ISSN 1816-9791 (Print)
ISSN 2541-9005 (Online)

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия: Математика. Механика. Информатика

2022
Том 22
Выпуск 4

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 4

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962, «Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004

Научный журнал
2022 Том 22
ISSN 1816-9791 (Print)
ISSN 2541-9005 (Online)
Издается с 2005 года

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

Кривошеев А. С., Кривошеева О. А. Представление функций на прямой рядами экспоненциальных мономов 416

Малышев К. Ю. Представление функций Грина волнового уравнения на отрезке в конечном виде 430

Симонов Б. В., Симонова И. Э., Иванюк В. А. Неравенство Коляды для частных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами Фурье 447

Фарахутдинов Р. А. О конкретной характеризации универсальных графовых полуавтоматов 458

Механика

Белосточный Г. Н., Григорьев С. А., Коссович Л. Ю., Мыльцина О. А. Динамическая термоустойчивость геометрически нерегулярной пологой оболочки постоянного кручения под действием периодической, по временной координате, нагрузки 468

Ватульян А. О., Плотников Д. К. Контактная задача для функционально-градиентной ортотропной полосы 479

Тебякин А. Д., Крысько А. В., Жигалов М. В., Крысько В. А. Упругопластическое деформирование нанопластин. Метод вариационных итераций (расширенный метод Канторовича) 494

Информатика

Доль А. В., Иванов Д. В., Оленко Е. С., Островский Н. В. Крыльчатые расходомеры как инструмент оценки кровотока в экспериментальном стенде 506

Иванов Д. В., Бессонов Л. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Киреев С. И. Концепция систем поддержки принятия врачебных решений в хирургии позвоночно-тазового комплекса 517

Лобов А. А., Абросимов М. Б. Вершинные расширения 4-слойных графов и гиперкубов 536

Журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия “Математика. Механика. Информатика”» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Запись о регистрации СМИ ПИ No ФС77-76640 от 26 августа 2019 года

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (специальности: 1.1.1; 1.1.2; 1.1.5; 1.1.6; 1.1.7; 1.1.8; 1.1.9; 1.1.10; 1.2.2; 2.3.1).
Журнал входит в международные базы данных Web of Science (ESCI), Scopus, MathSciNet, zbMATH, DOAJ

Подписной индекс издания 36017.
Подписку на печатные издания можно оформить в интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru).
Журнал выходит 4 раза в год.
Цена свободная.
Электронная версия находится в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

Директор издательства
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор
Каргин Игорь Анатольевич

Художник
Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист
Агафонов Андрей Петрович

Верстка
Халова Виктория Анатольевна

Технический редактор
Каргин Игорь Анатольевич

Корректор
Агафонов Андрей Петрович

Адрес учредителя, издателя и издательства (редакции):
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49, 52-26-89
E-mail: publ@sgu.ru, izdat@sgu.ru

Подписано в печать 23.11.22.
Подписано в свет 30.11.22.
Формат 60 × 84 1/8.
Усл. печ. л. 15,81 (17,0).
Тираж 100 экз. Заказ 135-Т.

Отпечатано в типографии Саратовского университета.
Адрес типографии:
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2022

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу https://mmi.sgu.ru/ru/dlya-avtorov. Статьи бóльшего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования. В случае положительного решения статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: https://mmi.sgu.ru

Адрес редколлегии серии:
410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@sgu.ru

Website: https://mmi.sgu.ru

Ответственный секретарь серии:
Шевцова Юлия Владиславовна

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

Krivosheev A. S., Krivosheeva O. A. Representation of functions on a line by a series of exponential monomials 416

Malyshev K. Yu. Representation of Green's functions of the wave equation on a segment in finite terms 430

Simonov B. V., Simonova I. E., Ivanyuk V. A. Kolyada inequality for partial moduli of smoothness of functions with lacunary Fourier coefficients 447

Farakhutdinov R. A. On a concrete characterization problem of universal graphic semiautomata 458

Mechanics

Belostochny G. N., Grigoriev S. A., Kossovich L. Yu., Myltcina O. A. Dynamic thermal stability of a geometrically irregular shallow shell of constant torsion under the action of a load periodic by its time coordinate 468

Vatulyan A. O., Plotnikov D. K. Contact problem for functionally graded orthotropic strip 479

Tebyakin A. D., Krysko A. V., Zhigalov M. V., Krysko V. A. Elastic-plastic deformation of nanoplates. The method of variational iterations (extended Kantorovich method) 494

Computer Sciences

Dol A. V., Ivanov D. V., Olenko E. S., Ostrovsky N. V. Impeller flowmeters as a tool for assessing blood flow in an experimental test bench 506

Ivanov D. V., Bessonov L. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Kireev S. I. The concept of medical decision support systems in surgery of the spinal pelvic complex 517

Lobov A. A., Abrosimov M. B. Vertex extensions of 4-layer graphs and hypercubes 536

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА «ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ. СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»

Главный редактор
Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Заместитель главного редактора
Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Ответственный секретарь
Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Бауэр Светлана Михайловна, доктор физ.-мат. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)
Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)
dell'Isola Francesco, доктор наук, профессор (Рим, Италия)
Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Омск, Россия)
Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)
Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)
Индейцев Дмитрий Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор, чл.-корр. РАН (Санкт-Петербург, Россия)
Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)
Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)
Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Беларусь)
Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)
Матвеенко Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)
Морозов Никита Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, профессор, акад. РАН (Санкт-Петербург, Россия)
Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)
Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Долгопрудный, Московская обл., Россия)
Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)
Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук (Ульяновск, Россия)
Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, профессор, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)
Роджерсон Грэм, Ph.D. (Киль, Великобритания)
Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Саратов, Россия)
Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)
Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Беларусь)
Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)
Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Цатурян Андрей Кимович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)
Шалыто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)
Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)
Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Янг Чуань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL "IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS"

Editor-in-Chief – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)
Deputy Editor-in-Chief – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)
Executive Secretary – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)
Svetlana M. Bauer (St. Petersburg, Russia)
Francesco dell'Isola (Rome, Italy)
Dmitry A. Indeitsev (St. Petersburg, Russia)
Shoji Imatani (Kyoto, Japan)
Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)
Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)
Avgust P. Khromov (Saratov, Russia)
Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)
Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)
Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)
Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)
Nikita F. Morozov (St. Petersburg, Russia)
Semen R. Nasyrov (Kazan, Russia)
Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny, Moscow region, Russia)
Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)
Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)
Alexander F. Rezchikov (Saratov, Russia)
Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)
Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)
Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)
Alexander I. Shashkin (Voronezh, Russia)
Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)
Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)
Igor' E. Tananko (Saratov, Russia)
Andrey K. Tsaturyan (Moscow, Russia)
Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)
Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)
Vjacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)
Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Научный отдел

МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 416–429
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 416–429
mmi.sgu.ru
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-416-429
EDN: TPUWZW

Научная статья
УДК 517.98

Представление функций на прямой рядами экспоненциальных мономов

А. С. Кривошеев[1✉], **О. А. Кривошеева**[2]

[1]Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Россия, 450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, д. 112
[2]Башкирский государственный университет, Россия, 450076, г. Уфа, ул. З. Валиди, д. 32

Кривошеев Александр Сергеевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, kriolesya2015@mail.ru, AuthorID: 4732, https://orcid.org/0000-0002-4845-8753
Кривошеева Олеся Александровна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, kriolesya2006@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-3748-6078, AuthorID: 589071

Аннотация. В работе рассматриваются весовые пространства интегрируемых L_p^ω $(p \geqslant 1)$ и непрерывных C^ω функций на вещественной прямой. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел λ_k и их кратностей n_k, $\mathcal{E}(\Lambda) = \{t^n e^{\lambda_k t}\}$ — система экспоненциальных мономов, построенная по последовательности Λ. Изучаются подпространства $W^p(\Lambda, \omega)$ и $W^0(\Lambda, \omega)$, которые являются замыканиями системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в пространствах L_p^ω и C^ω соответственно. При естественных ограничениях на Λ (ограниченность индекса конденсации S_Λ и $n_k/\lambda_k \leqslant c$, $k \geqslant 1$) и выпуклый вес ω получены условия, при которых каждая функция из этих подпространств продолжается до целой и представляется рядом по системе $\mathcal{E}(\Lambda)$, который сходится абсолютно и равномерно на компактах в плоскости. В отличие от известных ранее результатов по указанной задаче представления в работе не требуется, чтобы последовательность Λ имела плотность, и не накладывается условие отделимости, которое присутствует в этих результатах: $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geqslant h$, $k \geqslant 1$ (вместо него используется условие равенства нулю специального индекса конденсации).

© Кривошеев А. С., Кривошеева О. А., 2022

Ключевые слова: ряд экспоненциальных мономов, весовое пространство, аналитическое продолжение, индекс конденсации
Благодарности: Исследование О. А. Кривошеевой выполнено при поддержке конкурса «Молодая математика России».
Для цитирования: *Кривошеев А. С., Кривошеева О. А.* Представление функций на прямой рядами экспоненциальных мономов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 416–429. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-416-429, EDN: TPUWZW
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Representation of functions on a line by a series of exponential monomials

A. S. Krivosheev[1✉], **O. A. Krivosheeva**[2]

[1]Institute of Mathematics with Computing Centre, Ufa Federal Research Center, RAS, 112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia
[2]Bashkir State University, 32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia

Alexander S. Krivosheev, kriolesya2015@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-4845-8753, AuthorID: 4732
Olesya A. Krivosheeva, kriolesya2006@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-3748-6078, AuthorID: 589071

Abstract. In this work, we consider the weight spaces of integrable functions L_p^ω $(p \geqslant 1)$ and continuous functions C^ω on the real line. Let $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ be an unbounded increasing sequence of positive numbers λ_k and their multiplicities n_k, $\mathcal{E}(\Lambda) = \{t^n e^{\lambda_k t}\}$ be a system of exponential monomials constructed from the sequence Λ. We study the subspaces $W^p(\Lambda, \omega)$ and $W^0(\Lambda, \omega)$, which are the closures of the linear span of the system $\mathcal{E}(\Lambda)$ in the spaces L_p^ω and C^ω, respectively. Under natural constraints on Λ (the finiteness of the condensation index S_Λ and $n_k/\lambda_k \leqslant c$, $k \geqslant 1$) and on the convex weight ω, conditions are obtained under which each function of these subspaces continues to an entire function and is represented by a series in the system $\mathcal{E}(\Lambda)$ that converges absolutely and uniformly on compact sets in the plane. In contrast to the previously known results for the specified representation problem, we do not require that the sequence Λ has a density, and we do not impose the separability condition: $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geqslant h$, $k \geqslant 1$ (instead, the condition of equality to zero of the special condensation index is used).
Keywords: series of exponential monomials, weight space, analytic continuation, condensation index
Acknowledgements: The work of O. A. Krivosheeva is supported in part by the Young Russian Mathematics award.
For citation: Krivosheev A. S., Krivosheeva O. A. Representation of functions on a line by a series of exponential monomials. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 416–429 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-416-429, EDN: TPUWZW
This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных положительных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ и $\lambda_k \to \infty$, $k \to \infty$. Символом $n(t, \Lambda)$ обозначим число точек λ_k (с учетом их кратностей n_k), попавших в открытый круг $B(0, t)$, и пусть

$$\overline{n}(\Lambda) = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, n(t, \Lambda)/t = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n/\mu_n$$

— верхняя плотность последовательности Λ, где $\{\mu_n\}$ — последовательность, составленная из точек λ_k, причем каждая λ_k встречается в ней ровно n_k раз. Положим еще

$$m(\Lambda) = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, n_k/\lambda_k, \quad \sigma_\Lambda(r) = \sum_{\lambda_k<r} n_k/\lambda_k.$$

Отметим, что из определений величин $\overline{n}(\Lambda)$ и $m(\Lambda)$ легко следует неравенство $m(\Lambda) \leqslant \overline{n}(\Lambda)$.

Пусть $\rho > 0$. Символом Ω_ρ обозначим множество неотрицательных выпуклых функций на оси $\mathbb{R}$ таких, что $\omega(0) = 0$, $\omega(t) \leqslant \rho|t|$, $t \leqslant 0$, и

$$\lim_{t\to+\infty} \omega(t)/t = +\infty. \tag{1}$$

При этих условиях $\omega(t)$, $t > 0$, — неубывающая функция. Подмножество $\Omega_{\Lambda,\rho}$, для которого выполнено неравенство

$$\int_1^{+\infty} \frac{\omega(2\sigma_\Lambda(t))}{t^2} dt < \infty, \tag{2}$$

обозначим $\Omega_{\Lambda,\rho}$. В работе рассматриваются весовые пространства комплекснозначных интегрируемых функций на вещественной прямой ($p \geqslant 1$)

$$L_p^\omega = \left\{ f : \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)e^{-\omega(t)}|^p dt \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

и непрерывных функций на вещественной прямой

$$C^\omega = \left\{ f : \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)e^{-\omega(t)}| < \infty \right\}.$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Введем семейство экспоненциальных мономов

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \{t^n e^{\lambda_k t}\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}.$$

Система $\mathcal{E}(\Lambda)$ принадлежит пространству L_p^ω (C^ω) тогда и только тогда, когда верно (1).

Символами $W^p(\Lambda, \omega)$ ($p \geqslant 1$) и $W^0(\Lambda, \omega)$ обозначим замыкания линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ соответственно в пространствах L_p^ω и C^ω.

В работе изучаются условия, при которых каждая функция $f \in W^p(\Lambda, \omega)$ ($W^0(\Lambda, \omega)$) продолжается до целой функции F, представимой во всей плоскости рядом

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Подобные задачи рассматривались в работах [1, 2] при условиях $n_k = 1$ и

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geqslant h, \quad k \geqslant 1. \tag{4}$$

В частности, это означает, что последовательность Λ имеет плотность

$$n(\Lambda) = \lim_{r\to+\infty} n(t,\Lambda)/r \leqslant 1/h.$$

Отметим результат из работы [3, теорема 2.1]. В ней доказывается, что каждая функция $f \in W^p(\Lambda,\omega)$ $(W^0(\Lambda,\omega_1))$ продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление (3), если выполнены следующие условия на Λ и ω. Последовательность Λ должна принадлежать классу $U(d,0)$, который строится при помощи простой $(n_k = 1)$ последовательности, удовлетворяющей условию (4). В частности, принадлежность Λ классу $U(d,0)$ означает, что Λ имеет плотность $n(\Lambda) = d > 0$, верно (4) и $n_k \leqslant c(\lambda_k)^\alpha$, $k \geqslant 1$, где $c > 0$ и $\alpha \in (0,1)$. Функция $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$, и выполнены еще два условия: $\omega(t) \geqslant t^2$, $t \geqslant \tau \geqslant 0$, для каждого $A > 0$ существует $t(A) > 0$ такое, что $\omega(t + A) \geqslant \omega(t) + t$, $t \geqslant t(A)$.

В работе [4] указанная задача решается при существенно более слабых ограничениях, чем [1–3]. Доказано следующее. Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ такая, что $S_\Lambda > -\infty$ (индекс конденсации S_Λ определяется в следующем параграфе), $m(\Lambda) < \infty$, $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Тогда каждая функция $f \in W^p(\Lambda,\omega)$ $(W^0(\Lambda,\omega_1))$ продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление (3). При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах плоскости. В данной статье развиваются результаты работы [4]. Получен аналогичный результат, но при условиях более слабых, чем в [4]. Условие $S_\Lambda > -\infty$ заменяется условием $S_{\Lambda,0} = 0$.

1. Мероморфная функция. Индекс конденсации

Пусть $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$. Рассмотрим функцию из книги [5], формула (9.5.10)

$$g_\Lambda(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z-\lambda_k}{z+\lambda_k}\right)^{n_k} \exp\left(\frac{2zn_k}{\lambda_k}\right).$$

Она является аналитической в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$, имеет нуль в каждой точке λ_k кратности n_k и не имеет других нулей. В силу леммы 1 из работы [4] верно неравенство

$$\ln|g_\Lambda(z)| \leqslant 2x\sigma_\Lambda(|z|) + Ax, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad z = x + iy. \tag{5}$$

При условии отделимости точек λ_k друг от друга функция g_Λ имеет оценки снизу на окружностях $S(\lambda_k,\gamma_k)$ с центрами в точках λ_k. Условие отделимости обеспечивает индекс конденсации S_Λ последовательности Λ, введенный в работе [6]. Положим

$$q_\Lambda^m(z,\delta) = \prod_{\lambda_k \in B(\lambda_m,\delta\lambda_m), k\neq m} \left(\frac{z-\lambda_k}{3\delta\lambda_k}\right)^{n_k}, \quad m \geqslant 1.$$

В случае, когда круг $B(\lambda_m,\delta|\lambda_m|)$ не содержит точек λ_k, $k \neq m$, полагаем $q_\Lambda^m(z,\delta) \equiv 1$. Индексом конденсации называется величина

$$S_\Lambda = \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{m\to\infty} \frac{\ln|q_\Lambda^m(\lambda_m,\delta)|}{\lambda_m}.$$

Введем вариацию индекса S_Λ. Положим

$$S_{\Lambda,0} = \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{m\to\infty} \frac{\ln|q_\Lambda^m(\lambda_m,\delta)|}{\lambda_m \sigma_\Lambda(\lambda_m)}.$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{|z-\lambda_k|}{3\delta\lambda_k} \leqslant 1, \quad z, \lambda_k \in B(w, \delta|w|), \quad \delta \in (0, 1/3), w \neq 0. \tag{6}$$

Следовательно, $S_{\Lambda,0} \leqslant 0$. Если $S_\Lambda > -\infty$ и $\sigma_\Lambda(\lambda_m) \to +\infty$, $m \to \infty$, то $S_{\Lambda,0} = 0$.

Положим еще

$$q_\Lambda(z,w,\delta) = \prod_{\lambda_k \in B(w,\delta|w|)} \left(\frac{z-\lambda_k}{3\delta\lambda_k}\right)^{n_k}.$$

Лемма 1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$. Тогда существуют $a, b > 0$ такие, что*

$$\sigma_\Lambda(t) \leqslant \sigma_\Lambda(ct) \leqslant bc + \sigma_\Lambda(t), \quad c > 1, \tag{7}$$

$$\sigma_\Lambda(t) \leqslant a + b\ln t, \quad t \geqslant 1. \tag{8}$$

Доказательство. По условию $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$. Тогда для некоторого $b > 0$ имеем:

$$n(t,\Lambda) \leqslant br, \quad t > 0, \quad n \leqslant b\mu_n, \quad n \geqslant 1, \tag{9}$$

где $\{\mu_n\}$ — последовательность из предыдущего параграфа. Имеем

$$\sigma_\Lambda(t) = \sum_{\lambda_k<t} \frac{n_k}{\lambda_k} \leqslant \sum_{\lambda_k<ct} \frac{n_k}{\lambda_k} = \sigma_\Lambda(ct) = \sum_{\lambda_k<t} \frac{n_k}{\lambda_k} + \sum_{t\leqslant\lambda_k<ct} \frac{n_k}{\lambda_k} =$$
$$= \sigma_\Lambda(t) + \sum_{t\leqslant\lambda_k<ct} \frac{n_k}{\lambda_k} \leqslant \sigma_\Lambda(t) + \frac{n(ct,\Lambda)}{t} \leqslant \sigma_\Lambda(t) + bc.$$

По формуле Эйлера

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} = \ln p + \beta + \beta(p), \quad \beta(p) \to 0, \quad p \to \infty,$$

где β — постоянная Эйлера. Следовательно, с учетом (9) для некоторого $a > 0$ имеет место неравенство (8). □

Лемма 2. *Пусть f — целая функция экспоненциального типа, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — ее кратное нулевое множество, $S_{\Lambda,0} = 0$, $\sigma_{\lambda_k} \to +\infty$ при $k \to \infty$. Тогда существуют числа $\gamma_k > 0$, $k \geqslant 1$, такие, что*

1) $\varlimsup_{k\to\infty} \gamma_k/\lambda_k = 0$;

2) круги $B(\lambda_k, \gamma_k)$, $k \geqslant 1$, попарно не пересекаются;

3) для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\beta, \beta_1 > 0$ такие, что

$$\ln|f(z)| \geqslant -\beta_1 - \beta\lambda_k - \varepsilon\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k), \quad z \in S(\lambda_k, \gamma_k), \quad k \geqslant 1.$$

Доказательство. Воспользуемся схемами доказательств из лемм 3.1 и 3.3 в работе [7].

Выберем α_k, $k \geqslant 1$, такие, что $0 < \alpha_k \to 0$ и

$$\frac{\ln \alpha_k}{\sigma_\Lambda(\lambda_k)} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Последнее возможно, так как $\sigma_\Lambda(\lambda_k) \to +\infty$, $k \to \infty$. Для каждого $k \geqslant 1$ символом τ_k обозначим минимальное расстояние от точки λ_k до точек λ_s, $s \neq k$. Положим

$$\gamma_k = 2^{-1} \min\{\alpha_k \lambda_k, \tau_k\}, \quad k \geqslant 1.$$

По построению круги $B(\lambda_k, \gamma_k)$ попарно не пересекаются. Покажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ существуют номер k_0 и число $\delta \in (0, 1/3)$ такие, что для любого $k \geqslant k_0$ верно неравенство

$$\ln |q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta)| \geqslant -\varepsilon \lambda_k \sigma_\Lambda(\lambda_k), \quad z \in S(\lambda_k, \gamma_k). \tag{10}$$

Согласно определению имеем

$$q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta) = \left(\frac{z - \lambda_k}{3\delta\lambda_k}\right)^{n_k} + q_\Lambda^k(z, \delta).$$

Покажем вначале, что для каждого $\varepsilon > 0$ существуют номер k_0 и число $\delta \in (0, 1/3)$ такие, что для любого $k \geqslant k_0$

$$\ln \left|\frac{z - \lambda_k}{3\delta\lambda_k}\right|^{n_k} \geqslant -\varepsilon \lambda_k \sigma_\Lambda(\lambda_k), \quad z \in S(\lambda_k, \gamma_k). \tag{11}$$

Предположим, что это неверно. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ существуют последовательности $\{k(m)\}$ и $\{z_m\}$ такие, что $k(m) \to \infty$, $z_m \in S(\lambda_{k(m)}, \gamma_{k(m)})$ и

$$\ln \left|\frac{z_m - \lambda_{k(m)}}{3m^{-1}\lambda_{k(m)}}\right|^{n_{k(m)}} < -\varepsilon \lambda_{k(m)} \sigma_\Lambda(\lambda_{k(m)}), \quad m \geqslant 1. \tag{12}$$

Пусть $\gamma_k = 2^{-1}\alpha_k\lambda_k$. Тогда

$$\ln \left|\frac{z - \lambda_k}{3\delta\lambda_k}\right|^{n_k} \geqslant n_k \ln \frac{\alpha_k}{6\delta}, \quad z \in S(\lambda_k, \gamma_k).$$

Имеем

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{\lambda_k} \leqslant m(\Lambda) \leqslant \overline{n}(\Lambda).$$

По условию f — целая функция экспоненциального типа. Следовательно, по теореме Линделефа [8, гл. I, §11, теорема 15] верно неравенство $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$. Кроме того, по условию $\sigma_\Lambda(\lambda_k) \to +\infty$, $k \to \infty$. Тогда в силу выбора чисел α_k

$$\frac{n_k}{\lambda_k \sigma_\Lambda(\lambda_k)} \ln \frac{\alpha_k}{6\delta} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Таким образом, можно считать, что $\gamma_{k(m)} = 2^{-1}\tau_{k(m)} \leqslant 2^{-1}\alpha_{k(m)}\lambda_{k(m)}$, $m \geqslant 1$.

Согласно определению чисел τ_k найдем номера p_m такие, что $|\lambda_{k(m)} - \lambda_{p_m}| = \tau_{k(m)}$, $m \geqslant 1$. По условию $S_{\Lambda,0} = 0$. Поэтому найдутся номер m_1 и $\delta_1 \in (0, 1/3)$ такие, что

$$\frac{\ln |q_\Lambda^{p_m}(\lambda_{p_m}, \delta_1)|}{\lambda_{p_m}\sigma_\Lambda(\lambda_{p_m})} \geqslant -\frac{\varepsilon}{2}, \quad m \geqslant m_1. \tag{13}$$

Поскольку $z_m \in S(\lambda_{k(m)}, \gamma_{k(m)})$, то

$$|\lambda_{k(m)} - \lambda_{p_m}| = \tau_{k(m)} = 2\gamma_{k(m)} = 2|\lambda_{k(m)} - z_m|. \tag{14}$$

Так как $|\lambda_{k(m)} - \lambda_{p(m)}| = \tau_{k(m)} \leqslant \alpha_{k(m)}\lambda_{k(m)}$ и $\alpha_k \to 0$, то можно считать, что при $m \geqslant m_1$ верно включение $\lambda_{k(m)} \in B(\lambda_{p(m)}, \delta_1|\lambda_{p(m)}|)$ и $2m^{-1} < \delta_1$. Поэтому согласно (6) и (14)

$$\ln\left|\frac{z_m - \lambda_{k(m)}}{(3m^{-1}\lambda_{k(m)}}\right|^{n_{k(m)}} \geqslant \ln\left|\frac{\lambda_{k(m)} - \lambda_{p(m)}}{6m^{-1}\lambda_{k(m)}}\right|^{n_{k(m)}} \geqslant$$
$$\geqslant \ln\left|\frac{\lambda_{k(m)} - \lambda_{p(m)}}{3\delta_1\lambda_{k(m)}}\right|^{n_{k(m)}} \geqslant \ln|q_\Lambda^{p_m}(\lambda_{p(m)}), \delta_1)|, \quad m \geqslant m_1. \tag{15}$$

Кроме того, с учетом для некоторого номера $m_2 \geqslant m_1$ верна оценка

$$-\frac{\varepsilon}{2}\lambda_{p(m)}\sigma_\Lambda(\lambda_{p(m)}) \geqslant -\varepsilon\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k), \quad m \geqslant m_2.$$

Отсюда в силу (13) и (15) получаем

$$\ln\left|\frac{z_m - \lambda_{k(m)}}{(3m^{-1}\lambda_{k(m)}}\right|^{n_{k(m)}} \geqslant -\varepsilon\lambda_{k(m)}\sigma_\Lambda(\lambda_{k(m)}), \quad m \geqslant m_2.$$

Это противоречит (12). Таким образом, (11) верно. Покажем теперь, что для каждого $\varepsilon > 0$ существуют номер k_0 и число $\delta \in (0, 1/3)$ такие, что для любого $k \geqslant k_0$ верно неравенство

$$\ln|q_\Lambda^k(z, \delta)| \geqslant -\varepsilon\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k), \quad z \in S(\lambda_k, \gamma_k). \tag{16}$$

По условию $S_{\Lambda,0} = 0$. Поэтому найдутся номер m_1 и $\delta \in (0, 1/3)$ такие, что

$$\frac{\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k, \delta)|}{\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k)} \geqslant -\frac{\varepsilon}{2}, \quad k \geqslant k_1. \tag{17}$$

Пусть $z \in S(\lambda_k, \gamma_k)$. В силу определения чисел γ_k имеем

$$|z - \lambda_k| \leqslant |z - \lambda_m|, \quad m \geqslant 1.$$

Предположим, что $|z - \lambda_m| < 2^{-1}|\lambda_m - \lambda_k|$. Тогда

$$|\lambda_m - \lambda_k| \leqslant |z - \lambda_k| + |z - \lambda_m| \leqslant 2|z - \lambda_m| < |\lambda_m - \lambda_k|.$$

Получили противоречие. Следовательно,

$$|z - \lambda_m| \geqslant 2^{-1}|\lambda_m - \lambda_k|, \quad z \in S(\lambda_k, \gamma_k), \quad k, m \geqslant 1.$$

Отсюда с учетом (17) получаем

$$\ln|q_\Lambda^k(z, \delta)| \geqslant \ln\left(\prod_{\lambda_m \in B(\lambda_k, \delta\lambda_k), m \neq k}\left(\frac{|\lambda_k - \lambda_m|}{6\delta\lambda_m}\right)^{n_m}\right) = \ln|q_\Lambda^k(\lambda_k, \delta)| +$$
$$+ \ln\left(\prod_{\lambda_m \in B(\lambda_k, \delta\lambda_k), m \neq k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_m}\right) \geqslant |q_\Lambda^k(\lambda_k, \delta)| - n((1+\delta)\lambda_k, \Lambda)\ln 2.$$

Поскольку $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$ и $\sigma_\Lambda(\lambda_k) \to +\infty$, то это вместе с (17) дает нам (16). Из (16) и (11) получаем (10). Докажем неравенство из п. 3) леммы. Поскольку f — целая функция экспоненциального типа, то для некоторых $A, B > 0$ имеем

$$\ln|f(w)| \leqslant B + A|w|, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{18}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем k_0 и $\delta \in (0, 1/3)$ такие, что для любого $k \geqslant k_0$ верно неравенство (10). Пусть $\delta_0 \in (0, \delta)$. По теореме об оценке снизу на окружностях целой функции конечного порядка и типа [9, гл. I, §4, теорема 4.3] существуют $a > 0$ и неограниченно растущая последовательность положительных чисел $\{R_p\}$ такие, что $R_{p+1} \leqslant (1+\delta_0)R_p$ и

$$\ln|f(w)| \geqslant -a|w|, \quad |w| = R_p, \quad p \geqslant 1. \tag{19}$$

Пусть $k \geqslant k_0$, $\lambda_k > R_1$ и $z \in S(\lambda_k, \gamma_k)$. Выберем p такое, что $R_p < \lambda_k \leqslant R_{p+1}$. Так как

$$R_{p+1} - R_p \leqslant \delta_0 R_p \leqslant \delta_0 R_{p+1}, \quad p \geqslant 1,$$

то $\lambda_k \in B(R_{p+1}, \delta_0 R_{p+1})$. Рассмотрим функцию

$$h(w) = f(w)(q_\Lambda(w, R_{p+1}, 3\delta_0))^{-1}, \quad \delta_0 \in (0, 15^{-1}).$$

Она целая и не имеет нулей в круге $B(R_{p+1}, 3\delta_0 R_{p+1})$. Так как в этом круге верно неравенство $|q_\Lambda(w, R_{p+1}, 3\delta_0)| \leqslant 1$, то

$$|h(w)| \geqslant |f(w)|, \quad w \in B(R_{p+1}, 3\delta_0 R_{p+1}).$$

В частности, в силу (19) имеем

$$\ln|h(R_{p+1})| \geqslant -aR_{p+1}.$$

Из определения q_Λ следует неравенство

$$|q_\Lambda(w, R_{p+1}, 3\delta_0)| \geqslant 1, \quad w \in S(R_{p+1}, 15\delta_0 R_{p+1}).$$

Поэтому из предыдущих рассуждений с учетом (18) получаем

$$\ln|h(w)h^{-1}(R_{p+1})| \leqslant \ln|h(w)| + aR_{p+1} \leqslant \ln|f(w)| + aR_{p+1} \leqslant$$
$$\leqslant B + 2AR_{p+1} + aR_{p+1} = B + A_0 R_{p+1}, w \in S(R_{p+1}, 15\delta_0 R_{p+1}).$$

Тогда по лемме об оценке снизу аналитической функции, не имеющей нулей, [9, гл. I, §4, лемма 4.3] для некоторых $A_1, B_1 > 0$ (зависящих лишь от B и A_0) верна оценка

$$\ln|h(w)h^{-1}(R_{p+1})| \geqslant -B_1 - A_1 R_{p+1}, \quad w \in B(R_{p+1}, 2\delta_0 R_{p+1}). \tag{20}$$

Поскольку $\lambda_k \in B(R_{p+1}, \delta_0 R_{p+1})$ и $\gamma_k/\lambda_k \to 0$, то можно считать, что

$$z \in B(R_{p+1}, 2\delta_0 R_{p+1}), \quad k \geqslant k_0.$$

Тогда в силу (20) с учетом (19) имеем

$$\ln|f(z)| = \ln|h(z)| + \ln|q_\Lambda(z, R_{p+1}, 3\delta_0)| \geqslant -B_1 - A_2 R_{p+1} + \ln|q_\Lambda(z, R_{p+1}, 3\delta_0)|,$$

где $A_2 = A_1 + a$. Выберем $\delta_0 \in (0, 15^{-1})$ такое, что $3\delta_0 < \delta$ и $B(R_{p+1}, 3\delta_0 R_{p+1}) \subset$ $\subset B(\lambda_k, \delta\lambda_k)$. Это можно сделать, так как $R_p < \lambda_k \leqslant R_{p+1} \leqslant (1+\delta_0)R_p$. Тогда с учетом (6), определения q_Λ и (10) имеем

$$\ln|q_\Lambda(z, R_{p+1}, 3\delta_0)| \geqslant \ln|q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta)| \geqslant -\varepsilon\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k).$$

Отсюда и из предыдущего неравенства получаем п. 3). □

Сейчас мы можем установить необходимые оценки снизу на функцию g_Λ.

Лемма 3. *Пусть последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *такая, что* $S_{\Lambda,0} = 0$, $\sigma_\Lambda(\lambda_k) \to +\infty$, $k \to \infty$, *и* $\overline{n}(\Lambda) < \infty$. *Тогда существуют числа* $\gamma_k > 0$, $k \geqslant 1$, *такие, что*

1) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, \gamma_k/\lambda_k = 0$;

2) круги $B(\lambda_k, \gamma_k)$, $k \geqslant 1$, *попарно не пересекаются;*

3) для любого $\varepsilon > 0$ *существуют числа* $B, B_1 > 0$ *такие, что*

$$\ln|g_\Lambda(z)| \geqslant (2-\varepsilon)\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k) - B_1 - B\lambda_k, \quad z \in S(\lambda_k, \gamma_k), \quad k \geqslant 1.$$

Доказательство. Представим g_Λ в виде $g_\Lambda = f/h$, где

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)^{n_k}, \quad h(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right)^{2n_k}\exp\left(-\frac{2zn_k}{\lambda_k}\right).$$

По условию $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$. Тогда согласно теореме Линделефа [8, гл. I, §11, теорема 15] f — целая функция экспоненциального типа. Ее нулевое множество Λ_0 является объединением $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $-\Lambda = \{-\lambda_k, n_k\}$. Точки λ_k не попадают в круги $B(-\lambda_k, \delta\lambda_k)$, $\delta \in (0,1)$. Тогда из определения индекса конденсации и условия леммы следует, что $S_{\Lambda_0,0} = S_{\Lambda,0} = 0$. Таким образом, функция f с нулевым множеством Λ_0 удовлетворяет условиям леммы 2.

Учитывая, что $\lambda_k \neq 0$ (т.е. $n(t,\Lambda) = 0$ для малых $t > 0$) и $n(t,\Lambda) \leqslant bt$, $t > 0$, имеем

$$\ln\left|\prod_{\lambda_k<2|z|}\left(1+\frac{z}{\lambda_k}\right)^{2n_k}\right| \leqslant \sum_{\lambda_k<2|z|} 2n_k \ln\left(1+\frac{|z|}{\lambda_k}\right) = \int_0^{2|z|}\ln\left(1+\frac{|z|}{t}\right)dn(t,\Lambda) =$$

$$= n(2|z|,\Lambda)\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + |z|\int_0^{2|z|}\frac{n(r,\Lambda)dr}{r(t+|z|)} \leqslant 2b|z| + \int_0^{2|z|} bdt \leqslant 4b|z|. \tag{21}$$

По лемме 3.1 из книги [9, гл. I],

$$\ln|(1+w)e^{-w}| \leqslant 2|w|^2, \quad |w| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\ln\left|\prod_{\lambda_k\geqslant 2|z|}\left(1+\frac{z}{\lambda_k}\right)^{2n_k}\exp\left(-\frac{2zn_k}{\lambda_k}\right)\right| \leqslant \sum_{\lambda_k\geqslant 2|z|} 2n_k\left(\frac{|z|}{\lambda_k}\right)^2 =$$

$$= 2\int_{2|z|}^{\infty}\left(\frac{|z|}{r}\right)^2 dn(t,\Lambda) \leqslant 4|z|^2\int_{2|z|}^{\infty}\frac{n(t,\Lambda)dr}{t^3} \leqslant 4b|z|^2\int_{2|z|}^{\infty}\frac{dt}{t^2} \leqslant 2b|z|.$$

Отсюда с учетом (21) и лемм 1, 2 получаем пункты 1)–3). □

2. Биортогональная система

Пусть $\rho > 0$, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Следуя [3, лемма 4.2], положим

$$u(z) = \frac{x+3\rho}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega(2\sigma_\Lambda(|t|)}{(x+3\rho)^2+(y-t)^2}dt.$$

В силу (2) функция $u(z)$ определена в полуплоскости $C_{3\rho} = \{z : x = \mathrm{Re} z > -3\rho\}$. Она является положительной и гармонической в этой полуплоскости. Пусть $v(z)$ — гармоническая функция, сопряженная к $u(z)$. Тогда функция

$$h_{\omega,\rho}(z) = \exp(-2u(z) - 2iv(z))$$

является аналитической в полуплоскости $C_{3\rho}$ и не имеет там нулей. Согласно лемме 5 из работы [4] верно неравенство

$$\ln|h_{\omega,\rho}(z)| \leqslant -\omega(2\sigma_\Lambda(|z|)), \quad z \in C_{3\rho}, \tag{22}$$

и существует $A_0 > 0$ такое, что

$$\ln|h_{\omega,\rho}(z)| \geqslant -A_0(x+3\rho), \quad z \in C_{2\rho}, \quad |y| \leqslant 2^{-1}(x+3\rho). \tag{23}$$

Пусть $\omega \in \Omega_\rho$. Символом ω^* обозначим выпуклую функцию, сопряженную к функции ω [10, гл. III], т. е.

$$\omega^*(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}}(xt - \omega(t)).$$

Так как $\omega(t) \geqslant 0$ и $\omega(0) = 0$, то $\omega^*(x) \geqslant 0$ и $\omega^*(0) = 0$.

Лемма 4. *Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ такая, что $S_{\Lambda,0} = 0$, $\sigma_\Lambda(\lambda_k) \to +\infty$, $k \to \infty$, $\overline{n}(\Lambda) < \infty$ и $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Тогда существуют аналитические в полуплоскости $C_{3\rho}$ функции $G_{\omega,k,j}$ и числа $C, C_1 > 0$, такие, что*

$$|G_{\omega,k,j}(z)| \leqslant C\beta_k \frac{e^{\omega^*(x)}}{1+y^2}, \quad z \in C_{3\rho}, \quad j = \overline{1, n_k}, \quad k \geqslant 1, \tag{24}$$

где $\ln\beta_k = -4^{-1}\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k) + C_1\lambda_k$, и имеют место равенства

$$G^{(j-1)}_{\omega,k,j}(\lambda_k) = 1, \quad j = \overline{1, n_k}, \quad k \geqslant 1,$$
$$G^{(l)}_{\omega,k,j}(\lambda_k) = 0, \quad l = \overline{0, n_k - 1}, \quad l \neq j-1, \quad k \geqslant 1,$$
$$G^{(l)}_{\omega,k,j}(\lambda_p) = 0, \quad l = \overline{0, n_p - 1}, \quad p \geqslant 1, \quad p \neq k.$$

Доказательство. Для построения функций $G_{k,j}$ воспользуемся схемой, используемой в работе [3, леммы 4.2, 4.4]. Пусть $\Lambda_1 = \{\lambda_k + 3\rho, n_k\}$. Положим

$$g(z) = g_{\Lambda_1}(z + 3\rho).$$

В силу (5)

$$\ln|g(z)| \leqslant 2(x+3\rho)\sigma_{\Lambda_1}(|z+3\rho|) + A(x+3\rho) \leqslant 2(x+3\rho)\sigma_\Lambda(|z|) + A(x+3\rho), \quad z \in C_{3\rho}.$$

Отсюда с учетом (8) получаем

$$\ln|g(z)| \leqslant 2x\sigma_\Lambda(|z|) + 6\rho b\ln|z| + Ax + A_1, \quad z \in C_{3\rho}. \tag{25}$$

По условию $S_{\Lambda,0} = 0$. Тогда, как нетрудно заметить, имеет место равенство $S_{\Lambda_1,0} = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу леммы 3 найдутся числа $B, B_1 > 0$ и γ_k, $k \geqslant 1$, такие, что $\gamma_k/|\lambda_k| \leqslant 1/4$, круги $B(\lambda_k, \gamma_k)$ попарно не пересекаются, и для каждого $k \geqslant 1$ верно неравенство

$$\ln|g_{\Lambda_1}(z)| \geqslant (2-\varepsilon)(\lambda_k + 3\rho)\sigma_{\Lambda_1}(\lambda_k + 3\rho) - B_1 - B(\lambda_k + 3\rho), \quad z \in S(\lambda_k + 3\rho, \gamma_k).$$

Следовательно,

$$\ln|g(z)| \geqslant (2-\varepsilon)\lambda_k\sigma_{\Lambda_1}(\lambda_k+3\rho) - B_1 - B(\lambda_k+3\rho), \quad z\in S(\lambda_k,\gamma_k), \quad k\geqslant 1. \tag{26}$$

В силу (22) и (25) имеем

$$\begin{gathered}\ln|g(z)| + \ln|h_{\omega,\rho}(z)| \leqslant 2x\sigma_\Lambda(|z|) - \omega(2\sigma_\Lambda(|z|)) + 6\rho b\ln|z| + Ax + A_1 \leqslant \\ \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}}(xt-\omega(t)) + 6\rho\sigma_\Lambda(|z|) + A(x+3\rho) = \omega^*(x) + 6\rho b\ln|z| + Ax + A_1.\end{gathered} \tag{27}$$

Положим

$$G(z) = \frac{g(z)h_{\omega,\rho}(z)e^{-Az}}{(1+z+3\rho)^{[6\rho b]+3}},$$

где $[6\rho b]$ — целая часть числа $6\rho b$. Функция G обращается в нуль в точках λ_k с кратностью n_k. Поскольку круги $B(\lambda_k,\gamma_k)$ попарно не пересекаются, то для каждого $k\geqslant 1$ в окрестности замкнутого круга $\overline{B(\lambda_k,\gamma_k)}$ верно представление

$$\frac{1}{G(z)} = \sum_{j=1}^{n_k}\frac{d_{k,j}}{(z-\lambda_k)^j} + g_k(z),$$

где g_k — аналитическая функция и

$$d_{k,j} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S(\lambda_k,\gamma_k}\frac{(z-\lambda_k)^{j-1}}{G(z)}dz.$$

Положим

$$G_{\omega,k,j}(z) = \frac{G(z)}{(j-1)!}\sum_{l=1}^{n_k+1-j}\frac{d_{k,j-1+l}}{(z-\lambda_k)^l}, \quad j=\overline{1,n_k}, \quad k\geqslant 1.$$

В лемме 4.4 работы [3] доказывается, что для функций $G_{k,j}$ выполнены равенства из утверждения данной леммы. Докажем (24). Имеем

$$\begin{gathered}|d_{k,j}| \leqslant (\gamma_k)^j d_k, \quad \frac{1}{d_k} = \min_{z\in S(\lambda_k,\gamma_k)}|G(z)|, \quad j=\overline{1,n_k}, \quad k\geqslant 1, \\ |G_{\omega,k,j}(z)| \leqslant d_k\frac{(\gamma_k)^{j-1}}{(j-1)!}\left|\frac{h_{\omega,\rho}(z)e^{-Az}}{(1+z+3\rho)^{[6\rho b]+3}}\right|\sum_{l=1}^{n_k+1-j}\frac{(\gamma_k)^l|g(z)|}{|z-\lambda_k|^l}.\end{gathered} \tag{28}$$

Функции $g(z)/(z-\lambda_k)^l$, $l=\overline{1,n_k}$, $k\geqslant 1$, являются аналитическими в $C_{3\rho}$. Поэтому

$$\begin{gathered}\frac{(\gamma_k)^l|g(z)|}{|z-\lambda_k|^l} \leqslant |g(z)|, \quad z\in C_{3\rho}\setminus B(\lambda_k,\gamma_k), \\ \frac{(\gamma_k)^l|g(z)|}{|z-\lambda_k|^l} \leqslant \max_{w\in S(\lambda_k,\gamma_k)}|g(w)|, \quad z\in B(\lambda_k,\gamma_k).\end{gathered}$$

Пусть $z\in B(\lambda_k,\gamma_k)$. Так как $\gamma_k/|\lambda_k|\leqslant 1/4$, то в силу (7), (8) и (25) имеем

$$\begin{gathered}\max_{w\in S(\lambda_k,\gamma_k)}\ln|g(w)| \leqslant 2(\lambda_k+\gamma_k)\sigma_\Lambda(\lambda_k+\gamma_k) + 6\rho b\ln(\lambda_k+\gamma_k) + A(\lambda_k+\gamma_k) + A_1 \leqslant \\ \leqslant 2(\lambda_k-\gamma_k)\sigma_\Lambda(2|z|) + 2\gamma_k\sigma_\Lambda(\lambda_k+\gamma_k) + 6\rho b\ln(2|z|) + Ax + A(\lambda_k+\gamma_k) + A_1 \leqslant\end{gathered}$$

$$\leqslant 2x\sigma_\Lambda(|z|) + 6\rho b \ln|z| + Ax + \frac{1}{2}\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k) + A_3\lambda_k + A_2, \quad k \geqslant 1.$$

Таким образом,

$$\frac{(\gamma_k)^l|g(z)|}{|z-\lambda_k|^l} \leqslant c_1\alpha_k|g(z)|, \quad z \in C_{3\rho}, \quad k \geqslant 1,$$

где $c_1 > 0$ и $\ln\alpha_k = 2^{-1}\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k) + A_3\lambda_k$. Отсюда с учетом (27) и (28) получаем

$$|G_{\omega,k,j}(z)| \leqslant c_2 n_k \alpha_k d_k \frac{(\gamma_k)^{j-1}}{(j-1)!}\frac{e^{\omega^*(x)}}{1+y^2}, \quad z \in C_{3\rho}, \quad k \geqslant 1. \tag{29}$$

Оценим теперь оставшиеся сомножители. Так как $m(\Lambda) \leqslant \overline{n}(\Lambda) < \infty$, то $n_k \leqslant b_0\lambda_k$, $k \geqslant 1$, где $b_0 > 0$. Учитывая, что $j! \geqslant j^j/3^j$ для всех $j \geqslant 1$, имеем

$$\frac{1}{\lambda_k}\ln\frac{(\lambda_k/3)^{j-1}}{(j-1)!} \leqslant \frac{j-1}{\lambda_k}\ln\frac{\lambda_k}{j-1} \leqslant \sup_{t>0}\frac{\ln t}{t} \leqslant 1, \quad j = \overline{1,n_k}, \quad k \geqslant 1.$$

Следовательно,

$$\frac{(\gamma_k)^{j-1}}{(j-1)!} \leqslant \frac{(\lambda_k/3)^{j-1}}{(j-1)!} \leqslant e^{\lambda_k}, \quad j = \overline{1,n_k}, \quad k \geqslant 1.$$

Оценим, наконец, d_k. Так как $\gamma_k/|\lambda_k| \leqslant 1/4$, то все точки $z = x + iy$ окружностей $S(\lambda_k,\gamma_k)$, $k \geqslant k_0$, удовлетворяют неравенству $|y| \leqslant 2^{-1}(x+3\rho)$. Кроме того,

$$-([6\rho b]+3)\ln|1+z+3\rho| \geqslant -B_0\lambda_k, \quad z \in S(\lambda_k,\gamma_k), \quad k \geqslant k_0.$$

Положим $\varepsilon = 2^{-1}$. Тогда с учетом (26), (23) и (7) для некоторых $B_2, B_3 > 0$ имеем

$$\ln|G(z)| \geqslant (2-\varepsilon)\lambda_k\sigma_{\Lambda_1}(\lambda_k+3\rho) - B_2 - B\lambda_k \geqslant$$
$$\geqslant \frac{2-\varepsilon}{2}\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k) - B_2 - B_3\lambda_k \geqslant \frac{3}{3}\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k) - B_2 - B_3\lambda_k, \quad z \in S(\lambda_k,\gamma_k), \quad k \geqslant 1.$$

Таким образом,

$$\ln|d_k| \leqslant -\frac{3}{4}\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k) + B_2 + B_3\lambda_k, \quad k \geqslant 1.$$

Отсюда с учетом (29) получаем (24). □

Положим

$$H_{\omega,k,j}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\omega,k,j}(x+iy)e^{-(x+iy)t}dy, \quad j = \overline{1,n_k}, \quad k \geqslant 1. \tag{30}$$

Доказательство леммы 5 дословно повторяет доказательство леммы 7 из работы [4].

Лемма 5. *Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ такая, что $S_{\Lambda,0} = 0$, $\sigma_\Lambda(\lambda_k) \to +\infty$, $k \to \infty$, $\overline{n}(\Lambda) < \infty$, $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$, $\omega(t) \geqslant t^2$, $t > 0$, и $G_{\omega,k,j}$ — функции и β_k — числа из леммы 4, $j = \overline{1,n_k}$, $k \geqslant 1$. Тогда на $\mathbb{R}$ по формуле (30) определены функции $H_{\omega,k,j}$, они непрерывны и для некоторых чисел $D_1, D_2 > 0$ имеют место оценки*

$$|H_{\omega,k,j}(t)| \leqslant D_1\beta_k e^{-\omega(t)}, \quad t \geqslant 0, \quad j = \overline{1,n_k}, \quad k \geqslant 1,$$
$$|H_{\omega,k,j}(t)| \leqslant D_2\beta_k e^{-2\rho|t|}, \quad t < 0, \quad j = \overline{1,n_k}, \quad k \geqslant 1.$$

Кроме того, верны равенства

$$G_{\omega,k,j}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,k,j}(t)e^{zt}dt, \quad x = \operatorname{Re} z > 0, \quad j = \overline{1,n_k}, \quad k \geqslant 1.$$

3. Представление рядами

Опираясь на лемму 5 и практически дословно повторяя доказательство теоремы 1 из работы [4], получаем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ такая, что $S_{\Lambda,0} = 0$, $\sigma_\Lambda(\lambda_k) \to +\infty$, $k \to \infty$, $\overline{n}(\Lambda) < \infty$, $\omega_0 \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Тогда каждая функция $f \in W^p(\Lambda, \omega_0)$ продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление* (3), *где*

$$a_{k,n} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,k,n+1}(t) f(t) dt, \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geqslant 1,$$

$\omega(t) = \omega_0(t)$, $t \leqslant 0$, $\omega(t) = \omega_0(t) + t^2$, $t > 0$, и функции $H_{\omega,k,j}$ определены по формуле (30). *При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах из плоскости.*

Пусть $f \in W^0(\Lambda, \omega_1)$, где $\omega_1 \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Тогда $f \in W^1(\Lambda, \omega_0)$, где $\omega_0(t) = \omega_1(t) + |t|$, и $\omega_0 \in \Omega_{\Lambda,\rho+1}$. Поэтому из теоремы 1 получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ такая, что $S_{\Lambda,0} = 0$, $\sigma_\Lambda(\lambda_k) \to +\infty$, $k \to \infty$, $\overline{n}(\Lambda) < \infty$, $\omega_1 \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Тогда каждая функция $f \in W^0(\Lambda, \omega_1)$ продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление* (3), *где*

$$a_{k,n} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,k,n+1}(t) f(t) dt, \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geqslant 1,$$

$\omega(t) = \omega_1(t)$, $t \leqslant 0$, $\omega(t) = \omega_1(t) + t^2$, $t > 0$, и функции $H_{\omega,k,j}$ определены по формуле (30). *При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах из плоскости.*

Выше отмечалось, что $S_{\Lambda,0} = 0$, если $S_\Lambda > -\infty$ и $\sigma_\Lambda(\lambda_m) \to +\infty$, $m \to \infty$. Следовательно, теоремы 1 и 2 из работы [4] являются частными случаями соответственно теорем 1 и 2. В работе [4] показано, что теорема 2.1 из работы [3] является частным случаем теорем 1 и 2 из работы [4], а значит, и теорем 1 и 2.

Список литературы

1. *Anderson J. M., Binmore K. G.* Closure theorems with applications to entire functions with gaps // Transactions of the American Mathematical Society. 1971. Vol. 161. P. 381–400. https://doi.org/10.2307/1995948
2. *Deng G. T.* Incompleteness and closure of a linear span of exponential system in a weighted Banach space // Journal of Approximation Theory. 2003. Vol. 125, iss. 1. P. 1–9. https://doi.org/10.1016/j.jat.2003.09.004
3. *Zikkos E.* The closed span of some exponential system in weighted Banach spaces on the real line and a moment problem // Analysis Mathematica. 2018. Vol. 44, iss. 4. P. 605–630. https://doi.org/10.1007/s10476-018-0311-0
4. *Krivosheev A. S., Krivosheeva O. A., Kuzhaev A. F.* The representation by series of exponential monomials of functions from weight subspaces on a line // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, iss. 6. P. 1183–1200. https://doi.org/10.1134/S1995080221060159
5. *Boas R. P. Jr.* Entire Functions. New York : Academic Press, 1954. 276 p.
6. *Кривошеев А. С.* Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях // Известия РАН. Серия математическая. 2004. Т. 68, № 2. С. 71–136. https://doi.org/10.4213/im476

7. *Кривошеев А. С., Кривошеева О. А., Рафиков А. И.* Инвариантные подпространства в полуплоскости // Уфимский математический журнал. 2021. Т. 13, вып. 3. С. 58–81. https://doi.org/10.13108/2021-13-3-57
8. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. Москва : Гостехиздат, 1956. 632 с.
9. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. Москва : Наука, 1983. 176 с.
10. *Rockafellar R. T.* Convex Analysis. New Jersey : Princeton University Press, 1970. 470 p.

References

1. Anderson J. M., Binmore K. G. Closure theorems with applications to entire functions with gaps. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1971, vol. 161, pp. 381–400. https://doi.org/10.2307/1995948
2. Deng G. T. Incompleteness and closure of a linear span of exponential system in a weighted Banach space. *Journal of Approximation Theory*, 2003, vol. 125, iss. 1, pp. 1–9. https://doi.org/10.1016/j.jat.2003.09.004
3. Zikkos E. The Closed span of some exponential system in weighted Banach spaces on the real line and a moment problem. *Analysis Mathematica*, 2018, vol. 44, iss. 4, pp. 605–630. https://doi.org/10.1007/s10476-018-0311-0
4. Krivosheev A. S., Krivosheeva O. A., Kuzhaev A. F. The representation by series of exponential monomials of functions from weight subspaces on a line. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, vol. 42, iss. 6, pp. 1183–1200. https://doi.org/10.1134/S1995080221060159
5. Boas R. P. Jr. *Entire Functions*. New York, Academic Press, 1954. 276 p.
6. Krivosheev A. S. A fundamental principle for invariant subspaces in convex domains. *Izvestiya: Mathematics*, 2004, vol. 68, iss. 2, pp. 291–353. https://doi.org/10.1070/IM2004v068n02ABEH000476
7. Krivosheev A. S., Krivosheeva O. A., Rafikov A. I. Invariant subspaces in half-plane. *Ufa Mathematical Journal*, 2021, vol. 13, iss. 3, pp. 57–79. https://doi.org/10.13108/2021-13-3-57
8. Levin B. Ja. *Distribution of Zeros of Entire Functions*. Providence, American Mathematical Society, 1964. 583 p. (Russ. ed.: Moscow, Gostekhizdat, 1956. 632 p.).
9. Leont'ev A. F. *Tselye funktsii. Ryady eksponent* [Entire Functions. Series of Exponentials]. Moscow, Nauka, 1983, 176 p. (in Russian).
10. Rockafellar R. T. *Convex Analysis*. New Jersey, Princeton University Press, 1970. 470 p.

Поступила в редакцию / Received 18.03.2022
Принята к публикации / Accepted 15.04.2022
Опубликована / Published 30.11.2022

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 430–446
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 430–446
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-430-446, EDN: UIUDUP

Научная статья
УДК 517.98

Представление функций Грина волнового уравнения на отрезке в конечном виде

К. Ю. Малышев

[1]Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д. В. Скобельцына (НИИЯФ МГУ), Россия, 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

[2]Российский университет дружбы народов (РУДН), Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Малышев Ксаверий Юрьевич, [1]ведущий программист; [2]аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей, kmalyshev08102@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-8823-9136

Аннотация. Исследованы решения начально-краевых задач о возбуждении колебаний ограниченного отрезка точечным мгновенно действующим источником. Решения этих задач, называемые функциями Грина уравнения колебаний на отрезке, известны в виде бесконечных рядов Фурье или рядов по функциям Хевисайда. Метод Крылова ускорения сходимости рядов Фурье для некоторых вариантов граничных условий не просто ускоряет сходимость, а позволяет составить выражения для функций Грина в конечном виде. В настоящей работе даны конечные выражения функций Грина в виде элементарных функций вещественной переменной. Рассмотрено четыре различных постановки граничных условий, в том числе условия периодичности.

Ключевые слова: уравнение колебаний на отрезке, функция Грина, представление в конечном виде, граничные условия, метод А. Н. Крылова

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН. Автор благодарит проф. М. Д. Малых (РУДН) за постоянное внимание к работе, проф. А. Н. Боголюбова (МГУ, физический факультет), проф. Л. А. Севастьянова (РУДН), М. В. Алексеева (НИУ ВШЭ) за ценные обсуждения.

Для цитирования: *Малышев К. Ю.* Представление функций Грина волнового уравнения на отрезке в конечном виде // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 430–446. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-430-446, EDN: UIUDUP

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Representation of Green's functions of the wave equation on a segment in finite terms

K. Yu. Malyshev

Lomonosov Moscow State University, Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics (SINP MSU), 1(2) Leninskie gory, GSP-1, Moscow 119991, Russia

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russia

Ksaverii Yu. Malyshev, kmalyshev08102@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-8823-9136

© Малышев К. Ю., 2022

Abstract. Solutions of initial-boundary value problems on the excitation of oscillations of a finite segment by an instantaneous point sourse are investigated. Solutions to these problems, called Green's functions of the equation of oscillations on a segment, are known in the form of infinite Fourier series or series in terms of Heaviside functions. A. N. Krylov's method of accelerating the convergence of Fourier series for several types of boundary conditions not only accelerates the convergence, but allows one to compose expressions for Green's functions in finite terms. In this paper, finite expressions of Green's functions are given in the form of elementary functions of a real variable. Four different formulations of boundary conditions are considered, including the periodicity conditions.

Keywords: equation of oscillations on a segment, Green's function, representation in finite terms, boundary conditions, A. N. Krylov's method

Acknowledgements: This work was supported by the RUDN University Strategic Academic Leadership Program. The author thanks Prof. M. D. Malykh (RUDN), for constant attention to the work, Prof. A. N. Bogolyubov (Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University), Prof. L. A. Sevastyanov (RUDN), M. V. Alekseev (HSE) for valuable discussions.

For citation: Malyshev K. Yu. Representation of Green's functions of the wave equation on a segment in finite terms. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 430–446 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-430-446, EDN: UIUDUP

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Решения начально-краевых задач математической физики традиционно выражаются бесконечными рядами по собственным функциям [1–3]. Например, колебания струны описываются начально-краевой задачей для однородного волнового уравнения

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

на отрезке конечной длины, здесь и далее c — скорость распространения возмущений. Решение этой задачи представляется в виде тригонометрического ряда по методу Фурье [3]. Однако в [4] представлено обобщение формулы Даламбера на случай отрезка конечной длины и дано решение начально-краевой задачи для однородного волнового уравнения (1) в конечном виде для случая кусочно-гладких начальных условий. При этом в [4, 5] рассмотрено несколько вариантов однородных граничных условий.

Метод Даламбера как способ решения начальной задачи на бесконечной прямой появился почти одновременно с методом Фурье [6]. Более того, в XVIII–XIX вв. метод Даламбера иногда применялся и к конечному отрезку. Такой путь решения ведёт к функциям, которые часто нельзя представить в виде единого выражения на всей области изменения аргументов [7]. В те времена кусочно заданные функции не принимались за функции, допустимые в анализе [8, с. 26–28], а решения в виде выражений, заданных кусочно, казались менее достойными внимания, чем единые выражения в виде бесконечных рядов.

Вопрос о том, являются ли элементарными конечные выражения, доставляемые формулами Даламбера [5], выходит далеко за рамки того раздела компьютерной алгебры, который исследует разрешимость в элементарных функциях. Дело в том, что фундаментом для разработки алгоритмов интегрирования в элементарных функциях [9, 10] стала теория, созданная в 1830-х гг. Лиувиллем [11]. Здесь элементар-

ные функции трактовались как аналитические функции комплексной переменной. При этом, например, функции $|x|$, $\operatorname{sgn} x$ не считались элементарными, а функция $\arcsin(\sin x)$ считалась равной x. Однако в современной литературе [12, с. 142–143] прочно утвердилось более широкое представление об элементарных функциях. Здесь элементарные функции рассматриваются над полем вещественных чисел и понимаются как функции, допускающие выражение при помощи конечного числа арифметических действий и основных элементарных операций (вычисления логарифма, экспоненты и т. п.). Современные системы компьютерной алгебры (далее CAS) умеют работать с такого рода элементарными выражениями, например, график функции $\arcsin(\sin x)$ не совпадает с графиком x. Поэтому отыскание элементарных в современном смысле выражений для решения начально-краевой задачи для волнового уравнения (1) имеет очевидное практическое значение.

Замечание 1. При вычислении интегралов можно заметить некоторое разночтение трактовок понятия элементарной функции. Например, система Sage (v. 9.3)[1] рисует график функции $\arcsin(\sin x)$ верно, но при этом полагает, что

$$\int_0^{\pi} \arcsin(\sin x)dx = \frac{\pi^2}{2},$$

хотя площадь под кривой равна $\frac{1}{2}\pi \cdot \frac{\pi}{2}$.

В рамках метода Фурье вопрос об элементарном представлении вновь возникает при попытке ускорить сходимость рядов Фурье. В первой половине прошлого века А. Н. Крылов разработал приём усиления сходимости рядов Фурье [13, 14]. Ниже используется версия метода Крылова, изложенная в монографии Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [15, с. 98–100, ср. 14]. Пусть имеется ряд Фурье вида

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} A\left(\frac{1}{n}\right) \sin nz.$$

Пусть функция A равна нулю при нулевом значении аргумента и является достаточно гладкой. Тогда её можно представить в виде Тейлоровского разложения с остаточным членом в форме Пеано:

$$A\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \cdots + O\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Подставив это разложение в ряд Фурье F, получим сумму конечного числа рядов Фурье со скоростью сходимости ниже, чем n^{-k}, и ряда Фурье f_k, сходимость которого не медленнее, чем n^{-k}:

$$F = c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n} + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n^2} + \ldots + f_k.$$

Аддитивно выделенные ряды Фурье вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n^{2m+1}}$$

[1] *Sage*. The Sage Developers, SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 7.4), 2016. URL: https://www.sagemath.org (дата обращения: 10.05.2022).

могут быть просуммированы в конечном виде кусочно-полиномиальных функций для $m = 0$ и для каждого $m \in \mathbb{N}$ [16, с. 578, 5.4.5, формула 5]. Как отметил сам А. Н. Крылов в предисловии к монографии [13], этот способ «часто приводит к представлению суммы предложенного ряда в замкнутой форме под видом разрывной функции». Согласно [13, с. 227], указанная техника может применяться и в случаях, когда корни из собственных значений не являются натуральными числами, в настоящей работе встречается простейший такой случай, когда вместо n имеется $n + \frac{1}{2}$, см. п. 3.2.

Мы применили метод Крылова к рядам Фурье, описывающим функции Грина начально-краевых задач для волнового уравнения с четырьмя вариантами граничных условий, и обнаружили, что всякий раз вместо бесконечного ряда получается элементарное выражение. Это и составляет основной результат настоящей статьи.

Напомним, что решение неоднородной начально-краевой задачи для волнового уравнения может быть представлено в интегральной форме [17, с. 260], ядром которого служит функция Грина [3, с. 66, 314]. В некоторых случаях для функции Грина были получены выражения в виде бесконечной суммы функций Хевисайда [18, с. 208]. Выражение в виде ряда функций Хевисайда получается методом отражения начального условия и последующим применением формулы Даламбера (см. п. 3.2.). Без отсылки к теории функций Грина ядро такого представления было описано в виде кусочно-линейных периодических функций для случая задачи Дирихле в [19] и [20]. Квадратурные выражения из работы [19], связанные с кусочно-гладкими начальными условиями, могут быть выражены аналитически по формуле Даламбера для отрезка из [4, 5]. Вопрос о суммировании ряда Фурье для функции Грина в случае условий Дирихле рассматривался в [21].

1. Функция Грина

По определению функция Грина [3, 22] является формальным решением начально-краевой задачи о возбуждении колебаний струны конечной длины l точечным мгновенно действующим источником [17]:

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l,\ t > \tau,\ 0 \leqslant \tau < +\infty, \\ g|_{t=\tau} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = \delta(x - s), \\ P[g]|_{x=0} = 0,\ Q[g]|_{x=l} = 0, \quad \tau \leqslant t < +\infty. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь P, Q — операторы граничных условий, δ — дельта-функция Дирака [23], описывающая точечный источник, который расположен в точке $s \in (0, l)$ и действует в момент времени $\tau \geqslant 0$. Значения s и τ являются параметрами.

Ниже будут рассмотрены случаи, когда операторы P и Q задают условия Дирихле (закреплённые концы, $g|_{x=0} = g|_{x=l} = 0$) или Неймана (свободные концы, $g'|_{x=0} = g'|_{x=l} = 0$). Аналогичное построение выполнено для случаев, когда один конец закреплён, а другой — свободен, и также для постановки периодических граничных условий $g(0) = g(l), g'(0) = g'(l)$ [3, 24]. Краевые условия упругого закрепления концов изучаться не будут.

Чтобы выписать ряд Фурье для функции Грина, определим функции $v_n(x)$ и числа λ_n — ортонормированные в $L_2[0, l]$ собственные функции и собственные значения задачи Штурма – Лиувилля:

$$\begin{cases} \frac{d^2 v_n}{dx^2} + \lambda_n v_n = 0, \quad 0 < x < l, \\ P[v_n]|_{x=0} = 0, \quad Q[v_n]|_{x=l} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Если операторы P и Q задают одновременно условия Дирихле, или же один из них соответствует условию Дирихле, а второй — условию Неймана, то формальное решение задачи (2) имеет вид ряда Фурье по собственным функциям задачи (3) [22]:

$$g(x,t;s,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}c(t-\tau))}{\sqrt{\lambda_n}c}v_n(s)v_n(x). \tag{4}$$

Если операторы P и Q одновременно задают граничные условия второго рода или же отвечают условиям периодичности $u(0)=u(l), u'(0)=u'(l)$, то задача (3) имеет нулевое собственное значение, которому соответствует собственная функция, равная константе. При этом формальное выражение в виде ряда (4) сохраняет силу, но начинается с линейного по времени слагаемого.

Замечание 2. Если предположить, что решение задачи (2) существует, то оно с необходимостью имеет своим рядом Фурье выражение (4). Вопрос существования решения задачи (2) в каком-либо подходящем обобщённом смысле выходит за рамки настоящей статьи.

2. Базовые тригонометрические ряды

Прежде чем обратиться к суммированию рядов Фурье для функций Грина, рассмотрим ряды, которые будут играть роль базовых конструкций в дальнейшем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nz}{n}, \quad z\in\mathbb{R}, \tag{5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)z}{2n+1}, \quad z\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Лемма 1. *Ряд* (5) *сходится равномерно на каждом замкнутом подмножестве множества* $\mathbb{R}$*, не содержащем точек вида* $z=2\pi k$*,* $k\in\mathbb{Z}$*.*

Доказательство. Равномерная сходимость ряда (5) на указанном классе множеств доказывается по признаку Абеля, например в [25, с. 19]. □

Лемма 2. *Ряд* (6) *сходится равномерно на каждом замкнутом подмножестве множества* $\mathbb{R}$*, не содержащем точек вида* $z=\pi k$*,* $k\in\mathbb{Z}$*.*

Доказательство. Исследование ряда (6) полностью аналогично рассмотрению ряда (5). □

Замечание 3. Сходимость не является абсолютной, за исключением точек, кратных π [26, с. 16], поэтому результаты суммирования зависят от порядка следования слагаемых [27]. Далее всюду предполагается стандартное упорядочивание слагаемых.

Лемма 3. *Имеет место равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nz}{n}=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{z}{2}\right), \quad z\in\mathbb{R}, \quad z\neq 2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}. \tag{7}$$

Доказательство. Формула (7), отнесённая к одному периоду $z\in(0,2\pi)$, доказана в [15, с. 106]. На всю прямую $\mathbb{R}$ равенство (7) распространяется с помощью формул приведения. □

Замечание 4. Функция $\arctan(\operatorname{ctg}\frac{z}{2})$ является кусочно-линейной 2π-периодической функцией, её выражение на промежутке $(0, 2\pi)$

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{z}{2}\right) = \frac{\pi - z}{2}. \tag{8}$$

Если доопределить её в точках разрыва средним арифметическим предельных значений слева и справа (ср. с теоремой Дирихле [28, с. 438]), то формула (7) будет справедлива при всех вещественных z.

Будем далее использовать лемму 2, учитывая это замечание.

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)z}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \sin z, \quad z \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

где $\operatorname{sgn}(t) = \frac{\sqrt{t^2}}{t}$ *— функция, принимающая значения* 1 *или* -1 *всюду, кроме* $t = 0$, *где она равна* 0.

Доказательство. Формула (9), отнесённая к одному периоду $z \in [0, 2\pi]$, доказана в [15, с. 97] как следствие (7). На всю прямую $\mathbb{R}$ выражение (9) распространяется с помощью формул приведения. □

Выражения соответствующих функций, рассматриваемых на периоде, приведены в собрании рядов [29], в справочнике [30] и многих других источниках. Самый распространённый метод получения формулы (7) — суммирование комплексной геометрической прогрессии [15, 31, 32]. В учебнике [28, с. 447] дано суммирование этих рядов без применения комплексных чисел путём почленного интегрирования конечной суммы

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos nz = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})z}{2\sin\frac{z}{2}}.$$

Выражения (7) и (9) нетрудно «угадать», выполняя построение графиков частичных сумм рядов в системах компьютерной алгебры [33]. Разложив угаданные выражения для сумм в ряды Фурье, можно получить ещё одно обоснование формул (7), (9). Этот метод описан в [34].

Замечание 5. Ряд, аналогичный (5), являлся контрпримером Абеля к «теореме» о непрерывности предела последовательности непрерывных функций [35]. Эти ряды рассматривались в трудах Н. И. Лобачевского, который одним из первых занялся вопросом обоснования их сходимости («исчезания», как тогда говорили) [36, с. 31–81]. В работе [37] дан обзор исследований ряда (5), в том числе его частичных сумм, проведённых в XX в., и их приложений к общим тригонометрическим рядам. Из недавних работ укажем [38].

3. Суммирование рядов для функций Грина

Рассмотрим примеры суммирования рядов для функций Грина уравнения колебаний, приняв следующую договорённость об обозначениях. Для сокращения объёма формул во всех нижеследующих примерах функций Грина, кроме случая граничных условий периодичности, будем полагать длину отрезка $l = \pi$. Для случая условий периодичности удобно брать $l = 2\pi$. Введём обозначение $T = c(t - \tau)$. Будем далее всюду полагать $c = 1$.

3.1. Граничные условия Дирихле

В качестве первого примера возьмём граничные условия первого рода на обоих концах отрезка («условия закреплённых концов»):

$$g_{11}(0) = g_{11}(\pi) = 0, \quad \tau \leqslant t < +\infty.$$

Функция Грина волнового уравнения на отрезке с данными граничными условиями представляется в виде ряда

$$g_{11}(x,t;s,\tau) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nT \sin ns \sin nx, \tag{10}$$

выписанного, например, в [3].

Теорема 1. *Ряд Фурье для функции Грина волнового уравнения с граничными условиями Дирихле выражается элементарной функцией*

$$g_{11} = \frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{T-x+s}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{T+x-s}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{T-x-s}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{x+s+T}{2}\right)\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad 0 < s < \pi, \quad T \in [0,+\infty). \tag{11}$$

Доказательство. Если преобразовать произведение трёх синусов в сумму четырёх синусов, то получается сумма четырёх рядов из леммы 3. Применение этой леммы немедленно даёт доказываемую формулу. □

Замечание 6. Вне точек разрыва функции Грина при помощи функций целой и дробной части числа вместо (11) можно записать:

$$g_{11} = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{x-s+T}{2\pi}\right] + \left[\frac{-x+s+T}{2\pi}\right] - \left[\frac{-x-s+T}{2\pi}\right] - \left[\frac{x+s+T}{2\pi}\right]\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\left\{\frac{x-s+T}{2\pi}\right\} + \left\{\frac{-x+s+T}{2\pi}\right\} - \left\{\frac{-x-s+T}{2\pi}\right\} - \left\{\frac{x+s+T}{2\pi}\right\}\right).$$

Здесь $[z]$ — целая часть числа z («антье» или floor), $\{z\}$ — дробная часть числа z [39, с. 87–91].

3.2. Смешанная постановка граничных условий

Рассмотрим случай, когда граничные условия в (2) имеют вид

$$g_{12}|_{x=0} = \left.\frac{\partial g_{12}}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0, \quad \tau \leqslant t < +\infty. \tag{12}$$

Формальный ряд Фурье (4) для функции Грина по соответствующим собственным функциям отрезка:

$$g_{12} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)s \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)T. \tag{13}$$

Теорема 2. *Ряд Фурье для функции Грина волнового уравнения с граничными условиями первого и второго родов представляется в виде элементарной функции следующего вида:*

$$g_{12} = \frac{1}{4}\operatorname{sgn}\sin\frac{x-s+T}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sgn}\sin\frac{-x+s+T}{2} + \\ + \frac{1}{4}\operatorname{sgn}\sin\frac{x+s-T}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sgn}\sin\frac{-x-s-T}{2} \tag{14}$$

при $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 < s < \pi$, $T \in [0, +\infty)$.

Доказательство. Доказательство этого утверждения сводится к тригонометрическим преобразованиям и ссылке на лемму 4. □

Замечание 7. Вне точек разрыва функции Грина с помощью функции «целая часть вещественного числа» вместо (14) можем записать

$$g_{12} = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{T-x+s}{4\pi}\right] + \left[\frac{T+x-s}{4\pi}\right] - \left[\frac{T-x-s}{4\pi}\right] - \right. \\ - \left[\frac{T+x+s}{4\pi}\right] - \left[\frac{T-x+s-2\pi}{4\pi}\right] - \left[\frac{T+x-s-2\pi}{4\pi}\right] + \\ \left. + \left[\frac{T-x-s-2\pi}{4\pi}\right] + \left[\frac{T+x+s-2\pi}{4\pi}\right]\right). \tag{15}$$

Замечание 8. Начально-краевая задача (2) с граничными условиями (12) рассматривается в [18, с. 208] как пример применения метода Даламбера для получения выражения для функции Грина. Получается бесконечный ряд следующего вида:

$$g_{12} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n(\sigma(x+T-s+2n\pi) - \sigma(x+T+s+2n\pi) - \\ -\sigma(x-T-s+2n\pi) + \sigma(x-T+s+2n\pi)). \tag{16}$$

Здесь $\sigma(z)$ — функция Хевисайда, равная 1 при $z \geqslant 0$ и 0 при $z < 0$. Эта формула имеет вид бесконечного ряда. Нетрудно заметить, что для всякого набора значений x, s, T не более четырёх слагаемых ряда (16) дают ненулевой вклад в выражение для функции Грина. Количество и номера этих членов зависят от x, s и T.

3.3. Граничные условия Неймана

Рассмотрим случай, когда оба оператора граничных условий задают условия Неймана (или «условия 2-го рода», или «условия свободных концов»):

$$\left.\frac{\partial g_{22}}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial g_{22}}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0, \ \tau \leqslant t < +\infty.$$

Эта постановка задачи может описывать колебания газа в открытой трубе, продольные колебания жёсткого стержня со свободными концами [22]. Данную постановку краевых условий можно встретить при знакомстве с теорией нерелятивистских струн [24, гл. 4]. В доступной нам литературе исследование суммы ряда Фурье для соответствующей функции Грина не проводилось.

В данном случае возникает нулевое собственное значение в задаче Штурма – Лиувилля, которому отвечает собственная функция, равная константе. Формальный ряд Фурье для функции Грина начинается с линейного по времени слагаемого:

$$g_{22}(x,t;s,\tau) = \frac{t-\tau}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nT\cos nx\cos ns. \tag{17}$$

Теорема 3. *Ряд Фурье для функции Грина волнового уравнения с граничными условиями Неймана представляется в виде элементарной функции следующего вида:*

$$\begin{gathered} g_{22} = \frac{t-\tau}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{T-x+s}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{T+x-s}{2}\right) + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{T-x-s}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{T+x+s}{2}\right)\right), \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad 0 < s < \pi, \quad T \in [0,+\infty). \end{gathered} \tag{18}$$

Доказательство. Обоснование этого факта тождественно предыдущим случаям. □

Замечание 9. Вне точек разрыва функции Грина можно преобразовать выражение (18) к виду

$$\begin{gathered} g_{22} = \frac{t-\tau}{\pi} - \frac{1}{2}\left(\left\{\frac{T-x+s}{2\pi}\right\} + \left\{\frac{T+x-s}{2\pi}\right\} - \left\{\frac{-T+x+s}{2\pi}\right\} - \left\{\frac{-T-x-s}{2\pi}\right\}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{T-x+s}{2\pi}\right] + \left[\frac{T+x-s}{2\pi}\right] - \left[\frac{-T+x+s}{2\pi}\right] - \left[\frac{-T-x-s}{2\pi}\right]\right). \end{gathered} \tag{19}$$

3.4. Условия периодичности

Условия периодичности или циклические граничные условия — дополнительные условия к волновым уравнениям, часто встречающиеся в теоретической и математической физике (см., например, [24, гл. 4, 7, 13; 40]).

Задача Штурма – Лиувилля имеет вид [3, с. 76–77]:

$$\begin{cases} \frac{d^2v_n}{dx^2} + \lambda_n v_n = 0, \quad 0 < x < 2\pi; \\ v_n|_{x=0} = v_n|_{x=2\pi}, v_n'|_{x=0} = v_n'|_{x=2\pi}. \end{cases} \tag{20}$$

Данная задача имеет нулевое собственное значение, которому отвечает нормированная собственная функция, равная константе $\sqrt{2\pi}$. Остальные собственные значения суть квадраты натуральных чисел, $\lambda_n = n^2$, и каждому из них отвечают две линейно независимые нормированные собственные функции:

$$v_n^1 = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad v_n^2 = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Разложение дельта-функции в начальном условии в ряд Фурье имеет вид [22, с. 289; 40, с. 11; 41, с. 519–520]:

$$\delta(x-s) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\sin ns\sin nx + \cos ns\cos nx) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cos n(x-s). \tag{21}$$

Поэтому ряд Фурье для функции Грина волнового оператора на отрезке начинается с линейного по времени слагаемого и записывается в виде

$$g_{\mathrm{P}}(x,t;s,\tau) = \frac{t-\tau}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k(x-s)\sin k(t-\tau)}{k}. \tag{22}$$

Теорема 4. *Ряд Фурье для функции Грина волнового уравнения на отрезке с граничными условиями периодичности приводится к элементарной функции следующего вида:*

$$\begin{gathered} g_{\mathrm{P}} = \frac{t-\tau}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{x-s+t-\tau}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{x-s-t+\tau}{2}\right)\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{t-\tau+x-s}{2\pi}\right] - \left[\frac{-t+\tau+x-s}{2\pi}\right]\right) = \\ = \frac{t-\tau}{2\pi} - \frac{1}{2}\left(\left\{\frac{t-\tau+x-s}{2\pi}\right\} - \left\{\frac{-t+\tau+x-s}{2\pi}\right\}\right), \\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \quad 0 < s < 2\pi, \quad t \geqslant \tau, \quad 0 \leqslant \tau < +\infty. \end{gathered} \tag{23}$$

Последние два выражения справедливы вне точек разрыва функции Грина, первое — всюду.

Доказательство. Доказательство аналогично приведённым выше рассуждениям о других функциях Грина. □

Замечание 10. Формула для суммы бесконечного ряда из (22), рассматриваемого на ограниченном множестве $\{x, s, T:\ 0 < x - s < \pi,\ 0 < T < \pi\}$, в виде кусочно-линейной функции есть в [16, п. 5.4.15, с. 588, № 3].

4. Визуализация функций Грина

Замкнутые выражения позволяют легко визуализировать функции Грина. При этом удаётся описать единообразно все многократные отражения и переотражения импульса от концов отрезка для рассмотренных вариантов граничных условий, особенно эффектно это наблюдать при помощи функций анимации, встроенных в современные CAS [33].

Как видно из найденных формул, функции Грина для всех четырёх рассмотренных краевых задач — кусочно-постоянные функции x для каждого фиксированного момента t. Отмеченное явление было указано в книге [22, с. 105] для условий Дирихле при достаточно малых значений t. Для значений t, при которых существенно влияние концов, поведение функции Грина зависит от граничных условий.

В случае условий Дирихле мгновенный профиль функции Грина как функции x представляет собой столбик, высота которого может скачком менять знак, а ширина меняется непрерывно. Модуль высоты равен $\frac{1}{2c}$ при единичной амплитуде начальной дельта-функции. Отражение от концов отрезка происходит без изменения знака функции Грина g_{11}. Скачок знака возникает в моменты, когда отклик струны возвращается в точку, где располагался точечный источник в начальный момент времени, и при проходе точки, которая симметрична начальному положению источника относительно

середины отрезка. За наименьший период, равный $\frac{2l}{c}$, происходит две смены знака высоты столбика.

В случае, когда один из концов закреплён, а второй свободен (условие Неймана), для достаточно малых значений t функция Грина g_{12} снова имеет вид прямоугольного столбика. Отражение от свободного конца сопровождается скачкообразным увеличением высоты графика в два раза. При этом график приобретает форму двух смежных столбиков переменной ширины.

На рис. 1 приведён пример сравнения графиков суммы первых 200 слагаемых ряда Фурье и замкнутого выражения для функции Грина. Выбран момент времени сразу после отражения импульса от «свободного» конца. При этом «удвоенный» сигнал при проходе точки, симметричной начальному положению источника относительно середины отрезка, отражается без изменения знака и движется до свободного конца, отражение от которого имеет вид скачкообразного обнуления функции Грина. После этого график приобретает форму одиночного прямоугольника постоянной ширины, движущегося к закреплённому концу, от которого отражается с последующим линейным сокращением ширины. Ширина прямоугольника обращается в нуль при проходе точки начального положения источника, после чего скачком изменяется знак высоты столбика. Дальнейшая эволюция происходит аналогично описанному с изменением знака функции Грина. Интересно отметить, что существуют промежутки времени, на которых функции Грина g_{11} и g_{12} точно совпадают, и их эволюция определяется только начальным положением точечного источника.

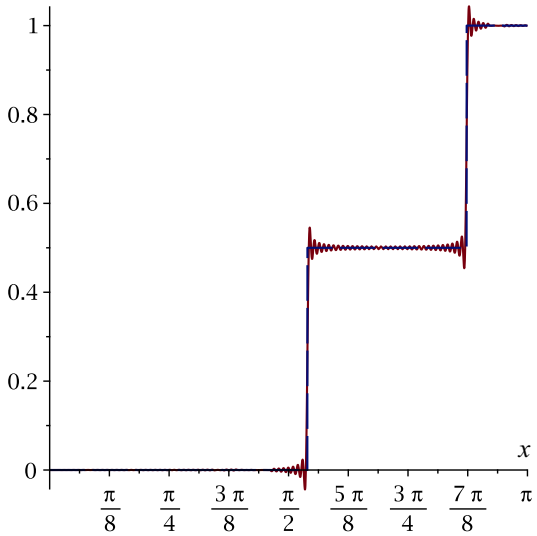


Рис. 1. Графики суммы 200 слагаемых ряда Фурье (13) и символьного выражения (14). Правый конец свободен, левый закреплён. Функция Грина $g_{12}(x, s, t, \tau)$ при $s = \frac{5\pi}{6}$, $t = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{10}$, $\tau = 0$

Fig. 1. Graphs of the sum of 200 terms of the Fourier series (13) and the symbolic expression (14). The right end is free, the left one is fixed. Green's function $g_{12}(x, s, t, \tau)$ for $s = \frac{5\pi}{6}$, $t = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{10}$, $\tau = 0$

В случае краевых условий Неймана отражение импульса от концов отрезка сопровождается скачкообразным увеличением высоты столбика на $\frac{1}{2c}$. Функция Грина g_{22} на каждом периоде изменения бесконечной суммы Фурье кусочно-постоянна, вне точек разрыва принимает не более чем три значения. Сама функция Грина не является периодической: каждый период два из трёх возможных значений, принимаемых этой функцией, увеличиваются на $\frac{1}{2c}$. Функция Грина условий Неймана со временем превосходит по величине любое наперёд заданное число, в отличие от функций Грина g_{11} и g_{12}, что связано с наличием нулевого собственного значения соответствующей задачи Штурма – Лиувилля. Сравнение эволюции функций Грина, связанных условиями Дирихле и Неймана, представлено на рис. 2. Отметим, что на начальном этапе распространения импульса вдоль отрезка эволюция функции Грина g_{22} тождественна эволюции функции g_{12}, как видно из сравнения рис. 1 и 2, *а*, но в целом поведение этих функций существенно различно.

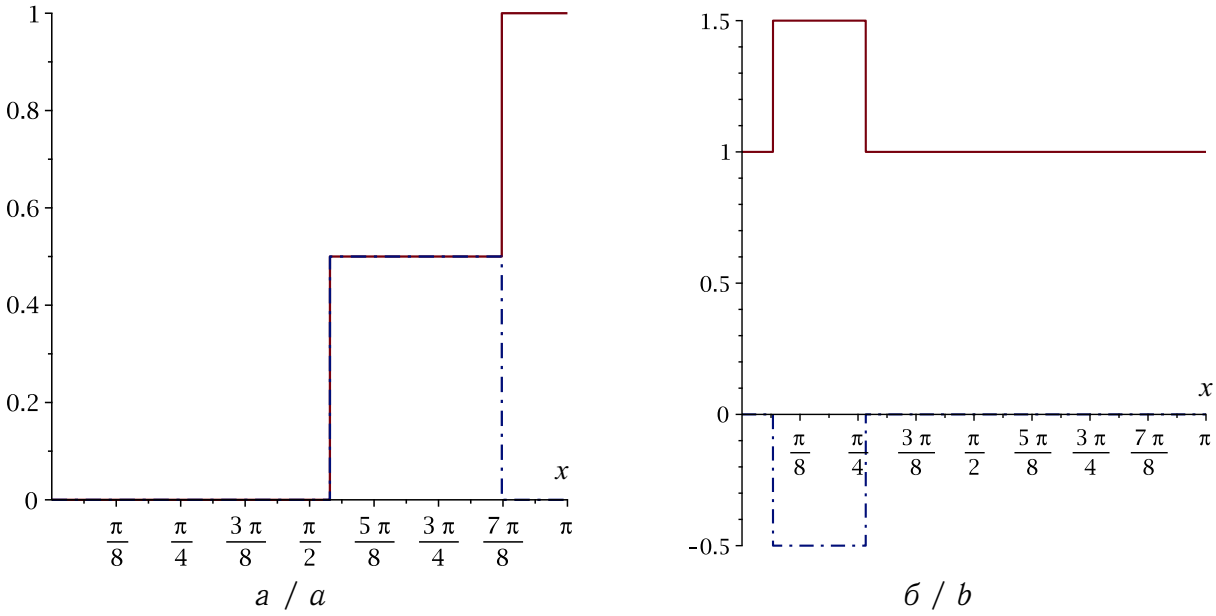


Рис. 2. Функции Грина $g_{11}(x,s,t,\tau)$ (штрих-пунктирная ломаная), (11), и $g_{22}(x,s,t,\tau)$ (сплошная ломаная), (18). Параметры: *а*) $s=\frac{5\pi}{6}$, $\tau=0$, $t=\frac{\pi}{6}+\frac{4}{10}$; *б*) $s=\frac{5\pi}{6}$, $\tau=0$, $t=\frac{5\pi}{6}+\frac{5.6\pi}{6}$

Fig. 2.Green's functions $g_{11}(x,s,t,\tau)$ (dashed polyline), (11), and $g_{22}(x,s,t,\tau)$ (solid polyline), (18). Parameters: *a*) $s=\frac{5\pi}{6}$, $\tau=0$, $t=\frac{\pi}{6}+\frac{4}{10}$; *b*) $s=\frac{5\pi}{6}$, $\tau=0$, $t=\frac{5\pi}{6}+\frac{5.6\pi}{6}$

Условия периодичности также приводят к нулевому собственному значению, и функция Грина волнового оператора может превосходить любое наперёд заданное положительное число. Скачок величины данной функции наступает при прохождении импульсом начального положения источника s и при прохождении «диаметрально-противоположной» точки ($s+\pi$ или $s-\pi$), где происходит взаимодействие импульса с самим собой. Прохождение импульсом концов отрезка не сопровождается отражением, но импульс с изменённым направлением движения выходит из противоположного конца отрезка. При этом график функции Грина имеет вид двух столбиков с постоянной высотой и изменяющейся шириной (рис. 3). В случае условий периодичности график функции Грина скачкообразно смещается с течением времени вдоль оси ординат, хотя в каждый момент времени функция Грина на отрезке $[0,l]$ принимает не более чем два значения (см. рис. 3) вне точек разрыва.

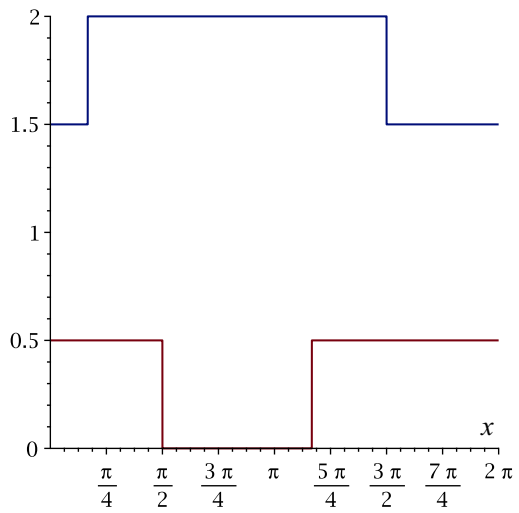


Рис. 3. Функция Грина $g_P(x,s,t,\tau)$, (23). Параметры: $s=\frac{11\pi}{6}$, $\tau=0$, $t=\frac{4\pi}{6}$ (нижняя кривая), $t=\frac{4\pi}{6}+3\pi$ (верхняя кривая)

Fig. 3. Green's function $g_P(x,s,t,\tau)$, (23). Parameters: $s=\frac{11\pi}{6}$, $\tau=0$, $t=\frac{4\pi}{6}$ (lower curve), $t=\frac{4\pi}{6}+3\pi$ (upper curve)

Функции Грина разрывны и представляются медленно сходящимися рядами Фурье. Поэтому в данных примерах ярко выражено явление Гиббса, если для построения графиков используются не найденные выше замкнутые выражения, а частичные суммы рядов Фурье. Явление

Гиббса в данном случае наблюдается как для пространственных, так и для временных параметров функции Грина $g(x, s, t - \tau)$. Полученные выражения в конечном виде свободны от этого эффекта, хотя и представляют разрывные функции.

На представленных рисунках хорошо видно, что функция Грина является кусочно-постоянной функцией, следовательно, её следует рассматривать как обобщенное решение уравнения колебаний по аналогии с тем, как это делается для бесконечной прямой [23, с. 222, 226].

Заключение

Поводя итог, можно утверждать, что применение метода А. Н. Крылова ускорения сходимости рядов Фурье для функций Грина начально-краевой задачи для уравнения колебаний позволило получить для этих функций выражения в конечном виде. Эти выражения являются элементарными кусочно-постоянными функциями. Рассмотрено четыре разных постановки краевых условий, каждая из которых приводит к индивидуальным особенностям поведения решения. Для каждой функции Грина выписаны представления в конечном виде: при помощи тригонометрических и обратных тригонометрических функций, при помощи операции взятия целой части, при помощи операции взятия дробной части. Все формулы верифицированы путём сравнения с графиками частичных сумм рядов Фурье.

Найденные выражения весьма удобны для дальнейшего исследования и применения в системах компьютерной алгебры. Однако они не являются аналитическими функциями и лежат вне теории разрешимости в элементарных функциях, восходящей к Лиувиллю. Это позволяет смотреть на метод Крылова как на часть некоторой общей теории решения в конечном виде краевых задач математической физики, которую ещё предстоит создать.

Построение графиков выполнялось в CAS Maple[2].

Список литературы

1. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики : в 2 т. Москва ; Ленинград : ГТТИ, 1933. Т. 1. 525 с.
2. *Strutt J. W.* The Theory of Sound : in 2 vols. New York : Dover Poblications, 1945. Vol. 1. 520 p.
3. *Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов А. В.* Лекции по математической физике. Москва : Наука, 2004. 416 с.
4. *Доля П. Г.* Периодическое продолжение функций и решение уравнения колебаний струны в системах символьной математики // Вестник Харьковского национального университета. Серия: Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления. 2006. № 733. С. 106–116.
5. *Dolya P. G.* Solution to the homogeneous boundary value problems of free vibrations of a finite string // Журнал математической физики, анализа, геометрии. 2008. Т. 4, № 2. С. 237–251.
6. *Ларин А. А.* Зарождение математической физики и теории колебаний континуальных систем в «Споре о струне» // Вестник Национального технического университета «Харьковский политехнический институт». История науки и техники. 2008. № 8. С. 89–97.
7. *Гаврилов В. С., Денисова Н. А.* Метод характеристик для одномерного волнового

[2]Symbolic and numeric computing environment Maple, 2019. URL: https://www.maplesoft.com (дата обращения: 10.05.2022).

уравнения. Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского, 2014. 72 с.
8. *Маркушевич А. И.* Элементы теории аналитических функций. Москва : Учпедгиз, 1944. 545 с.
9. *Bronstein M.* Symbolic Integration I. Transcendental Functions. Second Edition. Springer, 2005. 325 p.
10. *Павлов Д. И.* Символьное интегрирование // Компьютерные инструменты в образовании. 2010. № 2. С. 38–43. EDN: MQIBUR
11. *Liouville J.* Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1835. Bd. 13, Hf. 2. S. 93–118. https://doi.org/10.1515/crll.1835.13.93
12. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа : в 2 ч. Ч. 1. Москва : Физматлит, 2005. 648 с.
13. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1950. 368 с.
14. *Хромов А. П., Бурлуцкая М. Ш.* Классическое решение методом Фурье смешанных задач при минимальных требованиях на исходные данные // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 2. С. 171–198. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-2-171-198
15. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближённые методы высшего анализа. Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1950. 696 с.
16. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды : в 3 т. Москва : Физматлит, 2002. Т. 1. 632 с.
17. *Полянин А. Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. Москва : Физматлит, 2001. 576 с.
18. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. Москва : Наука, 1972. 688 с.
19. *Ласый П. Г., Мелешко И. Н.* Приближенное решение одной задачи об электрических колебаниях в проводах с помощью полилогарифмов // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. 2017. Т. 60, № 4. С. 334–340. https://doi.org/10.21122/1029-7448-2017-60-4-334-340
20. *Ласый П. Г., Мелешко И. Н.* Применение полилогарифмов к приближенному решению неоднородного телеграфного уравнения для линии без искажений // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. 2019. Т. 2, № 5. С. 413–421. https://doi.org/10.21122/1029-7448-2019-62-5-413-421
21. *Кадырова В. Д., Насыров Ф. С., Сучкова Д. А.* Вероятностное представление решений волновых уравнений и функция Грина // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2017. Т. 21, № 4 (78). С. 129–135. EDN: ZWSQOT
22. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. Москва : Наука, 2004. 798 с.
23. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. Москва : Наука, 1981. 512 с.
24. *Цвибах Б.* Начальный курс теории струн. Москва : Эдиториал УРСС, 2011. 784 с.
25. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа : в 2 ч. Ч. 2. Москва : Физматлит, 2002. 464 с.
26. *Бутузов В. Ф.* Числовые ряды. Функциональные последовательности и ряды. Москва : Физический факультет МГУ, 2015. 40 с.
27. *Никишин Е. М.* Перестановки функциональных рядов // Математический сборник. 1971. Т. 85 (127), № 2 (6). С. 272–285.

28. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Москва : Наука, 1966. 656 с.
29. *Jolley L. B. W* Summation of Series. New York : Dover Publications, inc., 1961. 278 p.
30. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва : Наука, 1963. 1110 с.
31. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы теории электрических и магнитных явлений. Москва : Изд-во АН СССР, 1948. 730 с.
32. *Боголюбов А. Н., Левашова Н. Т., Могилевский И. Е., Мухартова Ю. В., Шапкина Н. Е.* Функция Грина оператора Лапласа. Москва : Физический факультет МГУ, 2018. 188 с.
33. *Малашонок Г. И.* Система компьютерной алгебры MATHPARTNER // Программирование. 2017. Т. 43, № 2. С. 63–71.
34. *Васильев С. А., Еднерал В. Ф., Малых М. Д., Севастьянов Л. А.* Математический анализ. Ряды с MS Mathematics. Москва : Изд-во РУДН, 2016. 119 с.
35. *Тихомиров В. М.* Абель и его великая теорема // Квант. 2003. № 1. С. 11–15.
36. *Лобачевский Н. И.* Полное собрание сочинений : в 5 т. Т. 5. Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1951. 500 с.
37. *Пак И. Н.* О суммах тригонометрических рядов // Успехи математических наук. 1980. Т. 35, вып. 2 (212). С. 91–144.
38. *Telyakovskii S. A.* On the properties of blocks of terms of the series $\sum \frac{1}{k} \sin kx$ // Ukrainian Mathematical Journal. 2012. Vol. 64, № 5. P. 816–822. https://doi.org/10.1007/s11253-012-0680-7
39. *Кнут Д., Грэхем Р., Паташник О.* Конкретная математика. Математические основы информатики. Москва : Мир, 1998. 703 с.
40. *Колоколов В. В., Лебедев И. В.* Избранные главы математической физики. Москва : ИТФ им. Ландау, 2018. 53 с.
41. *Зорич В. А.* Математический анализ : в 2 ч. Ч. 2. Москва : МЦНМО, 2019. 676 с.

References

1. Kurant R., Gilbert D. *Metody matematicheskoy fiziki* [Methods of Mathematical Physics]. Vol. 1. Moscow, Leningrad, GTTI, 1933. 525 p. (in Russian).
2. Strutt J. W. *The Theory of Sound*. Vol. 1. New York, Dover Poblications, 1945. 520 p.
3. Sveshnikov A. G., Bogolyubov A. N., Kravtsov A. V. *Lektsii po matematicheskoy fizike* [Lectures on Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 2004. 416 p. (in Russian).
4. Dolya P. G. Periodic continuation of functions and solution of the equation of string vibrations in systems of symbolic mathematics. *Vestnik Khar'kovskogo natsional'nogo universiteta. Seriya: Matematicheskoye modelirovaniye. Informatsionnyye tekhnologii. Avtomatizirovannyye sistemy upravleniya* [Bulletin of Kharkov National University. Series: Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems], 2006, iss. 733, pp. 106–116 (in Russian).
5. Dolya P. G. Solution to the homogeneous boundary value problems of free vibrations of a finite string. *Zhurnal Matematicheskoi Fiziki, Analiza, Geometrii* [Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry], 2008, vol. 4, iss. 2, pp. 237–251.
6. Larin A. A. The origin of mathematical physics and the theory of oscillations of continuum systems in the "Dispute about the string". *Vestnik Natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta "Khar'kovskiy politekhnicheskiy institut". Istoriya nauki i tekhniki* [Bulletin of the National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute". History of Science and Technology], 2008, iss. 8, pp. 89–97 (in Russian).
7. Gavrilov V. S., Denisova N. A. *Metod kharakteristik dlya odnomernogo volnovogo uravneniya* [Method of Characteristics for One-Dimensional Wave Equation]. Nizhny

Novgorod, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod Publ., 2014. 72 p. (in Russian).
8. Markushevich A. I. *Elementy teorii analiticheskikh funktsiy* [Elements of the Theory of Analytic Functions]. Moscow, Uchpedgiz, 1944. 545 p. (in Russian).
9. Bronstein M. *Symbolic Integration I. Transcendental Functions*. Second Edition. Springer, 2005. 325 p.
10. Pavlov D. I. Symbolic integration. *Komp'yuternyye instrumenty v obrazovanii* [Computer Tools in Education], 2010, iss. 2, pp. 38–43 (in Russian). EDN: MQIBUR
11. Liouville J. Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1835, vol. 13, iss. 2, pp. 93–118 (in German). https://doi.org/10.1515/crll.1835.13.93
12. Il'in V. A., Poznyak È. G. *Osnovy matematicheskogo analiza* [Fundamentals of Mathematical Analysis]. Pt. 1. Moscow, Fizmatlit, 2005. 648 p. (in Russian).
13. Krylov A. N. *O nekotorykh differentsial'nykh uravneniyakh matematicheskoy fiziki* [On Some Differential Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1950. 368 p. (in Russian).
14. Khromov A. P., Burlutskaya M. S. Classical solution by the Fourier method of mixed problems with minimum requirements on the initial data. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2014, vol. 14, iss. 2, pp. 171–198 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-2-171-198
15. Kantorovich L. V., Krylov V. I. *Priblizhonnye metody vysshego analiza* [Approximate Methods of Higher Analysis]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1950. 696 p. (in Russian).
16. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady* [Integrals and Series]. Vol. 1. Moscow, Fizmatlit, 2002. 632 p. (in Russian).
17. Polyanin A. D. *Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki* [Handbook of Linear Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit, 2001. 576 p. (in Russian).
18. Budak B. M., Samarskiy A. A., Tikhonov A. N. *Sbornik zadach po matematicheskoy fizike* [Collection of Problems in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1972. 688 p. (in Russian).
19. Lasy P. G., Meleshko I. N. Approximate solution of one problem on electrical oscillations in wires with the use of polylogarithms. *ENERGETIKA. Proceedings of CIS higher education institutions and power engineering associations*, 2017, vol. 60, iss. 4, pp. 334–340 (in Russian). https://doi.org/10.21122/1029-7448-2017-60-4-334-340
20. Lasy P. G., Meleshko I. N. Application of Polylogarithms to the Approximate Solution of the Inhomogeneous Telegraph Equation for the Distortionless Line. *ENERGETIKA. Proceedings of CIS higher education institutions and power engineering associations*, 2019, vol. 62, iss. 5, pp. 413–421 (in Russian). https://doi.org/10.21122/1029-7448-2019-62-5-413-421
21. Kadyrova V. D., Nasyrov F. S., Suchkova D. A. A probability representation of solutions of wave equations, and the function of Greene. *Vestnik USATU*, 2017, vol. 21, iss. 4 (78), pp. 129–135 (in Russian). EDN: ZWSQOT
22. Tikhonov A. N., Samarsky A. A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 2004. 798 p. (in Russian).
23. Vladimirov V. S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1981. 512 p. (in Russian).
24. Zwibach B. *Nachal'nyy kurs teorii strun* [An Introductory Course in String Theory]. Moscow, Editorial URSS, 2011. 784 p. (in Russian).
25. Il'in V. A., Poznyak È. G. *Osnovy matematicheskogo analiza* [Fundamentals of Mathematical Analysis]. Pt. 2. Moscow, Fizmatlit, 2002. 464 p. (in Russian).
26. Butuzov V. F. *Chislovye ryady. Funktsional'nye posledovatel'nosti i ryady* [Number

Series. Functional Sequences and Series]. Moscow, Faculty of Physics, Moscow State University, 2015. 40 p. (in Russian).
27. Nikišhin E. M. Rearrangements of function series. *Sbornik: Mathematics*, 1971, vol. 14, iss. 2, pp. 267–280. http://dx.doi.org/10.1070/SM1971v014n02ABEH002617
28. Fikhtengolts G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of Differential and Integral Calculus]. Moscow, Nauka, 1966. 656 p. (in Russian).
29. Jolley L. B. W. *Summation of Series*. New York, Dover Publications, inc, 1961. 278 p.
30. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of Integrals, Sums, Series and Products]. Moscow, Nauka, 1963. 1110 p. (in Russian).
31. Grinberg G. A. *Izbrannyye voprosy teorii elektricheskikh i magnitnykh yavleniy* [Selected Questions of the Theory of Electrical and Magnetic Phenomena]. Moscow, AN USSR Publ., 1948. 730 p. (in Russian).
32. Bogolyubov A. N., Levashova N. T., Mogilevsky I. E., Mukhartova Yu. V., Shapkina N. E. *Funktsiia Grina operatora Laplasa* [Green's Function of the Laplace Operator]. Moscow, Faculty of Physics, Moscow State University, 2018. 188 p. (in Russian).
33. Malaschonok G. I. MathPartner computer algebra. *Programming and Computer Software*, 2017, vol. 43, iss. 2, pp. 112–118. https://doi.org/10.1134/S0361768817020086
34. Vasiliev S. A., Edneral V. F., Malykh M. D., Sevastyanov L. A. *Matematicheskii analiz. Riady s MS Mathematics* [Mathematical Analysis. Series with MS Mathematics]. Moscow, RUDN University Publ., 2016. 119 p. (in Russian).
35. Tikhomirov V. M. Abel and his great theorem. *Kvant*, 2003, iss. 1, pp. 11–15 (in Russian).
36. Lobachevsky N. I. *Polnoe sobranie sochinenii* [Complete Works]. Vol. 5. Moscow, Leningrad, GITTL, 1951. 500 p. (in Russian).
37. Pak I. N. On the sums of trigonometric series. *Russian Mathematical Surveys*, 1980, vol. 35, iss. 2, pp. 105–168. http://dx.doi.org/10.1070/RM1980v035n02ABEH001631
38. Telyakovskii S. A. On the properties of blocks of terms of the series $\sum \frac{1}{k} \sin k\,x$. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2012, vol. 64, iss. 5, pp. 816–822. https://doi.org/10.1007/s11253-012-0680-7
39. Knut D., Graham R., Patashnik O. *Konkretnaia matematika. Matematicheskie osnovy informatiki* [Concrete Mathematics. Mathematical Foundations of Informatics], Moscow, Mir, 1998. 703 p. (in Russian).
40. Kolokolov V. V., Lebedev I. V. *Izbrannye glavy matematicheskoi fiziki* [Selected Chapters of Mathematical Physics]. Moscow, ITF im. Landau Publ., 2018. 53 p. (in Russian).
41. Zorich V. A. *Matematicheskiy analiz* [Mathematical Analysis]. Pt. 2. Moscow, MTsNMO, 2019. 676 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 17.06.2022
Принята к публикации / Accepted 05.08.2022
Опубликована / Published 30.11.2022

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 447–457
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 447–457
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-447-457, EDN: XVDVNQ

Научная статья
УДК 517.5

Неравенство Коляды для частных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами Фурье

Б. В. Симонов[1], **И. Э. Симонова**[1✉], **В. А. Иванюк**[2]

[1]Волгоградский государственный технический университет, Россия, 400005, г. Волгоград, пр. В. И. Ленина, д. 28
[2]Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Россия, 125993, г. Москва, пр. Ленинградский, д. 49

Симонов Борис Витальевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, simonov-b2002@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-1922-8956, AuthorID: 8629
Симонова Ирина Эдуардовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, dvr@vstu.ru, https://orcid.org/0000-0002-4001-7478, AuthorID: 619095
Иванюк Вера Алексеевна, кандидат экономических наук, доцент департамента анализа данных и машинного обучения, ivaver6@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6402-3832, AuthorID: 329957

Аннотация. Хорошо известна проблема оценивания модулей гладкости функций из L_q в терминах модулей гладкости из L_p. Начальным этапом оценивания модулей гладкости стало изучение свойств функций из классов Липшица и получение соответствующих вложений в работах Титчмарша, Харди, Литтлвуда, Никольского. П. Л. Ульянов для модулей непрерывности функций одной переменной доказал неравенство, позже названное его именем — «неравенство Ульянова». Из этого неравенства, как следствие, получается классическое вложение Харди – Литтлвуда для пространств Липшица. Неравенство Ульянова точно в шкале классов H_p^ω. В. И. Коляда показал, что это неравенство может быть усилено. Его усилением является неравенство Коляды. Оно находит применение при исследовании некоторых максимальных функций, измеряющих локальную гладкость. Неравенство Коляды точно в том смысле, что существует функция с любым заданным порядком модуля непрерывности в L_q, для которой эту оценку ни при одном значении δ улучшить нельзя. Неравенство Коляды было распространено на модули гладкости высших (натуральных) порядков Ю. В. Нетрусовым и М. Л. Гольдманом. У. Требельз распространил неравенство Коляды на модули гладкости положительного порядка. В настоящей статье изучаются частные модули гладкости функций двух переменных. Получены неравенства, распространяющие неравенство Коляды на частные модули гладкости в смешанной норме для функций с лакунарными коэффициентами Фурье. Построены функции, для которых неравенство Коляды для частных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами Фурье имеют разные порядки, как функции δ. Тем самым показано, что полученные оценки точны в определенном смысле. В статье также доказаны некоторые специфические свойства частных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами Фурье в пространствах Лебега со смешанной нормой.

Ключевые слова: частный модуль гладкости, лакунарные коэффициенты Фурье, смешанная норма, неравенство Ульянова, неравенство Коляды

© Симонов Б. В., Симонова И. Э., Иванюк В. А., 2022

Для цитирования: *Симонов Б. В., Симонова И. Э., Иванюк В. А.* Неравенство Коляды для частных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами Фурье // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 447–457. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-447-457, EDN: XVDVNQ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Kolyada inequality for partial moduli of smoothness of functions with lacunary Fourier coefficients

B. V. Simonov[1], **I. E. Simonova**[1✉], **V. A. Ivanyuk**[2]

[1]Volgograd State Technical University, 28 Lenin Ave., Volgograd 400005, Russia

[2]Financial University under the Government of the Russian Federation, 49 Leningradsky Prospekt, Moscow 125993, Russia

Boris V. Simonov, simonov-b2002@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-1922-8956, AuthorID: 8629
Irina E. Simonova, dvr@vstu.ru, https://orcid.org/0000-0002-4001-7478, AuthorID: 619095
Vera A. Ivanyuk, ivaver6@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6402-3832, AuthorID: 329957

Abstract. The problem of estimating the moduli of smoothness of functions from L_q in terms of moduli of smoothness from L_p is well known. The initial stage in estimating the moduli of smoothness was the study of properties of functions from Lipschitz classes and obtaining the corresponding embeddings in the works of Titchmarsh, Hardy, Littlewood, and Nikolsky. P. L. Ulyanov for the moduli of continuity of functions of one variable proved an inequality later named after him — “Ulyanov’s inequality". From this inequality, as a corollary, we obtain the classical Hardy – Littlewood embedding for Lipschitz spaces. Ulyanov’s inequality is exact in the class scale H_p^ω. Kolyada showed that this inequality could be strengthened. Its strengthening is Kolyada inequality. It finds application in the study of certain maximal functions which measure local smoothness. Kolyada inequality is exact in the sense that there exists a function with any given order of the modulus of continuity in L_p for which this estimate cannot be improved for any value of δ. Kolyada inequality was extended to the moduli of smoothness of higher orders (natural) by Yu. V. Netrusov and M. L. Goldman. W. Trebels extended Kolyada inequality to moduli of smoothness of positive order. In this article, we study the partial moduli of the smoothness of functions of two variables. Inequalities are obtained that extend Kolyada inequality to partial moduli of smoothness in the mixed norm for functions with lacunar Fourier coefficients. Functions are constructed for which Kolyada inequality for partial moduli of smoothness of functions with lacunary Fourier coefficients has different orders as functions of δ. Thus, it is shown that the obtained estimates are sharp in a certain sense. Some special properties of partial moduli of smoothness of functions with lacunary Fourier series in each variable are also proved.

Keywords: partial modulus of smoothness, lacunary Fourier coefficients, mixed norm, Ulyanov’s inequality, Kolyada inequality

For citation: Simonov B. V., Simonova I. E., Ivanyuk V. A. Kolyada inequality for partial moduli of smoothness of functions with lacunary Fourier coefficients. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 447–457 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-447-457, EDN: XVDVNQ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Общие соотношения между модулями непрерывности в разных метриках были получены в работах П. Л. Ульянова [1, 2]:

$$\omega_1(f,\delta)_q \ll \left(\int\limits_0^\delta \left(t^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\omega_1(f,t)_p\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \delta\in(0,1), \quad 1<p<q<\infty.$$

Обобщения этого неравенства называются *неравенствами типа Ульянова*.

Неравенство Ульянова было усилено В. И. Колядой [3]:

$$\delta^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\left(\int\limits_\delta^1 \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1}\omega_1(f,t)_q\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \ll \left(\int\limits_0^\delta \left(t^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\omega_1(f,t)_p\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}},$$
$$\delta\in(0,1), \quad 1<p<q<\infty.$$

Данное неравенство Коляды было распространено на модули гладкости более высоких порядков в работах [4–6]. В настоящей работе получено аналогичное неравенство для частных модулей гладкости для функций с лакунарными коэффициентами Фурье в пространствах Лебега со смешанной нормой. Частные модули гладкости и их свойства изучались ранее в ряде работ (см., например, [7, гл. X, XI]).

Обозначим через

- $L_{p_1p_2}$, $1<p_i<\infty$, $i=1,2$ — множество измеримых функций двух переменных $f(x_1,x_2)$, 2π — периодических по каждой переменной, для которых
$$\|f\|_{p_1p_2} = \left(\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi}|f(x_1,x_2)|^{p_1}dx_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dx_2\right)^{\frac{1}{p_2}} < \infty;$$
- $L^{(0)}_{p_1p_2}$ — множество функций $f\in L_{p_1p_2}$ таких, что $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_2 = 0$ для почти всех x_1 и $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_1 = 0$ для почти всех x_2;
- $S_{m_1,\infty}(f)$, $S_{\infty,m_2}(f)$, $S_{m_1,m_2}(f)$ — частичные суммы ряда Фурье функции $f(x_1,x_2)$, т. е. $S_{m_1,\infty}(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_1+t_1,x_2)D_{m_1}(t_1)dt_1$, $S_{\infty,m_2}(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2+t_2)D_{m_2}(t_2)dt_2$, $S_{m_1,m_2}(f) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_1+t_1,x_2+t_2)D_{m_1}(t_1)D_{m_2}(t_2)\,dt_1\,dt_2$ $(m_i=0,1,2,\ldots,\ i=1,2)$, где $D_m(t) = \frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$ $(m=0,1,2\ldots)$ — ядро Дирихле;
- $f^{(\rho_1,\rho_2)}$ — производную в смысле Вейля функции $f(x_1,x_2)$ порядка $\rho_1(\rho_1\geqslant 0)$ по переменной x_1 и порядка $\rho_2(\rho_2\geqslant 0)$ по переменной x_2 [8, с. 238];
- $E_{m_1\infty}(f)_{p_1p_2}$ — частное наилучшее приближение функции $f\in L_{p_1p_2}$ по переменной x_1, т. е. $E_{m_1\infty}(f)_{p_1p_2} = \inf\limits_{T_{m_1\infty}}\|f-T_{m_1\infty}\|_{p_1p_2}$, где функции $T_{m_1\infty}(x_1,x_2)\in L_{p_1p_2}$ и являются тригонометрическими полиномами порядка не выше, чем m_1, по переменной x_1;

– $E_{\infty m_2}(f)_{p_1p_2}$ — частное наилучшее приближение функции $f \in L_{p_1p_2}$ по переменной x_2,, т. е. $E_{\infty m_2}(f)_{p_1p_2} = \inf\limits_{T_{\infty m_2}} \|f - T_{\infty m_2}\|_{p_1p_2}$, где функции $T_{\infty m_2}(x_1, x_2) \in L_{p_1p_2}$ и являются тригонометрическими полиномами порядка не выше, чем m_2, по переменной x_2.

Для функции $f \in L_{p_1p_2}$ определим разности с шагом h_1 и h_2 положительных порядков α_1 и α_2 соответственно, по переменным x_1 и x_2, следующим образом:

$$\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(f) = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} (-1)^{\nu_1} \binom{\alpha_1}{\nu_1} f(x_1 + (\alpha_1 - \nu_1)h_1, x_2),$$

$$\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f) = \sum_{\nu_2=0}^{\infty} (-1)^{\nu_2} \binom{\alpha_2}{\nu_2} f(x_1, x_2 + (\alpha_2 - \nu_2)h_2),$$

где $\binom{\alpha}{\nu} = 1$ для $\nu = 0$, $\binom{\alpha}{\nu} = \alpha$ для $\nu = 1$, $\binom{\alpha}{\nu} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\nu+1)}{\nu!}$ для $\nu \geqslant 2$.

Далее, обозначим через

– $\omega_{\alpha_1,0}(f, \delta_1)_{p_1p_2}$ — частный модуль гладкости положительного порядка α_1 по переменной x_1, т. е.

$$\omega_{\alpha_1,0}(f, \delta_1)_{p_1p_2} = \sup_{|h_1| \leqslant \delta_1} \|\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(f)\|_{p_1p_2};$$

– $\omega_{0,\alpha_2}(f, \delta_2)_{p_1p_2}$ — частный модуль гладкости положительного порядка α_2 по переменной x_2, т. е.

$$\omega_{0,\alpha_2}(f, \delta_2)_{p_1p_2} = \sup_{|h_2| \leqslant \delta_2} \|\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)\|_{p_1p_2}.$$

Для неотрицательных функционалов $F(f, \delta_1, \delta_2)$ и $G(f, \delta_1, \delta_2)$ будем писать, что $F(f, \delta_1, \delta_2) \ll G(f, \delta_1, \delta_2)$, если существует положительная постоянная C, не зависящая от f, δ_1 и δ_2, и такая, что $F(f, \delta_1, \delta_2) \leqslant CG(f, \delta_1, \delta_2)$. Если одновременно $F(f, \delta_1, \delta_2) \ll G(f, \delta_1, \delta_2)$ и $G(f, \delta_1, \delta_2) \ll F(f, \delta_1, \delta_2)$, то будем писать, что $F(f, \delta_1, \delta_2) \asymp G(f, \delta_1, \delta_2)$.

Скажем, что $f \in \Lambda_{p_1p_2}$, $1 < p_i < \infty$, $i = 1, 2$, если $f \in L_{p_1p_2}^{(0)}$ и имеет ряд Фурье

$$\sum_{\mu_2=0}^{\infty} \sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2} \varphi_1(2^{\mu_1} x_1) \varphi_2(2^{\mu_2} x_2),$$

где $\varphi_i(t) = \cos t$ или $\varphi_i(t) = \sin t$, $i = 1, 2$.

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Пусть* $f \in \Lambda_{p_1p_2}$, $\alpha_i > \theta_i$, $\delta_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2$. *Тогда*

I. При $1 < p_1 < q_1 < \infty$, $\theta_1 = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}$, $1 < p_2 < \infty$

$$\delta_1^{\alpha_1-\theta_1} \left(\int\limits_{\delta_1}^{1} t_1^{-p_1(\alpha_1-\theta_1)} \omega_{\alpha_1,0}^{p_1}(f, t_1)_{q_1p_2} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \ll \left(\int\limits_{0}^{\delta_1} t_1^{-q_1\theta_1} \omega_{\alpha_1,0}^{q_1}(f, t_1)_{p_1p_2} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{q_1}}. \qquad (1)$$

II. При $1 < p_2 < q_2 < \infty$, $\theta_2 = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}$, $1 < p_1 < \infty$

$$\delta_2^{\alpha_2-\theta_2} \left(\int\limits_{\delta_2}^{1} t_2^{-p_2(\alpha_2-\theta_2)} \omega_{0,\alpha_2}^{p_2}(f, t_2)_{p_1q_2} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \ll \left(\int\limits_{0}^{\delta_2} t_2^{-q_2\theta_2} \omega_{0,\alpha_2}^{q_2}(f, t_2)_{p_1p_2} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}. \qquad (2)$$

Причем в соотношениях (1) *и* (2) *знак* $\ll$ *нельзя заменить на* $\asymp$.

Неравенство (2) является двойственным по отношению к первому. В дальнейшем формулы для двойственных результатов не приводятся ни в леммах, ни в заключении.

1. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть* $f \in L^{(0)}_{p_1p_2}$, $1 < p_i < \infty$, $\alpha_i > 0$, $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$. *Тогда:*
1) $\omega_{\alpha_1,0}\Big(f, \frac{1}{n_1}\Big)_{p_1p_2} \asymp \big\|f - S_{n_1,\infty}(f)\big\|_{p_1p_2} + n_1^{-\alpha_1}\big\|S^{(\alpha_1,0)}_{n_1,\infty}(f)\big\|_{p_1p_2}$;
2) $\omega_{0,\alpha_2}\Big(f, \frac{1}{n_2}\Big)_{p_1p_2} \asymp \big\|f - S_{\infty,n_2}(f)\big\|_{p_1p_2} + n_2^{-\alpha_2}\big\|S^{(0,\alpha_2)}_{\infty,n_2}(f)\big\|_{p_1p_2}$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 9.2.1 из [7, с. 215]. □

Лемма 2 ([10]). *Пусть* $a_k \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$, $0 < p < \infty$. *Тогда:*
1) если $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k \ll a_n$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\Big(\sum\limits_{n=1}^{k} b_n\Big)^p \asymp \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k^p$;
2) если $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \ll a_n$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\Big(\sum\limits_{n=k}^{\infty} b_n\Big)^p \asymp \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k^p$.

Лемма 3 ([9, с. 43]). *Пусть* $a_k \geqslant 0$, $0 < \alpha < \beta < \infty$. *Тогда*

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\beta}\Big)^{\frac{1}{\beta}} \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\alpha}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Лемма 4 ([10]). *Пусть* $f \in \Lambda_{p_1p_2}$, $1 < p_i < \infty$, $i = 1, 2$. *Тогда*

$$\|f\|_{p_1p_2} \asymp \Big(\sum_{\mu_1=0}^{\infty}\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\mu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Введем следующие обозначения:

$$C_1(f,\delta_1) = \Big(\int\limits_0^{\delta_1} t_1^{-q_1\theta_1}\omega^{q_1}_{\alpha_1,0}(f,t_1)_{p_1p_2}\frac{dt_1}{t_1}\Big)^{\frac{1}{q_1}}, \quad C_2(f,\delta_2) = \Big(\int\limits_0^{\delta_2} t_2^{-q_2\theta_2}\omega^{q_2}_{0,\alpha_2}(f,t_2)_{p_1p_2}\frac{dt_2}{t_2}\Big)^{\frac{1}{q_2}},$$

$$D_1(f,\delta_1) = \delta_1^{\alpha_1-\theta_1}\Big(\int\limits_{\delta_1}^{1} t_1^{-p_1(\alpha_1-\theta_1)}\omega^{p_1}_{\alpha_1,0}(f,t_1)_{q_1p_2}\frac{dt_1}{t_1}\Big)^{\frac{1}{p_1}},$$

$$D_2(f,\delta_2) = \delta_2^{\alpha_2-\theta_2}\Big(\int\limits_{\delta_2}^{1} t_2^{-p_2(\alpha_2-\theta_2)}\omega^{p_2}_{0,\alpha_2}(f,t_2)_{p_1q_2}\frac{dt_2}{t_2}\Big)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Лемма 5. *Пусть* $f \in \Lambda_{p_1p_2}$, $1 < p_1 < q_1 < \infty$, $\theta_1 = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}$, $1 < p_2 < \infty$, $\alpha_1 > \theta_1$, $n_1 = 0, 1, 2, \ldots$ *Тогда:*
1) $C_1(f, 2^{-n_1}) \asymp 2^{n_1(\theta_1-\alpha_1)}\Big(\sum\limits_{\mu_2=0}^{\infty}\sum\limits_{\mu_1=0}^{n_1} a^2_{\mu_1,\mu_2}2^{2\mu_1\alpha_1}\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum\limits_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1q_1\theta_1}\Big(\sum\limits_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{q_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{q_1}} \equiv$ $\equiv c_{11} + c_{12}$;
2) $D_1(f, 2^{-n_1}) \asymp 2^{-n_1(\alpha_1-\theta_1)}\Big(\sum\limits_{\nu_1=0}^{n_1} 2^{\nu_1p_1(\alpha_1-\theta_1)}\Big(\sum\limits_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{p_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{p_1}} + \Big(\sum\limits_{\mu_2=0}^{\infty}\sum\limits_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} a^2_{\mu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{1}{2}} \equiv$ $\equiv d_{11} + d_{12}$.

В случае, когда $f \in \Lambda_{p_1p_2}$, $1 < p_2 < q_2 < \infty$, $\theta_2 = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}$, $1 < p_1 < \infty$, $\alpha_2 > \theta_2$, $n_2 = 0, 1, 2, \ldots$, *верны оценки для* $C_2(f, 2^{-n_2})$ *и* $D_2(f, 2^{-n_2})$, *двойственные к оценкам* $C_1(f, 2^{-n_1})$ *и* $D_1(f, 2^{-n_1})$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Представляя интеграл в формуле для $C_1(f,2^{-n_1})$ через сумму и используя конструктивную характеристику частного модуля гладкости (лемма 1), получаем

$$C_1(f,2^{-n_1}) \asymp \Big(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q_1\theta_1} 2^{-\nu_1\alpha_1 q_1} \big\|S^{(\alpha_1,0)}_{2^{\nu_1},\infty}(f)\big\|^{q_1}_{p_1p_2}\Big)^{\frac{1}{q_1}} + \\ + \Big(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q_1\theta_1} \big\|f - S_{2^{\nu_1},\infty}(f)\big\|^{q_1}_{p_1p_2}\Big)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Применяя лемму 4, имеем

$$C_1(f,2^{-n_1}) \asymp \Big(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q_1\theta_1} 2^{-\nu_1\alpha_1 q_1} \big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty}\sum_{\mu_1=0}^{\nu_1} a^2_{\mu_1,\mu_2} 2^{2\mu_1\alpha_1}\big)^{\frac{q_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{q_1}} + \\ + \Big(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q_1\theta_1} \big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty}\sum_{\mu_1=\nu_1}^{\infty} a^2_{\mu_1,\mu_2}\big)^{\frac{q_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Применяя оценку из леммы 2, получим

$$C_1(f,2^{-n_1}) \asymp \Big(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q_1\theta_1} 2^{-\nu_1\alpha_1 q_1} \big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty}\sum_{\mu_1=0}^{n_1} a^2_{\mu_1,\mu_2} 2^{2\mu_1\alpha_1}\big)^{\frac{q_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{q_1}} + \\ + \Big(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q_1\theta_1} 2^{-\nu_1\alpha_1 q_1} \big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty}\sum_{\mu_1=n_1}^{\nu_1} a^2_{\mu_1,\mu_2} 2^{2\mu_1\alpha_1}\big)^{\frac{q_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{q_1}} + \\ + \Big(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q_1\theta_1} \big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty}\sum_{\mu_1=\nu_1}^{\infty} a^2_{\mu_1,\mu_2}\big)^{\frac{q_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{q_1}} \asymp \\ \asymp 2^{n_1(\theta_1-\alpha_1)}\big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty}\sum_{\mu_1=0}^{n_1} a^2_{\mu_1,\mu_2} 2^{2\mu_1\alpha_1}\big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q_1\theta_1} \big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2}\big)^{\frac{q_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Доказательство утверждения 2) проводится аналогично. □

Лемма 6 использоваться при доказательстве теоремы не будет, но в ней приведены специфические свойства частных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами Фурье в пространствах Лебега со смешанной нормой, представляющие отдельный интерес.

Лемма 6. *Пусть* $f \in \Lambda_{p_1p_2}$, $1 < p_i < \infty$, $\beta_i > \alpha_i > 0$, $n_i = 0,1,2\ldots$, $\delta_i \in (0,\frac{1}{2})$, $i = 1,2$. *Тогда:*

1) $\omega_{\alpha_1,0}\Big(f,\frac{1}{2^{n_1}}\Big)_{p_1p_2} \asymp \frac{1}{2^{n_1\alpha_1}}\Big(\sum\limits_{k_1=0}^{n_1}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty} a^2_{k_1k_2} 2^{2k_1\alpha_1}\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum\limits_{k_1=n_1+1}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty} a^2_{k_1k_2}\Big)^{\frac{1}{2}}$;

2) $\omega_{\alpha_1,0}\Big(f,\frac{1}{2^{n_1}}\Big)_{p_1p_2} \asymp \frac{1}{2^{\alpha_1 n_1}}\Big(\sum\limits_{\mu_1=0}^{n_1} 2^{2\alpha_1\mu_1} E^2_{2^{\mu_1}-1\infty}(f)_{p_1p_2}\Big)^{\frac{1}{2}}$;

3) $\omega_{\alpha_1,0}\Big(f,\frac{1}{2^{n_1}}\Big)_{p_1p_2} \asymp \Big(\sum\limits_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} 2^{-2\alpha_1\mu_1}\|S^{(\alpha_1,0)}_{2^{\mu_1}\infty}(f)\|^2_{p_1p_2}\Big)^{\frac{1}{2}}$;

4) $\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2} \asymp \delta_1^{\alpha_1}\Big(\int\limits_{\delta_1}^{1}\big[t_1^{-\alpha_1}\omega_{\beta_1,0}(f,t_1)_{p_1p_2}\big]^2\frac{dt_1}{t_1}\Big)^{\frac{1}{2}}$.

Верны и неравенства для $\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2}$, *являющиеся двойственными по отношению к* $\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2}$.

Доказательство. Сначала докажем утверждение 1). Применяя лемму 1, имеем

$$I = \omega_{\alpha_1,0}\left(f, \frac{1}{2^{n_1}}\right)_{p_1p_2} \asymp \frac{1}{2^{n_1\alpha_1}}\|S^{(\alpha_1,0)}_{2^{n_1}\infty}(f)\|_{p_1p_2} + \|f - S_{2^{n_1}\infty}(f)\|_{p_1p_2}.$$

Применяя лемму 4, получаем требуемую оценку

$$I \asymp \frac{1}{2^{n_1\alpha_1}}\left(\sum_{\mu_1=0}^{n_1}\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\mu_1\mu_2}2^{2\nu_1\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\mu_1\mu_2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство утверждения 2) проводится аналогично.

Докажем утверждение 3). Применяя лемму 4 и 1) из леммы 6, имеем

$$A^2 \equiv \sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} 2^{-2\alpha_1\mu_1}\left\|S^{(\alpha_1,0)}_{2^{\mu_1}\infty}(f)\right\|^2_{p_1p_2} \asymp \sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} 2^{-2\alpha_1\mu_1}\sum_{\nu_1=1}^{\mu_1}\sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{2\alpha_1\nu_1}a^2_{\nu_1\nu_2} \asymp$$

$$\asymp 2^{-2\alpha_1 n_1}\sum_{\nu_1=1}^{n_1}\sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{2\alpha_1\nu_1}a^2_{\nu_1\nu_2} + \sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} 2^{-2\alpha_1\mu_1}\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\mu_1}\sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{2\alpha_1\nu_1}a^2_{\nu_1\nu_2} \asymp$$

$$\asymp 2^{-2\alpha_1 n_1}\sum_{\nu_1=1}^{n_1}\sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{2\alpha_1\nu_1}a^2_{\nu_1\nu_2} + \sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1\nu_2} \asymp \omega^2_{\alpha_1,0}\left(f, \frac{1}{2^{n_1}}\right)_{p_1p_2},$$

что и доказывает 3).

Докажем утверждение 4). Для данного числа $\delta_1 \in (0, \frac{1}{2})$ найдется целое неотрицательное число m_1 такое, что $\frac{1}{2^{m_1+1}} \leqslant \delta_1 < \frac{1}{2^{m_1}}$. Применяя свойства частного модуля гладкости, имеем

$$B^2 = \delta_1^{2\alpha_1}\int_{\delta_1}^{1}\left[t_1^{-\alpha_1}\omega_{\beta_1,0}(f,t_1)_{p_1p_2}\right]^2\frac{dt_1}{t_1} \asymp 2^{-2m_1\alpha_1}\sum_{\mu_1=0}^{m_1} 2^{2\mu_1\alpha_1}\omega^2_{\beta_1,0}\left(f, \frac{1}{2^{\mu_1}}\right)_{p_1p_2}.$$

Применяя формулу 2) из леммы 6, получаем

$$B^2 \asymp 2^{-2m_1\alpha_1}\sum_{\mu_1=0}^{m_1} 2^{2\mu_1\alpha_1}2^{-2\mu_1\beta_1}\sum_{\nu_1=0}^{\mu_1} 2^{2\nu_1\beta_1}E^2_{2^{\nu_1-1}\infty}(f)_{p_1p_2} \asymp$$

$$\asymp 2^{-2m_1\alpha_1}\sum_{\nu_1=0}^{m_1} 2^{2\nu_1\alpha_1}E^2_{2^{\nu_1-1}\infty}(f)_{p_1p_2} \asymp \omega^2_{\alpha_1,0}\left(f, \frac{1}{2^{m_1}}\right)_{p_1p_2}.$$

Используя свойства частного модуля гладкости, получаем $B \asymp \omega_{\alpha_1,0}\left(f, \delta_1\right)_{p_1p_2}$. Тем самым 4) доказано. □

2. Доказательство теоремы

Докажем сначала I. Для каждого $\delta_1 \in (0,1)$ существует натуральное число n_1 такое, что $2^{-n_1} \leqslant \delta_1 < 2^{-n_1+1}$. Поэтому

$$A_1 = D_1(f,\delta_1) \ll D_1(f, 2^{-n_1}), \quad B_1 = C_1(f,\delta_1) \gg C_1(f, 2^{-n_1}).$$

Применяя оценки из леммы 5, получим, что $A_1 \ll d_{11} + d_{12}$, $B_1 \gg c_{11} + c_{12}$. Покажем, что $d_{1i} \ll c_{1i}$, $i = 1, 2$.

1. Рассмотрим

$$d_{11} = 2^{-n_1(\alpha_1-\theta_1)}\Big(\sum_{\nu_1=0}^{n_1} 2^{\nu_1 p_1(\alpha_1-\theta_1)}\Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{p_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{p_1}}.$$

1.1. Пусть $p_1 \geqslant 2$. Тогда в соответствии с леммой 3, с учетом того, что $1 = \alpha \leqslant \beta = \frac{p_1}{2}$, имеем

$$d_{11} = 2^{-n_1(\alpha_1-\theta_1)}\Big(\Big(\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\Big(2^{\nu_1 2(\alpha_1-\theta_1)}\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{p_1}{2}}\Big)^{\frac{2}{p_1}}\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-n_1(\alpha_1-\theta_1)}\Big(\sum_{\nu_1=0}^{n_1} 2^{\nu_1 2(\alpha_1-\theta_1)}\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2^{-n_1(\alpha_1-\theta_1)}\Big(\sum_{\nu_1=0}^{n_1} 2^{\nu_1 2\alpha_1}\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{1}{2}} = c_{11}.$$

Итак, $d_{11} \ll c_{11}$ при $p_1 \geqslant 2$.

1.2. Пусть $1 < p_1 < 2$. Оценим $d_{11} = 2^{-n_1(\alpha_1-\theta_1)}\Big(\sum\limits_{\nu_1=0}^{n_1} 2^{\nu_1 p_1\alpha_1}\Big(\sum\limits_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{p_1}{2}}\cdot 2^{-\nu_1 p_1\theta_1}\Big)^{\frac{1}{p_1}}$.

Пусть $A_{\nu_1} = 2^{\nu_1 p_1\alpha_1}\Big(\sum\limits_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{p_1}{2}}$, $B_{\nu_1} = 2^{-\nu_1 p_1\theta_1}$, $p = \frac{p_1}{2}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Применяя неравенство Гельдера к сумме $\sum\limits_{\nu_1=0}^{n_1} A_{\nu_1}B_{\nu_1}$, получим

$$\sum_{\nu_1=0}^{n_1} A_{\nu_1}B_{\nu_1} \leqslant \Big(\sum_{\nu_1=0}^{n_1} A^p_{\nu_1}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{\nu_1=0}^{n_1} B^q_{\nu_1}\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Отсюда следует, что

$$d_{11} \leqslant 2^{-n_1(\alpha_1-\theta_1)}\left(\left\{\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\left(2^{\nu_1 p_1\alpha_1}\left(\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2}\right)^{\frac{p_1}{2}}\right)^{\frac{2}{p_1}}\right\}^{\frac{p_1}{2}} \times\right.$$

$$\left.\times\left\{\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\left(2^{-\nu_1 p_1\theta_1}\right)^{\frac{\frac{2}{p_1}}{\frac{2}{p_1}-1}}\right\}^{1-\frac{p_1}{2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} \ll 2^{-n_1(\alpha_1-\theta_1)}\left(\sum_{\nu_1=0}^{n_1} 2^{\nu_1 2\alpha_1}\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2}\right)^{\frac{1}{2}} = c_{11}.$$

Итак, $d_{11} \ll c_{11}$ при $1 < p_1 < 2$. Тем самым $d_{11} \ll c_{11}$ при $1 < p_1 < \infty$.

2. Рассмотрим $d_{12} = \Big(\sum\limits_{\mu_2=0}^{\infty}\sum\limits_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} a^2_{\mu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{1}{2}}$.

2.1. Пусть $1 < q_1 \leqslant 2$. Тогда, применяя лемму 3, с учетом того, что $\frac{2}{q_1} = \alpha \leqslant \beta = 1$, имеем

$$d_{12} = \Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty}\sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} a^2_{\mu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \Big(\sum_{\mu_1=n_1}^{\infty}\Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\mu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{q_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{q_1}} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{\mu_1=n_1}^{\infty} 2^{\mu_1 q_1\theta_1}\Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\mu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{q_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{q_1}} = c_{12},$$

т. е. $d_{12} \ll c_{12}$ при $1 < q_1 \leqslant 2$.

2.2. Пусть $q_1 > 2$. Оценим $d_{12} = \Big(\sum\limits_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} 2^{2\mu_1\theta_1} \sum\limits_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\mu_1,\mu_2} \cdot 2^{-2\mu_1\theta_1} \Big)^{\frac{1}{2}}$.

Пусть $A_{\mu_1} = 2^{2\mu_1\theta_1} \sum\limits_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\mu_1,\mu_2}$, $B_{\mu_1} = 2^{-2\mu_1\theta_1}, p = \frac{q_1}{2}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Применяя неравенство Гельдера к сумме $\sum\limits_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} A_{\mu_1} B_{\mu_1}$, получим

$$\sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} A_{\mu_1} B_{\mu_1} \leqslant \Big(\sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} A^p_{\mu_1} \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} B^q_{\mu_1} \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Отсюда следует, что

$$d_{12} \leqslant \Big(\Big\{ \sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} \Big\{ 2^{2\mu_1\theta_1} \sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\mu_1,\mu_2} \Big\}^{\frac{q_1}{2}} \Big\}^{\frac{2}{q_1}} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\Big\{ \sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} \Big\{ 2^{-2\mu_1\theta_1} \Big\}^{\frac{\frac{q_1}{2}}{\frac{q_1}{2}-1}} \Big\}^{1-\frac{2}{q_1}} \Big)^{\frac{1}{2}} \ll$$
$$\ll \Big(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q_1 \theta_1} \big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2} \big)^{\frac{q_1}{2}} \Big)^{\frac{1}{q_1}} = c_{12}.$$

Тем самым $d_{12} \ll c_{12}$ при $q_1 > 2$. Следовательно, $d_{12} \ll c_{12}$ при $1 < q_1 < \infty$.

Неравенство (1) доказано.

Покажем, что в соотношении (1) знак $\ll$ нельзя заменить на знак $\asymp$. Для этого построим функцию $f_1(x_1, x_2) \in \Lambda_{p_1 p_2}$ такую, что левые и правые части неравенства (1) имеют разные порядки, как функции δ_1. Возьмем функцию

$$f_1(x_1, x_2) \sim \sum_{m_1=0}^{\infty} a_{m_1} \cos 2^{m_1} x_1 \sin x_2,$$

где $a_{m_1} = \frac{(m_1+1)^{\beta_1}}{2^{\alpha_1 m_1}}$, $\beta_1 > -\frac{1}{2}$, $\alpha_1 > \theta_1$, $\theta_1 = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}$, $1 < p_1 < q_1 < \infty$.

Применяя леммы 4 и 5, получим, что

$$f_1 \in L_{p_1 p_2}, \quad \omega_{\alpha_1,0}(f_1, 2^{-n_1})_{p_1 p_2} \asymp \frac{(n_1+1)^{\beta_1+\frac{1}{2}}}{2^{\alpha_1 n_1}} \asymp \omega_{\alpha_1,0}(f_1, 2^{-n_1})_{q_1 p_2}.$$

Но тогда для $\delta_1 \in (0, 1)$

$$\omega_{\alpha_1,0}(f_1, \delta_1)_{p_1 p_2} \asymp \delta_1^{\alpha_1} \left(\ln \frac{2}{\delta_1} \right)^{\beta_1+\frac{1}{2}} \asymp \omega_{\alpha_1,0}(f_1, \delta_1)_{q_1 p_2}.$$

Теперь легко проверить, что

$$D_1(f_1, \delta_1) \asymp \delta_1^{\alpha_1-\theta_1}, \quad C_1(f_1, \delta_1) \asymp \delta_1^{\alpha_1-\theta_1} \left(\ln \frac{2}{\delta_1} \right)^{\beta_1+\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, левые и правые части неравенства (1) для функции $f_1(x_1, x_2)$ имеют разные порядки, как функции δ_1.

Доказательство II проводится аналогично доказательству I.

Теорема доказана.

Заключение

В работе рассмотрены функции двух переменных с лакунарными коэффициентами Фурье. Для таких функций получены оценки, распространяющие неравенство Коляды для частных модулей на двумерный случай в пространствах со смешанной нормой.

Кроме того, из оценок, приведенных в теореме, вытекают неравенства типа неравенства Ульянова. А именно пусть $f \in \Lambda_{p_1p_2}$, $\alpha_i > \theta_i$, $\delta_i \in (0,1)$, $i = 1,2$. Тогда при $1 < p_1 < q_1 < \infty$, $\theta_1 = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}$, $1 < p_2 < \infty$ выполняется неравенство

$$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{q_1p_2} \ll \left(\int\limits_0^{\delta_1} t_1^{-q_1\theta_1} \omega_{\alpha_1,0}^{q_1}(f,t_1)_{p_1p_2} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

В случае, когда $1 < p_2 < q_2 < \infty$, $\theta_2 = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}$, $1 < p_1 < \infty$, верны оценки для $\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{p_1q_2}$, двойственные к оценкам для $\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{q_1p_2}$.

При дополнительных ограничениях на параметры из теоремы следуют неравенства, уточняющие неравенства типа Ульянова. А именно пусть $f \in \Lambda_{p_1p_2}$, $\alpha_i > \theta_i$, $\delta_i \in (0,1)$, $i = 1,2$. Тогда при $1 < p_1 < q_1 < \infty$, $1 < p_1 \leqslant 2$, $\theta_1 = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}$, $1 < p_2 < \infty$ выполняется неравенство

$$\omega_{\alpha_1-\theta_1,0}(f,\delta_1)_{q_1p_2} \ll \left(\int\limits_0^{\delta_1} t_1^{-q_1\theta_1} \omega_{\alpha_1,0}^{q_1}(f,t_1)_{p_1p_2} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

В случае, когда $1 < p_2 < q_2 < \infty, \theta_2 = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}, 1 < p_1 < \infty$, верны оценки для $\omega_{0,\alpha_2-\theta_2}(f,\delta_2)_{p_1q_2}$, двойственные к оценкам $\omega_{\alpha_1-\theta_1,0}(f,\delta_1)_{q_1p_2}$.

Из теоремы можно получить следующие оценки для частных модулей гладкости производной функции через частные модули гладкости самой функции.

Пусть $f \in \Lambda_{p_1p_2}$, $\alpha_i > \theta_i$, $\delta_i \in (0,1)$, $i = 1,2$. Тогда при $1 < p_1 < q_1 < \infty$, $\theta_1 = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}$, $1 < p_2 < \infty$, $\rho_1 > 0$

$$\delta_1^{\alpha_1-\theta_1} \left(\int\limits_{\delta_1}^{1} t_1^{-p_1(\alpha_1-\theta_1)} \omega_{\alpha_1,0}^{p_1}(f^{(\rho_1,0)},t_1)_{q_1p_2} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \ll \left(\int\limits_0^{\delta_1} t_1^{-q_1(\rho_1+\theta_1)} \omega_{\alpha_1+\rho_1,0}^{q_1}(f,t_1)_{p_1p_2} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

В случае, когда $1 < p_2 < q_2 < \infty$, $\theta_2 = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}$, $1 < p_1 < \infty$, $\rho_2 > 0$, верны интегральные оценки для $\omega_{0,\alpha_2}\left(f^{(0,\rho_2)},t_2\right)_{p_1q_2}$, двойственные к интегральным оценкам для $\omega_{\alpha_1,0}\left(f^{(\rho_1,0)},t_1\right)_{q_1p_2}$.

Список литературы

1. *Ульянов П. Л.* Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1968. Т. 32, вып. 3. С. 649–686.
2. *Ульянов П. Л.* Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Математический сборник. 1970. Т. 81 (123), вып. 1. С. 104–131.
3. *Коляда В. И.* О соотношениях между модулями непрерывности в разных метриках // Труды Математического института Академии наук СССР. 1988. Т. 181. С. 117–136.
4. *Нетрусов Ю. В.* Теоремы вложения пространств $H_p^{\omega,k}$ и $H_p^{s,\omega,k}$ // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1987. Т. 159. С. 83–102.
5. *Гольдман М. Л.* Критерий вложений разных метрик для изотропных пространств Бесова с произвольными модулями непрерывности // Труды Математического института РАН. 1992. Т. 201. С. 186–218.

6. *Trebels W.* Inequalities for moduli of smoothness versus embeddings of function spaces // Archiv der Mathematik. 2010. Vol. 94. P. 155–164. https://doi.org/10.1007/s00013-009-0078-4
7. *Потапов М. К., Симонов Б. В., Тихонов С. Ю.* Дробные модули гладкости. Москва : МАКС-Пресс, 2016. 337 с.
8. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. Москва : Наука, 1975. 480 с.
9. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. Москва : Изд-во иностранной литературы, 1948. 456 с.
10. *Потапов М. К., Симонов Б. В.* Свойства смешанных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2014. Вып. 1. С. 6–17.

References

1. Ul'janov P. L. The imbedding of certain classes H_p^ω. *Izvestiya: Mathematics*, 1968, vol. 2, iss. 3, pp. 601–637. https://doi.org/10.1070/IM1968v002n03ABEH000650
2. Ul'yanov P. L. Imbedding theorems and relations between best approximations (moduli of continuity) in different metrics. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1970, vol. 10, iss. 1, pp. 103–126. https://doi.org/10.1070/SM1970v010n01ABEH001589
3. Kolyada V. I. On relations between the moduli of continuity in various metrics. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1989, vol. 181, pp. 127–148.
4. Netrusov Yu. V. Imbedding theorems for the spaces $H_p^{\omega,k}$ and $H_p^{s,\omega,k}$. *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI*, 1987, vol. 159, pp. 83–102 (in Russian).
5. Gol'dman M. L. A criterion of imbedding for different metrics for isotropic Besov spaces with general moduli of continuity. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1994, vol. 201, iss. 2, pp. 155–181.
6. Trebels W. Inequalities for moduli of smoothness versus embeddings of function spaces. *Archiv der Mathematik*, 2010, vol. 94, pp. 155–164. https://doi.org/10.1007/s00013-009-0078-4
7. Potapov M. K., Simonov B. V., Tikhonov S. Yu. *Drobnye moduli gladkosti* [Fractional Moduli of Smoothness]. Moscow, MAKS-Press, 2016. 337 p. (in Russian).
8. Besov O. V., Ilin V. P., Nikol'skii S. M. *Integral Representations of Functions and Imbedding Theorems*. New York, Toronto, London, Halsted Press, 1978. 345 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1975. 480 p.).
9. Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G. *Inequalities*. London, Cambridge University Press, 1934. 336 p. (Russ. ed.: Moscow, IL, 1948. 456 p.).
10. Potapov M. K., Simonov B. V. Properties of mixed moduli of smoothness of functions with lacunary Fourier coefficients. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2014, vol. 69, pp. 5–15. https://doi.org/https://doi.org/10.3103/S0027132214010021

Поступила в редакцию / Received 28.03.2022
Принята к публикации / Accepted 12.05.2022
Опубликована / Published 30.11.2022

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 458–467
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 458–467
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-458-467, EDN: PKWNTS

Научная статья
УДК 519.713.2

О конкретной характеризации универсальных графовых полуавтоматов

Р. А. Фарахутдинов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Фарахутдинов Ренат Абуханович, аспирант кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, renatfara@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-2877-8557, AuthorID: 1078801

Аннотация. Теория автоматов является одним из разделов математической кибернетики, в котором изучаются устройства преобразования информации, используемые во многих прикладных задачах. В данной работе мы изучаем автоматы без выходных сигналов и называем их полуавтоматами. В зависимости от исследуемых задач рассматриваются полуавтоматы, у которых множества состояний наделены дополнительной математической структурой, согласованной с функцией переходов полуавтомата. Мы исследуем полуавтоматы над графами (так называемые графовые полуавтоматы), множество состояний которых наделено математической структурой графа. Универсальный графовый полуавтомат $\mathrm{Atm(G)}$ — это универсально притягивающий объект в категории полуавтоматов, у которых множество состояний наделено структурой графа G, сохраняющейся функцией переходов полуавтомата. Полугруппа входных сигналов такого полуавтомата имеет вид $S(G) = \mathrm{End\ G}$. Она может рассматриваться как производная алгебраическая система математического объекта $\mathrm{Atm(G)}$, которая содержит полезную информацию об исходном объекте. Свойства такой полугруппы взаимосвязаны со свойствами алгебраической структуры полуавтомата, это означает, что универсальные графовые полуавтоматы можно изучать путем исследования их полугрупп входных сигналов. Для таких полугрупп представляет интерес проблема конкретной характеризации универсальных графовых полуавтоматов: при каких условиях на множестве состояний X полуавтомата $A = (X, S, \delta)$ возможно задать бинарное отношение ρ, такое, что для графа $G = (X, \rho)$ будет выполняться равенство $A = \mathrm{Atm(G)}$. В данной работе эта проблема решается для графовых полуавтоматов над рефлексивными квазибесконтурными графами.

Ключевые слова: полуавтомат, полугруппа эндоморфизмов, конкретная характеризация, граф

Для цитирования: *Фарахутдинов Р. А.* О конкретной характеризации универсальных графовых полуавтоматов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 458–467. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-458-467, EDN: PKWNTS

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

© Фарахутдинов Р. А., 2022

Article

On a concrete characterization problem of universal graphic semiautomata

R. A. Farakhutdinov

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Renat A. Farakhutdinov, renatfara@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-2877-8557, AuthorID: 1078801

Abstract. Automata theory is one of the branches of mathematical cybernetics, that studies information transducers that arise in many applied problems. The major objective of automata theory is to develop methods by which one can describe and analyze the dynamic behavior of discrete systems. In this paper, we consider automata without output signals (called semiautomata). Depending on study tasks, semiautomata are considered, for which the set of states is equipped with additional mathematical structure preserved by the transition function of semiautomata. We investigate semiautomata over graphs and call them graphic semiautomata. For graphs G a universal graphic semiautomaton $\mathrm{Atm(G)}$ is the universally attracted object in the category of graphic semiautomata, for which the set of states is equipped with the structure of the graph G. The input signal semigroup of the universal graphic semiautomaton is $S(G) = \mathrm{End\ G}$. It may be considered as a derived algebraic system of the mathematical object $\mathrm{Atm(G)}$. It is common knowledge that properties of the semigroup are closely interconnected with properties of the algebraic structure of the semiautomaton. This suggests that universal graphic semiautomata may be researched using their input signal semigroups. In this article, we investigate the concrete characterization problem of graphic semiautomata over quasi-acyclic reflexive graphs. The main result of our study states necessary and sufficient conditions for a semiautomaton to be a universal graphic semiautomaton over quasi-acyclic reflexive graphs.

Keywords: semiautomaton, endomorphism semigroup, concrete characterization, graph

For citation: Farakhutdinov R. A. On a concrete characterization problem of universal graphic semiautomata. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 458–467 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-458-467, EDN: PKWNTS

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Одним из перспективных направлений современной алгебры является изучение математических объектов с помощью исследования производных алгебраических систем, связанных с этими объектами. В качестве исходных математических объектов рассматриваются различные алгебраические системы, а в качестве производных алгебраических систем — группы автоморфизмов, полугруппы эндоморфизмов, решетки подсистем алгебраических систем и др. Основной вопрос состоит в том, насколько точно производная алгебраическая система определяет исходный математический объект, после чего проводятся конкретная и абстрактная характеризации производной алгебраической системы, что в конечном счете позволяет изучить взаимосвязь свойств исходного математического объекта с производной системой. Такие исследования для групп автоморфизмов алгебраических систем, полугрупп эндоморфизмов графов, колец эндоморфизмов модулей и других производных алгебраических систем

успешно провели Б. И. Плоткин [1], А. Г. Пинус [2, 3], Ю. М. Важенин [4, 5], Л. М. Глускин [6, 7], А. В. Михалев [8] и другие алгебраисты. Актуальность проблемы характеризации математических объектов с помощью их эндоморфизмов и автоморфизмов обозначил С. Улам в известной работе [9].

К обобщенной теории Галуа относятся и исследования автоматов в категориях [10], т. е. автоматов, множества состояний и выходных сигналов которых наделены математическими структурами из категории $\mathbf{K}$, а функции переходов и выходов являются морфизмами этой категории. В данной работе рассматриваются автоматы без выходных сигналов в категории графов, которые принято называть полуавтоматами [11], над рефлексивными квазибесконтурными графами, это так называемые графовые полуавтоматы. Для таких полуавтоматов решается следующая проблема конкретной характеризации: при каких условиях полуавтомат A с множеством состояний X и полугруппой входных сигналов S является универсальным графовым полуавтоматом, т. е. на множестве состояний X полуавтомата A можно так задать бинарное отношение ρ, что для графа $G = (X, \rho)$ выполняется равенство $A = \mathrm{Atm\ G}$.

Результат данной работы докладывался на международных научных конференциях «Мальцевские чтения 2020» [12] и «Ломоносов-2020» [13].

1. Подготовительный этап

В работе используется общепринятая терминология теории полугрупп из [14], теории графов из [15] и теории автоматов из [10].

Далее всюду под графом будем понимать ориентированный граф. Для графа $G = (X, \rho)$ дугу $(x, y) \in \rho$ будем называть собственной, если $(y, x) \notin \rho$. Граф называется квазибесконтурным, если все его собственные дуги не содержатся ни в каком контуре. Примером квазибесконтурных графов являются бесконтурные графы, графы квазипорядка и многие другие. Квазибесконтурный граф будем называть тривиальным, если у него нет собственных дуг, и нетривиальным — в противном случае.

Полуавтомат $A = (X, S, *)$ называется полугрупповым, если на множестве его входных сигналов S определена ассоциативная бинарная операция $\cdot$, согласованная с функцией переходов $*$ по правилу: $x*(s_1 \cdot s_2) = (x*s_1)*s_2$ для любых $x \in X$, $s_1, s_2 \in S$. Полугрупповой полуавтомат $A = (X, S, *)$ называется графовым, если множество его состояний X наделено такой структурой графа $G = (X, \rho)$, что для любого входного сигнала $s \in S$ функция переходов $\delta_s(x) = x * s$ $(x \in X)$ является эндоморфизмом графа G. Такой полуавтомат символически обозначается через $A = (G, S, *)$.

Графовый полуавтомат $A = (G, \mathrm{End\,G}, *)$, где $x * \varphi = \varphi(x)$ для $x \in X$, $\varphi \in \mathrm{End\,G}$, является универсальным притягивающим объектом в категории графовых полуавтоматов [10] и называется универсальным графовым полуавтоматом над графом G. Такой полуавтомат обозначается $\mathrm{Atm(G)}$.

Пусть $A = (X, S, *)$ — полуавтомат с множеством состояний X и полугруппой входных сигналов S. Определим на множестве X канонические предикаты $\Pi(x, y, u, v)$, $Q(x, y)$ и $R(x, y)$ следующим образом:

$$\Pi(x, y, u, v) = (\exists\ s \in S)(x * s = u \wedge y * s = v \wedge (\forall z \in X)(z * s = u \vee z * s = v)),$$
$$Q(x, y) = \Pi(x, y, x, y) \wedge \neg\Pi(x, y, y, x), \quad R(x, y) = (\forall\ u, v \in X,\ u \neq v)\ \Pi(u, v, x, y).$$

Обозначим $Z(x, y) = Q(x, y) \vee R(x, y)$.

Лемма 1. *Пусть $G = (X, \rho)$ — рефлексивный граф и $(x, y) \in \rho$. Тогда отображение f, определенное для элементов $u \in X$ по формуле*

$$f(u) = \begin{cases} y, & \text{если существует маршрут из } y \text{ в } u, \\ x, & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

является эндоморфизмом графа $G = (X, \rho)$.

Доказательство. Пусть $(s, t) \in \rho$. Если существует путь из вершины y в вершину s, то ввиду наличия дуги $s \to t$ будет существовать путь из y в t. По определению отображения f это означает, что $f(s) = f(t) = y$. Поскольку ρ — рефлексивное бинарное отношение, то $(y, y) \in \rho$, т. е. $(f(s), f(t)) \in \rho$.

Если не существует пути из y в s, тогда по определению f получаем, что $f(s) = x$ и $f(t) \in \{x, y\}$. Ввиду рефлексивности отношения ρ имеем $(x, x) \in \rho$, а также $(x, y) \in \rho$ по условию, т. е. $(f(s), f(t)) \in \rho$.

Значит, условие $(s, t) \in \rho$ влечет $(f(s), f(t)) \in \rho$, следовательно, $f \in \mathrm{End\ G}$. □

Лемма 2. *Для любого универсального графового полуавтомата $\mathrm{Atm(G)} = (\mathrm{G}, \mathrm{End\ G}, *)$ над рефлексивным графом $G = (X, \rho)$ канонические предикаты $Q(x, y)$ и $R(x, y)$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) предикат $Q(x, y)$ истинен тогда и только тогда, когда в графе G вершины x и y соединяются дугой, не лежащей ни в каком контуре;

2) если для дуги $(x, y) \in \rho$ предикат $Q(x, y)$ истинен, то для любых $u, v \in X$ предикат $\Pi(x, y, u, v)$ истинен тогда и только тогда, когда $(u, v) \in \rho$;

3) если $\rho \neq \Delta_X$, то предикат $R(x, y)$ истинен тогда и только тогда, когда $(x, y) \in \rho \cap \rho^{-1}$.

Доказательство. Пусть $Q(x, y)$ и $R(x, y)$ — канонические предикаты универсального графового полуавтомата $\mathrm{Atm(G)} = (\mathrm{G}, \mathrm{End\ G}, *)$ над рефлексивным графом $G = (X, \rho)$.

Докажем утверждение 1). Предположим, что предикат $Q(x, y)$ истинен, т. е. по определению канонического предиката $Q(x, y)$ справедливы утверждения:

а) для некоторого входного сигнала $f \in \mathrm{End\ G}$ полуавтомата A выполняется

$$f(X) = \{x, y\}, \quad f(x) = x, \quad f(y) = y;$$

б) не существует такого эндоморфизма g графа G, для которого выполняется

$$g(X) = \{x, y\}, \quad g(x) = y, \quad g(y) = x.$$

Ясно, что $x \neq y$, поскольку в противном случае в силу рефлексивности отношения ρ получили бы противоречие утверждению б). Докажем, что вершины x и y соединяются дугой, не лежащей ни в каком контуре. Ясно, что для вершин x, y должно выполняться одно из трех несовместных условий:

i) либо вершины x и y не смежны;

ii) либо вершины x и y соединяются дугой, лежащей в некотором контуре;

iii) либо вершины x и y соединяются дугой, не лежащей ни в каком контуре.

Если бы вершины x, y были не смежны, тогда из утверждения а) следует, что любая вершина из $f^{-1}(x)$ не смежна с любой вершиной из $f^{-1}(y)$, и, следовательно, отображение

$$\overline{f}(z) = \begin{cases} x, & \text{если } f(z) = y, \\ y, & \text{если } f(z) = x \end{cases} \tag{1}$$

является эндоморфизмом графа G, что противоречит утверждению б).

Если бы вершины x, y соединялись дугой, лежащей в некотором контуре $x \to y \to \to x_1 \to x_2 \to \ldots x_{k-1} \to x_k = x$, то из утверждения а) следует, что $f(x) = x$, $f(y) = y$ и найдется такой наименьший номер k, для которого $f(x_{k-1}) = y$, $f(x_k) = x$. Тогда из условия $(x_{i-1}, x_i) \in \rho$, $1 \leqslant i \leqslant k$ для эндоморфизма f выполняется $(f(x_{i-1}), f(x_i)) \in \rho$, $(y, x) \in \rho$, и, следовательно, отображение (1) является эндоморфизмом графа G, что противоречит утверждению б).

Следовательно, для вершин x, y в графе G возможен только случай 3), т. е. x и y в графе G соединяются дугой, не лежащей ни в каком контуре.

Обратно, пусть дуга $x \to y$ не лежит ни в каком контуре графа G. Рассмотрим преобразование $f : X \to X$, определяемое для элементов $v \in X$ по правилу

$$f(v) = \begin{cases} y, & \text{если существует маршрут из } y \text{ в } v, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По лемме 1 отображение f — эндоморфизм графа G. При этом утверждение а) выполняется. Осталось заметить, что в этом случае утверждение б) также должно выполняться, поскольку в противном случае для некоторого эндоморфизма g графа G получим $g(x) = y$, $g(y) = x$, $(y, x) \in \rho$, и дуга $x \to y$ лежит в контуре $x \to y \to x$, чего быть не может.

Докажем утверждение 2). Пусть $(x, y) \in \rho$ — произвольная дуга графа $G = (X, \rho)$, и пусть предикаты $Q(x, y)$ и $\Pi(x, y, u, v)$ истинны. Из истинности предиката $\Pi(x, y, u, v)$ следует, что найдется входной сигнал $f \in \mathrm{End\ G}$ полуавтомата A, для которого выполняется $x * f = u$, $y * f = v$. Поскольку эндоморфизм f графа G сохраняет отношение смежности, то $(u, v) \in \rho$.

Обратно, пусть $(u, v) \in \rho$. Рассмотрим преобразование $f : X \to X$, определяемое для элементов $w \in X$ по правилу

$$f(w) = \begin{cases} v, & \text{если существует маршрут из } y \text{ в } w, \\ u, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По лемме 1 преобразование f является эндоморфизмом графа G, для которого в полуавтомате A предикат $\Pi(x, y, u, v)$ истинен.

Докажем утверждение 3). Пусть $\rho \neq \Delta_X$. Очевидно, что для любой пары $(x, y) \in \rho \cap \rho^{-1}$ все отображения $f : X \to \{x, y\}$ являются эндоморфизмами графа G и, значит, предикат $R(x, y)$ истинен в полуавтомате A.

С другой стороны, если предикат $R(x, y)$ истинен, то для любых различных вершин $u, v \in X$ и некоторого входного сигнала $f \in \mathrm{End\ G}$ полуавтомата A верно, что $u * f = x$ и $v * f = y$. Так как $\rho \neq \Delta_X$, то найдется дуга $(u, v) \in \rho \setminus \Delta_X$, и, следовательно, по определению канонического предиката $R(x, y)$ для некоторых входных сигналов $f_1, f_2 \in \mathrm{End\ G}$ полуавтомата A выполняются равенства $u * f_1 = x$, $v * f_1 = y$, $v * f_2 = x$ и $u * f_2 = y$. Тогда по определению эндоморфизма графа $(x, y) \in \rho$ и $(y, x) \in \rho$, т. е. вершины x и y соединяются встречными дугами в графе G. $\square$

2. Основной результат

Пусть $A = (X, S, *)$ — произвольный полугрупповой полуавтомат. Полугруппу S входных сигналов полуавтомата A будем называть Z-замкнутой, если для любого преобразования f множества X из условия, что для любого истинного предиката $Z(x, y)$ существует такой входной сигнал $s \in S$, что $x * s = f(x)$ и $y * s = f(y)$, следует, что для некоторого $t \in S$ выполняется $x * t = f(x)$ для всех $x \in X$.

Теорема 1. *Пусть $A = (X, S, *)$, $|X| > 1$ — полуавтомат без равнодействующих входных сигналов. Тогда A в том и только том случае будет универсальным графовым полуавтоматом $\mathrm{Atm(G)}$ для некоторого квазибесконтурного рефлексивного графа $G = (X, \rho)$, если полугруппа входных сигналов S является Z-замкнутой полугруппой с каноническими предикатами $Q(x, y)$ и $R(x, y)$, удовлетворяющими следующим условиям:*

$$(\forall x \in X)\, R(x, x), \tag{2}$$

$$Q(x, y) \wedge Q(u, v) \Longrightarrow (\Pi(x, y, u, v) \Longleftrightarrow \neg\Pi(x, y, v, u))\,, \tag{3}$$

$$Q(x, y) \wedge \Pi(x, y, u, v) \Longrightarrow (\Pi(x, y, v, u) \wedge R(u, v) \quad \vee \quad \neg\Pi(x, y, v, u) \wedge Q(u, v))\,. \tag{4}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $A = (G, \mathrm{End\ G}, *)$ — универсальный графовый полуавтомат над квазибесконтурным рефлексивным графом $G = (X, \rho)$. Полугруппой входных сигналов такого автомата является полугруппа эндоморфизмов $\mathrm{End\ G}$. Покажем, что канонические предикаты $Q(x, y)$, $R(x, y)$ полугруппы $S = \mathrm{End\ G}$ удовлетворяют условиям (2)–(4) и полугруппа S является Z-замкнутой.

Рассмотрим произвольную вершину $u \in X$. В силу рефлексивности графа G постоянное преобразование $c_u : X \to \{u\}$ является эндоморфизмом этого графа и, значит, $c_u \in S$. Следовательно, условие (2) выполняется.

Если граф G не имеет собственных дуг, тогда бинарное отношение ρ симметрично, и по утверждению 1) леммы 2 имеем, что предикат $Q(x, y)$ тождественно ложен. Если $\rho = \Delta_X$, тогда каждое преобразование множества X является эндоморфизмом графа G, и полугруппа S удовлетворяет условиям теоремы. Если $\rho \neq \Delta_X$, тогда по утверждению 3) леммы 2 имеем, что $\rho \cap \rho^{-1} = \rho$. Очевидно, что S удовлетворяет условиям (3), (4). Докажем, что полугруппа S Z-замкнута. Пусть f — преобразование множества X такое, что для любого истинного предиката $R(x, y)$ найдется элемент $s \in S$, что $f(x) = x * s$, $f(y) = y * s$. Тогда $(x, y) \in \rho$ и эндоморфизм s графа удовлетворяет условию $(x * s, y * s) \in \rho$. Отсюда следует, что $(f(x), f(y)) \in \rho$ и f — эндоморфизм графа G, т. е. $f \in S$.

Предположим, что существует собственная дуга $(x, y) \in \rho \setminus \rho^{-1}$. Так как граф G квазибесконтурный, то дуга (x, y) не лежит ни в каком контуре. Значит, по лемме 2 предикат $Q(x, y)$ истинен.

Пусть предикаты $Q(x, y)$, $Q(u, v)$ истинны. По утверждению 1) леммы 2 это означает, что вершины x, y соединяются дугой, не лежащей ни в одном контуре, и вершины u, v тоже соединяются дугой, не лежащей ни в одном контуре. Очевидно, что дуги, соединяющие вершины x, y и u, v, являются собственными дугами графа. Поскольку $S = \mathrm{End\ G}$, то по утверждению 2) леммы 2 либо предикат $\Pi(x, y, u, v)$ истинен и предикат $\Pi(x, y, v, u)$ ложен, либо предикат $\Pi(x, y, v, u)$ истинен и предикат $\Pi(x, y, u, v)$ ложен. Значит, условие (3) выполняется.

Если предикаты $Q(x, y)$, $\Pi(x, y, u, v)$ истинны, тогда по пункту 1) леммы 2 вершины x, y соединяются дугой, не лежащей ни в каком контуре графа G. Пусть для определенности $(x, y) \in \rho$ — дуга, не лежащая ни в каком контуре графа G. Тогда по утверждению 2) леммы 2 $(u, v) \in \rho$.

Если, кроме того, предикат $\Pi(x, y, v, u)$ истинен, то $(v, u) \in \rho$ и по утверждению 3) леммы 2 предикат $R(u, v)$ истинен. Если же предикат $\Pi(x, y, v, u)$ ложен, то в силу утверждения 2) леммы 2 $(v, u) \notin \rho$. Так как собственная дуга $(u, v) \in \rho$ по условию теоремы не лежит ни в каком контуре, то по утверждению 1) леммы 2 предикат $Q(u, v)$ истинен. Значит, условие (4) выполняется.

Докажем, что полугруппа S является Z-замкнутой. Пусть f — преобразование множества X такое, что для любого истинного предиката $Z(x,y)$ существует входной сигнал $s \in S$, что $x * s = f(x)$ и $y * s = f(y)$. Рассмотрим дугу $(x,y) \in \rho$. Имеем, что либо $(x,y) \in \rho \cap \rho^{-1}$, либо (x,y) — собственная дуга графа G. Тогда по лемме 2 $(x,y) \in R$ или $(x,y) \in Q$. Следовательно, найдется входной сигнал $s \in S$ такой, что $f(x) = x * s$ и $f(y) = y * s$ и $(f(x), f(y)) = (x * s, y * s) \in \rho$. Значит, f — эндоморфизм графа G и полугруппа $S = \mathrm{End\ G}$ Z-замкнута.

Достаточность. Пусть $G = (X, \rho)$, $|X| > 1$ — граф, $A = (G, S, *)$ — графовый полуавтомат без равнодействующих входных сигналов, удовлетворяющий условиям теоремы. Предположим, что канонический предикат $Q(x,y)$ тождественно ложен. Обозначим $M = \{(x,y) \in X \times X \mid R(x,y) \text{ истинен}\}$. Тогда канонический предикат $R(x,y)$ Z-замкнутой полугруппы S удовлетворяет условию $M \neq \Delta_X$. Действительно, если $M = \Delta_X$, то ввиду условия (2) любое преобразование множества X принадлежит Z-замкнутой полугруппе S и $M = X \times X$, что невозможно при $|X| > 1$. Тогда $G = (X, M)$ — рефлексивный симметричный граф такой, что для любого $f \in S$ из истинности предиката $R(x,y)$ следует истинность предиката $R(f(x), f(y))$. Это означает, что $S \subset \mathrm{End\ G}$. С другой стороны, если $f \in \mathrm{End\ G}$ и предикат $R(x,y)$ истинен, тогда по определению канонического предиката $R(x,y)$ найдется входной сигнал $s \in S$ такой, что $x * s = f(x)$, $y * s = f(y)$. Поскольку полугруппа S Z-замкнута, то условие $f \in S$ выполняется. Значит, $\mathrm{End\ G} \subset \mathrm{S}$, и получаем, что $S = \mathrm{End\ G}$.

Пусть канонический предикат $Q(x,y)$ полуавтомата A не тождественно ложен, тогда найдется $(x_0, y_0) \in X \times X$, что предикат $Q(x_0, y_0)$ истинен. Определим на множестве X отношение ρ следующим образом:

$$\rho = \{(x_0 * s, y_0 * s) \mid s \in S\}.$$

Очевидно, что по условию (2) теоремы отношение ρ рефлексивно.

Докажем, что для графа $G = (X, \rho)$ выполняется равенство $S = \mathrm{End\ G}$. Для проверки включения $S \subset \mathrm{End\ G}$ покажем, что любое преобразование $t \in S$ является эндоморфизмом графа G. Пусть $(x,y) \in \rho$ для некоторых $x, y \in X$. По определению ρ это означает, что для некоторого $s \in S$ выполняется $x_0 * s = x$, $y_0 * s = y$. Тогда для преобразования $s \cdot t \in S$ получаем, что $x * t = (x_0 * s) * t = x_0 * (s \cdot t)$, $y * t = (y_0 * s) * t = y_0 * (s \cdot t)$ и $(x * t, y * t) \in \rho$ по определению отношения ρ, т. е. $t \in \mathrm{End\ G}$.

Для проверки включения $\mathrm{End\ G} \subset \mathrm{S}$ покажем, что любой эндоморфизм f графа G принадлежит полугруппе S. По определению эндоморфизма графа выполняется условие

$$(\forall x, y \in X)\left((x,y) \in \rho \Longrightarrow (f(x), f(y)) \in \rho\right).$$

Поскольку полугруппа S является Z-замкнутой, то для доказательства $f \in S$ достаточно проверить, что для любых $x, y \in X$, для которых предикат $Z(x,y)$ истинен, найдется входной сигнал $s \in S$, что ограничение $x * s = f(x)$ и $y * s = f(y)$.

Рассмотрим произвольную пару $(x,y) \in X \times X$, для которой предикат $Z(x,y)$ истинен. Если $x = y$, тогда $f(x) = f(y)$ и по условию (2) теоремы существует входной сигнал $s \in S$, что $x * s = f(x)$. Пусть $x \neq y$. По определению графа G из истинности предиката $R(x,y)$ следует, что $(x,y) \in \rho \cap \rho^{-1}$, и по определению эндоморфизма f получаем, что $(f(x), f(y)) \in \rho \cap \rho^{-1}$. Отсюда следует, что предикаты $\Pi(x_0, y_0, f(x), f(y))$, $\Pi(x_0, y_0, f(y), f(x))$ истинны и по условию (4) теоремы предикат $R(f(x), f(y))$ истинен. Следовательно, найдется входной сигнал $s \in S$, что $x * s = f(x)$ и $y * s = f(y)$.

Пусть предикат $Q(x,y)$ истинен. По условию (3) теоремы либо предикат $\Pi(x_0,y_0,x,y)$ истинен и предикат $\Pi(x_0,y_0,y,x)$ ложен, либо предикат $\Pi(x_0,y_0,y,x)$ истинен и предикат $\Pi(x_0,y_0,x,y)$ ложен. Пусть для определенности выполняются условия, что предикат $\Pi(x_0,y_0,x,y)$ истинен и предикат $\Pi(x_0,y_0,y,x)$ ложен. Из истинности $\Pi(x_0,y_0,x,y)$ следует, что найдется $s \in S$, что $x_0 * s = x$ и $y_0 * s = y$. Тогда по определению отношения ρ имеем, что $(x,y) \in \rho \setminus \rho^{-1}$ и эндоморфизм f графа G удовлетворяет условию $(f(x),f(y)) \in \rho$. По определению отношения ρ это означает, что $f(x) = x_0 * t$, $f(y) = y_0 * t$ для некоторого $t \in S$. Так как предикат $Q(x_0,y_0)$ истинен и $f(x) = x_0 * t$, $f(y) = y_0 * t$, то по условию (4) либо предикаты $\Pi(x_0,y_0,f(y),f(x))$, $R(f(x),f(y))$ истинны, либо предикат $\Pi(x_0,y_0,f(y),f(x))$ ложен и предикат $Q(f(x),f(y))$ истинен. В первом случае по определению канонического предиката $R(x,y)$ найдется $r \in S$ такой, что выполняется условие $x * r = f(x)$ и $y * r = f(y)$.

Во втором случае в силу истинности предикатов $Q(f(x),f(y))$ и $Q(x,y)$ по условию (3) теоремы имеем, что либо $\Pi(x,y,f(x),f(y))$ истинен и $\Pi(x,y,f(y),f(x)$ ложен, либо $\Pi(x,y,f(y),f(x)$ истинен и $\Pi(x,y,f(x),f(y)$ ложен. Если предикат $\Pi(x,y,f(y),f(x)$ истинен, то $x * p = f(y)$ и $y * p = f(x)$ для некоторого $p \in S$, и ввиду того, что $x_0 * s = x$ и $y_0 * s = y$ для $s \in S$, получаем, что $x_0 * (s \cdot p) = f(y)$ и $y_0 * (s \cdot p) = f(x)$, а это противоречит тому, что предикат $\Pi(x_0,y_0,f(y),f(x))$ ложен. Таким образом, истинен предикат $\Pi(x,y,f(x),f(y))$, и, следовательно, $x * r = f(x)$, $y * r = f(y)$ для некоторого $r \in S$.

Таким образом, в любом случае имеем, что $x*s = f(x)$, $y*s = f(y)$ для некоторого входного сигнала s из S. Так как полугруппа S Z-замкнута, то выполняется условие $f \in S$. Следовательно, $\mathrm{End\ G} \subset \mathrm{S}$ и $S = \mathrm{End\ G}$.

Поскольку полугруппа $S = \mathrm{End\ G}$, то по утверждению 1) леммы 2 предикат $Q(x,y)$ истинен тогда и только тогда, когда вершины x,y в графе G соединены дугой, не лежащей ни в одном контуре. Так как по построению графа G для всех его собственных дуг $(x,y) \in \rho$ предикат $Q(x,y)$ истинен, то $G = (X,\rho)$ — рефлексивный квазибесконтурный граф. □

Доказанная теорема дает эффективный инструмент для изучения логико-алгебраических свойств графовых полуавтоматов, так как канонические предикаты $\Pi(x,y,u,v)$, $Q(x,y)$, $R(x,y)$ графового полуавтомата могут быть эффективно трансформированы в предикаты полугрупповой сигнатуры. В частности, такой подход позволяет исследовать проблемы абстрактной характеризации графовых полуавтоматов и относительной элементарной определимости [16] классов таких полуавтоматов в классе полугрупп, а также дает возможность проанализировать взаимосвязь различных проблем разрешимости элементарных теорий классов графовых полуавтоматов и элементарных теорий классов полугрупп.

Список литературы

1. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем. Москва : Наука, 1966. 604 с.
2. *Пинус А. Г.* Об элементарной эквивалентности производных структур свободных полугрупп, унаров и групп // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 6. С. 730–748. EDN: HRTFFV
3. *Пинус А. Г.* Об элементарной эквивалентности производных структур свободных решеток // Известия высших учебных заведений. Математика. 2002. № 5. С. 44–47. EDN: HQUCWH

4. *Важенин Ю. М.* Элементарные свойства полугрупп преобразований упорядоченных множеств // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 3. С. 281–301.
5. *Важенин Ю. М.* Об элементарной определяемости и элементарной характеризуемости классов рефлексивных графов // Известия высших учебных заведений. Математика. 1972. № 7. С. 3–11.
6. *Глускин Л. М.* Полугруппы и кольца эндоморфизмов линейных пространств // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1959. Т. 23, вып. 6. С. 841–870.
7. *Глускин Л. М.* Полугруппы изотонных преобразований // Успехи математических наук. 1961. Т. 16, вып. 5 (101). С. 157–162.
8. *Марков В. Т., Михалев А. В., Скорняков Л. А., Туганбаев А. А.* Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей // Итоги науки и техники. Серия: Алгебра. Топология. Геометрия. Москва : ВИНИТИ, 1983. Т. 21. С. 183–254.
9. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. Москва : Наука, 1964. 168 с.
10. *Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А.* Элементы алгебраической теории автоматов. Москва : Высшая школа, 1994. 191 с.
11. *Лидл Р., Пильц Г.* Прикладная абстрактная алгебра : пер. с англ. Екатеринбург : Изд-во Уральского ун-та, 1996. 744 с.
12. Мальцевские чтения : тезисы докладов Международной конференции. Новосибирск, 2020. URL: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/20/maltsev20.pdf (дата обращения: 15.01.2022).
13. Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020» [Электронный ресурс] / отв. ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. Электрон. текстовые дан. (1500 Мб.). Москва : МАКС Пресс, 2020. URL: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2020/index.htm (дата обращения: 15.01.2022).
14. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. Москва : Наука. Физматлит, 1997. 368 с.
15. *Харари Ф.* Теория графов. Москва : Мир, 1973. 300 с.
16. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. Москва : Наука. Физматлит, 1980. 416 с.

References

1. Plotkin B. I. *Gruppy avtomorfizmov algebraicheskikh sistem* [Groups of Automorphisms of Algebraic Systems]. Moscow, Nauka, 1966. 604 p. (in Russian).
2. Pinus A. G. Elementary equivalence of derived structures of free semigroups, unars, and groups. *Algebra and Logic*, 2004, vol. 43, iss 6, pp. 408–417. https://doi.org/10.1023/B:ALLO.0000048829.60182.48, EDN: GQLIGM
3. Pinus A. G. On the elementary equivalence of derived structures of free lattices. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2002, vol. 46, iss. 5, pp. 42–45.
4. Vazhenin Yu. M. Elementary properties of semigroups of transformations of ordered sets. *Algebra and Logic*, 1970, vol. 9, iss. 3, pp. 169–179. https://doi.org/10.1007/BF02218675
5. Vazhenin Yu. M. The elementary definability and elementary characterizability of classes of reflexive graphs. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1972, iss. 7, pp. 3–11 (in Russian).
6. Gluskin L. M. Semigroups and endomorphism rings of linear spaces. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, 1959, vol. 23, iss. 6, pp. 841–870 (in Russian).
7. Gluskin L. M. Semi-groups of isotone transformations. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1961, vol. 16, iss. 5 (101), pp. 157–162 (in Russian).
8. Markov V. T., Mikhalev A. V., Skornyakov L. A., Tuganbaev A. A. Endomorphism rings of modules, and lattices of submodules. *Journal of Soviet Mathematics*, 1985, vol. 31, iss. 3, pp. 3005–3051. https://doi.org/10.1007/BF02106808
9. Ulam S. M. *A Collection of Mathematical Problems*. New York, Interscience, 1960. 150 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1964. 168 p.).

10. Plotkin B. I., Greenglaz L. Ja., Gvaramija A. A. *Elementy algebraicheskoj teorii avtomatov* [Elements of Algebraic Theory of Automata]. Moscow, Vysshaya Shkola, 1994. 191 p. (in Russian).
11. Lidl R., Pilz G. *Applied Abstract Algebra*. New York, Springer-Verlag, 1998. 487 p. (Russ. ed.: Ekaterinburg, Ural University Publ., 1996. 744 p.).
12. *International Conference MAL'TSEV MEETING November 16–20, 2020. Collection of Abstracts*. Available at: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/20/maltsev20.pdf (accessed 15 January 2021).
13. *Materials of the International Youth Scientific Forum "LOMONOSOV-2020"*. Available at: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2020/index.htm (accessed 15 January 2021) (in Russian).
14. Bogomolov A. M., Saliy V. N. *Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem* [Algebraic Foundations of the Theory of Discrete Systems]. Moscow, Nauka. Fizmatlit, 1997. 368 p. (in Russian).
15. Harary F. *Graph Theory*. Boston, Addison-Wesley Publishing Company, 1969. 274 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1973. 300 p.).
16. Ershov Yu. L. *Problemy razreshimosti i konstruktivnye modeli* [Problems of Decidability and Constructive Models]. Moscow, Nauka. Fizmatlit, 1980. 416 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 16.01.2022
Принята к публикации / Accepted 17.02.2022
Опубликована / Published 30.11.2022

Научный отдел

МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 468–478
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 468–478
mmi.sgu.ru
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-468-478
EDN: RMHUQN

Научная статья
УДК 539.3

Динамическая термоустойчивость геометрически нерегулярной пологой оболочки постоянного кручения под действием периодической, по временной координате, нагрузки

Г. Н. Белосточный, С. А. Григорьев, Л. Ю. Коссович, О. А. Мыльцина✉

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Белосточный Григорий Николаевич, доктор технических наук, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, belostochny@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-4471-6599, AuthorID: 272714

Григорьев Степан Андреевич, аспирант кафедры математической теории упругости и биомеханики, kafedramtuibm@yandex.ru

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической теории упругости и биомеханики, president@sgu.ru, https://orcid.org/0000-0002-4775-7348, AuthorID: 2935

Мыльцина Ольга Анатольевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и стохастического анализа, omyltcina@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-4718-2772, AuthorID: 676590

Аннотация. В рамках модели типа Лява рассматривается геометрически нерегулярная изотропная пологая оболочка постоянного кручения. За основу берется строгая континуальная модель «оболочка – рёбра». Предполагается, что геометрически нерегулярная оболочка нагрета до постоянной температуры θ_0, два противоположных края подвергаются воздействию периодической, по временной координате, тангенциальной нагрузке, амплитуда и частота которой известны ($p(t) = p_0 \cos \vartheta t$). Задача

© Белосточный Г. Н., Григорьев С. А., Коссович Л. Ю., Мыльцина О. А., 2022

определения динамической неустойчивости термоупругой системы сводится к рассмотрению сингулярной системы трех дифференциальных уравнений динамической термоустойчивости геометрически нерегулярной оболочки в перемещениях, содержащих слагаемые с тангенциальными усилиями в форме Брайена. Эти усилия, возникающие в оболочке при ее нагреве, предварительно определяются на основе замкнутых решений сингулярной системы дифференциальных уравнений безмоментной термоупругости геометрически нерегулярной оболочки. Конкретизированная исходная система уравнений преобразуется в уравнения Матье, которые записаны в терминах классической атермической теории гладких пластин и содержат поправки на геометрические параметры — кривизну, относительную высоту подкрепляющих элементов, их число и температуру. Определяются первые три области динамической неустойчивости геометрически нерегулярной оболочки. Проводится количественный анализ влияния геометрических параметров упругой системы и температуры на конфигурацию областей динамической неустойчивости.

Ключевые слова: сингулярность, термоустойчивость, динамика, геометрическая нерегулярность, континуальная модель, уравнения Матье, замкнутые интегралы, области неустойчивости

Для цитирования: *Белосточный Г. Н., Григорьев С. А., Коссович Л. Ю., Мыльцина О. А.* Динамическая термоустойчивость геометрически нерегулярной пологой оболочки постоянного кручения под действием периодической, по временной координате, нагрузки // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 468–478. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-468-478, EDN: RMHUQN

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Dynamic thermal stability of a geometrically irregular shallow shell of constant torsion under the action of a load periodic by its time coordinate

G. N. Belostochny, **S. A. Grigoriev**, **L. Yu. Kossovich**, **O. A. Myltcina**✉

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Grigory N. Belostochny, belostochny@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-4471-6599, AuthorID: 272714
Stepan A. Grigoriev, kafedramtuibm@yandex.ru
Leonid Yu. Kossovich, president@sgu.ru, https://orcid.org/0000-0002-4775-7348, AuthorID: 2935
Olga A. Myltcina, omyltcina@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-4718-2772, AuthorID: 676590

Abstract. In the framework of a Love type model, a geometrically irregular isotropic shallow constant torsion shell is considered. It is based on a strict continuum-shell-rib model. It is assumed that the geometrically irregular shell is heated to a constant temperature θ_0, two opposite edges are exposed to a tangential load periodic by its time coordinate, the amplitude and frequency of which are known ($p(t) = p_0 \cos \vartheta t$). The problem of determining the regions of dynamic instability of a thermoelastic system is reduced to considering a singular system of three differential equations of dynamic thermal stability of a geometrically irregular shell in displacements containing a term with tangential forces in the Brian form. These forces arising in the shell during its heating are preliminarily determined on the basis of closed solutions of the

singular system of differential equations of the momentless thermoelasticity of the geometrically irregular shell. The specific initialized system of equations is transformed into the Mathieu equations, which are written in terms of the classical athermal theory of smooth plates containing corrections for geometric parameters — curvature, the relative height of the reinforcing elements, their number, and temperature. The first three regions of dynamic instability of a geometrically irregular shell are determined. A quantitative analysis of the influence of the geometric parameters of the elastic system and temperature on the configuration of the regions of dynamic instability is carried out.

Keywords: singularity, thermal stability, dynamics, geometric irregularity, continuum model, Mathieu equations, closed integrals, instability domains

For citation: Belostochny G. N., Grigoriev S. A., Kossovich L. Yu., Myltcina O. A. Dynamic thermal stability of a geometrically irregular shallow shell of constant torsion under the action of a load periodic by its time coordinate. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 468–478 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-468-478, EDN: RMHUQN

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Постановка задачи

На базе континуальной модели [1–3] рассмотрим геометрически нерегулярную пологую оболочку (ГНО) постоянного кручения, стандартным образом отнесенную к декартовым координатам [4], перекрывающую в координатной плоскости $\pi(xOy)$ прямоугольный план со сторонами a и b соответственно. Оболочка нагрета до постоянной температуры θ_0, на торцах оболочки, расположенных по координатным прямым $y = 0$ и $y = b$, действуют периодические по временной координате тангенциальные нагрузки заданной интенсивности $p(t) = p_0 \cos \vartheta t$.

Система сингулярных дифференциальных уравнений динамической термоустойчивости геометрически нерегулярной оболочки постоянного кручения в компонентах поля перемещений запишется в виде [3]

$$u_{,11} + \frac{1-\nu}{2} u_{,22} + \frac{1+\nu}{2} v_{,12} - (1-\nu) k_{12} w_{,2} + \\ + \underline{\varepsilon_1 \frac{1-\nu}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{h} a_i (u_{,2} + v_{,1} - 2k_{12} w)_{,2}\, \delta(x - x_i)} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1+\nu}{2} u_{,12} + v_{,22} + \frac{1-\nu}{2} v_{,11} - (1-\nu) k_{12} w_{,1} + \underline{\varepsilon_2 \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{h} a_i (v_{,2} + \nu u_{,1})_{,2}\, \delta(x - x_i)} = 0, \tag{2}$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w + 2 \frac{B}{D} (1-\nu) k_{12}^2 w - \frac{B}{D} k_{12} (u_{,2} + v_{,1}) - \\ - \frac{1}{D} \left((T_0^{11} w_{,1})_{,1} + (T_0^{22} w_{,2})_{,2} + (T_0^{12} w_{,1})_{,2} + (T_0^{21} w_{,2})_{,1} \right) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{h_i}{h} \right)^3 a_i \Phi_{3i} w_{,2222}\, \delta(x - x_i) + 2(1-\nu) \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{h_i}{h} \right)^3 a_i \Phi_{3i} w_{,122} \Big|_{x=x_i} \frac{d\delta(x - x_i)}{dx} + \\ + \frac{B}{D} \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{h} a_i 2(1-\nu) k_{12}^2 \delta(x - x_i) - \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{h} a_i (T_0^{22})_{,2}\, \delta(x - x_i) =$$

$$= -\frac{\gamma h}{gD} w_{,tt} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma h_i}{gD} a_i w_{,tt}\, \delta(x - x_i). \tag{3}$$

Здесь ε_j $(j = 1, 2)$ — знаковые числа, равные 0 или 1, ν — коэффициент Пуассона, k_{12} — параметр кривизны, $\overline{U}(u, v, w)$ — вектор перемещений, когда оболочка находится в моментном состоянии, $B = \frac{Eh}{1-\nu^2}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $\frac{h_i}{h}$ — отношение высоты i-го ребра к толщине оболочки, a_i — ширина i-го ребра, $\Phi_{3i} = 1 + 3\frac{h}{h_i} + 3\left(\frac{h}{h_i}\right)^2$, E — модуль Юнга, γ — удельный вес, g — интенсивность поля тяжести, $\delta(x - x_i)$ — обобщенная δ-функция Дирака.

Подчеркнутые слагаемые в уравнениях (1), (2) соответствуют в терминах дискретной модели [5] при $\varepsilon_j = 1$ учету «растяжения-сжатия» и «сдвига» ребер в тангенциальной плоскости, при $\varepsilon_j = 0$ работе ребер только на «изгиб» и «кручение». В [6] было показано, что подчеркнутые слагаемые не изменяют вида и значений областей динамической неустойчивости для пологой геометрически нерегулярной цилиндрической оболочки, поэтому получение таких областей для оболочки постоянного кручения проведено в случае работы ребер только на «изгиб» и «кручение».

2. Безмоментное состояние

Пусть T_0^{11}, T_0^{12}, T_0^{22} — тангенциальные усилия, возникающие в ГНО при нагреве и силовом воздействии на торцы в ее безмоментном состоянии, содержатся в форме Брайена. Отметим, что в уравнениях (1), (2) отсутствуют инерционные члены в тангенциальной плоскости оболочки [7, 8].

В случае краевых условий:

$$\begin{aligned} &\text{при } x = 0,\ x = a \quad u^0 = 0,\ T_0^{12} = 0, \\ &\text{при } y = 0,\ y = b \quad T_0^{22} = -p(t),\ T_0^{12} = 0, \end{aligned}$$

которые в перемещениях имеют вид

$$\begin{cases} \text{при } x = 0,\ x = a \quad u^0 = 0,\ u^0{}_{,2} + v^0{}_{,1} - 2k_{12} w^0 = 0; \\ \text{при } y = 0,\ y = b \quad v^0{}_{,2} + \nu u^0{}_{,1} = \alpha(1+\nu)\theta_0 - \dfrac{p(t)}{B},\ u^0{}_{,2} + v^0{}_{,1} - 2k_{12} w^0 = 0, \end{cases}$$

решение безмоментной термоупругости ГНО запишется [9–12]

$$u^0 = 0, \quad w^0 = 0, \quad v^0 = \alpha(1+\nu)\theta_0 y - 2\frac{p(t)}{B} y,$$

и, следовательно, тангенциальные усилия в уравнении (3) примут вид

$$T_0^{11} = -(1-\nu^2) B\alpha\theta_0 - \nu p(t), \quad T_0^{22} = -p(t), \quad T_0^{12} = 0. \tag{4}$$

Здесь $\overline{U}^0(u^0, v^0, w^0)$ — вектор перемещений в безмоментном состоянии ГНО, α — коэффициент линейного расширения материала.

3. Уравнения Матье

Решения системы (1)–(3) с учетом вида тангенциальных усилий (4), тождественно удовлетворяющих всем краевым условиям (для случая, когда ГНО находится в

моментном состоянии):

$$\begin{aligned}
&\text{при}\quad x=0,\, x=a \quad u=0,\ T^{12}=0,\ w=0,\ M^{11}=0\\
&\qquad (u=0,\ u_{,2}+v_{,1}-2k_{12}w=0,\ w=0,\ w_{,11}=0),\\
&\text{при}\quad y=0,\, y=b \quad T^{22}=0,\ T^{12}=0,\ w=0,\ M^{22}=0\\
&\qquad (v_{,2}+\nu u_{,1}=0,\ u_{,2}+v_{,1}-2k_{12}w=0,\ w=0,\ w_{,22}=0),
\end{aligned} \tag{5}$$

зададим в виде

$$u(x,y,t)=\sum_k\sum_m \widetilde{u}(t)\left(\frac{x}{a}\right)^{2k}\left(\frac{x}{a}-1\right)\left(\frac{y}{b}\right)^{3m}\left(\frac{y}{b}-1\right)^2, \tag{6}$$

$$v(x,y,t)=\sum_k\sum_m \widetilde{v}(t)\left(\frac{x}{a}\right)^{3k}\left(\frac{x}{a}-1\right)^2\left(\frac{y}{b}\right)^{3m}\left(\frac{y}{b}-1\right)^2, \tag{7}$$

$$w(x,y,t)=\sum_k\sum_m w_{km}(t)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}. \tag{8}$$

В условиях (5) в скобках приведена их запись в компонентах поля перемещений.

Подстановка (6)–(8) в уравнения системы (1)–(3) с последующим применением процедуры Галёркина приводит к трем уравнениям относительно переменных коэффициентов аппроксимирующих функций (6)–(8):

$$e_{11}\widetilde{u}+e_{12}\widetilde{v}=k_{12}ae_1w_{km}, \tag{9}$$

$$e_{21}\widetilde{u}+e_{22}\widetilde{v}=k_{12}ae_2w_{km}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma ha^4}{gD}\left(1+2\sum_{i=1}^n\widetilde{\beta}_i^s\right)\frac{d^2w_{km}}{dt^2}+\left\langle\left((k\pi)^2+\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2\right)^2+24(1-\nu)\left(\frac{\widetilde{\delta}}{h}\right)^2\left(\frac{a}{b}\right)^2-\right.\\
&-12(1-\nu^2)\left(\frac{a}{h}\right)^2\left[(k\pi)^2\left(\alpha\theta_0+\nu\frac{p(t)}{Eh}\right)+\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2\frac{p(t)}{Eh}\right]+\\
&+2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^4\sum_{i=1}^n\beta_i^s+4(1-\nu)(k\pi)^2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2\sum_{i=1}^n\beta_i^c+48(1-\nu)\left(\frac{\widetilde{\delta}}{h}\right)^2\left(\frac{a}{b}\right)^2\sum_{i=1}^n\widetilde{\beta}_i^s-\\
&\left.-24(1-\nu^2)\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2\frac{p(t)}{Eh}\sum_{i=1}^n\widetilde{\beta}_i^s\right\rangle w_{km}(t)-48(1-\nu)\frac{\widetilde{\delta}}{h}\frac{a}{h}\left(\frac{a}{b}\right)^2(I_9\widetilde{u}+I_{10}\widetilde{v})=0.
\end{aligned}$$

Здесь обозначено: $\frac{\widetilde{\delta}}{h}$ — относительная стрела подъема оболочки над ее планом при задании относительного параметра кривизны в виде [4,5] $k_{12}a=\frac{\widetilde{\delta}}{h}\frac{h}{a}\frac{a}{b}$, $e_{11}=2I_1+\frac{1-\nu}{2}I_2$, $e_{12}=\frac{1+\nu}{2}I_3$, $e_{21}=\frac{1+\nu}{2}I_5$, $e_{22}=I_6+\frac{1-\nu}{2}I_7$, $e_1=\frac{1-\nu}{k\pi}I_4$, $e_2=(1-\nu)I_8$, I_1–I_{10} интегралы, получаемые при непосредственном применении метода Галёркина.

Выражая из уравнений (9), (10) $\widetilde{u}$ и $\widetilde{v}$ через w_{km}:

$$\begin{cases}\widetilde{u}=e^1k_{12}aw_{km},\\ \widetilde{v}=e^2k_{12}aw_{km},\end{cases}$$

перепишем третье уравнение после ряда преобразований в виде

$$\frac{d^2w_{km}}{dt^2}+\frac{\left((k\pi)^2+\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2\right)^2}{\frac{\gamma ha^4}{gD}}\frac{f_2^{km}}{f_3^{km}}\times$$

$$\times\left(1-\frac{12(1-\nu^2)\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\nu(k\pi)^2+\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2\right)^2}{\left((k\pi)^2+\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2\right)^2}\frac{f_1^{km}}{f_2^{km}}\frac{p_0}{Eh}\cos\vartheta t\right)w_{km}=0. \qquad (11)$$

Это есть уравнения Матье [13,14], записанные в терминах классической атермической теории пластин с поправками на параметры: $\frac{\widetilde{\delta}}{h}$, $\frac{h_i}{h}$, n и θ_0. Здесь обозначено:

$$f_1^{km}=1+\frac{2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2\sum\limits_{i=1}^{n}\widetilde{\beta}_i^s}{\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2+\nu(k\pi)^2},\quad f_3^{km}=1+2\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\beta}_i^s, \qquad (12)$$

$$f_2^{km}=1+\frac{\Gamma_{km}\left(\frac{\widetilde{\delta}}{h}\right)^2(a/b)^2+\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i-12(1-\nu^2)(k\pi)^2\left(\frac{a}{h}\right)^2\alpha\theta_0}{\left((k\pi)^2+\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2\right)^2}, \qquad (13)$$

$$\Gamma_{km}=24(1-\nu)\left(1-2\frac{a}{b}\left(I_9e^1+I_{10}e^2\right)+2\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\beta}_i^s\right), \qquad (14)$$

$$\beta_i=2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^4\beta_i^s+4\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2(k\pi)^2(1-\nu)\beta_i^c,\ \beta_i^s=\left(\frac{h_i}{h}\right)^3\frac{a_i}{a}\Phi_{3i}\sin^2\frac{k\pi x_i}{a}, \qquad (15)$$

$$\beta_i^c=\left(\frac{h_i}{h}\right)^3\frac{a_i}{a}\Phi_{3i}\cos^2\frac{k\pi x_i}{a},\ \widetilde{\beta}_i^s=\frac{h_i}{h}\frac{a_i}{a}\sin^2\frac{k\pi x_i}{a}, \qquad (16)$$

$$e^1=\frac{e_1e_{22}-e_2e_{12}}{e_{11}e_{22}-e_{12}e_{21}},\ e^2=\frac{e_2e_{11}-e_1e_{21}}{e_{11}e_{22}-e_{12}e_{21}}. \qquad (17)$$

Следует отметить, что $\frac{\left((k\pi)^2+\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2\right)^2}{\frac{\gamma ha^4}{gD}}$ — квадрат частоты собственных колебаний гладкой пластинки [15, 16], $\frac{12(1-\nu^2)\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\nu(k\pi)^2+\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2\right)^2}{\left((k\pi)^2+\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2\right)^2}=\frac{Eh}{p_0^{\text{кр}}}$ — величина, обратная относительной критической нагрузке при статической потере устойчивости [17], $\mu_{km}=\frac{1}{2}\frac{p_0}{p_{\text{кр}}}$ — коэффициент возбуждения гладкой пластинки на базе атермической теории, предельное значение которого $\widetilde{\mu}_{km}=0,5$ [12, 18].

Приведенного уравнения (11) и формул (12)–(17) достаточно для определения влияния геометрических параметров на предельное значение коэффициента возбуждения и границы областей динамической неустойчивости при любых значениях k и m.

4. Области динамической неустойчивости

Границы первых трех областей неустойчивости [14] в системе $\left\{\mu_{km},\frac{\vartheta}{\omega_{km}}\right\}$ примут вид:

I область

$$\frac{\vartheta}{\omega_{km}}=2\sqrt{\frac{f_2^{km}}{f_3^{km}}\pm\frac{f_1^{km}}{f_3^{km}}\mu_{km}}, \qquad (18)$$

II область

$$\begin{cases}\frac{\vartheta}{\omega_{km}}=\sqrt{\frac{f_2^{km}}{f_3^{km}}-2\frac{\left(f_1^{km}\right)^2}{f_2^{km}f_3^{km}}\mu_{km}},\\ \frac{\vartheta}{\omega_{km}}=\sqrt{\frac{5}{8}\frac{f_2^{km}}{f_3^{km}}+\frac{1}{2}\frac{f_2^{km}}{f_3^{km}}\sqrt{\frac{9}{16}+\left(\frac{f_1^{km}}{f_2^{km}}\right)^2}\mu_{km}},\end{cases} \qquad (19)$$

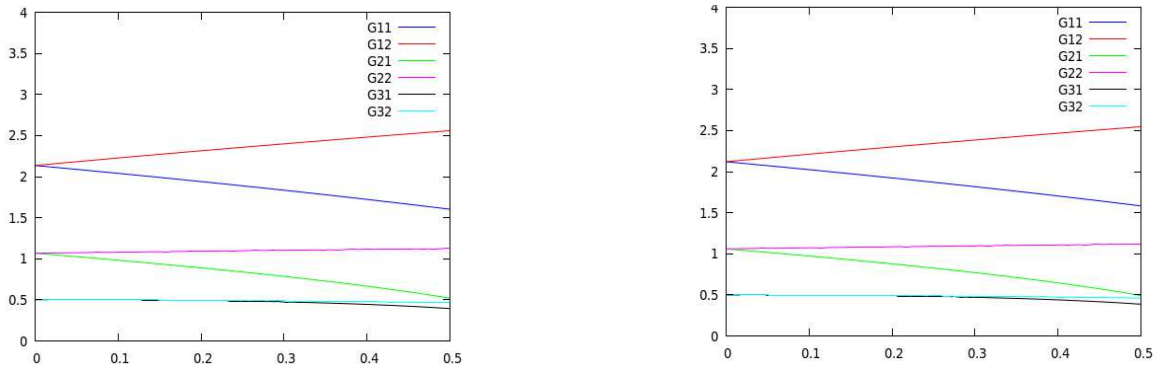
III область

$$\frac{\vartheta}{\omega_{km}} = \sqrt{\frac{f_2^{km}}{f_3^{km}}\left(\frac{10}{9} \pm \frac{f_1^{km}}{f_2^{km}}\mu_{km} - \sqrt{\left(\frac{10}{9} \pm \frac{f_1^{km}}{f_2^{km}}\mu_{km}\right)^2 - \frac{4}{9}\left(1 \pm \frac{f_1^{km}}{f_2^{km}}\mu_{km} - \left(\frac{f_1^{km}}{f_2^{km}}\mu_{km}\right)^2\right)}\right)}. \tag{20}$$

При построении первой и третьей областей «+» выбирается для ограничения областей динамической неустойчивости (ДН) сверху, а «−» — для ограничения снизу.

5. Анализ полученного решения и выводы

Количественные результаты, полученные на основании формул (12)–(17), (18)–(20), приводятся на рис. 1–3. На горизонтальной оси μ_{km}, а по вертикальной значения — отношения $\frac{\vartheta}{\omega_{km}}$. G_{ij} для случая $k = 1$, $m = 1$ и $G_{ij}(k, m)$ графики кривых ограничивающих области динамической неустойчивости ($i = 1, 2, 3$ — номер области, $j = 1, 2$ — номер кривой, где 1 — нижняя кривая, 2 — верхняя кривая).



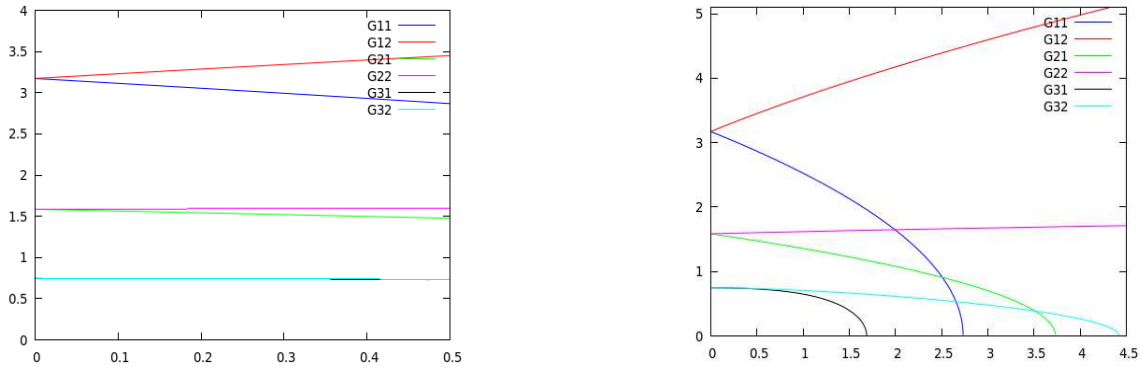
а / a *б / b*

Рис. 1. Построение областей динамической неустойчивости для параметров $n = 1$, $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 3$, $\frac{h_i}{h} = 2$ при разных температурах: *а* — $\theta_0 = 5$; *б* — $\theta_0 = 15$ (цвет online)

Fig. 1. Construction of dynamic instability regions for parameters $n = 1$, $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 3$, $\frac{h_i}{h} = 2$ at different temperatures: *a* is $\theta_0 = 5$; *b* is $\theta_0 = 15$ (color online)

Из рис. 1 следует, что конфигурации областей динамической неустойчивости малочувствительны к величине температуры (в предельных значениях не превышающих потерю статической термоустойчивости). Следует отметить важный факт, что при соответствующем выборе условий закрепления можно полностью избежать влияния температуры на области динамической неустойчивости, как и в случае с цилиндрической оболочкой [6].

Площади областей динамической неустойчивости существенно уменьшаются (как и предельные значения коэффициентов возбуждения) с увеличением параметров $\frac{h_i}{h}$, n и $\frac{\tilde{\delta}}{h}$ (рис. 1, *а* и 2, *а*) при прочих равных условиях, что согласуется с результатами, полученными для геометрически нерегулярной пластинки [9] и геометрически нерегулярной пологой цилиндрической оболочки [6].

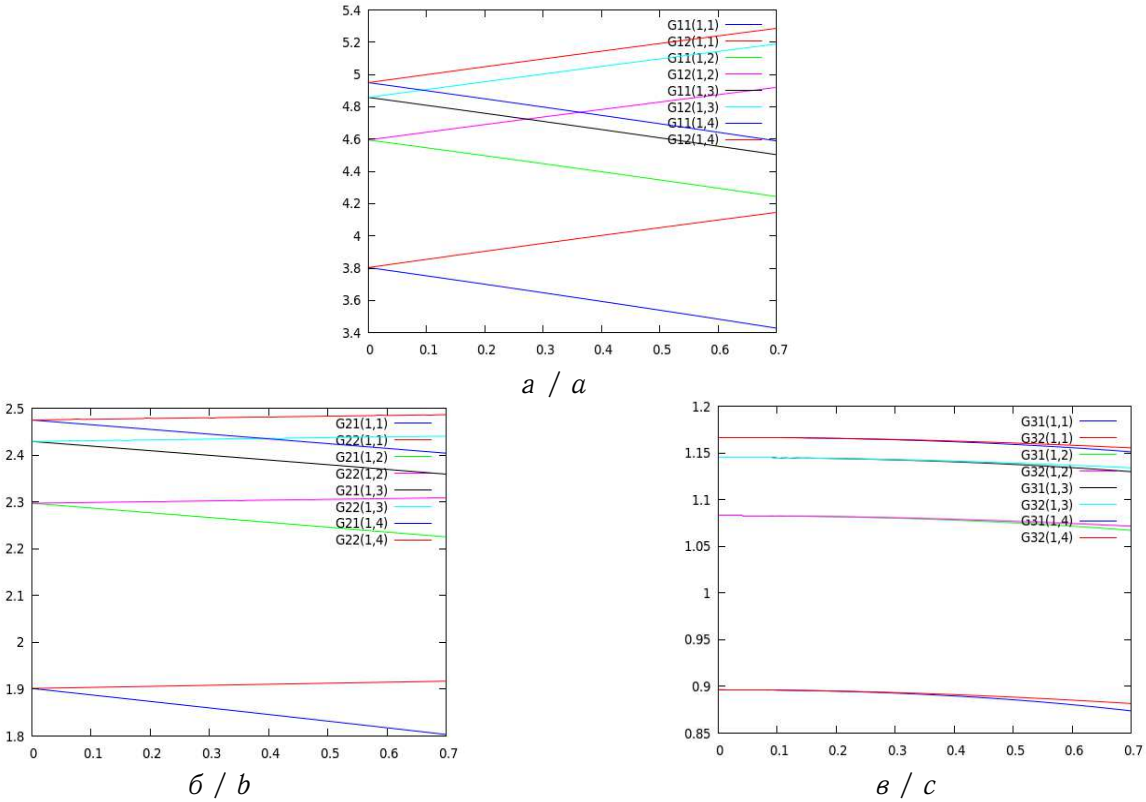


а / a *б / b*

Рис. 2. Построение области динамической неустойчивости при $n = 5$, $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5$, $\frac{h_i}{h} = 5$, $\theta_0 = 15$: *а* — $\mu \in [0; 0.5]$; *б* — $\mu \in [0; 4.5]$ (цвет online)

Fig. 2. Construction a dynamic instability region at $n = 5$, $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5$, $\frac{h_i}{h} = 5$, $\theta_0 = 15$: *a* is $\mu \in [0; 0.5]$; *b* is $\mu \in [0; 4.5]$ (color online)

При определенных значениях этих параметров наблюдается вырождение областей неустойчивости в скелетные линии [14] (см. рис. 2, *а*), хотя при больших значениях переменной μ_{km} вид кривых, ограничивающих области, довольно разнообразен, и наблюдается их наслаивание (см. рис. 2, *б*).



а / a

б / b *в / c*

Рис. 3. Области динамической неустойчивости *I* (*а*), *II* (*б*), *III* (*в*) для параметров $n = 5$, $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 1, \frac{h_i}{h} = 5$, $\theta_0 = 15$ (цвет online)

Fig. 3. Dynamic instability regions *I* (*a*), *II* (*b*), *III* (*c*) for parameters $n = 5$, $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 1, \frac{h_i}{h} = 5$, $\theta_0 = 15$ (color online)

Исследование областей ДН при изменении значений k и m (рис. 3) привело к следующим выводам:

1) вид областей ДН и их площади не изменяются при изменении значений k и m;

2) значения подъема области при $\mu_{km} = 0$ для каждого фиксированного k и с растущим m уменьшаются. Такое же поведение при фиксированном m (таблица).

Значения границ областей динамической неустойчивости при $\mu_{km} = 0$, $n = 5$, $\frac{h_i}{h} = 5$

Table. Values of the boundaries of the regions of dynamic instability at $\mu_{km} = 0$, $n = 5$, $\frac{h_i}{h} = 5$

k	1		2		7	
m	1	7	1	7	1	7
I область	3.80	5.04	2.78	4.91	1.97	3.78
II область	1.90	2.52	1.39	2.45	0.99	1.79
III область	0.89	1.18	0.66	1.16	0.46	0.89

Если следовать изменению номеров k и m как в [19], то проследить какие-то стабильные изменения в значениях отношений $\frac{\vartheta}{\omega_{km}}$ не представляется возможным.

Следует также отметить возможность «замены», как в случае цилиндрической оболочки [6], пологой гладкой оболочки постоянного кручения на геометрически нерегулярную пластину (и обратно), подбирая соответствующим образом значения параметров $\frac{h_i}{h}$, n и $\frac{\tilde{\delta}}{h}$.

Список литературы

1. *Жилин П. А.* Линейная теория ребристых оболочек // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1970. № 4. С. 150–162.
2. *Белосточный Г. Н., Ульянова О. И.* Континуальная модель композиции из оболочек вращения с термочувствительной толщиной // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2011. № 2. С. 32–40. EDN: NHLAIF
3. *Белосточный Г. Н., Русина Е. А.* Оболочки и геометрически нерегулярные пластинки с термочувствительной толщиной // Доклады РАЕН. Поволжское межрегиональное отделение. 1999. № 1. С. 28–37.
4. *Назаров А. А.* Основы теории и методы расчета пологих оболочек. Ленинград ; Москва : Стройиздат (Ленингр. отд-ние), 1965. 302 с.
5. *Рассудов В. М.* Деформации пологих оболочек, подкрепленных ребрами жесткости // Ученые записки Саратовского государственного университета. 1956. Т. 52. Вып. механический. С. 51–91.
6. *Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А.* Динамическая термоустойчивость геометрически нерегулярной пологой цилиндрической оболочки под действием периодической, по временной координате, нагрузки // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2020. Т. 24, вып. 3. С. 583–594. https://doi.org/10.14498/vsgtu1755, EDN: VBSTLY
7. *Огибалов П. М.* Вопросы динамики и устойчивости оболочек. Москва : Изд-во Московского ун-та, 1963. 417 с.
8. *Огибалов П. М., Грибанов В. Ф.* Термоустойчивость пластин и оболочек. Москва : Изд-во Московского ун-та, 1958. 520 с.
9. *Белосточный Г. Н.* Аналитические методы определения замкнутых интегралов сингулярных дифференциальных уравнений термоупругости геометрически нерегулярных оболочек // Доклады Академии военных наук. Поволжское отделение. 1999. № 1. С. 14–25.
10. *Белосточный Г. Н., Русина Е. А.* Динамическая термоустойчивость трансверсально-изотропных пластин под действием периодических нагрузок // Современные проблемы

нелинейной механики конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами : сб. науч. трудов межвуз. науч. конф. Саратов : Изд-во СГТУ, 2000. С. 175–180.
11. *Белосточный Г. Н., Цветкова О. А.* Геометрически нерегулярные пластинки под действием периодического по времени температурного поля // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во СГТУ, 2002. С. 64–72.
12. *Мыльцина О. А., Полиенко А. В., Белосточный Г. Н.* Динамическая устойчивость нагретых геометрически нерегулярных пластин на основе модели Рейснера // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2017, Т. 21, вып. 4. С. 760–772. https://doi.org/10.14498/vsgtu1579
13. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах. Москва : Изд-во иностранной литературы, 1953. 256 с.
14. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Москва : Гостехиздат, 1956. 600 с.
15. *Тимошенко С. П.* Теория колебаний в инженерном деле. Москва ; Ленинград : Гостехиздат, 1932. 344 с.
16. *Филиппов А. П.* Методы расчета сооружений на колебания. Москва ; Ленинград : Госстройиздат, 1940. 230 с.
17. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. Москва ; Ленинград : ОГИЗ — Гостехиздат, 1946. 532 с.
18. *Амбарцумян С. А.* Теория анизатропных пластин. Москва : Наука, 1967. 266 с.
19. *Бессонов Л. В.* Численная реализация метода последовательного возмущения параметров при расчете напряжённо-деформированного состояния оболочечной конструкции в случае жесткого закрепления краев оболочки // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 74–79. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-74-79

References

1. Zhilin P. A. The linear theory of ribbed shells. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Mekhanica tverdogo tela* [Mechanics of Solids], 1970, iss. 4, pp. 150–162 (in Russian).
2. Belostochnyi G. N., Ul'yanova O. I. Continuum model for a composition of shells of revolution with thermosensitive thickness. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, iss. 2, pp. 184–191. https://doi.org/10.3103/S0025654411020051, EDN: OHQLNX
3. Belostochnyi G. N., Rusina E. A. Shells and geometrically irregular plates with heat-sensitive thickness. *Doklady Rossiiskoy Akademii Estestvennykh Nauk*, 1999, iss. 1, pp. 28–37 (in Russian).
4. Nazarov A. A. *Osnovy teorii i metody rascheta pologikh obolochek* [Fundamentals of the Theory and Methods for Designing Shallow Shells]. Leningrad, Moscow, Strojizdat, 1965. 302 p. (in Russian).
5. Rassudov V. M. Deformations of gently sloping shells supported by stiffeners. *Uchenye Zapiski Saratovskogo Universiteta*, 1956, vol. 52, iss. Mechanical, pp. 51–91 (in Russian).
6. Belostochny G. N., Myltcina O. A. Dynamic thermal stability of heated geometrically irregular cylindrical shell under the influence of a periodic temporal coordinate load. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2020, vol. 24, iss. 3, pp. 583–594 (in Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1755, EDN: VBSTLY
7. Ogibalov P. M. *Voprosy dinamiki i ustoichivosti obolochek* [Problems in Dynamics and Stability of Shells]. Moscow, Moscow University Press, 1963. 417 p. (in Russian).
8. Ogibalov P. M., Gribanov V. F. *Termoustojchivost' plastin i obolochek* [Thermal Stability of Plates and Shells]. Moscow, Moscow University Press, 1958. 520 p. (in Russian).
9. Belostochny G. N. Analytical methods for determination of closed integrals of singular

differential equations of thermoelasticity of geometrically irregular shells. *Doklady Akademii Voennykh Nauk*, 1999, iss. 1, pp. 14–25 (in Russian).

10. Belostochny G. N., Rusina E. A. Dynamic thermal stability of transversal-isotropic plates under the action of periodic loads. In: *Sovremennye problemy nelineinoj mekhaniki konstruktsii, vzaimodejstvujushchikh s agressivnymi sredami* [Modern Problems of Nonlinear Mechanics of Structures Interacting with Aggressive Media]. Saratov, SSTU Publ., 2000, pp. 175–180 (in Russian).
11. Belostochny G. N., Tsvetkova O. A. Geometrically irregular plates under the action of a time-periodic temperature field. In: *Problemy prochnosti elementov konstruktsij pod dejstviem nagruzok i rabochikh sred* [Problems of Strength of Structural Elements Under the Influence of Loads and Working Media]. Saratov, SSTU Publ., 2002, pp. 64–72 (in Russian).
12. Myltcina O. A., Polienko A. V., Belostochny G. N. Dynamic stability of heated geometrically irregular plates on the basis of the Reisner model. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2017, vol. 21, iss. 4, pp. 760–772 (in Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1579
13. Stoker J. J. *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Sistems*. Wiley Classics Library. New York, Wiley, 1992. 296 p. (Russ. ed.: Moscow, IL, 1953. 256 p.).
14. Bolotin V. V. *The Dynamic Stability of Elastic Systems*. Holden-Day Series in Mathmatical Physics. San Francisco, London, Amsterdam, Holden-day, 1964. 452 p. (Russ. ed.: Moscow. Gostekhizdat, 1956. 600 p.).
15. Timoshenko S. P. *Vibration Problems in Engineering*. London, Constable. 1937. 497 p. (Russ. ed.: Moscow, Leningrad, Gostekhizdat, 1932. 344 p.).
16. Filippov A. P. *Metody rascheta sooruzheniy na kolebaniya* [Methods of Calculating Structures for Vibrations]. Moscow, Leningrad, Gosstroyizdat, 1940. 230 p. (in Russian).
17. Timoshenko S. P. *Ustoychivost' uprugikh sistem* [Stability of Elastic Systems]. Moscow, Leningrad, OGIZ — Gostekhizdat, 1946. 532 p. (in Russian).
18. Ambartsumian S. A. *Teorija anizotropnykh plastin* [Theory of Anisotropic Plates]. Moscow, Nauka, 1967. 266 p. (in Russian).
19. Bessonov L. V. Numerical implementation of method of subsequent perturbation of parameters for computation of stress-strain state of a shell rigidly fixed on the boundaries. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, iss. 1, pp. 74–79 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-74-79

Поступила в редакцию / Received 27.12.2021
Принята к публикации / Accepted 10.04.2022
Опубликована / Published 30.11.2022

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 479–493
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 479–493
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-479-493, EDN: JDIVGD

Научная статья
УДК 539.3

Контактная задача для функционально-градиентной ортотропной полосы

А. О. Ватульян[1], **Д. К. Плотников**[2]✉

[1]Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8-А
[2]Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра Российской академии наук, Россия, 362025, г. Владикавказ, ул. Ватутина, д. 53

Ватульян Александр Ованесович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории упругости, aovatulyan@sfedu.ru, https://orcid.org/0000-0003-0444-4496, AuthorID: 3469
Плотников Дмитрий Константинович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений, dustheap@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-2989-1949, AuthorID: 1037652

Аннотация. В рамках плоской задачи теории упругости исследована задача о равновесии функционально-градиентной ортотропной упругой полосы под действием штампа с гладким основанием. С помощью преобразования Фурье сформирована каноническая система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно трансформант компонент вектора смещений и тензора напряжений. Построена связь между вертикальным смещением и нормальным напряжением на границе, с помощью которой сформулировано интегральное уравнение первого рода с разностным ядром. Символ ядра интегрального уравнения построен численно с помощью метода пристрелки. На основе метода Вишика – Люстерника проведен асимптотический анализ символа ядра при больших значениях параметра преобразования. Построена вычислительная схема решения интегрального уравнения с неизвестной областью контакта на основе метода граничных элементов. Представлены результаты решения контактной задачи для разных законов неоднородности полосы.

Ключевые слова: контактная задача, функционально-градиентная полоса, ортотропный материал, асимптотический анализ, метод граничных элементов

Благодарности: Работа выполнена при частичной поддержке РНФ (проект № 22-11-00265).

Для цитирования: *Ватульян А. О., Плотников Д. К.* Контактная задача для функционально-градиентной ортотропной полосы // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 479–493. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-479-493, EDN: JDIVGD

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

© Ватульян А. О., Плотников Д. К., 2022

Article

Contact problem for functionally graded orthotropic strip

A. O. Vatulyan[1], **D. K. Plotnikov**[2]✉

[1]Southern Federal University, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, 8-A Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia
[2]Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, 53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia

Alexander O. Vatulyan, aovatulyan@sfedu.ru, https://orcid.org/0000-0003-0444-4496, AuthorID: 3469
Dmitry K. Plotnikov, dustheap@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-2989-1949, AuthorID: 1037652

Abstract. Within the framework of plane elasticity, the equilibrium problem for an inhomogeneous orthotropic elastic strip under the action of a stamp with a smooth base is investigated. Based on the Fourier transform, a canonical system of differential equations with variable coefficients with respect to transformants of the displacement vector and stress tensor components is constructed. A connection between the vertical displacement and the normal boundary stress is constructed, with which an integral equation of the first kind with a difference kernel is formulated. Using the shooting method, the kernel symbol for the integral equation of the contact problem is constructed numerically. Based on the Vishik – Lyusternik method, an asymptotic analysis of the kernel symbol for large values of the transformation parameter is carried out. A computational scheme for solving an integral equation with an unknown contact area is constructed. The solution of the contact problem for different laws of strip inhomogeneity is presented.
Keywords: contact problem, functionally graded strip, orthotropic material, asymptotic analysis, boundary element method
Acknowledgements: This work was partially supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00265).
For citation: Vatulyan A. O., Plotnikov D. K. Contact problem for functionally graded orthotropic strip. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 479–493 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-479-493, EDN: JDIVGD
This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

При изготовлении элементов конструкций ответственного назначения широко применяются различные технологии нанесения покрытий, которые позволяют придать конструктивным элементам желаемые свойства.

В настоящее время при изготовлении покрытий все чаще используются композиционные материалы, обладающие существенно неоднородными свойствами. Одним из направлений в конструировании неоднородных объектов является изготовление функционально-градиентных материалов (ФГМ), свойства которых изменяются по некоторому закону. Наиболее распространенным инструментом для оценки приповерхностных свойств новых материалов являются методы индентирования [1, 2]. Применение индентирования для оценки свойств неоднородных структур требует разработки новых эффективных методов моделирования контактного взаимодействия неоднородных тел.

Как правило, при описании деформирования покрытий используются модели полосы и полуплоскости, свойства которой изменяются в приповерхностном слое. Контактные задачи представляют собой один из разделов смешанных задач теории упругости и, как правило, сводятся к исследованию интегрального уравнения или системы интегральных уравнений первого рода со слабой особенностью. Одним из эффективных способов аналитического решения контактных задач являются асимптотические методы. В основополагающей работе в этом направлении [3] впервые был применен метод больших лямбда. В монографии [4] представлены общие вопросы контактного взаимодействия, методы исследования интегральных уравнений для малых и больших областей контакта (метод больших лямбда и метод малых лямбда).

В контактных задачах для неоднородных структур основная трудность состоит в том, что для произвольных законов неоднородности символы ядер интегральных операторов невозможно построить в явном виде. В [5] ряд результатов в рамках метода больших лямбда был распространен на неоднородную полосу. В основе решения задачи лежит аппроксимация символа ядра интегрального уравнения. В работах [6, 7] данный подход распространен на задачи для многослойных структур с неоднородным покрытием.

Другим способом исследования контактных задач является построение приближенных моделей деформирования неоднородных оснований. В [8] представлен ряд моделей контактного взаимодействия тел с тонкими покрытиями и прослойками. Монография [9] посвящена построению асимптотических моделей трехмерных контактных задач линейной теории упругости. В [10, 11] на основе гипотез о характере компонент поля смещений построены модели деформирования неоднородной упругой полосы, позволяющие рассматривать произвольные законы неоднородности, в том числе разрывные.

Также решение контактных задач может быть построено на основе численных методов. Отметим работу [12], где разработан численный метод нахождения распределения контактного давления между упругими телами, в том числе для полосы и штампа. В статьях [13, 14] представлены решения контактных задач для функционально-градиентных покрытий под действием штампа. В [15] исследована контактная задача для неоднородной упругой полосы, причем символ ядра проанализирован с помощью сочетания численных схем и асимптотического подхода, а решение интегрального уравнения получено с помощью метода граничных элементов.

Важное место в теории контактных задач для функционально-градиентных материалов занимают задачи, где учтены не только градиентность материала, но и анизотропия. В работе [16] исследована задача о действии жесткого штампа на анизотропное полупространство. В [17] представлено решение контактной задачи для ортотропного полупространства и жесткого штампа.

Среди работ, посвященных контактным задачам для анизотропной полосы, отметим [18–25].

В настоящей работе рассмотрена контактная задача для функционально-градиентной ортотропной упругой полосы и штампа с гладким основанием.

1. Постановка задачи

В рамках плоской задачи теории упругости рассмотрим задачу о контактном взаимодействии без трения функционально-градиентной ортотропной упругой полосы толщиной h и штампа с гладким основанием, внедряющегося в полосу под действием силы P. Нижняя граница полосы жестко сцеплена с недеформируемым основанием.

Коэффициенты тензора модулей упругости полосы C_{ij} являются произвольными функциями координаты x_3: $C_{ij} = C_{ij}(x_3)$, $x_3 \in [0, h]$, удовлетворяющими условиям положительной определенности упругой энергии.

Уравнения равновесия и определяющие соотношения для ортотропной полосы имеют вид

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{13,3} = 0,$$
$$\sigma_{13,1} + \sigma_{33,3} = 0.$$
$$\sigma_{11} = C_{11}(x_3)u_{1,1} + C_{13}(x_3)u_{3,3},$$
$$\sigma_{33} = C_{13}(x_3)u_{1,1} + C_{33}(x_3)u_{3,3},$$
$$\sigma_{13} = C_{55}(x_3)(u_{1,3} + u_{3,1}).$$

где u_i, σ_{ij} — компоненты вектора перемещений и тензора напряжений соответственно.

Граничные условия контактной задачи имеют вид

$$u_1(x_1, 0) = u_3(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{13}(x_1, h) = 0,$$
$$\sigma_{33}(x_1, h) = 0, \quad |x_1| > a, \quad u_3(x_1, h) = -\delta + f(x_1), \quad |x_1| \leqslant a, \tag{1}$$

где δ — глубина внедрения штампа, $2a$ — область контакта, а функция $f(x_1)$ характеризует основание штампа.

Постановку задачи замыкает условие равновесия штампа

$$P = \int\limits_{-a}^{a} q(x_1)dx_1, \quad q(x_1) = \sigma_{33}(x_1, h).$$

Введем безразмерные параметры следующим образом:

$$\xi_i = x_i/h, \quad \hat{u}_i = u_i/h, \quad \hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/C_0, \quad i, j = 1, 3,$$
$$\beta = a/h, \quad \hat{\delta} = \delta/h, \quad \hat{f} = f/h,$$
$$C_{ij} = C_0\hat{C}_{ij}(\xi_3), \quad \hat{P} = P/C_0h, \quad \hat{q} = q/C_0,$$

где C_0 – характерное значение C_{55}, например среднее значение на отрезке $[0, h]$:

$$C_0 = \frac{1}{h}\int\limits_0^h C_{55}(x_3)dx_3.$$

Для удобства далее опустим символ «ˆ». Стандартной схемой решения контактной задачи является сведение ее к интегральному уравнению с разностным ядром относительно контактного давления. Поскольку коэффициенты дифференциального оператора являются переменными, то такая схема может быть реализована на основе численного решения вспомогательной задачи.

2. Вспомогательная задача о действии нормальной нагрузки

Рассмотрим вспомогательную задачу о действии нормальной нагрузки $q(\xi_1)$, локализованной на отрезке $[-\beta, \beta]$ верхней границы полосы. Применяя преобразование Фурье по координате ξ_1, получим каноническую систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно трансформант компонент смещений и напряжений в виде

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X}, \qquad X_1 = i\tilde{u}_1, \quad X_2 = \tilde{u}_3, \quad X_3 = i\tilde{\sigma}_{13}, \quad X_4 = \tilde{\sigma}_{33}, \tag{2}$$

где $\tilde{u}_i$, $\tilde{\sigma}_{ij}$ — символы Фурье компонент вектора перемещений и тензора напряжений.

Коэффициенты матрицы A зависят от законов неоднородности полосы и определяются формулой

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \dfrac{1}{C_{55}} & 0 \\ \alpha\dfrac{C_{13}}{C_{33}} & 0 & 0 & \dfrac{1}{C_{33}} \\ \alpha^2\dfrac{C_{11}C_{33} - C_{13}^2}{C_{33}} & 0 & 0 & -\alpha\dfrac{C_{13}}{C_{33}} \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Граничные условия вспомогательной задачи в трансформантах примут вид

$$X_1(\alpha, 0) = 0, \quad X_2(\alpha, 0) = 0, \quad X_3(\alpha, 1) = 0, \quad X_4(\alpha, 1) = Q(\alpha), \tag{3}$$

где $Q(\alpha)$ — трансформанта Фурье нормальной нагрузки:

$$Q(\alpha) = \int\limits_{-\beta}^{\beta} q(\xi_1)\exp(i\alpha\xi_1)d\xi_1.$$

В ряде работ [7, 26] подобные канонические системы строились относительно других характеристик, тогда коэффициенты матрицы A содержат производные от законов неоднородности полосы и не могут быть использованы для кусочно-непрерывных законов неоднородности.

Решение краевой задачи (2), (3) построим численно с помощью метода пристрелки [27]. Для оператора (2) сформулируем следующие вспомогательные задачи Коши:

$$X_1^{(1)}(\alpha, 0) = 0, \quad X_2^{(1)}(\alpha, 0) = 0, \quad X_3^{(1)}(\alpha, 0) = 1, \quad X_4^{(1)}(\alpha, 0) = 0,$$

$$X_1^{(2)}(\alpha, 0) = 0, \quad X_2^{(2)}(\alpha, 0) = 0, \quad X_3^{(2)}(\alpha, 0) = 0, \quad X_4^{(2)}(\alpha, 0) = 1.$$

Решение краевой задачи (2), (3) представим в виде линейной комбинации решений вспомогательных задач Коши

$$X_j(\alpha, \xi_3) = c_1 X_j^{(1)}(\alpha, \xi_3) + c_2 X_j^{(2)}(\alpha, \xi_3), \quad j = \overline{1, 4}.$$

Неизвестные c_1 и c_2 найдем, удовлетворяя краевым условиям (3) при $\xi_3 = 1$. Окончательно решение вспомогательной краевой задачи получим в виде

$$X_j(\alpha, \xi_3) = \left(X_3^{(2)}(\alpha, 1)X_j^{(1)}(\alpha, \xi_3) - X_3^{(1)}(\alpha, 1)X_j^{(2)}(\alpha, \xi_3)\right)\Delta^{-1}(\alpha)Q(\alpha),$$
$$\Delta(\alpha) = X_3^{(1)}(\alpha, 1)X_4^{(2)}(\alpha, 1) - X_3^{(2)}(\alpha, 1)X_4^{(1)}(\alpha, 1).$$

Для нахождения оригиналов компонент вектора перемещения осуществим обратное преобразование Фурье. Вертикальная компонента поля смещений определяется формулой

$$\hat{u}_3(\xi_1, \xi_3) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} X_2(\alpha, \xi_3)e^{-i\alpha\xi_1}d\alpha. \tag{4}$$

3. Формулировка интегрального уравнения и его исследование

На основе (4) и граничных условий (1) сформулируем интегральное уравнение контактной задачи в виде

$$\int\limits_{-\beta}^{\beta} k(\eta-\xi_1)\hat{q}(\eta)d\eta = -\delta_* + \gamma(\xi_1), \quad |\xi_1| \leqslant \beta, \tag{5}$$

причем ядро интегрального уравнения имеет вид

$$k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha)e^{i\alpha t}d\alpha, \qquad t = \eta - \xi_1,$$

где символ ядра $K(\alpha)$ — передаточная функция, являющаяся мероморфной и связывающая трансформанты вертикального смещения и нагрузки

$$X_2(\alpha,1) = K(\alpha)Q(\alpha).$$

Она определяется через решения вспомогательных задач равенством

$$K(\alpha) = \left(X_3^{(2)}(\alpha,1)X_2^{(1)}(\alpha,1) - X_3^{(1)}(\alpha,1)X_2^{(2)}(\alpha,1)\right)\Delta^{-1}(\alpha).$$

Символ ядра интегрального уравнения играет ключевую роль при исследовании контактных задач. Нетрудно показать, меняя в (2) α на $-\alpha$, что для любых законов неоднородности $K(\alpha)$ является четной функцией, т. е. $K(-\alpha) = K(\alpha)$.

Проведем асимптотический анализ передаточной функции при малых и больших значениях параметра преобразования α. Для удобства рассмотрим краевую задачу (2), (3), полагая $Q(\alpha) = 1$, что соответствует действию сосредоточенной силы в точке $\xi_1 = 0$ верхней границы полосы. Тогда краевые условия примут вид

$$X_1(\alpha,0) = 0, \quad X_2(\alpha,0) = 0, \quad X_3(\alpha,1) = 0, \quad X_4(\alpha,1) = 1. \tag{6}$$

4. Анализ символа ядра при малых значениях параметра преобразования

Представим решение краевой задачи (2), (6) при малых значениях α в виде регулярных разложений

$$X_j(\alpha,\xi_3) = X_{j0}(\xi_3) + \alpha X_{j1}(\xi_3) + \alpha^2 X_{j2}(\xi_3) + \dots + \alpha^m X_{jm}(\xi_3) + \dots \tag{7}$$

Подставляя (7) в каноническую систему (2), составляя и решая краевые задачи при одинаковых степенях α, найдем главные члены разложения в виде

$$X_{10}(\xi_3) = 0, \quad X_{20}(\xi_3) = \int\limits_0^{\xi_3} \frac{d\tau}{C_{33}(\tau)}, \quad X_{30}(\xi_3) = 0, \quad X_{40}(\xi_3) = 1,$$

$$X_{11}(\xi_3) = -\int\limits_0^{\xi_3}\int\limits_0^{\tau} \frac{d\eta}{C_{33}(\eta)}d\tau, \quad X_{21}(\xi_3) = 0,$$

$$X_{31}(\xi_3) = -\int\limits_1^{\xi_3} \frac{C_{13}(\tau)}{C_{33}(\tau)}d\tau, \quad X_{41}(\xi_3) = 0,$$

а для $m \geqslant 2$ X_{jm} определяются рекуррентным образом согласно формулам

$$X_{1m}(\xi_3) = -\int\limits_0^{\xi_3} X_{2(m-1)}(\tau)d\tau +$$

$$+\int\limits_0^{\xi_3} \frac{1}{C_{55}(\tau)} \int\limits_1^{\tau} \left[\frac{C_{11}(\eta)C_{33}(\eta) - C_{13}^2(\eta)}{C_{33}(\eta)} X_{1(m-2)}(\eta) - \frac{C_{13}(\eta)}{C_{33}(\eta)} X_{4(m-1)}(\eta)\right] d\eta d\tau,$$

$$X_{2m}(\xi_3) = \int\limits_0^{\xi_3} \left[\frac{C_{13}(\tau)}{C_{33}(\tau)} X_{1(m-1)}(\tau)d\tau + \int\limits_1^{\tau} X_{3(m-1)}(\eta)d\eta\right] d\tau,$$

$$X_{3m}(\xi_3) = \int\limits_1^{\xi_3} \left[\frac{C_{11}(\tau)C_{33}(\tau) - C_{13}^2(\tau)}{C_{33}(\tau)} X_{1(m-2)}(\tau)d\tau - \frac{C_{13}(\tau)}{C_{33}(\tau)} X_{4(m-1)}(\tau)\right] d\tau,$$

$$X_{4m}(\xi_3) = \int\limits_1^{\xi_3} X_{3(m-1)}(\tau)d\tau.$$

Тогда передаточная функция для малых значений параметра α с учетом четности может быть записана в виде

$$K(\alpha) = X_2(\alpha, 1) = X_{20}(1) + \alpha^2 X_{22}(1) + \cdots + \alpha^m X_{2m}(1) + \ldots,$$

причем главный член разложения имеет вид

$$X_{20}(1) = \int\limits_0^1 \frac{1}{C_{33}(\tau)} d\tau.$$

5. Анализ символа ядра при больших значениях параметра преобразования

В случае больших значений параметра преобразования Фурье каноническая система представляет собой краевую задачу для векторного уравнения с малым параметром при старшей производной. Численный анализ такой системы наталкивается на определенные трудности, и поэтому далее построим асимптотику символа ядра с помощью асимптотического метода. Исследование символа ядра при больших α проведем на основе метода Вишика – Люстерника [28]. В работе [15] была исследована каноническая система вида (2) в изотропном случае, и главные члены асимптотики символа ядра при больших значениях параметра преобразования были построены на основе анализа решения задачи для однородной полосы. В настоящей работе представлен более простой способ получения асимптотик. Произведем в (2) замену

$$Y_1 = \alpha X_1, \quad Y_2 = \alpha X_2, \quad Y_3 = X_3, \quad Y_4 = X_4. \tag{8}$$

Тогда каноническая система примет вид $\mathbf{Y}' = \alpha A_1 \mathbf{Y}$, где коэффициенты матрицы

A_1 не зависят от α и имеют вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dfrac{1}{C_{55}} & 0 \\ \dfrac{C_{13}}{C_{33}} & 0 & 0 & \dfrac{1}{C_{33}} \\ \dfrac{C_{11}C_{33} - C_{13}^2}{C_{33}} & 0 & 0 & -\dfrac{C_{13}}{C_{33}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для проведения асимптотического анализа передаточной функции при больших α достаточно построить погранслойное решение краевой задачи в окрестности $\xi_3 = 1$. Решение краевой задачи при больших положительных α ($\alpha > 0$) в окрестности $\xi_3 = 1$ представим в виде

$$Y = v_0 + \frac{1}{\alpha} v_1 + \frac{1}{\alpha^2} v_2 + \dots$$

Ограничимся построением главного члена асимптотического разложения (8), который согласно методу Вишика – Люстерника может быть найден из решения задачи Коши для системы с постоянными коэффициентами вида

$$v_0'(\eta) = A_2 v_0(\eta), \quad v_{03}(0) = 0, \quad v_{04}(0) = 1, \qquad \eta = \alpha(1 - \xi_3), \tag{9}$$

где $A_2 = -\, A_1|_{\xi_3=1}$.

Пусть λ_j — собственные числа матрицы A_2, выберем из них λ_1, λ_2 такие, что $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$, $\mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$. Будем строить погранслойные решения, убывающие внутрь полосы. Получим решение в виде

$$v_0(\eta) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} a_1 e^{\lambda_1 \eta} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} a_2 e^{\lambda_2 \eta},$$

где векторы a_j имеют вид

$$a_j = \left(\frac{C_{13} + \lambda_j^2 C_{33}}{C_{11}C_{33} - C_{13}^2}\bigg|_{\xi_3=1}, -\frac{C_{11} + \lambda_j^2 C_{13}}{\lambda_j (C_{11}C_{33} - C_{13}^2)}\bigg|_{\xi_3=1}, -\lambda_j, 1 \right)^T.$$

Структура символа ядра при больших значениях параметра преобразования α ($\alpha > 0$) определяется формулой

$$K(\alpha) = \frac{1}{\alpha} v_0(0) + \frac{1}{\alpha^2} v_1(0) + \frac{1}{\alpha^3} v_2(0) + \dots$$

С учетом четности передаточной функции асимптотика $K(\alpha)$ при больших значениях α может быть записана в виде

$$K(\alpha) = C|\alpha|^{-1} + o(|\alpha|^{-1}), \tag{10}$$

причем главный член асимптотики в (10) находится в аналитическом виде

$$C = \sqrt{\frac{2(C_2 - \sqrt{C_1})}{C_1}} \cdot \frac{C_{11}}{C_{11}C_{33} - C_{13}^2}\bigg|_{\xi_3=1}, \quad C_1 = \frac{C_{11}}{C_{33}}, \quad C_2 = -\frac{C_{11}C_{33} - C_{13}^2 - 2C_{13}C_{55}}{C_{33}C_{55}}. \tag{11}$$

Отметим, что при переходе к изотропному случаю главный член асимптотики (10) определяется формулой

$$C = \left.\frac{\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}}{2\hat{\mu}(\hat{\lambda} + \hat{\mu})}\right|_{\xi_3=1},$$

где $\hat{\lambda}$, $\hat{\mu}$ – безразмерные параметры Ламе полосы, что соответствует результатам асимптотического анализа, проведенного в [15].

В таблице представлены значения упругих модулей полосы C_{ij} в размерном виде, главного члена асимптотики (10) и собственные числа матрицы A_2 $(\lambda_1, \lambda_2 : \mathrm{Re}(\lambda_1) < 0, \mathrm{Re}(\lambda_2) < 0)$ для некоторых минералов.

Упругие постоянные C_{ij} (10^9 Н/м^2), собственные числа матрицы A_2 (9), коэффициент C (11)

Table. Elastic constants C_{ij} (10^9 N/m^2), eigenvalues of matrix A_2 (9), coefficient C (11)

Минерал	C_{11}	C_{33}	C_{55}	C_{13}	λ_1	λ_2	C
Топаз	282.0	295.0	133.0	85.0	-0.910 $+0.386i$	-0.910 $-0.386i$	0.919
Ангидрит	93.8	112.0	26.5	15.2	-0.537	-1.703	0.592
Сера	24.0	48.3	8.7	17.1	-0.831 $+0.117i$	-0.831 $-0.117i$	0.568
Барит	89.0	107.0	28.1	31.7	-0.685	-1.331	0.649
Целестин	104.4	128.6	27.9	60.5	-0.946 $+0.073i$	-0.946 $-0.073i$	0.627
Вольфрамит	176.7	233.1	63.1	79.6	-0.926 $+0.117i$	-0.926 $-0.117i$	0.680
Сегнетова соль	25.5	37.1	3.2	11.6	-0.336	-2.465	0.341

6. Решение интегрального уравнения. Метод граничных элементов

Ввиду четности функций $K(\alpha)$ и $q(\xi_1)$ интегральное уравнение (5) может быть представлено в виде

$$\int_0^\beta k_1(\eta, \xi_1) q(\eta) d\eta = -\delta_* + \gamma(\xi_1), \quad 0 \leqslant \xi_1 \leqslant \beta, \tag{12}$$

где $k_1(\eta, \xi_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K(\alpha) \left[\cos(\alpha(\eta + \xi_1) + \cos(\alpha(\eta - \xi_1))\right] d\alpha$.

Решение (12) построим численно с помощью метода граничных элементов [29]. Разобьем отрезок интегрирования $[0, \beta]$ на N отрезков $\Delta_j = [\eta_j, \eta_{j+1}]$, на каждом из которых искомая функция считается постоянной и равной q_j, и потребуем выполнения (12) в точках коллокаций $\xi_{1j} = (\eta_j + \eta_{j+1})/2$.

После дискретизации получим систему линейных алгебраических уравнений относительно узловых неизвестных q_j в виде

$$\sum_{j=1}^{N} H_{jm} q_j = g_m, \quad m = 1..N, \quad g_m = -\delta_* + \gamma(\xi_m), \tag{13}$$

где

$$H_{jm} = \frac{1}{\pi}\int_0^b \frac{K(\alpha)}{\alpha}\left[\sin(\alpha(\eta+\xi_1)+\sin(\alpha(\eta-\xi_1))\right]d\alpha+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_b^\infty \frac{C}{\alpha^2}\left[\sin(\alpha(\eta+\xi_1)+\sin(\alpha(\eta-\xi_1))\right]d\alpha. \qquad (14)$$

В контактных задачах для штампа с гладким основанием область контакта не известна и зависит от глубины внедрения. Как правило, при реализации вычислительных схем решения интегральных уравнений в контактных задачах задаются значения глубины внедрения штампа или действующей на него силы, а затем определяется величина области контакта, которая нелинейным образом зависит от задаваемых величин. В ряде работ определение величины области контакта строится с помощью итерационного процесса, в котором начальная область контакта полагается заведомо большей, чем действительная, а затем уточняется на каждом шаге из условия неотрицательности контактного давления.

При реализации вычислительной схемы, построенной в настоящей работе, задается значение β, а величина внедрения определяется из условия равенства нулю контактного давления на границах контактной области, которое после дискретизации является условием равенства нулю узлового значения q_N искомой функций вблизи границы контакта и может быть записано в виде

$$\Delta_N = 0, \qquad (15)$$

где Δ_N — определитель матрицы, получающейся заменой N-го столбца матрицы H на вектор-столбец g. Отметим, что параметр δ_* входит в правые части интегральных уравнений линейно, и уравнение (15) является линейным алгебраическим уравнением относительно δ_*, что позволяет просто найти связь $\delta_*(\beta)$.

При вычислении коэффициентов алгебраической системы (13) интегрирование по отрезку $[0, b]$ в (14) осуществляется с помощью квадратурных формул Гаусса, а значения интегралов на полуинтервале $[b, \infty)$ представляются через специальные функции.

7. Результаты вычислительных экспериментов

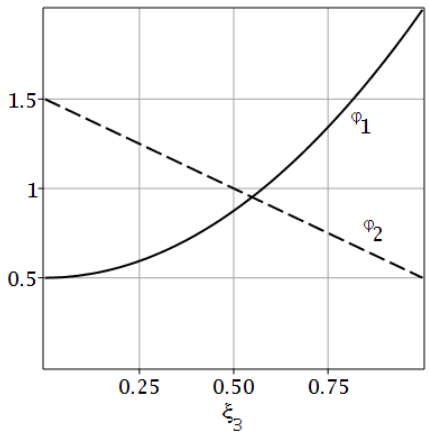


Рис. 1. Законы неоднородности полосы

Fig. 1. Band inhomogeneity laws

Ниже представлены некоторые результаты вычислительных экспериментов. Упругие модули полосы зависят от координаты ξ_3:

$$C_{ij} = \varphi_k(\xi_3)c_{ij}, \quad k = 1, 2,$$

что при $\varphi(\xi_3) \equiv 1$ соответствует аустенитной стали со следующими значениями параметров $c_{11} = 2.036$, $c_{13} = 1.124$, $c_{33} = 1.674$. В качестве законов неоднородности полосы (рис. 1) рассмотрены:
1) квадратичные возрастающие $\varphi_1(\xi_3) = 1.5\xi_3^2 + 0.5$;
2) линейные убывающие $\varphi_2(\xi_3) = -\xi_3 + 1.5$.

Причем средние значения законов неоднородности равны

$$\int_0^1 \varphi_1(\xi_3)d\xi_3 = \int_0^1 \varphi_2(\xi_3)d\xi_3 = 1.$$

Решения задачи построены для различных конфигураций граничных элементов. Проведено сравнение значений контактного давления в общих для разных разбиений точках коллокации. Проведенный анализ показал сходимость вычислительной схемы при увеличении количества отрезков разбиения. Более эффективным является построение неравномерной сетки граничных элементов со сгущением вблизи границ области контакта.

На рис. 2, 3 представлены решения контактных задач для законов неоднородности 1 и 2. На рис. 2 кривые соответствуют различному количеству граничных элементов: кружочками обозначено решение для неравномерной сетки со сгущением вблизи границ области контакта при $N = 10$, остальные кривые соответствуют равномерному разбиению ($N = 10, 30, 90$). Распределение контактного давления для разных законов построено при одинаковом значении внедрения $\delta_* = 0.01$. Контактное давление достигает наибольшей величины для закона, имеющего большее значение на верхней границе полосы.

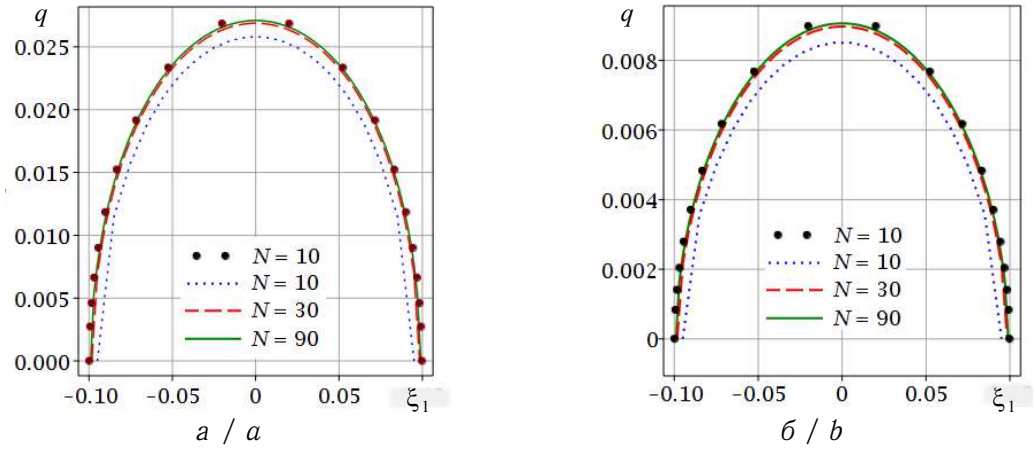


Рис. 2. Контактное давление под штампом: *а* — закон 1, *б* — закон 2 (цвет online)

Fig. 2. Contact pressure under the stamp: *a* is law 1, *b* is law 2 (color online)

На рис. 3 представлены результаты вычислительных экспериментов, построенные для штампа с основанием параболической формы $\gamma(\xi_1) = \xi_1^2/2r$ при значениях параметров: $r = 5$, $N = 30$, $l_n/l_1 = 0.01$, l_p — длина отрезка Δ_p.

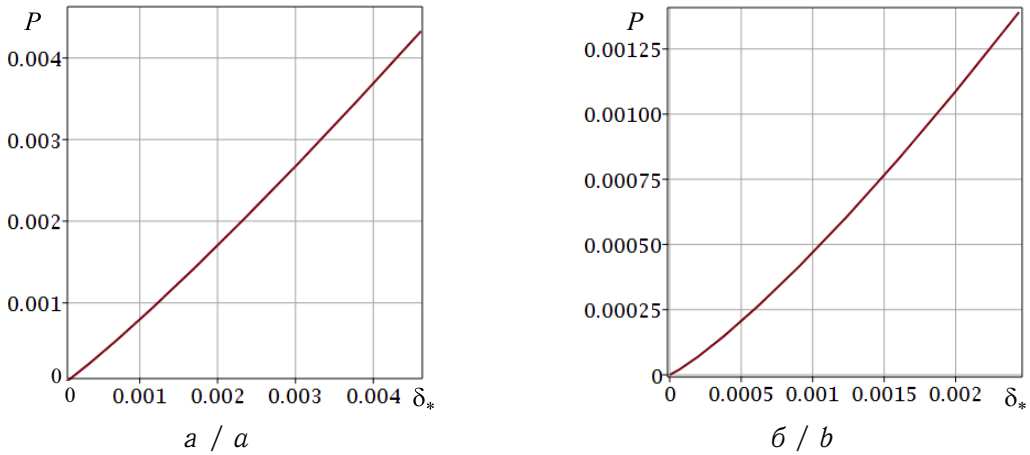


Рис. 3. Зависимость сила – внедрение: *а* — закон 1, *б* — закон 2

Fig. 3. The force – intrusion dependence: *a* is law 1, *b* is law 2

Заключение

Исследована контактная задача для функционально-градиентной ортотропной упругой полосы и штампа с гладким основанием. Проведен асимптотический анализ символа ядра интегрального уравнения контактной задачи при малых и больших значениях параметра преобразования. Показано, что значение символа ядра в нуле, характеризующее среднее значение контактного давления, определяется среднеинтегральным значением податливости полосы, а поведение на бесконечности, определяющее структуру контактного давления у границ области контакта, определяется значениями упругих модулей на верхней границе полосы. Представлена вычислительная схема решения интегрального уравнения контактной задачи, позволяющая исследовать задачи с переменной областью контакта, не прибегая к затратной схеме ее определения в расширенной области. Построены основные характеристики контактного взаимодействия для различных законов неоднородности.

Список литературы

1. *Головин Ю. И.* Наноиндентирование и механические свойства твердых тел в субмикрообъемах, тонких поверхностных слоях и пленках // Физика твердого тела. 2008. Т. 50, № 12. С. 2113–2142. EDN: RCRLTN
2. *Epshtein S. A., Borodich F. M., Bull S. J.* Evaluation of elastic modulus and hardness of highly inhomogeneous materials by nanoindentation // Applied Physics A. 2015. Vol. 119, iss. 1. P. 325–335. https://doi.org/10.1007/s00339-014-8971-5
3. *Ворович И. И., Устинов Ю. А.* О давлении штампа на слой конечной толщины // Прикладная математика и механика. 1959. Т. 23, № 3. С. 445–455.
4. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. Москва : Наука, 1974. 456 с.
5. *Бабешко В. А.* Асимптотические свойства решений одного класса интегральных уравнений, возникающих в теории упругости и математической физике // Доклады АН СССР. 1969. Т. 186, № 6. С. 1273–1276.
6. *Александров В. М., Бабешко В. А.* Контактные задачи для упругой полосы малой толщины // Известия Аакадемии наук СССР. Механика. 1965. № 2. С. 95–107.
7. *Айзикович С. М., Александров В. М., Белоконь А. В., Кренев Л. И., Трубчик И. С.* Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. Москва : Физматлит, 2006. 240 с. EDN: OPWVHF
8. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. Москва : Наука, 1983. 488 с.
9. *Аргатов И. И.* Асимптотические модели упругого контакта. Санкт-Петербург : Наука, 2005. 447 с. EDN: QJQFGH
10. *Ватульян А. О., Плотников Д. К.* Об одной модели индентирования функционально-градиентной полосы // Доклады Академии наук. 2019. Т. 485, № 5. С. 564–567. https://doi.org/10.31857/S0869-56524855564-567
11. *Ватульян А. О., Плотников Д. К., Поддубный А. А.* О некоторых моделях индентирования функционально-градиентных покрытий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 421–432. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-421-432
12. *Conway H. D., Vogel S. M., Farnham K. A., So S.* Normal and shearing contact stresses in indented strip and slabs // International Journal of Engineering Science. 1966. Vol. 4, iss. 4. P. 343–359. https://doi.org/10.1016/0020-7225(66)90036-X
13. *Волков С. С., Васильев А. С, Айзикович С. М., Селезнев Н. М., Леонтьева А. В* Напряженно-деформированное состояние упругого мягкого функционально-градиентного покрытия при внедрении сферического индентора // Вестник Пермского национального

исследовательского политехнического университета. Механика. 2016. № 4. С. 20–34. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.4.02

14. *Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M.* Approximated analytical solution of contact problem on indentation of elastic half-space with coating reinforced with inhomogeneous interlayer // Физика и механика материалов. 2018. Т. 35, вып. 1. С. 175–180. https://doi.org/10.18720/MPM.3512018_20
15. *Ватульян А. О., Плотников Д. К.* К исследованию контактной задачи для неоднородной упругой полосы // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85, № 3. С. 283–293. https://doi.org/10.31857/S0032823521030103
16. *Ватульян А. О.* О действии жесткого штампа на анизотропное полупространство // Статические и динамические смешанные задачи теории упругости / отв. ред. И. И. Ворович. Ростов-на-Дону : Изд-во Ростовского ун-та, 1983. С. 112–115. EDN: XQUWZM
17. *Пожарский Д. А.* Контактная задача для ортотропного полупространства // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2017. № 3. С. 100–108. EDN: YQQEKT
18. *Batra R. C., Jiang W.* Analytical solution of the contact problem of a rigid indenter and an anisotropic linear elastic layer // International Journal of Solids and Structures. 2008. Vol. 45, iss. 22–23. P. 5814–5830. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.06.016
19. *Erbaş B., Yusufoğlu E., Kaplunov J.* A plane contact problem for an elastic orthotropic strip // Journal of Engineering Mathematics. 2011. Vol. 70. P. 399–409. https://doi.org/10.1007/s10665-010-9422-8
20. *Greenwood J. A., Barber J. R.* Indentation of an elastic layer by a rigid cylinder // International Journal of Solids and Structures. 2012. Vol. 49, iss. 21. P. 2962–2977. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.05.036
21. *Argatov I. I., Mishuris G. S., Paukshto M. V.* Cylindrical lateral depth-sensing indentation testing of thin anisotropic elastic films // European Journal of Mechanics — A/Solids. 2015. Vol. 49. P. 299–307. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2014.07.009
22. *Можаровский В. В., Кузьменков Д. С.* Методика определения параметров контакта индентора с ортотропным покрытием на упругом изотропном основании // Проблемы физики, математики и техники. 2016. Вып. 4 (29). С. 74–82. EDN: XEEKKX
23. *Можаровский В. В., Марьина Н. А., Кузьменков Д. С.* Реализация решения контактной задачи о вдавливании жесткого цилиндрического индентора в изотропную вязкоупругую полосу на ортотропном основании // Проблемы физики, математики и техники. 2018. Вып. 2 (35). С. 51–56. EDN: XUFGCL
24. *Comez I., Yilmaz K. B., Guler M. A., Yildirim B.* On the plane frictional contact problem of a homogeneous orthotropic layer loaded by a rigid cylindrical stamp // Archive of Applied Mechanics. 2019. Vol. 89. P. 1403–1419. https://doi.org/10.1007/s00419-019-01511-6
25. *Yilmaz K. B., Comez I., Guler M. A., Yildirim B.* The effect of orthotropic material gradation on the plane sliding frictional contact mechanics problem // The Journal of Strain Analysis for Engineering Design. 2019. Vol. 54, iss. 4. P. 254–275. https://doi.org/10.1177/0309324719859110
26. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. Москва : Наука, 1989. 344 с.
27. *Бахвалов Н. С.* Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). Москва : Наука, 1975. 632 с.
28. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук. 1957. Т. 12, № 5 (77). С. 3–122.
29. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. Москва : Мир, 1984. 244 с.

References

1. Golovin Yu. I. Nanoindentation and mechanical properties of solids in submicrovolumes, thin near-surface layers, and films: a review. *Physics of the Solid State*, 2008, vol. 50, iss. 12, pp. 2205–2236. https://doi.org/10.1134/S1063783408120019
2. Epshtein S. A., Borodich F. M., Bull S. J. Evaluation of elastic modulus and hardness of highly inhomogeneous materials by nanoindentation. *Applied Physics A*, 2015, vol. 119, iss. 1, pp. 325–335. https://doi.org/10.1007/s00339-014-8971-5
3. Vorovich I. I., Ustinov Iu. A. Pressure of a die on an elastic layer of finite thickness. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1959, vol. 23, iss. 3, pp. 637–650. https://doi.org/10.1016/0021-8928(59)90158-3
4. Vorovich I. I., Alexandrov V. M., Babeshko V. A. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti* [Non-classical Mixed Problems in Elasticity Theory]. Moscow, Nauka, 1974. 456 p. (in Russian).
5. Babeshko V. A. Asymptotic properties of the solutions of a class of integral equations occurring in elasticity theory and mathematical physics. *Soviet Physics. Doklady*, 1969, vol. 14, pp. 529–531.
6. Alexandrov V. M., Babeshko V. A. Contact problems for an elastic strip of small thickness. *Izv. USSR Academy of Sciences. Mechanics*, 1965, iss. 2, pp. 95–107 (in Russian).
7. Aizikovich S. M., Aleksandrov V. M., Belokon A. V., Krenev L. I., Trubchik I. S. *Kontaktnie zadachi teorii uprugosti dlya neodnorodnyh sred* [Contact Problems of Theory of Elasticity for Inhomogeneous Media]. Moscow, Fizmatlit, 2006. 240 p. (in Russian). EDN: OPWVHF
8. Alexandrov V. M., Mhitaryan S. M. *Kontaktnie zadachi dlya tel s tonkimi pokritiyami i podlozhkami* [Contact Problems for Bodies with Thin Coatings and Layers]. Moscow, Nauka, 1983. 488 p. (in Russian).
9. Argatov I. I. *Asimptoticheskie modeli uprugogo kontakta* [Asymptotic Models of Elastic Contact]. St. Petersburg, Nauka, 2005. 447 p. (in Russian). EDN: QJQFGH
10. Vatulyan A. O., Plotnikov D. K. A model of indentation for a functionally graded strip. *Doklady Physics*, 2019, vol. 64, iss. 4, pp. 173–175. https://doi.org/10.1134/S1028335819040074
11. Vatulyan A. O., Plotnikov D. K., Poddubny A. A. On some models of indentation for functionally-graded coatings. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 421–432 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-421-432
12. Conway H. D., Vogel S. M., Farnham K. A., So S. Normal and shearing contact stresses in indented strip and slabs. *International Journal of Engineering Science*, 1966, vol. 4, iss. 4, pp. 343–359. https://doi.org/10.1016/0020-7225(66)90036-X
13. Volkov S. S., Vasilev A. S, Aizikovich S. M., Seleznev N. M., Leonteva A. V. Stress-strain state of an elastic soft functionally-graded coating subjected to indentation by a spherical punch. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 4, pp. 20–34 (in Russian). https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.4.02
14. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Approximated analytical solution of contact problem on indentation of elastic half-space with coating reinforced with inhomogeneous interlayer. *Materials Physics and Mechanics*, 2018, vol. 35, iss. 1, pp. 175–180. https://doi.org/10.18720/MPM.3512018_20
15. Vatulyan A. O., Plotnikov D. K. On a study of the contact problem for an inhomogeneous elastic strip. *Mechanics Solids*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 1379–1387. https://doi.org/10.3103/S0025654421070268
16. Vatulyan A. O. On the action of a rigid stamp on an anisotropic half-space. In: I. I.Vorovich (ed.) *Staticheskie i dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti* [Static and Dynamic Mixed Problems of Elasticity Theory]. Rostov-on-Don, Rostov University Publ., 1983, pp. 112–115 (in Russian). EDN: XQUWZM

17. Pozharskii D. A. Contact problem for an orthotropic half-space. *Mechanics of Solids*, 2017, vol. 52, pp. 315–322. https://doi.org/10.3103/S0025654417030086
18. Batra R. C., Jiang W. Analytical solution of the contact problem of a rigid indenter and an anisotropic linear elastic layer. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, vol. 45, iss. 22–23, pp. 5814–5830. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.06.016
19. Erbas B., Yusufoglu E., Kaplunov J. A plane contact problem for an elastic orthotropic strip. *Journal of Engineering Mathematics*, 2011, vol. 70, pp. 399–409. https://doi.org/10.1007/s10665-010-9422-8
20. Greenwood J. A., Barber J. R. Indentation of an elastic layer by a rigid cylinder. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, vol. 49, iss. 21, pp. 2962–2977. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.05.036
21. Argatov I. I., Mishuris G. S., Paukshto M. V. Cylindrical lateral depth-sensing indentation testing of thin anisotropic elastic films. *European Journal of Mechanics — A/Solids*, 2015, vol. 49, pp. 299–307. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2014.07.009
22. Mozharovsky V. V., Kuzmenkov D. S. The technique for determining the parameters of a contact for indenter with the orthotropic coating on the elastic isotropic substrate. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2016, iss. 4 (29), pp. 74–82 (in Russian). EDN: XEEKKX
23. Mozharovsky V. V., Maryina N. A., Kuzmenkov D. S. Realization of solution of the contact problem on indentation of rigid cylindrical indenter in isotropic viscoelastic strip on the orthotropic basis. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2018, iss. 2 (35), pp. 51–56 (in Russian). EDN: XUFGCL
24. Comez I., Yilmaz K. B., Guler M. A., Yildirim B. On the plane frictional contact problem of a homogeneous orthotropic layer loaded by a rigid cylindrical stamp. *Archive of Applied Mechanics*, 2019, vol. 89, pp. 1403–1419. https://doi.org/10.1007/s00419-019-01511-6
25. Yilmaz K. B., Comez I., Guler M. A., Yildirim B. The effect of orthotropic material gradation on the plane sliding frictional contact mechanics problem. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 2019, vol. 54, iss. 4, pp. 254–275. https://doi.org/10.1177/0309324719859110
26. Babeshko V. A., Glushkov E. V., Zinchenko Zh. F. *Dinamika neodnorodnykh lineino-uprugikh sred* [Dynamics of Inhomogeneous Linearly Elastic Media]. Moscow, Nauka, 1989. 344 p. (in Russian).
27. Bakhvalov N. S. *Chislennye metody (analiz, algebra, obyknovennye differentsial'nye uravneniia)* [Numerical Methods (Analysis, Algebra, Ordinary Differential Equations)]. Moscow, Nauka, 1975. 632 p. (in Russian).
28. Vishik M. I., Ljusternik L. A. Regular degeneracy and boundary layer for linear differential equations with a small parameter. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1957, vol. 12, iss. 5 (77), pp. 3–122 (in Russian).
29. Benerdzhi P., Batterfild R. *Metody granichnykh elementov v prikladnykh naukakh* [Boundary Element Methods in Applied Sciences]. Moscow, Mir, 1984. 244 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 06.06.2022
Принята к публикации / Accepted 05.08.2022
Опубликована / Published 30.11.2022

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 494–505
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 494–505
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-494-505, EDN: KFJVBH

Научная статья
УДК 539.3

Упругопластическое деформирование нанопластин. Метод вариационных итераций (расширенный метод Канторовича)

А. Д. Тебякин, А. В. Крысько, М. В. Жигалов✉, В. А. Крысько

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. Лаврентьева, д. 15

Тебякин Алексей Дмитриевич, младший научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, prototype9235@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-6973-7065

Крысько Антон Вадимович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, anton.krysko@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-9389-5602, AuthorID: 357800

Жигалов Максим Викторович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, zhigalovm@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-0642-7211, AuthorID: 9130

Крысько Вадим Анатольевич, доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, tak@san.ru, https://orcid.org/0000-0002-4914-764X, AuthorID: 3929

Аннотация. В работе построена математическая модель по деформационной теории пластичности исследования напряженно-деформированного состояния нанопластин Кирхгофа (наноэффекты учитываются по модифицированной моментной теории упругости). Разработан экономичный и корректный итерационный метод расчета напряженно-деформированного состояния нанопластин — метод вариационных итераций (расширенный метод Канторовича). По сравнению с методами Бубнова – Галеркина или Ритца он не требует задания системы аппроксимирующих функций, удовлетворяющих граничным условиям, так как на каждой итерации строит систему аппроксимирующих функций, которая вытекает из решения обыкновенного дифференциального уравнения после применения процедуры Канторовича. Корректность метода обеспечена теоремами сходимости метода переменных параметров упругости И. И. Воровича, Ю. П. Красовского и теоремами о сходимости метода вариационных итераций В. А. Крысько, В. Ф. Кириченко. Кроме того, достоверность решений для упругих нанопластин Кирхгофа, полученных с помощью метода вариационных итераций, обеспечивается сопоставлением с точным решением Навье и решениями по методам Бубнова – Галеркина в высших приближениях, конечных разностей и конечных элементов. С точки зрения затрат машинного времени разработанный метод и методология расчета упруго-пластического деформирования нанопластин Кирхгофа являются более эффективными по сравнению с методами Бубнова – Галеркина в высших приближениях, конечных разностей, Канторовича – Власова, Вайндинера и особенно с методом конечных элементов. В статье также проведено исследование влияния нанокоэффициента, типов зависимостей интенсивности деформаций — интенсивности напряжений на упругопластическое поведение нанопластины.

© Тебякин А. Д., Крысько А. В., Жигалов М. В., Крысько В. А., 2022

Ключевые слова: нанопластины, метод вариационных итераций, расширенный метод Канторовича, деформационная теория пластичности, метод переменных параметров упругости Биргера
Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-11-00160).
Для цитирования: *Тебякин А. Д., Крысько А. В., Жигалов М. В., Крысько В. А.* Упругопластическое деформирование нанопластин. Метод вариационных итераций (расширенный метод Канторовича) // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 494–505. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-494-505, EDN: KFJVBH
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Elastic-plastic deformation of nanoplates. The method of variational iterations (extended Kantorovich method)

A. D. Tebyakin, A. V. Krysko, M. V. Zhigalov✉, V. A. Krysko

Lavrentiev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 15 Lavrentiev Ave., Novosibirsk 630090, Russia

Alexey D. Tebyakin, prototype9235@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-6973-7065
Anton V. Krysko, anton.krysko@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-9389-5602, AuthorID: 357800
Maxim V. Zhigalov, zhigalovm@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-0642-7211, AuthorID: 9130
Vadim A. Krysko, tak@san.ru, https://orcid.org/0000-0002-4914-764X, AuthorID: 3929

Abstract. In this paper, a mathematical model is constructed based on the deformation theory of plasticity for studying the stress-strain state of Kirchhoff nanoplates (nanoeffects are taken into account according to the modified moment theory of elasticity). An economical and correct iterative method for calculating the stress-strain state of nanoplates has been developed — the method of variational iterations (the extended Kantorovich method). The method of variational iterations (the extended Kantorovich method) has the advantage over the Bubnov – Galerkin or Ritz method in that it does not require specifying a system of approximating functions satisfying boundary conditions, because the method of variational iterations builds a system of approximating functions at each iteration, which follows from solving an ordinary differential equation after applying the Kantorovich procedure. The correctness of the method is ensured by the convergence theorems of the method of variable elasticity parameters by I. I. Vorovich, Yu. P. Krasovsky and the convergence theorems of the method of variational iterations by V. A. Krysko, V. F. Kirichenko. In addition, the reliability of the solutions for elastic Kirchhoff nanoplates obtained using the variational iteration method is ensured by comparison with the exact Navier solution and solutions using Bubnov – Galerkin methods in higher approximations, finite differences and finite elements. The developed method and the methodology for calculating elastic-plastic deformation of Kirchhoff nanoplates, which is based on this method, are effective in terms of machine time costs compared with the methods of Bubnov – Galerkin in higher approximations, finite differences, Kantorovich – Vlasov, Weindiner and especially finite elements. The influence of the nano coefficient, the types of dependences of strain intensity (stress intensity on the elastic-plastic behavior of the nanoplates) has been studied.
Keywords: nanoplates, variational iteration method, extended Kantorovich method, deformation theory of plasticity, Birger method of variable elasticity parameters

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00160).

For citation: Tebyakin A. D., Krysko A. V., Zhigalov M. V., Krysko V. A. Elastic-plastic deformation of nanoplates. The method of variational iterations (extended Kantorovich method). *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 494–505 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-494-505, EDN: KFJVBH
This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Тонкостенные пространственные конструкции применяют во многих областях авиа- и космической техники, приборостроения — при создании приборов с наноэлементами в виде пластин, которые часто подвергаются значительным статическим нагрузкам, приводящим к пластическим деформациям. Эксперименты [1] показывают зависимость результатов от наноразмера механической конструкции. При испытании на вдавливание жесткого индентора в нанопленку [2] обнаружили, что предел текучести увеличивается при уменьшении толщины пленки. Эти экспериментальные результаты привели к тому, что при математическом моделировании нанопластин появилась необходимость учитывать упруго-пластические деформации. В настоящее время имеется ряд математических теорий механики, учитывающих масштабные эффекты.

Исследование выпучивания упруго-пластической микропластины с помощью метода конечных элементов приведено в работе [3]. Авторы указали, что так как размер конечного элемета велик по сравнению с внутренней длиной — микроразмером, то результаты могут быть неточными. В научной литературе имеются публикации [4, 5], посвященные исследованию микропрямоугольных пластин, лежащих на упругом основании под действием как поперечной, так и продольной нагрузки, по теории течения. Решение проводится методом Ритца в одночленном приближении для получения аналитического решения. Исследуются коэффициенты упрочнения напряженно-деформированного состояния. В работах [6, 7] исследуется устойчивость кольцевых полноразмерных пластин. Решения получены в тригонометрических рядах. Можно утверждать, что решений, полученных для упруго-пластического изгиба пластинок с учетом наноэффектов, практически нет. Метод вариационных итераций (расширенный метод Канторовича) для анализа упруго-пластического изгиба пластин с учетом наноэффектов не применялся, и настоящая работа является первой попыткой в этом направлении.

Остановимся на краткой истории появления этого метода. Упоминание об этом методе впервые относится к 1933 г. [8], и он был переоткрыт в 1964 г. [9]. Метод вариационных итераций в западноевропейской научной литературе получил название расширенного метода Канторовича [10–13]. Библиография работ по МВИ представлена в работе [14]. Обоснование этого метода для класса уравнений, описываемых положительно определенными операторами, дано в работе [15]. Этот метод использовался при решении контактных задач [16], контактных задач с учетом физической нелинейности и разномодульности материала [17], задач с учетом воздействия полей различной природы и пористости [18, 19]. Отметим, что эти исследования применялись для полноразмерных механических систем. Исследования упруго-пластического изгиба нанопластин только начинаются [3–7]. В данной работе этот метод впервые применен для исследования упруго-пластического изгиба нанопластин.

1. Постановка задачи

Рассмотрим изотропную однородную прямоугольную в плане нанопластину с размерами a, b, h вдоль осей x, y, z соответственно. Начало координат расположено в левом верхнем углу пластины в ее срединной поверхности, оси x, y параллельны сторонам пластины, ось z направлена вниз. В указанной системе координат пластина, как трехмерная область Ω, определяется: $\Omega = \{x, y, z : (x, y, z) \in [0, a] \times [0, b] \times [-h/2, -h/2]\}$. Срединная поверхность при $z = 0$ обозначена как $\Gamma = \{x, y : (x, y) \in [0, a] \times [0, b]\}$.

В основу построенной математической модели положены следующие гипотезы:

1) кинематическая модель первого приближения — Кирхгофа [17];

2) материал, из которого изготовлена нанопластина считается изотропным, но неоднородным $E(x, y, z, e_i)$, $G(x, y, z, e_i)$, $K(x, y, z, e_i)$, $\nu(x, y, z, e_i)$, $\sigma_s(x, y, z, e_i)$;

3) наноэффекты учитываются с помощью модифицированной моментной теории упругости F. Yang [20];

4) используется критерий пластичности Мизеса [21].

Запасенная энергия деформации U в упругом теле при бесконечно малых деформациях

$$U = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + \underline{m_{xx}\chi_{xx} + m_{yy}\chi_{yy} + m_{xy}\chi_{xy}})\, d\Omega, \tag{1}$$

где первые три слагаемые относятся к классической теории упругости,

$$\sigma_{xx} = \frac{E\,z}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}), \quad \sigma_{yy} = \frac{E\,z}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}), \quad \sigma_{xy} = \frac{E\,z}{1+\nu}\varepsilon_{xy},$$
$$\varepsilon_{xx} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

а последние три — к теории упругости высшего порядка F. Yang [20],

$$m_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)}l^2\chi_{xx}, \quad m_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)}l^2\chi_{yy}, \quad m_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)}l^2\chi_{xy},$$
$$\chi_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \chi_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \chi_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$$

Из вариации энергии деформации U (1) упруго-пластической нанопластины [17] получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D_1(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_2(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[D_{20}(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right] +$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[D_2(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = q(x,y), \tag{2}$$

здесь

$$D_i(x,y) = \int\limits_{-h/2}^{h/2} E(x,y,z,e_i)\left(\frac{z^2\nu^{i-1}(x,y,z,e_i)}{1-\nu^2(x,y,z,e_i)} + \frac{l^2}{1+\nu(x,y,z,e_i)}\right)dz, \quad i = 1, 2,$$

$$D_{20}(x,y) = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x,y,z,e_i)(z^2+l^2)}{1+\nu(x,y,z,e_i)}dz,$$

l — нанопараметр.

К уравнению (2) следует присоединить одно из краевых условий (3), (4):
1) защемление по контуру

$$w|_\Gamma = \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_\Gamma = 0; \tag{3}$$

2) шарнирное опирание по контуру

$$w|_\Gamma = \left.\frac{\partial w^2}{\partial n^2}\right|_\Gamma = 0, \tag{4}$$

где n — нормаль к границе Γ. Уравнения приведены к безразмерному виду стандартным образом [14].

Исследование проводилось при действии равномерно-распределенной нагрузки: $q(x,y) = q$, $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Для моделирования упруго-пластического изгиба рассмотрены два типа зависимостей $\sigma_i(\varepsilon_i)$. Идеально упруго-пластическое тело Prandtl L [22]

$$\begin{aligned} \sigma_i &= 3G_0 e_i, \qquad e_i < e_s, \\ \sigma_i &= \sigma_s, \qquad e_i \geqslant e_s, \end{aligned} \tag{5}$$

где G_0 — характерное значение модуля сдвига в недеформированном состоянии e_s, σ_s — предельные значения интенсивности деформаций и напряжений соответственно.

Диаграмма для чистого алюминия Ohashi [23]

$$\sigma_i = \sigma_s \left[1 - \exp\left(-\frac{e_i}{e_s}\right)\right]. \tag{6}$$

В работе исследована упруго-пластическая деформация стальной пластины (сталь ЭИ395 [24]) для двух значений констант материала ($M1$ и $M2$), приведенных в табл. 1, и двух зависимостей $\sigma_i(\varepsilon_i)$ — (5), (6).

Таблица 1 / Table 1

Физические константы стальной пластины для моделей $M1$ и $M2$

Physical constants of the steel plate for models $M1$ and $M2$

Модели	E, ГПа	ν	G, ГПа	e_s	σ_s, МПа	e_{si}	σ_{si}, МПа
$M1$	282.400	0.3	108.615	$2.5 \cdot 10^{-3}$	706	$2.213 \cdot 10^{-3}$	719.8
$M2$	226.087	0.3	94.322	$2.1 \cdot 10^{-3}$	515	$1.974 \cdot 10^{-3}$	514.948

2. Численный эксперимент

Численные исследования уравнения (2) с краевыми условиями (3), (4) проводятся методом вариационных итераций (расширенный метод Канторовича) с зависимостями $\sigma_i(\varepsilon_i)$ (5), (6) с числовыми данными для констант материала стали ЭИ395 (см. табл. 1). Идея метода вариационных итераций изложена в работах [14–17]. На каждом шаге метода вариационных итераций осуществляется процедура метода переменных параметров упругости Биргера [25] — это внутренняя итерация. На шаге применения метода вариационных итераций обыкновенные дифференциальные уравнения сводятся методом конечных разностей второго порядка точности к системе алгебраических уравнений, которая решается методом Ньютона. Тем самым построен метод вложенных одна в другую итерационных процедур. Обоснование

сходимости метода переменных параметров упругости Биргера дано в работе [21], а метода вариационных итераций — в [15]. Это дает возможность утверждать, что построенный в настоящей работе метод вложенных одна в другую итерационных процедур расчета упруго-пластического изгиба нанопластин является корректным, и численный эксперимент, приведенный ниже, это подтверждает.

Важным вопросом исследования изгиба нанопластин является вопрос о достоверности получаемых результатов. С этой целью модифицированное уравнение Жермен – Лагранжа [14] (в уравнении Жермен – Лагранжа учтен наноэффект по модифицированной моментной теории упругости [20]) решалось методами Бубнова – Галеркина в высших приближениях, аппроксимирующая функция для

$$w(x,y) = \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij} \sin(i\pi x/a) \sin(j\pi y/b),$$

удовлетворяющая краевым условиям (4), Канторовича – Власова [26, 27], Вайндинера [28], конечных разностей второго порядка точности и метода конечных элементов. Эти результаты приведены в таблице 19 работы [14].

В табл. 2 приведены решения, полученные аналитически и численно с указанием количества членов ряда в разложении функции $w(x,y)$, кроме того, получено точное решение модифицированного уравнения Жермен – Лагранжа — решение Навье.

Таблица 2 / Table 2

Сравнение значений прогиба $w(0.5; 0.5)$ упругой нанопластины Кирхгофа при решении модифицированного уравнения Жермен – Лагранжа методами [14] граничным условием (4) и равномерной распределенной нагрузкой $q = 7$

Comparison of deflection values $w(0.5; 0.5)$ of an elastic Kirchhoff nanoplate when solving the modified Germain – Lagrange equation by [14] boundary condition (4) and a uniformly distributed load $q = 7$

Методы	$l = 0$	$l = 0.5$
Метод Навье — точное решение	0.311	0.151
Метод Бубнова – Галеркина ($N = 5$)	0.311	0.153
Метод Канторовича – Власова, первое приближение	0.314	0.153
Метод Канторовича – Власова, второе приближение	0.312	0.152
Метод вариационных итераций, первое приближение	0.309	0.150
Метод Вайндинера, первое приближение	0.309	0.150
Метод конечных разностей 11×11 разбиений по $x \in [0; 1]$ и по $y \in [0; 1]$	0.310	0.151
Метод конечных элементов — треугольные элементы 350 элементов в области Ω	0.310	0.151
Метод конечных элементов — четырехугольные элементы 165 элементов в области Ω	0.310	0.151

Анализ этих результатов показывает, что метод вариационных итераций (расширенный метод Канторовича) обладает высокой точностью. Встает вопрос об эффективности разработанной в настоящей работе метода исследования упруго-пластического изгиба нанопластин (решение уравнений (2)–(4)), т. е. количестве машинного времени для получения достоверного решения. В табл. 3 приводится время, необходимое для получения решения для одного шага нагружения. Решение уравнения (2) для граничных условий (3) проводится методами Бубнова – Галеркина и вариационных итераций.

Таблица 3 / Table 3

Время расчета решения системы (2), (3) для одного шага нагружения упруго-пластической нанопластины
Calculation time of the solution of the system (2), (3) for one step of loading elastic-plastic nanoplate

Методы	Время, с
Метод Бубнова – Галеркина ($N = 3$)	0.517
Метод Бубнова – Галеркина ($N = 5$)	279.815
Метод вариационных итераций, первое приближение	0.017

Решение производилось на компьютере следующей конфигурации: процессор Intel Core i7 9750H 2.6 ГГц; оперативная память 8192 Мб, DDR4, 2666 МГц; графический процессор nVidia GeForce RTX 2060 — 6144 Мб. Алгоритм получения решения упруго-пластической задачи нанопластины тот же, что и при решении методом вариационных итераций. Полученные результаты позволили сделать вывод о том, что эффективность метода вариационных итераций выше, чем среди указанных в табл. 2 и 3 методов. Кроме того, исследовалось количество точек разбиения по плану и по толщине нанопластины упруго-пластических задач методом вариационных итераций для получения решения с относительной погрешностью $\varepsilon = 10^{-7}$ $(n_x \times n_y \times n_z = 30 \times 30 \times 15)$.

Исследуем напряженно-деформированное состояние методом вариационных итераций нанопластин под действием поперечной равномерно-распределенной нагрузки для двух типов краевых условий (3) и (4), двух значений размерно-зависимых параметров ($l = 0$ — полноразмерная пластина и $l = 0.5$ — нанопластина) и для двух моделей $M1$ и $M2$. На рис. 1 приведены графики зависимости нагрузка–прогиб $q(w(0.5; 0.5))$ для двух типов граничных условий (3), (4), двух зависимостей $\sigma_i(\varepsilon_i)$, двух значений размерного параметра $l = 0, 0.5$ и двух моделей ($M1$, $M2$).

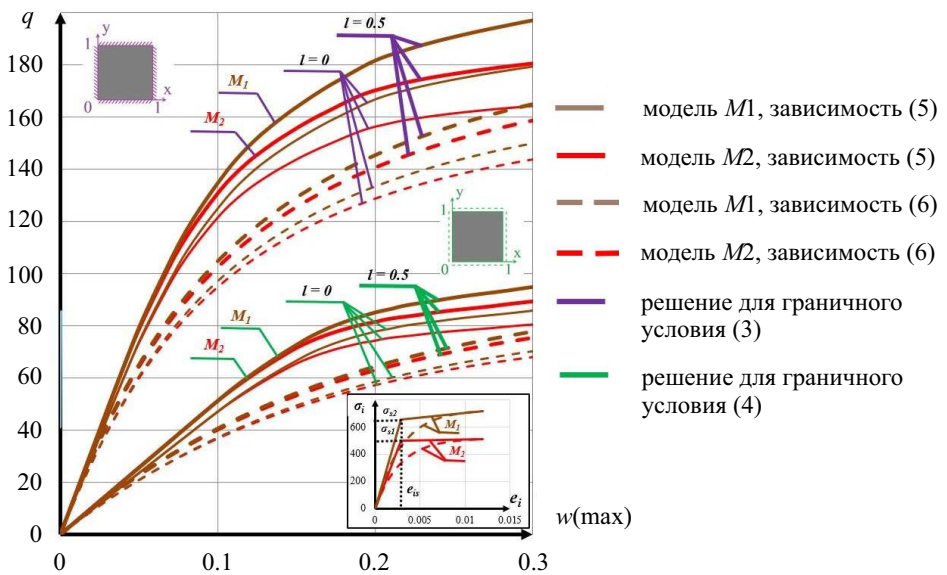
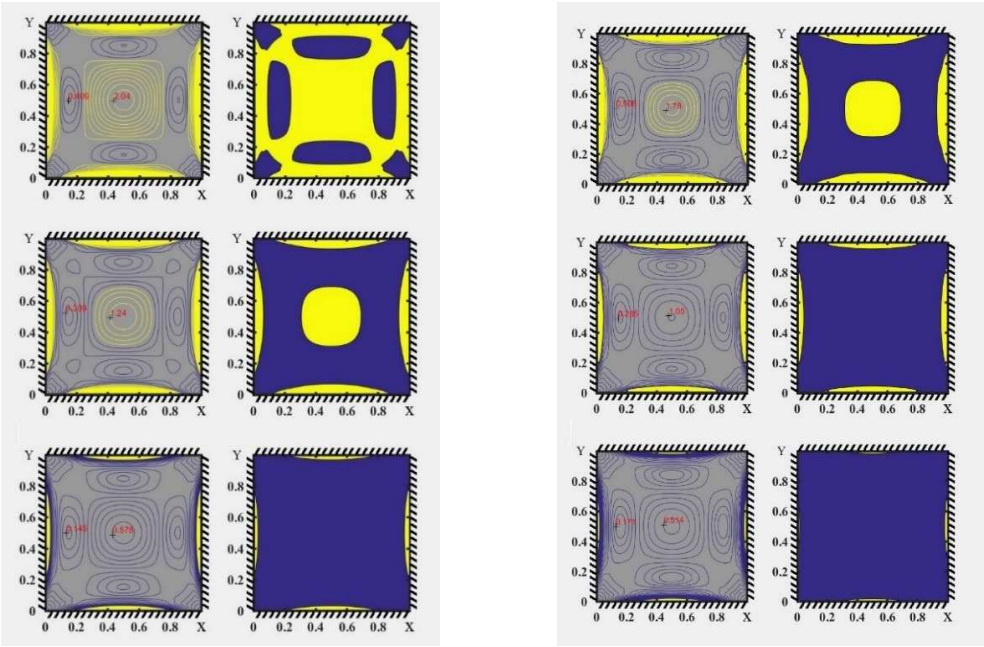


Рис. 1. Графики зависимостей $q(w(\max))$ упруго-пластической нанопластины Кирхгофа с граничными условиями (3), (4), полученные методом вариационных итераций для равномерно-распределенной нагрузки (цвет online)
Fig. 1. Dependency graphs $q(w(\max))$ of an elastic-plastic Kirchhoff nanoplate with boundary conditions (3), (4) obtained by variational iteration method for uniformly distributed load (color online)

В правом нижнем углу рис. 1 приведена зависимость $\sigma_i(\varepsilon_i)$ интенсивности напряжений от интенсивности деформации для двух моделей ($M1$ и $M2$). Учет размерно-зависимого параметра $l = 0.5$ приводит к существенному повышению несущей способности пластины по сравнению с полноразмерной пластиной $l = 0$. Аппроксимация зависимостей $\sigma_i(\varepsilon_i)$ существенно влияет на несущую способность пластины как для полноразмерного случая, так и для нанопластины. На рис. 2 приведены упруго-пластические деформации для равномерно-распределенной нагрузки при $q = 90$, для защемленной по контуру пластины (3), в сечениях по толщине ($z = \pm 0.5; \pm 0.284; \pm 0.148$), а также линии равных интенсивностей деформаций по плану пластины.



а / a *б / b*

Рис. 2. Линии равных интенсивностей деформаций и зоны пластичности при $q = 90$ с граничными условиями (3) и равномерно-распределенной нагрузкой для зависимостей $\sigma_i(\varepsilon_i)$: *а* — тип зависимости (5); *б* — тип зависимости (6). Желтым цветом обозначены пластические деформации, синим цветом — упругие (цвет online)

Fig 2. Lines of equal strain intensities and plasticity zones at $q = 90$ with boundary conditions (3) and uniformly distributed load for dependencies $\sigma_i(\varepsilon_i)$: *a* showing dependency type (5); *b* showing dependency type (6). Plastic deformations are indicated in yellow, elastic deformations are indicated in blue (color online)

Сравнительный анализ линий интенсивностей деформаций и зон пластичности для экспоненциальной зависимости и зависимости с линейным упрочнением показывает, что последняя имеет меньшие по размеру зоны пластичности. Это говорит о большой жесткости пластины, что подтверждают зависимости $q(w)$ на рис. 1. Увеличение значения нанокоэффициента l с 0 до 0.5 для первой модели не оказывает существенного влияния на величину зон пластичности, в отличие от второй модели, где отличия заметны. Такой же вывод можно сделать и по линиям равных интенсивностей деформации — отличие при $l = 0$ и $l = 0.5$ для $z = \pm 0.5$ в первой модели составляет 13.5%, а отличие для второй модели — 26.0%, т. е. различие увеличилось почти в два раза. Таким образом, как и для зависимости $\sigma_i(\varepsilon_i)$ Prandtl [22] (5), пластина с учетом зависимости $\sigma_i(\varepsilon_i)$ Ohashi [23] (6) имеет большую несущую способность.

Заключение

1. Построена математическая модель упруго-пластических нанопластин Кирхгофа по деформационной теории пластичности и модифицированной моментной теории упругости.

2. Создан эффективный метод исследования упруго-пластических деформаций нанопластин Кирхгофа. В основу метода положено сочетание нескольких эффектных и корректных итерационных процедур: метод вариационных итераций (расширенный метод Канторовича), метод переменных параметров упругости И. А. Биргера, метод Ньютона решения алгебраических систем уравнений.

3. Достоверность результатов подтверждена для упругих нанопластин Кирхгофа сравнением с точным решением Навье, Бубнова – Галеркина в высших приближениях, конечных разностей и конечных элементов. Для упруго-пластических задач нанопластин Кирхгофа достоверность результатов подтверждена сравнением с решениями, полученными методом Бубнова – Галеркина в высших приближениях, в сочетании с методом переменных параметров упругости, разработанным авторами.

4. Анализ упруго-пластических деформаций показал, что результаты существенно зависят от типа аппроксимации $\sigma_i(\varepsilon_i)$. Пластина с линейным упрочнением (5) имеет большую несущую способность, чем пластина с зависимостью Ohashi (6). Увеличение значения нанокоэффициента также увеличивает несущую способность нанопластины.

Список литературы

1. *Kiener D., Motz C., Schobert T., Jenko M., Dehm G.* Determination of mechanical properties of copper at the micron scale // Advanced Engineering Materials. 2006. Vol. 8, iss. 11. P. 1119–1125. https://doi.org/10.1002/adem.200600129
2. *Huber N., Nix W., Gao H.* Identification of elastic-plastic material parameters from pyramidal indentation of thin films // Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2002. Vol. 458. P. 1593–1620. https://doi.org/10.1098/rspa.2001.0927
3. *Ristinmaa M., Vecchi M.* Use of couple-stress theory in elasto-plasticity // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1996. Vol. 136, iss. 3–4. P. 205–224. https://doi.org/10.1016/0045-7825(96)00996-6
4. *Darvishvand A., Zajkani A.* Strain gradient micromechanical modeling of substrate–supported crystalline microplates subjected to permanent in-plane and out-of-plane tractions // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2021. Iss. 7. P. 969–985. https://doi.org/10.1080/15397734.2019.1705167
5. *Darvishvand A., Zajkani A.* Comparative modeling of power hardening micro-scale metallic plates based on lower and higher-order strain gradient plasticity theories // Metals and Materials International. 2021. Vol. 27, iss. 6. P. 1392–1402. https://doi.org/10.1007/s12540-019-00524-8
6. *Tun M. A.* Plastic buckling of moderately thick annular plates // International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2005. Vol. 5, iss. 3. P. 337–357. https://doi.org/10.1142/S0219455405001611
7. *Lanzoni L., Radi E., Nobili A.* Ultimate carrying capacity of elastic-plastic plates on a Pasternak foundation // Journal of Applied Mechanics. 2014. Vol. 81, iss. 5. 051013-1. https://doi.org/10.1115/1.4026190
8. *Schunck T. E.* Zur Knickfestigkeit schwach gekrümmter zylindrischer Schalen // Ingenieur-Archiv. 1933. Bd. 4. S. 394–414. https://doi.org/10.1007/BF02081563
9. *Жуков Е. Е.* Вариационный прием последовательных приближений к расчету тонких прямоугольных плит // Расчет тонкостенных пространственных конструкций / под ред. А. Р. Ржаницына. Москва : Стройиздат, 1964. С. 27–35.

10. *Kerr A. D.* An extended Kantorovich method for solution of eigenvalue problem // International Journal of Solids and Structures. 1969. Vol. 5, iss. 6. P. 559–572. https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90028-6
11. *Yuan S., Jin Y.* Computation of elastic buckling loads of rectangular thin plates using the extended Kantorovich method // Composite Structures. 1998. Vol. 66, iss. 6. P. 861–867. https://doi.org/10.1016/S0045-7949(97)00111-9
12. *Shufrin I., Rabinovitch O., Eisenberger M.* Buckling of symmetrically laminated rectangular plates with general boundary conditions — a semi analytical approach // Composite Structures. 2008. Vol. 82, iss. 4. P. 521–537. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.02.003
13. *Eisenberger M., Shufrin I.* The extended Kantorovich method for vibration analysis of plates // Analysis and Design of Plated Structures / eds. by N. E. Shanmugam, Chieng Ming Wang. Cambridge : Woodhead Publishing, 2007. Vol. 1. Stability. P. 192–218. https://doi.org/10.1533/9781845692292.192
14. *Awrejcewicz J., Krysko-jr. V. A., Kalutsky L. A., Zhigalov M. V., Krysko V. A.* Review of the methods of transition from partial to ordinary differential equations: from macro- to nano-structural dynamics // Archives of Computational Methods in Engineering. 2021. Vol. 28. P. 4781–4813. https://doi.org/10.1007/s11831-021-09550-5
15. *Кириченко В. Ф., Крысько В. А.* Метод вариационных итераций в теории пластин и его обоснование // Прикладная механика. 1981. Т. 17, вып. 4. С. 71–76.
16. *Krysko A. V., Awrejcewicz J., Zhigalov M. V., Krysko V. A.* On the contact interaction between two rectangular plates // Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 85. P. 2729–2748. https://doi.org/10.1007/s11071-016-2858-2
17. *Awrejcewicz J., Krysko V. A., Zhigalov M. V., Krysko A. V.* Contact interaction of two rectangular plates made from different materials with an account of physical nonlinearity // Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 91. P. 1191–1211. https://doi.org/10.1007/s11071-017-3939-6
18. *Awrejcewicz J., Krysko-jr V. A., Kalutsky L. A., Krysko V. A.* Computing static behavior of flexible rectangular von Karman plates in fast and reliable way // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2022. Vol. 146. 104162. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104162
19. *Awrejcewicz J., Krysko A. V., Smirnov A., Kalutsky L. A., Zhigalov M. V., Krysko V. A.* Mathematical modeling and methods of analysis of generalized functionally gradient porous nanobeams and nanoplates subjected to temperature field // Meccanica. 2022. Vol. 57. P. 1591–1616. https://doi.org/10.1007/s11012-022-01515-7
20. *Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P.* Couple stress based strain gradient theory for elasticity // International Journal of Solids and Structures. 2002. Vol. 39, iss. 10. P. 2731–2743. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X
21. *Ворович И. И., Красовский Ю. П.* О методе упругих решений // Доклады Академии наук СССР. 1959. Т. 126, вып. 4. С. 740–743.
22. *Prandtl L.* Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper // ZAMM: Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Mechanik. 1928. Bd. 8, Ht. 2. S. 85–106. https://doi.org/10.1002/zamm.19280080202
23. *Ohashi Y., Murakami S.* The elasto-plastic bending of a clamped thin circular plate // Applied Mechanics / ed. H. Görtler. Berlin, Heidelberg : Springer, 1966. Vol. 1. P. 212–223. https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_25
24. Температурный коэффициент линейного расширения стали // Thermalinfo. URL: http://thermalinfo.ru/svojstva-materialov/metally-i-splavy/temperaturnyj-koeffitsient-linejnogo-rasshireniya-stali (дата обращения: 03.08.2022).
25. *Биргер И. А.* Некоторые общие методы решения задач теории пластичности // Прикладная математика и механика. 1951. Т. 15, вып. 6. С. 765–770.

26. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Москва : Физматгиз, 1962. 708 с.
27. *Власов В. В.* Общая теория оболочек. Москва : Гостехиздат, 1949. 784 с.
28. *Вайндинер А. И.* Об одной новой форме рядов Фурье и выборе наилучших полиномов Фурье // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1967. Т. 7, вып. 1. С. 177–185. https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_25

References

1. Kiener D., Motz C., Schobert T., Jenko M., Dehm G. Determination of mechanical properties of copper at the micron scale. *Advanced Engineering Materials*, 2006, vol. 8, iss. 11, pp. 1119–1125. https://doi.org/10.1002/adem.200600129
2. Huber N., Nix W., Gao H. Identification of elastic-plastic material parameters from pyramidal indentation of thin films. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2002, vol. 458, pp. 1593–1620. https://doi.org/10.1098/rspa.2001.0927
3. Ristinmaa M., Vecchi M. Use of couple-stress theory in elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, vol. 136, iss. 3–4, pp. 205–224. https://doi.org/10.1016/0045-7825(96)00996-6
4. Darvishvand A., Zajkani A. Strain gradient micromechanical modeling of substrate–supported crystalline microplates subjected to permanent in-plane and out-of-plane tractions. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2021, iss. 7, pp. 969–985. https://doi.org/10.1080/15397734.2019.1705167
5. Darvishvand A., Zajkani A. Comparative modeling of power hardening micro-scale metallic plates based on lower and higher-order strain gradient plasticity theories. *Metals and Materials International*, 2021, vol. 27, iss. 6, pp. 1392–1402. https://doi.org/10.1007/s12540-019-00524-8
6. Tun M. A. Plastic buckling of moderately thick annular plates. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2005, vol. 5, iss. 3, pp. 337–357. https://doi.org/10.1142/S0219455405001611
7. Lanzoni L., Radi E., Nobili A. Ultimate carrying capacity of elastic-plastic plates on a Pasternak foundation. *Journal of Applied Mechanics*, 2014, vol. 81, iss. 5, 051013-1. https://doi.org/10.1115/1.4026190
8. Schunck T. E. Zur Knickfestigkeit schwach gekrümmter zylindrischer Schalen. *Ingenieur-Archiv*, 1933, vol. 4, pp. 394–414 (in German). https://doi.org/10.1007/BF02081563
9. Zhukov E. E. Variational method of successive approximations to the calculation of thin rectangular plates. In: A. P. Rzhanitsyn (ed.) *Raschet tonkostennykh prostranstvennykh konstruktsiy* [Calculation of Thin-Walled Spatial Structures]. Moscow, Stroyizdat, 1964, pp. 27–35 (in Russian).
10. Kerr A. D. An extended Kantorovich method for solution of eigenvalue problem. *International Journal of Solids and Structures*, 1969, vol. 5, iss. 6, pp. 559–572. https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90028-6
11. Yuan S., Jin Y. Computation of elastic buckling loads of rectangular thin plates using the extended Kantorovich method. *Composite Structures*, 1998, vol. 66, iss. 6, pp. 861–867. https://doi.org/10.1016/S0045-7949(97)00111-9
12. Shufrin I., Rabinovitch O., Eisenberger M. Buckling of symmetrically laminated rectangular plates with general boundary conditions — a semi analytical approach. *Composite Structures*, 2008, vol. 82, iss. 4, pp. 521–537. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.02.003
13. Eisenberger M., Shufrin I. The extended Kantorovich method for vibration analysis of plates. In: N. E. Shanmugam, Chieng Ming Wang (eds.) *Analysis and Design of Plated Structures*. Cambridge : Woodhead Publ., 2007. Vol. 1. Stability, pp. 192–218. https://doi.org/10.1533/9781845692292.192

14. Awrejcewicz J., Krysko-jr. V. A., Kalutsky L. A., Zhigalov M. V., Krysko V. A. Review of the methods of transition from partial to ordinary differential equations: from macro- to nano-structural dynamics. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2021, vol. 28, pp. 4781–4813. https://doi.org/10.1007/s11831-021-09550-5
15. Kirichenko V. F., Krysko V. A. Method of variational iterations in the theory of plates and its substantiation. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics], 1981, vol. 17, iss. 4, pp. 71–76 (in Russian).
16. Krysko A. V., Awrejcewicz J., Zhigalov M. V., Krysko V. A. On the contact interaction between two rectangular plates. *Nonlinear Dynamics*, 2016, vol. 85, pp. 2729–2748. https://doi.org/10.1007/s11071-016-2858-2
17. Awrejcewicz J., Krysko V. A., Zhigalov M. V., Krysko A. V. Contact interaction of two rectangular plates made from different materials with an account of physical non-linearity. *Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 91, pp. 1191–1211. https://doi.org/10.1007/s11071-017-3939-6
18. Awrejcewicz J., Krysko-jr V. A., Kalutsky L. A., Krysko V. A. Computing static behavior of flexible rectangular von Karman plates in fast and reliable way. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2022, vol. 146, 104162. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104162
19. Awrejcewicz J., Krysko A. V., Smirnov A., Kalutsky L. A., Zhigalov M. V., Krysko V. A. Mathematical modeling and methods of analysis of generalized functionally gradient porous nanobeams and nanoplates subjected to temperature field. *Meccanica*, 2022, vol. 57, pp. 1591–1616. https://doi.org/10.1007/s11012-022-01515-7
20. Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, vol. 39, iss. 10, pp. 2731–2743. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X
21. Vorovich I. I., Krasovsky Yu. P. On the method of elastic solutions. *Doklady Mathematics*, 1959, vol. 126, iss. 4, pp. 740–743 (in Russian).
22. Prandtl L. Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper. *ZAMM: Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Mechanik*, 1928, vol. 8, iss. 2, pp. 85–106 (in German). https://doi.org/10.1002/zamm.19280080202
23. Ohashi Y., Murakami S. The elasto-plastic bending of a clamped thin circular plate. In: H. Görtler (ed.) *Applied Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1966. Vol. 1, pp. 212–223. https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_25
24. Temperature coefficient of linear expansion of steel. *Thermalinfo*. Available at: http://thermalinfo.ru/svojstva-materialov/metally-i-splavy/tempe raturnyj-koeffitsient-linejnogo-rasshireniya-stali (accessed 3 August 2022) (in Russian).
25. Birger I. A. Some general methods for solving problems in the theory of plasticity. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1951, vol. 15, iss. 6, pp. 765–770 (in Russian).
26. Kantorovich L. V., Krylov V. I. *Priblizhennye metody vysshego analiza* [Approximate Methods of Higher Analysis]. Moscow, Fizmatgiz, 1962. 708 p. (in Russian).
27. Vlasov V. V. *Obshchaia teoriya obolochek* [General Shell Theory]. Moscow, Gostekhizdat, 1949. 784 p. (in Russian).
28. Weindiner A. I. On a new form of Fourier series and the choice of the best Fourier polynomials. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1967, vol. 7, iss. 1, pp. 240–251. https://doi.org/10.1016/0041-5553(67)90076-6

Поступила в редакцию / Received 08.08.2022
Принята к публикации / Accepted 08.09.2022
Опубликована / Published 30.11.2022

Научный отдел

ИНФОРМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 506–516
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 506–516
mmi.sgu.ru
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-506-516
EDN: LZRLOQ

Научная статья
УДК 532.575.56

Крыльчатые расходомеры как инструмент оценки кровотока в экспериментальном стенде

А. В. Доль✉, Д. В. Иванов, Е. С. Оленко, Н. В. Островский

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Доль Александр Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, dolav86@ya.ru, https://orcid.org/0000-0001-5842-1615, AuthorID: 601135

Иванов Дмитрий Валерьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, ivanovdv.84@ya.ru, https://orcid.org/0000-0003-1640-6091, AuthorID: 201794

Оленко Елена Сергеевна, доктор медицинских наук, профессор кафедры основ медицины и медицинских технологий, olenco@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-1573-0623, AuthorID: 499088

Островский Николай Владимирович, доктор медицинских наук, профессор кафедры основ медицины и медицинских технологий, nvostrovsky@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-8370-2299, AuthorID: 116256

Аннотация. Разработкой экспериментальных стендов для оценки кровотоков по крупным артериям занимаются многие научные группы. Такие стенды используются для верификации результатов численного моделирования, а также для непосредственного анализа гемодинамики или исследования поведения стенок сосудов, а также заменителей биологических тканей. При разработке стендов встает задача выбора и калибровки расходомеров, которые используются для измерения кровотоков на входе в сосуд и на его выходах. Ультразвуковые устройства являются достаточно дорогими, стоимость крыльчатых расходо-

© Доль А. В., Иванов Д. В., Оленко Е. С., Островский Н. В., 2022

меров на порядок ниже, но их показания могут быть недостоверными в связи с тем, что они могут иметь высокое гидравлическое сопротивление. В данной работе были исследованы крыльчатые расходомеры модели YF-S401 (Китай). Проведена калибровка, выполнено численное моделирование вращения крыльчатки под действием потока воды, протекающей через расходомеры, проведена их модернизация, а также рассчитано гидравлическое сопротивление до и после модернизации. Расходомеры были использованы в экспериментальном стенде, в основе которого лежит насос, имитирующий работу сердца человека. На стенде были измерены объемные кровотоки на входе в модель сонной артерии со стенозом и на выходах из внутренней и наружной сонных артерий. Измеренные значения сравнивались с аналогичными характеристиками, полученными с помощью численного моделирования. Выявлено, что для использования расходомеров в экспериментальном стенде для изучения динамики кровотока необходима их модернизация. Модернизация заключалась в увеличении диаметра входного отверстия. До модернизации показания расходомеров и результаты численного моделирования расходились более чем на 50%. После модернизации результаты численного моделирования и показания расходомеров стали различаться не более чем на 6%. Разработана программа, позволяющая автоматически собирать данные о кровотоках с крыльчатых расходомеров. Собранный на основе насоса, моделирующего работу сердца, и крыльчатых расходомеров экспериментальный стенд может быть применен для оценки кровотоков по моделям крупных сосудов человека.

Ключевые слова: биомеханика, кровоток, расходомер, гидравлическое сопротивление, перепад давления, численное моделирование

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20-71-00131).

Для цитирования: *Доль А. В., Иванов Д. В., Оленко Е. С., Островский Н. В.* Крыльчатые расходомеры как инструмент оценки кровотока в экспериментальном стенде // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 506–516. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-506-516, EDN: LZRLOQ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Impeller flowmeters as a tool for assessing blood flow in an experimental test bench

A. V. Dol✉**, D. V. Ivanov, E. S. Olenko, N. V. Ostrovsky**

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Aleksandr V. Dol, dolav86@ya.ru, https://orcid.org/0000-0001-5842-1615, AuthorID: 601135
Dmitrii V. Ivanov, ivanovdv.84@ya.ru, https://orcid.org/0000-0003-1640-6091, AuthorID: 201794
Elena S. Olenko, olenco@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-1573-0623, AuthorID: 499088
Nikolay V. Ostrovsky, nvostrovsky@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-8370-2299, AuthorID: 116256

Abstract. Many scientific groups are engaged in the development of experimental stands for assessing blood flow through large arteries. Such stands are used to verify the results of numerical modeling, as well as for direct analysis of hemodynamics or the behavior of vascular walls or biological tissue substitutes. When developing stands, a task arises which is selecting and calibrating flowmeters that are used to measure blood flow at the entrance to the vessel and at its exits. Ultrasonic devices are quite expensive, the cost of vane flowmeters is an order

of magnitude lower, but their readings may be unreliable due to the fact that they may have high hydraulic resistance. In this work, impeller flowmeters of the YF-S401 model (China) were investigated. Calibration was carried out, numerical simulation of the impeller rotation under the water flow action flowing through the flowmeters was performed, their modernization was carried out, and hydraulic resistances before and after modernization were calculated. Flowmeters were used in an experimental stand based on a pump that simulates the work of a human heart. The volumetric blood flow at the entrance to the carotid artery model with stenosis and at the exits from the internal and external carotid arteries were measured at the stand. The measured values were compared with similar characteristics obtained by numerical simulation. It was revealed that in order to use flowmeters in an experimental stand to study the dynamics of blood flow, their modernization is necessary. The modernization consisted of increasing the diameter of the inlet. Before modernization, the flow meter readings and the results of numerical modeling diverged by more than 50%. After modernization, the results of numerical modeling and flow meter readings began to differ by no more than 6%. A program has been developed that allows you to automatically collect data on blood flow from wing flowmeters. An experimental stand assembled on the basis of a pump that simulates the work of the heart and wing flowmeters can be used to evaluate blood flows using models of large human vessels.

Keywords: biomechanics, bloodflow, flowmeter, hydraulic resistance, pressure drop, numerical simulation

Acknowledgements: The wark was supported by the Russian Science Foundation (project No. 20-71-00131).

For citation: Dol A. V., Ivanov D. V., Olenko E. S., Ostrovsky N. V. Impeller flowmeters as a tool for assessing blood flow in an experimental test bench. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 506–516 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-506-516, EDN: LZRLOQ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Разработкой экспериментальных стендов для оценки кровотоков по крупным артериям занимаются многие научные группы. Такие стенды используются для верификации результатов численного моделирования [1–3], для непосредственного анализа гемодинамики или исследования поведения стенок сосудов, а также для заменителей биологических тканей.

Экспериментальные установки могут использоваться для быстрого моделирования течения крови по сосудам и оценки особенностей кровотока [4, 5] в зависимости от характеристик исследуемой жидкости, геометрии артерии, а также параметров сердечного ритма. Также экспериментальные установки могут применяться для верификации результатов численного моделирования [6], исследования искусственных элементов сердечно-сосудистой системы. Сегодня в таких установках в качестве расходомеров часто используют ультразвуковые приборы [5, 7]. Эти устройства обладают высокой точностью и не оказывают влияния на течение исследуемой жидкости, но имеют довольно высокую стоимость, а также довольно сложно интегрируются в программно-аппаратные платформы для обработки результатов экспериментов. Их крыльчатые аналоги имеют низкую стоимость и подготовлены производителем для работы в составе программно-аппаратных платформ типа Arduino. Они вместе с другими управляемыми устройствами (клапаны, датчики давления) могут применяться для разработки экспериментальных стендов для моделирования динамики кровотока в научных и образовательных целях [8].

При использовании крыльчатых расходомеров встает вопрос об их точности и оценке их влияния на течение исследуемой жидкости. В этой связи в данной работе исследована возможность применения крыльчатых расходомеров в экспериментальном стенде для моделирования динамики кровотока, в основе которого лежит пульсационный насос, имитирующий работу сердца человека.

1. Материалы и методы

Для исследования динамики кровотока в моделях крупных артерий человека был разработан экспериментальный стенд, схема которого показана на рис. 1. Движение жидкости по контуру экспериментального стенда осуществляется в соответствии со стрелкой на рис. 1 (против часовой стрелки). В основе стенда лежит пульсационный насос Harvard Apparatus Pulsatile Blood Pump, перед ним устанавливается расширительный бак, в котором создается дополнительное давление. Давление в системе контролируется манометром и в ходе эксперимента находится в интервале от 80 до 120 мм рт. ст. До и после артерии устанавливаются расходомеры, обработка сигналов с которых осуществляется с помощью программно-аппаратной платформы Arduino. В результате эксперимента значения расходов с каждого расходомера автоматически записываются на флеш-карту и далее обрабатываются в MS Excel. Компоненты стенда соединяются друг с другом с помощью гибких силиконовых трубок, в качестве расширительного бака используется бачок системы охлаждения автомобиля.

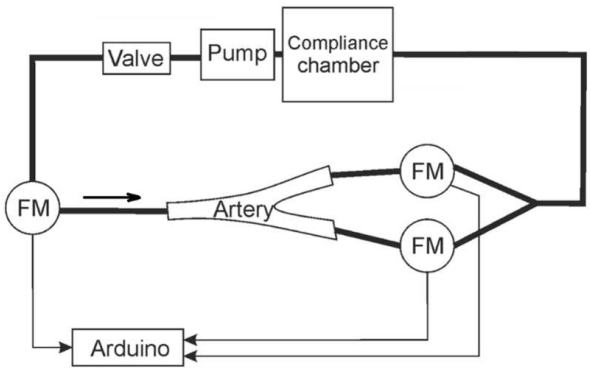


Рис. 1. Схема экспериментального стенда: FM — расходомер; Artery — модель артерии; Arduino — платформа Arduino; обрабатывающая сигналы с расходомеров; Valve — обратный клапан; Pump — пульсационный насос; Compliance chamber — расширительный бак

Fig. 1. Scheme of the experimental test bench: FM stands for flowmeter; Artery is artery model; Arduino is Arduino platform processing signals from flowmeters; Valve is check valve; Pump is pulsation pump; Compliance chamber is expansion tank

На рис. 2 приведена фотография участка стенда, включающего расходомеры и модель сонной артерии, соединенные силиконовыми трубками. В качестве жидкости в стенде используется вода из городской системы водоснабжения [7]. Эксперименты по калибровке расходомеров, а также эксперименты по определению их гидравлического сопротивления также проводились с водой. Стенд реализован по схеме «конструктора» и может быть модифицирован для нужд конкретного исследователя: может быть изменено число и положение расходомеров, могут быть исследованы разные модели сосудов.

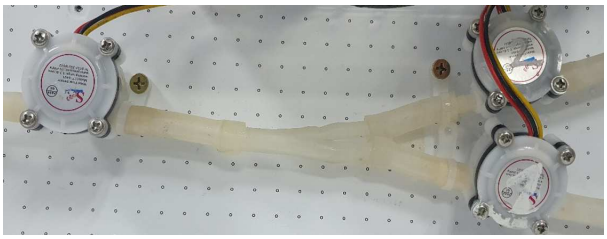


Рис. 2. Участок стенда: расходомеры и пластиковая модель артерии

Fig. 2. Experimental test bench section: flowmeters and plastic artery model

При разработке стенда использовались крыльчатые расходомеры модели

YF-S401 (производство Китай). Исследование расходомеров осуществлялось по следующей схеме.

Этап 1. Написание программы для автоматизированной обработки показаний расходомеров. Сравнение показаний трех расходомеров при различных расходах воды.

Этап 2. Калибровка расходомеров. Корректировка программы для автоматизированной обработки показаний расходомеров.

Этап 3. Использование расходомеров при измерении объемного расхода воды для модели сонной артерии (СА) (на входе в общую сонную артерию (ОСА) и выходах из внутренней сонной артерии (ВСА) и наружной сонной артериии (НСА)) в экспериментальном стенде.

Этап 4. Выполнение численного моделирования течения воды по модели СА и оценка расходов на входе в ОСА и выходах из ВСА и НСА. Сравнение с результатами, полученными на этапе 3.

Этап 5. Измерение гидравлического сопротивления расходомеров на экспериментальном стенде. Сравнение с сопротивлениями аналогичных устройств.

Этап 6. Модернизация корпуса расходомеров — увеличение входного отверстия. Измерение гидравлического сопротивления после модернизации.

Этап 7. Калибровка расходомеров. Корректировка программы для автоматизированной обработки показаний расходомеров.

Этап 8. Использование расходомеров при измерении объемного расхода воды для модели СА (на входе в ОСА и выходах из ВСА и НСА) в экспериментальном стенде.

Этап 9. Выполнение численного моделирования течения воды по модели СА и оценка расходов на входе в ОСА и выходах из ВСА и НСА. Сравнение с результатами, полученными на этапе 2.

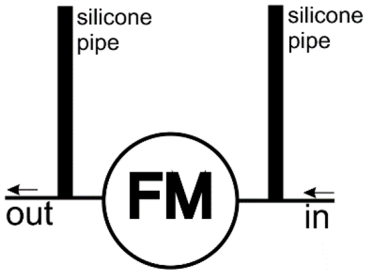


Рис. 3. Принципиальная схема стенда для измерения гидравлического сопротивления расходомеров: FM — расходомер; silicone pipe — прозрачные силиконовые трубки; in — входное отверстие входного тройника; out — выходное отверстие выходного тройника

Fig. 3. Schematic diagram of the experimental test bench for measuring the hydraulic resistance of flowmeters: FM stands for flowmeter; silicone pipe denotes transparent silicone tubes; in is inlet; out is outlet

Для измерения гидравлического сопротивления расходомеров был разработан дополнительный стенд, принципиальная схема которого представлена на рис. 3. Стенд состоит из двух вертикальных прозрачных силиконовых трубок, которые посредством тройников присоединяются к входному и выходному отверстиям расходомера. Через входной тройник подается вода из системы водоснабжения, а через выходной тройник вода попадает в канализацию. В ходе эксперимента фиксируется уровень воды в вертикальных трубках при разных расходах воды через расходомер.

Для калибровки расходомеров их подключали к системе городского водоснабжения (при постоянном расходе воды) и оценивали расход воды с помощью тарированной стеклянной посуды. Показания расходомеров записывали в автоматическом режиме с помощью платформы Arduino. В результате получали поправочные коэффициенты, которые использовали в программе-обработчике сигналов с расходомеров. Также оценивали разброс показаний расходомеров при различных расходах воды. Для этого их соединяли, последовательно подключали к городской системе водоснабжения и сравнивали их показания. Аналогичные

сравнительные эксперименты проводили и на экспериментальном стенде, представленном на рис. 1. Численные эксперименты по расчету движения воды в моделях сонных артерий выполнялись в системе Ansys CFX. С математической точки зрения решалась система уравнений Навье – Стокса [9]. В качестве метода численного решения использовался метод конечных объемов [10]. На входе в ОСА задавали объемные расходы, регистрируемые расходомером в эксперименте (рис. 4), а на выходах из ВСА и НСА задавали давление, соответствующее сопротивлению расходомеров, вычисленное через величину перепада высоты водного столба в стенде на рис. 3. Выполняли анализ сеточной сходимости, результаты которого показаны на рис. 5.

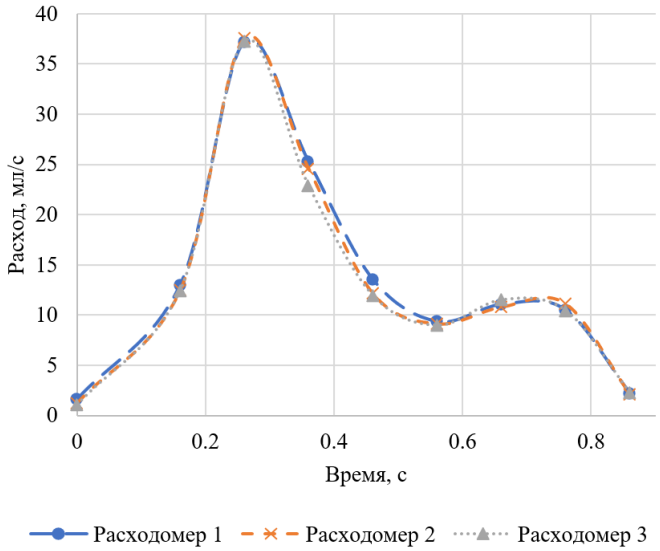


Рис. 4. Показания трех расходомеров (в рамках одного сердечного цикла), установленных последовательно

Fig. 4. Indications of three flowmeters (within one cardiac cycle) installed sequentially

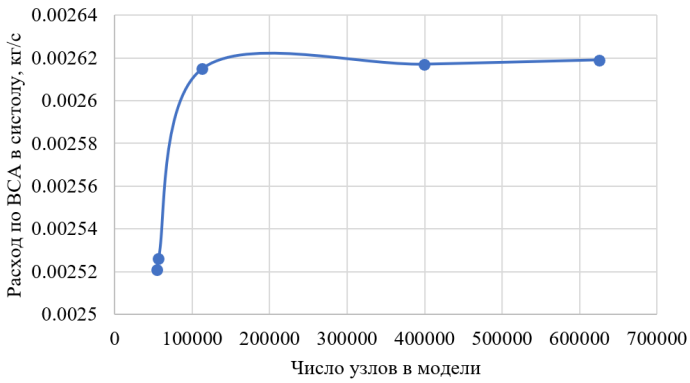


Рис. 5. Результат анализа сеточной сходимости

Fig. 5. Result of mesh convergence analysis

2. Результаты и их обсуждение

Этап 1. Программа для обработки показаний расходомеров была написана в среде Arduino IDE. В результате был получен программный код, который в автоматизированном режиме обрабатывает показания расходомеров и записывает их в текстовый

файл на флеш-карту. Кроме того, разработанная программа позволяет выводить результаты расходов, получаемые каждым расходомером, на экран компьютера в режиме реального времени.

Показания трех расходомеров (рис. 4) сравнивали друг с другом для оценки разброса их значений. Выявлено, что разброс показаний расходомеров на разных расходах составил не более 4%, что считалось допустимым.

Этап 2. Калибровка расходомеров была проведена при их подключении к системе городского водоснабжения. При постоянном расходе с помощью тарированной стеклянной посуды (мерный цилиндр объемом 100 мл, изготовленный по ГОСТ 1770-74) и цифрового секундомера оценивали его величину и сравнивали с показаниями расходомеров. Это позволило определить поправочные коэффициенты в программе обработки.

Этапы 3, 4. Разработанный стенд и установленные до и после модели артерии расходомеры были использованы для измерения расходов в ОСА, ВСА и НСА (рис. 6). Использовалась модель сонной артерии со стенозированной ВСА, величина стеноза составила 75%.

Рис. 6. Модель сонной артерии со стенозом ВСА величиной 75%

Fig. 6. Carotid artery model with ICA stenosis of 75%

Графики расходов представлены на рис. 7. Средняя за сердечный цикл разница расходов по ветвям НСА и ВСА с 75%-ным стенозом составила порядка 20%. При этом в сумме расходы на выходах из НСА и ВСА давали расход на входе в ОСА с погрешностью не более 7%.

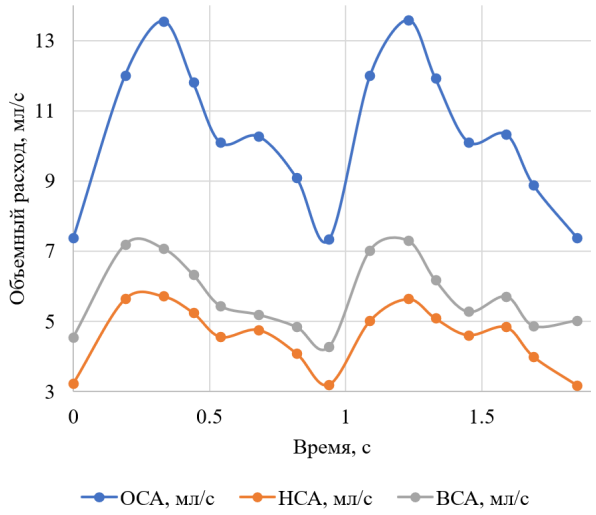


Рис. 7. Графики расходов по ветвям модели сонной артерии с 75%-ным стенозом ВСА (цвет online)

Fig. 7. Graphs of bloodflows in branches of carotid artery model with 75% ICA stenosis (color online)

Этап 5. Для задания граничных условий при численном моделировании было посчитано гидравлическое сопротивление расходомера. Перепад давления на расходомерах измеряли с помощью вспомогательного стенда, показанного на рис. 3.

Потеря давления h на расходомере рассчитывается по формуле

$$h = S * Q^2,$$

где S — гидравлическое сопротивление расходомера, Q — объемный расход. Отсюда

$$S = \frac{h}{Q^2}.$$

В эксперименте h определялась по разнице уровней воды в трубках до и после расходомера, а расход измеряли с помощью тарированной стеклянной посуды (мерный цилиндр объемом 100 мл, изготовленный по ГОСТ 1770-74) и секундомера мобильного телефона.

В таблице представлены измеренные в ходе вспомогательного эксперимента величины, а также рассчитанные гидравлические сопротивления S расходомеров до и после модернизации.

Измеренные потери давления, расходы и вычисленные гидравлические сопротивления расходомеров

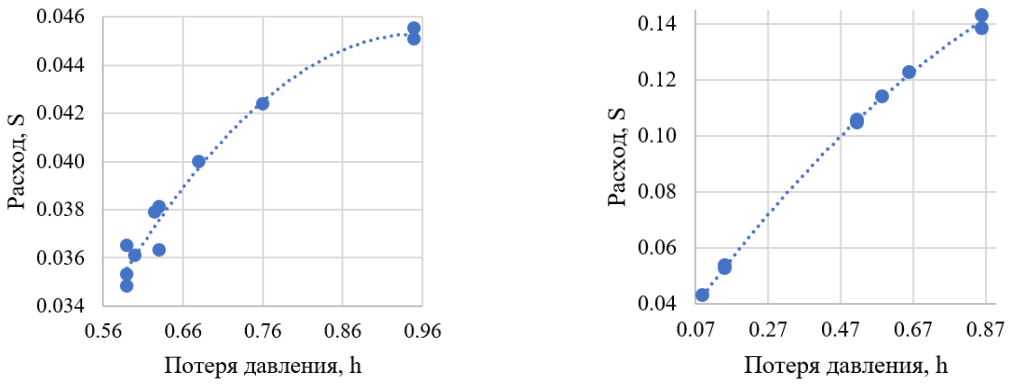
Table. Measured pressure losses, flow rates and calculated hydraulic resistances of flowmeters

До модернизации Before modernization			После модернизации After modernization		
h, м	Q, $\frac{м^3}{ч}$	S, $\frac{м}{\left(\frac{м^3}{ч}\right)^2}$	h, м	Q, $м^3/ч$	S, $\frac{м}{(м^3/ч)^2}$
0.63	0.036	478	0.15	0.053	54
0.63	0.038	433	0.09	0.043	49
0.95	0.045	467	0.66	0.123	44
0.59	0.035	486	0.52	0.108	47
0.60	0.036	460	0.52	0.106	46
0.59	0.035	473	0.59	0.114	45
0.76	0.042	426	0.86	0.143	42
0.68	0.040	425	0.86	0.138	45
Среднее S	453		47		

Моделирование в Ansys CFX той же модели артерии с рассчитанными гидравлическими сопротивлениями расходомеров на выходах (были взяты средние значения давлений, соответствующих величине перепада h) позволило получить среднюю разницу между объемными расходами по ветвям НСА и ВСА до 60%.

Этап 6. Так как результаты численного и натурного экспериментов существенно отличались, была предпринята попытка снизить гидравлическое сопротивление расходомеров, чтобы исключить их влияние на результаты экспериментов. Для этого была проведена модернизация расходомеров (увеличение диаметра входного отверстия), а затем заново измерено их гидравлическое сопротивление (см. таблицу).

Графики зависимостей объемного расхода от потери давления на расходомерах показаны на рис. 8.



а / a *б / b*

Рис. 8. Графики зависимостей объемного расхода от потери давления на расходомерах: *а* — до модернизации, *б* — после модернизации

Fig. 8. Dependences of volume flow on pressure loss in flowmeters: *a* is before modernization, *b* is after modernization

Модернизация расходомеров позволила снизить их гидравлическое сопротивление практически в 10 раз — с 453 до 47 $\frac{\text{м}}{\left(\frac{\text{м}^3}{\text{ч}}\right)^2}$.

Этапы 7–9. После модернизации расходомеров была проведена повторная их калибровка, а также повторные эксперименты на экспериментальном стенде.

Полученные графики расхода по ветвям ВСА и НСА были наложены на аналогичные графики, полученные при численном моделировании той же модели артерии. Средняя разница в сравнении с результатами моделирования в Ansys CFX при измерении расходов с помощью модернизированных расходомеров составила не более 6%.

Результаты численного и натурного экспериментов представлены на рис. 9.

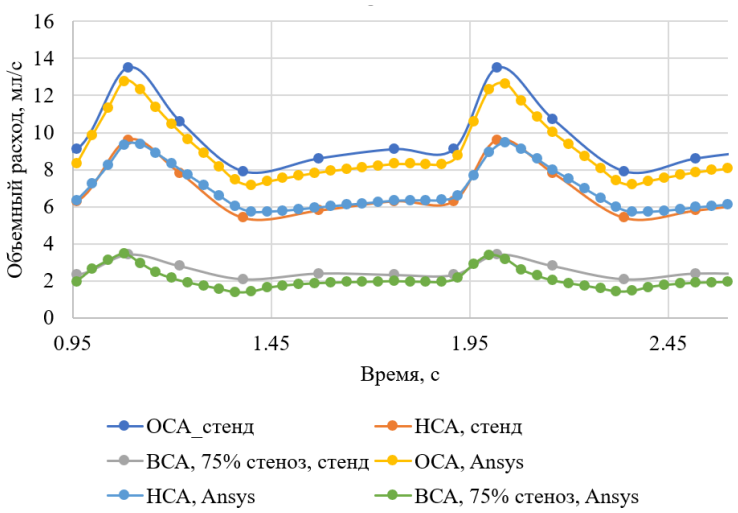


Рис. 9. Графики расходов в модели сонной артерии с 75%-ным стенозом ВСА: сравнение результатов натурного и численного экспериментов (цвет online)

Fig. 9. Flow charts in a carotid artery model with 75% ICA stenosis: comparison of the results of full-scale and numerical experiments (color online)

Таким образом, впервые был разработан экспериментальный стенд для моделирования динамики кровотока по моделям крупных артерий человека, в котором использованы крыльчатые расходомеры YF-S401. Показано, что измерение расхода по ветвям сонной артерии с помощью крыльчатых расходомеров возможно с ошибкой не более 6% в сравнении с численным моделированием.

К недостаткам крыльчатых расходомеров можно отнести то, что они передают сигнал не чаще, чем 8–10 раз в секунду. В то же время их доступность и невысокая стоимость, а также возможность подключения к программно-аппаратной платформе Arduino делают их незаменимыми при разработке экспериментальных стендов по моделированию динамики кровотока.

Выводы

Доработка расходомеров YF-S401 позволила снизить их гидравлическое сопротивление почти в 10 раз. Это дало возможность добиться высокой сходимости результатов натурных и численных экспериментов. В результате можно сделать вывод, что крыльчатые расходомеры пригодны для использования в экспериментальном стенде по исследованию динамики кровотока в крупных артериях человека.

Список литературы

1. *Ivanova Y. F., Yukhnev A. D., Gataulin Y. A., Smirnov E. M., Vrabiy A. A., Vavilov V. N.* Numerical and experimental study of the 3D flow in a graft-artery junction model // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1675, iss. 2020. P. 012003. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1675/1/012003
2. *Drayson O., Bernardini N., Abderrahaman A. B., Cerquetani L., Cipolletta A., Ferrer B. D., Falcone F., Gabetti S., Genoni M., Torta E., Vagnone F., Aguzzi M., Audas C., Compin M., Favier J.-J, Lizy-Destrez S., Morbiducci U.* AIM (Artery in microgravity): An ICE cubes mission by university students // Proceedings of the 3rd Symposium on Space Educational Activities. University of Leicester, UK, 2019. P. 109–113. https://doi.org/10.29311/2020.27
3. *Levesque J., Hermawan H., Dube D., Mantovani D.* Design of a pseudo-physiological test bench specific to the development of biodegradable metallic biomaterials // Acta Biomaterialia. 2008. Vol. 4, iss. 2. P. 284–295. https://doi.org/10.1016/j.actbio.2007.09.012
4. *Sindeev S. V., Frolov S. V., Liepsch D.* Experimental setups for studies of blood flow in arteries of cardiovascular system // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В. И. Вернадского. 2017. № 4 (66). С. 231–236. https://doi.org/10.17277/voprosy.2017.04.pp.231-236, EDN: YLQRCN
5. *Elliott W., Scott-Drechsel D., Tan W. In vitro* model of physiological and pathological blood flow with application to investigations of vascular cell remodeling // Journal of Visualized Experiments. 2015. Vol. 3, iss. 105. P. e53224. https://doi.org/10.3791/53224
6. *Доль А. В., Иванов Д. В., Бахметьев А. С., Киреев С. И., Майстренко Д. Н., Гудзь А. А.* Численное исследование влияния стеноза внутренних сонных артерий на гемодинамику артерий виллизиевого круга // Российский журнал биомеханики. 2021. Т. 25, № 4. С. 356–368. https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2021.4.01
7. *Пуговкин А. А., Селищев С. В., Телышев Д. В.* Стенд моделирования сердечно-сосудистой системы для испытаний аппаратов вспомогательного кровообращения // Медицинская техника. 2015. Т. 4, № 292. С. 17–20. EDN: TZXKBL
8. *Иванов Д. В., Доль А. В.* Биомеханическое моделирование. Саратов : Амирит, 2021. 250 с.
9. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа : учебник для вузов по специальности «Механика». Москва : Наука, 1973. 847 с.
10. *Schäfer M.* Finite-Volume Methods for Incompressible Flows // Schäfer M. Computational Engineering – Introduction to Numerical Methods. Cham : Springer, 2022. P. 247–282. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76027-4

References

1. Ivanova Y. F., Yukhnev A. D., Gataulin Y. A., Smirnov E. M., Vrabiy A. A., Vavilov V. N. Numerical and experimental study of the 3D flow in a graft-artery junction model. *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, vol. 1675, iss. 2020, pp. 012003. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1675/1/012003
2. Drayson O., Bernardini N., Abderrahaman A. B., Cerquetani L., Cipolletta A., Ferrer B. D., Falcone F., Gabetti S., Genoni M., Torta E., Vagnone F., Aguzzi M., Audas C., Compin M., Favier J.-J, Lizy-Destrez S., Morbiducci U. AIM (artery in microgravity): An ICE cubes mission by university students. *Proceedings of the 3rd Symposium on Space Educational Activities*. University of Leicester, UK, 2019, pp. 109–113. https://doi.org/10.29311/2020.27
3. Levesque J., Hermawan H., Dube D., Mantovani D. Design of a pseudo-physiological test bench specific to the development of biodegradable metallic biomaterials. *Acta Biomaterialia*, 2008, vol. 4, iss. 2, pp. 284–295. https://doi.org/doi.org/10.1016/j.actbio.2007.09.012

4. Sindeev S. V., Frolov S. V., Liepsch D. Experimental setups for studies of blood flow in arteries of cardiovascular system. *Problems of Contemporary Science and Practice. Vernadsky University*, 2017, iss. 4 (66), pp. 231–236. https://doi.org/voprosy.2017.04.pp.231-236
5. Elliott W., Scott-Drechsel D., Tan W. *In vitro* model of physiological and pathological blood flow with application to investigations of vascular cell remodeling. *Journal of Visualized Experiments*, 2015, vol. 3, iss. 105, pp. e53224. https://doi.org/10.3791/53224
6. Dol A. V., Ivanov D. V., Bakhmetev A. S., Kireev S. I., Maystrenko D. N., Gudz A. A. Influence of the internal carotid arteries stenosis on the hemodynamics of the circle of Willis communicating arteries: A numerical study. *Russian Journal of Biomechanics*, 2021, vol. 25, iss. 4, pp. 305–316. https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2021.4.01
7. Pugovkin A. A., Selishchev S. V., Telyshev D. V. Simulator for modeling the cardiovascular system for testing circulatory assist devices. *Biomedical Engineering*, 2015, vol. 49, iss. 4, pp. 213–216. https://doi.org/10.1007/s10527-015-9542-6, EDN: WTTUYF
8. Ivanov D. V., Dol A. V. *Biomekhanicheskoe modelirovanie* [Biomechanical Modeling]. Saratov, Amirit, 2021. 250 p. (in Russian).
9. Loitsyansky L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of Liquid and Gas]. Moscow, Nauka, 1973. 847 p. (in Russian).
10. Schäfer M. Finite-volume methods for incompressible flows. In: Schäfer M. *Computational Engineering – Introduction to Numerical Methods*. Cham, Springer, 2022, pp. 247–282. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76027-4

Поступила в редакцию / Received 24.05.2022
Принята к публикации / Accepted 12.06.2022
Опубликована / Published 30.11.2022

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 517–535
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 517–535
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-517-535, EDN: IJEHPA

Научная статья
УДК 517.98

Концепция систем поддержки принятия врачебных решений в хирургии позвоночно-тазового комплекса

Д. В. Иванов, Л. В. Бессонов✉, И. В. Кириллова, Л. Ю. Коссович, С. И. Киреев

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Иванов Дмитрий Валерьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, ivanovdv.84@ya.ru, https://orcid.org/0000-0003-1640-6091, AuthorID: 201794

Бессонов Леонид Валентинович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, bessonov@sgu.ru,https://orcid.org/0000-0002-5636-1644, AuthorID: 774968

Кириллова Ирина Васильевна, кандидат физико-математических наук, директор Образовательно-научного института наноструктур и биосистем, nano-bio@sgu.ru, https://orcid.org/0000-0001-8053-3680, AuthorID: 179980

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической теории упругости и биомеханики, president@sgu.ru, https://orcid.org/0000-0002-4775-7348, AuthorID: 2935

Киреев Сергей Иванович, доктор медицинских наук, декан факультета фундаментальной медицины и медицинских технологий, kireevsi@rambler.ru, https://orcid.org/0000-0002-3318-5633, AuthorID: 620012

Аннотация. Отечественные клинические рекомендации по лечению заболеваний и повреждений опорно-двигательного аппарата содержат упоминания о необходимости тщательного предоперационного планирования. В российских медицинских организациях, как правило, применяется традиционный подход к предоперационному планированию, подразумевающий использование ацетатных шаблонов имплантатов наряду с рентгеновскими пленками. В то же время представители ведущих клиник травматолого-ортопедического профиля в России придерживаются мнения, что цифровое предоперационное планирование — это высокоточный метод подбора размеров имплантатов, а также других параметров, необходимых при их установке. Считается, что предоперационное цифровое планирование и виртуальная установка шаблонов имплантатов должны быть интегрированы в предоперационное ведение больных при имплантации в качестве стандартной процедуры. Проведенный опрос экспертов травматологов и ортопедов показал необходимость внедрения компьютерных систем предоперационного планирования, обеспечивающих также и биомеханическую поддержку принимаемого решения, и прогнозирование результатов лечения. В этой связи разработана концепция систем поддержки принятия врачебных решений в хирургии позвоночно-тазового комплекса, лежащая в основе программной платформы Аккорд, являющейся базой для разработки систем предоперационного планирования в хирургии позвоночно-тазового комплекса и крупных суставов. В данной

© Иванов Д. В., Бессонов Л. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Киреев С. И., 2022

работе приведены результаты разработки концепции, а также ее апробации. Разработанная и представленная в данной статье концепция также открывает возможности для создания на ее основе систем поддержки принятия врачебных решений в других областях хирургии.

Ключевые слова: СППВР, ПТК, биомеханика, биомеханическое моделирование, предоперационное планирование, DICOM, единицы Хаунсфилда

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Фонда перспективных исследований.

Для цитирования: *Иванов Д. В., Бессонов Л. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Киреев С. И.* Концепция систем поддержки принятия врачебных решений в хирургии позвоночно-тазового комплекса // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 517–535. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-517-535, EDN: IJEHPA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

The concept of medical decision support systems in surgery of the spinal pelvic complex

D. V. Ivanov, L. V. Bessonov✉, I. V. Kirillova, L. Yu. Kossovich, S. I. Kireev

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Dmitrii V. Ivanov, ivanovdv.84@ya.ru, https://orcid.org/0000-0003-1640-6091, AuthorID: 201794
Leonid V. Bessonov, bessonov@sgu.ru,https://orcid.org/0000-0002-5636-1644, AuthorID: 774968
Irina V. Kirillova, nano-bio@sgu.ru, https://orcid.org/0000-0001-8053-3680, AuthorID: 179980
Leonid Yu. Kossovich, president@sgu.ru, https://orcid.org/0000-0002-4775-7348, AuthorID: 2935
Sergey I. Kireev, kireevsi@rambler.ru, https://orcid.org/0000-0002-3318-5633, AuthorID: 620012

Abstract. Russian clinical guidelines for the treatment of diseases and injuries of the musculoskeletal system contain references to the need for careful preoperative planning. In Russian medical organizations, as a rule, the traditional approach to preoperative planning is used, which implies the use of acetate implant templates along with X-ray films. At the same time, representatives of the leading clinics of trauma and orthopedic profile in Russia are of the opinion that digital preoperative planning is a high-precision method for selecting the size of implants, as well as other parameters required for their installation. It is believed that preoperative digital planning and virtual placement of implant templates should be integrated into the preoperative management of implantation patients as a standard procedure. A survey of experts, traumatologists and orthopedists, showed the need for the introduction of computer systems for preoperative planning, which also provide biomechanical support for the decision made and predict treatment results. In this regard, the concept of support systems for making medical decisions in surgery of the spine-pelvic complex has been developed, which lies at the core of the program platform Accord, which is the basis for the development of preoperative planning systems in surgery of the spine-pelvic complex and large joints. This paper presents the results of the development of the concept, as well as its approbation. The concept developed and presented in this article also opens up opportunities for creating systems to support medical decision-making in other areas of surgery on its basis.

Keywords: MDSS, spinal pelvic complex, biomechanics, biomechanical modeling, preoperative planning, DICOM, Haunsfield units

Acknowledgements: The study was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Advanced Research.

For citation: Ivanov D. V., Bessonov L. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Kireev S. I. The concept of medical decision support systems in surgery of the spinal pelvic complex. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 517–535 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-517-535, EDN: IJEHPA

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Важнейшим условием получения качественных анатомо-функциональных результатов хирургического лечения последствий заболеваний и повреждений позвоночно-тазового комплекса (ПТК) является грамотное предоперационное планирование (ПП). В рамках ПП в травматологической практике осуществляется подбор имплантатов, способов их установки для обеспечения стабильности фиксации и репозиции костных отломков. При эндопротезировании суставов конечностей, корригирующих остеотомиях, а также декомпрессивно-стабилизирующих и корригирующих операциях на ПТК в рамках ортопедического ПП обеспечивается подбор имплантатов для воссоздания оптимальной биомеханики оперируемого сегмента [1, гл. 10, с. 7–24].

Современные программные комплексы, среди которых стоит выделить MediCAD, TraumaCAD, Surgimap, OrthoView [2,3], обладают схожим набором инструментов ПП. С их помощью врач может осуществить рентгеноморфометрические измерения [4] на снимках компьютерной томограммы (КТ) или рентгенограммы, а также расположить шаблоны имплантатов и подобрать их размер. Такое ПП называют геометрическим. В то же время при лечении конкретного пациента может быть запланировано более одного варианта лечения, успешных с точки зрения геометрического ПП. Другими словами, каждый из этих вариантов приведет к адекватной коррекции патологического сегмента ПТК, а также к правильной установке имплантатов. Однако не каждый из запланированных вариантов лечения будет успешным с точки зрения оценки прочности рассматриваемого сегмента ПТК и планируемых к установке имплантатов [5,6].

Оценить успешность лечения с точки зрения прочности конструкции «кость – имплантат» может биомеханическое моделирование. В этой связи этап геометрического планирования (ГП) необходимо дополнить этапом биомеханического моделирования (БМ) и использовать его в качестве одного из инструментов ПП. БМ вместе с ГП позволяют провести количественную оценку вариантов лечения и на этапе ПП построить для каждого из них послеоперационный прогноз в ближайшей перспективе. Но спрогнозировать отдаленные результаты лечения можно только с помощью до- и послеоперационной оценки качества жизни пациентов. Решение этой задачи сегодня осуществляется с помощью опросников и шкал оценки качества жизни пациентов и медицинских регистров [7–10].

Под прогнозированием результатов лечения будем понимать построение индивидуального послеоперационного прогноза на основе до- и послеоперационной оценки качества его жизни и пациентов с аналогичными клиническими случаями.

Таким образом, ПП хирургического лечения последствий заболеваний и повреждений ПТК впервые в мире предлагается осуществлять в три этапа в соответствии

с методологией (способом ПП) «планирование – моделирование – прогноз», которая легла в основу программной платформы Аккорд и пилотной версии системы ПП SmartPlan Ortho 2D[1], разработанной в Саратовском национальном исследовательском государственном университете имени Н. Г. Чернышевского (СГУ). При создании программной платформы Аккорд была разработана концепция систем поддержки принятия врачебных решений в хирургии ПТК (концепция СППВР), представленная в данной статье.

1. Материалы и методы

При разработке концепции СППВР и программной платформы Аккорд был изучен рынок существующих систем ПП, применяемых в хирургии ПТК, а также научная литература, посвященная ПП, в том числе ГП, БМ, в хирургии ПТК. Обзор литературы осуществлялся по базам данных E-library, Scopus, Web of Science, Google Schoolar. Искали и анализировали литературу по следующим тематикам (ключевым словам):

- СППВР в медицине;
- СППВР в хирургии;
- системы предоперационного планирования в хирургии ПТК;
- предоперационное планирование хирургического лечения;
- геометрическое планирование хирургического лечения;
- сагиттальный баланс;
- параметры сагиттального баланса;
- биомеханическое моделирование вариантов лечения;
- биомеханическое моделирование позвоночника, ПТК, тазобедренного сустава, имплантатов;
- прогнозирование результатов лечения.

Также был проведен опрос [11] экспертов в области травматологии и ортопедии (хирургов ортопедов и травматологов), который позволил сформулировать требования к разработке СППВР и ее функциональным возможностям.

Разработка программной платформы Аккорд велась в соответствии с технологией разработки CI/CD (непрерывная интеграция/непрерывное развертывание), подразумевающей разделение ответственности всех участников процесса разработки, тестирования и развертывания, снижение рисков при инкрементальном обновлении продукта и формирование короткого цикла обратной связи с потребителем продукта.

2. Результаты

В перечисленных выше базах данных научной литературы было найдено 78 статей, посвященных рассматриваемой в работе проблеме. Также было найдено и проанализировано шесть основных программных продуктов, обеспечивающих процесс ПП в хирургии ПТК. Среди проанализированных продуктов следует выделить такие, как MediCAD, Orthoview, TraumaCAD, Sectra AB, Surgimap (программы для настольного компьютера), Sagittal Meter (мобильное приложение для смартфонов).

Проведен обзор литературы и существующих систем планирования предоперационного планирования в хирургии ПТК [12]. Каждая из проанализированных систем

[1]Система предоперационного планирования в хирургии позвоночно-тазового комплекса с биомеханической поддержкой «SmartPlan Ortho 2D». https://reestr.digital.gov.ru/reestr/339480/?sphrase_id=562379

ПП для настольного компьютера может работать с медицинскими изображениями формата DICOM и имеет интерфейсы для работы с PACS (Picture Archiving and Communication System) серверами. Современные системы планирования позволяют выполнять только геометрическое предоперационное планирование лечения, заключающееся в возможности:

- работы с позвоночником, тазобедренным или коленным суставом;
- автоматического распознавания некоторых анатомических элементов ПТК;
- работы с медицинскими изображениями в формате DICOM и растровыми изображениями;
- оценки единиц Хаунсфилда на изображении;
- выполнения различных геометрических измерений (длин, углов, площадей), необходимых для оценки степени деформации и коррекции, часть из которых осуществляется в полуавтоматическом режиме;
- осуществления разрезов изображения для моделирования виртуальной операции;
- размещения на медицинском изображении шаблонов имплантатов;
- сохранения результатов планирования в базу данных;
- составления отчета о планировании.

Системы планирования, представленные на рынке, позволяют работать с какой-то одной анатомической областью, например с позвоночником, тазобедренными суставами или коленными суставами. Систем, которые могли бы работать с ПТК в целом, на рынке найдено не было.

Анализ литературы выявил, что БМ позволяет персонифицированно оценить виды и типоразмеры имплантатов, риск их поломки и повреждения кости во время операции [13–15]. Более того, разработаны и опубликованы пошаговые инструкции по применению методов обработки медицинских изображений и проведению персонифицированного БМ с применением систем Mimics, Ansys [16]. Но такой подход не позволяет внедрить методику БМ в повседневную практику ПП в клинике и обеспечить потоковое решение задач биомеханики, так как является крайне трудоемким процессом и не позволяет автоматизировать процесс БМ, а предполагает использование дорогостоящих и сложных для использования компьютерных программ.

Что касается вопроса прогнозирования результатов лечения, то анализ литературы показал, что многие исследователи занимаются вопросами выявления предикторов прогноза [17], а также построения моделей прогнозирования результатов лечения деформаций и травм на ПТК [18–22] еще с 80-х гг. прошлого века. В последние годы послеоперационный прогноз и прогнозное обоснование успешных вариантов лечения строят на основе результатов до- и послеоперационного опроса пациентов [23, 24].

Проведенный обзор литературы, а также анализ представленных на рынке систем ГП позволил установить, что разработка СППВР, обладающей функциями ГП, БМ и прогнозирования результатов лечения, является актуальной задачей. Необходима разработка методов по упрощению постановки и решения задач биомеханики, автоматизации методов построения твердотельных и биомеханических моделей исследуемых объектов. Возникает также проблема хранения и использования в БМ высокоточных моделей имплантатов. Крайне актуальным также является вопрос о неинвазивном получении механических свойств моделируемых объектов.

3. Разработка концепции СППВР и платформы Аккорд

Приведем далее результаты разработки платформы Аккорд, ее компонентов и концепции, лежащей в ее основе. Платформа имеет модульную структуру, представленную на рис. 1, и обеспечивает ПП в соответствии со способом ПП «планирование – моделирование – прогноз».

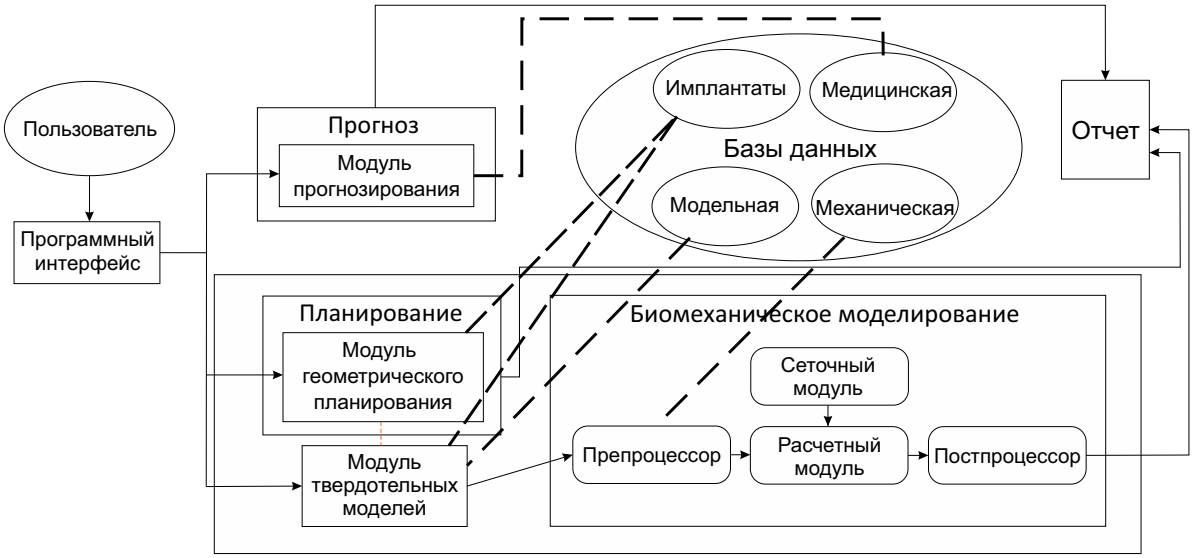


Рис. 1. Структура разработанной программной платформы Аккорд
Fig. 1. The structure of the developed software platform Accord

Качественное персонифицированное ПП невозможно без использования высокоточных шаблонов имплантатов, хранение и использование которых в СППВР осуществляется посредством баз данных (БД). С этой целью была разработана БД «Имплантаты»[2], содержащая в себе высокоточные шаблоны (для геометрического планирования) и модели (для биомеханического моделирования) имплантатов, зарегистрированных на территории России.

В рамках разработанной платформы ГП может проводиться на настольном компьютере, а также с помощью мобильного приложения «СпиноМетр» [25]. Обе версии программ для ГП для измеряемых хирургом основных геометрических параметров ПТК рассчитывают их оптимальные (теоретические) значения. Таким образом, врач видит, какие параметры необходимо скорректировать во время операции, что на этапе ПП позволяет оценить уровень и степень коррекции.

Для оценки единиц Хаунсфилда костной ткани по КТ, а также неинвазивного измерения модуля Юнга губчатой костной ткани разработана и внедрена в платформу методика [26]. Механические свойства костных тканей, межпозвонковых дисков, связок, имплантатов хранятся в БД «Механическая»[3] и могут быть использованы

[2]Свидетельство о государственной регистрации базы данных № 2021621564 Российская Федерация. База данных «Имплантаты версии 3.0» для прототипа Системы поддержки принятия врачебных решений, режим персональной виртуальной операционной 3D : № 2021621418 : заявл. 09.07.2021 : опубл. 20.07.2021 / Л. Ю. Коссович, И. В. Кириллова, А. С. Фалькович [и др.] ; заявитель Российская Федерация, от имени которой выступает ФОНД ПЕРСПЕКТИВНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ.

[3]Свидетельство о государственной регистрации базы данных № 2021621544 Российская Федерация. База данных «Механическая версии 3.0» для прототипа Системы поддержки принятия врачебных решений, режим персональной виртуальной операционной 3D : № 2021621414 : заявл. 09.07.2021 : опубл. 19.07.2021 / Л. Ю. Коссович, И. В. Кириллова, А. С. Фалькович [и др.] ; заявитель Российская Федерация, от имени которой выступает ФОНД ПЕРСПЕКТИВНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ.

в персонифицированном БМ вариантов лечения [27], выполняемого с помощью платформы.

С целью автоматизации процесса БМ и упрощения работы с платформой была разработана и апробирована нейронная сеть, реализующая автоматизированную сегментацию изображений КТ и построения на их основе твердотельных моделей тел позвонков [28].

При работе с платформой врач может выполнять БМ вариантов лечения, решая задачу статики механики деформируемого твердого тела [15, 29, 30]. Другими словами, врачу доступен инструмент оценки прочности (напряженно-деформированного состояния) системы «кость-имплантат» под действием внешних типовых нагрузок. Такими нагрузками моделируются статическое положение тела человека, а также его различные повороты и вращения [30–35].

Для составления индивидуального послеоперационного прогноза в рамках ПП посредством разработанной платформы с помощью БД «Медицинская»[4] хранятся и анализируются результаты до- и послеоперационных опросов пациентов об их качестве жизни. БД «Медицинская» используется и для формирования регистровых выгрузок, лежащих в основе медицинских регистров [36–39] пациентов с патологиями ПТК. БД «Медицинская» также является инструментом ведения электронной медицинской карты пациента и хранения медицинских изображений формата DICOM [40].

Ряд клинических случаев (например, сочетанные патологии, врожденные деформации [41] и др.) требует высокоточного и трехмерного ГП и БМ, необходимого для обоснования выбора успешного варианта лечения. В то же время в своей практике врачи, как правило, сталкиваются со «стандартными» клиническим случаями, при лечении которых можно обойтись «стандартными» алгоритмами лечения.

Для решения задач ПП и «сложных», и «стандартных» клинических случаев платформа Аккорд может использоваться в двух режимах: персональная виртуальная операционная (ПВО) и региональный центр (РЦ). В режиме ПВО врач самостоятельно планирует лечение «стандартных» клинических случаев и использует настольный компьютер в клинике, что позволяет решать задачу ПП в упрощенной постановке. В режиме ПВО используется базовая версия программного обеспечения СППВР и имеющего ограничения в постановке задачи биомеханики. В режиме РЦ используется расширенная версия программного обеспечения платформы, которая подразумевает использование мощных вычислительных компьютеров и позволяет решать задачу биомеханики в наиболее полной постановке. В этой связи предполагается привлечение инженеров-биомехаников для выполнения БМ в рамках режима РЦ. Реализация режимов работы платформы позволяет решать задачу ПП для всех клинических случаев, возникающих в практике врачей хирургов травматологов и ортопедов. Схема взаимодействия РЦ и медицинской организации (клиники) представлена на рис. 2.

Все модули платформы, отвечающие за ПП в соответствии со способом «планирование – моделирование – прогноз», имеют единую систему аутентификации и авторизации пользователей. Поэтому администратор медицинской организации (МО) может гибко определять уровень доступа пользователя (врача, заведующего отделением, главного врача и иных лиц) к данным пациентов и протоколам ПП.

[4]Свидетельство о государственной регистрации базы данных № 2020622181 Российская Федерация. База данных «Медицинская» для прототипа Системы поддержки принятия врачебных решений, режим персональной виртуальной операционной : № 2020621719 : заявл. 01.10.2020 : опубл. 06.11.2020 / Л. Ю. Коссович, И. В. Кириллова, А. С. Фалькович [и др.] ; заявитель Российская Федерация, от имени которой выступает ФОНД ПЕРСПЕКТИВНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ.

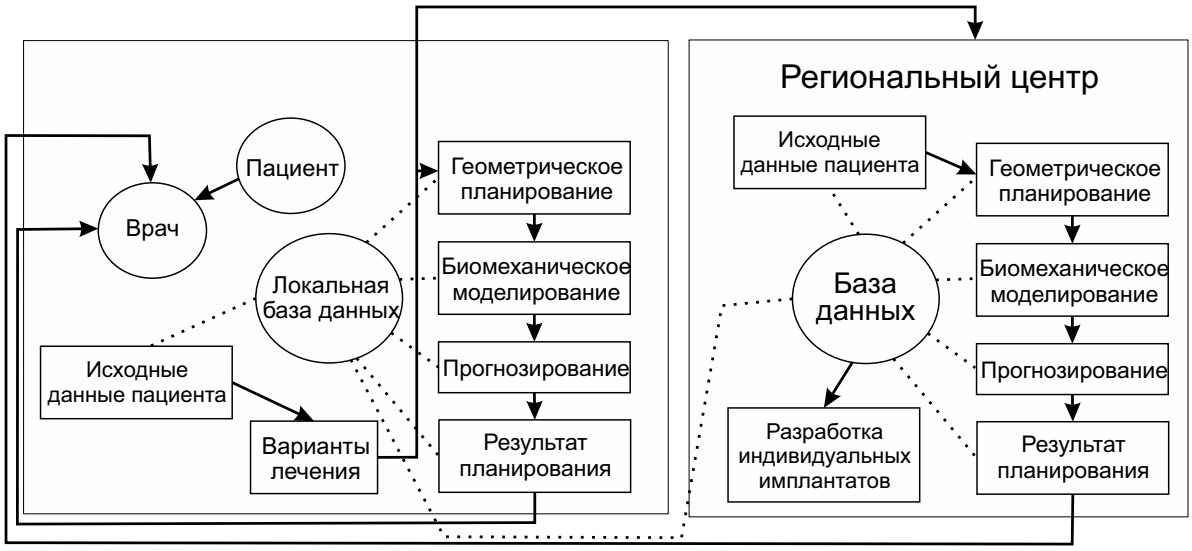


Рис. 2. Схема взаимодействия регионального центра и медицинской организации
Fig. 2. Scheme of interaction between a regional center and a medical organization

В БД платформы центральной сущностью является пациент, с которым ассоциируются его клинические случаи (описанные случаи заболеваний и повреждений элементов ПТК), результаты ПП лечения (в том числе ГП и БМ), имплантаты, планируемые к установке во время операции, а также до- и послеоперационные опросы о качестве жизни. Все медицинские данные в БД платформы хранятся в обезличенном виде.

4. Апробация концепции СППВР и системы ПП

Апробация разработанной концепции, компонентов платформы и платформы в целом проводилась в три этапа (таблица). Технологическая компонента апробации, заключающаяся в обработке обезличенных исходных данных пациентов, образцов имплантатов, работе с платформой и ее компонентами, выполнении ГП, БМ и прогнозировании результатов лечения с помощью платформы (2-й и 3-й этапы апробации) и с помощью специализированного ПО (1-й этап апробации, программы Ansys, SolidWorks), выполнялась сотрудниками СГУ.

План апробации концепции СППВР и платформы Аккорд
Table. Plan for the approbation of the concept of SPPVR and the Accord platform

Этап апробации	Апробация компонентов платформы Аккорд	Количество пациентов, обезличенные данные которых использованы в апробации
Этап 1. Апробация в режиме работы РЦ	Апробация ГП и БМ в режиме РЦ с использованием БД «Медицинская», «Модельная» и «Механическая» платформы Аккорд. Цель: показать возможности способа ПП (с использованием компонентов системы ПП и специализированного ПО) при обосновании оптимального варианта лечения для конкретного пациента	25

Окончание таблицы / Continuing of the Table

Этап апробации	Апробация компонентов платформы Аккорд	Количество пациентов, обезличенные данные которых использованы в апробации
Этап 2. Апробация в режиме работы ПВО (2D)	Апробация ГП, БМ в режиме ПВО (2D) с использованием: мобильного приложения «СпиноМетр», «Модуля твердотельных моделей», «Модуля препроцессор», «Сеточного модуля», «Расчетного модуля», «Модуля постпроцессор», «Модуля БД» платформы Аккорд при обосновании оптимального варианта лечения для конкретного пациента, а также при сегментации изображений КТ, расчете параметров сагиттального баланса ПТК	30
Этап 3. Апробация в режиме работы ПВО (3D)	Апробация ГП, БМ в режиме ПВО (3D) с использованием платформы Аккорд	26

Медико-экспертная компонента апробации, заключающаяся в сборе, анализе и предоставлении обезличенных исходных данных пациентов, образцов имплантатов, работе с медицинскими регистрами пациентов, консультировании медицинских работников и медико-экспертном сопровождении работы платформы, выполнялась сотрудниками СГМУ им. В. И. Разумовского.

Этап 1 апробации показал, что способ ПП «планирование – моделирование – прогноз» позволяет для конкретного пациента с заболеванием и/или повреждением ПТК выбрать оптимальный вариант лечения. Оценка эффективности результатов апробации была проведена экспертами СГМУ им. В. И. Разумовского. Эффективность составила 95%.

Результаты этапа 2 апробации подтвердили возможности системы ПП при планировании лечения последствий заболеваний и повреждений ПТК в режиме ПВО (2D). Другими словами, система ПП обеспечивает полный цикл планирования, а интерфейс ее компонентов доступен для использования врачами в клинической практике. Мобильное приложение «СпиноМетр» обеспечивает высокую точность и удобство измерения и прогнозного расчета параметров сагиттального баланса наравне с аналогичными программами для настольного компьютера (Surgimap), а его межэкспертная надежность была доказана в рамках апробации [25]. Также было показано [42], что точность автоматического распознавания двумерных тел позвонков в «Модуле твердотельных моделей» платформы составляет 91%, это соответствует результатам аналогичных исследований [43].

Этап 3 апробации показал, что платформа может быть использована не только для персонифицированного ГП и БМ, но и для прогнозирования результатов лечения в отдаленном периоде [27]. Более того, было показано [28], что в рамках платформы решена задача автоматизированного построения индивидуализированных трехмерных твердотельных моделей элементов позвоночно-тазового комплекса, а также реализован компонент, позволяющий неинвазивно определить механические свойства костной ткани на основании анализа областей компьютерной томограммы, соответствующих распознанным позвонкам [26, 28].

В результате проведенного анализа и разработки платформы была сформулирована концепция СППВР в хирургии ПТК. Концепция включает в себя требования к разработке СППВР, обеспечивающих ПП вариантов лечения последствий заболеваний и повреждений ПТК и работающих на основе способа ПП «планирование – моделирование – прогноз».

Современная СППВР в хирургии ПТК должна:

1) основываться на способе «планирование – моделирование – прогноз»;

2) работать с медицинскими данными пациента формата DICOM;

3) иметь в составе БД с шаблонами и моделями имплантов, механическими свойствами элементов ПТК и медицинским данными пациентов;

4) работать с обезличенными данными пациентов;

5) обеспечивать полный цикл ПП, включающий в себя ГП, БМ и прогнозирование результатов лечения;

6) рассчитывать оптимальные (теоретические) значения основных геометрических параметров сагиттального баланса ПТК;

7) неинвазивно определять механические свойства костных тканей ПТК;

8) иметь в составе средства формирования регистра пациентов с патологиями ПТК;

9) иметь модульную структуру и единую систему аутентификации и авторизации пользователей;

10) хранить в БД все результаты ПП (включая результаты ГП и БМ, прогнозирования);

11) автоматически сегментировать изображения КТ и создавать на их основе твердотельные модели элементов ПТК;

12) работать в двух режимах и покрывать все возможные задачи ПП для «стандартных» и «сложных» клинических случаев заболеваний и повреждений ПТК.

5. Обсуждение

Проведенное исследование выявило, что ГП в рамках ПП успешно реализовано в современных системах ПП, используемых в России и за рубежом. Но опыта полноценного внедрения процессов БМ и прогнозирования результатов лечения в ежедневную клиническую практику, а также их реализации в СППВР обнаружено не было. В то же время некоторые исследователи успешно применяют БМ при планировании лечения, исследовании прочности конструкции «кость-имплантат», стабильности фиксации при подборе имплантатов и техник их установки [44–49]. Вопросы прогнозирования результатов лечения также поднимаются современными исследователями [50, 51]. Таким образом, задача разработки и внедрения СППВР с функциями ГП, БМ и прогнозирования является актуальной. Актуальность также подтверждается результатами проведенного опроса [11] экспертов в области травматологии и ортопедии (хирургов ортопедов и травматологов), более 60% которых считают необходимым использование компьютерных систем ПП в своей деятельности. Среди вертебрологов такое мнение разделяют более 70% специалистов. Более того, представители организаторов здравоохранения подтверждают [52], что СППВР в хирургии ПТК является востребованным компонентом отраслевой автоматизированной системы управления.

Данная работа формулирует концепцию СППВР, обеспечивающей ПП в соответствии со способом «планирование – моделирование – прогноз». Разработанная кон-

цепция легла в основу программной платформы Аккорд и пилотной версии системы предоперационного планирования SmartPlan Ortho 2D, реализованных в СГУ при поддержке Фонда перспективных исследований. Разработка программной платформы Аккорд велась с 2018 по 2021 г., каждый этап которой сопровождался апробацией режимов работы, компонентов программной платформы Аккорд и платформы в целом совместно со специалистами ведущих отечественных медицинских организаций травматолого-ортопедического профиля. Среди таких организаций следует отметить ВМА им. С. М. Кирова, НМИЦ ТО им. Н. Н. Приорова, НМИЦ ТО им. академика Г. А. Илизарова, НИИ скорой помощи им. И. И. Джанелидзе, НМИЦ ТО им. Р. Р. Вредена, СГМУ им. В. И. Разумовского. Апробация показала, что разработанная платформа позволяет эффективно планировать лечение последствий повреждений и заболеваний ПТК.

Разработанная концепция открывает возможности для создания на ее основе СППВР в других областях хирургии, так как определяет фундаментальные требования к таким системам, основанным на методологии ПП «планирование – моделирование – прогноз».

Список литературы

1. Руководство по хирургии тазобедренного сустава / под ред. Р. М. Тихилова, И. И. Шубнякова. Т. 2. Сакт-Петербург : РНИИТО, 2015. 355 с. EDN: WIOZMD
2. *Zawojska K., Wnuk-Scardaccione A., Bilski J., Nitecka E.* Correlation of body mass index with pelvis and lumbar spine alignment in sagittal plane in hemophilia patients // Medicina (Kaunas). 2019. Vol. 55, iss. 10. P. 627. https://doi.org/10.3390/medicina55100627
3. *Рябых С. О., Ульрих Э. В., Мушкин А. Ю., Губин А. В.* Лечение врожденных деформаций позвоночника у детей: вчера, сегодня, завтра // Хирургия позвоночника. 2020. Т. 17, № 1. С. 15–24. http://dx.doi.org/10.14531/ss2020.1.15-24
4. *Ames C. P., Smith J. S., Scheer J. K., Bess S., Bederman S.S., Deviren V., Lafage V., Schwab F., Shaffrey C. I.* Impact of spinopelvic alignment on decision making in deformity surgery in adults: A review // Journal of Neurosurgery: Spine. 2012. Vol. 16, iss, 6. P. 547–564. https://doi.org/10.3171/2012.2.SPINE11320
5. *Wang B., Ke W., Hua W., Zeng X., Yang C.* Biomechanical evaluation and the assisted 3D printed model in the patient-specific preoperative planning for thoracic spinal tuberculosis: A finite element analysis // Frontiers in Bioengineering and Biotechnology. 2020. № 8. P. 807. https://doi.org/10.3389/fbioe.2020.00807
6. *Wolański W., Gzik-Zroska B., Kawlewska E., Gzik M., Larysz D., Dzielicki J., Rudnik A.* Preoperative planning of surgical treatment with the use of 3D visualization and finite element method // Lecture Notes in Computational Vision and Biomechanics. 2015. Vol. 19. P. 139–163. https://doi.org/10.1007/978-3-319-13407-9_9
7. *Cao P., Hao W., Zhang L., Zhang Q., Liu X., Li M.* Safety and efficacy studies of vertebroplasty with dual injections for the treatment of osteoporotic vertebral compression fractures: Preliminary report // Academic Radiology. 2020. Vol. 27, iss. 8. P. e224–e231. https://doi.org/10.1016/j.acra.2019.09.023
8. *Cook C. E., Learman K. E., O'Halloran B. J., Showalter C. R., Kabbaz V. J., Goode A. P., Wright A. A.* Which prognostic factors for low back pain are generic predictors of outcome across a range of recovery domains? // Physical Therapy. 2013. Vol. 93, iss. 1. P. 32–40. https://doi.org/10.2522/ptj.20120216
9. *Cheng L., Cai H., Yu Y., Li W., Li Q., Liu Z.* Modified full-endoscopic interlaminar discectomy via an inferior endplate approach for lumbar disc herniation: retrospective 3-year results from 321 patients // World Neurosurg. 2020. Vol. 141. P. e537–e544. https://doi.org/10.1016/j.wneu.2019.10.034

10. *Fairbank J. C., Pynsent P. B.* The oswestry disability index // Spine. 2000. Vol. 25, iss. 22. P. 2940–2952. https://doi.org/10.1097/00007632-200011150-00017
11. *Федонников А. С., Колесникова А. С., Рожкова Ю. Ю., Кириллова И. В., Ковтун А. Л., Коссович Л. Ю.* Анализ потребностей медицинских специалистов при проектировании систем поддержки принятия врачебных решений для травматологии и ортопедии // Технологические инновации в травматологии, ортопедии и нейрохирургии: интеграция науки и практики : сб. науч. тр. Саратов : Амирит, 2019. С. 286–288. EDN: CEJKPV
12. *Колесникова А. С., Федонников А. С., Кириллова И. В., Ульянов В. Ю., Левченко К. К., Киреев С. И., Коссович Л. Ю., Норкин И. А.* Возможности систем поддержки принятия решений в контексте хирургии позвоночно-тазового комплекса (аналитический обзор) // Гений ортопедии. 2019. Т. 25, № 2. С. 243–253. https://doi.org/10.18019/1028-4427-2019-25-2-243-253
13. *Shin J. K., Lim B. Y., Goh T. S., Son S. M., Kim H. S., Lee J. S., Lee C. S.* Effect of the screw type (S2-alar-iliac and iliac), screw length, and screw head angle on the risk of screw and adjacent bone failures after a spinopelvic fixation technique: A finite element analysis // PLoS One. 2018. Vol. 13, iss. 8. P. 296–301. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0201801
14. *Jia Y. W., Cheng L. M., Yu G. R., Du C. F., Yang Z. Y., Yu Y., Ding Z. Q.* A finite element analysis of the pelvic reconstruction using fibular transplantation fixed with four different rod-screw systems after type I resection // Chinese Medical Journal. 2008. Vol. 121, iss. 4. P. 321–326. http://dx.doi.org/10.1097/00029330-200802020-00008
15. *Доль А. В., Доль Е. С., Иванов Д. В.* Биомеханическое моделирование вариантов хирургического реконструктивного лечения спондилолистеза позвоночника на уровне L4–L5 // Российский журнал биомеханики. 2018. Т. 22, № 1. С. 31–44. https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2018.1.03, EDN: YMCSSL
16. *Wu W., Han Z., Hu B., Du C., Xing Z., Zhang C., Gao J., Shan B., Chen C.* A graphical guide for constructing a finite element model of the cervical spine with digital orthopedic software // Annals of Translational Medicine. 2021. Vol. 9, № 2. https://doi.org/10.21037/atm-20-2451
17. *Pitkänen M. T., Manninen H. I., Lindgren K. A., Sihvonen T. A., Airaksinen O., Soimakallio S.* Segmental lumbar spine instability at flexion-extension radiography can be predicted by conventional radiography // Clinical Radiology. 2002. Vol. 57, iss. 7. P. 632–639. https://doi.org/10.1053/crad.2001.0899
18. *Байков Е. С.* Прогнозирование результатов хирургического лечения грыж поясничных межпозвонковых дисков : дис. ... канд. мед. наук. Новосибирск, 2014. 135 с.
19. *Крутько А. В., Пелеганчук А. В., Козлов Д. М., Гладков А. В., Ахметьянов Ш. А.* Корреляционная зависимость клинико-морфологических проявлений и биомеханических параметров у больных с дегенеративным спондилолистезом l4 позвонка // Травматология и ортопедия России. 2011. Вып. 4 (62). С. 44–52. EDN: OXYZVR
20. *Байков Е. С., Русова Т. В., Крутько А. В., Байкалов А. А.* Связь биохимических параметров позвоночно-двигательного сегмента с результатами хирургического лечения грыж поясничных межпозвонковых дисков // Хирургия позвоночника. 2013. № 2. С. 43–49. https://doi.org/10.14531/ss2013.2.43-49, EDN: QASRWB
21. *Хвисюк Н. И., Продан А. И., Волков Е. В.* Прогнозирование результатов хирургического лечения корешковых синдромов при грыжах и массивных протрузиях межпозвонковых дисков // Ортопедия, травматология и протезирование. 1985. № 5. С. 34–38.
22. *Than K. D., Park P., Fu K. M., Nguyen S., Wang M. Y., Chou D., Nunley P. D., Anand N., Fessler R. G., Shaffrey C. I., Bess S., Akbarnia B. A., Deviren V., Uribe J. S., La Marca F., Kanter A. S., Okonkwo D. O., Mundis G. M., Mummaneni P. V.* Clinical and radiographic parameters associated with best versus worst clinical outcomes in minimally invasive spinal deformity surgery // Journal of Neurosurgery: Spine. 2016. Vol. 25, iss. 1. P. 21–25. https://doi.org/10.3171/2015.12.SPINE15999

23. *Solberg T., Johnsen L. G., Nygaard Ø. P., Grotle M.* Can we define success criteria for lumbar disc surgery? // Acta Orthopaedica. 2013. Vol. 84, iss. 2. P. 196–201. https://doi.org/10.3109/17453674.2013.786634
24. *Werner D. A. T., Grotle M., Gulati S., Austevoll I. M., Lønne G., Nygaard Ø. P., Solberg T. K.* Criteria for failure and worsening after surgery for lumbar disc herniation: a multicenter observational study based on data from the Norwegian Registry for Spine Surgery // European Spine Journal. 2017. Vol. 26. P. 2650–2659. https://doi.org/10.1007/s00586-017-5185-5
25. *Иванов Д. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Лихачев С. В., Полиенко А. В., Харламов А. В., Шульга А. Е.* Сравнительный анализ мобильного приложения для измерения параметров сагиттального баланса «СпиноМетр» с системой Surgimap: апробация межэкспертной надежности // Гений ортопедии. 2021. Т. 27, № 1. С. 74–79. https://doi.org/10.18019/1028-4427-2021-27-1-74-79, EDN: MXWDWV
26. *Bessonov L. V., Golyadkina A. A., Dmitriev P. O., Dol A. V., Zolotov V. S., Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Titova Yu. I., Ulyanov V. Yu., Kharlamov A. V.* Constructing the dependence between the Young's modulus value and the Hounsfield units of spongy tissue of human femoral heads // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 182–193. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-182-193
27. *Бескровный А. С., Бессонов Л. В., Голядкина А. А., Доль А. В., Иванов Д. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Сидоренко Д. А.* Разработка системы поддержки принятия врачебных решений в травматологии и ортопедии. Биомеханика как инструмент предоперационного планирования // Российский журнал биомеханики. 2021. Т. 25, № 2. С. 118–133. https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2021.2.01, EDN: IEGOHC
28. *Бескровный А. С., Бессонов Л. В., Иванов Д. В., Золотов В. С., Сидоренко Д. А., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю.* Построение трехмерных твердотельных моделей позвонков с использованием сверточных нейронных сетей // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 3. С. 368–378. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-368-378
29. *Su Y.-S., Ren D., Wang P. C.* Comparison of biomechanical properties of single- and two-segment fusion for Denis type B spinal fractures // Orthopaedic Surgery. 2013. Vol. 5, iss. 4. P. 266–273. https://doi.org/10.1111/os.12068
30. *Rohlmann A., Zander T., Rao M., Bergmann G.* Applying a follower load delivers realistic results for simulating standing // Journal of Biomechanics. 2009. Vol. 42, iss. 10. P. 1520–1526. https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2009.03.048
31. *Rohlmann A., Zander T., Rao M., Bergmann G.* Realistic loading conditions for upper body bending // Journal of Biomechanics. 2009. Vol. 42, iss. 7. P. 884–890. https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2009.01.017
32. *Zahari S. N., Latif M. J. A., Rahim N. R. A., Kadir M. R. A., Kamarul T.* The effects of physiological biomechanical loading on intradiscal pressure and annulus stress in lumbar spine: a finite element analysis // Journal of Healthcare Engineering. 2017. Vol. 2017. Art. 9618940. 8 p. https://doi.org/10.1155/2017/9618940
33. *Kim Y. H., Khuyagbaatar B., Kim K.* Recent advances in finite element modeling of the human cervical spine // Journal of Mechanical Science and Technology. 2018. Vol. 32. P. 1–10. https://doi.org/10.1007/s12206-017-1201-2
34. *Xu M., Yang J., Lieberman I. H., Haddas R.* Lumbar spine finite element model for healthy subjects: development and validation // Computer Methods in Biomedical Engineering. 2017. Vol. 20, iss. 1. P. 1–15. https://doi.org/10.1080/10255842.2016.1193596
35. *Dreischarf M., Rohlmann A., Bergmann G., Zander T.* Optimised loads for the simulation of axial rotation in the lumbar spine // Journal of Biomechanics. 2011. Vol. 44, iss. 12. P. 2323–2327. https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2011.05.040

36. *Ягудина Р. И., Литвиненко М. М., Сороковиков И. В.* Регистры пациентов: структура, функции, возможности использования // Фармакоэкономика. Современная фармакоэкономика и фармакоэпидемиология. 2011. Т. 4, вып. 4. С. 3–7. EDN: OISBOT
37. *Gliklich R., Dreyer N., Leavy M.* (eds.) Registries for Evaluating Patient Outcomes: A User's Guide. Third edition. Two volumes. (Prepared by the Outcome DEcIDE Center [Outcome Sciences, Inc., a Quintiles company] under Contract No. 290 2005 00351 TO7). AHRQ Publication No. 13(14)-EHC111. Rockville, MD: Agency for Healthcare Research and Quality. April 2014 (http://www.effectivehealthcare.ahrq.gov/registries-guide-3.cfm).
38. Spine Tango Overview. URL: https://www.eurospine.org/spine-tango.htm (дата обращения: 30.10.2018).
39. Swedish Society of Spinal Surgeons. URL: http://www.4s.nu/4s_eng/index.htm (дата обращения: 29.10.2018).
40. DICOM. Digital imaging and communication in medicine. URL: https://www.dicomstandard.org/ (дата обращения 27.10.2019).
41. *Кулешов А. А., Ветрилэ М. С., Лисянский И. Н., Макаров С. Н., Соколова Т. В.* Хирургическое лечение пациента с врожденной деформацией позвоночника, аплазией корней дуг грудных и поясничных позвонков, компрессионным спинальным синдромом // Хирургия позвоночника. 2016. Т. 13, вып. 3. С. 41–48. https://doi.org/10.14531/ss2016.3.41-48
42. *Бескровный А. С., Бессонов Л. В., Иванов Д. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю.* Использование сверточной нейронной сети для автоматизации построения двумерных твердотельных моделей позвонков // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 4. С. 502–516. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-502-516
43. *Sekuboyina A., Bayat A., Husseini M. E., Löffler M., Rempfler M., Kukacka J., Tetteh G., Valentinitsch A., Payer C., Urschler M., Chen M., Cheng D., Lessmann N., Hu Y., Wang T., Yang D., Xu D., Ambellan F., Zachow S., Jiang T., Ma X., Angerman Ch., Wang X., Wei Q., Brown K., Wolf M., Kirszenberg A., Puybareauq É., Menze B. H., Kirschke J.* VerSe: A Vertebrae labelling and segmentation benchmark for multi-detector CT images // Medical Image Analysis. 2021. Vol. 73. Art. 102166. https://doi.org/10.1016/j.media.2021.102166
44. *Quagliarella L., Boccaccio A., Lamberti L., Sasanelli N.* Biomechanical effects of prosthesis neck geometries to contrast limb lengthening after hip replacement // Journal of Applied Biomaterials & Biomechanics. 2006. Vol. 4, iss. 1. P. 45–54. https://doi.org/10.5301/JABB.2008.2488
45. *Widmer K.-H., Majewski M.* The impact of the CCD-angle on range of motion and cup positioning in total hip arthroplasty // Clinical Biomechanics. 2005. Vol. 20. P. 723–728. https://doi.org/10.1016/j.clinbiomech.2005.04.003
46. *Brandolini N.* Experimental methods for the biomechanical investigation of the human spine: a review // Journal of Mechanics in Medicine and Biology. 2014. Vol. 14, iss. 1. Art. 1430002. https://doi.org/10.1142/S0219519414300026
47. *Dreischarf M.* Biomechanics of the L5–S1 motion segment after total disc replacement — Influence of iatrogenic distraction, implant positioning and preoperative disc height on the range of motion and loading of facet joints // Journal of Biomechanics. 2015. Vol. 48, iss. 12. P. 3283–3291. https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2015.06.023
48. *Dreischarf M.* Comparison of eight published static finite element models of the intact lumbar spine: predictive power of models improves when combined together // Journal of Biomechanics. 2014. Vol. 47, iss. 8. P. 1757–1766. https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2014.04.002
49. *Hübner A. R.* Numerical analysis of multi-level versus short instrumentation for the treatment of thoracolumbar fractures // European Journal of Orthopaedic Surgery &

Traumatology. 2015. Vol. 25, Suppl. 1. P. 213–217. https://doi.org/10.1007/s00590-015-1612-7

50. *Aalto T., Sinikallio S., Kröger H., Viinamäki H., Herno A., Leinonen V., Turunen V., Savolainen S., Airaksinen O.* Preoperative predictors for good postoperative satisfaction and functional outcome in lumbar spinal stenosis surgery — a prospective observational study with a two-year follow-up // Scandinavian Journal of Surgery. 2012. Vol. 101, iss. 4. P. 255–260. https://doi.org/10.1177/145749691210100406
51. *Katz J. N., Stucki G., Lipson S. J., Fossel A. H., Grobler L. J., Weinstein J. N.* Predictors of surgical outcome in degenerative lumbar spinal stenosis // Spine. 1999. Vol. 24, iss. 21. P. 2229–2233. https://doi.org/10.1097/00007632-199911010-00010
52. *Федонников А. С.* Совершенствование управления медицинской реабилитацией пациентов с патологией опорно-двигательной системы : дис. ... д-ра мед. наук. Саратов, 2020. 433 с.

References

1. Tikhilov R. M., Shubnyakov I. I. (eds.) *Rukovodstvo po khirurgii tazobedrennogo sustava* [Guidelines for Hip Surgery].Vol. 2. St. Petersburg, RSRI of TO n.a. R. R. Vreden Publ., 2015. 355 p. (in Russian). EDN: WIOZMD
2. Zawojska K., Wnuk-Scardaccione A., Bilski J., Nitecka E. Correlation of body mass index with pelvis and lumbar spine alignment in sagittal plane in hemophilia patients. *Medicina (Kaunas)*, 2019, vol. 55, iss. 10, pp. 627. https://doi.org/10.3390/medicina55100627
3. Ryabykh S. O., Ulrikh E. V., Mushkin A. Yu., Gubin A. V. Treatment of congenital spinal deformities in children: Yesterday, today, tomorrow. *Hirurgiâ pozvonočnika* [Spine Surgery], 2020, vol. 17, iss. 1, pp. 15–24 (in Russian). http://dx.doi.org/10.14531/ss2020.1.15-24
4. Ames C. P., Smith J. S., Scheer J. K., Bess S., Bederman S.S, Deviren V., Lafage V., Schwab F., Shaffrey C. I. Impact of spinopelvic alignment on decision making in deformity surgery in adults: A review. *Journal of Neurosurgery: Spine*, 2012, vol. 16, iss, 6, pp. 547–564. https://doi.org/10.3171/2012.2.SPINE11320
5. Wang B., Ke W., Hua W., Zeng X., Yang C. Biomechanical evaluation and the assisted 3D printed model in the patient-specific preoperative planning for thoracic spinal tuberculosis: A finite element analysis. *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*, 2020, iss. 8, pp. 807. https://doi.org/10.3389/fbioe.2020.00807
6. Wolański W., Gzik-Zroska B., Kawlewska E., Gzik M., Larysz D., Dzielicki J., Rudnik A. Preoperative planning of surgical treatment with the use of 3D visualization and finite element method. *Lecture Notes in Computational Vision and Biomechanics*, 2015, vol. 19, pp. 139–163. https://doi.org/10.1007/978-3-319-13407-9_9
7. Cao P., Hao W., Zhang L., Zhang Q., Liu X., Li M. Safety and efficacy studies of vertebroplasty with dual injections for the treatment of osteoporotic vertebral compression fractures: Preliminary report. *Academic Radiology*, 2020, vol. 27, iss. 8, pp. e224–e231. https://doi.org/10.1016/j.acra.2019.09.023
8. Cook C. E., Learman K. E., O'Halloran B. J., Showalter C. R., Kabbaz V. J., Goode A. P., Wright A. A. Which prognostic factors for low back pain are generic predictors of outcome across a range of recovery domains? *Physical Therapy*, 2013, vol. 93, iss. 1, pp. 32–40. https://doi.org/10.2522/ptj.20120216
9. Cheng L., Cai H., Yu Y., Li W., Li Q., Liu Z. Modified full-endoscopic interlaminar discectomy via an inferior endplate approach for lumbar disc herniation: retrospective 3-year results from 321 patients. *World Neurosurg*, 2020, vol. 141, pp. e537–e544. https://doi.org/10.1016/j.wneu.2019.10.034
10. Fairbank J. C., Pynsent P. B. The oswestry disability index. *Spine*, 2000, vol. 25, iss. 22, pp. 2940–2952. https://doi.org/10.1097/00007632-200011150-00017
11. Fedonnikov A. S., Kolesnikova A. S., Rozhkova Yu. Yu, Kirillova I. V., Kovtun A. L., Kossovich L. Yu. Analysis of the needs of medical specialists in the design of medical

decision support systems for traumatology and orthopedics. In: *Technological Innovations in Traumatology, Orthopedics and Neurosurgery: Integration of Science and Practice*. Saratov, Amirit, 2019, pp. 286–288 (in Russian). EDN: CEJKPV

12. Kolesnikova A. S., Fedonnikov A. S., Kirillova I. V., Ulianov V. Iu., Levchenko K. K., Kireev S. I., Kossovich L. Iu., Norkin I. A. The possibilities with decision support systems in surgery of spine-pelvic complex (analytical review). *Genij Ortopedii* [Genius of Orthopedics], 2019, vol. 25, iss. 2, pp. 243–253 (in Russian). https://doi.org/10.18019/1028-4427-2019-25-2-243-253
13. Shin J. K., Lim B. Y., Goh T. S., Son S. M., Kim H. S., Lee J. S., Lee C. S. Effect of the screw type (S2-alar-iliac and iliac), screw length, and screw head angle on the risk of screw and adjacent bone failures after a spinopelvic fixation technique: A finite element analysis. *PLoS One*, 2018, vol. 13, iss. 8, pp. 296–301. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0201801
14. Jia Y. W., Cheng L. M., Yu G. R., Du C. F., Yang Z. Y., Yu Y., Ding Z. Q. A finite element analysis of the pelvic reconstruction using fibular transplantation fixed with four different rod-screw systems after type I resection. *Chinese Medical Journal*, 2008, vol. 121, iss. 4, pp. 321–326. http://dx.doi.org/10.1097/00029330-200802020-00008
15. Dol A. V., Dol E. S., Ivanov D. V. Biomechanical modelling of surgical reconstructive treatment of spinal spondylolisthesis at L4–L5 level. *Russian Journal of Biomechanics*, 2018, vol. 22, iss. 1, pp. 31–44 (in Russian). https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2018.1.00, EDN: YMCSSL
16. Wu W., Han Z., Hu B., Du C., Xing Z., Zhang C., Gao J., Shan B., Chen C. A graphical guide for constructing a finite element model of the cervical spine with digital orthopedic software. *Annals of Translational Medicine*, 2021, vol. 9, iss. 2. https://doi.org/10.21037/atm-20-2451
17. Pitkänen M. T., Manninen H. I., Lindgren K. A., Sihvonen T. A., Airaksinen O., Soimakallio S. Segmental lumbar spine instability at flexion-extension radiography can be predicted by conventional radiography. *Clinical Radiology*, 2002, vol. 57, iss. 7, pp. 632–639. https://doi.org/10.1053/crad.2001.0899
18. Baykov E. S. *Predicting the Results of Surgical Treatment of Herniated Lumbar Intervertebral Discs*. Diss. Cand. Sci. (Med.). Novosibirsk, 2014. 135 p. (in Russian).
19. Krut'ko A. V., Peleganchuk A. V., Kozlov D. M., Gladkov A. V., Ahmetyanov Sh. A. The correlation dependence of the clinical and morphological manifestations and biomechanical parameters in patients with degenerative spondylolisthesis l4 vertebra. *Traumatology and Orthopedics of Russia*, 2011, iss. 4 (62), pp. 44–52 (in Russian). EDN: OXYZVR
20. Baikov E. S., Rusova T. V., Krutko A. V., Baikalov A. A. Relationship between biochemical parameters of the spinal motion segment and outcome of surgery for herniated lumbar intervertebral disc. *Hirurgia Pozvonocnika* (Spine Surgery), 2013, iss. 2, pp. 43–49 (in Russian). https://doi.org/10.14531/ss2013.2.43-49, EDN: QASRWB
21. Khvisyuk N. I., Prodan A. I., Volkov E. V. Predicting the results of surgical treatment of radicular syndromes in hernias and massive protrusions of the intervertebral discs. *Ortopediia, travmatologiia i protezirovanie* [Orthopedics, Traumatology and Prosthetics], 1985, iss. 5, pp. 34–38 (in Russian).
22. Than K. D., Park P., Fu K. M., Nguyen S., Wang M. Y., Chou D., Nunley P. D., Anand N., Fessler R. G., Shaffrey C. I., Bess S., Akbarnia B. A., Deviren V., Uribe J. S., La Marca F., Kanter A. S., Okonkwo D. O., Mundis G. M., Mummaneni P. V. Clinical and radiographic parameters associated with best versus worst clinical outcomes in minimally invasive spinal deformity surgery. *Journal of Neurosurgery: Spine*, 2016, vol. 25, iss. 1, pp. 21–25. https://doi.org/10.3171/2015.12.SPINE15999
23. Solberg T., Johnsen L. G., Nygaard Ø. P., Grotle M. Can we define success criteria for lumbar disc surgery? *Acta Orthopaedica*, 2013, vol. 84, iss. 2, pp. 196–201. https://doi.org/10.3109/17453674.2013.786634

24. Werner D. A. T., Grotle M., Gulati S., Austevoll I. M., Lønne G., Nygaard Ø. P., Solberg T. K. Criteria for failure and worsening after surgery for lumbar disc herniation: a multicenter observational study based on data from the Norwegian Registry for Spine Surgery. *European Spine Journal*, 2017, vol. 26, pp. 2650–2659. https://doi.org/10.1007/s00586-017-5185-5
25. Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Likhachev S. V., Polienko A. V., Kharlamov A. V., Shulga A. E. Comparative analysis of the SpinoMeter mobile application and Surgimap system for measuring the sagittal balance parameters: inter-observer reliability test. *Genij Ortopedii*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 74–79. https://doi.org/10.18019/1028-4427-2021-27-1-74-79
26. Bessonov L. V., Golyadkina A. A., Dmitriev P. O., Dol A. V., Zolotov V. S., Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Titova Yu. I., Ulyanov V. Yu., Kharlamov A. V. Constructing the dependence between the Young's modulus value and the Hounsfield units of spongy tissue of human femoral heads. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 182–193. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-182-193
27. Beskrovny A. S., Bessonov L. V., Golyadkina A. A., Dol A. V., Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Sidorenko D. A. Development of a decision support system in traumatology and orthopedics. Biomechanics as a tool for preoperative planning. *Russian Journal of Biomechanics*, 2021, vol. 25, iss. 2, pp. 118–133 (in Russian). https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2021.2.01, EDN: IEGOHC
28. Beskrovny A. S., Bessonov L. V., Ivanov D. V., Zolotov V. S., Sidorenko D. A., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Construction of 3D solid vertebral models using convolutional neural networks. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 3, pp. 368–378 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-368-378
29. Su Y.-S, Ren D., Wang P. C. Comparison of biomechanical properties of single- and two-segment fusion for Denis type B spinal fractures. *Orthopaedic Surgery*, 2013, vol. 5, iss. 4, pp. 266–273. https://doi.org/10.1111/os.12068
30. Rohlmann A., Zander T., Rao M., Bergmann G. Applying a follower load delivers realistic results for simulating standing. *Journal of Biomechanics*, 2009, vol. 42, iss. 10, pp. 1520–1526. https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2009.03.048
31. Rohlmann A., Zander T., Rao M., Bergmann G. Realistic loading conditions for upper body bending. *Journal of Biomechanics*, 2009, vol. 42, iss. 7, pp. 884–890. https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2009.01.017
32. Zahari S. N., Latif M. J. A., Rahim N. R. A., Kadir M. R. A., Kamarul T. The effects of physiological biomechanical loading on intradiscal pressure and annulus stress in lumbar spine: a finite element analysis. *Journal of Healthcare Engineering*, 2017, vol. 2017, Art. 9618940. 8 p. https://doi.org/10.1155/2017/9618940
33. Kim Y. H., Khuyagbaatar B., Kim K. Recent advances in finite element modeling of the human cervical spine. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2018, vol. 32, pp. 1–10. https://doi.org/10.1007/s12206-017-1201-2
34. Xu M., Yang J., Lieberman I. H., Haddas R. Lumbar spine finite element model for healthy subjects: development and validation. *Computer Methods in Biomedical Engineering*, 2017, vol. 20, iss. 1, pp. 1–15. https://doi.org/10.1080/10255842.2016.1193596
35. Dreischarf M., Rohlmann A., Bergmann G., Zander T. Optimised loads for the simulation of axial rotation in the lumbar spine. *Journal of Biomechanics*, 2011, vol. 44, iss. 12, pp. 2323–2327. https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2011.05.040
36. Yagudina R. I., Litvinenko M. M., Sorokovikov I. V. Patients registry: Structure, functions, opp ortunities of app liance. *Farmakoekonomika. Modern Pharmacoeconomics and*

Pharmacoepidemiology, 2011, vol. 4, iss. 4, pp. 3–7 (in Russian). EDN: OISBOT

37. Gliklich R., Dreyer N., Leavy M. (eds.) *Registries for Evaluating Patient Outcomes: A User's Guide*. Third edition. Two volumes. (Prepared by the Outcome DEcIDE Center [Outcome Sciences, Inc., a Quintiles company] under Contract No. 290 2005 00351 TO7). AHRQ Publication No. 13(14)-EHC111. Rockville, MD: Agency for Healthcare Research and Quality. April 2014 (http://www.effectivehealthcare.ahrq.gov/registries-guide-3.cfm).
38. *Spine Tango Overview*. Available at: https://www.eurospine.org/spine-tango.htm (accessed 30 October 2018).
39. *Swedish Society of Spinal Surgeons*. Available at: http://www.4s.nu/4s_eng/index.htm (accessed 29 October 2018).
40. *DICOM. Digital imaging and communication in medicine*. Available at: https://www.dicomstandard.org/ (accessed 27 October 2019).
41. Kuleshov A. A., Vetrile M. S., Lisyansky I. N., Makarov S. N., Sokolova T. V. Surgical treatment of a patient with congenital deformity of the spine, the thoracic and lumbar pedicle aplasia, and spinal compression syndrome. *Hirurgiâ pozvonočnika* [Spine Surgery], 2016, vol. 13, iss. 3, pp. 41–48 (in Russian). https://doi.org/10.14531/ss2016.3.41-48
42. Beskrovny A. S., Bessonov L. V., Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Using the mask-RCNN convolutional neural network to automate the construction of two-dimensional solid vertebral models. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 4, pp. 502–516 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-502-516
43. Sekuboyina A., Bayat A., Husseini M. E., Löffler M., Rempfler M., Kukacka J., Tetteh G., Valentinitsch A., Payer C., Urschler M., Chen M., Cheng D., Lessmann N., Hu Y., Wang T., Yang D., Xu D., Ambellan F., Zachow S., Jiang T., Ma X., Angerman Ch, Wang X., Wei Q., Brown K., Wolf M., Kirszenberg A., Puybareauq É, Menze B. H., Kirschke J. VerSe: A Vertebrae labelling and segmentation benchmark for multi-detector CT images. *Medical Image Analysis*, 2021, vol. 73, Art. 102166. https://doi.org/10.1016/j.media.2021.102166
44. Quagliarella L., Boccaccio A., Lamberti L., Sasanelli N. Biomechanical effects of prosthesis neck geometries to contrast limb lengthening after hip replacement. *Journal of Applied Biomaterials & Biomechanics*, 2006, vol. 4, iss. 1, pp. 45–54. https://doi.org/10.5301/JABB.2008.2488
45. Widmer K.-H, Majewski M. The impact of the CCD-angle on range of motion and cup positioning in total hip arthroplasty. *Clinical Biomechanics*, 2005, vol. 20, pp. 723–728. https://doi.org/10.1016/j.clinbiomech.2005.04.003
46. Brandolini N. Experimental methods for the biomechanical investigation of the human spine: a review. *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, 2014, vol. 14, iss. 1, Art. 1430002. https://doi.org/10.1142/S0219519414300026
47. Dreischarf M. Biomechanics of the L5–S1 motion segment after total disc replacement — Influence of iatrogenic distraction, implant positioning and preoperative disc height on the range of motion and loading of facet joints. *Journal of Biomechanics*, 2015, vol. 48, iss. 12, pp. 3283–3291. https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2015.06.023
48. Dreischarf M. Comparison of eight published static finite element models of the intact lumbar spine: predictive power of models improves when combined together. *Journal of Biomechanics*, 2014, vol. 47, iss. 8, pp. 1757–1766. https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2014.04.002
49. Hübner A. R. Numerical analysis of multi-level versus short instrumentation for the treatment of thoracolumbar fractures. *European Journal of Orthopaedic Surgery & Traumatology*, 2015, vol. 25, Suppl. 1, pp. 213–217. https://doi.org/10.1007/s00590-015-1612-7
50. Aalto T., Sinikallio S., Kröger H., Viinamäki H., Herno A., Leinonen V., Turunen V.,

Savolainen S., Airaksinen O. Preoperative predictors for good postoperative satisfaction and functional outcome in lumbar spinal stenosis surgery — a prospective observational study with a two-year follow-up. *Scandinavian Journal of Surgery*, 2012, vol. 101, iss. 4, pp. 255–260. https://doi.org/10.1177/145749691210100406

51. Katz J. N., Stucki G., Lipson S. J., Fossel A. H., Grobler L. J., Weinstein J. N. Predictors of surgical outcome in degenerative lumbar spinal stenosis. *Spine*, 1999, vol. 24, iss. 21, pp. 2229–2233. https://doi.org/10.1097/00007632-199911010-00010
52. Fedonnikov A. S. *Improving the Management of Medical Rehabilitation of Patients with Pathology of the Musculoskeletal System*. Diss. Dr. Sci. (Med.). Saratov, 2020. 433 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 20.11.2021
Принята к публикации / Accepted 01.02.2022
Опубликована / Published 30.11.2022

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 536–548
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 536–548
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-536-548, EDN: BHQKFP

Научная статья
УДК 519.17

Вершинные расширения 4-слойных графов и гиперкубов

А. А. Лобов, М. Б. Абросимов✉

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Лобов Александр Андреевич, аспирант кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, aisanekai@mail.com, https://orcid.org/0000-0003-3422-3811, AuthorID: 525179
Абросимов Михаил Борисович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, mic@rambler.ru, https://orcid.org/0000-0002-4473-8790, AuthorID: 175520

Аннотация. Дж. П. Хейз предложил математическую модель отказоустойчивых реализаций технических систем на основе графов, которой в более абстрактном виде соответствуют вершинные и рёберные расширения графов. Граф G^* называется вершинным k-расширением графа G, если граф G вкладывается в каждый граф, полученный из G^* удалением любых k вершин. Если никакая собственная часть графа G^* не является вершинным k-расширением графа G, то расширение G^* называется неприводимым. Если вершинное k-расширение имеет минимально возможное число вершин и рёбер, то оно называется минимальным. Задача поиска минимальных расширений для произвольного графа является вычислительно сложной. Только для некоторых классов графов удалось найти частичное или полное описание их минимальных вершинных расширений. В данной работе предложена общая схема построения вершинных 1- и 2-расширений для почти всех двудольных графов, в том числе и для гиперкубов. Гиперкуб является интересным графом с точки зрения его свойств и возможности использования в качестве топологии вычислительной системы. Минимальные вершинные расширения для гиперкубов неизвестны. На практике используются тривиальные 1-расширения, которые получаются добавлением одной вершины и соединением её со всеми остальными. Неприводимое 1-расширение для 16-вершинного гиперкуба, которое предлагается в данной работе, содержит на одно ребро меньше, чем тривиальное 1-расширение. Также в статье определяется количество неизоморфных расширений для каждого гиперкуба, которые можно построить с использованием предложенных схем, и доказывается неприводимость вершинных 1-расширений гиперкуба.

Ключевые слова: теория графов, вершинное расширение, отказоустойчивость, двудольные графы, гиперкуб

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0006).

Для цитирования: *Лобов А. А., Абросимов М. Б.* Вершинные расширения 4-слойных графов и гиперкубов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 536–548. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-536-548, EDN: BHQKFP

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

© Лобов А. А., Абросимов М. Б., 2022

Article

Vertex extensions of 4-layer graphs and hypercubes

A. A. Lobov, M. B. Abrosimov✉

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Alexandr A. Lobov, aisanekai@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-3422-3811, AuthorID: 525179
Mikhail B. Abrosimov, mic@rambler.ru, https://orcid.org/0000-0002-4473-8790, AuthorID: 175520

Abstract. J. P. Hayes proposed a graph-based model of fault tolerant systems, which in a more abstract form corresponds to vertex and edge extensions of graphs. A graph G^* is called a vertex k-extension of a graph G if the graph G is embedded in every graph obtained from G^* by removing any k vertices. If no proper part of the graph G^* is a vertex k-extension of the graph G, then the extension G^* is said to be irreducible. If a vertex k-extension has the minimum possible number of vertices and edges, then it is called minimal. The task of finding minimal extensions for an arbitrary graph is computationally difficult. Only for some classes of graphs, it was possible to find a partial or complete description of their minimal vertex extensions. In this paper, we propose a general scheme for constructing vertex 1- and 2-extensions for almost all bipartite graphs, including hypercubes. The hypercube is an interesting graph in terms of its properties and the possibility of using it as a topology of an interconnection network. The minimum vertex extensions for hypercubes are unknown. In practice, trivial 1-extensions are used, which are obtained by adding one vertex and connecting it to all the others. The irreducible 1-extension for the 16-vertex hypercube proposed in this paper contains one less edge than the trivial 1-extension. The article also determines the number of non-isomorphic extensions for each hypercube that can be constructed using the proposed schemes and proves the irreducibility of hypercube vertex 1-extensions.

Keywords: graph theory, vertex extension, fault tolerance, bipartite graphs, hypercube
Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of science and education of the Russian Federation in the framework of the basic part of the scientific research state task (project No. FSRR-2020-0006).
For citation: Lobov A. A., Abrosimov M. B. Vertex extensions of 4-layer graphs and hypercubes. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 536–548 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-536-548, EDN: BHQKFP
This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

В работе будут рассматриваться простые неориентированные графы. Основные определения используются по работе [1]. Напомним, что граф называется *двудольным*, если его вершины можно разбить на две доли так, чтобы все рёбра соединяли вершины разных долей. Если каждая пара вершин из разных долей смежна, то такой двудольный граф называется полным. Далее будет представлено семейство двудольных графов, которое мы будем называть многослойными графами. Из многослойных графов наибольшей интерес представляют 4-слойные графы. Для них будет предложена схема построения вершинных 1- и 2-расширений. Важнейшим представителем 4-слойных графов являются гиперкубы, которые представляют не только теоретический, но и практический интерес как популярная топология построения

вычислительных систем [2]. Вершинные и рёберные расширения являются моделью исследования отказоустойчивости технических систем на языке теории графов [3–5]. Сначала была представлена модель для исследования отказов элементов системы, позднее модель была расширена на случай отказов связей.

Граф G^* называется *вершинным k-расширением* (В-k-Р) графа G, если граф G вкладывается в каждый граф, полученный из G^* удалением любых k вершин. Если никакая собственная часть В-k-Р G^* не является В-k-Р графа G, то расширение G^* называется *неприводимым*. Если В-k-Р имеет минимально возможное число вершин и рёбер, то оно называется *минимальным*.

Для каждого графа G можно построить тривиальное В-k-Р, которое получается добавлением k вершин, соединением их рёбрами между собой и с остальными вершинами графа G. Если в графе n вершин, то в тривиальном В-1-Р на n рёбер больше, чем в G, а в тривиальном В-2-Р — на $2n+1$.

Под вложением понимается изоморфное вложение, т. е. граф $G=(V,\alpha)$ вкладывается в граф $H=(U,\beta)$, если $(\exists\phi : V \to U)((u,v)\in\alpha \Rightarrow (\phi(u),\phi(v))\in\beta)$.

Пусть $G=(V,\alpha)$, $v\in V$ — произвольная вершина, а $\{u,v\}$ — некоторое ребро. Обозначим через $G-v$ граф, получающийся из G удалением вершины v и всех её рёбер, а через $G-\{u,v\}$ — граф, получающийся из G удалением ребра $\{u,v\}$.

Задача построения вершинных и рёберных расширений является вычислительно сложной [6]. В работах [7, 8] были предложены алгоритмы построения минимальных вершинных и рёберных расширений графа без проверки на изоморфизм, которые хорошо подходят для параллельной реализации. Однако даже для 16-вершинного гиперкуба на данный момент не удалось найти минимальное вершинное 1-расширение. На практике в качестве отказоустойчивой реализации 16-вершинного гиперкуба используется его тривиальная реализация. В данной работе будет предложено неприводимое расширение гиперкуба, которое имеет на одно ребро меньше. Заметим, что для минимальных рёберных 1-расширений гиперкуба известен теоретический результат [4], который также был подтверждён с помощью вычислительного эксперимента [8].

1. Многослойные графы

Будем называть граф k-слойным, если его вершины можно раскрасить в k цветов $(1,2,\ldots,k)$ так, что каждое ребро $\{u,v\}$ будет соединять две вершины цветов $c(u)$, $c(v)$, если $|c(u)-c(v)|=1$, при этом для каждого цвета есть хотя бы одна вершина, окрашенная в этот цвет. Через L_k обозначим множество k-слойных графов. Из определения видно, что k-слойные графы являются частным случаем k-дольного графа. 1-слойные графы — это множество вполне несвязных графов. 2-слойные графы по определению совпадают с двудольными графами.

Лемма 1 (Об иерархии k-слойных графов)**.** *При* $k\geqslant 2$ $L_{k+1}\subseteq L_k$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный граф $G\in L_{k+1}$ с соответствующей раскраской. Вершины цвета $k+1$ могут быть смежны только с вершинами цвета k, вершины цвета $k-1$ также могут быть смежны с вершинами цвета k. Перекрасив вершины цвета $k+1$ в цвет $k-1$, получим раскраску k-слойного графа, т. е. $G\in L_k$. G выбран произвольно, значит, $L_{k+1}\subseteq L_k$. □

Напомним, что граф называется *связным*, если между каждой парой его вершин есть соединяющий их путь. *Расстоянием* между вершинами u и v назовём число рёбер в кратчайшем пути между ними и обозначим $d(u,v)$. *Эксцентриситетом*

вершины называется максимальное расстояние от неё до остальных вершин графа. *Диаметром* графа G называется максимальный из эксцентриситетов его вершин и обозначается $d(G)$.

Теорема 1 (Критерий связного k-слойного графа)**.** *Связный n-вершинный граф G с диаметром d является k-слойным при $k \geqslant 2$ тогда и только тогда, когда G является двудольным и $n \leqslant k \leqslant d+1$.*

Доказательство. Выберем вершину u, эксцентриситет которой равен диаметру. Дадим каждой вершине v цвет, равный $d(u,v)+1$. Получим вершины $d+1$ цветов, так как для u есть вершина, расстояние до которой равно диаметру d. Пусть в графе есть ребро $\{v,w\}$. Очевидно, что $d(u,v)+1 \geqslant d(u,w)$ и $d(u,w)+1 \geqslant d(u,v)$ в силу смежности w и v, отсюда $|d(u,v)-d(u,w)| \leqslant 1$. Если $|d(u,v)-d(u,w)|=0$, то вершины v и w принадлежат одной доле двудольного графа и не могут быть смежны. Это значит, что $|d(u,v)-d(u,w)|=1$. Таким образом, была построена раскраска k-слойного графа для $k=d+1$. С учётом леммы 1 можно построить раскраску и в меньшее количество цветов.

Предположим, что $k > d+1$. Это означает, что в графе будут вершины цвета 1 и $d+2$. Так как граф связный, то между любыми двумя вершинами есть путь. Рёбра соединяют вершины, цвета которых отличаются на 1, т. е. любой путь между вершиной цвета 1 к вершине цвета $d+2$ содержит минимум $d+1$ ребро, что больше диаметра. Получили противоречие, а значит, $k \leqslant d+1$. □

Критерий легко перенести и на общий случай.

Теорема 2 (Критерий k-слойного графа)**.** *Граф G, состоящий из t компонент связности с диаметрами $d_1, d_2, \ldots, d_t$, является k-слойным тогда и только тогда, когда G — двудольный граф и $k \leqslant (\sum_{i=1}^{t} d_i)+t$.*

Далее для нас будут представлять основной интерес 4-слойные графы, поэтому сформулируем для них отдельное следствие.

Следствие 1 (Критерий 4-слойного графа)**.** *Двудольный граф $G=(U \cup V, \alpha)$, где U и V — доли графа, является 4-слойным тогда и только тогда, когда количество вершин в нём не меньше 4 и $(\exists u \in U)(\exists v \in V)\{u,v\} \notin \alpha$, т. е. он не является полным двудольным графом.*

Доказательство. *Необходимость* следует из того, что вершины слоёв 1 и 4 не смежны друг с другом и принадлежат разным долям.

Достаточность. Если количество вершин меньше 4, то их невозможно раскрасить в 4 цвета так, чтобы все цвета были задействованы. Если граф связный, то между вершинами u и v из разных долей нет ребра, поэтому путь между ними будет состоять минимум из трёх рёбер (три перехода между долями).

Пусть граф G несвязный и количество компонент равно 2. Рассмотрим два случая.

1. Одна из компонент является O_1, т. е. её диаметр 0, а в другой компоненте не менее 3 вершин, при этом как минимум две из них в одной доле, а расстояние между вершинами одной доли не может быть меньше 2. Диаметры равны 0 и 2, количество компонент равно 2, поэтому по теореме 2 граф будет 4-слойным.

2. В каждой компоненте минимум 2 вершины. Тогда диаметр каждой компоненты не может быть меньше 1, т. е. граф 4-слойный.

Если количество компонент 3, то в графе из 4 вершин будет хотя бы одна компонента с двумя вершинами, диаметр которой будет не меньше 1, а значит, по формуле из теоремы 2 он будет 4-слойным.

Более 3 компонент по теореме 2 приводят к 4-слойности графа. □

2. Вершинные расширения 4-слойных графов

Теорема 3 (о В-1-Р 4-слойных графов)**.** *Пусть дан 4-слойный n-вершинный граф $G = (W, \alpha)$, т. е. двудольный граф с долями U и V, в котором есть две несмежные вершины u, v: $u \in U$, $v \in V$. Тогда граф $G^* = (W^*, \alpha^*) = (W \cup \{w\}, \alpha \cup \beta \cup \delta_u \cup \delta_v \cup \eta)$ является В-1-Р графа G, где $\delta_u = \{\{u, x\} | x \in V \backslash N_u \backslash \{v\}\}$, $\beta = \{\{w, x\} | x \in N_v \cup N_u\}$, $\eta = \{\{u, v\}\}$, $\delta_v = \{\{v, x\} | x \in U \backslash N_v \backslash \{u\}\}$, N_u, N_v — множества смежных с u и v вершин.*

Доказательство. Вершины u и v будем называть опорными. Рассмотрим количество дополнительных рёбер в графе G^*. Множества α, β, δ_u, δ_v и η не имеют попарных пересечений, поэтому:

$$|\beta \cup \delta_u \cup \delta_v \cup \eta| = |\beta| + |\delta_u| + |\delta_v| + |\eta| = |N_u \cup N_v| + |V \backslash N_u \backslash \{v\}| + |U \backslash V_u \backslash \{u\}| + 1 =$$
$$= |N_u| + |N_v| + |V| - |N_u| - 1 + |U| - |V_u| - 1 + 1 = |U| + |V| - 1 = n - 1.$$

Заметим, что если вершины u и v и доли U и V поменять местами, то граф G^* не изменится. Рассмотрим несколько случаев удаления вершины в графе G^* и для каждого из них построим вложение графа G.

1. Удалена вершина w. Покажем, что g_w: $g_w(x) = x$ является вложением G в $G^* - w$. Ребро $\{x, y\} \in \alpha \subseteq W \times W \Rightarrow \{x, y\} \in \alpha^* \wedge \{x, y\} \in W \times W \Rightarrow \{x, y\} \in \alpha^* \cap (W \times W)$. Так как $\{g_w(x), g_w(y)\} = \{x, y\}$, то g_w является вложением.

2. Удалена вершина v (для u аналогично). Имеем

$$g_v(x) = \begin{cases} w, & \text{если } x = v, \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $\{v, s\} \in \alpha \Rightarrow s \in N_v \Rightarrow \{g_v(v), g_v(s)\} = \{w, s\} \in \beta$.

3. Удалена вершина $r \in V \backslash \{v\}$ (для $r \in U \backslash \{u\}$ аналогично). Имеем

$$g_r(x) = \begin{cases} w, & \text{если } x = v, \\ v, & \text{если } x = r, \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда

- $\{v, s\} \in \alpha \Rightarrow s \in N_v \Rightarrow \{g_r(v), g_r(s)\} = \{w, s\} \in \beta$;
- $\{r, s\} \in \alpha \Rightarrow \{g_r(r), g_r(s)\} = \{v, s\} \wedge s \in U \Rightarrow \begin{cases} s \in N_v & \Rightarrow \{v, s\} \in \alpha, \\ s \in U \setminus N_v \setminus \{u\} & \Rightarrow \{v, s\} \in \delta_v, \\ s = u & \Rightarrow \{v, u\} \in \eta; \end{cases}$
- $\{x, s\} \in \alpha \wedge \{x, s\} \cap \{r, v\} = \varnothing \Rightarrow \{g_r(x), g_r(s)\} = \{x, s\} \in \alpha$.

Таким образом, по определению G^* является В-1-Р графа G, и количество дополнительных рёбер в нём равно $n - 1$. □

Теорема 4 (о В-2-Р 4-слойных графов)**.** *Пусть дан 4-слойный n-вершинный граф $G = (W, \alpha)$, т. е. двудольный граф с долями U и V и две несмежные вершины $u \in U$ и $v \in V$. Тогда граф $G^* = (W^*, \alpha^*)$ является В-2-Р графа G, где $W^* = W \cup \{w_u, w_v\}$, $\alpha^* = \alpha \cup \beta_v \cup \beta_u \cup \delta_u \cup \delta_v \cup \eta$, $\beta_v = \{\{w_v, x\} | x \in N_v \cup V\}$, $\delta_u = \{\{u, x\} | x \in V \backslash N_u \backslash \{v\}\}$, $\eta = \{\{u, v\}\}$, $\beta_u = \{\{w_u, x\} | x \in N_u \cup U\}$, $\delta_v = \{\{v, x\} | x \in U \backslash N_v \backslash \{u\}\}$.*

Доказательство. Подсчёт ребер проводится аналогично теореме 3. Количество дополнительных ребер:

$$\begin{gathered}|N_v \cup V| + |N_u \cup U| + |V \backslash N_u \backslash \{v\}| + |U \backslash N_v \backslash \{u\}| + 1 = \\ = |N_v| + |V| + |N_u| + |U| + |V| - |N_u| - 1 + |U| - |N_v| - 1 + 1 = \\ = 2|V| + 2|U| - 1 = 2n - 1.\end{gathered}$$

Рассмотрим различные возможные ситуации и укажем схемы построения вложения. Для начала отметим, что добавление рёбер в графе производится симметрично относительно U, V и опорных вершин u, v, т. е. при их взаимном переименовании граф G^* не изменится. Воспользуемся этой симметрией для уменьшения количества рассматриваемых случаев.

Для начала определим В-1-Р H^* графа G, построенное по теореме 3:

$$H^* = (W \cup \{w\},\ \alpha \cup \beta \cup \delta_u \cup \delta_v \cup \eta),$$

где $\beta = \{\{w, x\} | x \in N_v \cup N_u\}$.

I. Покажем, что следующее отображение из H^* в $G^* - w_v$ является вложением:

$$\phi(x) = \begin{cases} w_u, & \text{если } x = w; \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Справедливо следущее:

- $\{s, x\} \in \alpha \cup \delta_u \cup \delta_v \cup \eta \Rightarrow \{\phi(s), \phi(x)\} = \{s, x\} \in \alpha \cup \delta_u \cup \delta_v \cup \eta$;
- $\{w, x\} \in \beta \Rightarrow x \in N_u \cup N_v \subseteq N_u \cup U \Rightarrow \{\phi(w), \phi(x)\} = \{w_u, x\} \in \beta_u$.

Таким образом, граф $G^* - w_v$ является В-1-Р графа G. Это означает, что вложение G в $G^* - w_v - r$ для произвольной вершины r существует.

При удалении w_u ситуация аналогична.

II. Покажем, что существует вложение ϕ графа H^* в $G^* - v$. Имеем

$$\phi(x) = \begin{cases} w_v, & \text{если } x = w, \\ w_u, & \text{если } x = v, \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда

1) $\{s, x\} \in \alpha \Rightarrow \begin{cases} s = v (\text{при } x = v \text{ аналогично}) & \Rightarrow \{\phi(v), \phi(x)\} = \{w_u, x\} \in \beta_u, \\ s \neq v \text{ и } x \neq v & \Rightarrow \{\phi(s), \phi(x)\} = \{s, x\} \in \alpha; \end{cases}$

2) $\{w, x\} \in \beta \Rightarrow x \in N_u \cup N_v \Rightarrow \{\phi(w), \phi(x)\} = \{w_v, x\} \in \beta_v$;

3) $\{u, x\} \in \delta_u \Rightarrow x \in V \setminus N_u \setminus \{v\} \Rightarrow \{\phi(u), \phi(x)\} = \{u, x\} \in \delta_u$;

4) $\{v, x\} \in \delta_v \Rightarrow x \in U \setminus N_v \setminus \{u\} \subseteq U \Rightarrow \{\phi(v), \phi(x)\} = \{w_u, x\} \in \beta_u$;

5) $\{u, v\} = \{v, u\} \in \eta \Rightarrow \{\phi(v), \phi(u)\} = \{w_u, u\} \in \beta_u$.

Таким образом, в $G^* - v$ вкладывается В-1-Р графа G. Следовательно, $G^* - v$ также является В-1-Р графа G. Это означает, что вложение G в $G^* - v - r$ для произвольной вершины r существует.

Случай $G - u$ аналогичен.

III. При удалении вершин из одной доли: $r_1, r_2 \in V \setminus \{v\}$. Имеем

$$g_1(x) = \begin{cases} w_u, & \text{если } x = r_1, \\ v, & \text{если } x = r_2, \\ w_v, & \text{если } x = v, \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Покажем, что отображение g_1 является вложением:
1) $\{r_1, s\} \in \alpha \Rightarrow s \in U \Rightarrow \{g_1(r_1), g_1(s)\} = \{w_u, s\} \in \beta_u \subseteq \alpha^*$;
2) $\{r_2, s\} \in \alpha \Rightarrow s \in U \Rightarrow \{g_1(r_2), g_1(s)\} = \{v, s\} \Rightarrow \begin{cases} \{v, s\} \in \eta, & \text{если } s = u, \\ \{v, s\} \in \alpha, & \text{если } s \in N_v, \\ \{v, s\} \in \delta_v, & \text{иначе;} \end{cases}$
3) $\{v, s\} \in \alpha \Rightarrow s \in N_v \Rightarrow \{g_1(v), g_1(s)\} = \{w_v, s\} \in \beta_v \subseteq \alpha^*$;
4) $\{s_1, s_2\} \in \alpha \wedge \{s_1, s_2\} \cap \{v, r_1, r_2\} = \varnothing \Rightarrow \{g_2(s_1), g_2(s_2)\} = \{s_1, s_2\} \in \alpha \subseteq \alpha^*$.
По определению g_1 является вложением. Случай $r_1, r_2 \in U \setminus \{u\}$ аналогичен.
VI. При удалении вершин из разных долей $r_v \in V \setminus \{v\}$ и $r_u \in U \setminus \{u\}$ имеем

$$g_2(x) = \begin{cases} v, & \text{если } x = r_v, \\ u, & \text{если } x = r_u, \\ w_u, & \text{если } x = v, \\ w_v, & \text{если } x = u, \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Покажем, что отображение g_2 является вложением:
1) $\{u, s\} \in \alpha \Rightarrow s \in N_u \Rightarrow \{g_2(u), g_2(s)\} = \{w_v, s\} \in \beta_v \subseteq \alpha^*$;
2) $\{v, s\} \in \alpha \Rightarrow s \in N_v \Rightarrow \{g_2(u), g_2(s)\} = \{w_v, s\} \in \beta_u \subseteq \alpha^*$;
3) $\{r_u, s\} \in \alpha \Rightarrow s \in V$ (так как G — двудольный и $r_u \in U$):
   - $s = r_v \Rightarrow \{g_2(r_u), g_2(r_v)\} = \{u, v\} \in \eta \Rightarrow \alpha^*$;
   - $s = v \Rightarrow \{g_2(r_u), g_2(v)\} = \{u, w_u\} = \{w_u, u\} \in \beta_u \subseteq \alpha^*$;
   - $s \in N_u \Rightarrow \{g_2(r_u), g_2(s)\} = \{u, s\} \in \alpha \subseteq \alpha^*$;
   - $s \in V \setminus N_u \setminus \{r_v, v\} \Rightarrow \{g_2(r_u), g_2(s)\} = \{u, s\} \in \delta_u \subseteq \alpha^*$;
4) $\{r_v, s\} \in \alpha \Rightarrow s \in U$:
   - $s = r_u \Rightarrow \{g_2(r_v), g_2(r_u)\} = \{v, u\} = \{u, v\} \in \eta \subseteq \alpha^*$;
   - $s = u \Rightarrow \{g_2(r_v), g_2(u)\} = \{v, w_v\} = \{w_v, v\} \in \beta_v \subseteq \alpha^*$;
   - $s \in N_v \Rightarrow \{g_2(r_v), g_2(s)\} = \{v, s\} \in \alpha \subseteq \alpha^*$;
   - $s \in U \setminus N_v \setminus \{r_u, u\} \Rightarrow \{g_2(r_v), g_2(s)\} = \{v, s\} \in \delta_v \subseteq \alpha^*$;
5) $\{s_1, s_2\} \in \alpha \wedge \{s_1, s_2\} \cap \{u, v, r_u, r_v\} = \varnothing \Rightarrow \{g_2(s_1), g_2(s_2)\} = \{s_1, s_2\} \in \alpha \subseteq \alpha^*$.

Таким образом, g_2 является вложением G в $G^* - r_u - r_v$. Все случаи разобраны, поэтому G^* является B-2-P графа G. □

Далее понадобится лемма 2.1.4 из работы [2].

Лемма 2. *Если минимальная степень вершины графа G есть $d > 0$, то его минимальное вершинное k-расширение G^* не содержит вершин степени ниже $d + k$.*

Лемма 3. *Если G — регулярный 4-слойный граф степени $d > 0$, то G^* — B-1-P графа G, построенное по схеме из теоремы 1, неприводимо тогда и только тогда, когда $G^* - \{u, v\}$ не является B-1-P графа G.*

Доказательство. В теореме 3 к графу G добавляется ребро $\{u, v\}$, а также к каждой вершине x, отличной от u, v и w, добавляется ребро $\{x, v\}$, $\{x, u\}$ или $\{x, w\}$, что увеличивает степень вершины x до $d+1$. Таким образом, каждое ребро графа, которое неинцидентно одновременно u, v и w, будет иметь на конце вершину степени $d+1$, и её удаление приведёт к появлению вершины степени d, поэтому по лемме 2 полученный таким образом граф не будет являться В-1-Р графа G. Остаётся рассмотреть только ребро $\{u, v\}$, так как рёбра $\{u, w\}$ и $\{v, w\}$ отсутствуют.

Следовательно, G^* неприводимо тогда и только тогда, когда $G^* - \{u, v\}$ не является В-1-Р графа G. □

Лемма 4. *Если G — регулярный 4-слойный граф степени больше $d > 0$, то G^* — В-2-Р графа G, построенное по схеме из теоремы 4, неприводимо тогда и только тогда, когда ни один из трёх графов $G^* - \{u, v\}$, $G^* - \{w_v, v\}$ и $G^* - \{w_u, u\}$ не является В-2-Р графа G.*

Доказательство. Опираясь на доказательство леммы 3, получим, что среди дополнительных рёбер удаление произвольного ребра, отличного от $\{u, v\}$, $\{w_v, v\}$ и $\{w_u, u\}$, приводит к образованию вершины степени $d+1$, что меньше, чем $d+2$. Поэтому для определения неприводимости расширения остаётся проверить только те графы, которые получены удалением данных рёбер. □

3. Вершинные расширения гиперкубов

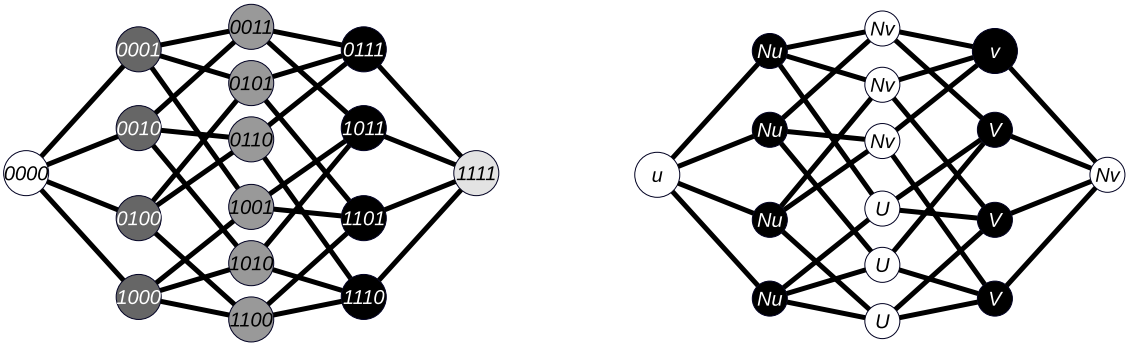
Под N-мерным гиперкубом или N-кубом будем подразумевать граф

$$Q_N = (V = \{0,1\}^N, \quad \alpha = \{\{u, v\} | u, v \in V,\ h(u, v) = 1\}),$$

где h — дистанция Хемминга. В Q_N $d(u, v) = h(u, v)$.

Гиперкубы являются двудольными графами, диаметр N-куба равен N [9], поэтому они являются $(N+1)$-слойными графами, а значит, при $N \geqslant 3$ для N-куба применимы теоремы 3 и 4. Будем использовать следующую $(N+1)$-слойную раскраску N-куба: вершина с i единицами в метке окрашена в цвет i.

Для 4-куба пример разметки и 5-слойной раскраски изображён на рис. 1, *а*. На рис. 1, *б* показана разметка вершин при построении В-1-Р и В-2-Р по теоремам 3 и 4.



а / a *б / b*

Рис. 1. Схема 5-слойной раскраски 4-куба (*а*) и разметка 4-куба для построения расширений по схемам из теорем 3 и 4 (*б*)

Fig. 1. Scheme of 5-layer coloring of the 4-cube (*a*) and labeling of the 4-cube for constructing extensions according to the schemes from Theorems 3 and 4 (*b*)

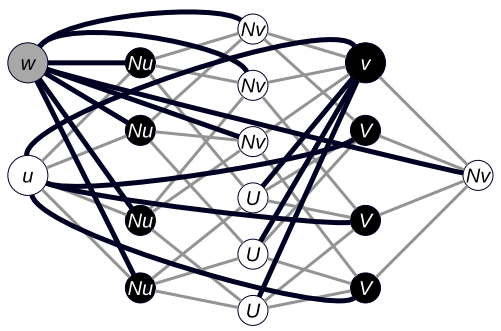


Рис. 2. Схема построения B-1-P гиперкуба Q_4 по теореме 3

Fig. 2. Scheme for constructing a 1-NFT of the hypercube Q_4 according to Theorem 3

На рис. 2 изображено B-1-P 16-вершинного гиперкуба. Метки N_u, N_v, U, V обозначают вершины из соответствующих множеств.

N-куб имеет 2^N вершин степени N. Так как N-куб двудольный и симметричный, его доли имеют одинаковое количество вершин. По построению B-1-P по схеме из теоремы 3 граф будет иметь следующие степени вершин:

1) $d(u) = d(v) = 2^N/2 = 2^{N-1}$;

2) $d(w) = 2N$;

3) степени остальных вершин равны $N + 1$.

Автоморфизмом графа $G = (V, \alpha)$ называется биективное отображение $\psi : V \to V$ такое, что

$$\forall\ \{u, v\}(\{u, v\} \in \alpha \Rightarrow \{\psi(u), \psi(v)\} \in \alpha),$$

т. е. при применении автоморфизма к графу получается тот же граф. Множество автоморфизмов графа G обозначается как $Aut(G)$.

Очевидно, что если ϕ — вложение, то суперпозиция ϕ с автоморфизмом $\psi \circ \phi$ также является вложением. Каждый N-куб является дистанционно-транзитивным графом [10], т. е.

$$\forall\ u_1, u_2, v_1, v_2 \in V(d(u_1, u_2) = d(v_1, v_2) \Rightarrow \exists\ \Omega_{u_1,u_2,v_1,v_2} \in Aut(Q)) :$$
$$\Omega_{u_1,u_2,v_1,v_2}(u_1) = v_1\ \wedge\ \Omega_{u_1,u_2,v_1,v_2}(u_2) = v_2.$$

Теорема 5 (О количестве неизоморфных B-1-P гиперкуба, построенных по схеме из теоремы 3)**.** *Количество неизоморфных B-1-P N-куба, построенных по теореме 3, равно* $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$.

Доказательство. Учитывая дистанционную транзитивность гиперкуба G, если выбрать в качестве опорных вершины u и v, то полученное расширение по теореме 3 будет изоморфно любому расширению, в котором в качестве опорных выбраны вершины a и b, расстояние между которыми равно расстоянию между u и v. Изоморфизмом в данном случае будет $\Phi_{u,v,a,b}(x) = \begin{cases} w, & \text{если } x = w, \\ \Omega_{u,v,a,b}(x), & \text{иначе.} \end{cases}$

Это означает, что неизоморфными могут быть только те расширения с опорными вершинами u, v, расстояние между которыми различно и равно 3, 5, 7, 9 и т. д. Пусть есть два расширения N-куба H_1 и H_2, расстояние между u и v в которых было равно d_1 и d_2 соответственно ($d_1 < d_2$). Степени вершин расширения N-куба, как уже было отмечено, равны: $d(w) = 2N$, $d(u) = d(v) = N^{2-1}$, степень остальных вершин равна $N + 1$. Проведём в G_1 простой путь длины d_1 $(u, x_1, x_2, \ldots, x_{d_1-2}, x_{d_1-1}, v)$, $x_1 \in N_u, x_{d_1-1} \in N_v, d(x_i) = N + 1$. Рассмотрим, можно ли построить такой же путь в графе G_2. В таком пути нет вершины w, следовательно, рёбра из множества β не могут быть использованы. Вершины u и v находятся на концах, а $x_1 \in N_u, x_{d_1-1} \in N$, и они всегда есть в пути, так как $d_1 \geqslant 3$, поэтому рёбра из δ_u, δ_v и η не могут быть использованы. Это значит, что использоваться могут только рёбра гиперкуба. При этом расстояния между опорными вершинами u и v в самом гиперкубе в различных

случаях равны d_2 и d_1, при этом $d_2 > d_1$, поэтому такого пути не может существовать. То есть в G_1 можно провести простой путь длины d_1 между вершинами степени 2^{N-1}, степени помежуточных вершин в котором равны $N+1$, а в G_2 — нет.

Следовательно, два В-1-Р гиперкуба, построенные по схеме из теоремы 3, неизоморфны тогда и только тогда, когда расстояния между u и v различны. Значит, количество таких неизоморфных В-1-Р для N-куба равно $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$. □

Теорема 6 (О количестве неизоморфных В-2-Р гиперкуба, построенных по теореме 4)**.** *Количество неизоморфных В-2-Р N-куба, построенных по теореме 4, равно* $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 5. В построении пути в качестве промежуточных вершин не могут участвовать вершины u, v, w_u и w_v, поэтому также могут использоваться только рёбра гиперкуба. Степени промежуточных вершин равны $N+2$, остальных — отличны от этого значения. □

Теорема 7 (О неприводимости В-1-Р гиперкуба, построенных по теореме 3)**.** *В-1-Р N-куба, построенные по схеме из теоремы 3, являются неприводимыми.*

Доказательство. По лемме 3 В-1-Р G^* N-куба Q_N является неприводимым тогда и только тогда, когда $G^* - \{u, v\}$ не является В-1-Р. Рассмотрим граф $H = G^* - \{u, v\} - r$, где $r \in N_u$.

При $N = 3$: вершина u в G^* имеет степень 4, значит, в H её степень будет равна 2 (удалена r смежная с u и ребро $\{u, v\}$), что меньше степеней вершин 3-куба, а так как количество вершин в G и H одинаково, вложение G в H построить невозможно.

При $N > 3$ рассмотрим структуру N-куба.

Рассмотрим вложение ψ из Q_N в G. Пусть $\psi(x) = y$. Так как Q_N — вершинно-симметричный, существует автоморфизм ϕ, который переводит произвольную вершину z в x, а значит, существует вложение $\phi \circ \psi$, которое переводит z в y. Если такого вложения не существует и количество вершин в Q_N и G одинаково, то вложения Q_N в G не существует.

Рассмотрим структуру N-куба, которую будем пытаться найти:

1) он имеет единственную вершину цвета 0;

2) с ней смежна каждая вершина цвета 1. Таких вершин ровно N;

3) каждая вершина цвета 2 смежна с двумя вершинами цвета 1 (их можно получить, заменив одну единицу в метке вершины цвета 2 на ноль). Таких вершин ровно $C_N^2 = \frac{N(N-1)}{2}$.

Вершины цвета 1 имеют ровно одну единицу в метке. Их можно занумеровать по позиции, в которой эта единица находится.

Рассмотрим отображение $P_{i_1,\ldots,i_N}(u) = v$, где $u = (u_1, \ldots, u_N)$, $v = (u_{i_1}, \ldots, u_{i_N})$. Данное отображение выполняет перестановку элементов в метке. Оно является автоморфизмом, так как не меняет дистанцию Хемминга между соответствующими образами, т. е. $d(u, v) = d(P_{i_1,\ldots,i_N}(u), P_{i_1,\ldots,i_N}(v))$.

Таким образом, для проверки вложения достаточно зафиксировать один порядок вершин цвета 1, так как для каждого порядка следования вершин можно подобрать соответствующий автоморфизм $P_{i_1,..,i_N}$.

Пусть r не смежна ни с одной вершиной из N_v. Вершина r в G^* имеет $N+1$ инцидентное ребро: рёбра гиперкуба и дополнительно одно к вершине w, поэтому оно может быть смежно с вершинами из N_v только через ребро гиперкуба. Если

расстояние между u и v в гиперкубе больше 3, то расстояние между смежными с u и v вершинами больше 1, и они не могут быть смежны в G^*, а если равно 3, то метки вершин u и v отличаются в трёх позициях, и метка r должна во всех этих трёх позициях совпадать с u, что возможно, так как длина меток $N > 3$.

Рассмотрим граф $H = G^* - \{u, v\} - r$. Вершина r была смежна с вершинами u, w и $N-1$ вершинами, степень которых была равна $N+1$, а после удаления r в H стала равна N. Обозначим последние как $q_1, \ldots, q_{N-1}$. Вершины q_i и q были смежны с r в N-кубе, а значит, их метки отличаются от r в одной позиции. Обозначим q как q_N, а позиции, в которых q_i отличается от r, как b_i.

Пусть s_0 вкладывается в v. Так как вершина $r \in N_u \subseteq V$, то $q_1, \ldots, q_{N-1} \subset U \setminus \{u\}$, поэтому все данные вершины смежны с v. Так как их степени равны N, то в них будут отображены $N-1$ вершина цвета 1.

Вершины $q_1, \ldots, q_{N-1}$ могут быть смежны с u, w.

Вершины цвета 2 должны отображаться в вершины, смежные с $q_1, \ldots, q_{N-1}$. Рассмотрим их.

Вершина v уже использована в отображении, остальные — это вершины $q_{i,j} = q_{j,i} = (r_1, \ldots, r_{b_{i-1}}, r_{b_i} \oplus 1, r_{b_{i+1}}, \ldots, r_{b_{j-1}}, r_{b_j} \oplus 1, r_{b_{j+1}}, \ldots, r_N)$, $i \neq j$. Заметим, что каждая вершина q_i смежна с $N-1$ вершиной $q_{i,j}$. При этом $q_{i,j}$ смежна с q_i и q_j, т. е. хотя бы с одной из уже отображённых вершин ($q_i \neq q_N$ или $q_j \neq q_N$). Количество различных вершин $q_{i,j}$ равно $C_N^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, т. е. они все должны быть образами вершин N-куба цвета 2.

Среди образов вершин цвета 2 есть $N-1$ вершина, которая смежна только с одной вершиной цвета 1, — это вершины $q_{i,N}$. Образ оставшейся вершины цвета 1 должен быть смежен с каждой из них.

Рассмотрим $q_{j_1,N} = (r_1 \oplus 1, r_2, r_3, \ldots, r_N \oplus 1)$ и $q_{j_2,N} = (r_1 \oplus 1, r_2, r_3, \ldots, r_N \oplus 1)$. Среди общих смежных вершин у них есть $q_{j_1,j_2,N} = (r_1 \oplus 1, r_2 \oplus 1, r_3, \ldots, r_N \oplus 1)$ и $q_N = (r_1, r_2, r_3, \ldots, r_N \oplus 1)$, а также могут быть w, v и u через дополнительные рёбра. Вершина v является образом вершины цвета 0, вершины u и w не смежны с v по условию, а $q_N = u$. При этом $h(q_{j_1,j_2,N}, q_{j_3,N}) = 3$, где $q_{j_3,N} = (r_1, r_2, r_3 \oplus 1, r_4, \ldots, r_N \oplus 1)$, т. е. $q_{j_1,j_2,N}$ не смежна с $q_{j_3,N}$.

Следовательно, не существует образов для оставшейся вершины N-куба цвета 1, т. е. вложения не существует, а это означает, что H не является B-1-P графа G, т. е. G^* является неприводимым B-1-P. □

Заключение

В работе были предложены схемы построения вершинных 1- и 2-расширений для 4-слойных графов, которые имеют меньше дополнительных рёбер, чем тривиальные расширения: $n-1$ и $2n-1$ соответственно, где n — число вершин графа. Множество 4-слойных графов совпадает с множеством всех двудольных графов с числом вершин, больших 4, за исключением полных двудольных графов. К 4-слойным графам относятся и гиперкубы. Доказывается, что вершинные 1-расширения, построенные по предлагаемым схемам, для гиперкубов являются неприводимыми. Для 16-вершинного гиперкуба приводится вершинное 1-расширение в явном виде.

Список литературы

1. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. Москва : Физматлит, 1997. 368 с. EDN: XYCVTZ

2. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2012. 192 с. EDN: QMXQLB
3. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Transactions on Computers. 1976. Vol. C-25, № 9. P. 875–884. https://doi.org/10.1109/TC.1976.1674712
4. *Harary F., Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. Vol. 23, iss. 2. P. 135–142. https://doi.org/10.1002/net.3230230207
5. *Harary F., Hayes J. P.* Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. Vol. 27, iss. 1. P. 19–23. https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0037(199601)27:1<19::AID-NET2>3.0.CO;2-H
6. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Математические заметки. 2010. Т. 88, вып. 5. С. 643–650. https://doi.org/10.4213/mzm8403, EDN: RLRFEF
7. *Абросимов М. Б., Камил Ихаб А. К., Лобов А. А.* Построение всех неизоморфных минимальных вершинных расширений графа методом канонических представителей // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 4. С. 479–486. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-479-486, EDN: YXOMDX
8. *Абросимов М. Б., Судани Х. Х. К., Лобов А. А.* Построение минимальных рёберных расширений графа без проверки на изоморфизм // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 105–115. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-105-115, EDN: PXDRGJ
9. *Harary F., Hayes J. P., Wu H.-J.* A survey of the theory of hypercube graphs // Computers & Mathematics with Applications. 1988. Vol. 15, iss. 4. P. 277–289. https://doi.org/10.1016/0898-1221(88)90213-1
10. *Biggs N. L.* Distance-transitive graphs // Algebraic Graph Theory. Cambridge : Cambridge University Press, 1974. P. 155–163. https://doi.org/10.1017/CBO9780511608704.021

References

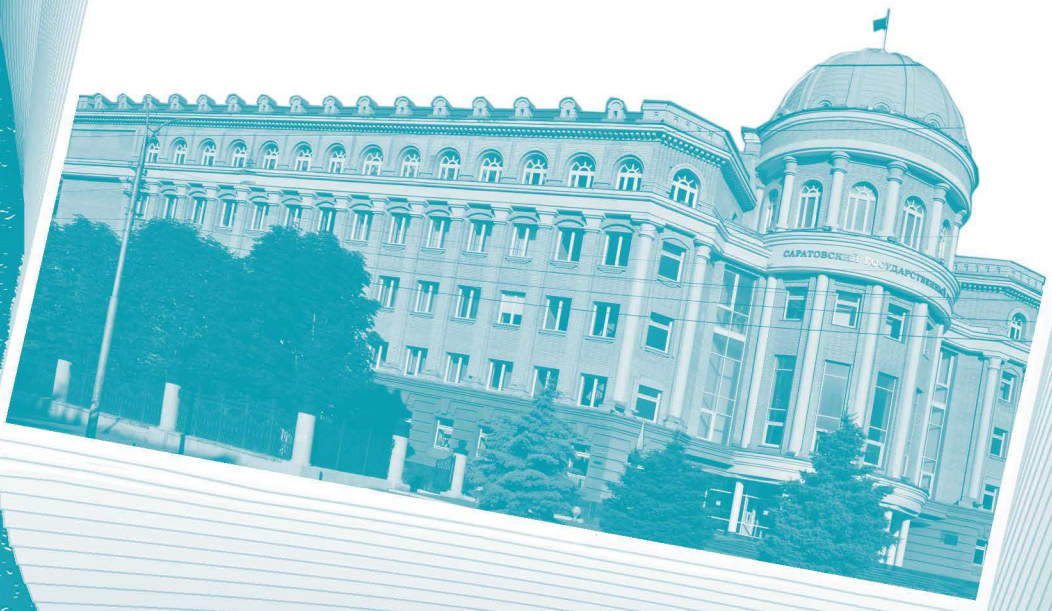
1. Bogomolov A. M., Salii V. N. *Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem* [Algebraic Foundations of the Theory of Discrete Systems]. Moscow, Fizmatlit, 1997. 368 p. (in Russian). EDN: XYCVTZ
2. Abrosimov M. B. *Grafovye modeli otkazoustojchivosti* [Graph Models of Fault Tolerance]. Saratov, Saratov University Publ., 2012. 192 p. (in Russian). EDN: QMXQLB
3. Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing systems. *IEEE Transactions on Computers*, 1976, vol. C-25, no. 9, pp. 875–884. https://doi.org/10.1109/TC.1976.1674712
4. Harary F., Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs. *Networks*, 1993, vol. 23, iss. 2, pp. 135–142. https://doi.org/10.1002/net.3230230207
5. Harary F., Hayes J. P. Node fault tolerance in graphs. *Networks*, 1996, vol. 27, iss. 1, pp. 19–23. https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0037(199601)27:1<19::AID-NET2>3.0.CO;2-H
6. Abrosimov M. B. On the complexity of some problems related to graph extensions. *Mathematical Notes*, 2010, vol. 88, iss. 5–6, pp. 619–625. https://doi.org/10.1134/S0001434610110015, EDN: OHNTMT
7. Abrosimov M. B., Kamil I. A. K., Lobov A. A. Construction of all nonisomorphic minimal vertex extensions of the graph by the method of canonical representatives. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, vol. 19, iss. 4, pp. 479–486 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-479-486, EDN: YXOMDX
8. Abrosimov M. B., Sudani H. H. K., Lobov A. A. Construction of all minimal edge extensions of the graph with isomorphism rejection. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 105–115 (in Russian).https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-105-115, EDN: PXDRGJ

9. Harary F., Hayes J. P., Wu H.-J. A survey of the theory of hypercube graphs. *Computers & Mathematics with Applications*, 1988, vol. 15, iss. 4, pp. 277–289. https://doi.org/10.1016/0898-1221(88)90213-1
10. Biggs N. Distance-transitive graphs. In: *Algebraic Graph Theory*. Cambridge, Cambridge University Press, 1974, pp. 155–163. https://doi.org/10.1017/CBO9780511608704.021

Поступила в редакцию / Received 23.07.2022
Принята к публикации / Accepted 18.08.2022
Опубликована / Published 30.11.2022

ISSN 1816-9791
22004
9 771816 979101

ISSN 1816-9791 (Print). ISSN 2541-9005 (Online)
Известия Саратовского университета. Новая серия.
Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Том 22, выпуск 4

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Новая серия

Серия: Акмеология образования. Психология развития
Серия: История. Международные отношения
Серия: Математика. Механика. Информатика
Серия: Науки о Земле
Серия: Социология. Политология
Серия: Физика
Серия: Филология. Журналистика
Серия: Философия. Психология. Педагогика
Серия: Химия. Биология. Экология
Серия: Экономика. Управление. Право