поперечной координаты  $z$  представляется линейной. Деформации полагаем малыми, а на границах слоев пластины выполняются условия непрерывности их перемещений. Для указанного случая напряженно-деформируемое состояние пластины полностью описывается через продольные перемещения и прогибы срединных плоскостей ее верхнего и нижнего несущих слоев. В рассматриваемой постановке уравнения движения трехслойной пластины представляют собой полученные в [20] уравнения динамики трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем, которые имеют вид

$$\begin{aligned}
 F_1 + a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a_5 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} + a_3 \frac{\partial w_2}{\partial x} - 2a_6 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + a_7 \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} &= P_{zx}, \\
 F_2 - a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a_9 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - a_3 \frac{\partial w_1}{\partial x} - a_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} - a_6 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + 2a_7 \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} &= 0, \\
 F_3 - a_{17} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{10} \frac{\partial u_2}{\partial x} + 2a_6 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + a_6 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + a_{11} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - a_{12} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + & \\
 + a_{15} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} - 2a_{16} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + a_8 w_1 - a_8 w_2 &= P_{zz} + \frac{1}{2} h_1 \frac{\partial P_{zx}}{\partial x}, \\
 F_4 - a_{18} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{19} \frac{\partial u_2}{\partial x} - a_7 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} - 2a_7 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} - a_{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + a_{14} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - & \\
 - a_{16} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + a_{13} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} - a_8 w_1 + a_8 w_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $u_1, u_2$  — упругие продольные перемещения верхнего и нижнего несущих слоев пластины,  $w_1, w_2$  — прогибы верхнего и нижнего несущих слоев пластины,  $P_{zz}$ ,  $P_{zx}$  — нормальные и касательное напряжения, действующие на верхний несущий слой пластины со стороны жидкости, данные напряжения записутся как

$$\begin{aligned}
 P_{zx} &= -\rho\nu \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \quad \text{при } z = c + h_1 + w_1, \\
 P_{zz} &= -p + 2\rho\nu \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \text{при } z = c + h_1 + w_1,
 \end{aligned}$$

где  $\rho, \nu$  — плотность и коэффициент кинематической вязкости жидкости,  $u_x, u_z$  — проекции вектора скорости жидкости на оси координат,  $p$  — давление жидкости,  $\rho_k$  — плотность материала  $k$ -го слоя пластины,  $G_k$ ,  $K_k$  — модули сдвиговой и объемной деформации  $k$ -го слоя пластины,  $K_k^+ = K_k + \frac{4}{3}G_k$ ,  $K_k^- = K_k - \frac{4}{3}G_k$ .

При этом введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{2G_3}{c}, \quad a_2 = 2G_3 \left( 1 + \frac{h_1}{2c} \right) - \frac{K_3^-}{2}, \quad a_3 = 2G_3 \left( 1 + \frac{h_2}{2c} \right) + \frac{K_3^-}{2}, \quad a_4 = K_1^+ h_1 + \frac{2K_3^+ c}{3}, \\
 a_5 &= \frac{K_3^+ c}{3}, \quad a_6 = \frac{K_3^+ c h_1}{6}, \quad a_7 = \frac{K_3^+ c h_2}{6}, \quad a_8 = \frac{K_3^+}{2c}, \quad a_9 = K_2^+ h_2 + \frac{2K_3^+ c}{3}, \\
 a_{10} &= \frac{G_3}{2} \left( 1 + \frac{h_1}{2c} \right) + \frac{K_3^-}{2}, \quad a_{11} = \frac{K_3^- h_1}{2} - \frac{G_3 c}{2} \left( 1 + \frac{h_1}{2c} \right)^2 - \frac{G_3 c}{6}, \\
 a_{12} &= \frac{K_3^- (h_1 + h_2)}{4} + \frac{G_3 c}{2} \left( 1 + \frac{h_1}{2c} \right) \left( 1 + \frac{h_2}{2c} \right) - \frac{G_3 c}{6}, \quad a_{13} = \frac{K_2^+ h_2^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_2^2}{6},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{14} &= \frac{K_3^- h_2}{2} - \frac{G_3 c}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right)^2 - \frac{G_3 c}{6}, \quad a_{15} = \frac{K_1^+ h_1^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_1^2}{6}, \quad a_{16} = \frac{K_3^+ c h_2 h_1}{12}, \\
 a_{17} &= \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) - \frac{K_3^-}{2}, \quad a_{18} = \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) + \frac{K_3^-}{2}, \quad a_{19} = \frac{G_3}{2} \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) - \frac{K_3^-}{2}, \\
 F_1 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( m_1 u_1 + m_8 u_2 + 2m_5 \frac{\partial w_1}{\partial x} - m_7 \frac{\partial w_2}{\partial x} \right), \\
 F_2 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( m_8 u_1 + m_2 u_2 + m_5 \frac{\partial w_1}{\partial x} - 2m_7 \frac{\partial w_2}{\partial x} \right), \\
 F_3 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( -2m_5 \frac{\partial u_1}{\partial x} - m_5 \frac{\partial u_2}{\partial x} + m_1 w_1 + m_8 w_2 - m_3 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + m_6 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right), \\
 F_4 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( m_7 \frac{\partial u_1}{\partial x} + 2m_7 \frac{\partial u_2}{\partial x} + m_8 w_1 + m_2 w_2 + m_6 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - m_4 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right), \\
 m_1 &= \rho_1 h_1 + \frac{2}{3} \rho_3 c, \quad m_2 = \rho_2 h_2 + \frac{2}{3} \rho_3 c, \quad m_3 = \frac{\rho_1 h_1^3}{12} + \frac{\rho_3 c h_1^2}{6}, \quad m_4 = \frac{\rho_2 h_2^3}{12} + \frac{\rho_3 c h_2^2}{6}, \\
 m_5 &= \frac{\rho_3 c h_1}{6}, \quad m_6 = \frac{\rho_3 c h_1 h_2}{12}, \quad m_7 = \frac{\rho_3 c h_2}{6}, \quad m_8 = \frac{\rho_3 c}{3}.
 \end{aligned}$$

Краевые условия уравнений (2) имеют вид

$$w_k = \frac{\partial u_k}{\partial x} = \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = \pm \ell, \quad k = 1, 2. \quad (3)$$

Движение вязкой жидкости в узкой щели, образованной пластиною и штампом, можно рассматривать как ползущее [30]. В этом случае уравнения ее динамики имеют вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right), \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right), \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Краевые условия уравнений (4) имеют вид условий совпадения скоростей ограничивающих жидкость стенок со скоростями движения жидкости на них:

$$\begin{aligned}
 u_x &= 0, \quad u_z = \frac{dh}{dt} \quad \text{при } z = c + h_1 + h_0 + z_m f(\omega t), \\
 u_x &= \frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad u_z = \frac{\partial w_1}{\partial t} \quad \text{при } z = c + h_1 + w,
 \end{aligned} \quad (5)$$

и условий для давления на торцах канала

$$p = p_0 \quad \text{при } x = \pm \ell. \quad (6)$$

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГИДРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Введем в рассмотрение безразмерные переменные

$$\begin{aligned}
 \tau &= \omega t, \quad \xi = \frac{x}{\ell}, \quad \zeta = \frac{z - c - h_1}{h_0}, \\
 u_x &= z_m \omega \frac{\ell}{h_0} U_\xi, \quad u_z = z_m \omega U_\zeta, \quad p = p_0 + \frac{\rho \nu z_m \omega}{h_0} \frac{\ell^2}{h_0^2} P.
 \end{aligned} \quad (7)$$



В переменных (7) уравнения динамики жидкости (4) и краевые условия для скоростей (5) и давления (6) запишутся как

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \left(\frac{h_0}{\ell}\right)^2 \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = \left(\frac{h_0}{\ell}\right)^2 \left[ \left(\frac{h_0}{\ell}\right)^2 \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2} \right], \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} &= 0, \\ U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df}{d\tau} &\quad \text{при } \zeta = 1 + \frac{z_m}{h_0} f(\tau), \\ U_\xi = \frac{h_0}{l} \frac{u_{m1}}{z_m} \frac{\partial U_1}{\partial \tau}, \quad U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{w_{m1}}{z_m} \frac{\partial W_1}{\partial \tau} &\quad \text{при } \zeta = \frac{w_{m1}}{h_0} \frac{\partial W_1}{\partial \tau}, \\ P = 0 &\quad \text{при } \xi = \pm 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь упругое продольное перемещение и прогиб верхнего несущего слоя пластины были представлены в форме  $u_1 = u_{m1}U_1(\xi, \tau)$ ,  $w_1 = w_{m1}W_1(\xi, \tau)$ .

В рассматриваемой постановке  $\frac{u_{m1}}{z_m} = O(1)$ , а параметры  $\frac{h_0}{\ell} = \frac{z_m}{h_0} = \frac{w_{m1}}{h_0} = o(1)$ , поэтому члены при данных параметрах в уравнениях (8) и краевых условиях (9) можно опустить [32], и мы получим следующую задачу динамики тонкого слоя вязкой жидкости:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0, \quad (10)$$

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df}{d\tau} \quad \text{при } \zeta = 1; \quad U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{w_{m1}}{z_m} \frac{\partial W_1}{\partial \tau} \quad \text{при } \zeta = 0, \quad (11)$$

$$P = 0 \quad \text{при } \xi = \pm 1. \quad (12)$$

В переменных (7), с учетом сделанного выше замечания, напряжения  $P_{zz}$  и  $P_{zx}$ , действующие на верхний несущий слой пластины со стороны жидкости, примут вид

$$P_{zx} = -\frac{\rho \nu z_m \omega \ell}{h_0^2} \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0}, \quad P_{zz} = -p_0 - \frac{\rho \nu z_m \omega \ell^2}{h_0^3} P \Big|_{\zeta=0}. \quad (13)$$

Решая задачу (10)–(12), определили безразмерное давление и необходимые далее производные продольной компоненты скорости жидкости в виде

$$\begin{aligned} P &= 6(\xi^2 - 1) \frac{df}{d\tau} + 12 \frac{w_{m1}}{z_m} \int_{\xi}^1 \int_0^{\xi} \frac{\partial W_1}{\partial \tau} d\xi d\zeta + 6(\xi - 1) \frac{w_{m1}}{z_m} \int_{-1}^1 \int_0^{\xi} \frac{\partial W_1}{\partial \tau} d\xi d\zeta, \\ \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} &= -6\xi \frac{df}{d\tau} + 6 \frac{w_{m1}}{z_m} \int_0^{\xi} \frac{\partial W_1}{\partial \tau} d\zeta - 3 \frac{w_{m1}}{z_m} \int_{-1}^1 \int_0^{\xi} \frac{\partial W_1}{\partial \tau} d\xi d\zeta, \\ \frac{h_1}{\ell} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right) \Big|_{\zeta=0} &= \frac{h_1}{\ell} \left( -6 \frac{df}{d\tau} + 6 \frac{w_{m1}}{z_m} \frac{\partial W_1}{\partial \tau} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Решение уравнений (2) представим в виде, удовлетворяющем краевым условиям (3):

$$u_k = \sum_{n=0}^{\infty} T_k^n(\omega t) \sin \frac{2n+1}{2} \pi \frac{x}{\ell}, \quad w_k = \sum_{n=0}^{\infty} R_k^n(\omega t) \cos \frac{2n+1}{2} \pi \frac{x}{\ell}, \quad k = 1, 2. \quad (15)$$



Тогда, учитывая (15) в (14) и разложив постоянный уровень давления  $p_0$  и все входящие в  $P_{zz}$  и  $P_{zx}$  функции от  $\xi$  в ряды по соответствующим тригонометрическим функциям продольной координаты получим

$$\begin{aligned} P_{zz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho\nu\ell^2}{h_0^3} \left( \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \left( p_0 \frac{h_0^3}{\rho\nu\ell^2} - 12 \left[ \frac{2}{(2n+1)\pi} \right]^2 \frac{dh}{dt} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 12 \left[ \frac{2}{(2n+1)\pi} \right]^2 \frac{dR_1^n}{dt} \right) \cos \frac{2n+1}{2}\pi \frac{x}{\ell}, \\ P_{zx} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho\nu\ell}{h_0^2} \left( 12(-1)^{n+1} \left[ \frac{2}{(2n+1)\pi} \right]^2 \frac{dh}{dt} + 6 \left[ \frac{2}{(2n+1)\pi} \right] \frac{dR_1^n}{dt} \right) \sin \frac{2n+1}{2}\pi \frac{x}{\ell}, \\ \frac{1}{2} h_1 \frac{\partial P_{zx}}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{h_0}{\ell} \frac{h_1}{\ell} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho\nu\ell^2}{h_0^3} \left( 12(-1)^{n+1} \left[ \frac{2}{(2n+1)\pi} \right] \frac{dh}{dt} + 6 \frac{dR_1^n}{dt} \right) \cos \frac{2n+1}{2}\pi \frac{x}{\ell}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из полученных выражений (16) следует, что  $\frac{1}{2} h_1 \frac{\partial P_{zx}}{\partial x} / P_{zz} = O(h_0 h_1 / \ell^2) = o(1)$  и слагаемое  $\frac{h_1}{2} \frac{\partial P_{zx}}{\partial x}$  в (2) можно исключить из рассмотрения, так как оно мало по сравнению с  $P_{zz}$ . Принимая это во внимание, подставляя (15), (16) в (2) и приравнивая в полученной системе члены при одинаковых тригонометрических функциях, перейдем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, в которую входят два однородных уравнения. Используя однородные уравнения, найдем связь между  $T_2^n$ ,  $R_2^n$  через  $T_1^n$ ,  $R_1^n$ :

$$\begin{aligned} T_2^n &= \frac{T_1^n(b_{24}b_{41} - b_{44}b_{21}) + R_1^n(b_{24}b_{43} - b_{44}b_{23})}{b_{22}b_{44} - b_{24}b_{42}}, \\ R_2^n &= \frac{T_1^n(b_{42}b_{21} - b_{22}b_{41}) + R_1^n(b_{42}b_{23} - b_{22}b_{43})}{b_{22}b_{44} - b_{24}b_{42}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Далее, учитывая, что согласно постановке задачи рассматриваются гармонические установившиеся колебания, т. е., используя  $\frac{d^2 R_1^n}{dt^2} = -\omega^2 R_1^n$ , окончательно получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} b_{11}^* T_1^n + b_{13}^* R_1^n + 2K_n^1 \frac{dR_1^n}{dt} &= -\frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} 2K_n^1 \frac{dh}{dt}, \\ b_{31}^* T_1^n + b_{33}^* R_1^n + 2K_n \frac{dR_1^n}{dt} &= \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \left[ p_0 - 2K_n \frac{dh}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta &= b_{22}b_{44} - b_{24}b_{42}, \quad b_{11}^* = b_{11} + b_{12} \frac{b_{24}b_{41} - b_{44}b_{21}}{\Delta} + b_{14} \frac{b_{42}b_{21} - b_{22}b_{41}}{\Delta}, \\ b_{13}^* &= b_{12} \frac{b_{24}b_{43} - b_{44}b_{23}}{\Delta} + b_{13} + b_{14} \frac{b_{42}b_{23} - b_{22}b_{43}}{\Delta}, \\ b_{31}^* &= b_{31} + b_{32} \frac{b_{24}b_{41} - b_{44}b_{21}}{\Delta} + b_{34} \frac{b_{42}b_{21} - b_{22}b_{41}}{\Delta}, \\ b_{33}^* &= b_{32} \frac{b_{24}b_{43} - b_{44}b_{23}}{\Delta} + b_{33} + b_{34} \frac{b_{42}b_{23} - b_{22}b_{43}}{\Delta}, \\ 2K_n &= 12 \frac{\rho\nu\ell^2}{h_0^3} \left[ \frac{2}{(2n+1)\pi} \right]^2, \quad 2K_n^1 = 6 \frac{\rho\nu\ell}{h_0^2} \left[ \frac{2}{(2n+1)\pi} \right], \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
b_{11} &= a_1 + a_4 \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - m_1 \omega^2, \quad b_{12} = -a_1 + a_5 \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - m_8 \omega^2, \\
b_{13} &= \frac{2n+1}{2\ell} \pi \left[ -a_2 - 2a_6 \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 + 2m_5 \omega^2 \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right) \right], \\
b_{14} &= \frac{2n+1}{2\ell} \pi \left[ -a_3 + a_7 \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - m_7 \omega^2 \right], \\
b_{21} &= -a_1 + a_5 \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - m_8 \omega^2, \quad b_{22} = a_1 + a_9 \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - m_2 \omega^2, \\
b_{23} &= \frac{2n+1}{2\ell} \pi \left[ a_3 - a_6 \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 + m_5 \omega^2 \right], \\
b_{24} &= \frac{2n+1}{2\ell} \pi \left[ a_2 + 2a_7 \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - 2m_7 \omega^2 \right], \\
b_{31} &= \frac{2n+1}{2\ell} \pi \left[ a_{17} - 2a_6 \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 + 2m_5 \omega^2 \right], \\
b_{32} &= \frac{2n+1}{2\ell} \pi \left[ a_{10} - a_6 \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 + m_5 \omega^2 \right], \\
b_{33} &= a_8 - a_{11} \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 + a_{15} \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^4 - \left[ m_1 + m_3 \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 \right] \omega^2, \\
b_{34} &= -a_8 + a_{12} \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - a_{16} \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - \left[ m_8 - m_6 \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 \right] \omega^2, \\
b_{41} &= \frac{2n+1}{2\ell} \pi \left[ -a_{18} + a_7 \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - m_7 \omega^2 \right], \\
b_{42} &= \frac{2n+1}{2\ell} \pi \left[ a_{19} + 2a_7 \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - 2m_7 \omega^2 \right], \\
b_{43} &= -a_8 + a_{12} \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - a_{16} \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^4 - \left[ m_8 - m_3 \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 \right] \omega^2, \\
b_{44} &= a_8 - a_{14} \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 + a_{13} \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^4 - \left[ m_2 + m_4 \left( \frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 \right] \omega^2.
\end{aligned}$$

Из (18) получаем

$$\begin{aligned}
\frac{dR_1^n}{dt} \left[ \frac{2K_n}{b_{31}^*} - \frac{2K_n^1}{b_{11}^*} \right] + R_1^n \left[ \frac{b_{33}^*}{b_{31}^*} - \frac{b_{13}^*}{b_{11}^*} \right] &= \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \left[ \frac{p_0}{b_{31}^*} - \left( \frac{2K_n}{b_{31}^*} - \frac{2K_n^1}{b_{11}^*} \right) \frac{dh}{dt} \right], \\
T_1^n &= -\frac{b_{13}^*}{b_{11}^*} R_1^n - \frac{2K_n^1}{b_{11}^*} \frac{dR_1^n}{dt} - \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \frac{2K_n^1}{b_{11}^*} \frac{dh}{dt}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Представляя  $R_1^n = R_1^{n0} + \bar{R}_1^n$ ,  $T_1^n = T_1^{n0} + \bar{T}_1^n$ , где верхний индекс 0 соответствует



статическому давлению  $p_0$ , в силу линейности (19) находим, что

$$R_1^{n0} = p_0 \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \left. \frac{1}{d_1} \right|_{\omega=0}, T_1^{n0} = -R_1^{n0} \left. \frac{b_{13}^*}{b_{11}^*} \right|_{\omega=0} = p_0 \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi} \left. \left( \frac{b_{13}^*}{b_{11}^*} \frac{1}{d_1} \right) \right|_{\omega=0}, \quad (20)$$

а функции  $\bar{R}_1^n$  и  $\bar{T}_1^n$  имеют вид

$$\bar{R}_1^n = -\frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \frac{d_2\omega}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2\omega^2}} e^{i\psi} z_m e^{i\omega t}, \quad \bar{T}_1^n = \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \sqrt{d_3^2 + d_4^2} e^{i\theta} z_m e^{i\omega t}, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= b_{33}^* - b_{31}^* \frac{b_{13}^*}{b_{11}^*}, \quad d_2 = 2K_n - \frac{b_{31}^* 2K_n^1}{b_{11}^*}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{d_1}{d_2\omega}, \quad d_3 = \frac{b_{13}^*(d_2\omega)^2 - 2K_n^1 \omega d_1 d_2 \omega}{b_{11}^*(d_1^2 + d_2^2\omega^2)}, \\ d_4 &= \frac{b_{13}^* d_1 d_2 \omega}{b_{11}^*(d_1^2 + d_2^2\omega^2)} + \frac{2K_n^1 \omega}{b_{11}^*} \left( \frac{d_2^2 \omega^2}{d_1^2 + d_2^2 \omega^2} - 1 \right), \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{d_4}{d_3}. \end{aligned}$$

Учитывая (20), (21) в (15), получим выражения для прогиба и продольного перемещения первого несущего слоя пластины в виде

$$\begin{aligned} w_1 &= p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \left. \frac{1}{d_1} \right|_{\omega=0} \cos \frac{2n+1}{2\ell} \pi x \right) + z_m \Pi_{w1}(\omega, x) \sin(\omega t + \varphi_{w1}), \\ u_1 &= p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi} \left. \left( \frac{b_{13}^*}{b_{11}^*} \frac{1}{d_1} \right) \right|_{\omega=0} \sin \frac{2n+1}{2\ell} \pi x \right) + z_m \Pi_{u1}(\omega, x) \sin(\omega t + \varphi_{u1}). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Pi_{w1}(\omega, x) &= \sqrt{E_h^2 + F_h^2}, \quad \Pi_{u1}(\omega, x) = \sqrt{A_h^2 + B_h^2}, \\ E_h &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \frac{(d_2\omega)^2}{d_1^2 + d_2^2\omega^2} \cos \frac{2n+1}{2\ell} \pi x, \\ F_h &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \frac{d_1 d_2 \omega}{d_1^2 + d_2^2\omega^2} \cos \frac{2n+1}{2\ell} \pi x, \\ A_h &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} d_3 \sin \frac{2n+1}{2\ell} \pi x, \quad B_h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} d_4 \sin \frac{2n+1}{2\ell} \pi x, \\ \varphi_{w1} &= \operatorname{arctg} \frac{F_h}{E_h}, \quad \varphi_{u1} = \operatorname{arctg} \frac{B_h}{A_h}. \end{aligned}$$

Введенные в рассмотрение функции  $\Pi_{w1}(\omega, x)$ ,  $\Pi_{u1}(\omega, x)$  представляют собой частотозависимые функции распределения амплитуд прогиба и продольного перемещения вдоль верхнего слоя пластины соответственно. Заметим, что, принимая во внимание связь (17), мы также определили прогиб и продольное перемещение второго несущего слоя пластины.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате постановки и решения задачи об изгибных и продольных колебаниях трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, взаимодействующей с



вибрирующим штампом через слой вязкой несжимаемой жидкости, найдены выражения для упругих перемещений несущих слоев пластины, полностью определяющие напряженно деформированное состояние сэндвич-пакета. На основе полученного решения построены частотозависимые функции распределения амплитуд прогиба  $\Pi_{w1}(\omega, x)$  и продольного перемещения  $\Pi_{u1}(\omega, x)$  первого несущего слоя. Данные функции при фиксированном значении продольной координаты трансформируются в амплитудно-частотные характеристики соответствующего поперечного сечения. Таким образом, предложенные функции позволяют исследовать гидроупругие колебания трехслойной пластины, например, могут быть использованы для определения ее резонансных частот колебаний. Кроме того, полученное решение может использоваться для совершенствования методик неразрушающего контроля состояния трехслойной пластины, являющейся стенкой канала, заполненного вязкой жидкостью. Для этого достаточно экспериментально определить амплитудно-частотные характеристики прогиба и продольного перемещения второго несущего слоя в некотором фиксированном сечении канала при заданном гармоническом законе вибрации штампа. Это позволит, используя связь (17), пересчитать по снятым характеристикам второго слоя характеристики первого слоя. Сравнивая полученный результат с заранее известным расчетным результатом, можно судить о состоянии стенки канала. Принимая во внимание сказанное выше, разработанная математическая модель может быть использована как для исследования динамики трехслойных стенок каналов, так и для развития технологий неразрушающего контроля трехслойных конструкций по параметрам их вынужденных колебаний.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 19-01-00014а, № 18-01-00127а).

## Библиографический список

1. Lamb H. On the vibrations of an elastic plate in contact with water // Proc. Roy. Soc. A. 1921. Vol. 98. P. 205–216. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1920.0064>
2. Amabili M., Kwak M. K. Free vibrations of circular plates coupled with liquids: Revising the Lamb problem // J. Fluids Struct. 1996. Vol. 10, iss. 7. P. 743–761. DOI: <https://doi.org/10.1006/jfls.1996.0051>
3. Amabili M. Vibrations of Circular Plates Resting on a Sloshing Liquid: Solution of the Fully Coupled Problem // J. Sound Vib. 2001. Vol. 245, iss. 2. P. 261–283. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3560>
4. Askari E., Jeong K.-H., Amabili M. Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface // J. Sound Vib. 2013. Vol. 332, iss. 12. P. 3064–3085. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.01.007>
5. Алексеев В. В., Индейцев Д. А., Мочалова Ю. А. Колебания упругой пластины контактирующей со свободной поверхностью тяжелой жидкости // ЖТФ. 2002. Т. 72, вып. 5. С. 16–21.
6. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Исследование динамики и устойчивости упругого элемента проточного канала // Журнал СВМО. 2016. Т. 18, № 1. С. 94–107.
7. Бочкирев С. А., Лекомцев С. В., Матвеенко В. П. Гидроупругая устойчивость прямоугольной пластины, взаимодействующей со слоем текущей идеальной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2016, № 6. С. 108–120. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0568528116060049>



8. Аврамов К. В., Стрельникова Е. А. Хаотические колебания пластиноок при их двустороннем взаимодействии с потоком движущейся жидкости // Прикладная механика. 2014. Т. 50, № 3. С. 86–93.
9. Haddara M. R., Cao S. A Study of the Dynamic Response of Submerged Rectangular Flat Plates // Marine Struct. 1996. Vol. 9, № 10. P. 913–933. DOI: [https://doi.org/10.1016/0951-8339\(96\)00006-8](https://doi.org/10.1016/0951-8339(96)00006-8)
10. Chapman C. J., Sorokin S. V. The forced vibration of an elastic plate under significant fluid loading // J. Sound Vib. 2005. Vol. 281, iss. 3. P. 719–741. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.02.013>
11. Ergin A., Ugurlu B. Linear vibration analysis of cantilever plates partially submerged in fluid // J. Fluids Struct. 2003. Vol. 17, iss. 7. P. 927–939. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0889-9746\(03\)00050-1](https://doi.org/10.1016/S0889-9746(03)00050-1)
12. Kozlovsky Y. Vibration of plates in contact with viscous fluid: Extension of Lamb's model // J. Sound Vib. 2009. Vol. 326, iss. 1–2. P. 332–339. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.04.031>
13. Önsay T. Effects of layer thickness on the vibration response of a plate-fluid layer system // J. Sound Vib. 1993. Vol. 163, iss. 2. P. 231–259. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1162>
14. Агеев Р. В., Быкова Т. В., Кондратова Ю. Н. Математическое моделирование взаимодействия слоя вязкой жидкости с упругими стенками канала, установленного на вибрирующем основании // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 2. С. 48–54. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-2-48-54>
15. Faria C. T., Inman D. J. Modeling energy transport in a cantilevered Euler-Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid // Mech. Syst. Signal Processing. 2014. Vol. 45, iss. 2. P. 317–329. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2013.12.003>
16. Могилевич Л. И., Попов В. С. Исследование взаимодействия слоя вязкой несжимаемой жидкости со стенками канала, образованного соосными вибрирующими дисками // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 3, С. 42–55.
17. Алексеев В. В., Индейцев Д. А., Мочалова Ю. А. Резонансные колебания упругой мембранны на дне бассейна с тяжелой жидкостью // ЖТФ. 1999. Т. 69. № 8, С. 37–42.
18. Kondratov D. V., Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A. Hydroelastic Oscillations of a Circular Plate, Resting on Winkler Foundation // J. Phys. : Conf. Ser. 2018. Vol. 944. 012057. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012057>
19. Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A., Christoforova A. V. Mathematical Modeling of Hydroelastic Oscillations of the Stamp and the Plate, Resting on Pasternak Foundation // J. Phys. : Conf. Ser. 2018. Vol. 944. 012081. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012081>
20. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Механика слоистых вязкоупруго-пластических элементов конструкций. М. : Физматлит, 2005. 576 с.
21. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Деформирование трехслойного упругопластического стержня на упругом основании // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 2. С. 160–168.
22. Леоненко Д. В., Старовойтов Э. И. Тепловой удар по круглой трехслойной пластине на упругом основании // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 1. С. 141–149.
23. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Bending of a Sandwich Beam by Local Loads in the Temperature Field // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 69–83. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-1-69-83>



24. Pradhan M., Dash P. R., Pradhan P. K. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient // Meccanica. 2016. Vol. 51, № 3. P. 725–739. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0229-6>
25. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Переменный изгиб трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем в нейтронном потоке // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 196–208. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-196-208>
26. Kramer M. R., Liu Z., Young Y. L. Free vibration of cantilevered composite plates in air and in water // Composite Structures. 2013. Vol. 95. P. 254–263. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.07.017>
27. Агеев Р. В., Могилевич Л. И., Попов В. С. Колебания стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым дисками // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 1. С. 3–11.
28. Popov V. S., Mogilevich L. I., Grushenkova E. D. Hydroelastic response of three-layered plate interacting with pulsating viscous liquid layer // Radionov A., Kravchenko O., Guzeev V., Rozhdestvenskiy Y. (eds). Proceedings of the 4th International Conference on Industrial Engineering. ICIE 2018. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Cham : Springer, 2019. P. 459–467. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-95630-5\\_49](https://doi.org/10.1007/978-3-319-95630-5_49)
29. Chernenko A., Kondratov D., Mogilevich L., Popov V., Popova E. Mathematical modeling of hydroelastic interaction between stamp and three-layered beam resting on Winkler foundation // Studies in Systems, Decision and Control. 2019. Vol. 199. P. 671–681. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-12072-6\\_54](https://doi.org/10.1007/978-3-030-12072-6_54)
30. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М. : Дрофа, 2003. 840 с.
31. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М. : Наука, 1987. 352 с.
32. Van Dyke M. Perturbation methods in fluid mechanics. Stanford : Parabolic Press, 1975. 271 p.

---

**Образец для цитирования:**

Быкова Т. В., Грушенкова Е. Д., Попов В. С., Попова А. А. Гидроупругая реакция трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, взаимодействующей со штампом через слой вязкой жидкости // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 351–366. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-351-366>

---

## **Hydroelastic Response of a Sandwich Plate Possessing a Compressible Core and Interacting with a Rigid Die Via a Viscous Fluid Layer**

**T. V. Bykova, E. D. Grushenkova, V. S. Popov, A. A. Popova**

Tatyana V. Bykova, <https://orcid.org/0000-0002-9634-3571>, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politehnicheskaya St., Saratov 410054, Russia, tbykova69@mail.ru

Ekaterina D. Grushenkova, <https://orcid.org/0000-0002-5090-9429>, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politehnicheskaya St., Saratov 410054, Russia, katenok.09041992@gmail.com



Victor S. Popov, <https://orcid.org/0000-0002-9582-7195>, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politehnicheskaya St., Saratov 410054, Russia, vic\_p@bk.ru

Anna A. Popova, <https://orcid.org/0000-0002-7786-1680>, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politehnicheskaya St., Saratov 410054, Russia, anay\_p@bk.ru

The three-layered plate interaction with a rigid die through a layer of viscous fluid was investigated. The plate and rigid die formed a narrow channel with rectangular parallel walls. The channel was completely filled with a viscous incompressible fluid. The fluid movement in the channel was studied as a creeping one. The motion law of the rigid die was considered to be given as a harmonic one and the forced steady-state oscillations problem of the sandwich plate was considered. The upper and lower face sheets of the plate satisfied Kirchhoff's hypotheses, as well as, the core was assumed a compressible one. The displacements of the channel walls were believed to be much smaller than the distance between them, and the longitudinal size of the channel was considered to be much larger than its transverse one. The plane hydroelastic problem consisting of the Navier–Stokes equations, the continuity equation and the dynamics equations of the three-layered plate with compressible core was studied. The boundary conditions of the problem were the no-slip conditions, the conditions for pressure at the channel edges and the simply supported conditions at the plate edges. In the course of study, normal and shear stresses of the fluid, acting on the upper face sheet of the plate were taken into account. The elastic displacements of the plate layers were chosen in the form of a trigonometric function series of the longitudinal coordinate. From the solution of the problem, expressions of the fluid layer hydrodynamic parameters and the plate layers elastic displacements were obtained. Also, the frequency-dependent amplitude distribution functions of the plate layers displacements and the pressure of the viscous fluid layer were constructed.

**Keywords:** hydroelasticity, oscillations, three-layered plate, compressible core, viscous liquid, rigid die.

Received: 13.03.2019 / Accepted: 09.04.2019 / Published: 31.08.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects No. 18-01-00127-a, No. 19-01-00014-a).

## References

1. Lamb H. On the vibrations of an elastic plate in contact with water. *Proc. Roy. Soc. A*, 1921, vol. 98, pp. 205–216. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1920.0064>
2. Amabili M., Kwak M. K. Free vibrations of circular plates coupled with liquids: Revising the Lamb problem. *J. Fluids Struct.*, 1996, vol. 10, iss. 7, pp. 743–761. DOI: <https://doi.org/10.1006/jfls.1996.0051>
3. Amabili M. Vibrations of Circular Plates Resting on a Sloshing Liquid: Solution of the Fully Coupled Problem. *J. Sound Vib.*, 2001, vol. 245, iss. 2, pp. 261–283. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3560>
4. Askari E., Jeong K.-H., Amabili M. Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface. *J. Sound Vib.*, 2013, vol. 332, iss. 12, pp. 3064–3085. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.01.007>
5. Alekseev V. V., Indeitsev D. A., Mochalova Yu. A. Vibration of a flexible plate in contact with the free surface of a heavy liquid. *Tech. Phys.*, 2002, vol. 47, iss. 5, pp. 529–534. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1479977>



6. Ankilov A. V., Vel'misov P. A., Tamarova Iu. A. Research on dynamics and stability of an elastic element of the flow channel. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 2016, vol. 18, no. 1, pp. 94–107 (in Russian).
7. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Hydroelastic stability of a rectangular plate interacting with a layer of ideal flowing fluid. *Fluid Dynamics*, 2016, vol. 51, no. 6, pp. 821–833. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462816060132>
8. Avramov K. V., Strel'nikova E. A. Chaotic oscillations of plates interacting on both sides with a fluid flow. *Int. Appl. Mech.*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 303–309. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0633-y>
9. Haddara M. R., Cao S. A Study of the Dynamic Response of Submerged Rectangular Flat Plates. *Marine Struct.*, 1996, vol. 9, no. 10, pp. 913–933. DOI: [https://doi.org/10.1016/0951-8339\(96\)00006-8](https://doi.org/10.1016/0951-8339(96)00006-8)
10. Chapman C. J., Sorokin S. V. The forced vibration of an elastic plate under significant fluid loading. *J. Sound Vib.*, 2005, vol. 281, iss. 3, pp. 719–741. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.02.013>
11. Ergin A., Ugurlu B. Linear vibration analysis of cantilever plates partially submerged in fluid. *J. Fluids Struct.*, 2003, vol. 17, iss. 7, pp. 927–939. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0889-9746\(03\)00050-1](https://doi.org/10.1016/S0889-9746(03)00050-1)
12. Kozlovsky Y. Vibration of plates in contact with viscous fluid: Extension of Lamb's model. *J. Sound Vib.*, 2009, vol. 326, iss. 1–2, pp. 332–339. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.04.031>
13. Önsay T. Effects of layer thickness on the vibration response of a plate-fluid layer system. *J. Sound Vib.*, 1993, vol. 163, iss. 2, pp. 231–259. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1162>
14. Ageev R. V., Bykova T. V., Kondratova J. N. Mathematical Modeling of Interaction Between Layer of Viscous Liquid and Elastic Walls of Channel, Which Was Installed on Vibration Foundation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.)*, Ser. Math. Mech. Inform., 2011, vol. 11, iss. 2, pp. 48–54 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-2-48-54>
15. Faria C. T., Inman D. J. Modeling energy transport in a cantilevered Euler-Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid. *Mech. Syst. Signal Processing*, 2014, vol. 45, iss. 2, pp. 317–329. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2013.12.003>
16. Mogilevich L. I., Popov V. S. Investigation of the interaction between a viscous incompressible fluid layer and walls of a channel formed by coaxial vibrating discs. *Fluid Dyn.*, 2011, vol. 46, no. 3, pp. 375–388. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462811030033>
17. Alekseev V. V., Indeitsev D. A., Mochalova Yu. A. Resonant oscillations of an elastic membrane on the bottom of a tank containing a heavy liquid. *Tech. Phys.*, 1999, vol. 44, no. 8, pp. 903–907. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1259402>
18. Kondratov D. V., Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A. Hydroelastic Oscillations of a Circular Plate, Resting on Winkler Foundation. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 944, 012057. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012057>
19. Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A., Christoforova A. V. Mathematical Modeling of Hydroelastic Oscillations of the Stamp and the Plate, Resting on Pasternak Foundation. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 944, 012081. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012081>
20. Gorshkov A. G., Starovoitov E. I., Yarovaya A. V. *Mekhanika sloistykh vyazkouprugoplasticheskikh elementov konstruktsii* [Mechanics of layered viscoelastoplastic structural elements]. Moscow, Fizmatlit, 2005. 576 p. (in Russian).
21. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation. *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 291–298. DOI: <https://doi.org/10.3103/S002565441102018X>



22. Leonenko D. V., Starovoitov E. I. Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation. *Mech. Solids*, 2012, vol. 47, no. 1. pp. 111–118. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654412010116>
23. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Bending of a Plate Sandwich Beam by Local Loads in the Temperature Field. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 69–83. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-1-69-83>
24. Pradhan M., Dash P. R., Pradhan P. K. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient. *Meccanica*, 2016, vol. 51, no. 3. P. 725–739. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0229-6>
25. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Variable Bending of a Three-layer Rod with a Compressed Filler in the Neutron Flux. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 196–208 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-196-208>
26. Kramer M. R., Liu Z., Young Y. L. Free vibration of cantilevered composite plates in air and in water. *Composite Structures*, 2013, vol. 95, pp. 254–263. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.07.017>
27. Ageev R. V., Mogilevich L. I., Popov V. S. Vibrations of the walls of a slot channel with a viscous fluid formed by three-layer and solid disks. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, no. 1, pp. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618814010026>
28. Popov V. S., Mogilevich L. I., Grushenkova E. D. Hydroelastic response of three-layered plate interacting with pulsating viscous liquid layer. In: Radionov A., Kravchenko O., Guzeev V., Rozhdestvenskiy Y. (eds). *Proceedings of the 4th International Conference on Industrial Engineering. ICIE 2018. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Cham, Springer, 2019, pp. 459–467. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-95630-5\\_49](https://doi.org/10.1007/978-3-319-95630-5_49)
29. Chernenko A., Kondratov D., Mogilevich L., Popov V., Popova E. Mathematical modeling of hydroelastic interaction between stamp and three-layered beam resting on Winkler foundation. *Studies in Systems, Decision and Control*, 2019, vol. 199, pp. 671–681. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-12072-6\\_54](https://doi.org/10.1007/978-3-030-12072-6_54)
30. Loitsianskii L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of Liquids and Gases]. Moscow, Drofa, 2003. 840 p. (in Russian).
31. Panovko Ia. G., Gubanova I. I. *Ustoichivost' i kolebaniia uprugikh sistem* [Stability and Oscillations of Elastic Systems]. Moscow, Nauka, 1987. 352 p. (in Russian).
32. Van Dyke M. *Perturbation methods in fluid mechanics*. Stanford, Parabolic Press, 1975. 271 p.

---

**Cite this article as:**

Bykova T. V., Grushenkova E. D., Popov V. S., Popova A. A. Hydroelastic Response of a Sandwich Plate Possessing a Compressible Core and Interacting with a Rigid Die Via a Viscous Fluid Layer. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 351–366 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-351-366>

---



# ИНФОРМАТИКА

УДК 519.72

## Троичный дискретный вейвлетный базис

М. С. Беспалов

Беспалов Михаил Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Россия, 600000, г. Владимир, ул. Горького, д. 87, bespalov@vlsu.ru

Приведены дискретный вариант и основная конструкция троичного кратномасштабного анализа, аналогичная двоичному модельному случаю кратномасштабного анализа Хаара. На основе построенного базиса предложен алгоритм, аналогичный быстрому преобразованию Хаара. Приведены типичные примеры вычислений.

**Ключевые слова:** дискретный гармонический анализ, дискретное преобразование Хаара, вейвлет, сжатия и сдвиги, кратномасштабный анализ.

Поступила в редакцию: 06.05.2019 / Принята: 31.12.2019 /  
Опубликована: 31.08.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-367-377>

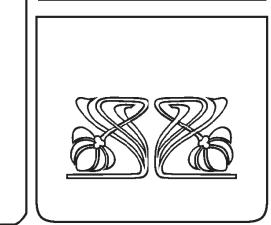
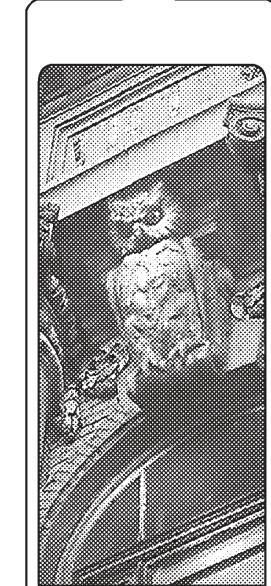
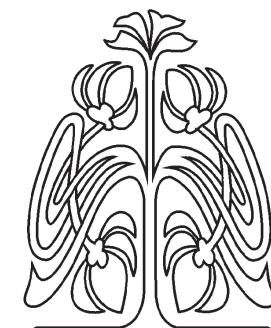
### ВВЕДЕНИЕ

Простейшее *дискретное преобразование Хаара* (ДПХ) представляет собой линейный оператор в  $\mathbb{R}^2$  с матрицей  $H$ :

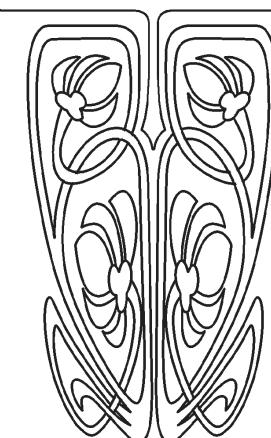
$$H[c] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix}.$$

Восстановление сигнала  $c = (a \ b) \in \mathbb{R}^2$  выполняется с помощью оператора  $\frac{1}{2}H$ , вычисляющего полусуммы и полуразности.

Переход к ДПХ соответствует замене стандартного базиса  $\{(1 \ 0), (0 \ 1)\}$  в  $\mathbb{R}^2$  на хааровский базис  $\{(1 \ 1), (1 \ -1)\}$ . В терминах теории всплесков [1] первый из элементов хааровского базиса играет роль масштаби-



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





рующего сигнала, а второй — материнского. Дискретный аналог хааровского базиса в  $\mathbb{R}^N$  для  $N = 2^n$  построен в [2], где конструкция двоичных сжатий и сдвигов перенесена на дискретные функции.

Троичное обобщение этой модельной конструкции проведем на основе дискретных периодических функций Бернулли (будем их называть сигналы Бернулли), введенных в [3] и подробно исследованных в [4]. В отличие от функциональной формы записи, принятой в [5], будем использовать векторную форму, взяв за основу обозначения в пособии [6].

Элементы стандартного базиса в  $\mathbb{R}^3$  обозначим символами  $\delta = (1 \ 0 \ 0)$  *дельта-сигнала* и его *круговых сдвигов*  $\delta^\rightarrow = (0 \ 1 \ 0)$ ,  $\delta^{2\rightarrow} = (0 \ 0 \ 1)$ , а вейвлетный неортогональный базис обозначим символами

$$S = (1 \ 1 \ 1), \quad A = (-1 \ 0 \ 1), \quad A^\rightarrow = (1 \ -1 \ 0).$$

Обозначим  $\mathbb{R}_0^3$  подпространство  $\mathbb{R}^3$  сигналов  $x = (a \ b \ c)$ , удовлетворяющих условию центровки

$$a + b + c = 0.$$

Аналогично для подпространств большей размерности нижний индекс 0 означает выполнение условия центровки векторов в виде равенства нулю суммы координат. Итак, векторы  $A$  и  $A^\rightarrow$  составляют базис в  $\mathbb{R}_0^3$ . Разложение вектора  $y = (\alpha \ \beta \ \gamma) \in \mathbb{R}^3$  по вейвлетному базису

$$y = c_0 S + c_1 A + c_2 A^\rightarrow, \quad c_0 = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}, \quad c_1 = \gamma - c_0, \quad c_2 = c_0 - \beta.$$

Эти простейшие формулы разложения лежат в основе дальнейшей детализации сигналов с построением троичных сжатий и сдвигов.

Предложенный вариант троичного базиса с материнским вейвлетом  $A = (-1 \ 0 \ 1)$  в виде сигнала Бернулли минус первого порядка легко по аналогии распространяется на случай большей размерности, так как в [4] установлено, что набор из  $p-1$  сдвигов любого сигнала Бернулли на сетке с  $p$  отсчетами составляет базис пространства  $\mathbb{R}_0^p$ .

Задача поиска базиса аналогичного подпространства, состоящего из материнских ортогональных функций, в  $p$ -ичном случае сформулирована и решена Ю. А. Фарковым [7]. В последующих публикациях, начиная с [8], занимались поиском условий на масштабирующие функции. Из них выделим статью С. Ф. Лукомского [9], где приводится в других обозначениях ортогональный вариант вейвлетного базиса  $(1 \ 1 \ 1)$ ,  $(-1 \ 0 \ 1)$ ,  $(1 \ -2 \ 1)$  с сигналами Бернулли минус первого и второго порядка [4] в качестве пары материнских сигналов. В данной статье мы выбрали другой подход, так как этот вариант при переходе к большим размерностям влечет существенное усложнение формул. Как пример направления исследований, усложняющих конструкцию, приведем статью [10], где в двоичном случае идет поиск нескольких масштабирующих функций.

Целью исследований служит подготовка аппарата для цифровой обработки сигналов. В этом направлении отметим статьи [11, 12], где прослеживается тенденция к изложению материала в терминах дискретных функций, которое в данной статье реализовано в векторных обозначениях.

## 1. МАСШТАБИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШЕГО ВЕЙВЛЕТНОГО БАЗИСА

В случае  $n = 2$  имеем пространство  $\mathbb{R}^9$  и его подпространство  $\mathbb{R}_0^9$ . Базовые функции в векторной форме определяются с помощью операции кронекерова произве-



дения  $\otimes$  векторов. Предложим следующую их нумерацию, которую далее перенесем на общий случай:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \mathbf{1} = S \otimes S = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1), \\ \varphi_1 &= A \otimes S = (-1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1), \quad \varphi_2 = A^\rightarrow \otimes S = (1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0), \\ \varphi_3 &= \delta \otimes A = (-1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0), \quad \varphi_4 = \delta \otimes A^\rightarrow = (1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0), \\ \varphi_5 &= \delta^\rightarrow \otimes A = (0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0), \quad \varphi_6 = \delta^\rightarrow \otimes A^\rightarrow = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0), \\ \varphi_7 &= \delta^{2\rightarrow} \otimes A = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1), \quad \varphi_8 = \delta^{2\rightarrow} \otimes A^\rightarrow = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0).\end{aligned}$$

Для исходного вектора  $x = (x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8) \in \mathbb{R}^9$  коэффициенты разложения находим по следующему правилу:

$$\begin{aligned}y_0 &= \frac{1}{3}(x_0 + x_1 + x_2), \quad y_1 = \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_5), \quad y_2 = \frac{1}{3}(x_6 + x_7 + x_8); \\ c_3 &= x_2 - y_0, \quad c_4 = y_0 - x_1, \quad c_5 = x_5 - y_1, \quad c_6 = y_1 - x_4, \quad c_7 = x_8 - y_2, \quad c_8 = y_2 - x_7; \\ c_0 &= \frac{1}{3}(y_0 + y_1 + y_2); \quad c_1 = y_2 - c_0, \quad c_2 = c_0 - y_1.\end{aligned}$$

Отсюда получаем разложение исходного вектора по базису

$$x = \sum_{j=0}^8 c_j \varphi_j,$$

последовательное вычисление частных сумм которых реализуется в виде последовательной прорисовки деталей, что аналогично ситуации для хааровского вейвлетного базиса.

В общем случае построение троичного вейвлетного базиса в  $\mathbb{R}^N$ , где  $N = 3^n$ , начнем с масштабирующей функции

$$\varphi_0 = \mathbf{1} = S^{n\otimes} = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \dots 1).$$

В отличие от двоичного вейвлетного базиса в троичном случае вместо одной материнской функции вынуждены взять пару материнских функций — основную материнскую функцию и ее клон в виде кругового сдвига:

$$\varphi_1 = A \otimes S^{n-1\otimes}, \quad \varphi_2 = A^\rightarrow \otimes S^{n-1\otimes}.$$

Если бы рассматривали вариант  $N = p^n$ , то на этом этапе проделали бы  $(p-2)$ -кратное клонирование в виде круговых сдвигов.

Процедура троичного сжатия (которую выполняем параллельно для пары материнских функций) состоит в замене одного кронекерова множителя  $S$  справа от множителя  $A$  на множитель  $\delta$  слева:

$$\begin{aligned}\varphi_3 &= \delta \otimes A \otimes S^{n-2\otimes}, \quad \varphi_4 = \delta \otimes A^\rightarrow \otimes S^{n-2\otimes}; \\ \varphi_9 &= \delta \otimes \delta \otimes A \otimes S^{n-3\otimes}, \quad \varphi_{10} = \delta \otimes \delta \otimes A^\rightarrow \otimes S^{n-3\otimes}; \dots\end{aligned}$$

Процедура троичного сдвига, которая тоже проводится параллельно для пары образов материнских функций (но теперь соответствующую запись не приводим),



состоит в распределении значков сдвига у дельта-сигналов в лексикографическом порядке:

$$\begin{aligned}\varphi_{11} &= \delta \otimes \delta^{\rightarrow} \otimes A \otimes S^{n-3\otimes}, & \varphi_{13} &= \delta \otimes \delta^{2\rightarrow} \otimes A \otimes S^{n-3\otimes}, \\ \varphi_{15} &= \delta^{\rightarrow} \otimes \delta \otimes A \otimes S^{n-3\otimes}, & \varphi_{17} &= \delta^{\rightarrow} \otimes \delta^{\rightarrow} \otimes A \otimes S^{n-3\otimes}, \\ \varphi_{19} &= \delta^{\rightarrow} \otimes \delta^{2\rightarrow} \otimes A \otimes S^{n-3\otimes}, & \varphi_{21} &= \delta^{2\rightarrow} \otimes \delta \otimes A \otimes S^{n-3\otimes}, \\ \varphi_{23} &= \delta^{2\rightarrow} \otimes \delta^{\rightarrow} \otimes A \otimes S^{n-3\otimes}, & \varphi_{25} &= \delta^{2\rightarrow} \otimes \delta^{2\rightarrow} \otimes A \otimes S^{n-3\otimes}.\end{aligned}$$

Для функций с четными номерами этой пачки представление получается через предыдущую заменой в разложении  $A$  на  $A^{\rightarrow}$ . Для кронекерова произведения сдвигов дельта-сигнала, упорядоченных в указанном лексикографическом порядке, будем использовать более короткое обозначение  $\delta_{3^m}^{k\rightarrow}$ , принятое для элементов стандартного базиса с  $3^m$  отсчетами. Например,  $\delta_9^{4\rightarrow} = \delta^{\rightarrow} \otimes \delta^{\rightarrow}$ ,  $\delta_9^{7\rightarrow} = \delta^{2\rightarrow} \otimes \delta^{\rightarrow}$ .

Итак, общие формулы базисных функций при  $j$  от 0 до  $3^m - 1$

$$\begin{aligned}\varphi_{3^m+2j} &= \delta_{3^m}^{j\rightarrow} \otimes A \otimes S^{n-m-1\otimes} = (\underbrace{0 \dots 0}_{j3^{n-m}} \underbrace{-1 \dots -1}_{3^{n-m-1}} \underbrace{0 \dots 0}_{3^{n-m-1}} \underbrace{1 \dots 1}_{3^{n-m-1}} \underbrace{0 \dots 0}_{3^n - (j+1)3^{n-m}}), \\ \varphi_{3^m+2j+1} &= \delta_{3^m}^{j\rightarrow} \otimes A^{\rightarrow} \otimes S^{n-m-1\otimes} = (\underbrace{0 \dots 0}_{j3^{n-m}} \underbrace{1 \dots 1}_{3^{n-m-1}} \underbrace{-1 \dots -1}_{3^{n-m-1}} \underbrace{0 0 \dots 0}_{(3^{m+1}-3j-2)3^{n-m-1}}).\end{aligned}$$

## 2. ПОСТРОЕНИЕ ТРОИЧНОГО КРАТНОМАСШТАБНОГО АНАЛИЗА

Укажем связь построенных дискретных функций с аналогичными функциями непрерывного аргумента (которые далее называем «непрерывными»). Введем понятие интервалов  $m$ -го ранга с номером  $k$ :

$$\Delta_m^k = \left[ \frac{k}{3^m}, \frac{k+1}{3^m} \right),$$

а характеристическую функцию этого интервала обозначим  $I_{(m)}^k(t)$ .

Определим с помощью сквозной и двойной нумерации троичные аналоги системы Хаара следующими формулами на исходном интервале  $[0, 1]$ , положив их нулем вне этого интервала (здесь  $N = 3^n$ ):  $X_0(t) \equiv 1$ ,

$$\begin{aligned}X_{3^m+2j}(t) &= X_{(m)}^j(t) = \sum_{s=0}^{N-1} \varphi_{3^m+2j}(s) I_{(n)}^s(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } t \in \Delta_{m+1}^{3j}, \\ 1, & \text{если } t \in \Delta_{m+1}^{3j+2}, \\ 0 & \text{при остальных } t, \end{cases} \\ X_{3^m+2j+1}(t) &= Y_{(m)}^j(t) = \sum_{s=0}^{N-1} \varphi_{3^m+2j+1}(s) I_{(n)}^s(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \Delta_{m+1}^{3j}, \\ -1, & \text{если } t \in \Delta_{m+1}^{3j+1}, \\ 0 & \text{при остальных } t. \end{cases}\end{aligned}$$

Из приведенного явного вида функций вытекает, что данная система служит троичным вариантом системы последовательной прорисовки деталей, что конкретизировано далее в этом параграфе. Из данного утверждения и вытекает следующая теорема.

**Теорема.** Система функций  $\{X_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$  является базисом Шаудера в любом из основных пространств  $C[0, 1]$ ,  $L[0, 1]$ ,  $L^2[0, 1]$ . Она задает троичный неортогональный КМА на  $[0, 1]$ .



В случае  $C[0, 1]$  все базисные функции (не являющиеся элементами  $C[0, 1]$ ) продолжаем в точку 1 по непрерывности.

Троичный КМА представляет собой цепочку вложенных пространств

$$\dots \subset \Lambda_{-1} \subset \Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \dots \subset \Lambda_m \subset \dots,$$

удовлетворяющих следующим условиям:

- 1)  $\bigcup_n \Lambda_n = L^2(\mathbb{R})$ ;
- 2)  $\bigcap_n \Lambda_n = \{0\}$ ;
- 3)  $f \in \Lambda_0 \Leftrightarrow f(\cdot - n) \in \Lambda_0, n \in \mathbb{Z}$ ;
- 4)  $f(x) \in \Lambda_j \Leftrightarrow f(3x) \in \Lambda_{j+1}, j \in \mathbb{Z}$ ;
- 5) существует  $\varphi(x)$  такая, что  $\{\varphi(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  составляет базис  $\Lambda_0$ .

Отличие от традиционного ([1, с. 21], [13, с. 44]) двоичного ортонормированного КМА заключено в свойствах 4 (замена 2 на 3) и 5 (отказ от ортогональности базиса).

В модельном случае данной конструкции и системы Хаара масштабирующая функция  $\varphi = X_0$  организует временную локализацию за счет разложения единицы

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_0(x - n).$$

Для исходного сигнала  $f \in L[0, 1]$  последовательность приближений  $f_m \in \Lambda_m$  вычисляем отдельно для каждого  $m$  через значения цифровых сигналов  $x \in \mathbb{R}^N$ , где  $N = 3^m$ , по формуле частной суммы дискретного преобразования Крестенсона [14]

$$x_j = 3^m \int_{\Delta_m^j} f(t) dt, \quad f_m(\Delta_m^j) = x_j, \quad \text{для всех } j,$$

аналогичной формулам, применяемым для систем Хаара и Уолша. Умышленный отказ от ортогональности при построении троичного КМА вызван желанием сохранить простоту конструкции и для случая переноса ее на большие размерности.

Искомая функция  $f_m(t)$  есть частная сумма с номером  $3^m$  следующего ряда:

$$f(t) = c_0 X_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{3^k-1} c_{3^k+2j} X_{(k)}^j(t) + c_{3^k+2j+1} Y_{(k)}^j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k X_k(t). \quad (1)$$

Коэффициенты разложения (1) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_0^1 f(t) dt, \quad c_1 = 3 \int_{2/3}^1 (f(t) - c_0) dt, \quad c_2 = 3 \int_{1/3}^{2/3} (c_0 - f(t)) dt, \\ c_{3^m+2j} &= 3^{m+1} \int_{\Delta_{m+1}^{3j+2}} (f(t) - \tilde{f}(\Delta_m^j)) dt = \tilde{f}(\Delta_{m+1}^{3j+2}) - \tilde{f}(\Delta_m^j), \\ c_{3^m+2j+1} &= 3^{m+1} \int_{\Delta_{m+1}^{3j+1}} (\tilde{f}(\Delta_m^j) - f(t)) dt = \tilde{f}(\Delta_m^j) - \tilde{f}(\Delta_{m+1}^{3j+1}), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $j = 0, 1, 2, \dots, 3^m - 1$ ,  $\tilde{f}(\Delta_m^j) = 3^m \int_{\Delta_m^j} f(t) dt$  — среднее значение функции на интервале. Формулы для  $c_1$  и  $c_2$  в записи (2) излишни, так как они содержатся ниже в общих формулах при  $m = 0, j = 0$ .

Добавление двух выделенных слагаемых формулы (1) при последовательном вычислении частных сумм этого ряда соответствует уточнению значения строящейся функции: замена ступеньки  $\tilde{f}(\Delta_k^j)$  на три ступеньки  $\tilde{f}(\Delta_{m+1}^{3j+s})$  при  $s = 0, 1, 2$ .



### 3. БЫСТРЫЙ ТРОИЧНЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Обозначим исходный массив  $x^0 = (x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3 \dots x_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$  как массив начального нулевого уровня,  $N = 3^n$ . Пусть  $N_0 = N$ ,  $N_k = \frac{N_{k-1}}{3}$  — объем массива  $k$ -го уровня.

- Алгоритм быстрого троичного вейвлетного преобразования с прореживанием по частоте.

Для  $k$  от 1 до  $n$  выполняем:

– разбиваем массив  $x^{k-1}$  на непересекающиеся блоки, занумерованные подряд индексом  $j$  от 0 до  $N_k - 1$ , по три элемента в каждом  $j$ -м блоке, которые обозначим  $(a, b, c)$  для дальнейшего вычисления;

– формируем два массива следующего уровня:  $x^k = (x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3 \dots x_{N_k-1})$  (обозначая элементы теми же символами, что и на предыдущем уровне) и  $y^k = (y_0 \ y_1 \ y_2 \ y_3 \dots y_{2N_k-2}, \ y_{2N_k-1})$ , вычисляя для номера блока  $j$  от 0 до  $N_k - 1$

$$x_j = \frac{a + b + c}{3}, \quad y_{2j} = c - x_j, \quad y_{2j+1} = x_j - b;$$

– формируем выходной массив  $C$  спектральных характеристик  $c_k$  из вычисленных массивов

$$C = (x^n \ y^n \ y^{n-1} \ y^{n-2} \dots y^1) = (c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3 \dots c_{N-1}).$$

- Обратный алгоритм быстрого восстановления сигнала.

Сначала комментарий к принятым в алгоритме обозначениям. Шаги алгоритма будем нумеровать в обратном порядке. На начальном  $n$ -м шаге два массива  $x^n = (c_0)$  (обозначим  $a_0$  вместо  $c_0$ ) и  $y^n = (c_1 \ c_2)$  выделяем из выходного сигнала для восстановления по ним массива  $x^{n-1} = (x_0 \ x_1 \ x_2)$ . На следующем  $(n-1)$ -м шаге, когда массив  $x^{n-1}$  из выходного массива превращается во входной для очередного шага, его элементы  $x_j$  переобозначим в виде  $a_j$  и т. д. Выходной массив  $(k+1)$ -го шага  $x^k = (x_0 \ x_1 \ x_2 \dots x_{N_k-1})$  совпадает с входным массивом  $x^k = (a_0 \ a_1 \ a_2 \dots a_{N_k-1})$  для  $k$ -го шага. Далее сформулируем алгоритм.

Для  $k$  от  $n$  до 1 выполняем:

– для  $j$  от 0 до  $N_k - 1$  вычисляем координаты выходного массива  $x^{k-1}$  по координатам входного массива  $x^k$  и очередного блока  $y^k = (y_0 \ y_1 \dots y_{2N_k-1})$ , извлеченного из массива  $C$  в виде очередных  $2N_k$  отсчетов:

$$x_{3j} = a_j - y_{2j} + y_{2j+1}, \quad x_{3j+1} = a_j - y_{2j+1}, \quad x_{3j+2} = a_j + y_{2j}.$$

### 4. ПРИМЕРЫ ТРОИЧНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

**Пример 1.** Для  $n = 4$  выберем исходный сигнал  $f(t) = 81t - \frac{1}{2}$ , являющийся линейным преобразованием простейшего сигнала  $h(t) = t$ , усреднение которого по интервалам четвертого ранга приводит к целочисленному дискретному массиву

$$x^0 = (0 \ 1 \ 2 \ 3 \dots \ 80).$$

Применяя шаги быстрого алгоритма, получаем:

$$\begin{aligned} x^1 &= (1 \ 4 \ 7 \dots \ 79), \quad y^1 = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0); \\ x^2 &= (4 \ 13 \ 22 \ 31 \ 40 \ 49 \ 58 \ 67 \ 76), \quad y^2 = (3 \ 0 \ 3 \ 0 \ 3 \ 0 \ \dots \ 3 \ 0); \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}x^3 &= (13 \ 40 \ 67), & y^3 &= (9 \ 0 \ 9 \ 0 \ 9 \ 0); \\x^4 &= (40), & y^4 &= (27 \ 0).\end{aligned}$$

Из этих массивов формируем выходной массив

$$C = (40 \ 27 \ 0 \ 9 \ 0 \ 9 \ 0 \ 9 \ 0 \ 3 \ 0 \ 3 \ 0 \ 3 \ 0 \ \dots \ 3 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0).$$

Разложение (1) в нашем случае превратилось в

$$\begin{aligned}f_4(t) &= 40 + 27X_1(t) + 9(X_3(t) + X_5(t) + X_7(t)) + 3(X_9(t) + X_{11}(t) + \dots + X_{25}(t)) + \\&\quad + (X_{27}(t) + X_{29}(t) + X_{31}(t) + \dots + X_{79}(t)) \in \Lambda_4.\end{aligned}$$

Последовательное вычисление этих слагаемых соответствует методу последовательной прорисовки деталей, который отмечают в качестве достоинств системы Хаара.

Для исходной функции  $h(t)$  коэффициенты (2) разложения для ее приближения четвертого уровня (остальные  $c_j = 0$ )

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{40}{81} + \frac{1}{162}, & c_1 &= \frac{27}{81} = \frac{1}{3}, & c_3 = c_5 = c_7 &= \frac{9}{81} = \frac{1}{9}, \\c_9 &= c_{11} = \dots = c_{25} = \frac{3}{81} = \frac{1}{27}, & c_{27} = c_{29} = \dots = c_{79} &= \frac{1}{81}.\end{aligned}$$

Обобщаем их для разложения  $m$ -го уровня

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_{3^k+2j} = 3^{-(k+1)}, \quad c_{3^k+2j+1} = 0,$$

откуда вытекает разложение на  $[0, 1]$ :

$$t = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-(k+1)} \sum_{j=0}^{3^k-1} X_{(k)}^j(t),$$

а также разложение  $h(t)$  на  $[0, \infty)$ :

$$t = \sum_{m=0}^{\infty} \left(m + \frac{1}{2}\right) I_{(0)}^m(t) + \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-(k+1)} \sum_{j=0}^{\infty} X_{(k)}^j(t).$$

**Пример 2** (Канторова лестница). Основным примером *сингулярной* функции служит *канторова лестница* [15], заданная константой на отрезках (в данном примере правый конец считаем принадлежащим интервалу), составляющих канторово множество,

$$f(t) = \frac{2k+1}{2^n}, \quad \text{если } t \in \Delta_n^{6\mu(k)+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1,$$

где использовали вновь введенную, через разложение числа в двоичной системе счисления  $k = k_1 2^0 + k_2 2^1 + \dots + k_{n-1} 2^{n-2}$ ,  $k_j \in \{0, 1\}$ ,  $k_{n-1} = 1$ , функцию  $\mu(k) = k_1 3^0 + k_2 3^1 + \dots + k_{n-1} 3^{n-2}$ ,  $\mu(0) = 0$ . Доопределим на канторовом множестве второго рода эту функцию по схеме [15] до непрерывной на  $[0, 1]$  (а следовательно, и равномерно-непрерывной).



Основным свойством, которое будем использовать при вычислениях, служит следующее фрактальное свойство самоподобия канторовой лестницы  $f(3t) = 2f(t)$  и  $f(t + \frac{2}{3}) = f(t) + \frac{1}{2}$  при  $t \in [0, 1/3]$ . Дополнительно используем свойство симметрии  $f(t) + f(1 - t) = 1$ . Из графического представления с помощью этих свойств вычисляем (2)

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{1}{8}, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = 0, \quad c_6 = 0, \quad c_7 = \frac{1}{8}, \quad c_8 = 0, \dots$$
$$c_{3^k+4\mu(j)} = 2^{-(k+2)} \quad \text{для } j = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1.$$

Получили разложение (1) сингулярной функции в ряд на  $[0, 1]$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+2)} \sum_{j=0}^{2^k-1} X_{3^k+4\mu(j)}(t),$$

частные суммы которого служат аппаратом равномерного приближения канторовой лестницы.

## 5. ТРОИЧНЫЙ ВЕЙВЛЕТНЫЙ БАЗИС С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ

В статье [2] предложено два варианта двоичного вейвлетного базиса — с прореживанием по частоте и по времени. Троичный аналог системы Хаара с прореживанием по частоте был рассмотрен подробно выше.

Приведем краткое описание второго базиса  $\{\psi_k\}_{k=0}^{N-1}$ , где  $N = 3^n$ , представляющего собой троичный дискретный аналог системы Хаара [2] с прореживанием по времени.

Масштабирующей дискретной функцией служит  $\psi_0 = S^{n\otimes}$ , а парой материнских

$$\psi_1 = S^{n-1\otimes} \otimes A, \quad \psi_2 = S^{n-1\otimes} \otimes A^\rightarrow.$$

Методом троичных сдвигов и сжатий получаем все дискретные функции набора последовательно по пачкам, но с другой нумерацией внутри пачек

$$\psi_{3^m+j} = S^{n-m-1\otimes} \otimes A \otimes \delta_{3^m}^{j\rightarrow}, \quad \psi_{2 \cdot 3^m+j} = S^{n-m-1\otimes} \otimes A^\rightarrow \otimes \delta_{3^m}^{j\rightarrow}$$

при натуральных  $j$  от 0 до  $3^m - 1$ . Здесь применили перестройку порядка нумерации в соответствии с упорядочением спектральных характеристик  $a_k$  в выходном массиве  $C$  предложенного ниже быстрого вейвлетного алгоритма с прореживанием по времени.

По прежней схеме строятся «непрерывные» аналоги

$$Z_k(t) = \sum_{s=0}^{N-1} \psi_k(s) I_{(n)}^s(t).$$

- Алгоритм быстрого троичного вейвлетного преобразования с прореживанием по времени.

Для  $k$  от 1 до  $n$  выполняем:

– массив  $x^{k-1}$  представляем как блочный  $(b^0 \ b^1 \ b^2)$  из трех непересекающихся равновеликих блоков объема  $N_k$ ;

– вычисляем три массива, из которых формируем два массива, по формулам для векторов  $x^k = \frac{1}{3}(b^0 + b^1 + b^2)$ ,  $y^k = (\alpha_k, \beta_k) = (b^2 - x^k, x^k - b^1)$ ;



– формируем выходной массив спектральных характеристик из вычисленных массивов

$$C = (x^n \ y^n \ y^{n-1} \ y^{n-2} \dots y^1) = (a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \dots a_{N-1}). \quad \square$$

• *Обратный алгоритм быстрого восстановления сигнала.*

Для  $k$  от  $n$  до 1 выполняем:

– вычисляем  $x^{k-1} = (x^k - \alpha_k + \beta_k, \ x^k - \beta_k, \ x^k + \alpha_k)$  по вектору  $x^k$  и блокам массива  $y^k = (\alpha_k, \beta_k)$ , извлеченного из массива  $C$ .  $\square$

Прямой алгоритм анализа применительно к ступенчатой  $f \in \Lambda_n$  состоит в вычислении вектора  $C$  спектральных характеристик  $a_k$  по вектору  $x \in \mathbb{R}^N$  значений  $f(t)$ . Обратный алгоритм синтеза, состоящий в восстановлении  $x$ , соответствует вычислению исходного сигнала на  $[0, 1]$  по формуле

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k Z_k(t),$$

где та же самая масштабирующая функция  $Z_0(t) = 1$  при  $t \in [0, 1]$ , а остальные базисные функции

$$Z_{3^m+j}(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } t \in \Delta_n^{3^{m+1}k+j}, \\ 1, & \text{если } t \in \Delta_n^{3^{m+1}k+2 \cdot 3^m+j}, \\ 0 & \text{при остальных } t, \end{cases} \quad Z_{2 \cdot 3^m+j}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \Delta_n^{3^{m+1}k+j}, \\ -1, & \text{если } t \in \Delta_n^{3^{m+1}k+3^m+j}, \\ 0 & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Здесь  $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ,  $0 \leq j \leq 3^m - 1$ ,  $0 \leq k \leq 3^{n-m-1} - 1$ .

Основной недостаток подхода к построению вейвлетного базиса с прореживанием по времени состоит в невозможности построения бесконечной системы функций, служащей «непрерывным» аналогом, который соответствует утверждению о том, что систему Уолша невозможно упорядочить в нумерации Адамара.

Кратко покажем действие алгоритма с прореживанием по времени для приведенного выше примера 1 с  $f(t) = 81t - \frac{1}{2}$ ,  $n = 4$ :

$$\begin{aligned} x^4 &= (40), \\ y^1 &= (27 \ 27 \dots 27 \ 0 \ 0 \dots 0), \quad y^2 = (9 \ 9 \dots 9 \ 0 \ 0 \dots 0), \quad y^3 = (3 \ 3 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0), \quad y^4 = (1 \ 0). \end{aligned}$$

В массиве  $y^1$  два постоянных блока одинаковой длины по 27 отсчетов, в массиве  $y^2$  постоянные блоки по 9 отсчетов.

Если процедура синтеза «непрерывного» исходного сигнала, соответствующая обратному к быстрому алгоритму по частоте, реализуется в виде последовательной прорисовки деталей, то процедура синтеза, соответствующая обратному к быстрому алгоритму по времени, реализуется в виде параллельного уточнения деталей, что менее наглядно.

## Библиографический список

1. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. М. : Физматлит, 2005. 616 с.
2. Машарский С. М., Малоземов В. Н. Хааровские спектры дискретных сверток // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40, № 6. С. 954–960.
3. Бер М. Г., Малоземов В. Н. Наилучшие формулы для приближенного вычисления дискретного преобразования Фурье // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32, № 11. С. 1709–1719.



4. Беспалов М. С. Дискретные периодические функции Бернулли // ПДМ. 2019. № 43. С. 16–36. DOI: <https://doi.org/10.17223/20710410/43/2>
5. Малоземов В. Н., Машарский С. М. Основы дискретного гармонического анализа. СПб. : Лань, 2012. 304 с.
6. Беспалов М. С., Скляренко В. А. Дискретные функции Уолша и их приложения. Владимир : ВлГУ, 2014. 68 с.
7. Фарков Ю. А. Ортогональные всплески на локально компактных абелевых группах // Функц. анализ и его прил. 1997. Т. 31, вып. 4. С. 86–88. DOI: <https://doi.org/10.4213/faa498>
8. Lang W. C. Wavelet analysis on the Cantor dyadic group // Houston J. Math. 1998. Vol. 24, № 3. P. 533–544.
9. Лукомский С. Ф. Кратномасштабный анализ на нульмерных группах и всплесковые базисы // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 5. С. 41–64. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7580>
10. Плещева Е. А., Черных Н. И. Построение ортогональных базисов мультивсплесков // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 221–230.
11. Фарков Ю. А., Строганов С. А. О дискретных диадических вейвлетах для обработки изображений // Изв. вузов. Матем. 2011. № 7. С. 57–66.
12. Барышев А. А., Лукомский Д. С., Лукомский С. Ф. Системы сжатий и сдвигов в задаче сжатия изображений // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2. С. 505–510. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-4-505-510>
13. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М. ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 464 с.
14. Беспалов М. С. Дискретные преобразования Крестенсона // Пробл. передачи информ. 2010. Т. 46, вып. 4. С. 91–115.
15. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука. 1976. 544 с.

---

#### Образец для цитирования:

Беспалов М. С. Троичный дискретный вейвлетный базис // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 367–377. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-367-377>

---

## Ternary Discrete Wavelet Basis

M. S. Bespalov

Mikhail S. Bespalov, <https://orcid.org/0000-0003-0661-337X>, Vladimir State University, 87 Gorky St., Vladimir 600000, Russia, [bespalov@vlsu.ru](mailto:bespalov@vlsu.ru)

The discrete version and the basic construction of the ternary multiresolution analysis are given, similar to the binary model case of the Haar multiresolution analysis. Based on the constructed basis, an algorithm similar to the fast Haar transformation is proposed. Typical calculation examples are provided.

**Keywords:** discrete harmonic analysis, discrete Haar transform, wavelet, shifts and dilations, multiresolution analysis.



Received: 06.05.2019 / Accepted: 31.12.2019 / Published: 31.08.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

## References

1. Novikov I. Ya., Protasov V. Yu., Skopina M. A. *Teoriya vspleskov* [Wavelet theory]. Moscow, Fizmatlit, 2005. 616 p. (in Russian).
2. Masharsky S. M., Malozemov V. N. Haar spectra of discrete convolutions. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2000, vol. 40, no. 6, pp. 914–921.
3. Ber M. G., Malozemov V. N. The best formulae for the approximate computation of discrete Fourier transforms. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1992, vol. 32, no. 11, pp. 1533–1544.
4. Bespalov M. S. Bernoulli's discrete periodic functions. *Applied Discrete Mathematics*, 2019, no. 43, pp. 16–36. DOI: <https://doi.org/10.17223/20710410/43/2>
5. Malozemov V. N., Macharskiy S. M. *Osnovy discretnogo garmonicheskogo analiza* [Basics of Discrete Harmonic Analysis]. St. Petersburg, Lane, 2012. 304 p. (in Russian).
6. Bespalov M. S., Sklyarenko V. A. *Diskretnye funktsii Uolsha i ikh prilogeniya* [Discrete Walsh Functions and its Applications]. Vladimir, Vladimirskiy gosudarstvennyi universitet, 2014. 68 p. (in Russian).
7. Farkov Yu. A. Orthogonal Wavelets on Locally Compact Abelian Groups. *Funct. Anal. Appl.*, 1997, vol. 31, iss. 4, pp. 294–296. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02466067>
8. Lang W. C. Wavelet analysis on the Cantor dyadic group. *Houston J. Math.*, 1998, vol. 24, no. 3, pp. 533–544.
9. Lukomskii S. F. Multiresolution analysis on zero-dimensional Abelian groups and wavelets bases. *Sb. Math.*, 2010, vol. 201, no. 5, pp. 669–691. DOI: <http://dx.doi.org/10.1070/SM2010v201n05ABEH004088>
10. Pleshchcheva E. A., Chernykh N. I. Construction of orthogonal multiwavelet bases. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2015, vol. 288, suppl. 1, pp. 162–172. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0081543815020169>
11. Farkov Yu. A., Stroganov S. A. The use of discrete dyadic wavelets in image processing. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2011, vol. 55, no. 7, pp. 47–55. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X11070073>
12. Barichev A. A., Lukomskii D. S., Lukomskii S. F. Systems of Scales and Shifts in the Problem Still Image Compression. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 4, pt. 2, pp. 505–510 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-4-505-510>
13. Daubechies I. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, 1992. 454 p. CBMS-NSR Series in Appl. Math.
14. Bespalov M. S. Discrete Chrestenson transform. *Probl. Inform. Transm.*, 2010, vol. 46, iss. 4, pp. 353–375. DOI: <https://doi.org/10.1134/S003294601004006X>
15. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, Nauka, 1976. 544 p. (in Russian).

## Cite this article as:

Bespalov M. S. Ternary Discrete Wavelet Basis. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 367–377 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-367-377>



УДК 621.3

## Анализ вероятностно-временных характеристик обслуживания эластичного трафика с минимальной скоростью в сегменте беспроводной сети с нарезкой радиоресурсов

А. С. Власкина, Н. А. Поляков, И. А. Гудкова, Ю. В. Гайдамака

Власкина Анастасия Сергеевна, аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей, Российский университет дружбы народов (РУДН), Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, vlaskina.anastasia@yandex.ru

Поляков Никита Алексеевич, студент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей, Российский университет дружбы народов (РУДН), Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, goto97@mail.ru

Гудкова Ирина Андреевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей, Российский университет дружбы народов (РУДН), Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; Институт проблем информатики, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44-2, gudkova-ia@rudn.ru

Гайдамака Юлия Васильевна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей, Российский университет дружбы народов (РУДН), Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; Институт проблем информатики, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44-2, gaydamaka-yuv@rudn.ru

Предполагается, что будущие мобильные сети станут поддерживать значительное число приложений и услуг. В условиях ограниченности пропускной способности сети обычное выделение ресурсов приводит к неэффективному использованию сетей радиодоступа. Возможным решением выступает технология сетевой нарезки, предназначенная для распределения ресурсов между виртуальными мобильными операторами. Целью данной работы являются исследование и оценка показателей качества функционирования такой сети на примере услуги загрузки файла с минимальной гарантированной скоростью передачи данных. Для эффективного совместного использования ресурсов авторами предложена математическая модель в виде системы массового обслуживания с эластичным трафиком, очередью и конечным числом источников. Получены формулы для расчета таких характеристик, как вероятность блокировки, среднее количество времени для получения данной услуги и среднее число запросов в системе. Для численного анализа разработана имитационная модель сети дискретного типа события для заданных исходных данных, приближенных к реальным значениям. Показана зависимость вероятностно-временных параметров от интенсивности поступления заявок. Полученные результаты являются промежуточными по тематике нарезки сети и могут быть применены для последующего исследования и оптимизации использования радиоресурсов в беспроводных сетях пятого поколения.

**Ключевые слова:** 5G, беспроводная сеть, нарезка радиоресурсов, эластичный трафик, минимальная скорость, система массового обслуживания.

Поступила в редакцию: 14.11.2019 / Принята: 30.12.2019 / Опубликована: 31.08.2020



Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-378-387>

## ВВЕДЕНИЕ

Недавние исследования показывают, что мобильные сети пятого поколения (5G) будут поддерживать значительное число пользователей, запрашивающих разные услуги и приложения, каждое из которых предъявляет различные требования к качеству обслуживания (Quality of Service, QoS) [1]. В связи с этим обычное выделение сетей радиодоступа (Radio Access Network, RAN) приводит к неэффективному использованию ресурсов с относительно высокими затратами, которое больше не приемлемо для пользователей [2, 3]. Вместо этого операторы больше заинтересованы в гибких решениях [4, 5].

Концепция нарезки радиоресурсов (Network Slicing) предназначена для проектирования, разделения и организации ресурсов виртуальной сети с учетом разнообразных требований [6]. Другими словами, одна физическая сеть разбивается на несколько логически изолированных сегментов сети, каждый из которых спроектирован и оптимизирован для конкретного требования и/или конкретного запроса/услуги [7–10].

Исходя из набора услуг и предъявляемых требований, выделяются различные соглашения об уровне обслуживания (Service Level Agreement, SLA), которые обычно разделяются на три типа [11]: с гарантированной скоростью передачи данных (Guaranteed Bitrate, GB), с минимальной гарантированной скоростью (Best effort with minimum Guaranteed, BG) [12] и без гарантий на обслуживание (Best Effort, BE).

В данной статье предложена математическая модель в виде системы массового обслуживания с эластичным трафиком [13, 14], чувствительным к задержкам и с конечным числом источников. Получены формулы для расчета таких характеристик, как среднее время и среднее число запросов в системе, вероятность блокировки. Построена имитационная модель системы на примере услуги загрузки файла с минимальной гарантированной скоростью передачи, проведен численный анализ для различных исходных данных.

## 1. ЗАДАЧА НАРЕЗКИ РАДИОРЕСУРСОВ

Рассмотрим беспроводную сеть, в состав которой входят:

- базовый оператор, т. е. поставщик услуг беспроводной связи, который владеет и контролирует все элементы, необходимые для предоставления услуг конечному пользователю, включая распределение радиочастотного спектра объема  $C$ ;
- виртуальный оператор (или оператор), т. е. поставщик услуг беспроводной связи, который не владеет физической инфраструктурой беспроводной сети, через которую он предоставляет услуги своим пользователям. Пусть имеется  $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, M\}$  услуг, тогда каждый  $n$ -оператор может предоставлять пользователям свой собственный набор услуг  $M_n \subseteq \mathcal{M}$ .

В зависимости от типа услуги могут быть установлены минимальная и максимальная скорости передачи данных,  $b_m^{\min}$  и  $b_m^{\max}$ , где  $m$  — номер услуги из множества всех услуг,  $m \in \mathcal{M}$ . Число пользователей, имеющих доступ к  $m$ -услуге  $n$ -оператора,



обозначим  $K_{nm}$ . Тогда общее число пользователей может быть представлено в виде

$$K = \sum_{n=1}^N K_n = \sum_{n=1}^N \sum_{m \in M_n} K_{nm}, \quad n = 1..N.$$

Предположим, что выделяемое число ресурсов пользователям одной и той же услуги одинаково. Следовательно, процедура распределения может быть сформулирована как задача оптимизации следующим образом:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{C}} f(\mathbf{C}) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m \in M_n} a_{nm} C_{nm}, \\ \sum_{n=1}^N \sum_{m \in M_n} a_{nm} C_{nm} &\leq C, \quad 0 \leq C_{nm}^{\min} \leq C_{nm} \leq C_{nm}^{\max} \leq C, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$\mathbf{C}$  — распределение ресурсов, представленное в виде матрицы:

$$\mathbf{C} = [C_{nm}]_{m \in M_n, n \subseteq N}, \quad C_{nm} > 0, \quad m \subseteq M_n, \quad C_{nm} = 0, \quad m \notin M_n;$$

$a_{nm}$  — приоритет услуги,  $0 \leq a_{nm} \leq 1$ ;

$C_{nm}$  — объем ресурса, выделенный для  $m$ -услуги  $n$ -оператора,  $m \in M_n$   
( $C_n = \sum_{m \in M_n} C_{nm}$  — объем ресурса, выделенный для  $n$ -оператора);

$C_{nm}^{\min}, C_{nm}^{\max}$  — минимальные и максимальные объемы выделяемого ресурса.

Отметим, что существуют различные варианты оптимизации, например, с учетом технических возможностей пользовательского оборудования или динамического разделения ресурсов в зависимости от числа пользователей в конкретном временном интервале. Когда ресурсов недостаточно для удовлетворения всех гарантированных требований, возможно ослабление ограничений.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Построим модель управления доступом и занятия ресурсов для услуги загрузки файла с минимальной гарантированной скоростью передачи в виде системы массового обслуживания (СМО). Под заявками будем понимать запросы пользователей на предоставление услуги, а под источниками — пользователей  $K$ . Следует отметить, что источник не может отправить новый запрос, пока не будет обработан предыдущий, поданный им. В СМО имеется ресурс объема  $C$ , по которому передаются блоки эластичных данных. Пусть  $0 < \lambda_k < \infty$ ,  $k = \overline{1, K}$  — интенсивность потока заявок, а  $0 < \theta_k < \infty$ ,  $k = \overline{1, K}$  — средняя длина блока. Если  $C$  не может быть разделен поровну между заявками с обеспечением минимально гарантированного порога  $b$ , поступившая заявка занимает место в очереди  $r$ . Следовательно, максимальное число заявок, которые могут обслуживаться одновременно на ресурсе, равно  $\lfloor \frac{C}{b} \rfloor = N$ . По причине нетерпеливости заявки покидают систему с интенсивностью  $0 < \gamma_k < \infty$ ,  $k = \overline{1, K}$ .

Рассмотрим модель (рис. 1), когда имеется фиксированное число пользователей и поведение каждого определяется в соответствии со следующим принципом: сначала он отправляет запрос на загрузку файла, загружает его, потом ожидает, затем снова загружает файл и т. д. Данная система описывается одномерным случайным процессом  $N(t) \in \{0, \dots, \lfloor \frac{C}{b} \rfloor\}$  — число заявок, находящихся в системе в момент времени  $t \geq 0$ .

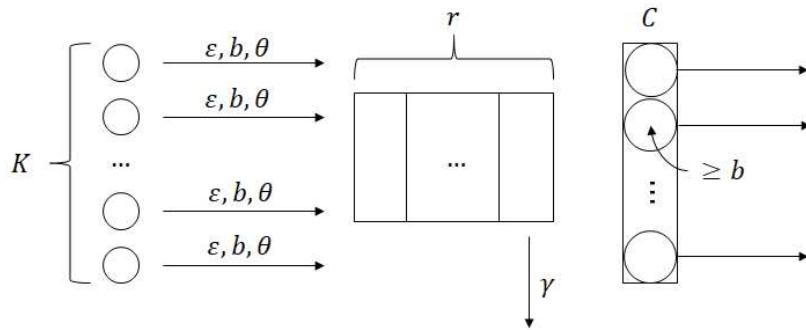


Рис. 1. Схема-модель в виде системы массового обслуживания  
Fig. 1. Scheme-model in the form of a queuing system

Пространство состояний исследуемого случайного процесса будет иметь вид  $X := \{n \in \{0, \dots, N, \dots \min(K, N+r)\}\}$ . В зависимости от соотношения между объемом ресурса и числом источников можно выделить три случая: 1) количество источников меньше количества свободных мест на ресурсе (все запросы будут обработаны),  $0 < K \leq N$ ; 2) количество источников превышает количество свободных мест на ресурсе, но запросы поступают в очередь,  $N < K \leq (N+r)$ ; 3) количество источников больше, чем количество свободных мест на ресурсе и в очереди,  $K > (N+r)$ .

Для случая  $K > (N+r)$  система уравнений глобального баланса будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} K\epsilon p_0 = \frac{C}{\theta} p_1, \\ ((K-n)\epsilon + \frac{C}{\theta}) p_n = (K-n+1)\epsilon p_{n-1} + \frac{C}{\theta} p_{n+1}, \quad n = \overline{1, (N-1)}, \\ ((K-n)\epsilon + \frac{C}{\theta} + (n-N)\gamma) p_n = (K-n+1)\epsilon p_{n-1} + \\ + (\frac{C}{\theta} + (n+1-N)\gamma) p_{n+1}, \quad n = \overline{N, (N+r-1)}, \\ (\frac{C}{\theta} + r\gamma) p_{N+r} = (K-N-r+1)\epsilon p_{N+r-1}. \end{cases} \quad (2)$$

Отсюда получаем стационарное распределение вероятностей

$$p_n = \begin{cases} \left(\frac{\epsilon\theta}{C}\right)^n A_K^n p_0, & n = \overline{1, \min(N, K)} \\ \left(\frac{\theta}{C}\right)^N \frac{\epsilon^n}{\prod_{i=1}^{n-N} \left(\frac{C}{\theta} + i\gamma\right)} A_K^n p_0, & n = \overline{N+1, \min(N+r, K)}, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$p_0 = \left( \sum_{n=0}^{\min(N, K)} \left(\frac{\epsilon\theta}{C}\right)^n A_K^n + \left(\frac{\theta}{C}\right)^N \sum_{n=1}^{\min(r, K-N)} \frac{\epsilon^n}{\prod_{i=1}^{n-N} \left(\frac{C}{\theta} + i\gamma\right)} A_K^n \right)^{-1}.$$

Зная распределение вероятностей (3), можно рассчитать такие характеристики системы, как вероятность блокировки  $\pi$ ; среднее время пребывания заявок в очереди  $W_q$ , на обслуживании  $W_{ser}$  и в системе  $W_{sys}$ ; среднее число заявок в очереди  $L_q$ , на обслуживании  $L_{ser}$  и в системе  $L_{sys}$ . Формулы представлены в табл. 1.



Таблица 1 / Table 1

Формулы для расчета вероятностно-временных характеристик системы  
Formulas for calculating the probability-time characteristics of a system

Параметр Parameter	$0 < K \leq N$	$N < K \leq N+r$	$K > N+r$
$\pi$	0	0	$p_{N+r}$
$L_{ser}$	$\sum_{i=0}^K i \cdot p_i$	$\sum_{i=0}^N i \cdot p_i + N \cdot \sum_{i=1}^{K-N} p_{N+i}$	$\sum_{i=0}^N i \cdot p_i + N \cdot \sum_{i=1}^r p_{N+i}$
$L_q$	—	$\sum_{i=1}^{K-N} i \cdot p_{N+i}$	$\sum_{i=1}^r i \cdot p_{N+i}$
$L_{sys}$	$\sum_{i=0}^K i \cdot p_i$	$\sum_{i=0}^K i \cdot p_i$	$\sum_{i=0}^{N+r} i \cdot p_i$
$W_{ser}$	$\frac{\sum_{i=0}^K i \cdot p_i}{\sum_{n=0}^{K-1} (K-n) \varepsilon p_n}$	$\frac{\sum_{i=0}^N i \cdot p_i + N \cdot \sum_{i=1}^{K-N} p_{N+i}}{\sum_{n=0}^{K-1} (K-n) \varepsilon p_n}$	$\frac{\sum_{i=0}^N i \cdot p_i + N \cdot \sum_{i=1}^r p_{N+i}}{\sum_{n=0}^{N+r-1} (K-n) \varepsilon p_n}$
$W_q$	—	$\frac{\sum_{i=1}^{K-N} i \cdot p_{N+i}}{\sum_{n=0}^{K-1} (K-n) \varepsilon p_n}$	$\frac{\sum_{i=1}^r i \cdot p_{N+i}}{\sum_{n=0}^{N+r-1} (K-n) \varepsilon p_n}$
$W_{sys}$	$\frac{\sum_{i=1}^K i \cdot p_i}{\sum_{n=0}^{K-1} (K-n) \varepsilon p_n}$	$\frac{\sum_{i=1}^K i \cdot p_i}{\sum_{n=0}^{K-1} (K-n) \varepsilon p_n}$	$\frac{\sum_{i=1}^{N+r} i \cdot p_i}{\sum_{n=0}^{N+r-1} (K-n) \varepsilon p_n}$

### 3. ПРИМЕР ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Далее представлены основные результаты оценки качества обслуживания построенной модели с использованием имитационного моделирования с дискретным типом события. В качестве исходных данных используются данные из табл. 2.

Таблица 2 / Table 2

Исходные данные / Initial data

Параметр Parameter	Характеристика Characteristic	Значение Value
$K$	Число пользователей / Number of users	50
$b$	Минимально гарантированная скорость [Мб/с] Minimum guaranteed speed [Mb/sec]	0.384
$C$	Объем ресурса [Мб/с] / Resource volume [Mb/sec]	16.76; 3500
$\epsilon$	Интенсивность входящего потока, экспоненциальное распределение / Inlet flow rate, exponential distribution	[0.01;20]
$\theta$	Размер файла [Мб], экспоненциальное распределение File size [Mb], exponential distribution	2
$\gamma$	Интенсивность ухода из системы по причине нетерпеливости / Intensity to leave the system due to impatience	0.000001
$r$	Длина очереди / Queue length	20

На рис. 2, а, б отражена зависимость характеристик от интенсивности поступления заявок в систему при  $C = 16.76$  [Мб/с] (согласно источнику [15]). Заметим, что в этом случае общее время для служб отправки превышает 40 с, а размер файла составляет 2 Мб. При незначительном увеличении интенсивности поступления



запросов система быстро заполняется и формируется очередь. Чтобы приблизить задержку к реальным значениям, были проведены расчеты для  $C = 3500$  [Мб/с] (рис. 2, в, г). Для таких исходных данных значение среднего времени пребывания заявки в системе колеблется от 8.27 мс до 156.9 мс и почти напрямую зависит от интенсивности поступления запросов. Очередь с выбранной интенсивностью не формируется.

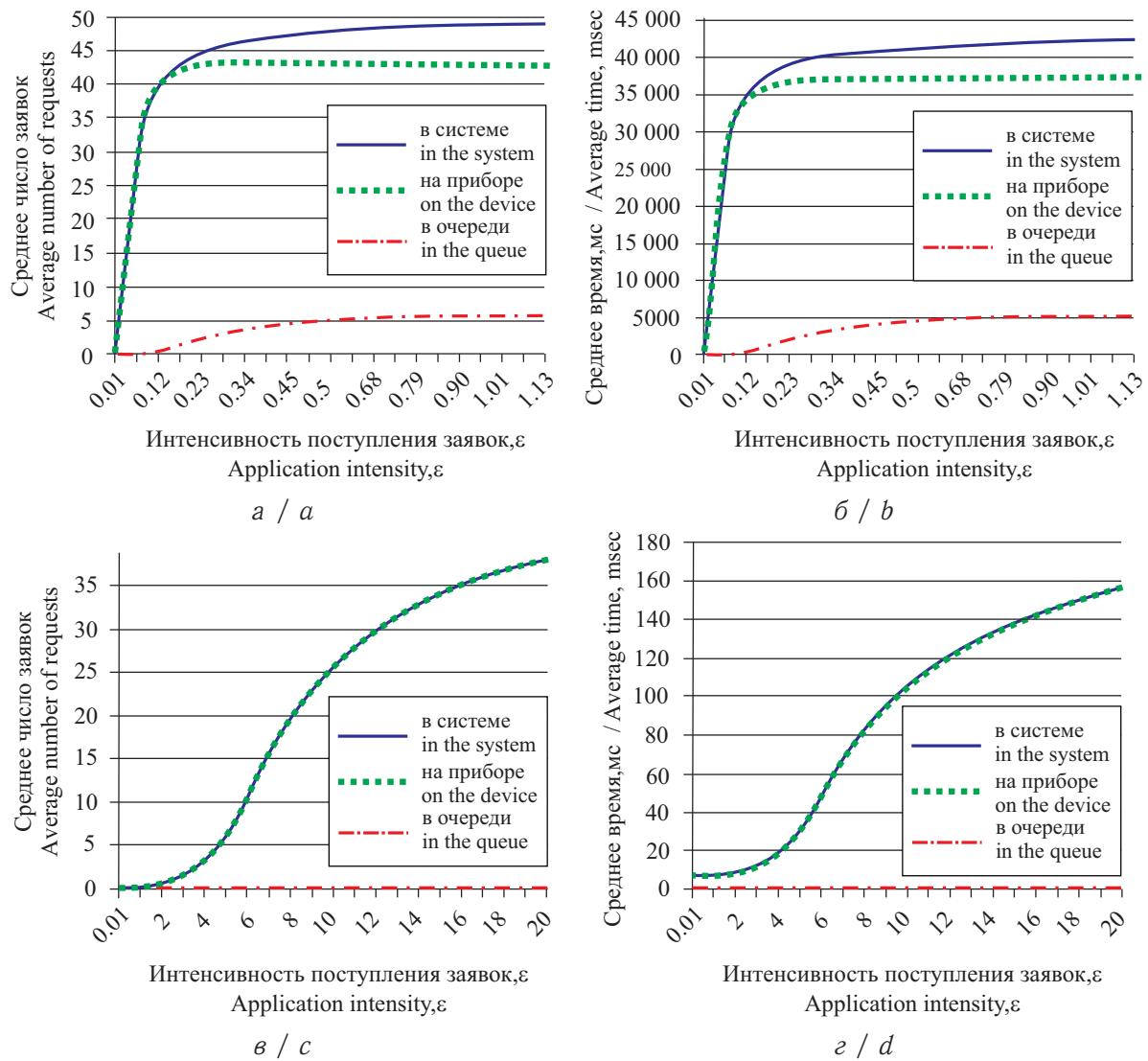


Рис. 2. Среднее время и число запросов в системе, в очереди, на приборе: *a* — среднее время,  $C = 16.76$  [Мб/с]; *б* — среднее число запросов,  $C = 16.76$  [Мб/с]; *в* — среднее время,  $C = 3500$  [Мб/с]; *г* — среднее число запросов,  $C = 3500$  [Мб/с]

Fig. 2. Average time and number of requests in the system, in the queue, on the device: *a* — average time,  $C = 16.76$  [Mb/sec]; *b* — average number of requests,  $C = 16.76$  [Mb/sec]; *c* — average time,  $C = 3500$  [Mb/sec]; *d* — average number of requests,  $C = 3500$  [Mb/sec]

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нарезка сетевых радиоресурсов (Network Slicing) является одной из самых перспективных технологий 5G, позволяющей максимизировать эффективность распределения ресурсов между виртуальными операторами. Для анализа эффективности



предоставления услуги с минимальной гарантированной скоростью передачи данных в работе была построена система массового обслуживания и получены формулы для расчета вероятностно-временных характеристик. С помощью разработанной имитационной модели получены результаты численного анализа.

**Благодарности.** Авторы благодарят доцента кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН М. Д. Малых за ценные советы по формулировке задачи оптимизации нарезки радиоресурсов и ассистента кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН В. О. Бегишева за вклад в проведение численного анализа.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 2.3397.2017/4.6).

## Библиографический список

1. *Zhang H., Liu N., Chu X., Long K., Aghvami A.-H., Leung V. C. M.* Network Slicing Based 5G and Future Mobile Networks: Mobility, Resource Management, and Challenges // IEEE Communications Magazine. 2017. Vol. 55, iss. 8. P. 138–145.
2. *Lee Y. L., Loo J., Chuah T. C., Wang L.-C.* Dynamic network slicing for multitenant heterogeneous cloud radio access networks // IEEE Transactions on Wireless Communications. 2018. Vol. 17, iss. 4. P. 2146–2161. DOI: <https://doi.org/10.1109/TWC.2017.2789294>
3. *Rouzbehani B., Correia L. M., Caeiro L.* An Optimised RRM Approach with Multi-Tenant Performance Isolation in Virtual RANs // 2018 IEEE 29th Annual International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC). Bologna, 2018. P. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1109/PIMRC.2018.8581050>
4. 3GPP TS 23.501 V15.4.0 – System architecture for the 5G System (5GS). URL: <https://portal.3gpp.org/desktopmodules/Specifications/SpecificationDetails.aspx?specificationId=3144#> (дата обращения: 14.11.2019).
5. *Lieto A., Malanchini I., Capone A.* Enabling Dynamic Resource Sharing for Slice Customization in 5G Networks // 2018 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM). Abu Dhabi, United Arab Emirates, 2018. P. 1–7. DOI: <https://doi.org/10.1109/GLOCOM.2018.8647249>
6. GB999 User Guide for Network Slice Management R18.5.1. URL: <https://projects.tmforum.org/wiki/display/PCT/viewpage.action?pageId=100734457> (дата обращения: 14.11.2019).
7. *Ordonez-Lucena J., Ameigeiras P., Lopez D., Ramos-Munoz J. J., Lorca J., Folgueira J.* Network Slicing for 5G with SDN/NFV: Concepts, Architectures, and Challenges // IEEE Communications Magazine. 2017. Vol. 55, iss. 5. P. 80–87. DOI: <https://doi.org/10.1109/MCOM.2017.1600935>
8. *Khatibi S., Caeiro L., Ferreira L. S., Correia L. M., Nikaein N.* Modelling and implementation of virtual radio resources management for 5G Cloud RAN // J. Wireless Com. Network. 2017. Vol. 2017, iss. 1. Art. no. 128. DOI: <https://doi.org/10.1186/s13638-017-0908-1>
9. *Foukas X., Patounas G., Elmokashfi A., Marina M. K.* Network Slicing in 5G: Survey and Challenges // IEEE Communications Magazine. 2017. Vol. 55, iss. 5. P. 94–100. DOI: <https://doi.org/10.1109/MCOM.2017.1600951>
10. ITU-T Rec. Y.0.3101 — Requirements of the IMT-2020 network. 01.2018. URL: <https://www.itu.int/rec/T-REC-Y.3101-201801-I/en> (дата обращения: 14.11.2019).
11. *Rouzbehani B., Correia L. M., Caeiro L.* A modified proportional fair radio resource management scheme in virtual RANs // 2017 European Conference on Networks and Communications (EuCNC). Oulu, 2017. P. 1–5. DOI: <https://doi.org/10.1109/EuCNC.2017.7980724>



12. Caballero P., Banchs A., De Veciana G., Costa-Perez X., Azcorra A. Network slicing for guaranteed rate services: Admission control and resource allocation games // IEEE Transactions on Wireless Communications. 2018. Vol. 17, iss. 10. P. 6419–6432. DOI: <https://doi.org/10.1109/TWC.2018.2859918>
13. Samouylov K. E., Gudkova I. A. Recursive computation for a multi-rate model with elastic traffic and minimum rate guarantees // International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems. Moscow, 2010. P. 1065–1072. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICUMT.2010.5676509>
14. Gudkova I. A., Markova E. V., Abaev P. O., Antonova V. M. Analytical modelling and simulation of admission control scheme for non-real time services in LTE networks // Proc. 29th European Conference on Modelling and Simulation, ECMS 2015. Albena, Bulgaria, 2015. P. 689–695. DOI: <https://doi.org/10.7148/2015-0689>
15. Khatibi S. Radio Resource Management Strategies in Virtual Networks // Thesis approved in public session to obtain PhD degree in Electrical and Computer Engineering – 2016. URL: [https://grow.tecnico.ulisboa.pt/wp-content/uploads/2016/08/Thesis\\_sina\\_khatibi\\_IST172360.pdf](https://grow.tecnico.ulisboa.pt/wp-content/uploads/2016/08/Thesis_sina_khatibi_IST172360.pdf) (дата обращения: 14.11.2019).

---

**Образец для цитирования:**

Власкина А. С., Поляков Н. А., Гудкова И. А., Гайдамака Ю. В. Анализ вероятностно-временных характеристик обслуживания эластичного трафика с минимальной скоростью в сегменте беспроводной сети с нарезкой радиоресурсов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 378–387. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-378-387>

---

## **Performance Analysis of Elastic Traffic with Minimum Bit Rate Guarantee Transmission in Wireless Network under Network Slicing**

**A. S. Vlaskina, N. A. Polyakov, I. A. Gudkova, Yu. V. Gaidamaka**

Anastasiya S. Vlaskina, <https://orcid.org/0000-0001-6453-814X>, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russia, [vlaskina.anastasia@yandex.ru](mailto:vlaskina.anastasia@yandex.ru)

Nikita A. Polyakov, <https://orcid.org/0000-0003-0152-9646>, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russia, [goto97@mail.ru](mailto:goto97@mail.ru)

Irina A. Gudkova, <https://orcid.org/0000-0002-1594-427X>, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russia; Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Informatics and Management" RAS, 44, bld. 2 Vavilova St., Moscow 119333, Russia, [gudkova-ia@rudn.ru](mailto:gudkova-ia@rudn.ru)

Yuliya V. Gaidamaka, <https://orcid.org/0000-0003-2655-4805>, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russia; Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Informatics and Management" RAS, 44, bld. 2 Vavilova St., Moscow 119333, Russia, [gaidamaka-yuv@rudn.ru](mailto:gaidamaka-yuv@rudn.ru)

Future mobile networks are expected to support a significant number of applications and services. With limited network bandwidth, the usual allocation of resources leads to inefficient use of radio access networks. A possible solution is network slicing technology designed to distribute resources between virtual mobile operators. The aim of this work is to study and evaluate the performance indicators of such a network using the example of a file download service with a mi-



nimum guaranteed data transfer rate. For effective sharing of resources, the authors proposed a mathematical model in the form of a queuing system with elastic traffic, a queue, and a finite number of sources. Formulas are obtained for calculating such characteristics as the probability of blocking, the average amount of time to receive this service, and the average number of requests in the system. For numerical analysis, a simulation model of a network with a discrete type of event has been developed for an initial source data, close to real values. The dependence of probability-time parameters on the intensity of applications is shown. The results are intermediate in the subject of network slicing and can be used for subsequent research and optimization of the radio resources allocation in fifth-generation wireless networks.

**Keywords:** 5G, wireless network, network slicing, elastic traffic, minimum bit guarantee, queuing system.

Received: 14.11.2019 / Accepted: 30.12.2019 / Published: 31.08.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

**Acknowledgements:** The authors are grateful to M. D. Malykh, associate professor of the department of applied informatics and probability theory, RUDN University, and V. O. Begisheva, assistant of the department of applied informatics and probability theory, RUDN University, for their contribution to the numerical analysis.

This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project No. 2.3397.2017/4.6).

## References

1. Zhang H., Liu N., Chu X., Long K., Aghvami A.-H., Leung V. C. M. Network Slicing Based 5G and Future Mobile Networks: Mobility, Resource Management, and Challenges. *IEEE Communications Magazine*, 2017, vol. 55, iss. 8, pp. 138–145.
2. Lee Y. L., Loo J., Chuah T. C., Wang L.-C. Dynamic network slicing for multitenant heterogeneous cloud radio access networks. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2018, vol. 17, iss. 4, pp. 2146–2161. DOI: <https://doi.org/10.1109/TWC.2017.2789294>
3. Rouzbehani B., Correia L. M., Caeiro L. An Optimised RRM Approach with Multi-Tenant Performance Isolation in Virtual RANs. *2018 IEEE 29th Annual International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC)*. Bologna, 2018, pp. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1109/PIMRC.2018.8581050>
4. 3GPP TS 23.501 V15.4.0 – System architecture for the 5G System (5GS). Available at: <https://portal.3gpp.org/desktopmodules/Specifications/SpecificationDetails.aspx?specificationId=3144#> (accessed 14 November 2019).
5. Lieto A., Malanchini I., Capone A. Enabling Dynamic Resource Sharing for Slice Customization in 5G Networks. *2018 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM)*. Abu Dhabi, United Arab Emirates, 2018, pp. 1–7. DOI: <https://doi.org/10.1109/GLOCOM.2018.8647249>
6. GB999 User Guide for Network Slice Management R18.5.1. Available at: <https://projects.tmforum.org/wiki/display/PCT/viewpage.action?pageId=100734457> (accessed 14 November 2019).
7. Ordóñez-Lucena J., Ameigeiras P., Lopez D., Ramos-Munoz J. J., Lorca J., Folgueira J. Network Slicing for 5G with SDN/NFV: Concepts, Architectures, and Challenges. *IEEE Communications Magazine*, 2017, vol. 55, iss. 5, pp. 80–87. DOI: <https://doi.org/10.1109/MCOM.2017.1600935>
8. Khatibi S., Caeiro L., Ferreira L. S., Correia L. M., Nikaein N. Modelling and implementation of virtual radio resources management for 5G Cloud RAN. *J. Wireless Com. Network*,



- 2017, vol. 2017, iss. 1, art. no. 128. DOI: <https://doi.org/10.1186/s13638-017-0908-1>
- 9. Foukas X., Patounas G., Elmokashfi A., Marina M. K. Network Slicing in 5G: Survey and Challenges. *IEEE Communications Magazine*, 2017, vol. 55, iss. 5, pp. 94–100. DOI: <https://doi.org/10.1109/MCOM.2017.1600951>
  - 10. *ITU-T Rec. Y.0.3101 — Requirements of the IMT-2020 network. 01.2018*. Available at: <https://www.itu.int/rec/T-REC-Y.3101-201801-I/en> (accessed 14 November 2019).
  - 11. Rouzbehani B., Correia L. M., Caeiro L. A modified proportional fair radio resource management scheme in virtual RANs. *2017 European Conference on Networks and Communications (EuCNC)*. Oulu, 2017, pp. 1–5. DOI: <https://doi.org/10.1109/EuCNC.2017.7980724>
  - 12. Caballero P., Banchs A., De Veciana G., Costa-Perez X., Azcorra A. Network slicing for guaranteed rate services: Admission control and resource allocation games. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2018, vol. 17, iss. 10, pp. 6419–6432. DOI: <https://doi.org/10.1109/TWC.2018.2859918>
  - 13. Samouylov K. E., Gudkova I. A. Recursive computation for a multi-rate model with elastic traffic and minimum rate guarantees. In: *International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems*. Moscow, 2010, pp. 1065–1072. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICUMT.2010.5676509>
  - 14. Gudkova I. A., Markova E. V., Abaev P. O., Antonova V. M. Analytical modelling and simulation of admission control scheme for non-real time services in LTE networks. *Proc. 29th European Conference on Modelling and Simulation, ECMS 2015*. Albena, Bulgaria, 2015, pp. 689–695. DOI: <https://doi.org/10.7148/2015-0689>
  - 15. Khatibi S. Radio Resource Management Strategies in Virtual Networks. *Thesis approved in public session to obtain PhD degree in Electrical and Computer Engineering – 2016*. Available at: [https://grow.tecnico.ulisboa.pt/wp-content/uploads/2016/08/Thesis\\_sina\\_khatibi\\_IST172360.pdf](https://grow.tecnico.ulisboa.pt/wp-content/uploads/2016/08/Thesis_sina_khatibi_IST172360.pdf) (accessed 14 November 2019).

---

**Cite this article as:**

Vlaskina A. S., Polyakov N. A., Gudkova I. A., Gaidamaka Yu. V. Performance Analysis of Elastic Traffic with Minimum Bit Rate Guarantee Transmission in Wireless Network under Network Slicing. *Izv. Saratov Univ. (N. S.)*, Ser. Math. Mech. Inform., 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 378–387 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-378-387>

---



УДК 501.1

## Анализ вероятностных характеристик гетерогенной СМО вида $MR(S)/M(S)/\infty$ с параметрами обслуживания, зависящими от состояния вложенной цепи Маркова

Е. П. Полин, С. П. Моисеева, А. Н. Моисеев

Полин Евгений Павлович, аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики, Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, 634050, г. Томск, просп. Ленина, д. 36, polin\_evgeny@mail.ru

Моисеева Светлана Петровна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики, Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, 634050, г. Томск, просп. Ленина, д. 36, smoiseeva@mail.ru

Моисеев Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры программной инженерии, Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, 634050, г. Томск, просп. Ленина, д. 36, moiseev.tsu@gmail.com

Потоки данных в информационных и коммуникационных системах включают в себя интегрированные гетерогенные потоки, содержащие голос, текстовые данные и видео. Поскольку обслуживание разных информационных блоков занимает разное время в зависимости от их формата, используемых протоколов и т. д., предлагается моделировать такие процессы передачи данных с использованием гетерогенных систем массового обслуживания со службами, зависящими от параметров входящего потока. В статье рассматривается гетерогенная система массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов. На вход поступает поток марковского восстановления с двумя состояниями, заданными функциями распределения длин интервалов и матрицей вероятностей переходов. Параметр экспоненциального распределения времени обслуживания определяется состоянием базовой цепи Маркова в момент прибытия заявки и не изменяется до завершения обслуживания. Для изучения системы используется метод характеристических функций. Используя их свойства, получены аналитические выражения для начальных моментов первого и второго порядка числа заявок каждого типа в системе в стационарном режиме. Для анализа взаимосвязи между компонентами процесса получен корреляционный момент.

**Ключевые слова:** бесконечнолинейная система массового обслуживания, поток марковского восстановления, метод моментов.

Поступила в редакцию: 08.11.2019 / Принята: 30.12.2019 / Опубликована: 31.08.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-388-399>

### ВВЕДЕНИЕ

Теория массового обслуживания — раздел теории вероятностей, позволяющий смоделировать и проанализировать поведение той или иной системы массового обслуживания (СМО). В настоящее время область применения теории массового обслуживания включает в себя множество различных сфер человеческой деятельности, в том числе промышленное производство, телекоммуникационные и информационные сети, медицину, страховые компании и пенсионные фонды [1–3].



Основоположником теории массового обслуживания является датский ученый А. К. Эрланг [4]. Предметом его исследования были телефонные системы, характеризующиеся случайным потоком вызовов абонентов, требующих случайного времени занятости телефонной линии. Расширение класса задач впоследствии привело к появлению различных модификаций систем массового обслуживания. Современные информационные и телекоммуникационные системы включают в себя разнотипные потоки данных, которые передают текстовые данные, голосовую информацию и информацию из видеоисточников, что требует использования более сложных моделей потоков. В качестве них используют математические модели марковских модулированных потоков (ВМАР, МАР), полумарковских (SM) или их частных случаев (марковский модулированный пуассоновский поток ММРР, поток марковского восстановления MR и рекуррентный поток GI).

Различные единицы информации требуют различного времени обслуживания в зависимости от своего формата. В связи с этим в качестве моделей процессов в современных информационных системах используют системы массового обслуживания с разнотипными заявками [5–7], в которых обслуживание заявок каждого типа занимает различное время.

Данная статья посвящена исследованию числа занятых приборов в системе с входящим потоком марковского восстановления (MR). Дисциплина обслуживания в рассматриваемой СМО определяется состояниями вложенной по моментам восстановления цепи Маркова, в отличие от работы [8], где параметры обслуживания  $\mu_k$  определяются вероятностями  $r_k$ . В работе [9] рассматривается СМО с расщеплением (копированием) заявок, которые обслуживаются в разных блоках с разными параметрами параллельно. В данной работе с помощью метода начальных моментов найдены аналитические выражения для основных вероятностных характеристик числа занятых приборов в системе.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов. На вход поступает поток марковского восстановления, заданный набором функций распределения длин интервалов  $A_1(x), A_2(x), \dots, A_K(x)$  и матрицей  $\mathbf{P} = [p_{ij}], i, j = 1, 2, \dots, K$  — вложенной по моментам наступления событий цепи Маркова с конечным числом состояний  $k(t) = 1, 2, \dots, K$ .

Дисциплина обслуживания определяется следующим образом: если вложенная цепь Маркова находится в состоянии  $k(t) = s$ , то поступающая заявка будет обслуживаться случайное время, распределенное по экспоненциальному закону  $F_s(x) = 1 - e^{-\mu_s x}$ . Ставится задача исследования многомерного случайного процесса  $\mathbf{i}(t) = [i_1(t), i_2(t), \dots, i_K(t)]$  — числа занятых приборов разного типа в системе.

## 2. СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА

Ввиду громоздкости вывода формул для произвольного числа состояний вложенной цепи Маркова приведем теоретические выкладки для нахождения основных вероятностных характеристик для  $k = 2$ .

Определим четырехмерный марковский случайный процесс  $\{k(t), z(t), i_1(t), i_2(t)\}$ , где  $z(t)$  — длина интервала от момента времени  $t$  до момента наступления очередного события в потоке марковского восстановления,  $k(t)$  — вложенная по моментам восстановления цепь Маркова.



Для распределения вероятностей

$$P(k, z, i_1, i_2, t) = P\{k(t) = k, z(t) < z, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2\}$$

по теореме полной вероятности можно записать следующие равенства:

$$\begin{aligned} P(1, z, i_1, i_2, t + \Delta t) &= (P(1, z + \Delta t, i_1, i_2, t) - P(1, \Delta t, i_1, i_2, t))(i_1 \mu_1 + i_2 \mu_2) + \\ &+ P(1, \Delta t, i_1 - 1, i_2, t) P_{11} A_1(z - \Delta t) + P(2, \Delta t, i_1 - 1, i_2, t) P_{21} A_1(z - \Delta t) + \\ &+ P(1, z + \Delta t, i_1 + 1, i_2, t)(i_1 + 1) \mu_1 \Delta t + P(1, z + \Delta t, i_1, i_2 + 1, t)(i_2 + 1) \mu_2 \Delta t + o(\Delta t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} P(2, z, i_1, i_2, t + \Delta t) &= (P(2, z + \Delta t, i_1, i_2, t) - P(2, \Delta t, i_1, i_2, t))(i_1 \mu_1 + i_2 \mu_2) + \\ &+ P(1, \Delta t, i_1, i_2 - 1, t) P_{12} A_2(z - \Delta t) + P(2, \Delta t, i_1, i_2 - 1, t) P_{22} A_2(z - \Delta t) + \\ &+ P(2, z + \Delta t, i_1 + 1, i_2, t)(i_1 + 1) \mu_1 \Delta t + P(2, z + \Delta t, i_1, i_2 + 1, t)(i_2 + 1) \mu_2 \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Отсюда получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(1, z, i_1, i_2, t)}{\partial t} &= \frac{\partial P(1, z, i_1, i_2, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(1, 0, i_1, i_2, t)}{\partial z} - \\ &- (i_1 \mu_1 + i_2 \mu_2) P(1, z, i_1, i_2, t) + \frac{\partial P(1, 0, i_1 - 1, i_2, t)}{\partial z} P_{11} A_1(z) + \\ &+ \frac{\partial P(2, 0, i_1 - 1, i_2, t)}{\partial z} P_{21} A_1(z) + P(1, z, i_1 + 1, i_2, t)(i_1 + 1) \mu_1 + \\ &+ P(1, z, i_1, i_2 + 1, t)(i_2 + 1) \mu_2, \\ \frac{\partial P(2, z, i_1, i_2, t)}{\partial t} &= \frac{\partial P(2, z, i_1, i_2, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(2, 0, i_1, i_2, t)}{\partial z} - \\ &- (i_1 \mu_1 + i_2 \mu_2) P(2, z, i_1, i_2, t) + \frac{\partial P(2, 0, i_1, i_2 - 1, t)}{\partial z} P_{22} A_2(z) + \\ &+ \frac{\partial P(1, 0, i_1, i_2 - 1, t)}{\partial z} P_{12} A_2(z) + P(2, z, i_1 + 1, i_2, t)(i_1 + 1) \mu_1 + \\ &+ P(2, z, i_1, i_2 + 1, t)(i_2 + 1) \mu_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Для стационарного распределения вероятностей запишем эту систему в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi(1, z, i_1, i_2)}{\partial z} - \frac{\partial \Pi(1, 0, i_1, i_2)}{\partial z} - (i_1 \mu_1 + i_2 \mu_2) \Pi(1, z, i_1, i_2) + \\ + \frac{\partial \Pi(1, 0, i_1 - 1, i_2)}{\partial z} P_{11} A_1(z) + \frac{\partial \Pi(2, 0, i_1 - 1, i_2)}{\partial z} P_{21} A_1(z) + \\ + \Pi(1, z, i_1 + 1, i_2)(i_1 + 1) \mu_1 + \Pi(1, z, i_1, i_2 + 1)(i_2 + 1) \mu_2 = 0, \\ \frac{\partial \Pi(2, z, i_1, i_2)}{\partial z} - \frac{\partial \Pi(2, 0, i_1, i_2)}{\partial z} - (i_1 \mu_1 + i_2 \mu_2) \Pi(2, z, i_1, i_2) + \\ + \frac{\partial \Pi(2, 0, i_1, i_2 - 1)}{\partial z} P_{22} A_2(z) + \frac{\partial \Pi(1, 0, i_1, i_2 - 1)}{\partial z} P_{12} A_2(z) + \\ + \Pi(2, z, i_1 + 1, i_2)(i_1 + 1) \mu_1 + \Pi(2, z, i_1, i_2 + 1)(i_2 + 1) \mu_2 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

### 3. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Введем характеристические функции

$$H(k, z, u_1, u_2) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1} e^{ju_2 i_2} \Pi(k, z, i_1, i_2),$$

где  $j = \sqrt{-1}$ .



Тогда, учитывая, что

$$\frac{\partial H(k, z, u_1, u_2)}{\partial u_i} = j \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} i_1 e^{ju_1 i_1} e^{ju_2 i_2} \Pi(k, z, i_1, i_2),$$

где  $i = 1, 2$ , получаем следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(1, z, u_1, u_2)}{\partial z} - \frac{\partial H(1, 0, u_1, u_2)}{\partial z} + j\mu_1(1 - e^{-ju_1}) \frac{\partial H(1, z, u_1, u_2)}{\partial u_1} + \\ + j\mu_2(1 - e^{-ju_2}) \frac{\partial H(1, z, u_1, u_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial H(1, 0, u_1, u_2)}{\partial z} e^{ju_1} P_{11} A_1(z) + \\ + \frac{\partial H(2, 0, u_1, u_2)}{\partial z} e^{ju_1} P_{21} A_1(z) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(2, z, u_1, u_2)}{\partial z} - \frac{\partial H(2, 0, u_1, u_2)}{\partial z} + j\mu_1(1 - e^{-ju_1}) \frac{\partial H(2, z, u_1, u_2)}{\partial u_1} + \\ + j\mu_2(1 - e^{-ju_2}) \frac{\partial H(2, z, u_1, u_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial H(1, 0, u_1, u_2)}{\partial z} e^{ju_2} P_{12} A_2(z) + \\ + \frac{\partial H(2, 0, u_1, u_2)}{\partial z} e^{ju_2} P_{22} A_2(z) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Воспользуемся свойствами характеристической функции и продифференцируем (4) и (5) по  $u_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H(1, z, u_1, u_2)}{\partial z \partial u_1} - \frac{\partial^2 H(1, 0, u_1, u_2)}{\partial z \partial u_1} + j^2 \mu_1 e^{-ju_1} \frac{\partial H(1, z, u_1, u_2)}{\partial u_1} + \\ + j\mu_1(1 - e^{-ju_1}) \frac{\partial^2 H(1, z, u_1, u_2)}{\partial u_1^2} + j\mu_2(1 - e^{-ju_2}) \frac{\partial^2 H(1, z, u_1, u_2)}{\partial u_2 \partial u_1} + \\ + j e^{ju_1} P_{11} A_1(z) \frac{\partial H(1, 0, u_1, u_2)}{\partial z} + e^{ju_1} P_{11} A_1(z) \frac{\partial^2 H(1, 0, u_1, u_2)}{\partial z \partial u_1} + \\ + j e^{ju_1} P_{21} A_1(z) \frac{\partial H(2, 0, u_1, u_2)}{\partial z} + e^{ju_1} P_{21} A_1(z) \frac{\partial^2 H(2, 0, u_1, u_2)}{\partial z \partial u_1} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H(2, z, u_1, u_2)}{\partial z \partial u_1} - \frac{\partial^2 H(2, 0, u_1, u_2)}{\partial z \partial u_1} + j^2 \mu_1 e^{-ju_1} \frac{\partial H(2, z, u_1, u_2)}{\partial u_1} + \\ + j\mu_1(1 - e^{-ju_1}) \frac{\partial^2 H(2, z, u_1, u_2)}{\partial u_1^2} + j\mu_2(1 - e^{-ju_2}) \frac{\partial^2 H(2, z, u_1, u_2)}{\partial u_2 \partial u_1} + \\ + e^{ju_2} P_{12} A_2(z) \frac{\partial^2 H(1, 0, u_1, u_2)}{\partial z \partial u_1} + e^{ju_2} P_{22} A_2(z) \frac{\partial^2 H(2, 0, u_1, u_2)}{\partial z \partial u_1} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Продифференцируем (4) и (5) по  $u_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H(1, z, u_1, u_2)}{\partial z \partial u_2} - \frac{\partial^2 H(1, 0, u_1, u_2)}{\partial z \partial u_2} + j\mu_1(1 - e^{-ju_1}) \frac{\partial^2 H(1, z, u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} + \\ + j^2 \mu_2 e^{-ju_2} \frac{\partial H(1, z, u_1, u_2)}{\partial u_2} + j\mu_2(1 - e^{-ju_2}) \frac{\partial^2 H(1, z, u_1, u_2)}{\partial u_2^2} + \\ + e^{ju_1} P_{11} A_1(z) \frac{\partial^2 H(1, 0, u_1, u_2)}{\partial z \partial u_2} + e^{ju_1} P_{21} A_1(z) \frac{\partial^2 H(2, 0, u_1, u_2)}{\partial z \partial u_2} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 H(2, z, u_1, u_2)}{\partial z \partial u_2} - \frac{\partial^2 H(2, 0, u_1, u_2)}{\partial z \partial u_2} + j\mu_1 (1 - e^{-ju_1}) \frac{\partial^2 H(2, z, u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} + \\
 & + j^2 \mu_2 e^{-ju_2} \frac{\partial H(2, z, u_1, u_2)}{\partial u_2} + j\mu_2 (1 - e^{-ju_2}) \frac{\partial^2 H(2, z, u_1, u_2)}{\partial u_2^2} + \\
 & + j e^{ju_2} P_{12} A_2(z) \frac{\partial H(1, 0, u_1, u_2)}{\partial z} + e^{ju_2} P_{12} A_2(z) \frac{\partial^2 H(1, 0, u_1, u_2)}{\partial z \partial u_2} + \\
 & + j e^{ju_2} P_{22} A_2(z) \frac{\partial H(2, 0, u_1, u_2)}{\partial z} + e^{ju_2} P_{22} A_2(z) \frac{\partial^2 H(2, 0, u_1, u_2)}{\partial z \partial u_2} = 0. \tag{9}
 \end{aligned}$$

Положим в (6) и (7)  $u_1 = 0$  и  $u_2 = 0$ , получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial m_1^{(1)}(1, z)}{\partial z} - \frac{\partial m_1^{(1)}(1, 0)}{\partial z} - \mu_1 m_1^{(1)}(1, z) + P_{11} A_1(z) R'(1, 0) + \\
 & + P_{11} A_1(z) \frac{\partial m_1^{(1)}(1, 0)}{\partial z} + P_{21} A_1(z) R'(2, 0) + P_{21} A_1(z) \frac{\partial m_1^{(1)}(2, 0)}{\partial z} = 0, \\
 & \frac{\partial m_1^{(1)}(2, z)}{\partial z} - \frac{\partial m_1^{(1)}(2, 0)}{\partial z} - \mu_1 m_1^{(1)}(2, z) + \\
 & + P_{12} A_2(z) \frac{\partial m_1^{(1)}(1, 0)}{\partial z} + P_{22} A_2(z) \frac{\partial m_1^{(1)}(2, 0)}{\partial z} = 0. \tag{10}
 \end{aligned}$$

Положим в (8) и (9)  $u_1 = 0$  и  $u_2 = 0$ , получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial m_1^{(2)}(1, z)}{\partial z} - \frac{\partial m_1^{(2)}(1, 0)}{\partial z} - \mu_2 m_1^{(2)}(1, z) + \\
 & + P_{11} A_1(z) \frac{\partial m_1^{(2)}(1, 0)}{\partial z} + P_{21} A_1(z) \frac{\partial m_1^{(2)}(2, 0)}{\partial z} = 0, \\
 & \frac{\partial m_1^{(2)}(2, z)}{\partial z} - \frac{\partial m_1^{(2)}(2, 0)}{\partial z} - \mu_2 m_1^{(2)}(2, z) + P_{12} A_2(z) R'(1, 0) + \\
 & + P_{12} A_2(z) \frac{\partial m_1^{(2)}(1, 0)}{\partial z} + P_{22} A_2(z) R'(2, 0) + P_{22} A_2(z) \frac{\partial m_1^{(2)}(2, 0)}{\partial z} = 0. \tag{11}
 \end{aligned}$$

Запишем систему (10) в виде дифференциального матричного уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(z)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} [\mathbf{PA}(z) - \mathbf{I}] + \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA}(z) \mathbf{E}_{11} - \mu_1 \mathbf{m}_1^{(1)}(z) = 0. \tag{12}$$

Здесь  $\mathbf{m}_1^{(1)}(z) = [m_1^{(1)}(1, z), m_1^{(1)}(2, z)]$ ,  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(z) & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2(z) \end{bmatrix}$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(z)}{\partial z} = \left[ \frac{\partial m_1^{(1)}(1, z)}{\partial z}, \frac{\partial m_1^{(1)}(2, z)}{\partial z} \right], \\
 \frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} &= \left[ \frac{\partial m_1^{(1)}(1, 0)}{\partial z}, \frac{\partial m_1^{(1)}(2, 0)}{\partial z} \right], \quad \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} = \left[ \frac{\partial R(1, 0)}{\partial z}, \frac{\partial R(2, 0)}{\partial z} \right].
 \end{aligned}$$

Эту систему дифференциальных уравнений будем решать при помощи преобразования Лапласа – Стильеса

$$\phi_1(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha z} d\mathbf{m}_1^{(1)}(z), \quad \mathbf{A} * (\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha z} d\mathbf{A}(z).$$



Выполнив в (12) преобразование Лапласа – Стильеса, получим

$$\phi_1(\alpha)(\mu_1 - \alpha) = \frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} [\mathbf{PA}*(\alpha) - \mathbf{I}] + \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA} * (\alpha) \mathbf{E}_{11}. \quad (13)$$

Положив в (13)  $\alpha = \mu_1$ , имеем

$$\frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA} * (\mu_1) \mathbf{E}_{11} [\mathbf{I} - \mathbf{PA} * (\mu_1)]^{-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_1^{(1)}(\infty) = \phi_1(0) &= \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA} * (\mu_1) \mathbf{E}_{11} [\mathbf{I} - \mathbf{PA} * (\mu_1)]^{-1} [\mathbf{PA} * (0) - \mathbf{I}] + \\ &+ \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA} * (0) \mathbf{E}_{11}. \end{aligned}$$

Отметим, что  $\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} = \lambda \mathbf{r}$  и  $\mathbf{rP} = \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{re} = 1$ .

Для начального момента первого порядка можно записать

$$\mathbf{m}_1^{(1)}(\infty) = \frac{\lambda}{\mu_1} \mathbf{r} \mathbf{E}_{11}.$$

Умножим на единичный вектор  $\mathbf{e}$ , получим

$$m_1^{(1)}(\infty) = \frac{\lambda}{\mu_1},$$

где  $\lambda = \frac{1}{\int_0^\infty (1 - \mathbf{rA}(u)\mathbf{e}) du}$ .

#### 4. НАЧАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Из свойств характеристической функции имеем

$$\left. \frac{\partial^2 H(k, u_1, u_2, z)}{\partial u_i^2} \right|_{\substack{u_1 = 0 \\ u_2 = 0}} = j^2 m_2^{(i)}(k, z),$$

где  $i = 1, 2$ .

Продифференцировав (6)–(9) по  $u_1$  и  $u_2$  и положив  $u_1 = 0$  и  $u_2 = 0$ , получим 4 системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial m_2^{(1)}(1, z)}{\partial z} + \frac{\partial m_2^{(1)}(1, 0)}{\partial z} - \mu_1 m_1^{(1)}(1, z) + 2\mu_1 m_2^{(1)}(1, z) - P_{11} A_1(z) R'(1, 0) - \\ - 2P_{11} A_1(z) \frac{\partial m_1^{(1)}(1, 0)}{\partial z} - P_{11} A_1(z) \frac{\partial m_2^{(1)}(1, 0)}{\partial z} - \\ - P_{21} A_1(z) R'(2, 0) - 2P_{21} A_1(z) \frac{\partial m_1^{(1)}(2, 0)}{\partial z} - P_{21} A_1(z) \frac{\partial m_2^{(1)}(2, 0)}{\partial z} = 0, \quad (14) \\ -\frac{\partial m_2^{(1)}(2, z)}{\partial z} + \frac{\partial m_2^{(1)}(2, 0)}{\partial z} - \mu_1 m_1^{(1)}(2, z) + \\ + 2\mu_1 m_2^{(1)}(2, z) - P_{12} A_2(z) \frac{\partial m_2^{(1)}(1, 0)}{\partial z} - P_{22} A_2(z) \frac{\partial m_2^{(1)}(2, 0)}{\partial z} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial m_2^{(1,2)}(1,z)}{\partial z} + \frac{\partial m_2^{(1,2)}(1,0)}{\partial z} + \mu_1 m_2^{(1,2)}(1,z) + \mu_2 m_2^{(1,2)}(1,z) - P_{11} A_1(z) \frac{\partial m_1^{(1)}(1,0)}{\partial z} - \\
 & - P_{11} A_1(z) \frac{\partial m_2^{(1,2)}(1,0)}{\partial z} - P_{21} A_1(z) \frac{\partial m_1^{(1)}(2,0)}{\partial z} - P_{21} A_1(z) \frac{\partial m_2^{(1,2)}(2,0)}{\partial z} = 0, \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial m_2^{(1,2)}(2,z)}{\partial z} + \frac{\partial m_2^{(1,2)}(2,0)}{\partial z} + \mu_1 m_2^{(1,2)}(2,z) + \mu_2 m_2^{(1,2)}(2,z) - P_{12} A_2(z) \frac{\partial m_1^{(1)}(1,0)}{\partial z} - \\
 & - P_{12} A_2(z) \frac{\partial m_2^{(1,2)}(1,0)}{\partial z} - P_{22} A_2(z) \frac{\partial m_1^{(1)}(2,0)}{\partial z} - P_{22} A_2(z) \frac{\partial m_2^{(1,2)}(2,0)}{\partial z} = 0; \\
 & -\frac{\partial m_2^{(1,2)}(1,z)}{\partial z} + \frac{\partial m_2^{(1,2)}(1,0)}{\partial z} + \mu_1 m_2^{(1,2)}(1,z) + \mu_2 m_2^{(1,2)}(1,z) - P_{11} A_1(z) \frac{\partial m_1^{(2)}(1,0)}{\partial z} - \\
 & - P_{11} A_1(z) \frac{\partial m_2^{(1,2)}(1,0)}{\partial z} - P_{21} A_1(z) \frac{\partial m_1^{(2)}(2,0)}{\partial z} - P_{21} A_1(z) \frac{\partial m_2^{(1,2)}(2,0)}{\partial z} = 0, \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial m_2^{(1,2)}(2,z)}{\partial z} + \frac{\partial m_2^{(1,2)}(2,0)}{\partial z} + \mu_1 m_2^{(1,2)}(2,z) + \mu_2 m_2^{(1,2)}(2,z) - P_{12} A_2(z) \frac{\partial m_1^{(1)}(1,0)}{\partial z} - \\
 & - P_{12} A_2(z) \frac{\partial m_2^{(1,2)}(1,0)}{\partial z} - P_{22} A_2(z) \frac{\partial m_1^{(1)}(2,0)}{\partial z} - P_{22} A_2(z) \frac{\partial m_2^{(1,2)}(2,0)}{\partial z} = 0; \\
 & -\frac{\partial m_2^{(2)}(1,z)}{\partial z} + \frac{\partial m_2^{(2)}(1,0)}{\partial z} - \mu_2 m_1^{(2)}(1,z) + 2\mu_2 m_2^{(2)}(1,z) - \\
 & - P_{11} A_1(z) \frac{\partial m_2^{(2)}(1,0)}{\partial z} - P_{21} A_1(z) \frac{\partial m_2^{(2)}(2,0)}{\partial z} = 0, \\
 & -\frac{\partial m_2^{(2)}(2,z)}{\partial z} + \frac{\partial m_2^{(2)}(2,0)}{\partial z} - \mu_2 m_1^{(2)}(2,z) + 2\mu_2 m_2^{(2)}(2,z) - \\
 & - P_{12} A_2(z) R'(1,0) - 2P_{12} A_2(z) \frac{\partial m_1^{(2)}(1,0)}{\partial z} - P_{12} A_2(z) \frac{\partial m_2^{(2)}(1,0)}{\partial z} - \\
 & - P_{22} A_2(z) R'(2,0) - 2P_{22} A_2(z) \frac{\partial m_1^{(2)}(2,0)}{\partial z} - P_{22} A_2(z) \frac{\partial m_2^{(2)}(2,0)}{\partial z} = 0. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Запишем системы (14)–(17) в матричном виде:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \mathbf{m}_2^{(1)}(z)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{m}_2^{(1)}(0)}{\partial z} [\mathbf{PA}(z) - \mathbf{I}] + \mu_1 \mathbf{m}_1^{(1)}(z) - 2\mu_1 \mathbf{m}_2^{(1)}(z) + \\
 & + \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA}(z) \mathbf{E}_{11} + 2 \frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} \mathbf{PA}(z) \mathbf{E}_{11} = 0; \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}_2^{(1,2)}(z)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{m}_2^{(1,2)}(0)}{\partial z} [\mathbf{PA}(z) - \mathbf{I}] - \mathbf{m}_2^{(1,2)}(z) (\mu_1 + \mu_2) + \frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} \mathbf{PA}(z) = 0; \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \mathbf{m}_2^{(1,2)}(z)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{m}_2^{(1,2)}(0)}{\partial z} [\mathbf{PA}(z) - \mathbf{I}] - \mathbf{m}_2^{(1,2)}(z) (\mu_1 + \mu_2) + \\
 & + \frac{\partial \mathbf{m}_1^{(2)}(0)}{\partial z} \mathbf{PA}(z) = 0; \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \mathbf{m}_2^{(2)}(z)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{m}_2^{(2)}(0)}{\partial z} [\mathbf{PA}(z) - \mathbf{I}] + \mu_2 \mathbf{m}_1^{(2)}(z) - 2\mu_2 \mathbf{m}_2^{(2)}(z) + \\
 & + \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA}(z) \mathbf{E}_{22} + 2 \frac{\partial \mathbf{m}_1^{(2)}(0)}{\partial z} \mathbf{PA}(z) \mathbf{E}_{22} = 0. \quad (21)
 \end{aligned}$$



В уравнениях (18)–(21)

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_1^{(1)}(z) &= \left[ m_1^{(1)}(1, z), m_1^{(1)}(2, z) \right], \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(z) & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2(z) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(z)}{\partial z} &= \left[ \frac{\partial m_1^{(1)}(1, z)}{\partial z}, \frac{\partial m_1^{(1)}(2, z)}{\partial z} \right], \quad \frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} = \left[ \frac{\partial m_1^{(1)}(1, 0)}{\partial z}, \frac{\partial m_1^{(1)}(2, 0)}{\partial z} \right], \\ \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} &= \left[ \frac{\partial R(1, 0)}{\partial z}, \frac{\partial R(2, 0)}{\partial z} \right].\end{aligned}$$

Систему дифференциальных уравнений (18) будем решать при помощи преобразования Лапласа – Стильеса

$$\phi_1(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\partial z} d\mathbf{m}_1^{(1)}(z), \quad \phi_2(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha z} d\mathbf{m}_2^{(1)}(z), \quad \mathbf{A} * (\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha z} d\mathbf{A}(z).$$

Выполнив в (18) преобразование Лапласа – Стильеса, получим

$$\begin{aligned}\phi_2(\alpha)(2\mu_1 - \alpha) &= \frac{\partial \mathbf{m}_2^{(1)}(0)}{\partial z} [\mathbf{PA} * (\alpha) - \mathbf{I}] + 2 \frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} \mathbf{PA} * (\alpha) \mathbf{E}_{11} + \\ &\quad + \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA} * (\alpha) \mathbf{E}_{11} + \mu_1 \phi_1(\alpha).\end{aligned}\tag{22}$$

Положив в (22)  $\alpha = 2\mu_1$ , имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{m}_2^{(1)}(0)}{\partial z} &= \left( 2 \frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} \mathbf{PA} * (2\mu_1) \mathbf{E}_{11} + \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA} * (2\mu_1) \mathbf{E}_{11} + \mu_1 \phi_1(2\mu_1) \right) \times \\ &\quad \times [\mathbf{I} - \mathbf{PA} * (2\mu_1)]^{-1}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\phi_2(0) &= \frac{1}{2\mu_1} \left( 2 \frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} \mathbf{PA} * (2\mu_1) \mathbf{E}_{11} + \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA} * (2\mu_1) \mathbf{E}_{11} + \mu_1 \phi_1(2\mu_1) \right) \times \\ &\quad \times [\mathbf{I} - \mathbf{PA} * (2\mu_1)]^{-1} [\mathbf{PA} * (0) - \mathbf{I}] + \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA} * (\mu_1) \mathbf{E}_{11} \times \\ &\quad \times [\mathbf{I} - \mathbf{PA} * (\mu_1)]^{-1} \mathbf{PA} * (0) \mathbf{E}_{11} + \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA} * (0) \mathbf{E}_{11} + \lambda \mathbf{r} \mathbf{E}_{11}.\end{aligned}$$

Отметим, что  $\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} = \lambda \mathbf{r}$  и  $\mathbf{rP} = \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{re} = 1$ ,  $\lambda = \frac{1}{\int_0^\infty (1 - \mathbf{rA}(u) \mathbf{e}) du}$ .

Для начального момента второго порядка заявок первого типа в системе получим равенство

$$m_2^{(1)}(\infty) = \mathbf{m}_2^{(1)}(\infty) \mathbf{e} = \phi_2(0) \mathbf{e} = \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA} * (\mu_1) \mathbf{E}_{11} \times$$



$$\times [\mathbf{I} - \mathbf{PA} * (\mu_1)]^{-1} \mathbf{PA} * (0) \mathbf{E}_{11} \mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA} * (0) \mathbf{E}_{11} \mathbf{e} + \lambda \mathbf{r} \mathbf{E}_{11} \mathbf{e}.$$

Для начального момента второго порядка заявок второго типа в системе получим равенство

$$m_2^{(2)}(\infty) = \mathbf{m}_2^{(2)}(\infty) \mathbf{e} = \phi_2(0) \mathbf{e} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA} * (\mu_2) \mathbf{E}_{22} \times \\ \times [\mathbf{I} - \mathbf{PA} * (\mu_2)]^{-1} \mathbf{PA} * (0) \mathbf{E}_{22} \mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA} * (0) \mathbf{E}_{22} \mathbf{e} + \lambda \mathbf{r} \mathbf{E}_{22} \mathbf{e}.$$

Аналогичным образом можно получить моменты первого и второго порядков заявок  $k$ -го типа в системе. Моменты первого порядка числа занятых приборов каждого типа в рассматриваемой системе определяются равенствами

$$m_1^{(k)}(\infty) = \frac{\lambda}{\mu_k},$$

где  $\lambda$  — интенсивность потока марковского восстановления, которая определяется выражением

$$\lambda = \frac{1}{\int_0^\infty (1 - \mathbf{r} \mathbf{A}(u) \mathbf{e}) du}.$$

Здесь  $\mathbf{r} = [r(1), r(2), \dots, r(K)]$  — вектор стационарного распределения вероятностей значений вложенной цепи Маркова.

Моменты второго порядка числа занятых приборов каждого типа в системе имеют вид

$$m_2^{(k)}(\infty) = \frac{1}{\mu_k} \lambda \mathbf{r} \mathbf{PA} * (\mu_k) \mathbf{E}_k [\mathbf{I} - \mathbf{PA} * (\mu_k)]^{-1} \mathbf{PA} * (0) \mathbf{E}_k \mathbf{e} + \lambda \mathbf{r} \mathbf{PA} * (0) \mathbf{E}_k \mathbf{e} + \lambda \mathbf{r} \mathbf{E}_k \mathbf{e}.$$

Здесь  $\mathbf{A} * (\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha z} d\mathbf{A}(z)$ ,  $\mathbf{E}_k$  — квадратная матрица, все элементы которой равны 0, кроме  $e_{kk} = 1$ .

## 5. КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ

Систему дифференциальных уравнений (19) будем решать при помощи преобразования Лапласа – Стильеса

$$\theta(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha z} d\mathbf{m}_2^{(1,2)}(z), \quad A * (\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha z} d\mathbf{A}(z).$$

Выполнив в (19) преобразование Лапласа – Стильеса, получим

$$\theta(\alpha)(\mu_1 + \mu_2 - \alpha) = \frac{\partial \mathbf{m}_2^{(1,2)}(0)}{\partial z} [\mathbf{PA} * (\alpha) - \mathbf{I}] + \frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} \mathbf{PA} * (\alpha). \quad (23)$$

Учитывая, что  $\frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA} * (\mu_1) \mathbf{E}_{11} [\mathbf{I} - \mathbf{PA} * (\mu_1)]^{-1}$ , и положив в (23)  $\alpha = \mu_1 + \mu_2$ , получим

$$\frac{\partial \mathbf{m}_2^{(1,2)}(0)}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA} * (\mu_1) \mathbf{E}_{11} [\mathbf{I} - \mathbf{PA} * (\mu_1)]^{-1} \mathbf{PA} * (\mu_1 + \mu_2) [\mathbf{I} - \mathbf{PA} * (\mu_1 + \mu_2)]^{-1}.$$

Тогда

$$m_2^{(1,2)} = \theta(0) \mathbf{e} = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA} * (\mu_1) \mathbf{E}_{11} [\mathbf{I} - \mathbf{PA} * (\mu_1)]^{-1} \mathbf{P}.$$



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе построена и исследована математическая модель обслуживания заявок в бесконечнолинейной гетерогенной системе массового обслуживания  $MR(s)|M(s)|\infty$  с входящим потоком марковского восстановления. Определены аналитические выражения для нахождения первого и второго моментов, характеризующих число занятых приборов каждого типа в системе, а также коэффициента корреляции.

## Библиографический список

1. Гарайшина И. Р., Назаров А. А. Исследование математической модели процесса изменения страхового капитала Пенсионного фонда // Вестн. Том. гос. ун-та. 2003. № 280. С. 109–111.
2. Фокина Н. П., Тананко И. Е. Метод управления маршрутизацией в сетях массового обслуживания с переменной топологией // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. вып. 2, ч. 2. С. 82–88. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-2-2-82-88>
3. Ахмедова Д. Д., Терпугов А. Ф. Математическая модель страховой компании с учетом расходов на рекламу // Изв. вузов. Физика. 2001. Т. 44, № 1. С. 25–29.
4. Erlang A. K. The theory of probability and telephone conversations // Nyt Tidsskrift for Matematik. B. 1909. Vol. 20. P. 33–39.
5. Панкратова Е. В. Исследование системы массового обслуживания  $GI/GI/\infty$  с двумя типами заявок // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2015) : материалы XIV Междунар. конф. им. А. Ф. Терпугова. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2015. Ч. 1. С. 152–157.
6. Панкратова Е. В. Исследование системы массового обслуживания  $MAP|M|\infty$  с разнотипным обслуживанием методом асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний входящего потока // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети : Управление, вычисление, связь (DCCN-2015) – Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2015) : материалы Восемнадцатой междунар. науч. конф. (Москва, 19–22 октября 2015 г.). М. : ИПУ РАН, 2015. С. 585–592.
7. Pankratova E. V., Moiseeva S. P. Queueing System  $GI/GI/\infty$  with n Types of Customers // Communications in Computer and Information Science. Switzerland : Springer, 2015. Vol. 564. P. 216–225.
8. Mouseeva C. P., Панкратова Е. В., Убонова Е. Г. Исследование бесконечно-линейной системы массового обслуживания с разнотипным обслуживанием и входящим потоком марковского восстановления // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 2 (35). С. 46–53. DOI: <https://doi.org/10.17223/19988605/35/5>
9. Mouseeva C. P., Синякова И. А. Метод моментов для исследования математической модели параллельного обслуживания кратных заявок потока марковского восстановления // Изв. ТПУ. 2012. Т. 321, № 5. С. 24–28.

## Образец для цитирования:

Полин Е. П., Mouseeva C. P., Mouseev A. H. Анализ вероятностных характеристик гетерогенной СМО вида  $MR(S)/M(S)/\infty$  с параметрами обслуживания, зависящими от состояния вложенной цепи Маркова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 388–399. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-388-399>



## Heterogeneous Queueing System $MR(S)/M(S)/\infty$ with Service Parameters Depending on the State of the Underlying Markov Chain

E. P. Polin, S. P. Moiseeva, A. N. Moiseev

Evgeny P. Polin, <https://orcid.org/0000-0002-0250-2368>, Tomsk State University, 36 Lenina Ave., Tomsk 634050, Russia, polin\_evgeny@mail.ru

Svetlana P. Moiseeva, <https://orcid.org/0000-0001-9285-1555>, Tomsk State University, 36 Lenina Ave., Tomsk 634050, Russia, smoiseeva@mail.ru

Alexander N. Moiseev, <https://orcid.org/0000-0003-2369-452X>, Tomsk State University, 36 Lenina Ave., Tomsk 634050, Russia, moiseev.tsu@gmail.com

Data streams in information and communication systems include integrated heterogeneous streams, containing voice, text data and video. Since the service of different information units takes different time depending on their format, used protocols and so on, it is proposed to model such data transmission processes using heterogeneous queueing systems with services depending on the parameters of the incoming stream. In the paper, an infinite-server heterogeneous queueing system is considered. Arrivals are modeled as a Markov renewal process (MRP) with two states given by distribution functions of the interval lengths and by a transition probability matrix. The exponential distribution parameter of service time is determined by the state of the underlying Markov chain of the MRP at the moment when a customer arrives and does not change until the service completion. To study the system, the method of characteristic functions is used. Using their properties, analytical expressions are obtained for the initial moments of the first and the second order of the number of customers of each type present in the system in a steady-state regime. To analyze the relationship between the components of the process, a correlation moment is derived.

**Keywords:** infinite-server queueing system, Markov renewal process, method of initial moments.

Received: 08.11.2019 / Accepted: 30.12.2019 / Published: 31.08.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

### References

1. Garayshina I. R., Nazarov A. A. Investigation of Russian Federation retirement fund insurance capital modification process mathematical model. *Tomsk State University Journal*, 2003, no. 280, pp. 109–111 (in Russian).
2. Fokina N. P., Tananko I. E. A Method of Routing Control in Queueing Networks with Changing Topology. *Izv. Saratov Univ. (N. S.)*, Ser. Math. Mech. Inform., 2013, vol. 13, iss. 2, pt. 2, pp. 82–88 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-2-2-82-88>
3. Akhmedova D. D., Terpugov A. F. Mathematical model of an insurance company taking into account advertising costs. *Izvestiya vuzov. Fizika*, 2001, vol. 44, no. 1, pp. 25–29 (in Russian).
4. Erlang A. K. The theory of probability and telephone conversations. *Nyt Tidsskrift for Matematik*, B, 1909, vol. 20, pp. 33–39.
5. Pankratova E. V. Investigation of the queuing system  $GI/GI/\infty$  with two types of arrivals. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2015): materialy XIV Mezhdunar. konf. im. A. F. Terpugova* [Information Technology and Mathematical Modeling (ITMM-2015). Materials of the XIV Int. conf. named after A. F. Terpugov]. Tomsk, Izd-vo Tomskogo universiteta, 2015, pt. 1, pp. 152–157 (in Russian).



6. Pankratova E. V. Investigation of the queuing system  $MAP|M|\infty$  with heterogeneous service using the asymptotic analysis method under the condition of extremely rare changes in the state of the incoming stream. In: *Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2015)*. Moscow, Institut problem upravleniya RAS, 2015, pp. 585–592 (in Russian).
7. Pankratova E. V., Moiseeva S. P. Queueing System  $GI/GI/\infty$  with n Types of Customers. *Communications in Computer and Information Science*. Switzerland, Springer, 2015, vol. 564, pp. 216–225.
8. Moiseeva S. P., Pankratova E. V., Ubonova E. G. Queuing system with renewal arrival process and two types of customers. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2016, no. 2 (35), pp. 46–53 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.17223/19988605/35/5>
9. Moiseeva S. P., Sinyakova I. A. The method of moments for the study of the mathematical model of parallel servicing multiple claims of the Markov renewal process. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2012, vol. 321, no. 5, pp. 24–28 (in Russian).

---

**Cite this article as:**

Polin E. P., Moiseeva S. P., Moiseev A. N. Heterogeneous Queueing System  $MR(S)/M(S)/\infty$  with Service Parameters Depending on the State of the Underlying Markov Chain. *Izv. Saratov Univ. (N. S.)*, Ser. Math. Mech. Inform., 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 388–399 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-388-399>

---



УДК 519.21

## Суммарный объем занятого ресурса в системе с параллельным обслуживанием и входящим ММРР-потоком

Е. Н. Чернышова, Е. Ю. Лисовская

Чернышова Елизавета Николаевна, студент кафедры теории вероятностей и математической статистики, Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, 634050, г. Томск, просп. Ленина, д. 36, chernishova@stud.tsu.ru

Лисовская Екатерина Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики, Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, 634050, г. Томск, просп. Ленина, д. 36, lisovskaya-eyu@rudn.ru

В данной работе рассматривается ресурсная система с неограниченным числом приборов, предоставляемых ресурсов и параллельным обслуживанием заявок, поступающих в систему согласно ММРР-потоку. С помощью комбинации методов многомерного динамического просеивания и асимптотического анализа доказывается, что совместное асимптотическое распределение вероятностей суммарных объемов занятого ресурса каждого типа сходится к двумерному гауссовскому распределению в условиях растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменениях состояний цепи Маркова. Находятся параметры асимптотического (гауссовского) распределения вероятностей суммарных объемов занятого ресурса на блоках системы. Проводится численный анализ точности аппроксимации и определяется область применимости асимптотических результатов.

**Ключевые слова:** ресурсные системы массового обслуживания, метод динамического просеивания, асимптотический анализ, гауссовская аппроксимация.

Поступила в редакцию: 07.06.2019 / Принята: 30.12.2019 / Опубликована: 31.08.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-400-410>

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время ввиду широкой востребованности мобильных и телекоммуникационных сетей значительную роль играет исследование моделей массового обслуживания [1, 2]. Эти математические модели используются для анализа показателей и улучшения эффективности систем. Однако для более правдоподобного описания трафика в сетях рекомендуется использовать марковские или рекуррентные потоки событий.

Помимо этого, ввиду неоднородности услуг (телефонные звонки, смс-сообщения, интернет-трафик) необходимо учитывать объем обрабатываемой информации во избежание потери или искажения данных из-за нехватки ресурсов [3, 4]. В связи с этим на сегодняшний день актуальной является разработка новых ресурсных моделей, сформулированных в терминах систем массового обслуживания (СМО), которые бы позволили оценить объемы занятого ресурса. Системы с неограниченным числом



приборов используют для аппроксимации многолинейных систем при условии малой вероятности отказа в обслуживании [5]. Кроме того, модели с неограниченным числом приборов позволяют оценить возможную загрузку в системе и применять меры по предотвращению перегрузки систем с ограниченным числом приборов и минимизации потерь, вызванных нехваткой свободного канала и/или ресурса.

Отметим, что адекватной математической моделью реальных потоков являются дважды стохастические MAP-потоки (Markovian Arrival Process) и его частные случаи, в том числе MMPP (Markov Modulated Poisson Process), предложенные D. M. Lucantoni и M. F. Neuts в 1991 г. [6, 7]. В данной работе с помощью методов многомерного динамического просеивания и асимптотического анализа исследуются случайные процессы суммарных объемов занятого ресурса в СМО с входящим MMPP-потоком заявок и их параллельным обслуживанием.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему массового обслуживания, состоящую из двух блоков, каждый из которых имеет неограниченное число приборов; на вход поступает MMPP-поток требований, управляемый цепью Маркова  $k(t)$ , заданной матрицами инфинитезимальных характеристик  $\mathbf{Q}$  и условных интенсивностей  $\Lambda$  (рис. 1).

Заявка, пришедшая в СМО, попадает в каждый блок и мгновенно занимает любой свободный прибор, где обслуживается в течение случайного времени. Функция распределения вероятностей времени обслуживания на первом блоке —  $B_1(\tau) = P\{\xi_1 < \tau\}$ , на втором —  $B_2(\tau) = P\{\xi_2 < \tau\}$ . Функции распределения вероятностей для случайного объема ресурсов на первом и втором блоках —  $G_1(y) = P\{\nu_1 < y\}$  и  $G_2(y) = P\{\nu_2 < y\}$  соответственно. После завершения обслуживания требование покидает систему, освобождая прибор и все занимаемые ресурсы. Количество занимаемого ресурса и время обслуживания не зависят друг от друга. Обозначим через  $V_1(t)$  и  $V_2(t)$  суммарный объем занятого ресурса на первом и втором блоках в момент времени  $t$  соответственно. Ставится задача исследования случайного двумерного процесса  $\{V_1(t), V_2(t)\}$ . Важно отметить, что данный процесс не является Марковским, для его дальнейшего исследования марковизируем процесс, используя метод динамического просеивания.

На рис. 2 изображены три оси времени. Ось под номером 0 отображает моменты наступления событий входящего потока. Зададим функции, определяющие динамическую вероятность просеивания на оси 1 и 2. Вероятность просеивания на  $i$ -ю ось равна вероятности того, что заявка, попавшая в  $i$ -й блок в момент времени  $t$ , не закончила обслуживание к моменту времени  $T$  ( $i = 1, 2$ ). Зафиксируем произвольный момент времени  $t < T$ . Функция  $S_1(t) = 1 - B_1(T-t)$  — вероятность просеивания на ось 1,  $S_2(t) = 1 - B_2(T-t)$  — на ось 2,  $S_1(t) \cdot S_2(t) = (1 - B_1(T-t)) \cdot (1 - B_2(T-t))$  — на оси 1 и 2 одновременно. Обозначим  $W_1(t)$  и  $W_2(t)$  как суммарный объем занятого ресурса в СМО после просеивания.

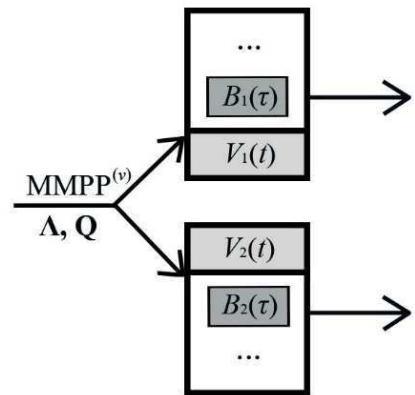


Рис. 1. Ресурсная СМО с входящим MMPP-потоком и параллельным обслуживанием

Fig. 1. Resource QS with MMPP arrivals and parallel service

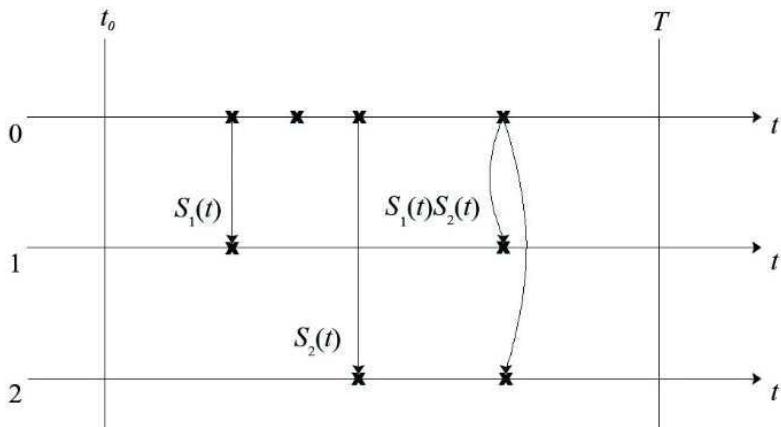


Рис. 2. Просеивание заявок входящего потока событий  
Fig. 2. Screening of arrival customers

Для исследуемого процесса  $\{V_1(t), V_2(t)\}$  справедливо в момент времени  $T$ :

$$P\{V_1(T) < z_1, V_2(T) < z_2\} = P\{W_1(T) < z_1, W_2(T) < z_2\}, \quad z_1, z_2 > 0. \quad (1)$$

Для дальнейшего исследования процесса  $\{V_1(t), V_2(t)\}$  будем использовать процесс  $\{W_1(t), W_2(t)\}$ .

## 2. СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА

Рассмотрим случайный процесс  $\{k(t), W_1(t), W_2(t)\}$ , где  $k(t)$  — состояние цепи Маркова, управляющей входящим ММРР-потоком. Данный процесс является Марковским для функции распределения вероятностей

$$P\{k(t) = k, W_1(t) < w_1, W_2(t) < w_2\} = P(k, w_1, w_2), \quad k = 1, K, w_1, w_2 > 0.$$

Используя  $\Delta t$ -метод, составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(k, w_1, w_2, t)}{\partial t} = & \lambda_k S_1(t) \left[ \int_0^{w_1} P(k, w_1 - y, w_2, t) dG_1(y) - P(k, w_1, w_2, t) \right] + \\ & + \lambda_k S_2(t) \left[ \int_0^{w_2} P(k, w_1, w_2 - y, t) dG_2(y) - P(k, w_1, w_2, t) \right] + \\ & + \lambda_k S_1(t) S_2(t) \left[ \int_0^{w_2} \int_0^{w_1} P(k, w_1 - y_1, w_2 - y_2, t) dG_1(y_1) dG_2(y_2) + P(k, w_1, w_2, t) - \right. \\ & \left. - \int_0^{w_1} P(k, w_1 - y, w_2, t) dG_1(y) - \int_0^{w_2} P(k, w_1, w_2 - y, t) dG_2(y) \right] + \sum_{\nu \neq k} P(\nu, w_1, w_2, t) q_{\nu k} \quad (2) \end{aligned}$$

с начальным условием

$$P(k, w_1, w_2, t_0) = \begin{cases} r(k), & w_1 = w_2 = 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3)$$

где  $r(k)$  — стационарное распределение вероятностей состояний цепи Маркова  $k(t)$ .



Введем характеристические функции вида:

$$h(k, w_1, w_2, t) = \int_0^\infty e^{ju_1 w_1} \int_0^\infty e^{ju_2 w_2} P(k, dw_1, dw_2, t),$$

где  $j$  — мнимая единица.

Перепишем (2)–(3) для характеристических функций

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(k, u_1, u_2, t)}{\partial t} &= \lambda_k h(k, u_1, u_2, t) [S_1(t)(G_1^*(u_1) - 1) + S_2(t)(G_2^*(u_2) - 1) + \\ &+ S_1(t)S_2(t)(G_1^*(u_1) - 1)(G_2^*(u_2) - 1)] + \sum_{\nu \neq k} h(\nu, u_1, u_2, t) q_{\nu k} \end{aligned}$$

с начальным условием

$$h(k, u_1, u_2, t_0) = r(k),$$

где

$$G_i^*(u_i) = \int_0^\infty e^{ju_i y} dG_i(y).$$

Запишем систему дифференциальных уравнений в матричном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}(u_1, u_2, t)}{\partial t} &= \mathbf{h}(u_1, u_2, t) [\Lambda [S_1(t)(G_1^*(u_1) - 1) + S_2(t)(G_2^*(u_2) - 1) + \\ &+ S_1(t)S_2(t)(G_1^*(u_1) - 1)(G_2^*(u_2) - 1)] + \mathbf{Q}] \end{aligned} \quad (4)$$

с начальным условием

$$\mathbf{h}(u_1, u_2, t_0) = \mathbf{r}, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{h}(u_1, u_2, t) = [h(1, u_1, u_2, t), \dots, h(K, u_1, u_2, t)], \quad \mathbf{r} = [r(1), \dots, r(K)],$$

$\mathbf{r}$  — вектор-строка стационарного распределения вероятностей состояний цепи Маркова  $k(t)$ , удовлетворяющая системе матричных линейных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{r}\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}\mathbf{e} = 1, \end{cases} \quad (6)$$

$\mathbf{e}$  — единичный вектор-столбец.

### 3. МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Для решения задачи (4)–(5) воспользуемся методом асимптотического анализа в условиях растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний цепи Маркова. Обозначим  $\Lambda = N\bar{\Lambda}$  и  $\mathbf{Q} = N\bar{\mathbf{Q}}$ , где  $N$  — некоторый параметр. Перепишем уравнение (4)–(5), используя введенные обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{h}(u_1, u_2, t)}{\partial t} &= \mathbf{h}(u_1, u_2, t) [\bar{\Lambda} [S_1(t)(G_1^*(u_1) - 1) + S_2(t)(G_2^*(u_2) - 1) + \\ &+ S_1(t)S_2(t)(G_1^*(u_1) - 1)(G_2^*(u_2) - 1)] + \bar{\mathbf{Q}}] \end{aligned} \quad (7)$$

с начальным условием (5).



**Теорема.** Совместное асимптотическое распределение вероятностей двумерного процесса суммарных объемов занятого ресурса на блоках СМО с параллельным обслуживанием в условиях растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний управляющей ММРР-потоком цепи Маркова является двумерным гауссовским распределением вероятностей с некоторым математическим ожиданием

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} N\lambda a_1^{(1)} b_1 & N\lambda a_1^{(2)} b_2 \end{bmatrix}$$

и матрицей ковариаций

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} N\lambda a_2^{(1)} b_1 + N\kappa \left(a_1^{(1)}\right)^2 \beta_1 & N(\lambda + \kappa) a_1^{(1)} a_1^{(2)} \beta_{12} \\ N(\lambda + \kappa) a_1^{(1)} a_1^{(2)} \beta_{12} & N\lambda a_2^{(2)} b_2 + N\kappa \left(a_1^{(2)}\right)^2 \beta_2 \end{bmatrix}.$$

**Доказательство.** Выполним в уравнении (7) следующие замены:

$$\varepsilon = \frac{1}{N}, \quad u_1 = \varepsilon x_1, \quad u_2 = \varepsilon x_2, \quad \mathbf{h}(u_1, u_2, t) = \mathbf{f}_1(x_1, x_2, t, \varepsilon), \quad (8)$$

получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{f}_1(x_1, x_2, t, \varepsilon)}{\partial t} = \mathbf{f}_1(x_1, x_2, t, \varepsilon) [\overline{\Lambda} [S_1(t)(G_1^*(\varepsilon x_1) - 1) + S_2(t)(G_2^*(\varepsilon x_2) - 1) + \\ + S_1(t)S_2(t)(G_1^*(\varepsilon x_1) - 1)(G_2^*(\varepsilon x_2) - 1)] + \overline{\mathbf{Q}}] \end{aligned} \quad (9)$$

с начальным условием

$$\mathbf{f}_1(x_1, x_2, t_0, \varepsilon) = \mathbf{r}. \quad (10)$$

Найдем асимптотическое решение задачи (9)–(10) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Этап 1.* Выполним в (9) предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим

$$\mathbf{f}_1(x_1, x_2, t) \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}.$$

Сравним это уравнение с первым из системы (6), его решение можно записать в виде

$$\mathbf{f}_1(x_1, x_2, t) = \mathbf{r}\Phi_1(x_1, x_2, t), \quad (11)$$

где  $\Phi_1(x_1, x_2, t)$  — скалярная функция, удовлетворяющая начальному условию  $\Phi_1(x_1, x_2, t_0) = 1$ .

*Этап 2.* Умножим (9) на вектор  $\mathbf{e}$ , после чего подставим выражение (11), учитывая разложение экспоненты в ряд Тейлора до второго слагаемого включительно  $e^{j\varepsilon x} = 1 + j\varepsilon x + O(\varepsilon^2)$ , разделим на  $\varepsilon$  и перейдем к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Учитывая начальное условие для функции  $\Phi_1(x_1, x_2, t)$ , получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \Phi_1(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \Phi_1(x_1, x_2, t) [jx_1 a_1^{(1)} S_1(t) + jx_2 a_1^{(2)} S_2(t)],$$

решение которого имеет вид

$$\Phi_1(x_1, x_2, t) = \exp \left\{ jx_1 \lambda a_1^{(1)} \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + jx_2 \lambda a_1^{(2)} \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau \right\}.$$



Выполнив обратные замены (8), запишем асимптотическое приближенное равенство

$$\mathbf{h}(u_1, u_2, t) = \mathbf{r} \exp \left\{ ju_1 N \lambda a_1^{(1)} \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + ju_2 N \lambda a_1^{(2)} \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau \right\}.$$

Перейдем к построению гауссовой аппроксимации суммарных объемов занятого ресурса на блоках системы. Представим функцию  $\mathbf{h}(u_1, u_2, t)$  как

$$\mathbf{h}(u_1, u_2, t) = \mathbf{h}_2(u_1, u_2, t) \exp \left\{ ju_1 N \lambda a_1^{(1)} \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + ju_2 N \lambda a_1^{(2)} \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau \right\}. \quad (12)$$

Проведем следующие замены:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{N}, \quad u_1 = \varepsilon x_1, \quad u_2 = \varepsilon x_2, \quad \mathbf{h}_2(u_1, u_2, t) = \mathbf{f}_2(x_1, x_2, t, \varepsilon), \quad (13)$$

а также, учитывая (12), запишем

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{f}_2(x_1, x_2, t, \varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{f}_2(x_1, x_2, t, \varepsilon) & \left[ j\varepsilon x_1 \lambda a_1^{(1)} S_1(t) + j\varepsilon x_2 \lambda a_1^{(2)} S_2(t) \right] = \\ & = \mathbf{f}_2(x_1, x_2, t, \varepsilon) \left[ \bar{\Lambda} [S_1(t)(G_1^*(\varepsilon x_1) - 1) + S_2(t)(G_2^*(\varepsilon x_2) - 1)] + \right. \\ & \quad \left. + S_1(t)S_2(t)(G_1^*(\varepsilon x_1) - 1)(G_2^*(\varepsilon x_2) - 1) \right] + \bar{\mathbf{Q}} \end{aligned} \quad (14)$$

с начальным условием

$$\mathbf{f}_2(x_1, x_2, t_0, \varepsilon) = \mathbf{r} \quad (15)$$

Найдем асимптотическое решение задачи (14)–(15) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Этап 1.* Выполним предельный переход в (14) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим

$$\mathbf{f}_2(x_1, x_2, t) \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{0},$$

с учетом (6) решение можно записать в виде

$$\mathbf{f}_2(x_1, x_2, t) = \mathbf{r} \Phi_2(x_1, x_2, t), \quad (16)$$

где  $\Phi_2(x_1, x_2, t)$  — скалярная функция, удовлетворяющая начальному условию  $\Phi_2(x_1, x_2, t_0) = 1$ .

*Этап 2.* Представим функцию  $\mathbf{f}_2(x_1, x_2, t)$  в виде разложения:

$$\mathbf{f}_2(x_1, x_2, t) = \Phi_2(x_1, x_2, t) \left[ \mathbf{r} + \mathbf{g} (j\varepsilon x_1 \lambda a_1^{(1)} S_1(t) + j\varepsilon x_2 \lambda a_1^{(2)} S_2(t)) \right] + O(\varepsilon^2), \quad (17)$$

где  $\mathbf{g}$  — некоторая вектор-строка, удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{g} \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{r} (\lambda \mathbf{I} - \bar{\Lambda}), \\ \mathbf{g} \mathbf{e} = \text{const}, \end{cases}$$

где  $\mathbf{I}$  — диагональная единичная матрица.



*Этап 3.* Умножим обе части уравнения (14) на единичный вектор  $\mathbf{e}$ . Используем разложения (17) и экспоненты в ряд Тейлора до третьего слагаемого включительно  $e^{j\varepsilon x} = 1 + j\varepsilon x + \frac{(j\varepsilon x)^2}{2} + O(\varepsilon^3)$ . Получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_2(x_1, x_2, t)}{\partial t} &= \Phi_2(x_1, x_2, t) \left[ \frac{(jx_1)^2}{2} \left( \lambda a_2^{(1)} S_1(t) + \kappa \left( a_1^{(1)} \right)^2 S_1^2(t) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(jx_2)^2}{2} \left( \lambda a_2^{(2)} S_2(t) + \kappa \left( a_1^{(2)} \right)^2 S_2^2(t) \right) + jx_1 jx_2 (\lambda + \kappa) a_1^{(1)} a_1^{(2)} S_1(t) S_2(t) \right]. \end{aligned}$$

Решение уравнения с учетом начальных условий имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_2(x_1, x_2, t) &= \exp \left\{ \frac{(jx_1)^2}{2} \left( \lambda a_2^{(1)} \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + \kappa \left( a_1^{(1)} \right)^2 \int_{t_0}^t S_1^2(\tau) d\tau \right) + \right. \\ &\quad + \frac{(jx_2)^2}{2} \left( \lambda a_2^{(2)} \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau + \kappa \left( a_1^{(2)} \right)^2 \int_{t_0}^t S_2^2(\tau) d\tau \right) + \\ &\quad \left. + jx_1 jx_2 (\lambda + \kappa) a_1^{(1)} a_1^{(2)} \int_{t_0}^t S_1(\tau) S_2(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Подставим полученное равенство в (16), проведем обратные замены (12) и (13), получим приближенное асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(u_1, u_2, t) \approx \mathbf{r} \exp \left\{ ju_1 N \lambda a_1^{(1)} \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + ju_2 N \lambda a_1^{(2)} \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau + \right. \\ + \frac{(ju_1)^2}{2} \left( N \lambda a_2^{(1)} \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + N \kappa \left( a_1^{(1)} \right)^2 \int_{t_0}^t S_1^2(\tau) d\tau \right) + \\ + \frac{(ju_2)^2}{2} \left( N \lambda a_2^{(2)} \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau + N \kappa \left( a_1^{(2)} \right)^2 \int_{t_0}^t S_2^2(\tau) d\tau \right) + \\ \left. + ju_1 ju_2 N (\lambda + \kappa) a_1^{(1)} a_1^{(2)} \int_{t_0}^t S_1(\tau) S_2(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Полагая  $t = T$ ,  $t_0 \rightarrow -\infty$ , учитывая (1), сделаем вывод о том, что асимптотическая характеристическая функция случайного процесса  $\{V_1(t), V_2(t)\}$  в стационарном режиме имеет вид гауссовой характеристической функции

$$\begin{aligned} h(u_1, u_2) \approx \exp \left\{ ju_1 N \lambda a_1^{(1)} b_1 + ju_2 N \lambda a_1^{(2)} b_2 + ju_1 ju_2 N (\lambda + \kappa) a_1^{(1)} a_1^{(2)} \beta_{12} + \right. \\ \left. + \frac{(ju_1)^2}{2} \left( N \lambda a_2^{(1)} b_1 + N \kappa \left( a_1^{(1)} \right)^2 \beta_1 \right) + \frac{(ju_2)^2}{2} \left( N \lambda a_2^{(2)} b_2 + N \kappa \left( a_1^{(2)} \right)^2 \beta_2 \right) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$b_i = \int_0^\infty (1 - B_i(\tau)) d\tau, \quad \beta_i = \int_0^\infty (1 - B_i(\tau))^2 d\tau, \quad \beta_{12} = \int_0^\infty (1 - B_1(\tau))(1 - B_2(\tau)) d\tau,$$

откуда следует формулировка теоремы.  $\square$



#### 4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Эмпирическое распределение вероятностей построим на основе имитационной модели [8]. В существующей программе учтем возможность «копирования» каждого поступающего требования на второй блок. Исходные данные для рассматриваемой ресурсной системы с параллельным обслуживанием зададим следующим образом.

1. Входящий ММРР-поток определяется матрицами:

$$\Lambda = N \cdot \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1,5 \end{bmatrix}, \quad Q = N \cdot \begin{bmatrix} -0,8 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & -0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & -0,8 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получим интенсивность потока  $\lambda = N$ .

2. Время обслуживания имеет гамма-распределение вероятностей с параметрами  $\alpha_1 = \beta_1 = 0,5$  и  $\alpha_2 = \beta_2 = 1,5$  для первого и второго блоков соответственно, тогда среднее время обслуживания  $b_1 = 1$  и  $b_2 = 1$ .
3. Количество ресурса, необходимого для обслуживания одной заявки, имеет равномерное распределение вероятностей на интервале  $[1, 2]$  на первом блоке и на  $[0, 1]$  на втором.

Была проведена серия имитационных экспериментов с увеличением значений  $N$ . В таблице приведены значения расстояний Колмогорова между функциями распределения вероятностей суммарного объема занятого ресурса на первом и втором блоках системы —  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  соответственно, а также между функциями распределения двумерных распределений вероятностей суммарных объемов на обоих блоках  $\Delta_{12}$  для различных значений параметра  $N$ .

Расстояния Колмогорова между асимптотической и эмпирической функциями  
распределения вероятностей

Kolmogorov distances between the asymptotic and empirical distributions

$N$	1	3	5	7	10	20	50	100
$\Delta_1$	0.373	0.111	0.061	0.041	0.028	0.018	0.011	0.008
$\Delta_2$	0.000	0.101	0.053	0.036	0.025	0.016	0.010	0.007
$\Delta_{12}$	0.369	0.110	0.059	0.040	0.028	0.018	0.011	0.008

На рис. 3 и 4 изображены графики распределения вероятностей суммарного объема занятого ресурса на первом и втором блоках системы соответственно.

Из таблицы можем сделать вывод о том, что точность аппроксимации возрастает при увеличении асимптотического параметра  $N$  (при увеличении интенсивности входящего потока), а данные рис. 3 и 4 демонстрируют это.

Определив область применимости аппроксимации в тех случаях, когда расстояние Колмогорова  $\Delta < 0,05$ , т. е. когда интенсивность входящего потока в 7 и более раз выше интенсивности обслуживания, зная числовые характеристики распределений, нетрудно оценить ограничение на размер буфера на блоках, например, по правилу «трех сигм».

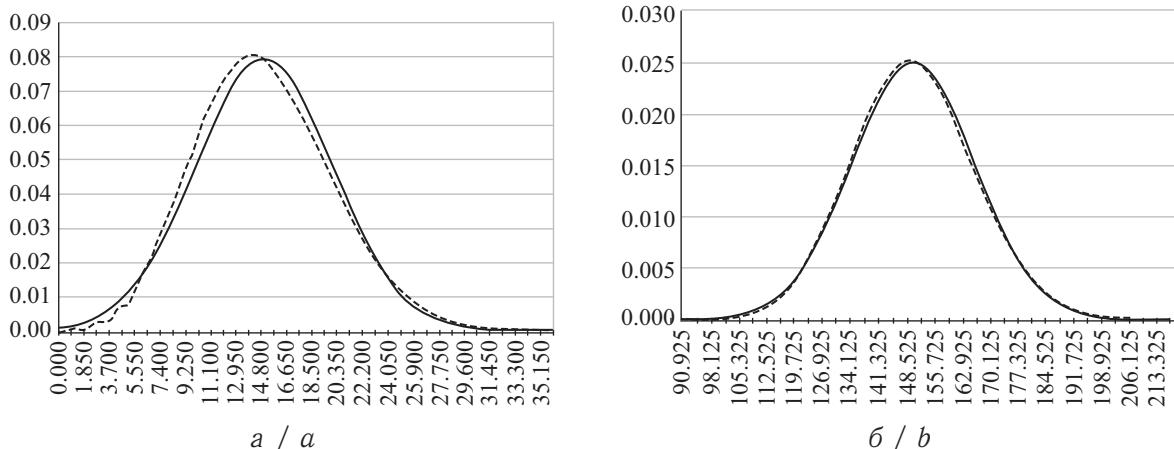


Рис. 3. Распределение (пунктирная линия — эмпирическое, сплошная линия — асимптотическое) вероятностей суммарного объема занятого ресурса на первом блоке системы:  
а)  $N = 10$ ; б)  $N = 100$

Fig. 3. Probability distribution (dashed line — empirical, solid line — asymptotic) of the total resource amount on the first system block: a)  $N = 10$ ; b)  $N = 100$

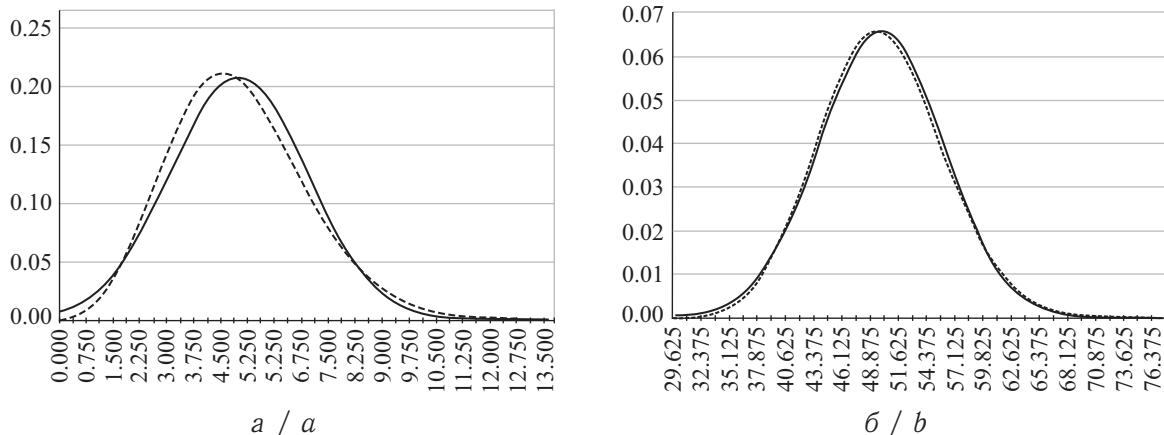


Рис. 4. Распределение (пунктирная линия — эмпирическое, сплошная линия — асимптотическое) вероятностей суммарного объема занятого ресурса на втором блоке системы:  
а)  $N = 10$ ; б)  $N = 100$

Fig. 4. Probability distribution (dashed line — empirical, solid line — asymptotic) of the total resource amount on the second system block: a)  $N = 10$ ; b)  $N = 100$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе найдены основные вероятностные характеристики ресурсной системы параллельного обслуживания с входящим ММРР-потоком заявок. Используя комбинацию методов динамического просеивания и асимптотического анализа, было показано, что совместное асимптотическое распределение вероятностей суммарных объемов занятого ресурса каждого типа сходится к двумерному гауссовскому распределению в условиях растущей интенсивности входящего потока и предельно частых изменений состояний цепи Маркова. Представлен численный анализ точности аппроксимации.

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность профессору Пизанского университета Микеле Пагано за совместную работу над программой имитационного моделирования, а также профессору Национального исследовательского Томского



государственного университета, доктору физико-математических наук Светлане Петровне Моисеевой за идеи и рекомендации в процессе проведения исследования.

## **Библиографический список**

1. Гайдамака Ю. В., Зарипова Э. Р., Орлов Ю. Н. Анализ зависимости параметров модели сервера протокола установления сессий с групповым поступлением сообщений от распределения длины группы сообщений // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2015. № 27. 16 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-27> (дата обращения: 07.05.2019).
2. Ефросинин Д. В. Методы анализа управляемых динамических систем : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 2013. 332 с.
3. Galileyskaya A. On the Total Amount of the Occupied Resources in the Multi-Resource QS with Renewal Arrival Process // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019) : материалы XVIII Междунар. конф. им. А. Ф. Терпугова. Томск : Изд-во НТЛ, 2019. Ч. 2. С. 80–85.
4. Лисовская Е. Ю., Моисеев А. Н., Моисеева С. П., Пагано М. Моделирование процессов обработки данных физических экспериментов в виде немарковской многоресурсной системы массового обслуживания // Изв. вузов. Физика. 2018. Т. 61. № 12 (732). С. 39–46.
5. Mandelbaum A., Zeltyn S. The impact of customers' patience on delay and abandonment: Some empirically-driven experiments with the  $M/M/n + G$  queue // OR Spectrum. 2004. Vol. 26. P. 377–411. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00291-004-0164-8>
6. Neuts M. F. Models based on the Markovian arrival process // IEICE Trans. Comm. 1992. Vol. E-75B, № 12. P. 1255–1265.
7. Lucantoni D. M. New results on single server queue with a batch Markovian arrival process // Stoch. Models. 1991. Vol. 7, № 1. P. 1–46. DOI: <https://doi.org/10.1080/15326349108807174>
8. Имитационная модель бесконечнолинейной системы обслуживания требований случайного объема с MMPP входящим потоком / Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева, М. Пагано; правообладатель Нац. исслед. Том. гос. ун-т (RU). № 2017612202; заяв. 17.03.2017; зарегистр. в Реестре программ для ЭВМ 12.05.2017.

---

### **Образец для цитирования:**

Чернышова Е. Н., Лисовская Е. Ю. Суммарный объем занятого ресурса в системе с параллельным обслуживанием и входящим MMPP-потоком // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 400–410. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-400-410>

---

## **On a Total Resource Amounts at the System with Parallel Service and MMPP Arrivals**

**E. N. Chernishova, E. Yu. Lisovskaya**

Elizaveta N. Chernishova, <https://orcid.org/0000-0002-5261-7358>, Tomsk State University, 36 Lenina Ave., Tomsk 634050, Russia, [chernishova@stud.tsu.ru](mailto:chernishova@stud.tsu.ru)

Ekaterina Yu. Lisovskaya, <https://orcid.org/0000-0001-7345-5565>, Tomsk State University, 36 Lenina Ave., Tomsk 634050, Russia, [ekaterina\\_lisovs@mail.ru](mailto:ekaterina_lisovs@mail.ru)



In this paper, we consider a resource system with an unlimited resources and servers number, with parallel customers servicing, arriving at the system according to the MMPP. Using a combination of multidimensional dynamic screening methods and asymptotic analysis, it is proved that the joint asymptotic probability distribution of the total resource amounts converges to a bi-dimensional Gaussian distribution under conditions of increasing intensity of MMPP. The parameters of the asymptotic probability distribution are found. A numerical analysis of the approximation accuracy is carried out.

**Keywords:** resource queue, dynamic screening method, asymptotic analysis, approximation.

Received: 07.06.2019 / Accepted: 30.12.2019 / Published: 31.08.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

**Acknowledgements:** The authors are grateful to Professor Michele Pagano of the University of Pisa for joint work on the simulation program, as well as to Professor Svetlana Moiseeva of the National Research Tomsk State University for ideas and recommendations during the study.

## References

1. Gajdamaka Yu. V., Zaripova E. R., Orlov Yu. N. Analysis of the impact the batch size distribution on parameters of the SIP-server queueing model with batch arrivals. *KIAM Preprint*, Moscow, 2015, no. 27. 16 p. (in Russian). Available at: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-27> (accessed 07 May 2019).
2. Efrosinin D. V. *Metody analiza upravlyayemykh dinamicheskikh sistem* [Methods of analysis of controlled dynamic systems]. Diss. Dr. Sci. (Phis. and math.). Moscow, 2013. 332 p. (in Russian).
3. Galileyskaya A. On the Total Amount of the Occupied Resources in the Multi-Resource QS with Renewal Arrival Process. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2019): materialy XVIII Mezhdunar. konf. im. A. F. Terpugova* [Information Technology and Mathematical Modeling (ITMM-2019)]. Materials of the XVIII Int. conf. named after A. F. Terpugov]. Tomsk, Izd-vo NTL, 2019, pt. 2, pp. 80–85.
4. Lisovskaya E. Yu., Moiseev A. N., Moiseeva S. P., Pagano M. Modeling of processing of physics experimental data in the form of non-Markovian multi-resource queuing system. *Izvestiya vuzov. Fizika*, 2018, vol. 61, no. 12 (732), pp. 39–46 (in Russian).
5. Mandelbaum A., Zeltyn S. The impact of customers' patience on delay and abandonment: Some empirically-driven experiments with the  $M/M/n + G$  queue. *OR Spectrum*, 2004, vol. 26, pp. 377–411. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00291-004-0164-8>
6. Neuts M. F. Models based on the Markovian arrival process. *IEICE Trans. Comm.*, 1992, vol. E-75B, no. 12, pp. 1255–1265.
7. Lucantoni D. M. New results on single server queue with a batch Markovian arrival process. *Stoch. Models*, 1991, vol. 7, no. 1, pp. 1–46. DOI: <https://doi.org/10.1080/15326349108807174>
8. *Simulation model of an infinitely linear system for servicing requirements of a random volume with an input flow MMP* / E. Yu. Lisovskaya, S. P. Moiseeva, M. Pagano; copyright holder National Research Tomsk State University (RU). No. 2017612202; declared 17.03.2017; register in the Register of computer programs 12.05.2017 (in Russian).

---

## Cite this article as:

Chernishova E. N., Lisovskaya E. Yu. On a Total Resource Amounts at the System with Parallel Service and MMPP Arrivals. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 400–410 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-400-410>

---



### **Подписка на 2021 год**

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017,  
раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов».  
Журнал выходит 4 раза в год

Цена свободная

Оформить подписку онлайн можно  
в интернет-каталоге «Пресса по подписке» ([www.akc.ru](http://www.akc.ru))

#### **Адрес издательства (редакции):**

410012, Саратов, Астраханская, 83

**Тел.:** +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89

**Факс:** +7(845-2) 27-85-29

**E-mail:** [izvestiya@info.sgu.ru](mailto:izvestiya@info.sgu.ru)

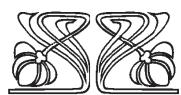
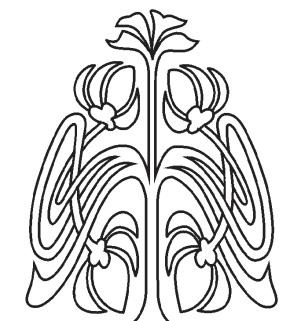
#### **Адрес редколлегии серии:**

410012, Саратов, Астраханская, 83,  
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,  
механико-математический факультет

**Тел./факс:** +7(845-2) 26-15-54

**E-mail:** [mmi@info.sgu.ru](mailto:mmi@info.sgu.ru)

**Website:** <http://mmi.sgu.ru/>



**ПОДПИСКА**

