

ISSN 1816-9791 (Print)
ISSN 2541-9005 (Online)

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия



Серия: Математика, Механика, Информатика

2022

Том 22

Выпуск 2



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 2

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал
2022 Том 22

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издается с 2005 года

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

Гуреева Н. А., Киселева Р. З., Клочков Ю. В., Николаев А. П.
К вопросу об аппроксимации класса $C^{(0)}$ компонент физических величин
в криволинейных системах координат 142

Parphenova A. Yu., Saraev L. A. Stochastic model of innovation diffusion
that takes into account the changes in the total market volume
[Парфенова А. Ю., Сараев Л. А. Стохастическая модель диффузии
инноваций, учитывающая изменение общего объема рынка] 152

Ройтенберг В. Ш. О рождении предельного цикла из петли сепаратрисы
сшитого седло-узла 159

Хачатрян Х. А., Петросян А. С. О разрешимости одного класса
нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна на полуоси 169

Механика

Ватульян А. О., Нестеров С. А. Решение обратной задачи об идентификации
двух термомеханических характеристик функционально-градиентного стержня 180

Zemlyanukhin A. I., Vochkarev A. V., Ratushny A. V., Chernenko A. V.
Generalized model of nonlinear elastic foundation and longitudinal
waves in cylindrical shells [Землянухин А. И., Бочкарев А. В., Ратушный А. В.,
Черненко А. В. Обобщенная модель нелинейно-упругого основания
и продольные волны в цилиндрических оболочках] 196

Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Generalized pseudotensor formulations
of the Stokes' integral theorem [Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Обобщенные
псевдотензорные формулировки интегральной теоремы Стокса] 205

Информатика

Gudkov A. A., Sidorov S. P., Spiridonov K. A. Dual active-set algorithm
for optimal 3-monotone regression [Гудков А. А., Сидоров С. П.,
Спиридонов К. А. Двойственный алгоритм на основе активного
множества для построения оптимальной 3-монотонной регрессии] 216

Iliashenko O. Yu., Lukyanchenko E. L. Possibilities of using computer
vision for data analytics in medicine [Ильяшенко О. Ю., Лукьянченко Е. Л.
Возможности применения компьютерного зрения для аналитики данных
в медицине] 224

Kelbert M. Y., Suhov Yu. M. What scientific folklore knows about the distances
between the most popular distributions [Кельберт М. Я., Сухов Ю. М.
Что научный фольклор знает о расстояниях между наиболее популярными
распределениями] 233

Kulakov S. M., Koynov R. S., Taraborina E. N. The functional structure of the ergatic
system of precedent management of a complex production facility [Кулаков С. М.,
Койнов Р. С., Тараборина Е. Н. О функциональной структуре эргатической
системы прецедентного управления сложным производственным объектом] 241

Ternikov A. A. Skill-based clustering algorithm for online job advertisements
[Терников А. А. Алгоритм кластеризации на основе навыков
для онлайн-объявлений о вакансиях] 250

Приложения

Дата

Коссович Л. Ю., Кириллова И. В. К 60-летию со дня рождения профессора
Юрия Николаевича Радаева 266

Журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика»» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Запись о регистрации СМИ ПИ
№ ФС77-76640 от 26 августа 2019 года

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (специальности: 01.01.02; 01.01.06; 01.01.09; 01.02.06; 01.02.08; 1.1.1; 1.1.6; 1.1.8; 1.1.9; 1.2.2 (физ.-мат. и техн. науки); 2.3.1 (физ.-мат. и техн. науки).

Журнал входит в международные базы данных Web of Science (ESCI), Scopus, MathSciNet, zbMATH, DOAJ

Подписной индекс издания 36017. Подписку на печатные издания можно оформить в Интернет-каталогах «Пресса России» (www.ppressa-rr.ru), «Пресса по подписке» (www.akc.ru) и ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru). Журнал выходит 4 раза в год. Цена свободная.

Электронная версия находится в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

Директор издательства

Бучко Ирина Юрьевна

Редактор

Каргин Игорь Анатольевич

Художник

Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист

Агафонов Андрей Петрович

Верстка

Халова Виктория Анатольевна

Технический редактор

Каргин Игорь Анатольевич

Корректор

Агафонов Андрей Петрович

Адрес учредителя, издателя и издательства (редакции):

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83

Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89

E-mail: izdat@sgu.ru

Подписано в печать 23.05.22.

Подписано в свет 31.05.22.

Формат 60 × 84 1/8.

Усл. печ. л. 15,81 (17,0).

Тираж 100 экз. Заказ 54-Т.

Отпечатано в типографии
Саратовского университета.

Адрес типографии:

410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2022

**ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ**

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <https://mmi.sgu.ru/ru/dlya-avtorov>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования. В случае положительного решения статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <https://mmi.sgu.ru>

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@sgu.ru

Website: <https://mmi.sgu.ru>

Ответственный секретарь серии:

Шевцова Юлия Владиславовна

CONTENTS**Scientific Part****Mathematics**

Gureeva N. A., Kiseleva R. Z., Klochkov Yu. V., Nikolaev A. P. On the approximation of class $C^{(0)}$ components of physical quantities in curved coordinate systems 142

Parphenova A. Yu., Saraev L. A. Stochastic model of innovation diffusion that takes into account the changes in the total market volume 152

Roitenberg V. Sh. On generation of a limit cycle from a separatrix loop of a sewn saddle-node 159

Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S. On the solvability of a class of nonlinear Hammerstein integral equations on the semiaxis 169

Mechanics

Vatulyan A. O., Nesterov S. A. Solution of the inverse problem of two thermomechanical characteristics identification of a functionally graded rod 180

Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V., Ratushny A. V., Chernenko A. V. Generalized model of nonlinear elastic foundation and longitudinal waves in cylindrical shells 196

Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Generalized pseudotensor formulations of the Stokes' integral theorem 205

Computer Sciences

Gudkov A. A., Sidorov S. P., Spiridonov K. A. Dual active-set algorithm for optimal 3-monotone regression 216

Iliashenko O. Yu., Lukyanchenko E. L. Possibilities of using computer vision for data analytics in medicine 224

Kelbert M. Y., Suhov Yu. M. What scientific folklore knows about the distances between the most popular distributions 233

Kulakov S. M., Koynov R. S., Taraborina E. N. The functional structure of the ergatic system of precedent management of a complex production facility 241

Ternikov A. A. Skill-based clustering algorithm for online job advertisements 250

Appendices**Date**

Kossovich Yu. A., Kirillova I. V. To 60th anniversary of professor Yuri N. Radayev 266



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Бауэр Светлана Михайловна, доктор физ.-мат. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

dell'Isola Francesco, доктор наук, профессор (Рим, Италия)

Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Омск, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)

Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)

Индейцев Дмитрий Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН

(Санкт-Петербург, Россия)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Республика Беларусь)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, акад. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук (Долгопрудный, Московская обл., Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ульяновск, Россия)

Резчиков Александр Фёдорович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)

Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Республика Беларусь)

Субботин Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Екатеринбург, Россия)

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Цатурян Андрей Кимович, доктор физ.-мат. наук, доцент (Москва, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чуань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
"IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY.
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS"**

Editor-in-Chief – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

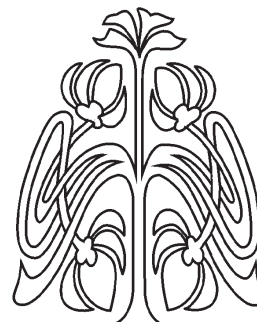
Deputy Editor-in-Chief – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

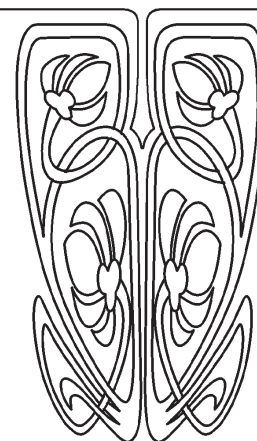
Members of the Editorial Board:

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)
Svetlana M. Bauer (St. Petersburg, Russia)
Francesco dell'Isola (Rome, Italy)
Dmitry A. Indeitsev (St. Petersburg, Russia)
Shoji Imatani (Kyoto, Japan)
Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)
Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)
Avgust P. Khromov (Saratov, Russia)
Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)
Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)
Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)
Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)
Nikita F. Morozov (St. Petersburg, Russia)
Semen R. Nasyrov (Kazan', Russia)
Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny,
Moscow region, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)
Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)
Alexander F. Rezchikov (Saratov, Russia)
Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)
Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)
Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)
Alexander I. Shashkin (Voronezh, Russia)
Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)
Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)
Yurii N. Subbotin (Ekaterinburg, Russia)
Igor' E. Tananko (Saratov, Russia)
Andrey K. Tsaturyan (Moscow, Russia)
Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)
Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)
Vjacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)
Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**



МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 142–151
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 142–151

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-142-151>

Научная статья

УДК 539.3

К вопросу об аппроксимации класса $C^{(0)}$ компонент физических величин в криволинейных системах координат

Н. А. Гуреева¹, Р. З. Киселева^{2✉}, Ю. В. Клочков²,
А. П. Николаев²

¹Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Россия, 125993, ГСП-3, г. Москва, Ленинградский проспект, д. 49

²Волгоградский государственный аграрный университет, Россия, 400002, г. Волгоград, Университетский проспект, д. 26

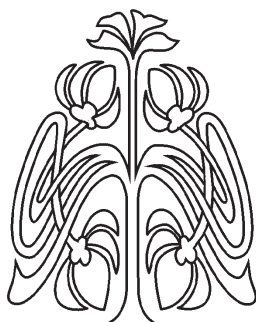
Гуреева Наталья Анатольевна, доктор физико-математических наук, доцент, доцент департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий, Natalya-gureeva@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3496-2008>, AuthorID: 306195

Киселева Румия Зайдуллаевна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования, rumia1970@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3047-5256>, AuthorID: 573150

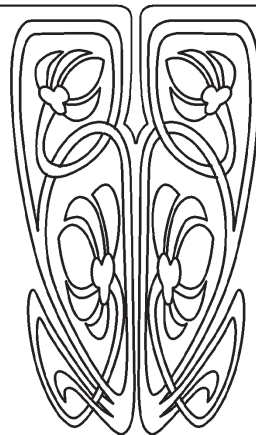
Клочков Юрий Васильевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Klotchkov@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1027-1811>, AuthorID: 161677

Николаев Анатолий Петрович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования, anpetr40@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7098-5998>, AuthorID: 161676

Аннотация. В численных методах расчета прочности техно-сферных объектов широко используются аппроксимирующие выражения искомых величин через их узловые значения. Теория аппроксимирующих функций скалярных величин в настоящее время развита достаточно полно, но ее непосредственное использование в криволинейных системах координат для аппроксимации компонент векторов перемещений и для компонент тензоров напряжений может приводить к значительной некорректности при существенных градиентах кривизны и смещениях рассчитываемого объекта как жесткого целого из-за



Научный
отдел





отсутствия в аппроксимирующих выражениях параметров используемой в расчете криволинейной системы координат. В настоящей работе с целью получения аппроксимирующих выражений для отдельных компонент вектора перемещения внутренней точки конечного элемента в форме шестигранника использованы известные аппроксимирующие функции непосредственно для вектора перемещения через векторы перемещений узловых точек. В результате координатных преобразований, а именно в использовании матричных выражений базисных векторов узловых точек конечного элемента через базисные векторы его внутренней точки, получаются аппроксимирующие выражения каждой компоненты вектора перемещения внутренней точки конечного элемента через все компоненты векторов перемещений узловых точек конечного элемента. С целью получения аппроксимирующих выражений для компонент тензора напряжений внутренней точки конечного элемента используется известная аппроксимирующая функция непосредственно для выражения тензора напряжений внутренней точки конечного элемента через тензоры напряжений в его узловых точках. Координатные преобразования заключаются в использовании матричных выражений диадных произведений базисных векторов узловых точек через диадные произведения базисного вектора внутренней точки конечного элемента. В результате координатного преобразования определяется аппроксимирующее выражение каждой компоненты тензора напряжения в окрестности внутренней точки конечного элемента через все компоненты тензоров напряжений в узловых точках. Полученные аппроксимирующие выражения для компонент вектора перемещения и компонент тензора напряжения с использованием матричных выражений базисных векторов узловых точек через базисные векторы внутренней точки конечного элемента, а также через матричные выражения их диадных произведений позволяют учитывать параметры используемой криволинейной системы координат, что приводит к решению общеизвестной в МКЭ проблемы учета смещения конечного элемента как твердого тела.

Ключевые слова: вектор перемещения, тензор второго ранга, криволинейная система координат, базисные векторы, аппроксимирующие функции

Для цитирования: Гуреева Н. А., Киселева Р. З., Клочков Ю. В., Николаев А. П. К вопросу об аппроксимации класса $C^{(0)}$ компонент физических величин в криволинейных системах координат // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 142–151. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-142-151>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

On the approximation of class $C^{(0)}$ components of physical quantities in curved coordinate systems

N. A. Gureeva¹, R. Z. Kiseleva²✉, Yu. V. Klochkov², A. P. Nikolaev²

¹Financial University under the Government of the Russian Federation, 49 Leningradsky Prospekt, GSP-3 Moscow 125993, Russia

²Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskiy Prospekt, Volgograd 400002, Russia

Natalia A. Gureeva, Natalya-gureeva@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3496-2008>, AuthorID: 306195

Rumiya Z. Kiseleva, rumia1970@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3047-5256>, AuthorID: 573150

Yuri V. Klochkov, Klotchkov@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1027-1811>, AuthorID: 161677

Anatoly P. Nikolaev, anpetr40@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7098-5998>, AuthorID: 161676



Abstract. In numerical methods for calculating the strength of technospheric objects approximating expressions of the desired values in terms of their nodal values are widely used. The theory of approximating functions of scalar quantities is currently developed quite fully, but its direct use in curvilinear coordinate systems for approximating the components of displacement vectors and for the components of stress tensors can lead to significant inaccuracies with significant gradients of curvature and displacements of the calculated object as a rigid whole due to the lack of parameters in the approximating expressions of the curvilinear coordinate system used in the calculation. In this paper, in order to obtain approximating expressions for the individual components of the displacement vector of a finite element internal point in the form of a hexagon, the known approximating functions directly for the displacement vector through the displacement vectors of the nodal points are used. As a result of coordinate transformations, namely, using matrix expressions of the basis vectors of a finite element nodal points through the basis vectors of its internal point approximating expressions of each component of the displacement vector of the finite element internal point through all components of the displacement vectors of the finite element nodal points are obtained. In order to obtain approximating expressions for the components of the stress tensor of a finite element inner point a well-known approximating function is used directly to express the stress tensor of a finite element inner point through the stress tensors at its nodal points. Coordinate transformations consist in using matrix expressions of the dyad products of the node points basis vectors through the dyad products of the basis vector of the finite element inner point. As a result of the coordinate transformation, the approximating expression of each component of the stress tensor in the vicinity of the inner point of the finite element is determined through all the components of the stress tensors at the nodal points. The obtained approximating expressions for the components of the displacement vector and the components of the stress tensor using matrix expressions of the nodal points basis vectors through the basis vectors of the finite element internal point as well as through the matrix expressions of their dyad products allow taking into account the parameters of the curved coordinate system used. That leads to the solution of the well-known problem in the FEM which takes into account the displacement of the finite element as a solid.

Keywords: displacement vector, tensor of the second rank, curvilinear coordinate system, basis vectors, approximating functions

For citation: Gureeva N. A., Kiseleva R. Z., Klochkov Yu. V., Nikolaev A. P. On the approximation of class $C^{(0)}$ components of physical quantities in curved coordinate systems. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 142–151 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-142-151>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Криволинейные системы координат широко используются в теории механики деформируемого твердого тела [1–3]. Криволинейные системы координат используются и в численных методах определения напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций инженерных сооружений различного назначения. Среди численных методов расчета таких конструкций особенно широкое распространение получил метод конечных элементов (МКЭ) как в формулировке метода перемещений [4–7], так и в смешанной формулировке [6–9].

Основными операциями использования МКЭ при определении напряженно-деформированного состояния нагруженного твердого тела являются получение матрицы жесткости конечного элемента и вектора его узловых нагрузок, что выполняется на



основе использования аппроксимирующих функций, позволяющих выразить искомые величины внутренней точки конечного элемента через соответствующие им узловые неизвестные.

При расчете прочности тонкостенных конструкций на основе смешанного МКЭ в качестве узловых неизвестных конечных элементов принимаются перемещения и напряжения. Появляется необходимость аппроксимации искомых величин МКЭ в смешанной формулировке (перемещений и напряжений в окрестности внутренней точки конечного элемента) через их узловые значения при учете параметров используемой криволинейной системы координат.

Представленная работа относится к математической операции основного раздела МКЭ, где традиционно при расчетах в криволинейных системах координат для аппроксимации искомых величин через их узловые неизвестные используются зависимости как для скалярных величин, когда каждая искомая величина аппроксимируется через узловые значения только этой же величины, что приводит к некорректным результатам при значительных кривизнах границ конструкции и смещениях конечных элементов как твердого тела.

В настоящей работе представлены корректные алгоритмы получения в криволинейных системах координат аппроксимирующих выражений компонент вектора перемещения произвольной точки конечного элемента через компоненты векторов перемещении узловых точек конечного элемента. Разработаны также аппроксимирующие выражения для компонент тензора второго ранга через компоненты тензоров второго ранга узловых точек.

1. Базисные векторы точек конечного элемента

Радиус-вектор произвольной точки M оболочки определяется выражением

$$\vec{R} = \vec{R}^0 + \tau \vec{a}_3^0 = x^m(\theta^n) \vec{i}_m, \quad (1)$$

где $\vec{R}^0 = x^{0m}(u, v) \vec{i}_m$ — радиус-вектор соответствующей точки срединной поверхности; u, v — криволинейные координаты срединной поверхности [10]; x^{0m} — декартовы координаты срединной поверхности; $\vec{a}_3^0 = \frac{\vec{R}_{,u}^0 \times \vec{R}_{,v}^0}{|\vec{R}_{,u}^0 \times \vec{R}_{,v}^0|} = a_3^m(u, v) \vec{i}_m$ — нормаль к срединной поверхности; $-\frac{h}{2} \leq \tau \leq \frac{h}{2}$ — расстояние от срединной поверхности до рассматриваемой точки (h — толщина оболочки); $\theta^1 = u$; $\theta^2 = v$; $\theta^3 = \tau$ — криволинейные координаты произвольной точки рассматриваемого тела; $x^m(u, v, \tau) = x^{0m}(u, v) + \phi(a_3^m(u, v), \tau)$ — декартовы координаты произвольной точки тела; \vec{i}_m — орты декартовой системы координат.

При прочностном расчете оболочки она представляется системой конечных элементов, соединенных между собой в узлах. В качестве конечного элемента полагается шестигранник с восемью узловыми точками $w = i, j, k, l, m, n, p, h$.

Для каждого шестигранного конечного элемента векторы локальных базисов внутренних и узловых точек определяются дифференцированием (1) по криволинейным координатам θ^k

$$\vec{g}_k = \vec{R}_{,k} = x^m(\theta^n)_{,k} \vec{i}_m, \quad \vec{g}_k^w = x^{mw}(\theta^{nw})_{,k} \vec{i}_m, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где $w = i, j, k, l, m, n, p, h$ — узлы конечного элемента.

На основе (2) формируются матричные соотношения для внутренней и узловых точек конечного элемента

$$\{\vec{g}\} = [m]\{\vec{i}\}, \quad \{\vec{g}^w\} = [m^w]\{\vec{i}\}, \quad w = i, j, k, l, m, n, p, h, \quad (3)$$



где $\{\vec{g}\}^T = \{\vec{g}_1 \vec{g}_2 \vec{g}_3\}$ — строка векторов локального базиса точки M ; $\{\vec{g}^w\}^T = \{\vec{g}_1^w \vec{g}_2^w \vec{g}_3^w\}$ — строка векторов локального базиса узловой точки w шестигранника; $\{\vec{i}\}^T = \{\vec{i}_1 \vec{i}_2 \vec{i}_3\}$ — строка ортов декартовой системы координат.

Используя соотношения (3), можно получить матричные выражения базисных векторов узловой точки w через базисные векторы произвольной точки M шестигранника

$$\{\vec{g}^w\}_{3 \times 1} = [m^w]_{3 \times 3} [m]_{3 \times 3}^{-1} \{\vec{g}\}_{3 \times 1} = [z^w]_{3 \times 3} \{\vec{g}\}_{3 \times 1}. \tag{4}$$

2. Аппроксимация компонент вектора перемещения

Для выполнения численного интегрирования по объему конечного элемента шестигранной формы с узлами i, j, k, l, m, n, p и h он отображается на локальный куб, локальные координаты которого изменяются в пределах $-1 \leq \xi \eta \zeta \leq 1$. Скалярные величины, относящиеся к точке M шестигранника, аппроксимируются через значения в узловых точках w конечного элемента трилинейными соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda = & \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \frac{1-\zeta}{2} \lambda^i + \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \frac{1-\zeta}{2} \lambda^j + \frac{1+\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \frac{1-\zeta}{2} \lambda^k + \\ & + \frac{1-\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \frac{1-\zeta}{2} \lambda^l + \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \frac{1+\zeta}{2} \lambda^m + \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \frac{1+\zeta}{2} \lambda^n + \\ & + \frac{1+\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \frac{1+\zeta}{2} \lambda^p + \frac{1-\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \frac{1+\zeta}{2} \lambda^h = \{f(\xi, \eta, \zeta)\}_{1 \times 8}^T \{\lambda_y\}_{8 \times 1}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\{\lambda_y\}_{8 \times 1}^T = \{\lambda^i \lambda^j \lambda^k \lambda^l \lambda^m \lambda^n \lambda^p \lambda^h\}$ — строка узловых значений скалярной величины λ в узлах шестигранника.

К скалярным величинам точки M шестигранника относятся, например, значения криволинейных координат $\theta^1 \theta^2 \theta^3$ и температура t .

Для вектора перемещения внутренней точки конечного элемента, представляемого выражением

$$\vec{V} = v^i \vec{g}_i = \{\vec{g}\}_{1 \times 3}^T \{v\}_{3 \times 1}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{6}$$

аппроксимацию [5–7] компонент v^i через узловые неизвестные принимают выражением (5) ($\lambda = v^i$; $\{\lambda_y\}^T = \{v_y^i\}^T$). Недостатком этой аппроксимации является отсутствие в аппроксимирующих выражениях $\{f(\xi \eta \zeta)\}^T$ параметров используемой криволинейной системы координат.

Для устранения этого недостатка предлагается в аппроксимирующем выражении (5) под символом λ понимать вектор перемещения внутренней точки конечного элемента, а под символом λ^w понимать вектор перемещения узловой точки w и записать аппроксимирующее выражение (5) в векторной форме

$$\vec{V} = \{f\}_{1 \times 8}^T \{\vec{V}_y\}_{8 \times 1}, \tag{7}$$

где $\{\vec{V}_y\}_{1 \times 8}^T = \{\vec{V}^i \vec{V}^j \vec{V}^k \vec{V}^l \vec{V}^m \vec{V}^n \vec{V}^p \vec{V}^h\}$ — строка векторов в узлах шестигранника;

$\vec{V}^w = v^{iw} \vec{g}_i^w$ — вектор перемещения узловой точки w .

Для выполнения координатного преобразования столбец узловых векторов шестигранника представляется матричным выражением

$$\{\vec{V}_y\}_{8 \times 1} = [\vec{L}]_{8 \times 24} \{v_y\}_{24 \times 1}, \tag{8}$$



где $\{v_y\}_{1 \times 24}^T = \{v^{1i} v^{2i} v^{3i} v^{1j} v^{2j} v^{3j} \dots v^{1h} v^{2h} v^{2h}\}$,

$$[\vec{L}]_{8 \times 24} = \begin{bmatrix} \vec{g}_1^i & \vec{g}_2^i & \vec{g}_3^i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \vec{g}_1^j & \vec{g}_2^j & \vec{g}_3^j & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{g}_1^h & \vec{g}_2^h & \vec{g}_3^h \end{bmatrix}.$$

В матрице $[\vec{L}]$ точками обозначены ее нулевые элементы.

С учетом (8) аппроксимирующее выражение (7) запишется в матричном виде

$$\vec{V} = \{f\}_{1 \times 8}^T [\vec{L}]_{8 \times 24} \{v_y\}_{24 \times 1} = \left\{ f_1 \{ \vec{g}^i \}_{1 \times 3}^T : f_2 \{ \vec{g}^j \}_{1 \times 3}^T : \dots : f_8 \{ \vec{g}^h \}_{1 \times 3}^T \right\}_{24 \times 1} \{v_y\}_{24 \times 1}. \quad (9)$$

Принимая во внимание (4), из соотношения (9) получается матричное соотношение

$$\vec{V} = \{ \vec{g} \}_{1 \times 3}^T \left[f_1 [z^i]_{1 \times 3}^T : f_2 [z^j]_{1 \times 3}^T : \dots : f_8 [z^h]_{1 \times 3}^T \right] = \{ \vec{g} \}_{1 \times 3}^T [H]_{3 \times 24} \{v_y\}_{24 \times 1}. \quad (10)$$

Представляя левую часть (10) выражением (6), можно найти аппроксимирующие выражения для компонент вектора внутренней точки конечного элемента

$$v^i = \{h_i\}_{1 \times 24}^T \{v_y\}_{24 \times 1}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11)$$

где $\{h_i\}_{1 \times 24}^T$ определяется i -й строкой матрицы $[H]_{3 \times 24}$.

Как видно, в аппроксимирующем выражении (11) компоненты v^i вектора перемещения через матрицу $[z]$ учитываются параметры используемой криволинейной системы координат. Кроме того, каждая компонента v^i вектора перемещения определяется через все компоненты v^{1w}, v^{2w}, v^{3w} векторов перемещений узловых точек конечного элемента.

Если в аппроксимирующем выражении (10) положить матрицу $[z^w]_{3 \times 3}$ единичной, что означает равенство базисных векторов узловых точек базисным векторам внутренней точки конечного элемента при их единичной длине, то аппроксимирующие выражения для v^i примут вид зависимостей (5), где каждая компонента вектора перемещения аппроксимируется через узловые значения этой же компоненты. Так как в криволинейной системе координат матрица $[z^w]_{3 \times 3}$ не является единичной, то некорректность использования аппроксимации (5) величин v^i очевидна.

3. Аппроксимация компонент тензора второго ранга

Если физическая величина в точке M шестигранника является тензором второго ранга, определяемым выражением

$$\tilde{T} = T^{ij} \vec{g}_i \vec{g}_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (12)$$

то аппроксимация компонент этой величины выражением (5) ($\lambda = T^{ij}$, $\{\lambda_y\}_{1 \times 8}^T = \{T_y^{ij}\}_{1 \times 8}^T$) [6, 7] также будет некорректна в криволинейной системе координат.

Для получения корректных искомых соотношений следует в аппроксимирующих выражениях (5) под символом λ полагать тензор второго ранга в базисе внутренней



точки конечного элемента, а под символом λ^w — тензор второго ранга в базисе узловой точки конечного элемента и записать соотношение (5) в виде

$$\tilde{T} = \{f\}_{1 \times 8}^T \{\tilde{T}_y\}_{8 \times 1}, \quad (13)$$

где $\{\tilde{T}_y\}_{8 \times 1}^T = \{\tilde{T}^i \tilde{T}^j \tilde{T}^k \tilde{T}^l \tilde{T}^m \tilde{T}^n \tilde{T}^p \tilde{T}^h\}$ — строка тензоров узловых точек конечного элемента; $\tilde{T}^w = T^{ijw} \vec{g}_i^w \vec{g}_j^w$ — тензор узловой точки w конечного элемента.

Для координатного преобразования соотношения (13) тензор второго ранга в точке M можно представить матричным произведением

$$\tilde{T} = \{T\}_{1 \times 9}^T \{\vec{g}\}_{9 \times 1} = \{\vec{g}\}_{9 \times 1}^T \{T\}_{9 \times 1}, \quad (14)$$

где $\{T\}_{1 \times 9}^T = \{T^{11} T^{12} T^{13} T^{21} T^{22} T^{23} \dots T^{31} T^{32} T^{33}\}$ — строка компонент тензора второго ранга; $\{\vec{g}\}_{1 \times 9}^T = \{\vec{g}_1 \vec{g}_1 : \vec{g}_1 \vec{g}_2 : \vec{g}_1 \vec{g}_3 : \dots : \vec{g}_3 \vec{g}_1 : \vec{g}_3 \vec{g}_2 : \vec{g}_3 \vec{g}_3\}$ — строка диадных произведений базисных векторов точки M .

Для узловой точки w тензоры второго ранга определяются матричными выражениями

$$\tilde{T}^w = \{T^w\}_{1 \times 9}^T \{\vec{g}^w\}_{9 \times 1} = \{\vec{g}^w\}_{1 \times 9}^T \{T^w\}_{9 \times 1}, \quad (15)$$

где $\{T^w\}_{1 \times 9}^T = \{T^{11w} T^{12w} T^{13w} T^{21w} T^{22w} T^{23w} T^{31w} T^{32w} T^{33w}\}$ — строка компонент тензоров второго ранга в узловой точке w ; $\{\vec{g}^w\}_{1 \times 9}^T = \{\vec{g}_1^w \vec{g}_1^w : \vec{g}_1^w \vec{g}_2^w : \vec{g}_1^w \vec{g}_3^w : \dots : \vec{g}_3^w \vec{g}_1^w : \vec{g}_3^w \vec{g}_2^w : \vec{g}_3^w \vec{g}_3^w\}$ — строка диадных произведений базисных векторов узловой точки.

На основании (15) столбец узловых тензоров второго ранга может быть представлен матричным выражением

$$\{\tilde{T}_y\}_{8 \times 1} = [\vec{L}]_{8 \times 72} \{T_y\}_{72 \times 1}, \quad (16)$$

где $\{T_y\}_{1 \times 72}^T = \{T^{11i} T^{12i} T^{13i} T^{21i} T^{22i} T^{23i} T^{31i} T^{32i} T^{33i} \dots T^{11h} T^{12h} T^{13h} T^{21h} T^{22h} T^{23h} T^{31h} T^{32h} T^{33h}\}$ — строка компонент тензоров второго ранга в узлах шестигранника;

$[\vec{L}]_{8 \times 72} = \begin{bmatrix} \{\vec{g}^i\}_{1 \times 9}^T & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \{\vec{g}^h\}_{1 \times 9}^T \end{bmatrix}$ — матрица диадных произведений базисных векторов узловых точек (точками обозначены ее нулевые элементы).

Диадные произведения базисных векторов узловой точки на основе (4) можно представить выражением

$$\vec{g}_i^w \vec{g}_j^w = (z_{i1}^w \vec{g}_1 + z_{i2}^w \vec{g}_2 + z_{i3}^w \vec{g}_3)(z_{j1}^w \vec{g}_1 + z_{j2}^w \vec{g}_2 + z_{j3}^w \vec{g}_3). \quad (17)$$

Используя (17), можно сформировать матричное соотношение

$$\{\vec{g}^w\}_{9 \times 1} = [\chi^w]_{9 \times 9} \{\vec{g}\}_{9 \times 1}, \quad \{\vec{g}^w\}_{1 \times 9}^T = \{\vec{g}\}_{1 \times 9}^T [\chi^w]_{9 \times 9}^T. \quad (18)$$



Аппроксимирующее выражение (13) для тензора произвольной точки шестигранника с учетом (16) и (18) примет вид

$$\tilde{T} = \{f\}^T \begin{bmatrix} \vec{L} \\ \{T_y\} \end{bmatrix} = \{\vec{g}\}^T \begin{bmatrix} f_1[\chi^j]^T & f_2[\chi^i]^T & \dots & f_9[\chi^h]^T \end{bmatrix} = \{\vec{g}\}^T [S] \{T_y\}. \quad (19)$$

Представляя левую часть (19) выражением (14), можно получить матричное выражение

$$\{T\} = [S] \{T_y\}. \quad (20)$$

Каждая компонента тензора второго ранга (элемент столбца $\{T\}$) определится выражением

$$T_l^{ij} = \{H_l\}^T \{T_y\}, \quad l = 1, 2, \dots, 9, \quad (21)$$

где $\{H_l\}^T$ — аппроксимирующее выражение, определяемое l -ой строкой матрицы $[S]$.

На основе (21) каждая компонента тензора второго ранга произвольной точки шестигранника аппроксимируется через все компоненты тензоров узловых точек конечного элемента.

Если принять матрицу $[z^w]$ единичной, то матрица $[\chi^w]$ в (19) также будет единичной, и компонента T_l^{ij} тензора второго ранга в окрестности внутренней точки конечного элемента будет представляться через узловые значения этой же компоненты аппроксимируемыми выражениями (5). Некорректность такой аппроксимации в криволинейной системе координат очевидна.

Если компоненты тензора второго ранга обладают свойствами симметрии, то в аппроксимирующих соотношениях (20) размеры матриц уменьшаются.

Выражение тензора второго ранга в произвольной точке конечного элемента (14) принимает вид

$$\tilde{T} = \{T\}^T \{\vec{g}\} = \{\vec{g}\}^T \{T\}, \quad (22)$$

где $\{T\}^T = \{T^{11} \ T^{12} \ T^{13} \ T^{22} \ T^{23} \ T^{33}\}$, $\{\vec{g}\}^T = \{\vec{g}_1 \vec{g}_1 \ 2\vec{g}_1 \vec{g}_2 \ 2\vec{g}_1 \vec{g}_3 \ \vec{g}_2 \vec{g}_2 \ 2\vec{g}_2 \vec{g}_3 \ \vec{g}_3 \vec{g}_3\}$.

Аналогично преобразуются тензоры второго ранга узловых точек.

В итоге аппроксимирующее выражение (20) принимает вид

$$\{T\} = [S] \{T_y\}. \quad (23)$$

Как видно, через матрицы $[S]$ и $[\chi^w]^T$ в аппроксимирующих выражениях (20) и (23) учитываются параметры используемой криволинейной системы координат. Кроме того, каждая компонента тензора второго ранга внутренней точки конечного элемента выражается при аппроксимации через все компоненты тензоров узловых точек.

Заключение

Как видно из (11) и (23), некорректным является непосредственное использование аппроксимирующих соотношений (5) для выражения компонент тензоров 1-го, 2-го рангов через их узловые значения при переменных базисных векторах. Аппроксимирующие функции (5) следует применять к тензорам, а аппроксимирующие выражения



для компонент тензоров определять, выполняя координатные преобразования между базисными векторами узловых точек и базисными векторами внутренней точки конечного элемента.

Разработанные аппроксимирующие выражения векторных и тензорных величин следует использовать в численных методах определения напряженно-деформированного состояния оболочечных элементов инженерных сооружений при переменных кривизнах их срединных поверхностей, а также для учета смещений оболочечных конечных элементов как твердых тел при расчетах в криволинейных системах координат.

Список литературы

1. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Ленинград : Судпромгиз, 1962. 432 с.
2. Галимов К. З., Паймушин В. Н. Теория оболочек сложной геометрии. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1985. 164 с.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды : в 2 т. Т. 1. Москва : Наука, 1976. 535 с.
4. Голованов А. И., Тюленева О. Н., Шигабутдинов А. Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. Москва : Физматлит, 2006. 392 с.
5. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. Москва : Мир, 1976. 464 с.
6. Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига : Зинатне, 1988. 284 с.
7. Бате К. Ю. Методы конечных элементов / под ред. Л. И. Турчака. Москва : Физматлит, 2010. 1024 с.
8. Гуреева Н. А., Клочков Ю. В., Николаев А. П. Расчет осесимметрично нагруженной оболочки вращения с учетом геометрической нелинейности на основе смешанного МКЭ // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2014. № 3. С. 14–19.
9. Гуреева Н. А., Клочков Ю. В., Николаев А. П. Расчет произвольно нагруженной оболочки вращения на основе МКЭ // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2010. № 3. С. 7–10.
10. Кривошапко С. Н. Энциклопедия аналитических поверхностей : более 500 поверхностей, 38 классов : математикам, инженерам, архитекторам. Москва : URSS, 2010. 556 с.

References

1. Novozhilov V. V. *Teoriya tonkikh obolochek* [Theory of Thin Shells]. Leningrad, Sudpromgiz, 1962. 432 p. (in Russian).
2. Galimov K. Z., Paimushin V. N. *Teoriya obolochek slozhnoy geometrii* [The Theory of Shells of Complex Geometry]. Kazan, Kazan University Publ., 1985. 164 p. (in Russian).
3. Sedov L. I. *Mekhanika sploshnoi sredy* [Continuum Mechanics]. Vol. 1. Moscow, Nauka, 1976. 535 p. (in Russian).
4. Golovanov A. I., Tyuleneva O. N., Shigabutdinov A. F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksiy* [Finite Element Method in Statics and Dynamics of Thin-Walled Structures]. Moscow, Fizmatlit, 2006. 392 p. (in Russian).
5. Oden J. *Konechnye elementy v nelineinoy mekhanike sploshnykh sred* [Finite Elements in Nonlinear Continuum Mechanics]. Moscow, Mir, 1976. 464 p. (in Russian).
6. Rickards R. B. *Metod konechnykh elementov v teorii obolochek i plastin* [The Finite Element Method in the Theory of Shells and Plates]. Riga, Zinatne, 1988. 284 p. (in Russian).
7. Bate K. Yu. *Metody konechnykh elementov* [Finite Element Methods]. Moscow, Fizmatlit, 2010. 1024 p. (in Russian).
8. Gureeva N. A., Klochkov Y. V., Nikolaev A. P. Analysis of a shell of revolution subjected



- to axisymmetric loading taking into account geometric nonlinearity on the basis of the mixed finite element method. *Russian Aeronautics*, 2014, vol. 57, no. 3, pp. 232–239. <https://doi.org/10.3103/S1068799814030039>
9. Gureeva N. A., Klochkov Y. V., Nikolaev A. P. Analysis of an arbitrarily loaded shell of revolution based on the finite element method in a mixed formulation. *Russian Aeronautics*, 2010, vol. 53, no. 3, pp. 250–256. <https://doi.org/10.3103/S1068799810030025>
 10. Krivoshapko S. N. *Entsiklopediya analiticheskikh poverkhnostei: bolee 500 poverkhnostei, 38 klassov: matematikam, inzheneram, arkhitektoram* [Encyclopedia of Analytical Surfaces: More than 500 Surfaces, 38 Classes: Mathematicians, Engineers, Architects]. Moscow, URSS, 2010. 556 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 20.04.2021

Принята к публикации / Accepted 18.01.2022

Опубликована / Published 31.05.2022



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 152–158

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 152–158

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-152-158>

Article

Stochastic model of innovation diffusion that takes into account the changes in the total market volume

A. Yu. Parphenova, L. A. Saraev[✉]

Samara National Research University, 34 Moskovskoye shosse, Samara 443086, Russia

Alena Yu. Parphenova, egorovaalena@inbox.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7374-3663>, AuthorID: 783145

Leonid A. Saraev, saraev.leo@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-3625-5921>, AuthorID: 2919

Abstract. The article proposes a stochastic mathematical model of the diffusion of consumer innovations, which takes into account changes over time in the total number of potential buyers of an innovative product. A stochastic differential equation is constructed for a random value of the number of consumers of an innovative product. The interaction of random changes in the number of consumers with changes in the total market volume of the product under consideration is investigated. Following the Euler – Maruyama method, an algorithm for the numerical solution of the stochastic differential equation for the diffusion of innovations is constructed. For each implementation of this algorithm, the corresponding stochastic trajectories are constructed for a random function of the number of consumers of an innovative product. A variant of the method for calculating the mathematical expectation of a random function of the number of consumers of an innovative product is developed and the corresponding differential equation is obtained. It is shown that the numerical solution of this equation and the average value of the function of the number of consumers calculated for all the implemented implementations of stochastic trajectories give practically the same results. Numerical analysis of the developed model showed that taking into account an external random disturbing factor in the stochastic model leads to significant deviations from the classical deterministic model of smooth market development with innovative goods.

Keywords: innovation diffusion, stochastic equations, Wiener process, innovation coefficient, simulation coefficient

For citation: Parphenova A. Yu., Saraev L. A. Stochastic model of innovation diffusion that takes into account the changes in the total market volume. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 152–158. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-152-158>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Научная статья
УДК 330.42

Стохастическая модель диффузии инноваций, учитывающая изменение общего объема рынка

А. Ю. Парфенова, Л. А. Сараев 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, Россия, 443086, г. Самара, ул. Московское шоссе, д. 34

Парфенова Алена Юрьевна, старший преподаватель кафедры математики и бизнес-информатики, egorovaalena@inbox.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7374-3663>, AuthorID: 783145

Сараев Леонид Александрович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математики и бизнес-информатики, saraev.leo@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-3625-5921>, AuthorID: 2919

Аннотация. В статье предложена стохастическая математическая модель диффузии потребительских инноваций, учитывающая изменения во времени общего числа потенциальных покупателей инновационного товара. Построено стохастическое дифференциальное уравнение для случайной величины числа потребителей инновационного товара. Исследовано влияние случайных изменений числа потребителей на изменение общего объема рынка рассматриваемого товара. В соответствии с методом Эйлера – Маруямы построен алгоритм численного решения стохастического дифференциального уравнения диффузии инноваций. Для каждой реализации этого алгоритма строятся соответствующие стохастические траектории для случайной функции числа потребителей инновационного товара. Разработан вариант метода расчета математического ожидания случайной функции числа потребителей инновационного товара и получено соответствующее для него дифференциальное уравнение. Показано, что численное решение этого уравнения и среднее значение функции числа потребителей, вычисленное по всем реализациям стохастических траекторий, дают практически одинаковые результаты. Численный анализ разработанной модели показал, что учет в стохастической модели внешнего случайного возмущающего фактора приводит к существенным отклонениям от классической детерминированной модели плавного наполнения рынка инновационными товарами.

Ключевые слова: диффузия инноваций, стохастические уравнения, винеровский процесс, коэффициент инновации, коэффициент имитации

Для цитирования: *Parphenova A. Yu., Saraev L. A. Stochastic model of innovation diffusion that takes into account the changes in the total market volume [Парфенова А. Ю., Сараев Л. А. Стохастическая модель диффузии инноваций, учитывающая изменение общего объема рынка] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 152–158. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-152-158>*

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

One of the important and relevant areas of modern economic theory is the development of economic and mathematical methods for predicting the features and patterns of stochastic processes of distribution in the markets of goods with new properties.



New stochastic models developed using these methods to assess the parameters of the diffusion of consumer innovations help to assess the growth rate of sales of goods with new properties, adequately predict the indicators of market capture by them, calculate the time intervals of stagnation or decline in their sales, etc.

A significant contribution to the development of theoretical principles of the diffusion of consumer innovations is presented in the works [1–4].

On the basis of these provisions, researchers have developed a number of models for assessing the parameters of the diffusion of innovations, in which the total market size of the considered innovative product was considered constant [5–8].

The nature of the dynamic development of the process of diffusion of consumer innovations is determined by the ratio of consumers-innovators and consumers-imitators, the volatility of the volume of sales and changes in the total volume of the market, consisting of the total number of potential buyers of the innovative product.

Many well-known statistics on sales of various innovative products show the stochastic nature of their distribution among consumers. Therefore, while constructing mathematical models of the dynamics of diffusion of innovations we should rely on the theory of random functions. Stochastic modeling makes it possible to fully take into account the unstable nature of the market and make significant additions to the existing similar deterministic models.

An effective tool for constructing non-deterministic models of diffusion of innovations is the theory of stochastic differential equations, which takes into account the influence of random external influences. The construction of the defining equations for the diffusion of innovations based on this theory significantly enriches the corresponding well-known deterministic models, in which external random disturbing factors cannot be taken into account. Methods of studying applications of the stochastic differential equations theory for modeling random processes are described in detail in [9–13].

This work aims to develop a new economic and mathematical model of innovation diffusion, taking into account the random nature of consumer behavior and possible variations in the total market volume.

The peculiarity of the proposed model and its scientific novelty lies in the fact that, in contrast to the classical models of innovation diffusion, it takes into account the change in the total volume of the market of potential buyers over time.

1. Stochastic differential equation of innovation diffusion in an unstable market

Let some fundamentally new innovative product appear and spread on the market. Let us denote $U(t)$ as the volume of that part of the market, which is formed by all purchasers of this product at the moment of time t , $V(t)$ as the maximum volume of that part of the market, which is formed by all potential purchasers of this product at the moment time t . The units of measurement for the values of $U(t)$ and $V(t)$ can be percent – the number of buyers of the product and the relative number of buyers of the product. In the latter case, the maximum market volume for the entire period under consideration is taken as a unit. The function $U(t)$ is assumed to be continuous and continuously differentiable on the interval $(0 \leq t < \infty)$.

The increment in the number of buyers of the innovative product ΔU over a certain period of time Δt can be represented in the form of three terms

$$\Delta U = \Delta U^N + \Delta U^I + \Delta U^W, \quad (1)$$



where ΔU^N is a partial increment over the time interval Δt of the number of innovative buyers oriented towards advertising and the media, ΔU^I is a partial increment over the interval time Δt of the number of imitator buyers relying on reviews of people who have already made a purchase, ΔU^W stands for random fluctuations in the number of imitator buyers due to market volatility.

The quantities ΔU^N , ΔU^I , ΔU^W can be represented as [14]

$$\begin{cases} \Delta U^N(t) = a \cdot V(t) \cdot \left(1 - \frac{U(t)}{V(t)}\right) \cdot \Delta t, \\ \Delta U^I(t) = b \cdot U(t) \cdot \left(1 - \frac{U(t)}{V(t)}\right) \cdot \Delta t, \\ \Delta U^W(t) = \rho \cdot b \cdot U(t) \cdot \left(1 - \frac{U(t)}{V(t)}\right) \cdot \Delta w, \end{cases} \quad (2)$$

where a is the coefficient of innovation, which determines the share of buyers-innovators from the total number of potential buyers $V(t)$, b is the coefficient of imitation, which determines the share of buyers-imitators from the number of buyers who have already made a purchase $U(t)$, w is standard Wiener process, $\Delta w = \epsilon \cdot \sqrt{\Delta t}$, ρ is market volatility, ϵ is a random variable with normal distribution, zero mean $\langle \epsilon \rangle = 0$, and unit variance $\langle \epsilon^2 \rangle = 1$.

The multiplier $\left(1 - \frac{U(t)}{V(t)}\right)$ describes the process of market saturation up to a certain limit value $V(t)$.

It should be noted that in the considered model, in contrast to the classical model by F. Bass, the total number of potential buyers $V(t)$ is not a constant but is assumed to be a variable [14].

Substitution of the quantities (2) into the equation (1) leads to the relation

$$\Delta U(t) = \left(1 - \frac{U(t)}{V(t)}\right) \cdot \left(\left(a \cdot V(t) + b \cdot U(t) \right) \cdot \Delta t + \rho \cdot b \cdot U(t) \cdot \Delta w \right). \quad (3)$$

Passing to the limit in the formula (3) for $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta w \rightarrow 0$ allows one to obtain the nonlinear stochastic Ito differential equation [12]

$$dU(t) = S(U(t), t) \cdot \Delta t + Z(U(t), t) \cdot \Delta w, \quad (4)$$

where

$$S(U(t), t) = \left(a \cdot V(t) + b \cdot U(t) \right) \cdot \left(1 - \frac{U(t)}{V(t)} \right) \quad (5)$$

is a drift coefficient,

$$Z(U(t), t) = \rho \cdot b \cdot U(t) \cdot \left(1 - \frac{U(t)}{V(t)} \right) \quad (6)$$

is a volatility coefficient.

The initial condition for the equation (4) has the form

$$U(0) = U_0. \quad (7)$$

It is obvious that if the process of diffusion of innovations is observed from the very beginning, then $U_0 = 0$. Otherwise, the value of U_0 may differ from zero.



2. Diffusion model of innovation for a market with the variable total volume

Let us consider a variant of the development of promoting an innovative product to the market, in which at the initial moment of time t the maximum number of its potential buyers is V_0 , and then this number gradually decreases to its limiting value V_∞ . In this case, the function of the total market volume $V(t)$ can be represented as [14]

$$V(t) = V_\infty + (V_0 - V_\infty) \cdot \exp(-\lambda \cdot t), \quad (8)$$

where λ is a parameter characterizing the rate of change in the total number of potential buyers of an innovative product.

The numerical solution of the equation (4) with the coefficients (5), (6) and the initial condition (7) is performed on the divided system of points $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ time interval $[t_0, t_n]$ by the method of successive approximations of Euler – Maruyama in accordance with the algorithm [3]

$$U_{s+1} = U_s + S(U_s, t_s) \cdot \Delta t_s + \varepsilon_s \cdot Z(U_s, t_s) \cdot \sqrt{\Delta t_s}, \quad (s = 0, 1, 2, \dots, n - 1), \quad (9)$$

where n is the number of time partitions.

At each small time step $\Delta t_s = t_{s+1} - t_s$, starting from the initial value U_0 , a random number ε_s is generated and the following is calculated the value of U_{s+1} .

Thus, random sequences $\{t_s\}$ and $\{U_s\}$ are formed. On the coordinate plane, these sequences form a system of points $\{t_s, U_s\}$ and the corresponding stochastic trajectory.

When repeating the implementation of the algorithm (9) m times, each time a new stochastic trajectory is formed, since each time the random variable ε generates new random values.

To find the mathematical expectation of the function $\langle U(t) \rangle$, it is necessary to statistically average the equation (4) with the coefficients (5) and (6)

$$\left\langle dU(t) \right\rangle = \left\langle \left(a \cdot V(t) + b \cdot U(t) \right) \cdot \left(1 - \frac{U(t)}{V(t)} \right) \right\rangle \cdot \Delta t. \quad (10)$$

The result is a differential equation containing the statistical moment of the required second-order function $\langle U(t)^2 \rangle$

$$\frac{d\langle U(t) \rangle}{dt} = V(t) \cdot \left(a + (b - a) \cdot \frac{\langle U(t) \rangle}{V(t)} - b \cdot \frac{\langle U(t)^2 \rangle}{V(t)^2} \right). \quad (11)$$

Sequential calculation of the moment $\langle U(t)^2 \rangle$ leads to the appearance of moments of the third, fourth and higher orders. An endless chain of statistical equations is formed, which must be cut off by making certain assumptions.

In the case under consideration, it is natural to assume that fluctuations in the value of $U(t)$ are determined by random fluctuations in the number of buyers-imitators, and it can be represented as [15]

$$U(t) = \langle U(t) \rangle + \rho \cdot \langle U(t) \rangle \cdot \left(1 - \frac{\langle U(t) \rangle}{V(t)} \right) \cdot \varepsilon. \quad (12)$$

Then

$$U(t)^2 = \langle U(t) \rangle^2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \rho \cdot \left(1 - \frac{\langle U(t) \rangle}{V(t)} \right) \cdot \varepsilon + \rho^2 \cdot \left(1 - \frac{\langle U(t) \rangle}{V(t)} \right)^2 \cdot \varepsilon^2 \right). \quad (13)$$



Averaging the equality (13) gives

$$\langle U^2 \rangle = \langle U \rangle^2 \cdot \left(1 + \rho^2 \cdot \left(1 - \frac{\langle U \rangle}{V} \right)^2 \right). \tag{14}$$

Substituting the formula (14) into the ratio (11), we find the differential equation for the mathematical expectation of the value $U(t)$

$$\frac{d\langle U \rangle}{dt} = V \cdot \left(a + (b - a) \cdot \frac{\langle U \rangle}{V} - b \cdot \frac{\langle U \rangle^2}{V^2} \cdot \left(1 + \rho^2 \cdot \left(1 - \frac{\langle U \rangle}{V} \right)^2 \right) \right). \tag{15}$$

The initial condition for equation (15) has the form

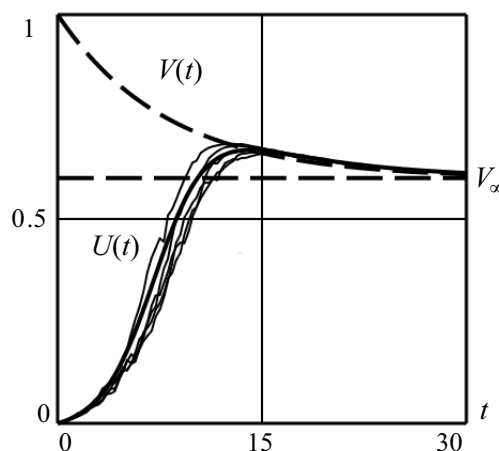
$$\langle U(0) \rangle = U_0. \tag{16}$$

The Figure shows five from a hundred stochastic trajectories obtained as a result of numerical implementations of the Euler – Maruyama algorithm (9), (7), numerical solution of the Cauchy problem (15), (16), as well as graphs of the function of the total market volume $V(t)$ and its limit value V_∞ .

When comparing the numerical solution of the Cauchy problem (15), (16) for the mathematical expectation of the function $U(t)$ and the mean value of this function calculated for all $m = 100$ implementations of the algorithm (9) it turned out that they practically coincide.

For a deterministic process of diffusion of innovations at $\rho = 0$, the results obtained coincide with those of [14].

Figure. Stochastic trajectories constructed from the results of numerical implementations of the Euler – Maruyama algorithm (9), (7) and the expectation curve for the function $U(t)$, constructed in accordance with the numerical solution of the Cauchy problem (15), (16) (solid lines). Graph of the total market volume function $V(t)$ and its asymptote $V = V_\infty$ (dashed lines). Calculated values: $t_0 = 0$; $t_n = 30$; $n = 100$; $m = 100$; $V_0 = 1$; $V_\infty = 0,6$; $a = 0,01$; $b = 0,5$; $\rho = 0,35$.



3. Conclusion

A new model of innovation diffusion has been developed in the form of a stochastic differential equation that takes into account the change in the total number of potential buyers over time.

An algorithm for the numerical solution of the obtained stochastic differential equation for constructing stochastic trajectories of a random function of the number of consumers of an innovative product is presented.

A variant of the method of statistical averaging of the stochastic differential equation for the diffusion of innovations has been developed and a differential equation has been obtained to determine the mathematical expectation of a random function of the number of consumers of an innovative product.



It was found that the numerical solution of this equation and the statistical average value of the function of the number of consumers of an innovative product, calculated for all realizations of stochastic trajectories, give almost the same results.

References

1. Bass F. M. A new product growth model for consumer durables. *Management Science*, 1969, vol. 15, no. 5, pp. 215–227. <https://doi.org/10.1287/mnsc.1040.0264>
2. Bass F. M. The future of research in marketing: Marketing science. *Journal of Marketing Research*, 1993, vol. 30, pp. 1–6. <https://doi.org/10.1177/002224379303000101>
3. Bass F. M. Empirical generalizations and marketing science: A personal view. *Marketing Science*, 1995, vol. 14, pp. 6–19. <https://doi.org/10.1287/mksc.14.3.G6>
4. Rogers E. M. *Diffusion of Innovations*. 5th ed. New York, Free Press, 2003. 576 p.
5. Srinivasan V., Mason C. H. Nonlinear least squares estimation of new product diffusion model. *Marketing Science*, 1986, vol. 5, iss. 2, pp. 169–178.
6. Schmittlein D. C., Mahajan V. Maximum likelihood estimation for an innovational diffusion model of new-product acceptance. *Management Science*, 1982, vol. 1, no. 1, pp. 57–78. <https://doi.org/10.1287/MKSC.1.1.57>
7. Mahajan V., Sharma S. A simple algebraic estimation procedure for innovation diffusion models of new product acceptance. *Technological Forecasting and Social Change*, 1986, vol. 30, iss. 4, pp. 331–345. [https://doi.org/10.1016/0040-1625\(86\)90031-4](https://doi.org/10.1016/0040-1625(86)90031-4)
8. Mahajan V., Mason C. H., Srinivasan V. An evaluation of estimation procedures for new product diffusion models. In: V. Mahajan, Y. Wind, eds. *Innovation Diffusion Models of New Product Acceptance*. Cambridge, Ballinger Publishing Company, 1986, pp. 203–232.
9. Itô K., McKean H. P. *Diffusion Processes and their Sample Paths*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1996. 323 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-62025-6> (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1986. 329 p.).
10. Allen E. *Modeling with Itô Stochastic Differential Equations*. Mathematical Modelling: Theory and Applications, vol. 22. Springer, 2007. 230 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5953-7>
11. Kanellos N., Katsianis D., Varoutas D. On the Introduction of Diffusion Uncertainty in Telecommunications' Market Forecasting. *Engineering Proceedings*, 2021, vol. 5, no. 1, Art. 13. <https://doi.org/10.3390/engproc2021005013>
12. Wang H., Sun B. Diffusion Mechanism of Leading Technology in the New Energy Industry Based on the Bass Model. *Frontiers in Energy Research*, 2021, vol. 9. <https://doi.org/10.3389/fenrg.2021.586787>
13. Grasman J., Kornelis M. Forecasting product sales with a stochastic Bass model. *Journal of Mathematics in Industry*, 2019, vol. 9, Art. 2. <https://doi.org/10.1186/s13362-019-0059-6>
14. Ilyina E. A., Parphenova A. Yu., Saraev L. A. Influence of changes to the total volume of the market on the kinetics of the process of diffusion of innovations. *Vestnik Altaiskoi akademii ekonomiki i prava* [Bulletin of the Altai Academy of Economics and Law], 2019, no. 12, pp. 61–67 (in Russian). <https://doi.org/10.17513/vaael.848>
15. Saraev A. L., Saraev L. A. Stochastic calculation of curves dynamics of enterprise. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2020, vol. 24, no. 2, pp. 343–364 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1700>

Поступила в редакцию / Received 21.12.2021

Принята к публикации / Accepted 18.01.2022

Опубликована / Published 31.05.2022



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 159–168

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 159–168

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-159-168>

Научная статья

УДК 517.925

О рождении предельного цикла из петли сепаратрисы сшитого седло-узла

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет, Россия, 154023, г. Ярославль, Московский проспект, д. 88

Ройтенберг Владимир Шлеймович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, vroitenberg@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1293-7998>, AuthorID: 421907

Аннотация. В статье рассматриваются динамические системы на плоскости, задаваемые непрерывными кусочно-гладкими векторными полями. Такие системы используются в качестве математических моделей реальных процессов с переключениями. Важной задачей является нахождение условий рождения периодических траекторий при изменении параметров. В работе описана бифуркация рождения периодической траектории из петли сепаратрисы сшитого седло-узла — аналог классической бифуркации петли сепаратрисы седло-узла гладкой динамической системы. Рассмотрим однопараметрическое семейство $\{X_\varepsilon\}$ непрерывных кусочно-гладких векторных полей на плоскости. Пусть z^0 — точка на линии переключения. Выберем локальные координаты x, y , в которых z^0 имеет нулевые координаты, а линия переключения задается уравнением $y = 0$. Пусть векторное поле X_0 в полуокрестности $y \geq 0$ ($y \leq 0$) совпадает с гладким векторным полем X_0^+ (X_0^-), для которого точка z^0 является устойчивым грубым узлом (грубым седлом), а собственные подпространства матрицы линейной части поля в z^0 не совпадают с прямой $y = 0$. Особая точка z^0 называется сшитым седло-узлом. Существует единственная траектория L_0 , α -предельная к z^0 — выходящая сепаратриса точки z^0 . Предполагается, что она также ω -предельна к z^0 , причем входит в z^0 по ведущему направлению узла поля X_0^+ . Для типичного семейства при изменении параметра ε сшитый седло-узел либо распадается на грубые узел и седло, либо исчезает. В работе доказано, что в последнем случае из контура $L_0 \cup \{z^0\}$ рождается единственная периодическая траектория поля X_ε — устойчивый предельный цикл.

Ключевые слова: непрерывная кусочно-гладкая динамическая система, фазовая плоскость, бифуркация, сшитый седло-узел, предельный цикл

Для цитирования: Ройтенберг В. Ш. О рождении предельного цикла из петли сепаратрисы сшитого седло-узла // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 159–168. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-159-168>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

On generation of a limit cycle from a separatrix loop of a sewn saddle-node

V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University, 88 Moskovskii prospekt, Yaroslavl 150023, Russia

Vladimir Sh. Roitenberg, vroitenberg@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1293-7998>, AuthorID: 421907

Abstract. The article considers dynamical systems on the plane, defined by continuous piecewise smooth vector fields. Such systems are used as mathematical models of real processes with switching. An important task is to find the conditions for the generation of periodic trajectories when the parameters change. The paper describes the bifurcation of the birth of a periodic trajectory from the loop of the separatrix of a sewn saddle-node — an analogue of the classical bifurcation of the separatrix loop of a saddle-node of a smooth dynamical system. Consider a one-parameter family $\{X_\varepsilon\}$ of continuous piecewise-smooth vector fields on the plane. Let z^0 be a point on the switching line. Let's choose the local coordinates x, y in which z^0 has zero coordinates, and the switching line is given by the equation $y = 0$. Let the vector field X_0 in a semi-neighborhood $y \geq 0$ ($y \leq 0$) coincide with a smooth vector field X_0^+ (X_0^-), for which the point z^0 is a stable rough node (rough saddle), and the proper subspaces of the matrix of the linear part of the field in z^0 do not coincide with the straight line $y = 0$. The singular point z^0 is called a sewn saddle-node. There is a single trajectory L_0 that is α -limit to z^0 — the outgoing separatrix of the point z^0 . It is assumed that L_0 is also ω -limit to z^0 , and enters z^0 in the leading direction of the node of the field X_0^+ . For generic family, when the parameter ε changes, the sewn saddle-node either splits into a rough node and a rough saddle, or disappears. In the paper it is proved that in the latter case the only periodic trajectory of the field X_ε is generated from the contour $L_0 \cup \{z^0\}$ — a stable limit cycle.

Keywords: continuous piecewise smooth dynamical system, phase plane, bifurcation, sewn saddle-node, limit cycle

For citation: Roitenberg V. Sh. On generation of a limit cycle from a separatrix loop of a sewn saddle-node. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 159–168 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-159-168> This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Исследование бифуркаций фазовых портретов динамических систем было начато А. А. Андроновым в 1930-е гг. Бифуркация рождения предельного цикла из петли сепаратрисы седло-узла гладкой динамической системы на плоскости была описана в работе А. А. Андронova и Е. А. Леонтович [1]. Случай фазового пространства любой размерности был рассмотрен Л. П. Шильниковым в [2]. Для динамических систем, задаваемых разрывными кусочно-гладкими векторными полями в \mathbb{R}^n , рождение периодической траектории из петли сепаратрисы особой точки типа сшитый седло-узел было получено в [3]. Теории локальных и нелокальных бифуркаций кусочно-гладких динамических систем посвящено большое число научных работ (см., например, [4–7]). Несомненный теоретический и прикладной интерес представляет изучение бифуркаций динамических систем, задаваемых непрерывными кусочно-гладкими векторными полями. Здесь изучены в основном локальные бифуркации [8]. В частности, описаны



бифуркации особой точки $O = (0, 0)$ типа седло-узел, «сшитой» из седла и узла гладких векторных полей, заданных соответственно в верхней и нижней полуплоскостях плоскости \mathbb{R}^2 .

В настоящей работе рассматривается бифуркация петли сепаратрисы такой точки. Доказывается, что при исчезновении особой точки рождается единственная периодическая траектория.

1. Непрерывные кусочно-гладкие векторные поля на плоскости

Пусть замкнутая область M на плоскости \mathbb{R}^2 с C^{r+1} -гладкой ($r \geq 1$) границей ∂M представлена в виде объединения C^{r+1} -гладких двумерных компактных подмногообразий M_k ($k = 1, 2, \dots, n$) с краем ∂M_k , причем $M_i \cap M_j = \partial M_i \cap \partial M_j$ при $i \neq j$. Пусть $\mathfrak{X}^r(M_k)$ — банахово пространство C^r -векторных полей на M_k с C^r -нормой [9], которую обозначим $\|\cdot\|_r^k$. Непрерывным кусочно-гладким векторным полем в области M с разбиением $\mathcal{D} = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ назовем такое непрерывное векторное поле $X : M \rightarrow TM = \mathbb{R}^n$, что для любого $k = 1, 2, \dots, n$ $X^k := X|_{M_k} \in \mathfrak{X}^r(M_k)$. Множество $\mathfrak{X}^r(M, \mathcal{D})$ таких векторных полей с нормой $\|X\|_r := \max_{k=1, \dots, n} \|X|_{M_k}\|_r^k$ является банаховым пространством. Множество $S := \bigcup_{i \neq j} \partial M_i \cap \partial M_j$ и его компоненты называются *линиями переключения*.

Векторное поле $X \in \mathfrak{X}^r(M, \mathcal{D})$ удовлетворяет условию Липшица. Поэтому для любой точки $z_0 \in \text{int}M$ существует единственная траектория, начинающаяся в этой точке, — отображение $g(z_0, \cdot) : I \rightarrow M$, где I — максимальный промежуток, содержащий нуль, для которого $g(z_0, 0) = z_0$ и $\frac{d}{dt}g(z_0, t) = X(g(z_0, t))$ при всех $t \in I$. Как обычно, множество точек $L = \{x = g(z_0, t) : t \in I\}$ также будем называть траекторией.

2. Формулировка результатов

Будем рассматривать семейство $\{X_\varepsilon\}_{|\varepsilon| < \bar{\delta}}$ векторных полей $X_\varepsilon \in \mathfrak{X}^r(M, \mathcal{D})$, $r \geq 3$, зависящих от параметра $\varepsilon \in (-\bar{\delta}, \bar{\delta})$, и предполагать, что отображение

$$(-\bar{\delta}, \bar{\delta}) \ni \varepsilon \mapsto X_\varepsilon \in \mathfrak{X}^r(M, \mathcal{D})$$

— C^1 -гладкое. Тогда для всех $k = 1, 2, \dots, n$ отображения

$$M_k \times (-\bar{\delta}, \bar{\delta}) \ni (z, \varepsilon) \mapsto X_\varepsilon^k(z) \in \mathbb{R}^2$$

— C^r -гладкие. Согласно теореме Уитни [10, с. 587–599], векторные поля $X_\varepsilon^k := X_\varepsilon|_{M_k}$ можно продолжить до векторных полей \bar{X}_ε^k на M так, чтобы отображения

$$M \times (-\bar{\delta}, \bar{\delta}) \ni (z, \varepsilon) \mapsto \bar{X}_\varepsilon^k(z) \in \mathbb{R}^2$$

также были C^r -гладкими.

Пусть векторное поле X_0 имеет особую точку z^0 на линии переключения. Элементы разбиения \mathcal{D} , содержащие эту точку, обозначим M_+ и M_- . Пусть $X_\varepsilon^\pm := X_\varepsilon|_{M_\pm}$. Предположим, что линейный оператор $dX^+(z^0)$ имеет различные отрицательные собственные значения, а соответствующие собственные подпространства трансверсальны касательной к ∂M_+ в точке z^0 ; линейный оператор $dX^-(z^0)$ имеет собственные значения противоположных знаков, а соответствующие собственные подпространства трансверсальны касательной к ∂M_- в точке z^0 . Точку z^0 в этом случае назовем *сшитым седло-узлом*. Она имеет один устойчивый параболический сектор и два

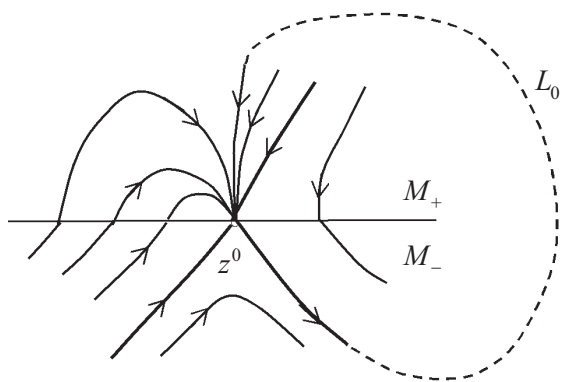


Рис. 1. Сшитый седло-узел и петля его сепаратрисы

Fig. 1. The sewn saddle-node and its separatrix loop

гиперболических сектора (рис. 1). Граничная траектория между двумя гиперболическими секторами называется *выходящей сепаратрисой*, а две граничные траектория между параболическим и гиперболическими секторами — *входящими сепаратрисами*. Бифуркации сшитого седло-узла описаны в [8].

Выберем в окрестности U_0 точки z^0 локальные C^{r+1} -координаты (z_1, z_2) , $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$, в которых z^0 имеет нулевые координаты, $U_0 \cap M_+$, $U_0 \cap M_-$ и $\ell := U_0 \cap S$ задаются соответственно условиями $0 \leq z_2 < 1$, $-1 < z_2 \leq 0$ и $z_2 = 0$, а \bar{U}_0 не содержит других особых точек. В этих координатах

$$\bar{X}^\pm(z) = P_1^\pm(z_1, z_2, \varepsilon)\partial/\partial z_1 + P_2^\pm(z_1, z_2, \varepsilon)\partial/\partial z_2,$$

где P_i^\pm — C^r -функции, $P_i^\pm(0) = 0$ ($i = 1, 2$),

$$P_i^+(z_1, 0, \varepsilon) \equiv P_i^-(z_1, 0, \varepsilon), \tag{1}$$

$$\det d\bar{X}^+(z^0) = \det(\partial P_i^+(0)/\partial z_j) > 0, \quad \det d\bar{X}^-(z^0) = \det(\partial P_i^-(0)/\partial z_j) < 0. \tag{2}$$

Вследствие (1) определители

$$\Delta^\pm = \begin{vmatrix} \partial P_1^\pm(0)/\partial z_1 & \partial P_1^\pm(0)/\partial \varepsilon \\ \partial P_2^\pm(0)/\partial z_1 & \partial P_2^\pm(0)/\partial \varepsilon \end{vmatrix}$$

совпадают: $\Delta^+ = \Delta^- =: \Delta$. Их величина не зависит от способа продолжения векторных полей X_ε^\pm до векторных полей \bar{X}_ε^\pm .

По теореме о неявной функции получаем, что при ε , достаточно близких к нулю, в окрестности U_0 векторное поле \bar{X}_ε^\pm имеет единственную особую точку $z^\pm(\varepsilon)$ с координатами $(h^\pm(\varepsilon), v^\pm(\varepsilon))$, где $h^\pm(\cdot), v^\pm(\cdot) \in C^r$,

$$h^\pm(0) = v^\pm(0) = 0, \quad \partial v^\pm(0)/\partial \varepsilon = -\Delta / \det(\partial P_i^\pm(0)/\partial z_j). \tag{3}$$

Предположим, что $\Delta \neq 0$. Без ограничения общности можно полагать, что $\Delta > 0$. Тогда из (2) и (3) получаем, что существует такое $\delta_0 > 0$, что

$$\operatorname{sgn} v^\pm(\varepsilon) = \mp \operatorname{sgn} \varepsilon \quad \text{для всех } \varepsilon \in (-\delta_0, \delta_0). \tag{4}$$

Если δ_0 выбрано достаточно малым, то из (4) следует, что векторное поле X_ε в окрестности U_0

- не имеет особых точек при $\varepsilon \in (0, \delta_0)$;
- имеет единственную особую точку — сшитый седло-узел $z^\pm(0) = z^0$ при $\varepsilon = 0$;
- имеет ровно две особые точки — грубый узел $z^+(\varepsilon) \in \operatorname{int} M_+$ и грубое седло $z^-(\varepsilon) \in \operatorname{int} M_-$ при $\varepsilon \in (-\delta_0, 0)$.

Предположим теперь, что у векторного поля X_0 выходящая сепаратриса L_0 сшитого седло-узла z^0 трансверсальна линии переключения S , ω -предельна к z^0 , но не совпадает ни с одной из входящих сепаратрис (см. рис. 1). Обозначим $\Gamma_0 := L_0 \cup \{z^0\}$.



Если число $\delta \in (0, \delta_0)$ достаточно мало, то при $\varepsilon \in (-\delta, 0]$ в достаточно малой окрестности гомоклинического контура Γ_0 нет особых точек, отличных от $z^\pm(\varepsilon)$, и нет замкнутых траекторий.

Опишем бифуркации в окрестности контура Γ_0 при $\varepsilon > 0$. Нам понадобится следующее

Определение. Пусть $A_\varepsilon, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, — подмножества некоторого топологического пространства. Множество A_0 — *топологический предел* множеств A_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon = A_0$), если для любой окрестности U множества A_0 найдется такое $\varepsilon_* \in (0, \varepsilon_0)$, что $A_\varepsilon \subset U$ для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$.

Теорема. При сделанных относительно семейства $\{X_\varepsilon\}_{|\varepsilon| < \delta}$ предположениях существуют такие окрестность $V(\Gamma_0)$ контура Γ_0 и число $\delta \in (0, \delta_0)$, что для любого $\varepsilon \in (0, \delta)$ векторное поле X_ε , имеет единственную замкнутую траекторию Γ_ε , принадлежащую $V(\Gamma_0)$. Эта траектория — устойчивый гиперболический предельный цикл, ее топологическим пределом при $\varepsilon \rightarrow 0$ является Γ_0 .

Доказательство теоремы приведено в разделах 3–5.

3. Локальная функция соответствия по траекториям поля X_ε^+

По условию линейный оператор $dX_0^+(z^0)$ имеет собственные значения $\lambda_1^+ < \lambda_2^+ < 0$. Без ограничения общности можно считать, что координаты z_1, z_2 выбраны так, что

$$P_1^+(z_1, z_1, 0) = \lambda_1^+ z_1 + o(|z|), \quad P_2^+(z_1, z_2, 0) = a z_1 + \lambda_2^+ z_2 + o(|z|), \quad \text{где } a < 0.$$

В координатах $x_1 = z_1 - h^+(\varepsilon), x_2 = z_2 - v^+(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \bar{X}^+(z) &= Q_1^+(x_1, x_2, \varepsilon) \partial / \partial x_1 + Q_2^+(x_1, x_2, \varepsilon) \partial / \partial x_2, \\ Q_1^+(x_1, x_2, \varepsilon) &= \lambda_1^+ x_1 + x_1 q_{11}(x_1, x_2, \varepsilon) + x_2 q_{12}(x_1, x_2, \varepsilon), \\ Q_2^+(x_1, x_2, \varepsilon) &= a x_1 + \lambda_2^+ x_2 + x_1 q_{21}(x_1, x_2, \varepsilon) + x_2 q_{22}(x_1, x_2, \varepsilon), \end{aligned} \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

где $q_{ij} - C^{r-1}$ -функции, $q_{ij}(0) = 0, i, j = 1, 2$.

Обозначим $K_{d,k}^\varepsilon := \{(x_1, x_2) : 0 < x_2 \leq d, |x_1| \leq kx_2\}$ (рис. 2). Из (5) и (6) получаем, что при достаточно малых $d > 0, k > 0$ и $0 < \delta_1 < \delta_0$ функция

$$R(x_1, x_2, \varepsilon) := Q_1^+(x_1, x_2, \varepsilon) / Q_2^+(x_1, x_2, \varepsilon)$$

определена для $\varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1), (x_1, x_2) \in K_{d,k}^\varepsilon$. Поскольку $\lambda_1^+ / \lambda_2^+ > 1$, то при этом $\pm R(\pm kx_2, x_2, \varepsilon) > k$. Но тогда решение $x_1 = \varphi(x_2, u, \varepsilon)$ дифференциального уравнения $dx_1/dx_2 = R(x_1, x_2, \varepsilon)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(d, u, \varepsilon) = u$ с $|u| \leq kd$, определено при всех $x_2 \in (0, d]$.

Производная $\varphi'_u(x_2, u, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dx_2} \varphi'_u = R'_{x_1}(\varphi(x_2, u, \varepsilon), x_2, \varepsilon) \varphi'_u$$

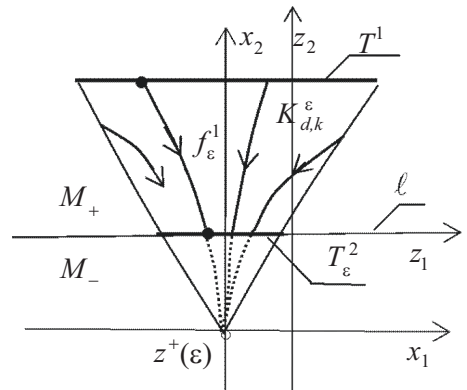


Рис. 2. Конус $K_{d,k}^\varepsilon$, дуги T_ε^1 и T_ε^2 , функция f_ε^1
 Fig. 2. The cone $K_{d,k}^\varepsilon$, the arcs T_ε^1 and T_ε^2 , the function f_ε^1



и начальному условию $\varphi'_u(d, u, \varepsilon) = 1$. Поэтому

$$\varphi'_u(x_2, u, \varepsilon) = \exp \int_d^{x_2} R'_{x_1}(\varphi(\xi, u, \varepsilon), \xi, \varepsilon) d\xi. \quad (7)$$

Выберем число γ так, что $1 < \gamma < \lambda_1^+/\lambda_2^+$. Используя (5) и (6), запишем R'_{x_1} в виде

$$R'_{x_1}(x_1, x_2, \varepsilon) = \frac{\lambda_1^+ \lambda_2^+ x_1 + x_1 s_1(x_1, x_2, \varepsilon) + x_2 s_2(x_1, x_2, \varepsilon)}{(ax_1 + \lambda_2^+ x_2 + x_1 q_{21}(x_1, x_2, \varepsilon) + x_2 q_{22}(x_1, x_2, \varepsilon))^2}, \quad (8)$$

где s_i — C^{r-1} -функции, $s_i(0) = 0$, $i = 1, 2$. Считая d , k и δ_1 достаточно малыми, из (8) получаем следующую оценку:

$$R'_{x_1}(x_1, x_2, \varepsilon) \leq \gamma/x_2 \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1), (x_1, x_2) \in K_{d,k}^\varepsilon.$$

Отсюда и из (7) имеем

$$0 < \varphi'_u(x_2, u, \varepsilon) \leq (x_2/d)^\gamma. \quad (9)$$

Обозначим T_ε^1 и T_ε^2 дуги, задаваемые в координатах (x_1, x_2) , соответственно условиями $x_2 = d$, $|x_1| \leq kd$ и $x_2 = -v^+(\varepsilon)$, $|x_1| \leq -kv^+(\varepsilon)$. Поскольку сепаратриса L_0 не совпадает с входящей сепаратрисой сшитого седло-узла z^0 , то она входит в z^0 по ведущему направлению, соответствующему собственному значению λ_2^+ . Поэтому d можно выбрать так, чтобы L_0 пересекала дугу T_0^1 во внутренней точке, x_1 -координату которой обозначим ξ_0 . Фиксируем k и d . Выбрав δ_1 достаточно малым, будем иметь $\forall \varepsilon \in (0, \delta_1)$ $0 < -v^+(\varepsilon) < d$. Функция $u \mapsto f_\varepsilon^1(u) := \varphi(-v^+(\varepsilon), u, \varepsilon)$ является функцией соответствия по траекториям поля X_ε , $\varepsilon \in (0, \delta_1)$, между дугами $T_\varepsilon^1 \subset M_+$ и $T_\varepsilon^2 \subset \ell$. Для ее производной получаем из (9) следующую оценку:

$$0 < (f_\varepsilon^1)'(u) \leq [v^+(\varepsilon)]^\gamma/d^\gamma. \quad (10)$$

4. Локальная функция соответствия по траекториям поля X_ε^- . Функция последования

По условиям теоремы матрица $(\partial P_i^-(0)/\partial z_j)$ имеет собственные значения разных знаков, а соответствующие собственные подпространства трансверсальны прямой $z_2 = 0$. Поэтому найдется такое $\delta_2 \in (0, \delta_1)$, что при $\varepsilon \in (-\delta_2, \delta_2)$ матрица $(\partial P_i^-(h^-(\varepsilon), v^-(\varepsilon), \varepsilon)/\partial z_j)$ имеет собственные значения $\lambda_1^-(\varepsilon)$ и $\lambda_2^-(\varepsilon)$ ($\lambda_2^-(\varepsilon) < 0 < \lambda_1^-(\varepsilon)$) и соответствующие собственные векторы $(a_1(\varepsilon), -1)^T$ и $(a_2(\varepsilon), 1)^T$ ($a_1(\varepsilon) > 0$, $a_2(\varepsilon) > 0$), C^{r-1} -гладко зависящие от ε . Тогда в координатах (\bar{z}_1, \bar{z}_1) , задаваемых равенствами

$$z_1 = h^-(\varepsilon) + a_1(\varepsilon)\bar{z}_1 + a_2(\varepsilon)\bar{z}_2, z_2 = v^-(\varepsilon) - \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$$

получаем

$$\bar{X}_\varepsilon^-(z) = (\lambda_1(\varepsilon) \bar{z}_1 + c_1(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \varepsilon))\partial/\partial \bar{z}_1 + (\lambda_2(\varepsilon) \bar{z}_2 + c_2(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \varepsilon))\partial/\partial \bar{z}_2,$$

где c_k ($k = 1, 2$) — C^{r-1} -функции, обращающиеся в нуль вместе со своими первыми производными по \bar{z}_1 и \bar{z}_2 при $\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = 0$, на дуге $\ell = S \cap U_0$ ($z_2 = 0$) имеем $\bar{z}_2 = -v^-(\varepsilon) + \bar{z}_1$, а условие $z \in U_0 \cap M_-$ ($z_2 \leq 0$) равносильно неравенству $\bar{z}_2 \leq -v^-(\varepsilon) + \bar{z}_1$.

При достаточно малых $l_0 > 0$ и $\delta_3 \in (0, \delta_2]$ локальные инвариантные многообразия седла $z^-(\varepsilon)$ при всех $\varepsilon \in (-\delta_3, \delta_3)$ задаются в координатах (\bar{z}_1, \bar{z}_2) уравнениями $\bar{z}_1 = w_1(\bar{z}_2, \varepsilon)$, $\bar{z}_2 \in (-l_0, l_0)$ и $\bar{z}_2 = w_2(\bar{z}_1, \varepsilon)$, $\bar{z}_1 \in (-l_0, l_0)$, где $w_k \in C^{r-1}$,



$w_k(0, \varepsilon) = (w_k)'_{\tau}(\tau, \varepsilon)|_{\tau=0} = 0, k = 1, 2$ [9]. Замена $y_1 = \bar{z}_1 - w_1(\bar{z}_2, \varepsilon), y_2 = \bar{z}_2 - w_2(\bar{z}_1, \varepsilon)$ является диффеоморфизмом, который можно сделать сколь угодно близким к тождественному в C^1 -топологии, выбрав достаточно малые l_0 и δ_3 . При каждом l_0 число δ_3 можно выбрать столь малым, что при $\varepsilon \in (-\delta_3, \delta_3)$ дуга ℓ пересекается с окрестностью $\Pi_{\varepsilon}^{-} = \Pi_{l_0, \varepsilon}^{-}$ точки $z^{-}(\varepsilon)$, заданной неравенствами $|\bar{z}_1| < l_0, |\bar{z}_2| < l_0$ (рис. 3). Поэтому можно считать, что l_0 и δ_3 таковы, что $\forall \varepsilon \in (0, \delta_3)$ $\ell \cap \Pi_{\varepsilon}^{-}$ имеет уравнение $y_2 = \psi(y_1, \varepsilon)$, где

$$\psi(0, \varepsilon) < -v^{-}(\varepsilon)/2 < 0, \tag{11}$$

$$0 < \psi'_{y_1}(y_1, \varepsilon) < 2, \tag{12}$$

а условие $z \in \Pi_{\varepsilon}^{-} \cap M_{-}$ равносильно неравенству $y_2 \leq \psi(y_1, \varepsilon)$.

В окрестности Π_{ε}^{-}

$$\begin{aligned} \bar{X}_{\varepsilon}^{-}(z) = & (\lambda_1(\varepsilon) + r_1(y_1, y_2, \varepsilon))y_1\partial/\partial y_1 + \\ & + (\lambda_1^{-}(\varepsilon) + r_2(y_1, y_2, \varepsilon))y_2\partial/\partial y_2, \end{aligned} \tag{13}$$

где $r_k \in C^{r-2}, r_k(0, 0, \varepsilon) = 0, k = 1, 2$, и можно считать, что

$$\begin{aligned} \lambda_1^{-}(\varepsilon) + r_1(y_1, y_2, \varepsilon) & > 0, \\ \lambda_2^{-}(\varepsilon) + r_2(y_1, y_2, \varepsilon) & < 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Из (13) получаем, что производная функции $y_2 - \psi(y_1, \varepsilon)$ по направлению векторного поля $\bar{X}_{\varepsilon}^{-}$ равна

$$(\lambda_2^{-}(\varepsilon) + r_2(y_1, y_2, \varepsilon))y_2 - \psi'_{y_1}(y_1, \varepsilon)(\lambda_1^{-}(\varepsilon) + r_1(y_1, y_2, \varepsilon))y_1.$$

Ввиду (11) и (14) можно считать, что при выбранном δ_3 в точках $\ell \cap \Pi_{\varepsilon}^{-}$ с координатой $y_1 \leq 0$ она положительна, т. е. поле $X_{\varepsilon}, \varepsilon \in (0, \delta_3)$, в этих точках направлено внутрь M_{+} . Поскольку в точках дуги T_{ε}^2 поле X_{ε} направлено внутрь M_{-} , то все точки T_{ε}^2 имеют положительную координату y_1 . Так как для координат x_1, x_2 точек T_{ε}^2 имеем $x_2 = -v^{+}(\varepsilon), |x_1| \leq -kv^{+}(\varepsilon)$, а $v(0) = 0$, то можно считать, что при $\varepsilon \in (0, \delta_3)$ $T_{\varepsilon}^2 \subset \Pi_{\varepsilon}^{-}$ и существует такая постоянная $C > 0$, что

$$0 < y_1 \leq C\varepsilon \text{ для координаты } y_1 \text{ любой точки } T_{\varepsilon}^2. \tag{15}$$

Переход от параметра x_1 ($|x_1| \leq -kv^{+}(\varepsilon)$) на дуге T_{ε}^2 к параметру \bar{z}_1 задается возрастающей аффинной функцией $\bar{z}_1 = (z_1 - h^{-}(\varepsilon) + av^{-}(\varepsilon))/(a_1(\varepsilon) + a_2(\varepsilon))$. Переход от параметра \bar{z}_1 на T_{ε}^2 к параметру y_1 задается равенством $y_1 = \bar{z}_1 - w_1(-v^{-}(\varepsilon) + \bar{z}_1, \varepsilon)$. Поэтому переход от параметра x_1 к параметру y_1 имеет вид $y_1 = \tilde{y}_{\varepsilon}(x_1)$, где $(x_1, \varepsilon) \mapsto \tilde{y}_{\varepsilon}(x_1) - C^{r-1}$ -функция, $(\tilde{y}_{\varepsilon})'(x_1) > 0$.

Обозначим T_{ε}^3 дугу, заданную в координатах y_1, y_2 условиями $y_1 = l_0/2, |y_2| \leq l$, где $0 < l < l_0$. В качестве параметра на T_{ε}^3 возьмем координату y_2 . При $\varepsilon = 0$ сепаратриса L_0 поля X_0 трансверсально пересекает дугу T_0^3 в точке с координатой $y_2 = 0$. Так как L_0 трансверсально пересекает и дугу T_0^1 в ее внутренней точке, а также трансверсальна S , то при достаточно малых l и $\delta_4 \in (0, \delta_3)$ для любого $\varepsilon \in [0, \delta_4]$ определено отображение по траекториям поля X_{ε} дуги T_{ε}^3 в дугу T_{ε}^1 , ставящее в

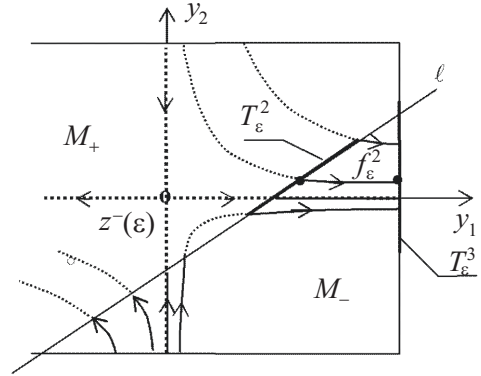


Рис. 3. Окрестность седла $z^{-}(\varepsilon)$. Дуги T_{ε}^2 и T_{ε}^3 , функция f_{ε}^2

Fig. 3. A neighborhood of the saddle $z^{-}(\varepsilon)$. The arcs T_{ε}^2 and T_{ε}^3 , the function f_{ε}^2



соответствие точке с координатой $y_2 = v$ точку с координатой $x_1 = f_\varepsilon^3(v)$, при этом отображение $(v, \varepsilon) \mapsto f_\varepsilon^3(v)$ принадлежит классу C^{r-2} .

Обозначим $\Pi_{l,\varepsilon}^{ext}$ объединение дуг положительных полутраекторий поля X_ε , начинающихся в точках T_ε^3 и кончающихся в точках T_ε^1 . При достаточно малом δ_4 для любого $\varepsilon \in (0, \delta_4)$ множество $U(k, d, l_0, l, \varepsilon) := K_{d,k}^\varepsilon \cup \Pi_{l_0,\varepsilon}^- \cup \Pi_{l,\varepsilon}^{ext}$ является окрестностью петли Γ_0 .

Траектория поля \bar{X}_ε^- , начинающаяся в точке окрестности Π_ε^- с координатами y_1, y_2 , $0 < y_1 < l$, $|y_2| < l$, пересекает дугу T_ε^3 в точке с y_2 -координатой $Y(y_1, y_2, \varepsilon)$, где $Y - C^{r-2}$ -функция. Из [11, п. 13.8, замечания 2 и 3] следует, что

$$Y(y_1, y_2, \varepsilon) = c(\varepsilon)y_1^{\lambda(\varepsilon)}y_2 + \eta(y_1, y_2, \varepsilon), \tag{16}$$

где $\lambda(\varepsilon) = -\lambda_2^-(\varepsilon)/\lambda_1^-(\varepsilon) > 0$, $c, \eta \in C^1$, $c(\varepsilon) > 0$,

$$|\partial^{i+j}\eta(y_1, y_2, \varepsilon)/\partial y_1^i \partial y_2^j| \leq N y_1^{\alpha+\lambda(\varepsilon)-i}, \quad 0 \leq i+j \leq 1, \tag{17}$$

а $\alpha > 0$, $N > 0$ — некоторые постоянные.

Функция $f_\varepsilon^2(y_1) := Y(y_1, \psi(y_1, \varepsilon), \varepsilon)$ задает отображение дуги T_ε^2 в дугу T_ε^3 по траекториям поля X_ε (см. рис. 3). Мы можем считать, что $\delta_4 < 1$. Из (16), (17), (12) и (15) получаем, что найдется такое число $N_1 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \delta_4)$ в области определения функции f_ε^2

$$(f_\varepsilon^2)'(y_1) \leq N_1 \varepsilon^{\lambda(\varepsilon)} \leq N_1. \tag{18}$$

При $\varepsilon \in (0, \delta_4)$ функция $f_\varepsilon := f_\varepsilon^3 \circ f_\varepsilon^2 \circ \tilde{y}_\varepsilon \circ f_\varepsilon^1 : [-kd, kd] \rightarrow [-kd, kd]$ задает отображение дуги T_ε^1 в себя по траекториям векторного поля X_ε . Из оценок (10), (18), ограниченности производных функций \tilde{y}_ε , f_ε^3 и равенства $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v^+(\varepsilon) = 0$ следует, что при достаточно малом $\delta \in (0, \delta_4] \forall \varepsilon \in (0, \delta) \quad 0 < (f_\varepsilon)'(x_1) < 1/2$. Поэтому функция последования f_ε имеет единственную неподвижную точку (устойчивую гиперболическую) $\xi(\varepsilon)$. Через соответствующую точку дуги T_ε^1 проходит устойчивая гиперболическая замкнутая траектория Γ_ε поля X_ε .

5. Окрестность $V(\Gamma_0)$

Построим окрестность $V(\Gamma_0)$, о которой идет речь в теореме. При достаточно малом $\delta_6 \in (0, \delta_5)$ найдется окрестность $V_*(\Gamma_0)$ контура Γ_0 , содержащаяся в любой окрестности $U(k, d, l_0, l, \varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, \delta_6)$. Выберем число $\sigma > 0$ так, чтобы $-kd < \xi_0 - \sigma < \xi_0 < \xi_0 + \sigma < kd$. Поскольку контур Γ_0 состоит из C^1 -гладких дуг с концами на линиях переключения и трансверсальных этим линиям, то, взяв σ достаточно малым, можно построить окрестность $V(\Gamma_0) \subset V_*(\Gamma_0)$ контура, ограниченную двумя замкнутыми кусочно-гладкими кривыми γ_+ и γ_- , пересекающимися с дугой T_0^1 только в точках соответственно A_0^+ и A_0^- с x_1 -координатами $\xi_0 - \sigma$ и $\xi_0 + \sigma$. Используя теорему о неявной функции, получим, что δ_6 можно выбрать так, что при $\varepsilon \in (0, \delta_6)$ дуга T_ε^1 пересекается с кривой γ_+ (γ_-) в единственной точке A_ε^+ (A_ε^-).

Выбрав достаточно малые положительные числа $\tilde{d}, \tilde{l}_0, \tilde{l}$ и $\delta \in (0, \delta_6)$, по ним для любого $\varepsilon \in (0, \delta)$ можно построить окрестность $U(k, \tilde{d}, \tilde{l}_0, \tilde{l}, \varepsilon)$ контура Γ_0 аналогично окрестности $U(k, d, l_0, l, \varepsilon)$ так, чтобы $U(k, \tilde{d}, \tilde{l}_0, \tilde{l}, \varepsilon) \subset V(\Gamma_0)$. Векторное поле X_ε при $\varepsilon \in (0, \delta)$ имеет в $U(k, \tilde{d}, \tilde{l}_0, \tilde{l}, \varepsilon)$, а потому и в $V(\Gamma_0)$ замкнутую траекторию $\tilde{\Gamma}_\varepsilon$. Так как часть дуги T_ε^1 между точками A_ε^+ и A_ε^- разбивает $V(\Gamma_0)$ на две односвязные области, не содержащие особые точки поля, то $\tilde{\Gamma}_\varepsilon$ пересекает дугу T_ε^1 . Но при $\varepsilon \in (0, \delta) \quad \Gamma_\varepsilon -$ единственная замкнутая траектория поля X_ε , пересекающая дугу T_ε^1 . Следовательно, $\tilde{\Gamma}_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon -$ единственная замкнутая траектория поля X_ε , содержащаяся в $V(\Gamma_0)$.



Покажем, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_\varepsilon = \Gamma_0$. Зададим окрестность $U(\Gamma_0)$ сепаратрисного контура Γ_0 . Выбрав достаточно малые \tilde{d} , \tilde{l}_0 , \tilde{l} и $\delta_* \in (0, \delta)$, будем иметь при всех $\varepsilon \in (0, \delta_*)$ $U(k, \tilde{d}, \tilde{l}_0, \tilde{l}, \varepsilon) \subset U(\Gamma_0) \cap V(\Gamma_0)$. Векторное поле X_ε при $\varepsilon \in (0, \delta_*)$ имеет в $U(k, \tilde{d}, \tilde{l}_0, \tilde{l}, \varepsilon)$, а потому и в $U(\Gamma_0) \cap V(\Gamma_0)$ замкнутую траекторию Γ_ε . Следовательно, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_\varepsilon = \Gamma_0$.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Андронов А. А., Леонтович Е. А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра // Ученые записки Горьковского государственного университета. 1939. Вып. 6. С. 3–24.
2. Шильников Л. П. О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий // Математический сборник. 1963. Т. 61 (103), № 4. С. 443–466.
3. Ройтенберг В. Ш. О рождении устойчивых замкнутых траекторий разрывных векторных полей // Математика и математическое образование. Теория и практика : межвуз. сб. науч. тр. Вып. 3. Ярославль : Изд-во ЯГТУ, 2002. С. 19–23.
4. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Москва : Наука, 1985. 224 с.
5. di Bernardo M., Budd Ch. J., Carneys A. R., Kowalczyk P. Piecewise-smooth Dynamical Systems. London : Springer, 2008. 483 p. (Applied Mathematical Sciences, vol. 163). <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-708-4>
6. Guardia M., Seara T. M., Teixeira M. A. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems // Journal of Differential Equations. 2011. Vol. 250, no. 4. P. 1967–2023. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.11.0163>
7. Ройтенберг В. Ш. О бифуркациях в окрестности особой точки типа «сшитый трехкратный фокус» // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 2 (42). С. 18–31. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2017-2-2>
8. Simpson D. J. W. Bifurcations in Piecewise-Smooth Continuous Systems. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010. 256 p. (World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, vol. 70). <https://doi.org/10.1142/7612>
9. Палис Ж., ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. Введение. Москва : Мир, 1986. 301 с.
10. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Москва : Физматгиз, 1962. Т. 1. 607 с.
11. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. Москва ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. 548 с.

References

1. Andronov A. A., Leontovich E. A. Some cases of dependence of limit cycles on a parameter. *Uchenye zapiski Gor'kovskogo gosudarstvennogo universiteta* [The Bulletin of Gorky State University], 1939, iss. 6, pp. 3–24 (in Russian).
2. Shilnikov L. P. Some cases of generation of period motions from singular trajectories. *Matematicheskii Sbornik. Novaya Seriya*, 1963, vol. 61 (103), no. 4, pp. 443–466 (in Russian).
3. Roitenberg V. Sh. On generation of stable closed trajectories of discontinuous vector fields. *Matematika i matematicheskoe obrazovanie. Teoriya i praktika* [Mathematics and mathematical education. Theory and practice]. Iss. 3. Yaroslavl, YaGTU Publ., 2002, pp. 19–23 (in Russian).
4. Filippov A. F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'iu* [Differential Equations with Discontinuous Right-hand Part]. Moscow, Nauka, 1985. 224 p. (in Russian).



5. di Bernardo M., Budd Ch. J., Capneys A. R., Kowalczyk P. *Piecewise-smooth Dynamical Systems*. Applied Mathematical Sciences, vol. 163. London, Springer-Verlag, 2008. 483 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-708-4>
6. Guardia M., Seara T. M., Teixeira M. A. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems. *Journal of Differential Equations*, 2011, vol. 250, no. 4, pp. 1967–2023. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.11.0163>
7. Roitenberg V. Sh. On bifurcations in the neighborhood of a singular point of triple sewn focus type. *University Proceedings. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences. Mathematics*, 2017, no. 2 (42), pp. 18–31 (in Russian). <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2017-2-2>
8. Simpson D. J. W. *Bifurcations in Piecewise-Smooth Continuous Systems*. World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, vol. 70. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2010. 256 p. <https://doi.org/10.1142/7612>
9. Palis J., de Melo W. *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*. New York, NY, Springer, 1982. 198 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5703-5> (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1986. 301 p.).
10. Fichtenholz G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of Differential and Integral Calculus]. Moscow, Fizmatgiz, 1962. Vol. 1. 607 p. (in Russian).
11. Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V., Chua L. O. *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics (Part II)*. World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, vol. 5. River Edge, N.J., World Scientific, 2001. <https://doi.org/10.1142/4221> (Russ. ed.: Moscow, Izhevsk, 2009. 548 p.).

Поступила в редакцию / Received 25.08.2021

Принята к публикации / Accepted 09.02.2022

Опубликована / Published 31.05.2022



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 169–179

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 169–179

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-169-179>

Научная статья

УДК 517.968.4

О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна на полуоси

Х. А. Хачатрян^{1✉}, А. С. Петросян²

¹Ереванский государственный университет, Армения, 0025, г. Ереван, ул. А. Манукяна, д. 1

²Национальный аграрный университет Армении, Армения, 0009, г. Ереван, ул. Теряна, д. 74

Хачатрян Хачатур Агавардович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории функций и дифференциальных уравнений, khachatur.khachatryan@ysu.am, <https://orcid.org/0000-0002-4835-943X>, AuthorID: 589262,

Петросян Айкануш Самвеловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физики, Haykuhi25@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7172-4730>

Аннотация. В настоящей работе исследуется класс нелинейных интегральных уравнений на полуоси с некомпактным оператором Гаммерштейна. Предполагается, что ядро уравнения экспоненциально убывает на положительной части числовой оси. Уравнения такого рода возникают в различных областях естествознания. В частности, такие уравнения встречаются в теории переноса излучения в спектральных линиях, в математической теории пространственно-временного распространения эпидемии, в кинетической теории газов. Отличительной особенностью рассматриваемого класса уравнений являются некомпактность соответствующего нелинейного интегрального оператора Гаммерштейна в пространстве существенно ограниченных функций на положительной части числовой прямой и условие критичности (т. е. наличие тривиального нулевого решения). При определенных ограничениях на нелинейность доказывается существование положительного ограниченного и суммируемого решения. Исследуется также асимптотическое поведение решения на бесконечности. Доказательство теоремы существования носит конструктивный характер. Сперва решая определенное простое характеристическое уравнение, строится нулевое приближение в рассматриваемых итерациях. Затем изучается специальное вспомогательное нелинейное интегральное уравнение, решение которого строится с помощью простых последовательных приближений. После этого доказывается, что введенные нами итерации монотонно возрастают и сверху ограничены решением вышеотмеченного вспомогательного интегрального уравнения. Далее, используя соответствующие условия на нелинейность и на ядро, доказывается, что предел этих итераций является решением первоначального уравнения и экспоненциально убывает на бесконечности. При дополнительном ограничении на нелинейность устанавливается единственность построенного решения в определенном классе измеримых функций. В конце работы приводятся конкретные примеры ядра и нелинейности прикладного характера, для которых автоматически выполняются все условия доказанной теоремы.

Ключевые слова: монотонность, итерации, суммируемое решение, выпуклость, ядро

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21Т-1А047.



Для цитирования: Хачатрян Х. А., Петросян А. С. О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна на полуоси // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 169–179. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-169-179>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

On the solvability of a class of nonlinear Hammerstein integral equations on the semiaxis

Kh. A. Khachatryan^{1✉}, H. S. Petrosyan²

¹Yerevan State University, 1 A. Manukyan St., Yerevan 0025, Armenia

²Armenian National Agrarian University, 74 Teryan St., Yerevan 0009, Armenia

Khachatur A. Khachatryan, khachatur.khachatryan@ysu.am, <https://orcid.org/0000-0002-4835-943X>, AuthorID: 589262

Haykanush S. Petrosyan, Haykuhi25@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7172-4730>

Abstract. The paper studies a class of nonlinear integral equations on the semiaxis with a non-compact Hammerstein operator. It is assumed that the kernel of the equation decreases exponentially on the positive part of the number axis. Equations of this kind arise in various fields of natural science. In particular, such equations are found in the theory of radiation transfer in spectral lines, in the mathematical theory of the space-time propagation of an epidemic, in the kinetic theory of gases. A distinctive feature of the considered class of equations is the non-compactness of the corresponding nonlinear Hammerstein integral operator in the space of essentially bounded functions on the positive part of the number line and the criticality condition (i.e., the presence of a trivial zero solution). Under certain restrictions on nonlinearity, the existence of a positive bounded and summable solution is proved. The asymptotic behavior of the solution at infinity is also investigated. The proof of the existence theorem is constructive. First, solving a certain simple characteristic equation the zero approximation in the considered iterations is constructed. Then a special auxiliary nonlinear integral equation is studied, the solution of which is constructed using simple successive approximations. After that, it is proved that the iterations introduced by us increase monotonically and are bounded from above by the solution of the aforementioned auxiliary integral equation. Further, using the appropriate conditions for nonlinearity and for the kernel, it is proved that the limit of these iterations is a solution to the original equation and exponentially decreases at infinity. Under an additional constraint on nonlinearity, the uniqueness of the constructed solution is established in a certain class of measurable functions. At the end of the work, specific examples of the kernel and nonlinearity of an applied nature are given for which all the conditions of the theorem proved are automatically satisfied.

Keywords: monotonicity, iteration, summable solution, convexity, kernel

Acknowledgements: The work was supported by the Science Committee of Armenia, in the frames of the research project No. 21T-1A047.

For citation: Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S. On the solvability of a class of nonlinear Hammerstein integral equations on the semiaxis. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 169–179 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-169-179>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Введение

Настоящая работа посвящена изучению и решению следующего класса нелинейных интегральных уравнений на полуоси:

$$f(x) = \int_0^{\infty} K(x-t)H(t, f(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ := [0, +\infty) \quad (1)$$

относительно искомой неотрицательной и измеримой функции $f(x)$. В уравнении (1) ядро K — суммируемая и ограниченная функция на множестве $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$, удовлетворяющая следующим основным условиям:

$$K(x) > 0, x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1, \nu(K) := \int_{-\infty}^{\infty} xK(x)dx < 0, \quad (2)$$

причем считается, что последний интеграл абсолютно сходится.

Нелинейность $H(t, u)$ определена на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, причем удовлетворяет:

- а) условию критичности: $H(t, 0) \equiv 0, t \in \mathbb{R}^+$;
- б) условию Каратеодори по аргументу u на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, т.е. при каждом фиксированном $u \in \mathbb{R}^+$ функция $H(t, u)$ измерима по t на \mathbb{R}^+ и почти при всех $t \in \mathbb{R}^+$ данная функция непрерывна по u на \mathbb{R}^+ ;
- в) при всяком фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$ функция $H(t, u)$ монотонно возрастает по аргументу u на \mathbb{R}^+ .

Для конкретных представлений ядра K и нелинейности H уравнение (1) возникает в различных областях естествознания. В частности, когда ядро K представляет вполне монотонную функцию, имеющую отрицательный первый момент, уравнение (1) возникает в теории переноса излучения в спектральных линиях, в теории марковских процессов и в кинетической теории газов (см. [1–5]). В случае когда ядро K допускает несимметричное гауссовское распределение: $K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+c)^2}, x \in \mathbb{R}, c > 0$, уравнение (1) встречается в математической теории пространственно-временного распространения эпидемии (см. [6–8]).

Отметим, что в случае когда нелинейность $H(t, u)$ не зависит от переменной t : $H(t, u) = Q(u)$, где Q непрерывная монотонно возрастающая функция на некотором отрезке $[0, \eta]$, ($\eta > 0$), причем $Q(0) = 0, Q(\eta) = \eta, Q(u) \geq u, u \in [0, \eta]$, уравнение (1) достаточно подробно исследовалось в работах [9, 10]. В случае когда $H(t, u) = u - \omega(t, u)$, где $\omega(t, u) \geq 0, (t, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \omega(t, u) \downarrow$ по u полубесконечном интервале $[\delta, +\infty)$, ($\delta > 0$), причем $\omega(t, u) \leq \dot{\omega}(t+u), t \geq 0, u \geq \delta, \dot{\omega}(u) \geq 0, u \geq \delta, \dot{\omega} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C_0(\mathbb{R}^+)$ и $\dot{\omega} \downarrow$ на $[\delta, +\infty)$ (здесь $L_1(\mathbb{R}^+)$ — пространство суммируемых функций на \mathbb{R}^+ , а $C_0(\mathbb{R}^+)$ — пространство непрерывных функций на \mathbb{R}^+ , имеющих нулевой предел в бесконечности), в работе [11] для уравнения (1) построено однопараметрическое семейство положительных и ограниченных решений, имеющих конечные положительные пределы в бесконечности.

Наконец, когда для нелинейности $H(t, u)$ мажорантой в смысле М. А. Красносельского служит линейная функция (по u) вида $c_0u + \beta(t), 0 < c_0 \leq 1, \beta(t) \geq 0, t \in \mathbb{R}^+, \beta \in L_1(\mathbb{R}^+)$, а минорантой для $H(t, u)$ служит экспоненциально убывающая функция специальной структуры, уравнение (1) изучалось в работе [12]. Следует также отметить, что для симметричных ядер K уравнение (1) при различных ограничениях на $H(t, u)$ исследовалось в работах [13–16].



В настоящей работе при существенно других условиях (слабых по сравнению с условиями из работы [12]) на нелинейности $H(t, u)$ мы докажем существование положительного ограниченного и суммируемого на \mathbb{R}^+ решения. Более того, мы также будем исследовать асимптотическое поведение построенного решения на бесконечности. При дополнительных ограничениях на $H(t, u)$ мы установим единственность построенного решения в определенном классе измеримых функций.

В конце работы приводятся примеры функций $K(x)$ и $H(t, u)$, для которых условия теоремы выполняются.

1. Основные условия на K и на H . Формулировка основного результата

Прежде чем накладывать основные оценки на функцию $H(t, u)$, введем следующие обозначения. Пусть $G(u)$ — непрерывная монотонно возрастающая и выпуклая (вверх) на \mathbb{R}^+ функция, причем

$$G(0) = 0, \quad \text{существует } G'(0) > 1, \quad G'(0) < +\infty, \quad (3)$$

$$G(u) \leq G'(0)u, \quad u \in \mathbb{R}^+. \quad (4)$$

Рассмотрим следующую функцию Дикмана (см. [6]):

$$\mathcal{L}(\lambda) := G'(0) \int_{-\infty}^{\infty} K(y)e^{\lambda y} dy, \quad \lambda \geq 0, \quad (5)$$

предполагая, что интеграл в (5) сходится, когда $\lambda \in [0, \lambda_0]$, $\lambda_0 > 0$. Заметим, что $\mathcal{L}(0) = G'(0) \int_{-\infty}^{\infty} K(y) dy = G'(0) > 1$, $\mathcal{L}'(0) = G'(0) \int_{-\infty}^{\infty} K(y)y dy < 0$ (в силу условия

(2)). С другой стороны, $\mathcal{L}''(\lambda) = G'(0) \int_{-\infty}^{\infty} K(y)y^2 e^{\lambda y} dy > 0$ (последний интеграл может быть и бесконечным).

Следовательно, $\mathcal{L}(\lambda)$ представляет собой выпуклую (вниз) функцию на отрезке $[0, \lambda_0]$. В силу непрерывности функции $\mathcal{L}'(\lambda)$ существует число $\lambda^* \in [0, \lambda_0]$ такое, что $\mathcal{L}'(\lambda) < 0$, $\lambda \in [0, \lambda^*]$. В дальнейшем предположим, что

$$\mathcal{L}(\lambda^*) < 1. \quad (6)$$

Зафиксируем число λ^* . Теперь мы готовы накладывать последние два условия на нелинейность $H(t, u)$.

Предположим также, что

г) выполняется неравенство

$$H(t, e^{-\lambda^* t}) \geq \frac{1}{\alpha} e^{-\lambda^* t}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (7)$$

где число α задается согласно следующей формуле:

$$\alpha := \int_{-\infty}^0 K(y)e^{\lambda^* y} dy; \quad (8)$$



д) существует измеримая функция $\gamma(t)$, определенная на множестве \mathbb{R}^+ со свойствами

$$\gamma(t) \geq \frac{1}{\alpha} e^{-\lambda^* t}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad \gamma(t)e^{\lambda^* t} \in M(\mathbb{R}^+) \quad (9)$$

($M(E)$ — пространство существенно органичных на E функций), такая, что

$$H(t, u) \leq G(u) + \gamma(t), \quad u \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (10)$$

Справедлива следующая

Теорема. Пусть ядро $K \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям (2) и (6), а нелинейность $H(t, u)$ — условиям а)–д). Тогда уравнение (1) обладает положительным ограниченным и суммируемым решением. Более того, $e^{\lambda^* x} f(x) \in M(\mathbb{R}^+)$. Если дополнительно функция $H(t, u)$ удовлетворяет следующему условию Липшица по аргументу u на \mathbb{R}^+ равномерно относительно переменной $t \in \mathbb{R}^+$:

е) существует число $L \in \left(0, \frac{G'(0)}{\mathcal{L}(\lambda^*)}\right)$ такое, что

$$|H(t, u_1) - H(t, u_2)| \leq L|u_1 - u_2|, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}^+,$$

то решение единственно в классе неотрицательных и измеримых на \mathbb{R}^+ функций $f(x)$, удовлетворяющих условию $e^{\lambda^* x} f(x) \in M(\mathbb{R}^+)$.

2. Об одном нелинейном вспомогательном интегральном уравнении

Рассмотрим следующее вспомогательное нелинейное интегральное уравнение на полуоси:

$$\phi(x) = \int_0^\infty K(x-t)G(\phi(t))dt + g(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (11)$$

относительно искомой измеримой и неотрицательной функции $\phi(x)$, где

$$g(x) = \int_0^\infty K(x-t)\gamma(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (12)$$

Во-первых, заметим, что из свойств (6) и (9) следует, что $e^{\lambda^* x} f(x) \in M(\mathbb{R}^+)$. Действительно, учитывая (6) и (9), из представления (12) будем иметь

$$\begin{aligned} e^{\lambda^* x} g(x) &= e^{\lambda^* x} \int_0^\infty K(x-t)e^{-\lambda^* t} e^{\lambda^* t} \gamma(t) dt \leq \\ &\leq \sup_{t \geq 0} (e^{\lambda^* t} \gamma(t)) \int_0^\infty K(x-t)e^{\lambda^*(x-t)} dt \leq \\ &\leq \sup_{t \geq 0} (e^{\lambda^* t} \gamma(t)) \int_{-\infty}^\infty K(y)e^{\lambda^* y} dy = \frac{\mathcal{L}(\lambda^*)}{G'(0)} \sup_{t \geq 0} (e^{\lambda^* t} \gamma(t)) := C < +\infty. \end{aligned} \quad (13)$$

Во-вторых,

$$g(x) \geq e^{-\lambda^* x}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (14)$$



На самом деле, учитывая неравенство (9) и обозначение (8), получим

$$\begin{aligned} g(x) &\geq \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} K(x-t)e^{-\lambda^*t} dt = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^x K(y)e^{-\lambda^*(x-y)} dy \geq \\ &\geq \frac{1}{\alpha} e^{-\lambda^*x} \int_{-\infty}^0 K(y)e^{\lambda^*y} dy = e^{-\lambda^*x}, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим следующие простые итерации для вспомогательного уравнения (11):

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}(x) &= \int_0^{\infty} K(x-t)G(\phi_n(t))dt + g(x), \\ \phi_0(x) &= g(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \tag{15}$$

Используя неотрицательность ядра K , функции g , а также монотонность функции G и соотношение $G(0) = 0$, несложно проверить, что

$$\phi_n(x) \uparrow \text{ по } n. \tag{16}$$

Докажем теперь, что

$$e^{\lambda^*x} \phi_n(x) \leq \frac{C}{1 - \mathcal{L}(\lambda^*)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{17}$$

Неравенство (17) в случае $n = 0$ сразу следует из определения нулевого приближения с учетом неравенств (6) и (13). Предположим, что (17) имеет место при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (15) с учетом неравенств (4) и (13), а также определения функции $\mathcal{L}(\lambda)$ будем иметь

$$\begin{aligned} e^{\lambda^*x} \phi_{n+1}(x) &\leq C + e^{\lambda^*x} G'(0) \int_0^{\infty} K(x-t)e^{-\lambda^*t} e^{\lambda^*t} \phi_n(t) dt \leq \\ &\leq C + \frac{CG'(0)}{1 - \mathcal{L}(\lambda^*)} \int_0^{\infty} K(x-t)e^{\lambda^*(x-t)} dt \leq C + \frac{C\mathcal{L}(\lambda^*)}{1 - \mathcal{L}(\lambda^*)} = \frac{C}{1 - \mathcal{L}(\lambda^*)}. \end{aligned}$$

Так как свертка суммируемых и ограниченных функций представляет собой непрерывную функцию (см. [17]), то индукцией по n легко можно убедиться, что $\phi_n \in C(\mathbb{R}^+)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Итак, в силу (16) и (17) заключаем, что последовательность непрерывных функций $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет поточечный предел при $n \rightarrow \infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = \phi(x)$, причем, согласно теореме Б. Леви (см. [18]), $\phi(x)$ является решением уравнения (11). Из (16) и (17) следует также оценка

$$g(x) \leq \phi(x) \leq \frac{Ce^{-\lambda^*x}}{1 - \mathcal{L}(\lambda^*)}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{18}$$

Снова используя непрерывность свертки суммируемых и ограниченных функций, заключаем, что $\phi \in C(\mathbb{R}^+)$.



3. Доказательство теоремы. Последовательные приближения для уравнения (1). Единственность решения

Перейдем теперь к основному уравнению (1). Рассмотрим следующие итерации для уравнения (1):

$$f_{n+1}(x) = \int_0^{\infty} K(x-t)H(t, f_n(t))dt, \tag{19}$$

$$f_0(x) = e^{-\lambda^*x}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Индукцией по n докажем справедливость следующих фактов:

- 1) $f_n(x) \uparrow$ по n , $x \in \mathbb{R}^+$;
- 2) $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ измеримы на \mathbb{R}^+ ;
- 3) $f_n(x) \leq \phi(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Сначала докажем, что $f_1(x) \geq f_0(x)$ и $f_1(x) \leq \phi(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. Используя условие г), положительность ядра K и обозначение (8), из (19) получим

$$f_1(x) \geq \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} K(x-t)e^{-\lambda^*t}dt \geq e^{-\lambda^*x} = f_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

С другой стороны, из условия е) в силу (10), (2) и (11) имеем

$$f_1(x) \leq \int_0^{\infty} K(x-t)(G(\phi(t)) + \gamma(t))dt = g(x) + \int_0^{\infty} K(x-t)G(\phi(t))dt = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Измеримость нулевого приближения сразу следует из непрерывности экспоненциальной функции. Предполагая, что $f_n(x)$ измерима по x на \mathbb{R}^+ для некоторого n и при этом используя условие Каратеодори (см. условие б)), из (19) получаем измеримость функции $f_{n+1}(x)$. Предполагая, что $f_n(x) \geq f_{n-1}(x)$ и $f_n(x) \leq \phi(x)$ при некотором натуральном n и используя монотонность функции $H(t, u)$, положительность ядра K , а также оценку (10), из (19) приходим к следующим неравенствам: $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ и $f_{n+1}(x) \leq \phi(x)$. Итак, в силу 1)–3) мы получаем поточечную сходимость последовательности измеримых функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty} : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, причем

$$e^{-\lambda^*x} \leq f(x) \leq \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{20}$$

Снова используя условие б) и теорему Б. Леви, заключаем, что предельная функция $f(x)$ почти всюду на \mathbb{R}^+ удовлетворяет уравнению (1). Из (20) с учетом (18) следует, что $e^{\lambda^*x}f(x) \in M(\mathbb{R}^+)$. Перейдем теперь к доказательству единственности решения уравнения (1) в следующем классе измеримых функций:

$$\mathcal{P} := \{f(x) : f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^+, \quad e^{\lambda^*x}f(x) \in M(\mathbb{R}^+)\}. \tag{21}$$

Предположим обратное: уравнение (1) имеет два решения f и \tilde{f} из класса \mathcal{P} . Тогда, используя условие д), определение функции Дикмана и условие (6) для разности f и \tilde{f} , получим

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| \leq L \int_0^{\infty} K(x-t)|f(t) - \tilde{f}(t)|dt \leq$$



$$\begin{aligned} &\leq L \int_0^{\infty} K(x-t)e^{-\lambda^*t} dt \sup_{t \in \mathbb{R}^+} (e^{\lambda^*t}|f(t) - \tilde{f}(t)|) = \\ &= Le^{-\lambda^*x} \int_{-\infty}^x K(y)e^{\lambda^*y} dy \sup_{t \in \mathbb{R}^+} (e^{\lambda^*t}|f(t) - \tilde{f}(t)|) \leq e^{-\lambda^*x} \frac{L\mathcal{L}(\lambda^*)}{G'(0)} \sup_{t \in \mathbb{R}^+} (e^{\lambda^*t}|f(t) - \tilde{f}(t)|), \end{aligned}$$

из которого следует, что $\left(1 - \frac{L\mathcal{L}(\lambda^*)}{G'(0)}\right) \sup_{x \in \mathbb{R}^+} (e^{\lambda^*x}|f(x) - \tilde{f}(x)|) \leq 0$.

Так как $L \in \left(0, \frac{G'(0)}{\mathcal{L}(\lambda^*)}\right)$, то из последнего неравенства сразу следует, что $f(x) = \tilde{f}(x)$ почти всюду на \mathbb{R}^+ . Теорема доказана.

4. Примеры ядра K и нелинейности H

Сперва приведем конкретные прикладные примеры ядра K :

А) $K(x) = \int_a^b e^{-|x+c|s} G(s) ds$, $x \in \mathbb{R}$, $c > 0$, где $G(s) > 0$ — непрерывная функция на

$[a, b]$ ($0 < a < b \leq +\infty$), причем $2 \int_a^b \frac{G(s)}{s} ds = 1$;

Б) $K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+c)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $c > 0$.

Прямой проверкой можно убедиться, что для приведенных ядер выполняются условия (2). Приведем теперь содержательные примеры нелинейности $G(u)$:

ж) $G(u) = \gamma_0(1 - e^{-u})$, $u \in \mathbb{R}^+$, $\gamma_0 > 1$ — числовой параметр;

з) $G(u) = \frac{\gamma_0(1+u-e^{-u})}{2}$, $\gamma_0 > 1$, $u \in \mathbb{R}^+$.

Выполнение условий (3) и (4) совершенно очевидно. Проверим выполнение условия (6) на примере Б). Имеем

$$\mathcal{L}(\lambda) = \frac{G'(0)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y+c)^2} e^{\lambda y} dy = \gamma_0 e^{\frac{\lambda^2}{4} - c\lambda}.$$

Заметим, что $\mathcal{L}'(\lambda) = \gamma_0 \left(\frac{\lambda}{2} - c\right) e^{\frac{\lambda^2}{4} - c\lambda} \leq 0$, когда $\lambda \in [0, 2c]$,

$$\mathcal{L}''(\lambda) = \frac{\gamma_0}{2} e^{\frac{\lambda^2}{4} - c\lambda} + \gamma_0 \left(\frac{\lambda}{2} - c\right)^2 e^{\frac{\lambda^2}{4} - c\lambda} > 0.$$

Итак, $\mathcal{L}(\lambda) \downarrow$ на отрезке $[0, 2c]$ выпукла (вниз). Очевидно, что $\mathcal{L}(2c) = \gamma_0 e^{-c^2} < 1$ при $c > \sqrt{\ln \gamma_0}$. Итак, если $c \in (\sqrt{\ln \gamma_0}, +\infty)$, то в качестве λ^* можно выбрать $\lambda^* = 2c$.

Приведем теперь примеры для нелинейности $H(t, u)$. Рассмотрим следующий класс функций:

$$H(t, u) = \Lambda(t, u) \sqrt{G(u)e^{-\lambda^*t}}, \quad (t, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad (22)$$

где $\Lambda(t, u)$ — определенная на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ монотонно возрастающая по u на \mathbb{R}^+ и непрерывная по совокупности своих аргументов функция, удовлетворяющая следующему двойному неравенству:

$$\frac{1}{\alpha} \leq \Lambda(t, u) \leq \alpha, \quad (t, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad (23)$$

где $\alpha > \frac{1}{\alpha}$ — некоторое число.

Очевидно, что $H(t, 0) = 0$, $t \in \mathbb{R}^+$, ибо $G(0) = 0$.



Здесь дополнительно предположим, что существует число $\eta \geq 1$ такое, что $G(\eta) = \eta$ (для примеров ж) и з) такое число всегда существует).

Из этого в силу соответствующих свойств функции G получаем, что $G(u) \geq u$, $u \in [0, \eta]$. Сперва проверим выполнение неравенства (7). В силу (23) и оценки $G(u) \geq u$, $u \in [0, \eta]$ из (22) имеем

$$H(t, e^{-\lambda^*t}) = \Lambda(t, e^{-\lambda^*t}) \sqrt{G(e^{-\lambda^*t})e^{-\lambda^*t}} \geq \frac{1}{\alpha} \sqrt{e^{-2\lambda^*t}} = \frac{1}{\alpha} e^{-\lambda^*t}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Монотонность функции $H(t, u)$ сразу следует из монотонности $\Lambda(t, u)$ (по u) и $G(u)$. Теперь выберем функцию $\gamma(t)$ (со свойствами (9)) так, чтобы выполнялось неравенство (10). В силу свойств функций Λ и G данное неравенство равносильно оценке:

$$\Lambda^2(t, u)G(u)e^{-\lambda^*t} \leq G^2(u) + 2G(u)\gamma(t) + \gamma^2(t), \quad (t, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$$

или, что то же самое,

$$G^2(u) + G(u)(2\gamma(t) - \Lambda^2(t, u)e^{-\lambda^*t}) + \gamma^2(t) \geq 0, \quad (t, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \quad (24)$$

Заметим, что когда

$$\gamma(t) \geq \frac{1}{4} \Lambda^2(t, u)e^{-\lambda^*t}, \quad (t, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad (25)$$

то неравенство (24) будет автоматически выполнено. Действительно, если выполняется (25), то

$$\begin{aligned} G^2(u) + G(u)(2\gamma(t) - \Lambda^2(t, u)e^{-\lambda^*t}) + \gamma^2(t) &= \left(G(u) - \gamma(t) + \frac{\Lambda^2(t, u)}{2} e^{-\lambda^*t} \right)^2 + \\ &+ e^{-\lambda^*t} \Lambda^2(t, u) \left(\gamma(t) - \frac{\Lambda^2(t, u)}{4} e^{-\lambda^*t} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что если в качестве $\gamma(t)$ выбрать функцию $\gamma(t) = \max\{\frac{\alpha^2}{4}; 1\}e^{-\lambda^*t}$, $t \in \mathbb{R}^+$, то условия (9), (10) и (25) будут выполнены. Условие Каратеодори для функции $H(t, u)$ выполняется в силу непрерывности $G(u)$ и $\Lambda(t, u)$. Для полноты изложения приведем также примеры $\Lambda(t, u)$:

- $\Lambda(t, u) = \frac{1-\varepsilon e^{-u}}{\alpha(1-\varepsilon)}$, $\varepsilon \in (0, 1)$ — параметр, а число α задается согласно (8);
- $\Lambda(t, u) = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{u}{u+1}\right) \Gamma(t)$, $(t, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, где $\Gamma \in C(\mathbb{R}^+)$, $\Gamma(t) \geq 1$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \Gamma(t) < +\infty$.

В конце рассмотрим еще один класс функций, удовлетворяющих условиям а)–д):

$$H(t, u) = G(u) + B(t, u), \quad (t, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$$

где $B(t, u)$ — непрерывная функция на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ и удовлетворяет следующим условиям:

- $B(t, u) \uparrow$ по u на \mathbb{R}^+ ;
- $B(t, e^{-\lambda^*t}) \geq \frac{1}{\alpha} e^{-\lambda^*t}$, $t \in \mathbb{R}^+$;
- $\sup_{u \in \mathbb{R}^+} B(t, u) = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$.

В качестве $B(t, u)$ можно выбрать следующую функцию:

$$B(t, u) = \frac{\gamma(t)u}{u + \varepsilon e^{-\lambda^*t}}, \quad (t, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$$

где $\gamma(t)$ удовлетворяет условию (9) и $\gamma(t) \geq \left(\frac{1}{\alpha} + \varepsilon\right) e^{-\lambda^*t}$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon \in (0, 1)$.



Список литературы

1. *Енгибарян Н. Б.* Об одной задаче нелинейного переноса излучения // *Астрофизика*. 1966. Т. 2, № 1. С. 31–36.
2. *Феллер Ф.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения : в 2 т. Т. 2. Москва : Мир, 1967. 765 с.
3. *Cercignani C.* Theory and Application of the Boltzmann Equation. Edinburgh ; London : Scottish Academic Press, 1975. 415 p.
4. *Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А.* Качественные различия решений для одной модели уравнения Больцмана в линейном и нелинейном случаях // *Теоретическая и математическая физика*. 2012. Т. 173, № 3. С. 497–504. <https://doi.org/10.4213/tmf6965>
5. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. Москва : Наука, 1967. 440 с.
6. *Diekmann O.* Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // *Journal of Mathematical Biology*. 1978. Vol. 6, iss. 2. P. 109–130. <https://doi.org/10.1007/BF02450783>
7. *Diekmann O.* Run for your life. A note on the asymptotic speed of propagation of an epidemic // *Journal of Differential Equations*. 1979. Vol. 33, iss. 1. P. 58–73. [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(79\)90080-9](https://doi.org/10.1016/0022-0396(79)90080-9)
8. *Сергеев А. Г., Хачатрян Х. А.* О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений в задаче распространения эпидемии // *Труды Московского математического общества*. 2019. Т. 80, вып. 1. С. 113–131.
9. *Хачатрян Х. А.* Достаточные условия разрешимости интегрального уравнения Урысона на полуоси // *Доклады Академии наук*. 2009. Т. 425, № 4. С. 462–465.
10. *Хачатрян Х. А.* Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью // *Известия Российской академии наук. Серия математическая*. 2012. Т. 76, № 1. С. 173–200. <https://doi.org/10.4213/im5402>
11. *Хачатрян Х. А.* Об одном классе нелинейных интегральных уравнений с некомпактным оператором // *Известия НАН Армении. Математика*. 2011. Т. 46, № 2. С. 71–86.
12. *Хачатрян Х. А.* О положительной разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси и на всей прямой // *Известия Российской академии наук. Серия математическая*. 2015. Т. 79, № 2. С. 205–224. <https://doi.org/10.4213/im8245>
13. *Арабаджян Л. Г.* Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна // *Известия НАН Армении. Математика*. 1997. Т. 32, № 1. С. 21–28.
14. *Владимиров В. С., Волович Я. И.* О нелинейном уравнении динамики в теории p -адической струны // *Теоретическая и математическая физика*. 2004. Т. 138, № 3. С. 355–368. <https://doi.org/10.4213/tmf36>
15. *Жуковская Л. В.* Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн // *Теоретическая и математическая физика*. 2006. Т. 146, № 3. С. 402–409. <https://doi.org/10.4213/tmf2043>
16. *Хачатрян Х. А.* О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p -адической струны // *Известия Российской академии наук. Серия математическая*. 2018. Т. 82, № 2. С. 172–193. <https://doi.org/10.4213/im8580>
17. *Рудин У.* Функциональный анализ. Москва : Мир, 1975. 443 с.
18. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. Москва : Наука, 1981. 544 с.

References

1. Engibaryan N. B. On a problem in nonlinear radiative transfer. *Astrophysics*, 1966, vol. 2, pp. 12–14. <https://doi.org/10.1007/BF01014505>
2. Feller W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. 2. 2nd ed. Wiley, 1991. 704 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1967. 765 p.).



3. Cercignani C. *Theory and Application of the Boltzmann Equation*. Edinburgh, London, Scottish Academic Press, 1975. 415 p.
4. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A. Qualitative difference between solutions for a model of the Boltzmann equation in the linear and nonlinear cases. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2012, vol. 172, iss. 3, pp. 1315–1320. <https://doi.org/10.1007/s11232-012-0116-4>
5. Kogan M. N. *Rarefied Gas Dynamics*. Springer, 1969. 400 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1967. 440 p.).
6. Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection. *Journal of Mathematical Biology*, 1978, vol. 6, iss. 2, pp. 109–130. <https://doi.org/10.1007/BF02450783>
7. Diekmann O. Run for your life. A note on the asymptotic speed of propagation of an epidemic. *Journal of Differential Equations*, 1979, vol. 33, iss. 1, pp. 58–73. [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(79\)90080-9](https://doi.org/10.1016/0022-0396(79)90080-9)
8. Sergeev A. G., Khachatryan Kh. A. On the solvability of a class of nonlinear integral equations in the problem of a spread of an epidemic. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, 2019, vol. 80, pp. 95–111. <https://doi.org/10.1090/mosc/286>
9. Khachatryan Kh. A. Sufficient conditions for the solvability of the Urysohn integral equation on a half-line. *Doklady Mathematics*, 2009, vol. 79, pp. 246–249. <https://doi.org/10.1134/S1064562409020264>
10. Khachatryan Kh. A. On a class of integral equations of Urysohn type with strong non-linearity. *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, iss. 1, pp. 163–189. <https://doi.org/10.1070/IM2012v076n01ABEH002579>
11. Khachatryan Kh. A. On a class of nonlinear integral equations with a noncompact operator. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 2011, vol. 46, iss. 2, pp. 89–100. <https://doi.org/10.3103/S106836231102004X>
12. Khachatryan Kh. A. Positive solubility of some classes of non-linear integral equations of Hammerstein type on the semi-axis and on the whole line. *Izvestiya: Mathematics*, 2015, vol. 79, iss. 2, pp. 411–430. <https://doi.org/10.1070/IM2015v079n02ABEH002748>
13. Arabadzhyan L. G. Solution of certain integral equations of the Hammerstein type. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)*, 1997, vol. 32, iss. 1, pp. 17–24.
14. Vladimirov V. S., Volovich Y. I. Nonlinear dynamics equation in p -adic string theory. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2004, vol. 138, iss. 3, pp. 297–309. <https://doi.org/10.1023/B:TAMP.0000018447.02723.29>
15. Zhukovskaya L. V. Iterative method for solving nonlinear integral equations describing rolling solutions in string theory. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2006, vol. 146, iss. 3, pp. 335–342. <https://doi.org/10.1007/s11232-006-0043-3>
16. Khachatryan Kh. A. On the solubility of certain classes of non-linear integral equations in p -adic string theory. *Izvestiya: Mathematics*, 2018, vol. 82, iss. 2, pp. 407–427. <https://doi.org/10.1070/IM8580>
17. Rudin W. *Functional Analysis*. 2nd ed. New York, McGraw-Hill, Inc., 1991. 441 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1975. 443 p.).
18. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsij i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Function and Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1981. 544 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 08.08.2021

Принята к публикации / Accepted 21.09.2021

Опубликована / Published 31.05.2022

МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 180–195
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 180–195

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-180-195>

Научная статья

УДК 539.3

Решение обратной задачи об идентификации двух термомеханических характеристик функционально-градиентного стержня

А. О. Ватульян^{1,2}, С. А. Нестеров²✉

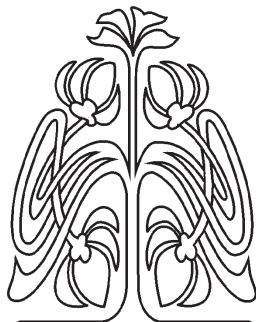
¹Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8-А

²Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра Российской академии наук, Россия, 362025, г. Владикавказ, ул. Ватулина, д. 53

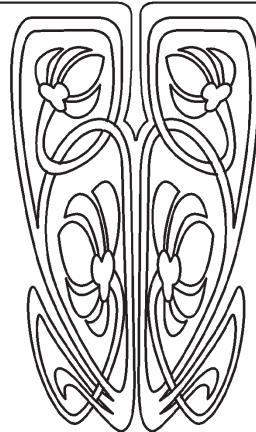
Ватульян Александр Ованесович, доктор физико-математических наук, ¹заведующий кафедрой теории упругости, ²заведующий отделом дифференциальных уравнений, aovatulyan@sfnedu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, AuthorID: 3469

Нестеров Сергей Анатольевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений, 1079@list.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3780-5104>, AuthorID: 808934

Аннотация. Представлен подход к решению обратной задачи об одновременной идентификации двух термомеханических характеристик функционально-градиентного стержня. Рассмотрены две задачи термоупругости с различной тепловой нагрузкой на торцах стержня. В качестве входной информации выступают данные измерений температуры на торце стержня на конечном временном интервале. Прямые задачи после применения преобразования Лапласа решены на основе метода пристрелки и обращения трансформант на основе разложения оригинала в ряд по смещенным многочленам Лежандра. Проведен анализ влияния законов изменения переменных характеристик на значения снимаемой в эксперименте входной информации. Решение нелинейной обратной задачи построено на основе итерационного процесса. Начальное приближение для итерационного процесса находится в классе линейных функций, коэффициенты которых определяют из условия минимального значения функционала невязки. Для нахождения поправок к законам



Научный
отдел





изменения термомеханических характеристик на основе слабой постановки каждой прямой задачи и метода линеаризации получена система интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. Регуляризация системы интегральных уравнений осуществлена на основе метода А. Н. Тихонова. Проведены вычислительные эксперименты по одновременной реконструкции двух теплофизических характеристик при известных законах изменения остальных характеристик. Восстанавливались пары как монотонно возрастающих, так и монотонно убывающих функций.

Ключевые слова: функционально-градиентный стержень, коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость, коэффициент температурного напряжения, метод пристрелки, идентификация, коэффициентная обратная задача термоупругости, система интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Южного математического института — филиала Владикавказского научного центра РАН.

Для цитирования: Ватульян А. О., Нестеров С. А. Решение обратной задачи об идентификации двух термомеханических характеристик функционально-градиентного стержня // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 180–195. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-180-195> Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Solution of the inverse problem of two thermomechanical characteristics identification of a functionally graded rod

A. O. Vatulyan¹, S. A. Nesterov²✉

¹Southern Federal University, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, 8-A Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

²Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center of Russian Academy of Sciences, 53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia

Alexander O. Vatulyan, aovatulyan@sfnu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, AuthorID: 3469

Sergey A. Nesterov, 1079@list.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3780-5104>, AuthorID: 808934

Abstract. An approach to solving the inverse problem of the simultaneous identification of two thermomechanical characteristics of a functionally graded rod is presented. Two problems of thermoelasticity with different heat loads at the ends of the rod are considered. The input information is the temperature measurement data at the end of the rod over a finite time interval. Direct problems after applying the Laplace transform are solved on the basis of the shooting method and inversion of transformants based on the expanding the original in a series in the shifted Legendre polynomials. The analysis of the influence of the variable characteristics change laws on the values of the input information taken in the experiment is carried out. The solution to the nonlinear inverse problem is based on an iterative process. The initial approximation for the iterative process is in the class of linear functions, the coefficients of which are determined from the condition of the minimum value of the residual functional. To find corrections to the laws of change in thermomechanical characteristics on the basis of a weak statement of each direct problem and the linearization method, a system of Fredholm integral equations of the 1st kind is obtained. The system of integral equations is regularized based on the method of A. N. Tikhonov. Computational experiments on the simultaneous reconstruction of two thermophysical characteristics with known laws of change in other characteristics are carried out. Pairs of both monotonically increasing and monotonically decreasing functions were reconstructed.



Keywords: functionally graded rod, heat conduction coefficient, specific heat capacity, thermal stress coefficient, shooting method, identification, coefficient inverse problem of thermoelasticity, system of Fredholm integral equations of the 1st kind

Acknowledgements: This work was supported by the Southern Mathematical Institute, a branch of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences.

For citation: Vatulyan A. O., Nesterov S. A. Solution of the inverse problem of two thermo-mechanical characteristics identification of a functionally graded rod. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 180–195 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-180-195>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Обычно расчеты, связанные с нахождением напряженно-деформированного состояния стержневых конструкций, находящихся в условиях высокотемпературного нагружения, проводят для однородных материалов. Однако в настоящее время в различных областях техники все шире стали использовать функционально-градиентные материалы (FGM) — неоднородные материалы с заданными свойствами [1]. В этих материалах, в отличие от слоистых композитов, удается избежать скачка термомеханических характеристик через поверхность раздела. Из-за сложной и многоступенчатой технологии изготовления FGM в конечном изделии могут присутствовать отклонения от заданных законов неоднородности. Поэтому требуется идентификация реальных свойств изделия после изготовления. Однако из-за того, что термомеханические характеристики являются функциями координат, они могут быть определены только неразрушающими методами контроля, теоретически опирающимися на аппарат коэффициентных обратных задач (КОЗ) термомеханики.

КОЗ термоупругости [2] — это задачи нахождения термомеханических характеристик (модулей упругости, плотности, коэффициента теплопроводности, удельной теплоемкости, коэффициента температурного напряжения) как коэффициентов дифференциальных операторов уравнений термоупругости по дополнительной информации о полях перемещений или температуры, измеренной на части границы объекта, на некотором временном отрезке.

Из-за некорректности и нелинейности КОЗ в настоящее время актуальной задачей является построение экономных и устойчивых алгоритмов их решения. Наиболее распространенным методом решения КОЗ является построение функционала невязки и его минимизация каким-либо из градиентных методов [3, 4] или генетическим алгоритмом [5]. На основе такого подхода выполнено довольно большое количество исследований КОЗ теплопроводности [3–8] и теории упругости [9–11]. Однако для ряда материалов необходимо учитывать связанность полей и решать КОЗ термоупругости [12]. При решении КОЗ термоупругости возникает проблема построения операторных уравнений, связывающих искомые и измеряемые в эксперименте функции.

Ранее авторами был разработан и апробирован численный метод решения одномерных нелинейных КОЗ теории упругости [13] и термоупругости [12, 14, 15], основанный на построении итерационного процесса. Для этого на основе слабой постановки прямой задачи и линеаризации была получена система линеаризованных операторных уравнений в трансформантах Лапласа [12]. Ограничившись восстановлением только одной из термомеханических характеристик при известных других, после перехода



от трансформант Лапласа к оригиналам была проведена идентификация термомеханических характеристик стержня [14] и цилиндра [15]. Начальное приближение определялось в классе линейных функций, коэффициенты которых определяют из условия минимального значения функционала невязки. Для нахождения поправок термомеханических характеристик на каждом шаге итерационного процесса решалось интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода.

Однако обычно на практике неизвестными являются несколько термомеханических характеристик. Поэтому обратная задача о реконструкции нескольких термомеханических характеристик неоднородных тел является актуальной.

В данной работе рассматривается КОЗ об одновременной идентификации двух термомеханических характеристик функционально-градиентного стержня. Рассмотрены две постановки задач термоупругости с различной тепловой нагрузкой на торцах стержня. Прямые задачи после применения преобразования Лапласа решены с использованием метода пристрелки и обращения трансформант на основе метода разложения оригинала в ряд по смещенным многочленам Лежандра. Решение обратных задач построено на основе итерационного процесса, на каждом шаге которого численно решалась система интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. В ходе вычислительных экспериментов восстанавливались пары как монотонно возрастающих, так и монотонно убывающих функций.

1. Постановка обратной задачи термоупругости для функционально-градиентного стержня

Рассмотрим КОЗ об определении законов изменения двух теплофизических характеристик функционально-градиентного стержня длины l . Торцы стержня $x = 0$ жестко закреплен и на нем поддерживается нулевая температура, на другом торце $x = l$, свободном от напряжений, действует тепловой поток. В рамках тепловой диагностики идентификация переменных свойств может быть осуществлена по данным о температуре, измеренной на торце стержня, на конечном временном интервале. Поскольку неизвестными являются две теплофизические характеристики, то рассмотрим две задачи термоупругости с разной тепловой нагрузкой на торце $x = l$. В первой задаче на торце действует тепловой поток q_0te^{-t} ; во второй задаче — тепловой поток $q_0H(t)$, где $H(t)$ — функция Хевисайда.

Постановка задачи 1 имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad x \in [0, l], \quad t \in [0, \infty), \quad (1)$$

$$\sigma_x = E(x) \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma(x)\theta, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = c_\varepsilon(x) \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \gamma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad x \in [0, l], \quad t \in [0, \infty), \quad (3)$$

$$u(0, t) = 0, \quad \sigma_x(l, t) = 0, \quad (4)$$

$$\theta(0, t) = 0, \quad -k(l) \frac{\partial \theta}{\partial x}(l) = q_0te^{-t}, \quad (5)$$

$$\theta(x, 0) = u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \quad (6)$$



Постановка задачи 2 совпадает с постановкой задачи 1 за исключением тепловых граничных условий (5), вместо которых ставятся условия

$$\theta(0, t) = 0, \quad -k(l) \frac{\partial \theta}{\partial x}(l) = q_0 H(t). \quad (7)$$

Перейдем в (1)–(7) к безразмерным параметрам и переменным, обозначая [14]: $z = \frac{x}{l}$, $\bar{k}(z) = \frac{k(x)}{k_0}$, $\bar{c}(z) = \frac{c_\varepsilon(x)}{c_0}$, $\bar{\rho}(z) = \frac{\rho(x)}{\rho_0}$, $\bar{E}(z) = \frac{E(x)}{E_0}$, $\bar{\gamma}(z) = \frac{\gamma(x)}{\gamma_0}$, $t_2 = l \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}$, $\tau = \frac{t}{t_1}$, $W = \frac{\gamma_0 \theta}{E_0}$, $U = \frac{u}{l}$, $\Omega = \frac{\sigma_x}{E_0}$, $\delta_0 = \frac{\gamma_0^2 T_0}{c_0 E_0}$, $\beta = \frac{q_0 \gamma_0 l}{k_0 E_0}$, $\varepsilon_0 = \frac{t_2}{t_1}$. Здесь $E_0, \rho_0, k_0, c_0, \gamma_0$ – некоторые характерные величины.

В дальнейшем в безразмерных формулах обозначим функции с индексами «I» и «II» как функции, отвечающие первой и второй постановке задач соответственно.

Тогда задача 1 в безразмерной форме имеет вид

$$\frac{\partial \Omega_I}{\partial z} = \varepsilon_0^2 \bar{\rho}(z) \frac{\partial^2 U_I}{\partial \tau^2}, \quad z \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \infty), \quad (8)$$

$$\Omega_I = \bar{E}(z) \frac{\partial U_I}{\partial z} - \bar{\gamma}(z) W_I, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\bar{k}(z) \frac{\partial W_I}{\partial z}) = \bar{c}(z) \frac{\partial W_I}{\partial \tau} + \delta_0 \bar{\gamma}(z) \frac{\partial^2 U_I}{\partial z \partial \tau}, \quad z \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \infty), \quad (10)$$

$$U_I(0, \tau) = 0, \quad \Omega_I(1, \tau) = 0, \quad (11)$$

$$W_I(0, \tau) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{\partial W_I}{\partial z}(1, \tau) = \beta \tau e^\tau, \quad (12)$$

$$W_I(z, 0) = U_I(z, 0) = \frac{\partial U_I}{\partial \tau}(z, 0) = 0. \quad (13)$$

Обезразмеренная постановка задачи 2 отличается от задачи 1 только тепловыми граничными условиями. Вместо граничных условий (12) имеем

$$W_{II}(0, \tau) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{\partial W_{II}}{\partial z}(1, \tau) = \beta H(\tau). \quad (14)$$

Множитель ε_0 , стоящий в правой части уравнения движения (8), очень мал ($10^{-16} \dots 10^{-12}$), поэтому в дальнейшем для упрощения расчетов будем рассматривать квазистатические постановки прямых задач термоупругости, не учитывающих инерционные члены, т.е. $\frac{\partial \Omega_I}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial \Omega_{II}}{\partial z} = 0$.

Прямая задача термоупругости состоит в нахождении функций $W_I(z, \tau)$, $U_I(z, \tau)$ из (8)–(13) по известным термомеханическим характеристикам ($\bar{E}(z)$, $\bar{\rho}(z)$, $\bar{c}(z)$, $\bar{k}(z)$, $\bar{\gamma}(z)$).

Особенности идентификации механических характеристик неоднородных тел исследованы в [13]. Мы же подробно рассмотрим особенности идентификации теплофизических характеристик.

В обратной задаче требуется одновременно восстановить две теплофизические характеристики при известных остальных по дополнительной информации о торцевой температуре $f_I(\tau)$, $f_{II}(\tau)$, измеренной в ходе проведения двух экспериментов с тепловой нагрузкой, моделируемой граничными условиями (12) и (14) соответственно:

$$W_I(1, \tau) = f_I(\tau), \quad \tau \in [a_1, b_1], \quad (15)$$

$$W_{II}(1, \tau) = f_{II}(\tau), \quad \tau \in [a_2, b_2]. \quad (16)$$



2. Решение прямой задачи термоупругости

При произвольных законах изменения термомеханических характеристик прямые задачи вида (8)–(13) могут быть решены лишь численно, например методом стрельки. Применим его к решению поставленных прямых задач. Для этого применим преобразование Лапласа к уравнениям равновесия (8), теплопроводности (10), граничным условиям (11), (12) с учетом начальных условий (13) и того, что $\tilde{\Omega}(z, p) = 0$, после некоторых преобразований перейдем к канонической системе обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка с переменными коэффициентами:

$$\frac{d\tilde{W}_I}{dz} = \frac{1}{k(z)}\tilde{Q}_I(z, p), \quad (17)$$

$$\frac{d\tilde{Q}_I}{dz} = p \left(\bar{c}(z) + \delta_0 \frac{\bar{\gamma}^2(z)}{\bar{E}(z)} \right) \tilde{W}_I(z, p), \quad (18)$$

$$\frac{d\tilde{U}_I}{dz} = \frac{\bar{\gamma}(z)}{\bar{E}(z)}\tilde{W}_I(z, p). \quad (19)$$

Далее для 1-й задачи методом Рунге – Кутта решается вспомогательная задача Коши, состоящая из системы дифференциальных уравнений (17)–(19) со следующими условиями на торце $z = 0$: $\tilde{U}_1(0) = 0$, $\tilde{W}_1(0) = 0$, $\tilde{Q}_1(0) = 1$. Составляются выражения $\tilde{U}_I = \alpha_1 \tilde{U}_1$, $\tilde{W}_I = \alpha_1 \tilde{W}_1$, $\tilde{Q}_I = \alpha_1 \tilde{Q}_1$. Неизвестная константа α_1 определяется путем удовлетворения условию на торце $z = 1$: $\tilde{Q}_I(1, p) = \frac{\beta}{(p+1)^2}$.

Для 2-й задачи решается вспомогательная задача Коши, состоящая из системы дифференциальных уравнений (17)–(19) со следующими условиями на торце $z = 0$: $\tilde{U}_2(0) = 0$, $\tilde{W}_2(0) = 1$, $\tilde{Q}_2(0) = 0$. Составляются выражения $\tilde{U}_{II} = \alpha_2 \tilde{U}_2$, $\tilde{W}_{II} = \alpha_2 \tilde{W}_2$, $\tilde{Q}_{II} = \alpha_2 \tilde{Q}_2$. Неизвестная константа α_2 определяется путем удовлетворения условию на торце $z = 1$: $\tilde{Q}_{II}(1, p) = \frac{\beta}{p}$.

После нахождения решений прямых задач в трансформантах для каждого значения параметра $p = 1, 2, \dots$ для нахождения оригиналов функций в работе применялось обращение преобразования Лапласа на основе метода разложения оригинала в ряд по смещенным многочленам Лежандра. На примере однородного стержня проведено сравнение результатов, полученных предложенным методом решения прямой задачи с аналитическим решением. Выяснено, что для того чтобы погрешность вычисления оригиналов температуры для времени $\tau \geq 0.01$ не превосходила 1%, достаточно ограничиться 50 членами ряда в разложении по смещенным многочленам Лежандра.

Важным этапом при решении обратных задач является анализ влияния законов изменения переменных характеристик на значения снимаемой в эксперименте входной информации.

Проведен анализ влияния законов изменения теплофизических характеристик и параметра связанности δ_0 на температуру, измеренную на торце стержня $z = 1$, которая выступает при решении обратных задач в качестве входной информации. Выяснено, что законы изменения коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости для рассматриваемых задач оказывают сильное влияние на торцевую температуру при любом параметре связанности $\delta_0 = 0.01 \dots 0.4$. Влияние же коэффициента температурных напряжений на торцевую температуру сильно зависит от величины параметра связанности и оказывается существенным только при $\delta_0 \geq 0.2$.

На рис. 1–3 показаны графики $W_I(1, \tau)$ и $W_{II}(1, \tau)$ для различных наборов законов изменения свойств материала при $\beta = 1$.



Так, на рис. 1, для того чтобы показать влияние коэффициента теплопроводности $\bar{k}(z)$ на торцевую температуру, были построены графики $W_I(1, \tau)$ и $W_{II}(1, \tau)$ при $\delta_0 = 0.03$ и двух наборах законов изменения свойств материала: 1) $\bar{k}(z) = 1$, $\bar{c}(z) = \bar{\gamma}(z) = \bar{E}(z) = 1 + 3z$ (сплошная линия); 2) $\bar{c}(z) = \bar{\gamma}(z) = \bar{E}(z) = \bar{k}(z) = 1 + 3z$ (пунктир).

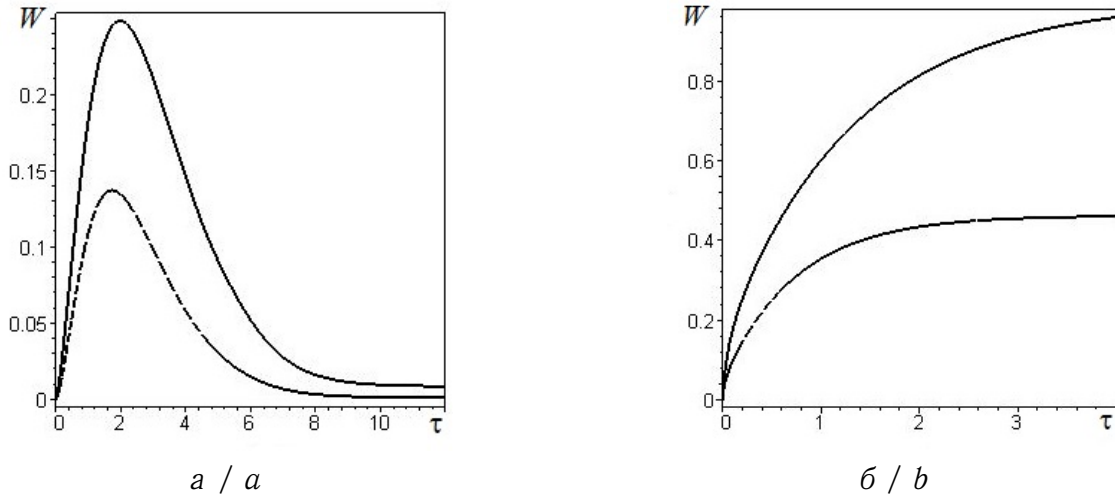


Рис. 1. Графики торцевой температуры, построенные при различных законах изменения коэффициента теплопроводности: *a* – $W_I(1, \tau)$; *b* – $W_{II}(1, \tau)$

Fig. 1. End temperature graphs plotted for various laws of change in the heat conduction coefficient: *a* – $W_I(1, \tau)$; *b* – $W_{II}(1, \tau)$

Для оценки влияния законов изменения удельной теплоемкости $\bar{c}(z)$ аналогично на рис. 2 построены графики торцевой температуры при $\delta_0 = 0.03$ и двух наборах законов изменения свойств материала: 1) $\bar{c}(z) = 1$, $\bar{k}(z) = \bar{\gamma}(z) = \bar{E}(z) = 1 + 2e^{-2z}$ (сплошная линия); 2) $\bar{c}(z) = \bar{k}(z) = \bar{\gamma}(z) = \bar{E}(z) = 1 + 2e^{-2z}$ (пунктир).

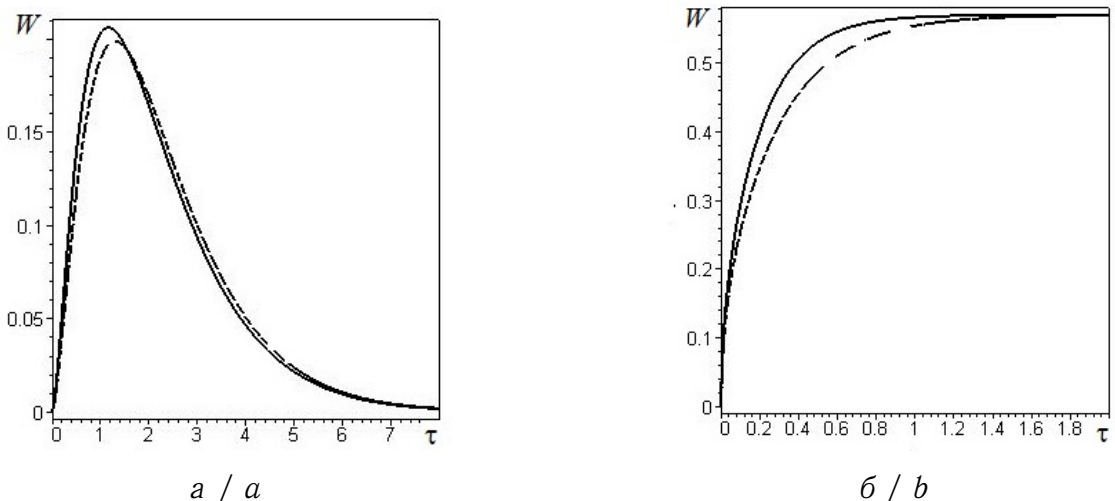


Рис. 2. Графики торцевой температуры, построенные при различных законах изменения удельной теплоемкости: *a* – $W_I(1, \tau)$; *b* – $W_{II}(1, \tau)$

Fig. 2. End temperature graphs plotted for various laws of change in the heat capacity change: *a* – $W_I(1, \tau)$; *b* – $W_{II}(1, \tau)$



На рис. 3 показано влияние коэффициента температурного напряжения $\bar{\gamma}(z)$ на торцевую температуру неоднородного стержня при большом параметре связанности $\delta_0 = 0.4$. Рассмотрены следующие два набора законов изменения свойств материала: 1) $\bar{\gamma}(z) = 1$, $\bar{k}(z) = \bar{c}(z) = \bar{E}(z) = 2 + \cos(3z)$ (сплошная линия); 2) $\bar{k}(z) = \bar{c}(z) = \bar{E}(z) = \bar{\gamma}(z) = 2 + \cos(3z)$ (пунктир).

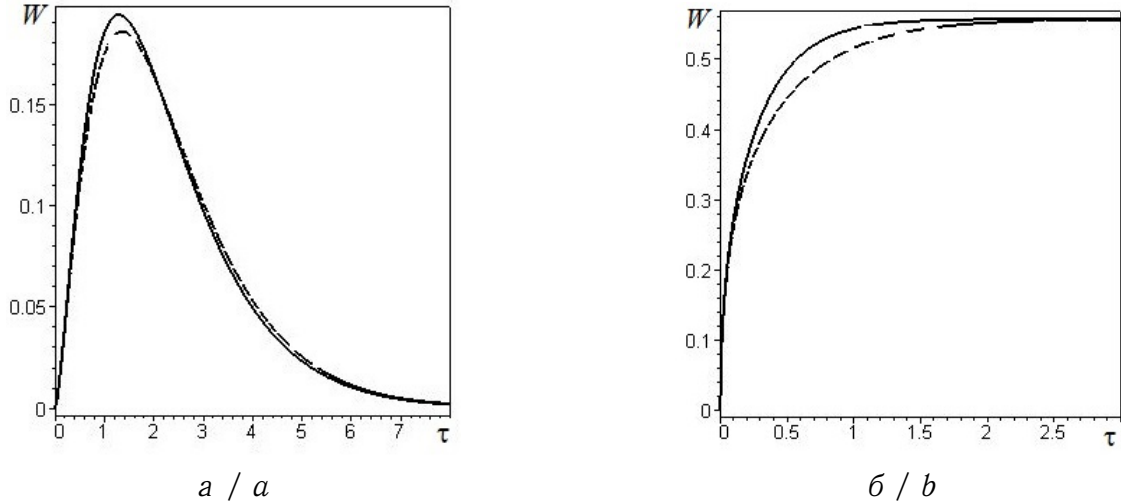


Рис. 3. Графики торцевой температуры, построенные при различных законах изменения коэффициента температурного напряжения: а — $W_I(1, \tau)$; б — $W_{II}(1, \tau)$

Fig. 3. End temperature graphs plotted for various laws of variation of the thermal stress coefficient: а — $W_I(1, \tau)$; б — $W_{II}(1, \tau)$

Графики торцевой температуры на рис. 2 для различных наборов законов удельной теплоемкости и на рис. 3 для различных наборов законов коэффициента температурных напряжений отличаются друг от друга незначительно, что делает невозможным одновременную реконструкцию удельной теплоемкости и коэффициента температурных напряжений.

3. Решение обратной задачи термоупругости

КОЗ термоупругости является нелинейной задачей. Построим ее решение на основе итерационного процесса, воспользовавшись техникой, описанной в работе [12]. Записав для задач 1 и 2 слабые постановки в трансформантах Лапласа и используя метод линеаризации для нахождения поправок теплофизических характеристик $\delta\bar{a}^{(n-1)}$ ($\delta\bar{k}^{(n-1)}$, $\delta\bar{c}^{(n-1)}$, $\delta\bar{\gamma}^{(n-1)}$) на $(n-1)$ -й итерации, была получена система двух операторных уравнений 1-го рода:

$$(p+1)^2 \int_0^1 \delta\bar{k}^{(n-1)} \left(\frac{dW_I^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz + p(p+1)^2 \int_0^1 \delta\bar{c}^{(n-1)} (\tilde{W}_I^{(n-1)})^2 dz + \delta_0 p(p+1)^2 \int_0^1 \delta\bar{\gamma}^{(n-1)} \frac{d\tilde{U}_I^{(n-1)}}{dz} \tilde{W}_I^{(n-1)} dz = \beta(\tilde{f}_I(p) - \tilde{W}_I^{(n-1)}(1, p)), \quad (20)$$

$$p \int_0^1 \delta\bar{k}^{(n-1)} \left(\frac{dW_{II}^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz + p^2 \int_0^1 \delta\bar{c}^{(n-1)} (\tilde{W}_{II}^{(n-1)})^2 dz + \delta_0 p^2 \int_0^1 \delta\bar{\gamma}^{(n-1)} \frac{d\tilde{U}_{II}^{(n-1)}}{dz} \tilde{W}_{II}^{(n-1)} dz = \beta(\tilde{f}_{II}(p) - \tilde{W}_{II}^{(n-1)}(1, p)). \quad (21)$$



Исходя из анализа влияния законов изменения теплофизических характеристик на торцевую температуру, рассмотрено два различных случая одновременной идентификации двух теплофизических характеристик.

1. Пусть $\bar{\gamma}(z)$ известна. Необходимо определить $\bar{k}(z)$ и $\bar{c}(z)$.

В этом случае, полагая в (20), (21) $\delta\bar{\gamma}^{(n-1)} = 0$, получим

$$(p+1)^2 \int_0^1 \delta\bar{k}^{(n-1)} \left(\frac{dW_I^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz + p(p+1)^2 \int_0^1 \delta\bar{c}^{(n-1)} (\tilde{W}_I^{(n-1)})^2 dz = \beta(\tilde{f}_I(p) - \tilde{W}_I^{(n-1)}(1, p)), \quad (22)$$

$$p \int_0^1 \delta\bar{k}^{(n-1)} \left(\frac{dW_{II}^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz + p^2 \int_0^1 \delta\bar{c}^{(n-1)} (\tilde{W}_{II}^{(n-1)})^2 dz = \beta(\tilde{f}_{II}(p) - \tilde{W}_{II}^{(n-1)}(1, p)). \quad (23)$$

Обращая операторные уравнения в трансформантах (22), (23), получим систему операторных уравнений в оригиналах, которая является системой интегральных уравнений Фредгольма (ИУФ) 1-го рода:

$$\int_0^1 (\delta\bar{k}^{(n-1)} R_{11}(z, \tau) + \delta\bar{c}^{(n-1)} R_{12}(z, \tau)) dz = f_I(\tau) - W_I^{(n-1)}(1, \tau), \quad \tau \in [a_1, b_1], \quad (24)$$

$$\int_0^1 (\delta\bar{k}^{(n-1)} R_{21}(z, \tau) + \delta\bar{c}^{(n-1)} R_{22}(z, \tau)) dz = f_{II}(\tau) - W_{II}^{(n-1)}(1, \tau), \quad \tau \in [a_2, b_2]. \quad (25)$$

Здесь ядра (24), (25) имеют вид

$$R_{11}(z, \tau) = \frac{1}{\beta} \int_0^\tau \left(\frac{\partial W_I^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial z} + 2 \frac{\partial^2 W_I^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial z \partial \tau} + \frac{\partial^3 W_I^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial z \partial \tau^2} \right) \times \frac{\partial W_I^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1)}{\partial z} d\tau_1,$$

$$R_{12}(z, \tau) = \frac{1}{\beta} \int_0^\tau \left(W_I^{(n-1)}(z, \tau_1) + 2 \frac{\partial W_I^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 W_I^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial \tau^2} \right) \times \frac{\partial W_I^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1)}{\partial \tau} d\tau_1,$$

$$R_{21}(z, \tau) = \frac{1}{\beta} \int_0^\tau \frac{\partial^2 W_{II}^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial z \partial \tau} \frac{\partial W_{II}^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1)}{\partial z} d\tau_1,$$

$$R_{22}(z, \tau) = \frac{1}{\beta} \int_0^\tau \frac{\partial W_{II}^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial \tau} \frac{\partial W_{II}^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1)}{\partial \tau} d\tau_1.$$



2. Пусть $\bar{c}(z)$ известна. Необходимо определить $\bar{k}(z)$ и $\bar{\gamma}(z)$.

В этом случае, полагая в (20), (21) $\delta\bar{c}^{(n-1)} = 0$, после обращения трансформант получим систему операторных уравнений в оригиналах для нахождения поправок $\delta\bar{k}^{(n-1)}$, $\delta\bar{\gamma}^{(n-1)}$:

$$\int_0^1 (\delta\bar{k}^{(n-1)} M_{11}(z, \tau) + \delta\bar{\gamma}^{(n-1)} M_{12}(z, \tau)) dz = f_I(\tau) - W_I^{(n-1)}(1, \tau), \quad \tau \in [a_1, b_1], \quad (26)$$

$$\int_0^1 (\delta\bar{k}^{(n-1)} M_{21}(z, \tau) + \delta\bar{\gamma}^{(n-1)} M_{22}(z, \tau)) dz = f_{II}(\tau) - W_{II}^{(n-1)}(1, \tau), \quad \tau \in [a_2, b_2]. \quad (27)$$

Здесь ядра (26), (27) имеют вид

$$\begin{aligned} M_{11}(z, \tau) &= R_{11}(z, \tau), \quad M_{21}(z, \tau) = R_{21}(z, \tau), \\ M_{12}(z, \tau) &= \frac{\delta_0}{\beta} \int_0^\tau \left(W_I^{(n-1)}(z, \tau_1) + 2 \frac{\partial W_I^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 W_I^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial \tau^2} \right) \times \\ &\quad \times \frac{\partial^2 U_I^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1)}{\partial z \partial \tau} d\tau_1, \\ M_{22}(z, \tau) &= \frac{\delta_0}{\beta} \int_0^\tau \frac{\partial W_{II}^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial \tau} \frac{\partial^2 U_{II}^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1)}{\partial z \partial \tau} d\tau_1. \end{aligned}$$

На основе системы операторных уравнений вида (24)–(27) можно организовать итерационный процесс для определения искомых характеристик.

Итерационный процесс стартует с выбора начальных приближений двух функций, которые определяются в классе линейных функций $\bar{a}_1^{(0)} = m_1 + m_2 z$, $\bar{a}_2^{(0)} = m_3 + m_4 z$ на основе минимизации функционала невязки

$$J = \int_{a_1}^{b_1} (f_I(\tau) - W_I(1, \tau))^2 d\tau + \int_{a_2}^{b_2} (f_{II}(\tau) - W_{II}(1, \tau))^2 d\tau, \quad (28)$$

на двух множествах A_1 и A_2 , построенных по априорной информации об ограниченности искомых функций $0 < a_1^- \leq \bar{a}_1(z) \leq a_1^+$, $0 < a_2^- \leq \bar{a}_2(z) \leq a_2^+$, $z \in [0, 1]$. Здесь $W_I(1, \tau)$ и $W_{II}(1, \tau)$ — решения задач 1 и 2 в точке $z = 1$ при заданных законах $\bar{a}_1^{(0)}$, $\bar{a}_2^{(0)}$, где параметры m_1, m_2, m_3, m_4 выбраны из соответствующих множеств A_1 и A_2 . Численная реализация этого подхода осуществляется путем замены интегральных операторов в правой части (28) на конечные суммы, вычислением их значений для каждого набора точек на сетках разбиений множеств A_1 и A_2 и выбором точек, на котором достигается наименьшее значение функционала J .

Далее осуществляется корректировка текущих законов изменения термомеханической характеристики путем нахождения двух поправок $\delta\bar{a}_1^{(n-1)}$, $\delta\bar{a}_2^{(n-1)}$ из решения соответствующих систем ИУФ 1-го рода. После нахождения поправок строятся новые приближения $\bar{a}_1^{(n)} = \bar{a}_1^{(n-1)} + \delta\bar{a}_1^{(n-1)}$, $\bar{a}_2^{(n)} = \bar{a}_2^{(n-1)} + \delta\bar{a}_2^{(n-1)}$. Далее процесс замыкается и повторяется до тех пор, пока не будет достигнуто условие остановки: достижения некоторого порогового значения функционала невязки (28), равного 10^{-4} , или достижения предельного количества итераций, равного 20.



При этом следует отметить, что основная сложность реализации этого процесса состоит в построении численного решения систем ИУФ 1-го рода. Поскольку решение системы ИУФ 1-го рода является некорректной задачей, то для его регуляризации применяется метод А. Н. Тихонова [16]. Для этого вводится равномерное разбиение отрезка $[0, 1]$ на n отрезков точками $z_j = \Delta z (j - 1)$, $j = 1 \dots n$, где $\Delta z = \frac{1}{n-1}$ — шаг разбиения по безразмерной координате и равномерное разбиение безразмерных временных отрезков $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$ на m отрезков точками $\tau_{1i} = \Delta \tau_1 (i - 1)$, $\tau_{2i} = \Delta \tau_2 (i - 1)$, $i = 1 \dots m$, где $\Delta \tau_1 = \frac{b_1 - a_1}{m-1}$, $\Delta \tau_2 = \frac{b_2 - a_2}{m-1}$ — шаги разбиения по безразмерному времени.

Согласно методу Тихонова решение обратной задачи сводится к решению регуляризованной системы уравнений:

$$B_\alpha y = F_\alpha, \tag{29}$$

где $B_\alpha = B + \alpha C$, $B = A^T A$, $F_\alpha = A^T b$, A^T — транспонированная матрица A , $C = E + C_0$, E — единичная матрица, α — параметр регуляризации, который выбирается по обобщенной невязке согласно [16].

При этом компоненты векторов y , b и матрицы A имеют вид

$$y_j = \begin{cases} \bar{a}_1(z_j), & j = 1 \dots n, \\ \bar{a}_2(z_{j-n}), & j = n + 1 \dots 2n, \end{cases} \quad b_i = \begin{cases} f_I(\tau_i), & i = 1 \dots m, \\ f_{II}(\tau_{i-m}), & i = m + 1 \dots 2m, \end{cases}$$

$$A_{ij} = \begin{cases} R_{11}(z_j, \tau_i), & i = 1 \dots m, j = 1 \dots n, \\ R_{12}(z_{j-n}, \tau_i), & i = 1 \dots m, j = n + 1 \dots 2n, \\ R_{21}(z_j, \tau_{i-m}), & i = m + 1 \dots 2m, j = 1 \dots n, \\ R_{22}(z_{j-n}, \tau_{i-m}), & i = m + 1 \dots 2m, j = n + 1 \dots 2n, \end{cases}$$

C_0 — матрица размером $2n \times 2n$, которая имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta z^2} & -\frac{1}{\Delta z^2} & 0 \dots & 0 \\ -\frac{1}{\Delta z^2} & \frac{1}{\Delta z^2} & -\frac{1}{\Delta z^2} \dots & 0 \\ \dots & \dots & \frac{1}{\Delta z^2} & -\frac{1}{\Delta z^2} \\ \dots & \dots & -\frac{1}{\Delta z^2} & \frac{1}{\Delta z^2} \end{pmatrix}.$$

4. Результаты вычислительных экспериментов

В данном разделе представлены результаты вычислительных экспериментов по одновременной реконструкции двух теплофизических характеристик в классах степенных, логарифмических, тригонометрических и экспоненциальных функций. В вычислениях принято $\beta = 1$, $n = 31$.

Найдены наиболее информативные интервалы для измерения входной информации. В случае тепловой торцевой нагрузки, соответствующей 1-й постановке задачи, наиболее информативным является отрезок $[a_1, b_1] = [0.04, 0.72]$, а при 2-й постановке задачи — отрезок $[a_2, b_2] = [0.03, 0.48]$. Съём дополнительной информации происходил в 11 точках (параметр $m = 11$) внутри выбранных информативных отрезков.

На рис. 4–7 представлены результаты реконструкции пар теплофизических характеристик ($\bar{c}(z)$ и $\bar{k}(z)$), ($k(z)$ и $\bar{\gamma}(z)$). При этом сплошной линией изображен точный закон неоднородности, точками — восстановленный.

В первой серии экспериментов восстанавливалась пара функций $\bar{c}(z)$, $\bar{k}(z)$ при известных $\bar{\gamma}(z) = \bar{E}(z) = 1 + 2z$ и $\delta_0 = 0.03$.

Сначала были проведены эксперименты по одновременной реконструкции двух характеристик, имеющих монотонно возрастающие законы неоднородности: $\bar{k}(z) = 1 - 0.5(z - 1)^2$, $\bar{c}(z) = 0.5(1 + z^2)$ (рис. 4). Начальные приближения коэффициентов:



$\bar{k}_0(z) = 0.45 + 0.5z$, $\bar{c}_0(z) = 0.5 + 0.45z$. Потребовалось 16 итераций; максимальная погрешность восстановления двух функций не превысила 6%.

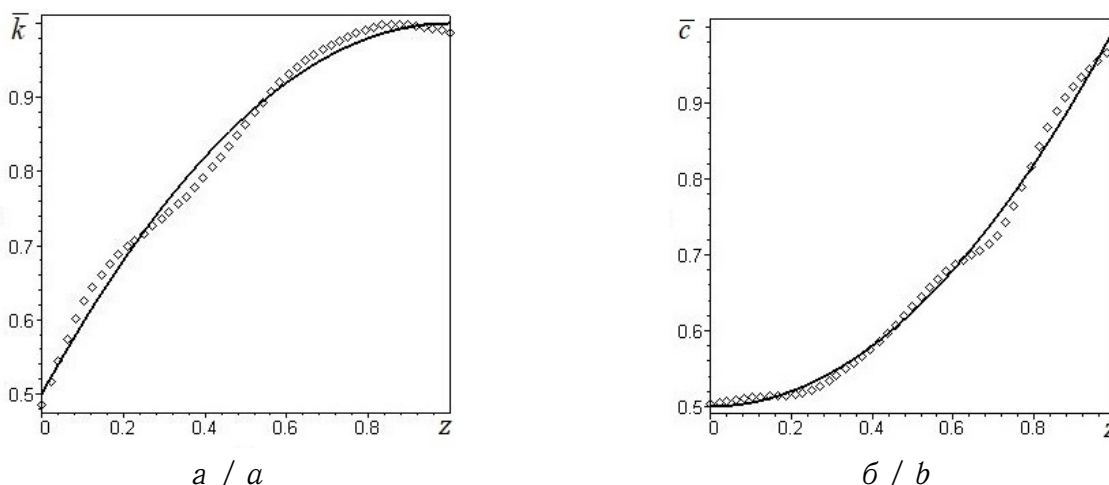


Рис. 4. Результаты реконструкции возрастающих функций: $a - \bar{k}(z) = 1 - 0.5(z - 1)^2$;
 $b - \bar{c}(z) = 0.5(1 + z^2)$
 Fig. 4. Results of reconstruction of increasing functions: $a - \bar{k}(z) = 1 - 0.5(z - 1)^2$;
 $b - \bar{c}(z) = 0.5(1 + z^2)$

Затем были проведены эксперименты по одновременной реконструкции двух характеристик, имеющих монотонно убывающие законы неоднородности: $\bar{k}(z) = 1 + 0.5 \cos(3z)$, $\bar{c}(z) = 1.2 \cos(z)$ (рис. 5). Начальные приближения коэффициентов: $\bar{k}_0(z) = 1.45 - 0.9z$, $\bar{c}_0(z) = 1.25 - 0.6z$. Потребовалось 14 итераций; максимальная погрешность восстановления двух функций не превысила 5%.

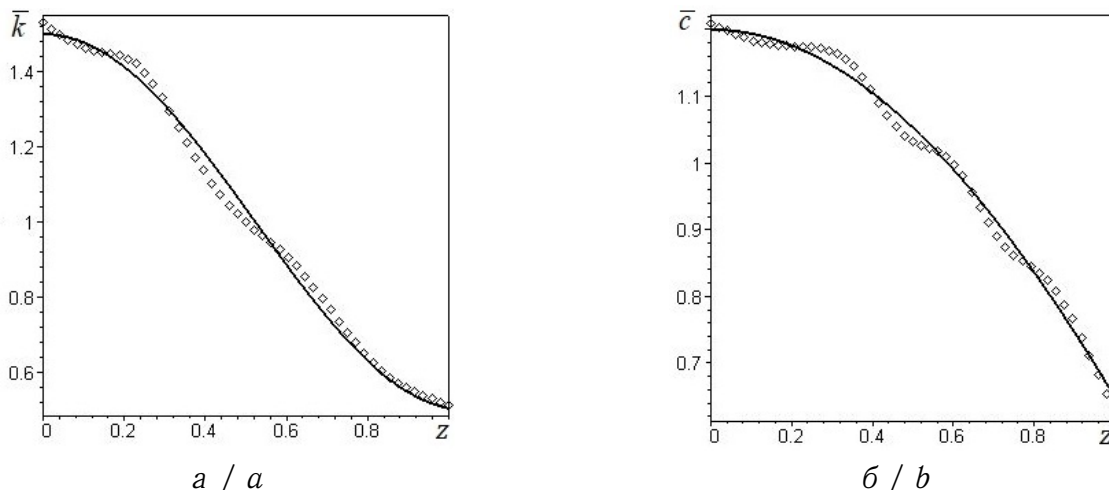


Рис. 5. Результаты реконструкции убывающих функций: $a - \bar{k}(z) = 1 + 0.5 \cos(3z)$;
 $b - \bar{c}(z) = \cos(z)$
 Fig. 5. The results of the reconstruction of decreasing functions: $a - \bar{k}(z) = 1 + 0.5 \cos(3z)$;
 $b - \bar{c}(z) = \cos(z)$

Во второй серии экспериментов восстанавливалась пара функций $\bar{k}(z)$ и $\bar{\gamma}(z)$ при известных $\bar{c}(z) = \bar{E}(z) = 1 + 2z$. При этом одновременная реконструкция $\bar{k}(z)$ и $\bar{\gamma}(z)$ оказалась возможной только при параметре связанности $\delta_0 \geq 0.2$.



На рис. 6 показаны результаты вычислительных экспериментов по одновременной реконструкции двух теплофизических характеристик, имеющих монотонно возрастающие законы неоднородности: $\bar{k}(z) = 1 + 0.2e^{2z}$, $\bar{\gamma}(z) = 1 + \sqrt{2z}$ при $\delta_0 = 0.4$. Начальные приближения коэффициентов: $\bar{k}_0(z) = 1.2 + 1.25z$, $\bar{\gamma}_0(z) = 1 + 1.45z$. Выход из итерационного процесса произошел по предельному количеству итераций. При этом на последней итерации максимальная погрешность восстановления двух функций не превысила 8%.

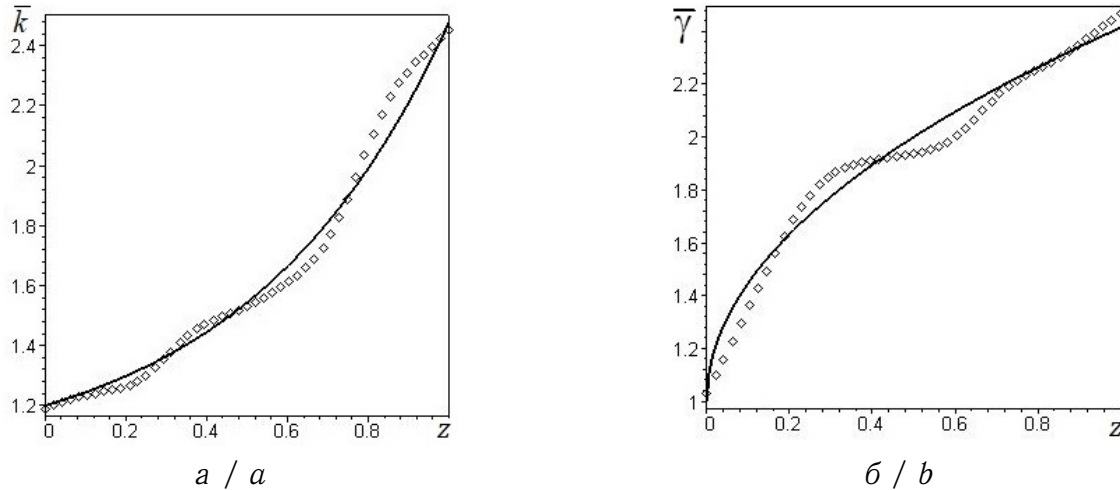


Рис. 6. Результаты реконструкции возрастающих функций: $a - \bar{k}(z) = 1 + 0.2e^{2z}$;
 $b - \bar{\gamma}(z) = 1 + \sqrt{2z}$

Fig. 6. Results of reconstruction of increasing functions: $a - \bar{k}(z) = 1 + 0.2e^{2z}$;
 $b - \bar{\gamma}(z) = 1 + \sqrt{2z}$

На рис. 7 показаны результаты вычислительных экспериментов по одновременной реконструкции двух теплофизических характеристик, имеющих монотонно убывающие законы неоднородности: $\bar{k}(z) = 1 + e^{-4z}$, $\bar{\gamma}(z) = 2 - \ln(1 + 5z)$ при $\delta_0 = 0.4$. Начальные приближения коэффициентов: $\bar{k}^{(0)}(z) = 2 - 0.9z$, $\bar{\gamma}_0(z) = 2.1 - 1.85z$.

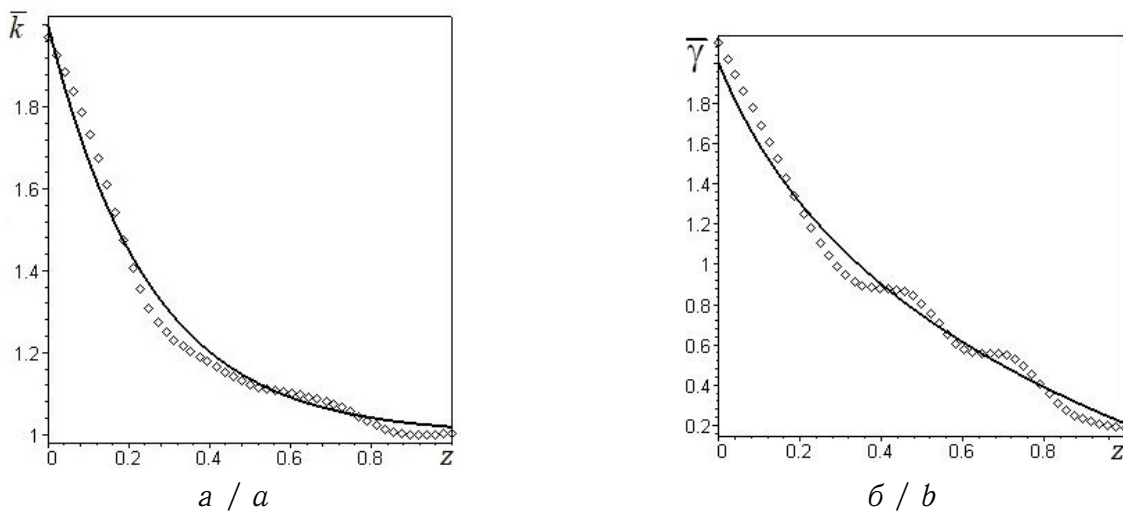


Рис. 7. Результаты реконструкции убывающих функций: $a - \bar{k}(z) = 1 + e^{-4z}$;
 $b - \bar{\gamma}(z) = 2 - \ln(1 + 5z)$

Fig. 7. The results of the reconstruction of decreasing functions: $a - \bar{k}(z) = 1 + e^{-4z}$;
 $b - \bar{\gamma}(z) = 2 - \ln(1 + 5z)$



Максимальная погрешность восстановления двух функций на 20-й итерации не превысила 7%.

Заключение

Исследована обратная задача об одновременной идентификации двух термомеханических характеристик функционально-градиентного стержня по дополнительной информации, полученной в результате проведения двух вычислительных экспериментов с различным типом торцевой нагрузки. Прямые задачи после обезразмеривания и преобразования Лапласа решались с использованием метода пристрелки и обращения трансформант на основе разложения оригинала в ряд по смещенным многочленам Лежандра. Для нахождения двух поправок термомеханических характеристик в итерационном процессе получена система интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. В ходе вычислительных экспериментов выяснено, что: 1) на результат реконструкции пары функций ($\bar{c}(z)$ и $\bar{k}(z)$) величина параметра связанности δ_0 оказывает небольшое влияние, в то же время успешная реконструкция пары ($\bar{k}(z)$ и $\bar{\gamma}(z)$) возможна только при $\delta_0 \geq 0.2$; 2) пары функций $\bar{c}(z)$ и $\bar{k}(z)$ восстанавливаются с меньшей погрешностью (не превышающей 6%), чем пары $\bar{k}(z)$ и $\bar{\gamma}(z)$.

Список литературы

1. Birman V., Byrd L. W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // Applied Mechanics Reviews. 2007. Vol. 60, iss. 5. P. 195–216. <https://doi.org/10.1115/1.2777164>
2. Ломазов В. А. Задачи диагностики неоднородных термоупругих сред. Орел : Изд-во ОрелГТУ, 2002. 168 с.
3. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. Москва : Наука, 1988. 288 с.
4. Razzaghi H., Kowsary F., Ashjaee M. Derivation and application of the adjoint method for estimation of both spatially and temporally varying convective heat transfer coefficient // Applied Thermal Engineering. 2019. Vol. 154. P. 63–75. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2019.03.068>
5. Raudensky M., Woodbary K. A., Kral J. Genetic algorithm in solution of inverse heat conduction problems // Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals. 1995. Vol. 28, iss. 3. P. 293–306. <https://doi.org/10.1080/10407799508928835>
6. Dulikravich G. S., Reddy S. R., Pasqualetto M. A., Colaco M. J., Orlande H. R., Coverston J. Inverse determination of spatially varying material coefficients in solid objects // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2016. Vol. 24. P. 181–194. <https://doi.org/10.1515/jiip-2015-0057>
7. Cao K., Lesnic D. Determination of space-dependent coefficients from temperature measurements using the conjugate gradient method // Numerical Methods for Partial Differential Equations. 2018. Vol. 34, iss. 4. P. 1370–1400. <https://doi.org/10.1002/num.22262>
8. Helmig T., Al-Sibai F., Kneer R. Estimating sensor number and spacing for inverse calculation of thermal boundary conditions using the conjugate gradient method // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2020. Vol. 153. Art. 119638. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.119638>
9. Geymonat G., Pagano S. Identification of mechanical properties by displacement field measurement: A variational approach // Meccanica. 2003. Vol. 38. P. 535–545. <https://doi.org/10.1023/A:1024766911435>
10. Grediac M., Hild F., Pineau A. Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics. Great Britain : Wiley-ISTE, 2013. 485 p. <https://doi.org/10.1002/9781118578469>



11. Avril S., Pierron F. General framework for the identification of constitutive parameters from full-field measurements in linear elasticity // *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44, iss. 14–15. P. 4978–5002. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.12.018>
12. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Коэффициентные обратные задачи термомеханики. Ростов-на-Дону ; Таганрог : Изд-во Южного федерального ун-та, 2019. 146 с.
13. Dudarev V. V., Vatulyan A. O., Mnukhin R. M., Nedin R. D. Concerning an approach to identifying the Lamé parameters of an elastic functionally graded cylinder // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020. Vol. 43, iss. 11. P. 6861–6870. <https://doi.org/10.1002/mma.6428>
14. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // *International Journal of Solids and Structures*. 2014. Vol. 51, iss. 3. P. 767–773. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.11.003>
15. Ватульян А. О., Нестеров С. А. О задаче идентификации термомеханических характеристик конечного функционально-градиентного цилиндра // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 35–47. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-35-47>
16. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. Москва : Наука, 1990. 230 с.

References

1. Birman V., Byrd L. W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Applied Mechanics Reviews*, 2007, vol. 60, iss. 5, pp. 195–216. <https://doi.org/10.1115/1.2777164>
2. Lomazov V. A. *Zadachi diagnostiki neodnorodnykh termouprugikh sred* [Diagnostics Problems for Inhomogeneous Thermoelastic Media]. Orel, OrelGTU Publ., 2002. 168 p. (in Russian).
3. Alifanov O. M., Artyukhin E. A., Rumyantsev S. V. *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Extreme Methods of Solving Ill-posed Problems]. Moscow, Nauka, 1988. 288 p. (in Russian).
4. Razzaghi H., Kowsary F., Ashjaee M. Derivation and application of the adjoint method for estimation of both spatially and temporally varying convective heat transfer coefficient. *Applied Thermal Engineering*, 2019, vol. 154, pp. 63–75. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2019.03.068>
5. Raudensky M., Woodbary K. A., Kral J. Genetic algorithm in solution of inverse heat conduction problems. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 1995, vol. 28, iss. 3, pp. 293–306. <https://doi.org/10.1080/10407799508928835>
6. Dulikravich G. S., Reddy S. R., Pasqualetto M. A., Colaco M. J., Orlande H. R., Coverston J. Inverse determination of spatially varying material coefficients in solid objects. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 2016, vol. 24, pp. 181–194. <https://doi.org/10.1515/jiip-2015-0057>
7. Cao K., Lesnic D. Determination of space-dependent coefficients from temperature measurements using the conjugate gradient method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2018, vol. 34, iss. 4, pp. 1370–1400. <https://doi.org/10.1002/num.22262>
8. Helmig T., Al-Sibai F., Kneer R. Estimating sensor number and spacing for inverse calculation of thermal boundary conditions using the conjugate gradient method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2020, vol. 153, Art. 119638. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.119638>
9. Geymonat G., Pagano S. Identification of mechanical properties by displacement field measurement: A variational approach. *Meccanica*, 2003, vol. 38, pp. 535–545. <https://doi.org/10.1023/A:1024766911435>
10. Grediac M., Hild F., Pineau A. *Full-Field Measurements and Identification in Solid Me-*



- chanics. Great Britain, Wiley-ISTE, 2013. 485 p. <https://doi.org/10.1002/9781118578469>
11. Avril S., Pierron F. General framework for the identification of constitutive parameters from full-field measurements in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, vol. 44, iss. 14–15, pp. 4978–5002. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.12.018>
 12. Vatulyan A. O., Nesterov S. A. *Koeffitsiyentnye obratnye zadachi termomekhaniki* [Coefficient Inverse Problems of Thermomechanics]. Rostov-on-Don, Taganrog, Southern Federal University Publ., 2019. 146 p. (in Russian).
 13. Dudarev V. V., Vatulyan A. O., Mnukhin R. M., Nedin R. D. Concerning an approach to identifying the Lamé parameters of an elastic functionally graded cylinder. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2020, vol. 43, iss. 11, pp. 6861–6870. <https://doi.org/10.1002/mma.6428>
 14. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, iss. 3, pp. 767–773. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.11.003>
 15. Vatulyan A. O., Nesterov S. A. On the identification problem of the thermomechanical characteristics of the finite functionally graded cylinder. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 35–47 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-35-47>
 16. Tikhonov A. N., Goncharskiy A. V., Stepanov V V., Yagola A. G. *Chislennye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Numerical Methods for Solving Ill-Posed Problems]. Moscow, Nauka, 1990. 230 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 25.12.2021

Принята к публикации / Accepted 02.02.2022

Опубликована / Published 31.05.2022



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 196–204

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 196–204

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-196-204>

Article

Generalized model of nonlinear elastic foundation and longitudinal waves in cylindrical shells

A. I. Zemlyanukhin, A. V. Bochkarev[✉], A. V. Ratushny, A. V. Chernenko

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia

Aleksandr I. Zemlyanukhin, azemlyanukhin@mail.ru, <https://orcid.org/000-0002-4379-8310>, AuthorID: 13616

Andrey V. Bochkarev, ab2009sar@list.ru, <https://orcid.org/000-0001-9088-9234>, AuthorID: 10662

Aleksandr V. Ratushny, sania.ratushnyy@gmail.com, AuthorID: 1122561

Aleksandr V. Chernenko, 3chav@mail.ru, AuthorID: 819753

Abstract. A non-integrable quasi-hyperbolic sixth-order equation is derived that simulates the axisymmetric propagation of longitudinal waves along the generatrix of a cylindrical Kirchhoff–Love shell interacting with a nonlinear elastic medium. A six-parameter generalized model of a nonlinear elastic medium, which is reduced in particular cases to the models of Winkler, Pasternak, and Hetenyi, is introduced into consideration. The equation was derived by the asymptotic multiscale expansions method under the assumption that the dimensionless parameters of nonlinearity, dispersion, and thinness have the same order of smallness. The use of the introduced model made it possible to reveal additional high-frequency and low-frequency dispersions characterizing the response of the external environment to bending and shear. It is shown that non-classical shell theories should be used to reveal nonlinear effects that compensate for dispersion. It was found that the Pasternak model admits a “dispersionless” state when the dispersion due to the inertia of normal displacement is compensated by the dispersion generated by the reaction of the nonlinear elastic foundation to shear.

Keywords: cylindrical shell, axisymmetric waves, nonlinear elastic foundation, high-frequency dispersion, asymptotic integration

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20-01-00123).

For citation: Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V., Ratushny A. V., Chernenko A. V. Generalized model of nonlinear elastic foundation and longitudinal waves in cylindrical shells. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 196–204. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-196-204>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Научная статья
УДК 534.1,517.95

Обобщенная модель нелинейно-упругого основания и продольные волны в цилиндрических оболочках

А. И. Землянухин, А. В. Бочкарев[✉], А. В. Ратушный, А. В. Черненко

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77

Землянухин Александр Исаевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики, azemlyanukhin@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4379-8310>, AuthorID: 13616

Бочкарев Андрей Владимирович, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики, ab2009sar@list.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9088-9234>, AuthorID: 10662

Ратушный Александр Васильевич, аспирант кафедры информационной безопасности автоматизированных систем, sania.ratushnyy@gmail.com, AuthorID: 1122561

Черненко Александр Викторович, аспирант кафедры информационной безопасности автоматизированных систем, zchav@mail.ru, AuthorID: 819753

Аннотация. Выведено неинтегрируемое квазигиперболическое уравнение шестого порядка, моделирующее осесимметричное распространение продольных волн вдоль образующей цилиндрической оболочки Кирхгофа – Лява, взаимодействующей с нелинейно-упругой средой. Введена в рассмотрение шестипараметрическая обобщенная модель нелинейно-упругой среды, сводящаяся в частных случаях к моделям Винклера, Пастернака и Хетеньи. Вывод уравнения осуществлен асимптотическим методом многих масштабов в предположении, что безразмерные параметры нелинейности, дисперсии и тонкостенности имеют одинаковый порядок малости. Использование введенной модели позволило выявить дополнительные высокочастотные и низкочастотную дисперсии, характеризующие реакцию внешней среды на изгиб и сдвиг. Показано, что для выявления нелинейных эффектов, компенсирующих дисперсию, необходимо использовать неклассические теории оболочек. Установлено, что модель Пастернака допускает «бездисперсионное» состояние, когда дисперсия, обусловленная инерцией нормального перемещения, компенсируется дисперсией, порождаемой реакцией нелинейно-упругого основания на сдвиг.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, осесимметричные волны, нелинейно-упругое основание, высокочастотная дисперсия, асимптотическое интегрирование

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00123).

Для цитирования: Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V., Ratushny A. V., Chernenko A. V. Generalized model of nonlinear elastic foundation and longitudinal waves in cylindrical shells [Землянухин А. И., Бочкарев А. В., Ратушный А. В., Черненко А. В. Обобщенная модель нелинейно-упругого основания и продольные волны в цилиндрических оболочках] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 196–204. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-196-204>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

The need to study and take into account the influence of an elastic foundation on the statics and dynamics of deformable systems was realized more than a hundred years ago from an analysis of the problems put forward by construction practice. The theoretical



foundations for modeling the interaction of structures with an elastic foundation are contained in [1–5]. In the monograph [6], published in 1960 and has already become a classic, a wide class of problems on the refinement of the calculation schemes of the foundation and the development of simplified methods for calculating structures on an elastic foundation were solved. In recent decades, numerous results have been obtained, indicating that the interaction with the surrounding elastic (nonlinear-elastic) medium must be taken into account when studying the static and dynamic stability of structures [7–9]. The procedure for the formal construction of elastic foundation models is described in [10]. An extensive bibliography is given in the review [11] of theoretical models of elastic and viscoelastic foundations used in the analysis of oscillatory systems. The review [12] discusses the importance of using the Winkler base model in problems of adhesive mechanics and “soft matter”. When solving problems of nonlinear wave dynamics of deformable systems, taking into account the influence of an external elastic medium leads to a complication of mathematical models, but allows one to identify new effects that are used in acoustic diagnostics and non-destructive testing of materials. In [13, 14], in a linear formulation, edge bending waves in a Kirchhoff plate interacting with the elastic foundations of Winkler and Pasternak were investigated. In [15], the features of localization in a Bernoulli – Euler beam on an inhomogeneous elastic foundation are analyzed. It is shown that the existence of a localized solution to the dynamic problem caused by the weakening of the stiffness of the foundation leads to a local loss of stability in statics. The phenomenon of localization of nonlinear waves in elastic bodies with inclusions is studied in [16]. It has been established that the cubic nonlinearity of the elastic foundation does not eliminate the localization phenomena and does not distort the shapes of localized waves, but leads to the dependence of the frequency of oscillations of the localized wave on the amplitude. In [17], the dispersion and spatial localization of flexural waves in a Timoshenko beam lying on a nonlinear elastic foundation were investigated. Localized longitudinal and flexural waves in a rod interacting with a nonlinear elastic medium are considered in [18]. In [19], as a result of an analysis of an axisymmetric wave process in a cylindrical Kirchhoff – Love shell, it was shown that for the existence of exact solitary wave solutions and the development of modulation instability, a soft type of nonlinearity of the external elastic medium is required. A generalization of the Winkler model, taking into account the reaction of the base in the longitudinal direction, was introduced in [20]. In the same place, for longitudinal waves in a reinforced cylindrical shell, the generalized Shamel – Ostrovsky equation is derived, and solitary wave, periodic and compact solutions are constructed [21].

This article, devoted to the derivation and analysis of an equation that simulates the axisymmetric propagation of longitudinal waves in a cylindrical shell interacting with an external nonlinear elastic medium, is organized as follows. In the first section, a nonlinear quasi-hyperbolic equation is derived from the equations of motion of an element of the Kirchhoff – Love shell using the asymptotic method of multiscale expansions. A multiparameter model of a nonlinear elastic medium is introduced, which generalizes the classical models of Winkler, Pasternak, and Hetenyi. In the second section, we briefly analyze important special cases of the derived equation. In conclusion, the results obtained are discussed.

1. Derivation of a nonlinear quasi-hyperbolic equation

The initial object of research is the equations of motion of an element of an infinite cylindrical Kirchhoff – Love shell [22], interacting with a nonlinear elastic medium. An



axisymmetric case is considered, which ignores the dependence on the circumferential coordinate:

$$\frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial N_x}{\partial x} = -f_{u1}u, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{1}{R} N_y - \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \\ & = - \left(f_{w1}w + f_{w2}w^2 + f_{w3}w^3 - g_p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g_h \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right). \end{aligned} \tag{2}$$

The coordinate axes Ox , Oy , and Oz are directed respectively along the longitudinal axis of the shell, along the circumference of its cross-section, and along its radius towards the cross-section center. The motions of the shell's middle surface along the axes Ox and Oz are designated as u and w . The other designations shall be as follows: N_x and M_x are normal force and bending moment in the cross-section of the shell, N_y is normal force in the longitudinal section of the shell, γ is the specific gravity of the shell material, R and h are the radii of curvature of the shell and thickness of its wall, g is the gravitational acceleration; t is time; f_{w1} , f_{w2} , f_{w3} are coefficients characterizing the resistance of the external medium during its normal deformation, f_{u1} is coefficient characterizing the resistance of the external medium during its shear deformation, g_p , g_h are the coefficients of the Pasternak and Hetenyi elastic foundation models, taking into account, respectively, the shear and bending stiffnesses of the external medium layer. Thus, a generalized six-parameter model of an external nonlinearly elastic medium is introduced into consideration, which is reduced in particular cases to the models of Winkler, Pasternak, and Hetenyi. On the right-hand sides of the system (1)–(2), there are terms responsible for the influence of the external environment on the shell dynamics and are absent in the case of the classical model.

Taking into account physical relations

$$N_x = \frac{hE}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \quad N_y = \frac{hE}{1 - \mu^2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x), \quad M_x = \frac{h^3 E}{12(1 - \mu^2)} k_x, \tag{3}$$

where $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ are deformations along axes Ox and Oy , k_x is the parameter of curvature change, E and μ are Young's modulus and Poisson's ratio of the shell material, together with the equations for the connection of deformations with displacements $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$, $\varepsilon_y = -\frac{w}{R}$, $k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, we obtain the equations of motion of the shell element in displacements:

$$\frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{Eh}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\mu}{R} \right) \right) = -f_{u1}u, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(g_h + \frac{h^3 E}{12(1 - \mu^2)} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - g_p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{hE\mu}{R(1 - \mu^2)} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\mu R} w \right) - \\ & - \frac{hE}{1 - \mu^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\mu}{R} w \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] = - (f_{w1}w + f_{w2}w^2 + f_{w3}w^3). \end{aligned} \tag{5}$$

After the transition to dimensionless variables

$$U = \frac{u}{A}, \quad W = \frac{w}{h}, \quad X = \frac{x}{l}, \quad T = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma(1 - \mu^2)}} \frac{t}{l}, \tag{6}$$



where scaling factors A and l play the role of the amplitude of longitudinal displacement and the characteristic wavelength of the disturbance, respectively, in the system of equations (4), (5) dimensionless combinations of parameters $\frac{A}{l}$, $\sqrt{\frac{hR}{l^2}}$ and $\frac{h}{R}$ are revealed, which characterize the nonlinearity of the wave process, its dispersion and the thinness of the shell. We will consider the case when the parameters of nonlinearity, dispersion, and thinness are of the same order of smallness:

$$\frac{A}{l} = \sqrt{\frac{hR}{l^2}} = \frac{h}{R} = \varepsilon \ll 1. \quad (7)$$

Thus, we consider a thin-walled shell ($h \ll R$), in which long ($R \ll l$) longitudinal ($h \ll A$) waves of small amplitude ($A \ll R$) propagate. Introducing dimensionless parameters

$$\begin{aligned} F_{u1} &= \frac{R}{E\mu^2\varepsilon^3} f_{u1}, & G_h &= \frac{1}{ER^3} g_h, & G_p &= \frac{1}{ER\varepsilon} g_p, \\ F_{w1} &= \frac{R}{E\varepsilon^2} f_{w1}, & F_{w2} &= \frac{2\mu R^2}{E\varepsilon} f_{w2}, & F_{w3} &= \frac{3\mu^2 R^3}{E} f_{w3}, \end{aligned} \quad (8)$$

we pass to the slow-time coordinate system $\xi = X - C_0T$, $\tau = \varepsilon T$. Finally, in accordance with the multiscale method, we represent the dependent variables as the sum of the main part and the small correction

$$U(\xi, \tau) = U_0(\xi, \tau) + \varepsilon U_1(\xi, \tau), \quad W(\xi, \tau) = W_0(\xi, \tau) + \varepsilon W_1(\xi, \tau). \quad (9)$$

Assuming that the new dependent variables (9), their derivatives with respect to ξ and τ , as well as dimensionless parameters (8), are of the order of unity, we group the terms in the equations in powers of the small parameter ε . Equating to zero the terms in the leading order, we obtain the system of linear equations

$$(1 - C_0^2) \frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi^2} - \mu \frac{\partial W_0}{\partial \xi} = 0, \quad (10)$$

$$-\mu \frac{\partial U_0}{\partial \xi} + W_0 = 0, \quad (11)$$

the compatibility of which requires the fulfillment of equality $W_0 = \mu \frac{\partial U_0}{\partial \xi}$, which establishes the relationship between longitudinal and transverse displacements in the linear approximation, and also condition $C_0 = \sqrt{1 - \mu^2}$, from which it follows that the perturbation propagates along the shell with a rod velocity [23].

In the next order in ε , we have the system of equations

$$\frac{\partial W_1}{\partial \xi} - \mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} = \frac{2\sqrt{1 - \mu^2}}{\mu} \frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi \partial \tau} - \mu(1 - \mu^2) F_{u1} U_0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} W_1 - \mu \frac{\partial U_1}{\partial \xi} &= -\mu(1 - \mu^2) \times \\ &\times \left(G_h \frac{\partial^5 U_0}{\partial \xi^5} - (G_p - 1) \frac{\partial^3 U_0}{\partial \xi^3} + F_{w1} \frac{\partial U_0}{\partial \xi} + \frac{1}{2} F_{w2} \left(\frac{\partial U_0}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{3} F_{w3} \left(\frac{\partial U_0}{\partial \xi} \right)^3 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Eliminating variables W_1 and U_1 from system (12), (13), we obtain

$$\frac{2}{\mu^2 \sqrt{1 - \mu^2}} \frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi \partial \tau} + G_h \frac{\partial^6 U_0}{\partial \xi^6} - (G_p - 1) \frac{\partial^4 U_0}{\partial \xi^4} +$$



$$+ \left(F_{w1} + F_{w2} \frac{\partial U_0}{\partial \xi} + F_{w3} \left(\frac{\partial U_0}{\partial \xi} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi^2} - F_{u1} U_0 = 0. \quad (14)$$

The derived equation (14) is a sixth-order nonlinear quasi-hyperbolic equation, containing, in addition to the traditional gradient-type terms, the term with the component of the desired displacement field, which characterizes the resistance of the external medium during its shear deformation. For the first time, such an additional term appeared in the already classic article by L. A. Ostrovsky [24] devoted to the study of nonlinear waves in a rotating ocean. The presence of this term, which introduces additional low-frequency dispersion into the model, significantly complicates the analytical structure of the equation and does not allow obtaining exact solitary wave and periodic solutions. The derived non-integrable equation (14) can be called the sixth order generalized Boussinesq – Ostrovsky equation.

2. Special cases of equation (14)

1. The classical model of Winkler's linear elastic medium. In this case $F_{u1} = F_{w2} = F_{w3} = G_h = G_p = 0$, and equation (14) becomes linear. This means that when studying longitudinal waves in shells, the geometric nonlinearity of the classical Kirchhoff – Love model does not affect the wave process. This conclusion is valid on a time interval of the order of $1/\varepsilon$.

2. Nonlinear-elastic Winkler – Pasternak – Hetenyi foundation ($F_{u1} = 0$). Equation (14) in this case contains three dispersion terms: to the traditional dispersion caused by the inertia of normal displacement, two additional ones are added, due to the reaction of the elastic foundation to shear and bending. With respect to the component of the longitudinal deformation $\frac{\partial U_0}{\partial \xi}$ equation (14) takes the form of the modified Kawahara equation ((14) without the last term), which has classes of exact periodic and solitary-wave solutions [25]. Here the problem of their physical realizability becomes the most important. In [26] it is rightly noted that "... many equations have solutions that are unsuitable from the point of view of common sense. For example, taking into account the higher-order dispersion leads to the fact that the group velocity of small-scale perturbations becomes greater than the phase velocity, while in the original equations the group velocity is always less than the phase velocity. In addition, such equations often have additional solutions that do not correspond to the known data on waves in the framework of equations complete in nonlinearity."

3. The bending stiffness of the external medium layer is not taken into account ($G_h = 0$). The higher-order dispersion disappears in equation (14). The result is a combination of the classical and modified Ostrovsky equations — the so-called Gardner – Ostrovsky equation

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{2}{\mu^2 \sqrt{1 - \mu^2}} \frac{\partial U_0}{\partial \tau} + (1 - G_p) \frac{\partial^3 U_0}{\partial \xi^3} + F_{w1} \frac{\partial U_0}{\partial \xi} + \frac{F_{w2}}{2} \left(\frac{\partial U_0}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{F_{w3}}{3} \left(\frac{\partial U_0}{\partial \xi} \right)^3 \right) = F_{u1} U_0. \quad (15)$$

Recently, there has been a significant increase in interest in the study of its exact and approximate solutions [27]. In this case, the external medium can be called the nonlinear elastic Pasternak medium, which, in contrast to the Winkler medium, allows one to reveal a new property of equation (14). The high-frequency dispersion coefficient can be positive, negative, or even zero, depending on the value of the coefficient G_p . In the



“dispersionless” case, the reduced Ostrovsky equation

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{2}{\mu^2 \sqrt{1 - \mu^2}} \frac{\partial U_0}{\partial \tau} + F_{w1} \frac{\partial U_0}{\partial \xi} + \frac{F_{w2}}{2} \left(\frac{\partial U_0}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{F_{w3}}{3} \left(\frac{\partial U_0}{\partial \xi} \right)^3 \right) = F_{u1} U_0 \quad (16)$$

is obtained, which has integrable reductions and exact localized solutions [28, 29]. The possibility of “controlling” the sign of the high-frequency dispersion makes it possible to use the “antisoliton theorem” [30] and to identify regimes that allow stable propagation of soliton-like perturbations.

3. Discussion and conclusions

When studying the propagation of axisymmetric longitudinal waves in elastic thin shells on the basis of the geometrically nonlinear Kirchhoff – Love model, it is not possible to analytically describe deformation solitons. In other words, asymptotic integration of the equations of motion of a shell element does not allow one to obtain an equation of the Korteweg – de Vries type for the longitudinal deformation component. This is due to the absence in the equations of motion of terms with quadratic (so-called hydrodynamic) nonlinearity such as U_x^2 and $U_x U_{xx}$. It is obvious that the use of geometrically nonlinear equations of the classical model of the Timoshenko type for the analysis of longitudinal waves leads to similar results. Consequently, an equation containing the necessary nonlinear terms can only be obtained using nonclassical shell theories based on refined models. In this article, nonlinearity, which compensates for dispersion and contributes to the formation of soliton-like longitudinal waves, is introduced on the basis of a generalized model of a nonlinear elastic foundation. Taking into account the fact that in shells, in contrast to plates and rods, longitudinal and normal displacements are connected already in the linear approximation, both equations of motion (1)–(2) contain terms that characterize the resistance of the external medium. The introduced model in particular cases is reduced to the linear and nonlinear models of Winkler, Pasternak, and Hetenyi. The use of the Pasternak model makes it possible to control the sign in front of high-frequency dispersion and to reveal the conditions for the propagation of solitary waves. In this case, a dispersionless state becomes possible, when the dispersion due to the inertia of normal displacement is compensated by the dispersion generated by the reaction of the nonlinear elastic foundation to shear. A brief analysis of special cases of the generalized Boussinesq – Ostrovsky equation (14) showed that the choice of a nonlinear elastic foundation model has a significant effect on the resulting wave pattern, and the problem of physical realizability of the corresponding exact solutions comes to the fore.

References

1. Winkler E. *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*. Prague, Verlag von H. Dominicus, 1867. 388 S. (in German).
2. Biot M. A. Bending of an infinite beam on an elastic foundation. *Journal of Applied Mechanics*, 1937, vol. 4, no. 1, pp. A1–A7. <https://doi.org/10.1115/1.4008739>
3. Filonenko-Borodich M. Some approximate theories of elastic foundation. *Uchenye Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Mekhanika*, 1940, vol. 46, pp. 3–18 (in Russian).
4. Pasternak P. L. *On a New Method of Analysis of an Elastic Foundation by Means of Two Foundation Constants*. Moscow, Gosstroizdat, 1954. 56 p. (in Russian).
5. Hetenyi M. *Beams on Elastic Foundation: Theory with Applications in the Fields of Civil and Mechanical Engineering*. Ann Arbor, University of Michigan Press, 1958. 255 p.



6. Vlasov V. Z., Leont'ev N. N. *Beams, Plates and Shells on Elastic Foundations*. Jerusalem, Israel, Israel Program for Scientific Translations, 1966. 357 p.
7. Thompson J. M. T. Advances in shell buckling: Theory and experiments. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2015, vol. 25, no. 1, Art. 1530001. <https://doi.org/10.1142/S0218127415300013>
8. Hunt G. Buckling in space and time. *Nonlinear Dynamics*, 2006, vol. 43, pp. 29–46. <https://doi.org/10.1007/s11071-006-0748-8>
9. Champneys A. R., Hunt G. W., Thompson J. M. T. Localization and solitary waves in solid mechanics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 1997, vol. 355, pp. 2077–2081. <https://doi.org/10.1098/rsta.1997.0110>
10. Kerr A. D. On the formal development of elastic foundation models. *Ingenieur-Archiv*, 1984, vol. 54, no. 6, pp. 455–464. <https://doi.org/10.1007/BF00537376>
11. Younesian D., Hosseinkhani A., Askari H., Esmailzadeh E. Elastic and viscoelastic foundations: A review on linear and nonlinear vibration modeling and applications. *Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 97, pp. 853–895. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-04977-9>
12. Dillard D., Mukherjee B., Karnal P., Batra R. C., Frechette J. A review of Winkler's foundation and its profound influence on adhesion and soft matter applications. *Soft Matter*, 2018, vol. 14, pp. 3669–3683. <https://doi.org/10.1039/C7SM02062G>
13. Kaplunov J., Prikazchikov D. A., Rogerson G. A. Edge bending wave on a thin elastic plate resting on a Winkler foundation. *Proceedings of the Royal Society A*, 2016, vol. 472, Art. 20160178. <https://doi.org/10.1098/rspa.2016.0178>
14. Kaplunov J., Nobili A. The edge waves on a Kirchhoff plate bilaterally supported by a two-parameter elastic foundation. *Journal of Vibration and Control*, 2017, vol. 23, no. 12, pp. 2014–2022. <https://doi.org/10.1177/1077546315606838>
15. Indeitsev D. A., Kuklin T. S., Mochalova Yu. A. Localization in a Bernoulli–Euler beam on an inhomogeneous elastic foundation. *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*, 2015, vol. 48, no. 1, pp. 41–48. <https://doi.org/10.3103/S1063454115010069>
16. Indeitsev D. A., Osipova E. V. Localization of nonlinear waves in elastic bodies with inclusions. *Acoustical Physics*, 2004, vol. 50, pp. 420–426. <https://doi.org/10.1134/1.1776219>
17. Erofeev V. I., Leontieva A. V. Dispersion and spatial localization of bending waves propagating in a Timoshenko beam laying on a nonlinear elastic base. *Mechanics of Solids*, 2021, vol. 56, no. 4, pp. 443–454. <https://doi.org/10.3103/S0025654421040051>
18. Erofeev V. I., Leonteva A. V. Localized bending and longitudinal waves in rods interacting with external nonlinear elastic medium. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1348, Art. 012004. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1348/1/012004>
19. Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V. Axisymmetric nonlinear modulated waves in a cylindrical shell. *Acoustical Physics*, 2018, vol. 64, pp. 408–414. <https://doi.org/10.1134/S1063771018040139>
20. Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V., Andrianov I. V., Erofeev V. I. The Schamel–Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, vol. 491, 115752. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115752>
21. Stepanyants Y. A. On stationary solutions of the reduced Ostrovsky equation: Periodic waves, compactons and compound solitons. *Chaos, Soliton and Fractals*, 2006, vol. 28, no. 1, pp. 193–204. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.05.020>
22. Volmir A. *The Nonlinear Dynamics of Plates and Shells*. Foreign Tech. Div., Wright-Patterson AFB, 1974. 450 p.
23. Bochkarev A. V., Zemlyanukhin A. I., Mogilevich L. I. Solitary waves in an inhomogeneous cylindrical shell interacting with an elastic medium. *Acoustical Physics*, 2017, vol. 63, pp. 148–153. <https://doi.org/10.1134/S1063771017020026>
24. Ostrovsky L. A. Nonlinear internal waves in a rotating ocean. *Okeanologia*, 1978, vol. 18, no. 2, pp. 181–191.



25. Conte R., Musette M. *The Painlevé Handbook*. Springer, Berlin, 2008. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8491-1>
26. Pelinovsky E. N., Didenkulova (Shurgalina) E. G., Talipova T. G., Tobish E., Orlov Yu. F., Zen'kovich A. V. Korteweg–de Vries type equations in applications. *Transactions of NNSTU n.a. R. E. Alekseev*, 2018, no. 4, pp. 41–47 (in Russian). https://doi.org/10.46960/1816-210X_2018_4_41
27. Obregon M. A., Stepanyants Yu. A. On numerical solution of the Gardner – Ostrovsky equation. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2012, vol. 7, no. 2, pp. 113–130. <https://doi.org/10.1051/mmnp/20127210>
28. Stepanyants Yu. A. Nonlinear waves in a rotating ocean (The Ostrovsky equation and its generalizations and applications). *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 2020, vol. 56, pp. 16–32. <https://doi.org/10.1134/S0001433820010077>
29. Grimshaw R. H. J., Helfrich K., Johnson E. R. The reduced Ostrovsky equation: Integrability and breaking. *Studies in Applied Mathematics*, 2012, vol. 129, no. 4, pp. 414–436. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9590.2012.00560.x>
30. Galkin V. N., Stepanyants Yu. A. On the existence of stationary solitary waves in a rotating fluid. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1991, vol. 55, iss. 6, pp. 939–943. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(91\)90148-N](https://doi.org/10.1016/0021-8928(91)90148-N)

Поступила в редакцию / Received 29.11.2021

Принята к публикации / Accepted 29.12.2021

Опубликована / Published 31.05.2022



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 205–215

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 205–215

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-205-215>

Article

Generalized pseudotensor formulations of the Stokes' integral theorem

Yu. N. Radayev, E. V. Murashkin✉

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, 101-1 Prospekt Vernadskogo, Moscow 119526, Russia

Yuri N. Radayev, radayev@ipmnet.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>, AuthorID: 103116

Evgenii V. Murashkin, evmurashkin@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>, AuthorID: 129570

Abstract. Oriented continua play an important role in micropolar elasticity modelling. All realizations of micropolar theories are conceptually possible only within the framework of the pseudotensor formalism and the orientable manifold notion. This particularly concerns the theory of micropolar hemitropic elastic media. In this paper, a pseudotensor description is used in contrast to Kartan's formalism. The pseudotensor formulation of Stokes' integral theorem is almost unknown in the current scientific literature. Here we consider various formulations of Stokes' integral theorem for an arbitrary asymmetric covariant pseudotensor field of a given weight and valency. This extends the theorem to the case of pseudotensors. This fact makes it possible to use the mentioned generalization for micropolar continua. The study mostly relies on the class of special coordinate systems often employed in classical physical field theories. A procedure for orientations consistency inside and on the boundary of a manifold is discussed for various formulations of Stokes' integral theorem.

Keywords: pseudotensor, fundamental orienting pseudoscalar, micropolar hemitropic continuum, M -cell, coordinate frame, Stokes' integral theorem, orientation consistency

Acknowledgements: The present study was financially supported by the state task (state registration No. AAAA-A20-120011690132-4) and with the support of the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20-01-00666).

For citation: Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Generalized pseudotensor formulations of the Stokes' integral theorem. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 205–215. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-205-215>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 517.98

Обобщенные псевдотензорные формулировки интегральной теоремы Стокса

Ю. Н. Радаев, Е. В. Мурашкин✉

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Россия, 119526, г. Москва, просп. Вернадского, д. 101, корп. 1



Радаев Юрий Николаевич, профессор, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, radayev@ipmnet.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>, AuthorID: 103116

Мурашкин Евгений Валерьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, evmurashkin@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>, AuthorID: 129570

Аннотация. Ориентируемые континуумы играют важную роль в микрополярированной теории упругости, все реализации которой возможны только в рамках псевдотензорного формализма и представления об ориентируемом многообразии. Особенно это касается теории микрополярированных гемитропных упругих сред. В настоящей статье используется псевдотензорное описание, а не формализм Картана. В литературе неизвестна псевдотензорная формулировка теоремы Стокса. Рассматриваются различные формулировки интегральной теоремы Стокса для асимметричного ковариантного псевдотензорного поля, заданного веса и валентности. Тем самым достигается распространение известной интегральной формулы Стокса на случай псевдотензоров. Последнее обстоятельство позволяет использовать указанное обобщение для микрополярированных континуумов. Исследование существенно опирается на класс специальных координатных систем. Обсуждается процедура согласования ориентаций реперов внутри и на границе многообразия для различных формулировок интегральной теоремы Стокса.

Ключевые слова: псевдотензор, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, микрополярированный гемитропный континуум, M -ячейка, репер, интегральная теорема Стокса, согласование ориентаций

Благодарности: Работа выполнена в рамках госзадания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и РФФИ (проект № 20-01-00666).

Для цитирования: *Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Generalized pseudotensor formulations of the Stokes' integral theorem [Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Обобщенные псевдотензорные формулировки интегральной теоремы Стокса] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 205–215.* <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-205-215>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Preliminary remarks

An orientable manifold [1–3] naturally appears in micropolar elasticity. In continuum mechanics, it is usually required that the continuum be immersed in an external “plane” space. This is of crucial importance for modeling the mechanical behaviour of materials with microstructure, micropolar media [4], and industrial processes of additive manufacturing [5, 6]. Special attention should be paid to the orientations consistency of elementary cell repers frames taken inside the continuum and on its boundary. It is also true for integral theorems and balance laws of non-linear continuum mechanics. The tensor elementary volume measurements lead to the employment of pseudotensor calculus and the fundamental concept of orientable manifolds [1–3, 7].

Throughout the paper, we are going to follow the terminology and notions related to multidimensional geometry presented in [3]. The requisite notations and equations for the tensor elementary volume and area can be found in monographs [1, see Appendix on Invariants by J. L. Ericksen] and [3]. Applying pseudotensor algebra to the problems of mechanics of growing solids and micropolar elasticity are discussed in the studies [5–10].

In the present paper, the problems of orientations consistency (situated inside and on the boundary) for a micropolar continuum immersed in an external plane space of a given dimension N are discussed.



After the Preliminary remarks in Sec. 1, the definitions of fundamental orienting pseudoscalar, covariant derivative, M -manifold, M -cell, and tensor elementary volume are recalled for N -dimensional space. The covariant differentiation of an arbitrary relative tensor is considered. Based on the concept of an M -cell tensor elementary volume (area), an algorithm for comparing and spatial orientations consistency of M -cells is described. Processes of continuous transfer of directions associated with an M -cell along a given path are considered.

Then, in Sec. 2 generalized pseudotensor formulations of Stokes' integral theorem are refined due to the class of special coordinate nets geometrically constrained by the equation $e^2 = \overset{[2]}{1}$ ¹.

Finally, in Sec. 3 the orientations consistency procedure for Stokes' integral theorem formulations in the case of a 2-manifold is considered and discussed. The preferable bypasses of boundary contours associated with boundary 1-cell direction for different formulations of Stokes' integral theorem are discriminated and discussed.

As a whole, the present paper should be considered as a contemporary framework for problems of Stokes' integral theorem formulations for tensors and pseudotensors fields that is important for non-linear continuum mechanics.

1. Orientation of M -manifold. Pseudotensors of integer weights. Tensor and pseudotensor elementary volume

In this study we shall not recall the definitions and properties of pseudotensors. A detailed discussion of pseudotensor algebra and analysis can be found in the tensor analysis textbooks [2, 3] and in the papers [5–10]. Hereafter, the weight of a relative tensor (pseudotensor) is embraced by square brackets situated above the root symbol. The zero weight of absolute tensors will not be noted.

Consider an N -dimensional Euclidean “plane” space supplied by a curvilinear coordinate net x^k ($k = 1, 2, \dots, N$), local covariant basis $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N$ and the metric tensor g_{ij} . A manifold (surface) of mathematical dimension M ($M \leq N$) immersed in external space is called an M -manifold. Consider two repers with different corner points x^k and \bar{x}^k and endpoints $x^k + \underset{c}{dx}^k$ and $\bar{x}^k + \underset{c}{d\bar{x}}^k$ ($c = 1, 2, \dots, M$). Then the external coordinates of the first and the second reper vectors are $\underset{c}{dx}^k$ and $\underset{c}{d\bar{x}}^k$ respectively.

Orientable manifolds are of crucial importance for the micropolar theories of continuum mechanics [4]. It is then clear that the reper orientation at a micropolar solid point is determined by an enumeration of directions. The reper orientation is changed after a permutation of two numbers of reper directions, i.e., the right-handed frame becomes left-handed. In continuum mechanics, the orientation of the coordinate frame is conveniently determined by the sign of fundamental orienting pseudoscalar e [5, 8]. In three-dimensional space, e can be defined by the triple product of the covariant basis vectors

$$e = \overset{[+1]}{e} = (\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2) \cdot \mathbf{z}_3. \quad (1)$$

Evidently, the orienting pseudoscalar (1) apart of the sign is the parallelepiped volume constituted by the vectors \mathbf{z}_a . It is easy to show that

$$e^2 = g, \quad g = \det(g_{ij}). \quad (2)$$

¹The terminology and notations worked out in [7, 9, 10] are employed throughout the paper.



It is clear that $e > 0$ ^[+1] for a right-handed coordinate net, and $e < 0$ ^[+1] for a left-handed coordinate net.

Note that the fundamental orienting pseudoscalar allows us to transform a pseudotensor of a given weight W and valency into an absolute tensor following the rule

$$\mathbf{T} = e^{-W} \mathbf{T}^{[W]} \tag{3}$$

By comparing weights on the left and right sides in (3), we conclude that \mathbf{T} is an absolute tensor. In what follows, for fundamental symbols such as e , the indication of their weights is usually omitted.

The covariant derivative of a pseudotensor $T_{ij\dots k}^{lm\dots n}$ of a given weight W is defined similarly to the corresponding operation for absolute tensors [2, 3, 8]:

$$\begin{aligned} \nabla_p T_{ij\dots k}^{lm\dots n} = & \partial_p T_{ij\dots k}^{lm\dots n} + T_{ij\dots k}^{sm\dots n} \Gamma_{sp}^l + \dots + T_{ij\dots k}^{lm\dots s} \Gamma_{ip}^s - \\ & - \Gamma_{sp}^l T_{sj\dots k}^{lm\dots n} - \dots - \Gamma_{sp}^l T_{ij\dots s}^{lm\dots n} - W T_{ij\dots k}^{lm\dots n} \Gamma_{sp}^s. \end{aligned}$$

In particular, for a pseudoscalar, the covariant derivative takes the form

$$\nabla_p T = \partial_p T - W T \Gamma_{sp}^s, \tag{4}$$

wherein

$$\Gamma_{sp}^s = \frac{\partial_p e}{e}.$$

Taking account of the Christoffel symbol properties and equation (2), we obtain an expression for the covariant derivative (4) as follows

$$\nabla_p T = \partial_p T - e^{-1} W T \partial_p e.$$

Let the differentiable M -manifold be parameterized by Gaussian (intrinsic) coordinates u^α ($\alpha = 1, 2, \dots, M$):

$$x^k = x^k(u^1, u^2, \dots, u^M) \quad (k = 1, 2, \dots, N). \tag{5}$$

In equation (5) x^k are the external coordinates for the M -manifold and u^α are the intrinsic ones.

Let us divide the M -manifold into a system of M -cells. Each M -cell is defined by a corner reper characterized by a corner point (with external coordinates x^k and intrinsic coordinates u^α) and endpoints of the reper with intrinsic coordinates

$$u^\alpha + du^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, M)$$

or external coordinates

$$x^k + dx^k \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

where the “fraktur” index \mathfrak{c} enumerates the reper directions ($\mathfrak{c} = 1, 2, \dots, M$). From the external (spatial) point of view, the reper directions are given by the absolute contravariant vectors

$$dx^k_1, dx^k_2, \dots, dx^k_M \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$



We proceed to define the operation of continuous transfer of the M -cell reper along the path Π from the point x^k to the point \bar{x}^k (Fig. 1). Consider a piecewise smooth path Π on the M -manifold linked two points x^k and \bar{x}^k . There always exists a linear transformation from one reper to another, acting according to the well-known formula

$$\bar{d}x^k = P_c^{a \cdot} dx^k, \tag{6}$$

where $P_c^{a \cdot}$ is the transfer matrix.

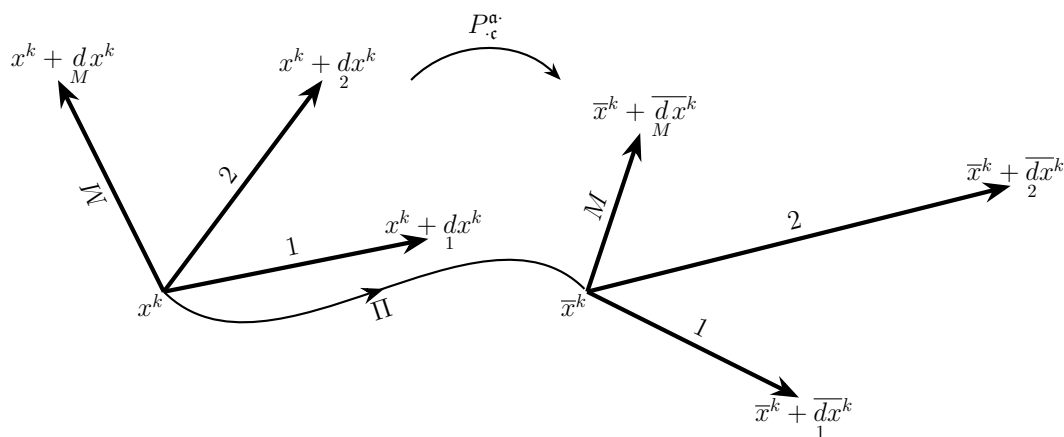


Fig. 1. Directions associated with M -cells. The comparison of orientations is due to continuous transfer along the path Π

The transfer is continuously deforming the reper from the starting point to the endpoint so that the reper directions remain linearly independent. It is assumed that the reper does not degenerate during the transfer process, i.e. the skew product of the reper vectors is never equal to zero along the path Π . The initial and final repers orientations can be then compared: if the orientation of the final reper is the same, i.e. the determinant of the transfer matrix in (6) is positive, then they are treated as co-oriented. If it is true for each pair of repers on M -manifold then the manifold is called orientable or two-sided. Contrariwise, if there exists a pair of differently oriented repers then such a M -manifold is called a non-orientable or one-sided one.

The tensor elementary volume of the M -cell is defined by

$$d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = M! dx^{i_1}_1 dx^{i_2}_2 \dots dx^{i_M}_M. \tag{7}$$

Here the square brackets denote index alternation.

By considering the following formula for the differentials of external coordinates along with the reper directions of the M -cell

$$dx^k_b = (\partial_\alpha x^k)_b du^\alpha,$$

equation (7) reads (see [3, pp. 256–257])

$$d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_M} \partial_{\alpha_1} x^{i_1} \partial_{\alpha_2} x^{i_2} \dots \partial_{\alpha_M} x^{i_M} \det(du^\gamma). \tag{8}$$

The factor before the determinant in (8) is called an intrinsic elementary volume of the M -cell. Using the concept of the intrinsic volume of the M -cell, one can propose an



algorithm that orients M -manifold (for details see [3]) if it is possible at all in the sense discussed above.

If elementary M -cells are divided by the coordinate surfaces $u^\alpha = c^\alpha$, then for the case $M = N$ we obtain

$$d\tau^{i_1 i_2 \dots i_N} = d\tau^{[-1]12\dots N} \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_N},$$

where $d\tau^{[-1]12\dots N}$ is the natural elementary volume being a pseudoscalar of weight -1 and defined as follows

$$d\tau^{[-1]12\dots N} = \det(\partial_\alpha x^k) du^1 du^2 \dots du^N = dx^1 dx^2 \dots dx^N.$$

2. A generalized pseudotensor formulation of Stokes' integral theorem

The integral transformation theorems play an important role in continuum mechanics and thermomechanics while formulating conservation laws. For a differentiable asymmetric covariant field $A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}$ one can formulate Stokes' integral theorem in the form [3, p. 269]

$$\int \partial_{i_M} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \oint_{\partial} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}, \quad (9)$$

where $d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M}$ is the tensor elementary volume of M -manifold calculated due to the intrinsic parameterization u^1, u^2, \dots, u^M whereas $d\tau^{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}$ is the tensor elementary volume of the boundary of M -manifold calculated by an intrinsic parameterization $\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \dots, \tilde{u}^{M-1}$. The operation with formula (9) implies the orientations consistency inside M -manifold and on the boundary. At this aim, we introduce a non-degenerated vector field s^k on the boundary directed outward with respect to the M -manifold. Arrange the parameterizations u^1, u^2, \dots, u^M and $\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \dots, \tilde{u}^{M-1}$ so that the corresponding systems of vectors $\partial_1 x^k, \partial_2 x^k, \dots, \partial_M x^k$ ($\partial_i = \partial/\partial u^i$) and $\tilde{\partial}_1 x^k, \tilde{\partial}_2 x^k, \dots, \tilde{\partial}_{M-1} x^k, s^k$ ($\tilde{\partial}_i = \partial/\partial \tilde{u}^i$) are co-oriented in the sense described in Sec. 1.

In previous studies [1, 2] Stokes' integral theorem is formulated as [2, p. 103]

$$\int \partial_{i_1} A_{i_2 i_3 \dots i_M} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \oint_{\partial} A_{i_2 i_3 \dots i_M} d\tau^{i_2 i_3 \dots i_M}. \quad (10)$$

Once again, arrange the parametrizations inside the M -manifold and on the boundary. In this case, the orientations consistency procedure differs from the one mentioned above by the order of vectors on the boundary of M -manifold. In such a case the vector s^k should be placed in the first position.

Note that the Stokes' theorem formulations (9) and (10) imply that the field $A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}$ may not have a tensor nature.

Stokes' theorem (9) remains valid for a pseudotensor field of a given integer weight W

$$\int \partial_{i_M} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \oint_{\partial} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}. \quad (11)$$



Invariant integral extended to an orientable M -manifold for a covariant pseudotensor field $A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]}$ of weight W can be furnished as

$$\int A_{i_1 i_2 \dots i_M}^{[W]} e^{-W} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M}. \quad (12)$$

Here we emphasize that the integral (12) is an absolute invariant.

In such a case Stokes' integral theorem (9) can be reformulated as follows

$$\int \partial_{i_M} \left(A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} e^{-W} \right) d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \oint_{\partial} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} e^{-W} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}, \quad (13)$$

where the absolute tensor field is enclosed in parentheses.

It is obvious that the integrand in (13) can be transformed according to

$$\partial_{i_M} \left(e^{-W} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} \right) = -W e^{-W} \frac{\partial_{i_M} e}{e} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} + e^{-W} \partial_{i_M} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]}. \quad (14)$$

Substituting (14) into (13) we come to

$$\begin{aligned} - \int W e^{-W} \frac{\partial_{i_M} e}{e} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} + \int e^{-W} \partial_{i_M} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \\ = \oint_{\partial} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} e^{-W} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}. \end{aligned} \quad (15)$$

On the other hand by virtue of

$$d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = d\tau^{[i_1 i_2 \dots i_M]}$$

the integrand in (13) is transformed into

$$\begin{aligned} \partial_{i_M} \left(A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} e^{-W} \right) d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \partial_{[i_M} \left(A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}] }^{[W]} e^{-W} \right) d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \\ = \nabla_{[i_M} \frac{A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}]}{e^W} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M}. \end{aligned} \quad (16)$$

Taking account of covariant constancy of integer powers of the fundamental orienting pseudoscalar, i.e.

$$\nabla_i e^m = 0 \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

equation (16) reads

$$\nabla_{[i_M} \frac{A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}]}{e^W} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = e^{-W} \nabla_{[i_M} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}] }^{[W]} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M}.$$

Finally, Stokes' integral theorem (13) is rewritten as

$$\int e^{-W} \nabla_{[i_M} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}] }^{[W]} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \oint_{\partial} e^{-W} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}, \quad (17)$$

which once more confirms the validity of the formulation (11).



By comparing the formulations of Stokes' theorem (15) and (17) we conclude that

$$\int e^{-W} \frac{\partial_{i_M} e}{e} A_{i_1 i_2 \dots i_{M-1}}^{[W]} d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = 0. \quad (18)$$

It is then seen that equation (18) is satisfied by

$$\partial_i e = \overset{[+1]}{0} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (19)$$

The introduced equation (19) can be interpreted, following the paper [10] by a choice of special coordinate systems constrained by the condition

$$e = \pm \overset{[+1]}{1}. \quad (20)$$

The equation (20) can be used for simplification of governing equations in mechanics of hemitropic micropolar continuum when the constitutive tensors are sensitive to space orientations. Note that if $e = -\overset{[+1]}{1}$ then there is an ambiguity in the calculation of the non-integer degrees e^{-W} .² The latter fact means that pseudotensors cannot have rational weights.

Note that the constraint $\sqrt{g} = \overset{[+1]}{1}$ following from (20) is often used not only in astronomy and the theory of relativity [11] but also in the mechanics of solids [12]. In the monograph [11, p. 135–142], the equation $\sqrt{g} = \overset{[+1]}{1}$ is used for the gravity equation derivation in 4-space-time, which greatly simplifies the field theory equations. In the monograph [12] the equation $\sqrt{g} = \overset{[+1]}{1}$ is systematically used while separating isostatic coordinates in the three-dimensional differential equations of the conventional mathematical theory of plasticity.

3. Different Stokes' integral theorem formulations for a two-dimensional manifold

Consider the orientations consistency procedure developed for Stokes' integral theorem formulation (9) in the case of a given 2-manifold. In the two-dimensional case, a 2-cell reper consists of the two enumerated vectors **1** and **2** as shown in Fig. 2. Let us transfer a continuously deforming reper from an interior point of the manifold to another point on the boundary contour, so that the reper directions remain linearly independent during the transfer. Let **s** be a vector directed outward relative to the 2-manifold and co-oriented to the vector $\bar{\mathbf{2}}$ (see Fig. 2). Thus, there are two possible cases. Vector $\bar{\mathbf{1}}$ defined by the 1-cell boundary reper can have two different directions corresponding to two ways of a 2-manifold boundary contour bypassing. In the first case (as can be seen from Fig. 2, a), the repers orientations $\bar{\mathbf{1}}$, $\bar{\mathbf{2}}$ and **1**, **2** are consistent as one is obtained from another by in-plane rotation. Since it can also be seen from Fig. 2, a, the boundary contour should be bypassed in the clockwise sense. In the second case, as it can be elucidated in Fig. 2, b, the repers $\bar{\mathbf{1}}$, $\bar{\mathbf{2}}$ and **1**, **2** have opposite orientations in virtue of one is obtained from another by mirroring the vector **1** into $\bar{\mathbf{1}}$. Apparently, the boundary contour is bypassed

²For example, if $e = -\overset{[+1]}{1}$ and $W = \frac{1}{2}$, then $e^W = \overset{[+1/2]}{i}$, which is impossible within the framework of real analysis.



in the counterclockwise sense. Note that in Stokes' integral theorem formulation (9), we should accept the orientations consistency as shown in Fig. 2, *a*, i.e. the boundary contour should be bypassed in the clockwise sense.

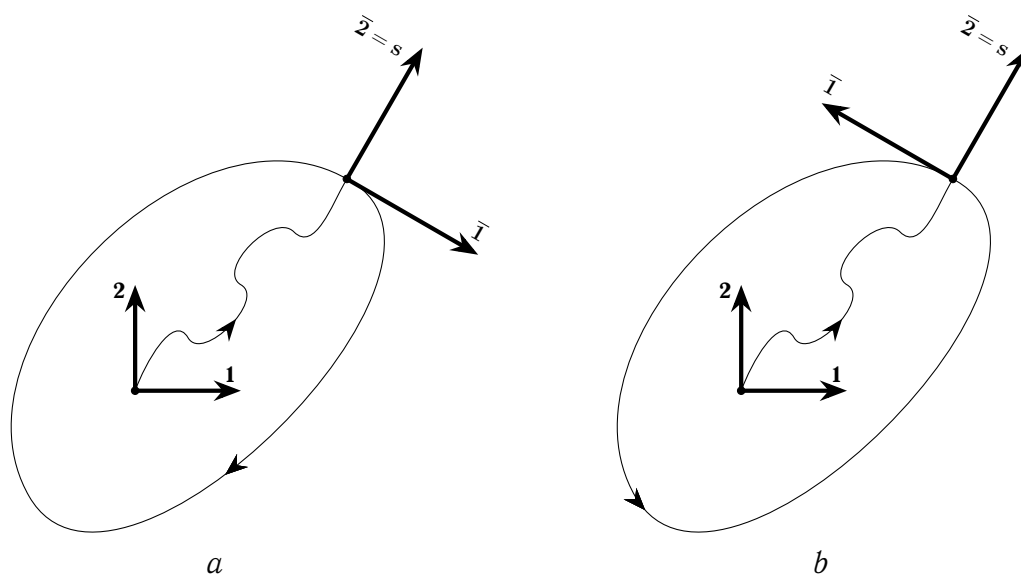


Fig. 2. Orientations consistency rules for tensor elementary volume in the case of 2-manifold according to the monograph [3]: *a* is the contour bypassing in the clockwise sense; *b* is the contour bypassing in the counterclockwise sense

The Stokes' integral theorem formulation (10) corresponds to orientations shown in Fig. 3. The vector field s is chosen co-oriented to the vector $\bar{1}$, and the vector defined by a 1-cell boundary reper is denoted by $\bar{2}$. Once again, there are two possible orientations of vector $\bar{2}$. In the first case (as it can be seen from Fig. 3, *a*), the repers orientations $\bar{1}$, $\bar{2}$ and 1 , 2 are opposite because one is obtained from another by mirroring the vector 2

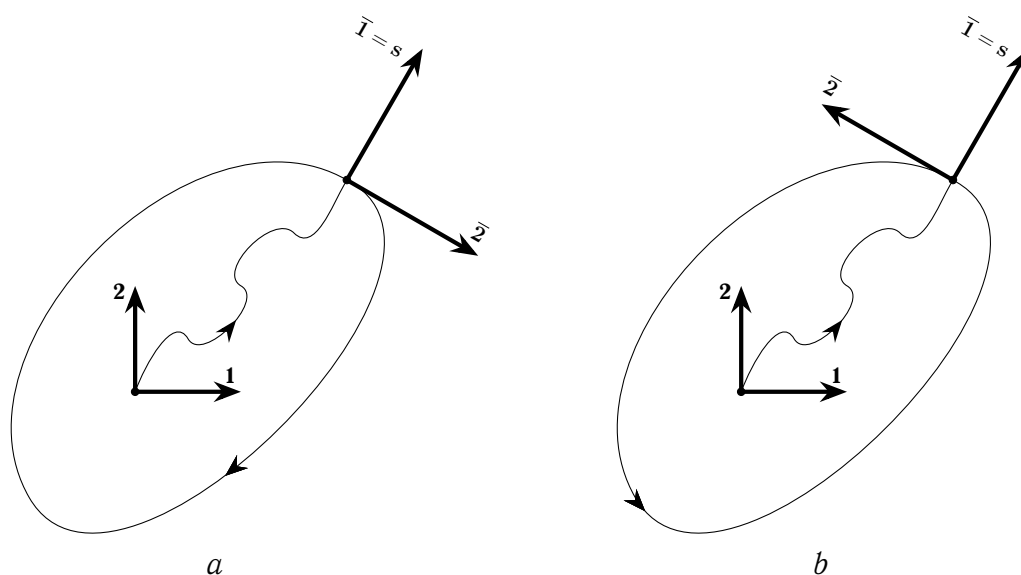


Fig. 3. Orientations consistency rules for tensor elementary volume in the case of 2-manifold according to the monographs [1, 2]: *a* is the contour bypassing in the clockwise sense; *b* is the contour bypassing in the counterclockwise sense



into $\bar{2}$. In this case (as it can be also elucidated from Fig. 3, *a*) the boundary contour should be bypassed in the clockwise sense. In the second case, the reper $\bar{1}$, $\bar{2}$ can be obtained from the reper 1 , 2 by in-plane rotation, so that they are co-oriented. As follows from Fig. 3, *b*, the boundary contour should be bypassed in the counterclockwise sense.

Note that, for example, in complex analysis, the positive direction of a loop is bypassed in the counterclockwise sense. Therefore, the formulation of Stokes' integral theorem in the form (10) is much more preferable in this case.

Conclusions

The present study is devoted to Stokes' integral theorem formulations for an asymmetric covariant pseudotensor field of a given weight and valency:

- the notions of orientable manifold and continuum playing an important role in micropolar elasticity have been discussed. In particular, this concerns the hemitropic micropolar elasticity;
- the fundamental tensors characterizing the metric and orientational properties of N -dimensional space have been introduced. The notion of the fundamental orienting pseudoscalar and its covariant constancy has been discussed;
- the rule providing a scheme of reducing pseudotensors to absolute ones has been given;
- the concepts of tensor and pseudotensor elementary volume (area) of M -cell have been revisited;
- the generalized pseudotensor formulations of Stokes' integral theorem have been refined for the class of special coordinate nets constrained by the equation $e^2 = 1$ ^[2];
- a procedure of elementary cells orientations consistency for Stokes' integral theorem formulations in the case of a 2-manifold has been considered and discussed. The preferable bypasses of boundary contours associated with boundary 1-cell direction for different formulations of Stokes' integral theorem have been discriminated and discussed.

References

1. Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: S. Flügge, ed. *Principles of Classical Mechanics and Field Theory, Handbuch der Physik*, Vol. 1. Berlin, Heidelberg, Springer, 1960, pp. 226–858. https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2
2. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicists*. Oxford, Clarendon Press, 1965. 434 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1965. 456 p.).
3. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*. New York, Dover Publications Inc., 1978. 324 p.
4. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity*. Vienna, Springer, 1970. 286 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9>
5. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids. *Journal Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2020, vol. 24, no. 3, pp. 424–444. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>
6. Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On a differential constraint in asymmetric theories of the mechanics of growing solids. *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, pp. 1157–1164. <https://doi.org/10.3103/S0025654419080053>
7. Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space. *Mechanics of Solids*, 2022, vol. 57, iss. 2. <https://doi.org/10.3103/S0025654422020108>
8. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic



- micropolar media. *Problems of Strength and Plasticity*, 2020, vol. 82, no. 4, pp. 399–412 (in Russian). <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>
9. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Generalization of the algebraic Hamilton – Cayley theory. *Mechanics of Solids*, 2021, vol. 56, pp. 996–1003. <https://doi.org/10.3103/S0025654421060145>
 10. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the constitutive pseudoscalars of hemitropic micropolar media in inverse coordinate frames. *Journal Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2021, vol. 25, iss. 3, pp. 457–474 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1870>
 11. Копф А. *The Mathematical Theory of Relativity*. Dutton, Dutton Press, 1921. 524 p.
 12. Radaev Yu. N. *Prostranstvennaya zadacha matematicheskoy teorii plastichnosti* [A Spatial Problem of the Mathematical Theory of Plasticity]. Samara, Samara University Publ., 2006. 340 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 12.12.2021

Принята к публикации / Accepted 24.02.2022

Опубликована / Published 31.05.2022



ИНФОРМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 216–223

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 216–223

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-216-223>

Article

Dual active-set algorithm for optimal 3-monotone regression

A. A. Gudkov, S. P. Sidorov[✉], K. A. Spiridonov

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Alexandr A. Gudkov, alex-good96@mail.ru, AuthorID: 1083215

Sergei P. Sidorov, sidorovsp@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4047-8239>, AuthorID: 16120

Kirill A. Spiridonov, kir.spiridonov@gmail.com

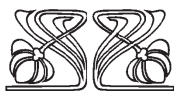
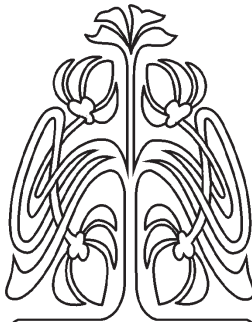
Abstract. The paper considers a shape-constrained optimization problem of constructing monotone regression which has gained much attention over the recent years. This paper presents the results of constructing the nonlinear regression with 3-monotone constraints. Monotone regression of high orders can be applied in many fields, including non-parametric mathematical statistics and empirical data smoothing. In this paper, an iterative algorithm is proposed for constructing a sparse 3-monotone regression, i.e. for finding a 3-monotone vector with the lowest square error of approximation to a given (not necessarily 3-monotone) vector. The problem can be written as a convex programming problem with linear constraints. It is proved that the proposed dual active-set algorithm has polynomial complexity and obtains the optimal solution.

Keywords: dual algorithm, isotonic regression, monotone regression, k -monotone regression, convex regression

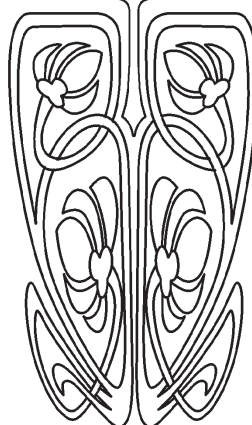
Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of science and education of the Russian Federation in the framework of the basic part of the scientific research state task (project FSRR-2020-0006).

For citation: Gudkov A. A., Sidorov S. P., Spiridonov K. A. Dual active-set algorithm for optimal 3-monotone regression. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 216–223. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-216-223>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Научный
отдел





Научная статья
УДК 519.85

Двойственный алгоритм на основе активного множества для построения оптимальной 3-монотонной регрессии

А. А. Гудков, С. П. Сидоров[✉], К. А. Спиридонов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Гудков Александр Александрович, студент кафедры теории функций и стохастического анализа, alex-good96@mail.ru, AuthorID: 1083215

Сидоров Сергей Петрович, доктор физико-математических наук заведующий кафедрой теории функций и стохастического анализа, sidorovsp@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4047-8239>, AuthorID: 16120

Спиридонов Кирилл Александрович, аспирант кафедры теории функций и стохастического анализа, kir.spiridonov@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается задача оптимизации с ограничениями на форму для построения монотонной регрессии, которая в последние годы привлекает большое внимание исследователей. В статье представлены результаты построения нелинейной регрессии с 3-монотонными ограничениями. Монотонная регрессия высоких порядков может применяться во многих областях, включая непараметрическую математическую статистику и сглаживание эмпирических данных. Предлагается итерационный алгоритм для построения разреженной 3-монотонной регрессии, т.е. для нахождения 3-монотонного вектора с наименьшей квадратичной ошибкой приближения к заданному (не обязательно 3-монотонному) вектору. Задачу можно записать как задачу выпуклого программирования с линейными ограничениями. Доказано, что предложенный двойственный алгоритм на основе использования активного множества имеет полиномиальную сложность и дает оптимальное решение.

Ключевые слова: двойственный алгоритм, изотонная регрессия, монотонная регрессия, k -монотонная регрессия, выпуклая регрессия

Благодарности: Работа поддержана Министерством науки и образования Российской Федерации в рамках базовой части государственного задания (проект FSRR-2020-0006).

Для цитирования: Gudkov A. A., Sidorov S. P., Spiridonov K. A. Dual active-set algorithm for optimal 3-monotone regression [Гудков А. А., Сидоров С. П., Спиридонов К. А. Двойственный алгоритм на основе активного множества для построения оптимальной 3-монотонной регрессии] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 216–223. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-216-223>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

Let $z = (z_1, \dots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$ be the vector of a given function values taken at some points $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Denote $\Delta_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Then the k -th order finite difference operator Δ^k (for $k \geq 1$) is defined recursively as follows:

$$\Delta^k z_i = \frac{1}{\sum_{j=0}^{k-1} \Delta_{i+j}} (\Delta^{k-1} z_{i+1} - \Delta^{k-1} z_i),$$

where $\Delta^0 z_i = z_i$, $i = 1, \dots, n$.



We will call the vector $z = (z_1, \dots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$ as k -monotone with respect to $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, if $\Delta^k z_i \geq 0$ for all $i = 1, \dots, n - k$.

The shape-constrained problems in statistics (the task of finding the best fitting monotone regression is one of them) have attracted much attention in recent decades [1, 2]. The most studied has been the problem of constructing monotone (or isotonic) regression, i.e. the task of finding the best fitted non-decreasing vector to a given vector. One can find a detailed review of isotonic regression in the work of Robertson and Dykstra [3, 4].

k -monotone regression is the extension of monotone regression to the general case of k -monotonicity. Both isotonic and k -monotone regression may be applied in many fields, including non-parametric mathematical statistics [1, 5], the empirical data smoothing [6–8], the shape-preserving dynamic programming [9], and the shape-preserving approximation [10, 11]. Moreover, k -monotone sequences and vectors are also used in solving various mathematical problems [12–15].

In this paper, we will use the idea of a dual active-set algorithm that proposes and analyzes regularized monotonic regression in the paper [2]. It should be noted that some algorithms for constructing k -monotone regressions were considered in papers [16, 17].

Denote Δ_3^n the set of all vectors from \mathbb{R}^n , which are 3-monotone. The task of constructing 3-monotone regression is to obtain a vector $z \in \mathbb{R}^n$ with the lowest square error of approximation to the given vector $y \in \mathbb{R}^n$ (not necessarily 3-monotone) under condition $z \in \Delta_3^n$:

$$(z - y)^T(z - y) = \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \rightarrow \min_{z \in \Delta_3^n(x)}. \quad (1)$$

In this paper we propose a dual active-set algorithm for constructing 3-monotone regression and prove that the algorithm has polynomial complexity and obtains the optimal solution.

1. Preliminary analysis

The problem (1) can be rewritten in the form of a convex programming problem with linear constraints:

$$F(z) = \frac{1}{2} z^T z - y^T z \rightarrow \min, \quad (2)$$

where the minimum is taken over all $z \in \mathbb{R}^n$ such that

$$g_i(z) := - \left(\Delta_{i+1} \Delta_i (\Delta_{i+1} + \Delta_i) z_{i+3} - \Delta_i (\Delta_{i+2} + \Delta_{i+1}) \left(\sum_{j=i}^{i+2} \Delta_j \right) z_{i+2} + \Delta_{i+2} (\Delta_{i+1} + \Delta_i) \left(\sum_{j=i}^{i+2} \Delta_j \right) z_{i+1} - \Delta_{i+2} \Delta_{i+1} (\Delta_{i+2} + \Delta_{i+1}) z_i \right) \leq 0, \quad (3)$$

for $1 \leq i \leq n - 3$. Problem (2)–(3) is a quadratic programming problem and is strictly convex, therefore there is a unique solution for it.

Let \hat{z} be the global solution of the problem (2)–(3), then there is Lagrange multiplier $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n-3})^T \in \mathbb{R}^{n-3}$ such that

$$\nabla F(z) + \sum_{i=1}^{n-3} \mu_i \nabla g_i(z) = 0, \quad (4)$$



$$g_i(z) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq n - 3, \tag{5}$$

$$\mu_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n - 3, \tag{6}$$

$$\mu_i g_i(z) = 0, \quad 1 \leq i \leq n - 3, \tag{7}$$

where ∇g_i is the gradient of the function g_i .

The equations (4)–(7) are the Karush – Kuhn – Tucker conditions. From (4) it follows that

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_j} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 + \sum_{i=1}^{n-3} \mu_i \left(-\Delta_{i+1} \Delta_i (\Delta_{i+1} + \Delta_i) z_{i+3} + \right. \right. \\ \left. \left. + \Delta_i (\Delta_{i+2} + \Delta_{i+1}) \left(\sum_{j=i}^{i+2} \Delta_j \right) z_{i+2} - \Delta_{i+2} (\Delta_{i+1} + \Delta_i) \left(\sum_{j=i}^{i+2} \Delta_j \right) z_{i+1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \Delta_{i+2} \Delta_{i+1} (\Delta_{i+2} + \Delta_{i+1}) z_i \right) \right] = 0, \quad 1 \leq j \leq n - 3. \end{aligned}$$

2. A dual active-set algorithm for 3-monotone regression

In this subsection, a dual active-set algorithm is proposed. It will be shown that it possesses the following useful properties:

- the number of operations required to complete the algorithm for a given input y from \mathbb{R}^n is $O(n^k)$ for some non-negative integer k , i.e. it has the polynomial complexity;
- the solution is optimal (the Karush – Kuhn – Tucker conditions are fulfilled).

The proposed algorithm uses as so-called *active set*. The active set S consists of blocks of the form $[l, r - 3] \subset [1, n - 3]$, such that $[l, r - 3] \subset S, l - 1 \notin S, r - 2 \notin S$, and

$$S = [l_1, r_1] \cup [l_2, r_2] \cup \dots \cup [l_{m-1}, r_{m-1}] \cup [l_m, r_m],$$

where $l_1 \geq 1, r_m \leq n - 3$, and m is the number of blocks. If $r_i = l_i$ then the i -th block consists of only one point.

At each iteration of the algorithm, the active set $S \subset [1, n - 3]$ is chosen and the corresponding optimization problem is solved

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \rightarrow \min, \tag{8}$$

where the minimum is taken over all $z \in \mathbb{R}^n$ satisfying

$$\begin{aligned} \Delta_{i+1} \Delta_i (\Delta_{i+1} + \Delta_i) z_{i+3} - \Delta_i (\Delta_{i+2} + \Delta_{i+1}) \left(\sum_{j=i}^{i+2} \Delta_j \right) z_{i+2} + \\ + \Delta_{i+2} (\Delta_{i+1} + \Delta_i) \left(\sum_{j=i}^{i+2} \Delta_j \right) z_{i+1} - \Delta_{i+2} \Delta_{i+1} (\Delta_{i+2} + \Delta_{i+1}) z_i = 0, \quad \forall i \in S. \end{aligned} \tag{9}$$



THE DUAL ACTIVE-SET ALGORITHM FOR 3-MONOTONE REGRESSION

begin

· Input data $y \in \mathbb{R}^n$ · Active set $S = \emptyset$ · Initial approximation $z(S) = y$ **while**
 $z(S) \notin \Delta_3^n$ **do**

· Change the active set $S \leftarrow S \cup \{i : g_i(z(S)) > 0\}$ · We solve the problem
 (8)–(9) using values from the active set S · Rewriting the vector $z(S)$

end

· Returning the solution $z(S)$

end

The computational complexity of the dual active set algorithm for 3-monotone regression is $O(n^3)$. It follows from two remarks:

- at each iteration of the algorithm, the active set S attaches, at least, one index from $[1, n - 3]$, which means that the number of the while loop iterations can not be greater than $n - 3$;
- the computational complexity of solving the problem (8)–(9) is $O(n^2)$.

3. The convergence and optimality analysis of the dual active set algorithm

We need the following auxiliary lemmas, the proof of which can be obtained similarly to the proof of the corresponding lemmas in the paper [16].

Lemma 1. *Let z be a global solution to the problem (2)–(3). Then the Lagrange multipliers $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n-3})^T \in \mathbb{R}^{n-3}$, identified in (4)–(7), are calculated as follows:*

$$\mu_i = -\frac{z_i - y_i}{\Delta_{i+2}\Delta_{i+1}(\Delta_{i+2} + \Delta_{i+1})} + \frac{(\Delta_i + \Delta_{i-1})\left(\sum_{j=i}^{i+2} \Delta_j\right)}{\Delta_{i+2}\Delta_{i+1}(\Delta_{i+2} + \Delta_{i+1})}(\Delta_{i+1}\mu_{i-1} - \Delta_{i-2}\mu_{i-2}) + \frac{\Delta_{i-2}\Delta_{i-3}(\Delta_{i-2} + \Delta_{i-3})}{\Delta_{i+2}\Delta_{i+1}(\Delta_{i+2} + \Delta_{i+1})}\mu_{i-3}, \quad 1 \leq i \leq n - 3, \quad (10)$$

and $\mu_i = 0 \forall i < 1$.

Lemma 2. *Let $1 \in S$ i.e. $\Delta^2 y_1 < 0$ and suppose that $2, 3, 4 \notin S$. Let z_1, z_2, z_3, z_4 be the values of linear regression, built on pairs of values $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$. Then the values of the corresponding Lagrange multipliers (10) will be non-negative.*

Lemma 3. *Let at some iteration of the algorithm the pairs of values $Y = \{(x_1, z_1), \dots, (x_{k+1}, z_{k+1})\}$ such that $[1 : k - 3] \subset S$, $\Delta^3 z_i < 0$ for all $i \in [1 : k - 3]$, and $k - 2, k - 1, k, k + 1 \notin S$. Let $z_i^{(0)}$, $i \in [1 : k]$ be an optimization problem solution*

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (\zeta_i - z_i)^2 \rightarrow \min,$$

where the minimum is taken among all values $\zeta \in \mathbb{R}^k$ satisfying $g_i(\zeta) = 0$ for all $i \in [1 : k - 3]$, where $g_i(\zeta)$ is defined in (3). Moreover, suppose that $g_{k-2}(z^{(0)}) < 0$ i.e.



x_{k-2} will be added to the active set S at the next iteration of the algorithm. Let $z_i^{(1)}$, $i \in [1 : k + 1]$ be an optimization problem solution

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k+1} (\zeta_i - z_i)^2 \rightarrow \min,$$

where the minimum is taken among all values $\zeta \in \mathbb{R}^{k+1}$ satisfying the equality $g_i(\zeta) = 0$ for all $i \in [1 : k - 2]$. Then for all $i = 1, 2, \dots, k - 2$ get

$$\mu_i^{(1)} \geq 0,$$

where $\mu_i^{(1)}$ is Lagrange multiplier for $z_i^{(1)}$ and $\mu_{k-1}^{(1)} = \mu_k^{(1)} = \mu_{k+1}^{(1)} = 0$.

Theorem 1. For any initial $S \subset S^*$, the algorithm converges to the optimal solution of the problem (1) in, at most, $n - |S|$ iterations. Where S^* is the active set corresponding to the optimal solution and n is the dimension of the problem.

Proof. The algorithm is designed in such a way that, at each iteration, the active set S is expanded by attaching at least one index point from $[1, n - 3]$. This point should not previously belong to the set S . In the case of $S = [1, n - 3]$, the number of blocks is equal to 1 and the input vector is already 3-monotone. Another case is $|S| < n - 3$. Then the number of iterations must be less than $n - |S|$ where $|S|$ is the number of indices in the initial active set S .

If the point i has a negative value of the third-order finite difference $\Delta^3 z_i$ and is isolated (i.e. $i - 3, i - 2, i - 1, i + 1, i + 2, i + 3 \notin S$) then the dual active set algorithm replaces $z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i+3}$ with the values of linear regression constructed by the points $(x_i, z_i), (x_{i+1}, z_{i+1}), (x_{i+2}, z_{i+2}), (x_{i+3}, z_{i+3})$. This situation is considered in Lemma 2 in which is proved that the values of the corresponding Lagrange multipliers are non-negative.

Another case we should analyse is the case when the violation of 3-monotonicity occurs at several consecutive $k > 1$ neighboring points, which can be written as follows $\Delta^3 z_j < 0$, $j = i, \dots, i + k$ and $\Delta^3 z_{i-3}, \Delta^3 z_{i-2}, \Delta^3 z_{i-1} \geq 0$, $\Delta^3 z_{i+k+1}, \Delta^3 z_{i+k+2}, \Delta^3 z_{i+k+3} \geq 0$. In this case, the algorithm replaces values $z_i, z_{i+1}, \dots, z_{i+k+3}$ with the values of a linear regression constructed by the points $(x_i, z_i), \dots, (x_{i+k+3}, z_{i+k+3})$. This situation is considered in Lemma 3 which shows that the values of the corresponding Lagrange multipliers are non-negative.

In the same way, in this theorem, the non-negativity of the Lagrange multipliers can be proved in other cases. \square

Conclusion

The paper presents the algorithm for constructing optimal 3-monotone regression based on an active set. This algorithm has already been applied when constructing regression of other orders and with a constant distance between values [16]. At each iteration of the algorithm, it first determines the active set and then solves a standard least-squares subproblem on the active set with a small size, which exhibits a local superlinear convergence. Therefore, the algorithm is very efficient when coupled with parallel execution. The classical optimization algorithms (e.g. coordinate descent or proximal gradient descent) only possess sublinear convergence in general or linear convergence under certain conditions.



References

1. Chen Y. *Aspects of Shape-constrained Estimation in Statistics*. Ph. D. thesis, University of Cambridge, 2013. 143 p.
2. Burdakov O., Sysoev O. A dual active-set algorithm for regularized monotonic regression. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2017, vol. 172, no. 3, pp. 929–949. <https://doi.org/10.1007/s10957-017-1060-0>
3. Robertson T., Wright F., Dykstra R. *Order Restricted Statistical Inference*. John Wiley & Sons, New York, 1988. 488 p.
4. Dykstra R. An isotonic regression algorithm. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 1981, vol. 5, iss. 4, pp. 355–363. [https://doi.org/10.1016/0378-3758\(81\)90036-7](https://doi.org/10.1016/0378-3758(81)90036-7)
5. Bach F. R. Efficient algorithms for non-convex isotonic regression through submodular optimization. In: S. Bengio, H. M. Wallach, H. Larochelle, K. Grauman, N. Cesa-Bianchi, R. Garnett, eds. *Advances in Neural Information Processing Systems 32nd*: Annual Conference on Neural Information Processing Systems 2018 (NeurIPS 2018). December 3–8, 2018. Montréal, Canada, 2018, pp. 1–10.
6. Hastie T., Tibshirani R., Wainwright M. *Statistical Learning with Sparsity: The Lasso and Generalizations*. New York, USA, Chapman and Hall/CRC, 2015. 367 p. <https://doi.org/10.1201/b18401>
7. Altmann D., Grycko E., Hochstättler W., Klützke G. *Monotone smoothing of noisy data*. Diskrete Mathematik und Optimierung. Technical Report feu-dmo034.15. FernUniversität in Hagen, Fakultät für Mathematik und Informatik, 2014. 6 p.
8. Diggle P., Morris S., Morton-Jones T. Case-control isotonic regression for investigation of elevation in risk around a point source. *Statistics in Medicine*, 1999, vol. 18, iss. 13, pp. 1605–1613. [https://doi.org/10.1002/\(sici\)1097-0258\(19990715\)18:13<1605::aid-sim146>3.0.co;2-v](https://doi.org/10.1002/(sici)1097-0258(19990715)18:13<1605::aid-sim146>3.0.co;2-v)
9. Cai Y., Judd K. L. Chapter 8 – Advances in numerical dynamic programming and new applications. *Handbook of Computational Economics*, 2014, vol. 3, pp. 479–516. <https://doi.org/10.1016/b978-0-444-52980-0.00008-6>
10. Shevaldin V. T. *Аппроксимация локальными сплайнами* [Approximation by Local Splines]. Ekaterinburg, UMC UPI Publ., 2014. 198 p. (in Russian).
11. Boytsov D. I., Sidorov S. P. Linear approximation method preserving k -monotonicity. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2015, vol. 12, pp. 21–27.
12. Milovanović I. Z., Milovanović E. I. Some properties of l_p^k -convex sequences. *Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute*, 2015, vol. 5, no. 1, pp. 33–36.
13. Niezgoda M. Inequalities for convex sequences and nondecreasing convex functions. *Aequationes Mathematicae*, 2017, vol. 91, no. 1, pp. 1–20. <https://doi.org/10.1007/s00010-016-0444-9>
14. Latreuch Z., Belaïdi B. New inequalities for convex sequences with applications. *International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics*, 2012, vol. 5, no. 3, pp. 15–27. <https://doi.org/10.12816/0006115>
15. Marshall A. W., Olkin I., Arnold B. C. *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*. New York, USA, Springer, 2011. 909 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-68276-1>
16. Gudkov A., Mironov S. V., Sidorov S. P., Tyshkevich S. V. A dual active set algorithm for optimal sparse convex regression. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2019, vol. 23, no. 1, pp. 113–130. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1673>



17. Sidorov S. P., Faizliev A. R., Gudkov A. A., Mironov S. V. Algorithms for sparse k -monotone regression. In: W. J. van Hove, ed. *Integration of Constraint Programming, Artificial Intelligence, and Operations Research. CPAIOR 2018*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 10848. Springer, Cham, 2018, pp. 546–566. https://doi.org/10.1007/978-3-319-93031-2_39

Поступила в редакцию / Received 03.12.2021

Принята к публикации / Accepted 15.01.2022

Опубликована / Published 31.05.2022



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 224–232

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 224–232

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-224-232>

Article

Possibilities of using computer vision for data analytics in medicine

O. Yu. Iliashenko, E. L. Lukyanchenko✉

Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University, 29 Polytechnicheskaya St., St. Petersburg 195251, Russia

Oksana Yu. Iliashenko, ioy120878@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-9292-7759>, AuthorID: 331642

Ekaterina L. Lukyanchenko, lukyanchenko@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2738-5513>, AuthorID: 1090381

Abstract. This article discusses the possibilities of using artificial intelligence technologies, namely computer vision, in the field of medicine. The relevance of the topic is due to the growing burden on medical personnel and medical institutions due to an increase in the number of elderly people, an increase in the number of patients with chronic diseases, as well as unforeseen circumstances, such as the SARS-CoV-2 pandemic in 2019–2021. In addition, many medical institutions are interested in providing high-quality services, increasing loyalty, and increasing the number of regular patients, and therefore feel the need to introduce the latest technologies and follow strategic development trends. The article describes how the physician can use the solutions offered by artificial intelligence in the course of his work to obtain a more accurate diagnosis and save time spent on the patient's history review. The authors propose an IT and technological architecture of a medical organization that uses computer vision in its work, created on the basis of the IT and the technological architecture reference model of a medical organization. The architecture implies the use of cloud infrastructure and specialized software and provides for both the introduction of new types of equipment, for example, 3D cameras, imaging sensors, and the use of traditional equipment: an ultrasound machine, X-ray equipment, an MRI machine.

Keywords: artificial intelligence, computer vision, enterprise architecture, IT architecture, medicine

For citation: Iliashenko O. Yu., Lukyanchenko E. L. Possibilities of using computer vision for data analytics in medicine. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 224–232. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-224-232>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 004.09

Возможности применения компьютерного зрения для аналитики данных в медицине

О. Ю. Ильяшенко, Е. Л. Лукьянченко✉

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия, 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29



Ильяшенко Оксана Юрьевна, кандидат педагогических наук, доцент Высшей школы бизнес-инжиниринга, <https://orcid.org/0000-0001-9292-7759>, AuthorID: 331642, ioy120878@gmail.com

Лукьянченко Екатерина Леонидовна, магистрант Высшей школы бизнес-инжиниринга, <https://orcid.org/0000-0003-2738-5513>, AuthorID: 1090381, lukyanchenko@mail.ru

Аннотация. В статье рассматриваются возможности использования технологий искусственного интеллекта, а именно компьютерного зрения, в сфере медицины. Актуальность темы обусловлена растущей нагрузкой на медицинский персонал и на медицинские учреждения в связи с увеличением числа пожилых людей и пациентов с хроническими заболеваниями, а также непредвиденными обстоятельствами, как, например, пандемия коронавируса SARS-CoV-2 в 2019–2021 гг. Кроме того, многие медицинские учреждения заинтересованы в предоставлении услуг высокого качества, повышении лояльности и увеличении числа постоянных пациентов, в связи с чем ощущают необходимость во внедрении новейших технологий и хотят следовать трендам стратегического развития. В статье описывается, как лечащий врач может использовать предлагаемые искусственным интеллектом решения в процессе своей работы для получения более точного диагноза и экономии времени на ознакомление с анамнезом пациента. Предложена ИТ- и технологическая архитектура медицинской организации, использующей компьютерное зрение в своей работе, созданная на основе референтной модели. Архитектура подразумевает использование облачной инфраструктуры, специализированного ПО и предусматривает как внедрение новых типов оборудования, например 3D камер, датчиков визуализации, так и использование традиционного оборудования: аппарата УЗИ, рентген-оборудования, аппарата МРТ.

Ключевые слова: искусственный интеллект, компьютерное зрение, архитектура предприятия, ИТ-архитектура, медицина

Для цитирования: *Iliashenko O. Yu., Lukyanchenko E. L. Possibilities of using computer vision for data analytics in medicine [Ильяшенко О. Ю., Лукьянченко Е. Л. Возможности применения компьютерного зрения для аналитики данных в медицине] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 224–232. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-224-232>*

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

The concept of artificial intelligence (AI) has evolved since 1950 when Alan Turing described the use of computers to develop critical thinking and human decision-making. Currently, artificial intelligence is an integral part of the development of the digital world and is used in all spheres of activity from medicine to industry and production [1]. Initially, AI was represented by a number of simple algorithms such as “if this, then that”, then the algorithms rapidly became more complex, mimicking the neural connections of the human brain. The result of the development of the concept is the appearance of such classes of artificial intelligence as machine learning, deep learning, natural language processing, and computer vision [2]:

- machine learning is a field of artificial intelligence, which implies the “training” of computer algorithms to make decisions on their own. Machine learning is the driving force behind the intelligence of modern systems. Thus, the system learns independently (learning without a teacher) or with reinforcement from the environment, analyzing and classifying large amounts of data to identify the detected patterns and use them for further insights;



- deep learning is represented by machine learning methods that allow training a system not with algorithms, but with representations. Deep learning has proven to be effective after the increase in computing power has allowed the creation of complex neural network architectures. The use of deep learning made it possible to solve problems using computer vision, speech recognition, machine translation, etc.;
- natural language processing is a field of AI used to convert a natural language into a format understandable for computer systems for further analysis. It is used for speech recognition; handwritten and typewritten notes recognition;
- computer vision is an area of AI that deals with the identification of video and photographic images by raw pixels. Computer vision allows performing tasks such as detecting, classifying, and interpreting various objects to categorize predefined analysis results [3].

The purpose of this article is to study the application of computer vision methods in the field of medicine: areas of use, advantages and possible difficulties; development of an IT model and technological architecture of a medical organization that uses computer vision in its work, based on the reference architecture model, as well as the workflow of the physician using the opinion of artificial intelligence to make medical decisions.

Materials and methods

This study is based on the concept of an enterprise architecture. Currently, there are several standards and methodologies for modeling an enterprise architecture, but one of the most commonly used is the TOGAF (The Open Group Architecture Framework) standard, developed by The Open Group consortium.

The TOGAF standard is based on the Architecture Development Method (ADM), which describes a cyclical, phased plan for developing an enterprise architecture. In this study, ADM phases C and D were used.

Also, the authors use in their work the reference model presented in [4]. The reference model describes the IT and technology architecture of a healthcare organization, following the concept of value-based, personalized medicine and Health 4.0.

Results

In the last decade, in the field of medicine the most urgent problem is appeared to be the insufficient provision of medical institutions with personnel: general practitioners, specialist doctors, and junior medical personnel. The current medical staff bears the burden associated with examination, admission, counseling, prescribing treatment, and maintaining medical records, which affects the quality and quantity of work performed by them [5]. In addition, the population of most countries is aging rapidly, which in the near future will mean an increase in the flow of patients and the demand for medical services and examinations.

Controversial yet important is the issue of medical error in the process of making decisions about the further treatment of the patient. Telemedicine is actively used in Russia and around the world, which makes it possible to quickly assemble a medical consultation of highly qualified specialists and conduct it in a remote format. Patients also have access to solutions that allow them to remotely consult with their doctor, automatically collect, store and process data on medical indicators, for example, blood pressure, pulse, blood sugar level, etc.



Currently, the possibilities of using AI and machine learning in medicine are beginning to actively develop. The use of technologies such as computer vision, deep learning, and natural language processing will make it possible to fully implement such concepts as personalized, value-based, and predictive medicine [6]. Machine learning algorithms can be used to improve the accuracy of diagnosis, the efficiency of medical personnel and increase patient flow, therapeutic follow-up and clinical operations, the experience of interaction between the patient, and the medical organization as a whole.

The use of the latest technologies in medical data analytics is relevant because the volume of medical data already available is large and continues to grow daily. Medical data include data from electronic and paper medical records, results of clinical studies, and visual results of studies: MRI, X-ray, ultrasound, ECG, etc. [7]. In addition to the variety of types and sources of medical data, it is also characterized by high requirements for data confidentiality and security, anonymity, and medical secrecy.

Until recently, the healthcare industry could rely on small open source datasets or data collected by commercial companies. However, the dynamics of data exchange and data availability are already affecting and will continue to influence the development and availability of the use of big data analytics and artificial intelligence technologies [8]. These changes are stimulating research in the field of computer vision in medicine, which is reflected in the growth of research in areas such as multimodal education that combines computer vision and language recognition; 3D vision used in intensive care units, as well as work with videos-activity recognition, understanding of the ongoing movements to detect adverse events and respond to them [9].

In general, the process of computer vision operation consists of three stages:

- image acquisition – the basic stage, which consists of obtaining a photo or video image from hardware, for example, cameras of various types;
- image processing – the stage at which software is used for image processing: quality improvement, compression, reduction or increase in size and noise removal. At this stage, primitive operations are performed, which allow faster and better image processing and obtain the necessary analysis results in the future;
- image analysis and decision-making – the most important stage at which image segmentation or object identification occurs, and then the obtained characteristics are transferred to machine learning algorithms or other artificial intelligence technologies.

Thus, computer vision can be implemented using traditional machine learning algorithms, for example, hidden Markov models, random forest or random tree algorithms, or deep learning algorithms – convolutional neural networks, recurrent neural networks, and multilayer perceptron [10]. Deep learning is preferred because it allows the processing of large amounts of data without sacrificing hardware performance.

In medical practice, computer vision based on deep learning algorithms can be successfully applied in such areas as:

- gastroenterology [1];
- pulmonology [3];
- cardiology;
- dermatology;
- ophthalmology;
- clinical and imaging studies;
- surgery, etc.

The workflow implemented by a medical institution that uses computer vision



algorithms in its activities may look like this (Fig. 1). AI algorithms at the current stage of their development and application in medical practice cannot be the final link in making medical decisions. This means that the physician must familiarize himself with the results of the algorithms and, on their basis, make a diagnosis and prescribe treatment for the patient. For example, a system developed by the Californian company Gauss Surgical allows to accurately assess a patient's blood loss during surgery or childbirth by visualizing bloodied medical supplies — surgical sponges. The algorithms are able to distinguish between blood and non-blood fluids and trigger alerts about bleeding and critical blood loss in a patient, which allows them respond as quickly as possible and start a blood transfusion [11]. Nevertheless, the final decision, in this case, is made by the operating doctor, and the observation of artificial intelligence algorithms is a tool in the work of medical personnel and not a decision-making tool.

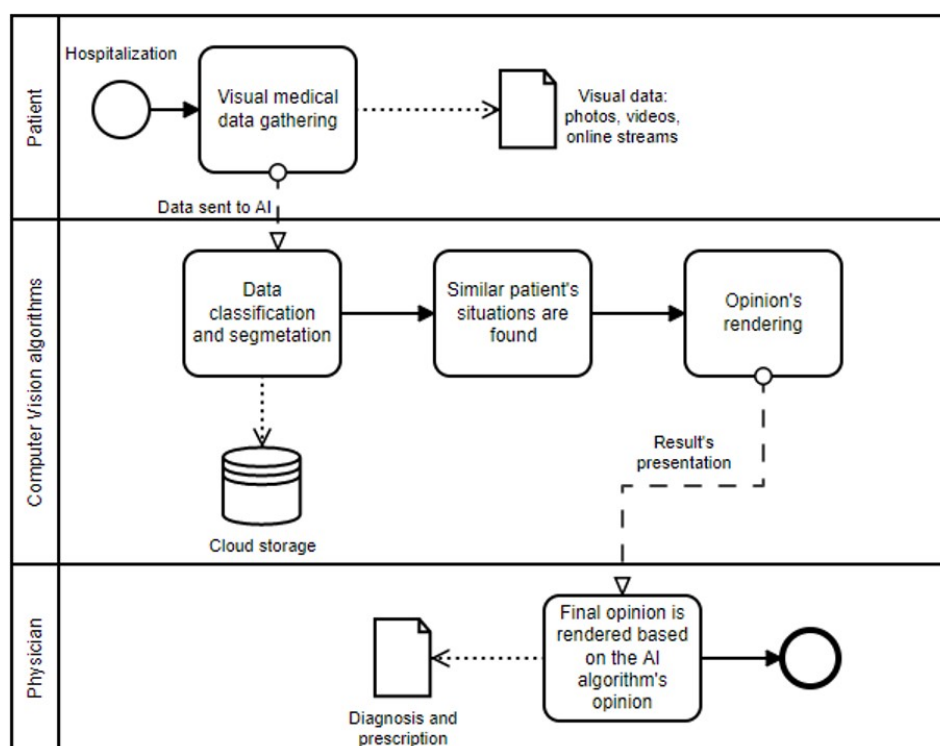


Fig. 1. An example of a medical institution workflow improved by computer vision algorithms

The use of computer vision technologies in the process of carrying out diagnostic procedures has a number of specific features, for example:

- the need to find a balance in the accuracy of the interpretation of the results — minimization of false warnings, but sufficient accuracy is needed, not to miss the detection of the desired element on the image;
- the complexity of the configuration of the IT infrastructure of the solution, especially in the case of multifunctional use;
- features of working with medical images: the problem of transparency when visualizing the location of body organs — special instructions are needed to determine the location of organs in the image; high image resolution, which can exceed 100 thousand square pixels and several gigabytes of memory;



- insufficient amount of data available for training algorithms in the field of computer vision in medicine — despite the increased interest in this topic and the growing number of works devoted to research in the field of computer vision, the amount of high-quality and balanced data available for evaluating various computer vision techniques is not sufficient yet.

The use of computer vision by a medical institution unambiguously affects its IT architecture [12]. The medical institution must be mature enough to implement deep learning concepts: have transparent business processes described, have sufficient computing power and technological equipment, have sufficient funding, etc.

To build the IT and technological architecture of a medical organization using computer vision in its activities, the authors will rely on the reference model of IT and technological architecture of a medical organization presented in the study [4]. The model is performed in Archi software using the ArchiMate language supported by the TOGAF standard, which is actively used by international companies and institutions.

The reference model (Fig. 2) at the technological architecture level represents a cluster of servers, medical equipment, and personal gadgets used by patients to monitor vital medical indicators.

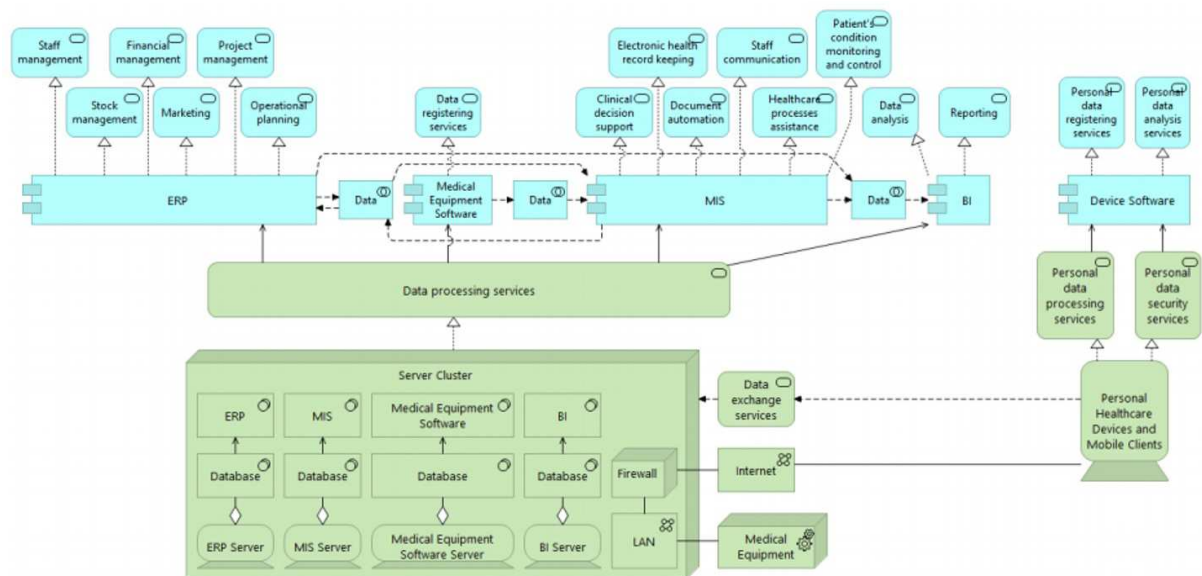


Fig. 2. Reference model of IT and technological architecture of a medical organization [4]

The application layer of the reference model is represented by a set of information systems used by a medical organization [13]:

- ERP — used by the organization to manage all types of resources; financial, operational, strategic, and tactical planning; marketing activities; etc.;
- MIS is a medical information system, used in work with patients to automate document flow, maintain electronic medical records, store and analyze clinical trials, manage bed funds, etc.;
- BI system in a medical organization is used for advanced analytics, predictive analytics and forecasting, visualization of the results.

Based on the reference architecture from [4], the authors propose a model of IT and technological architecture of a medical organization that uses computer vision technologies (Fig. 3).

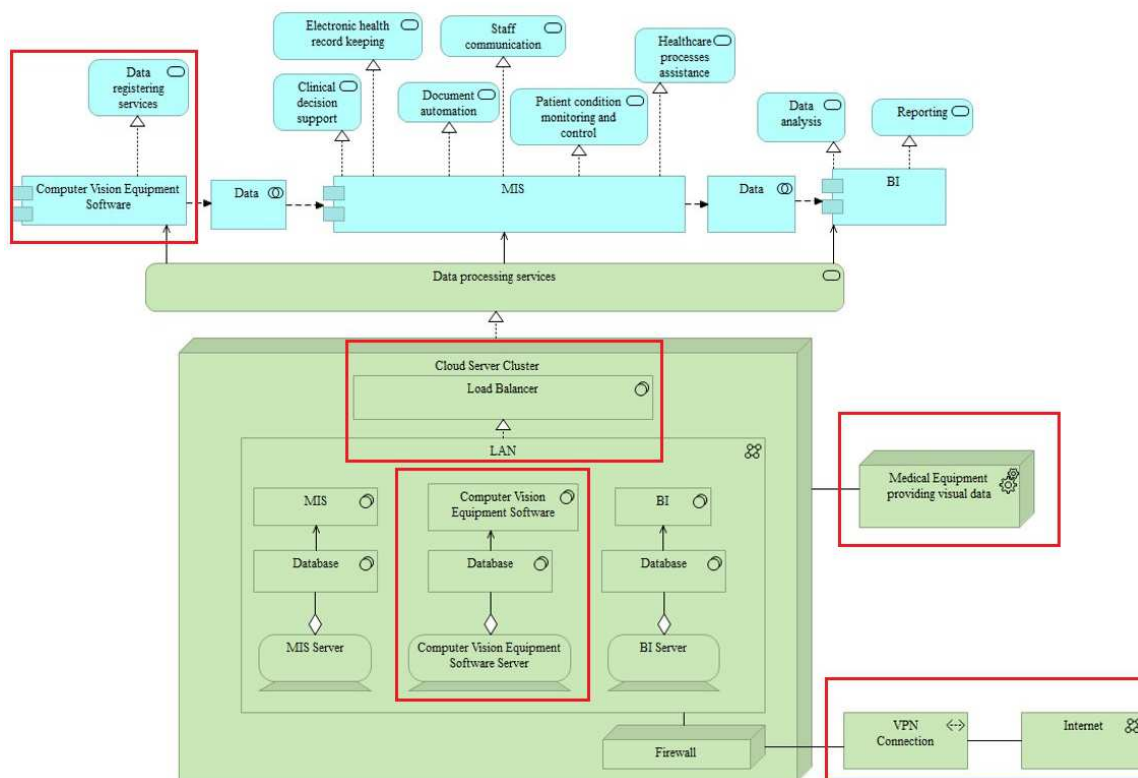


Fig. 3. Proposed model of IT and technological architecture for a medical organization using computer vision technology in its activities

The architecture model proposed by the authors consists of the following elements depicted on the technology layer:

- a server cluster located in the cloud infrastructure. The choice was made in favor of cloud technologies since training and testing machine learning algorithms requires large amounts of data and infrastructure flexibility [14]. For a medical organization, it will be more profitable and more convenient to use cloud resources, rather than maintain its own hardware infrastructure;
- in the cloud infrastructure, there is a LAN network, in which servers for the operation of MIS and BI systems, and software for the implementation of computer vision are located. The ERP system is not reflected in this diagram, since it is not directly related to the use of machine learning in the situation considered by the authors. Nevertheless, the ERP system of a medical organization can and should be used for more efficient business and resource management;
- load Balancer, an application that balances the load on servers to increase their performance and fault tolerance, has been added to the diagram in the cloud infrastructure. In addition, since the organization has to deal with medical data, a secure VPN connection to avoid leakage of especially sensitive data is provided;
- the diagram shows medical equipment that provides visual information for the use of machine learning. The type of equipment depends on the requirements and work of the medical organization: it can be either an X-ray machine or an MRI machine that is already available in the clinic, or cameras and sensors that are not used in traditional procedures.

The application layer has undergone changes in the part of Medical Equipment Software — it is presented by the use of software for the implementation of computer vision technology. As the deep learning model is trained on the provided medical data,



it will not be able to access the server and the database, but offer its opinion to the attending physician directly using the software on the application layer.

Thus, the proposed architecture can be used to implement computer vision technology in the work of medical clinics if they are ready to incur financial, time, and resource costs. The use of computer vision will relieve the medical staff, providing them with more time for important actions; will increase the accuracy of diagnosis and treatment prescription, which will affect the patient's attitude and loyalty to this medical institution [15]. The use of machine learning algorithms will reduce mortality in intensive care units and predict the deterioration of the patient's condition. All these advantages are especially relevant in our time since we see the impact of the SARS-CoV-2 pandemic on healthcare institutions around the world: the load on bed funds and medical personnel at the peak of the incidence rate was so high that it was not possible to provide adequate and high-quality medical care.

Despite the fact that the use of computer vision in medicine is a promising direction, in the field of medical imaging, some difficulties hinder the scaling of such solutions [16]. Firstly, testing the concept and conducting research, and introducing it into the work of the clinic, is characterized by high financial and time costs and requires the involvement of highly qualified specialists, which not many medical institutions can do. In addition, collecting data for training and testing a system can be time-consuming and expensive, as a particularly large volume of medical data is required, which must be collected, stored, protected, and anonymized.

The introduction of a new medical practice requires mandatory validation and certification, which is also costly for a medical institution both in terms of time and finances. Finally, compliance with international and local laws, policies, and practices is required, which can be a deterrent to implementation. At the same time, integrating new services with traditional research, familiar to patients, can be expensive and difficult, and the likelihood of sabotaging and ignoring the latest services using AI technology by patients of a medical institution is very high.

Conclusion

In this paper, the main areas of artificial intelligence are considered, the prerequisites for the popularization of machine learning and computer vision in the field of medicine are determined, and the areas of application of computer vision in medicine are considered. The authors studied the reference model based on the source [4], and proposed a modified model of IT and technological architecture of a modern medical organization, using computer vision algorithms in its work. The article briefly described the advantages and possible difficulties that may prevent the introduction of computer vision into the main processes of hospitals.

References

1. Kaul V., Enslin S., Gross S. A. History of artificial intelligence in medicine. *Gastrointestinal Endoscopy*, 2020, vol. 92, iss. 4, pp. 807–812. <https://doi.org/10.1016/j.gie.2020.06.040>
2. The future of artificial intelligence in health care. Emerging applications of AI in health care. *Deloitte*. Available at: <https://www2.deloitte.com/us/en/pages/life-sciences-and-health-care/articles/future-of-artificial-intelligence-in-health-care.html> (accessed 7 September 2021).
3. Khemasuwan D., Sorensen J. S., Colt H. G. Artificial intelligence in pulmonary medicine: Computer vision, predictive model and COVID-19. *European Respiratory Review*, 2020, vol. 29, Art. 200181. <https://doi.org/10.1183/16000617.0181-2020>
4. Ilin I. V., Lepekhin A. A., Ershova A. S., Borremans A. D. IT and technological architecture



- of healthcare organization. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2020, vol. 1001, Art. 012141. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1001/1/012141>
5. Il'in I. V., Il'yashenko O. Yu., Il'yashenko V. M. Architectural approach to the medical organization development in a digitalized healthcare environment. *Journal of Management Studies*, 2019, vol. 5, no. 1, pp. 37–47 (in Russian).
 6. Vodolazsky K. D., Ilin I. V. Organization of information interaction of the medical organization with customers and resource providers. *Journal of Economy and Entrepreneurship*, 2021, no. 3 (128), pp. 920–929 (in Russian). <https://doi.org/10.34925/EIP.2021.128.3.185>
 7. LeCun Y., Bengio Y., Hinton G. Deep learning. *Nature*, 2015, vol. 521, no. 7553, pp. 436–444. <https://doi.org/10.1038/nature14539>
 8. Amin S. U., Hossain M. S., Muhammad G., Alhussain M., Rahman M. A. Cognitive smart healthcare for pathology detection and monitoring. *IEEE Access*, 2019, vol. 7, pp. 10745–10753. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2891390>
 9. Dubgorn A., Svetunkov S., Borremans A. Features of the functioning of a geographically distributed medical organization in Russia. *E3S Web of Conferences*, 2020, vol. 217, Art. 06014. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202021706014>
 10. Mahmoodpour M., Lobov A., Hayati S., Pastukhov A. An affordable deep learning-based solution to support pick and place robotic tasks. *Instrumentation Engineering, Electronics and Telecommunications – 2019: Proceedings of the V International Forum (November 20–22, 2019, Izhevsk, Russian Federation)*. Kalashnikov Izhevsk State Technical University Publ., 2019, pp. 66–75. <https://doi.org/10.22213/2658-3658-2019-66-75>
 11. *Gauss Surgical*. Available at: <https://www.gausssurgical.com/> (accessed 7 September 2021).
 12. Ilin I., Iliashenko O., Iliashenko V. An architectural approach to managing the digital transformation of a medical organization. In: T. Devezas, J. Leitão, A. Sarygulov, eds. *The Economics of Digital Transformation*. Studies on Entrepreneurship, Structural Change and Industrial Dynamics. Springer, Cham, 2021, pp. 227–249. https://doi.org/10.1007/978-3-030-59959-1_15
 13. Ilyin I. V., Ilyashenko V. M. Formation of requirements for a reference architectural model for digital transformation of a medical organization. *Scientific Bulletin of the Southern Institute of Management*, 2018, vol. 4, pp. 82–88 (in Russian). <https://doi.org/10.31775/2305-3100-2018-4-82-88>
 14. Iliashenko O., Lukianchenko E., Lohyeeta N. A selection approach to the criteria for evaluating cloud platforms for conducting IT projects. *DTMIS '20: Proceedings of the International Scientific Conference – Digital Transformation on Manufacturing, Infrastructure and Service*. New York, NY, USA, Association for Computing Machinery, 2020, Art. 21. <https://doi.org/10.1145/3446434.3446445>
 15. Bhattad P., Jain V. Artificial intelligence in modern medicine — the evolving necessity of the present and role in transforming the future of medical care. *Cureus*, 2020, vol. 12, no. 5, Art. e8041. <https://doi.org/10.7759/cureus.8041>
 16. Gao J., Yang Y., Lin P., Park D. S. Computer vision in healthcare applications. *Journal of Healthcare Engineering*, 2018, vol. 2018, Art. 5157020. <https://doi.org/10.1155/2018/5157020>

Поступила в редакцию / Received 25.11.2021

Принята к публикации / Accepted 27.12.2021

Опубликована / Published 31.05.2022



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 233–240
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 233–240
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-233-240>

Article

What scientific folklore knows about the distances between the most popular distributions

M. Y. Kelbert¹, Yu. M. Suhov^{2,3,4}✉

¹Higher School of Economics – National Research University, 20 Myasnitskaya St., Moscow 101000, Russia

²University of Cambridge, The Old Schools, Trinity Ln, Cambridge CB2 1TN, UK

³University of Pennsylvania, 201 Old Main, State College, PA 16802, USA

⁴Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute), 19 build. 1 Bolshoy Karetny per., Moscow 127051, Russia

Mark Y. Kelbert, mkelbert@hse.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3952-2012>, AuthorID: 1137288

Yurii M. Suhov, yms@statslab.cam.ac.uk, AuthorID: 1131362

Abstract. We present a number of upper and low bounds for the total variation distances between the most popular probability distributions. In particular, some estimates of the total variation distances between one-dimensional Gaussian distributions, between two Poisson distributions, between two binomial distributions, between a binomial and a Poisson distribution, and also between two negative binomial distributions are given. The Kolmogorov – Smirnov distance is also presented.

Keywords: probability distribution, variation distance, Pinsker’s inequality, Le Cam’s inequalities, distances between distributions

For citation: Kelbert M. Y., Suhov Yu. M. What scientific folklore knows about the distances between the most popular distributions. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 233–240. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-233-240>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 519.85

Что научный фольклор знает о расстояниях между наиболее популярными распределениями

М. Я. Кельберт¹, Ю. М. Сухов^{2,3,4}✉

¹Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия, 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20

²Кембриджский университет, Великобритания, The Old Schools, Trinity Ln, Cambridge CB2 1TN

³Университет штата Пенсильвания, Соединенные Штаты Америки, Пенсильвания, 16802, г. Стейт-Колледж, кампус Юниверсити-Парк, ул. Олд Мейн, д. 201

⁴Институт проблем передачи информации имени А. А. Харкевича Российской академии наук, Россия, 127051, г. Москва, Б. Каретный пер., д. 19, стр. 1



Кельберт Марк Яковлевич, кандидат физико-математических наук, профессор-исследователь департамента статистики и анализа данных факультета экономических наук, mkelbert@hse.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3952-2012>, AuthorID: 1137288

Сухов Юрий Михайлович, кандидат физико-математических наук, ²профессор кафедры чистой математики и математической статистики; ³профессор математического факультета; ⁴научный сотрудник, yms@statslab.cam.ac.uk, AuthorID: 1131362

Аннотация. Представлен ряд верхних и нижних оценок для расстояний по вариации между наиболее популярными распределениями вероятностей. В частности, приводятся оценки расстояний по вариации между одномерными гауссовскими, между двумя пуассоновскими, между двумя биномиальными распределениями, между биномиальным и пуассоновским распределениями и между двумя негативными биномиальными распределениями. Также исследуется расстояние Колмогорова – Смирнова.

Ключевые слова: распределение вероятностей, расстояние вариации, неравенство Пинскера, неравенства Ле Кама, расстояния между распределениями

Для цитирования: *Kelbert M. Y., Suhov Yu. M. What scientific folklore knows about the distances between the most popular distributions [Кельберт М. Я., Сухов Ю. М. Что научный фольклор знает о расстояниях между наиболее популярными распределениями] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 233–240. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-233-240>*

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

A tale that becomes folklore is one that is passed down and whispered around. The second half of the word, lore, comes from Old English *lār*, i.e. 'instruction'. Different bounds for the distances between the most popular probability distributions (see [1]) appear in many problems of applied probability. Unfortunately, the available textbooks and reference books do not present them in a systematic way. In this short note, we make an attempt to fill this gap.

Let us remind that for probability measures \mathbf{P}, \mathbf{Q} with densities p, q

$$\text{TV}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \sup_{A \subset \mathbf{R}^d} |\mathbf{P}(A) - \mathbf{Q}(A)| = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d} |p(u) - q(u)| du.$$

Let us remind the coupling characterization of the total variation distance. For two distributions \mathbf{P} and \mathbf{Q} , a pair (X, Y) of random variables defined on the same probability space is called a *coupling* for \mathbf{P} and \mathbf{Q} if $X \sim \mathbf{P}$ and $Y \sim \mathbf{Q}$.

One of the useful facts is that there exists a coupling (X, Y) such that $\mathbf{P}(X \neq Y) = \text{TV}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$. Therefore, for any function f , we have $\mathbf{P}(f(X) \neq f(Y)) \leq \text{TV}(X, Y)$ with equality iff f is reversible.

1. Gaussian distributions

The total variation distance between one-dimensional Gaussian distributions is equal to

$$\tau = \tau(X_1, X_2) = \text{TV}(N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2))$$



and it depends on the parameters $\Delta = |\delta|$, with $\delta = \mu_1 - \mu_2$, and σ_1^2, σ_2^2 :

$$\frac{1}{200} \min \left[1, \max \left[\frac{|\sigma_1^2 - \sigma_2^2|}{\min[\sigma_1^2, \sigma_2^2]}, \frac{40\Delta}{\min[\sigma_1, \sigma_2]} \right] \right] \leq \tau \leq \frac{3|\sigma_1^2 - \sigma_2^2|}{2 \max[\sigma_1^2, \sigma_2^2]} + \frac{\Delta}{2 \max[\sigma_1, \sigma_2]}.$$

In the case $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ the following identity holds: $\tau = \Phi\left(\frac{\Delta}{2\sigma}\right) - \frac{1}{2}$.

1.1. Pinsker's inequality

In the general case, the upper bound is a version of *Pinsker's inequality* [2] for $\tau(X_1, X_2) = \text{TV}(X_1, X_2)$:

$$\tau(X_1, X_2) \leq \min\{1, \sqrt{\text{KL}(\mathbf{P}_{X_1} \parallel \mathbf{P}_{X_2})/2}\}, \tag{1}$$

where

$$\text{KL}(\mathbf{P}_{X_1} \parallel \mathbf{P}_{X_2}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} - 1 + \frac{\Delta^2}{\sigma_1^2} - \ln \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \right).$$

For multidimensional Gaussian case

$$\text{KL}(\mathbf{P}_{X_1} \parallel \mathbf{P}_{X_2}) = \frac{1}{2} \left(\text{tr}(\Sigma_1^{-1}\Sigma_2 - \mathbf{I}) + \delta^T \Sigma_1^{-1} \delta - \ln \det(\Sigma_2 \Sigma_1^{-1}) \right).$$

Let us prove the Pinsker's inequality (1).

We need the following bound

$$|x - 1| \leq \sqrt{\left(\frac{4}{3} + \frac{2x}{3}\right) \phi(x)}, \quad \phi(x) = x \ln x - x + 1. \tag{2}$$

If \mathbf{P} and \mathbf{Q} are singular, then $\text{KL} = \infty$ and Pinsker's inequality holds true. Assume \mathbf{P} and \mathbf{Q} are absolutely continuous. In view of (2) and Cauchy - Schwarz inequality

$$\begin{aligned} \tau(X, Y) &= \frac{1}{2} \int |p - q| = \frac{1}{2} \int q \left| \frac{p}{q} - 1 \right| \mathbf{1}_{\{q>0\}} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int \left(\frac{4q}{3} + \frac{2p}{3} \right) \mathbf{1}_{\{q>0\}} \right)^{1/2} \left(\int q \phi\left(\frac{p}{q}\right) \mathbf{1}_{\{q>0\}} \right)^{1/2} = \\ &= \left(\frac{1}{2} \int p \ln\left(\frac{p}{q}\right) \mathbf{1}_{\{q>0\}} \right)^{1/2} = (\text{KL}(\mathbf{P} \parallel \mathbf{Q})/2)^{1/2}. \end{aligned}$$

To check (2) define $g(x) = (x - 1)^2 - \left(\frac{4}{3} + \frac{2x}{3}\right) \phi(x)$. Then $g(1) = g'(1) = 0$, $g''(x) = -\frac{4\phi(x)}{3x} < 0$. Hence,

$$g(x) = g(1) + g'(1)(x - 1) + \frac{1}{2} g''(\xi)(x - 1)^2 = -\frac{4\phi(\xi)}{6\xi}(x - 1)^2 \leq 0.$$

Remark. Mark S. Pinsker was invited to be the Shannon Lecturer at the 1979 IEEE International Symposium on Information Theory, but could not obtain permission at that time to travel to the symposium. However, he was officially recognized by the IEEE Information Theory Society as the 1979 Shannon Award recipient.



1.2. Le Cam's inequalities

Le Cam's inequalities were presented in [3] for Hellinger distance defined by

$$\eta(X, Y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int (\sqrt{p_X(u)} - \sqrt{p_Y(u)})^2 du \right)^{1/2}$$

as follows:

$$\eta(X, Y)^2 \leq \tau(X, Y) \leq \eta(X, Y) (2 - \eta(X, Y)^2)^{1/2}. \tag{3}$$

For one-dimensional Gaussian distributions we get

$$\eta(X, Y)^2 = 1 - \frac{\sqrt{2\sigma_1\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} e^{-\frac{\Delta^2}{4(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}.$$

Let us present the proof of Le Cam's inequalities (3).

From $\tau(X, Y) = \frac{1}{2} \int |p - q| = 1 - \int \min[p, q]$ and $\min[p, q] \leq \sqrt{pq}$, it follows $\tau(X, Y) \geq 1 - \int \sqrt{pq} = \eta^2(X, Y)$. Next, $\int \min[p, q] + \int \max[p, q] = 2$. Therefore, by Cauchy - Schwarz inequality we get

$$\begin{aligned} \left(\int \sqrt{pq} \right)^2 &= \left(\int \sqrt{\min[p, q] \max[p, q]} \right)^2 \leq \int \min[p, q] \int \max[p, q] = \\ &= \int \min[p, q] \left(2 - \int \min[p, q] \right). \end{aligned}$$

Hence, it follows from

$$(1 - \eta(X, Y)^2)^2 \leq (1 - \tau(X, Y))(1 + \tau(X, Y))$$

that

$$\tau(X, Y) \leq \eta(X, Y) (2 - \eta(X, Y)^2)^{1/2}.$$

2. Poisson and binomial distributions

2.1. Two Poisson distributions

Let X_i are Poisson distributed random variables, i.e. $X_i \sim \text{Po}(\lambda_i)$, where $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Then the distance between two Poisson distributions is

$$\tau(X_1, X_2) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathbf{P}(N(u) = l - 1) du \leq \min \left[\lambda_2 - \lambda_1, \sqrt{\frac{2}{e}} (\sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_1}) \right],$$

where $N(u) \sim \text{Po}(u)$. Here $\lceil \lambda_1 \rceil \leq l \leq \lceil \lambda_2 \rceil$, and

$$l = l(\lambda_1, \lambda_2) = \lceil (\lambda_2 - \lambda_1) (\ln(\lambda_2/\lambda_1))^{-1} \rceil.$$

2.2. Distances between binomial distributions

Let X_i are drawn from binomial distributions, i.e. $X_i \sim \text{Bin}(n, p_i)$, $0 < p_1 < p_2 < 1$. Then the distance between two binomial distributions is equal to

$$\tau(X_1, X_2) = n \int_{p_1}^{p_2} \mathbf{P}(S_{n-1}(u) = l - 1) du \leq \frac{\sqrt{e}}{2} \frac{\psi(p_2 - p_1)}{(1 - \psi(p_2 - p_1))^2},$$



where $S_{n-1}(u) \sim \text{Bin}(n-1, u)$ and $\psi(x) = x\sqrt{\frac{n+2}{2p_1(1-p_1)}}$. Finally, define

$$l = \left\lceil \frac{-n \ln(1 - \frac{p_2-p_1}{1-p_1})}{\ln(1 + \frac{p_2-p_1}{p_1}) - \ln(1 - \frac{p_2-p_1}{1-p_1})} \right\rceil$$

with $\lceil np_1 \rceil \leq l \leq \lceil np_2 \rceil$.

2.3. Distance between binomial and Poisson distributions

Let $X \sim \text{Bin}(n, p)$ and $Y \sim \text{Po}(np)$, $0 < np < 2 - \sqrt{2}$, then

$$\tau(X, Y) = np[(1-p)^{n-1} - e^{-np}].$$

For the sum of Bernoulli r.v. $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ with $\mathbf{P}(X_i = 1) = p_i$ we have

$$\tau(S_n, Y_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |\mathbf{P}(S_n = k) - \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n}| < \sum_{i=1}^n p_i^2,$$

where $Y_n \sim \text{Po}(\lambda_n)$, $\lambda_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ [4]. A stronger result: for $X_i \sim \text{Bernoulli}(p_i)$ and $Y_i \sim \text{Po}(\lambda_i = p_i)$ there exists a coupling such that

$$\tau(X_i, Y_i) = \mathbf{P}(X_i \neq Y_i) = p_i(1 - e^{-p_i}).$$

2.4. Distance between negative binomial distributions

Let X_i be drawn from negative binomial distributions, i.e. $X_i \sim \text{NegBin}(m, p_i)$, $0 < p_1 < p_2 < 1$. Then

$$\tau(X_1, X_2) = (m+l-1) \int_{p_1}^{p_2} \mathbf{P}(S_{m+l-2}(u) = m-1) du,$$

where $S_n(u) \sim \text{Bin}(n, u)$ and

$$l = \left\lceil -m \frac{\ln(1 + \frac{p_2-p_1}{p_1})}{\ln(1 - \frac{p_2-p_1}{1-p_1})} \right\rceil$$

with $\lceil m \frac{1-p_2}{p_2} \rceil \leq l \leq \lceil m \frac{1-p_1}{p_1} \rceil$.

3. Multidimensional Gaussian distributions

In the case of multidimensional Gaussian distributions the distance is

$$\tau = \text{TV}(N(\mu_1, \Sigma_1), N(\mu_2, \Sigma_2)),$$

where Σ_1, Σ_2 are positive-definite.

Let $\delta = \mu_1 - \mu_2$ and Π be a $d \times (d-1)$ matrix whose columns form a basis for subspace orthogonal to δ . Let $\lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}$ denote the eigenvalues of the matrix

$(\Pi^T \Sigma_1 \Pi)^{-1} \Pi^T \Sigma_2 \Pi - \mathbf{I}_{d-1}$ and $\lambda = \sqrt{\sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i^2}$. If $\mu_1 \neq \mu_2$ then

$$\frac{1}{200} \min[1, \varphi(\delta, \Sigma_1, \Sigma_2)] \leq \tau \leq \frac{9}{2} \min[1, \varphi(\delta, \Sigma_1, \Sigma_2)], \tag{4}$$



where

$$\varphi(\delta, \Sigma_1, \Sigma_2) = \max \left[\frac{\delta^T (\Sigma_1 - \Sigma_2) \delta}{\delta^T \Sigma_1 \delta}, \frac{\sqrt{\delta^T \delta}}{\sqrt{\delta^T \Sigma_1 \delta}}, \lambda \right].$$

In the case of equal means $\mu_1 = \mu_2$ the bound (4) is simplified as follows:

$$\frac{1}{100} \min[1, \lambda] \leq \tau \leq \frac{3}{2} \min[1, \lambda].$$

Here $\lambda = \sqrt{\sum_{j=1}^d \lambda_j^2}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ are the eigenvalues of $\Sigma_1^{-1} \Sigma_2 - \mathbf{I}_d$ for positive-definite

Σ_1, Σ_2 . In the case $\Sigma_1 = \Sigma_2$ the following equality holds: $\tau = \Phi(\|\Sigma^{-1/2} \delta\|/2) - \frac{1}{2}$.

Let us present below the sketch of proof, cf. [5].

Let $X_i \sim N(\mu_i, \Sigma_i), i = 1, 2$. Without the loss of generality we can assume that Σ_1, Σ_2 are positively definite as

$$\text{TV}(N(0, \Sigma_1), N(0, \Sigma_2)) = \text{TV}(N(0, \Pi^T \Sigma_1 \Pi), N(0, \Pi^T \Sigma_2 \Pi)),$$

where Π is $d \times r$ matrix whose columns form orthogonal bases for $\text{range}(\Sigma_{1,2})$. Denote $u = (\mu_1 + \mu_2)/2, \delta = \mu_1 - \mu_2$ and decompose $\forall w \in \mathbf{R}^d$ as

$$w = u + f_1(w)\delta + f_2(w), f_2(w)^T \delta = 0.$$

Then

$$\begin{aligned} \max[\text{TV}(f_1(X_1), f_1(X_2)), \text{TV}(f_2(X_1), f_2(X_2))] &\leq \text{TV}(X_1, X_2) \leq \\ &\leq \text{TV}(f_1(X_1), f_1(X_2)) + \text{TV}(f_2(X_1), f_2(X_2)). \end{aligned}$$

All the components are Gaussian and $f_1(X_1) \sim N\left(\frac{1}{2}, \frac{\delta^T \Sigma_1 \delta}{\delta^T \delta}\right), f_1(X_2) \sim N\left(-\frac{1}{2}, \frac{\delta^T \Sigma_2 \delta}{\delta^T \delta}\right), f_2(X_1) \sim N(0, \mathbf{P} \Sigma_1 \mathbf{P}), f_2(X_2) \sim N(0, \mathbf{P} \Sigma_2 \mathbf{P}), \mathbf{P} = \mathbf{I}_d - \frac{\delta \delta^T}{\delta^T \delta}$. We claim that

$$\begin{aligned} \frac{1}{200} \min \left[1, \max \left[\frac{\delta^T (\Sigma_1 - \Sigma_2) \delta}{2\delta^T \Sigma_1 \delta}, \frac{40\sqrt{\delta^T \delta}}{\sqrt{\delta^T \Sigma_1 \delta}} \right] \right] &\leq \text{TV}(f_1(X_1), f_1(X_2)) \leq \\ &\leq \frac{3\delta^T (\Sigma_1 - \Sigma_2) \delta}{2\delta^T \Sigma_1 \delta} + \frac{\sqrt{\delta^T \delta}}{2\sqrt{\delta^T \Sigma_1 \delta}}. \end{aligned}$$

Then

$$\frac{1}{100} \min[1, \lambda] \leq \text{TV}(f_2(X_1), f_2(X_2)) \leq \frac{3}{2} \lambda,$$

where $\lambda = \left(\sum_{j=1}^d \lambda_j\right)^{1/2}$ and λ_i are the eigenvalues of $\Sigma_1^{-1} \Sigma_2 - \mathbf{I}_d$.

Here we present only the proof of the upper bound. Let $d = 1$ and $\sigma_2 \geq \sigma_1$. Then for $x = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ we have $x - 1 - \ln x \leq (x - 1)^2$ and, by Pinsker's inequality,

$$\text{TV}(N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} - 1 - \ln \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} + \frac{\Delta^2}{\sigma_1^2}} \leq$$



$$\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} - 1} - \ln \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta^2}{\sigma_1^2}} \leq \frac{1}{2} \frac{|\sigma_2^2 - \sigma_1^2|}{\sigma_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\sigma_1}.$$

For $d > 1$, by Pinsker’s inequality, one gets the upper bound in the case $\mu_1 = \mu_2 = 0$: if $\lambda_i > -\frac{2}{3} \forall i$

$$4\text{TV}(\mathbf{N}(0, \Sigma_1), \mathbf{N}(0, \Sigma_2))^2 \leq \sum_{i=1}^d \lambda_i - \ln(1 + \lambda_i) \leq \sum_{i=1}^d \lambda_i^2 = \lambda^2.$$

4. Kolmogorov – Smirnov distance

Kolmogorov – Smirnov distance (only for probability measures on \mathbf{R}) is defined by

$$\text{Kolm}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) := \sup_{x \in \mathbf{R}} |\mathbf{P}(-\infty, x) - \mathbf{Q}(-\infty, x)|.$$

We have

$$\text{Kolm}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \leq \text{TV}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}).$$

Suppose $X \sim \mathbf{P}, Y \sim \mathbf{Q}$ are two random variables and Y has a density with respect to a Lebesgue measure bounded by a constant C . Then

$$\text{Kolm}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \leq 2\sqrt{C\text{Wass}_1(\mathbf{P}, \mathbf{Q})},$$

where $\text{Wass}_1(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \inf[\mathbf{E}|X - Y| : X \sim \mathbf{P}, Y \sim \mathbf{Q}]$.

Let $N(t) \sim \text{Po}(t)$ then, via integration by part,

$$\mathbf{P}(N(t) \leq n) = \sum_{k=0}^n e^{-t} \frac{t^k}{k!} = \int_t^\infty e^{-u} \frac{u^n}{n!} du = \int_t^\infty \mathbf{P}(N(u) = n) du.$$

Hence,

$$\begin{aligned} \text{Kolm}(X_1, X_2) &= \tau(X_1, X_2) = \mathbf{P}(X_2 \geq l) - \mathbf{P}(X_1 \geq l) = \\ &= \mathbf{P}(X_1 \leq l - 1) - \mathbf{P}(X_2 \leq l - 1) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathbf{P}(N(u) = l - 1) du, \end{aligned}$$

where $l = \min[k \in \mathbf{Z}_+ : f(k) \geq 1]$ and $f(k) = \frac{\mathbf{P}(N(\lambda_2)=k)}{\mathbf{P}(N(\lambda_1)=k)}$.

Conclusion

This short review discusses only the most popular and well-known inequalities. Another interesting cases, i.e. the total variation distance between Binomial distribution and Gaussian with equal parameters, deserve special attention. Also, applications of these bounds in different problems of mathematical statistics, including classification theory and machine learning algorithms, are a rich field in the state of extensive development.

References

1. Suhov Yu., Kelbert M. *Probability and Statistics by Example. Vol. I. Basic Probability and Statistics*. 2nd ed. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 2014. 470 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139087773>
2. Pinsker M. *Information and Information Stability of Random Variables and Processes*. San Francisco, USA, Holden-Day Inc., 1964. 243 p.



3. Le Cam L. *Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory*. Springer Series in Statistics. New York, NY, Springer, 1986. 742 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4946-7>
4. Le Cam L. An approximation theorem for the Poisson binomial distribution. *Pacific Journal of Mathematics*, 1960, vol. 10, no. 4, pp. 1181–1197. <https://doi.org/10.2140/pjm.1960.10.1181>
5. Devroye L., Mehrabian A., Reddad T. The total variation distance between high-dimensional Gaussians. *ArXiv*, 2020, ArXiv:1810.08693v5, pp. 1–12.

Поступила в редакцию / Received 25.11.2021

Принята к публикации / Accepted 27.12.2021

Опубликована / Published 31.05.2022



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 241–249

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 241–249

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-241-249>

Article

On the functional structure of the ergatic system of precedent management of a complex production facility

S. M. Kulakov, R. S. Коynov[✉], E. N. Taraborina

Siberian State Industrial University, 42 Kirov St., Novokuznetsk 654007, Kemerovo region, Russia

Stanislav M. Kulakov, kulakov-ais@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0928-1753>, AuthorID: 156167

Roman S. Koynov, koynov_rs@mail, <https://orcid.org/0000-0001-5547-5511>, AuthorID: 740914

Elena N. Taraborina, taraborina@list.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4835-396X>, AuthorID: 448043

Abstract. The problem of the formation of the functional structure of the ergatic control system of a complex (poorly formalized) production facility (technological unit, human-technical complex, production) is considered, the solution of which is based on the use of a precedent approach to the development and implementation of control decisions (actions). The formulation of the synthesis problem for the procedure for constructing control solutions in an ergatic system is presented. The description of the classical CBR-cycle of making precedent decisions is given and its modification is developed, taking into account the peculiarities of the process of managing a complex object. The main subsystems and enlarged functional blocks of the control system are determined. An example of the application of the functional structure of the precedent management system as applied to the production process of steelmaking in an oxygen converter is presented.

Keywords: ergatic control system, production facility, precedent approach, CBR-decision-making cycle, functional structure, proximity metrics, optimal choice of precedents

For citation: Kulakov S. M., Koynov R. S., Taraborina E. N. On the functional structure of the ergatic system of precedent management of a complex production facility. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 241–249. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-241-249>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 517.98

О функциональной структуре эргатической системы прецедентного управления сложным производственным объектом

С. М. Кулаков, Р. С. Койнов[✉], Е. Н. Тараборина

Сибирский государственный индустриальный университет, Россия, Кемеровская область, 654007, г. Новокузнецк, ул. Кирова, д. 42

Кулаков Станислав Матвеевич, доктор технических наук, профессор кафедры автоматизации и информационных систем, kulakov-ais@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0928-1753>, AuthorID: 156167

Койнов Роман Сергеевич, старший преподаватель кафедры автоматизации и информационных систем, koynov_rs@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-5547-5511>, AuthorID: 740914



Тараборина Елена Николаевна, кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизации и информационных систем, taraborina@list.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4835-396X>, AuthorID: 448043

Аннотация. Рассматривается задача формирования функциональной структуры системы эргатического управления сложным (слабо формализуемым) производственным объектом (технологическим агрегатом, человеко-техническим комплексом, производством), решение которой базируется на применении прецедентного подхода к выработке и реализации управляющих решений (воздействий). Представлена постановка задачи синтеза процедуры построения управляющих решений в эргатической системе. Дано описание классического СБР-цикла принятия прецедентных решений и разработана его модификация, учитывающая особенности процесса управления сложным объектом. Определены основные подсистемы и укрупненные функциональные блоки управляющей системы. Представлен пример применения функциональной структуры системы прецедентного управления применительно к производственному процессу выплавки стали в кислородном конвертере.

Ключевые слова: система эргатического управления, производственный объект, прецедентный подход, СБР-цикл принятия решений, функциональная структура, метрики близости, оптимальный выбор прецедентов.

Для цитирования: *Kulakov S. M., Koynov R. S., Taraborina E. N.* On the functional structure of the ergatic system of precedent management of a complex production facility [Кулаков С. М., Койнов Р. С., Тараборина Е. Н. О функциональной структуре эргатической системы прецедентного управления сложным производственным объектом] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 241–249. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-241-249>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

The problem of automated control of poorly formalized production facilities (PFPF), which include many technological units and human-technical complexes of different industries, today cannot be recognized as effectively solved on the basis of the traditional (model) approach. This is due to the following factors: a wide variety of states of objects; intensity, complexity, multi-connectivity, and nonstationarity of production processes; incompleteness and errors of control of numerous parameters; multi-mode operation and variability of the characteristics of machines and units during operation; multivariance of products; the presence of a person in the control system. The named factors, as well as the insufficient efficiency of modern automated management of many PFPFs, induce to look for other approaches to making management decisions [1–4]. In particular, to develop the theory of decision-making and the theory of control of objects belonging to the class of PFPF, in the direction of creating automated (ergatic) control systems capable of accumulating and using field data on the practical experience of developing and implementing control decisions. In this paper, we consider the problem of constructing the functional structure of the ergatic control system of the PFPF, based on the method of precedents (precedent control systems, PCS). The latter allows you to move from a model approach to making control decisions to go to a full-scale model [5] and full-scale approaches, which are limited to the use of models of the control object “in small”, verbal models, or, in some situations, do without models.



1. CBR-cycle of decision-making as the basis for constructing ergatic control of PFPF

The method of decision-making based on precedents is widely known and is clearly represented by the so-called CBR-cycle, [6–8]. The classic version of CBR (Case-based reasoning) – the cycle includes 4 main stages of forming a solution for a new problem (new situation):

- retrieving from the knowledge base of one or more solutions – precedents of similar tasks (situations);
- reuse of the best solution-precedent;
- correction (adaptation, revise) of the selected precedent, taking into account the peculiarities of the new task (situation);
- retention of a new use case in the precedent library.

Concretization and modification of the classical CBR-cycle in relation to decision-making in the ergatic control system of PFPF consists in taking into account its features associated with the presence of a decision-maker (DM), with a variety of situations in the system (external influences, states of control objects, output actions, control impacts, control objectives, constraints), with the implementation of the decisions made and the results obtained, with the correction (retrospective optimization) of the implemented, but insufficiently effective control actions, with the actualization of the precedent database. The result of such concretization, in the form of a modified cycle for the development and implementation of control decisions, is shown in Fig. 1.

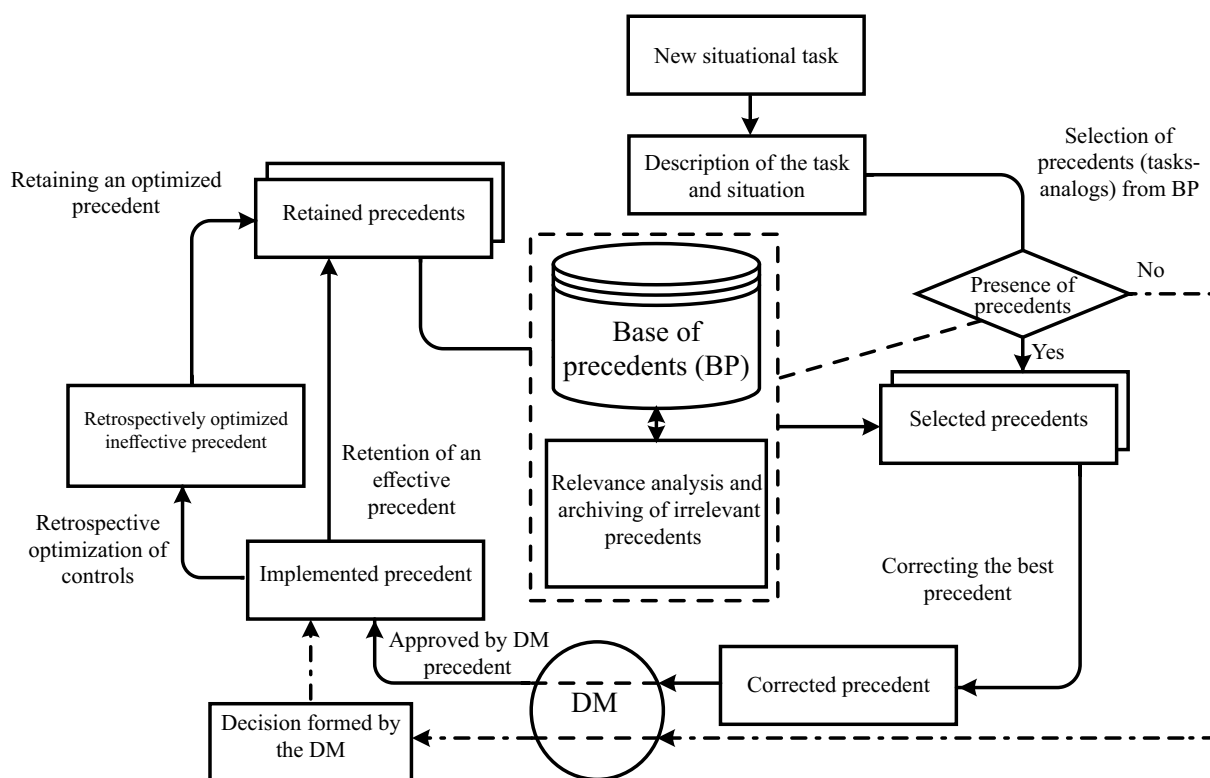


Fig. 1. Modified cycle for the development and implementation of management decisions in the management system of PFPF



2. The proposed functional structure of the precedent management system

The functional structure of the PCS is determined by the procedure for the formation and implementation of management decisions. Such a step-by-step procedure for management decisions in the form of a program of work for PFPF in the coming period includes the following actions.

1. Determination of data related to the conditions of the task of forming a program of work for a production facility in the coming period $[t, t + T]$.
2. Search in the base of precedents for such programs of the object's work, which according to the initial conditions and the results obtained are as close as possible to the conditions and required results of the task of the forthcoming period. The metrics recommended in [9] can be used as optimality criteria, supplementing them with restrictions on the admissible values of the parameters of the result obtained.
3. Correction of the control solution of the optimal precedent, taking into account significant differences in the initial conditions of the new and precedent problem of forming a work program. In this case, the model of the control object "in small" is used, as presented in the work of the authors [10]. The decision-maker (for example, operator-technologist, foreman, deputy head of the shop) participates in the correction procedure.
4. The implementation of the resulting control solution is carried out by a special subsystem after the approval of its decision-maker. Replenishment and updating of the base of precedents include the following operations:
 - reading of data corresponding to the implemented program of operation of the production facility;
 - retrospective optimization of the actually implemented work program, if it has drawbacks (unforeseen downtime, errors of personnel, or automation equipment, decrease in the values of performance indicators), using simple rules for recalculating in increments;
 - saving the actual (if there are no comments to it) optimized precedent;
 - removal from the base of precedents of those instances that become obsolete over time (due to significant changes in the characteristics of PCS, updating the assortment of products, and for other reasons).

The general diagram of the precedent management system of the PFPF, corresponding to the above actions, is shown in Fig. 2. The latter contains the following conventions:

- ∇ denotes measurement information sensors;
- \uparrow denotes executive devices;
- U^d, Y^d, W_H^d, W_K^d are vectors of actual (with subscript d) control actions (decisions), output actions, uncontrolled (subscript H) and controlled (subscript K) external influences of the control object;
- U^H, S^H, W_K^H are vectors of full-scale (index H) signals of measuring information about control actions, about the state of the object, about controlled external influences, about the output actions of the control object;
- $\{PR^H\}$ is a subset of natural (subscript H) retrieved precedents;
- PR^* is the optimal case solution.



The structure of the PCS includes four automated subsystems: monitoring, implementation of the current decision, selection of precedents, formation and updating of the base of precedents. Monitoring is focused on the formation and storage of primary data on the functioning of the object, which are necessary to create an information model for each precedent. It pays special attention to the functions of monitoring and managing the reliability of data, including through automatic calibration of sensors with the notification of specialists in the operation of control equipment.

The implementation of the current decision (in the form of a previously adopted management program for the current period of the work of the PFPF) is carried out with the direct participation of the decision-maker and automatic control facilities. The selection of precedents is carried out during the current period of work of the PFPF, the duration of which is determined by the technological or calendar cycle of the object's work. The formation of the base of precedents is carried out at the end of each cycle of the object's operation and involves not only storing data on high-quality precedents but also preliminary (before saving) optimization of satisfactory precedents using the so-called recalculating (corrective) mathematical [11], as well as ontological [12] models. Updating the base of precedents is necessary in cases where the base fills up quickly and some of its precedents become obsolete, that is, it becomes very rarely in demand in new conditions. This part complicates and lengthens the procedure for finding optimal use cases and should be moved from the workspace of the use case base to the archive part.

3. An example of concretization of one of the subsystems of the functional structure of the PCS

The general functional structure presented in Fig. 2 is further partially concretized in relation to the production organizational system – the steelmaking shop, for which the problem of the automated construction of the steel melting program is solved by each shift brigade. Concretization refers to the subsystem for forming the base of precedents. The problem of choosing the optimal precedent is formulated as follows [13]. Given:

1. The information model of the j -th smelt is a precedent, the structure of which is enlarged in Fig. 3 and includes information: about the output effects Y_j of the

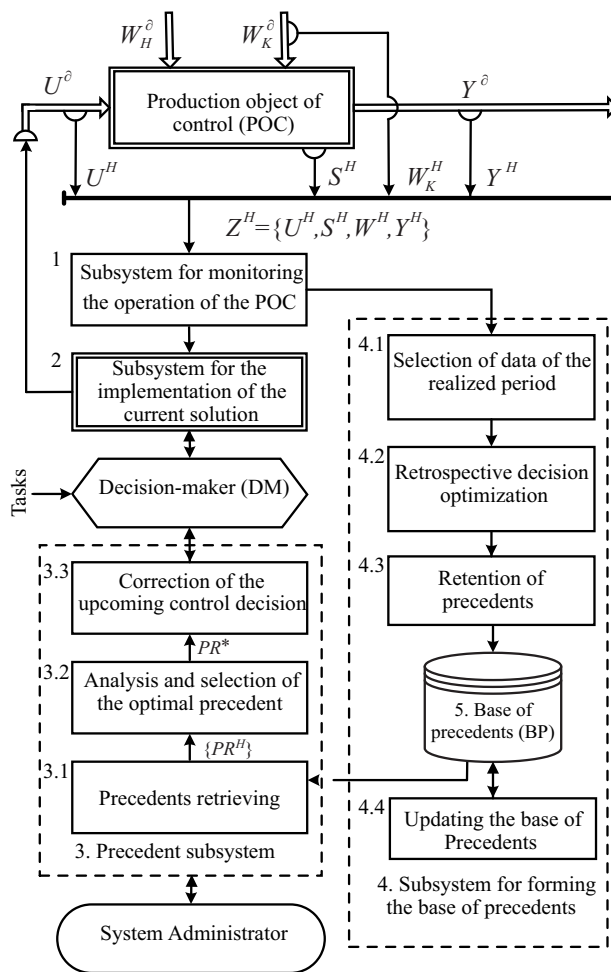


Fig. 2. Enlarged functional structure of the system for forming control decisions based on precedents



- control object (the steel-making complex), control U_j and controlled external W_j^K effects on the object, the parameters S_j of the state of the main technological unit.
2. Formed at the current time base of precedents, including data $Z_j\{Y, U, W, S\}_J$ on the set $J = \{j\}$ of past melts of steel for a period of time T (month, quarter, year).
 3. Many known measures (metrics, criteria) $M = \{m_1, \dots, m_K\}$ of the proximity of situations for past and forthcoming steel melting.
 4. Limitations that should be taken into account when selecting the best case heats:
 - the precedent should include the steel grade specified for the upcoming melting;
 - the actual precedents should include only those steel melts that were smelted further than a day (week, decade, month) before the upcoming melting;
 - an acceptable precedent (for rarely smelted steel grades) can be melting performed on another similar unit of the workshop.

It is required to choose on a set M the best metric of the proximity of the past and present melts of steel and to develop an algorithm for selecting a given number of optimal melts according to the criterion of the proximity of situations – precedents that satisfy the constraints.

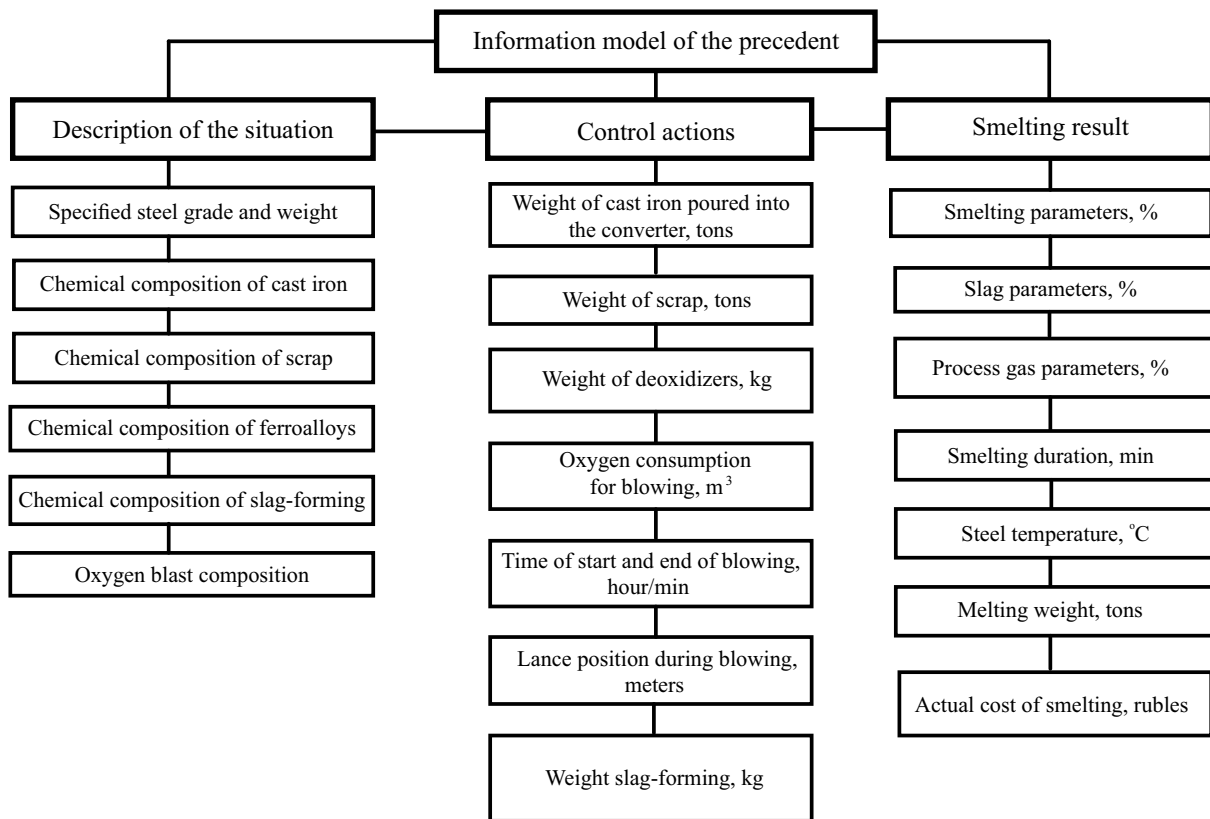


Fig. 3. Structure of the information model of the smelting-precedent

The following metrics were chosen as the initial set of proximity measures.

1. Euclidean measure $d_K(Z_j, Z^*)$, which is represented by the following expression:

$$d_E(Z_j, Z^*) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_{ji} - z_i^*)^2}, \quad (1)$$



where Z_j is the vector of parameters of the j -th precedent, Z^* is the vector of parameters of the upcoming melting; z_{ji} is the normalized value of the i -th parameter of the j -th precedent; z_i^* is the normalized value of the i -th parameter of the upcoming melting.

2. Hamming measure, represented by the expression:

$$d_H(Z_j, Z^*) = \sum_{i=1}^n |z_{ji} - z_i^*|. \quad (2)$$

3. The Manhattan measure is an extended case of the Hamming or Euclidean measure, with the only difference that it uses the parameter importance coefficient, for example:

$$d_{ME}(Z_j, Z^*) = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i (z_{ji} - z_i^*)^2}, \quad (3)$$

$$d_{MH}(Z_j, Z^*) = \sum_{i=1}^n a_i |z_{ji} - z_i^*|, \quad (4)$$

where a_i is the coefficient of the importance of the i -th melting parameter (as a rule, $a_i \in [0, 1]$).

4. Generalized counting distance:

$$d_0(Z_j, Z^*) = \sum_{i=1}^n \begin{cases} 1, & \text{if } z_{ji} \in (z_i^* \pm \delta Z_i) \\ 0, & \text{if } z_{ji} \notin (z_i^* \pm \delta Z_i) \end{cases}, \quad (5)$$

where $d_0(Z_j, Z^*)$ is the number of vector coordinates Z_j, Z^* by which these vectors differ from each other by an amount less than the neighborhood $\pm \delta Z_i$ of the vector Z^* coordinates $\{z_i^*\}$.

The proposed human-machine procedure for selecting the optimal precedents includes the following actions, which must be performed 10–20 minutes before the end of the current steel melting.

1. The workstation of the decision-maker (foreman and operator of the distributor) receives a task for the upcoming smelting (new situational task), containing the parameters of the situation for a new smelting, including: a given smelt mass and steel grade (chemical composition, temperature), the chemical composition of liquid iron, scrap, ferroalloys, and slag-forming.
2. The decision-maker launches the process of forming the 2 closest, to the current moment in time, samples from the base of precedents and an algorithm for selecting several optimal precedents, while:
 - (a) out of 2 samples, subsets of precedents are selected that satisfy the restrictions on the grade and temperature of steel, the weight of the melt, the presence of bulk materials;
 - (b) on the basis of a given measure of proximity, a limited group of optimal (that is, the ones closest to the up-coming melting in terms of the values of situational parameters) precedents is formed;
 - (c) representatives of the group of optimal precedents are consistently displayed by decision-makers in a concise form, who, at their discretion, choose a use case



for implementation. If the decision-maker does not find a suitable precedent, then they can change the measure of proximity or constraint and again refer to step 2.2 to form a new group of optimal precedents.

3. The decision-makers accept the selected precedent for implementation “as is” or make adjustments to it.

Conclusion

The CBR-cycle of decision-making is considered the basis for constructing a procedure for human-machine control of a poorly formalized production object. The general functional structure of the precedent control system has been developed. The concretization of individual modules of the functional control scheme associated with the selection of optimal precedents for the production organizational system – steel-making workshop is presented. Criteria and limitations are presented, as well as a procedure for choosing optimal precedents from a regularly updated database of past steel melts.

References

1. Avdeenko T. V., Makarova E. S. Knowledge representation model based on case-based reasoning and the domain ontology: Application to the IT consultation. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, iss. 11, pp. 1218–1223. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.08.424>
2. Yuan Guo, Bing Zhang, Sun Y., Jiang K., Wu K. Machine learning based feature selection and knowledge reasoning for CBR system under big data. *Pattern Recognition*, 2021, vol. 112, Art. 107805. <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2020.107805>
3. Longhua Xu, Chuanzhen Huang, Chengwu Li, Jun Wang, Hanlian Liu, Xiaodan Wang. A novel intelligent reasoning system to estimate energy consumption and optimize cutting parameters toward sustainable machining. *Journal of Cleaner Production*, 2020, vol. 261, Art. 121160. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2020.121160>
4. Homem T. P. D., Santos P. E., Costa A. H. R., da Costa Bianchi R. A., de Mantaras R. L. Qualitative case-based reasoning and learning. *Artificial Intelligence*, 2020, vol. 283, Art. 103258. <https://doi.org/10.1016/j.artint.2020.103258>
5. Myshljaeva L. P., ed. *Sistemy avtomatizatsii na osnove naturno-model'nogo podkhoda: v 3 t. T. 2: Sistemy avtomatizatsii proizvodstvennogo naznacheniya* [Automation Systems Based on Natural-model Approach. Vol. 2: Industrial Automation Systems]. Moscow, Nauka, 2006. 483 p. (in Russian).
6. Kolodner J. *Case-based Reasoning*. San Mateo, CA, USA, Morgan Kaufmann Publishers, 1993. 386 p.
7. Aamodt A., Plaza E. Case-based reasoning: Foundational issues methodological variations, and system approaches. *AI Communications*, 1994, vol. 7, iss. 1, pp. 39–59. <https://dx.doi.org/10.3233/AIC-1994-7104>
8. Varshavskii P. R., Ereemeev A. P. Modeling of case-based reasoning in intelligent decision support systems. *Scientific and Technical Information Processing*, 2010, vol. 37, iss. 5, pp. 336–345. <https://doi.org/10.3103/S0147688210050096>
9. Osipov G. S. *Lektsii po iskusstvennomu intellektu* [Lectures on Artificial Intelligence]. Moscow, URSS, 2018. 272 p. (in Russian).
10. Kulakov S. M., Trofimov V. B., Dobrynin A. S., Taraborina E. N. A precedent approach to the formation of control programs for objects of cyclic action. *Sistemy avtomatizatsii v obrazovanii, nauke i proizvodstve AS'2017* [Automation systems in education, science and production AS'2017: Proceedings of the XI All-Russian Scientific and Practical Conference (with international participation), December 14–16, 2017]. Novokuzneck, Publishing Center SibGIU, 2017, pp. 11–19 (in Russian).



11. Myshljaev L. P. Development of recalculative modeling for control systems. *Izvestiya vuzov. Chernaya metallurgiya* [Izvestiya. Ferrous Metallurgy], 1989, vol. 12, pp. 129–132 (in Russian).
12. Avdeenko T. V., Makarova E. S. The decision support system in IT-subdivisions based on integration of CBR approach and ontology. *Vestnik Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Sciences and Informatics*, 2017, vol. 3, pp. 85–99 (in Russian). <https://doi.org/10.24143/2072-9502-2017-3-85-99>
13. Koynov R. S., Kulakov S. M., Taraborina E. N. Selection of optimal precedents for the formation of a control program for the upcoming steel melting. *Avtomatizirovannyyi elektroprivod i promyshlennaya elektronika* [Automated Electric Drive and Industrial Electronics: Proceedings of the Ninth Scientific and Practical Conference, November 25–26, 2020]. Novokuzneck, Publishing Center SibGIU, 2020, pp. 100–108 (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 24.11.2021

Принята к публикации / Accepted 27.12.2021

Опубликована / Published 31.05.2022



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 250–265

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 250–265

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-250-265>

Article

Skill-based clustering algorithm for online job advertisements

A. A. Ternikov

HSE University — St. Petersburg, 3A Kantemirovskaya St., Saint Petersburg 194100, Russia

Andrei A. Ternikov, aternikov@hse.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2354-0109>, AuthorID: 956559

Abstract. Clustering on the basis of categorical data is one of the challenging problems in data mining. The paper provides the clustering algorithm for job vacancies using information about the skills required. In the first step, the procedure of unstructured textual information standardization is proposed. The resulting procedures include stages of synonyms and general terms identification based on the combination of TF-IDF and n -grams approaches for translated and transliterated terms. Then, the algorithm is provided and validated on the data obtained from the cross-regional hiring platform. The algorithm provides validation of clusters' extraction, including hierarchical cluster analysis and Girvan – Newman coalition search. Output number of clusters is verified with internal validity scores and suggests disjoint sets of terms that describe particular job occupation groups in the IT sector. Based on obtained clusters well-matched and mismatched terms are identified using Silhouette scores. Given procedures allow to minimize human involvement in clustering itself and produce reasonable clusters for the following interpretation and analysis. In general, the approach for clusters identification based on categorical data is provided and tested on a sample of online job advertisements. It has a high potential in use for feature engineering tasks in machine learning research and applied labor market research in economics.

Keywords: online job advertisements, skill-sets in IT, occupational mismatch, clustering of vacancies, natural language processing

For citation: Ternikov A. A. Skill-based clustering algorithm for online job advertisements. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 250–265. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-250-265>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 51-77

Алгоритм кластеризации на основе навыков для онлайн-объявлений о вакансиях

А. А. Терников

Санкт-Петербургский филиал Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», Россия, 194100, г. Санкт-Петербург, ул. Кантемировская, д. 3А

Терников Андрей Александрович, старший преподаватель департамента менеджмента, aternikov@hse.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2354-0109>, AuthorID: 956559

Аннотация. Кластеризация на основе категориальных данных — одна из сложных задач интеллектуального анализа данных. В статье представлен алгоритм кластеризации вакансий с использованием информации о необходимых навыках. На первом этапе предлагается проце-



дура стандартизации неструктурированной текстовой информации. Полученные процедуры включают этапы идентификации синонимов и общих терминов на основе сочетания подходов TF-IDF и n -граммов для переведенных и транслитерированных терминов. Затем предложенный алгоритм проверяется на данных, полученных с межрегиональной платформы online-рекрутмента. Алгоритм обеспечивает проверку количества извлеченных кластеров, включая иерархический кластерный анализ и коалиционный поиск Гирвана – Ньюмана. Результирующее количество кластеров проверяется при помощи внутренних оценок достоверности и предлагает непересекающиеся наборы терминов, которые описывают определенные группы профессий в секторе информационных технологий. На основе полученных кластеров хорошо совпадающие и несовпадающие термины идентифицируются с использованием индексов Силуэта (Silhouette Index). Указанные в статье процедуры позволяют минимизировать участие человека в процессе кластеризации и создавать интерпретируемые кластеры для последующего анализа. В целом, подход к идентификации кластеров на основе категориальных данных представлен и протестирован на выборке онлайн-объявлений о вакансиях. Он имеет большой потенциал использования для задач формирования факторов в исследованиях машинного обучения и для прикладных исследований рынка труда в экономике.

Ключевые слова: онлайн-объявления о вакансиях, набор навыков в ИТ, несоответствие профессий, кластеризация вакансий, обработка естественного языка

Для цитирования: Ternikov A. A. Skill-based clustering algorithm for online job advertisements [Терников А. А. Алгоритм кластеризации на основе навыков для онлайн-объявлений о вакансиях] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 250–265. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-250-265>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

Job seeking process involves employers, employees, state authorities, and the educational system. In order to provide powerful matching signals, different parties disclose skills that are required or possessed. From the side of the employer, skills contain extended information about relevant experience, knowledge, and character required. Especially in the IT-sphere, this information is highly valuable due to incessant changes arising in the era of digitalization. However, new job occupations and professional tasks with their own mix of competences are inevitably created. Thus, the particular set of skills determines not only job occupations themselves but also new job directions in a broad sense. The last-mentioned allows discovering issues of job occupations clustering on the basis of skills required. Accordingly, the appropriate clustering approach should satisfy at least the criteria such as a reasonable number of clusters for interpretation and a stable connection between cluster elements. This paper introduces the novel clustering approach for data structures based on linked sets of elements.

The paper's structure is the following. Section 1 provides an overview of related work about online job advertisements clustering issues and state-of-the-art approaches. Section 2 describes the data sample extraction and processing of unstructured information about skills. Section 3 contains the algorithm description. Section 4 provides results. The last two sections relate to the discussion and concluding remarks.

1. Related work

Several studies highlight issues of the importance of certain skills in the IT-sphere. Firstly, this branch of the labor market relates to the high volatility of technical and soft



skills required [1–3]. Secondly, skills, especially technical, have an outstanding structure due to the presence of precise formulation of programming languages, technological stack, interface instruments, etc., so it is easier to classify them in attribution to several job positions [4–7]. Thirdly, the adoption of new technologies requires to changing combinations of skills of workers in order to perform newly created tasks [8–12]. The current paper is aimed to provide the clustering algorithm of vacancies based on information about skills.

The existing clustering approaches used in related works have their advantages and disadvantages. In general, algorithms are sensitive to the data structure and the initial parameters set for a number of clusters. We can highlight the following state-of-the-art clustering algorithms, which take associations between elements in set-based data structures. For example, some researchers use Structural Topic Modeling, in particular, Latent Dirichlet Allocation [13–16] and Latent Semantic Analysis [17, 18], that provide probabilistic matching between textual tokens but the number of topics is set beforehand. The other uses Hierarchical Clustering, which takes a dissimilarity matrix as input, but the results can be unstable because of the empirical choice of appropriate linkage function and the direction of clusters' aggregation [19–21]. In addition, several works introduce multiple-view clustering algorithms, which are based on several input matrices [22–24]. However, the initial parameter setting issues, such as choice of clusters number and cluster collaboration strength is chosen empirically.

Concerning the experimental setting with job advertisements data, many studies provide algorithms for information extraction from online vacancies. However, the way of their implementation differs from the stated research task. For example, if the main research objective relates to the process of matching the unstructured text fields from job advertisements with the official classifier for occupations and skills classification algorithms are implemented for the job titles and extended job descriptions [25–28]. The other researchers use a data-driven approach where obtained data is manually corrected by domain experts in order to provide the appropriate systematization [14, 29].

2. Data collection and processing

2.1. Online job advertisements sample

The data are collected from one of the largest hiring platforms in the CIS (Commonwealth of Independent States) region named HeadHunter (<https://hh.ru>). The typical structure of an online job advertisement (vacancy) includes the main following fields: vacancy ID, job name, specialization codes (from 1 to 6 professional area codes) publishing date, area (region), description (unstructured text), skills (the set of the size from 0 to 30 elements that consist of unstructured texts each up to 100 symbols). The main stages of the sample creation with the number of observations in parentheses are presented below.

1. IT vacancies extraction (3,066,707 obs.) with “description” fields, containing not less than 30 symbols and at least one “IT” specialization code according to HeadHunter classifier (“1.*”: “IT, Internet, Telecom”)¹. Time frame: from May 2015 till September 2019. The subset of specialization codes for “IT” includes 37 IDs in total.

2. Removal of ambiguous occupations by the classifier (2,815,605 obs.). Seven groups are dropped: “Art Director”, “Content”, “Marketing”, “Sales”, “Producer”, “Business Development”, “Other” (8.2% reduction).

¹HeadHunter API: Specializations, <https://api.hh.ru/specializations?locale=EN>



3. Identification of portion with skills specified² (501,512 obs.): 28.7% out of 1,744,839 vacancies created since 2015.

4. Checking of the sample representation by professional codes: no significant difference between the structure of specialization codes in the sample with skills specified and in vacancies with non-specified skills is found by paired t-test (582 pairs of IT specialization codes mixed with non-IT).

5. Checking of yearly difference for aggregation purposes by IT specialization codes: slight diversification in combinations with the first presented year (2015) in terms of the structure of specializations but in general no significant differences in median values according to sign-test (Table 1).

6. Removal of duplicated entries by both “description” and “skills” fields (351,623 obs.). So, obtained yearly distribution of vacancies: 17,551 in 2015; 53,110 in 2016; 74,560 in 2017; 116,262 in 2018; 90,140 in 2019.

7. Checking the sample represented by the structure of regions where vacancies are published. According to the t-test, the geographical structure of given data preserves in the sample (p-value for 4,457 regions comparison is close to 1). The top-10 regions (cities) in the cleaned sample represents 61.1% of the data (Table 2).

Table 1

Sign-test of paired yearly differences over the structure of IT specialization codes

Year #1	Year #2	p-value
2015	2016	0.01
2015	2017	0.03
2015	2018	0.07
2015	2019	0.24
2016	2017	0.87
2016	2018	1.00
2016	2019	0.41
2017	2018	0.62
2017	2019	0.24
2018	2019	0.62

Table 2

Distribution of vacancies by regions

Region (city)	Country	Share, %
Moscow	Russia	27.53
Saint-Petersburg	Russia	11.68
Minsk	Belarus	6.02
Novosibirsk	Russia	3.29
Kiev	Ukraine	2.44
Voronezh	Russia	2.34
Ekaterinburg	Russia	2.05
Nizhny Novgorod	Russia	2.01
Almaty	Kazakhstan	1.95
Kazan	Russia	1.77

8. Extraction of all skills from the sample (70,198 unique).

9. Removal of extra punctuation symbols (except #, + at the end) and white-spaces; lowercase applying; then, separation by punctuation symbols followed by white-spaces (60,111 unique).

10. Reduction of rare terms. The setting of the threshold was obtained with Zipf’s curve (Fig. 1). The term with the rank log 8 relates to 28 occurrences in the sample, thus, all terms with the lower frequency are removed. As a result of data processing, the sample of IT vacancies consists of 351,623 observations. In addition, the set of 3,034 unique frequent skills is prepared for further standardization.

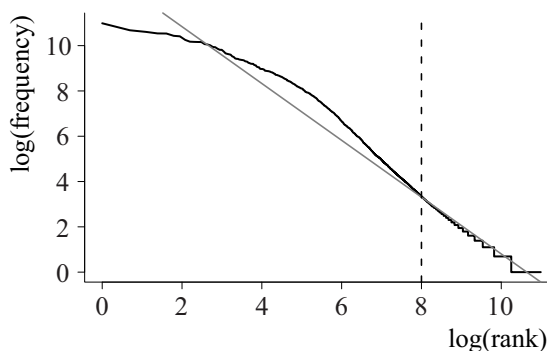


Fig. 1. Zipf’s curve and threshold detection

²The first vacancy with “skills” field was published in June 2015.



2.2. Skills' standardization

The general logic of skills' (terms') standardization is followed by the steps of similar terms finding (synonyms) and generalized terms aggregation (the common term for the particular subset of skills). Moreover, the steps of matching abbreviations and multi-lingual terms processing are highlighted separately. In order to minimize the stage of manual processing the following steps are made:

- 1) removal of extra punctuation and digits;
- 2) splitting of terms into smaller ones with *regex* “/| : | : ”;
- 3) tracking of terms with white spaces (words reordering and stemming);
- 4) finding potential abbreviations by the first letters extraction from terms with white spaces;
- 5) translation of terms with Cyrillic letters using Yandex.Translate API³ (from Russian to English).

In the next step the following databases are obtained:

- 1) perfectly matched synonyms (281 observations);
- 2) potential synonyms after stemming (102 groups of 249 observations);
- 3) potential generalized terms (83 groups of 699 observations);
- 4) potential abbreviations (35 groups of 99 observations);
- 5) perfect synonyms after translation (81 observations);
- 6) potential synonyms after translation (38 groups of 128 observations);
- 7) potential generalized terms after translation (56 groups of 179 observations).

After manual processing of obtained databases, the terms that are not matched at least in synonyms or generalized terms (1,969 terms) are processed with TF-IDF uni-grams and bi-grams. Then, such processed terms are added to given databases. Finally, such terms are merged with the database of synonyms (2,297 terms) and generalized terms (1,394 terms generalized to 251).

Using the notation, which is given in the initial dataset such terms are matched with obtained synonyms and generalized terms by the number of occurrences of the initial term (or the written in Latin translated analog). Moreover, some narrow in their meaning terms are substituted with generalized terms by the co-occurrence in the initial dataset. So, at the endpoint of this stage 1,730 terms are obtained (including both synonyms and generalized terms only) that are matched with the initial sample data. After matching 343,669 vacancies are stayed with at least one matched term from the obtained dataset out of 351,623 (97.7%).

3. Vacancies' clustering algorithm

The data structure of vacancies (343,669 entries) obtained after the previous step is a 2-tuple (*id*, *skills*), where *id* stands for ID of the vacancy entry and *skills* is a subset of standardized skills (several from 1,730 terms) corresponding to such ID. Then, this data structure is transformed into *skills* representation (1,730 entries), so, each skill has a set of vacancy IDs. In order to perform the clustering procedure, the measure of similarity between *skills* is needed. Following the data structure (categorical data), the Jaccard similarity index and confidence metrics (over pairs of *skills*) seem to be the most appropriate. In order to find Jaccard indexes, the MinHash procedure (introduced in [30]) with one hash function over 100 members is performed. Based on obtained indexes the relative confidence metrics were calculated.

³Yandex.Translate API, <https://tech.yandex.com/translate/>



The main logic of an algorithm, introduced in this paper, is based on the automatic finding of disjoint clusters of relatively equal size that are ready for human interpretation. Inputs are taken from categorical data and represent dissimilarity matrices. One of the relevant clustering algorithms, hierarchical agglomerative clustering (*HAC*), deals with symmetric dissimilarity matrices [31], so, three dissimilarity matrices were obtained. Denote them as **J** (filled with $1 - Jaccard(A, B)$), **C1** (filled with $1 - conf(A \rightarrow B)$), and **C2** (filled with $1 - conf(B \rightarrow A)$), where *A*, *B* are sets of IDs for corresponding *skills*.

The concise description of the algorithm and its supporting procedures (see Appendix), which is presented below, includes the following steps.

1. Three dissimilarity square matrices (**J**, **C1**, **C2**) are taken as input. Indexes of such matrices represent terms (skills in particular), where the *i*-th row and column attribute to the same skill. Threshold *t* (in current data it takes a value of 100) describes the reasonable (for research objectives) number of elements in a particular cluster, where the *HAC* procedure is needed to be stopped.

2. Detection of aggregated items for all dissimilarity matrices. Iterated *HAC* procedure with 2-cluster separation is run till the number of elements in the bigger cluster is greater than *t*.

3. Filtering of obtained clusters by their average size and introducing the pairwise aggregation procedure over clusters using the Girvan – Newman algorithm [32,33]. Then, rearrangement of duplicated items in obtained clusters for each input matrix. Finally, rearrangement of items in obtained clusters for three input matrices between each other with recalculation of dissimilarity measures.

4. Iterated reduction of the number of clusters by merging smaller-sized clusters with bigger-sized ones obtained with the cut-off.

5. Matching of non-matched terms obtained on the second step with given clusters. Then, the previous step is repeated.

6. The result of the algorithm is a disjoint set of clusters including all input terms.

4. Results

The algorithm proposed in the previous section is applied to the data sample obtained in Section 2. The final number of clusters is 13. Seeing the fact that the data itself is non-labeled and the algorithm takes three dissimilarity matrices as an input only internal validity could be assessed. The choice of the indexes is adapted for the input data in accordance with [34]. So, three measures are assessed: *C* index [35,36], Γ [37] and *G*(+) [38].

The results for all different input matrices and their transformations are presented in Table 3. The clusters, their sizes, and main representatives are given in Table 4.

According to provided measures, clusters have a low proportion of disconcordant elements. However, due to the presence of terms that are highly related to several clusters, certainly matched terms could be separated from the other terms for further analysis. Silhouette scores [39]

are calculated for such separation. So, 293 terms (16.9% from all) with negative Silhouette scores are supposed to be mismatched (negative values indicating the presence of the

Table 3

Internal validity

Parameters	<i>C</i> index	Γ	<i>G</i> (+)
J	0.19	0.12	0.10
C1	0.25	0.02	0.11
C2	0.39	0.04	0.11
$\max_i \mathbf{H}_i$	0.20	0.12	0.10
$\min_i \mathbf{H}_i$	0.36	0.01	0.11
$\sum_i \mathbf{H}_i / 3$	0.30	0.05	0.10

**Algorithm** Skill-based Clustering**Input:** $\mathbf{H} = (\mathbf{J}, \mathbf{C1}, \mathbf{C2})$ is a set of dissimilarity matrices, t is a threshold**Output:** C stands for obtained clusters

```

1: Let  $D = (d1, d2, d3)$ ;  $U$  is an ordered set of terms (indexes of input matrices)
   Iterated HAC
2: for  $i$  in  $\mathbf{H}$  do
3:    $j := t + 1, m := 1$ 
4:   while  $j > t$  do
5:      $s \leftarrow HAC(\mathbf{H}_i)$  with 2 clusters:  $s = (s_1, s_2)$ 
6:      $s_k = (n_k, u_k), k = \{1, 2\}$ , where  $n_k$  is a number of items,  $u_k$  is a set of items
7:      $D_i[m] \leftarrow u_g$ , where  $g = \arg \min(n_1, n_2)$ 
8:      $m := m + 1, j := \max(n_1, n_2)$ 
9:      $\mathbf{H}_i \leftarrow$  sub-matrix of  $\mathbf{H}_i$  without rows and columns for  $u_g$  terms
10:  end while
11:   $D_i[m] \leftarrow u_g$ , where  $g = \arg \max(n_1, n_2)$ 
12: end for
   Relatively big clusters extraction
13: for  $i$  in  $D$  do
14:    $\overline{d}$  is a mean number of items among  $d_l \in D_i$ , where  $l \in [1, |D_i|]$ 
15:    $D_i \leftarrow \{d_k \subset D_i : |d_k| < \overline{d}, k \in [1, |D_i| - 1]\}$ 
16: end for
17:  $\hat{D} \leftarrow JCLUST(D_2, D_3, 0)$ 
18:  $U \leftarrow CCLUST(JDUPL(\hat{D}_1), JDUPL(\hat{D}_2), 0)$ 
19:  $\hat{U} \leftarrow JCLUST(U, D_1, 0)$ 
20:  $S \leftarrow CCLUST(JDUPL(\hat{U}_1), JDUPL(\hat{U}_2), 0)$ 
21:  $A \leftarrow JCLUST(U, S, 1)$ 
22:  $B \leftarrow CCLUST(JDUPL(A_1), JDUPL(A_2), 1)$ 
23:  $B1 \leftarrow B_i(1) : B_i(2) = 1, i \in [1, |B|]$ 
24:  $B2 \leftarrow B_i(1) : B_i(2) = 2, i \in [1, |B|]$ 
25:  $C \leftarrow SBCLUST(B2, B1, \frac{1}{3})$ 
26: while  $|C| \neq |SBCLUST(\{c_i(1) \in C^{[i]} : c_i(2) = 1\}, \{c_i(1) \in C^{[i]} : c_i(2) = 2\}, \frac{1}{3})|$  do
27:    $C \leftarrow SBCLUST(\{c_i(1) \in C^{[i]} : c_i(2) = 1\}, \{c_i(1) \in C^{[i]} : c_i(2) = 2\}, \frac{1}{3})$ 
28: end while
29:  $F \leftarrow \{U \setminus \{c_i(1) \in C^{[i]}\}\}$  is a set of non-matched terms
30:  $C \leftarrow TMATCH(F, C)$ 
31:  $v := \frac{1}{3}$ 
32: while  $\{c_i(1) \in C^{[i]} : c_i(2) = 1\} \neq \emptyset$  do
33:   while  $|C| \neq |SBCLUST(\{c_i(1) \in C^{[i]} : c_i(2) = 1\}, \{c_i(1) \in C^{[i]} : c_i(2) = 2\}, v)|$  do
34:      $C \leftarrow SBCLUST(\{c_i(1) \in C^{[i]} : c_i(2) = 1\}, \{c_i(1) \in C^{[i]} : c_i(2) = 2\}, v)$ 
35:   end while
36:    $v := \frac{v}{2}$ 
37: end while
38:  $C \leftarrow \{c_i(1) \in C^{[i]} : c_i(2) = 2\}$ 
39: return  $C$ 

```




term in different clusters), the rest of the terms with non-negative scores indicate the relation to one cluster (well-matched terms). The resulted word clouds are presented in Fig. 2.

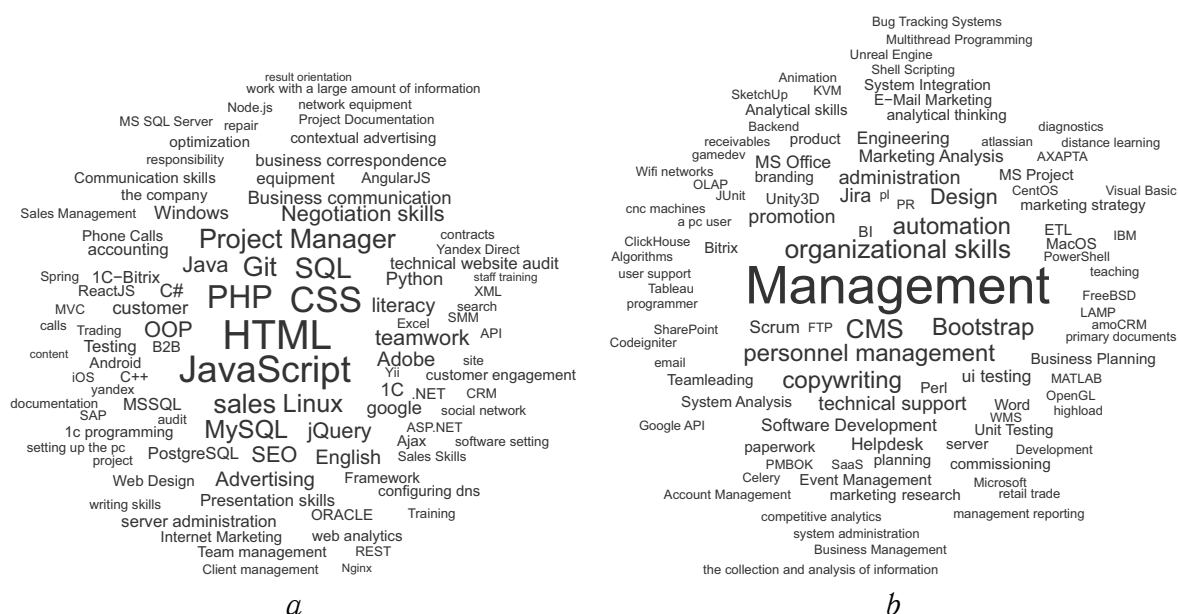


Fig. 2. Word clouds of terms and their frequencies separated by Silhouette scores: *a* stands for top-100 well-matched terms; *b* stands for top-100 mismatched terms

The results of clustering provide some insights for further research. For example, the algorithm detects some supporting areas such as marketing and management that are obtained separately from the main provided IT technologies. So, the researcher may decide the comparison of managerial skills and senior positions or just concentrate on the technical skills only. The other advantage relates to the quite clear separation between “hard” and “soft” skills. It allows to maintain and update already existing databases of such skills (see e.g. [4–6]).

Comparing the introduced approach with the traditional clustering algorithms (for 13 clusters), we mention the relative cluster size and internal validity scores. Our approach allows us to obtain relatively the same-sized clusters based on three dissimilarity matrices (the variation coefficient of the number of cluster elements equals 0.83). However, by providing traditional Hierarchical Clustering with several agglomeration methods⁴ over different SEO variants of the input matrix (provided in Table 4) we obtain an unbalanced clusters distribution. Intervals for variation coefficients of cluster numbers in attribution to different methods are as follows: [1.33, 3.17] for “ward.D”, [1.95, 3.18] for “ward.D2”, [3.37, 3.57] for “UPGMA”, [3.39, 3.53] for “WPGMA”, [3.54, 3.58] for “WPGMC”, [3.55, 3.58] for “UPGMC”.

Observing the relative distribution of elements among clusters, we can note that traditional clustering approaches are inferior to Skill-based Clustering, but due to the highly-skewed proportion of cluster members (on average one of the clusters

⁴Clustering was implemented with “hclust” function in “R”, <https://rdrr.io/cran/fastcluster/man/hclust.html>



Table 4

Obtained clusters		
Name	Size	Top-15 representatives
Marketing	110	SEO, Advertising, google, technical website audit, contextual advertising, Internet Marketing, optimization, web analytics, Yandex Direct, yandex, social network, site, SMM, search, project
Hardware	184	Linux, Windows, equipment, server administration, configuring dns, network equipment, setting up the pc, software setting, IP, TCP, pc repair, server configuration, Active Directory, Windows Server, maintenance
Big Data	57	Python, C++, BigData, Data Analysis, Machine Learning, SCALA, Hadoop, ElasticSearch, Mathematical Statistics, Data Mining, Spark, Mathematical Modeling, Data Science, Kafka, Cassandra
Software	467	HTML, JavaScript, CSS, PHP, SQL, Git, MySQL, Java, OOP, jQuery, C#, PostgreSQL, MSSQL, 1C-Bitrix, Framework
Administration	96	SAP, C, Unix, Unit Testing, Qt, STL, System Integration, Teamleading, Boost, ABAP, Unreal Engine, ARM, Embedded, teaching, sed
Security	52	audit, Information Security, Cisco, security, competitive analytics, antivirus protection network, means of cryptographic protection of information, technical means of information protection, implementation of information systems, domains, Juniper, audit information systems, SIEM, DLP, Check Point
Web Design	104	Adobe, Testing, organizational skills, copywriting, Bootstrap, Web Design, writing skills, content, Functional testing, UI, Graphic Design, UX, layout, video, writing
Engineering	70	Design, Project Documentation, repair, documentation, Engineering, control, AutoCAD, Visio, gost, automation of processes, process control system, circuitry, programming, circuit design, normative-technical documentation
Analytics	83	Excel, technical support, processing, database, powerpoint, ERP, Reporting, paperwork, Financial Analysis, VBA, financial statements, SAP ERP, work with current customer base, analytical studies, primary documents
Soft Skills	140	Communication skills, responsibility, result orientation, stress resistance, diligence, Customer Support, care, analytical thinking, Event Management, Bitrix, dedication, punctuality, Game Development, E-Mail Marketing, initiative
Management	76	Management, personnel management, administration, ui testing, Recruitment, dbms, BI, Delphi, Business Planning, Web Application Development, Xcode, ExtJS, Strategic Planning, mobile app, personnel evaluation
Testing	80	QA, Business Analysis, Selenium, modeling of processes, UML, BPMN, ITIL, Redmine, ITSM, Blockchain, banking software, IDEF, Test Automation, Quality Control, manual testing
ERP	211	sales, Project Manager, teamwork, Negotiation skills, English, literacy, Business communication, 1C, customer, Presentation skills, business correspondence, accounting, 1c programming, B2B, the company



contains more than 55% of observations) internal validity scores are better. Accordingly, for “ward.D” method the internal validity scores varies as follows: [0.05, 0.18] for C index, [0.55, 0.89] for Γ , [0.02, 0.11] for $G(+)$. Interpreting the obtained results, we denote the higher proportion of compact clusters (with smaller distances between elements) compared with Skill-based Clustering in accordance to Γ . Such performance is caused by the relatively high number of small-sized clusters (typically from five to ten elements) obtained after traditional Hierarchical Clustering. Moreover, the C index also indicates that overall pairwise distances among elements from the same cluster are lower. Interestingly, the $G(+)$ index, which indicates the proportion of discordant pairs of elements is not substantially different from Skill-based Clustering procedures.

Thus, the proposed in the paper algorithm mainly deals with the task of relatively same-size clusters identification provides their number, and precisely allocates sub-clusters. Taking into account internal validity scores estimations, the point for the discussion is between interpretability of obtained clusters and sub-clusters detection.

5. Discussion

The algorithm provided in the current paper is performed to prevent unnecessary split of clusters into smaller ones and at the same time to avoid too much clusters aggregation. The research objectives are satisfied in the matter of detection of relatively same-sized clusters which could be described by a human. The novelty of the current study is the skill-based approach and the usage of the initial categorical data structure where only unweighted links between categories exist. However, it is hard to validate the result of the clustering (especially based on multi-lingual data) on the basis of specific classifiers of occupations and skills that are officially introduced and used for job position names validation in the other studies. Moreover, the database of some software developers' skills (e.g. the data from the annual Stack Overflow Developer survey⁵) cannot cover the whole IT sphere with hardware and support specialists. In addition, newly created sets of vacancies broaden the links between several skills from different professional occupations and tasks performed in the modern IT sector.

The overall algorithms' procedures are aimed to automate data pre-processing for further use. Followed by the steps of skills standardization the main proposed algorithm solves the task of particular skills reallocation among the reasonable (interpretative) number of clusters. Thereby, it is difficult to talk about the time and memory complexity of the algorithm because of the combination of different algorithmic techniques and their iterations from one side. On the other side, research objectives do not rely on the inner performance but the result expressed in the content of obtained clusters. Such clusters could be interpreted by the sub-field or purpose of usage in the IT sector. However, there is a tiny amount of entries that might be put into different groups because the algorithm itself is data-driven and it processes only the categorical data flows.

Conclusion

The provided algorithm extends the traditional Hierarchical Clustering by the proposition of several dissimilarity matrices as input, which allows for obtaining more

⁵Stack Overflow Annual Developer Survey, <https://insights.stackoverflow.com/survey>



stable results (clusters) compared to a traditional approach. Given procedures help to get relatively same-sized clusters for further interpretation by providing the cluster-size threshold. Moreover, the algorithm is scalable for applied data science tasks, which are based on associations inside the sets of elements, in particular for categories in natural language. For example, market basket analysis (clustering of customers' receipts), topic modeling (detection of common semantic patterns), recommendation systems (user experience pattern recognition), etc.

References

1. Bensberg F., Buscher G., Czarnecki C. Digital transformation and IT topics in the consulting industry: A labor market perspective. In: V. Nissen, ed. *Advances in Consulting Research. Contributions to Management Science*. Springer, Cham, 2019, pp. 341–357. https://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-95999-3_16
2. Kappelman L., Jones M., Johnson V., McLean E., Boonme K. Skills for success at different stages of an IT professional's career. *Communications of the ACM*, 2016, vol. 59, iss. 8, pp. 64–70. <https://dx.doi.org/10.1145/2888391>
3. Litecky C., Arnett K., Prabhakar B. The paradox of soft skills versus technical skills in IS hiring. *Journal of Computer Information Systems*, 2004, vol. 45, iss. 1, pp. 69–76. <https://doi.org/10.1080/08874417.2004.11645818>
4. Börner K., Scrivner O., Gallant M., Ma S., Liu X., Chewing K., Wu L., Evans J. A. Skill discrepancies between research, education, and jobs reveal the critical need to supply soft skills for the data economy. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2018, vol. 115, iss. 50, pp. 12630–12637. <https://dx.doi.org/10.1073/pnas.1804247115>
5. Deming D., Kahn L. Skill requirements across firms and labor markets: Evidence from job postings for professionals. *Journal of Labor Economics*, 2017, vol. 36, iss. 1, pp. 337–369. <https://dx.doi.org/10.1086/694106>
6. Sayfullina L., Malmi E., Kannala J. Learning representations for soft skill matching. In: *Analysis of Images, Social Networks and Texts. AIST 2018*. Lecture Notes in Computer Science (R0), vol. 11179. Springer, Cham, 2018, pp. 141–152. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11027-7_15
7. Wowczko I. Skills and vacancy analysis with data mining techniques. *Informatics*, 2015, vol. 2, iss. 4, pp. 31–49. <https://dx.doi.org/10.3390/informatics2040031>
8. Bailey J., Mitchell R. Industry perceptions of the competencies needed by computer programmers: Technical, business, and soft skills. *Journal of Computer Information Systems*, 2006, vol. 47, iss. 2, pp. 28–33.
9. Brooks N., Greer T., Morris S. Information systems security job advertisement analysis: Skills review and implications for information systems curriculum. *Journal of Education for Business*, 2018, vol. 93, iss. 5, pp. 213–221. <https://doi.org/10.1080/08832323.2018.1446893>
10. Casado-Lumbreras C., Colomo-Palacios R., Soto-Acosta P. A vision on the evolution of perceptions of professional practice: The case of IT. *International Journal of Human Capital and Information Technology Professionals*, 2015, vol. 6, iss. 2, pp. 65–78. <https://doi.org/10.4018/IJHCITP.2015040105>
11. Föll P., Thiesse F. Aligning is curriculum with industry skill expectations: A text mining approach. *Proceedings of the 25th European Conference on Information Systems (ECIS)*, Guimarães, Portugal, June 5–10, 2017, pp. 2949–2959.
12. Stal J., Paliwoda-Pękosz G. Fostering development of soft skills in ICT curricula: A case



- of a transition economy. *Information Technology for Development*, 2019, vol. 25, iss. 2, pp. 250–274. <https://doi.org/10.1080/02681102.2018.1454879>
13. Gurcan F., Cagiltay N. Big data software engineering: Analysis of knowledge domains and skill sets using LDA-based topic modeling. *IEEE Access*, 2019, vol. 7, pp. 82541–82552. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2924075>
 14. De Mauro A., Greco M., Grimaldi M., Ritala P. Human resources for Big Data professions: A systematic classification of job roles and required skill sets. *Information Processing & Management*, 2018, vol. 54, iss. 5, pp. 807–817. <https://doi.org/10.1016/j.ipm.2017.05.004>
 15. Xu T., Zhu H., Zhu C., Li P., Xiong H. Measuring the popularity of job skills in recruitment market: A multi-criteria approach. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, AAAI, 2018, vol. 32, iss. 1, pp. 2572–2579.
 16. Wu J., Shi H., Yang J. Are big data talents different from business intelligence expertise?: Evidence from text mining using job recruitment advertisements. *2017 International Conference on Service Systems and Service Management*, IEEE, 2017, pp. 1–6. <https://doi.org/10.1109/ICSSSM.2017.7996289>
 17. Debortoli S., Müller O., vom Brocke J. Comparing business intelligence and big data skills. *Business & Information Systems Engineering*, 2014, vol. 6, iss. 5, pp. 289–300. <https://doi.org/10.1007/s12599-014-0344-2>
 18. Radovilsky Z., Hegde V., Acharya A., Uma U. Skills requirements of business data analytics and data science jobs: A comparative analysis. *Journal of Supply Chain and Operations Management*, 2018, vol. 16, iss. 1, pp. 82–101.
 19. Aken A., Litecky C., Ahmad A., Nelson J. Mining for computing jobs. *IEEE Software*, 2010, vol. 27, iss. 1, pp. 78–85. <https://doi.org/10.1109/MS.2009.150>
 20. Pejic-Bach M., Bertonce T., Meško M., Krstić Ž. Text mining of industry 4.0 job advertisements. *International Journal of Information Management*, 2020, vol. 50, pp. 416–431. <https://dx.doi.org/10.1016/j.ijinfomgt.2019.07.014>
 21. Poonnawat W., Pacharawongsakda E., Henchareonlert N. Jobs analysis for business intelligence skills requirements in the ASEAN region: A text mining study. In: *Advances in Intelligent Informatics, Smart Technology and Natural Language Processing. iSAI-NLP 2017*. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 807. Springer, Cham, 2019, pp. 187–195. https://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-94703-7_17
 22. De Carvalho F., Lechevallier Y., de Melo F. Partitioning hard clustering algorithms based on multiple dissimilarity matrices. *Pattern Recognition*, 2012, vol. 45, iss. 1, pp. 447–464. <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2011.05.016>
 23. Pedrycz W. Collaborative fuzzy clustering. *Pattern Recognition Letters*, 2002, vol. 23, iss. 14, pp. 1675–1686. [https://doi.org/10.1016/S0167-8655\(02\)00130-7](https://doi.org/10.1016/S0167-8655(02)00130-7)
 24. Cleuziou G., Exbrayat M., Martin L., Sublemontier J.-H. CoFKM: A centralized method for multiple-view clustering. *ICDM 2009 IEEE 9th International Conference on Data Mining*. Miami, USA, IEEE, 2009, pp. 752–757. <https://doi.org/10.1109/ICDM.2009.138>
 25. Amato F., Boselli R., Cesarini M., Mercorio F., Mezzanzanica M., Moscato V., Persia F., Picariello A. Challenge: Processing web texts for classifying job offers. *Proceedings of the 2015 IEEE 9th International Conference on Semantic Computing (IEEE ICSC 2015)*, 2015, pp. 460–463. <https://dx.doi.org/10.1109/ICOSC.2015.7050852>
 26. Boselli R., Cesarini M., Mercorio F., Mezzanzanica M. Classifying online job advertisements through machine learning. *Future Generation Computer Systems*, 2018, vol. 86, pp. 319–328. <https://dx.doi.org/10.1016/j.future.2018.03.035>
 27. Colombo E., Mercorio F., Mezzanzanica M. AI meets labor market: Exploring the link



- between automation and skills. *Information Economics and Policy*, 2019, vol. 47, pp. 27–37. <https://dx.doi.org/10.1016/j.infoecopol.2019.05.003>
28. Lovaglio P., Cesarini M., Mercurio F., Mezzanzanica M. Skills in demand for ICT and statistical occupations: Evidence from web-based job vacancies. *Statistical Analysis and Data Mining*, 2018, vol. 11, iss. 2, pp. 78–91. <https://dx.doi.org/10.1002/sam.11372>
29. Karakatsanis I., AlKhader W., MacCrory F., Alibasic A., Omar M. A., Aung Z., Woon W. L. Data mining approach to monitoring the requirements of the job market: A case study. *Information Systems*, 2017, vol. 65, pp. 1–6. <https://doi.org/10.1016/j.is.2016.10.009>
30. Broder A. On the resemblance and containment of documents. In: *Proceedings. Compression and Complexity of SEQUENCES 1997 (Cat. No. 97TB100171)*. IEEE, 1997, pp. 21–29. <https://doi.org/10.1109/SEQUEN.1997.666900>
31. Murtagh F., Legendre P. Ward's hierarchical agglomerative clustering method: Which algorithms implement Ward's criterion? *Journal of Classification*, 2014, vol. 31, iss. 3, pp. 274–295. <https://doi.org/10.1007/S00357-014-9161-Z>
32. Girvan M., Newman M. Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2002, vol. 99, iss. 12, pp. 7821–7826. <https://doi.org/10.1073/pnas.122653799>
33. Newman M., Girvan M. Finding and evaluating community structure in networks. *Physical Review E*, 2004, vol. 69, iss. 2, Art. 026113. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.69.026113>
34. Milligan G. A Monte Carlo study of thirty internal criterion measures for cluster analysis. *Psychometrika*, 1981, vol. 46, iss. 2, pp. 187–199. <https://doi.org/10.1007/BF02293899>
35. Dalrymple-Alford E. Measurement of clustering in free recall. *Psychological Bulletin*, 1970, vol. 74, iss. 1, pp. 32–34. <https://doi.org/10.1037/H0029393>
36. Hubert L., Levin J. A general statistical framework for assessing categorical clustering in free recall. *Psychological Bulletin*, 1976, vol. 83, iss. 6, pp. 1072–1080. <https://doi.org/10.1037/0033-2909.83.6.1072>
37. Baker F., Hubert L. Measuring the power of hierarchical cluster analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 1975, vol. 70, iss. 349, pp. 31–38. <https://doi.org/10.1080/01621459.1975.10480256>
38. Rohlf F. J. Methods of comparing classifications. *Annual Review of Ecology and Systematics*, 1974, vol. 5, iss. 1, pp. 101–113. <https://dx.doi.org/10.1146/annurev.es.05.110174.000533>
39. Rousseeuw P. Silhouettes: A graphical aid to the interpretation and validation of cluster analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1987, vol. 20, pp. 53–65. [https://dx.doi.org/10.1016/0377-0427\(87\)90125-7](https://dx.doi.org/10.1016/0377-0427(87)90125-7)

Поступила в редакцию / Received 07.08.2021

Принята к публикации / Accepted 08.02.2022

Опубликована / Published 31.05.2022

Appendix

Algorithm's procedures

JCLUST aggregates clusters on the basis of the Girvan – Newman algorithm and similarity indexes; returns enlarged clusters.

TMATCH takes the set of terms and adds them into given clusters using similarity metrics; returns clusters, filled-in with new terms.



Procedure 1

JCLUST($X, Y, switcher$)

- 1: Let $S = X \times Y$; M is an edge weights vector for the Girvan – Newman algorithm
 - 2: **if** $switcher = 0$ **then**
 - 3: **for** s in S **do**
 - 4: $M_s \leftarrow \frac{|S_s(x) \cap S_s(y)|}{|S_s(x) \cup S_s(y)|}$
 - 5: **end for**
 - 6: $M \leftarrow M_s : M_s > 1.5 \cdot IQR(M)$
 - 7: **else**
 - 8: **for** s in S **do**
 - 9: $M_s \leftarrow \max\left(\frac{|S_s(x) \cap S_s(y)|}{|S_s(x)|}, \frac{|S_s(x) \cap S_s(y)|}{|S_s(y)|}\right)$
 - 10: **end for**
 - 11: $M \leftarrow M_s : M_s > \frac{2}{3}$
 - 12: **end if**
 - 13: Let l number of communities obtained with the Girvan – Newman algorithm over M
 - 14: $\mathcal{C}^{[l]} \leftarrow$ the set of community items, \mathcal{N} stands for clusters that are not in communities
 - 15: $\mathcal{M} \leftarrow (\mathcal{C}, \mathcal{N})$
 - 16: **return** \mathcal{M}
-

Procedure 2

TMATCH(F, C)

- 1: **while** $F \neq \emptyset$ **do**
 - 2: **for** f in F **do**
 - 3: $\mathbf{C2} \leftarrow$ sub-matrix of $\mathbf{C2}$ with rows stands for the term F_f
 - 4: Let k be the vector, where $|k| = |C|$; $m := 1$
 - 5: **for** c in C **do**
 - 6: $\widehat{\mathbf{C2}} \leftarrow$ sub-matrix of $\mathbf{C2}$ with columns stands for C_c terms
 - 7: **if** $\widehat{\mathbf{C2}}_{ij} \neq \emptyset \forall i \in [1, |F_f|], j \in [1, |C_c|]$ **then**
 - 8: $k[m] \leftarrow \sum_{i=1}^{|F_f|} \sum_{j=1}^{|C_c|} \widehat{\mathbf{C2}}_{ij}$
 - 9: **else**
 - 10: $k[m] \leftarrow 0$
 - 11: **end if**
 - 12: $m := m + 1$
 - 13: **end for**
 - 14: **if** $|\arg \max k[m]| = 1$ **then**
 - 15: $C_{\arg \max k[m]}(1) \leftarrow C_{\arg \max k[m]}(1) \cup F_f$
 - 16: **end if**
 - 17: **end for**
 - 18: $F \leftarrow \{U \setminus \{c_i(1) \in C^{[i]}\}\}$
 - 19: **end while**
 - 20: **return** C
-



JDUPL rearranges duplicated items from the set of overlapping clusters and returns disjoint ones.

Procedure 3

JDUPL(X)

```

1:  $m := 1$ 
2: while  $m > 0$  do
3:   Let  $H = \{(x_i, l_i, i) \mid x_i \in X_i, l_i = |X_i|, i \in [1, |X|]\}$ 
4:    $H1 = \{(x_i, I(\arg \min L)) \mid L \subseteq H_i(2), I \subseteq H_i(3) : x_i \in H_i\}$ 
5:    $\mathcal{X} \leftarrow$  the set of new communities obtained in  $H1$ 
6:   if  $\nexists i, j : H_i(1) = H_j(1), i \neq j$  then
7:      $m := 0$ 
8:   end if
9: end while
10: return  $\mathcal{X}$ 

```

SBCLUST takes small and large clusters (by the number of elements), merge small clusters to bigger ones with similarity threshold; returns enlarged clusters.

Procedure 4

SBCLUST($X, Y, threshold$)

```

1:  $t := 1, s := 1$ 
2: for  $x$  in  $X$  do
3:    $\widetilde{\mathbf{C1}} \leftarrow$  sub-matrix of  $\mathbf{C1}$  with rows stands for  $X_x$  terms
4:   Let  $k$  be the vector, where  $|k| = |Y|$ ;  $m := 1$ 
5:   for  $y$  in  $Y$  do
6:      $\widehat{\mathbf{C1}} \leftarrow$  sub-matrix of  $\widetilde{\mathbf{C1}}$  with columns stands for  $Y_y$  terms
7:     if  $\widehat{\mathbf{C1}}_{ij} \neq \emptyset \forall i \in [1, |X_x|], j \in [1, |Y_y|]$  then
8:        $k[m] \leftarrow \max_{1 \leq i \leq |X_x|, 1 \leq j \leq |Y_y|} \widehat{\mathbf{C1}}_{ij}$ 
9:     else
10:       $k[m] \leftarrow 0$ 
11:    end if
12:     $m := m + 1$ 
13:  end for
14:  if  $\max k > threshold$  then
15:     $R_s \leftarrow (t, \arg \max k[m])$ 
16:     $s := s + 1$ 
17:  end if
18:   $t := t + 1$ 
19: end for
20: for  $r$  in  $R$  do
21:    $Y_{r(2)} \leftarrow Y_{r(2)} \cup X_{r(1)}$ 
22: end for
23:  $X \leftarrow X_i : i \notin \{R_j(1) \in R : j \in [1, |R|]\}$ 
24:  $\mathcal{J} \leftarrow \{\{(x, 1) : x \in X\} \cup \{(y, 2) : y \in Y\}\}$  is the set of item sets
25: return  $\mathcal{J}$ 

```



CCLUST takes item sets and returns rearranged clusters based on recalculated similarity metrics.

Procedure 5

CCLUST($X, Y, \text{switcher}$)

```

1: Let  $S = X \times Y$ 
2: for  $s$  in  $S$  do
3:    $M_s \leftarrow \frac{|S_s(x) \cap S_s(y)|}{|S_s(y)|}$ 
4: end for
5:  $G = \{(i, T_i) : T_i = \sum_{j=1}^n M_i, i \in [1, |X|], j \in [1, |\hat{X}|] \mid \hat{X} \leftarrow X_i \subseteq S\}$ 
6:  $G = \{g \in G_i \mid i \in [k]\}$ , where  $[k]$  stands for indexes of  $G_k(2)$  sorted increasingly
7: for  $g$  in  $G$  do
8:    $\hat{S} = \{(x_i, y_i) \mid X_{g(1)} \subseteq S, i = g(1)\}$ 
9:   for  $\hat{s}$  in  $\hat{S}$  do
10:     $M_{\hat{s}} \leftarrow \frac{|\hat{S}_{\hat{s}}(x) \cap \hat{S}_{\hat{s}}(y)|}{|\hat{S}_{\hat{s}}(y)|}$ 
11:   end for
12:    $\hat{S} = \{\hat{s} \in \hat{S}_i \mid i \in [\hat{k}]\}$ , where  $[\hat{k}]$  stands for indexes of  $M_{\hat{s}}$  sorted increasingly
13:   for  $\hat{s}$  in  $\hat{S}$  do
14:      $A := \hat{s}(x), B := \hat{s}(y)$ 
15:     if  $|\hat{s}(x)| < |\hat{s}(y)|$  then
16:        $A := \hat{s}(y), B := \hat{s}(x)$ 
17:     end if
18:      $Q := A \cap B$ 
19:     if  $M_{\hat{s}} < \frac{1}{3}$  then
20:        $\hat{S}_{\hat{s}}(y) \leftarrow \hat{S}_{\hat{s}}(y) \setminus Q$ 
21:     else
22:        $\hat{S}_{\hat{s}}(x) \leftarrow \hat{S}_{\hat{s}}(x) \setminus Q$ 
23:     end if
24:   end for
25:    $S \leftarrow \hat{S}$ : re-clustered items
26: end for
27: if  $\text{switcher} = 0$  then
28:    $\mathcal{J} \leftarrow \{\{X \subseteq S\} \cup \{Y \subseteq S\}\}$  is the set of item sets by rearranged clusters
29: else
30:    $\mathcal{J} \leftarrow \{(x, 1) : x \in X \subseteq S\} \cup \{(y, 2) : y \in Y \subseteq S\}$ 
31: end if
32: return  $\mathcal{J}$ 

```

ДАТА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 266–273
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 266–273

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-266-273>

Персоналии

УДК 539.3

К 60-летию со дня рождения профессора Юрия Николаевича Радаева

Л. Ю. Коссович[✉], И. В. Кириллова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физико-математических наук, президент СГУ, заведующий кафедрой математической теории упругости и биомеханики, president@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4775-7348>, AuthorID: 2935

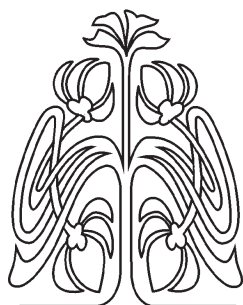
Кириллова Ирина Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, pano-bio@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8053-3680>, AuthorID: 179980

Аннотация. Статья посвящается 60-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Ю. Н. Радаева — известного ученого в области механики деформируемого твердого тела и прикладной математики, члена редакционной коллегии журнала «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика».

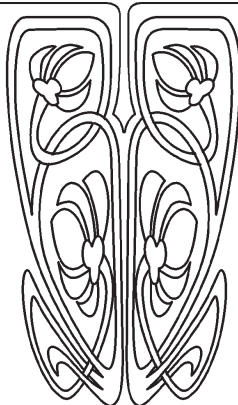
Ключевые слова: механика деформируемого твердого тела, пластичность, разрушение, микрополярный континуум, Ю. Н. Радаев

Для цитирования: Коссович Л. Ю., Кириллова И. В. К 60-летию со дня рождения профессора Юрия Николаевича Радаева // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 266–273. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-266-273>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Приложения





Personalia

To 60th anniversary of professor Yuri N. Radayev

Yu. A. Kossovich[✉], I. V. Kirillova

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Leonid Yu. Kossovich, president@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4775-7348>, AuthorID: 2935

Irina V. Kirillova, nano-bio@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8053-3680>, AuthorID: 179980

Abstract. The article is dedicated to the 60th anniversary of professor Yu. N. Radaev, the well-known scientist in the field of mechanics of deformable solids and applied mathematics, the member of the editorial board of the journal “Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics”.

Keywords: mechanics of solids, plasticity, fracture, micropolar continuum, Yu. N. Radaev

For citation: Kossovich Yu. A., Kirillova I. V. To 60th anniversary of professor Yuri N. Radayev. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 266–273 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-266-273>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

10 февраля 2022 г. исполнилось 60 лет доктору физико-математических наук, профессору Юрию Николаевичу Радаеву — известному ученому в области механики деформируемого твердого тела и прикладной математики, педагогу, деятелю науки и высшего образования в России.

Ю. Н. Радаев — автор фундаментальных работ по математической теории пластичности, механике разрушения, теории трещин и накопления микрповреждений, связанной гиперболической термоупругости и термомеханике, микрополярной упругости, механике сыпучих и гранулированных сред, механике растущих тел (см., например, [1–38]).

Научные проекты под руководством Ю. Н. Радаева в течение ряда лет были поддержаны Министерством образования и науки РФ, Международным научным фондом и Российским фондом фундаментальных исследований (проекты «Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности», «Гиперболические тепловые волны в твердых телах с микроструктурой», «Волновые задачи связанной гиперболической термоупругости». Он неоднократно принимал участие в крупных научных проектах, таких как «Моделирование процессов производства тканых 3D-материалов» и «Механические аспекты дизайна и анализа изделий аддитивного производства: теория и эксперимент»).

В 1993–1995 гг. Ю. Н. Радаев прошел научную стажировку в университете Нагоя, Япония (Department of Mechanical Engineering, Nagoya University, Nagoya, Japan), финансирование которой осуществлялось Министерством науки и культуры Японии; в 1999–2000 гг. при поддержке CNRS проводил научно-исследовательскую работу в лаборатории математического моделирования в механике при Университете Пьера и Марии Кюри, Франция (Centre National de la Recherche Scientifique, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris, France); в 2017–2018 гг. работал в Университете Киото в должности visiting professor (Department of Energy Conversion Science, Graduate School of Energy Science, Kyoto University, Japan), где читал курсы по механике разрушения и механике поврежденности.



В 2004–2007 гг. Ю. Н. Радаев руководил крупным научным проектом, реализуемым Самарским государственным университетом, по новому прочтению, переводу и комментированию фундаментальной трехтомной монографии А. Уайтхеда и Б. Рассела «Principia Mathematica» [7]. Современный перевод на русский язык «Principia Mathematica» [8] восполняет существующий пробел в литературе по математической логике и основаниям математики, а также способствует развитию формальной математики в духе ее основоположников.

В составе коллектива исследователей Ю. Н. Радаев работал над вопросами применения алгебры и анализа псевдотензоров к задачам механики растущих тел и микрополярной теории упругости и проблемами условия гиперболичности и факторизуемости дифференциальных операторов изотропной микрополярной упругости.

В настоящее время научные интересы Юрия Николаевича направлены на решение следующих задач: классификация микрополярных упругих моделей с точки зрения преобразований зеркальной симметрии и инверсии; идентификация гемитропных биологических тканей и биоматериалов; моделирование поведения структурных элементов скелетов и экзоскелетов живых организмов под воздействием различных механических и биологических факторов (в том числе патогенных); расчет на прочность пакетов гемитропных сферических оболочек, цилиндров и пакетов цилиндров под действием нагрузок давления, кручения и изгиба.

Ю. Н. Радаев принимает активное участие в подготовке кадров высшей квалификации. Читаемые им курсы «Математическая теория пластичности», «Механика разрушения», «Динамические задачи теории упругости», «Реологические модели сплошных сред», «Математическая физика и ее приложения», «Двумерные задачи теории упругости», «Вязкоупругие и наследственные среды» вызывают большой интерес и способствуют профессиональному развитию молодых ученых. Многие годы он является ведущим организатором Всероссийских конференций по механике деформируемого твердого тела.

С Саратовским университетом Юрия Николаевича связывает долгое научное сотрудничество. Он много лет является членом диссертационного совета по механике деформируемого тела при Саратовском университете и членом редколлегии журнала «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика» (входит в Web of Sciences, Scopus и RSCI).

Поздравляем Юрия Николаевича с 60-летием и желаем ему новых ярких достижений в науке, талантливых учеников и успехов в его многогранной деятельности.

Список литературы

1. Арутюнян Н. Х., Радаев Ю. Н. Уругопластическое кручение цилиндрического стержня при конечных деформациях // Прикладная математика и механика. 1989. Т. 53, вып. 6. С. 1014–1022.
2. Radayev Y. N., Murakami S., Hayakawa K. Mathematical description of anisotropic damage state in continuum damage mechanics // Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. 1994. Vol. 60A, № 580. P. 68–76 (in Japanese). <https://doi.org/10.1299/kikaia.60.2750>
3. Radayev Y. N. Thermodynamical model of anisotropic damage growth. Part I. Canonical dynamic state variables of continuum damage mechanics and thermodynamical functions of three-dimensional anisotropic damage state // Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics. 1996. Vol. 21, № 2. P. 129–152. <https://doi.org/10.1515/jnet.1996.21.2.129>
4. Radayev Y. N. Thermodynamical model of anisotropic damage growth. Part II. Canonical damage growth rate equations and theory of damage invariants // Journal of Non-



- Equilibrium Thermodynamics. 1996. Vol. 21, № 3. P. 197–222. <https://doi.org/10.1515/jnet.1996.21.3.197>
5. *Radayev Y. N., Stepanova L. V.* On the effect of the residual stresses on the crack opening displacement in a cracked sheet // International Journal of Fracture. 2001. Vol. 107, № 4. P. 329–360. <https://doi.org/10.1023/A:1007686929863>
 6. *Radayev Y. N.* On directional average of the local anisotropic damage // International Journal of Fracture. 2004. Vol. 128. P. 293–307. <https://doi.org/10.1023/B:FRAC.0000040993.88107.c5>
 7. *Яровой Г. П., Радаев Ю. Н.* О новом прочтении «Оснований математики» А. Уайтхеда и Б. Рассела // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2004. № 4 (34). С. 5–19.
 8. *Уайтхед А. Н., Рассел Б.* Основания математики : в 3 т. / пер. с англ. Ю. Н. Радаева, И. С. Фролова ; под ред. Г. П. Ярового, Ю. Н. Радаева. Самара : Самарский ун-т, 2005. Т. 1. 722 с.; 2006. Т. 2. 728 с.; 2006. Т. 3. 460 с.
 9. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. Москва : Физматлит, 2009. 156 с.
 10. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 328 с.
 11. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Трехмерные определяющие соотношения теории идеальной пластичности и течение на ребре призмы Кулона – Треска // Известия РАН. Механика твердого тела. 2010. № 2. С. 171–188.
 12. *Радаев Ю. Н., Таранова М. В.* Волновые числа термоупругих волн в волноводе с теплообменом на боковой стенке // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2011. № 2 (23). С. 53–61. <https://doi.org/10.14498/vsgtu965>
 13. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Формы нулевых лагранжианов в полевых теориях механики континуума // Известия РАН. Механика твердого тела. 2012. № 1. С. 169–192.
 14. *Радаев Ю. Н.* Асимптотические оси тензоров напряжений и приращения деформации в механике сжимаемых континуумов // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 5. С. 77–85.
 15. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Об одной форме первой вариации интегрального функционала действия по растущей области // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 2. С. 199–209. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-2-199-209>
 16. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* О нелинейных тензорах и векторах экстрадеформации в теории и механике континуума // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2014. № 1 (34). С. 66–85. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1310>
 17. *Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.* О сильных и слабых разрывах связанного термомеханического поля в термоупругих микрополярных континуумах второго типа // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2014. № 4 (37). С. 85–97. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1331>
 18. *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23. P. 10–13.
 19. *Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.* О слабых разрывах и уравнениях скачков на волновых поверхностях в микрополярных термоупругих континуумах // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 79–89. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89>
 20. *Радаев Ю. Н., Ковалев В. А.* Гиперболические теории и задачи механики континуума // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-



- математические науки. 2015. Т. 19, № 1. С. 186–202. <https://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1412>
21. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Рационально алгебраически полные системы тензоров конечных деформаций сложных континуумов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 71–84. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-1-71-84>
 22. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Analytical solution of cylindrical wave problem in the frameworks of micropolar elasticity // Journal of Physics: Conference Series. 2017. Vol. 937, № 1. Art. 012031. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/937/1/012031>
 23. Kovalev V., Murashkin E., Radayev Y. On a physical field theory of micropolar thermoelasticity // Journal of Physics: Conference Series. 2017. Vol. 788, № 1. Art. 012043. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/788/1/012043>
 24. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On thermodynamics of wave processes of heat transport // Advanced Structured Materials. 2017. Vol. 46. P. 363–376. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56050-2_21
 25. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Full thermomechanical coupling in modelling of micropolar thermoelasticity // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 991, № 1. Art. 012061. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012061>
 26. Радаев Ю. Н. Мгновенно-нерастяжимые директоры в кинематике трехмерных течений сред Кулона – Мора // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 467–483. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-467-483>
 27. Radayev Y. N. Asymmetric tensor representations in micropolar continuum mechanics theories // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2019. Т. 23, № 2. С. 246–255. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1669>
 28. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. О волновых решениях динамических уравнений гемитропной микрополярной термоупругости // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 4. С. 454–463. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-454-463>
 29. Radayev Y. N., Kovalev V. A. On plane thermoelastic waves in hemitropic micropolar continua // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2019. Т. 23, № 3. С. 464–474. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1689>
 30. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2019. Т. 23, № 4. С. 646–656. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1696>
 31. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2020. Т. 24, № 3. P. 424–444. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>
 32. Радаев Ю. Н. Кинематические соотношения вдоль характеристик в сжимаемых течениях на гранях произвольного кусочно-линейного условия пластичности // Известия РАН. Механика твердого тела. 2020. № 5. С. 161–164. <https://doi.org/10.31857/S0572329920040169>
 33. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2020. Vol. 24, № 4. P. 752–761. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>
 34. Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных



- микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>
35. Радаев Ю. Н. Моделирование гармонического волнового поля в микрополярных средах четырьмя винтовыми векторными полями // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 2 (44). С. 27–36. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.44.2.003>
36. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном обобщении алгебраической теории Гамильтона – Кэли // Известия РАН. Механика твердого тела. 2021. № 6. С. 130–138. <https://doi.org/10.31857/S0572329921060106>
37. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 2 (48). С. 115–127. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.48.2.014>
38. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия : Физико-математические науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 457–474. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1870>

References

1. Arutyunyan N. Kh., Radayev Yu. N. Elastoplastic torsion of a cylindrical rod for finite deformations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1989, vol. 53, iss. 6, pp. 804–811. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(89\)90090-7](https://doi.org/10.1016/0021-8928(89)90090-7)
2. Radayev Y. N., Murakami S., Hayakawa K. Mathematical description of anisotropic damage state in continuum damage mechanics. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series A*, 1994, vol. 60, no. 580, pp. 2750–2758. <https://doi.org/10.1299/kikaia.60.2750>
3. Radayev Y. N. Thermodynamical model of anisotropic damage growth. Part I. Canonical dynamic state variables of continuum damage mechanics and thermodynamical functions of three-dimensional anisotropic damage state. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 1996, vol. 21, no. 2, pp. 129–152.
4. Radayev Y. N. Thermodynamical model of anisotropic damage growth. Part II. Canonical damage growth rate equations and theory of damage invariants. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 1996, vol. 21, no. 3, pp. 197–222.
5. Radayev Y. N., Stepanova L. V. On the effect of the residual stresses on the crack opening displacement in a cracked sheet. *International Journal of Fracture*, 2001, vol. 107, no. 4, pp. 329–360. <https://doi.org/10.1023/A:1007686929863>
6. Radayev Y. N. On directional average of the local anisotropic damage. *International Journal of Fracture*, 2004, vol. 128, no. 1, pp. 293–307. <https://doi.org/10.1023/B:FRAC.0000040993.88107.c5>
7. Yarovoy G. P., Radayev Yu. N. On a new reading of the “Principia Mathematica” by A. Whitehead and B. Russell. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2004, no. 4 (34), pp. 5–19 (in Russian).
8. Whitehead A. N., Russell B. *Principia Mathematica* : in 3 vols. / trans. from English Yu. N. Radaev, I. S. Frolov; ed. by G. P. Yarovoy, Yu. N. Radaev. Samara, Samara State University Publ., 2005. Vol. 1. 722 p.; 2006. Vol. 2. 738 p.; 2006. Vol. 3. 460 p. (in Russian).
9. Kovalev V. A., Radayev Y. N. *Elements of Field Theory: Variational Symmetries and Geometric Invariants*. Moscow, Fizmatlit, 2009. 156 p. (in Russian).



10. Kovalev V. A., Radayev Y. N. Wave Problems of the Field Theory and Thermomechanics. Saratov, Saratov University Press, 2010. 328 p. (in Russian).
11. Kovalev V. A., Radaev Y. N. Three-dimensional constitutive relations of ideal plasticity and the flow on the Coulomb – Tresca prism edge. *Mechanics of Solids*, 2010, vol. 45, no. 2, pp. 295–308. <https://doi.org/10.3103/S0025654410020159>
12. Radayev Yu. N., Taranova M. V. Wavenumbers of type III thermoelastic waves in a long waveguide under sidewall heat interchanging. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2011, no. 2 (23), pp. 53–61 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu965>
13. Kovalev V. A., Radaev Y. N. Forms of null Lagrangians in field theories of continuum mechanics. *Mechanics of Solids*, 2012, vol. 47, no. 1, pp. 137–154. <https://doi.org/10.3103/S002565441201013X>
14. Radaev Y. N. Asymptotic axes of stress tensors and strain increment tensors in mechanics of compressible continua. *Mechanics of Solids*, 2013, vol. 48, no. 5, pp. 546–552. <https://doi.org/10.3103/S0025654413050105>
15. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2014, vol. 14, iss. 2, pp. 199–209 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-2-199-209>
16. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. On nonlinear strain vectors and tensors in continuum theories of mechanics. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2014, no. 1 (34), pp. 66–85 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1310>
17. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On strong and weak discontinuities of the coupled thermomechanical field in micropolar thermoelastic type-II continua. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2014, no. 4 (37), pp. 85–97 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1331>
18. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity. *Materials Physics and Mechanics*, 2015, vol. 23, no. 1, pp. 10–13.
19. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, iss. 1, pp. 79–89 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89>
20. Radayev Yu. N., Kovalev V. A. Hyperbolic theories and problems of continuum mechanics. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2015, vol. 19, no. 1, pp. 186–202 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1412>
21. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. On rationally complete algebraic systems of finite strain tensors of complex continua. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 71–84 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-1-71-84>
22. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Analytical solution of cylindrical wave problem in the frameworks of micropolar elasticity. *Journal of Physics: Conference Series*, 2017, vol. 937, no. 1, Art. 012031. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/937/1/012031>
23. Kovalev V., Murashkin E., Radayev Y. On a physical field theory of micropolar thermoelasticity. *Journal of Physics: Conference Series*, 2017, vol. 788, no. 1, Art. 012043. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/788/1/012043>
24. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On thermodynamics of wave processes of heat transport. *Advanced Structured Materials*, 2017, vol. 46, pp. 363–376. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56050-2_21
25. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Full thermomechanical coupling in modelling of micropolar thermoelasticity. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 991, no. 1, Art. 012061. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012061>

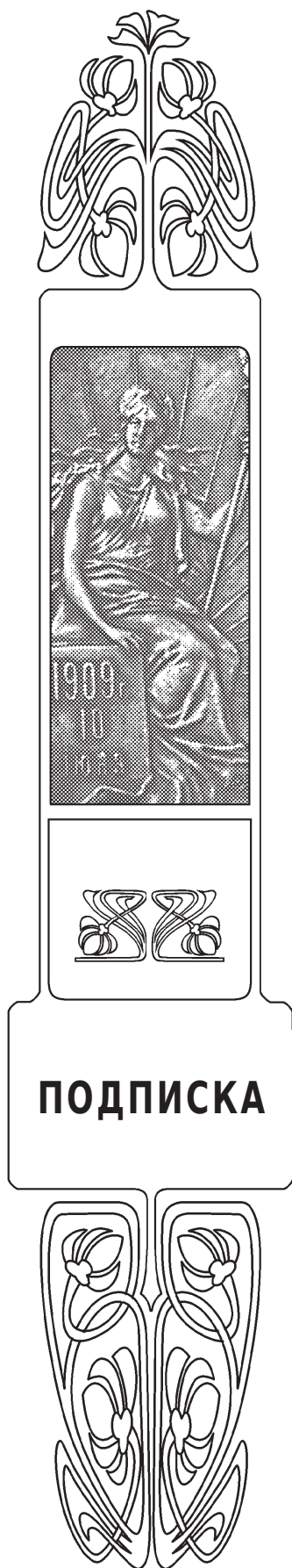


26. Radayev Yu. N. Instantaneously not elongated directors in three-dimensional kinematics of the Coulomb – Mohr medium. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 467–483 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-467-483>
27. Radayev Yu. N. Asymmetric tensor representations in micropolar continuum mechanics theories. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2019, vol. 23, no. 2, pp. 246–255. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1669>
28. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. On wave solutions of dynamic equations of hemitropic micropolar thermoelasticity. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, vol. 19, iss. 4, pp. 454–463 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-454-463>
29. Radayev Y. N., Kovalev V. A. On plane thermoelastic waves in hemitropic micropolar continua *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2019, vol. 23, no. 3, pp. 464–474. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1689>
30. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2019, vol. 23, no. 4, pp. 646–656. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1696>
31. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2020, vol. 24, no. 3, pp. 424–444. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>
32. Radayev Y. N. Kinematic equations along characteristics in compressible flows on the facets of an arbitrary piecewise linear yield criterion. *Mechanics of Solids*, 2020, vol. 55, no. 5, pp. 737–740. <https://doi.org/10.3103/S0025654420300032>
33. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2020, vol. 24, no. 4, pp. 752–761. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>
34. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity], 2020, vol. 82, no. 4, pp. 399–412 (in Russian). <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>
35. Radayev Yu. N. On modelling harmonic waves in linear micropolar elastic media by four screw fields. *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*, 2020, no. 2 (44), pp. 27–36 (in Russian). <https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.44.2.003>
36. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Generalization of the algebraic Hamilton – Cayley theory. *Mechanics of Solids*, 2021, vol. 56, no. 6, pp. 996–1003. <https://doi.org/10.3103/S0025654421060145>
37. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Direct, inverse and mirror wave modes of coupled displacements and microrotations monochromatic plane waves in hemitropic micropolar media. *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*, 2021, no. 2 (48), pp. 115–127 (in Russian). <https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.48.2.014>
38. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the constitutive pseudoscalars of hemitropic micropolar media in inverse coordinate frames. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2021, vol. 25, no. 3, pp. 457–474 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1870>

Поступила в редакцию / Received 05.12.2021

Принята к публикации / Accepted 27.12.2021

Опубликована / Published 31.05.2022



Подписка на печатную версию

Подписной индекс издания 36017
Оформить подписку на печатную версию
можно в Интернет-каталогах
«Пресса России» (www.pressa-rf.ru)
«Пресса по подписке» (www.akc.ru)
ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru)
Журнал выходит 4 раза в год
Цена свободная

Электронная версия журнала находится
в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

Адрес издательства (редакции):

410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89
Факс: +7(845-2) 27-85-29
E-mail: izdat@sgu.ru

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет
Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54
E-mail: mmi@sgu.ru
Website: <https://mmi.sgu.ru>

ISSN 1816-9791

22002



9 771816 979101

ISSN 1816-9791 (Print). ISSN 2541-9005 (Online)
Известия Саратовского университета. Новая серия.
Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Том 22, выпуск 2

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Новая серия

Серия: Акмеология образования. Психология развития

Серия: История. Международные отношения

Серия: Математика. Механика. Информатика

Серия: Науки о Земле

Серия: Социология. Политология

Серия: Физика

Серия: Филология. Журналистика

Серия: Философия. Психология. Педагогика

Серия: Химия. Биология. Экология

Серия: Экономика. Управление. Право

