

ISSN 1816-9791 (Print)
ISSN 2541-9005 (Online)

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия



Серия: Математика, Механика, Информатика

2021

Том 21

Выпуск 2



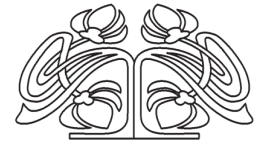
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 2

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал
2021 Том 21

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издается с 2005 года

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

Антонов С. Ю., Антонова А. В. О квазимногочленах Капелли. III 142

Lukomskii S. F., Lukomskii D. S. Numerical solution of linear differential equations with discontinuous coefficients and Henstock integral
[Лукомский С. Ф., Лукомский Д. С. Численное решение линейных дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами и интеграл Хенстока] 151

Старовойтов А. П., Кечко Е. П. О скорости сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде экспоненциальных функций 162

Тлячев В. Б., Ушхо А. Д., Ушхо Д. С. О периодических решениях уравнения Рэля 173

Механика

Bessonov L. V., Golyadkina A. A., Dmitriev P. O., Dol A. V., Zolotov V. S., Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Titova Yu. I., Ulyanov V. Yu., Kharlamov A. V.
Constructing the dependence between the Young's modulus value and the Hounsfield units of spongy tissue of human femoral heads
[Бессонов Л. В., Голядкина А. А., Дмитриев П. О., Доль А. В., Золотов В. С., Иванов Д. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Титова Ю. И., Ульянов В. Ю., Харламов А. В.]
Построение зависимости между значением модуля Юнга и числами Хаунсфилда губчатой кости головок бедра] 182

Панкратов И. А. Аппроксимация уравнений ориентации орбитальной системы координат методом взвешенных невязок 194

Петухов В. Г., Рязанов В. В. Искусственные точки либрации в задаче буксировки космического мусора ионным потоком 202

Сапунков Я. Г., Молоденков А. В. Аналитический алгоритм квазиоптимального по энергии и времени разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях 213

Смирнов А. Л., Васильев Г. П. Частоты собственных колебаний круглой тонкой пластины с нелинейно возмущенными параметрами 227

Информатика

Абросимов М. Б., Лось И. В., Костин С. В. Примитивные однородные графы с экспонентом 2 и числом вершин до 16 238

Вдовин А. Ю. Средства имитации для автоматизированных систем, применяемых при испытаниях стрелкового оружия 246

Kim R. P., Korchagin S. A. Mathematical and computer simulation of the electrophysical properties of a multicellular structure exposed to nanosecond electrical pulses [Ким Р. П., Корчагин С. А. Математическое и компьютерное моделирование электрофизических свойств многоклеточной структуры при воздействии наносекундных электрических импульсов] 259

Разумовский П. В., Абросимов М. Б. Построение цветных графов без проверки на изоморфизм 267

Журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Запись о регистрации СМИ ПИ № ФС77-76640 от 26 августа 2019 года

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (специальности: 01.01.01; 01.01.02; 01.01.06; 01.01.07; 01.01.09; 01.02.04; 01.02.05; 01.02.06; 01.02.08; 05.13.01; 05.13.18).

Журнал входит в международные базы данных Web of Science (ESCI), Scopus, MathSciNet, zbMATH, DOAJ

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год

Директор издательства
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор
Каргин Игорь Анатольевич

Художник
Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист
Кочкаева Инна Анатольевна

Верстка
Халова Виктория Анатольевна

Технический редактор
Каргин Игорь Анатольевич

Корректор
Кочкаева Инна Анатольевна

Адрес учредителя, издателя и издательства (редакции):
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89
E-mail: izdat@sgu.ru

Подписано в печать 25.05.21.
Подписано в свет 31.05.21.
Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 16,27 (17,5).
Тираж 500 экз. Заказ 62-Т.

Отпечатано в типографии Саратовского университета.
Адрес типографии:
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2021

**ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ**

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <https://mmi.sgu.ru/> или <https://dlya-avtogo/>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования в журнале. В случае положительного решения об опубликовании статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <https://mmi.sgu.ru>.

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@sgu.ru

Website: <https://mmi.sgu.ru/>

Ответственный секретарь серии:

Шевцова Юлия Владиславовна

CONTENTS**Scientific Part****Mathematics**

Antonov S. Yu., Antonova A. V. Quasi-polynomials of Capelli. III 142

Lukomskii S. F., Lukomskii D. S. Numerical solution of linear differential equations with discontinuous coefficients and Henstock integral 151

Starovoitov A. P., Kechko E. P. About the convergence rate Hermite – Pade approximants of exponential functions 162

Tlyachev V. B., Ushkho A. D., Ushkho D. S. On periodic solutions of Rayleigh equation 173

Mechanics

Bessonov L. V., Golyadkina A. A., Dmitriev P. O., Dol A. V., Zolotov V. S., Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Titova Yu. I., Ulyanov V. Yu., Kharlamov A. V. Constructing the dependence between the Young's modulus value and the Hounsfield units of spongy tissue of human femoral heads 182

Pankratov I. A. Approximation of the orientation equations of the orbital coordinate system by the weighted residuals method 194

Petukhov V. G., Riazanov V. V. Artificial libration points in the task of towing space debris by an ion beam 202

Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V. Analytical algorithm of energy and time quasioptimal turn of a spacecraft under arbitrary boundary conditions 213

Smirnov A. L., Vasiliev G. P. Free vibration frequencies of a circular thin plate with nonlinearly perturbed parameters 227

Computer Sciences

Abrosimov M. B., Los I. V., Kostin S. V. The construction of all nonisomorphic minimum vertex extensions of the graph by the method of canonical representatives 238

Vdovin A. Yu. Imitation tools for automated systems used in small arms testing 246

Kim R. P., Korchagin S. A. Mathematical and computer simulation of the electrophysical properties of a multicellular structure exposed to nanosecond electrical pulses 259

Razumovsky P. V., Abrosimov M. B. Generation of colored graphs with isomorphism rejection 267



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ватуляян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

dell'Isola Francesco, доктор наук, профессор (Рим, Италия)

Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Омск, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)

Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)

Индейцев Дмитрий Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Республика Беларусь)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, акад. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук (Долгопрудный, Московская обл., Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ульяновск, Россия)

Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)

Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Республика Беларусь)

Субботин Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Екатеринбург, Россия)

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

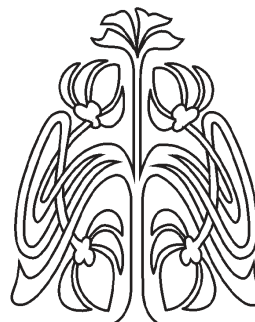
Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чуань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)



**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY.
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

Editor-in-Chief – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Francesco dell'Isola (Rome, Italy)

Dmitry A. Indeitsev (St. Petersburg, Russia)

Shoji Imatani (Kyoto, Japan)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

Avgust P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Nikita F. Morozov (St. Petersburg, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan', Russia)

Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny,

Moscow region, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)

Alexander F. Rezhnikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Alexander I. Shashkin (Voronezh, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

Yurii N. Subbotin (Ekaterinburg, Russia)

Igor' E. Tananko (Saratov, Russia)

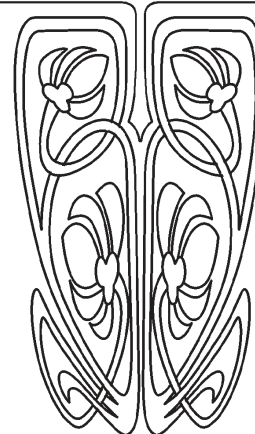
Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)

Vjacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)

**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**





МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 142–150
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 142–150

Научная статья

УДК 512

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-142-150>

О квазимногочленах Капелли. III

С. Ю. Антонов[✉], А. В. Антонова

Казанский государственный энергетический университет, Россия, 420066, г. Казань, ул. Красносельская, д. 51

Антонов Степан Юрьевич, старший преподаватель кафедры высшей математики, antonovst-vm@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1705-3929>

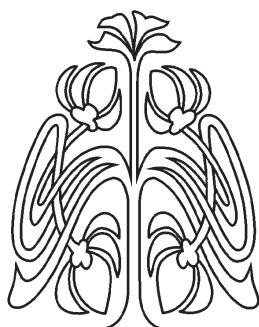
Антонова Алина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, antonovakazan@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7047-7275>

Аннотация. В работе исследуются многочлены типа Капелли (двойные и квазимногочлены Капелли), принадлежащие свободной ассоциативной алгебре $F\{X \cup Y\}$, рассматриваемой над произвольным полем F и порожденной двумя непересекающимися счетными множествами X, Y . Показано, что двойные многочлены Капелли $C_{4k, \{1\}}$, $C_{4k, \{2\}}$ являются следствиями стандартного многочлена S_{2k}^- . Более того, доказано, что эти многочлены обнуляются как на квадратных, так и на прямоугольных матрицах соответствующих размеров. В статье также показано, что все квазимногочлены Капелли степени $4k+1$ будут минимальными тождествами нечетной компоненты Z_2 -градуированной матричной алгебры $M^{(m,k)}(F)$ при любых F и $m \neq k$.

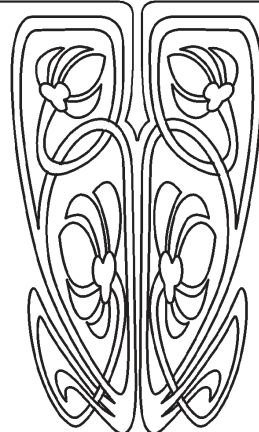
Ключевые слова: T -идеал, стандартный многочлен, многочлен Капелли

Для цитирования: Антонов С. Ю., Антонова А. В. О квазимногочленах Капелли. III // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 142–150. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-142-150>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Окончание. Начало см.: Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 371–382. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-371-382>; 2020. Т. 20, вып. 1. С. 4–16. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-4-16>

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-142-150>

Quasi-polynomials of Capelli. III

S. Yu. Antonov[✉], A. V. Antonova

Kazan State Power Engineering University, 51 Krasnosel'skaya St., Kazan 420066, Russia

Stepan Yu. Antonov, antonovst-vm@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1705-3929>

Alina V. Antonova, antonovakazan@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7047-7275>

Abstract. In this paper polynomials of Capelli type (double and quasi-polynomials of Capelli) belonging to a free associative algebra $F\{X \cup Y\}$ considering over an arbitrary field F and generated by two disjoint countable sets X, Y are investigated. It is shown that double Capelli's polynomials $C_{4k, \{1\}}, C_{4k, \{2\}}$ are consequences of the standard polynomial S_{2k}^- . Moreover, it is proved that these polynomials equal to zero both for square and for rectangular matrices of corresponding sizes. In this paper it is also shown that all Capelli's quasi-polynomials of the $(4k + 1)$ degree are minimal identities of odd component of Z_2 -graded matrix algebra $M^{(m,k)}(F)$ for any F and $m \neq k$.

Keywords: T -ideal, standard polynomial, Capelli polynomial

For citation: Antonov S. Yu., Antonova A. V. Quasi-polynomials of Capelli. III. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 142–150 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-142-150>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

The ending. The previous part was published in: *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, iss. 4, pp. 371–382. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-371-382>; 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 4–16. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-4-16>

Введение

Пусть F — произвольное поле, $F\{Z\}$ — свободная ассоциативная алгебра над F , порожденная счетным множеством $Z = \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, которое представим в виде $Z = X \cup Y$, где $X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $Y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — непересекающиеся счетные множества, $f_{4k+1}, g_{4k+1}, b_{4k+1}, h_{4k+1}, a_{4k+1}, c_{4k+1}, f_{4k}, g_{4k}, b_{4k}, h_{4k}, a_{4k}, c_{4k}$ — квазимногочлены Капелли нечетной и четной степени соответственно. В статье [1] показано, что все квазимногочлены Капелли степени $4k + 1$ являются тождествами некоторых подпространств нечетной компоненты Z_2 -градуированной матричной алгебры $M_{m+k}(F)$. Цель данной работы — доказать, что эти многочлены будут тождествами самой нечетной компоненты. Заметим, что, несмотря на отдельные имеющиеся результаты (см., например, [2–6]), описания идеала Z_2 -градуированных тождеств Z_2 -градуированной алгебры $M_{m+k}(F)$ при произвольных m, k, F до сих пор нет.



1. Некоторые системы линейных алгебраических уравнений

Пусть $k \in \mathbb{N}$, S_{2k} — симметрическая группа степени $2k$, \preceq_l — лексикографический порядок на S_{2k} . Определим на S_{2k} новое отношение порядка \preceq , положив для любых $\tau, \pi \in S_{2k}$ $\tau \preceq \pi$, если $\text{sgn } \tau < \text{sgn } \pi$, а если $\text{sgn } \tau = \text{sgn } \pi$, то $\tau \preceq \pi$ тогда и только тогда, когда $\tau \preceq_l \pi$.

Далее, пусть H, U — некоторые непустые подмножества группы $S_{2k}(\preceq)$, которые представим в виде $H = H_1 \cup H_2$, $U = U_1 \cup U_2$, где $H_1 = \{\sigma \in H \mid \text{sgn } \sigma = -1\}$, $H_2 = \{\sigma \in H \mid \text{sgn } \sigma = 1\}$, $U_1 = \{\sigma \in U \mid \text{sgn } \sigma = -1\}$, $U_2 = \{\sigma \in U \mid \text{sgn } \sigma = 1\}$, при этом мы считаем, что $|H_1| = p_1 \geq 0$, $|H_2| = p_2 \geq 0$, $|H| = p = p_1 + p_2 > 0$, $|U_1| = q_1 \geq 0$, $|U_2| = q_2 \geq 0$, $|U| = q = q_1 + q_2 > 0$. В частности, если $H = S_{2k}$, то $p_1 = p_2 = n = (2k)!/2$, а если $U = S_{2k}$, то $q_1 = q_2 = n = (2k)!/2$.

Кроме того, пусть $m \in \mathbb{N}$, $M_{k \times m}(F)$, $M_{m \times k}(F)$ — векторные пространства над F , элементами которых являются прямоугольные матрицы размера $k \times m$ и $m \times k$ соответственно, $M_k(F)$ — алгебра квадратных матриц размера $k \times k$, $T[M_k(F)]$ — идеал ее полиномиальных тождеств. Теорема Амицура – Левицкого утверждает [7], что стандартный многочлен $S_{2k}^-(\bar{x}) = S_{2k}^-(x_1, \dots, x_{2k}) = \sum_{\pi \in S_{2k}} \text{sgn } \pi x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(2k)}$ является тождеством алгебры $M_k(F)$ и что если $0 \neq \Phi \in T[M_k(F)]$, то $\text{deg } \Phi \geq 2k$, при этом если $\text{deg } \Phi = 2k$ и $k > 2$, то $\Phi = \beta S_{2k}^-(\bar{x})$, где $\beta \in F$.

Рассмотрим четыре системы линейных алгебраических уравнений (с.л.а.у.) от pq неизвестных $d_{\tau_j}^{\pi_i} \in F$, индексированных подстановками $\pi_i \in H$, $\tau_j \in U$, считая, что $\pi_1 \prec \pi_2 \prec \dots \prec \pi_p$, $\tau_1 \prec \tau_2 \prec \dots \prec \tau_q$, и $p + q$ уравнений:

$$\sum_{s=1}^q d_{\tau_s}^{\pi_i} = 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad \sum_{r=1}^p d_{\tau_j}^{\pi_r} = 0, \quad j = \overline{1, q}, \quad (1)$$

$$\sum_{s=1}^q d_{\tau_s}^{\pi_i} = 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad \sum_{r=1}^p d_{\tau_a}^{\pi_r} = -t, \quad a = \overline{1, q_1}, \quad \sum_{r=1}^p d_{\tau_{q_1+j}}^{\pi_r} = t, \quad j = \overline{1, q_2}, \quad (2)$$

$$\sum_{r=1}^p d_{\tau_j}^{\pi_r} = 0, \quad j = \overline{1, q}, \quad \sum_{s=1}^q d_{\tau_s}^{\pi_a} = -\beta, \quad a = \overline{1, p_1}, \quad \sum_{s=1}^q d_{\tau_s}^{\pi_{p_1+i}} = \beta, \quad i = \overline{1, p_2}, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r=1}^p d_{\tau_a}^{\pi_r} = -t, \quad a = \overline{1, q_1}, \quad \sum_{r=1}^p d_{\tau_{q_1+j}}^{\pi_r} = t, \quad j = \overline{1, q_2}, \\ \sum_{s=1}^q d_{\tau_s}^{\pi_u} = -\beta, \quad u = \overline{1, p_1}, \quad \sum_{s=1}^q d_{\tau_s}^{\pi_{p_1+i}} = \beta, \quad i = \overline{1, p_2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Предложение 1. Пусть многочлен $\Phi_{4k}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in H} \sum_{\tau \in U} \alpha_{\tau}^{\pi} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} \cdots x_{\pi(2k)} y_{\tau(2k)} \in T[M_k(F)]$ и $\Phi_{4k}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$. Тогда подстановка $d_{\tau_j}^{\pi_i} = \alpha_{\tau_j}^{\pi_i}$, где $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$, $\pi_1 \prec \pi_2 \prec \dots \prec \pi_p$, $\tau_1 \prec \tau_2 \prec \dots \prec \tau_q$, является решением хотя бы одной из систем (1)–(4).

Доказательство. Пусть

$$1, A_1, \dots, A_{2k} \in M_k(F), \quad \bar{A} = (A_1, \dots, A_{2k}), \quad \bar{1} = (1, \dots, 1)_{1 \times 2k},$$

тогда

$$\Phi_{4k}(\bar{A}; \bar{1}) = \sum_{\pi \in H} \sum_{\tau \in U} \alpha_{\tau}^{\pi} A_{\pi(1)} 1_{\tau(1)} A_{\pi(2)} \cdots A_{\pi(2k)} 1_{\tau(2k)} =$$



$$= \sum_{\pi \in H} (\alpha_{\tau_1}^{\pi} + \alpha_{\tau_2}^{\pi} + \dots + \alpha_{\tau_q}^{\pi}) A_{\pi(1)} \cdots A_{\pi(2k)} = 0.$$

Положим $\gamma^{\pi} = \alpha_{\tau_1}^{\pi} + \alpha_{\tau_2}^{\pi} + \dots + \alpha_{\tau_q}^{\pi}$, $\varphi_{2k}(\bar{x}) = \sum_{\pi \in H} \gamma^{\pi} x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(2k)}$, тогда

$$\varphi_{2k}(\bar{A}) = \Phi_{4k}(\bar{A}; \bar{1}) = 0.$$

Отсюда и из теоремы Амицура – Левицкого следует одно из двух: 1) все коэффициенты $\gamma^{\pi} = 0$; 2) $H = S_{2k}$, и тогда $\gamma^{\pi} = \beta \operatorname{sgn} \pi$, где $\beta = \operatorname{const} \neq 0$.

Пусть имеет место случай 1), тогда справедливы равенства

$$\sum_{s=1}^q \alpha_{\tau_s}^{\pi_i} = 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad (5)$$

и, значит, многочлен $\varphi_{2k}(\bar{x}) \equiv 0$. Более того, из равенств (5) и определения многочлена $\Phi_{4k}(\bar{x}, \bar{y})$ вытекает, что $q > 1$. Для случая 2) приходим к равенствам

$$\sum_{s=1}^q \alpha_{\tau_s}^{\pi_i} = \beta \operatorname{sgn} \pi_i, \quad i = \overline{1, (2k)!},$$

и, значит, $\varphi_{2k}(\bar{x}) = \beta S_{2k}^-(\bar{x})$, при этом $q \geq 1$.

Аналогично для подстановки аргументов $\bar{x} = \bar{1}$, $\bar{y} = \bar{A}$ будем иметь

$$\Phi_{4k}(\bar{1}; \bar{A}) = \sum_{\tau \in U} (\alpha_{\tau}^{\pi_1} + \alpha_{\tau}^{\pi_2} + \dots + \alpha_{\tau}^{\pi_p}) A_{\tau(1)} \cdots A_{\tau(2k)} = 0.$$

Положим $a_{\tau} = \alpha_{\tau}^{\pi_1} + \alpha_{\tau}^{\pi_2} + \dots + \alpha_{\tau}^{\pi_p}$, $\psi_{2k}(\bar{y}) = \sum_{\tau \in U} a_{\tau} y_{\tau(1)} y_{\tau(2)} \cdots y_{\tau(2k)}$, тогда $\psi_{2k}(\bar{A}) = \Phi_{4k}(\bar{1}; \bar{A}) = 0$. Рассуждая так же, как и для многочлена $\varphi_{2k}(\bar{x})$, придем к равенствам

$$\sum_{r=1}^p \alpha_{\tau_j}^{\pi_r} = 0, \quad j = \overline{1, q}, \quad p > 1,$$

$$\sum_{r=1}^p \alpha_{\tau_j}^{\pi_r} = t \operatorname{sgn} \tau_j, \quad j = \overline{1, (2k)!}, \quad p \geq 1.$$

Учитывая теперь то, что многочлен $\Phi_{4k}(\bar{x}, \bar{y})$ зависит от двух групп аргументов, приходим к одной из систем возможных равенств для коэффициентов $\alpha_{\tau_j}^{\pi_i}$:

$$\sum_{s=1}^q \alpha_{\tau_s}^{\pi_i} = 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad q > 1, \quad \sum_{r=1}^p \alpha_{\tau_j}^{\pi_r} = 0, \quad j = \overline{1, q}, \quad p > 1, \quad (6)$$

$$\sum_{s=1}^{2n} \alpha_{\tau_s}^{\pi_i} = 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad p \geq 1, \quad \sum_{r=1}^p \alpha_{\tau_a}^{\pi_r} = -t, \quad a = \overline{1, n}, \quad \sum_{r=1}^p \alpha_{\tau_{n+j}}^{\pi_r} = t, \quad j = \overline{1, n}, \quad (7)$$

$$\sum_{r=1}^{2n} \alpha_{\tau_j}^{\pi_r} = 0, \quad j = \overline{1, q}, \quad q \geq 1, \quad \sum_{s=1}^q \alpha_{\tau_s}^{\pi_a} = -\beta, \quad a = \overline{1, n}, \quad \sum_{s=1}^q \alpha_{\tau_s}^{\pi_{a+i}} = \beta, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

$$\sum_{s=1}^{2n} \alpha_{\tau_s}^{\pi_a} = -\beta, \quad \sum_{s=1}^{2n} \alpha_{\tau_s}^{\pi_{n+i}} = \beta, \quad \sum_{r=1}^{2n} \alpha_{\tau_j}^{\pi_r} = -t, \quad \sum_{r=1}^{2n} \alpha_{\tau_{n+m}}^{\pi_r} = t, \quad a, i, j, m = \overline{1, n}. \quad (9)$$



Это значит, что подстановка $d_{\tau_j}^{\pi_i} = \alpha_{\tau_j}^{\pi_i}$, где $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$, $\pi_1 \prec \pi_2 \prec \dots \prec \pi_p$, $\tau_1 \prec \tau_2 \prec \dots \prec \tau_q$, будет решением хотя бы одной из систем (1)–(4). \square

Возникает вопрос: верно ли, что всякое решение одной из с.л.а.у. (1)–(4) определяет некоторый многочлен $\Phi \in T[M_k(F)]$? Ответ оказывается отрицательным. Действительно, при $p = 2n$ и $q = 1$ решение системы (3) $d_{\tau_1}^{\pi_i} = \text{sgn } \pi_i$, где $i = \overline{1, 2n}$, приводит к многочлену Капелли $C_{4k}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_{2k}} \text{sgn } \pi x_{\pi(1)} y_1 x_{\pi(2)} y_2 \cdots x_{\pi(2k)} y_{2k}$, не являющемуся тождеством алгебры $M_k(F)$ (см. [8, 9]).

С другой стороны, нетрудно видеть, что при $\text{char } F = 0$ и $p = q = 2n$ решениями систем (1)–(4) будут $(d_{\tau_j}^{\pi_i}) = (\text{sgn } \pi_i \text{sgn } \tau_j)$, $(d_{\tau_j}^{\pi_i}) = (\text{sgn } \tau_j)$, $(d_{\tau_j}^{\pi_i}) = (\text{sgn } \pi_i)$, $(d_{\tau_j}^{\pi_i}) = (\text{sgn } \pi_i \delta_{\text{sgn } \pi_i \text{sgn } \tau_j})$, этим решениям соответствуют многочлены

$$\begin{aligned} C_{4k}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\pi \in S_{2k}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \text{sgn } \pi \text{sgn } \tau x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} \cdots x_{\pi(2k)} y_{\tau(2k)}, \\ C_{4k, \{1\}}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\pi \in S_{2k}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \text{sgn } \tau x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} \cdots x_{\pi(2k)} y_{\tau(2k)}, \\ C_{4k, \{2\}}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\pi \in S_{2k}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \text{sgn } \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} \cdots x_{\pi(2k)} y_{\tau(2k)}, \\ f_{4k}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\pi \in S_{2k}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \text{sgn } \pi \delta_{\text{sgn } \pi \text{sgn } \tau} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} \cdots x_{\pi(2k)} y_{\tau(2k)}, \end{aligned}$$

причем, согласно работам [10–12], $C_{4k}, C_{4k, \{1\}}, C_{4k, \{2\}}, f_{4k} \in T[M_k(F)]$ при любом поле F .

Замечание 1. В [13] доказано, что для любых матриц $A_1, \dots, A_{2k} \in M_{k \times m}(F)$, $B_1, \dots, B_{2k} \in M_{m \times k}(F)$ справедливо равенство $C_{4k}(A; B) = 0$.

Ниже мы покажем, что этот результат остается верным и для многочленов $C_{4k, \{1\}}(\bar{x}, \bar{y}), C_{4k, \{2\}}(\bar{x}, \bar{y}), f_{4k}(\bar{x}, \bar{y})$.

2. Минимальные тождества подпространства $M_1^{(m, k)}(F)$

Пусть $I_k = \{1, 2, \dots, k\}$, P, Q — какие-либо многочлены алгебры $F\{Z\}$, $\{P\}^T$ — T -идеал алгебры $F\{Z\}$, порожденный многочленом P . Будем говорить, что многочлен Q является следствием многочлена P (следует из P), если $Q \in \{P\}^T$. В частности, если многочлен $P(x_1, \bar{y}) = P(x_1, y_1, \dots, y_m)$ является однородным и $\deg_{x_1}(P(x_1, \bar{y})) = n$, то полная линеаризация $\text{Lin}_{x_1}(P(x_1, \bar{y}))$ многочлена $P(x_1, \bar{y})$ по переменной x_1 будет следствием многочлена $P(x_1, \bar{y})$, здесь (см. [14, 15])

$$\begin{aligned} \text{Lin}_{x_1}(P(x_1, \bar{y})) &= P(x_1 + x_2 + \dots + x_n, \bar{y}) + \\ &+ \sum_{s=1}^{n-1} (-1)^s \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n} P(x_1 + \dots + x_{i_1} + \dots + x_{i_2} + \dots + x_{i_s} + \dots + x_n, \bar{y}) = \\ &= P(x_1 + x_2 + \dots + x_n, \bar{y}) - \sum_{1 \leq i_1 \leq n} P(x_1 + \dots + x_{i_1} + \dots + x_n, \bar{y}) + \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(x_1 + \dots + x_{i_1} + \dots + x_{i_2} + \dots + x_n, \bar{y}) - \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} (P(x_1, \bar{y}) + \dots + P(x_n, \bar{y})). \end{aligned}$$



Лемма 1. *Многочлены*

$$P_{4k}(\bar{x}, y_1) = \sum_{\pi \in S_{2k}} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} y_1 x_{\pi(2)} y_1 \cdots x_{\pi(2k)} y_1,$$

$$Q_{4k}(x_1, \bar{y}) = \sum_{\tau \in S_{2k}} \operatorname{sgn} \tau x_1 y_{\tau(1)} x_1 y_{\tau(2)} \cdots x_1 y_{\tau(2k)}$$

следуют из $S_{2k}^-(\bar{x})$.

Доказательство. Определим эндоморфизмы φ, ψ, χ алгебры $F\{Z\}$, положив

$$\varphi(z) = \begin{cases} z, & \text{если } z \notin \{x_1, \dots, x_{2k}\}, \\ x_i y_1, & \text{если } z = x_i, i \in I_{2k}, \end{cases} \quad \psi(z) = \begin{cases} z, & \text{если } z \notin \{x_1, \dots, x_{2k}\}, \\ y_i, & \text{если } z = x_i, i \in I_{2k}, \end{cases}$$

$$\chi(z) = \begin{cases} z, & \text{если } z \notin \{y_1, \dots, y_{2k}\}, \\ x_1 y_i, & \text{если } z = y_i, i \in I_{2k}. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что

$$P_{4k}(\bar{x}, y_1) = \varphi(S_{2k}^-(\bar{x})) = S_{2k}^-(x_1 y_1, \dots, x_{2k} y_1),$$

$$Q_{4k}(x_1, \bar{y}) = \chi\psi(S_{2k}^-(\bar{x})) = \chi(S_{2k}^-(\bar{y})) = S_{2k}^-(x_1 y_1, \dots, x_1 y_{2k}). \quad \square$$

Предложение 2. Для любых матриц $A_i \in M_{k \times m}(F)$, $B_j \in M_{m \times k}(F)$, где $i, j = \overline{1, 2k}$, справедливы равенства

$$P_{4k}(A_1, \dots, A_{2k}; B_1) = 0, \quad Q_{4k}(A_1; B_1, \dots, B_{2k}) = 0.$$

Доказательство. Подставляя заданные матрицы в многочлены $P_{4k}(\bar{x}, y_1)$, $Q_{4k}(x_1, \bar{y})$, будем иметь

$$P_{4k}(\bar{A}; B_1) = \sum_{\pi \in S_{2k}} \operatorname{sgn} \pi A_{\pi(1)} B_1 A_{\pi(2)} \cdots A_{\pi(2k)} B_1 = S_{2k}^-(A_1 B_1, \dots, A_{2k} B_1) = 0,$$

$$Q_{4k}(A_1; \bar{B}) = S_{2k}^-(A_1 B_1, \dots, A_1 B_{2k}) = 0. \quad \square$$

Лемма 2. Многочлены $C_{4k, \{1\}}(\bar{x}, \bar{y})$, $C_{4k, \{2\}}(\bar{x}, \bar{y})$ являются следствиями стандартного многочлена $S_{2k}^-(\bar{x})$.

Доказательство. Принимая во внимание работу [14], нетрудно видеть, что $C_{4k, \{1\}}(\bar{x}, \bar{y}) = \operatorname{Lin}_{x_1}(Q_{4k}(x_1, \bar{y}))$, $C_{4k, \{2\}}(\bar{x}, \bar{y}) = \operatorname{Lin}_{y_1}(P_{4k}(\bar{x}, y_1))$, и потому с учетом леммы 1 имеем включения

$$C_{4k, \{1\}}(\bar{x}, \bar{y}) \in \{Q_{4k}(x_1, \bar{y})\}^T \subseteq \{S_{2k}^-(\bar{x})\}^T,$$

$$C_{4k, \{2\}}(\bar{x}, \bar{y}) \in \{P_{4k}(\bar{x}, y_1)\}^T \subseteq \{S_{2k}^-(\bar{x})\}^T. \quad \square$$

Замечание 2. При доказательстве леммы 2 были получены равенства

$$C_{4k, \{1\}}(\bar{x}, \bar{y}) = \operatorname{Lin}_{x_1}(Q_{4k}(x_1, \bar{y})), \quad C_{4k, \{2\}}(\bar{x}, \bar{y}) = \operatorname{Lin}_{y_1}(P_{4k}(\bar{x}, y_1)).$$

Предложение 3. Для любых матриц $A_i \in M_{k \times m}(F)$, $B_j \in M_{m \times k}(F)$, где $i, j = \overline{1, 2k}$, справедливы равенства $C_{4k, \{1\}}(\bar{A}; \bar{B}) = 0$, $C_{4k, \{2\}}(\bar{A}; \bar{B}) = 0$.



Доказательство. Проведем для многочлена $C_{4k,\{1\}}(\bar{x}, \bar{y})$, поскольку для $C_{4k,\{2\}}(\bar{x}, \bar{y})$ оно аналогично. Согласно замечанию 2

$$C_{4k,\{1\}}(\bar{A}; \bar{B}) = Q_{4k}(A_1 + \dots + A_{2k}; \bar{B}) + \sum_{s=1}^{2k-1} (-1)^s \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq 2k} Q_{4k}(A_1 + \dots + A_{i_1} + \dots + A_{i_s} + \dots + A_{2k}; \bar{B}).$$

Учитывая теперь предложение 2, получаем, что $C_{4k,\{1\}}(\bar{A}, \bar{B}) = 0$. □

Предложение 4. Для любых матриц $A_i \in M_{k \times m}(F)$, $B_j \in M_{m \times k}(F)$, где $i, j = \overline{1, 2k}$, справедливы равенства $b_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = 0$, $h_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = 0$, $a_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = 0$, $c_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = 0$, $f_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = 0$, $g_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = 0$.

Доказательство. Пусть $\text{char } F \neq 2$, тогда в силу предложения 7 работы [12] справедливы равенства

$$2b_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = C_{4k,\{2\}}(\bar{A}; \bar{B}) + C_{4k}(\bar{A}; \bar{B}), \quad 2h_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = C_{4k,\{2\}}(\bar{A}; \bar{B}) - C_{4k}(\bar{A}; \bar{B}), \\ 2a_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = C_{4k,\{1\}}(\bar{A}; \bar{B}) + C_{4k}(\bar{A}; \bar{B}), \quad 2c_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = C_{4k,\{1\}}(\bar{A}; \bar{B}) - C_{4k}(\bar{A}; \bar{B}).$$

Отсюда, а также из замечания 1 и предложения 3 следует, что при $\text{char } F \neq 2$

$$b_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = h_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = a_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = c_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = 0.$$

Из того, что последние равенства верны при любом поле F характеристики не два, и того, что многочлены $b_{4k}(\bar{x}, \bar{y})$, $h_{4k}(\bar{x}, \bar{y})$, $a_{4k}(\bar{x}, \bar{y})$, $c_{4k}(\bar{x}, \bar{y})$ полилинейны и имеют коэффициенты ± 1 , вытекает, что эти равенства останутся верными и при $\text{char } F = 2$.

Далее, согласно предложению 7 работы [12] справедливы равенства

$$g_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = b_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) - a_{4k}(\bar{A}; \bar{B}), \quad f_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = h_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) + a_{4k}(\bar{A}; \bar{B}).$$

Отсюда и из доказанного выше следует, что $g_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = f_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = 0$. □

Пусть $M_{m+k}(F)$ — алгебра матриц, градуированная подпространствами

$$M_0^{(m,k)}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} C_{m \times m}(F) & 0_{m \times k} \\ 0_{k \times m} & D_{k \times k}(F) \end{pmatrix} \right\}, \quad M_1^{(m,k)}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 0_{m \times m} & B_{m \times k}(F) \\ A_{k \times m}(F) & 0_{k \times k} \end{pmatrix} \right\},$$

$T[M_1^{(m,k)}(F)]$ — идеал тождеств векторного подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$.

Теорема. Для любых натуральных чисел m, k и произвольного поля F многочлены $b_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$, $h_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$, $a_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$, $c_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$, $f_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$, $g_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_1^{(m,k)}(F)]$.

Доказательство. Вытекает из предложения 5 работы [1] и предложения 4. □

В работе [13] доказано, что если ненулевой многочлен $\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_1^{(m,k)}(F)]$ и $m \neq k$, то $\deg \Phi(\bar{x}, \bar{y}) \geq 4k + 1$. Отсюда и из теоремы следует, что квазимногочлены Капелли $b_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$, $h_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$, $a_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$, $c_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$, $f_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$, $g_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$ являются минимальными тождествами подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$ матричной алгебры $M_{m+k}(F)$ при $m \neq k$.



Список литературы

1. Антонов С. Ю., Антонова А. В. О квазимногочленах Капелли. II // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 4–16. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-4-16>
2. Vincenzo O. M. On the graded identities of $M_{1,1}(E)$ // Israel Journal of Mathematics. 1992. Vol. 80, № 3. P. 323–335. <https://doi.org/10.1007/BF02808074>
3. Mattina D. On the graded identities and cocharacters of the algebra of 3×3 matrices // Linear Algebra and its Applications. 2004. Vol. 384. P. 55–75. [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(04\)00034-5](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(04)00034-5)
4. Аверьянов И. В. Базис градуированных тождеств супералгебры $M_{1,2}(F)$ // Математические заметки. 2009. Т. 85, вып. 4. С. 483–501. <https://doi.org/10.4213/mzm4298>
5. Vincenzo O. M. Z_2 -graded polynomial identities for superalgebras of block-triangular matrices // Serdica Mathematical Journal. 2004. Vol. 30, № 2–3. P. 111–134.
6. Di Vincenzo O. M., Nardozza V. Z_2 -graded cocharacters for superalgebras of triangular matrices // Journal of Pure and Applied Algebra. 2004. Vol. 194, iss. 1–2. P. 193–211. <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2004.04.004>
7. Amitsur S. A., Levitzki J. Minimal identities for algebras // Proceedings of the American Mathematical Society. 1950. Vol. 1, № 4. P. 449–463. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1950-0036751-9>
8. Размыслов Ю. П. О радикале Джекобсона в PI-алгебрах // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 3. С. 337–360.
9. Гатева Т. В. Сложность произведения многообразий ассоциативных алгебр // Успехи математических наук. 1981. Т. 36, вып. 1 (217). С. 203–204.
10. Chang Q. Some consequences of the standard polynomial // Proceedings of the American Mathematical Society. 1988. Vol. 104, № 3. P. 707–710. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1988-0964846-8>
11. Giambruno A., Sehgal S. K. On a polynomial identity for $n \times n$ matrices // Journal of Algebra. 1989. Vol. 126, № 2. P. 451–453.
12. Антонов С. Ю., Антонова А. В. О кратных многочленах Капелли // Ученые записки Казанского университета. Серия : Физико-математические науки. 2016. Т. 158, № 1. С. 5–25.
13. Антонов С. Ю. Наименьшая степень тождеств подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$ матричной супералгебры $M^{(m,k)}(F)$ // Известия вузов. Математика. 2012. № 11. С. 3–19.
14. Латышев В. Н. Комбинаторные порождающие полилинейных полиномиальных тождеств // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12, вып. 2. С. 101–110.
15. Белов А. Я. Локальная конечная базируемость и локальная представимость многообразий ассоциативных колец // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2010. Т. 74, вып. 1. С. 3–134. <https://doi.org/10.4213/im1122>

References

1. Antonov S. Yu., Antonova A. V. Quasi-polynomials of Capelli. II. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 4–16 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-4-16>
2. Vincenzo O. M. On the graded identities of $M_{1,1}(E)$. *Israel Journal of Mathematics*, 1992, vol. 80, no. 3, pp. 323–335. <https://doi.org/10.1007/BF02808074>
3. Mattina D. On the graded identities and cocharacters of the algebra of 3×3 matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 2004, vol. 384, pp. 55–75. [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(04\)00034-5](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(04)00034-5)
4. Aver'yanov I. V. Basis of graded identities of the superalgebra $M_{1,2}(F)$. *Mathematical Notes*, 2009, vol. 85, pp. 467–483. <https://doi.org/10.1134/S0001434609030195>



5. Vincenzo O. M. Z_2 -graded polynomial identities for superalgebras of block-triangular matrices. *Serdica Mathematical Journal*, 2004, vol. 30, no. 2–3, pp. 111–134.
6. Di Vincenzo O. M., Nardozza V. Z_2 -graded cocharacters for superalgebras of triangular matrices. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2004, vol. 194, iss. 1–2, pp. 193–211. <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2004.04.004>
7. Amitsur S. A., Levitzki J. Minimal identities for algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1950, vol. 1, no. 4, pp. 449–463. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1950-0036751-9>
8. Razmyslov Yu. P. On the Jacobson radical in PI algebras. *Algebra and Logic*, 1974, vol. 13, no. 3, pp. 337–360.
9. Gateva T. V. The complexity of a bundle of varieties of associative algebras. *Russian Mathematical Surveys*, 1981, vol. 36, no. 1, pp. 233.
10. Chang Q. Some consequences of the standard polynomial. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1988, vol. 104, no. 3, pp. 707–710. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1988-0964846-8>
11. Giambruno A., Sehgal S. K. On a polynomial identity for $n \times n$ matrices. *Journal of Algebra*, 1989, vol. 126, no. 2, pp. 451–453.
12. Antonov S. Yu., Antonova A. V. On multiple polynomials of Capelli type *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 1, pp. 5–25 (in Russian).
13. Antonov S. Y. The least degree identities subspace $M_1^{(m,k)}(F)$ of matrix superalgebra $M^{(m,k)}(F)$. *Russian Mathematical (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2012, no. 56, pp. 1–16. <https://doi.org/10.3103/S1066369X12110011>
14. Latyshev V. N. Combinatorial generators of the multilinear polynomial identities. *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 149, iss. 2, pp. 1107–1112. <https://doi.org/10.1007/s10958-008-0049-5>
15. Belov A. Ya. The local finite basis property and local representability of varieties of associative rings. *Izvestiya: Mathematics*, 2010, vol. 74, iss. 1, pp. 1–126. <http://dx.doi.org/10.1070/IM2010v074n01ABEH002481>

Поступила в редакцию / Received 14.02.2020

Принята к публикации / Accepted 01.06.2020

Опубликована / Published 31.05.2021



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 151–161
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 151–161

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-151-161>

Numerical solution of linear differential equations with discontinuous coefficients and Henstock integral

S. F. Lukomskii[✉], D. S. Lukomskii

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Sergey F. Lukomskii, LukomskiiSF@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3038-2698>

Dmitrii S. Lukomskii, wfhm@yahoo.com, <https://orcid.org/0000-0003-3892-4121>

Abstract. We consider the problem of approximate solution of linear differential equations with discontinuous coefficients. We assume that these coefficients have f -primitive. It means that these coefficients are Henstock integrable only. Instead of the original Cauchy problem, we consider a different problem with piecewise-constant coefficients. The sharp solution of this new problem is the approximate solution of the original Cauchy problem. We found the degree of approximation in terms of f -primitive for Henstock integrable coefficients. Two examples are given. In the first example, the coefficients have an infinite derivative at zero. In the second example, the coefficients have an infinite derivative at interior points.

Keywords: linear differential equations, Cauchy problem, Henstock integral, numerical solution

Acknowledgements: First author was supported by Education Center “Mathematics of Future Technologies”.

For citation: Lukomskii S. F., Lukomskii D. S. Numerical solution of linear differential equations with discontinuous coefficients and Henstock integral. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 151–161 (in English). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-151-161>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 517.926

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-151-161>

Численное решение линейных дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами и интеграл Хенстока

С. Ф. Лукомский[✉], Д. С. Лукомский

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Лукомский Сергей Федорович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, LukomskiiSF@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3038-2698>



Лукомский Дмитрий Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и вычислительной математики, wfhm@yahoo.com, <https://orcid.org/0000-0003-3892-4121>

Аннотация. Рассматривается задача приближенного решения линейных дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Предполагается, что эти коэффициенты имеют f -примитивные. Это означает, что эти коэффициенты являются интегрируемыми только по Хенстоку. Вместо исходной задачи Коши мы рассматриваем другую задачу с кусочно-постоянными коэффициентами. Точное решение этой новой задачи есть приближенное решение исходной задачи Коши. Мы указываем степень аппроксимации в терминах f -примитивных для интегрируемых по Хенстоку коэффициентов. Приведены два примера. В первом примере коэффициенты имеют бесконечную производную в нуле. Во втором примере коэффициенты имеют бесконечную производную во внутренних точках.

Ключевые слова: линейные дифференциальные уравнения, задача Коши, интеграл Хенстока, численное решение

Благодарности: Первый автор поддержан НОЦ «Математика технологий будущего».

Для цитирования: *Lukomskii S. F., Lukomskii D. S.* Numerical solution of linear differential equations with discontinuous coefficients and Henstock integral [*Лукомский С. Ф., Лукомский Д. С.* Численное решение линейных дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами и интеграл Хенстока] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 151–161. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-151-161>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Introduction

In the classical initial value problem for a linear differential equation of the first order

$$y' + p(x)y = q(x), \quad y(a) = y_0, \quad x \in [a, b], \quad (1)$$

the coefficients $p(x)$ and $q(x)$ are continuous functions. However, some problems of dry friction and electric circuit with relay are given the equations with the discontinuous functions p and q . For example, the RL-electric circuit with relay is described by a linear differential equation

$$\frac{di}{dt} + \frac{R(t)}{L}i = \frac{e(t)}{L}$$

with the discontinuous function $R(t)$. In this case, it is assumed that the functions $p(x)$ and $q(x)$ are (L)-integrable and a function $y(x)$ is called a solution to equation (1) if $y(x)$ is absolutely continuous and satisfies the equation (1) almost everywhere on $[a, b]$.

There are no effective methods for the approximate solution of equations with unbounded coefficients $p(x)$ and $q(x)$. If the coefficients $p(x)$ and $q(x)$ are unbounded in some neighborhood of the point a , then Runge – Kutta method does not work. If the coefficients $p(x)$ and $q(x)$ are unbounded in some neighborhood of the interior point $c \in (a, b)$, then Runge – Kutta method has a very large error, usually more than 1.

Some authors use Haar and Walsh functions to solve linear equations [1–3]. In [4, 5] G. Gat and R. Toledo propose to approach the solution $y(x)$ by the Walsh polynomial

$$\tilde{y}_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k W_k(x).$$



In [4] for continuous function $q(x)$ ($x \in [0, 1]$) and $p(x) = \text{const}$, an estimate for the error $|y(x) - \tilde{y}(x)|$ is obtained. In [5] the authors consider the case when $q \in L(0, 1)$ is a continuous function on $[0, 1[$ and prove that $\tilde{y}_n(x)$ converges uniformly to the solution $y(x)$ on the interval $[0, 1[$.

In [6], the authors present the derivative y' of the solution y as a Haar expansion and obtain an estimate of the approximate solution in terms of the modulus of continuity of the coefficients $p(x)$ and $q(x)$. This method can also be used for equations with unbounded coefficients $p(x)$ and $q(x)$.

In this article we will assume that $p(x)$ and $q(x)$ are Henstock integrable functions on the interval $[a, b]$. We construct the approximate solution $\tilde{y}(x)$ and obtain the estimate of the error $|y(x) - \tilde{y}(x)|$ in terms of modulus of continuity $\omega_{\frac{1}{2^n}}(e^P)$, $\omega_{\frac{1}{2^n}}(e^{-P})$, and $\omega_{\frac{1}{2^n}}(Q)$, where P and Q are f -primitives for p and q respectively.

The paper is organized as follows. In Sec. 1, we recall some facts from Henstock integral. In Sec. 2, we indicate the necessary and sufficient condition, under which the Cauchy problem has a solution. This solution is given in terms of the Henstock integral. In Sec. 3, we construct the approximative solution and find the error. In Sec. 4, we give two examples.

1. Henstock integral on the interval

Any function $\delta(x) > 0$ on $[a, b]$ is said to be a gauge. Let $\mathfrak{X} = (x_k)_{k=0}^n$ be a partition of the interval $[a, b]$. The point $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ is called a tag of $[x_{k-1}, x_k]$, the set of ordered pairs $([x_{k-1}, x_k], \xi_k)_{k=1}^n$ is called a tagged partition and is denoted by $\overset{\circ}{\mathfrak{X}} = ([x_{k-1}, x_k], \xi_k)_{k=1}^n$.

The tagged partition $\overset{\circ}{\mathfrak{X}} = ([x_{k-1}, x_k], \xi_k)_{k=1}^n$ of the interval $[a, b]$ is called δ -fine and is denoted by $\overset{\circ}{\mathfrak{X}} \ll \delta$ if for any $k = 1, \dots, n$

$$|x_{k-1} - x_k| < \delta(\xi_k).$$

It is known that for any gauge $\delta(x) > 0$ on $[a, b]$ there exists a δ -fine partition $\overset{\circ}{\mathfrak{X}} = ([x_{k-1}, x_k], \xi_k)_{k=1}^n$ of $[a, b]$.

A function $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is said to be Henstock-integrable (or generalized Riemann-integrable) on the interval $[a, b]$ if there exists a number $I(f) \in \mathbb{R}$ such that

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(x) > 0 \text{ on } [a, b] \forall \overset{\circ}{\mathfrak{X}} \ll \delta(x), \quad |S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}, f) - I(f)| < \varepsilon.$$

The number $I(f)$ is called Henstock integral and is denoted by $(R^*) \int_a^b f(x) dx$ or

$$\int_a^b f(x) dx.$$

The collection of all functions that are Henstock integrable on $[a, b]$ is denoted by $R^*(a, b)$. A function $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is called absolutely integrable if $f \in R^*(a, b)$ and $|f| \in R^*(a, b)$. There exist Henstock integrable functions that are not absolutely integrable. If the function $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is absolutely integrable, then $f \in L(a, b)$.

The function $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is called a c -primitive (f -primitive) for a function g if G is continuous on $[a, b]$ and there exists a countable (finite) set $E \subset [a, b]$ such that $G'(x) = g(x)$ on $[a, b] \setminus E$. We will use the following properties of Henstock integral.



Theorem 1 ([7]). If $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ has a c -primitive F with a exceptional set E , then $f \in R^*(a, b)$ and for all x

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

It follows that for $x \in [a, b] \setminus E$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Theorem 2 ([7]). Let $f \in R^*(a, b)$ and $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. The function f is absolutely integrable on $[a, b]$ if and only if $\bigvee_a^b(F) < +\infty$. In this case,

$$\int_a^b |f(t)|dt = \bigvee_a^b(F).$$

Theorem 3 ([7]). If $f \in R^*(a, b)$ and g is monotone on $[a, b]$, then there exists $\xi \in [a, b]$ such that

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx.$$

Theorem 4 ([7]). Let F and G be a c -primitives on $[a, b]$. Then $F'G \in R^*(a, b)$ if and only if $FG' \in R^*(a, b)$. In this case,

$$\int_a^b F'Gdt = F(t)G(t) \Big|_a^b - \int_a^b FG'dt.$$

Theorem 5 ([7], Hake's theorem). Let $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ and $f \in R^*(a, c)$ for any $c \in (a, b)$. Then $f \in R^*(a, b)$ if and only if there exists

$$\lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x) dx = I.$$

In this case, $I = (R^*) \int_a^b f(x) dx$.

A detailed exposition of the Henstock integral theory can be found in [7, 8].

2. Linear differential equations and Henstock integral

Let $p, q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ be two continuous functions that the differentiable on the interval $[a, b]$ with the exception of a countable set E . We will consider the classical Cauchy initial value problem

$$y' + p'(x)y = q'(x), \quad x \in [a, b] \setminus E, \tag{2}$$

$$y(a) = y_0. \tag{3}$$

It follows from Theorem 1 that functions $p'(x)$ and $q'(x)$ are Henstock integrable. This is a weaker condition than $p', q' \in L(a, b)$.



Example 1. Define the function q on $[a, b]$ in the following way. Let $x_n = a + \frac{b-a}{2^n}$. Assume $q(a) = q(x_n) = 0, q(\frac{x_n+x_{n+1}}{2}) = \frac{1}{n}, q(x)$ is lineal on $[x_{n+1}, \frac{x_n+x_{n+1}}{2}]$ and $[\frac{x_n+x_{n+1}}{2}, x_n]$. Then $q' \in R^*(a, b)$, but $q' \notin L(a, b)$.

Theorem 6. Equation (2) has a continuous solution that is differentiable on the set $[a, b] \setminus E$ if and only if the function $e^{p(x)}q'(x)$ has a c -primitive differentiable on $[a, b] \setminus E$.

Proof. *Necessity.* Let $y(x)$ be a solution of (2), that is

$$y'(x) + p'(x)y(x) = q'(x)$$

for all $x \in [a, b] \setminus E$. Then

$$e^{p(x)}y'(x) + p'(x)y(x)e^{p(x)} = q'(x)e^{p(x)}$$

for all $x \in [a, b] \setminus E$ or in another words

$$(y(x)e^{p(x)})' = q'(x)e^{p(x)} \quad (x \in [a, b] \setminus E). \tag{4}$$

It means that the function $q'(x)e^{p(x)}$ has c -primitive $y(x)e^{p(x)}$.

Sufficiently. Let $q'(x)e^{p(x)}$ has c -primitibe $F(x)$, that is

$$F'(x) = q'(x)e^{p(x)} \quad x \in [a, b] \setminus E.$$

Let us denote $y(x) = \frac{F(x)}{e^{p(x)}} \Leftrightarrow F(x) = y(x)e^{p(x)} \quad (x \in [a, b] \setminus E)$. Then

$$\forall x \in [a, b] \setminus E \quad y'(x)e^{p(x)} + y(x)e^{p(x)}p'(x) = q'(x)e^{p(x)} \Leftrightarrow y'(x) + y(x)p'(x) = q'(x). \quad \square$$

Corollary. A solution of Cauchy initial value problem (2)–(3) is given by the formula

$$y(x) = e^{p(a)-p(x)}g(a) + e^{-p(x)} \int_a^x q'(t)e^{p(t)} dt,$$

where an integral is the Henstock integral.

Proof. It follows from Equality (4) that the function $y(x)e^{p(x)}$ is c -primitive for $q'e^{p(x)}$, it means $q'e^{p(x)}$ is Henstock integrable and the equality

$$\int_a^x q'(t)e^{p(t)} dt = y(x)e^{p(x)} - y(a)e^{p(a)}$$

holds. □

Example 2. It is possible to construct the continuous functions p and q so that the function $q'(x)e^{p(x)}$ has a c -primitive, but $q'(x)e^{p(x)} \notin L(a, b)$. For simplicity, we consider the case $[a, b] = [0, 1]$ and select the function $q(x)$ as in Example 1. In this case $x_n = 2^{-n}, q(x_n) = q(0) = 0, q(x)$ is lineal on $[x_{n+1}, \xi_n]$ and $[\xi_n, x_n]$, where $\xi_n = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$. Now we define the function $p(x)$ by the conditions:

- (a) $e^{p(2^{-n})} = \beta_n > 1, \beta_n \downarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$;
- (b) $e^{p(x)}$ is lineal on any interval $[2^{-n-1}, 2^{-n}]$.



It is evident that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{2^{-k+1}}^{2^{-k}} q'(x)e^{p(x)} dx$$

converges. It follows from the Hake theorem that $f(x) = q'(x)e^{p(x)} \in R^*(0, 1)$. Therefore the function $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ is continuous. Since the function $f(x) = q'(x)e^{p(x)}$ is continuous on any interval $(2^{-n-1}, 2^{-n})$, it follows that $F'(x) = q'(x)e^{p(x)}$ on any interval $(2^{-n-1}, 2^{-n})$. It means that $F(x)$ is c -primitive for $q'(x)e^{p(x)}$. It is not difficult to check that $f(x) = q'(x)e^{p(x)} \notin L(0, 1)$.

3. Approximate solution of Cauchy problem (2)–(3) on interval [0,1]

Now we will find an approximate solution of Cauchy initial value problem

$$y' + p'(x)y = q'(x), \quad x \in [0, 1] \setminus E, \tag{5}$$

$$y(0) = y_0. \tag{6}$$

We assume that the functions p and q are continuous and have derivatives with the exception of some countable set E . We also assume that $e^{p(x)}q'(x)$ has a c -primitive differentiable on $[a, b] \setminus E$.

We choose an arbitrary $n \in \mathbb{N}$, define the functions $\tilde{p}(x)$ and $\tilde{q}(x)$ by equalities

$$\tilde{p}\left(\frac{k}{2^n}\right) = p\left(\frac{k}{2^n}\right), \quad \tilde{q}\left(\frac{k}{2^n}\right) = q\left(\frac{k}{2^n}\right),$$

$$\tilde{p}(x) = p\left(\frac{k}{2^n}\right) + 2^n \left(x - \frac{k}{2^n}\right) \left(p\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - p\left(\frac{k}{2^n}\right)\right), \quad x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right],$$

$$\tilde{q}(x) = q\left(\frac{k}{2^n}\right) + 2^n \left(x - \frac{k}{2^n}\right) \left(q\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - q\left(\frac{k}{2^n}\right)\right), \quad x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right],$$

and consider the Cauchy initial value problem

$$\tilde{y}' + \tilde{p}'\tilde{y} = \tilde{q}', \tag{7}$$

$$\tilde{y}(0) = y_0. \tag{8}$$

It is evident that the function $e^{\tilde{p}(x)}\tilde{q}'$ has a f -primitive. By Theorem 6 the functions

$$y(x) = y_0 e^{p(0)-p(x)} + e^{-p(x)} \int_0^x q'(t)e^{p(t)} dt,$$

$$\tilde{y}(x) = y_0 e^{\tilde{p}(0)-\tilde{p}(x)} + e^{-\tilde{p}(x)} \int_0^x \tilde{q}'(t)e^{\tilde{p}(t)} dt$$

are solutions of Cauchy problems (5)–(6) and (7)–(8) respectively. The function $\tilde{y}(x)$ is the approximate solution of Cauchy problem (5)–(6). In the following theorem, we indicate an estimate for the distance $y(x) - \tilde{y}(x)$.



Theorem 7. *The following inequality*

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq C_{-1}\omega_{\frac{1}{2^n}}(e^{-p}) + C_1\omega_{\frac{1}{2^n}}(e^p) + \omega_{\frac{1}{2^n}}(q)C_0 + C_2\omega_{\frac{1}{2^n}}(q)\omega_{\frac{1}{2^n}}(p),$$

holds, where

$$C_{-1} = |y_0|e^{p(0)} + \|e^p\|_{C[0,1]} \bigvee_0^1 q, \quad C_1 = 2\|e^p\|_{C[0,1]} \bigvee_0^1 q,$$

$$C_0 = \|e^p\|_{C[0,1]} + \|e^p\|_{C[0,1]} \bigvee_0^1 e^p, \quad C_2 = \|e^p\|_{C[0,1]}^2.$$

Proof. 1. First we estimate the difference $y(x) - \tilde{y}(x)$ for $x = \frac{k}{2^n}, k = 0, 1, \dots, 2^n$. We have

$$y(x) - \tilde{y}(x) = e^{-p(\frac{k}{2^n})} \int_0^{\frac{k}{2^n}} (q'(t)e^{p(t)} - \tilde{q}'(t)e^{\tilde{p}(t)}) dt =$$

$$= e^{-p(\frac{k}{2^n})} \int_0^{\frac{k}{2^n}} (q'(t) - \tilde{q}'(t))e^{p(t)} dt + e^{-p(\frac{k}{2^n})} \int_0^{\frac{k}{2^n}} \tilde{q}'(t)(e^{p(t)} - e^{\tilde{p}(t)}) dt = I_1 + I_2.$$

To estimate integrals in I_1 and I_2 we will assume that p' and q' — are Henstock absolutely integrable.

Assume I_1 . Integrating by parts and using the equality $q'(\frac{j}{2^n}) = \tilde{q}'(\frac{j}{2^n})$ we obtain

$$\left| \int_0^{\frac{k}{2^n}} (q'(t) - \tilde{q}'(t))e^{p(t)} dt \right| \leq \left| q(t) - \tilde{q}(t) \right|_0^{\frac{k}{2^n}} + \left| \int_0^{\frac{k}{2^n}} (q(t) - \tilde{q}(t))(e^{p(t)})' dt \right| \leq$$

$$\leq \omega_{\frac{1}{2^n}}(q) \int_0^{\frac{k}{2^n}} |(e^{p(t)})'| dt \leq \omega_{\frac{1}{2^n}}(q) \bigvee_0^1 e^{p(\cdot)}.$$

So

$$|I_1| \leq \|e^{-p(\cdot)}\|_{C(0,1)} \omega_{\frac{1}{2^n}}(q(\cdot)) \bigvee_0^1 e^{p(\cdot)}.$$

Since the function $e^{\tilde{p}(t)}$ is monotonic on any interval $[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}]$, it follow that $|(e^{p(t)} - e^{\tilde{p}(t)})| \leq \omega_{\frac{1}{2^n}}(e^{p(\cdot)})$. Therefore

$$|I_2| \leq \|e^{-p(\cdot)}\| \cdot \omega_{\frac{1}{2^n}}(e^{p(\cdot)}) \bigvee_0^1 q(\cdot),$$

and

$$\left| y\left(\frac{k}{2^n}\right) - \tilde{y}\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| \leq \|e^{-p(\cdot)}\|_{C[0,1]} \left(\omega_{\frac{1}{2^n}}(q(\cdot)) \bigvee_0^1 e^{p(\cdot)} + \omega_{\frac{1}{2^n}}(e^{p(\cdot)}) \cdot \bigvee_0^1 q(\cdot) \right).$$



2. Now we consider the case $x \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$. Let us write the difference $y(x) - \tilde{y}(x)$ in the form

$$\begin{aligned}
 y(x) - \tilde{y}(x) &= y_0 e^{p(0)} (e^{-p(x)} - e^{-\tilde{p}(x)}) + \\
 &+ (e^{-p(x)} - e^{-\tilde{p}(x)}) \left(\int_0^{\frac{k}{2^n}} q'(t) e^{p(t)} dt + \int_{\frac{k}{2^n}}^x q'(t) e^{p(t)} dt \right) + \\
 &+ e^{-\tilde{p}(x)} \left(\int_0^{\frac{k}{2^n}} q'(t) e^{p(t)} dt - \int_0^{\frac{k}{2^n}} \tilde{q}'(t) e^{\tilde{p}(t)} dt \right) + \\
 &+ e^{-\tilde{p}(x)} \left(\int_x^{\frac{k}{2^n}} q'(t) e^{p(t)} dt - \int_{\frac{k}{2^n}}^x \tilde{q}'(t) e^{\tilde{p}(t)} dt \right) = A_1 + A_2 + (A_3 + A_4) e^{-\tilde{p}(x)}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

We will estimate A_l ($l = 1, 2, 3, 4$).

2.1. Since the function $e^{-\tilde{p}(x)}$ is monotonic on any interval $[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}]$, it follows that

$$|e^{-p(x)} - e^{-\tilde{p}(x)}| \leq \omega_{\frac{1}{2^n}}(e^{-p}). \quad (10)$$

2.2. Using (10) again, we get

$$|A_2| \leq \omega_{\frac{1}{2^n}}(e^{-p}) \left| \int_0^x q'(t) e^{p(t)} dt \right| \leq \omega_{\frac{1}{2^n}}(e^{-p}) \|e^p\|_{C[0,1]} \bigvee_0^1 q. \quad (11)$$

2.3. An estimate for A_3 was obtained earlier

$$|A_3| \leq \left((\omega_{\frac{1}{2^n}}(q)) \bigvee_0^1 e^p + \omega_{\frac{1}{2^n}}(e^p) \bigvee_0^1 q \right). \quad (12)$$

2.4. Let us write A_4 in the form

$$A_4 = \int_{\frac{k}{2^n}}^x q'(t) (e^{p(t)} - e^{\tilde{p}(t)}) dt + \int_{\frac{k}{2^n}}^x e^{\tilde{p}(t)} (q'(t) - \tilde{q}'(t)) dt. \quad (13)$$

Since the function $e^{\tilde{p}(t)}$ is monotonic on the interval $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$, both integrals exist. For the first integral, we have the obvious inequality

$$\int_{\frac{k}{2^n}}^x q'(t) (e^{p(t)} - e^{\tilde{p}(t)}) dt \leq \omega_{\frac{1}{2^n}}(e^p) \cdot \int_{\frac{k+1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} |q'(t)| dt \leq \omega_{\frac{1}{2^n}}(e^p) \bigvee_0^1 q.$$

Integrating by parts the second integral in (13) we have

$$\left| \int_{\frac{k}{2^n}}^x e^{\tilde{p}(t)} (q'(t) - \tilde{q}'(t)) dt \right| \leq |q(x) - \tilde{q}(x)| + \omega_{\frac{1}{2^n}}(q) \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} |(e^{\tilde{p}(t)})| dt \leq$$



$$\begin{aligned} &\leq \omega_{\frac{1}{2^n}}(q) + \omega_{\frac{1}{2^n}}(q) \left| \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} e^{\tilde{p}(t)} \cdot \tilde{p}'(t) dt \right| \leq \\ &\leq \omega_{\frac{1}{2^n}}(q) + \omega_{\frac{1}{2^n}}(q) \|e^p\|_{C[0,1]} \left| p \left(\frac{k+1}{2^n} \right) - p \left(\frac{k}{2^n} \right) \right| \leq \omega_{\frac{1}{2^n}}(q) (1 + \|e^p\|_{C[0,1]} \omega_{\frac{1}{2^n}}(p)). \end{aligned}$$

Finally, we obtain

$$|A_4| \leq \omega_{\frac{1}{2^n}}(e^p) \int_0^1 q + \omega_{\frac{1}{2^n}}(q) (1 + \|e^p\|_{C[0,1]} \omega_{\frac{1}{2^n}}(p)). \tag{14}$$

Substituting inequalities (10), (11), (12), and (14) in (9) we get

$$\begin{aligned} |y(x) - \tilde{y}(x)| &\leq |y_0| e^{p(0)} \omega_{\frac{1}{2^n}}(e^{-p}) + \omega_{\frac{1}{2^n}}(e^{-p}) \|e^p\|_{C[0,1]} \int_0^1 q + \\ &\quad + \|e^p\|_{C[0,1]} \left(\omega_{\frac{1}{2^n}}(q) \int_0^1 e^p + \omega_{\frac{1}{2^n}}(e^p) \int_0^1 q \right) + \\ &\quad + \|e^p\|_{C[0,1]} \left(\omega_{\frac{1}{2^n}}(e^p) \int_0^1 q + \omega_{\frac{1}{2^n}}(q) (1 + \|e^p\|_{C[0,1]} \omega_{\frac{1}{2^n}}(p)) \right) = \\ &= C_{-1} \omega_{\frac{1}{2^n}}(e^{-p}) + C_1 \omega_{\frac{1}{2^n}}(e^p) + \omega_{\frac{1}{2^n}}(q) C_0 + C_2 \omega_{\frac{1}{2^n}}(q) \omega_{\frac{1}{2^n}}(p). \end{aligned} \quad \square$$

4. Some examples

Example 3. Let us consider the Cauchy problem

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in [0, 1], \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Here $p(x) = \sqrt{x}$, $q(x) = x + 2\sqrt{x}$. The solution $y(x) = 2\sqrt{x}$ of this problem is a continuous function on $[0, 1]$, but the derivative $y'(0)$ does not exist. We denote by $\tilde{y}(x)$ the approximative solution for some $N = 2^n > 1$. In the Table 1 we give the approximative solution of Cauchy problem (15).

Table 1
The approximative solution of Cauchy problem (15)

x	$y(x)$	$\tilde{y}(x)$ for N			
		$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$
0.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.125	0.70710	0.70485	0.70629	0.70681	0.70700
0.250	1.00000	0.99793	0.99927	0.99974	0.99991
0.500	1.41421	1.41244	1.41359	1.41399	1.41413
0.750	1.73205	1.73050	1.73151	1.73186	1.73198
1.000	2.00000	1.99862	1.99952	1.99983	1.99994

In this table $y(x)$ is the sharp solution, $\tilde{y}(x)$ is the approximative solution.



Example 4. Let us consider the Cauchy problem

$$\begin{cases} y' + p'(x)y = q'(x), & x \in [0, 1], \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

where

$$p(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{if } x \in [0, 1/3], \\ (2/3 - x)\sqrt{3} & \text{if } x \in [1/3, 2/3], \\ \sqrt{x - 2/3} & \text{if } x \in [2/3, 1], \end{cases}$$

$$p'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{if } x \in [0, 1/3], \\ -\sqrt{3} & \text{if } x \in [1/3, 2/3], \\ \frac{1}{2\sqrt{x-2/3}} & \text{if } x \in [2/3, 1], \end{cases}$$

$$q(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \sqrt{x} - 2/3 & \text{if } x \in [0, 1/3], \\ -x(2 + \sqrt{3}) + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} & \text{if } x \in [1/3, 2/3], \\ \frac{x}{2} + \sqrt{x - 2/3} - 1 & \text{if } x \in [2/3, 1], \end{cases}$$

$$q'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}) & \text{if } x \in [0, 1/3], \\ -2 - \sqrt{3} + 3x & \text{if } x \in [1/3, 2/3], \\ \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{x-2/3}}) & \text{if } x \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

The solution

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in [0, 1/3], \\ \sqrt{3}(2/3 - x), & x \in [1/3, 2/3], \\ \sqrt{x - 2/3}, & x \in [2/3, 1], \end{cases}$$

of this problem is a continuous function on $[0, 1]$, but the derivatives $y'(1/3)$, $y'(2/3)$, $y'(0)$ do not exist.

In the Figure we demonstrate graphs of the approximate and exact solutions. Both graphs are drawn on 512 points. First, we drew a graph of the approximate solution (blue color), then a graph of the exact solution (red color). We see that these graphs coincided.

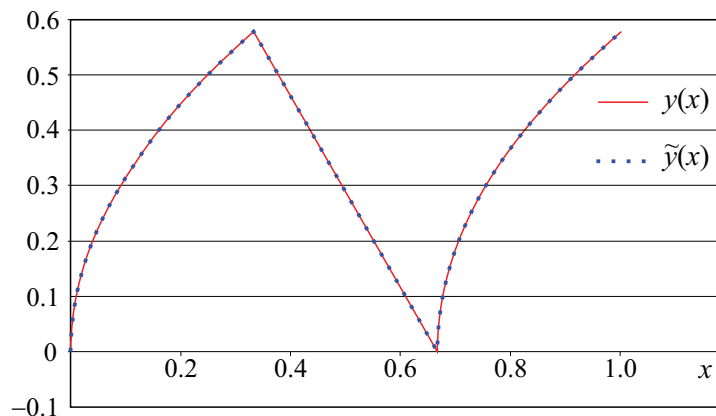


Fig. The graphs of $\tilde{y}(x)$ (blue) and $y(x)$ (red) for $2^n = N = 512$ (color online)



We denote by $\tilde{y}_n(x)$ the approximative solution for the point system $(j2^{-n})_{j=0}^{2^n}$ and $\delta_n = \max_j |\tilde{y}_n(j2^{-n}) - y(j2^{-n})|$. In the Table 2 we give the error of the approximative solution of Cauchy problem (16) for $n = \overline{4, 10}$.

Table 2

The error of the approximative solution for 2^n

n	4	5	6	7	8	9	10
2^n	16	32	64	128	256	512	1024
δ_n	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$5.3 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$8.6 \cdot 10^{-5}$	$2.8 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$3.9 \cdot 10^{-6}$

References

1. Ohkita M., Kobayashi Y. An application of rationalized Haar functions to solution of linear differential equations. *IEEE Transactions on Circuit and Systems*, 1968, vol. 33, no. 9, pp. 853–862. <https://doi.org/10.1109/TCS.1986.1086019>
2. Razzaghi M., Ordokhani Y. Solution of differential equations via rationalized Haar functions. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2001, vol. 56, no. 3, pp. 235–246. [https://doi.org/10.1016/S0378-4754\(01\)00278-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4754(01)00278-6)
3. Razzaghi M., Ordokhani Y. An application of rationalized Haar functions for variational problems. *Applied Mathematics and Computation*, 2001, vol. 122, no. 3, pp. 353–364. [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(00\)00050-3](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(00)00050-3)
4. Gat G., Toledo R. A numerical method for solving linear differential equations via Walsh functions. In: *Advances in Information Science and Applications. Volumes I & II. Proceedings of the 18th International Conference on Computers (part of CSCC '14)*, 2014, pp. 334–339.
5. Gat G., Toledo R. Estimating the error of the numerical solution of linear differential equations with constant coefficients via Walsh polynomials. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis*, 2015, vol. 31, no. 2, pp. 309–330.
6. Lukomskii D. S., Lukomskii S. F., Terekhin P. A. Solution of Cauchy problem for equation first order via Haar functions. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, vol. 16, iss. 2, pp. 151–159 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-2-151-159>
7. Bartle G. *A Modern Theory of Integration*. Providence, AMS, 2001. 458 p.
8. Gordon A. *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*. Providence, AMS, 1994. 396 p.

Поступила в редакцию / Received 17.03.2020

Принята к публикации / Accepted 07.10.2020

Опубликована / Published 31.05.2021



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 162–172
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 162–172

Научная статья

УДК 517.538.52+517.538.53

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-162-172>

О скорости сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде экспоненциальных функций

А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко 

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Республика Беларусь, 246019, г. Гомель, ул. Советская, д. 104

Старовойтов Александр Павлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, svoitov@gsu.by, <https://orcid.org/0000-0002-1067-5744>

Кечко Елена Петровна, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры вычислительной математики и программирования, ekechko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-1882-8781>

Аннотация. В работе изучается скорость равномерной сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде (совместных аппроксимаций Паде) $\{\pi_{n, \vec{m}}^j(z)\}_{j=1}^k$ для набора экспоненциальных функций $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ — различные не равные нулю комплексные числа. Исследование асимптотических свойств аппроксимаций Эрмита – Паде в общем случае является достаточно сложной задачей. Это связано с тем, что при их изучении используются в основном асимптотические методы, в частности метод перевала. Важным этапом в применении этого метода является нахождение специального перевального контура (интегральная теорема Коши позволяет выбирать контур интегрирования достаточно произвольно), по которому должно осуществляться интегрирование. При этом, как правило, приходится опираться только на интуицию. В данной работе предложен новый подход изучения асимптотических свойств аппроксимаций Эрмита – Паде, опирающийся на теорему Тейлора и эвристические соображения, лежащие в основе методов Лапласа и перевала, а также на полученный нами многомерный аналог тождества ван Россума. Доказанные теоремы обобщают и дополняют известные результаты других авторов.

Ключевые слова: интегралы Эрмита, аппроксимации Эрмита – Паде, система экспоненциальных функций, асимптотические равенства, метод перевала

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках Государственной программы научных исследований на 2016–2020 годы и при финансовой поддержке БРФФИ (проект № Ф18М-025).

Для цитирования: Старовойтов А. П., Кечко Е. П. О скорости сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде экспоненциальных функций // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 162–172. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-162-172>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)



Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-162-172>

About the convergence rate Hermite – Padé approximants of exponential functions

A. P. Starovoitov, E. P. Kechko

Francisk Skorina Gomel State University, 104 Sovetskaya St., Gomel 246019, Belarus

Alexander P. Starovoitov, svoitov@gsu.by, <https://orcid.org/0000-0002-1067-5744>

Elena P. Kechko, ekechko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-1882-8781>

Abstract. This paper studies uniform convergence rate of Hermite – Padé approximants (simultaneous Padé approximants) $\{\pi_{n, \vec{m}}^j(z)\}_{j=1}^k$ for a system of exponential functions $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, where $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ are different nonzero complex numbers. In the general case a research of the asymptotic properties of Hermite – Padé approximants is a rather complicated problem. This is due to the fact that in their study mainly asymptotic methods are used, in particular, the saddle-point method. An important phase in the application of this method is to find a special saddle contour (the Cauchy integral theorem allows to choose an integration contour rather arbitrarily), according to which integration should be carried out. Moreover, as a rule, one has to rely only on intuition. In this paper, we propose a new method to studying the asymptotic properties of Hermite – Padé approximants, that is based on the Taylor theorem and heuristic considerations underlying the Laplace and saddle-point methods, as well as on the multidimensional analogue of the Van Rossum identity that we obtained. The proved theorems complement and generalize the known results by other authors.

Keywords: Hermite integrals, Hermite – Padé approximants, system of exponential functions, asymptotic equality, saddle-point method

Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of Education of the Republic of Belarus within the state program of scientific research for 2016–2020 and the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project No. F18M-025).

For citation: Starovoitov A. P., Kechko E. P. About the convergence rate Hermite – Padé approximants of exponential functions. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 162–172 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-162-172>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Введение

Множество k -мерных мультииндексов (индексов), т. е. упорядоченных наборов, состоящих из k целых неотрицательных чисел, обозначим \mathbb{Z}_+^k . Порядок мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ — это сумма $|m| = m_1 + \dots + m_k$. Зафиксировав индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$, полагаем $n_j = n + |m| - m_j$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Рассмотрим систему экспоненциальных функций $F_\lambda = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где $\lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^k$ — набор различных не равных нулю комплексных чисел (при $k = 1$ считаем $\lambda_1 = 1$). Аппроксимациями Эрмита – Паде типа (n, \vec{m}) системы F_λ называют рациональные дроби вида

$$\pi_{n, \vec{m}}^j(z) = \pi_{n, \vec{m}}^j(z; F_\lambda) = \frac{P_{n, \vec{m}}^j(z)}{Q_{n, \vec{m}}(z)}, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$



где алгебраические многочлены $Q_{n, \vec{m}}(z) = Q_{n, \vec{m}}(z; F_\lambda)$, $P_{n, \vec{m}}^j(z) = P_{n, \vec{m}}^j(z; F_\lambda)$, $\deg Q_{n, \vec{m}} \leq |m|$, $\deg P_{n, \vec{m}}^j \leq n_j$ удовлетворяют условиям: при $j = 1, 2, \dots, k$

$$R_{n, \vec{m}}^j(z) = R_{n, \vec{m}}^j(z; F_\lambda) = Q_{n, \vec{m}}(z)e^{\lambda_j z} - P_{n, \vec{m}}^j(z) = A_j z^{n+|m|+1} + \dots$$

Многочлены $Q_{n, \vec{m}}$, $P_{n, \vec{m}}^j$ принято называть [1] *многочленами Эрмита – Паде 2-го рода для системы F_λ* . Впервые такие многочлены появились в работе [2] Ш. Эрмита в виде интегралов Эрмита, которые после небольших преобразований приводят к равенствам (подробнее см. [3]):

$$\begin{aligned} Q_{n, \vec{m}}(z) &= \frac{z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!} \int_0^\infty T(x) e^{-zx} dx, \\ P_{n, \vec{m}}^j(z) &= \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!} \int_{\lambda_j}^\infty T(x) e^{-zx} dx, \\ R_{n, \vec{m}}^j(z) &= \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!} \int_0^{\lambda_j} T(x) e^{-zx} dx, \end{aligned} \quad (1)$$

где $T(x) = x^n \prod_{\nu=1}^k (x - \lambda_\nu)^{m_\nu}$. В интеграле (1), определяющем остаточную функцию $R_{n, \vec{m}}^j$, интегрирование проводится по любой кривой, соединяющей точки 0 и λ_j . Диагональному случаю соответствует набор индексов, при котором $n = m_1 = \dots = m_k$.

О. Перрон [4] при $k = 1$, А. И. Аптекарев [5] при $k > 1$ показали, что при $n + |m| \rightarrow \infty$ дроби $\pi_{n, \vec{m}}^j(z; F_\lambda)$ сходятся к $e^{\lambda_j z}$ равномерно на компактах в \mathbb{C} . Задача описания скорости этой сходимости в настоящее время является весьма актуальной [1], [6–13]. Имеющиеся результаты относятся в основном к диагональному случаю, и, по существу, единственным методом в таких исследованиях является *метод перевала (метод седловой точки)*. Здесь следует сказать, что близкая по содержанию задача рассматривалась ещё Эрмитом [2]. В этой связи напомним, что в диагональном случае при $\lambda_j = j$ значения $\pi_{n, \vec{m}}^j(1)$ являются рациональными числами и дают удачные приближения степеней e^j . Это и другие аналогичные свойства дробей $\pi_{n, \vec{m}}^j(z)$ были виртуозно использованы Эрмитом [2] для обоснования трансцендентности числа e , немного позже Линдеманом для доказательства трансцендентности π (см. [14]), а затем К. Малером [15–17] для решения ряда задач теории диофантовых приближений (см. также [18, 19]).

При $k = 1$ (в этом случае $\vec{m} = m_1 = m$, а $\pi_{n, m}(z; e^\xi) := \pi_{n, \vec{m}}^1(z)$ называют *аппроксимациями Паде функции e^z*) Г. Мейнарду сформулировал гипотезу об асимптотике поведения разности $e^z - \pi_{n, m}(z; e^\xi)$. Гипотеза Г. Мейнарду была доказана Д. Браессом [6]: при $n + m \rightarrow +\infty$

$$e^z - \pi_{n, m}(z; e^\xi) = \frac{(-1)^m n! m! e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)! (n+m+1)!} z^{n+m+1} (1 + o(1)). \quad (2)$$

Здесь и далее в аналогичных равенствах предполагается, что оценка $o(1)$ равномерна по z на компактах в \mathbb{C} . Из теоремы 6.4 работы ван Россума [20] следует, что при $n + m \rightarrow \infty$

$$e^z - \pi_{n, m}(z; e^\xi) = (-1)^m \frac{m! n! e^{mz/(n+m)} z^{n+m+1}}{(n+m)! (n+m+1)!} {}_1F_1(m+1, n+m+2; z). \quad (3)$$



Напомним, что

$${}_1F_1(\alpha, \beta; z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_p}{(\beta)_p} \frac{z^p}{p!},$$

где $(\gamma)_0 = 1$, $(\gamma)_p = \gamma(\gamma + 1) \cdots (\gamma + p - 1)$ — символ Похгаммера. Из (2) и (3) вытекает, что при $n + m \rightarrow \infty$

$${}_1F_1(m + 1, n + m + 2; z) = \exp \left\{ \frac{mz}{n + m} \right\} (1 + o(1)). \quad (4)$$

Заметим, что асимптотическое равенство (4) нетрудно доказать и непосредственно.

В работе [7] в случае, когда $k = 2$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, с помощью перехода к матричной задаче Римана – Гильберта найдена скорость сходимости «сжатых» диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде. При сжатии переменной $z = n\zeta$ полюсы таких рациональных аппроксимаций замечают некоторые кривые в комплексной плоскости \mathbb{C}_ζ . Вопросы, связанные с описанием этих кривых и с асимптотикой сжатых аппроксимаций, на сегодняшний день вызывают большой интерес у специалистов [7–10].

Отметим также, что при $k \geq 1$ и $\lambda_j = j$ асимптотическое поведение многочленов Эрмита – Паде 1-го рода описано Ф. Вилонским [21]. Для произвольных действительных $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ аналогичный результат получен в работе [22], где так же, как и в [21], существенно задействован метод перевала.

При комплексных $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ и в недиагональном случае методы, применяемые при изучении диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде (в частности, методы Лапласа и перевала), не работают. В такой ситуации для исследования асимптотик соответствующих разностей в [13] применён новый подход, в своей существенной части опирающийся лишь на теорему Тейлора и эвристические соображения, лежащие в основе методов Лапласа и перевала.

В данной статье доказан многомерный аналог теоремы 4 из работы [13], в которой рассматривался случай $k = 2$. При доказательстве мы используем метод работы [13] и установленный нами многомерный аналог тождества ван Россума (3). Кроме того, при некоторых условиях на \vec{m} и λ основное ограничение $\lim_{n \rightarrow \infty} m(n)/\sqrt{n} = 0$ теоремы 4 удаётся снять.

1. Основной результат: $|m| = o(\sqrt{n})$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^k \subset \mathbb{C}$

Теорема 1. Пусть $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$, а $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ — набор различных комплексных чисел, отличных от нуля. Тогда если $\lim_{n \rightarrow \infty} m(n)/\sqrt{n} = 0$, то равномерно по всем таким \vec{m} , что $0 \leq |m| \leq m(n)$, при $n \rightarrow +\infty$ и $j = 1, 2, \dots, k$

$$\begin{aligned} e^{\lambda_j z} - \pi_{n, \vec{m}}^j(z) &= \\ &= (-1)^{|m|} \lambda_j^{n+m_j+1} \Omega_j(k) \frac{m_j! n! z^{n+|m|+1}}{(n + |m|)! (n + m_j + 1)!} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где $\Omega_j(1) = 1$, $\Omega_j(k) = \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq j}}^k (\lambda_\nu - \lambda_j)^{m_\nu}$, если $k > 1$.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1, заметим, что при сделанных в ней предположениях из известного асимптотического равенства А. И. Аптекарева (см. [5])

$$Q_{n, \vec{m}}(z; F_\lambda) = \exp \left\{ - \frac{\sum_{\nu=1}^k \lambda_\nu m_\nu}{n + |m|} z \right\} (1 + o(1)), \quad (5)$$



справедливого при $n + |m| \rightarrow \infty$, следует, что $Q_{n, \vec{m}}(z) = 1 + o(1)$, если $n + |m| \rightarrow \infty$. Поэтому достаточно найти асимптотику остаточных функций $R_{n, \vec{m}}^j$. Для этого докажем следующий аналог тождества ван Россума в случае произвольного $k \geq 1$.

Теорема 2. При любом $k \geq 1$ и $j = 1, 2, \dots, k$

$$R_{n, \vec{m}}^j(z; F_\lambda) = (-1)^{|m|} \lambda_j^{n+m_j+1} \Omega_j(k) \frac{n! z^{n+|m|+1}}{(n + |m|)!} \times \\ \times \sum_{l=0}^{|m|-m_j} a_l \frac{(m_j + l)!}{(n + m_j + l + 1)!} {}_1F_1(m_j + l + 1, n + m_j + l + 2; \lambda_j z), \quad (6)$$

где $a_0 = 1$, а при $l \geq 1$

$$a_l = \sum_{\substack{t_1 + \dots + t_k - t_j = l \\ t_\nu \geq 0}} \left\{ \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq j}}^k C_{m_\nu}^{t_\nu} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_\nu - \lambda_j} \right)^{t_\nu} \right\}.$$

Доказательство. При $k = 1$ тождества (3), (6) совпадают. Поэтому далее считаем, что $k > 1$. Сделав замену $x = \lambda_j t$ переменной интегрирования в интеграле, определяющем в (1) остаточную функцию, получим

$$R_{n, \vec{m}}^j(z) = \lambda_j^{n+m_j+1} \frac{z^{n+|m|+1}}{(n + |m|)!} \int_0^1 t^n (t - 1)^{m_j} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq j}}^k (\lambda_j t - \lambda_\nu)^{m_\nu} e^{\lambda_j(1-t)z} dt. \quad (7)$$

Интеграл в (7) обозначим через $I_j(z)$. Сделаем в этом интеграле замену переменной интегрирования $u = 1 - t$, а затем вынесем за скобки множитель $\Omega_j(k)$. Тогда

$$I_j(z) = (-1)^{|m|} \Omega_j(k) \int_0^1 (1 - u)^n u^{m_j} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq j}}^k \left(1 + \frac{\lambda_j u}{\lambda_\nu - \lambda_j} \right)^{m_\nu} e^{\lambda_j u z} du. \quad (8)$$

Обозначим интеграл в (8) через $J_j(z)$. Если теперь, применив биномиальную формулу Ньютона, воспользоваться известным тождеством (см., например, [5])

$$\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq j}}^k \left\{ \sum_{t_\nu=0}^{m_\nu} C_{m_\nu}^{t_\nu} \left(\frac{\lambda_j u}{\lambda_\nu - \lambda_j} \right)^{t_\nu} \right\} = \sum_{l=0}^{|m|-m_j} a_l u^l, \quad (9)$$

то интеграл $J_j(z)$ можно представить в виде

$$J_j(z) = \int_0^1 (1 - u)^n u^{m_j} \left\{ \sum_{l=0}^{|m|-m_j} a_l u^l \right\} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\lambda_j z)^p}{p!} u^p du = \\ = \sum_{l=0}^{|m|-m_j} a_l \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} B(m_j + p + l + 1; n + 1) \frac{(\lambda_j z)^p}{p!} \right\} = \\ = n! \sum_{l=0}^{|m|-m_j} a_l \frac{(m_j + l)!}{(n + m_j + l + 1)!} {}_1F_1(m_j + l + 1, n + m_j + l + 2; \lambda_j z). \quad (10)$$



Здесь и далее $B(u; v)$ — бета-функция Эйлера. Поэтому из равенств (7), (8) следует (6). Теорема 2 доказана. \square

Перейдём к доказательству теоремы 1.

Доказательство. Обозначим через $H_j(z)$ сумму, стоящую в конце равенств (6) и (10). Тогда, вынося за скобки первое слагаемое этой суммы, получим

$$H_j(z) = \frac{m_j!}{(n + m_j + 1)!} {}_1F_1(m_j + 1, n + m_j + 2; \lambda_j z) \times \left\{ 1 + \sum_{l=1}^{|m|-m_j} a_l \frac{(m_j + l)!}{(n + m_j + l + 1)!} \frac{(n + m_j + 1)!}{m_j!} \frac{{}_1F_1(m_j + l + 1, n + m_j + l + 2; \lambda_j z)}{{}_1F_1(m_j + 1, n + m_j + 2; \lambda_j z)} \right\}.$$

Из (4) следует, что отношение двух гипергеометрических функций в правой части последнего равенства при $n \rightarrow \infty$ равномерно на компактах в \mathbb{C} сходится к 1. Поэтому для достаточно больших значений n модуль второго слагаемого суммы в фигурных скобках предыдущего равенства не превышает

$$2 \sum_{l=1}^{|m|-m_j} a_l^* \frac{m_j + 1}{n + m_j + 2} \frac{m_j + 2}{n + m_j + 3} \cdots \frac{m_j + l}{n + m_j + l + 1} \leq 2 \left\{ \sum_{l=0}^{|m|-m_j} a_l^* \left(\frac{|m|}{n + |m|} \right)^l - 1 \right\},$$

где a_l^* определяется так же, как и a_l , с той лишь разницей, что вместо $\lambda_j/(\lambda_\nu - \lambda_j)$ следует взять $|\lambda_j|/|\lambda_\nu - \lambda_j|$. При доказательстве последнего неравенства воспользовались тем, что при $t \geq 1$ функция $\varphi(t) = (m_j + t)/(n + m_j + 1 + t)$ является монотонно возрастающей. Теперь, применяя ещё раз тождество (9), в котором вместо $\lambda_j/(\lambda_\nu - \lambda_j)$ стоит $|\lambda_j|/|\lambda_\nu - \lambda_j|$, придём к равенству

$$\sum_{l=0}^{|m|-m_j} a_l^* \left(\frac{|m|}{n + |m|} \right)^l = \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq j}}^k \left(1 + \frac{|\lambda_j|}{|\lambda_\nu - \lambda_j|} \frac{|m|}{n + |m|} \right)^{m_\nu}.$$

Остаётся заметить, что, поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} |m|/\sqrt{n} = 0$, правая часть последнего равенства при $n \rightarrow \infty$ стремится к 1. Теорема 1 доказана. \square

2. Основной результат: $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ — корни уравнения $z^k = 1$

В условиях теоремы 1 имеются существенные ограничения на рост порядка мультииндекса: $|m| = o(\sqrt{n})$ при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим один частный случай, когда эти ограничения удаётся снять.

Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ — корни уравнения $z^k = 1$, т. е.

$$\lambda_j = e^{i \frac{2\pi(j-1)}{k}}, \quad j = 1, 2, \dots, k, \tag{11}$$

где i — мнимая единица. Заметим, что для любого $j = 1, 2, \dots, k$

$$\lambda_j \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq j}}^k (\lambda_\nu - \lambda_j) = \prod_{\nu=2}^k (\lambda_\nu - 1) = (-1)^{k-1} k. \tag{12}$$



Равенства (12) легко обосновать, если в левой и правой частях тождества

$$\frac{z^k - \lambda_j^k}{z - \lambda_j} = \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq j}}^k (z - \lambda_\nu)$$

перейти к пределу при $z \rightarrow \lambda_j$.

Рассмотрим систему экспонент $F_\lambda = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где λ_j определяются равенствами (11). В работе [13] в диагональном случае, когда $n = m_1 = \dots = m_k$, с помощью метода перевала получены следующие асимптотические равенства: при $k > 1$ и $j = 1, 2, \dots, k$

$$e^{\lambda_j z} - \pi_{n, \vec{m}}^j(z; F_\lambda) = (-1)^n \lambda_j^{n+1} G_k(n) \frac{z^{n+kn+1}}{(n+kn)!} e^{\lambda_j(1 - \sqrt[k]{1/(k+1)})z} (1 + o(1)), \quad (13)$$

где

$$G_k(n) := \sqrt{\frac{2\pi}{n^k \sqrt{(k+1)^{k+2}}}} \left(\frac{k}{\sqrt[k]{(k+1)^{k+1}}} \right)^n.$$

Теорема 3. Пусть $m_1 = \dots = m_k = m$, а $n \in \mathbb{Z}_+^1$. Тогда для любого $k \geq 1$ при $n + m \rightarrow \infty$ и $j = 1, 2, \dots, k$

$$e^{\lambda_j z} - \pi_{n, \vec{m}}^j(z; F_\lambda) = (-1)^m \lambda_j^{n+1} \times \\ \times \frac{1}{k} B\left(m+1; \frac{n+1}{k}\right) \frac{z^{n+km+1}}{(n+km)!} e^{\lambda_j(1 - \sqrt[k]{n/(n+km)})z} e^{(m \sum_{\nu=1}^k \lambda_\nu)z/(n+km)} (1 + o(1)). \quad (14)$$

Доказательство. При $k = 1$ асимптотическое равенство (14) совпадает с равенством Д. Браесса (2). Поэтому далее считаем, что $k > 1$. В этом случае $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 0$. Тогда из (5) следует, что $Q_{n, \vec{m}}(z) = 1 + o(1)$ при $n + m \rightarrow \infty$. Необходимо найти асимптотику остаточной функции

$$R_{n, \vec{m}}^j(z) = (-1)^m \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+km+1}}{(n+km)!} \int_0^{\lambda_j} x^n (1-x^k)^m e^{-zx} dx. \quad (15)$$

Обозначим через $I_j(z)$ интеграл в (15). Сделав в этом интеграле замену переменной интегрирования $x = \lambda_j u$, получим

$$I_j(z) = \lambda_j^{n+1} \int_0^1 u^n (1-u^k)^m e^{-\lambda_j u z} du. \quad (16)$$

Рассмотрим интегралы

$$J_p = \int_0^1 (1-u^k)^m u^{n+p} du, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Легко заметить, что

$$J_p = \frac{1}{k} \int_0^1 (1-u^k)^m (u^k)^{\frac{n-k+p+1}{k}} du^k = \frac{1}{k} B\left(m+1; \frac{n+p+1}{k}\right). \quad (17)$$



Определим теперь u_0 из равенства¹ $J_1 - u_0 J_0 = 0$. Выразив бета-функцию Эйлера через гамма-функцию и применив формулу Стирлинга, при $n + m \rightarrow \infty$ получим, что

$$u_0 = \frac{J_1}{J_0} = \sqrt[k]{\frac{n}{n + km}} (1 + o(1)). \tag{18}$$

Отсюда, в частности, следует, что $u_0 \in (0, 1)$ при достаточно большом $n + m$.

Для нахождения асимптотики интеграла $I_j(z)$ разложим функцию $\exp\{-\lambda_j u z\}$ в ряд Тейлора в окрестности точки u_0 . Тогда

$$e^{-\lambda_j u z} = e^{-\lambda_j u_0 z} e^{-\lambda_j z(u - u_0)} = e^{-\lambda_j u_0 z} \{1 - \lambda_j z(u - u_0) + \rho_u(z)\},$$

где при $|z| < L$ и $u \in [0, 1]$

$$|\rho_u(z)| \leq |\lambda_j|^2 |u - u_0|^2 \left\{ \frac{L^2}{2!} + \dots + \frac{L^n}{n!} + \dots \right\} \leq L_1 |u - u_0|^2.$$

Здесь и далее L, L_1 — абсолютные постоянные. Учитывая выбор u_0 , (16)–(18), приходим к равенству

$$\begin{aligned} I_j(z) &= \lambda_j^{n+1} e^{-\lambda_j u_0 z} \left\{ \int_0^1 (1 - u^k)^m u^n du + \int_0^1 (1 - u^k)^m u^n \rho_u(z) du \right\} = \\ &= \lambda_j^{n+1} e^{-\lambda_j u_0 z} \left\{ \frac{1}{k} B\left(m + 1; \frac{n + 1}{k}\right) + A_\rho(z) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} |A_\rho(z)| &\leq L_1 \int_0^1 (1 - u^k)^m u^n (u - u_0)^2 du = L_1 \int_0^1 (1 - u^k)^m u^n (u^2 - uu_0) du = \\ &= L_1 \left(\frac{J_2}{J_0} - \left(\frac{J_1}{J_0} \right)^2 \right) J_0. \end{aligned}$$

При доказательстве предыдущего неравенства воспользовались представлением $(u - u_0)^2 = (u^2 - uu_0) - u_0(u - u_0)$ и равенством $J_1 - u_0 J_0 = 0$. Учитывая равенства (17), известное выражение бета-функции Эйлера через гамма-функции Эйлера и используя формулу Стирлинга, при $n + m \rightarrow \infty$ получим

$$\frac{J_2}{J_0} \sim \left(\frac{n - k + 3}{n + km + 3} \right)^{2/k}, \quad \left(\frac{J_1}{J_0} \right)^2 \sim \left(\frac{n - k + 2}{n + km + 2} \right)^{2/k}.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства следует, что при $n + m \rightarrow \infty$

$$I_j(z) = \lambda_j^{n+1} e^{-\lambda_j u_0 z} \frac{1}{k} B\left(m + 1; \frac{n + 1}{k}\right) (1 + o(1)). \tag{19}$$

Поскольку при $n + m \rightarrow \infty$ $Q_{n, \vec{m}}(z) = 1 + o(1)$, то из (15), (16) и (19) вытекает асимптотическое равенство (14). Теорема 3 доказана. \square

В заключение сделаем два замечания.

¹Выбор точки u_0 определён тем, что она асимптотически близка к точке максимума $u_0^* = \sqrt[k]{n/(n + km)}$ функции $\ln u^n (1 - u^k)^m$, $u \in (0, 1)$ (подробнее см. [13]).



При $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{k} B\left(n+1; \frac{n+1}{k}\right) \sim G_k(n).$$

Поэтому, если $m = n$, то асимптотические равенства (13) и (14) совпадают. Таким образом, теорема 1 работы [13] является следствием теоремы 3. Обращаем внимание на то, что эти теоремы доказаны совершенно разными методами.

Далее, нетрудно показать, что если $m = o(\sqrt{n})$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{k} B\left(m+1; \frac{n+1}{k}\right) \sim k^m \frac{n! m!}{(n+m+1)!}. \quad (20)$$

Принимая во внимание равенства (12), при $m_1 = \dots = m_k = m$ получаем, что

$$(-1)^{|m|} \lambda_j^{n+m_j+1} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq j}}^k (\lambda_\nu - \lambda_j)^{m_\nu} = (-1)^m \lambda_j^{n+1} k^m.$$

Поэтому теоремы 1 и 3 согласуются. Отметим также, что если при $n \rightarrow \infty$ условие $m = o(\sqrt{n})$ не выполняется, то эквивалентность в (20) нарушается. Это значит, что условие $m = o(\sqrt{n})$ в теореме 1 необходимо.

Список литературы

1. *Stahl H.* Asymptotics for quadratic Hermite – Padé polynomials associated with the exponential function // *Electronic Transactions on Numerical Analysis*. 2002. Vol. 14. P. 195–222.
2. *Hermite C.* Sur la fonction exponentielle. Paris : Gauthier-Villars, 1874. 33 p.
3. *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные функции и ортогональность. Москва : Наука, 1988. 256 с.
4. *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig ; Berlin : Teubner, 1929. 524 p.
5. *Антекеров А. И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент // Вестник Московского университета. Серия 1 : Математика. Механика. 1981. № 1. С. 68–74.
6. *Braess D.* On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x , II // *Journal of Approximation Theory*. 1984. Vol. 40, iss. 4. P. 375–379. [https://doi.org/10.1016/0021-9045\(84\)90012-1](https://doi.org/10.1016/0021-9045(84)90012-1)
7. *Kuijlaars A. B. J., Stahl H., Van Assche W., Wielonsky F.* Type II Hermite – Padé approximation to the exponential function // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2007. Vol. 207, iss. 2. P. 227–244. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.10.010>
8. *Kuijlaars A. B. J., Stahl H., Van Assche W., Wielonsky F.* Asymptotique des approximations de Hermite – Padé quadratiques de la fonction exponentielle et problèmes de Riemann – Hiebert // *Comptes Rendus Mathématique*. 2003. Vol. 336, iss. 11. P. 893–896. [https://doi.org/10.1016/S1631-073X\(03\)00221-8](https://doi.org/10.1016/S1631-073X(03)00221-8)
9. *Kuijlaars A. B. J., Van Assche W., Wielonsky F.* Quadratic Hermite – Padé approximation to the exponential function: A Riemann – Hiebert approach // *Constructive Approximation*. 2005. Vol. 21, iss. 3. P. 351–412. <https://doi.org/10.1007/s00365-004-0579-0>
10. *Stahl H.* Asymptotic distributions of zeros of quadratic Hermite – Padé polynomials associated with the exponential function // *Constructive Approximation*. 2006. Vol. 23, iss. 2. P. 121–164. <https://doi.org/10.1007/s00365-005-0606-9>
11. *Старовойтов А. П.* Эрмитовская аппроксимация двух экспонент // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып 1, ч. 2. С. 87–91. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-1-2-87-91>



12. Старовойтов А. П. Об асимптотике аппроксимаций Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера // Известия вузов. Математика. 2014. № 9. С. 59–68.
13. Старовойтов А. П. Аппроксимации Эрмита – Паде функций Миттаг – Леффлера // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 2018. Т. 301. С. 241–258. <https://doi.org/10.1134/S0371968518020188>
14. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей : в 2 т. Т. 1. Арифметика, алгебра, анализ. Москва : Наука, 1987. 432 с.
15. Mahler K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I // Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. 2009. Vol. 1932, iss. 166. P. 118–136. <https://doi.org/10.1515/crll.1932.166.118>
16. Mahler K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, II // Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. 2009. Vol. 1932, iss. 166. P. 137–150. <https://doi.org/10.1515/crll.1932.166.137>
17. Mahler K. Applications of some formulae by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms // Mathematische Annalen. 1967. Vol. 168, iss. 1. P. 200–227. <https://doi.org/10.1007/BF01361554>
18. Mahler K. Perfect systems // Compositio Mathematica. 1968. Vol. 19, iss. 2. P. 95–166.
19. Chudnovsky G. V. Hermite – Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π // The Riemann Problem, Complete Integrability and Arithmetic Applications : Lecture Notes in Mathematics / eds. D. V. Chudnovsky, G. V. Chudnovsky. Vol. 925. New York ; Berlin : Springer-Verlag, 1982. P. 299–322. <https://doi.org/10.1007/BFb0093516>
20. Van Rossum H. Systems of orthogonal and quasi orthogonal polynomials connected with the Padé table. II // Indagationes Mathematicae (Proceedings). 1955. Vol. 58. P. 526–534. [https://doi.org/10.1016/S1385-7258\(55\)50072-2](https://doi.org/10.1016/S1385-7258(55)50072-2)
21. Wielonsky F. Asymptotics of diagonal Hermite – Padé approximants to e^z // Journal of Approximation Theory. 1997. Vol. 90, iss. 2. P. 283–298. <https://doi.org/10.1006/jath.1996.3081>
22. Астафьева А. В., Старовойтов А. П. Аппроксимации Эрмита – Паде экспоненциальных функций // Математический сборник. 2016. Т. 207, № 6. С. 3–26. <https://doi.org/10.4213/sm8470>

References

1. Stahl H. Asymptotics for quadratic Hermite – Padé polynomials associated with the exponential function. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 2002, vol. 14, pp. 195–222.
2. Hermite C. *Sur la fonction exponentielle*. Paris, Gauthier-Villars, 1874. 33 p.
3. Nikishin E. M., Sorokin V. N. *Rational Approximations and Orthogonality*. Providence, AMS, 1991. 221 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1988. 256 p.).
4. Perron O. *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. Leipzig, Berlin, Teubner, 1929. 524 p.
5. Aptekarev A. I. On the convergence of rational-approximations to the set of exponents. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika*, 1981, no. 1, pp. 68–74 (in Russian).
6. Braess D. On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x , II. *Journal of Approximation Theory*, 1984, vol. 40, iss. 4, pp. 375–379. [https://doi.org/10.1016/0021-9045\(84\)90012-1](https://doi.org/10.1016/0021-9045(84)90012-1)
7. Kuijlaars A. B. J., Stahl H., Van Assche W., Wielonsky F. Type II Hermite – Padé approximation to the exponential function. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2007, vol. 207, iss. 2, pp. 227–244. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.10.010>.



8. Kuijlaars A. B. J., Stahl H., Van Assche W., Wielonsky F. Asymptotique des approximations de Hermite – Padé quadratiques de la fonction exponentielle et problèmes de Riemann – Hiebert. *Comptes Rendus Mathématique*, 2003, vol. 336, iss. 11, pp. 893–896. [https://doi.org/10.1016/S1631-073X\(03\)00221-8](https://doi.org/10.1016/S1631-073X(03)00221-8)
9. Kuijlaars A. B. J., Van Assche W., Wielonsky F. Quadratic Hermite – Padé approximation to the exponential function: A Riemann – Hiebert approach. *Constructive Approximation*, 2005, vol. 21, iss. 3, pp. 351–412. <https://doi.org/10.1007/s00365-004-0579-0>
10. Stahl H. Asymptotic distributions of zeros of quadratic Hermite – Padé polynomials associated with the exponential function. *Constructive Approximation*, 2006, vol. 23, iss. 2, pp. 121–164. <https://doi.org/10.1007/s00365-005-0606-9>
11. Starovoitov A. P. Hermitian approximation of two exponents. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2013, vol. 13, iss. 1, pt. 2, pp. 87–91 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-1-2-87-91>
12. Starovoitov A. P. The asymptotic form of the Hermite – Padé approximations for a system of Mittag – Leffler functions. *Russian Mathematics*, 2014, vol. 58, no. 9, pp. 49–56. <https://doi.org/10.3103/S1066369X14090060>
13. Starovoitov A. P. Hermite – Padé approximants of the Mittag – Leffler functions. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2018, vol. 301, pp. 228–244. <https://doi.org/10.1134/S0081543818040181>
14. Klein F. *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint. Vol. 1: Arithmetic, Algebra, Analysis*. Berlin, Springer, 2016. 312 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1987. 432 p.).
15. Mahler K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 2009, vol. 1932, iss. 166, pp. 118–136. <https://doi.org/10.1515/crll.1932.166.118>
16. Mahler K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, II. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 2009, vol. 1932, iss. 166, pp. 137–150. <https://doi.org/10.1515/crll.1932.166.137>
17. Mahler K. Applications of some formulae by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms. *Mathematische Annalen*, 1967, vol. 168, iss. 1, pp. 200–227. <https://doi.org/10.1007/BF01361554>
18. Mahler K. Perfect systems. *Compositio Mathematica*, 1968, vol. 19, iss. 2, pp. 95–166.
19. Chudnovsky G. V. Hermite – Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π . In: Chudnovsky D. V., Chudnovsky G. V., eds. *The Riemann Problem, Complete Integrability and Arithmetic Applications: Lecture Notes in Mathematics*, vol. 925. New York, Berlin, Springer-Verlag, 1982, pp. 299–322. <https://doi.org/10.1007/BFb0093516>
20. Van Rossum H. Systems of orthogonal and quasi orthogonal polynomials connected with the Padé table. II. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, 1955, vol. 58, pp. 526–534. [https://doi.org/10.1016/S1385-7258\(55\)50072-2](https://doi.org/10.1016/S1385-7258(55)50072-2)
21. Wielonsky F. Asymptotics of diagonal Hermite – Padé approximants to e^z . *Journal of Approximation Theory*, 1997, vol. 90, iss. 2, pp. 283–298. <https://doi.org/10.1006/jath.1996.3081>
22. Astafieva A. V., Starovoitov A. P. Hermite – Padé approximation of exponential functions. *Sbornik: Mathematics*, 2016, vol. 207, no. 6, pp. 769–791. <https://doi.org/10.1070/SM8470>

Поступила в редакцию / Received 03.01.2020

Принята к публикации / Accepted 14.05.2020

Опубликована / Published 31.05.2021



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 173–181
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 173–181

Научная статья

УДК 501.1

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-173-181>

О периодических решениях уравнения Рэля

В. Б. Тлячев[✉], А. Д. Ушко, Д. С. Ушко

Адыгейский государственный университет, Россия, 385000, г. Майкоп, ул. Первомайская, д. 208

Тлячев Вячеслав Бесланович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретической физики, Tlyachev@adygnet.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6431-316X>

Ушко Адам Дамирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики, Ushcho76@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0453-7513>

Ушко Дамир Салихович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Damirubych@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1311-5785>

Аннотация. Получены новые достаточные условия существования и единственности периодического решения системы дифференциальных уравнений, эквивалентной уравнению Рэля. В отличие от известных результатов доказательство существования хотя бы одного предельного цикла системы основано на применении кривых топографической системы Пуанкаре, дополненной новыми конструкциями. Единственность предельного цикла, окружающего сложный неустойчивый фокус, доказывается методом Отрокова.

Ключевые слова: Пуанкаре, уравнение Рэля, уравнение ван дер Поля, предельный цикл, существование, единственность

Для цитирования: Тлячев В. Б., Ушко А. Д., Ушко Д. С. О периодических решениях уравнения Рэля // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 173–181. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-173-181>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-173-181>

On periodic solutions of Rayleigh equation

V. B. Tlyachev[✉], A. D. Ushkho, D. S. Ushkho

Adyghe State University, 208 Pervomayskaya St., Maykop 385000, Russia

Vyacheslav B. Tlyachev, tlyachev@adygnet.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6431-316X>

Adam D. Ushkho, Ushcho76@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0453-7513>

Damir S. Ushkho, Damirubych@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1311-5785>

Abstract. New sufficient conditions for the existence and uniqueness of a periodic solution of a system of differential equations equivalent to the Rayleigh equation are obtained. In contrast to



the known results, the existence proof of at least one limit cycle of the system is based on applying curves of the topographic Poincare system. The uniqueness of the limit cycle surrounding a complex unstable focus is proved by the Otrokov method.

Keywords: Poincare, Rayleigh equation, van der Pol equation, limit cycle, existence, uniqueness

For citation: Tlyachev V. B., Ushkho A. D., Ushkho D. S. On periodic solutions of Rayleigh equation. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 173–181 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-173-181>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Введение

Английский физик J. W. Strutt, более известный как барон (лорд) Рэлей — один из основоположников теории колебаний, в книге [1, с. 137] выписал для моделирования звуковых колебаний тростникового кларнета уравнение

$$\ddot{u} + k\dot{u} + n^2u = 0, \quad (1)$$

которое впоследствии было названо его именем. Это уравнение позволило решить основные задачи акустики.

Уравнение Рэля модифицируют, обобщают и представляют в различных формах записи. Например, его записывают в виде

$$\ddot{y} - (\varepsilon - y^2)\dot{y} + y = 0. \quad (2)$$

Уравнение 2 путем замены $x = \sqrt{3}y$ сводится к другому, весьма известному в теории колебаний, уравнению лампового генератора — уравнению ван дер Поля (см. обзор [2, с. 7] и фундаментальную монографию [3, с. 385]):

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (3)$$

Отметим, что из уравнения (3) можно получить уравнение (2). Таким образом, можно сказать, что уравнение Рэля в определенном смысле равносильно уравнению ван дер Поля [4, с. 67].

Уравнение Рэля порой записывают в более универсальном виде [5, с. 99]

$$x''(t) + f(x'(t)) + g(t, x(t)) = 0. \quad (4)$$

Это дает возможность расширить круг явлений, которые моделирует уравнение Рэля. Например, в работе [6] это уравнение было обобщено на вязкие жидкости.

Основными вопросами, рассматриваемыми в исследованиях, связанных с уравнением Рэля, были вопросы существования, единственности и устойчивости периодических решений [7]. При этом постоянно открываются новые стороны уравнения Рэля. Например, в [8] уже рассматриваются разновидности неавтономных уравнений Рэля с запаздывающим аргументом, а в работе [9] для возмущенного уравнения Рэля выводятся некоторые критерии, гарантирующие существование, единственность и асимптотическую устойчивость по Ляпунову периодических решений этого уравнения. В работе [10] изучается уравнение Рэля с сингулярностью, которое моделирует виброударные физические системы. Доказательство основного результата работы [10] опирается на топологические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений.



В связи с развитием теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом возникло новое направление исследований уравнения Рэлея. Последние два десятилетия в основном все работы связаны именно с этим направлением (см. например, по этому поводу работу [11]). Кроме этого, рассматриваются различные модификации уравнения Рэлея. Например, добавляется ненулевая правая часть — сила. При этом для исследования привлекаются различные инструменты, например, такие, как функциональный анализ [12] и компьютерное (численное) моделирование [13], где приводится сравнение результатов численного исследования периодических решений уравнения Рэлея с известными решениями для квазилинейной постановки.

Таким образом, исследования, связанные с уравнением Рэлея, не теряют своей актуальности.

Основные результаты

В данной работе рассматривается уравнение Рэлея в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} - F\left(\frac{dx}{dt}\right) + x = 0, \quad (5)$$

где F — функция только одного аргумента $\frac{dx}{dt}$. Уравнение (5) возникает при анализе работы схемы электронного триода с обратной связью.

Автор монографии [14, с. 252] отмечает, что легко построить автоколебательные системы, имеющие любое число предельных циклов. Однако, по его утверждению, доказательство единственности предельного цикла для какого-либо конкретного случая является нелегкой задачей.

Один из методов доказательства единственности предельного цикла системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = F(v) - x, \end{cases} \quad (6)$$

эквивалентной уравнению Рэлея (5), основан, согласно утверждению Дж. Стокера, на идее известных математиков Левинсона и Смита [15]. Она предполагает доказательство единственности предельного цикла в два этапа.

На первом этапе доказывается утверждение: если изолированный устойчивый предельный цикл содержит внутри себя другой такой же устойчивый предельный цикл и при этом в кольце между ними нет состояний равновесия системы (6), то между этими циклами существует по крайней мере еще один предельный цикл.

На втором этапе доказывается, что все возможные предельные циклы будут изолированными и устойчивыми. В совокупности с доказанным на первом этапе утверждением это означает, что у системы (6) может существовать самое большее один цикл.

В качестве достаточных условий существования хотя бы одного предельного цикла системы (6), окружающего начало координат, в монографии [14, с. 253] приведены следующие условия:

- 1) $F(v) = G(v) - \alpha v$ ($\alpha > 0$);
- 2) $G'(v) > 0$, $G'(0) > \alpha$;
- 3) $G(-v) = -G(v)$;
- 4) $|G(v)| < C$.

В этой же работе доказывается, что для существования единственного предельного цикла системы (6) наряду с выполнением указанных четырех условий добавляются еще два условия: $F(v)$ имеет непрерывную производную второго порядка и $G''(v) < 0$, $v > 0$.



Авторы монографии [7] и статьи [16] исследовали вопрос о периодических решениях уравнения Рэлея.

Для системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -g(x) - F(y), \end{cases} \quad (7)$$

эквивалентной уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F\left(\frac{dx}{dt}\right) + g(x) = 0, \quad (8)$$

доказана теорема [7], согласно которой система (7) имеет, по крайней мере, один предельный цикл, если выполняются условия:

а) $F(y) \cdot y \leq 0$ для $|y| \leq \eta_1$ ($\eta_1 > 0$); $F(y) \operatorname{sgn} y \geq \varepsilon > 0$ для $|y| \geq \eta_2 > \eta_1$
 $\max |F(y)| = M > 0$; $|y| < \eta_4$;

б) $g(x) \operatorname{sgn} x \geq M + \varepsilon$ для $|x| \geq \delta$.

Доказательство этой теоремы проводится путем построения кольцевой области, удовлетворяющей условиям теоремы Пуанкаре – Бендиксона [14].

В [16] доказана теорема о достаточных условиях существования хотя бы одного предельного цикла системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x - yf(y), \end{cases} \quad (9)$$

эквивалентной уравнению (8), где $F\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dx}{dt} f\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $g(x) = \omega^2 x$.

Эти условия позволяют выделить кольцевую область Пуанкаре – Бендиксона, т. е. оценить местоположение предельного цикла системы (9) на фазовой плоскости.

В данной работе находятся достаточные условия существования периодического решения, а также условия существования и единственности такого решения системы (9). Доказательство существования хотя бы одного предельного цикла системы (9) основано на применении кривых топографической системы Пуанкаре [17] и некоторых конструкций авторов. Единственность предельного цикла, окружающего сложный фокус, доказывается с использованием результатов монографии [18].

Посредством преобразования

$$\begin{cases} x_1 = \omega x, \\ y_1 = y, \end{cases}$$

но с условием сохранения старых обозначений фазовых переменных перейдем от системы (9) к системе

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \omega y \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = -\omega x - yf(y) \equiv Q(x, y), \quad \omega > 0. \end{cases} \quad (10)$$

Теорема 1. Пусть функция f удовлетворяет условиям:

- 1) f – дифференцируема;
- 2) $f(-y) = f(y)$, т. е. функция f четная;
- 3) $\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = +\infty$;



4) $f(y) < 0$ для $|y| < a$, $f(y) > 0$ для $|y| > a$, либо $f(y) < 0$ для $0 < |y| < a$, $f(y) > 0$ для $|y| > a$ ($a > 0$).

Тогда система (10) имеет, по крайней мере, один устойчивый предельный цикл, окружающий неустойчивое седло (узел или фокус).

Доказательство. Рассмотрим в качестве топографической системы Пуанкаре семейство окружностей

$$G(x, y) \equiv x^2 + y^2 = C. \tag{11}$$

Полная производная функции G в силу системы (10) запишется в виде

$$\frac{dG}{dt} = -2y^2 f(y). \tag{12}$$

Из (12) следует, что контакт траекторий системы (10) с окружностями семейства (11) на прямой $y = 0$ «ложный» [17]. Кроме этого, прямые $y = \pm a$ являются прямыми контактами траекторий системы (10) с кривыми семейства (11). В силу условия 4) выражение (12) неотрицательно внутри круга $\Omega : x^2 + y^2 \leq a^2$. Отсюда следует, что $(0; 0)$ — неустойчивое седло и у системы (10) отсутствуют предельные циклы, окружающие точку $(0; 0)$ и расположенные внутри Ω .

Пусть $b > a$. Очевидно, $A(-\sqrt{b^2 - a^2}; a)$, $B(\sqrt{b^2 - a^2}; a)$ — точки пересечения прямой $y = a$ с окружностью $l : x^2 + y^2 = b^2$. Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что $M(b^2/\sqrt{b^2 - a^2}; 0)$ — точка пересечения с осью Ox касательной, проведенной к окружности l в точке B .

Покажем, что существует число $b > a$ такое, что выполняется неравенство

$$b^2/\sqrt{b^2 - a^2} \leq \varphi(-b), \tag{13}$$

где $x = -\frac{y}{\omega} f(y) \equiv \varphi(y)$.

В самом деле, неравенство (13) равносильно неравенству

$$1/\sqrt{1 - a^2/b^2} \leq \frac{f(b)}{\omega}. \tag{14}$$

Из неравенства (14) и условия 3) следует существование такого числа $b > a$, что выполняется неравенство (13), каковы бы ни были фиксированные числа a и ω .

Заметим, что при $t \rightarrow +\infty$ траектории системы (10) входят внутрь окружностей семейства (11) в области $S = \{(x; y) / |y| > a, -\infty < x < +\infty\}$.

Обозначим через L траекторию системы (10), проходящую через точку $W(\varphi(b); b)$ в момент времени $t = t_0$, и проследим ее поведение при $t > t_0$. Для этого обратимся к рисунку.

Так как $\left(\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}\right)'_x = -\frac{1}{y}$, то в полуплоскости $y > 0$ ($y < 0$) траек-

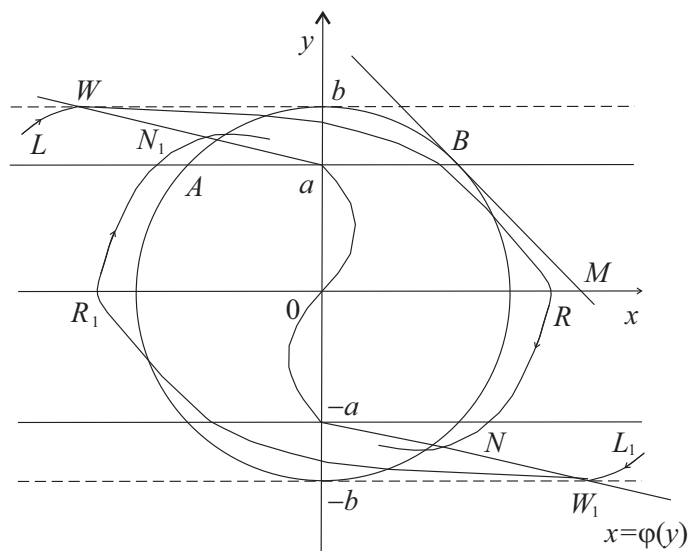


Рис. Картина движения по траекториям L и L_1
 Fig. Motion pattern along the trajectories L and L_1



тория системы (10) имеет выпуклость вверх (вниз). Следовательно, траектория L при $t > t_0$ первый раз пересечет ось Ox в точке R , лежащей слева от точки M . В силу отмеченного характера выпуклости траектории L и неравенства (13) L пересечет изоклину нуля $x = \varphi(y)$ первый раз при $t > t_0$ в точке N , расположенной между прямыми $y = -b$ и $y = -a$. Поскольку векторное поле (10) симметрично относительно начала координат $O(0; 0)$, траектория L_1 , проходящая в момент $t = t_0$ через точку W_1 , при $t > t_0$ пересечет изоклину нуля $x = \varphi(y)$ первый раз в точке N_1 , расположенной между прямыми $y = a$ и $y = b$. Таким образом, траектории L и L_1 приближаются при $t \rightarrow +\infty$ к состоянию равновесия $O(0; 0)$ в виде спиралей. Так как $O(0; 0)$ — неустойчивое седло, то существует хотя бы один устойчивый предельный цикл, окружающий начало координат (нечетное число циклов с учетом их кратностей). Теорема доказана. \square

Замечание. Предельный цикл, существование которого доказывается в теореме 1, расположен в области $\Omega = \{(x; y) / |x| < b_0^2 / \sqrt{b_0^2 - a^2}, |y| < b_0\}$, где b_0 — корень уравнения $b^2 / \sqrt{b^2 - a^2} - \varphi(-b) = 0$ и пересекает прямые $y = \pm a$.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \omega y, \\ \frac{dy}{dt} = -\omega x - y[-ma^2 + (m - na^2)y^2 + (n - \delta a^2)y^4 + \delta y^6]. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f(y) &= -ma^2 + (m - na^2)y^2 + (n - \delta a^2)y^4 + \delta y^6 \equiv (y^2 - a^2)(m + ny^2 + \delta y^4), \\ \omega &> 0, \quad \delta > 0, \quad m > 0, \quad |n| < 2\sqrt{m\delta}. \end{aligned} \quad (16)$$

Система (15) при выполнении условий (16) удовлетворяет всем условиям теоремы 1. В частности, при конкретных численных значениях $b = 1/2$, $a = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4}{\sqrt[3]{4761}}} = a_0 \approx 0.111$ в области $\Omega = \{(x; y) / |x| < 1.05; |y| < 0.5\}$ расположен хотя бы один устойчивый предельный цикл, пересекающий прямые $y = \pm a_0$ и окружающий неустойчивое седло с координатами $(0; 0)$.

Теорема 2. Пусть функция f удовлетворяет условиям:

- 1) имеет непрерывные производные до второго порядка включительно;
- 2) $f(-y) = f(y)$;
- 3) $\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = +\infty$;
- 4) $f'(0) = f(0) = 0$;
- 5) $f(y) < 0$ для $0 < |y| < a$, $f(y) > 0$ для $|y| > a$ ($a > 0$);
- 6) $\Phi(y) = y^2 f''(y) + y f'(y) - f(y) \geq 0$.

Тогда система (10) имеет единственный, причем устойчивый, предельный цикл, окружающий сложный неустойчивый фокус $O(0; 0)$.

Доказательство. Согласно условию 4) $y = 0$ — нуль функции f , имеющий кратность не ниже второй, следовательно, $\Phi(y) \equiv y^2 \Phi_0(y)$, где $\Phi_0(y) \geq 0$.

Рассмотрим пару функций $\alpha(x, y) = 0$, $\beta(x, y) = -\frac{Q'_y}{\omega y}$, удовлетворяющих функциональному уравнению $\alpha Q - \beta P = P'_x + Q'_y$ [18]. Здесь $P'_x = 0$. Функция $D(x, y) = \alpha'_x(x, y) + \beta'_y(x, y)$ задается формулой $D(x, y) = \frac{Q'_y - y Q''_{y^2}}{\omega y^2}$.



Учитывая, что $Q'_y - yQ''_{y^2} \equiv \Phi(y)$, получим $D(x, y) = \frac{\Phi_0(y)}{\omega}$ и

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\Phi_0(y)}{\omega} (x^2 + y^2) = 0. \tag{17}$$

Из (17) согласно [18, теорема 4.4] следует, что система (10) либо совсем не имеет предельных циклов, либо имеет только простые циклы. Принимая во внимание теорему 1, приходим к выводу, что система (10) имеет только простые предельные циклы. Допустим, что система (10) имеет более одного предельного цикла. Тогда ближайший к точке $O(0; 0)$ цикл \bar{l} будет устойчивым, а следующий цикл \bar{l}_1 — неустойчивым.

Причем изображающая точка обходит циклы \bar{l} и \bar{l}_1 по часовой стрелке.

Вычисления показывают, что

$$\left(\frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \right)'_{|a|} = \frac{2|a|f_0(y)}{\omega}, \tag{18}$$

где $f_0(y) \geq 0$.

С учетом направления на циклах \bar{l} и \bar{l}_1 и знака производной (18) приходим к выводу, что с увеличением $|a|$ векторное поле системы (10) вращается против хода часовой стрелки. Это в свою очередь означает, что цикл \bar{l} расширяется, а \bar{l}_1 сужается с увеличением $|a|$. Поскольку полосу плоскости между прямыми $y = a$ и $y = -a$ можно расширять неограниченно, то найдется значение $|a|$, при котором циклы \bar{l} и \bar{l}_1 исчезнут. Это возможно только при условии, что \bar{l} и \bar{l}_1 в какой-то момент сольются в один, полуустойчивый предельный цикл. Это противоречит теореме 4.4 [18]. Теорема доказана. \square

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \omega y, \\ \frac{dy}{dt} = -\omega x - y^3(y^2 - a^2)(\alpha + \beta y^2). \end{cases} \tag{19}$$

Здесь $f(y) = y^2(y^2 - a^2)(\alpha + \beta y^2)$, $\Phi(y) = 35\beta y^2(y^2 - \mu)(y^2 - \nu)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

$$\mu = \frac{15\beta a^2 - 15\alpha + \sqrt{225\alpha^2 - 30\alpha\beta a^2 + 225\beta^2 a^4}}{70\beta}$$

и

$$\nu = \frac{15\beta a^2 - 15\alpha - \sqrt{225\alpha^2 - 30\alpha\beta a^2 + 225\beta^2 a^4}}{70\beta}.$$

Нетрудно проверить, что $0 < \mu < a^2$, $\nu < 0$. Следовательно, $\Phi(y) \geq 0$ для любого y , удовлетворяющего неравенству $|y| \geq a$. Система (19) удовлетворяет всем условиям теоремы 2 и поэтому имеет единственный устойчивый предельный цикл, окружающий неустойчивый сложный фокус $O(0; 0)$.

Список литературы

1. Стретт Дж. В. (лорд Рэлея). Теория звука : в 2 т. Москва : ГИТТЛ, 1955. Т. 1. 503 с.
2. Кузнецов А. П., Селиверстова Е. С., Трубецков Д. И., Тюрюкина Л. В. Феномен уравнения ван дер Поля // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, № 4. С. 3–42. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2014-22-4-3-42>



3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Москва : Физматгиз, 1959. 916 с.
4. Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е. Лекции по нелинейной динамике. Москва ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 516 с.
5. Gains R. E., Mawhin J. L. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics. Berlin ; Heidelberg : Springer, 1977. Vol. 568. 241 p. <https://doi.org/10.1007/BFb0089537>
6. Plesset M. S., Prosperetti A. Bubble dynamics and cavitation // Annual Review of Fluid Mechanics. 1977. Vol. 9. P. 145–185. <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.09.010177.001045>
7. Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва : Наука, 1974. 318 с.
8. Wang Z. On the existence of periodic solutions of Rayleigh equations // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2005. Vol. 56, № 4. P. 592–608. <https://doi.org/10.1007/s00033-004-2061-z>
9. Wang Y., Dai X.-Z. Existence and stability of periodic solutions of a Rayleigh type equation // Bulletin of the Australian Mathematical Society. 2009. Vol. 79, iss. 3. P. 377–390. <https://doi.org/10.1017/S0004972708001135>
10. Guo Y., Wang Y., Zhou D. A new result on the existence of periodic solutions for Rayleigh equation with a singularity // Advances in Difference Equations. 2017. Article number 394. <https://doi.org/10.1186/s13662-017-1449-y>
11. Alzabut J., Tunc C. Existence of Periodic solutions for a type of Rayleigh equation with state-dependent delay // Electronic Journal of Differential Equations. 2012. Vol. 77. P. 1–8.
12. Li Y., Huang L. New results of periodic solution for forced Rayleigh-type equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2008. Vol. 221, iss. 1. P. 98–105. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2007.10.005>
13. Кумакшев С. А. Исследование регулярных и релаксационных колебаний осцилляторов Рэля и ван дер Поля // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4 (2). С. 203–205.
14. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. Москва : Изд-во иностранной литературы, 1952. 264 с.
15. Коттингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва : Изд-во иностранной литературы, 1958. 474 с.
16. Жительзейф Е. Д. О предельных циклах уравнения Рэля // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8, № 7. С. 1309–1311.
17. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. Москва : Наука, 1966. 568 с.
18. Отроков Н. Ф. Аналитические интегралы и предельные циклы. Горький : Волго-Вятское книжное издательство, 1972. 216 с.

References

1. Strutt J. (Rayleigh) *The Theory of Sound*. In 2 vols. Vol. I. London, Macmillan and C^o, 1894. (Russ. ed.: Moscow, GITTL, 1955. Vol. 1. 503 p.)
2. Kuznetsov A. P., Seliverstova E. S., Trubetskov D. I., Tyuryukina L. V. Phenomenon of the van der Pol equation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2014, vol. 22, no. 4, pp. 3–42 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2014-22-4-3-42>
3. Andronov A. A., Witt A. A., Haikin S. E. *Teoriia kolebanii* [Theory of Vibrations]. Moscow, Fizmatgiz, 1959. 916 p. (in Russian).



4. Anishchenko V. S., Vadivasova T. E. *Lektsii po nelineinoi dinamike* [Lectures on Nonlinear Dynamics]. Moscow, Izhevsk, NITs "Reguliarnai i khaoticheskaia dinamika", 2011. 516 p. (in Russian).
5. Gains R. E., Mawhin J. L. *Coincidence Degree, and Nonlinear Differential Equations*. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg, Springer, 1977. Vol. 568. 241 p. <https://doi.org/10.1007/BFb0089537>
6. Plesset M. S., Prosperetti A. Bubble dynamics and cavitation. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1977, vol. 9, pp. 145–185. <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.09.010177.001045>
7. Reissig R., Sansone G., Conti R. *Qualitative Theorie Nichtlinearer Differentialgleichungen*. Rome, Edizioni Cremonese, 1963. 382 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1974. 318 p.).
8. Wang Z. On the existence of periodic solutions of Rayleigh equations. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2005, vol. 56, no. 4, pp. 592–608. <https://doi.org/10.1007/s00033-004-2061-z>
9. Wang Y., Dai X.-Z. Existence and stability of periodic solutions of a Rayleigh type equation. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 2009, vol. 79, iss. 3, pp. 377–390. <https://doi.org/10.1017/S0004972708001135>
10. Guo Y., Wang Y., Zhou D. A new result on the existence of periodic solutions for Rayleigh equation with a singularity. *Advances in Difference Equations*, 2017. Article number 394. <https://doi.org/10.1186/s13662-017-1449-y>
11. Alzabut J., Tunc C. Existence of Periodic solutions for a type of Rayleigh equation with state-dependent delay. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2012, vol. 77, pp. 1–8.
12. Li Y., Huang L. New results of periodic solution for forced Rayleigh-type equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, vol. 221, iss. 1, pp. 98–105. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2007.10.005>
13. Kumakshev S. A. Investigation of regular and relaxation oscillations in the Rayleigh and van der Pol oscillators. *Bulletin of the Lobachevsky University of Nizhny Novgorod*, 2011, no. 4 (2), pp. 203–205 (in Russian).
14. Stoker J. *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*. New York, Interscience Publishers, 1950. 273 p. (Russ. ed.: Moscow, Izdatel'stvo inostrannoi literatury, 1952. 264 p.).
15. Coddington E. A., Levinson N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York, McGraw-Hill, 1955. 429 p. (Russ. ed.: Moscow, Izdatel'stvo inostrannoi literatury, 1958. 474 p.).
16. Zhitelzeif E. D. The limit cycles of the Rayleigh equation. *Differentsial'nye Uravneniya* [Differential Equations], 1972, vol. 8, no. 7, pp. 1309–1311 (in Russian).
17. Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I., Maier A. G. *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems*. Jerusalem, New York, John Wiley, 1973, 524 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1966. 568 p.).
18. Otrokov N. F. *Analiticheskie integraly i predel'nye tsikly* [Analytical Integrals and Limit Cycles]. Gorky, Volgo-Viatskoe knizhnoe izdatel'stvo, 1972. 216 p.

Поступила в редакцию / Received 18.05.2020

Принята к публикации / Accepted 31.10.2020

Опубликована / Published 31.05.2021



МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 182–193
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 182–193

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-182-193>

Constructing the dependence between the Young's modulus value and the Hounsfield units of spongy tissue of human femoral heads

L. V. Bessonov¹, A. A. Golyadkina¹, P. O. Dmitriev¹,
A. V. Dol¹, V. S. Zolotov¹, D. V. Ivanov^{1✉},
I. V. Kirillova¹, L. Yu. Kossovich¹, Yu. I. Titova²,
V. Yu. Ulyanov², A. V. Kharlamov¹

¹Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

²V. I. Razumovsky Saratov State Medical University, 112 Bolshaya Kazachia St., Saratov 410012, Russia

Leonid V. Bessonov, lexx.besson@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-5636-1644>

Anastasiya A. Golyadkina, aagramakova@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0587-8691>

Pavel O. Dmitriev, stooune@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-5791-0713>

Aleksander V. Dol, nerevishl@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-5842-1615>

Vladislav S. Zolotov, zolvladislav@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8580-6729>

Dmitriy V. Ivanov, ivanovdv@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-1640-6091>

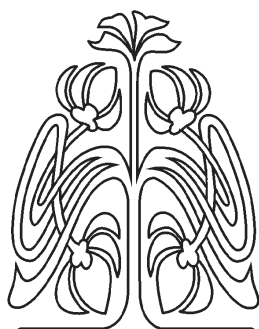
Irina V. Kirillova, nano-bio@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6745-4144>

Leonid Yu. Kossovich, president@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4775-7348>

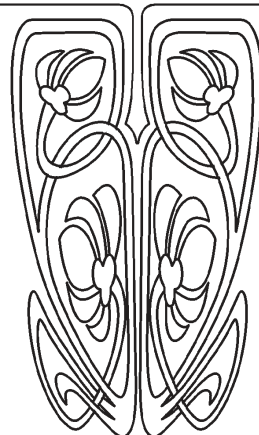
Yuliya I. Titova, <https://orcid.org/0000-0001-5738-9780>

Vladimir Yu. Ulyanov, v.u.ulyanov@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-9466-8348>

Aleksander V. Kharlamov, harlamovav63@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-1709-6518>



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Abstract. Patient-specific biomechanical modeling requires not only the geometric model of the studied object of a particular patient, but also the mechanical properties of its tissues. Quantitative computed tomography provides the initial data for geometric modeling, as well as data on X-ray density (Hounsfield units) of the object. It is known that Hounsfield units correlate with mineral density of the scanned objects, as well as with their strength properties. The aim of this study was to determine the relationship between Hounsfield units and Young's modulus values of human femoral heads spongy tissue. This study was conducted on samples of femur bones spongy tissue. The tissue was obtained from patients who underwent total hip replacement for coxarthrosis. Samples were scanned on a Toshiba Aquilion 64 computed tomograph and then subjected to uniaxial compression on an Instron 5944 universal testing machine. As a result of the study, the average Hounsfield units were obtained for each sample, as well as the Young's modulus values. Regression dependencies were calculated linking the Hounsfield units and the Young's modulus values of samples of femoral heads spongy tissue in different types of diseases. The obtained dependences allow one to determine Young's modulus value of femoral heads spongy bone noninvasively for a particular patient, depending on his disease, and using it in the process of preoperative planning. Also, the obtained dependencies can be used in biomechanical modeling of diseases and injuries of vertebral-pelvic complex of a particular patient treatment and can be implemented in medical decision support system in surgery of vertebral-pelvic complex.

Keywords: quantitative computed tomography, bone mineral density, Hounsfield units, Young's modulus

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Foundation for Advanced Research.

For citation: Bessonov L. V., Golyadkina A. A., Dmitriev P. O., Dol A. V., Zolotov V. S., Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Titova Yu. I., Ulyanov V. Yu., Kharlamov A. V. Constructing the dependence between the Young's modulus value and the Hounsfield units of spongy tissue of human femoral heads. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 182–193 (in English). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-182-193>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 539.3/617.547

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-182-193>

Построение зависимости между значением модуля Юнга и числами Хаунсфилда губчатой кости головок бедра

Л. В. Бессонов¹, А. А. Голядкина¹, П. О. Дмитриев¹, А. В. Доль¹,
В. С. Золотов¹, Д. В. Иванов^{1✉}, И. В. Кириллова¹, Л. Ю. Коссович¹,
Ю. И. Титова², В. Ю. Ульянов², А. В. Харламов¹

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

²Саратовский государственный медицинский университет имени В. И. Разумовского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Большая Казачья, д. 112



Бессонов Леонид Валентинович, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Образовательно-научного института наноструктур и биосистем, lexh.besson@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-5636-1644>

Голядкина Анастасия Александровна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Образовательно-научного института наноструктур и биосистем, aagramakova@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0587-8691>

Дмитриев Павел Олегович, старший научный сотрудник Образовательно-научного института наноструктур и биосистем, stooune@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-5791-0713>

Доль Александр Викторович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Образовательно-научного института наноструктур и биосистем, perevishl@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-5842-1615>

Золотов Владислав Сергеевич, научный сотрудник Образовательно-научного института наноструктур и биосистем, zolvladislav@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8580-6729>

Иванов Дмитрий Валерьевич, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Образовательно-научного института наноструктур и биосистем, ivanovdv@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-1640-6091>

Кириллова Ирина Васильевна, кандидат физико-математических наук, директор Образовательно-научного института наноструктур и биосистем, nano-bio@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6745-4144>

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической теории упругости и биомеханики, Президент СГУ, president@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4775-7348>

Титова Юлия Ивановна, врач-рентгенолог НИИТОН СГМУ, <https://orcid.org/0000-0001-5738-9780>

Ульянов Владимир Юрьевич, доктор медицинских наук, заместитель директора по научной и инновационной деятельности НИИТОН СГМУ, v.u.ulyanov@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-9466-8348>

Харламов Александр Владимирович, кандидат экономических наук, ведущий научный сотрудник Образовательно-научного института наноструктур и биосистем, harlamovav63@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-1709-6518>

Аннотация. Пациент-ориентированное биомеханическое моделирование требует знаний не только о геометрической модели исследуемого объекта конкретного пациента, но и о механических свойствах его тканей. Количественная компьютерная томография предоставляет исходные данные для геометрического моделирования, а также данные о рентгеновской плотности (числах Хаунсфилда) исследуемого объекта. Известно, что числа Хаунсфилда коррелируют с минеральной плотностью сканируемых объектов, а также с их прочностными свойствами. Цель исследования состояла в определении зависимости между числами Хаунсфилда и значениями модуля Юнга губчатой ткани головок бедренных костей человека. Данное исследование проведено на образцах губчатой костной ткани бедренных костей пациентов, перенесших тотальное эндопротезирование тазобедренного сустава по поводу коксартроза. Образцы сканировали на компьютерном томографе Toshiba Aquilion 64 и затем подвергали одноосному сжатию на универсальной испытательной машине Instron 5944. В результате исследования для каждого образца были получены средние числа Хаунсфилда, а также значения модулей Юнга. Были рассчитаны регрессионные зависимости, связывающие числа Хаунсфилда и значения модуля Юнга образцов губчатой ткани головок бедренных костей при разных типах заболеваний. Полученные зависимости позволяют неинвазивно определить значение модуля Юнга губчатой кости головок бедренной кости для конкретного пациента в зависимости от его заболевания и использовать его в процессе предоперационного



планирования. Также полученные зависимости могут быть использованы при биомеханическом моделировании вариантов лечения заболеваний и повреждений позвоночно-тазового комплекса конкретного пациента и внедрены в систему поддержки принятия врачебных решений в хирургии позвоночно-тазового комплекса.

Ключевые слова: количественная компьютерная томография, минеральная плотность костной ткани, число Хаунсфилда, модуль Юнга

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Фонда перспективных исследований.

Для цитирования: Bessonov L. V., Golyadkina A. A., Dmitriev P. O., Dol A. V., Zolotov V. S., Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Titova Yu. I., Ulyanov V. Yu., Kharlamov A. V. Constructing the dependence between the Young's modulus value and the Hounsfield units of spongy tissue of human femoral heads [Бессонов Л. В., Голядкина А. А., Дмитриев П. О., Доль А. В., Золотов В. С., Иванов Д. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Титова Ю. И., Ульянов В. Ю., Харламов А. В. Построение зависимости между значением модуля Юнга и числами Хаунсфилда губчатой кости головок бедра] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 182–193. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-182-193>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Introduction

Biomechanics as a tool for surgical treatment planning and predicting the consequences of treatment is increasingly used in an integrated approach to the preparation for surgery in recent years. At the same time, it is obvious that modeling based on averaged data (whether geometric parameters or materials properties) is unable to provide a sufficient degree of accuracy in predicting the outcome of treatment for a particular patient. In this regard, determination of the mechanical characteristics of patient's tissues is an extremely important and relevant stage of patient-specific biomechanical modeling.

One of the methods for determining in vivo mechanical characteristics of a particular patient's bone tissue is based on the analysis of computed tomography (CT) data. Bone density according to CT data (Hounsfield units or HU) strongly correlates with the volume bone mineral density [1, 2], as well as with mechanical strength of bone tissues [3–5].

When performing the study, CT images are transformed by convolution kernels. The use of convolution kernel can significantly change the Hounsfield numbers of tissues relative to their initial values [6]. It is known that different convolution kernels change Hounsfield numbers in different ways [4, 7, 8]. Therefore, the problem of choosing the convolution kernel when performing quantitative CT is non-trivial, and to obtain the relationship between Young's modulus values and Hounsfield units of bone tissue, it is necessary to first calibrate the tomograph [9, 10].

In many studies, authors attempted to construct dependencies between Hounsfield units and mineral density of tissues [3, 11, 12]. But in most cases the dependency is based on a small data set.

As a rule, authors devote their work to obtaining the relationship between Young's modulus values and bone mineral density estimated by densitometry [13]. This method is not very convenient when it is necessary to numerically solve biomechanics problem based on initial CT data of a particular patient. Therefore, the problem of determining



the relationship between Young's modulus values and initial data of quantitative CT (which are Hounsfield units) arises. For example, in [11], in addition to constructing the relationship between HU and density, the authors obtained a formula for calculating Young's modulus, after which the relationship was verified using mechanical experiments. A significant disadvantage of this work is that all the studies were conducted on rabbits' bones. Thus, the obtained dependences may not be completely accurate in case of human bone tissue studies [10].

Authors in [14] showed that the best correlation between mechanical properties and density is observed for spongy bone tissue. They also found that the power function, compared to the linear function, gives better correspondence between density and Young's modulus values.

In [15], a correlation was established between X-ray density of spongy bone tissue of the ankle joint and its elasticity modulus. At the same time, the authors did not specify CT settings, and the number of samples was only 42 pieces. Moreover, bone tissue material was collected from human cadavers.

The purpose of this study was to determine the relationship between Hounsfield units and Young's modulus values of human femoral heads spongy tissue. Within the framework of this study, dependencies were also obtained for various diseases of hip joint. The obtained dependences allow to noninvasively determine the Young's modulus value of the femoral heads spongy bone for a particular patient, depending on his disease, and using it in preoperative planning process.

1. Materials and methods

To identify the relationship between Hounsfield units and Young's modulus of the femoral heads spongy bone, a full-scale experiment was conducted.

Transfer of bone tissue of patients from Research Institute of Traumatology, Orthopedics and Neurosurgery of Razumovsky Saratov State Medical University was approved by the Ethics Committee. The transfer was performed in the framework of the implementation agreement of the Russian Foundation for Advanced Research project. The aim of the project is to develop a prototype of a decision-making medical supporting system to improve effectiveness of treatment of patients with vertebral-pelvic complex injuries and diseases. One of the project objectives is to create and to fill in the "Mechanical" database which will contain mechanical characteristics of bone tissues [16]. Bone tissue research was carried out within the framework of this project objective.

The femoral heads removed no later than a day after the hip replacement surgery were taken from the hospital for further examination. The samples were prepared using a hand-held metal hacksaw with the initial fragments fixed in a vise. Samples from 1 to 4 were prepared from one fragment of the femoral head. An average prepared sample was a rectangular parallelepiped with an edge size of at least 5 and not more than 10 mm [13].

In order to avoid drying out and loss of properties, the prepared fragments were packed in a plastic film, after which their CT scan was performed on a Toshiba Aquilion 64 computed tomograph. During the study, the convolution kernel FC17 was selected as the tomograph settings [9, 17].

Samples of the femoral heads of 150 patients were scanned on CT. For each head the first letter of the last name, age (year of birth), gender, volume of the experimental sample, and the average value of Hounsfield units were recorded.

Next, the femoral head fragments were subjected to uniaxial compression experi-



ments to determine their Young's modulus on Instron 5944 universal testing machine. The preload value was 10 N, the loading speed was 30 mm/min. Shape of the samples made it possible to measure their cross-sectional area by simple measurements of length and width using an electronic vernier caliper.

As a result of the experiments maximum values of stress and displacement were determined, "stress-strain" graphs were plotted (Fig. 1) and Young's modulus values were calculated. Next, the average values of Young's modulus were determined as the arithmetic mean for bone samples within a single fragment of the femoral head. But since the prepared samples had different volumes, the average values of Young's modulus were determined as the weighted average harmonic for bone samples within a single fragment of the femoral head. Further, the study used Young's modulus values as a weighted average harmonic. Table 1 shows examples of the results of the study for three randomly selected patients. In total, data for 150 patients was obtained.

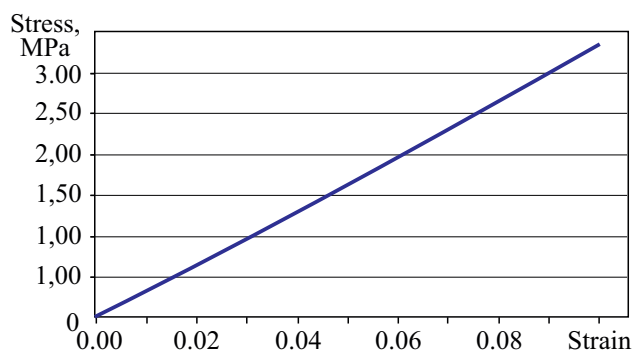


Fig. 1. "Stress-strain" graph for spongy bone of the patient's femoral head fragment (S., 1962, female)

Table 1

Young's modulus of femoral head fragments determined from full-scale experiments

Identifier	ICD-10 code	Young's module, MPa	
		Experimental value a	Weighted average harmonic value
B., 1951, male	M 16.0	48.2	42.6
		37.7	
		40.2	
		45.7	
B., 1954, female	M 16.0	116.7	133.5
		150.3	
T., 1953, female	M 16.1	74.6	73.1
		71.4	

Next, a statistical analysis of the accumulated data was carried out in order to identify the regression relationship between Young's modulus and Hounsfield units. Statistical analysis was performed in the Microsoft Office 2019.

Regression analysis was used to identify factors, degree, and form of influence of the results of field and numerical experiments on the value of the Young's modulus [18, 19].

The following information was analyzed: age and gender of the patient; nosology (disease code according to ICD 10); Hounsfield units (HU); Young's modulus determined from the data of full-scale experiment. The last indicator was considered as a dependent variable (the resulting attribute).

At the first step, statistical analysis of the experimental data and the results of CT studies was carried out without taking into account specific features (age, gender, ICD-10 code), at the second – taking into account patient's gender, at the third – taking into



account ICD-10 code. Hounsfield units and Young’s modulus had a normal distribution (Kolmogorov – Smirnov test, the significance level was 5%).

In the statistical analysis of experimental data and the results of CT studies, models of linear multiple regression (additive model) and linear regression in logarithms (multiplicative model) were constructed and analyzed. The level of statistical significance of the coefficients was less than 5%.

2. Results and discussion

At the first step, the dependences between Young’s modulus and Hounsfield units were studied without taking into account specific features (age, gender, ICD-10 code). A specified linear multiple regression model was constructed:

$$E = 0.20 * HU + 5.98, \quad R^2 = 0.67, \quad (1)$$

where E is Young’s modulus, HU is Hounsfield unit. R^2 is the coefficient of determination.

The level of statistical significance of the coefficient for HU variable was less than 0.1%, but the free term is statistically insignificant at 5% level, so the model (1) can be implemented as:

$$E = 0.22 * HU, \quad R^2 = 0.67. \quad (2)$$

The constructed model (2) satisfies the standard assumptions of linear regression (normality of the initial data distribution and model residuals, homoscedasticity) and explains 67% of the variation in the Young’s modulus values (Figure 2).

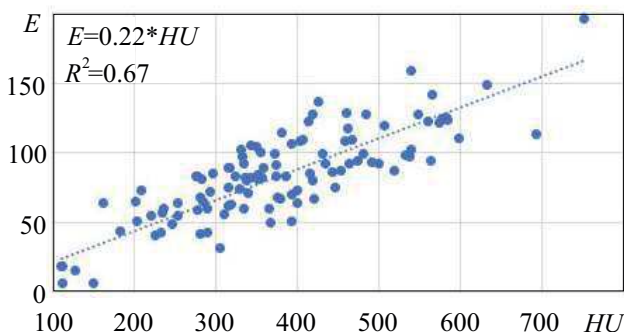


Fig. 2. Dot diagram: Hounsfield units values (CT data) are plotted along abscissa axis, and Young’s modulus values (data from full-scale experiments) are plotted along ordinate axis

A slightly higher value of the determination coefficient can be obtained by specifying the multiplicative model:

$$E = e^{1.17 * \ln(HU) - 2.55}, \quad R^2 = 0.68. \quad (3)$$

Model (3) explains more than 68% of the dependent variable variation. The advantage of this model is high (at the level of less than 0.001%) significance of the coefficients.

The conducted studies allowed us to calculate the predicted values of the Young’s modulus for the considered tissues and errors in them. The difference in values between the Young’s modulus determined from the full-scale experiment data and predicted using model (2) was on average 19%, and when using model (3) — 20%.

The conducted studies allowed us to calculate the predicted values of the Young’s modulus for the considered

Next, step 2 of the study was carried out — identifying the dependence of the Young’s modulus on the Hounsfield units analysis, taking into account patient’s gender.

The linear regression of Young’s modulus versus Hounsfield units for the female patients’ femoral heads was more adequate than for male patients (the values of the determination coefficients were 0.72 and 0.62, respectively), but the Chow test showed no structural differences. The constructed models are presented in Table 2.



Based on the constructed models (4)–(7), predicted values of the Young's modulus and errors in them for the studied tissues were determined. The difference between the Young's modules determined from the full-scale experiment data and predicted by formulas (4)–(7) are presented in Table 3.

From previously obtained results and data in Table 3, it can be seen that the introduction of a gender attribute in the analysis did not significantly affect the improvement of the predicting result. In linear regression models, there is an improvement of 1 unit, and in the analysis of the results of the multiplicative model (for females), there is a deterioration of 1 unit.

To improve the results of the Young's modulus values prediction, the 3rd stage of the study was carried out — an analysis of its dependence on Hounsfield units, taking into account the code of international classification of diseases (ICD-10). In the experiment, bone fragments of patients with ICD-10 codes were studied: M16.0, M16.1, M16.2, M16.3, M16.5, M16.6, M16.7, M17.0, M21.9, M84.1, M87.0, M87.2, M95.8, M95.9 (Table 4).

Table 2

Linear multiple regression models and multiplicative models based on gender

Gender	Models
Male	$E=0.20*HU+8.01, R^2 = 0.62$ (4)
	$E=e^{1.02*\ln(HU)^{1.68}}, R^2 = 0.69$ (5)
Female	$E=0.22*HU+3.74, R^2 = 0.72$ (6)
	$E=e^{1.26*\ln(HU)^{3.04}}, R^2 = 0.68$ (7)

Table 3

The difference between the Young's modules determined by the full-scale experiment data and predicted by the formulas (4)–(7)

Gender	Models	Average difference, %
Male	(4)	18
	(5)	18
Female	(6)	18
	(7)	21

Table 4

Number of studies for each ICD-10 code

ICD-10 code	Number of studies	ICD-10 code	Number of studies
M16.0	85	M17.0	2
M16.1	23	M21.9	2
M16.2	6	M84.1	6
M16.3	3	M87.0	12
M16.5	1	M87.2	1
M16.6	3	M95.8	1
M16.7	3	M95.9	2

The dependence of Young's modulus on Hounsfield units for each ICD-10 code was studied, the volume of full-scale experiments carried out for each of them amounted to at least 5 measurements.

Data on ICD-10 codes (M16.3, M16.5, M16.6, M16.7, M17.0, M21.9, M87.2, M95.8, M95.9), for each of which less than five full-scale experiments were conducted, were collected together. Generalized models were obtained for these data. The constructed models are shown in Table 5.



Table 5

Linear multiple regression models and multiplicative models taking into account the ICD-10 code

ICD-10 code	Models
M16.0	$E = 0.19*HU + 14.46, R^2 = 0.64$ (8)
	$E = e^{1.05*\ln(HU)-1.77}, R^2 = 0.74$ (9)
M16.1	$E = 0.24*HU - 5.79, R^2 = 0.71$ (10)
	$E = e^{1.08*\ln(HU)-2.02}, R^2 = 0.75$ (11)
M16.2	$E = 0.18*HU - 50.10, R^2 = 0.67$ (12)
	$E = e^{0.64*\ln(HU)+0.95}, R^2 = 0.61$ (13)
M84.1	$E = 0.18*HU + 13.67, R^2 = 0.75$ (14)
	$E = e^{0.79*\ln(HU)-0.28}, R^2 = 0.78$ (15)
M87.0	$E = 0.17*HU + 12.20, R^2 = 0.80$ (16)
	$E = e^{0.82*\ln(HU)-0.49}, R^2 = 0.78$ (17)
M16.3, M16.5, M16.6, M16.7, M17.0, M21.9, M87.2, M95.8, M95.9	$E = 0.20*HU + 4.55, R^2 = 0.60$ (18)
	$E = e^{1.56*\ln(HU)-4.96}, R^2 = 0.66$ (19)

Based on the constructed models (8)–(19), the predicted values of the Young’s modulus and errors in them for the studied tissues were determined. The differences between Young’s modulus determined from the full-scale experiment data and predicted by formulas (8)–(19) are presented in Table 6.

Table 6

The difference between Young’s modulus determined by the full-scale experiment data and predicted by the formulas (8)–(19)

ICD-10 code	Model	Average difference, %
M16.0	(8)	27
	(9)	16
M16.1	(10)	14
	(11)	16
M16.2	(12)	16
	(13)	14
M84.1	(14)	11
	(15)	12
M87.0	(16)	16
	(17)	16
M16.3, M16.5, M16.6, M16.7, M17.0, M21.9, M87.2, M95.8, M95.9	(18)	20
	(19)	27

Table 6 shows that when considering the data separately for each ICD-10 code, the difference in values between the Young’s modulus determined from the full-scale



experiment data and predicted by formulas (8)–(18) does not exceed 16% on average. The exception is the linear regression models for the M16.0 code and the last line in Table 6, which contains codes with studies of less than 5 dimensions. At the same time, it is worth noting that the multiplicative model for the M16.0 code gives results with an average error of not more than 16%.

It was found that the Young's modulus values obtained during the full-scale experiment almost do not differ from the predicted values obtained from the results of the numerical experiment for the femoral heads tissues. The presence of an error in the predicted Young's modulus value is due to the significant heterogeneity of bone tissue due to the presence of pathological processes (osteonecrosis, osteosclerosis, osteoporosis). It is worth noting that the error for the predicted Young's modulus values, determined by formulas taking into account the ICD-10 code, is much lower. On this basis, it is advisable to use them in future.

Chow tests at a significance level of 5% showed no structural differences in the models constructed for different ICD-10 codes. The case for M16.1 stands out slightly, but there were no statistically confirmed deviations from the general trend. This makes it possible to use a single pair regression model (2) or (3) for predicting purposes.

It should be emphasized that the revealed dependencies between Young's modulus values and Hounsfield units can only be used for processing CT studies performed on Toshiba Aquilion 64 tomograph, since different models of scanning devices can give different values of HU [20]. Moreover, it was found that the CT study protocols also have a significant effect on Hounsfield units [9]. Thus, as a continuation of this work, we see the study of the influence of manufacturer, the model of tomograph, as well as its settings on the reliability of the results obtained using the proposed formula. In the event that the predicting is not accurate enough, it is necessary to calculate correction factors or re-specify the model taking into account new data.

To determine the correction coefficients for each tomograph, calibrated samples of an aqueous solution of potassium hydroorthophosphate [9, 14, 17] with a known mineral density could be scanned, after which it will be possible to obtain similar regression dependencies and final models. By comparing the existing and newly obtained models, it will be possible to determine correction factors for each specific tomograph.

Conclusion

In the study, the relationships between Hounsfield units and Young's modulus of bone tissue were obtained without taking into account specific features (age, gender, ICD-10 code) and also taking into account patient's gender and ICD-10 code. It was revealed that the error for the predicted Young's modulus values, determined by formulas taking into account ICD-10 code, does not exceed 16%. Based on this, it is advisable to use them in future.

These formulas can be used to determine the mechanical characteristics of bones in biomechanical modeling of surgical treatment. This approach will allow one to obtain the properties of the particular patient's tissues, which is extremely important for a personalized approach to treatment planning. At the same time, to generalize the obtained formulas, it is necessary to conduct a series of experiments to test them on tomographic studies using tomographs of various manufacturers and modifications.

References

1. Patel S. P., Lee J. J., Hecht G. G., Holcombe S. A., Wang S. C., Goulet J. A. Normative vertebral Hounsfield unit values and correlation with bone mineral density. *Journal of Clinical*



- & *Experimental Orthopaedics*, 2016, vol. 2, no. 14, pp. 1–7. <https://doi.org/10.4172/2471-8416.100014>
2. Kim K. J., Kim D. H., Lee J. I., Choi B. K., Han I. H., Nam K. H. Hounsfield units on lumbar computed tomography for predicting regional bone mineral density. *Open Medicine*, 2019, vol. 14, pp. 545–551. <https://doi.org/10.1515/med-2019-0061>
 3. Khan S. N., Warkhedkar R. M., Shyam A. K. Analysis of Hounsfield unit of human bones for strength evaluation. *Procedia Materials Science*, 2014. vol. 6, pp. 512–519. <https://doi.org/10.1016/j.mspro.2014.07.065>
 4. Giambini H., Dragomir-Daescu D., Huddleston P. M., Camp J. J., An K. N., Nassr A. The effect of quantitative computed tomography acquisition protocols on bone mineral density estimation. *Journal of Biomechanical Engineering*, 2015, vol. 137, no. 11, pp. 114502. <https://doi.org/10.1115/1.4031572>
 5. Cyganik L., Binkowski M., Kokot G., Rusin T., Popik P., Bolechala F., Nowak R. Wrobel Z., John A. Prediction of Young's modulus of trabeculae in microscale using macro-scale's relationships between bone density and mechanical properties. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2014, vol. 36, pp. 120–134. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2014.04.011>
 6. Michalski A. S., Edwards W. B., Boyd S. K. The influence of reconstruction kernel on bone mineral and strength estimates using quantitative computed tomography and finite element analysis. *Journal of Clinical Densitometry*, 2019, vol. 22, iss. 2, pp. 219–228. <https://doi.org/10.1016/j.jocd.2017.09.001>
 7. Andersen H. K., Jensen K., Berstad A. E., Aalokken T. M., Kristiansen J., von Gohren Edwin B., Hagen G., Martinsen A. C. Choosing the best reconstruction technique in abdominal computed tomography: A systematic approach. *Journal of Computer Assisted Tomography*, 2014, vol. 38, iss. 6, pp. 853–858. <https://doi.org/10.1097/RCT.0000000000000139>
 8. Birnbaum B. A., Hindman N., Lee J., Babb J. S. Multi-detector row CT attenuation measurements: Assessment of intra- and interscanner variability with an anthropomorphic body CT phantom. *Radiology*, 2007, vol. 242, no. 1, pp. 109–119.
 9. Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Bessonov L. V., Petraikin A. V., Dol A. V., Ahmad E. S., Morozov S. P., Vladzimirskyy A. V., Sergunova K. A., Kharlamov A. V. Influence of convolution kernel and beam-hardening effect on the assessment of trabecular bone mineral density using quantitative computed tomography. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 205–219. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-205-219>
 10. Currey J. D. Tensile yield in compact bone is determined by strain, post-yield behaviour by mineral content. *Journal of Biomechanics*, 2004, vol. 37, iss. 4, pp. 549–556. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2003.08.008>
 11. Chen W.-P., Hsu J.-T., Chang C.-H. Determination of young's modulus of cortical bone directly from computed tomography: A rabbit model. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 2003, vol. 26, no. 6, pp. 737–745. <https://doi.org/10.1080/02533839.2003.9670828>
 12. Giambini H., Dragomir-Daescu D., Nassr A., Yaszemski M. J., Zhao C. Quantitative computed tomography protocols affect material mapping and quantitative computed tomography-based finite-element analysis predicted stiffness. *Journal of Biomechanical Engineering*, 2016, vol. 138, iss. 9, pp. 091003-1–091003-7. <https://doi.org/10.1115/1.4034172>
 13. Helgason B., Perilli E., Schileo E., Taddei F., Brynjolfsson S., Viceconti M. Mathematical relationships between bone density and mechanical properties: A literature review. *Clinical Biomechanics*, 2008, vol. 23, no. 2, pp. 135–146. <https://doi.org/10.1016/j.clinbiomech.2007.08.024>
 14. Witt R. M., Cameron J. R. *Improved Bone Standard Containing Dipotassium Hydrogen Phosphate Solution for The Intercomparison of Different Transmission Bone Scanning Systems*. United States: N. p., 1971. 6 p. <https://doi.org/10.2172/4054820>



15. Omelchenko T. M., Buryanov O. A., Lyabakh A. P., Mazevich V. B., Shidlovsky M. S., Musienko O. S. Correlation of elastic modulus and x-ray bone density in the area of the ankle joint. *Orthopedics, Traumatology and Prosthetics*, 2018, no. 3, pp. 80–84 (in Ukraine). <http://dx.doi.org/10.15674/0030-59872018380-84>
16. Dmitriev P. O., Golyadkina A. A., Bessonov L. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Falkovich A. S. The dependence of Young's modulus of trabecular bony tissue on its density according to computed tomography. *Progress in Biomedical Optics and Imaging – Proceedings of SPIE*, 2019, vol. 11229, article no. 112291L. <https://doi.org/10.1117/12.2545077>
17. Petraikin A. V., Ivanov D. V., Akhmad E. S., Sergunova K. A., Nizovtsova L. A., Petryaykin F. A., Ruzov S. A., Kirilova I. V., Kossovich L. Yu., Bessonov L. V., Dol A. V., Vladzimirsky A. V., Harlamov A. V. Phantom modeling for selection of optimum reconstruction filters in the quantitative computer tomography. *Meditinskaya Fizika* [Medical Physics], 2020, vol. 86, no. 2, pp. 34–44 (in Russian).
18. Glanc S. *Mediko-biologicheskaya statistika* [Medical and Biological Statistics]. Moscow, Praktika, 1998. 459 p. (in Russian).
19. Kobzar' A. I. *Prikladnaya matematicheskaya statistika: Dlya inzhenerov i nauchnyh rabotnikov* [Applied Mathematical Statistics: For Engineers and Scientists]. Moscow, Fizmatlit, 2006. 816 p. (in Russian).
20. Free J., Eggermont F., Derikx L., van Leeuwen R., van der Linden Y., Jansen W., Raaijmakers E., Tanck E., Kaatee R. The effect of different CT scanners, scan parameters and scanning setup on Hounsfield units and calibrated bone density: A phantom study. *Biomedical Physics & Engineering Express*, 2018, vol. 4, no. 5, pp. 12. <https://doi.org/10.1088/2057-1976/aad66a>

Поступила в редакцию / Received 21.09.2020

Принята к публикации / Accepted 03.11.2020

Опубликована / Published 31.05.2021



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 194–201
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 194–201

Научная статья

УДК 629.78;519.6

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-194-201>

Аппроксимация уравнений ориентации орбитальной системы координат методом взвешенных невязок

И. А. Панкратов^{1,2}

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

²Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24

Панкратов Илья Алексеевич, кандидат технических наук, ¹доцент кафедры математического и компьютерного моделирования; ²научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением, PankratovIA@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5325-9310>

Аннотация. В кватернионной постановке рассмотрена задача математического моделирования движения космического аппарата (КА) по эллиптической орбите. Постоянное по модулю управление (вектор ускорения от реактивной тяги) направлено ортогонально плоскости орбиты КА. Для описания движения центра масс КА использовано кватернионное дифференциальное уравнение ориентации орбитальной системы координат. Построено приближённое аналитическое решение кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбитальной системы координат в виде разложения по системе линейно независимых базисных функций. Для нахождения неизвестных кватернионных коэффициентов этого разложения был использован метод поточечной коллокации. Учёт известного решения уравнения ориентации орбитальной системы координат для случая, когда орбита КА является круговой, позволил упростить вид вышеуказанного разложения. Относительно искомых коэффициентов получена система линейных алгебраических уравнений, в которой компоненты матрицы жёсткости и столбца свободных членов являются кватернионами. Для проведения численного моделирования движения КА была составлена программа на языке Python. Проведено сравнение расчётов по аналитическим формулам, полученным в работе, и численного решения задачи Коши методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности. Составлены таблицы погрешности определения ориентации орбитальной системы координат для случаев, когда базисные функции являются полиномами и тригонометрическими функциями. Приведены примеры численного решения задачи для случая, когда начальная ориентация орбитальной системы координат соответствует ориентации орбиты одного из спутников орбитальной группировки ГЛОНАСС. Построены графики изменения компонент кватерниона погрешности определения ориентации орбитальной системы координат. Проведён анализ полученных решений. Установлены особенности и закономерности процесса движения КА по эллиптической орбите.

Ключевые слова: космический аппарат, орбита, оптимальное управление, кватернион

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00205).



Для цитирования: Панкратов И. А. Аппроксимация уравнений ориентации орбитальной системы координат методом взвешенных невязок // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 194–201. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-194-201>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-194-201>

Approximation of the orientation equations of the orbital coordinate system by the weighted residuals method

I. A. Pankratov^{1,2}

¹Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

²Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia

Iliia A. Pankratov, PankratovIA@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5325-9310>

Abstract. In the quaternion formulation, the problem of mathematical modeling of the spacecraft movement in an elliptical orbit was considered. Control is an acceleration vector from jet thrust. Control modulus is constant. The control is directed orthogonally to the plane of the spacecraft orbit. The quaternion differential equation of an orbital coordinate system orientation was used to describe spacecraft movement. An approximate analytical solution of the quaternion differential equation of the orbital coordinate system orientation in the form of an expansion system of linearly independent basis functions was constructed. The method of pointwise collocation was used to find unknown quaternion coefficients of this decomposition. The above decomposition was simplified taking into account the well-known solution of the orientation equation of the orbital coordinate system for the case when the spacecraft orbit is circular. With respect to the desired coefficients, a system of linear algebraic equations is obtained in which the components of the stiffness matrix and the column of free terms are quaternions. A program in Python was written to conduct numerical simulations of the spacecraft movement. A comparison of calculations for analytical formulas obtained in the paper and the numerical solution of the Cauchy problem by the Runge – Kutta method of the 4th order accuracy was done. Error tables have been obtained for determining the orientation of the orbital coordinate system for cases when basic functions are polynomials and trigonometric functions. Examples of numerical solution of the problem are given for the case when the initial orientation of the orbital coordinate system corresponds to the orientation of the orbit of one of the satellites of the GLONASS orbital grouping. Graphs describing changes in the components of error quaternion in determining the orientation of the orbital coordinate system are constructed. The analysis of the received results is given. The features and regularities of the spacecraft movement on an elliptical orbit are established.

Keywords: spacecraft, orbit, optimal control, quaternion

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-01-00205).

For citation: Pankratov I. A. Approximation of the orientation equations of the orbital coordinate system by the weighted residuals method. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 194–201 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-194-201>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)



1. Постановка задачи

Пусть вектор ускорения \mathbf{u} от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости его орбиты. В этом случае орбита КА в процессе управления движением центра масс КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления как неизменяемая (недеформируемая) фигура.

Рассмотрим орбитальную систему координат η . Начало этой системы координат находится в центре масс КА, ось η_1 направлена вдоль радиуса-вектора центра масс КА, ось η_3 перпендикулярна плоскости орбиты и имеет направление постоянного по модулю вектора \mathbf{c} момента скорости центра масс КА, а ось η_2 образует правую тройку с осями η_1 и η_3 .

Уравнения ориентации орбитальной системы координат η в параметрах Эйлера λ_j имеют вид [1]

$$2\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_\eta, \quad \boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\omega}_\eta = \frac{r}{c} u \mathbf{i}_1 + \frac{c}{r^2} \mathbf{i}_3, \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad c = \text{const.}$$

Здесь $\boldsymbol{\lambda}$ — нормированный кватернион ориентации орбитальной системы координат η , $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — векторные мнимые единицы Гамильтона, \circ — символ кватернионного умножения; φ — истинная аномалия, характеризующая положение КА на орбите; $r = |\mathbf{r}|$ — модуль радиуса-вектора центра масс КА; p и e — параметр и эксцентриситет орбиты, $c = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$ — постоянная площадей (модуль вектора момента скорости \mathbf{v} центра масс КА); u — проекция вектора реактивного ускорения \mathbf{u} на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного мгновенной плоскости орбиты КА).

Для исследования уравнений (1) удобно перейти к новой независимой переменной — истинной аномалии φ , и ввести безразмерные переменные. Фазовые переменные λ_j являются безразмерными. Безразмерные переменные r^b, t^b и управление u^b связаны с размерными переменными r, t и управлением u соотношениями: $r = Rr^b, u = u_{\max} u^b, t = Tt^b$, где R — характерное расстояние (величина, близкая к длине большой полуоси орбиты управляемого КА); V, T — характерные скорость и время соответственно, определяемые соотношениями: $V = c/R, T = R^2/c$.

При переходе к безразмерным переменным в уравнениях для фазовых переменных появляется характерный безразмерный параметр $N^b = u_{\max} R^3/c^2$.

Таким образом, система фазовых уравнений в безразмерных переменных примет вид [2]

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\varphi} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda} \circ [N^b (r^b)^3 u^b \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3], \quad r^b = \frac{1}{1 + e \cos \varphi}. \quad (2)$$

2. Метод поточечной коллокации

Аналитическое решение уравнений (2) в случае произвольного управления $u = u(t)$ не найдено. Задача интегрирования уравнений (2) есть известная задача Дарбу. Решение этой задачи в замкнутой форме найдено лишь для некоторых частных случаев (см., например, работы [3–5]). Известно, что оптимальное по Понтрягину [6] управление, соответствующее задаче быстродействия и задаче



минимизации затрат характеристической скорости, является константой на смежных участках активного движения КА [7].

Пусть необходимо найти приближённое решение кватернионного уравнения (2) при $\varphi \in [0; \varphi^*]$ с начальным условием

$$\text{при } \varphi = 0 \text{ рад } \lambda(0) = \lambda^{(H)} \quad (3)$$

для случая, когда $u^b = \text{const}$.

Выберем систему базисных функций $N_k(\varphi)$, $k = \overline{1, M}$, линейно независимых на отрезке $[0; \varphi^*]$. Предположим, что орбита КА является эллиптической ($0 < e < 1$). Будем искать решение задачи в виде разложения по базисным функциям (\mathbf{a}_k — подлежащие определению кватернионные коэффициенты):

$$\lambda \approx \hat{\lambda} = \lambda^{\text{круг}}(\varphi) + \sum_{k=1}^M \mathbf{a}_k N_k(\varphi). \quad (4)$$

Здесь $\lambda^{\text{круг}}(\varphi)$ — решение уравнения (2) в случае, когда КА движется по круговой орбите ($e = 0$). Известно [8], что

$$\lambda^{\text{круг}}(\varphi) = \lambda^{(0)} \circ \left(\cos \frac{\omega\varphi}{2} + \frac{1}{\omega} \sin \frac{\omega\varphi}{2} \omega_\eta \right), \quad \omega = |\omega_\eta| = \text{const}, \quad \omega_\eta = N^b u^b \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3.$$

Базисные функции $N_k(\varphi)$ должны удовлетворять условию

$$N_k(0) = 0, \quad k = \overline{1, M}$$

для того, чтобы начальное условие (3) выполнялось при любых значениях неизвестных коэффициентов. Заметим также, что если орбита КА является круговой, то разложение (4) является точным решением кватернионного уравнения (2) при $\mathbf{a}_k \equiv \mathbf{0}$, $k = \overline{1, M}$.

Аппроксимацию производной от кватерниона ориентации орбитальной системы координат получим, продифференцировав разложение (4):

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} \approx \frac{d\hat{\lambda}}{d\varphi} = \frac{d\lambda^{\text{круг}}(\varphi)}{d\varphi} + \sum_{k=1}^M \mathbf{a}_k \frac{dN_k(\varphi)}{d\varphi}. \quad (5)$$

Так как $\lambda^{\text{круг}}$ есть решение уравнения (2) при $r^b = 1$, то (5) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} \approx \frac{d\hat{\lambda}}{d\varphi} = \frac{1}{2} \lambda^{\text{круг}}(\varphi) \circ [N^b u^b \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3] + \sum_{k=1}^M \mathbf{a}_k \frac{dN_k(\varphi)}{d\varphi}. \quad (6)$$

Подставляя разложение (4) с учётом (6) в уравнение (2), получим невязку $R_{[0; \varphi^*]}^\lambda$ следующего вида:

$$R_{[0; \varphi^*]}^\lambda = \sum_{k=1}^M \mathbf{a}_k \left\{ 2 \frac{dN_k(\varphi)}{d\varphi} - N_k(\varphi) \cdot [N^b u^b (r^b)^3 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3] \right\} + \lambda^{\text{круг}} \circ N^b u^b [1 - (r^b)^3] \mathbf{i}_1.$$



Для получения приближённого равенства $R_{[0;\varphi^*]}^\lambda = 0$ при $\varphi \in [0; \varphi^*]$ воспользуемся методом поточечной коллокации [9, 10]. Для этого выберем M точек коллокации вида $\varphi_s = s \cdot \varphi^*/M$, $s = \overline{1, M}$. В качестве весовых функций возьмём дельта-функции Дирака $W_s = \delta(\varphi - \varphi_s)$. Потребуем, чтобы выполнялись равенства

$$\int_0^{\varphi^*} R_{[0;\varphi^*]}^\lambda W_s d\varphi = \int_0^{\varphi^*} R_{[0;\varphi^*]}^\lambda \delta(\varphi - \varphi_s) = 0, \quad s = \overline{1, M}.$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции [11], последнюю формулу можно переписать так:

$$R_{[0;\varphi^*]}^\lambda \Big|_{\varphi=\varphi_s} = 0, \quad s = \overline{1, M}. \quad (7)$$

Равенства (7) представляют собой систему M линейных алгебраических уравнений вида $K \cdot \mathbf{a} = f$. При этом компоненты матрицы жёсткости K и столбца свободных членов f являются кватернионами ($s, k = \overline{1, M}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{s,k} &= 2 \frac{dN_k(\varphi)}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_s} - N_k(\varphi_s) \cdot \left[\frac{N^b u^b}{(1 + e \cos \varphi_s)^3} \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3 \right], \\ \mathbf{f}_s &= (\boldsymbol{\lambda}^{\text{КРУГ}} \circ N^b u^b [(r^b)^3 - 1] \mathbf{i}_1) \Big|_{\varphi=\varphi_s}. \end{aligned} \quad (8)$$

Решив систему (8), мы найдём искомые коэффициенты в разложении (4).

3. Примеры численного решения задачи

Введём в рассмотрение кватернион погрешности определения ориентации орбитальной системы координат

$$\mathbf{err}(e) = \arg \max_{\varphi \in [0; \pi/2]} |\boldsymbol{\lambda}^{\text{прибл}}(\varphi, e) - \boldsymbol{\lambda}^{\text{ПК}}(\varphi, e)|.$$

Здесь $\boldsymbol{\lambda}^{\text{прибл}}(\varphi, e)$ — приближённое решение, в котором коэффициенты \mathbf{a}_k получены из решения уравнений (8); а $\boldsymbol{\lambda}^{\text{ПК}}(\varphi, e)$ — результат интегрирования уравнения (2) методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности [12] с шагом $h = 0.001$ рад.

Пусть начальное положение КА описывается следующими параметрами:

$$\begin{aligned} \Omega_u^0 &= \Omega_u(0) = 215.25^\circ, \quad I^0 = I(0) = 64.8^\circ, \quad \omega_\pi^0 = \omega_\pi(0) = 0^\circ, \\ \varphi_0 &= 0 \text{ рад.}, \quad u_{\max} = 0.101907 \text{ м/с}^2, \quad N^b \cdot u^b = 0.35. \end{aligned}$$

Здесь Ω_u — долгота восходящего узла, I — наклонение орбиты, а ω_π — угловое расстояние перицентра от узла.

Тогда компоненты кватерниона ориентации орбитальной системы координат в начале движения будут равны

$$\lambda_0^H = -0.255650, \quad \lambda_1^H = -0.162241, \quad \lambda_2^H = 0.510674, \quad \lambda_3^H = 0.804694.$$

Указанный кватернион $\boldsymbol{\lambda}^H$ соответствует ориентации орбиты одного из спутников группировки ГЛОНАСС (при условии, что начальное значение истинной аномалии φ — ноль радиан).

В табл. 1 приведены значения модуля кватерниона погрешности $\mathbf{err}(e)$ для случая, когда базисные функции являлись полиномами. В ходе проведения



математического моделирования движения КА было установлено, что при увеличении количества базисных функций M погрешность определения ориентации орбитальной системы координат уменьшается. Также были проведены расчёты при $N_k = (\varphi/\varphi^*)^k$. Результаты совпали с теми, что указаны в табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Значения модуля кватерниона погрешности $err(e)$ для $N_k = \varphi^k$
 Error quaternion modulus values $err(e)$ for $N_k = \varphi^k$

e	$M = 2$	$M = 3$	$M = 4$	$M = 5$	$M = 6$	$M = 7$	$M = 8$
0.01	$9.1 \cdot 10^{-4}$	$3.5 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$8.5 \cdot 10^{-5}$	$6.3 \cdot 10^{-5}$	$4.8 \cdot 10^{-5}$
0.02	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$6.8 \cdot 10^{-4}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-4}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$9.4 \cdot 10^{-5}$
0.03	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$9.9 \cdot 10^{-4}$	$5.0 \cdot 10^{-4}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$
0.04	$3.4 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$6.4 \cdot 10^{-4}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$
0.05	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$7.8 \cdot 10^{-4}$	$5.3 \cdot 10^{-4}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-4}$
0.06	$5.0 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$9.1 \cdot 10^{-4}$	$6.1 \cdot 10^{-4}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$
0.07	$5.7 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$6.9 \cdot 10^{-4}$	$4.9 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$
0.08	$6.4 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$7.7 \cdot 10^{-4}$	$5.5 \cdot 10^{-4}$	$4.0 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$
0.09	$7.1 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$8.4 \cdot 10^{-4}$	$6.0 \cdot 10^{-4}$	$4.4 \cdot 10^{-4}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$
0.10	$7.8 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$9.1 \cdot 10^{-4}$	$6.4 \cdot 10^{-4}$	$4.8 \cdot 10^{-4}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$

В табл. 2 приведены значения модуля кватерниона погрешности $err(e)$ для случая, когда базисные функции являлись тригонометрическими. Минимальное значение погрешности (такое же, как в табл. 1 при $M = 8$) было достигнуто при меньшем количестве базисных функций (а именно при $M = 5$). В то же время при увеличении количества синусоид в разложении погрешность начинает увеличиваться. Заметим, что базисные функции $N_k = \sin(k\varphi/(2\varphi^*))$ дают бóльшую погрешность, чем та, что приведена в табл. 2.

Таблица 2 / Table 2

Значения модуля кватерниона погрешности $err(e)$ для $N_k = \sin \frac{\pi k \varphi}{2\varphi^*}$
 Error quaternion modulus values $err(e)$ for $N_k = \sin \frac{\pi k \varphi}{2\varphi^*}$

e	$M = 2$	$M = 3$	$M = 4$	$M = 5$	$M = 6$	$M = 7$	$M = 8$
0.01	$4.8 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$9.8 \cdot 10^{-5}$	$5.2 \cdot 10^{-5}$	$7.1 \cdot 10^{-5}$	$7.9 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$
0.02	$9.3 \cdot 10^{-4}$	$3.0 \cdot 10^{-4}$	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$9.9 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$3.0 \cdot 10^{-4}$
0.03	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$	$4.4 \cdot 10^{-4}$
0.04	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$5.6 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$5.6 \cdot 10^{-4}$
0.05	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$6.8 \cdot 10^{-4}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$6.8 \cdot 10^{-4}$
0.06	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$8.0 \cdot 10^{-4}$	$5.0 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-4}$	$3.9 \cdot 10^{-4}$	$7.9 \cdot 10^{-4}$
0.07	$2.9 \cdot 10^{-3}$	$9.1 \cdot 10^{-4}$	$5.7 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$4.1 \cdot 10^{-4}$	$4.4 \cdot 10^{-4}$	$9.0 \cdot 10^{-4}$
0.08	$3.3 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$6.3 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$4.5 \cdot 10^{-4}$	$4.9 \cdot 10^{-4}$	$9.9 \cdot 10^{-4}$
0.09	$3.6 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$7.0 \cdot 10^{-4}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$4.9 \cdot 10^{-4}$	$5.3 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$
0.10	$3.9 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$7.5 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-4}$	$5.3 \cdot 10^{-4}$	$5.8 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$

Помимо указанных выше базисных функций, были рассмотрены полиномы относительно радиуса-вектора орбиты КА ($N_k = (r(\varphi) - r(0))^k$). В этом случае



погрешность определения ориентации орбитальной системы координат оказалась на порядок выше той, что указана в табл. 1, 2.

На рисунке показаны законы изменения компонент кватерниона погрешности определения ориентации орбитальной системы координат для случая, когда в разложение (4) входят пять тригонометрических базисных функций. При этом погрешность определения скалярной части оказалась на порядок меньше, чем погрешность определения компонент векторной части.

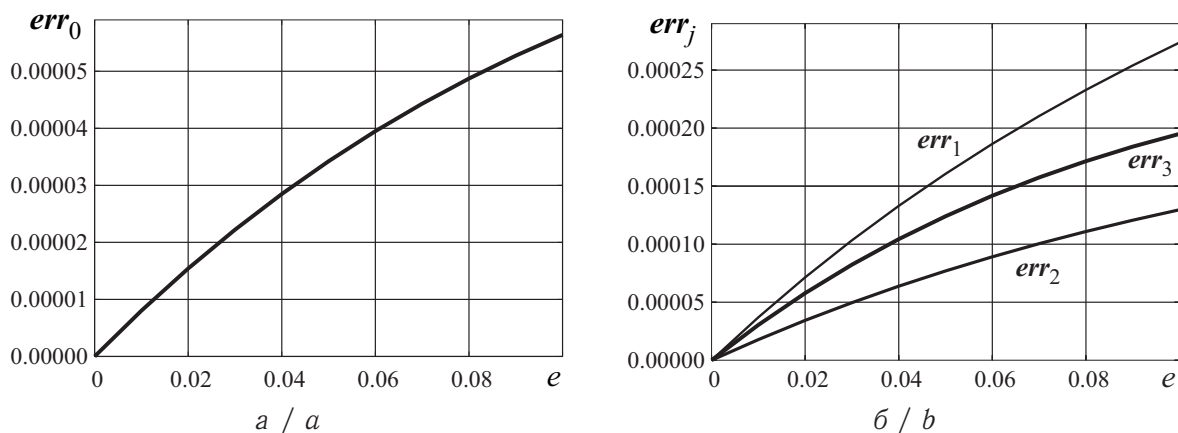


Рис. Компоненты кватерниона погрешности: a — скалярная часть; b — векторная часть
Fig. Components of the error quaternion: a — scalar part; b — vector part

Проведённое математическое моделирование показало перспективность применения разложения (4) для исследования орбитального движения КА. В отличие от результатов работы [13], удалось в десять раз увеличить максимальное значение эксцентриситета орбиты, для которого были проведены расчёты по предложенным формулам (эксцентриситет орбиты КА не обязательно должен быть малой величиной).

Список литературы

1. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. I // Космические исследования. 1992. Т. 30, вып. 6. С. 759–770.
2. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 84–92. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-1-1-84-92>
3. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твёрдого тела. Москва : Наука, 1973. 320 с.
4. Зубов В. И. Аналитическая динамика гироскопических систем. Ленинград : Судостроение, 1970. 317 с.
5. Молоденков А. В. К решению задачи Дарбу // Известия РАН. Механика твёрдого тела. 2007. № 2. С. 3–13.
6. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Москва : Наука, 1983. 393 с.
7. Челноков Ю. Н. Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Прикладная математика и механика, 2012. Т. 76, вып. 6. С. 895–912.
8. Челноков Ю. Н. Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига – Гамильтона по его угловой скорости // Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. 1977. № 3. С. 11–20.



9. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. Москва : Мир, 1986. 318 с.
10. Коннор Дж., Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости. Ленинград : Судостроение, 1979. 264 с.
11. Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики. Москва : Наука, 1979. 408 с.
12. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. Москва : Наука, 1971. 424 с.
13. Панкратов И. А. Аналитическое решение уравнений ориентации околокруговой орбиты космического аппарата // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 97–105. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-97-105>

References

1. Chelnokov Yu. N. Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. I. *Cosmic Research*, 1992, vol. 30, no. 6, pp. 612–621.
2. Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Solution of a problem of spacecraft's orbit optimal reorientation using quaternion equations of orbital system of coordinates orientation. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2013, vol. 13, iss. 1, pt. 1, pp. 84–92 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-1-1-84-92>
3. Branets V. N., Shmyglevskii I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* [Use of Quaternions in the Problems of Orientation of Solid Bodies]. Moscow, Nauka, 1973. 320 p. (in Russian).
4. Zubov V. I. *Analiticheskaya dinamika giroskopicheskikh sistem* [Analytical Dynamics of Gyroscopic Systems]. Leningrad, Sudostroenie, 1970. 317 p. (in Russian).
5. Molodenkov A. V. On the solution of the Darboux problem. *Mechanics of Solids*, 2007, vol. 42, no. 2, pp. 167–176. <https://doi.org/10.3103/S002565440702001X>
6. Pontriagin L. S., Boltianskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [The Mathematical Theory of Optimal Processes]. Moscow, Nauka, 1983. 393 p. (in Russian).
7. Chelnokov Yu. N. Optimal reorientation of a spacecraft's orbit using a jet thrust orthogonal to the orbital plane. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, iss. 6, pp. 646–657. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.02.002>
8. Chelnokov Yu. N. On determining vehicle orientation in the Rodrigues – Hamilton parameters from its angular velocity. *Mechanics of Solids*, 1977, vol. 37, no. 3, pp. 8–16.
9. Zienkiewicz O., Morgan K. *Finite Elements and Approximation*. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, John Wiley and Sons, 1983. 328 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1986. 318 p.).
10. Connor J. J., Brebbia C. A. *Finite Element Techniques for Fluid Flow*. London, Boston, Newnes-Butterworths, 1977. 310 p. (Russ. ed.: Leningrad, Sudostroenie, 1979. 264 p.).
11. Dirac P. A. M. *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford, Clarendon Press, 1967. 324 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1979. 408 p.).
12. Moiseev N. N. *Chislennyye metody v teorii optimal'nykh sistem* [Numerical Methods in the Theory of Optimal Systems]. Moscow, Nauka, 1971, 424 p. (in Russian).
13. Pankratov I. A. Analytical solution of equations of near-circular spacecraft's orbit orientation. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, iss. 1, pp. 97–105 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-97-105>

Поступила в редакцию / Received 24.08.2020

Принята к публикации / Accepted 07.10.2020

Опубликована / Published 31.05.2021



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 202–212
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 202–212

Научная статья

УДК 531.13

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-202-212>

Искусственные точки либрации в задаче буксировки космического мусора ионным потоком

В. Г. Петухов¹, В. В. Рязанов²✉

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4

²Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, Россия, 443086, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Петухов Вячеслав Георгиевич, доктор технических наук, первый заместитель директора Научно-исследовательского института прикладной механики и электродинамики МАИ, vgpetukhov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9966-5488>

Рязанов Владимир Владимирович, аспирант, инженер кафедры теоретической механики, rvv345@inbox.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3890-0472>

Аннотация. Работа посвящена проблеме буксировки космического мусора с геостационарной орбиты до орбиты захоронения бесконтактным способом с помощью ионного потока, создаваемого двигателем активного космического аппарата. Для плоского случая с помощью модифицированной задачи Хилла определены точки относительного равновесия (точки либрации) активного космического аппарата относительно объекта увода и произведена оценка их устойчивости. Показано, что в зависимости от значений радиального ускорения существует до 6 точек либрации, но лишь одна точка пригодна для буксировки объекта космического мусора. Определено необходимое количество топлива при различных значениях тяги и удельного импульса компенсирующего двигателя активного космического аппарата при одновременной работе электрореактивных двигателей. Полученные результаты можно использовать при стабилизации относительного движения активного космического аппарата и определении необходимого количества топлива для миссии увода объекта космического мусора.

Ключевые слова: космический мусор, бесконтактный способ, устойчивость, точка либрации

Благодарности: Работа выполнена при государственной поддержке научных исследований под руководством ученых в российских вузах и государственных исследовательских центрах Российской Федерации (7 этап, постановление Правительства РФ № 220 от 09 апреля 2010 г.), контракт № 075-15-2019-1894 от 03.12.2019.

Для цитирования: Петухов В. Г., Рязанов В. В. Искусственные точки либрации в задаче буксировки космического мусора ионным потоком // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 202–212. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-202-212>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)



Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-202-212>

Artificial libration points in the task of towing space debris by an ion beam

V. G. Petukhov¹, V. V. Riazanov²✉

¹Moscow Aviation Institute, 4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russia

²Samara National Research University, 34 Moskovskoye shosse, Samara 443086, Russia

Viacheslav G. Petukhov, vgpetukhov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9966-5488>

Vladimir V. Riazanov, rvv345@inbox.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3890-0472>

Abstract. The work is devoted to the problem of towing space debris from a geostationary orbit to a graveyard orbit by a non-contact method using an ion beam created by the engine of an active spacecraft. For the planar case using the modified Hill task, the points of relative equilibrium (libration points) of the active spacecraft relative to the object of removal are determined and their stability is estimated. It is shown that, depending on the values of radial acceleration, there are up to 6 libration points, but only one point is suitable for towing a space debris object. The required amount of fuel was determined for different values of thrust and specific impulse of the active spacecraft compensating engine during simultaneous operation of electric propulsion thrusters. The results can be used to stabilize the relative motion of the active spacecraft and determine the required amount of fuel for the mission to remove space debris.

Keywords: space debris, noncontact method, stability, libration point

Acknowledgements: This work was supported by the state of scientific research led by scientists at Russian universities and state research centers of the Russian Federation (Stage 7, RF Government Resolution № 220 from April 9, 2010), contract No. 075-15-2019-1894 dated December 3, 2019.

For citation: Petukhov V. G., Riazanov V. V. Artificial libration points in the task of towing space debris by an ion beam. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 202–212 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-202-212>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Введение

Космический мусор представляет серьезную угрозу для функционирования космических аппаратов (КА). При столкновении с космическим мусором может произойти выход КА из строя. При взаимном столкновении объектов на орбите происходит образование нового, более мелкого мусора, что со временем приведет к неконтролируемому росту объектов космического мусора на орбите. Согласно исследованию D. J. Kessler [1], игнорирование проблемы засоренности орбиты сделает невозможным использование околоземного космического пространства.

Предложены различные варианты увода космического мусора [2, 3], которые можно разделить на два вида: контактный и бесконтактный. При контактном способе происходит взаимодействие с объектом удаления с помощью вспомогательных устройств, таких как гарпун [4, 5], сеть [6], механические манипуляторы [7]. К бесконтактным способам относят удаление с помощью кулоновского взаимодействия [8], внешнего ионного потока [9], лазерных установок [10], пены [11].



В статье рассматривается очистка околоземного космического пространства бесконтактным способом с помощью активного КА, оборудованного двумя электрореактивными двигателями: ионной пушкой и компенсирующим двигателем. С помощью потока ионов, испускаемого ионной пушкой, происходит взаимодействие с объектом космического мусора, с помощью компенсирующего двигателя происходит управление системой «активный КА — космический мусор» (рис. 1).

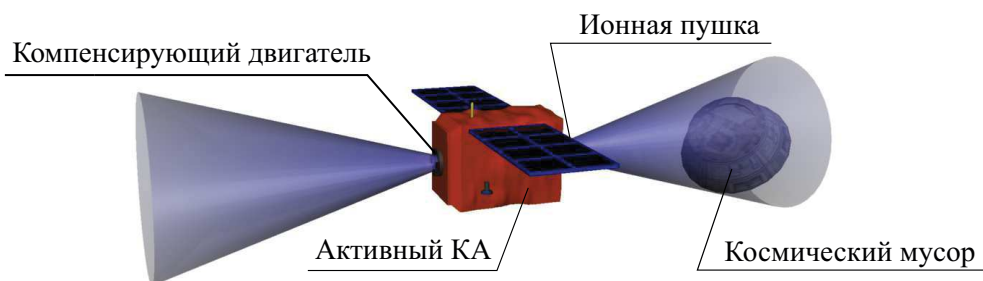


Рис. 1. Схема удаления космического мусора с помощью ионного потока (цвет online)
Fig. 1. The scheme for removing space debris using an ion beam (color online)

В зависимости от расстояния от сопла ионной пушки до объекта увода возможно частичное или полное покрытие ионным потоком объекта космического мусора. В статье рассматривается вариант полного нахождения объекта увода внутри ионного потока, так как в этом случае задача буксировки легче реализуема в части отслеживания попадания ионного потока на объект космического мусора, коррекции положения активного КА относительно космического мусора, определения силы от ионного потока, например, с помощью аэродинамических характеристик объекта увода [12]. Одной из проблемных задач буксировки является стабилизация относительного движения активного КА и объекта космического мусора при полном покрытии ионного потока объекта космического мусора. Целью работы являются определение точки относительного равновесия (точки либрации) активного КА относительно объекта увода и оценка ее устойчивости. Для буксировки космического мусора с геостационарной орбиты до орбиты захоронения определяется необходимое количество топлива при одновременной работе ионной пушки и компенсирующего двигателя. Предполагается, что до начала этапа буксировки произошла стабилизация движения активного КА и уводимый объект космического мусора полностью находится внутри ионного потока, исходящего из ионной пушки [13].

1. Математические модели

В данном разделе описан метод нахождения точки относительного равновесия активного КА относительно объекта космического мусора для плоской задачи и получена оценка ее устойчивости с помощью рассмотрения модифицированной задачи Хилла. Выведена формула определения необходимого количества топлива на этапе буксировки космического мусора при одновременной работе ионной пушки и компенсирующего двигателя.

1.1. Определение точки либрации

Для выявления основных качественных особенностей задачи примем следующие упрощающие предположения:

- 1) форма удаляемого объекта космического мусора близка к сфере;



2) взаимодействие корпускул ионного потока с удаляемым объектом космического мусора происходит по схеме абсолютно неупругого соударения;

3) угол полураствора ионного потока постоянен во всем диапазоне рассматриваемых расстояний между активным КА и удаляемым объектом;

4) активный КА отслеживает направление на удаляемый объект с помощью разворотов вокруг центра масс так, что ось ионного потока всегда направлена на объект космического мусора;

5) величины тяги ионной пушки и компенсирующего двигателя не меняются на всем этапе увода космического мусора;

6) изменение массы активного КА и объекта космического мусора в процессе удаления мало, и им можно пренебречь;

7) рассматривается движение системы в центральном гравитационном поле, внешние возмущающие ускорения не учитываются;

8) расстояние между активным КА и удаляемым объектом мало по сравнению со средним радиусом их орбиты.

При принятых допущениях сила воздействия ионного потока на объект космического мусора постоянна, если расстояние между активным КА и удаляемым объектом меньше некоторого минимального, и изменяется обратно пропорционально квадрату этого расстояния, если оно больше минимального.

На рис. 2 показана зависимость минимального расстояния d_{\min} до объекта космического мусора при различных значениях угла полураствора ионного потока, при котором транспортируемый объект космического мусора целиком находится внутри ионного потока, исходящего из ионной пушки.

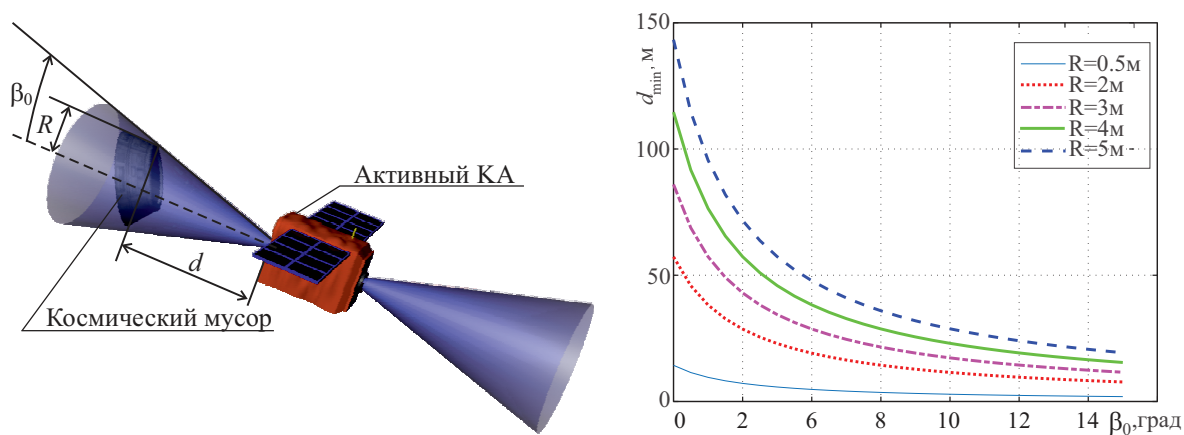


Рис. 2. Зависимость минимального расстояния до объекта космического мусора при различных значениях угла полураствора ионного потока (цвет online)

Fig. 2. The dependence of the minimum distance to the space debris object at different values of the half-angle of the ion beam (color online)

С увеличением размера космического мусора R , при фиксированном значении угла полураствора ионного потока, происходит увеличение минимального расстояния до объекта удаления. Максимальное значение передаваемой силы достигается при полном перекрытии ионного потока удаляемым объектом космического мусора.

Введем орбитальную систему координат относительно заданной точки опорной орбиты (рис. 3). Ось Ox направлена вдоль радиус-вектора к Земле, ось Oy против направления движения.

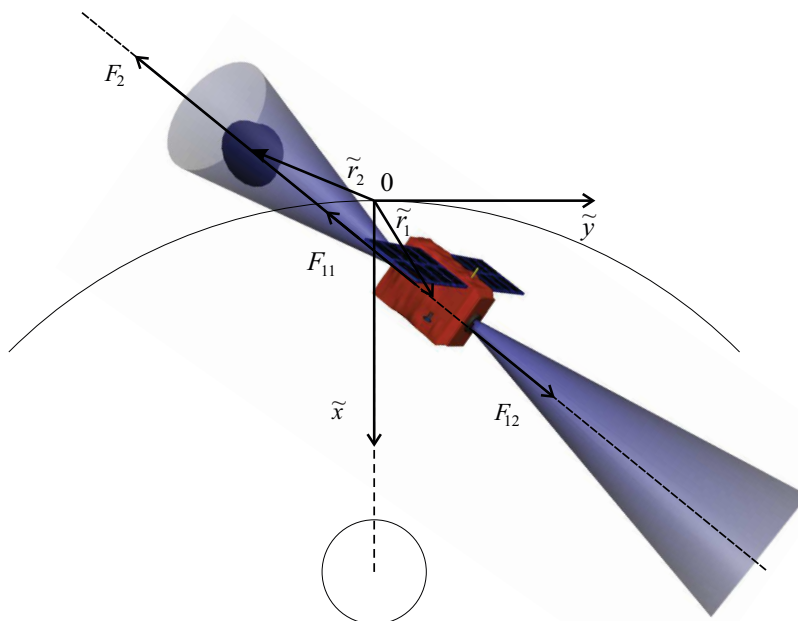


Рис. 3. Орбитальная система координат и силы, действующие на активный КА (цвет online)
 Fig. 3. The orbital coordinate system and forces acting on an active spacecraft (color online)

Уравнение движения в данном случае будут иметь вид [14]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{x}_1}{dt'^2} - 2\omega \frac{d\tilde{y}_1}{dt'} - 3\tilde{x}_1\omega^2 &= \tilde{a}_{1x}, & \frac{d^2 \tilde{y}_1}{dt'^2} + 2\omega \frac{d\tilde{x}_1}{dt'} &= \tilde{a}_{1y}, \\ \frac{d^2 \tilde{x}_2}{dt'^2} - 2\omega \frac{d\tilde{y}_2}{dt'} - 3\tilde{x}_2\omega^2 &= \tilde{a}_{2x}, & \frac{d^2 \tilde{y}_2}{dt'^2} + 2\omega \frac{d\tilde{x}_2}{dt'} &= \tilde{a}_{2y}. \end{aligned} \quad (1)$$

где \tilde{a}_x, \tilde{a}_y — проекции управляющих и возмущающих ускорений на оси орбитальной системы координат, $\tilde{r}_1 = \begin{Bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{y}_1 \end{Bmatrix}$ и $\tilde{r}_2 = \begin{Bmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{y}_2 \end{Bmatrix}$ — удаление активного КА и космического мусора от заданной точки опорной орбиты, t' — время, ω — угловая скорость движения опорной точки по заданной круговой орбите.

Введем безразмерные переменные с единицей времени $t = 1/\omega$ и единицей длины $l = (\mu/\omega^2)^{1/3}$, где $\mu = F_{12}d_{\min}^2/m_4$ (F_{12} — тяга ионной пушки, m_4 — масса космического мусора, при этом вектор реактивного ускорения, которое действует на космический мусор, равен $-\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}$). Введя обозначения $\tilde{r} = \begin{Bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{Bmatrix} = \tilde{r}_1 - \tilde{r}_2$, $\tilde{a} = \begin{Bmatrix} \tilde{a}_x \\ \tilde{a}_y \end{Bmatrix} = \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2$ и вычитая из первой системы уравнений (1) вторую, после перехода к безразмерным величинам получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 3x = a_{cx} + \frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = a_{cy} + \frac{y}{r^3}. \quad (2)$$

При $a_{cx} = a_{cy} = 0$ система (2) представляет собой уравнения задачи Хилла, в которой сила притяжения между пассивно-гравитирующим телом (активным КА) и притягивающим телом малой массы (объектом космического мусора) заменена на равную по величине, но обратную по направлению силу (силу отталкивания). При рассматриваемой схеме компенсации силы тяги ионного источника $a_{cx} = a_r \frac{x}{r}$, $a_{cy} = a_r \frac{y}{r}$, причем $a_r = \frac{F_{11} - F_{12}}{m_1} \frac{t^2}{l}$, где F_{11} — тяга компенсирующего двигателя, m_1 —



масса активного КА. При радиальном ускорении $a_r = \text{const}$ систему (2) можно переписать:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} = \Omega_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = \Omega_y,$$

где $\Omega = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{r} + a_r$ — силовая функция рассматриваемой задачи, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Первый интеграл будет иметь вид

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\Omega + H,$$

где H — произвольная постоянная. Этот интеграл определяет область возможного движения активного КА неравенством $2\Omega + H \geq 0$.

На рис. 4, 5 показаны изолинии силовой функции Ω при различных значениях радиального ускорения a_r . При достаточно малых значениях a_r в модифицированной задаче Хилла появляются две неустойчивые точки либрации на оси Oy с координатами $(0; \pm|a_r|^{-1/2})$ (рис. 4, б, в).

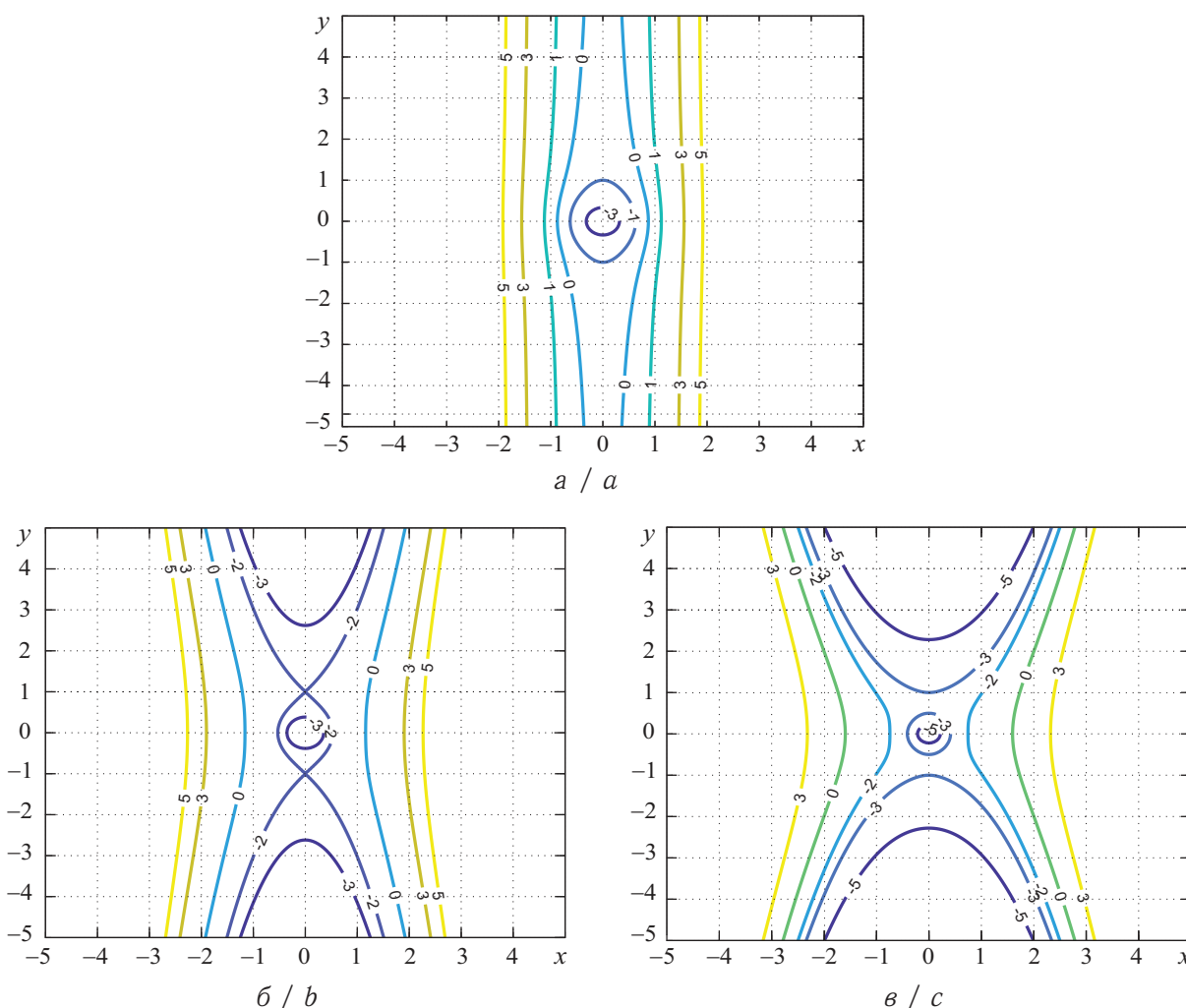


Рис. 4. Изолинии силовой функции Ω при $a_r = 0$ (а), $a_r = -1$ (б), $a_r = -2$ (в) (цвет online)
 Fig. 4. The isolines of the force function Ω for $a_r = 0$ (a), $a_r = -1$ (b), $a_r = -2$ (c) (color online)



С увеличением абсолютной величины a_r происходит перестраивание топологии кривых нулевой скорости, появляются две неустойчивые коллинеарные точки либрации на Ox (рис. 5, а), каждая из которых при дальнейшем росте a_r расщепляется на пару коллинеарных точек либрации (устойчивую и неустойчивую). При критическом значении $a_r = 4,68$ (рис. 5, б) происходит перецепление сепаратрис, проходящих через неустойчивые точки либрации.

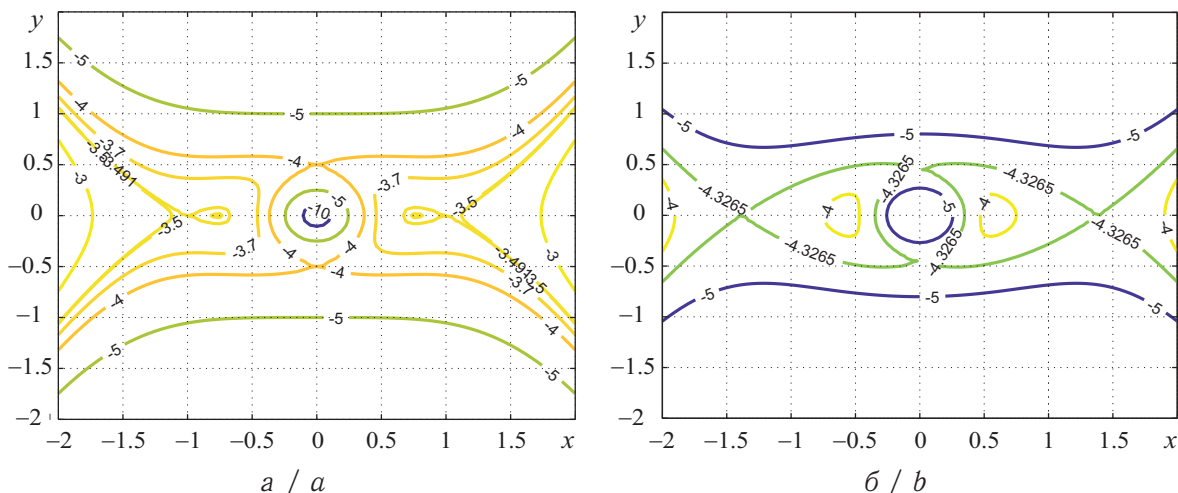


Рис. 5. Изолинии силовой функции Ω при $a_r = -4$ (а), $a_r = -4,68$ (б) (цвет online)
 Fig. 5. The isolines of the force function Ω for $a_r = -4$ (a), $a_r = -4,68$ (b) (color online)

Таким образом, в зависимости от значений радиального ускорения a_r существует до 6 точек либрации, но лишь точка с координатами $(0; \pm|a_r|^{-1/2})$ пригодна для буксировки объекта космического мусора.

1.2. Определение необходимого количества топлива

Для определения количества топлива m_3 , необходимого для буксировки космического мусора с геостационарной орбиты до орбиты захоронения ($\Delta h = 200$ км), воспользуемся [14]:

$$m_3 = m_1 \left[1 - \exp\left(\frac{-\Delta v}{J_2 g_0}\right) \right], \tag{3}$$

где g_0 — ускорение свободного падения над средним уровнем моря, m_1 — масса активного КА, $J_2 = \frac{F_2}{g_0 \dot{m}_2}$ — удельный импульс активного КА при работе компенсирующего двигателя и ионной пушки, Δv — разница между начальной и конечной орбитальной скоростью:

$$\Delta v = \sqrt{\frac{\mu}{h_0}} - \sqrt{\frac{\mu}{h_k}},$$

где μ — гравитационный параметр, h_0 — высота геостационарной орбиты, $h_k = h_0 + \Delta h$ км — высота орбиты захоронения.

Массовый расход топлива \dot{m}_2 активного КА будет равен сумме массового расхода топлива компенсирующего двигателя \dot{m}_{11} и ионной пушки \dot{m}_{12} активного КА:

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_{11} + \dot{m}_{12} = \frac{1}{g_0} \left(\frac{F_{11}}{J_{11}} + \frac{F_{12}}{J_{12}} \right), \tag{4}$$



где J_{11} , F_{11} — удельный импульс и тяга компенсирующего двигателя, F_{12} , J_{12} — удельный импульс и тяга ионной пушки.

Суммарная тяга F_2 , действующая на КА при работе компенсирующего двигателя и ионной пушки:

$$F_2 = F_{11} - F_{12}. \quad (5)$$

С учетом (4), (5) выражение (3) примет вид

$$m_3 = m_1 \left[1 - \exp \left(\frac{-\Delta v}{g_0 (F_{11} - F_{12})} \left(\frac{F_{11}}{J_{11}} + \frac{F_{12}}{J_{12}} \right) \right) \right]. \quad (6)$$

Выражение (6) позволяет определить необходимое количество топлива на этапе буксировки космического мусора при одновременно работающими компенсирующем двигателе и ионной пушке. Время буксировки объекта космического мусора до геостационарной орбиты составит

$$t = \frac{m_3}{\dot{m}_2}. \quad (7)$$

2. Результаты численного моделирования

Рассмотрим буксировку космического мусора с геостационарной орбиты до орбиты захоронения. Предполагается, что на этапе буксировки объекта космического мусора работают компенсирующий двигатель и ионная пушка. Масса активного КА составляет $m_1 = 1500$ кг. Удельный импульс и тяга компенсирующего двигателя равны $J_{11} = 2800$ с, $F_{11} = 170 \cdot 10^{-3}$ Н, значения импульса и тяги ионной пушки равны $J_{12} = 1500$ с, $F_{12} = 100 \cdot 10^{-3}$ Н соответственно.

С учетом (6), (7) необходимое количество топлива — $m_3 \sim 2$ кг, время буксировки — $t \sim 43$ ч. Расход топлива и время буксировки при различных значениях удельного импульса и тяги компенсирующего двигателя при фиксированных значениях соответствующих величин ионной пушки показаны на рис. 6. С уменьшением тяги и уменьшением импульса компенсирующего двигателя расход топлива увеличивается. При выбранном диапазоне удельного импульса и тяги потребуется минимальное количество топлива $m_3 = 0.64$ кг при $J_{11} = 4500$ с, $F_{11} = 350 \cdot 10^{-3}$ Н.

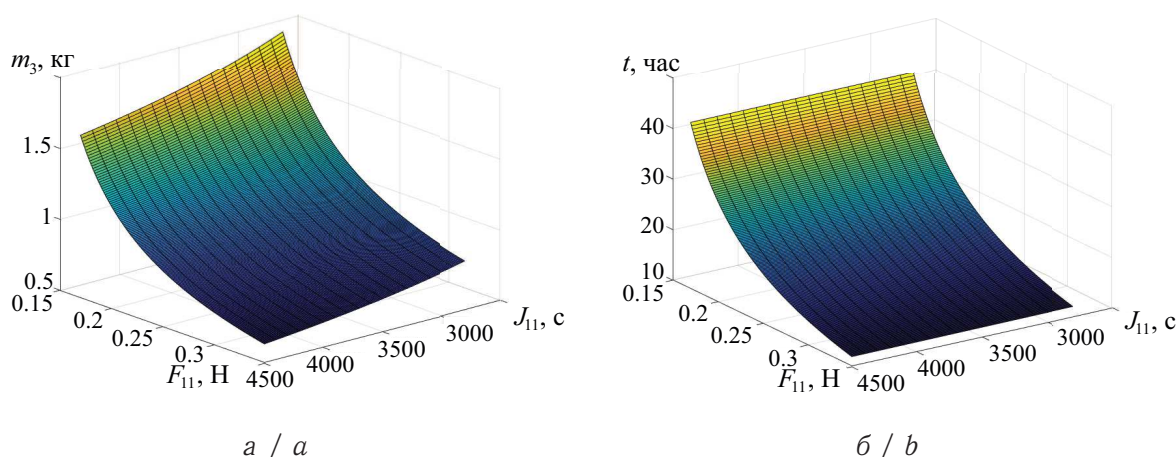


Рис. 6. Расход топлива (а) и время буксировки (б) при различных значениях тяги и удельного импульса компенсирующего двигателя (цвет online)

Fig. 6. Fuel consumption (a) and towing time (b) at different values of thrust and specific impulse of the compensating engine (color online)

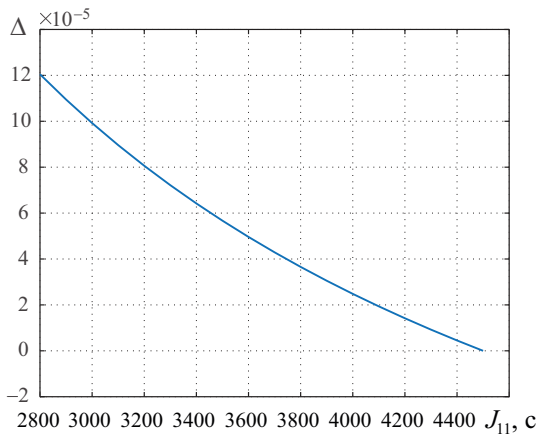


Рис. 7. Зависимость величины Δ при различных значениях J_{11}

Fig. 7. The dependence of the value Δ for different values of J_{11}

неустойчива, поэтому для стабилизации относительного движения активного КА необходима периодическая коррекция относительного положения КА.

Определено количество топлива, необходимое для буксировки космического мусора. Показано, что на расход и время буксировки космического мусора влияет тяга компенсирующего двигателя и почти не влияет удельный импульс. При выбранном диапазоне удельного импульса и тяги минимальное количество топлива $m_3 = 0.64$ кг потребуется при $J_{11} = 4500$ с, $F_{11} = 350 \cdot 10^{-3}$ Н.

Результаты работы могут быть использованы при отработке технологии буксировки космического мусора бесконтактным способом и при проектировании активного КА.

Увеличение удельного импульса компенсирующего двигателя с 2800 с до 4500 с при $F_{11} = 170 \cdot 10^{-3}$ Н не приводит к изменению времени буксировки, так как максимальное значение величины $\Delta = \frac{t_2 - t_1}{t_2} = 1.2 \cdot 10^{-4}$ (рис. 7), где t_2, t_1 — время буксировки при $J_{11} = 4500$ с и $J_{11} \in [2800; 4500]$ с соответственно.

Вывод

В статье рассмотрена задача нахождения точки либрации активного КА относительно объекта космического мусора. Показано, что существует единственная точка с координатами $(0; \pm|a_r|^{-1/2})$, пригодная для буксировки объекта удаления на орбиту захоронения. Точка $(0; \pm|a_r|^{-1/2})$

Список литературы

1. Kessler D. J., Cour-Palais B. G. Collision frequency of artificial satellites: The creation of a debris belt // Journal of Geophysical Research. Space Physics. 1978. Vol. 83, iss. A6. P. 2637–2646. <https://doi.org/10.1029/JA083iA06p02637>
2. Shan M., Guo J., Gill E. Review and comparison of active space debris capturing and removal methods // Progress in Aerospace Sciences. 2016. Vol. 80. P. 18–32. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2015.11.001>
3. Пикалов Р. С., Юдинцев В. В. Обзор и выбор средств увода крупногабаритного космического мусора // Электронный журнал «Труды МАИ». 2018. № 100. URL: https://trudymai.ru/upload/iblock/239/Pikalov_YUdintsev_rus.pdf (дата обращения: 01.05.2020).
4. Сизов Д. А., Асланов В. С. Способ захвата космического мусора, обеспечивающий его безопасную тросовую буксировку // Электронный журнал «Труды МАИ». 2019. № 109. URL: https://trudymai.ru/upload/iblock/b9a/Sizov_Aslanov_rus.pdf (дата обращения: 01.05.2020). <https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-1>
5. Forshaw J. L., Aglietti G. S., Salmon T., Retat I., Roe M., Burgess C., Chabot T., Pisseloup A., Phipps A., Bernal C., Chaumette F., Pollini A., Steyn W. H. Final payload test results for the Remove Debris active debris removal mission // Acta Astronautica. 2017. Vol. 138. P. 326–342. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2017.06.003>
6. Sharf I., Thomsen B., Botta E. M., Misra A. K. Experiments and simulation of a net closing mechanism for tether-net capture of space debris // Acta Astronautica. 2017. Vol. 139. P. 332–343. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2017.07.026>



7. Larouche B. P., Zhu Z. H. Autonomous robotic capture of non-cooperative target using visual servoing and motion predictive control // *Autonomous Robots*. 2014. Vol. 37, iss. 2. P. 157–167. <https://doi.org/10.1007/s10514-014-9383-2>
8. Aslanov V., Yudin V. Motion control of space tug during debris removal by a coulomb force // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 2018. Vol. 41, no. 7. P. 1476–1484. <https://doi.org/10.2514/1.G003251>
9. Merino M., Ahedo E., Bombardelli C., Urrutxua H., Pelaez J. Ion beam shepherd satellite for space debris removal // *Progress in Propulsion Physics*. 2013. Vol. 4. P. 789–802. <https://doi.org/10.1051/eucass/201304789>
10. Ашурбейли И. Р., Лаговьер А. И., Игнатьев А. Б., Назаренко А. В. Возможности использования авиационной лазерной системы для борьбы с космическим мусором и поддержания орбит космического аппарата // *Электронный журнал «Труды МАИ»*. 2011. № 43. URL: <https://trudymai.ru/upload/iblock/e6e/vozmozhnosti-ispolzovaniya-aviatsionnoy-lazernoy-sistemy-dlya-borby-s-kosmicheskim-musorom-i-podderzhaniya-orbit-kosmicheskogo-apparata.pdf> (дата обращения: 01.05.2020).
11. Andrenucci M., Pergola P., Ruggiero A. Active removal of space debris-expanding foam application for active debris removal. Pisa : Esa Final Report, 2011. 132 p. URL: https://www.esa.int/gsp/ACT/doc/ARI/ARI%20Study%20Report/ACT-RPT-MAD-ARI-10-6411-Pisa-Active_Removal_of_Space_Debris-Foam.pdf (дата обращения: 21.05.2018).
12. Рязанов В. В., Ледков А. С. Увод наноспутника с низкой орбиты с помощью ионного потока // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика*. 2019. Т. 19, вып. 1. С. 82–93. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-82-93>
13. Рязанов В. В. Управление движением космического аппарата при бесконтактном уводе космического мусора // *Электронный журнал «Труды МАИ»*. 2019. № 7. URL: https://trudymai.ru/upload/iblock/5c7/Ryazanov_rus.pdf (дата обращения: 01.05.2020).
14. Kluever C. A. *Space Flight Dynamics*. Hoboken, NJ : John Wiley & Sons, 2018. 584 p.

References

1. Kessler D. J., Cour-Palais B. G. Collision frequency of artificial satellites: The creation of a debris belt. *Journal of Geophysical Research. Space Physics*, 1978, vol. 83, iss. A6, pp. 2637–2646. <https://doi.org/10.1029/JA083iA06p02637>
2. Shan M., Guo J., Gill E. Review and comparison of active space debris capturing and removal methods. *Progress in Aerospace Sciences*, 2016, vol. 80, pp. 18–32. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2015.11.001>
3. Pikalov R. S., Iudin V. V. Bulky space debris removal means review and selection. *Electronic journal "Trudy MAI"*, 2018, no. 100 (in Russian). Available at: http://trudymai.ru/upload/iblock/239/Pikalov_YUdintsev_rus.pdf (accessed 1 May 2020).
4. Sizov D. A., Aslanov V. S. Space debris capturing technique ensuring its safe tether-assisted towing. *Electronic journal "Trudy MAI"*, 2019, no. 109 (in Russian). Available at: http://trudymai.ru/upload/iblock/b9a/Sizov_Aslanov_rus.pdf (accessed 1 May 2020). <https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-1>
5. Forshaw J. L., Aglietti G. S., Salmon T., Retat I., Roe M., Burgess C., Chabot T., Pisseloup A., Phipps A., Bernal C., Chaumette F., Pollini A., Steyn W. H. Final payload test results for the Remove Debris active debris removal mission. *Acta Astronautica*, 2017, vol. 138, pp. 326–342. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2017.06.003>
6. Sharf I., Thomsen B., Botta E. M., Misra A. K. Experiments and simulation of a net closing mechanism for tether-net capture of space debris. *Acta Astronautica*, 2017, vol. 139, pp. 332–343. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2017.07.026>



7. Larouche B. P., Zhu Z. H. Autonomous robotic capture of non-cooperative target using visual servoing and motion predictive control. *Autonomous Robots*, 2014, vol. 37, iss. 2, pp. 157–167. <https://doi.org/10.1007/s10514-014-9383-2>
8. Aslanov V., Yudinsev V. Motion Control of Space Tug During Debris Removal by a Coulomb Force. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2018, vol. 41, no. 7, pp. 1476–1484. <https://doi.org/10.2514/1.G003251>
9. Merino M., Ahedo E., Bombardelli C., Urrutxua H., Pelaez J. Ion beam shepherd satellite for space debris removal. *Progress in Propulsion Physics*, 2013, vol. 4, pp. 789–802. <https://doi.org/10.1051/eucass/201304789>
10. Ashurbeili I. R., Lagovier A. I., Ignat'ev A. B., Nazarenko A. V. Possibilities of using an aviation laser system to combat space debris and maintain spacecraft orbits. *Electronic journal "Trudy MAI"*, 2011, no. 43 (in Russian). Available at: <http://trudymai.ru/upload/iblock/e6e/vozmozhnosti-ispolzovaniya-aviatsionnoy-lazernoy-sistemy-dlya-borby-s-kosmicheskimi-musorom-i-podderzhaniya-orbit-kosmicheskogo-apparata.pdf> (accessed 1 May 2020).
11. Andrenucci M., Pergola P., Ruggiero A. *Active removal of space debris-expanding foam application for active debris removal*. Piza, Esa Final Report, 2011. 132 p. Available at: https://www.esa.int/gsp/ACT/doc/ARI/ARI%20Study%20Report/ACT-RPT-MAD-ARI-10-6411-Pisa-Active_Removal_of_Space_Debris-Foam.pdf (accessed 21 May 2018).
12. Ryazanov V. V., Ledkov A. S. Descent of nanosatellite from low earth orbit by ion beam. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, vol. 19, iss. 1, pp. 82–93 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-82-93>
13. Riazanov V. V. Spacecraft motion control while contactless space debris removal. *Electronic journal "Trudy MAI"*, 2019, no. 7 (in Russian). Available at: https://trudymai.ru/upload/iblock/5c7/Ryazanov_rus.pdf (accessed 1 May 2020).
14. Kluever C. A. *Space Flight Dynamics*. Hoboken, NJ, John Wiley & Sons, 2018. 584 p.

Поступила в редакцию / Received 17.07.2020

Принята к публикации / Accepted 04.02.2021

Опубликована / Published 31.05.2021



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 213–226
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 213–226

Научная статья

УДК 629.78

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-213-226>

Аналитический алгоритм квазиоптимального по энергии и времени разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях

Я. Г. Сапунков, А. В. Молоденков[✉]

Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24

Сапунков Яков Григорьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением, <https://orcid.org/0000-0001-7149-5117>

Молоденков Алексей Владимирович, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением, molalexei@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9040-8506>

Аннотация. В кватернионной постановке рассматривается классическая задача оптимального управления пространственной переориентацией космического аппарата как твердого тела с одной осью симметрии при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости космического аппарата без ограничения на вектор-функцию управления. В качестве критерия оптимальности используется комбинированный функционал, который объединяет время и энергию, затраченные на разворот космического аппарата. Используя взаимно-однозначные замены переменных, исходная задача упрощается (в смысле динамических уравнений Эйлера) до задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс. Упрощенная задача содержит одно дополнительное скалярное дифференциальное уравнение. В классе обобщенных конических движений эта задача модифицируется для получения аналитических решений уравнений движения. Решения содержат произвольные константы и две произвольные скалярные функции (обобщенные параметры конического движения). Предлагаемый подход хорошо согласуется с концепцией Пуансо, что всякое произвольное угловое движение твердого тела вокруг неподвижной точки можно рассматривать как некоторое обобщенное коническое движение твердого тела. При этом для случаев аналитической разрешимости классической задачи оптимального разворота сферически-симметричного космического аппарата, когда наложены ограничения на краевые условия задачи — плоский эйлеров разворот, коническое движение, — решения классической и модифицированной задач полностью совпадают. Сформулирована и решена оптимизационная задача относительно параметров конического движения, вторые производные которых являются управлениями. Полученное аналитическое решение модифицированной задачи можно рассматривать как приближенное (квазиоптимальное) решение традиционной задачи оптимального разворота при произвольных граничных условиях. Дается квазиоптимальный алгоритм оптимального разворота космического аппарата. Приведен числовой пример, показывающий близость решений традиционной и модифицированной задач оптимального разворота осесимметричного космического аппарата.

Ключевые слова: квазиоптимальное управление, разворот, космический аппарат, осесимметричное твердое тело, произвольные граничные условия



Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00205).

Для цитирования: Сапунков Я. Г., Молоденков А. В. Аналитический алгоритм квазиоптимального по энергии и времени разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 213–226. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-213-226>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-213-226>

Analytical algorithm of energy and time quasioptimal turn of a spacecraft under arbitrary boundary conditions

Ya. G. Sapunkov, A. V. Molodenkov[✉]

Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia

Yakov G. Sapunkov, <https://orcid.org/0000-0001-7149-5117>

Alexei V. Molodenkov, molalexei@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9040-8506>

Abstract. The optimal attitude maneuver control problem without control constraints is studied in the quaternion statement for an axially symmetric spacecraft as a rigid body under arbitrary boundary conditions on angular position and angular velocity of a spacecraft. The performance criterion is given by a functional combining the time and energy used for the attitude maneuver. Using substitutions of variables, the original problem is simplified (in terms of dynamic Euler equations) to the optimal slew problem for a rigid body with a spherical mass distribution. The simplified problem contains one additional scalar differential equation. In the class of generalized conical motions, the traditional optimal slew problem is modified to obtain analytical solutions for motion equations. The solutions contain arbitrary constants and two arbitrary scalar functions (generalized conical motion parameters). The proposed approach fits well with the Poinsoit concept that any arbitrary angular motion of a rigid body around a fixed point can be considered as some generalized conical motion of a rigid body. Moreover, for the cases of analytic solvability of the classical problem of optimal reversal spherically symmetric spacecraft, when restrictions are imposed on the edge conditions of the problem (plane Euler turn, conical motion) solutions of the classical and modified tasks are completely the same. An optimization problem is formulated and solved with respect to these functions, the second derivatives of which serve as controls in the optimization problem. The resulting analytical solution of the modified problem can be treated as an approximate (quasioptimal) solution of the traditional optimal slew problem under arbitrary boundary conditions. The quasioptimal algorithm of the optimal turn of a spacecraft is given. Numerical example showing the closeness of the solutions of the traditional and modified optimal slew problems for an axially symmetric spacecraft is given.

Keywords: quasioptimal control, attitude maneuver, spacecraft, axially symmetric rigid body, arbitrary boundary conditions

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-01-00205).



For citation: Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V. Analytical algorithm of energy and time quasioptimal turn of a spacecraft under arbitrary boundary conditions. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 213–226 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-213-226>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Введение

Явное аналитическое решение задачи оптимальной переориентации (оптимального разворота) космического аппарата (КА) для наиболее часто используемых функционалов оптимизации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА не найдено даже в случае сферической симметрии КА, не говоря уже о его произвольной динамической конфигурации. Известны лишь некоторые частные решения задачи (например, работы [1–8]); в общем случае приходится рассчитывать только на приближенные численные методы. Между тем явное аналитическое решение задачи оптимального разворота КА (твердого тела) имеет не только теоретический, но и большой практический интерес, так как позволяет использовать на борту КА готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории.

В статье рассматривается классическая задача оптимального разворота КА как твердого тела с одной осью симметрии при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА без ограничения на управление. В качестве критерия оптимальности используется комбинированный функционал, который объединяет время и энергию, затраченные на переориентацию КА. С помощью замен переменных исходная задача упрощается до задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс, содержащей одно дополнительное скалярное дифференциальное уравнение. В классе обобщенных конических движений произведена модификация классической задачи оптимального разворота, которая позволила получить явные аналитические решения для уравнений движения, содержащие произвольные постоянные и две произвольные скалярные функции (параметры обобщенного конического движения). Относительно этих функций и их производных формулируется и решается оптимизационная задача, в которой в качестве управлений выступают вторые производные от этих двух функций. Полученное аналитическое решение модифицированной задачи может рассматриваться как приближенное (квазиоптимальное) решение исходной задачи оптимального разворота КА. Следует отметить, что для случаев аналитической разрешимости классической задачи оптимального разворота при сферической симметрии КА, когда наложены ограничения на краевые условия задачи — плоский эйлеров разворот, коническое движение, — решения классической и модифицированной задач полностью совпадают [8]. Приводятся аналитический квазиоптимальный алгоритм и численные примеры, показывающие близость решений классической и модифицированной задач оптимальных разворотов КА при произвольных граничных условиях.

1. Постановка классической задачи

Движение КА как твердого тела с одной осью симметрии вокруг центра масс описывается дифференциальными уравнениями [1]:

$$2\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \circ \mathbf{w}, \quad (1)$$



$$I_1 \dot{w}_1 = M_1, \quad I_2 \dot{w}_2 = M_2 - (I_1 - I_2) w_1 w_3, \quad I_2 \dot{w}_3 = M_3 + (I_1 - I_2) w_1 w_2. \quad (2)$$

Здесь фазовыми координатами являются $\mathbf{L}(t)$ – нормированный кватернион поворота КА:

$$\mathbf{L}(t) = l_0(t) + l_1(t)i_1 + l_2(t)i_2 + l_3(t)i_3 = [l_0(t), l_1(t), l_2(t), l_3(t)]^T, \\ \|\mathbf{L}\| = l_0^2 + l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1,$$

где i_1, i_2, i_3 – орты гиперкомплексного пространства (мнимые единицы Гамильтона), которые можно идентифицировать с ортами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ жестко связанного с КА трехмерного векторного пространства, и $\mathbf{w}(t)$ – вектор угловой скорости КА:

$$\mathbf{w}(t) = w_1(t)\mathbf{i}_1 + w_2(t)\mathbf{i}_2 + w_3(t)\mathbf{i}_3 = [w_1(t), w_2(t), w_3(t)]^T,$$

причем символ “ \circ ” означает кватернионное умножение, а управление – вектор $\mathbf{M}(t)$ действующего на КА внешнего момента

$$\mathbf{M}(t) = M_1(t)\mathbf{i}_1 + M_2(t)\mathbf{i}_2 + M_3(t)\mathbf{i}_3 = [M_1(t), M_2(t), M_3(t)]^T.$$

Фазовые координаты и управление подчинены требованиям задачи понтрягинского типа ($\mathbf{L}(t), \mathbf{w}(t)$ – непрерывные функции, $\mathbf{M}(t)$ – кусочно-непрерывная функция). В динамических уравнениях Эйлера (2) для КА с одной осью симметрии (направленной в нашем случае вдоль орта \mathbf{i}_1 связанной с КА системы координат) I_1, I_2 – главные центральные моменты инерции твердого тела, $I_1, I_2 = \text{const} > 0$.

Заданы произвольные граничные условия по угловому положению

$$\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}_0, \quad \mathbf{L}(T) = \mathbf{L}_T \quad (3)$$

и угловой скорости КА

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0, \quad \mathbf{w}(T) = \mathbf{w}_T. \quad (4)$$

Требуется определить оптимальное управление $\mathbf{M}^{\text{опт}}(t)$ системой (1), (2) при условиях (3)–(4), доставляющее минимум функционалу

$$J = \int_0^T (1 + a \mathbf{M}^2) dt, \quad (5)$$

где $a = \text{const} > 0$, время T не задано. Функционал (5) представляет собой комбинацию двух критериев с размерным весовым множителем a : времени и энергии, затраченных на разворот КА.

2. Переход к безразмерным переменным

Перейдем от размерных переменных в задаче к безразмерным по формулам

$$I^{\text{масш}} = ((I_1^2 + 2I_2^2) / 3)^{1/2}, \quad I_k^{\text{безраз}} = I_k / I^{\text{масш}}, \quad k = 1, 2; \\ \mathbf{w}^{\text{безраз}} = (I^{\text{масш}})^{1/2} a^{1/4} \mathbf{w}, \quad t^{\text{безраз}} = (I^{\text{масш}})^{-1/2} a^{-1/4} t, \quad \mathbf{M}^{\text{безраз}} = a^{1/2} \mathbf{M}, \\ J^{\text{безраз}} = (I^{\text{масш}})^{-1/2} a^{-1/4} J,$$



при этом выражения (1)–(4) не изменятся, а критерий (5) примет вид

$$J = \int_0^T (1 + \mathbf{M}^2) dt. \quad (6)$$

Далее будем иметь в виду постановку задачи (1)–(4), (6) в безразмерных переменных и верхние индексы у них будут опущены. Таким образом, безразмерная задача явно не зависит от параметра a . Зависимость возникнет лишь при обратном переходе к размерным переменным.

3. Замены переменных в задаче с осевой симметрией КА

С целью упрощения (в отношении динамических уравнений Эйлера) задачи (1)–(4), (6) осуществим замены переменных, сводящие исходную задачу к задаче оптимального разворота КА со сферическим распределением масс, содержащей одно дополнительное скалярное дифференциальное уравнение. Для этого перепишем уравнения (2) в виде

$$\dot{w}_1 = m_1, \quad \dot{w}_2 = b_1 m_2 - b w_1 w_3, \quad \dot{w}_3 = b_1 m_3 - b w_1 w_2,$$

где $m_1 = M_1/I_1$, $m_2 = M_2/I_1$, $m_3 = M_3/I_1$, $b = (I_1 - I_2)/I_2$, $b_1 = I_1/I_2$.

Заменим переменные w_1, w_2, w_3 на новые $\omega_1, \omega_2, \omega_3$:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ 0 & \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Тогда получим для уравнений Эйлера (2) в кватернионной записи

$$\dot{\omega} = \tilde{\mathbf{B}} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \mathbf{B}, \quad (8)$$

$$\mathbf{B}(t) = \exp \{ \mathbf{i}_1 \theta(t) / 2 \}, \quad (9)$$

где « $\tilde{\cdot}$ » — сопряжение кватерниона, « $\exp \{ \cdot \}$ » — кватернионная экспонента, вектор $\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3]^T$,

$$\theta(t) = b_2 \int_0^t \omega_1(\tau) d\tau, \quad (10)$$

$b_2 = b b_1^{-1} = 1 - I_2/I_1 = 1 - b_1^{-1}$. Отметим, что $|\mathbf{B}(t)| = 1, \forall t$.

Кватернионное уравнение углового движения КА (1) при этом запишется так:

$$2\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \circ \mathbf{B} \circ (b_1^{-1} \omega_1 \mathbf{i}_1 + \omega_2 \mathbf{i}_2 + \omega_3 \mathbf{i}_3) \circ \tilde{\mathbf{B}}, \quad (11)$$

где кватернион \mathbf{B} определяется (9).

С учетом начального условия по угловой скорости КА (5) уравнение (8) можно переписать следующим образом:

$$\dot{\omega} = \tilde{\beta} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \beta, \quad (12)$$

$$\beta(t) = \exp \left\{ \mathbf{i}_1 b_2 \int_0^t \left(\int_0^\tau m_1(\xi) d\xi + w_{01} \right) d\tau / 2 \right\}. \quad (13)$$



Нелинейное выражение, стоящее в правой части (11) и зависящее только от переменных $m_k(t)$, $k = \overline{1, 3}$, примем за новое управление $\mathbf{u}(t)$:

$$\mathbf{u} = \tilde{\beta} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \beta, \quad (14)$$

где β определяется (13). Отметим, что $u_1(t) = b_1 m_1(t)$, и поэтому в замене переменных (14) всегда можно совершить обратный ход: по новой векторной переменной $\mathbf{u}(t)$ (когда она будет известна) восстановить управление $\mathbf{m}(t)$ задачи (1)–(4), (6).

Модуль вектора нового управления связан с модулем вектора управляющего момента КА так:

$$|\mathbf{u}| = |\tilde{\beta} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \beta| = b_1 |\tilde{\beta}| |\mathbf{m}| |\beta| = b_1 |\mathbf{m}| = b_1 |\mathbf{M}| / I_1 = |\mathbf{M}| / I_2.$$

Исходя из (11), осуществим еще одну замену переменных:

$$\mathbf{L} = \Lambda \circ \tilde{\mathbf{B}}, \quad (15)$$

где $\Lambda = \Lambda(t)$ — новая кватернионная переменная, описывающая угловое положение КА, при этом, так как $\|\mathbf{B}(t)\| = |\mathbf{B}(t)|^2 = 1, \forall t$, то $\|\mathbf{L}(t)\| = \|\Lambda(t)\| = 1, \forall t$.

С учетом всех указанных выше замен переменных задача оптимального разворота КА (1)–(4), (6) примет вид

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega, \quad (16)$$

$$\dot{\omega} = \mathbf{u}, \quad (17)$$

$$\dot{\theta} = b_2 \omega_1, \quad (18)$$

$$\theta(0) = 0, \quad (19)$$

$$\omega(0) = \omega_0 = b_1 w_{01} \mathbf{i}_1 + w_{02} \mathbf{i}_2 + w_{03} \mathbf{i}_3, \quad \Lambda(0) = \Lambda_0 = \mathbf{L}_0, \quad (20)$$

$$\omega(T) = \omega_T = \tilde{\mathbf{B}}(\theta(T)) \circ (b_1 w_{T1} \mathbf{i}_1 + w_{T2} \mathbf{i}_2 + w_{T3} \mathbf{i}_3) \circ \mathbf{B}(\theta(T)), \quad (21)$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_T = \mathbf{L}_T \circ \mathbf{B}(\theta(T)),$$

$$J = \int_0^T (1 + I_2^2 \mathbf{u}^2) dt \rightarrow \min, \quad (22)$$

где $w_{01}, w_{02}, w_{03}, w_{T1}, w_{T2}, w_{T3}$ — компоненты вектора угловой скорости КА $\mathbf{w}(t) = [w_1(t), w_2(t), w_3(t)]^T$ в начальный и конечный моменты времени соответственно, а кватернион $\mathbf{B}(\theta(T))$ определяется по формуле (9).

Согласно (15), (21), задачу (16)–(22) можно переформулировать так: в восьми-мерном фазовом пространстве $\Lambda \times \omega \times \theta$ управляемую систему (16)–(18) необходимо оптимально в смысле функционала (22) перевести из начального состояния (20), (21) на многообразии, которое определяется соотношениями

$$\text{vect}(\Lambda \circ \tilde{\mathbf{B}}(\theta) \circ \tilde{\mathbf{L}}_T) = 0, \quad \omega - \tilde{\mathbf{B}}(\theta) \circ (b_1 w_{T1} \mathbf{i}_1 + w_{T2} \mathbf{i}_2 + w_{T3} \mathbf{i}_3) \circ \mathbf{B}(\theta) = 0, \quad (23)$$

где «vect(\cdot)» обозначает векторную часть кватерниона.

Из этой задачи найдем оптимальное управление $\mathbf{u}^{\text{опт}}$ и траекторию $\Lambda^{\text{опт}}$, $\omega^{\text{опт}}$. Как видно, векторное дифференциальное уравнение (17) имеет структуру, соответствующую динамическим уравнениям Эйлера для сферически-симметричного твердого тела. Это существенно облегчает исследование задачи.

Далее будем рассматривать задачу (16)–(22) ((23)).



4. Модифицированная задача оптимального разворота КА

Одной из основных проблем при построении аналитического решения в задаче оптимального разворота твердого тела (КА) является разрешимость классической задачи Дарбу — аналитического определения кватерниона $\Lambda(t)$ из уравнения (16) при известных Λ_0 , $\omega(t)$.

Для кватернионного дифференциального уравнения (16) при условии, что вектор угловой скорости $\omega(t)$ задается выражением

$$\omega(t) = \mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t), \quad (24)$$

в котором $f(t)$ и $g(t)$ — произвольные функции времени, известно решение, удовлетворяющее начальному условию (20)

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{-\mathbf{i}_2 f(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 f(t)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\}. \quad (25)$$

Формулы (24), (25) включают в себя все известные точные аналитические решения традиционной задачи оптимального разворота КА при его сферической симметрии, когда вектор угловой скорости на всем интервале времени движения КА постоянен по направлению или описывает в пространстве круговой конус [1–3, 5, 6, 8].

Заметим, что задачу Дарбу с произвольно заданным вектором угловой скорости $\omega(t)$ с помощью замен переменных можно свести к решению уравнения типа (16) с угловой скоростью

$$\omega^*(t) = -(\mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)),$$

отличающейся от (24) только знаком. При этом явное аналитическое решение этой задачи, как и при произвольном векторе $\omega(t)$, неизвестно.

Следует отметить, что предлагаемая структура угловой скорости (24) хорошо соотносится с концепцией Пуансо, что всякое произвольное угловое движение твердого тела вокруг неподвижной точки можно рассматривать как некоторое обобщенное коническое движение твердого тела.

Выражение (24) и решение (25) можно обобщить, добавив поворот на постоянный угол вокруг некоторой оси. Такой поворот задается с помощью кватерниона \mathbf{K} , $\|\mathbf{K}\| = 1$. Тогда вектор ω и кватернион Λ будут определяться соотношениями

$$\omega = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)) \circ \mathbf{K}, \quad (26)$$

$$\Lambda = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(t) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K}. \quad (27)$$

Будем рассматривать вторые производные от функций f и g в качестве управляющих параметров. Тогда, если ввести обозначения

$$\dot{f} = f_1, \quad \dot{g} = g_1, \quad (28)$$

можно составить систему дифференциальных уравнений, описывающих управляемую систему:

$$\dot{f} = f_1, \quad \dot{g} = g_1, \quad \dot{f}_1 = \nu_1, \quad \dot{g}_1 = \nu_2, \quad (29)$$

где f , f_1 , g , g_1 — фазовые координаты, ν_1 , ν_2 — управляющие параметры. Ограничимся случаем, когда кватернион \mathbf{K} представляется в виде произведения

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1, \quad \mathbf{K}_1 = \exp\{\mathbf{i}_1 \alpha_1/2\}, \quad \mathbf{K}_2 = \exp\{\mathbf{i}_2 \alpha_2/2\}, \quad (30)$$



где α_1, α_2 — некоторые постоянные. Отметим, что кватернионы \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 определяют поворот вектора $\boldsymbol{\omega}$ (24) вокруг осей $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$. Поворот вокруг оси \mathbf{i}_3 уже включен в формулу (26), если учесть, что в функцию $g(t)$ входит аддитивная постоянная. Сопряженный кватернион $\tilde{\mathbf{K}}$ будет представляться так:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \quad \tilde{\mathbf{K}}_1 = \exp\{-\mathbf{i}_1\alpha_1/2\}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_2 = \exp\{-\mathbf{i}_2\alpha_2/2\}. \quad (31)$$

Условия того, что выражения для $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{L}$ (26), (27) удовлетворяют граничным условиям (20), (21) ((23)) с учетом (30), (31), запишутся как

$$\tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 f_1(0) \sin g(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0) \cos g(0) + \mathbf{i}_3 g_1(0)) \circ \mathbf{K} - b_1 w_{01} \mathbf{i}_1 + w_{02} \mathbf{i}_2 + w_{03} \mathbf{i}_3 = 0, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 f_1(T) \sin g(T) + \mathbf{i}_2 f_1(T) \cos g(T) + \mathbf{i}_3 g_1(T)) \circ \mathbf{K} - \\ &- \tilde{\mathbf{B}}(\theta(T)) \circ (b_1 w_{T1} \mathbf{i}_1 + w_{T2} \mathbf{i}_2 + w_{T3} \mathbf{i}_3) \circ \mathbf{B}(\theta(T)) = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} &\text{vect}(\mathbf{L}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2(f(T) - f(0))/2\} \circ \\ &\circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(T)/2\} \circ \mathbf{K} \circ \tilde{\mathbf{B}}(\theta(T)) \circ \mathbf{L}_T) = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Учитывая (30), компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ (26) имеют в явной форме следующий вид:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= f_1 \sin g \cos \alpha_2 - g_1 \sin \alpha_2, \\ \omega_2 &= f_1 (\sin g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos g \cos \alpha_1) + g_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \\ \omega_3 &= f_1 (\sin g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos g \sin \alpha_1) + g_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2. \end{aligned} \quad (35)$$

Компоненты вектора управления \mathbf{u} , который, согласно (17), является производной по времени от вектора $\boldsymbol{\omega}$, определяются по формулам

$$\begin{aligned} u_1 &= \dot{\omega}_1 = (\nu_1 \sin g + f_1 g_1 \cos g) \cos \alpha_2 - \nu_2 \sin \alpha_2, \\ u_2 &= \dot{\omega}_2 = \nu_1 (\sin g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos g \cos \alpha_1) + \\ &+ f_1 g_1 (\cos g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin g \cos \alpha_1) + \nu_2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \\ u_3 &= \dot{\omega}_3 = \nu_1 (\sin g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos g \sin \alpha_1) + \\ &+ f_1 g_1 (\cos g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \sin g \sin \alpha_1) + \nu_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2. \end{aligned} \quad (36)$$

Тогда для управляемой системы (29) можно сформулировать следующую задачу оптимального управления, решение которой можно рассматривать (с учетом замен переменных раздела 3) как приближенное (квазиоптимальное) решение задачи (16)–(22) ((1)–(4), (6)): требуется найти оптимальные управления $\nu_1(t), \nu_2(t)$, которые переводят управляемую систему (29) из начального состояния

$$f = f(0), \quad f_1 = f_1(0), \quad g = g(0), \quad g_1 = g_1(0) \quad (37)$$

в конечное состояние

$$f = f(T), \quad f_1 = f_1(T), \quad g = g(T), \quad g_1 = g_1(T), \quad (38)$$

удовлетворяющие соотношениям (32)–(34), в которых α_1, α_2 выступают как параметры, подлежащие определению, и доставляют минимум комбинированному функционалу, где время T не задано:

$$J = \int_0^T (1 + \nu_1^2 + \nu_2^2) dt. \quad (39)$$

Такую задачу оптимального управления будем называть модифицированной задачей оптимального разворота осесимметричного КА.



5. Решение задачи с помощью принципа максимума

Функция Гамильтона – Понтрягина [9] для поставленной задачи оптимального управления имеет вид

$$H = -(1 + \nu_1^2 + \nu_2^2) + \psi_1 f_1 + \psi_2 g_1 + \psi_3 \nu_1 + \psi_4 \nu_2, \quad (40)$$

где $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ – сопряженные переменные, удовлетворяющие системе уравнений:

$$d\psi_1/dt = 0, \quad d\psi_2/dt = 0, \quad d\psi_3/dt = -\psi_1, \quad d\psi_4/dt = -\psi_2. \quad (41)$$

Общее решение уравнений (41), содержащее произвольные постоянные c_1, \dots, c_4 , имеет вид

$$\psi_1 = c_1, \quad \psi_2 = c_2, \quad \psi_3 = -c_1 t + c_3, \quad \psi_4 = -c_2 t + c_4. \quad (42)$$

Из условия максимума [9] для функции Гамильтона – Понтрягина (40) определяется оптимальное управление

$$\nu_1 = \psi_3/2 = (-c_1 t + c_3)/2, \quad \nu_2 = \psi_4/2 = (-c_2 t + c_4)/2. \quad (43)$$

После подстановки (43) в систему уравнений (29) находится общее решение для фазовых координат, содержащее восемь произвольных постоянных c_1, \dots, c_8 :

$$\begin{aligned} f &= -c_1 t^3/12 + c_3 t^2/4 + c_5 t + c_7, & g &= -c_2 t^3/12 + c_4 t^2/4 + c_6 t + c_8, \\ f_1 &= -c_1 t^2/4 + c_3 t/2 + c_5, & g_1 &= -c_1 t^2/4 + c_4 t/2 + c_6. \end{aligned} \quad (44)$$

Так как в поставленной задаче оптимального управления конечный момент времени T не задается, то функция Гамильтона – Понтрягина (40) при $t = T$ должна обращаться в нуль:

$$H = -(1 + \nu_1^2(T) + \nu_2^2(T)) + c_1 f_1(T) + c_2 g_1(T) + \psi_3(T) \nu_1(T) + \psi_4(T) \nu_2(T) = 0. \quad (45)$$

Для системы уравнений (29), (41) функция H является первым интегралом. По этой причине условие (45) выполняется для любого $t \in [0, T]$. В связи с тем, что c_7 входит в функцию f как аддитивная постоянная, то из формулы (27) видно, что эта постоянная не оказывает влияния; поэтому c_7 можно положить равной нулю. Таким образом, для определения десяти неизвестных постоянных задачи c_1, \dots, c_6, c_8, T и α_1, α_2 служат девять уравнений системы (32)–(34) и условие (45). Если формулы (44) подставить в (26), (27), то будут получены аналитические выражения для определения законов изменения оптимальной угловой скорости и оптимальной траектории твердого тела. Эти выражения определяют оптимальный в смысле минимума комбинированного функционала (39) разворот твердого тела в классе обобщенных конических движений. Далее по формулам (7), (10), (16) вычисляются вектор безразмерной угловой скорости \mathbf{w} и кватернион ориентации КА \mathbf{L} . По формулам (36) определяются компоненты вектора \mathbf{u} . Из выражений (8), (10), (13), (14) следует, что безразмерный управляющий момент \mathbf{M} выражается через вектор \mathbf{u} так:

$$\mathbf{M} = I_2 \tilde{\mathbf{V}}(\theta) \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{V}(\theta). \quad (46)$$

Формула (45) определяет аналитическое решение для управляющего момента, соответствующего решению модифицированной задачи. Модифицированная задача оптимального разворота КА тем самым решена полностью. Полученные таким



способом кватернион \mathbf{L} и векторы \mathbf{w} , \mathbf{M} можно рассматривать как приближенное решение классической задачи оптимального разворота осесимметричного КА (твердого тела).

Следует отметить, что при сферической симметрии КА ($I_1 = I_2 = I_3$) квадрат модуля безразмерного управляющего момента традиционной задачи выражается через управляющие параметры и фазовые координаты модифицированной задачи следующим образом:

$$\mathbf{M}^2 = \nu_1^2 + f_1^2 g_1^2 + \nu_2^2. \quad (47)$$

Если в задаче оптимального разворота сферически-симметричного КА векторы граничных условий по угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_0$, $\boldsymbol{\omega}_T$ положить параллельными $\text{vect}(\tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T)$ (плоский эйлеров разворот КА), то решения задач в классической и модифицированной постановках полностью совпадут. То же самое можно сказать и о случае, когда решение классической задачи оптимального разворота сферически-симметричного КА получено в классе конических движений (см. на примере задачи быстрогодействия в [8]). В этих случаях слагаемое $f_1^2 g_1^2$ в (47) обращается в нуль и функционал (39) полностью переходит в функционал (6) классической задачи.

Приведем аналитический алгоритм квазиоптимального по энергии и времени разворота осесимметричного КА при произвольных граничных условиях в безразмерных переменных на основе формулировки задачи (16)–(22).

Шаг 1. По заданным граничным условиям по угловому положению Λ_0 , Λ_T и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_0$, $\boldsymbol{\omega}_T$ КА из формул (30), (31), десяти уравнений (32)–(34), (45) определяются десять неизвестных постоянных задачи $c_1, \dots, c_6, c_8, T, \alpha_1, \alpha_2$ и строятся функции f, f_1, g, g_1 .

Шаг 2. Используя формулы (30), находим компоненты кватерниона \mathbf{K} .

Шаг 3. По формуле (26)

$$\boldsymbol{\omega} = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)) \circ \mathbf{K}$$

вычисляется вектор угловой скорости КА.

Шаг 4. По формуле (27)

$$\Lambda = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(t) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K}$$

вычисляется кватернион ориентации твердого тела.

Шаг 5. Используя формулы (36), (46), вычисляется вектор управляющего момента $\mathbf{M}(t)$. По формулам раздела 3 осуществляется возврат к безразмерным переменным $\mathbf{L}(t)$, $\mathbf{w}(t)$ исходной задачи оптимального разворота осесимметричного КА (1)–(4), (6).

Шаг 6. По формулам (6), (46) вычисляется значение безразмерного функционала оптимизации задачи оптимального разворота.

6. Числовой пример

На примере КА «Спейс Шаттл» [10], динамические характеристики которого такие же, как у почти осесимметричного твердого тела, приведем сравнительные результаты численных решений задачи оптимального разворота КА в классической и модифицированной постановках. Далее на рисунках приведены результаты решения модифицированной задачи оптимального разворота КА при произвольно выбранных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА по формулам разделов 4, 5. На рис. 1–3 представлен пример квазиоптимального разворота осесимметричного КА при $T = 0.9850$.

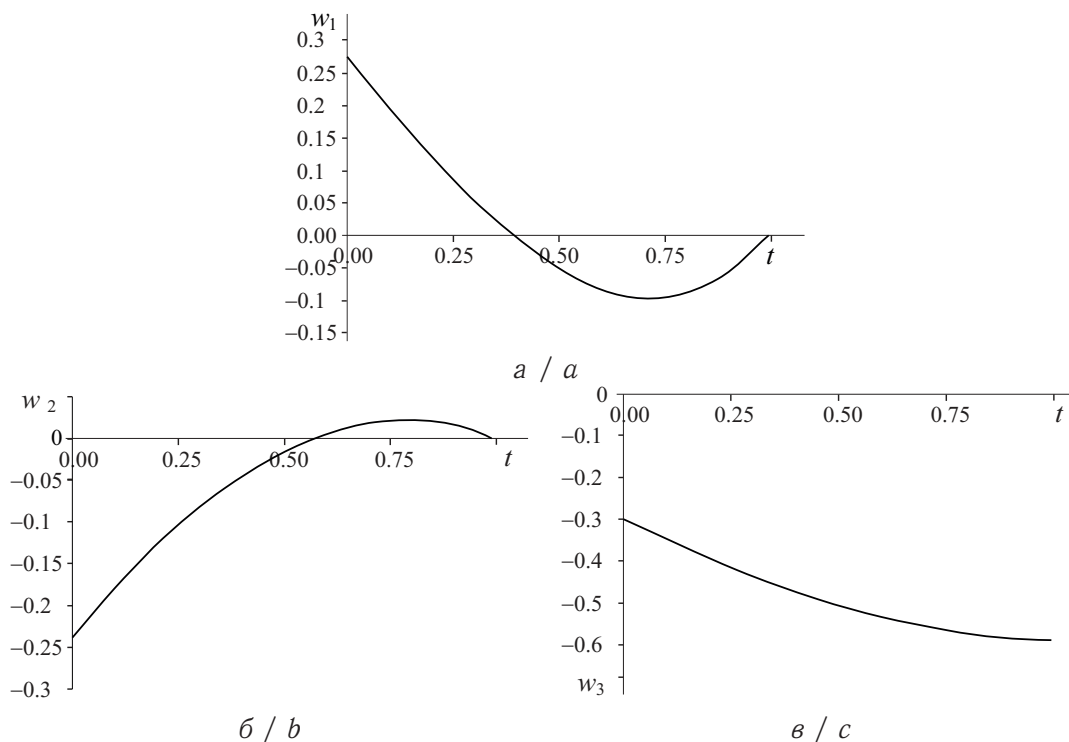


Рис. 1. Графики изменения во времени компонент угловой скорости $w_1(t)$ (а), $w_2(t)$ (б), $w_3(t)$ (в)
 Fig. 1. Graphs of changes in time of the components of angular velocity $w_1(t)$ (a), $w_2(t)$ (b), $w_3(t)$ (c)

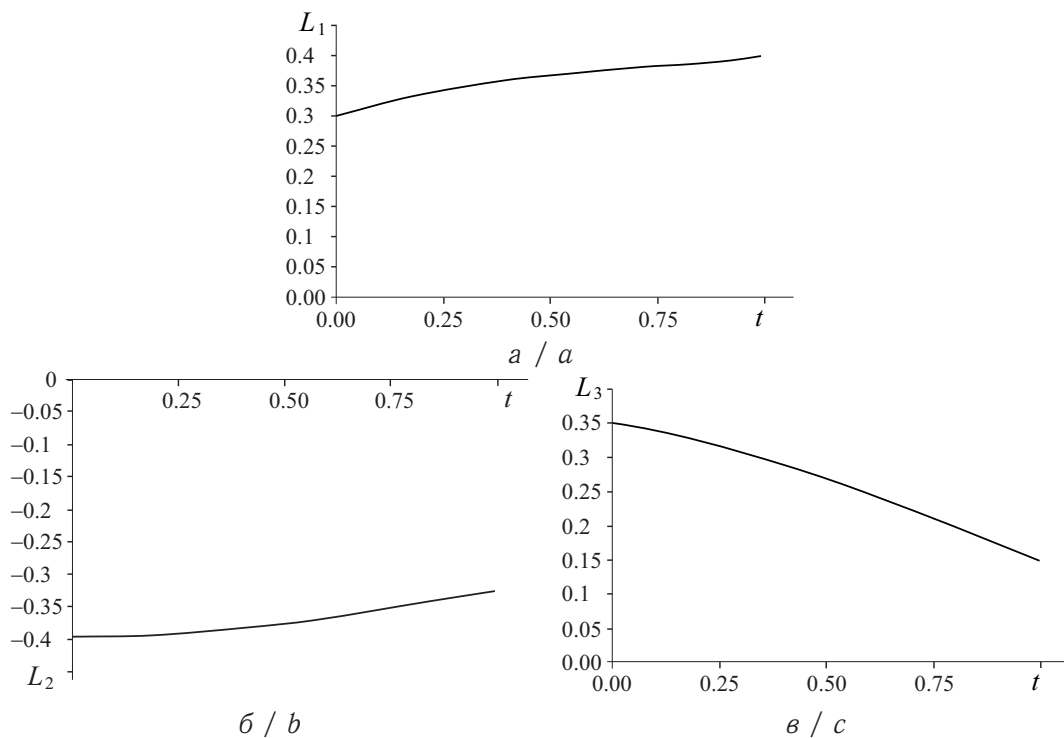


Рис. 2. Графики изменения во времени векторной части кватерниона ориентации $L_1(t)$ (а), $L_2(t)$ (б), $L_3(t)$ (в)
 Fig. 2. Graphs of changes in time of the vector part of the orientation quaternion $L_1(t)$ (a), $L_2(t)$ (b), $L_3(t)$ (c)

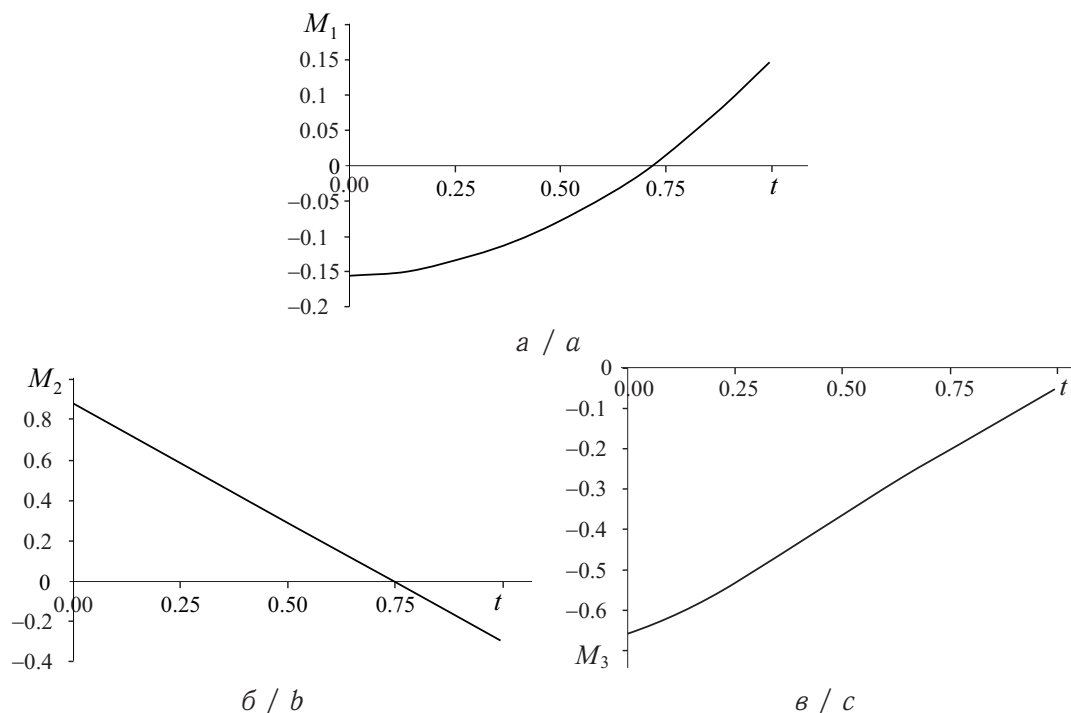


Рис. 3. Графики изменения во времени компонент вектора управляющего момента $M_1(t)$ (а), $M_2(t)$ (б), $M_3(t)$ (в)

Fig. 3. Graphs of changes in time of the components of the vector of the control torque $M_1(t)$ (a), $M_2(t)$ (b), $M_3(t)$ (c)

Расчеты проводились для значений: $I_1 = 3400648 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $I_2 = 21041672 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $I_3 = I_2 = 21041672 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ или $I_1 = 0.1967$, $I_2 = 1.2168$, $I_3 = I_2$ (безразмерные моменты инерции);

$$\mathbf{L}_0 = [0.79505, 0.29814, -0.39752, 0.34783]^T, \tag{48}$$

$$\mathbf{L}_T = [0.84434, 0.39846, -0.3260, 0.14848]^T,$$

$$\mathbf{w}_0 = [0.27388, -0.23883, -0.3]^T, \quad \mathbf{w}_T = [0, 0, -0.59]^T. \tag{49}$$

Значения постоянных $\alpha_1, \alpha_2, c_1, \dots, c_6, c_8$, входящих в аналитическое решение задачи, таковы: $\alpha_1 = -1.22190$, $\alpha_2 = -0.89091$, $c_1 = -0.44648$, $c_2 = -3.82943$, $c_3 = -0.63861$, $c_4 = -2.71375$, $c_5 = -0.37172$, $c_6 = 0.28961$, $c_8 = -0.20978$.

С граничными условиями (48), (49) при помощи универсальной программы численного решения, ранее полученной авторами, также решалась задача оптимального разворота КА в классической постановке (1)–(4), (6) в безразмерных переменных. Результаты решения двух задач практически совпали. Для примера в таблице приведем значения компонент вектора $\mathbf{M}(t)$ на концах и в близких промежуточных точках интервалов времени движения КА $[0, T]$ в этих двух решениях ($T = 0.9850, 0.9679$ соответственно).

Таблица / Table

Значения компонент вектора $\mathbf{M}(t)$ на интервале времени движения КА $[0, T]$

Values of the components of the vector $\mathbf{M}(t)$ on the spacecraft motion time interval $[0, T]$

t	$M_1^{\text{традиц}}$	$M_2^{\text{традиц}}$	$M_3^{\text{традиц}}$	t	$M_1^{\text{модиф}}$	$M_2^{\text{модиф}}$	$M_3^{\text{модиф}}$
0	-0.1574	0.8887	-0.6587	0	-0.2123	0.8856	-0.7918
0.4925	-0.0792	0.2893	-0.3699	0.4840	-0.0521	0.3001	-0.3691
0.9850	0.1460	-0.2898	-0.0539	0.9679	0.0881	-0.3024	0.0072



Значение функционала (6) для классической задачи в рассматриваемом примере составляет 1.35662. Значение того же функционала, вычисленного на основе решения модифицированной задачи, составляет $J = 1.35928$. Другими словами, в рассматриваемом примере расхождение между величинами функционала (6) для классической и модифицированной задачи составляет менее 0.00266. Таким образом, построено управление, которое сообщает функционалу значение, близкое к оптимальному для классической задачи. Из таблицы видно, что построенные управляющие моменты для этих двух задач близки друг к другу.

Следует отметить, что кватернион ориентации КА $\mathbf{L}(t)$ может быть двузначным [1], т. е. \mathbf{L} и $-\mathbf{L}$ соответствуют одному и тому же угловому положению КА в пространстве.

Заключение

Представленное в статье аналитическое квазиоптимальное решение задачи разворота осесимметричного КА при произвольных граничных условиях можно использовать для построения систем управления КА, как и известное аналитическое решение задачи оптимального разворота сферически-симметричного КА, полученное в классе плоских эйлеровых разворотов [1].

Отметим, что решение модифицированной задачи оптимального разворота осесимметричного КА, полученное на основе приведенной задачи (16)–(22), оказалось существенно точнее, чем решение [11] (применительно к случаю осевой симметрии КА). В [11] квазиоптимальный управляющий момент КА строился на основе обратной задачи динамики КА по результатам решения модифицированной задачи без приведения с помощью замен переменных системы уравнений Эйлера для осесимметричного твердого тела к такой же системе для тела со сферической динамической симметрией.

Список литературы

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. Москва : Наука, 1973. 320 с.
2. Scrivener S. L., Thompson R. C. Survey of time-optimal attitude maneuvers // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1994. Vol. 17, № 2. P. 225–233. <https://doi.org/10.2514/3.21187>
3. Петров Б. Н., Боднер В. А., Алексеев К. Б. Аналитическое решение задачи управления пространственным поворотным маневром // Доклады Академии наук СССР. 1970. Т. 192, № 6. С. 1235–1238.
4. Бранец В. Н., Черток М. Б., Казначеев Ю. В. Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космические исследования. 1984. Т. 22, вып. 3. С. 352–360.
5. Сиротин А. Н. Оптимальное управление переориентацией симметричного твердого тела из положения покоя в положение покоя // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1989. № 1. С. 36–47.
6. Челноков Ю. Н. Кватернионное решение кинематических задач управления ориентацией твердого тела: уравнения движения, постановка задач, программное движение и управление // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1993. № 4. С. 7–14.
7. Левский М. В. Применение принципа максимума Л. С. Понтрягина к задачам оптимального управления ориентацией космического аппарата // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2008. № 6. С. 144–157.
8. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое решение задачи оптимального по быстродействию разворота сферически-симметричного космического аппарата в классе



конических движений // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2014. № 2. С. 13–25. <https://doi.org/10.7868/S0002338814020139>

9. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Москва : Наука, 1961. 391 с.
10. Li F., Bainum P. M. Numerical approach for solving rigid spacecraft minimum time attitude maneuvers // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1990. Vol. 13, № 1. P. 38–45. <https://doi.org/10.2514/3.20515>
11. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое приближенное решение задачи оптимального разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2015. № 3. С. 131–141. <https://doi.org/10.7868/S0002338815030142>

References

1. Branets V. N., Shmyglevskij I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachax orientacii tverdogo tela* [The Use of Quaternions in Problems of Orientation of Solid Bodies]. Moscow, Nauka, 1973. 320 p. (in Russian).
2. Scrivener S. L., Thompson R. C. Survey of time-optimal attitude maneuvers. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1994, vol. 17, no. 2, pp. 225–233. <https://doi.org/10.2514/3.21187>
3. Petrov B. N., Bodner V. A., Alekseev K. B. Analytical solution of the spatial slew maneuver. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1970, vol. 192, no. 6, pp. 1235–1238 (in Russian).
4. Branets V. N., Chertok M. B., Kaznacheev Yu. V. Optimal slew of a solid body with a single symmetry axis. *Kosmicheskie issledovaniya* [Space Research], 1984, vol. 22, iss. 3, pp. 352–360 (in Russian).
5. Sirotin A. N. Optimal reorientation of a symmetric solid body from a state of rest to another state of rest. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [News of the USSR Academy of Sciences. Mechanics of Solids], 1989, no. 1, pp. 36–47 (in Russian).
6. Chelnokov Yu. N. Quaternion solution of kinematic problems in rigid body orientation control – equations of motion, problem statement, programmed motion, and control. *Izvestiya Akademii Nauk. Mekhanika tverdogo tela* [News of the Academy of Sciences. Mechanics of solids], 1993, no. 4, pp. 7–14 (in Russian).
7. Levskij M. V. Pontryagin's maximum principle in optimal control problems of orientation of a spacecraft. *Journal of Computer and System Sciences International*, 2008, vol. 47, no. 6, pp. 974–986. <https://doi.org/10.1134/S1064230708060117>
8. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical solution of the time-optimal slew problem of a spherically symmetric spacecraft in the class of conical motion. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2014, vol. 53, no. 2, pp. 159–171. <https://doi.org/10.1134/S1064230714020130>
9. Pontryagin L. S., Boltianskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [The Mathematical Theory of Optimal Processes]. Moscow, Nauka, 1961, 391 p. (in Russian).
10. Li F., Bainum P. M. Numerical approach for solving rigid spacecraft minimum time attitude maneuvers. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1990, vol. 13, no. 1, pp. 38–45. <https://doi.org/10.2514/3.20515>
11. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical approximate solution of the problem of a spacecraft's turn with arbitrary boundary conditions. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2015, vol. 54, no. 3, pp. 458–468. <https://doi.org/10.1134/S1064230715030144>

Поступила в редакцию / Received 05.07.2020

Принята к публикации / Accepted 14.08.2020

Опубликована / Published 31.05.2021



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 227–237
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 227–237

Научная статья

УДК 534.1:539.3

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-227-237>

Частоты собственных колебаний круглой тонкой пластины с нелинейно возмущенными параметрами

А. Л. Смирнов[✉], Г. П. Васильев

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9

Смирнов Андрей Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики, <https://orcid.org/0000-0002-1526-2869>, a.l.smirnov@spbu.ru

Васильев Григорий Павлович, аспирант математико-механического факультета, <https://orcid.org/0000-0002-8647-1385>, vasiliev.gregory@gmail.com

Аннотация. В статье исследуются поперечные колебания неоднородной круглой тонкой пластины. Рассмотрены пластины, геометрические и физические параметры которых мало отличаются от постоянных, причем исследуется случай, когда параметры зависят только от радиальной координаты, что позволяет разделить переменные. Полученные уравнения колебаний представляют собой однородные обыкновенные дифференциальные уравнения, которые вместе с однородными граничными условиями образуют регулярно возмущенную краевую задачу на собственные значения. С помощью метода возмущений получены асимптотические формулы для частот собственных колебаний пластины, толщина и/или модуль Юнга которой нелинейно зависят от радиальной координаты. В качестве примеров рассмотрены собственные колебания пластины, зависимость параметров которой от радиальной координаты является квадратичной или экспоненциальной. Проанализировано поведение частот в зависимости от малого параметра возмущения при условии фиксированности массы при изменении толщины или средней жесткости пластины при изменении модуля Юнга. Рассмотрено влияние краевых условий на характер поведения низших частот при изменении малого параметра. Рассмотрена зависимость величин, вызываемых неоднородностью поправок к частотам, от значений соответствующих волновых чисел. Для широкого диапазона значений малого параметра асимптотические результаты для низших частот колебаний пластины хорошо согласуются с результатами конечно-элементного анализа в пакете COMSOL Multiphysics 5.4 и результатами других авторов, полученными с помощью различных численных методов. Малое нелинейное изменение параметров оказывает на все частоты, включая фундаментальную, заметно большее влияние, чем линейное.

Ключевые слова: собственные колебания пластин, неоднородная круглая пластина, метод возмущений

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-01-00832-а и 19-01-00208-а).

Для цитирования: Смирнов А. Л., Васильев Г. П. Частоты собственных колебаний круглой тонкой пластины с нелинейно возмущенными параметрами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2.



С. 227–237. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-227-237>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-227-237>

Free vibration frequencies of a circular thin plate with nonlinearly perturbed parameters

A. L. Smirnov[✉], G. P. Vasiliev

St. Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg 199034, Russia

Andrei L. Smirnov, a.l.smirnov@spbu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1526-2869>

Grigory P. Vasiliev, vasiliev.gregory@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-8647-1385>

Abstract. Transverse vibrations of an inhomogeneous circular thin plate are studied. The plates, which geometric and physical parameters slightly differ from constant ones and depend only on the radial coordinate, are analyzed. After separation of variables the obtained homogeneous ordinary differential equations together with homogeneous boundary conditions form a regularly perturbed boundary eigenvalue problem. For frequencies of free vibrations of a plate, which thickness and/or Young's modulus nonlinearly depend on the radial coordinate asymptotic formulas are obtained by means of the perturbation method. As examples, free vibrations of a plate with parameters quadratically or exponentially depending on the radial coordinate, are examined. The effect of the small perturbation parameter on the behavior of frequencies is also analyzed under special conditions: i) for a plate, the mass of which is fixed, if the thickness is variable and ii) for a plate with the fixed average stiffness, if Young's modulus is variable. Finally, effects of the boundary conditions and values of the wave numbers on the corrections to frequencies are studied. For a wide range of small parameter values, the asymptotic results for the lower vibration frequencies well agree with the results of finite element analysis with COMSOL Multiphysics 5.4 and the numerical results of other authors.

Keywords: free vibrations of plates, inhomogeneous circular plate, perturbation method

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects No. 18-01-00832-a and No. 19-01-00208-a).

For citation: Smirnov A. L., Vasiliev G. P. Free vibration frequencies of a circular thin plate with nonlinearly perturbed parameters. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 227–237 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-227-237>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Введение

Строение спектра собственных поперечных колебаний круглых тонких пластин при различных краевых условиях является хорошо изученной задачей. Это связано, во-первых, с частым применением таких структурных элементов в инженерных конструкциях, а во-вторых, с простотой геометрии, которая в некоторых случаях делает возможным получение аналитического решения. Список работ по этой теме обширен, систематизированный обзор результатов исследований приведен в [1]. Применение численных методов позволяет найти значения частот и формы собственных колебаний для тонкой пластины любой геометрии.



Целью нашего исследования было получение асимптотических формул, описывающих влияние малой неоднородности параметров тонкой пластины, толщины или жесткости, на ее собственные частоты. Если задача допускает разделение переменных, то для получающейся одномерной задачи алгоритм построения асимптотического решения краевой задачи на собственные значения описан, например, в [2]. Асимптотические методы при исследовании колебаний неоднородных круглых пластин с линейным возмущением параметров были использованы в [3], а пластин с отверстиями — в [4].

В данной работе исследуется зависимость собственных частот колебаний круглых пластин от малых возмущений, нелинейных по радиальной координате, в предположении, что параметры пластины, геометрические и физические, являются гладкими функциями координат.

1. Уравнения колебаний тонкой круглой пластины с переменными параметрами

Рассмотрим собственные поперечные колебания круглой тонкой пластины радиуса R с переменными модулем Юнга E и толщиной h . Остальные физические параметры пластины (ρ — плотность материала, ν — коэффициент Пуассона) считаем постоянными, причем во всех рассмотренных примерах, кроме специально оговоренных, $\nu = 0.3$. В статье рассматривается случай, когда параметры пластины зависят только от радиальной координаты. На рис. 1 можно видеть вид сверху рассматриваемой пластины, а также ее поперечное сечение.

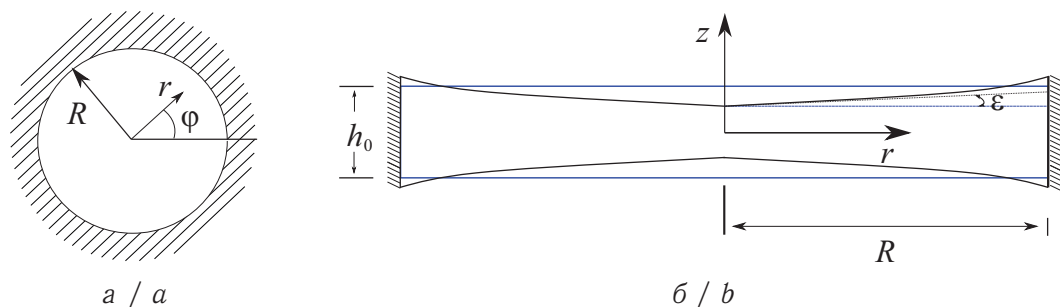


Рис. 1. Круглая пластина переменной толщины (а) и ее сечение (б)
 Fig. 1. A circular plate with the variable cross-section (a) and its section (b)

В модели пластины, использующей гипотезы Кирхгофа – Лява, уравнение поперечных колебаний в безразмерном виде после разделения переменных для прогиба $w(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(r) \cos(m\varphi)$ имеет вид [3]:

$$L(w_m(r)) - h(r) \lambda^4 w_m(r) = 0, \quad L(w_m(r)) = \sum_{i=0}^4 b_i \frac{d^i}{dr^i} w_m(r), \quad (1)$$

где коэффициенты линейного дифференциального оператора L

$$b_0 = \frac{m^4 - 4m^2}{r^4} D - \frac{\nu m^2}{r^2} D'' + \frac{3m^2}{r^3} D', \quad b_1 = -\frac{2m^2 + 1}{r^2} D' + \frac{2m^2 + 1}{r^3} D + \frac{\nu}{r} D'',$$

$$b_2 = -\frac{2m^2 + 1}{r^2} D + \frac{2 + \nu}{r} D' + D'', \quad b_3 = \frac{2}{r} D + 2D', \quad b_4 = D.$$



Здесь $D = D(r)$ — цилиндрическая жесткость, m — число волн в окружном направлении, ω и λ — соответственно размерная и безразмерная частоты колебаний.

Связь размерных и безразмерных (с \sim) переменных такова:

$$D(r) = D_0 \tilde{D}(\tilde{r}), \quad h(r) = h_0 \tilde{h}(\tilde{r}), \quad E(r) = E_0 \tilde{E}(\tilde{r}), \quad w(r) = R w(\tilde{r}),$$

$$r = R \tilde{r}, \quad \lambda^4 = \frac{12(1 - \nu^2) R^4 \omega^2 \rho}{E_0 h_0^2}, \quad D_0 = \frac{E_0 h_0^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad 0 \leq \tilde{r} \leq 1.$$

Здесь D_0 , h_0 , E_0 — соответственно невозмущенные жесткость, толщина и модуль Юнга. Далее знак « \sim » и индекс m опускаются, все величины в таблицах и на графиках безразмерные, причем для пластины переменной толщины и постоянной жесткости $D(r) = 1$, а для пластины переменной жесткости и постоянной толщины $h(r) = 1$.

2. Метод возмущений

Для исследования частот колебаний круглой пластины с параметрами жесткости и толщины, близкими к постоянным, применим метод возмущений. В отличие от [3], считаем зависимость параметров от ε не линейной, а полиномиальной, т. е. полагаем

$$h(r) = 1 + \varepsilon h_1(r) + \varepsilon^2 h_2(r) + \dots, \quad E(r) = 1 + \varepsilon E_1(r) + \varepsilon^2 E_2(r) + \dots, \quad (2)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots, \quad w(r) = w_0(r) + \varepsilon w_1(r) + \varepsilon^2 w_2(r) + \dots, \quad \varepsilon \ll 1.$$

После подстановки (2) в уравнение (1) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε получаем серию краевых задач:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: \quad & \Delta^2 w_0(r) - \lambda_0^4 w_0(r) = 0, \\ \varepsilon^1: \quad & \Delta^2 w_1(r) - \lambda_0^4 w_1(r) = F_{11}(\lambda_0, w_0(r)) + F_{12}(\lambda_0, w_0(r)) \cdot \lambda_1, \\ \varepsilon^2: \quad & \Delta^2 w_2(r) - \lambda_0^4 w_2(r) = F_{21}(\lambda_0, w_0(r), \lambda_1, w_1(r)) + F_{22}(\lambda_0, w_0(r), \lambda_1, w_1(r)) \cdot \lambda_2, \\ \varepsilon^3: \quad & \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Условием существования решения системы является ортогональность правых частей уравнений решению $w_0(r)$ [2], а именно

$$\int_0^1 (F_{i1}(\lambda_j, w_j(r)) + F_{i2}(\lambda_j, w_j(r)) \cdot \lambda_i) w_0(r) r dr = 0, \quad j = 0, \dots, i-1, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где скалярное произведение функций $f(r)$ и $g(r)$ и норма определяются равенствами

$$(f(r) \cdot g(r)) = \int_0^1 f(r) g(r) r dr, \quad \|f(r)\| = \int_0^1 f^2(r) r dr.$$

Откуда получаем формулы для поправок к частотам:

$$\lambda_i = -\frac{I_{i1}}{I_{i2}}, \quad I_{ik} = \int_0^1 F_{ik} w_0(r) r dr, \quad k = 1, 2, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Громоздкие формулы для определения операторов F_{ik} приведены в Приложении.

Последовательность построения решения $w(r)$ такова. При заданных граничных условиях из уравнения для нулевого приближения (3) находим решение $w_0(r)$ и частоту λ_0 . Затем определяем λ_1 по формуле (4) и решение $w_1(r)$ уравнения первого приближения (3) и т. д.



3. Малое нелинейное изменение толщины

В работе [3] исследовались пластины с линейными возмущениями $h_1(r)$ и $E_1(r)$. В этой статье рассматриваются возмущения, имеющие вид квадратичной или экспоненциальной функций.

Вначале исследуем, какое влияние на спектр частот колебаний оказывает малое квадратичное изменение толщины, причем выделим два случая:

- 1) $h = 1 + \varepsilon r^2$ — увеличение (или уменьшение) толщины для всех r ;
- 2) $h = 1 + \varepsilon(1 - 2r^2)$ — квадратичное изменение толщины, сохраняющее массу пластины. При этом $h(0) = 1 + \varepsilon$ и $h(1) = 1 - \varepsilon$.

Здесь и далее значения частот колебаний пластин, полученные авторами по асимптотической формуле (5) и численно в пакете COMSOL Multiphysics 5.4., сравниваются с результатами других авторов.

В табл. 1 значения частот колебаний для пластин с линейным и квадратичным изменением толщины приведены для $\varepsilon = -0.3$, а (m, n) — число волн в окружном и радиальном направлениях соответственно.

Таблица 1 / Table 1

Низшие частоты осесимметричных колебаний пластин, толщина которых меняется по линейному и квадратичному законам при $\varepsilon = -0.3$

The lower axisymmetric vibrational frequencies for plates with linear and quadratic thickness variations for $\varepsilon = -0.3$

(m, n)	$h(r) = 1 + \varepsilon r$				$h(r) = 1 + \varepsilon r^2$			
	Жесткая заделка Clamped edge		Шарнирное опирание Simply supported edge		Жесткая заделка Clamped edge		Шарнирное опирание Simply supported edge	
	(5)	[5]	(5)	[5]	(5)	[5]	(5)	[5]
(0,0)	2.8144	2.7890	2.0385	2.0287	2.8635	2.8418	2.1012	2.0984
(0,1)	5.7409	5.6975	5.0020	4.9726	5.8825	5.8447	5.1598	5.1359
(0,2)	8.6628	8.5992	7.9307	7.8785	8.8903	8.8388	8.1656	8.1264

В статье [5] решения для осесимметричных колебаний были получены в виде бесконечных степенных рядов.

На рис. 2, а изображена зависимость от параметра ε низших частот колебаний защемленной пластины, толщина которой меняется по закону $h(r) = 1 + \varepsilon r^2$. Точками изображены частоты, найденные численно в COMSOL, сплошными линиями — полученные по формуле (5). Зависимость частот от ε близка к линейной при $\varepsilon > 0$, а величина первой поправки к частоте, λ_1 , существенно зависит от волновых чисел (m, n) .

Для случая квадратичного изменения толщины при сохранении общей массы пластины графики зависимости частот от параметра ε приведены на рис. 2, б. Влияние изменяемости толщины на частоты оказывается существенно бóльшим, чем в линейном случае, в частности, все частоты, кроме фундаментальной, убывают при больших по модулю значениях ε .

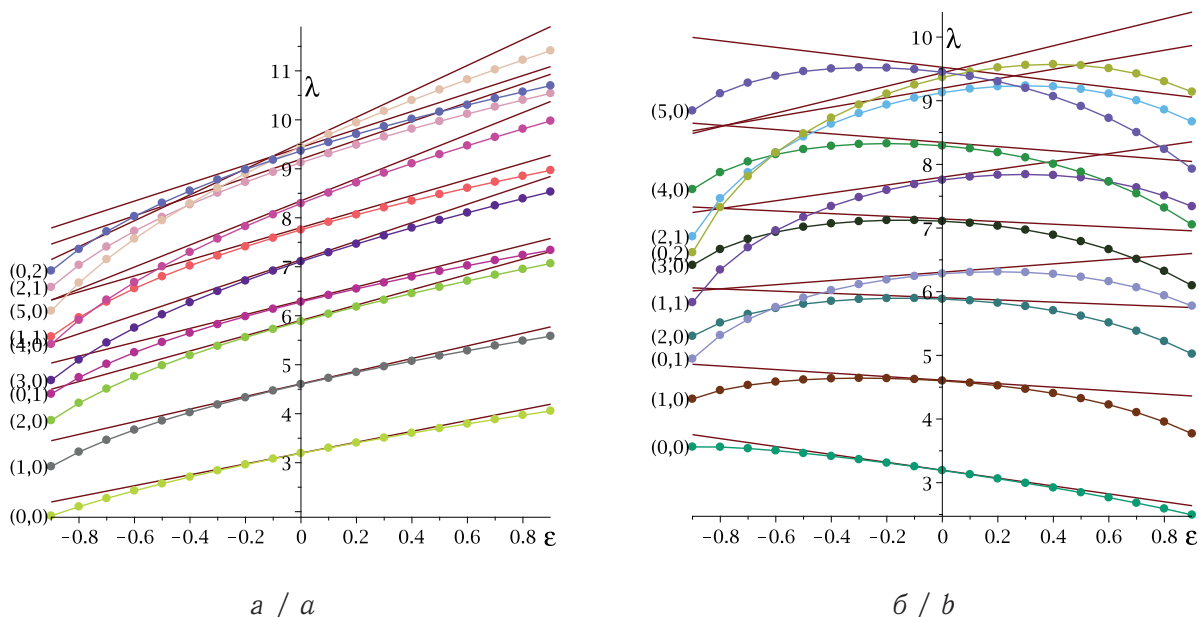


Рис. 2. Низшие частоты поперечных колебаний защемленной пластины при $h = 1 + \varepsilon r^2$ (а) и $h = 1 + \varepsilon(1 - 2r^2)$ (б) (цвет online)
 Fig. 2. The lower transverse vibration frequencies of the clamped plate for $h = 1 + \varepsilon r^2$ (a) and $h = 1 + \varepsilon(1 - 2r^2)$ (b) (color online)

В качестве последнего примера рассмотрим случай экспоненциального изменения толщины $h(r) = e^{\varepsilon r}$. Поскольку в этом случае $h(r) \approx 1 + \varepsilon r + O(\varepsilon^2)$, то при малых значениях ε следует ожидать, что линейное приближение даст хорошую аппроксимацию для частот пластины с экспоненциальным изменением толщины.

В табл. 2 приведены численные и асимптотические значения частот и их сравнение с результатами других авторов.

Таблица 2 / Table 2

Значения частот при линейном и экспоненциальном возмущении толщины
 The values of vibrational frequencies for linear and exponential perturbation of the plate thickness

ε	(m, n)	$h(r) = 1 + \varepsilon r$		$h(r) = e^{\varepsilon r}$	$h(r) = 1 + \varepsilon r$	$h(r) = e^{\varepsilon r}$
		COMSOL	(5)	COMSOL	[6]	[7]
0.1	(0,0)	3.3172	3.3235	3.3227	3.3216	3.3267
	(0,1)	6.4651	6.4949	6.4720	6.4916	6.4979
	(0,2)	9.6125	9.6984	9.6212	9.6927	9.7016
-0.1	(0,0)	3.0631	3.0689	3.0687	3.0669	3.0720
	(0,1)	6.0913	6.1179	6.0986	6.1137	6.1209
	(0,2)	9.1060	9.1805	9.1152	9.1717	9.1838

4. Малое нелинейное изменение жесткости

Пусть теперь модуль Юнга пластины является функцией радиальной координаты, в то время как толщина пластины остается постоянной. Случай линейной зависимости $E(r)$ был рассмотрен в работе [3], здесь же будет проанализировано влияние на частоты квадратичной и экспоненциальной изменяемости $E(r)$.



Графики зависимости частот колебаний жестко закрепленной пластины от малого параметра ε при $E(r) = 1 + \varepsilon r^2$ представлены на рис. 3, а. Характеры зависимости частот от ε при квадратичном изменении жесткости близки к линейным [3, 8], но значения первых поправок к частотам для линейного случая больше (табл. 3). Заметим, что значения $\lambda_1^{m^*,n}$ монотонно увеличиваются с ростом n , а значения λ_1^{m,n^*} — с ростом m .

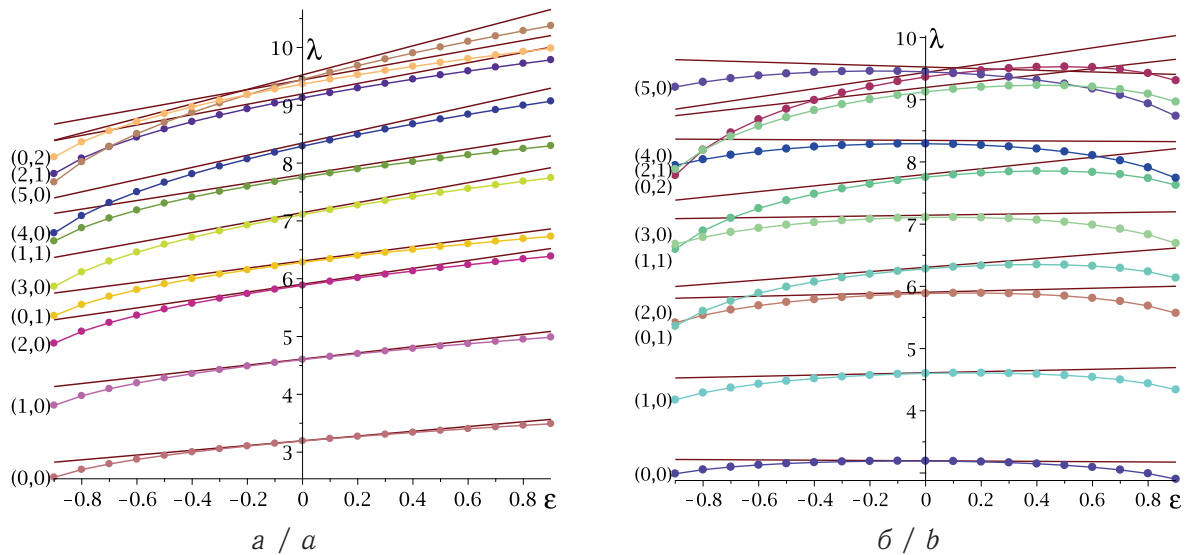


Рис. 3. Зависимость частот колебаний от малого параметра ε при $E(r) = 1 + \varepsilon r^2$ (а) и $E(r) = 1 + \varepsilon(1 - 2r^2)$ (б) (цвет online)
 Fig. 3. Vibrational frequencies vs. small perturbation parameter ε for $E(r) = 1 + \varepsilon r^2$ (a) and $E(r) = 1 + \varepsilon(1 - 2r^2)$ (b) (color online)

Таблица 3 / Table 3

Первая поправка к частотам колебаний, λ_1 , для линейного и квадратичного возмущений жесткости

The first correction to the vibrational frequencies, λ_1 , for linear and quadratic stiffness variations

(m, n)	$E(r) = 1 + \varepsilon r$	$E(r) = 1 + \varepsilon r^2$	(m, n)	$E(r) = 1 + \varepsilon r$	$E(r) = 1 + \varepsilon r^2$
(0,0)	0.5194	0.4113	(1,1)	1.0815	0.7451
(1,0)	0.7240	0.5299	(4,0)	1.4285	1.0545
(2,0)	0.9386	0.6848	(2,1)	1.3093	0.8976
(0,1)	0.8709	0.6166	(0,2)	1.2422	0.8513
(3,0)	1.1799	0.8624	(5,0)	1.6803	1.2567

Разумеется, область, в которой асимптотические формулы справедливы, ограничена окрестностью $\varepsilon = 0$. Однако интересно посмотреть, насколько эти формулы неточны при нарушении условия $\varepsilon \ll 1$, скажем, при $\varepsilon = 1$. Сравнения в табл. 4 производятся для первых трех частот осесимметричных колебаний для квадратичного изменения частот при $\nu = 0.1$. В статье [9] для вычисления частот использовался метод стрельб. Даже для таких экстремальных значений параметра ε значения частот, найденные численно и асимптотически, достаточно близки.

Среднее значение модуля Юнга сохраняется при его квадратичном изменении, если $E(r) = 1 + \varepsilon(1 - 2r^2)$. Результаты вычислений частот для пластин с указанной жесткостью представлены на рис. 3, б. В отличие от предыдущего случая,



зависимость частот от параметра возмущения (при $\varepsilon > 0$) немонотонна, в частности, у частот $\lambda^{m,0}$ максимум достигается при ε , близком к 0.

Таблица 4 / Table 4

Частоты колебаний при квадратичном и экспоненциальном изменении модуля Юнга при $\varepsilon = 1$
 Vibrational frequencies of plates with quadratic and exponential Young modulus variations at $\varepsilon = 1$

$E(r)$	(m, n)	Жесткая заделка Clamped edge			Шарнирное опирание Simply supported edge		
		(5)	COMSOL	[9]	(5)	COMSOL	[9]
$1 + r^2$	(0,0)	3.6288	3.5345	3.5384	2.3342	2.3081	2.3087
	(0,1)	6.9364	6.7860	6.8081	5.9046	5.8089	5.8198
	(0,2)	10.3003	10.0560	10.1257	9.3326	9.1510	9.1929
$1 + e^r$	(0,0)	4.8299	4.2011	4.2048	3.0937	2.7643	2.7659
	(0,1)	9.1916	8.1145	8.1406	7.8240	6.9627	6.9757
	(0,2)	13.6254	12.0390	12.1227	12.3456	10.9680	11.0182

В завершение рассмотрим экспоненциальное изменение модуля Юнга:

- 1) $E(r) = 1 + \varepsilon e^r$;
- 2) $E(r) = e^{-\varepsilon r}$;
- 3) $E(r) = 1 + \varepsilon(e^{-br} - (2(e^b - b - 1)/(e^b b^2)))$.

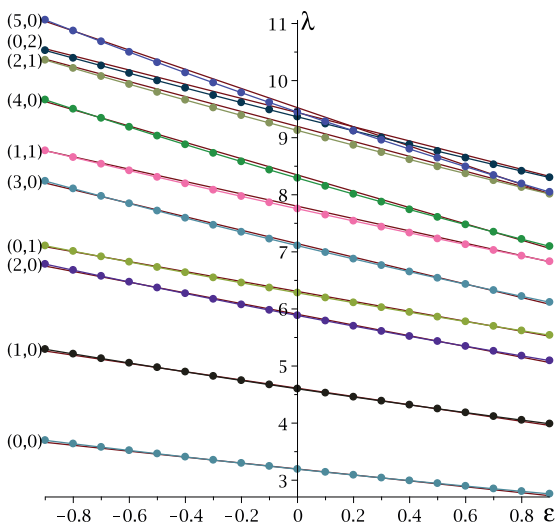


Рис. 4. Частоты колебаний для пластины с жесткостью $E(r) = e^{-\varepsilon r}$ (COMSOL) и с жесткостью $E(r) = 1 - \varepsilon r$ (5) (цвет online)
 Fig. 4. Vibrational frequencies for a plate with the stiffness $E(r) = e^{-\varepsilon r}$ (COMSOL) and $E(r) = 1 - \varepsilon r$ (5) (color online)

Значения частот для первого случая при $\varepsilon = 1$ приведены в табл. 4, и, как и в случае квадратичного изменения жесткости, они оказываются достаточно близки к точным значениям.

Второй случай представляет практический интерес при исследовании колебаний биомеханических структур, например, решетчатой пластины глаза, жесткость которой аппроксимируется убывающей от центра экспоненциальной функцией (см. [10]). Поскольку $e^{-\varepsilon r} = 1 - \varepsilon r + O(\varepsilon^2)$ при малых значениях ε , интересно сравнить результаты численного определения частот при $E(r) = e^{-\varepsilon r}$ и асимптотического для $E(r) = 1 - \varepsilon r$. Значения частот, приведенные на рис. 4, демонстрируют хорошее совпадение численных (точки) и асимптотических (сплошные линии) результатов.

Наконец, для третьего случая изменения $E(r)$, когда сохраняется среднее значение модуля Юнга, существенное влияние имеет величина параметра b . При положительных значениях b частоты мало отличаются от частот пластины с постоянным модулем Юнга, как это видно на рис. 5, а. В свою очередь, из данных рис. 5, б件но, что при отрицательных значениях b некоторые более высокие частоты быстро убывают с ростом ε .

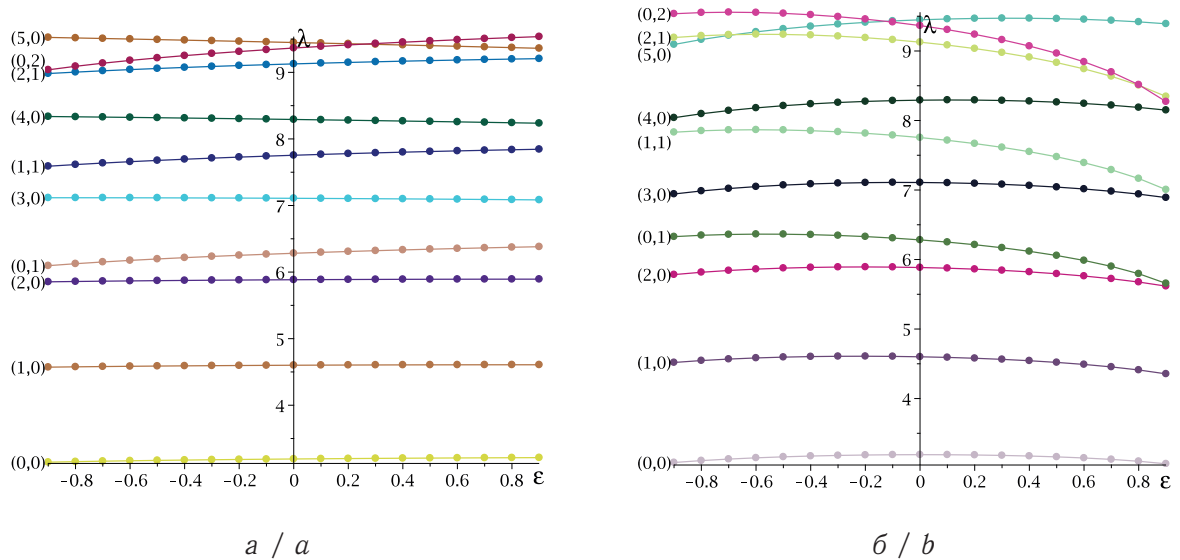


Рис. 5. Частоты колебаний при сохранении средней жесткости при $b = 4$ (a) и $b = -1$ (б) (цвет online)

Fig. 5. Vibrational frequencies for a plate with the fixed average stiffness for $b = 4$ (a) and $b = -1$ (b) (color online)

Заключение

Полученные в работе асимптотические формулы позволяют указать хорошие приближения для собственных частот колебаний пластин в случае малого возмущения параметров толщины и модуля Юнга, причем сам вид возмущения может иметь произвольный характер, в частности, квадратичный или встречающийся в приложениях экспоненциальный. Представляет интерес вычисление следующего члена в асимптотической формуле для частот, что позволит хотя бы частично объяснить нелинейный характер их зависимости с ростом ε . Необходимое для этого определение первой поправки к решению представляет определенные вычислительные трудности.

Список литературы

1. Leissa A. W. Vibration of plates. Washington, US : Government Printing Office, 1969. 353 p.
2. Bauer S. M., Filippov S. B., Smirnov A. L., Tovstik P. E., Vaillancourt R. Asymptotic methods in mechanics of solids. Basel : Birkhäuser, 2015. 325 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-18311-4>
3. Vasiliev G. P., Smirnov A. L. Free vibration frequencies of a circular thin plate with variable parameters // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. 2020. Vol. 53, № 3. P. 351–357. <https://doi.org/10.1134/S1063454120030140>
4. Smirnov A. L. Free vibrations of annular circular and elliptic plates // COMPDYN Proceedings. 2019. Vol. 2. P. 3547–3555.
5. Eisenberger M., Jabareen M. Axisymmetric vibrations of circular and annular plates with variable thickness // International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2001. Vol. 1, iss. 2. P. 195–206. <https://doi.org/10.1142/S0219455401000196>
6. Prasad C., Jain R. K., Soni S. R. Axisymmetric vibrations of circular plates of linearly varying thickness // Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP). 1972. Vol. 23. P. 941–948. <https://doi.org/10.1007/BF01596221>



7. Singh B., Saxena V. Axisymmetric vibration of a circular plate with exponential thickness variation // *Journal of Sound and Vibration*. 1996. Vol. 192, iss. 1. P. 35–42. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0174>
8. Bauer S. M., Voronkova E. B. On natural frequencies of transversally isotropic circular plates // *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics*. 2016. Vol. 49, № 1. P. 77–80. <https://doi.org/10.3103/S1063454116010027>
9. Аникина Т. А., Ватульян А. О., Углич П. С. Об определении переменной жесткости круглой пластины // *Вычислительные технологии*. 2012. Т. 17, № 6. С. 26–35.
10. Бауэр С. М., Воронкова Е. Б. Потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия пологих сферических оболочек под действием внутреннего давления // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика*. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 390–396. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-390-396>

References

1. Leissa A. W. *Vibration of plates*. Washington, US, Government Printing Office, 1969. 353 p.
2. Bauer S. M., Filippov S. B., Smirnov A. L., Tovstik P. E., Vaillancourt R. *Asymptotic methods in mechanics of solids*. Basel, Birkhäuser, 2015. 325 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-18311-4>
3. Vasiliev G. P., Smirnov A. L. Free vibration frequencies of a circular thin plate with variable parameters. *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics*, 2020, vol. 53, no. 3, pp. 351–357. <https://doi.org/10.1134/S1063454120030140>
4. Smirnov A. L. Free vibrations of annular circular and elliptic plates. *COMPADYN Proceedings*, 2019, vol. 2, pp. 3547–3555.
5. Eisenberger M., Jabareen M. Axisymmetric vibrations of circular and annular plates with variable thickness. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2001, vol. 1, iss. 2, pp. 195–206. <https://doi.org/10.1142/S0219455401000196>
6. Prasad C., Jain R. K., Soni S. R. Axisymmetric vibrations of circular plates of linearly varying thickness. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 1972, vol. 23, pp. 941–948. <https://doi.org/10.1007/BF01596221>
7. Singh B., Saxena V. Axisymmetric vibration of a circular plate with exponential thickness variation. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, vol. 192, iss. 1, pp. 35–42. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0174>
8. Bauer S. M., Voronkova E. B. On natural frequencies of transversally isotropic circular plates. *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics*, 2016, vol. 49, no. 1, pp. 77–80. <https://doi.org/10.3103/S1063454116010027>
9. Anikina T. A., Vatulyan A. O., Uglich P. S. On the calculation of variable stiffness for a circular plate. *Computational Technologies*, 2012, vol. 17, no. 6, pp. 26–35 (in Russian).
10. Bauer S. M., Voronkova E. B. On the unsymmetrical buckling of shallow spherical shells under internal pressure. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 390–396 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-390-396>

Приложение / Appendix

Для уравнений первого приближения

$$F_{11} = ((3H_1 + E_1) \cdot R_1 + CH_{01}) \cdot W_0^T, \quad F_{12} = 4\lambda_0^3 w_0(r).$$

Для уравнений второго приближения

$$F_{22} = F_{12},$$



$$F_{21} = ((3H_2 + E_2).R_1 + B_1 + (H_1.(3R_1, R_2, R_3))^T.E_1^T + \\ + \sum_{i=1}^5 H_1.A_i.H_1^T + CH_{11}).W_0^T + ((3H_1 + E_1).R_1 + B_2 + CH_{01}).W_1^T.$$

Здесь

$$W_0 = (w_0(r), w_0'(r), w_0''(r), w_0'''(r), w_0''''(r)), \quad W_1 = (w_1(r), w_1'(r), w_1''(r), w_1'''(r), w_1''''(r)),$$

$$H_1 = (h_1(r), h_1'(r), h_1''(r)), \quad E_1 = (e_1(r), e_1'(r), e_1''(r)),$$

$$H_2 = (h_2(r), h_2'(r), h_2''(r)), \quad E_2 = (e_2(r), e_2'(r), e_2''(r)),$$

$$C_0 = (\lambda_0^4, 0, 0), \quad C_1 = (4\lambda_0^3\lambda_1, 0, 0),$$

$$CH_{01} = (C_0.H_1^T, 0, 0, 0, 0), \quad CH_{11} = (C_1.H_1^T, 0, 0, 0, 0),$$

$$B_1 = (6\lambda_0^2\lambda_1^2, 0, 0, 0, 0), \quad B_2 = (4\lambda_0^3\lambda_1, 0, 0, 0, 0),$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} -\frac{m^2(m^2-4)}{r^4} & -\frac{2m^2+1}{2m^2+1} & \frac{2m^2+1}{r^2} & -\frac{2}{r} & -1 \\ -\frac{3m^2}{m^2\nu} & \frac{2m^2+1}{r^2} & -\frac{\nu+2}{r} & -2 & 0 \\ \frac{r^3}{r^2} & -\frac{\nu}{r} & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} -\frac{9m^2}{r^3} & \frac{6m^2+3}{r^2} & -\frac{3(\nu+2)}{r} & -6 & 0 \\ \frac{6m^2\nu}{r^2} & -\frac{6\nu}{r} & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} \frac{3m^2\nu}{r^2} & -\frac{3\nu}{r} & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{3m^2(4-m^2)}{r^4} & -\frac{9m^2}{6m^2r^2\nu} & \frac{3m^2\nu}{r^2} \\ -\frac{9m^2}{r^3} & \frac{6m^2r^2\nu}{r^4} & 0 \\ \frac{3m^2\nu}{r^2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{6m^2}{r^3} - \frac{3}{r^3} & \frac{6m^2}{r^2} + \frac{3}{r^2} & -\frac{3\nu}{r} \\ \frac{6m^2}{r^2} + \frac{3}{r^2} & -\frac{6\nu}{r} & 0 \\ -\frac{3\nu}{r} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -\frac{6}{r} & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \frac{3(2m^2+1)}{r^2} & -\frac{3\nu}{r} - \frac{6}{r} & -3 \\ -\frac{3\nu}{r} - \frac{6}{r} & -6 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поступила в редакцию / Received 13.05.2020

Принята к публикации / Accepted 31.10.2020

Опубликована / Published 31.05.2021



ИНФОРМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 238–245
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 238–245

Научная статья

УДК 519.17

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-238-245>

Примитивные однородные графы с экспонентом 2 и числом вершин до 16

М. Б. Абросимов^{1✉}, И. В. Лось¹, С. В. Костин²

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

²МИРЭА — Российский технологический университет, Россия, 119454, г. Москва, просп. Вернадского, д. 78

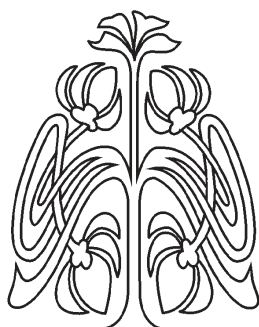
Абросимов Михаил Борисович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, mic@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4473-8790>

Лось Илья Викторович, аспирант кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, los.ilia.ru@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6393-7157>

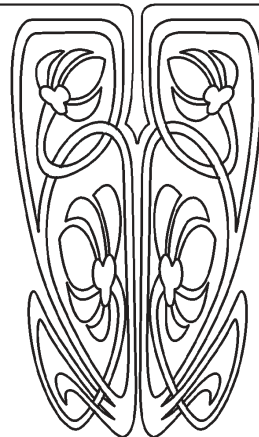
Костин Сергей Вячеславович, старший преподаватель, <https://orcid.org/0000-0003-3690-1233>, kostinsv77@mail.ru

Аннотация. Граф $G = (V, \alpha)$ называется *примитивным*, если существует натуральное k , такое что между любой парой вершин графа G существует маршрут длины k . В работе рассматриваются неориентированные графы с экспонентом 2. Доказывается критерий примитивности графа с экспонентом 2 и необходимое условие. Граф является примитивным с экспонентом 2 тогда и только тогда, когда его диаметр равен 1 или 2, а каждое его ребро входит в треугольник. Описывается вычислительный эксперимент по построению всех примитивных однородных графов с числом вершин до 16 и экспонентом 2, анализируются его результаты. Приводятся все однородные графы порядка 2, 3 и 4, которые являются примитивными с экспонентом 2, а для однородных графов порядка 5 определяется количество примитивных графов с экспонентом 2.

Ключевые слова: примитивные графы, экспонент графа, однородные графы, регулярные графы



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Благодарности: Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0006).

Для цитирования: Абросимов М. Б., Лось И. В., Костин С. В. Примитивные однородные графы с экспонентом 2 и числом вершин до 16 // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 238–245. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-238-245>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-238-245>

The construction of all nonisomorphic minimum vertex extensions of the graph by the method of canonical representatives

M. B. Abrosimov^{1✉}, I. V. Los¹, S. V. Kostin²

¹Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

²MIREA — Russian Technological University, 78 Vernadskogo Ave., Moscow 119454, Russia

Mikhail B. Abrosimov, mic@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4473-8790>

Ilya V. Los, los.ilia.ru@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6393-7157>

Sergej V. Kostin, kostinsv77@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3690-1233>

Abstract. A graph $G = (V, \alpha)$ is called *primitive* if there exists a natural k such that between any pair of vertices of the graph G there is a route of length k . This paper considers undirected graphs with exponent 2. A criterion for the primitivity of a graph with the exponent 2 and a necessary condition are proved. A graph is primitive with the exponent 2 if and only if its diameter is 1 or 2, and each of its edges is included in a triangle. A computational experiment on the construction of all primitive homogeneous graphs with the number of vertices up to 16 and the exponent 2 is described, its results are analyzed. All homogeneous graphs of orders 2, 3, and 4, which are primitive with the exponent 2, are given, and for homogeneous graphs of order 5, the number of primitive graphs with the exponent 2 is determined.

Keywords: primitive graphs, exponent of graph, regular graphs

Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the state task (project No. FSRR-2020-0006).

For citation: Abrosimov M. B., Los I. V., Kostin S. V. The construction of all nonisomorphic minimum vertex extensions of the graph by the method of canonical representatives. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 238–245 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-238-245>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Матрица A называется *неотрицательной*, если все ее элементы являются неотрицательными действительными числами, и *положительной*, если все ее элементы — положительные числа. Неотрицательная квадратная матрица A называется *примитивной*, если существует натуральное k такое, что A^k положительна [1]. Минимальное такое значение k называется *экспонентом* матрицы A . Если рассматривать квадратную матрицу как матрицу смежности графа, то понятие примитивности естественным образом переносится на графы. В работе [2] была



получена универсальная оценка экспонента n -вершинного примитивного орграфа. Обзор по оценкам экспонентов матриц и графов можно найти в работе [3]. Ряд работ посвящен исследованию экспонентов однородных примитивных матриц [4,5]. В работе [6] рассматриваются примитивные матрицы с экспонентом 2. С точки зрения графов рассматриваемые в этих работах матрицы соответствуют орграфам. В данной работе мы будем рассматривать простые неориентированные однородные графы с экспонентом 2. Примитивные графы представляют большой интерес как с прикладной, так и с теоретической точек зрения [7–10].

Вершина v достижима из вершины u за $k \geq 1$ шагов, если существует последовательность ребер (маршрут) $\{u, w_1\}, \{w_1, w_2\}, \dots, \{w_{k-1}, v\}$. Если A — матрица смежности графа $G = (V, \alpha)$, т. е. двоичная булева матрица отношения смежности α , то достижимость вершины v из вершины u за k шагов означает, что на пересечении строки и столбца, соответствующих вершинам u и v , в матрице A^k стоит 1.

Граф $G = (V, \alpha)$ называется *примитивным*, если существует натуральное k такое, что между любой парой вершин графа G существует маршрут длины k (иначе говоря, в матрице A^k все элементы равны 1). Минимальное такое значение k называется *экспонентом* графа G и обозначается $\text{exp}(G)$.

Однородным или *регулярным* n -вершинным графом порядка p называется простой неориентированный n -вершинный граф, все вершины которого имеют степень p . Множество n -вершинных однородных графов порядка p будем обозначать $R_{n,p}$.

Очевидно, что любой примитивный граф является связным. Цикл длины 3 называют треугольником. Через $g(G)$ будем обозначать обхват графа G , т. е. наименьшую из длин циклов графа G . Напомним, что *эксцентриситетом* вершины называется расстояние до максимально удаленной от нее вершины, а *диаметром* графа G называется максимальный эксцентриситет его вершин и обозначается $d(G)$. Так как в неориентированных графах нет петель, то примитивных графов с экспонентом, равным 1, не существует, т. е. $\text{exp}(G) > 1$. Нас будут интересовать однородные графы с $\text{exp}(G) = 2$. Очевидно, что диаметр таких графов $d(G) \leq 2$, однако это условие не является достаточным. Например, полный граф K_2 имеет диаметр 1, но не является примитивным, а цепь P_3 имеет диаметр 2, но также не является примитивным графом.

Теорема 1. *Граф G является примитивным с $\text{exp}(G) = 2$ тогда и только тогда, когда $d(G) \leq 2$ и каждое ребро графа G входит в треугольник.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G — примитивный граф с $\text{exp}(G) = 2$. Рассмотрим две произвольные различные вершины u, v . В силу примитивности между ними есть путь длины 2, следовательно, эксцентриситет этих вершин не превосходит 2. В силу произвольности выбора вершин получаем, что и диаметр графа $d(G) \leq 2$. Заметим, что $d(G) = 1$ только для полного графа. Полный n -вершинный граф K_n является однородным графом порядка $n - 1$ и при $n > 2$ примитивным с экспонентом $\text{exp}(K_n) = 2$.

Рассмотрим две произвольные смежные вершины u, v . Между ними должен быть путь длины 2, который не может содержать ребро $\{u, v\}$. Следовательно, есть отличная от u и v вершина w , смежная с u и v . Таким образом, ребро $\{u, v\}$ входит в треугольник, образованный вершинами u, v и w .

Достаточность. Пусть в произвольном графе G с диаметром $d(G) \leq 2$ каждое ребро графа G входит в треугольник. Тогда граф G — связный, и очевидно, что в нем



есть маршрут длины 2 из любой вершины в саму себя. Покажем, что такой маршрут есть и между любыми двумя различными вершинами u и v . Так как $d(G) \leq 2$, то $d(u, v) \leq 2$. Если вершины u и v несмежны, то между ними нет маршрута длины 1, следовательно, есть маршрут длины 2.

Если вершины u и v смежны, то по условию ребро $\{u, v\}$ входит в треугольник, следовательно, есть отличная от u и v вершина w , смежная с u и v , получаем маршрут длины 2: uvw . □

Заметим, что второе условие теоремы отдельно также не является достаточным.

На рис. 1 представлен 10-вершинный однородный граф порядка 4. Каждое ребро этого графа входит в треугольник, граф является примитивным, однако его экспонент равен 3.

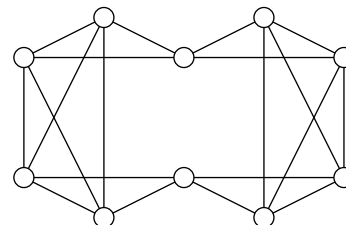


Рис. 1. 10-вершинный однородный граф порядка 4 с $\text{exp}(G) = 3$

Fig. 1. A 4-regular graph with 10 vertices and $\text{exp}(G) = 3$

Если рассматривать произвольные графы, то можно найти пример с меньшим числом вершин. На рис. 2 представлен 7-вершинный граф с $\text{exp}(G) = 3$, каждое ребро которого входит в треугольник.

Следующий результат можно использовать как необходимое условие примитивности графа с $\text{exp}(G) = 2$.

Следствие 1. Пусть G — примитивный граф с $\text{exp}(G) = 2$. Тогда его обхват $g(G) = 3$.

Легко заметить, что любой полный граф K_n при $n > 2$ является примитивным, и $\text{exp}(K_n) = 2$. Так как каждое ребро примитивного графа G с $\text{exp}(G) = 2$ входит в треугольник, то степень всех вершин графа G не ниже 2. Оказывается, оценку минимальной степени вершин графов с экспонентом, равным 2, можно уточнить. В работе [6] получен следующий результат: для неориентированных графов с экспонентом 2 минимальное число ребер есть $\frac{3n-3}{2}$ для нечетного n и $\frac{3n-2}{2}$ для четного n . Из этого сразу следует

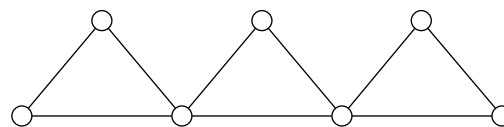


Рис. 2. 7-вершинный граф с $\text{exp}(G) = 3$

Fig. 2. A graph with 7 vertices and $\text{exp}(G) = 3$

Теорема 2. Среди однородных графов $R_{n,2}$ только граф K_3 имеет экспонент, равный 2.

Кубические графы (напомним, что это однородные графы порядка 3) содержат $\frac{3n}{2}$ ребер и удовлетворяют условию из работы [6]. Однако и кубический граф с экспонентом 2 только один.

Теорема 3. Среди кубических графов $R_{n,3}$ только граф K_4 имеет экспонент, равный 2.

Доказательство. Пусть G — примитивный кубический n -вершинный граф с $\text{exp}(G) = 2$, причем $n > 4$. По следствию 2 обхват графа G равен 3. Рассмотрим произвольный треугольник в графе G : u_1, u_2, u_3 . Так как граф G кубический, то вершина u_1 кроме вершин u_2 и u_3 смежна еще с одной вершиной w . Рассмотрим



ребро $\{u_1, w\}$. По теореме 1 это ребро должно входить в треугольник. Так как кроме w вершина u_1 смежна только с вершинами u_2 и u_3 , то w должна быть смежна с одной из них. Если вершина w смежна и с u_2 и с u_3 , то получаем граф K_4 . Не ограничивая общности, будем считать, что вершина w смежна с u_2 , но несмежна с u_3 . Следовательно, вершина w смежна еще с некоторой вершиной v , отличной от u_1, u_2 и u_3 . Снова по теореме 1 ребро $\{w, v\}$ должно входить в некоторый треугольник. Однако вершина w кроме v смежна только с u_1 и u_2 , а вершина v с ними смежной быть не может, так как вершины u_1 и u_2 имеют степень 3, причем смежны между собой и с вершинами w и u_3 . Получили противоречие. \square

Теорема 4. Если $p > n/2$, то любой n -вершинный однородный граф порядка p является примитивным с экспонентом, равным 2.

Доказательство. Пусть $G = (V, \alpha)$ — произвольный p -однородный n -вершинный граф, причем $p > n/2$.

Выберем две произвольные несмежные вершины u и v . Так как $d(u) + d(v) = 2p > n$, то существует, по крайней мере, одна вершина, смежная с u и v , следовательно, расстояние между произвольными несмежными вершинами графа G равно 2. В частности, это означает, что $d(G) \leq 2$.

Выберем две произвольные смежные вершины u и v . В этом случае есть $p - 1$ вершина из $V \setminus \{u, v\}$, смежная с u . Аналогично, есть $p - 1$ вершина из $V \setminus \{u, v\}$, смежная с v . Так как $p - 1 + p - 1 = 2p - 2 > n - 2$, то существует, по крайней мере, одна вершина из $V \setminus \{u, v\}$, смежная с u и с v , следовательно, между двумя произвольными смежными вершинами графа G есть путь длины 2. В частности, это означает, что произвольное ребро $\{u, v\}$ входит в треугольник. Таким образом, и непосредственно по определению, и по теореме 1 получаем, что граф G является примитивным и имеет $\text{exp}(G) = 2$. \square

Результат этой теоремы является неулучшаемым. Например, на рис. 3 приведены все кубические 6-вершинные графы. Первый граф является примитивным, но имеет экспонент 3, а второй — не является примитивным. 8-вершинных однородных графов порядка 4 всего 6 [11], но только 2 являются примитивными с экспонентом 2.

В работе [4] доказывается, что однородные ориентированные графы порядка p (степени исхода и захода каждой вершины равны p) с экспонентом, равным 2, могут быть при следующих значениях n :

$$p + 1 \leq n \leq 2p - 1.$$

Если рассматривать каждое ребро неориентированного графа как пару встречных дуг, то однородный неориентированный граф порядка p можно рассматривать как однородный ориентированный граф порядка $2p$. Тогда оценка для неориентированных графов принимает вид

$$p + 1 \leq n \leq 4p - 1.$$

Нижняя оценка достигается для полных графов K_n .

Был произведен вычислительный эксперимент с использованием кластера высокопроизводительных вычислений ПРЦ НИТ СГУ (<http://prcnit.sgu.ru>) по подсчету однородных графов с экспонентом, равным 2, и числом вершин до 16 [12].

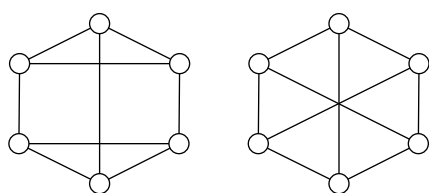


Рис. 3. Два 6-вершинных кубических графа

Fig. 3. Two cubic graphs with 6 vertices

граф порядка $2p$. Тогда оценка для неориентированных графов принимает вид



Результаты представлены в таблице. Темным цветом выделены ячейки, которые соответствуют полным графам: $n = p - 1$. Выше этих ячеек стоят нули, так как однородных графов с такими значениями n и p не существует. Серым цветом в таблице выделены значения, которые подпадают под действие теоремы 4: все соответствующие однородные графы являются примитивными с экспонентом 2, непосредственных вычислений для таких значений n и p можно не производить. Остальные значения вычислялись в рамках эксперимента. Для генерации однородных графов использовалась программа GENREG [11].

Таблица / Table

Число однородных графов с экспонентом 2 для различных n и p
 The number of p -regular graphs with the exponent 2 for different values n and p

$n \backslash p$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
8	2	3	1	1	0	0	0	0	0	0
9	3	0	4	0	1	0	0	0	0	0
10	0	24	21	5	1	1	0	0	0	0
11	1	0	266	0	6	0	1	0	0	0
12	0	210	5457	1547	94	9	1	1	0	0
13	0	0	135775	0	10786	0	10	0	1	0
14	0	116	2806846	18851867	3459386	88193	540	13	1	1
15	0	0	40242765	0	1470293676	0	805579	0	17	0
16	0	2	337592332	214047388578	733351105935	113314233813	2585136741	8037796	4207	21

Для выявления примитивности применялось возведение матрицы смежности графа в степень 2 и проводилась последующая проверка полученной в результате матрицы на отсутствие нулей. При текущих ограничениях на $n \leq 16$ строки матрицы можно хранить в виде двоичных масок в любом 32-битном типе данных, например в типе int. В этом случае легко свести перемножение двух матриц, представленных в таком виде, к последовательному применению побитовой операции И (&) к парам чисел, хранящих нужные строки матриц, если вторую матрицу хранить в транспонированном виде. Это позволяет выполнять умножение двух матриц за время порядка $O(n^2)$.

Отдельно были обработаны связанные однородные 18-вершинные графы порядка 5. Заметим, что всего таких графов 2 807 105 250 897 (<https://oeis.org>, Sequence A006821), и их полный перебор чрезвычайно затруднителен, поэтому проводился целенаправленный поиск графов с обхватом 3, удовлетворяющих теореме 1. Среди них не оказалось примитивных графов с экспонентом 2. Таким образом, если оценить количество примитивных однородных графов порядка p с экспонентом 2, то при $p = 2$ и $p = 3$ есть только по одному графу K_3 и K_4 соответственно. При $p = 4$ есть 10 графов с числом вершин n при $5 \leq n \leq 11$: полный граф K_5 , граф $R_{6,4}$, который получается из полного графа K_6 удалением трех ребер между тремя парами различных вершин, и 8 графов, приведенные на рис. 4. Изображение 11-вершинного 4-однородного графа с экспонентом 2 приводится по работе [13]. Наконец, при $p = 5$ есть только 356 примитивных однородных графов порядка 5 с экспонентом 2 при $5 \leq n \leq 11$.

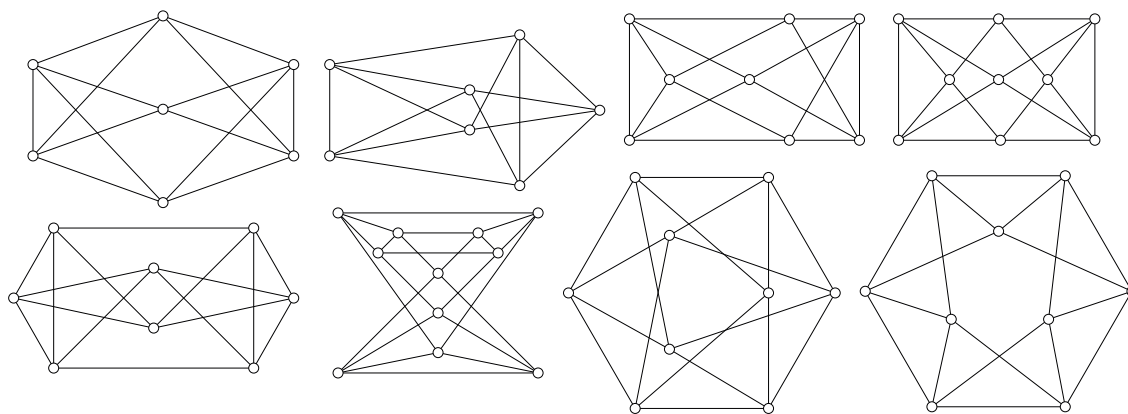


Рис. 4. Однородные примитивные графы порядка 4 с $\exp(G) = 2$
 Fig. 4. The number of p -regular graphs with the exponent 2 for different values n and p

Список литературы

1. Frobenius F. G. Über Matrizen aus nicht negativen Elementen. Berlin : Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1912. 22 p.
2. Wielandt H. Unzerlegbare, nicht negative Matrizen // Mathematische Zeitschrift. 1950. Vol. 52. P. 642–648. <https://doi.org/10.1007/BF02230720>
3. Фомичев В. М., Аvezова Я. Э., Коренева А. М., Кязин С. Н. Примитивность и локальная примитивность орграфов и неотрицательных матриц // Дискретный анализ и исследование операций. 2018. Т. 25, вып. 3. С. 95–125. <https://doi.org/10.17377/daio.2018.25.595>
4. Jin M., Lee S. G., Seol H. G. Exponents of r -regular primitive matrices // Information Center for Mathematical Sciences. 2003. Vol. 6, № 2. P. 51–57.
5. Bueno M. I., Furtado S. On the exponent of R -regular primitive matrices // ELA. The Electronic Journal of Linear Algebra. 2008. Vol. 17. P. 28–47. <https://doi.org/10.13001/1081-3810.1247>
6. Kim B., Song B., Hwang W. Nonnegative primitive matrices with exponent 2 // Linear Algebra and its Applications. 2005. № 407. P. 162–168. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2005.05.018>
7. Сачков В. Н., Ошкин И. Б. Экспоненты классов неотрицательных матриц // Дискретная математика. 1993. Т. 5, № 2. P. 150–159.
8. Салий В. Н. Минимальные примитивные расширения ориентированных графов // Прикладная дискретная математика. 2008. № 1 (1). P. 116–119.
9. Фомичев В. М. Оценки экспонентов примитивных графов // Прикладная дискретная математика. 2011. № 2 (12). P. 101–112.
10. Фомичев В. М., Аvezова Я. Э. Точная формула экспонентов перемешивающих орграфов регистровых преобразований // Дискретный анализ и исследование операций. 2020. Т. 27, вып. 2 (27). P. 117–135. <https://doi.org/10.33048/daio.2020.27.670>
11. Meringer M. Fast generation of regular graphs and construction of cages // Journal of Graph Theory. 1999. Vol. 30, iss. 2. P. 137–146. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0118\(199902\)30:2<137::AID-JGT7>3.0.CO;2-G](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199902)30:2<137::AID-JGT7>3.0.CO;2-G)
12. Абросимов М. Б., Костин С. В. К вопросу о примитивных однородных графах с экспонентом равным 2 // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2017. № 10. С. 131–134. <https://doi.org/10.17223/2226308X/10/51>
13. Костин С. В. Об использовании задач по теории графов для интеллектуального развития учащихся // Математика в образовании. 2014. Вып. 10. С. 68–74.



References

1. Frobenius F. G. *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen*. Berlin, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1912. 22 p.
2. Wielandt H. Unzerlegbare nicht negative Matrizen. *Mathematische Zeitschrift*, 1950, vol. 52, pp. 642–648. <https://doi.org/10.1007/BF02230720>
3. Fomichev V. M., Avezova Y. E., Koreneva A. M., Kyazhin S. N. Primitivity and local primitivity of digraphs and nonnegative matrices. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2018, vol. 12, iss. 3, pp. 453–469. <https://doi.org/10.1134/S1990478918030067>
4. Jin M., Lee S. G., Seol H. G. Exponents of r-regular primitive matrices. *Information Center for Mathematical Sciences*, 2003, vol. 6, no. 2, pp. 51–57.
5. Bueno M. I., Furtado S. On the exponent of R-regular primitive matrices. *ELA. The Electronic Journal of Linear Algebra*, 2008, vol. 17, pp. 28–47. <https://doi.org/10.13001/1081-3810.1247>
6. Kim B., Song B., Hwang W. Nonnegative primitive matrices with exponent 2. *Linear Algebra and its Applications*, 2005, no. 407, pp. 162–168. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2005.05.018>
7. Sachkov V. N., Oshkin I. B. Exponents of classes of non-negative matrices. *Discrete Mathematics and Applications*, 1993, vol. 3, iss. 4, pp. 365–375.
8. Salii V. N. Minimal primitive extensions of oriented graphs. *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*, 2008, no. 1 (1), pp. 116–119 (in Russian).
9. Fomichev V. M. The estimates of exponents for primitive graphs. *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*, 2011, no. 2 (12), pp. 101–112 (in Russian).
10. Fomichev V. M., Avezova Y. E. The exact formula for the exponents of the mixing digraphs of register transformations. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2020, vol. 14, iss. 2, pp. 308–319. <https://doi.org/10.1134/S199047892002009X>
11. Meringer M. Fast generation of regular graphs and construction of cages. *Journal of Graph Theory*, 1999, vol. 30, iss. 2, pp. 137–146. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0118\(199902\)30:2<137::AID-JGT7>3.0.CO;2-G](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199902)30:2<137::AID-JGT7>3.0.CO;2-G)
12. Abrosimov M. B., Kostin S. V. About primitive regular graphs with exponent 2. *Applied Discrete Mathematics. Supplement*, 2017, no. 10, pp. 131–134 (in Russian). <https://doi.org/10.17223/2226308X/10/51>
13. Kostin S. V. On the use of graph theory problems for the intellectual development of students. *Matematika v obrazovanii* [Mathematics in Education], 2014, iss. 10, pp. 68–74 (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 24.07.2020

Принята к публикации / Accepted 12.10.2020

Опубликована / Published 31.05.2021



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 246–258
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 246–258

Научная статья

УДК 681.518.3

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-246-258>

Средства имитации для автоматизированных систем, применяемых при испытаниях стрелкового оружия

А. Ю. Вдовин

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова, Россия, 426069, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7

Вдовин Алексей Юрьевич, кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной техники, vd_aleks@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8268-3375>

Аннотация. В настоящее время для тестирования различного оборудования и оценки его параметров широко применяются разнообразные имитаторы (средства имитации). Основная цель разработки новых средств имитации в сфере создания автоматизированных систем, применяемых при испытаниях стрелкового оружия, заключается в ускорении и удешевлении процесса разработки и внедрения в эксплуатацию подобных систем. В статье рассмотрены общие структуры применяемых при испытаниях стрелкового оружия информационно-измерительных систем на основе акустических и оптических блокирующих устройств, а также на основе видеокамеры. Исходя из рассмотренных структур, предложена классификация средств имитации (СИ): СИ массива цифровых данных (программные варианты), СИ аналоговых сигналов датчиков системы (аппаратные и программно-аппаратные), СИ иницирующих воздействий на чувствительные элементы системы (аппаратные и программно-аппаратные). Выполнен подробный анализ сравнительных преимуществ и недостатков упомянутых типов имитаторов, описаны возможные трудности при их создании, ограничения на применение того или иного варианта реализации, а также перспективы их развития и применения.

Ключевые слова: средство имитации, имитатор, классификация, испытания, стрелковое оружие

Для цитирования: Вдовин А. Ю. Средства имитации для автоматизированных систем, применяемых при испытаниях стрелкового оружия // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 246–258. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-246-258>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-246-258>

Imitation tools for automated systems used in small arms testing

A. Yu. Vdovin

Kalashnikov Izhevsk State Technical University, 7 Studencheskaya St., Izhevsk 426069, Russia

Aleksey Yu. Vdovin, vd_aleks@mail.ru, <http://orcid.org/0000-0001-8268-3375>



Abstract. Currently, various imitators (imitation tools) are widely used to test various equipment and evaluate its parameters. The main goal of developing new imitation tools in the field of creating automated systems used in testing small arms is to accelerate and cheapen the development and implementation of such systems. The article discusses the general structure of information-measuring systems used in testing small arms based on acoustic and optical blocking devices, as well as on the basis of a video camera. Based on the considered structures, a classification of imitation tools (IT) is proposed: IT of digital data array (software), IT of analog signals of system sensors (hardware and software-hardware), IT of initiating effects on sensitive elements of the system (hardware and software-hardware). A detailed analysis of the comparative advantages and disadvantages of imitators of these types is carried out, possible difficulties in their creation, restrictions on the use of one or another implementation variety, as well as prospects for their development and application are described.

Keywords: imitation tools, imitator, classification, testing, small arms

For citation: Vdovin A. Yu. Imitation tools for automated systems used in small arms testing. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 246–258 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-246-258>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Введение

Имитаторы сигналов (в программном или аппаратном исполнении) широко применяются в самых различных областях науки и техники для проверки работоспособности, тестирования различных функций и оценки параметров радионавигационного [1, 2], радиолокационного [3], гидроакустического [4] и медицинского [5] оборудования, геофизической аппаратуры [6]. Подобные имитаторы используются и в сфере создания автоматизированных систем, применяемых при испытаниях стрелкового оружия (АС ИСО), например, для оценки параметров движения пуль и снарядов [7, 8], а также узлов автоматики стрелкового оружия [9–11]. Мы будем рассматривать, главным образом, АС ИСО, построенные с использованием видеокамеры [12], а также фотоэлектронных и акустических блокирующих устройств [13–19]. Структурные схемы систем на основе блокирующих устройств и видеокамеры представлены на рис. 1, а и б соответственно.

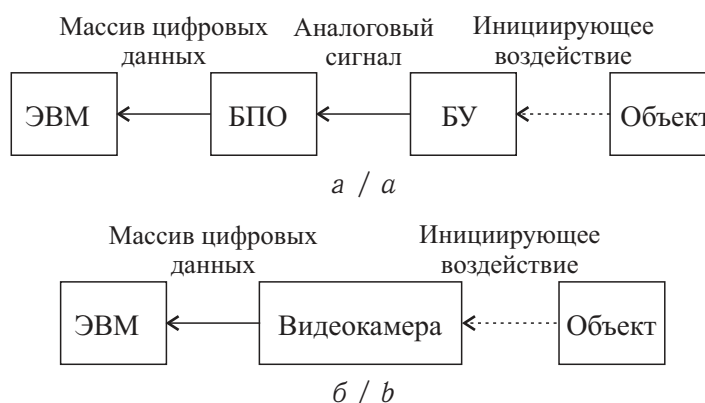


Рис. 1. Структурная схема АС ИСО, построенных с использованием блокирующих устройств (а) и видеокамеры (б)

Fig. 1. The block diagram of AS ISO, built using blocking devices (a) and video cameras (b)



Имитатором для АС ИСО будем называть программное, программно-аппаратное или аппаратное средство, предназначенное для создания некоего воздействия на один или несколько элементов системы. Система выдаст результат, который мог быть получен и при реальном испытании (выстреле), само такое воздействие будем называть иницирующим.

На рис. 1 используются следующие обозначения: БУ — блокирующие устройства системы (оптические или акустические), БПО — блок предварительной обработки (цифровой виртуальный осциллограф или устройство на основе микроконтроллера), предназначенный для временного хранения и оцифровки данных с датчиков. Под иницирующим воздействием будем понимать воздействие объекта на видеокамеру или блокирующие устройства системы, осуществляемое при реальном выстреле. Объектом в данном случае будем называть объект исследования (например, пулю или элемент автоматики стрелкового оружия в случае с использованием фотоэлектронных блокирующих устройств, лист с отметками дробовых или пулевых попаданий в случае использования видеокамеры). В системах на основе блокирующих устройств после запуска основной программы обработки данных на ЭВМ осуществляется конфигурирование БПО, затем он инициализируется и переходит в состояние регистрации сигналов, поступающих с датчиков на входы его каналов. При выполнении выстрела БПО фиксирует событие запуска (по превышению заданной пороговой величины напряжения) и формирует буфер данных, который отправляется на ПК и автоматически сохраняется там в файле специального формата. Затем осуществляется математическая обработка данных [20]. В системах на основе видеокамеры программа последовательно формирует разностные кадры и осуществляет оценку произошедших изменений. При превышении заданной пороговой величины фиксирует событие запуска, после чего формирует буфер данных, который сохраняется на ПК в файле. Далее осуществляется математическая обработка данных.

1. Классификация средств имитации

Средства имитации для АС ИСО, имея единую цель своего создания, заключающуюся в ускорении и удешевлении процесса разработки и введения в эксплуатацию автоматизированных систем для испытаний стрелкового оружия, могут при этом решать достаточно широкий спектр различных задач. Предлагается следующая классификация средств имитации (СИ), применяемых при создании АС ИСО (рис. 2). Необходимо иметь в виду, что часть таксонов в предлагаемой классификации относится не ко всем типам АС ИСО (с учетом рис. 1).

Такой вариант классификации предусматривает разделение средств имитации на типы в зависимости от того, что именно имитируется:

- 1) массив цифровых данных, поступающих основной программе АС ИСО для обработки;
- 2) совокупность аналоговых сигналов, поступающих на вход БПО;
- 3) иницирующее воздействие объекта на видеокамеру или блокирующие устройства системы.

Рассмотрим некоторые варианты реализации подобных имитаторов, применяемых на различных этапах создания и внедрения АС ИСО (далее будем руководствоваться терминами ГОСТ 34.601-90 «Автоматизированные системы. Стадии создания»), их возможности, сравнительные преимущества и недостатки.



Рис. 2. Классификация средств имитации для АС ИСО
 Fig. 2. The classification of simulations for AS ISO

2. Средства имитации массива цифровых данных, поступающего для обработки основной программе АС ИСО

Элементарными будем называть СИ массива цифровых данных, основанные на дублировании данных реальных опытов. К таким вариантам относится, например, подпрограмма, включаемая в состав программного обеспечения системы и позволяющая загружать файлы, сохраненные при выполнении реальных выстрелов. Этот вариант имеет смысл применять лишь на заключительных стадиях создания системы (при отладке разрабатываемого программного обеспечения, во время предварительных испытаний и при опытной эксплуатации). Основной недостаток варианта заключается в том, что отсутствует возможность внесения каких-либо изменений в условия уже проведенных экспериментов.

Следующий по сложности вариант — создание специальных имитационных моделей сигналов с необходимыми параметрами. Подобное моделирование предоставляет гораздо более широкие возможности: имея приблизительное представление о параметрах шума и полезных импульсов в реальной системе, можно оценить диапазон параметров сигналов, при которых система будет функционировать корректно. Имитационные модели разделим на чисто математические, никак не учитывающие физику процесса формирования сигнала, и модели на основе электронных схем.

Для систем на основе блокирующих устройств даже простейшая имитационная математическая модель, представляющая собой последовательность сгенерированных в заданные моменты прямоугольных импульсов, в некоторых случаях позволяет оценить корректность работы основных алгоритмов созданного программного обеспечения. Для систем с использованием видеокамеры подобной имитационной моделью может быть совокупность кругов на контрастном фоне, сгенерированных в соответствии с необходимыми параметрами. Имитационные математические модели могут быть и существенно более сложными. Например, для системы на основе световых экранов (один из вариантов фотоэлектронных блокирующих устройств) создать подобную модель можно на основе совокупности ранее полученных при выполнении выстрелов сигналов. Для этого можно сформировать некий эталонный импульс, соответствующий пересечению светового эк-



рана пульс определенногo типа, а затем наложить на этот импульс модель шума, генерируемую также на основе апостериорных данных. В этом случае имитационное моделирование позволяет существенно облегчить принятие различных решений при разработке программного обеспечения. Так, например, с помощью имитационных моделей можно осуществить и обосновать выбор оптимального порога срабатывания с точки зрения обнаружения полезного сигнала или выбор оптимального с точки зрения точности критерия определения момента времени прихода импульса (в случае выполнения реальных выстрелов истинное время прихода неизвестно) [21]. Подобные исследования удобно проводить в математических пакетах MATLAB, Scilab, Mathcad, среде разработки LabView. Еще более сложный и трудоемкий вариант создания имитационных моделей предполагает моделирование электронных схем используемых датчиков с помощью симуляторов электронных цепей (например MicroCap [22] или Qucs [23]). При этом возникает необходимость иметь модель воздействия на чувствительный элемент датчика.

В случае системы на основе фотоэлектронных блокирующих устройств потребуется разработка специального программного обеспечения, позволяющего на основе модели перемещения регистрируемого объекта (например пули или элемента автоматики стрелкового оружия) относительно системы датчиков и излучателей в пространстве получить модель воздействия на датчик [24], которая и будет использоваться в симуляторе электронных цепей (рис. 3).

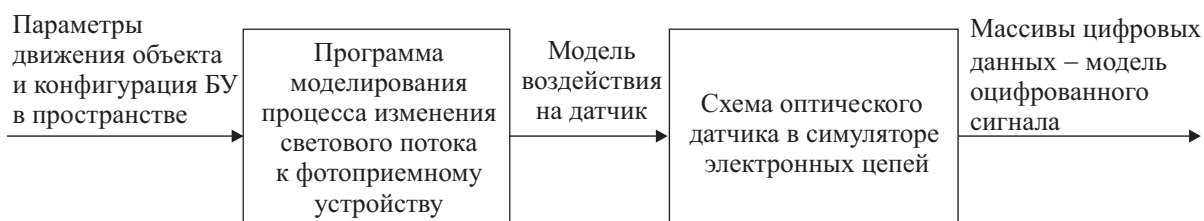


Рис. 3. Моделирование на основе схемы в симуляторе электронных цепей с использованием дополнительно разработанного программного обеспечения

Fig. 3. Simulation based on a circuit in an electronic circuit simulator using additionally developed software

Модель воздействия на датчик при этом представляет собой массив разностей потенциалов на выходе фотодиода, соответствующий процессу изменения светового потока к фотодиоду. При этом на схеме оптического датчика в симуляторе электронных цепей используется эквивалентная схема фотодиода.

Если оптический датчик является достаточно сложным устройством (помимо фотоприемника содержит каскады усилителей, фильтры и проч.) [25], можно использовать еще один вариант имитационной модели на основе электронных схем — модель реакции чувствительного элемента (фотоприемного устройства) на воздействие. Необходимую информацию для построения такой модели можно получить, например, с помощью цифрового осциллографа, измеряя разность потенциалов непосредственно на выходе фотоприемного устройства при выполнении выстрелов.

Для первого случая моделирования электронных схем недостатком является необходимость разработки дополнительного достаточно сложного программного обеспечения, во втором же случае отсутствует возможность какого-либо варьирования условий испытаний (например, для АС ИСО на основе световых экранов [26–28] реакция фотодиода зависит от весовой функции светового экрана [29] и его толщины в точке пересечения объектов, положения регистрируемого объекта



в пространстве и его скорости и проч.). Основное же преимущество имитационного моделирования на основе электронных схем заключается в том, что уже на этапе эскизного проекта можно получить достаточно хорошее представление о форме регистрируемых импульсов.

Все рассмотренные варианты имитационного моделирования применимы уже на ранних стадиях создания автоматизированной системы, начиная с разработки эскизного проекта и вплоть до проведения опытной эксплуатации, при этом разработанную модель можно усложнять по мере накопления апостериорной информации. Важный недостаток всех средств имитации массива цифровых данных в целом состоит в том, что подобное моделирование ориентировано в основном на создание качественных алгоритмов обработки сигналов и не позволяет получить представление о многих существенных характеристиках аппаратной части системы (реальный уровень и характер помех, скорость передачи данных по применяемым интерфейсам с учетом различных ограничений, накладываемых особенностями функционирования в конкретных условиях, и проч.).

3. Средства имитации аналоговых сигналов (только для систем на основе блокирующих устройств)

Решение такой проблемы возможно лишь с применением СИ аналоговых сигналов. При этом создание подобных имитаторов вовсе не обязательно подразумевает дополнительные затраты, наиболее простой вариант предусматривает использование стандартных аппаратных ресурсов компьютера, например, звуковой платы. Схема имитатора сигналов оптических датчиков АС ИСО, разработанного на основе звуковой платы, представлена на рис. 4. Один или два выхода звуковой платы подключаются к измерительным каналам БПО.

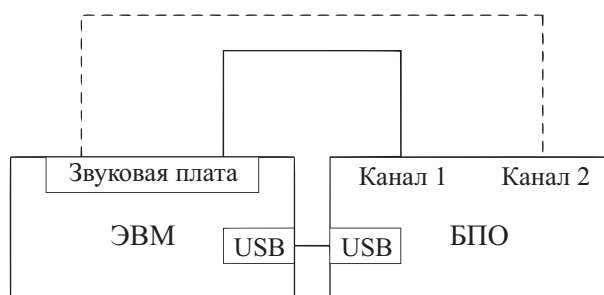


Рис. 4. Схема системы с имитатором сигналов
Fig. 4. The system diagram with a signal simulator

В простейшем случае такой имитатор может генерировать последовательность прямоугольных импульсов, где моменты прихода импульсов рассчитываются на основе математической модели взаимного расположения датчиков (а для фотоэлектронных систем — и излучателей) в пространстве. Недостатки имитаторов на основе звуковой платы целиком обусловлены ограничениями, накладываемыми характеристиками самой звуковой платы, даже при использовании оптических блокирующих устройств желательно иметь частоту дискретизации от 1 МГц и выше (а для акустических [30,31] — от 10МГц [32]), поэтому при генерации сигнала необходимо выполнять передискретизацию (например, на основе линейной интерполяции), что приводит в результате к искажениям формы сигнала [33,34].

Подобные имитаторы позволяют оценить характеристики граничных режимов работы БПО и его канала передачи (например, по быстродействию или по максимальному темпу стрельбы, поддерживаемому системой). Для такого их применения указанные ограничения становятся несущественными, в этом случае вместо сигналов сложной формы достаточно генерировать последовательность прямоугольных импульсов. Если же рассмотренный недостаток принципиален, его можно устранить переходом к варианту имитатора с использованием дополнительной аппаратуры —



специально разработанной платы ЦАП, подключаемой к компьютеру.

Еще одним недостатком имитаторов на основе звуковой платы является потенциальное влияние на стабильность их работы программного обеспечения ПК (ОС и различных приложений). Решение этой проблемы, очевидно, возможно с использованием ПК-независимых имитаторов на основе микроконтроллеров и чисто аппаратных реализаций. В свою очередь, очевидный недостаток аппаратных имитаторов и программно-аппаратных (ПК-независимых и требующих использования дополнительной аппаратуры) — дополнительные затраты на их разработку. Простейший аппаратный имитатор может быть реализован на основе счетчиков и сдвиговых регистров.

4. Средства имитации иницирующих воздействий

Средства имитации иницирующих воздействий, в первую очередь, предназначены для проверки работоспособности чувствительных элементов АС ИСО. Элементарными аппаратными средствами имитации иницирующих воздействий для фотоэлектронных систем могут быть самые простые и доступные источники света (светодиоды, лампы накаливания и проч.), для акустических — источники звука (динамики), для систем с использованием видеокамеры — устройства на основе стробоскопа. В фотоэлектронных системах также возможно применение механических имитаторов, которые более точно позволяют имитировать пересечение светового экрана движущимся объектом. Последний вариант с точки зрения логики работы системы максимально приближен к выполнению реального выстрела. Но возможны и существенно более сложные — программно-аппаратные варианты создания подобных средств, позволяющие имитировать воздействия на все датчики разработанной АС ИСО в программно задаваемые моменты времени [35]. В этом случае можно говорить о программно-аппаратных системах имитации иницирующих воздействий. Создание таких систем имитации на основе современных микроконтроллеров потенциально позволит осуществлять комплексную проверку работоспособности программной и аппаратной части АС ИСО как в лабораторных условиях, так и непосредственно после ее монтажа в реальных условиях, более того, подобные системы имитации будут незаменимы при необходимости оперативной оценки работоспособности АС ИСО. В этом случае недостатки заключаются лишь в дополнительных затратах на разработку системы имитации и сложности имитации таких воздействий на датчики, которые давали бы импульсы желаемой формы. Весьма перспективным выглядит вариант реализации системы имитации иницирующих воздействий с использованием беспроводных интерфейсов (Bluetooth, Wi-Fi, радиоканал и проч.), что позволит существенно повысить гибкость системы и уменьшить время ее развертывания.

Выводы

Подводя итоги, можно сделать следующие выводы. При необходимости создания в сжатые сроки АС ИСО, к которой предъявляются достаточно высокие требования (по точности, информативности и проч.), не обойтись без разработки программ, позволяющих создавать адекватную имитационную модель сигнала с большим количеством варьируемых параметров.

Для решения вопросов, связанных с проверкой возможности работы системы в заданных режимах (например при заданном темпе стрельбы), можно рекомендовать программно-аппаратный имитатор на основе звуковой платы (разумеется,



если ее характеристики позволяют создать необходимый сигнал с допустимыми отклонениями). При необходимости выполнения оперативной диагностики работы системы и выявления конкретной неисправности с минимальными затратами незаменимы будут средства имитации иницирующих воздействий на чувствительные элементы АС ИСО.

Предложенная классификация средств имитации может быть применена и к СИ для АС ИСО на основе других типов блокирующих устройств, например магнитоиндукционных [36, 37] или электростатических [38], а также для АС ИСО на основе ИК-камеры [39]. Более того, можно утверждать, что на основе однажды созданных программных и программно-аппаратных средств имитации одной АС ИСО возможна разработка с минимальными затратами средств имитации для других АС ИСО, даже существенно отличных от первой.

Список литературы

1. Крат Н. М., Савин А. А., Шарыгин Г. С. Контрольно-проверочная аппаратура системы автономной навигации космических аппаратов // Доклады ТУСУР. 2014. № 1 (31). С. 28–32.
2. Красненко С. С., Недорезов Д. А., Кашкин В. Б., Хазагаров Ю. Г., Пичкалев А. В. Многоканальный цифровой синтез в имитаторах радионавигационных сигналов // Журнал Сибирского федерального университета. Техника и технологии. 2013. Т. 6, № 5. С. 521–526.
3. Антонов К. А., Григорьев В. О., Сучков В. Б., Фабричный М. Г. Вопросы реализации имитатора входных сигналов систем ближней радиолокации для полунатурного моделирования помех от подстилающей поверхности // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия : Приборостроение. 2006. № 4 (65). С. 45–58.
4. Долгов А. Н., Раскита М. А. Имитатор гидроакустических сигналов для отладки научного гидроакустического оборудования, предназначенного для мониторинга водных биоресурсов // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2011. № 9 (122). С. 52–56.
5. Костенков С. Ю., Сидорова М. А. Особенности разработки программного имитатора электрофизиологических сигналов // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Технические науки. Информационные технологии. 2013. № 10 (14). С. 210–214.
6. Копылов Е. Ю. Имитатор сигналов для электроразведочного измерительного комплекса // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. 2016. Т. 16, № 5. С. 146–150.
7. Афанасьева Н. Ю., Веркиенко Ю. В., Казаков В. С., Коробейников В. В. ; Институт прикладной механики УрО РАН. Световая мишень. Патент на изобретение RU 2213320 С1, МПК F41J 5/02. № 2002116940/02 ; Заявл. 24.06.2002 ; Оpubл. 27.09.2003.
8. Веркиенко Ю. В., Казаков В. С., Казаков С. В., Коробейников В. В. ; Институт прикладной механики УрО РАН. Способ определения внешнебаллистических характеристик полета пуль и снарядов. Патент на изобретение RU 2231738 С2, МПК F41J 5/06, G01S 5/18. № 2002119931/02 ; Заявл. 22.07.2002 ; Оpubл. 27.06.2004.
9. Петухов К. Ю. Алгоритмы обработки аналоговых сигналов при цифровых измерениях в информационно-измерительных системах для стрелкового оружия : дис. ... канд. техн. наук. Ижевск, 2003. 156 с.
10. Веркиенко Ю. В., Казаков В. С., Петухов К. Ю., Афанасьев А. Н. ; Институт прикладной механики УрО РАН. Устройство для измерения перемещения, скорости, ускорения и темпа движения объекта. Патент на изобретение RU 2223505 С1, МПК G01P 3/68. № 2002116945/28 ; Заявл. 24.06.2002 ; Оpubл. 10.02.2004.



11. *Вдовин А. Ю., Марков Е. М., Корнилов И. Г.* Современная автоматизированная система для оценки скорости перемещения затвора стрелкового оружия // Интеллектуальные системы в производстве. 2017. Т. 15, № 3. С. 82–87. <https://doi.org/10.22213/2410-9304-2017-3-82-87>
12. *Марков Е. М.* Разработка методик и средств контроля параметров дробового оружия с использованием телекамеры : дис. . . . канд. техн. наук. Ижевск, 2011. 171 с.
13. *Коновалов А. А., Николаев Ю. В.* Внешняя баллистика. Москва : ЦНИИ информации, 1974. 228 с.
14. *Златин Н. А., Красильщиков А. П., Мишин Г. И., Попов Н. Н.* Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях / под ред. Н. А. Златина, Г. И. Мишина. Москва : Наука, 1974. 344 с.
15. *Дмитриевский А. А., Лысенко Л. Н., Богодистов С. С.* Внешняя баллистика : учебник для студентов вузов. Москва : Машиностроение, 1991. 640 с.
16. *Иванов А. П., Колиев М. Р.* ; Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный институт авиационного моторостроения им. П. И. Баранова». Устройство для измерения скорости и ускорения метаемого элемента. Патент на изобретение RU 2285268 С1, МПК G01P 3/68. № 2005109398/28 ; Заявл.04.04.2005 ; Оpubл. 10.10.2006.
17. *Афанасьев В. А., Афанасьева Н. Ю., Веркиенко Ю. В., Казаков В. С., Коробейников В. В.* ; Институт прикладной механики УрО РАН. Тир. Патент на изобретение RU 2388990 С2, МПК F41J 5/02. № 2008129857/02 ; Заявл.18.07.2008 ; Оpubл. 10.05.2010.
18. *Афанасьев В. А., Афанасьева Н. Ю., Веркиенко Ю. В.* ; Институт прикладной механики УрО РАН. Устройство определения внешнебаллистических параметров в совмещенной с баллистической трассой инвариантной световой мишени. Патент на изобретение RU 2388991 С2, МПК F41J 5/02. № 2008131125/02 ; Заявл.28.07.2008 ; Оpubл. 10.05.2010.
19. *Близнюк А. М., Кочнев Ю. В., Хорошко А. Н.* ; Российская Федерация, от имени которой выступает Государственная корпорация по атомной энергии «Росатом», Федеральное государственное унитарное предприятие «Российский Федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики» — ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ». Способ определения координат положения в пространстве и во времени пуль и снарядов. Патент на изобретение RU 2470252 С1, МПК F41J 5/06, G01S 5/18. № 2011128198/28 ; Заявл.07.07.2011 ; Оpubл. 20.12.2012.
20. *Вдовин А. Ю.* Разработка системы на основе световых экранов для определения внешнебаллистических параметров : дис. . . . канд. техн. наук. Ижевск, 2010. 157 с.
21. *Вдовин А. Ю.* Цифровая фильтрация в автоматизированных системах определения внешнебаллистических параметров // Информационные технологии в промышленности и образовании : сб. тр. науч.-техн. конф. Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2009. С. 52–55.
22. *Вдовин А. Ю., Казаков В. С., Коробейников В. В., Киселев В. А.* Моделирование в среде Micco-Cap оптического датчика информационно-измерительной системы на основе световых экранов // Вестник ИжГТУ им. М. Т. Калашникова. 2012. № 3. С. 108–110.
23. *Вдовин А. Ю., Данилов С. А.* Моделирование оптического датчика светового экрана в среде Qucs // Информационные технологии в науке, промышленности и образовании : сб. тр. регион. науч.-техн. очно-заоч. конф. Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2013. С. 130–133.
24. *Зыкина А. И., Вдовин А. Ю.* Моделирование процесса пересечения светового экрана телом вращения // Информационные технологии в науке, промышленности и образовании : сб. тр. регион. науч.-техн. очно-заоч. конф. Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2014. С. 247–251.
25. *Афанасьев В. А.* Совершенствование моделей и программно-аппаратных средств для контроля изделий по внешнебаллистическим параметрам : дис. . . . канд. техн. наук. Ижевск, 2013. 159 с.
26. *Шарипов Р. М.* Световой экран для определения координат пролета пули и комплект элементов светового экрана. Патент на полезную модель RU 109284 U1, МПК F41J 5/00. № 2011122389/28 ; Заявл.02.06.2011 ; Оpubл. 10.10.2011.



27. *Афанасьева Н. Ю.* Информационно-измерительная система на основе световых экранов для испытаний стрелкового оружия : дис. . . . канд. техн. наук. Ижевск, 2003. 127 с.
28. *Афанасьева Н. Ю., Афанасьев В. А., Веркиенко Ю. В., Казаков В. С., Коробейников В. В.* ; Институт прикладной механики УрО РАН. Устройство для определения внешнебаллистических параметров метательного элемента с помощью световых экранов. Патент на изобретение RU 2279035 С1, МПК F42В 35/00, G01P 3/68. № 2005100994/02 ; Заявл.18.01.2005 ; Оpubл. 27.06.2006.
29. *Aphanasiev V. A., Vdovin A. U., Kornilov I. G.* Weight functions of light shield and the signal at the input of optical sensor at the intersection of the bullets of light shield // *Journal of Measurements in Engineering*. 2019. Vol. 7, iss. 2. P. 74–83. <https://doi.org/10.21595/jme.2019.20441>
30. *Казаков В. С., Коробейников В. В.* Акустическая мишень с выносным датчиком // *Интеллектуальные системы в производстве*. 2013. № 1. С. 127–129.
31. *Егоров С. Ф., Коробейникова И. В., Коробейников А. В.* Исследование влияния на точность акустической мишени, инвариантной к рабочей позиции математической модели // *Интеллектуальные системы в производстве*. 2015. Т. 13, № 3. С. 45–49.
32. *Казаков С. В.* Разработка и исследование информационно-измерительной системы на основе акустических мишеней для испытаний стрелкового оружия на открытой местности : автореф. дис. . . . канд. техн. наук. Ижевск, 2002. 19 с.
33. *Вдовин А. Ю., Покушев А. Н., Максимова А. В.* Создание на основе звуковой платы имитатора сигналов датчиков системы для оценки параметров движения механизмов стрелкового оружия // *Информационные технологии. Проблемы и решения : материалы междунар. науч.-практ. конф.* Уфа, 2018. № 1 (5). С. 67–71.
34. *Вдовин А. Ю., Марков Е. М., Максимова А. В., Покушев А. Н.* Создание на основе звуковой платы имитатора сигналов оптических датчиков автоматизированной системы для определения внешнебаллистических параметров // *Интеллектуальные системы в производстве*. 2016. Т. 14, № 3. С. 52–55.
35. *Вдовин А. Ю., Хамидуллин Р. Р., Шадрин В. В.* Средство имитации инициирующих воздействий на датчики оптико-электронной системы, применяемой при испытаниях стрелкового оружия // *Приборостроение в XXI веке – 2019. Интеграция науки, образования и производства : сб. материалов XV Всерос. науч.-техн. конф.* Ижевск : Изд-во ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, 2019. С. 23–29.
36. *Вьюков Н. Н., Акимов А. В., Аверин Н. Н.* ; Центральный научно-исследовательский институт точного машиностроения. Устройство для измерения скорости полета пули и снаряда. Патент на изобретение RU 2089917 С1, МПК G01P 3/66. № 4540242/28 ; Заявл.15.03.1991 ; Оpubл. 10.09.1997.
37. *Зубанков А. В., Николаев В. А., Кортюков И. И., Батарев С. В., Страбыкин В. В.* ; Российская Федерация, от имени которой выступает Государственная корпорация по атомной энергии «Росатом», Федеральное государственное унитарное предприятие «Российский Федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики» — ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ». Способ запуска регистрирующих систем и измеритель средней скорости метаемого объекта. Патент на изобретение RU 2525687 С1, МПК G01P 3/66. № 2013116297/28 ; Заявл.09.04.2013 ; Оpubл. 20.08.2014.
38. *Ашихмин А. С., Познухов А. В.* ; Рязанская государственная радиотехническая академия. Способ сообщения электрического заряда металлической пуле. Патент на изобретение RU 2251113 С1, МПК G01P 3/66. № 2003137273/28 ; Заявл.24.12.2003 ; Оpubл. 27.04.2005.
39. *Захаров В. Н., Ромашкин В. В., Рублев Н. И.* Способ определения координат попаданий в мишень для стрелкового тира и устройство для его осуществления. Патент на изобретение RU 2255294 С1, МПК F41J 5/08. № 2004107951/02 ; Заявл.19.03.2004 ; Оpubл. 27.06.2005.



References

1. Krat N. M., Savin A. A., Sharygin G. S. Test equipment for autonomous navigation system of space vehicles. *Proceedings of TUSUR University*, 2014, no. 1 (31), pp. 28–32 (in Russian).
2. Krasnenko S. S., Nedorezov D. A., Kashkin V. B., Hazagarov Yu. G., Pichkalev A. V. Multi-channel digital synthesis of radio navigation signals simulator. *Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies*, 2013, vol. 6, no. 5, pp. 521–526 (in Russian).
3. Antonov K. A., Grigoriev V. O., Suchkov V. B., Fabrichny M. G. Questions of implementation of the simulator of input signals of near-field radar systems for semi-natural modeling of interference from the underlying surface. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Instrument Engineering*, 2006, no. 4 (65), pp. 45–58 (in Russian).
4. Dolgov A. N., Raskita M. A. Sonar signal simulator designed for debugging research sonar equipment used for monitoring aquatic bioresources. *Izvestiya Yuzhnogo federal'nogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*, 2011, no. 9 (122), pp. 52–56 (in Russian).
5. Kostenkov S. Y., Sidorova M. A. Features of development software simulator of electrophysiological signals. *XXI century: Resumes of the Past and Challenges of the Present plus. Series: Engineering Sciences. Information Technologies*, 2013, no. 10 (14), pp. 210–214 (in Russian).
6. Kopylov E. Iu. Simulator of signals for electromagnetic prospecting measuring system. *Herald of KRSU*, 2016, vol. 16, no. 5, pp. 146–150 (in Russian).
7. Afanas'eva N. Ju., Verkienko Ju. V., Kazakov V. S., Korobejnikov V. V. *Light target*. Patent RU 2213320 C1.
8. Verkienko Ju. V., Kazakov V. S., Kazakov S. V., Korobejnikov V. V. *Method for determination of exterior ballistic characteristics of flight of bullets and projectiles*. Patent RU 2231738 C2.
9. Petukhov K. Iu. *Algorithms for processing analog signals for digital measurements in information and measurement systems for small arms*. Diss. Cand. Sci. (Tech.). Izhevsk, 2003. 156 p. (in Russian).
10. Verkienko Ju. V., Kazakov V. S., Petukhov K. Ju., Afanas'ev A. N. *Device measuring translation, velocity, acceleration and rate of motion of object*. Patent RU 2223505 C1.
11. Vdovin A. Yu., Markov E. M., Kornilov I. G. Modern automated system for evaluation of movement velocity of firearm bolt. *Intelligent Systems in Manufacturing*, 2017, vol. 15, no. 3, pp. 82–87 (in Russian). <https://doi.org/10.22213/2410-9304-2017-3-82-87>
12. Markov E. M. *Development of methods and means of controlling parameters of shotguns using a camera*. Diss. Cand. Sci. (Tech.). Izhevsk, 2011. 171 p. (in Russian).
13. Konovalov A. A., Nikolaev Yu. V. *Vneshnjaja ballistika* [External Ballistic]. Moscow, CNII informacii, 1974. 228 p. (in Russian).
14. Zlatin N. A., Krasil'shnikov A. P., Mishin G. I., Popov N. N. *Ballisticheskie ustanovki i ih primenenie v jeksperimental'nyh issledovanijah* [Ballistic Installations and Their Application in Experimental Research]. Moscow, Nauka, 1974. 344 p. (in Russian).
15. Dmitrievskij A. A., Lysenko L. N., Bogodistov S. S. *Vneshnjaja ballistika* [External Ballistic]. Moscow, Mashinostroenie, 1991. 640 p. (in Russian).
16. Ivanov A. P., Koliev M. R. *Device for measurement of speed and acceleration of thrown object*. Patent RU 2285268 C1.
17. Afanas'eva N. Yu., Afanas'ev V. A., Verkienko Ju. V., Kazakov V. S., Korobejnikov V. V. *Shooting gallery*. Patent RU 2388990 C2.
18. Afanas'eva N. Yu., Afanas'ev V. A., Verkienko Ju. V. *Device for determining outer-ballistic parameters in invariant light target combined with ballistic track*. Patent RU 2388991 C2.
19. Bliznjuk A. M., Kochnev Ju. V., Khoroshko A. N. *Method of defining bullet and shell position coordinates in space and time*. Patent RU 2470252 C1.



20. Vdovin A. Yu. *Development of a system based on light screens for determining external ballistic parameters*. Diss. Cand. Sci. (Tech.). Izhevsk, 2010. 157 p. (in Russian).
21. Vdovin A. Yu. Digital filtering in automated systems for determining external ballistic parameters. In: *Informatsionnye tekhnologii v promyshlennosti i obrazovanii* [Information Technologies in Industry and Education: Collected Papers Scientific and Technical Conf.]. Izhevsk, Izd-vo IzhGTU, 2009, pp. 52–55 (in Russian).
22. Vdovin A. Yu., Kazakov V. S., Korobeynikov V. V., Kiselev V. A. Optical sensor modeling in micro-cap medium for information-measuring system on basis of light screens. *Bulletin of Kalashnikov ISTU*, 2012, no. 3, pp. 108–110 (in Russian).
23. Vdovin A. Yu., Danilov S. A. Light screen optical sensor modeling in QuCS. In: *Informatsionnye tekhnologii v nauke, promyshlennosti i obrazovanii* [Information Technologies in Industry and Education: Collected Papers Scientific and Technical Conf.]. Izhevsk, Izd-vo IzhGTU, 2013, pp. 130–133 (in Russian).
24. Zykina A. I., Vdovin A. Yu. Simulation of the process of crossing the light screen by the rotation body. In: *Informatsionnye tekhnologii v nauke, promyshlennosti i obrazovanii* [Information Technologies in Industry and Education: Collected Papers Scientific and Technical Conf.]. Izhevsk, Izd-vo IzhGTU, 2014, pp. 247–251 (in Russian).
25. Aphanasiev V. A. *Improvement of models and hardware and software for controlling products by external ballistic parameters*. Diss. Cand. Sci. (Tech.). Izhevsk, 2013. 159 p. (in Russian).
26. Sharipov R. M. *Light screen for determining the coordinates of the bullet passage and a set of light screen elements*. Patent for useful model RU 109284 U1.
27. Afanas'eva N. Yu. *Information-measuring system based on light screens for testing small arms*. Diss. Cand. Sci. (Tech.). Izhevsk, 2003. 127 p. (in Russian).
28. Afanas'eva N. Yu., Afanas'ev V. A., Verkienko Ju. V., Kazakov V. S., Korobeynikov V. V. *Device for determination of exterior ballistic parameters of projectile component with the aid of light screens*. Patent RU 2279035 C1.
29. Aphanasiev V. A., Vdovin A. U., Kornilov I. G. Weight functions of light shield and the signal at the input of optical sensor at the intersection of the bullets of light shield. *Journal of Measurements in Engineering*, 2019, vol. 7, iss. 2, pp. 74–83. <https://doi.org/10.21595/jme.2019.20441>
30. Kazakov V. S., Korobeynikov V. V. Acoustic target with portable sensor. *Intelligent Systems in Manufacturing*, 2013, no. 1, pp. 127–129 (in Russian).
31. Egorov S. F., Korobeynikova I. V., Korobeynikov A. V. Research for the influence of mathematical model invariant to working position on the accuracy of an acoustic target. *Intelligent Systems in Manufacturing*, 2015, vol. 13, no. 3, pp. 45–49 (in Russian).
32. Kazakov S. V. *Development and research of an information and measurement system based on acoustic targets for testing small arms in open areas*. Thesis Diss. Cand. Sci. (Tech.). Izhevsk, 2002. 19 p. (in Russian).
33. Vdovin A. Yu., Pokushev A. N., Maksimova A. V. Creation on the basis of the sound card the simulator signals of the system for determining of mechanisms movement parameters of weapons. *Informacionnye tehnologii. Problemy i reshenija* [Information Technology. Problems and Solutions: Materials of the International Scientific and Practical Conference], Ufa, 2018, no. 1 (5), pp. 67–71 (in Russian).
34. Vdovin A. Y., Markov E. M., Maksimova A. V., Pokushev A. N. Creation of automated system for determining the external ballistics parameters based on the sound card of signal imitator for optical sensors. *Intelligent Systems in Manufacturing*, 2016, vol. 14, no. 3, pp. 52–55 (in Russian).
35. Vdovin A. Yu., Khamidullin R. R., Shadrin V. V. Initiating impacts imitator on the sensors of the optical-electronic system used in small arms testing. *Priborostroenie v XXI veke* –



2019. *Integracija nauki, obrazovanja i proizvodstva* [Instrumentation in the 21 century – 2019. Integration of science, education and production: Proc. All-Russ. Scientific and Technical Conf.]. Izhevsk, IzhGTU imeni M. T. Kalashnikova Publ., 2019, pp. 23–29 (in Russian).
36. V'jukov N. N., Akimov A. V., Averin N. N. *Projectile velocity-measuring device*. Patent RU 2089917 C1.
37. Zubankov A. V., Nikolaev V. A., Kortjukov I. I., Batarev S. V., Strabykin V. V. *Method to start recording systems and meter of average speed of thrown object*. Patent RU 2525687 C1.
38. Ashikhmin A. S., Poznukhov A. V. *Mode of transferring a charge on a metallic bullet*. Patent RU 2251113 C1.
39. Zakharov V. N., Romashkin V. V., Rublev N. I. *Method for determination of coordinates of target hits for small arms and device for its realization*. Patent RU 2255294 C1.

Поступила в редакцию / Received 17.02.2020

Принята к публикации / Accepted 05.10.2020

Опубликована / Published 31.05.2021



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 259–266
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 259–266

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-259-266>

Mathematical and computer simulation of the electrophysical properties of a multicellular structure exposed to nanosecond electrical pulses

R. P. Kim^{1✉}, S. A. Korchagin²

¹Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Polytechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia

²Financial University under the Government of the Russian Federation, 49 Leningradsky Prospekt, Moscow 125993, Russia

Roman P. Kim, kimrp1988@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-7986-5810>

Sergey A. Korchagin, korchaginser@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-8042-4089>

Abstract. The article presents mathematical and computer models which allow to study the electrophysical properties (permittivity, impedance) of a multicellular structure exposed to nanosecond electrical pulses. The paper proposes a simulation approach that includes complex use of the classical theory of describing the electrodynamic properties of dispersed systems and the effective medium theory. We describe cell geometry using Gielis equations, which allow us to take account of the irregular shapes of cell membranes. We carry out a computational experiment with cell models to study the frequency dependences of permittivity and impedance exposed to nanosecond electrical pulses. The article considers the influence of membrane porosity on cell conductivity and permittivity as well. We carry out computer simulation of the plasma membrane electroporation mechanism. The obtained results will help to understand better the fundamental processes in the cell membrane exposed to electrical pulses and can be used in various practical applications, such as targeted drug delivery, incorporation of DNA and RNA genes into bacterial and mammalian cells, as well as the selective destruction of cancer cells.

Keywords: mathematical simulation, cellular membrane, electroporation, impedance, permittivity

For citation: Kim R. P., Korchagin S. A. Mathematical and computer simulation of the electrophysical properties of a multicellular structure exposed to nanosecond electrical pulses. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 259–266 (in English). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-259-266>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)



Научная статья

УДК 517.98

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-259-266>

Математическое и компьютерное моделирование электрофизических свойств многоклеточной структуры при воздействии наносекундных электрических импульсов

Р. П. Ким^{1✉}, С. А. Корчагин²

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77

²Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Россия, 125993, г. Москва, Ленинградский просп, д. 49

Ким Роман Павлович, аспирант кафедры информационной безопасности автоматизированных систем, kimrp1988@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-7986-5810>

Корчагин Сергей Алексеевич, кандидат физико-математических наук, доцент департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий, korchaginser@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-8042-4089>

Аннотация. В статье приводятся математические и компьютерные модели, позволяющие исследовать электрофизические свойства (диэлектрическую проницаемость, импеданс) многоклеточной структуры при воздействии наносекундных электрических импульсов. В работе предлагается подход моделирования, включающий в себя комплексное использование классической теории описания электродинамических свойств дисперсных систем и теории эффективной среды. Для описания геометрии клеток используются формулы Джилиса, которые позволяют учитывать неправильные формы клеточных мембран. Проведен вычислительный эксперимент с моделями клеток по исследованию частотных зависимостей диэлектрической проницаемости и импеданса при воздействии наносекундных электрических импульсов. Изучено влияние мембранной пористости на проводимость и диэлектрическую проницаемость клетки. Проведено компьютерное моделирование механизма электропорации плазматической мембраны. Полученные результаты будут полезны для более глубокого понимания фундаментальных процессов, происходящих в клеточной мембране при импульсном электрическом воздействии, и могут использоваться в различных практических приложениях, таких как адресная доставка лекарств, включения генов ДНК и РНК в бактериальные клетки и клетки млекопитающих, а также избирательном уничтожении раковых клеток.

Ключевые слова: математическое моделирование, клеточная мембрана, электропорация, импеданс, диэлектрическая проницаемость

Для цитирования: Kim R. P., Korchagin S. A. Mathematical and computer simulation of the electrophysical properties of a multicellular structure exposed to nanosecond electrical pulses [Ким Р. П., Корчагин С. А. Математическое и компьютерное моделирование электрофизических свойств многоклеточной структуры при воздействии наносекундных электрических импульсов] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 259–266. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-259-266>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)



Introduction

Field experiments which are carried out to study the cell membrane electroporation mechanism are time-consuming, expensive and require high-precision calibration of the equipment, as well as careful preparation of the object of study [1]. The main task during the experiment is to obtain the most reliable data at minimum cost. We find dependencies between factors as a part of the study, construct an approximation of the response function of various orders, perform a sensitivity analysis and determine the probability of one kind or other event.

Analysis of scientific literature [2–5] shows that short rectangular pulses are used in the overwhelming number of studies. For instance, Maxwell's equation is used to calculate the transmembrane electric potential induced by an external electric field in a spherical cell. As a consequence of the electric shock, temporary pores are formed in the cell membrane, thus increasing its permittivity. Electroporation conditions change depending on the type of substance introduced into the cells. The electroporation method [6], awarded the Nobel Prize in Chemistry 2003, is a needle-free alternative to classical mesotherapy. Seriousness of the method is confirmed by its active use in the field of medicine. Nowadays electroporation is the only non-injection effective method of transporting an active substance to skin cells while maintaining the maximum possible concentration — more than 90% [7].

Mathematical and computer simulation is a powerful tool for theoretical research in biophysics [8]. Development of mathematical models opens up a wide range of possibilities for a multimethod research of electroporation mechanism. It happens because parameter structure of mathematical models physically corresponds to the objects of study. Computer simulation as a research method denotes the concept of an iterative paradigm of the computational experiment, since we define a mathematical model more precisely, improve the computational algorithm and, in some cases, revise computational process organization in the experiment.

Analysis of such models allows to predict the most favorable conditions for their subsequent experimental study. In addition, it also allows to acquire new fundamental knowledge about dynamics of the cell membrane exposed to electromagnetic pulses. It helps to apply practical knowledge to medicine, cosmetology and other fields of science and technology in the future. Mathematical and computer modeling to study the effect of electrical pulses on biological objects is a relevant field of research, which allows to obtain detailed information about the object of study as well as data for further full-scale experiment and prediction of experiment results.

In the study we use a complex approach to carry out mathematical simulation of the electrophysical properties of cell membranes exposed to nanosecond electrical pulses. The approach includes the classical theory of describing the electrodynamic properties of dispersed systems and the effective medium theory [9].

1. Mathematical simulation of the electrophysical properties of a cell

The object of study is a multicellular structure exposed to uniform pulses of an electric field and consisted of arbitrarily shaped cells (Fig. 1), each of which has a plasma membrane and an intracellular organelle.

Every cell is described by the following values: ε_c — complex permittivity of a cell; σ_c — conductivity of a cell; ε_p — complex permittivity of a cell membrane; σ_p — conductivity of a cell membrane, ε_{org} — conductivity of a cell organelle, ε_{por} — complex permittivity of an organelle membrane. The following parameters simulate cell geomet-

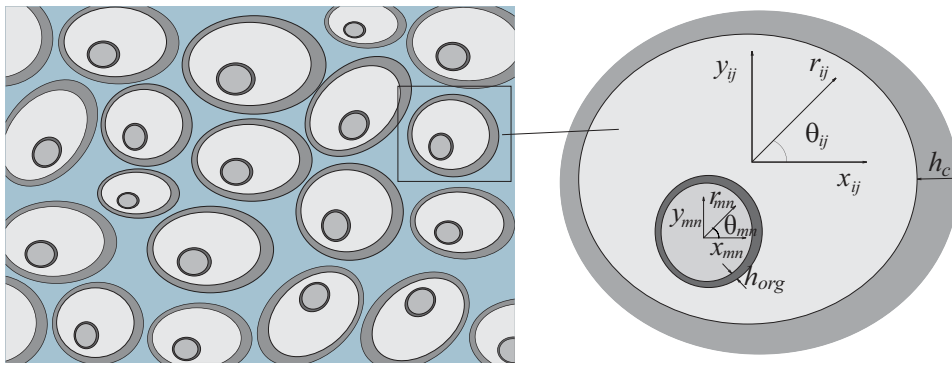


Fig. 1. Schematic image of a cell exposed to uniform pulses of an electric field

ry: $r_{i,j}$, $x_{i,j}$, $y_{i,j}$ — position vector and rectangular coordinates, which describe lateral view of a cell, $\theta_{i,j}$ — polar angle, which characterizes a local coordinate system of a membrane; $r_{m,n}$, $x_{m,n}$, $y_{m,n}$ — position vector and rectangular coordinates, which describe lateral view of an organelle, $\theta_{m,n}$ — polar angle, which characterizes a local coordinate system of an organelle, h_c — thickness of a plasma membrane, h_{org} — thickness of an organelle membrane.

We use Maxwell's equations in dispersed media to describe electrophysical properties of a multi-cell structure:

$$\nabla \times H = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} + \sigma E, \quad (1)$$

$$\nabla \times E = \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (2)$$

The simulation approach is quite common and used in many studies, e.g. [10, 11]. The system of equations is rather difficult to solve for realistic multicellular structures. However, due to the small size of a cell, we can neglect the change in the magnetic field over time, hence $\nabla \times E = 0$. An electric field E can be derived from the scalar potential ϕ using the equation:

$$E = -\nabla \phi. \quad (3)$$

Substituting (3) for (1), we obtain the following partial differential equation:

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \sigma \nabla \phi - \frac{\partial P}{\partial t} \right) = 0, \quad (4)$$

where σ is static ionic conductivity. The following boundary conditions are imposed to the mathematical model to satisfy the continuity equation $\nabla \times J = 0$:

$$\hat{n} \cdot (J|_{\Gamma^+} - J|_{\Gamma^-}) = 0, \quad (5)$$

where

$$J = \left(\sigma + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) E + \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (6)$$

Γ^+ and Γ^- are outer and inner boundaries of cell membranes, respectively, \hat{n} is normal vector, which is taken outside the membrane boundaries. The electric potential for each cell is calculated by root-finding algorithm (4). The transmembrane voltage $U_{i,j}$ is calculated as the difference between the electrical potential at the outer and inner boundaries ($\phi_{i,j}^-$ and $\phi_{i,j}^+$ respectively) of each cell membrane:

$$U_{i,j} = \phi_{i,j}^- - \phi_{i,j}^+. \quad (7)$$



We propose to use the effective medium theory to simulate complex permittivity of a multicellular structure. The study considers cells from 10 to 100 micrometers, frequency of the electromagnetic radiation wave is 3–30 GHz, the wavelength of the electromagnetic field is by an order of magnitude more than the cell size, so the simulation method is acceptable for use.

We can use the Rayleigh equation to describe complex permittivity of a multicellular structure [12]

$$\varepsilon_m = \varepsilon_c \left[1 + \frac{3V}{\frac{\varepsilon_h + 2\varepsilon_m}{\varepsilon_h - \varepsilon_m} V - 1.31 \frac{\varepsilon_h - \varepsilon_m}{\varepsilon_h + \frac{4}{3} \varepsilon_m} V} \right], \tag{8}$$

where ε_m is complex permittivity of a multicellular structure, ε_h is complex permittivity of the matrix, V is cell volume fraction in the medium. Permittivity of a cell is calculated by modifying the equations which were obtained in [13]:

$$\begin{aligned} \rho_1 \alpha \frac{\varepsilon_{org} (3\varepsilon_g + (\alpha - 1) (\varepsilon_g + 2\varepsilon_{org})) - \varepsilon_c (3\varepsilon_{org} + (\alpha - 1) (\varepsilon_g + 2\varepsilon_{org}))}{2\varepsilon_c ((\alpha - 1) \varepsilon_g + 2(\alpha + 1) \varepsilon_{org}) + \varepsilon_{org} ((\alpha + 2) \varepsilon_g + 2(\alpha - 1) \varepsilon_{org})} + \\ + (1 - \rho_1 \alpha) \varepsilon_h = 0, \\ \rho_2 \alpha \frac{\varepsilon_{org} (3\varepsilon_g + (\alpha - 1) (\varepsilon_g + 2\varepsilon_{org})) - \varepsilon_c (3\varepsilon_{org} + (\alpha - 1) (\varepsilon_g + 2\varepsilon_{org}))}{2\varepsilon_c ((\alpha - 1) \varepsilon_g + 2(\alpha + 1) \varepsilon_{org}) + \varepsilon_{org} ((\alpha + 2) \varepsilon_g + 2(\alpha - 1) \varepsilon_{org})} + \\ + (1 - \rho_2 \alpha) \frac{\varepsilon_g - \varepsilon_{org}}{\varepsilon_g + \varepsilon_{org}} = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

where ε_g is permittivity of a cell nucleus, $\rho_1 = \frac{r_{i,j}^3}{(r_{i,j} + h_c)^3}$ is volume fraction of the plasma membrane to the total cell volume, $\rho_2 = \frac{r_{m,n}^3}{(r_{m,n} + h_{org})^3}$ is volume fraction of the organelle membrane to the total organelle volume, $\alpha = r_{i,j}^3 r_{m,n}^{-3}$.

Cell geometry is simulated by Gillis equations:

$$x_{i,j} = A_{i,j} R_{i,j} (\theta_{i,j}) \cos \theta_{i,j}, \tag{10}$$

$$y_{i,j} = B_{i,j} R_{i,j} (\theta_{i,j}) \sin \theta_{i,j}, \tag{11}$$

$$R_{i,j} (\theta_{i,j}) = \left(\left[\frac{\cos(\frac{m_{i,2j-1} \theta_{i,j}}{4})}{\alpha_{i,2j-1}} \right]^{n_{i,2j-1}} + \left[\frac{\sin(\frac{m_{i,2j} \theta_{i,j}}{4})}{\alpha_{i,2j}} \right]^{n_{i,2j}} \right)^{-\frac{1}{b_{i,j}}}, \tag{12}$$

where $i = 1, \dots, p$ and $j = 1, \dots, q$ and $M = pq$ is a total number of cells and membranes, $\theta_{i,j} \in [-\pi; \pi]$ is a polar angle, which characterizes a local coordinate system, $m_{i,2j-1}$, $m_{i,2j}$, $n_{i,2j-1}$, $n_{i,2j}$ and $b_{i,j} \in R^+$ (positive real numbers), $\alpha_{i,2j-1}$, $\alpha_{i,2j} \in R_0^+$ (strictly positive integers), $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ are scale parameters, $R_{i,j}$ is a position vector of the corresponding cell profile.

2. Computer simulation of the electroporation mechanism

We develop a computer model and carry out the computational experiment to study the electroporation mechanism of a multicellular structure. We use an algorithm for interpreting a full-scale experiment with an “ex vivo” method. Figure 2 shows a capacitor discharge circuit for generation of an exponentially decaying electric field pulse of a multicellular structure simulated using NI Multisim software package.

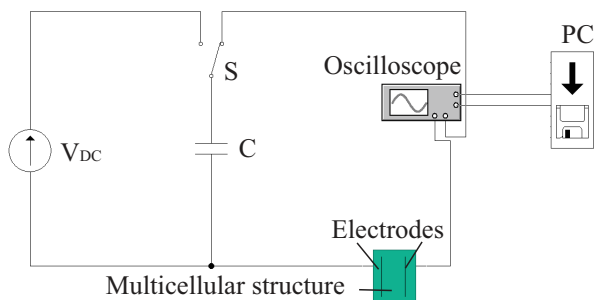


Fig. 2. Computer model of a capacitor discharge circuit for generation of an exponentially decaying electric field pulse to a multicellular structure

We use a multicellular structure with dimensions of 30x30x3 mm in the computational experiment. We use values in the range of 4–5 kOhm as the initial data of the impedance value of the object of study. The values are obtained as a result of a full-scale experiment in the research paper [14]. A computer model allows to study 160 samples, which are divided into 4 groups depending on the voltage applied to the object of study (230, 550, 750, and 1000 V for each

group, respectively). If the electric properties change, the current which flows through a multicellular structure is calculated by the voltage change in the electrodes. We use a model of a 4-channel digital oscilloscope with the following characteristics: bandwidth (3.5 GHz), sampling frequency (10 GHz) in the computational experiment.

3. Results and discussions

Figure 3, *a* shows a dependency graph of voltage on the time of exposure to an electric field pulse for each sample group. The graph shows that voltage increases significantly in the range of 25–30 ns until it reaches its maximum value and then exponentially decreases. It means that the electrophysical properties of a multicellular structure can significantly change under the influence of electrical nanopulses. Figure 3, *b* shows dependence of the impedance of a multicellular structure on the volume fraction of cells in the medium.

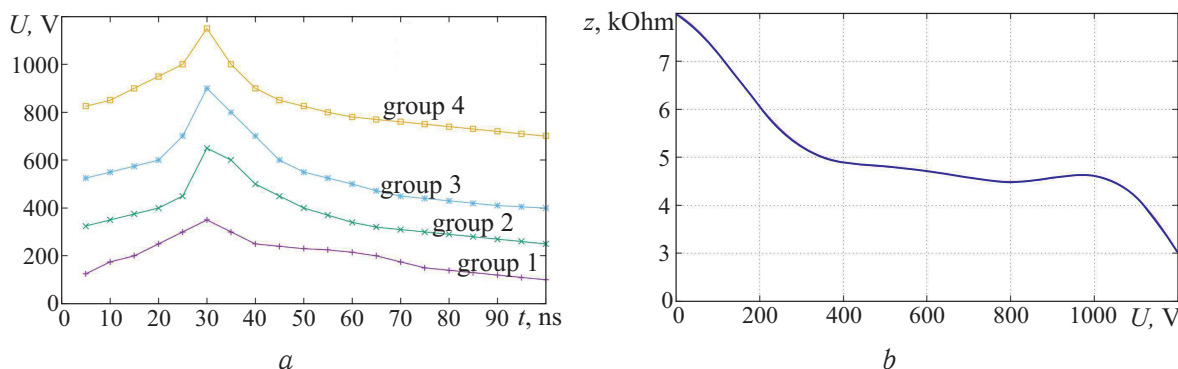


Fig. 3. Dependence of voltage on the time of exposure to an electric field pulse (*a*) and dependence of the impedance of a multicellular structure on the volume fraction of cells in the medium (*b*)

The computational experiment shows that impedance drops significantly near the peak of the electric field pulse and then changes insignificantly. High intensity of electrical pulses results in slower impedance recovery. Hence, time values of electrical pulses of 40–100 ns approximately have a greater effect on the cell membrane recovery.

Figure 4 shows dependence of permittivity of a multicellular structure on the wavelength of external factors. Simulation results show resonant bursts which can be connected to relaxation phenomena of the nuclear membrane and plasma membrane polarization.

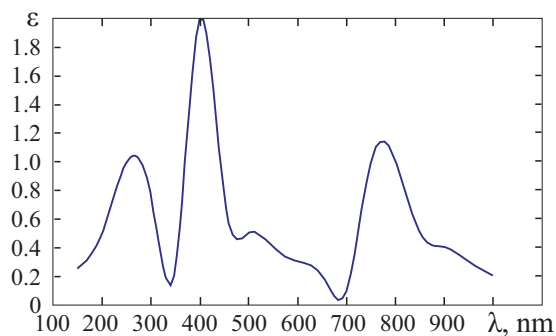


Fig. 4. Dependence of permittivity of a multicellular structure on the wavelength of external factors

Conclusion

The paper presents a simulation approach that includes complex use of the classical theory of describing the electrodynamic properties of dispersed systems and the effective medium theory. Gielis equations provide a wide range of possibilities for simulation of multicellular systems of various geometric configurations. As a result of the study, we find out that the electrophysical properties of a multicellular structure exposed to electrical nanopulses can significantly change. We study the dynamics of the electrophysical properties of a multicellular structure against the frequency of external force and the duration of the electric field pulses as well. We set time values of electrical impulses which have a greater effect on the cell membrane recovery. The obtained results will help to understand better the fundamental processes which occur in the cell membrane exposed to electrical pulses and can be used in various practical applications, such as targeted drug delivery, the incorporation of DNA and RNA genes into bacterial and mammalian cells, as well as the selective destruction of cancer cells.

References

1. Lv Y., Yao C., Rubinsky B. A. Conceivable mechanism responsible for the synergy of high and low voltage irreversible electroporation pulses. *Annals of Biomedical Engineering*, 2019, vol. 47, no. 7, pp. 1552–1563. <https://doi.org/10.1007/s10439-019-02258-5>
2. Gupta R., Rai B. Electroporation of skin stratum corneum lipid bilayer and molecular mechanism of drug transport: A molecular dynamics study. *Langmuir*, 2018, vol. 34, no. 20, pp. 5860–5870. <https://doi.org/10.1007/s10439-019-02258-5>
3. van Veldhuisen E., Vogel J. A., Klaessens J. H., Verdaasdonk R. M. Thermal Effects of Irreversible Electroporation. In: M. Meijerink, H. Scheffer, G. Narayanan, eds. *Irreversible Electroporation in Clinical Practice*. Springer, Cham, 2018, pp. 121–136. https://doi.org/10.1007/978-3-319-55113-5_9
4. Yao C., Liu H., Zhao Y., Mi Y., Dong S., Lv Y. Analysis of dynamic processes in single-cell electroporation and their effects on parameter selection based on the finite-element model. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 2017, vol. 45, iss. 5, pp. 889–900. <https://doi.org/10.1109/TPS.2017.2681433>
5. Rolong A., Davalos R. V., Rubinsky B. History of Electroporation. In: Meijerink M., Scheffer H., Narayanan G., eds. *Irreversible Electroporation in Clinical Practice*. Springer, Cham, 2018, pp. 13–37. https://doi.org/10.1007/978-3-319-55113-5_2
6. Royer H. D. Centenary Nobel prize in physiology or medicine for the cell cycle. *Journal of Molecular Medicine*, 2001, vol. 79, pp. 683–685. <https://doi.org/10.1007/s00109-001-0303-5>



7. Cao Y., Enbo Ma E., Cestellos-Blanco S., Zhang B., Qiu R., Su Y., Doudna J. A., Yang P. Nontoxic nanopore electroporation for effective intracellular delivery of biological macromolecules. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 2019, vol. 116, no. 16, pp. 7899–7904. <https://doi.org/10.1073/pnas.1818553116>
8. Korchagin S. A., Terin D. V. Research electrodynamic properties of layered composite the fractal structure. *2016 International Conference on Actual Problems of Electron Devices Engineering (APEDE)*. Saratov, 2016, pp. 1–4. <https://doi.org/10.1109/APEDE.2016.7879012>
9. Kim R. P., Romanchuk S. P., Terin D. V., Korchagin S. A. The use of a genetic algorithm in modeling the electrophysical properties of a layered nanocomposite. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, vol. 19, iss. 2, pp. 217–225. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-217-225>
10. Mescia L., Chiapperino M. A., Bia P., Lamacchia C. M., Gielis J., Caratelli D. Design of electroporation process in irregularly shaped multicellular systems. *Electronics*, 2019, vol. 8, no. 1, pp. 37. <https://doi.org/10.3390/electronics8010037>
11. Sack M., Mueller G. Scaled design of PEF treatment reactors for electroporation-assisted extraction processes. *Innovative Food Science and Emerging Technologies*, 2016, vol. 37, pt. C, pp. 400–406. <https://doi.org/10.1016/j.ifset.2016.09.005>
12. Terin D. V., Korchagin S. A., Romanchuk S. P., Onosov I. A. Influence of the depth of fractal on the frequency dependence of impedance in constructing models of composite materials. *2014 International Conference on Actual Problems of Electron Devices Engineering (APEDE)*. Saratov, 2014, pp. 258–259. <https://doi.org/10.1109/APEDE.2014.6958756>
13. Romanchuk S. P., Terin D. V., Klinayev Yu. V., Katz A. M. Mathematical modelling of structures and interaction processes of electromagnetic radiation with core-shell nanoobjects. *Vestnik Saratov State Technical University*, 2011, vol. 4, iss. 2 (60), pp. 98–102 (in Russian).
14. Warindi, Hadi S. P., Berahim H., Suharyanto. Impedance measurement system of a biological material undergoing pulsed electric field exposed. *Procedia Engineering*, 2017, vol. 170, pp. 410–415. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.03.066>

Поступила в редакцию / Received 14.05.2020

Принята к публикации / Accepted 12.10.2020

Опубликована / Published 31.05.2021



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 267–277
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 267–277

Научная статья

УДК 519.17

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-267-277>

Построение цветных графов без проверки на изоморфизм

П. В. Разумовский, М. Б. Абросимов✉

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Разумовский Петр Владимирович, аспирант кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, shprotby@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-3648-3166>

Абросимов Михаил Борисович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, mic@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4473-8790>

Аннотация. В работе рассматриваются графы, вершины или ребра которых раскрашены в заданное количество цветов — вершинные и реберные раскраски. Изучение раскрасок графов началось с середины XIX в., однако основное внимание уделяется правильным раскраскам, в которых накладывается ограничение, что цвета смежных вершин или ребер должны быть различными. В данной работе рассматриваются раскраски графов без каких-либо ограничений. Исследуется задача генерации всех неизоморфных вершинных и реберных k -раскрасок заданного графа без непосредственной проверки на изоморфизм. Задача о нахождении неизоморфных реберных k -раскрасок сводится к задаче построения всех вершинных k -раскрасок графа. В основе методов генерации графов без непосредственной проверки на изоморфизм лежит метод канонических представителей. Идея метода состоит в том, что предлагается способ кодирования графов и выбирается некоторое правило, по которому из всех изоморфных графов один граф объявляется каноническим. Строятся все коды и из них оставляются только канонические. Часто в качестве канонического выбирается представитель с наибольшим или наименьшим кодом. На практике порождение всех кодов требует больших вычислительных ресурсов, поэтому используются различные методы оптимизации перебора. В работе предлагаются два алгоритма решения задачи генерации вершинных k -раскрасок без проверки на изоморфизм методом МакКея и методом Рида – Фараджева. Производится сравнение разработанных алгоритмов генерации раскрасок на двух классах графов — цепях и циклах. Вычислительные эксперименты показывают, что для цепей и циклов алгоритм, построенный на основе метода Рида – Фараджева, работает быстрее.

Ключевые слова: граф, разметка графа, раскраска графа, цветной граф, генератор

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0006).

Для цитирования: Разумовский П. В., Абросимов М. Б. Построение цветных графов без проверки на изоморфизм // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 267–277. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-267-277>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)



Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-267-277>

Generation of colored graphs with isomorphism rejection

P. V. Razumovsky, M. B. Abrosimov✉

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Peter V. Razumovsky, shprotby@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-3648-3166>

Mikhail B. Abrosimov, mic@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4473-8790>

Abstract. In the article we consider graphs whose vertices or edges are colored in a given number of colors — vertex and edge colorings. The study of colorings of graphs began in the middle of the 19th century, but the main attention is paid to proper colorings, in which the restriction applies that the colors of adjacent vertices or edges must be different. This paper considers colorings of graphs without any restrictions. We study the problem of generating all non-isomorphic vertex and edge k -colorings of a given graph without direct checking for isomorphism. The problem of generating non-isomorphic edge k -colorings is reduced to the problem of constructing all vertex k -colorings of a graph. Methods for generating graphs without direct checking for isomorphism or isomorphism rejection are based on the method of canonical representatives. The idea of the method is that a method for encoding graphs is proposed and a certain rule is chosen according to which one of all isomorphic graphs is declared canonical. All codes are built and only the canonical ones are accepted. Often, the representative with the largest or smallest code is chosen as the canonical one. In practice, generating all codes requires large computational resources; therefore, various methods of enumeration optimization are used. The paper proposes two algorithms for solving the problem of generating vertex k -colorings with isomorphism rejection by McKay and Reed – Faradzhev methods. A comparison of the proposed algorithms for generating colorings on two classes of graphs — paths and cycles is made. Computational experiments show that the Reed – Faradzhev method is faster for paths and cycles.

Keywords: graph, graph labeling, graph coloring, color graph, generator

Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the state task (project No. FSRR-2020-0006).

For citation: Razumovsky P. V., Abrosimov M. B. Generation of colored graphs with isomorphism rejection. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 267–277 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-267-277>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Введение

Большой интерес в теории графов представляет задача разработки генераторов для построения всех неизоморфных графов определенного типа. Известны генераторы неориентированных графов, ориентированных графов, турниров [1, 2], регулярных графов [3], кубических графов [4] и др. [5] Все эти генераторы позволяют строить графы без меток: вершины построенных графов имеют одинаковый тип (метку или цвет). На практике граф может являться моделью системы, в которой элементы имеют разный тип [6]. Например, для анализа клиент-серверной модели вычислений вершины, соответствующие серверам, будут иметь один тип, а вершины, соответствующие клиентам, — другой тип. В этом случае вершинам приписываются



метки, обозначающие тип, или, что является более традиционным в теории графов, вершины раскрашиваются в разные цвета. Соответствующий граф мы будем называть цветным. Могут накладываться дополнительные ограничения на цвета, назначаемые вершинам. Например, при правильной раскраске смежные вершины должны иметь разные цвета. Изучение раскрасок графов началось с середины XIX в., однако основное внимание уделяется правильным раскраскам в минимальное число цветов [7–9].

В данной статье мы будем рассматривать произвольные раскраски заданного графа, а основная задача состоит в построении всех существенно различных раскрасок заданного графа в k цветов или k -раскрасок. В более общем случае связи между элементами также могут иметь разный тип, что приводит к графу, в котором метки или цвета приписываются также и ребрам. В данной работе исследуется генерация всех неизоморфных k -раскрасок для заданного графа. Мы будем рассматривать как вершинные, так и реберные раскраски. Задача о нахождении неизоморфных реберных k -раскрасок будет сведена к задаче построения всех вершинных k -раскрасок графа. Будут рассматриваться раскраски неориентированных графов, однако полученные алгоритмы естественным образом можно перенести и на случай ориентированных графов.

1. Основные определения

Прежде чем рассматривать методы построения цветных графов, необходимо дать основные определения, используемые в данной работе. Остальные определения из теории графов можно найти в [10, 11].

Пусть $G(V, \alpha)$ — граф, $k \in \mathbb{N}$. Функция вида $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ называется *вершинной k -раскраской* G , $f(v)$ — цветом вершины $v \in V$, а граф G , каждой вершине которого сопоставляется какой-нибудь цвет, называется *цветным* либо *графом с цветными вершинами*. Такие графы обозначаются следующим образом: $G = (V, \alpha, f)$.

Аналогичным образом определяются графы с цветными ребрами. Далее для удобства граф с цветными вершинами будем называть *цветным графом* или просто *раскраской графа*, а граф с цветными ребрами — *реберной раскраской графа*.

Изоморфизмом цветных графов $G_1 = (V_1, \alpha_1, f_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2, f_2)$ называется изоморфизм графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$, сохраняющий цвета. Это биекция $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, при которой выполняются два условия:

- 1) $\forall u, v \in V_1 : (u, v) \in \alpha_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in \alpha_2$;
- 2) $\forall v \in V_1 : f_1(v) = f_2(\varphi(v))$.

Изоморфизм цветных графов также называется *цветным изоморфизмом*. Аналогично вводится понятие изоморфизма *графов с цветными ребрами*. Можно рассматривать вариант сильного изоморфизма, т.е. изоморфизма с точностью до цветов. Например, на рисунке показана 3-вершинная цепь P_3 и 3 ее неизоморфные раскраски в 2 цвета. Первые две раскраски изоморфны с точностью до цветов.



Рис. 3-вершинная цепь P_3 и ее раскраски в 2 цвета
Fig. The path P_3 and its 2-colorings

Цветной автоморфизм графа — это изоморфизм цветного графа на себя. Множество всех цветных автоморфизмов, включая и тождественный, образует



группу автоморфизмов графа. Две вершины графа называются *подобными*, если существует автоморфизм, отображающий одну вершину на другую. Множество подобных вершин называется *орбитой*.

Пусть S — множество, а $F = \{S_1, \dots, S_p\}$ — семейство его различных непустых подмножеств, объединение которых дает S . *Граф пересечений* $\Omega(F)$ семейства F определяется множеством $V(\Omega(F)) = F$ и условием « S_i и S_j смежны тогда и только тогда, когда $i \neq j \wedge S_i \cup S_j \neq \emptyset$ » [11].

Рассмотрим множество X всех ребер графа G как семейство двухвершинных подмножеств множества вершин $V(G)$. *Реберным графом* $L(G)$ графа G называется граф пересечений $\Omega(X)$. Таким образом, вершинами графа $L(G)$ являются ребра графа G , и две вершины графа $L(G)$ смежны тогда и только тогда, когда смежны соответствующие им ребра графа [11].

2. Построение неизоморфных k -раскрасок графа

Мы будем рассматривать следующую основную задачу. Для заданного графа $G = (V, \alpha)$ с n вершинами и заданным количеством цветов k , $1 < k \leq |V|$, необходимо построить все неизоморфные k -раскраски графа G , причем все цвета должны в раскраске присутствовать. Очевидно, что для $k = 1$ задача интереса не представляет, так как единственным образом можно раскрасить все вершины в один цвет.

Для задачи построения всех неизоморфных раскрасок вершин или ребер заданного графа ровно в k цветов неизвестно эффективное решение. Существуют различные переборные подходы для решения данной задачи [12–14], наиболее результативными из которых являются методы с использованием техники исключения изоморфизма (isomorphism rejection), т. е. без непосредственной проверки на изоморфизм. Хороший обзор по этим техникам можно найти в работе [5]. В основе таких подходов лежит метод канонических представителей. Идея метода состоит в том, что выбирается некоторое правило, по которому из всех изоморфных графов один граф объявляется каноническим. Часто в качестве канонического выбирается представитель с наибольшим или наименьшим кодом. В общем виде метод можно описать следующим образом [5]:

- 1) определяется способ кодирования объектов;
- 2) среди всех кодов изоморфных объектов выбирается канонический код;
- 3) порождаются все возможные уникальные структуры вместе с их кодами;
- 4) порожденная структура принимается, если ее код канонический, в противном случае — исключается.

На практике порождение всех кодов требует больших вычислительных ресурсов, поэтому используются различные методы оптимизации перебора. В настоящей работе производится сравнительная характеристика двух наиболее распространенных методов генерации: метода МакКея [1] и метода Рида–Фараджева [5]. Оба подхода используют технику канонических представителей, однако каждый отличается своим уникальным способом отсекающих неподходящих вариантов раскраски. Рассмотрим далее оба метода.

В *методе МакКея* генерация структур происходит итерационно от меньших к большему: от родителя к потомку. При этом одна и та же структура может быть потомком от нескольких родителей. Необходимо оставлять структуру в том случае, если она получена из подходящего родителя. Чтобы реализовать порождение всех искомым структур без проверки на изоморфизм, в методе МакКея предлагается выполнить следующие шаги:

- 1) для каждой структуры определяется уникальный (каноничный) родитель и



способ, которым данная структура должна быть получена из него;

2) структура принимается, только если она генерируется выбранным способом из канонического родителя;

3) из каждого родителя все неизоморфные потомки должны генерироваться по одному разу.

На выходе получается множество всех неизоморфных раскрасок заданного графа.

В *методе Рида – Фараджева*, в отличие от предыдущего алгоритма, определяется не способ получения канонического предка и его канонического потомка, а задается способ кодирования графов для получения канонических представителей и определяется способ сокращения перебора: если некоторая часть кода построена, то оставшаяся часть кода строится только в том случае, если получившийся код может быть каноническим. Удалось разработать алгоритмы, реализующие оба метода [13, 14]. Далее мы приведем алгоритмы и сравним результаты их работы для графов двух видов: цепей и циклов.

3. Построение неизоморфных графов с цветными ребрами

Задача поиска реберных раскрасок может быть сведена к задаче генерации вершинных раскрасок через построение для заданного графа G реберного графа $L(G)$: предлагается свести задачу генерации реберных раскрасок графа G к задаче генерации вершинных раскрасок реберного графа $L(G)$. Опишем способ приведения исходного графа к реберному.

Если графы G_1 и G_2 изоморфны, то графы $L(G_1)$ и $L(G_2)$ тоже изоморфны. Уитни установил [11], что обратное справедливо почти всегда, и указал при этом единственную пару различных графов K_3 и $K_{(1,3)}$, имеющих один и тот же реберный граф.

Необходимо ввести алгоритм построения реберного графа для дальнейшего использования в алгоритме генерации раскрасок.

Пусть дан исходный граф $G = (V, \alpha)$.

1. Создается пустой граф $L(G)$ без ребер и вершин.
2. Для каждого ребра $(u, v) \in \alpha$ в граф $L(G)$ добавляется новая вершина с меткой (u, v) .
3. Для каждой вершины $(u, v) \in V(L(G))$ перебираются вершины (u', v') из $L(V) \setminus \{(u, v)\}$. Для каждой пары вершин сравниваются метки, и в зависимости от количества одинаковых элементов в реберный граф добавляется одно либо два ребра.
4. На выходе получается реберный граф $L(G) = (V(L(G)), \alpha(L(G)))$.

Теперь, построив граф $L(G)$ и рассмотрев частные случаи, описанные Уитни, можно построить неизоморфные реберные раскраски для исходного графа G .

4. Построение неизоморфных раскрасок методом МакКея

Алгоритмизируем метод МакКея, применив его для построения неизоморфных раскрасок графа. В качестве вспомогательного инструмента для построения разбиений и вычисления орбит используется программный пакет *nauty* [2], реализованный МакКеем [1].

Алгоритм выглядит следующим образом.

На вход подается граф $G = (V, \alpha)$, количество цветов $k : 1 < k \leq |V|$.

1. При помощи программы *nauty* строится каноническая нумерация *lab* графа, вычисляются орбиты orb_0 .



2. Создается вектор раскраски col , в него добавляется цвет 1 для первой вершины; $colsize = 1$ — размер col ; $mc = 1$ — максимальный по значению цвет, находящийся в col ; $colcnt = 0$ — количество найденных раскрасок.

3. Перебираются все цвета от 1 до $mc + 1$, очередной цвет присваивается cur .

4. Для cur перебираются элементы раскраски $col_i = \overline{1 \dots colsize}$. Пусть $col[i] > cur$ и $orb_r[i] = orb_r[colsize + 1]$, где orb_r — орбиты, полученные разбиением вершин раскраской $r = (c_1, \dots, c_{i-1})$ — первые $(i - 1)$ цвета col . Тогда данная раскраска объявляется изоморфной, отсекается и cur присваивается следующему цвету.

5. cur добавляется в col .

6. Вычисляется множество орбит orb_{col} , полученных разбиением вершин графа раскраской col .

7. Если $cur > mc$ и $mc \neq k$, то $mc = cur$.

8. Если $colsize < |V|$, то $colsize = colsize + 1$, и производится переход на шаг 3.

9. Если $colsize = |V|$ и $mc = k$, то производится дополнительная проверка раскраски: для каждой вершины i проверяется выполнение условия

$$\left(\forall j = \overline{1 \dots (i - 1)} \right) \left(col_j > col_i \wedge orb_{col_{j-1}}(j) \neq orb_{col_{j-1}}(i) \right).$$

Если условие выполняется, то раскраска считается изоморфной и не включается в ответ. Иначе необходимо вывести новую раскраску, $colcnt = colcnt + 1$, и завершить перебор для данной раскраски.

В 9-м пункте производится дополнительная проверка раскраски с учетом изоморфизма цветов. Если же изоморфизм раскрасок рассматривается как изоморфизм с точностью до цветов, то 9-й пункт алгоритма необходимо опустить.

Полученные раскраски удовлетворяют условию лексикографической минимальности и неизоморфности. Более того, не используется проверка на изоморфизм, только проверка на изоморфизм раскрасок, представленных в виде числовых векторов, что улучшает его эффективность.

5. Построение неизоморфных раскрасок методом Рида – Фараджева

Произведем алгоритмизацию метода Рида – Фараджева для построения неизоморфных раскрасок заданного графа. Сначала опишем общую схему поиска раскрасок, а затем дадим основной алгоритм генерации.

Схема поиска базируется на принципе перебора с отсекающими. На каждой итерации вычисляется множество орбит для заданной раскраски, выбирается по одному представителю из каждой орбиты, и каждый представитель раскрашивается во все цвета выбранным способом. Из набора полученных раскрасок отсекаются неканоничные.

Данная схема предполагает следующий ход генерации: на вход подается вектор цветов (раскраска) вершин графа, инициализированный первым цветом 1. Строится множество орбит, из каждой орбиты выбирается один наибольший ее представитель в виде индекса элемента раскраски. Каждый представитель раскрашивается во все цвета от 2 до k . Все раскраски, полученные данным образом, проверяются перекрашиванием — если перекрашенная раскраска меньше проверяемой, то проверяемая раскраска отсекается. Далее алгоритм генерации для всех неотсеченных раскрасок строит множество орбит и повторяет предыдущие действия, но с той оговоркой, что выбираются только те представители орбит, чей индекс меньше раскрашенного на предыдущем шаге элемента раскраски. Например, если для раскраски размерности



пять предыдущим раскрашиваемым элементом был четвертый элемент, то на текущем шаге генерации будут раскрашены только те представители орбит, чей индекс меньше четырех. Генерация заканчивается, когда на очередном шаге не останется неотсеченных раскрасок.

Оформим данную схему в алгоритм генерации неизоморфных вершинных k -раскрасок без проверки на изоморфизм методом Рида – Фараджева.

Для вычисления орбит по заданному разбиению будет использоваться программа *nauty* [2], реализованная по разработанному Бренданом МакКеем алгоритму [1].

На вход подается граф $G = (V, \alpha)$, количество цветов $k : 1 < k \leq |V|$.

1. Задается последовательность $clr = (1, \dots, 1)$, $|clr| = |V|$ — инициализирующая последовательность цветов заданного графа, где clr_i является цветом i -й вершины.

2. По заданной clr вычисляются орбиты при помощи программы *nauty*.

3. Из каждой орбиты берется по одному наибольшему представителю o .

4. Каждый выбранный представитель clr_o последовательно раскрашивается в цвета от 2 до k , получая раскраски с раскрашенными вершинами clr_o .

5. Каждая clr , полученная перекрашиванием o -й вершины в какой-нибудь цвет, проверяется на каноничность ее родителя путем перекрашивания по следующим правилам. Раскраска перекрашивается следующим образом: инициализируем переменную l первым цветом; циклически проходимся по всем вершинам; если текущая вершина ранее не встречалась в раскраске, присваиваем ей цвет l и увеличиваем l на единицу; если же вершина уже присутствовала в раскраске, раскрашиваем ее в присвоенный ей цвет. Если перекрашенная раскраска получилась лексикографически меньше проверяемой, то проверяемая раскраска отсекается.

6. Если не осталось ни одной неотсеченной раскраски, то алгоритм заканчивается.

7. Для каждой неотсеченной раскраски снова строится множество орбит, из каждой орбиты выбирается по одному наибольшему представителю o с той оговоркой, что индекс представителя должен быть меньше индекса раскрашенной на предыдущем шаге генерации вершины, производится переход на шаг 4.

Полученные раскраски удовлетворяют условию лексикографической минимальности и неизоморфности. Проверка на изоморфизм не используется.

6. Сравнение алгоритмов генерации неизоморфных раскрасок методами МакКея и Рида – Фараджева

Описанные выше алгоритмы были реализованы на языке программирования Python. Программа использует однопоточный режим исполнения, однако может быть легко перенесена на случай многопоточной генерации раскрасок. Для того чтобы запускать алгоритмы в многопоточном режиме, необходимо для каждого уровня (итерации) генерации объектов запускать новый поток, который будет завершен при завершении нового набора неизоморфных структур.

Проведем сравнение методов генерации, основываясь на времени выполнения реализованных алгоритмов. В данной работе для сравнения были выбраны два класса графов: цепи и циклы. Напомним, что *циклом* C_n называется граф $G = (V, \alpha)$, где $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, и $\alpha = \{(v_i, v_j) : |i - j| = 1\} \cup \{(v_1, v_n), (v_n, v_1)\}$. *Цепью* P_n называется граф $G = (V, \alpha)$, где $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, и $\alpha = \{(v_i, v_j) : |i - j| = 1\}$

Сравним время генерации раскрасок для всех цепей и циклов с числом вершин n от 3 до 9. Результаты генерации раскрасок для цепей с n вершинами представлены в табл. 1, а для циклов — в табл. 2. Время работы программы представлено в секундах.



Таблица 1 / Table 1

Сравнение времени работы методов МакКея и Рида – Фараджева на цепях
The comparison of the running time of the McKay and Reed – Faradzhev methods on paths

n	k	Количество раскрасок Number of colorings	Метод МакКея McKay's method	Метод Рида – Фараджева Reed – Faradzhev's method
3	2	3	0.0002	0.0002
4	2	6	0.0004	0.0003
	3	6	0.0023	0.0014
5	2	13	0.0008	0.0006
	3	24	0.0082	0.0042
	4	10	0.0475	0.0173
6	2	27	0.0020	0.0012
	3	88	0.0313	0.0142
	4	65	0.2370	0.0808
	5	15	1.1499	0.3123
7	2	5	0.0040	0.0026
	3	291	0.1098	0.0457
	4	348	1.1181	0.36
	5	140	6.7178	1.8045
	6	21	29.6244	6.4205
8	2	115	0.0118	0.0057
	3	951	0.4270	0.1528
	4	1698	5.3225	1.6220
	5	1050	38.8733	9.8318
	6	266	203.6058	41.1898
	7	28	795.6863	146.3406
9	2	231	0.0255	0.0125
	3	3199	1.3646	0.5251
	4	10942	23.9317	7.1255
	5	17890	222.7841	54.4089
	6	20536	1462.2332	287.4058
	7	20998	6415.6784	1002.7468
	8	36	25239.4394	3526.7013

Таблица 2 / Table 2

Сравнение времени работы методов МакКея и Рида – Фараджева на циклах
The comparison of the running time of the McKay and Reed – Faradzhev methods on cycles

n	k	Количество раскрасок Number of colorings	Метод МакКея McKay's method	Метод Рида – Фараджева Reed – Faradzhev's method
3	2	2	0.0002	0.0002
4	2	4	0.0002	0.0002
	3	9	0.0017	0.0009
5	2	7	0.0004	0.0003
	3	25	0.0059	0.0033
	4	34	0.0372	0.0152



Окончание табл. 2 / End of Table 2

n	k	Количество раскрасок Number of colorings	Метод МакКея McKay's method	Метод Рида – Фараджева Reed – Faradzhev's method
6	2	13	0.0012	0.0011
	3	73	0.0200	0.0103
	4	127	0.1825	0.0664
	5	141	1.1719	0.2687
7	2	24	0.0019	0.0013
	3	219	0.0945	0.0325
	4	500	0.9011	0.3196
	5	625	6.4083	1.8937
	6	645	27.7829	6.8833
8	2	46	0.0029	0.0025
	3	655	0.2493	0.0930
	4	1978	4.3110	1.4072
	5	2885	35.7415	9.4039
	6	3130	186.3902	37.2708
	7	3157	775.4324	124.2052
9	2	93	0.0121	0.0054
	3	2027	0.9505	0.3762
	4	8024	21.1162	6.2137
	5	13916	187.8341	43.5724
	6	16296	1154.5761	235.9630
	7	434	4884.8862	892.7705
	8	35	18988.9581	3017.8236

Можно заметить, что алгоритм, построенный на основе метода Рида – Фараджева, работает в несколько раз быстрее, чем алгоритм на основе метода МакКея на тех же входных данных.

Заключение

В данной работе было произведено исследование генерации неизоморфных графов с цветными вершинами и цветными ребрами, т. е. генерация вершинных и реберных k -раскрасок соответственно. Была использована техника генерации раскрасок без проверки на изоморфизм. Описываются два алгоритма генерации неизоморфных раскрасок методами МакКея и Рида – Фараджева. Произведена сравнительная характеристика двух методов на цепях и циклах. Из полученных результатов можно сделать вывод, что для цепей и циклов алгоритм, построенный на основе метода Рида – Фараджева, работает быстрее.

Список литературы

1. McKay B. D., Piperno A. Practical graph isomorphism, II // Journal of Symbolic Computation. 2013. Vol. 60. P. 94–112. <https://doi.org/10.1016/j.jsc.2013.09.003>
2. McKay B. D., Piperno A. Nauty and Traces: Graph canonical labeling and automorphism group computation. URL: <https://pallini.di.uniroma1.it/> (дата обращения: 01.05.2020).



3. Meringer M. Fast generation of regular graphs and construction of cages // *Journal of Graph Theory*. 1999. Vol. 30. P. 137–146. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0118\(199902\)30:2<137::AID-JGT7>3.0.CO;2-G](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199902)30:2<137::AID-JGT7>3.0.CO;2-G)
4. Brinkmann G., Goedgebeur J., McKay B. D. Generation of cubic graphs // *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, DMTCS*. 2011. Vol. 13, no. 2. P. 69–79.
5. Brinkmann G. Isomorphism rejection in structure generation programs // *Discrete Mathematical Chemistry* / eds. P. Hansen, P. W. Fowler and M. Zheng. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. 2000. Vol. 51. P. 25–38.
6. Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system // *IEEE Transactions on Computers*. 1976. Vol. C-25, no. 9. P. 875–884. <https://doi.org/10.1109/TC.1976.1674712>
7. Jensen T., Toft B. *Graph Coloring Problems*. Wiley-Interscience, 1994. 320 p.
8. *Topics in Chromatic Graph Theory* / ed. by L. W. Beineke, R. J. Wilson. Cambridge : Cambridge University Press, 2015. 370 p. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications 156). <https://doi.org/10.1017/CBO9781139519793>
9. Lewis R. M. R. *A Guide to Graph Colouring. Algorithms and Applications*. Springer, Cham, 2016. 253 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-25730-3>
10. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. Москва : Наука, 1997. 368 с.
11. Харари Ф. Теория графов. Москва : Мир, 1973. 296 с.
12. Абросимов М. Б., Разумовский П. В. О генерации неизоморфных вершинных k -раскрасок // *Прикладная дискретная математика. Приложение*. 2017. № 10. С. 136–138. <https://doi.org/10.17223/2226308X/10/53>
13. Разумовский П. В., Абросимов М. Б. О генерации неизоморфных k -раскрасок методом МакКея // *Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунар. науч. конф.* Саратов : ИЦ «Наука», 2018. С. 318–320.
14. Абросимов М. Б., Разумовский П. В. О генерации неизоморфных раскрасок методом Рида – Фараджева // *Прикладная дискретная математика. Приложение*. 2019. № 12. С. 173–176. <https://doi.org/10.17223/2226308X/12/48>

References

1. McKay B. D., Piperno A. Practical graph isomorphism, II. *Journal of Symbolic Computation*, 2013, vol. 60, pp. 94–112. <https://doi.org/10.1016/j.jsc.2013.09.003>
2. McKay B. D., Piperno A. *Nauty and Traces: Graph canonical labeling and automorphism group computation*. Available at: <https://pallini.di.uniroma1.it/> (accessed 1 May 2020).
3. Meringer M. Fast generation of regular graphs and construction of cages. *Journal of Graph Theory*, 1999, vol. 30, pp. 137–146. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0118\(199902\)30:2<137::AID-JGT7>3.0.CO;2-G](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199902)30:2<137::AID-JGT7>3.0.CO;2-G)
4. Brinkmann G., Goedgebeur J., McKay B. D. Generation of cubic graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. DMTCS*, 2011, vol. 13, no. 2, pp. 69–79.
5. Brinkmann G. Isomorphism rejection in structure generation programs. In: P. Hansen, P. W. Fowler, M. Zheng, eds. *Discrete Mathematical Chemistry*. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2000, vol. 51, pp. 25–38.
6. Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system. *IEEE Transactions on Computers*, 1976, vol. C-25, no. 9, pp. 875–884. <https://doi.org/10.1109/TC.1976.1674712>
7. Jensen T., Toft B. *Graph Coloring Problems*. Wiley-Interscience, 1994. 320 p.
8. L. W. Beineke, R. J. Wilson, eds. *Topics in Chromatic Graph Theory*. Cambridge, Cambridge University Press, 2015. 370 p. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications 156). <https://doi.org/10.1017/CBO9781139519793>
9. Lewis R. M. R. *A Guide to Graph Colouring. Algorithms and Applications*. Springer, Cham, 2016. 253 p.

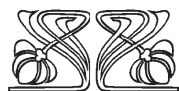
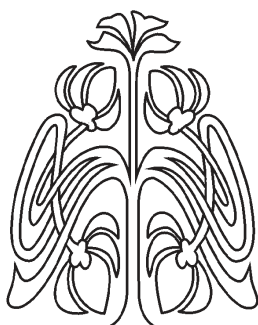


10. Bogomolov A. M., Salii V. N. *Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem* [Algebraic Foundations of the Theory of Discrete Systems]. Moscow, Nauka, 1997. 368 p (in Russian).
11. Harary F. *Graph Theory*. Addison-Wesley, 1969. 275 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1973. 296 p.).
12. Abrosimov M. B., Razumovsky P. V. About generation of non-isomorphic vertex k -colorings. *Prikladnaya Diskretnaya Matematika. Supplement*, 2017, no. 10, pp. 136–138 (in Russian). <https://doi.org/10.17223/2226308X/10/53>
13. Razumovsky P. V., Abrosimov M. B. About generation of non-isomorphic k -colorings by McKay's method. In: *Komp'iuternye nauki i informatsionnye tekhnologii* [Computer Science and Information Technologies: Proceedings of the International Scientific Conference]. Saratov, Publishing Center "Nauka", 2018, pp. 318–320 (in Russian).
14. Abrosimov M. B., Razumovsky P. V. About non-isomorphic graph colouring generating by Read – Faradzhev method. *Applied Discrete Mathematics. Supplement*, 2019, no. 12, pp. 173–176 (in Russian). <https://doi.org/10.17223/2226308X/12/48>

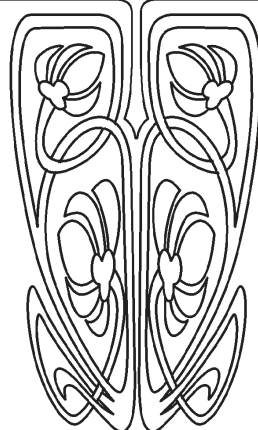
Поступила в редакцию / Received 10.06.2020

Принята к публикации / Accepted 12.10.2020

Опубликована / Published 31.05.2021



ПОДПИСКА



Подписка на 2021 год

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год

Цена свободная

Оформить подписку онлайн можно в интернет-каталоге «Пресса по подписке» (www.akc.ru)

Адрес издательства (редакции):

410012, Саратов, Астраханская, 83

Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89

Факс: +7(845-2) 27-85-29

E-mail: izdat@sgu.ru

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mml@sgu.ru

Website: <https://mml.sgu.ru/>