

ISSN 1816-9791 (Print)  
ISSN 2541-9005 (Online)

# ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия: Математика. Механика. Информатика

2023

Том 23

Выпуск 3



IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY  
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS



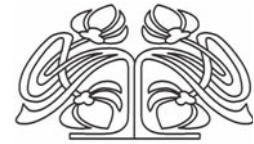
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

# ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 3

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,  
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал  
2023 Том 23

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издается с 2005 года

## СОДЕРЖАНИЕ

### Научный отдел

#### Математика

**Belkina T. A., Ogareva A. S.** Risky investments and survival probability in the insurance model with two-sided jumps: Problems for integrodifferential equations and ordinary differential equation and their equivalence  
[Белкина Т. А., Огарева А. С. Рисковые инвестиции и вероятность неразорения в модели страхования с двусторонними скачками: задачи для интегродифференциальных уравнений и обыкновенного дифференциального уравнения и их эквивалентность] 278

**Бойков И. В., Рязанцев В. А.** Об одном итерационном методе решения прямых и обратных задач для параболических уравнений 286

**Курдюмов В. П.** Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом. Часть I. Классическое решение смешанной задачи 311

**Лукомский С. Ф., Крусс Ю. С.** Принцип унитарного расширения в нульмерных локально компактных группах 320

**Рубинштейн А. И., Теляковский Д. С.** О функциях типа ван дер Вардена 339

**Шаш А. Х., Лобода Н. А.** К вопросу об остаточности сильных показателей колеблемости на множестве решений дифференциальных уравнений третьего порядка 348

**Хоанг В. Н., Провоторов В. В.** Устойчивость трехслойных дифференциально-разностных схем с весами в пространстве суммируемых функций с носителями в сетеподобной области 357

#### Механика

**Карпов В. В., Бакусов П. А., Масленников А. М., Семенов А. А.** Математические модели деформирования оболочечных конструкций и алгоритмы их исследования. Часть I. Модели деформирования оболочечных конструкций 370

#### Информатика

**Velichko A. S.** Cloud service for interactive simulation of production location [Величко А. С. Облачный сервис для задачи оптимизации местоположения] 411

Журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика»» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.  
Запись о регистрации СМИ ПИ No ФС77-76640 от 26 августа 2019 года

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (категория К1, специальности: 1.1.1; 1.1.2; 1.1.5; 1.1.6; 1.1.7; 1.1.8; 1.1.9; 1.1.10; 1.2.2; 2.3.1).  
Журнал индексируется RSCI, Web of Science (ESCI), Scopus, MathSciNet, zbMATH, DOAJ

Подписной индекс издания 36017. Подписку на печатные издания можно оформить в интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru).  
Журнал выходит 4 раза в год. Цена свободная.  
Электронная версия находится в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

**Директор издательства**  
Бучко Ирина Юрьевна

**Редактор**  
Каргин Игорь Анатольевич

**Художник**  
Соколов Дмитрий Валерьевич

**Редактор-стилист**  
Агафонов Андрей Петрович

**Верстка**  
Халова Виктория Анатольевна

**Технический редактор**  
Каргин Игорь Анатольевич

**Корректор**  
Агафонов Андрей Петрович

**Адрес учредителя, издателя и издательства (редакции):**  
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83  
Тел.: +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49, 52-26-89  
E-mail: publ@sgu.ru, izdat@sgu.ru

Подписано в печать 22.08.2023.  
Подписано в свет 31.08.2023.  
Формат 60 × 84 1/8.  
Усл. печ. л. 16,74 (18,0).  
Тираж 100 экз. Заказ 93-Т.

Отпечатано в типографии Саратовского университета.  
**Адрес типографии:**  
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2023

**ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ**

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <https://mmi.sgu.ru/dlya-avtorov>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования. В случае положительного решения статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <https://mmi.sgu.ru>

**Адрес редколлегии серии:**

410012, Саратов, Астраханская, 83,  
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,  
механико-математический факультет

**Тел./факс:** +7(845-2) 26-15-54

**E-mail:** [mmi@sgu.ru](mailto:mmi@sgu.ru)

**Website:** <https://mmi.sgu.ru>

**Ответственный секретарь серии:**

Шевцова Юлия Владиславовна

**CONTENTS****Scientific Part****Mathematics**

**Belkina T. A., Ogareva A. S.** Risky investments and survival probability in the insurance model with two-sided jumps: Problems for integrodifferential equations and ordinary differential equation and their equivalence 278

**Boykov I. V., Ryazantsev V. A.** On the iterative method for solution of direct and inverse problems for parabolic equations 286

**Kurdyumov V. P.** Classic and generalized solutions of the mixed problem for wave equation with a summable potential. Part I. Classic solution of the mixed problem 311

**Lukomskii S. F., Kruss Iu. S.** Unitary extension principle on zero-dimensional locally compact groups 320

**Rubinstein A. I., Telyakovskii D. S.** On functions of van der Waerden type 339

**Stash A. Kh., Loboda N. A.** On the question of the residual of strong exponents of oscillation on the set of solutions of third-order differential equations 348

**Hoang V. N., Provotorov V. V.** Stability of three-layer differential-difference schemes with weights in the space of summable functions with supports in a network-like domain 357

**Mechanics**

**Karpov V. V., Bakusov P. A., Maslennikov A. M., Semenov A. A.** Simulation models and research algorithms of thin shell structures deformation. Part I. Shell deformation models 370

**Computer Sciences**

**Velichko A. S.** Cloud service for interactive simulation of production location 411



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА  
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.  
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

**Главный редактор**

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Заместитель главного редактора**

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Ответственный секретарь**

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

**Члены редакционной коллегии:**

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Бауэр Светлана Михайловна, доктор физ.-мат. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

dell'Isola Francesco, доктор наук, профессор (Рим, Италия)

Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Омск, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)

Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)

Каплунув Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Беларусь)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, профессор, акад. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Долгопрудный,

Московская обл., Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук (Ульяновск, Россия)

Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, профессор, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D. (Киль, Великобритания)

Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Беларусь)

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Цатурян Андрей Кимович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чунань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL  
"IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY.  
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS"**

**Editor-in-Chief** – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

**Deputy Editor-in-Chief** – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

**Executive Secretary** – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

**Members of the Editorial Board:**

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Svetlana M. Bauer (St. Petersburg, Russia)

Francesco dell'Isola (Rome, Italy)

Shoji Imatani (Kyoto, Japan)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

Avgust P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Nikita F. Morozov (St. Petersburg, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan, Russia)

Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny,

Moscow region, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)

Alexander F. Rezhnikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Alexander I. Shashkin (Voronezh, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

Igor' E. Tananko (Saratov, Russia)

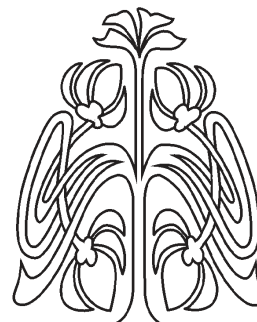
Andrey K. Tsaturyan (Moscow, Russia)

Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

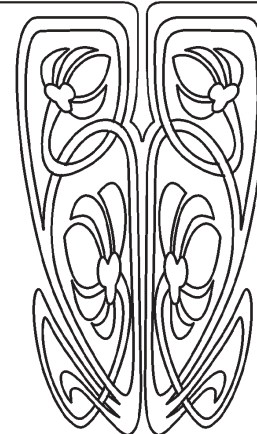
Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)

Vyacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ  
КОЛЛЕГИЯ**



## МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 278–285  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 278–285

[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru)

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-278-285>

EDN: HYOWQI

Article

### **Risky investments and survival probability in the insurance model with two-sided jumps: Problems for integrodifferential equations and ordinary differential equation and their equivalence**

**T. A. Belkina<sup>1</sup>✉, A. S. Ogareva<sup>2</sup>**

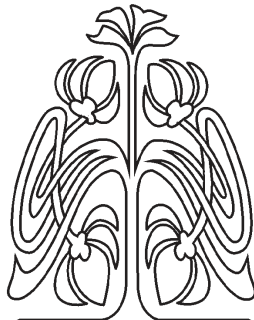
<sup>1</sup>Central Economics and Mathematics Institute RAS, 47 Nakhimovsky prosp., Moscow 117418, Russia

<sup>2</sup>Moscow School of Economics of Lomonosov Moscow State University (MSE MSU), 1, str. 61 Leninskie Gory, Moscow 119234, Russia

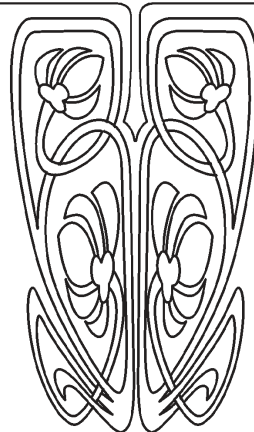
**Tatiana A. Belkina**, [tati.belkina@gmail.com](mailto:tati.belkina@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0001-7384-0025>, AuthorID: 12222

**Anna S. Ogareva**, [ogareva-a@mail.ru](mailto:ogareva-a@mail.ru)

**Abstract.** We consider a model of an insurance portfolio that includes both non-life and life annuity insurance while assuming that the surplus (or some of its fraction) is invested in risky assets with the price dynamics given by a geometric Brownian motion. The portfolio surplus (in the absence of investments) is described by a stochastic process involving two-sided jumps and a continuous drift. Downward jumps correspond to the claim sizes and upward jumps are interpreted as random gains that arise at the final moments of the life annuity contracts realizations (i.e. at the moments of the death of policyholders). The drift is determined by the difference between premiums in the non-life insurance contracts and the annuity payments. We study the ruin problem for the model with investment using an approach based on integrodifferential equations (IDE) for the survival probabilities as a function of initial surplus. The main problem in calculating the survival probability as a solution of the IDE is that the initial value of the probability itself or its derivative at a zero initial surplus is priori unknown. For the case of the exponential distributions of the jumps, we propose a solution to this problem based on the assertion that the problem for an IDE is equivalent



Научный  
отдел





to a problem for an ordinary differential equation (ODE) with some nonlocal condition added. As a result, a solution to the original problem can be obtained as a solution to the ODE problem with an unknown parameter, which is finally determined using the specified nonlocal condition and a normalization condition.

**Keywords:** insurance, two-sided jumps, investments, risky asset, ruin problem, survival probability, integrodifferential equation

**For citation:** Belkina T. A., Ogareva A. S. Risky investments and survival probability in the insurance model with two-sided jumps: Problems for integrodifferential equations and ordinary differential equation and their equivalence. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 278–285. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-278-285>, EDN: HYOWQI

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 519.624:519.86

## **Рисковые инвестиции и вероятность неразорения в модели страхования с двусторонними скачками: задачи для интегродифференциальных уравнений и обыкновенного дифференциального уравнения и их эквивалентность**

**Т. А. Белкина<sup>1✉</sup>, А. С. Огарева<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Центральный экономико-математический институт РАН, Россия, 117418, г. Москва, Нахимовский просп., д. 47

<sup>2</sup>Московская школа экономики МГУ имени М. В. Ломоносова, Россия, 119234, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 61

**Белкина Татьяна Андреевна**, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, tati.belkina@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-7384-0025>, AuthorID: 12222

**Огарева Анна Сергеевна**, студент магистратуры, ogareva-a@mail.ru

**Аннотация.** Рассматривается модель страхового портфеля, включающего рисковое страхование и пожизненные аннуитеты в предположении, что резерв (или некоторая его доля) инвестируется в рисковый актив, динамика цены которого моделируется геометрическим броуновским движением. Резерв портфеля (в отсутствие инвестиций) описывается стохастическим процессом, включающим двусторонние скачки и непрерывный снос, при этом скачки вниз соответствуют размерам требований, а скачки вверх интерпретируются как случайные доходы, возникающие в финальные моменты реализации аннуитетов (т.е. в моменты окончания жизни страхователей). Снос определяется разностью между премиями по рисковому страхованию и выплатами по аннуитетам. Проблема разорения в модели с инвестициями изучается с помощью подхода, основанного на интегродифференциальных уравнениях (ИДУ) для вероятности неразорения как функции начального резерва. Основная трудность при вычислении вероятности неразорения как решения ИДУ состоит в том, что начальные значения самой вероятности или ее производной (т.е. при нулевом начальном резерве) априорно в общем случае неизвестны. Для случая экспоненциального распределения скачков предлагается решение данной проблемы, основанное на утверждении об эквивалентности задачи для ИДУ задаче для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) при добавлении



некоторого нелокального условия. В результате применения такого подхода может быть получено решение исходной задачи как решение задачи для ОДУ с неизвестным параметром, который в конечном итоге определяется при использовании указанного нелокального условия и условия нормировки.

**Ключевые слова:** страхование, двусторонние скачки, инвестиции, рисковый актив, проблема разорения, вероятность неразорения, интегродифференциальное уравнение

**Для цитирования:** *Belkina T. A., Ogareva A. S. Risky investments and survival probability in the insurance model with two-sided jumps: Problems for integrodifferential equations and ordinary differential equation and their equivalence [Белкина Т. А., Огарева А. С. Рисковые инвестиции и вероятность неразорения в модели страхования с двусторонними скачками: задачи для интегродифференциальных уравнений и обыкновенного дифференциального уравнения и их эквивалентность] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 278–285. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-278-285>, EDN: HYOWQI*

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

## Introduction

A compound Poisson risk model involving two-sided jumps without investment, is considered in [1, 2]. In the context of ruin theory, the model can be interpreted as the surplus process of a business enterprise or an insurance company that is subject to random gains and losses. In [1], a Brownian perturbation is also added to this process, and the asymptotic estimate for the probability of ruin is obtained under some assumptions on the density functions of jumps. In [2] so-called Gerber – Shiu expected discounted penalty function in the model with a continuous downward drift is studied. The ruin problem for an insurance company having two business branches, life insurance and non-life insurance, and investing its reserves into a risky asset with the price dynamics given by a geometric Brownian motion, is investigated in [3]. In contrast to the models considered in [1] and [2], in [3] the processes of receipt of claims and random gains are modeled by two independent compound Poisson processes with different intensities. One of these processes involves random claims in non-life insurance (negative jumps), and the other process involves random gains in life insurance (positive jumps).

For the case of exponentially distributed jumps, it was shown in [3] that the survival probability is a solution of an ordinary differential equation of the fourth order; moreover, a power asymptotic representation for the survival probability as a solution of this equation was obtained when the initial surplus tends to infinity. Note that the mentioned asymptotic representation has an unknown multiplier and only gives an understanding of how fast the survival probability tends to one. The main goal of the present paper is to prove that the survival probability is a solution to a well-posed ODE problem with boundary conditions and some nonlocal conditions. This makes possible not only a qualitative but also a quantitative study of the survival probability in the future.

## 1. The model description and statement of the problem

We will consider an insurance portfolio that combines surpluses for two types of insurance businesses: life and non-life insurance. We propose that the typical life insurance contract for the policyholder is the life annuity with the subsequent transfer of its property to the benefit of the insurance company. Non-life insurance contracts have



the same structure as in the classical Cramer – Lundberg model. Then the total portfolio surplus is of the form

$$R_t = u + \sum_{i=1}^{N_1(t)} C_i - \sum_{j=1}^{N(t)} Z_j + ct, \quad t \geq 0. \tag{1}$$

Here  $R_t$  is the total portfolio surplus at time  $t \geq 0$ ;  $u$  is the initial surplus,  $c \neq 0$  is the difference between the premium rate in non-life insurance and the life annuity rate (or the pension payments per unit of time), assumed to be deterministic and fixed.  $N_1(t)$  is a homogeneous Poisson process with intensity  $\lambda_1 > 0$  that, for any  $t > 0$ , determines the number of random revenues up to the time  $t$ ;  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) are independent identically distributed (i.i.d.) random variables (r.v.) with a distribution function  $G(z)$  ( $G(0) = 0$ ,  $\mathbf{E}C_1 = n < \infty$ ,  $m > 0$ ) that determine the revenue sizes (premiums) and are assumed to be independent of  $N_1(t)$ . These random revenues arise at the final moments of the life annuity contracts realizations. Further,  $N(t)$  is a homogeneous Poisson process with intensity  $\lambda > 0$  that, for any  $t > 0$ , determines the number of claims up to the time  $t$ ;  $Z_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) are i.i.d. r.v. with a distribution function  $F(z)$  ( $F(0) = 0$ ,  $\mathbf{E}Z_1 = m < \infty$ ,  $m > 0$ ) that determine the claim sizes and are assumed to be independent of  $N(t)$ . In addition, we assume that the processes of total premiums and total payments are independent.

We also assume that a fraction  $\alpha$  of the surplus is invested at the time  $t$  into a risky asset whose price follows a geometric Brownian motion  $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$ , where  $\mu$  is the stock return rate,  $\sigma > 0$  is the volatility, and  $B_t$  is a standard Brownian motion independent of  $N(t)$ ,  $N_1(t)$ ,  $C_i$ 's and  $Z_i$ 's. The fraction  $(1 - \alpha)$  of the surplus is invested in the risk-free asset whose price is governed by  $dP_t = rP_t dt$ , where  $r$  is the risk-free interest rate; we suppose that  $0 \leq r < \mu$ .

Then the resulting surplus process  $X_t$  is governed by the equation

$$dX_t = [(\alpha\mu + (1 - \alpha)r) dt + \alpha\sigma dw_t]X_t + dR_t, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

with the initial condition  $X_0 = u$ , where  $R_t$  is defined by (1).

Note that if  $0 < \alpha \leq 1$ , then the insurance company purchases the risky asset at a cost of no more than its current surplus; if  $\alpha > 1$ , the insurance company borrows to invest in the risky asset; and if  $\alpha < 0$ , the insurance company shortsells the risky asset to invest in the risk-free asset.

Denote by  $\varphi(u)$  the survival probability:  $\varphi(u) = \mathbf{P}(X_t \geq 0, t \geq 0)$ . Let us change the parameters of the assets as follows

$$a = \alpha\mu + (1 - \alpha)r, \quad b = \alpha\sigma, \tag{3}$$

and introduce the following assumptions: **(A1)**  $b \neq 0$ ; **(A2)**  $\rho := 2a/b^2 > 1$ .

If assumptions **(A1)** and **(A2)** are satisfied, then a corresponding asset portfolio includes risky assets and the expected return on this portfolio is positive; moreover, assumption **(A2)** excludes unreliable asset portfolios leading to bankruptcy with a probability one (see [3]). Note that if assumptions **(A1)** and **(A2)** hold, then  $\alpha$  satisfies the conditions  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha^- < \alpha < \alpha^+$ , where  $\alpha^- = [R - \sqrt{R^2 + 2r}]/\sigma \leq 0$ ,  $\alpha^+ = [R + \sqrt{R^2 + 2r}]/\sigma > 0$ , and  $R$  is a Sharp ratio, i.e.,  $R = (\mu - r)/\sigma$ .

If the survival probability  $\varphi(u)$  for the process (2) belongs to the space  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$  of twice continuously differentiable on  $(0, \infty)$  functions, then the using of the Itô's formula





and the total probability formula leads to the IDE

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u) + (au + c)\varphi'(u) - \lambda \left[ \varphi(u) - \int_0^u \varphi(u-x)dF(x) \right] - \lambda_1 \left[ \varphi(u) - \int_0^\infty \varphi(u+y)dG(y) \right] = 0, \quad u > 0, \quad (4)$$

where  $a, b$  are defined in (3).

## 2. IDE and ODE problems in the case of the exponential distributions of jumps: formulations and equivalence

In the following we will assume that all the jumps are exponentially distributed, i.e.,  $F(x) = 1 - \exp(-x/m)$ ,  $m > 0$ ,  $G(y) = 1 - \exp(-y/n)$ ,  $n > 0$ . In this case, for  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$ , IDE (4) can be rewritten in the following form:

$$(b^2/2)u^2 f''(u) + (au + c)f'(u) - \lambda[f(u) - (J_m f)(u)] - \lambda_1[f(u) - (J_{1,n} f)(u)] = 0, \quad u > 0, \quad (5)$$

where the operators  $J_m, J_{1,n} : \mathcal{C}[0, \infty) \rightarrow \mathcal{C}[0, \infty)$ , are defined as follows:

$$(J_m f)(u) = \frac{1}{m} \int_0^u f(u-x) \exp(-x/m) dx = \frac{1}{m} \int_0^u f(s) \exp(-(u-s)/m) ds, \quad (6)$$

$$(J_{1,n} f)(u) = \frac{1}{n} \int_0^\infty f(u+y) \exp(-y/n) dy = \frac{1}{n} \int_u^\infty f(s) \exp(-(s-u)/n) ds. \quad (7)$$

Note that

$$(J_m f)'(u) = [f(u) - (J_m f)(u)]/m, \quad (J_{1,n} f)'(u) = [(J_{1,n} f)(u) - f(u)]/n. \quad (8)$$

Denote by  $g$  the left-hand side of the equation (5). Formally differentiating this function two times, we compose a linear combination of  $g$  and its derivatives in such a way as to eliminate the integral components. For this purpose, we use the relations (8). If there is a solution to an equation (5) that belongs to  $\mathcal{C}^4(\mathbb{R}_+)$ , then it also satisfies the equation  $g(u) + (m-n)g'(u) - nmg''(u) = 0$ . The last equation is an ODE of the following form (see also [3]):

$$\begin{aligned} & \frac{b^2}{2}u^2 f''''(u) + \left[ c + (2b^2 + a)u + \frac{b^2(n-m)}{2mn}u^2 \right] f'''(u) + \\ & + \left[ b^2 + 2a - \lambda - \lambda_1 + \frac{c(n-m)}{mn} + \frac{(b^2+a)(n-m)}{mn}u - \frac{b^2}{2mn}u^2 \right] f''(u) + \\ & + \left[ \frac{a(n-m) + \lambda m - \lambda_1 n - c}{mn} - \frac{a}{mn}u \right] f'(u) = 0, \quad u > 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Our main goal here is to establish conditions under which the solution of ODE (9) is also a solution of IDE(4) and determines the survival probability in the original problem.

Let us consider (formally at first) IDE (5) along with the conditions

$$\lim_{u \rightarrow +0} |f(u)| < \infty, \quad (10)$$

$$I\{c < 0\} \lim_{u \rightarrow +0} f(u) = 0, \quad (11)$$



$$\lim_{u \rightarrow +0} |f'(u)| < \infty, \quad \lim_{u \rightarrow +0} [uf''(u)] = 0, \tag{12}$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = 1, \tag{13}$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} [uf'(u)] = 0, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} [u^2 f''(u)] = 0, \tag{14}$$

$$0 \leq f(u) \leq 1, \quad u \in \mathbb{R}_+. \tag{15}$$

Then, setting  $u \rightarrow 0$ , we conclude that, for solutions of the IDE problem (5), (10)–(15) the following nonlocal condition must be satisfied

$$cf'(+0) - (\lambda + \lambda_1)f(+0) + \frac{\lambda_1}{n} \int_0^\infty f(s) \exp(-s/n) ds = 0. \tag{16}$$

**Theorem 1.** *A solution of ODE (9) that satisfies the conditions (10)–(15) is also the solution of IDE (5) if and only if the nonlocal condition (16) is satisfied.*

**Proof.** The necessity, i.e., the fact that the solution to the IDE problems (5), (10)–(15) satisfies the ODE (9), and the nonlocal condition (16) is obvious due to the construction of the ODE and the reasoning above. Let us prove the sufficiency, namely, that the solution of ODE problem (9), (10)–(15) which satisfies the condition (16), is satisfying also the IDE (5).

Denote by  $h$  the left-hand side of the equation (5) where the function  $f$  is the solution of ODE problem (9), (10)–(15) which satisfies the condition (16). Then, in view of ODE (9) we have that the function  $h$  satisfies the equation

$$h(u) + (m - n)h'(u) - (mn)h''(u) = 0. \tag{17}$$

Let us prove that  $h(u) \equiv 0$  using the formulated conditions (10)–(15) and (16). The general solution of the equation (17) has the form

$$h(u) = C_1 e^{u/n} + C_2 e^{-u/m} \tag{18}$$

with arbitrary constants  $C_1, C_2$ . From the conditions (10), (12) we have

$$\lim_{u \rightarrow 0} h(u) = cf'(+0) - (\lambda + \lambda_1)f(+0) + \frac{\lambda_1}{n} \int_0^\infty f(s) \exp^{-s/n} ds, \tag{19}$$

then, in view of (16) and (18), the equality

$$C_1 + C_2 = 0 \tag{20}$$

is satisfied. By virtue of conditions (13), (14), it is easy to see that  $\lim_{u \rightarrow +\infty} (J_{1,n}f)(u) = 1$ , and

$$\lim_{u \rightarrow \infty} h(u) = -(\lambda + \lambda_1) + \lambda \lim_{u \rightarrow \infty} (J_m f)(u) + \lambda_1 = -\lambda + \lambda \lim_{u \rightarrow \infty} (J_m f)(u).$$

For  $f$  satisfying condition (15), the right-hand side of the last equation is a finite value, therefore,  $C_1 = 0$  in (18), and taking equality (20) into account, we obtain that  $h \equiv 0$ . Thus,  $f$  satisfies IDE (5). □

As a result, we have the following

**Corollary 1.** *IDE problem (5), (10)–(15) and ODE problem (9), (10)–(16) are equivalent.*



### 3. The survival probability as a solution of IDE and ODE problems

To establish a connection between a solution of the IDE problem and the survival probability in the origin problem, we use the so-called sufficiency theorem (for other models, see [4]).

**Theorem 2.** *For the process (2), let the conditions (A1) and (A2) be fulfilled with  $a, b$  defined in (3). Suppose the IDE (5) has a twice continuously differentiable on  $(0, \infty)$  solution  $f(u)$  subject to conditions (11), (13), and (15). Then  $f(u) \equiv \varphi(u)$ , i.e.,  $f(u)$  is the survival probability for the process (2) with the initial state  $u$ .*

We omit the proof because it is similar to the proof of Theorem 3.1 in [4]. From Theorem 2 and Corollary 1, we obtain the following obvious.

**Corollary 2.** *For the process (2), let the conditions (A1) and (A2) be fulfilled with  $a, b$  defined in (3). Suppose there is a twice continuously differentiable on  $(0, \infty)$  solution  $f(u)$  to the ODE problem (9), (10)–(16). Then  $f(u) \equiv \varphi(u)$ , i.e.,  $f(u)$  is the survival probability for the process (2) with the initial state  $u$ .*

Proof of the existence of a solution to the ODE problem mentioned above is not considered in this paper. For the case  $c = 0$ , the existence and uniqueness of such a solution to a similar problem is proved in [5]. In the next section, we present an algorithm that allows us to obtain a solution to ODE problems (9), (10)–(16) with nonlocal conditions by solving a boundary value problem for a third-order ODE under the condition that a solution of this problem exists and is integrable at infinity function (the existence of integrable at infinity solution to the third-order ODE follows from the power asymptotics for the derivative of the survival probability satisfying this equation, see [3]).

### 4. Algorithm for solving the ODE problem with nonlocal condition by solving a boundary value problem for ODE with a reduced order

Denote  $f' = \psi$  and reformulate the ODE (9) and the conditions (12) and (14) in terms of the function  $\psi$ . Then we have

$$\begin{aligned} & \frac{b^2}{2}u^2\psi'''(u) + \left[ c + (2b^2 + a)u + \frac{b^2(n - m)}{2mn}u^2 \right] \psi''(u) + \\ & + \left[ b^2 + 2a - \lambda - \lambda_1 + \frac{c(n - m)}{mn} + \frac{(b^2 + a)(n - m)}{mn}u - \frac{b^2}{2mn}u^2 \right] \psi'(u) + \\ & + \left[ \frac{a(n - m) + \lambda m - \lambda_1 n - c}{mn} - \frac{a}{mn}u \right] \psi(u) = 0, \quad u > 0, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} |\psi(u)| < \infty, \quad \lim_{u \rightarrow +0} [u\psi'(u)] = 0, \tag{22}$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} [u\psi(u)] = 0, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} [u^2\psi'(u)] = 0. \tag{23}$$

Since the value of  $\psi(+0) = \lim_{u \rightarrow +0} |\psi(u)|$  is not defined, we will consider (21)–(23) as a parametric family of problems with the parameter  $\psi(+0) = \psi_0, 0 < \psi_0 < \infty$ . Note that the local condition (16) can be rewritten as

$$\lambda f(0) = c\psi(+0) + \lambda_1 \int_0^\infty \psi(s) \exp(-s/n) ds. \tag{24}$$



Let  $\tilde{\psi}$  be an integrable at infinity solution to the ODE problem (21)–(23) with a fixed parameter  $\tilde{\psi}(+0) = \tilde{\psi}_0 > 0$ . Then the solution of the ODE problem (9), (10)–(16) can be obtained through the following steps.

*Step 1:* for the case  $c > 0$ , to define  $\tilde{f}(0)$  from the condition (24) with function  $\tilde{\psi}$  instead  $\psi$ ; for the case  $c < 0$ , we set  $\tilde{f}(0) = 0$ .

*Step 2:* to calculate the function

$$\tilde{f}(u) = \tilde{f}(0) + \int_0^u \tilde{\psi}(s) ds. \quad (25)$$

*Step 3:* to find  $\tilde{f}(\infty) = \lim_{u \rightarrow \infty} \tilde{f}(u)$  from (25).

*Step 4:* to define the functions  $f(u) = \tilde{f}(u)/\tilde{f}(\infty)$ ,  $\psi(u) = \tilde{\psi}(u)/\tilde{f}(\infty)$ .

It is clear that these functions are related by equality  $f' = \psi$  and relation (24), and  $f$  is the solution of the ODE problem (9), (10)–(16). It is obviously that the unknown value of the parameter  $\psi_0 = \psi(+0)$  can be found from the equality  $\psi_0 = \tilde{\psi}_0/\tilde{f}(\infty)$ .

### References

1. Zhang Z., Yang H., Li S. The perturbed compound Poisson risk model with two-sided jumps. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2010, vol. 233, iss. 8, pp. 1773–1784. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.09.014>
2. Cheung E. C. K. On a class of stochastic models with two-sided jumps. *Queueing Systems*, 2011, vol. 69, iss. 1, pp. 1–28. <https://doi.org/10.1007/s11134-011-9228-z>
3. Kabanov Yu., Pukhlyakov N. Ruin probabilities with investments: smoothness, integro-differential and ordinary differential equations, asymptotic behavior. *Journal of Applied Probability*, 2022, vol. 59, iss. 2, pp. 556–570. <https://doi.org/10.1017/jpr.2021.74>
4. Belkina T. Risky investment for insurers and sufficiency theorems for the survival probability. *Markov Processes and Related Fields*, 2014, vol. 20, iss 3, pp. 505–525. Available at: <http://math-mprf.org/journal/articles/id1344/> (accessed November 5, 2022).
5. Belkina T. A., Konyukhova N. B., Kurochkin S. V. Singular boundary value problem for the integrodifferential equation in an insurance model with stochastic premiums: Analysis and numerical solution. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, vol. 52, iss. 10, pp. 1384–1416. <https://doi.org/10.1134/S0965542512100077>

Поступила в редакцию / Received 30.11.2022

Принята к публикации / Accepted 25.12.2022

Опубликована / Published 31.08.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 286–310

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 286–310

[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru)

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-286-310>, EDN: **HMFDHB**

Научная статья

УДК 519.63

## Об одном итерационном методе решения прямых и обратных задач для параболических уравнений

И. В. Бойков<sup>✉</sup>, В. А. Рязанцев

Пензенский государственный университет, Россия, 440026, г. Пенза, ул. Красная, д. 40

**Бойков Илья Владимирович**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, [i.v.boykov@gmail.com](mailto:i.v.boykov@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-6980-933X>, AuthorID: 3167

**Рязанцев Владимир Андреевич**, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики, [ryazantsevv@mail.ru](mailto:ryazantsevv@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-0875-9823>, AuthorID: 840034

**Аннотация.** Статья посвящена приближенным методам решения прямых и обратных задач для параболических уравнений. Предложен приближенный метод решения начальной задачи для многомерного нелинейного параболического уравнения. Метод основан на приведении начальной задачи к нелинейному многомерному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, которое аппроксимируется системой нелинейных алгебраических уравнений по технологии метода механических квадратур. При построении вычислительной схемы использованы узлы локальных сплайнов, реализующих оптимальную по порядку аппроксимацию класса функций, к которому принадлежат решения параболических уравнений. Для численной реализации вычислительной схемы используется приведенное в работе обобщение непрерывного метода решения нелинейных операторных уравнений. Исследуется обратная задача для параболического уравнения с дробной производной по временной переменной. Предложены приближенные методы определения порядка дробной производной по времени и коэффициента при производной по пространственной переменной.

**Ключевые слова:** параболические уравнения, прямая и обратная задачи, дробные производные, приближенные методы

**Для цитирования:** Бойков И. В., Рязанцев В. А. Об одном итерационном методе решения прямых и обратных задач для параболических уравнений // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 286–310. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-286-310>, EDN: **HMFDHB**

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

## On the iterative method for solution of direct and inverse problems for parabolic equations

I. V. Boykov<sup>✉</sup>, V. A. Ryazantsev

Penza State University, 40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia

Ilya V. Boykov, i.v.boykov@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-6980-933X>, AuthorID: 3167

Vladimir A. Ryazantsev, ryazantsev@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0875-9823>, AuthorID: 840034

**Abstract.** The paper is devoted to approximate methods for solution of direct and inverse problems for parabolic equations. An approximate method for the solution of the initial problem for multidimensional nonlinear parabolic equation is proposed. The method is based on the reduction of the initial problem to a nonlinear multidimensional integral Fredholm equation of the second kind which is approximated by a system of nonlinear algebraic equations with the help of the method of mechanical quadratures. For constructing the computational scheme we use the nodes of the local splines which realize order-optimal approximation of the functional class that contains solutions of parabolic equations. For implementation of the computational scheme we use the generalization of the continuous method for solution of nonlinear operator equations that is described in the paper. We also analyse the inverse problem for parabolic equation with fractional order derivative with respect to the time variable. The approximate methods for defining the fractional order of the time derivative and the coefficient at spatial derivative are proposed.

**Keywords:** parabolic equations, direct and inverse problems, fractional derivatives, approximate methods

**For citation:** Boykov I. V., Ryazantsev V. A. On the iterative method for solution of direct and inverse problems for parabolic equations. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 286–310 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-286-310>, EDN: HMFDBH

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

### Введение

Аналитические и численные методы решения прямых и обратных задач для параболических уравнений являются активно развивающимися направлениями математической физики и вычислительной математики. В настоящее время опубликовано большое число работ, посвященных исследованию и решению параболических уравнений с различными видами нелинейностей [1–7]. При решении параболических уравнений используются различные приближенные методы: разложение по базисным функциям, метод конечных элементов, метод сеток, метод граничных интегральных уравнений, вариационные и проекционные методы, итерационные методы [8, 9].

Различные постановки обратных задач для параболических уравнений и различные методы их исследования изложены в монографиях [10–13].

Для приближенного решения обратных задач для параболических уравнений предложены различные методы, краткий обзор которых сделан в работах [14, 15]. В большинстве работ, посвященных приближенным методам решения обратных задач, рассматриваются уравнения с производными целого порядка.

В настоящее время имеется большое число приложений, которые моделируются параболическими уравнениями с дробными производными (как по временным, так и



по пространственным переменным). Представляет значительный интерес разработка численных методов решения как прямых, так и обратных задач для подобных уравнений. Среди этих задач следует выделить обратные коэффициентные задачи и задачи определения порядка производных.

Статья посвящена построению приближенных методов решения некоторых классов прямых и обратных задач для параболических уравнений.

Приведем определения, используемые в статье.

Через  $D^k g(t, u_1, \dots, u_n)$  обозначена частная производная

$$D^k g(t, u_1, \dots, u_n) = \partial g(t, u_1, \dots, u_n) / \partial u_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть  $X$  — банахово пространство;  $K$  — оператор, действующий из  $X$  в  $X$ ,

$$B(a, r) = \{x, a \in X : \|x - a\| \leq r\}, \quad S(a, r) = \{x, a \in X : \|x - a\| = r\},$$

$\Lambda(K)$  — логарифмическая норма линейного оператора  $K$ , определяемая [16] выражением

$$\Lambda(K) = \lim_{h \downarrow 0} (\|I + hK\| - 1) / h,$$

где символ  $h \downarrow 0$  означает, что  $h$  стремится к нулю, убывая.

Для матриц в часто используемых пространствах логарифмические нормы известны.

Пусть дана вещественная матрица  $A = \{a_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , в  $n$ -мерном пространстве  $R_n$  векторов  $x = (x_1, \dots, x_n)$  с нормой

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_2 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|, \quad \|x\|_3 = \left[ \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right]^{1/2}.$$

Логарифмическая норма матрицы  $A$  равна [17]:

$$\Lambda_1(A) = \max_j (a_{jj} + \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|), \quad \Lambda_2(A) = \lambda_{\max} \left( \frac{A + A^T}{2} \right),$$

$$\Lambda_3(A) = \max_i (a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|).$$

Здесь  $\lambda_{\max}((A + A^T)/2)$  — наибольшее собственное значение матрицы  $(A + A^T)/2$ .

Пусть  $A, B$  — квадратные матрицы порядка  $n$  с комплексными элементами и  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  —  $n$ -размерные векторы с комплексными компонентами. Рассмотрим следующие системы алгебраических уравнений:  $Ax = \xi$  и  $Bu = \eta$ . Норма вектора и подчиненная ему операторная норма матрицы фиксируются; логарифмическая норма  $\Lambda(A)$  соответствует операторной норме.

**Теорема 1 ([18]).** Если  $\Lambda(A) < 0$ , то матрица  $A$  не вырожденная и

$$\|A^{-1}\| \leq 1/|\Lambda(A)|.$$

Напомним определения классов функций Гельдера.



**Определение 1.** Пусть  $f(x)$  — непрерывная функция на сегменте  $[a, b]$ . Говорят, что функция  $f(x) \in H_\alpha(M, [a, b])$ , если для всех  $x_1, x_2 \in [a, b]$  выполняется неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^\alpha.$$

**Определение 2.** Пусть  $f(x)$  — непрерывная функция на  $R$ . Если существуют  $M$  и  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) такие, что:

$$1) f(x) \in H_\alpha(M, L);$$

$$2) |f(x_1) - f(x_2)| \leq M \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right|^\alpha, \forall x_1, x_2 \in R \setminus L,$$

то говорят, что  $f(x) \in H_\alpha(M, R)$ . Здесь  $L = [-l, l]$  — достаточно большой замкнутый интервал.

## 1. Непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений

В настоящее время существует большое число методов решения нелинейных операторных уравнений  $A(x) = 0$  в банаховых пространствах [19, 20]. Наиболее востребованными являются, по-видимому, методы простой итерации и Ньютона – Канторовича [19–21]. Непрерывный аналог метода Ньютона – Канторовича предложен в работе [22] и активно применяется при решении многочисленных задач физики [23]. При реализации непрерывного аналога метода Ньютона – Канторовича требуется существование обратного оператора у производной  $A'(x)$  оператора  $A(x)$ , что снижает область его применения. В работе [24] предложен непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений, который не требует обратимости производной  $A'(x)$  на траектории решения уравнения  $Ax = 0$ . В [24] приведены достаточные условия сходимости непрерывного операторного метода к решению уравнения  $A(x) = 0$ .

В случаях, когда эти условия не выполняются, необходимо обобщение этого метода. Этому вопросу посвящен данный раздел.

Рассмотрим уравнение

$$A(x) - f = 0, \tag{1}$$

где  $A(x)$  — нелинейный оператор из банахова пространства  $B$  в  $B$ .

Уравнению (1) поставим в соответствие задачу Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = -(A'(x(t)))^*(A(x(t)) - f), \tag{2}$$

$$x(0) = x_0, \tag{3}$$

где  $A'(x(t))$  — производная Гато (Фреше) оператора  $A(x(t))$ ,  $(A'(x(t)))^*$  — оператор, сопряженный с  $A'(x(t))$ .

По аналогии с доказательствами, приведенными в [24], доказываются следующие утверждения.

**Теорема 2.** Пусть уравнение (1) имеет решение  $x^*$  и на любой дифференцируемой кривой  $g(t)$  в пространстве  $B$  выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Lambda((A'(g(\tau)))^* A'(g(\tau))) d\tau \geq \alpha_g, \quad \alpha_g > 0. \tag{4}$$

Тогда решение задачи Коши (2)–(3) сходится к решению  $x^*$  уравнения (1) при  $t \rightarrow \infty$  и при любом начальном приближении  $x_0 \in B$ .





**Теорема 3.** Пусть уравнение (1) имеет решение  $x^*$  и на любой дифференцируемой кривой  $g(t)$  в шаре  $B(x^*, r)$ ,  $r > 0$ , выполняются условия:

$$1) \text{ при всех } t, t \geq 0, \int_0^t \Lambda((A'(g(\tau)))^* A'(g(\tau))) d\tau > 0;$$

2) справедливо неравенство (4).

Тогда задача Коши (2)–(3) при любом начальном значении  $x_0 \in B(x^*, r)$  сходится при  $t \rightarrow \infty$  к решению  $x^*$  уравнения (1).

Если условия теорем 2 и 3 не выполняются, то необходимо провести регуляризацию и перейти от задачи Коши (2)–(3) к задаче

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha x(t) - (A'(x(t)))^*(A(x(t)) - f), \quad (5)$$

$$x(0) = x_0, \quad (6)$$

где  $\alpha, \alpha > 0$  — параметр регуляризации.

При  $t \rightarrow \infty$  задача Коши (5)–(6) сходится к решению уравнения

$$\alpha x + (A'(x))^*(A(x) - f) = 0$$

при любом начальном значении  $x_0 \in B$ .

**Замечание 1.** Выбор  $\alpha$  зависит от конкретной задачи.

## 2. Об одном методе оценки точности решений интегральных уравнений

В этом разделе описан используемый в работе метод получения оценки погрешности вычислительной схемы. Так как вычислительная схема решения многомерных интегральных уравнений, которую будем рассматривать в разделе 3, имеет громоздкий вид, то ограничимся изложением метода на примере одномерного интегрального уравнения Фредгольма (линейного и нелинейного).

### 2.1. Линейные уравнения

Рассмотрим уравнение

$$u(x) + \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)u(y) dy = f(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (7)$$

Введем интервалы  $\Delta_{-1} = (-\infty, -A)$ ,  $\Delta_k = [x_k, x_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2N - 1$ ,  $\Delta_{2N} = [x_{2N}, \infty)$ , где  $x_k = -A + kA/N$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2N$ ,  $A$  — достаточно большое положительное число, величина которого зависит от класса функций, в котором ищется решение уравнения (7).

Приближенное решение уравнения (7) ищем в виде кусочно-постоянной функции

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} \alpha_k \phi_k(x), \quad \phi_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta_k, \\ 0, & x \in (-\infty, \infty) \setminus \Delta_k, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2N - 1.$$



Коэффициенты  $\{\alpha_k\}$  определяются из системы уравнений

$$u_N(\bar{x}_k) + \sum_{l=0}^{2N-1} \frac{A}{N} h(\bar{x}_k, \bar{x}_l) u_N(\bar{x}_l) = f(\bar{x}_k), \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 1. \quad (8)$$

Здесь  $\bar{x}_k = x_k + A/2N$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2N - 1$ .

Система линейных алгебраических уравнений (8) эквивалентна следующей:

$$\alpha_k + \frac{A}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} \alpha_l h(\bar{x}_k, \bar{x}_l) = f(\bar{x}_k), \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 1.$$

Для определенности будем исследовать систему уравнений (8) в  $2N$ -мерном пространстве  $R^{2N}$  векторов  $v = (v_1, v_2, \dots, v_{2N})$  с нормой  $\|v\|_2 = \max_{1 \leq k \leq 2N} |x_k|$ .

**Замечание 2.** Все рассуждения справедливы для любого банахова  $2N$ -мерного пространства.

Система (8) в операторной форме имеет вид

$$H_N u_N = f_N.$$

Пусть логарифмическая норма  $\Lambda_2(H_N)$  отрицательная. Тогда согласно теореме 1 матрица  $H_N$  обратима и  $\|H^{-1}\| \leq 1/|\Lambda_2(H_N)|$ .

Обозначим через  $u^*(x)$  решение уравнения (7). Тогда

$$u^*(\bar{x}_k) + \int_{-\infty}^{\infty} h(\bar{x}_k, y) u^*(y) dy = f(\bar{x}_k), \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 1. \quad (9)$$

Представим систему (9) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u^*(x_k) + \int_{-\infty}^{-A} h(\bar{x}_k, y) u^*(y) dy + \sum_{l=0}^{2N-1} \int_{\Delta_l} h(\bar{x}_k, y) u^*(y) dy + \\ + \int_A^{\infty} h(\bar{x}_k, y) u^*(y) dy = f(\bar{x}_k), \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Вычитая из (8) уравнение (10), имеем

$$\begin{aligned} (u_N(\bar{x}_k) - u^*(\bar{x}_k)) + \sum_{l=0}^{2N-1} \frac{A}{N} h(\bar{x}_k, \bar{x}_l) (u_N(\bar{x}_l) - u^*(\bar{x}_l)) = \\ = \int_{-\infty}^{-A} h(\bar{x}_k, y) u^*(y) dy + \sum_{l=0}^{2N-1} \int_{\Delta_l} (h(\bar{x}_k, y) - h(\bar{x}_k, \bar{x}_l)) u^*(y) dy + \\ + \sum_{l=0}^{2N-1} \int_{\Delta_l} h(\bar{x}_k, \bar{x}_l) (u^*(y) - u_N^*(\bar{x})) dy + \end{aligned}$$

$$+ \int_A^\infty h(\bar{x}_k, y) u^*(y) dy = I_1(k) + \dots + I_4(k), \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 1. \quad (11)$$

Из (11) следует

$$\max_{0 \leq k \leq 2N-1} |u_N(\bar{x}_k) - u^*(\bar{x}_k)| \leq \frac{C}{|\Lambda_2(H_N)|} \left( \max_k |I_1(k)| + \max_k |I_2(k)| + \max_k |I_3(k)| \right).$$

Величины  $|I_1(k)|$  и  $|I_3(k)|$  зависят от класса функций, к которым принадлежит ядро  $h(x, y)$  и (или) решение  $x^*(t)$  уравнения (7). Например, в предположении, что  $|h(x, y)| \leq \frac{1}{x^2+y^2}$ , имеем

$$\begin{aligned} |I_1(k)| &\leq \int_{-\infty}^{-A} |h(\bar{x}_k, y)| |u^*(y)| dy \leq \left[ \int_{-\infty}^{-A} \left| \frac{1}{x_k^2 + y^2} \right|^2 dy \right]^{1/2} \left[ \int_{-\infty}^{-A} |u^*(y)|^2 dy \right]^{1/2} \leq \\ &\leq \left[ \int_{-\infty}^{-A} \frac{1}{(x_k^2 + y^2)^2} dy \right]^{1/2} \|u^*(y)\| \leq \frac{C}{A^3}. \end{aligned}$$

Здесь и ниже через  $C$  обозначены константы, не зависящие от  $N$ .

Очевидно, выбором  $A$  величину  $|I_1(k)|$ , точно так же как  $|I_4(k)|$ , можно сделать как угодно малой.

Сумма  $|I_2(k)|$  в предположении, что  $h(x, y) \in H_{\alpha, \alpha}(M)$ , оценивается неравенством

$$\max_k |I_2(k)| \leq \frac{CMA^{1+\alpha}}{N^\alpha}.$$

Сумма  $|I_3(k)|$  в предположении, что  $u^*(x) \in H_\alpha(M)$ , оценивается неравенством

$$\max_k |I_3(k)| \leq \frac{CMA^{1+\alpha}}{N^\alpha}.$$

Таким образом, приходим к оценке

$$\begin{aligned} \max_k |u^*(\bar{x}_k) - u_N(\bar{x}_k)| &\leq C \left[ \max_{-A \leq x \leq A} \left[ \int_{-\infty}^{-A} |h(x, y)|^2 dy \right]^{1/2} + \right. \\ &\left. + \max_{-A \leq x \leq A} \left[ \int_A^\infty |h(t, y)|^2 dy \right]^{1/2} + \frac{MA^{1+\alpha}}{N^\alpha} \right]. \end{aligned}$$

**Теорема 4.** Пусть уравнение (7) имеет решение  $u^*(x)$ ,  $\sup_{-\infty < x < \infty} |u^*(x)| \leq M$ ,  $u^*(x) \in H_\alpha(M)$ ,  $\Lambda_2(H_N) < -\kappa$ . Тогда система (8) однозначно разрешима и справедлива оценка

$$\max_k |u^*(\bar{x}_k) - u_N(\bar{x}_k)| \leq C \left[ \max_{-A \leq x \leq A} \left[ \int_{-\infty}^{-A} |h(x, y)|^2 dy \right]^{1/2} + \right.$$



$$+ \max_{-A \leq x \leq A} \left[ \int_A^\infty |h(t, y)|^2 dy \right]^{1/2} + \frac{MA^{1+\alpha}}{N^\alpha},$$

где  $u^*(x)$  и  $u_N^*(x)$  — решения уравнений (7) и (8) соответственно.

**Замечание 3.** Параметр  $A$  может быть выбран, как функция от  $N$ , в результате минимизации правой части предыдущего неравенства.

## 2.2. Нелинейные уравнения

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$K(u) \equiv u(y) + \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y, u(x)) dx = f(y), \quad -\infty < y < \infty. \quad (12)$$

Воспользуемся обозначениями, введенными в предыдущем пункте.

Приближенное решение будем искать в виде кусочно-постоянной функции  $u_N(x)$ , коэффициенты  $\alpha_k$  которой находятся из системы уравнений

$$u_N(\bar{x}_k) + \frac{A}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} h(\bar{x}_k, \bar{x}_l, u_N(\bar{x}_l)) = f(\bar{x}_k), \quad k = 0, 1, 2N-1. \quad (13)$$

Запишем систему (13) в операторной форме

$$K_N(u_N) \equiv u_N + L_N(u_N) = F_N$$

с очевидными обозначениями  $K_N, L_N, F_N$ .

Пусть оператор  $K(u)$  отображает пространство  $L_2(-\infty, \infty)$  в  $L_2(-\infty, \infty)$ . Предположим, что функция  $h(x, y, u)$  удовлетворяет условию Гельдера  $H_\alpha(M)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , по первым двум переменным и имеет производную, удовлетворяющую условию Гельдера  $H_\alpha(M)$  по третьей переменной. Производная  $h(x, y, u)$  по третьей переменной обозначается как  $h'_3(x, y, u)$ .

Пусть уравнение (12) имеет решение  $u^*(x)$  в шаре  $B(x^*, \rho)$ ,  $\rho > 0$ , пространства  $L_2(-\infty, \infty)$ .

Пусть на всех элементах вида  $\sum_{l=0}^{2N-1} \beta_k \psi_k(x)$ , принадлежащих шару  $B(u^*, \rho)$ , логарифмическая норма  $\Lambda_2$  производной Фреше оператора  $K_N(u_N)$  отрицательна и не превосходит константы  $-\chi < 0$ .

Так как  $u^*(x)$  — решение уравнения (12), то, очевидно,

$$\begin{aligned} & u^*(\bar{x}_k) + \frac{A}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} h(\bar{x}_k, \bar{x}_l, u^*(\bar{x}_l)) = \\ & = f(\bar{x}_k) - \int_{-\infty}^{\infty} h(\bar{x}_k, y, u^*(y)) dy + \frac{A}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} h(\bar{x}_k, \bar{x}_l, u^*(\bar{x}_l)), \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1. \end{aligned} \quad (14)$$

Вычитая из (13) почленно (14), имеем

$$(u_N(\bar{x}_k) - u^*(\bar{x}_k)) + \frac{A}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} (h(\bar{x}_k, \bar{x}_l, u_N(\bar{x}_l)) - h(\bar{x}_k, \bar{x}_l, u^*(\bar{x}_l))) =$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\bar{x}_k, y, u^*(y)) dy - \frac{A}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} h(\bar{x}_k, \bar{x}_l, u^*(\bar{x}_l)), \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 1. \quad (15)$$

Уравнение (15) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} & (u_N(\bar{x}_k) - u^*(\bar{x}_k)) + \frac{A}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} h'_3(\bar{x}_k, \bar{x}_l, u^*(\bar{x}_l))(u_N(\bar{x}_l) - u^*(\bar{x}_l)) = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} h(\bar{x}_k, y, u^*(y)) dy - \frac{A}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} h(\bar{x}_k, \bar{x}_l, u^*(\bar{x}_l)) - \\ & - \frac{A}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} [h'_3(\bar{x}_k, \bar{x}_l, u^*(\bar{x}_l) + \theta_l(u_N(\bar{x}_l) - u^*(\bar{x}_l))) - h'_3(\bar{x}_k, \bar{x}_l, u^*(\bar{x}_l))]. \end{aligned}$$

Здесь  $0 < \theta_k < 1$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2N - 1$ .

Введем матрицу  $W = \{w_{k,l}\}$ ,  $k, l = 0, 1, \dots, 2N - 1$ , с элементами

$$w_{k,l} = 1 + \frac{A}{N} h'_3(\bar{x}_k, \bar{x}_l, u^*(\bar{x}_l)), \quad k, l = 0, 1, \dots, 2N - 1.$$

Пусть логарифмическая норма матрицы  $W$  отрицательная:

$$\Lambda_2(W) \leq -\kappa < 0.$$

Тогда согласно теореме 1 справедлива оценка

$$\max_{0 \leq k \leq 2N-1} |u_N(\bar{x}_k) - u^*(\bar{x}_k)| \leq \frac{C}{\kappa} \max_{0 \leq k \leq 2N-1} [|I_1(k)| + |I_2(k)|],$$

где

$$\begin{aligned} I_1(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\bar{x}_k, y, u^*(y)) dy - \frac{A}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} h(\bar{x}_k, \bar{x}_l, u^*(\bar{x}_l)), \\ I_2(k) &= \frac{A}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} [h'_3(\bar{x}_k, \bar{x}_l, u^*(\bar{x}_l) + \theta_l(u_N(\bar{x}_l) - u^*(\bar{x}_l))) - h'_3(\bar{x}_k, \bar{x}_l, u^*(\bar{x}_l))]. \end{aligned}$$

Оценим каждое выражение в отдельности. Очевидно,

$$\begin{aligned} |I_1(k)| &\leq \left| \int_{-\infty}^{-A} h(\bar{x}_k, y, u^*(y)) dy \right| + \left| \int_{-A}^A h(\bar{x}_k, y, u^*(y)) dy - \frac{A}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} h(\bar{x}_k, \bar{x}_l, u^*(\bar{x}_l)) \right| + \\ &+ \left| \int_A^{\infty} h(\bar{x}_k, y, u^*(y)) dy \right| = I_{11}(k) + I_{12}(k) + I_{13}(k). \end{aligned}$$

Величина  $I_1(k)$  зависит от асимптотики функций  $h(x, y, u)$  и  $u(x, y)$  на бесконечности. В случае, если  $|h(x, y, u)| \leq \frac{C}{x^2 + y^2}$ ,  $u \in B(u^*, \rho)$ , то

$$\left| \int_{-\infty}^{-A} h(\bar{x}_k, y, u^*(y)) dy \right| \leq C \int_{-\infty}^{-A} \frac{1}{x_k^2 + y^2} dy \leq C \int_{-\infty}^{-A} \frac{1}{y^2} dy = \frac{C}{A}.$$



Так как для  $u \in B(u^*, \rho)$  выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |h(x, y, u)|^2 dx dy < \infty,$$

то выбором параметра  $A$  значения  $I_{11}(k)$  и  $I_{13}(k)$  можно сделать как угодно малыми. Остановимся на оценке  $I_{12}(k)$ . Очевидно,

$$I_{12}(k) \leq \frac{A}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} \int_{\Delta_l} |h(\bar{x}_k, y, u^*(y)) - h(\bar{x}_k, \bar{x}_l, u^*(\bar{x}_l))| dy \leq \frac{2^{2-\alpha} M A^{2+\alpha}}{1 + \alpha} \frac{1}{N^\alpha}.$$

Оценим  $I_2(k)$ :

$$|I_2(k)| \leq \frac{A}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} M |u_N(\bar{x}_l) - u^*(\bar{x}_l)| \leq 2AM \|u_N(x) - u^*(x)\|.$$

Собирая полученные оценки, имеем

$$\begin{aligned} & \|u^*(x) - u_N(x)\| (1 - 2AM) \leq \\ & \leq C \left( \frac{A^3}{N^2} + \sup_{\substack{x \in [-A, A], \\ u(y) \in B(u^*, \rho)^{-\infty}}} \int_{-A}^{-\infty} |h(x, y, u(y))| dy + \sup_{\substack{x \in [-A, A], \\ u(y) \in B(u^*, \rho)^A}} \int_A^{\infty} |h(x, y, u(y))| dy \right). \end{aligned}$$

Если  $2AM < 1$ , приходим к оценке

$$\begin{aligned} & \|u^*(x) - u_N(x)\| \leq \frac{C}{1 - 2AM} \times \\ & \times \left( \frac{A^3}{N^2} + \sup_{\substack{x \in [-A, A], \\ u(y) \in B(u^*, \rho)^{-\infty}}} \int_{-A}^{-\infty} |h(x, y, u(y))| dy + \sup_{\substack{x \in [-A, A], \\ u(y) \in B(u^*, \rho)^A}} \int_A^{\infty} |h(x, y, u(y))| dy \right). \end{aligned}$$

**Замечание 4.** Параметр  $A$ , как функцию  $N$ , можно найти, минимизируя правую часть предыдущего неравенства.

**Замечание 5.** Выше для простоты обозначений авторы ограничились рассмотрением сплайн-коллокационного метода со сплайнами нулевого порядка. Изложенный метод обоснования распространяется на сплайн-коллокационные методы со сплайнами более высоких порядков.

### 3. Приближенное решение многомерных нелинейных уравнений теплопроводности

В данном разделе строится приближенное решение начальной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F \left( t, x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right), \tag{16}$$

$$u(0, x, y) = u_0(x, y), \tag{17}$$

где  $T \geq t > 0, \infty < x, y < \infty$ .



Будем считать, что функция  $F\left(s, \xi, \eta, u(\xi, \eta), \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta}\right)$  удовлетворяет условию Гельдера  $H_\alpha(M)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  по первым трем переменным и имеет частные производные, удовлетворяющие условию Гельдера  $H_\alpha(M)$  по остальным переменным.

При построении вычислительной схемы перейдем от начальной задачи (16), (17) к интегральному уравнению

$$u(t, x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta, t) d\xi d\eta + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(s, \xi, \eta, u(\xi, \eta), \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta}\right) G(x, y, \xi, \eta, t-s) d\xi d\eta ds, \quad (18)$$

где  $G(t, x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi t} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4t}\right\}$ .

Уравнение (18) будем решать методом механических квадратур, который в данном случае представляет собой возмущение вычислительной схемы коллокаций квадратными формулами.

Остановимся на построении метода коллокаций. Узлы коллокаций будем выбирать, учитывая определения классов, к которым принадлежат решения уравнений теплопроводности.

В работе [25] введены классы функций  $P_r(G, M)$  и  $P_{r,s}(G, M)$ , к которым принадлежат решения линейных уравнений теплопроводности, и построены оптимальные по порядку (по точности) алгоритмы аппроксимации функций из этих классов.

Напомним определение классов функций  $P_r(G, M)$  и  $P_{r,s}(G, M)$ .

Рассмотрим область  $G = \{0 \leq t \leq 1, \Omega = [-1, 1]^l, l = 1, 2, \dots\}$ .

**Определение 3** ([25]). Пусть  $G = \{0 \leq t \leq 1, \Omega\}$ , где  $\Omega = [-1, 1]^l, l = 1, 2, \dots, \Gamma = \partial\Omega$  — граница области  $\Omega$ . Через  $P_{r,\gamma}(G, M, \alpha)$  обозначим множество функций  $f(t, x), x = (x_1, \dots, x_l)$ , определенных и непрерывных в области  $G$  и удовлетворяющих следующим условиям:

1) функции  $f(t, x)$  ( $0 \leq t \leq 1, x \in \Omega$ ) по переменной  $t$  удовлетворяют условию Гельдера с показателем  $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$ ;

2) при любом фиксированном  $x$  ( $x \in \Omega$ ) и при  $t > 0$

$$\left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k} \right| \leq \frac{M \cdot a^k \cdot k^k}{t^k}, \quad 0 < t \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots;$$

3) при любом фиксированном  $t$  ( $t > 0$ )

$$\begin{aligned} |D^k u(t, x)| &\leq M, \quad k = 0, 1, \dots, r; \\ |D^k u(t, x)| &\leq \frac{M \cdot a^k \cdot k^k}{t^{\gamma(k)}}, \quad k = r + 1, \dots, \end{aligned}$$

где  $\gamma(k)$  — неотрицательная возрастающая функция.

Частным случаем класса  $P_{r,\gamma}(G, M, \alpha)$  является класс функций  $P_r(G, M)$ .

**Определение 4** ([25]). Пусть  $G = \{0 \leq t \leq 1, \Omega\}$ , где  $\Omega = [-1, 1]^l, l = 1, 2, \dots, \Gamma = \partial\Omega$  — граница области  $\Omega$ . Через  $P_r(G, M)$  обозначим множество функций  $f(t, x)$ ,



$x = (x_1, \dots, x_l)$ , определенных и непрерывных в области  $G$  и удовлетворяющих следующим условиям:

1) функции  $f(t, x)$  ( $0 \leq t \leq 1, x \in \Omega$ ) по переменной  $t$  удовлетворяют условию Гельдера с показателем  $1/2$ :

$$|u(t_1, x) - u(t_2, x)| \leq M|t_1 - t_2|^{1/2};$$

2) при любом фиксированном  $x(x \in \Omega)$  и при  $t > 0$

$$\left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k} \right| \leq C \cdot M \cdot (l + 2k)!! \cdot \frac{1}{t^k}, \quad 0 < t \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots;$$

3) при любом фиксированном  $t (t > 0)$

$$\begin{aligned} |D^k u(t, x)| &\leq C \cdot M, \quad k = 0, 1, \dots, r; \\ |D^k u(t, x)| &\leq \frac{C \cdot M \cdot 2^k \cdot (k + 1)!!}{t^{(k-r)/2}}, \quad k = r + 1, \dots \end{aligned}$$

Ниже при построении вычислительной схемы используются узлы локальных сплайнов, реализующих оптимальные по порядку алгоритмы аппроксимации функций из классов  $P_r(G, M), P_{r,s}(G, M)$ .

При построении вычислительной схемы интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta, t) d\xi d\eta, \quad \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s, \xi, \eta, u(s, \xi, \eta)) G(x, y, \xi, \eta, t-s) d\xi d\eta ds$$

аппроксимируются интегралами

$$\int_{-A}^A \int_{-A}^A u_0(\xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta, t) d\xi d\eta, \tag{19}$$

$$\int_0^t \int_{-A}^A \int_{-A}^A \Phi(s, \xi, \eta, u(s, \xi, \eta)) G(x, y, \xi, \eta, t-s) d\xi d\eta ds, \tag{20}$$

при вычислении которых используются многомерные аналоги составной квадратурной формулы трапеций.

Интегралы (19), (20) вычисляются при  $0 < t \leq T, -A \leq x, y \leq A$ , где  $A$  — достаточно большое положительное число. Значение числа  $A$  зависит от конкретной физической задачи, моделируемой начальной задачей (16)–(17), и оно в меньшей степени влияет на вычислительный процесс, нежели область определения переменной  $t$ . В работе переменная  $t$  принимает значения из интервала  $(0, 1]$ . Интерес к этому интервалу обусловлен пограничным слоем, в котором происходит резкое изменение функции  $u(t, x, y)$  и ее производных.

**Замечание 6.** Выбор константы  $A$  можно связать с числом  $N$  значений функции  $u_0(x, y)$  (по каждой переменной), используемых в вычислительной схеме. Так как функция  $u_0(x, y)$  непрерывна по обеим переменным и суммируема с квадратом на плоскости  $R_2$ , то параметр  $A$  естественно выбрать из условия  $\max_{R_2 \setminus [-A, A]^2} |u_0(x, y)| \leq 1/N$ .

Это обусловлено тем, что точность аппроксимации класса функций  $H_{1,1}([-A, A]^2, 1)$  не превосходит  $O(1/N)$ , где  $N^2$  — число функционалов, используемых при аппроксимации.





При вычислении интеграла

$$\int_0^t \int_{-A}^A \int_{-A}^A \Phi(s, \xi, \eta, u(s, \xi, \eta)) G(x, y, \xi, \eta, t - s) d\xi d\eta ds$$

используются кубатурные формулы следующего вида:

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^h \int_0^h \Phi(s, \xi, \eta, u(s, \xi, \eta)) G(x, y, \xi, \eta, t - s) ds d\eta ds = \\ & = \frac{1}{8} [\Phi(0, 0, 0, u(0, 0, 0)) + \Phi(0, 0, h, u(0, 0, h)) + \Phi(0, h, 0, u(0, h, 0)) + \\ & + \Phi(0, h, h, u(0, h, h)) + \Phi(\tau, 0, 0, u(\tau, 0, 0)) + \Phi(\tau, 0, h, u(\tau, 0, h)) + \\ & + \Phi(\tau, h, 0, u(\tau, h, 0)) + \Phi(\tau, h, h, u(\tau, h, h))] G\left(x, y, \frac{h}{2}, \frac{h}{2}, \tau - \frac{\tau}{2}\right) + R(u), \end{aligned}$$

где  $h(\tau)$  — шаг по пространственной (временной) переменной.

Предполагая  $u_0(x, y) \in H_{1,1}(M)$ ,  $x, y \in (-\infty, \infty)$ , можно показать, что  $|R(u)| = O(\tau+h)$ .

После этих предварительных замечаний перейдем к построению вычислительной схемы.

Сначала построим сетку узлов коллокации.

Решение уравнения (18) будем искать в области  $\Omega = [-A, A; -A, A; 0, 1]$ . Сетка узлов строится следующим образом.

Построим квадраты:

$$\begin{aligned} \Omega_0^0 &= [-A, A; -A, A; 0], \\ \Omega_0^l &= [-A, A; -A, A; 2^l/2^{nr}], \quad l = 0, 1, \dots, n_0 - 1, \quad n_0 = n(r - 1) + 1, \\ \Omega_k &= [-A, A; -A, A; 2^k/2^n], \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Квадрат  $\Omega_0^l$ ,  $l = 0, 1, \dots, n_0 - 1$ , покроем прямоугольниками со сторонами, параллельными осям координат, и с ребрами, у одного из которых длина равна  $h_0 = 2^{-n/2}$ , а длина второго не меньше  $h_0$  и не больше  $2h_0$ . Построенные прямоугольники обозначим через  $\Delta_{0,j}^l$ ,  $l = 0, 1, \dots, n_0$ , где  $n_0 = [4A^2 2^n]$ . Не ограничивая общности, можно считать, что области  $\Delta_{0,j}^l$ ,  $l = 0, 1, \dots, n_0$ , покрыты квадратами с длиной стороны, равной  $h_0$ , и  $n_0 = [4A^2 2^n]$ .

Квадрат  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , покроем прямоугольниками со сторонами, параллельными осям координат, и с ребрами, у одного из которых длина равна  $h_k = kr/(e^{2^{n-k}-1})^{1/2}$ , а длина второго не меньше  $h_k$  и не больше  $2h_k$ . Построенные прямоугольники обозначим через  $\Delta_{k,j}$ ,  $j = 0, 1, \dots, m_k$ , где  $m_k = O(2^{n-k-1}/k)$ . Не ограничивая общности, можно считать, что области  $\Delta_{k,j}$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $j = 0, 1, \dots, m_k$ , покрыты квадратами с длиной стороны, равной  $h_k$ , и  $m_0 = [(2A/h_k)^2]$ .

Приближенное решение уравнения (18) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$u_n(t, x, y) = \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{i_1} \sum_{i_2} \alpha_{i_1, i_2}^{0, l} \Psi_{i_1, i_2}^{0, l}(t, x, y) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i_1} \sum_{i_2} \alpha_{i_1, i_2}^k \Psi_{i_1, i_2}^k(t, x, y),$$

где

$$\Psi_{i_1, i_2}^{0, l}(t, x, y) = \begin{cases} 1, & (t, x, y) \in \Delta_{i_1, i_2}^{0, l}, \\ 0, & (t, x, y) \in \Omega \setminus \Delta_{i_1, i_2}^{0, l}, \end{cases} \quad l = 0, 1, \dots, n(r - 1) - 1;$$



$$\Psi_{i_1, i_2}^k(t, x, y) = \begin{cases} 1, & (t, x, y) \in \Delta_{i_1, i_2}^k, \\ 0, & (t, x, y) \in \Omega \setminus \Delta_{i_1, i_2}^k, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Коэффициенты  $\alpha_{i_1, i_2}^{0, l}$ ,  $\alpha_{i_1, i_2}^k$  определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_{i_1, i_2}^{0, l} &= \sum_{j_1=0}^{m_0-1} \sum_{j_2=0}^{m_0-1} \iint_{\Delta_{j_1, j_2}^{0,0}} u_0(\bar{x}_{j_1}^0, \bar{x}_{j_2}^0) G(\bar{x}_{i_1}^{0, l}, \bar{x}_{i_2}^{0, l}, \bar{x}_{j_1}^{0,0}, \bar{x}_{j_2}^{0,0}, \bar{t}^{0, l}) d\xi d\eta + \\ &+ \sum_{k=0}^{n(r-1)-1} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \iiint_{\Delta_{j_1, j_2}^{0, l}} F \left( \bar{t}^{0, k}, \bar{x}_{j_1}^{0, k}, \bar{x}_{j_2}^{0, k}, \alpha_{j_1, j_2}^{0, k}, \frac{\alpha_{j_1+1, j_2}^{0, k} - \alpha_{j_1, j_2}^{0, k}}{h_0}, \frac{\alpha_{j_1, j_2+1}^{0, k} - \alpha_{j_1, j_2}^{0, k}}{h_0} \right) \times \\ &\quad \times G(\bar{x}_{i_1}^{0, l}, \bar{x}_{i_2}^{0, l}, \bar{x}_{j_1}^{0, k}, \bar{x}_{j_2}^{0, k}, \bar{t}^{0, l} - \bar{t}^{0, k}) d\xi d\eta ds + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \iiint_{\Delta_{j_1, j_2}^k} F \left( \bar{t}^{0, k}, \bar{x}_{j_1}^{0, k}, \bar{x}_{j_2}^{0, k}, \alpha_{j_1, j_2}^k, \frac{\alpha_{j_1+1, j_2}^k - \alpha_{j_1, j_2}^k}{h_k}, \frac{\alpha_{j_1, j_2+1}^k - \alpha_{j_1, j_2}^k}{h_k} \right) \times \\ &\quad \times G(\bar{x}_{i_1}^{0, l}, \bar{x}_{i_2}^{0, l}, \bar{x}_{j_1}^k, \bar{x}_{j_2}^k, (\bar{t}^{0, l} - \bar{t}^k)) d\xi d\eta ds, \\ & \quad l = 0, 1, \dots, n(r-1) - 1, \quad k = 1, 2, \dots, n-1; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{i_1, i_2}^k &= \sum_{j_1=0}^{m_0-1} \sum_{j_2=0}^{m_0-1} \iint_{\Delta_{j_1, j_2}^{0,0}} u_0(\bar{x}_{j_1}^0, \bar{x}_{j_2}^0) G(\bar{x}_{i_1}^k, \bar{x}_{i_2}^k, \bar{x}_{j_1}^{0,0}, \bar{x}_{j_2}^{0,0}, \bar{t}^k) d\xi d\eta + \\ &+ \sum_{k_1=0}^{n(r-1)-1} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \iiint_{\Delta_{j_1, j_2}^{0, l}} F \left( \bar{t}^{0, k_1}, \bar{x}_{j_1}^{0, k_1}, \bar{x}_{j_2}^{0, k_1}, \alpha_{j_1, j_2}^{0, k_1}, \frac{\alpha_{j_1+1, j_2}^{0, k_1} - \alpha_{j_1, j_2}^{0, k_1}}{h_0}, \frac{\alpha_{j_1, j_2+1}^{0, k_1} - \alpha_{j_1, j_2}^{0, k_1}}{h_0} \right) \times \\ &\quad \times G(\bar{x}_{i_1}^k, \bar{x}_{i_2}^k, \bar{x}_{j_1}^{0, k_1}, \bar{x}_{j_2}^{0, k_1}, \bar{t}^k - \bar{t}^{0, k_1}) d\xi d\eta ds + \\ &+ \sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \iiint_{\Delta_{j_1, j_2}^{k_1}} F \left( \bar{t}^{k_1}, \bar{x}_{j_1}^{k_1}, \bar{x}_{j_2}^{k_1}, \alpha_{j_1, j_2}^{k_1}, \frac{\alpha_{j_1+1, j_2}^{k_1} - \alpha_{j_1, j_2}^{k_1}}{h_{k_1}}, \frac{\alpha_{j_1, j_2+1}^{k_1} - \alpha_{j_1, j_2}^{k_1}}{h_{k_1}} \right) \times \\ &\quad \times G(\bar{x}_{i_1}^k, \bar{x}_{i_2}^k, \bar{x}_{j_1}^{k_1}, \bar{x}_{j_2}^{k_1}, (\bar{t}^k - \bar{t}^{k_1})) d\xi d\eta ds, \\ & \quad i_1, i_2 = 0, 1, \dots, m_k - 1, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь через  $(\bar{x}_{i_1, i_2}^k, \bar{y}_{i_1, i_2}^k, \bar{t}^k)$  обозначен центр прямоугольного параллелепипеда  $\Delta_{i_1, i_2}^k$ . Аналогично обозначены центры параллелепипедов  $\Delta_{i_1, i_2}^{0, l}$ .

Этой системе поставим в соответствие систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{i_1, i_2}^{0, l}(v)}{\partial v} &= \sum_{j_1=0}^{m_0-1} \sum_{j_2=0}^{m_0-1} \iint_{\Delta_{j_1, j_2}^{0,0}} u_0(\bar{x}_{j_1}^0, \bar{x}_{j_2}^0) G(\bar{x}_{i_1}^{0, l}, \bar{x}_{i_2}^{0, l}, \bar{x}_{j_1}^{0,0}, \bar{x}_{j_2}^{0,0}, \bar{t}^{0, l}) d\xi d\eta + \\ &+ \sum_{k=0}^{n(r-1)-1} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \iiint_{\Delta_{j_1, j_2}^{0, l}} F \left( \bar{t}^{0, k}, \bar{x}_{j_1}^{0, k}, \bar{x}_{j_2}^{0, k}, \alpha_{j_1, j_2}^{0, k}(v), \frac{\alpha_{j_1+1, j_2}^{0, k}(v) - \alpha_{j_1, j_2}^{0, k}(v)}{h_0}, \frac{\alpha_{j_1, j_2+1}^{0, k}(v) - \alpha_{j_1, j_2}^{0, k}(v)}{h_0} \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times G(\bar{x}_{i_1}^{0,l}, \bar{x}_{i_2}^{0,l}, \bar{x}_{j_1}^{0,k}, \bar{x}_{j_2}^{0,k}, \bar{t}^{0,l} - \bar{t}^{0,k}) d\xi d\eta ds + \\
 & + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \iiint_{\Delta_{j_1, j_2}^k} F\left(\bar{t}^{0,k}, \bar{x}_{j_1}^{0,k}, \bar{x}_{j_2}^{0,k}, \alpha_{j_1, j_2}^k(v), \frac{\alpha_{j_1+1, j_2}^k(v) - \alpha_{j_1, j_2}^k(v)}{h_k}, \frac{\alpha_{j_1, j_2+1}^k(v) - \alpha_{j_1, j_2}^k(v)}{h_k}\right) \times \\
 & \quad \times G(\bar{x}_{i_1}^{0,l}, \bar{x}_{i_2}^{0,l}, \bar{x}_{j_1}^k, \bar{x}_{j_2}^k, (\bar{t}^{0,l} - \bar{t}^k)) d\xi d\eta ds, \\
 & \quad l = 0, 1, \dots, n(r-1) - 1, \quad i_1, i_2 = 1, 2, \dots, m_0 - 1; \tag{23} \\
 & \frac{\partial \alpha_{i_1, i_2}^k(v)}{\partial v} = \sum_{j_1=0}^{m_0-1} \sum_{j_2=0}^{m_0-1} \iiint_{\Delta_{j_1, j_2}^{0,0}} u_0(\bar{x}_{j_1}^0, \bar{x}_{j_2}^0) G(\bar{x}_{i_1}^k, \bar{x}_{i_2}^k, \bar{x}_{j_1}^{0,0}, \bar{x}_{j_2}^{0,0}, \bar{t}^k) d\xi d\eta + \\
 & + \sum_{k_1=0}^{n(r-1)-1} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \iiint_{\Delta_{j_1, j_2}^{0, l}} F\left(\bar{t}^{0, k_1}, \bar{x}_{j_1}^{0, k_1}, \bar{x}_{j_2}^{0, k_1}, \alpha_{j_1, j_2}^{0, k_1}(v), \frac{\alpha_{j_1+1, j_2}^{0, k_1}(v) - \alpha_{j_1, j_2}^{0, k_1}(v)}{h_0}, \frac{\alpha_{j_1, j_2+1}^{0, k_1}(v) - \alpha_{j_1, j_2}^{0, k_1}(v)}{h_0}\right) \times \\
 & \quad \times G(\bar{x}_{i_1}^k, \bar{x}_{i_2}^k, \bar{x}_{j_1}^{0, k_1}, \bar{x}_{j_2}^{0, k_1}, \bar{t}^k - \bar{t}^{0, k_1}) d\xi d\eta ds + \\
 & + \sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \iiint_{\Delta_{j_1, j_2}^{k_1}} F\left(\bar{t}^{k_1}, \bar{x}_{j_1}^{k_1}, \bar{x}_{j_2}^{k_1}, \alpha_{j_1, j_2}^{k_1}(v), \frac{\alpha_{j_1+1, j_2}^{k_1}(v) - \alpha_{j_1, j_2}^{k_1}(v)}{h_{k_1}}, \frac{\alpha_{j_1, j_2+1}^{k_1}(v) - \alpha_{j_1, j_2}^{k_1}(v)}{h_{k_1}}\right) \times \\
 & \quad \times G(\bar{x}_{i_1}^k, \bar{x}_{i_2}^k, \bar{x}_{j_1}^{k_1}, \bar{x}_{j_2}^{k_1}, (\bar{t}^k - \bar{t}^{k_1})) d\xi d\eta ds, \\
 & \quad i_1, i_2 = 0, 1, \dots, m_k, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1. \tag{24}
 \end{aligned}$$

Функции  $\gamma_{i_1, i_2}^{0, l}(v), \gamma_{i_1, i_2}^k(v)$  выбираются таким образом, чтобы логарифмическая норма якобиана в правой части системы (23)–(24) была отрицательной. Если такой выбор невозможен, то следует перейти к итерационным процессам (2), (5), приведенным в разделе 1.

Для решения системы уравнений (23)–(24) может быть использован любой численный метод. Ниже, при решении модельных примеров, был применен метод Эйлера. Вычислительная схема метода имеет вид

$$\begin{aligned}
 \alpha_{i_1, i_2}^{0, l}(m+1) - \alpha_{i_1, i_2}^{0, l}(m) &= \gamma_{i_1, i_2}^{0, l}(m) h \left[ \sum_{j_1=0}^{m_0-1} \sum_{j_2=0}^{m_0-1} \iiint_{\Delta_{j_1, j_2}^{0,0}} u_0(\bar{x}_{j_1}^0, \bar{x}_{j_2}^0) \times \right. \\
 & \quad \times G(\bar{x}_{i_1}^{0, l}, \bar{x}_{i_2}^{0, l}, \bar{x}_{j_1}^{0,0}, \bar{x}_{j_2}^{0,0}, \bar{t}^{0, l}) d\xi d\eta + \sum_{k=0}^{n(r-1)-1} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \times \\
 & \quad \times \iiint_{\Delta_{j_1, j_2}^{0, l}} F\left(\bar{t}^{0, k}, \bar{x}_{j_1}^{0, k}, \bar{x}_{j_2}^{0, k}, \alpha_{j_1, j_2}^{0, k}(m), \frac{\alpha_{j_1+1, j_2}^{0, k}(m) - \alpha_{j_1, j_2}^{0, k}(m)}{h_0}, \frac{\alpha_{j_1, j_2+1}^{0, k}(m) - \alpha_{j_1, j_2}^{0, k}(m)}{h_0}\right) \times \\
 & \quad \times G(\bar{x}_{i_1}^{0, l}, \bar{x}_{i_2}^{0, l}, \bar{x}_{j_1}^{0, k}, \bar{x}_{j_2}^{0, k}, \bar{t}^{0, l} - \bar{t}^{0, k}) d\xi d\eta ds + \\
 & + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \iiint_{\Delta_{j_1, j_2}^k} F\left(\bar{t}^{0, k}, \bar{x}_{j_1}^{0, k}, \bar{x}_{j_2}^{0, k}, \alpha_{j_1, j_2}^k(m), \frac{\alpha_{j_1+1, j_2}^k(m) - \alpha_{j_1, j_2}^k(m)}{h_k}, \frac{\alpha_{j_1, j_2+1}^k(m) - \alpha_{j_1, j_2}^k(m)}{h_k}\right) \times \\
 & \quad \times G(\bar{x}_{i_1}^{0, l}, \bar{x}_{i_2}^{0, l}, \bar{x}_{j_1}^k, \bar{x}_{j_2}^k, (\bar{t}^{0, l} - \bar{t}^k)) d\xi d\eta ds, \\
 & \quad l = 0, 1, \dots, n(r-1) - 1, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1; \tag{25}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \alpha_{i_1, i_2}^k(m+1) - \alpha_{i_1, i_2}^k(m) &= \gamma_{i_1, i_2}^k(m) h \sum_{j_1=0}^{m_0-1} \sum_{j_2=0}^{m_0-1} \iint_{\Delta_{j_1, j_2}^{0,0}} u_0(\bar{x}_{j_1}^0, \bar{x}_{j_2}^0) \times \\
 &\times G(\bar{x}_{i_1}^k, \bar{x}_{i_2}^k, \bar{x}_{j_1}^{0,0}, \bar{x}_{j_2}^{0,0}, \bar{t}^k) d\xi d\eta + \sum_{k_1=0}^{n(r-1)-1} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \times \\
 &\times \iiint_{\Delta_{j_1, j_2}^{0,l}} F\left(\bar{t}^{0,k_1}, \bar{x}_{j_1}^{0,k_1}, \bar{x}_{j_2}^{0,k_1}, \alpha_{j_1, j_2}^{0,k_1}(m), \frac{\alpha_{j_1+1, j_2}^{0,k_1}(m) - \alpha_{j_1, j_2}^{0,k_1}(m)}{h_0}, \frac{\alpha_{j_1, j_2+1}^{0,k_1}(m) - \alpha_{j_1, j_2}^{0,k_1}(m)}{h_0}\right) \times \\
 &\times G(\bar{x}_{i_1}^k, \bar{x}_{i_2}^k, \bar{x}_{j_1}^{0,k_1}, \bar{x}_{j_2}^{0,k_1}, \bar{t}^k - \bar{t}^{0,k_1}) d\xi d\eta ds + \\
 &+ \sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \iiint_{\Delta_{j_1, j_2}^{k_1}} F\left(\bar{t}^{k_1}, \bar{x}_{j_1}^{k_1}, \bar{x}_{j_2}^{k_1}, \alpha_{j_1, j_2}^{k_1}(m), \frac{\alpha_{j_1+1, j_2}^{k_1}(m) - \alpha_{j_1, j_2}^{k_1}(m)}{h_{k_1}}, \frac{\alpha_{j_1, j_2+1}^{k_1}(m) - \alpha_{j_1, j_2}^{k_1}(m)}{h_{k_1}}\right) \times \\
 &\times G(\bar{x}_{i_1}^k, \bar{x}_{i_2}^k, \bar{x}_{j_1}^{k_1}, \bar{x}_{j_2}^{k_1}, (\bar{t}^k - \bar{t}^{k_1})) d\xi d\eta ds, \\
 &i_1, i_2 = 0, 1, \dots, m_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \tag{26}
 \end{aligned}$$

Функции  $\gamma_{i_1, i_2}^{0,l}(m), \gamma_{i_1, i_2}^k(m)$  выбираются таким образом, чтобы логарифмическая норма якобиана в правой части системы (25)–(26) была отрицательной. При выполнении этого условия итерации (25)–(26) сходятся к решению  $u_n^*(t, x, y)$  системы уравнений (21)–(22).

Остановимся на оценке точности предложенного алгоритма. Пусть  $u^*(t, x, y)$  — решение задачи (16)–(17),  $u^*(t, x, y)$  удовлетворяет условию Гельдера  $H_\alpha(M)$  по каждой переменной. Пусть ядро уравнения (18) имеет вид

$$F\left(s, \xi, \eta, u(\xi, \eta), \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta}\right) G(x, y, \xi, \eta, t-s),$$

и известны асимптотики функций  $u^*(\xi, \eta), \frac{\partial u^*(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \frac{\partial u^*(\xi, \eta)}{\partial \eta}$ . Тогда справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}
 &|u^*(\bar{t}^{0,k_1}, \bar{x}_{j_1}^{0,k_1}, \bar{x}_{j_2}^{0,k_1}) - u_n^*(\bar{t}^{0,k_1}, \bar{x}_{j_1}^{0,k_1}, \bar{x}_{j_2}^{0,k_1})| \leq \\
 &\leq C \left( \sup_{t,x,y} \left| \int_0^t \iint_{(-\infty, \infty)^2 \setminus [-A, A]^2} F\left(s, \xi, \eta, u^*(\xi, \eta), \frac{\partial u^*(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \frac{\partial u^*(\xi, \eta)}{\partial \eta}\right) \times \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times G(\bar{x}_{j_1}^{0,k_1}, \bar{x}_{j_2}^{0,k_1}, \xi, \eta, \bar{t}^{0,k_1} - s) d\xi d\eta ds \right| + \frac{A^{1+\alpha}}{n^\alpha} \right),
 \end{aligned}$$

где  $\sup_{t,x,y}$  берется по сетке узлов.

Аналогичная, но более сложная оценка справедлива и для остальных узлов. Ее не выписываем из-за громоздкости.

Доказательство приведенных оценок опускаются из-за громоздкости выражений. Методика доказательства приведена в разделе 2.

Остановимся на вопросе аппроксимации производных, входящих в функцию  $F\left(t, x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ .



Вычислительные эксперименты показали, что аппроксимация производных  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  разностными схемами приводит к значительным погрешностям.

Значительно большую точность дает аппроксимация производных формулами, связывающими производные с интегралами Римана [26] или гиперсингулярными интегралами [27, 28].

Напомним формулу интегрирования Ланцоша [26]

$$f'(x) \approx \frac{3}{2\Delta^2} \int_{-\Delta}^{\Delta} tf(x+t) dt,$$

где  $\Delta$  — достаточно малое число,  $\Delta > 0$ .

При вычислениях естественно использовать ее дискретизацию [26]

$$f'(x) \approx \frac{\left( \sum_{k=-n}^n kf(x+kh) \right)}{\left( 2 \sum_{k=1}^n k^2 h \right)}$$

с шагом  $h$ ,  $h > 0$ .

**Пример 1.** Требуется найти приближенное решение задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2u \ln(u) + 4tu, \\ u(0, x, y) &= e^{-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

Точное решение задачи дается функцией  $u(t, x, y) = e^{-x^2-y^2-2t}$ .

Восстановление неизвестной функции  $u(t, x, y)$  осуществлялось при  $0 \leq t \leq T$ , где  $T = 1$ . Двойной интеграл в расчетной формуле метода вычислялся приближенно по многомерному аналогу квадратурной формулы средних прямоугольников на интервале  $(x, y) \in [-A, A]^2$  с шагом  $h = 2A/N = 10^{-1}$ , где  $A = 5/2$ . Функция  $u(t, x, y)$  на каждом из  $M = 10$  слоев по переменной  $t$  ( $t = t_i = i\tau$ , где  $\tau = T/M$ ) восстанавливалась на равномерной сетке из  $(N + 1)^2 = 51^2 = 2601$  узлов, построенной в квадрате  $(x, y) \in [-A, A]^2$ . Число шагов  $L$  метода Эйлера, а также шаг  $\theta$  метода Эйлера были зафиксированы формулой

$$L = 100, \quad \theta = 10^{-1}.$$

Результаты счета приведены в табл. 1.

**Замечание 7.** Полученная оценка погрешности совпадает по порядку с теоретической.

#### 4. Приближенное решение обратных задач

В работах [14, 29, 30] исследовались вопросы применения непрерывного операторного метода к решению обратных коэффициентных задач для параболических уравнений с производными целых порядков. В связи с активным развитием направления, связанного с исследованием задач математической физики с производными дробных порядков и многочисленными приложениями этих задач, возникает необходимость в построении численных методов решения обратных задач для параболических уравнений с дробными производными.



Таблица 1 / Table 1

Решение задачи Коши для нелинейного уравнения  
теплопроводности  
Solving the Cauchy problem for nonlinear heat equation

Значение $t$ (слой $t = t_i$ )	Погрешность	Значение $t$ (слой $t = t_i$ )	Погрешность
0.1	0.006007	0.6	0.020818
0.2	0.003836	0.7	0.024745
0.3	0.007459	0.8	0.028089
0.4	0.011893	0.9	0.030763
0.5	0.016446	1.0	0.032730

Рассмотрим следующую начальную задачу для дробно-дифференциального уравнения в частных производных [31]:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (27)$$

$$u(0+, x) = \varphi(x), \quad u(0-, x) = 0, \quad u(t, \pm\infty) = 0, \quad (28)$$

где  $(t, x) \in R^+ \times R$ . Уравнение (27) называется дробно-дифференциальным уравнением диффузии. При  $\alpha = 1$  это уравнение совпадает с обычным уравнением диффузии, в то время как при  $\alpha < 1$  с его помощью моделируются процессы субдиффузии (замедленной диффузии) [32].

**Замечание 8.** Дробную производную  $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$  в уравнении (27) следует понимать в смысле Римана – Лиувилля. Дробная производная Римана – Лиувилля определяется интегральной формулой [33]

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t \frac{u(s, x)}{(t - s)^{\alpha - n + 1}} ds, \quad n = [\alpha] + 1.$$

В данном разделе на примере начальной задачи (27), (28) рассматриваются две задачи:

- 1) определение коэффициента  $\gamma$ ;
- 2) определение показателя  $\alpha$ .

#### 4.1. Приближенный метод определения коэффициента $\gamma$

Известно [31], что решение задачи (27)–(28) представимо в виде

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, x - \xi) \varphi(\xi) d\xi,$$

где

$$G(t, x) = \frac{z}{2|x|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n! \Gamma(-\beta n + (1 - \beta))}, \quad \beta = \frac{\alpha}{2}, \quad z = \frac{|x|}{\sqrt{\gamma t^\beta}}. \quad (29)$$

**Замечание 9.** Ниже, при решении модельных примеров, при вычислении ряда в (29) брался его отрезок, состоящий из первых 100 членов суммы.



Полагая в начальной задаче (27)–(28) решение  $u(x, t)$  известным и равным  $u^*(t^*, x^*)$  в точке  $(t^*, x^*)$ , приходим к нелинейному уравнению для определения коэффициента  $\gamma$ :

$$u^*(t^*, x^*) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\gamma}(t^*)^{\frac{\alpha}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1 - (n+1)\frac{\alpha}{2})} \left( \frac{|x^* - \xi|}{\sqrt{\gamma}(t^*)^{\frac{\alpha}{2}}} \right)^n \varphi(\xi) d\xi. \quad (30)$$

Уравнение (30) аппроксимируется следующим:

$$u^*(t^*, x^*) = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}(t^*)^{\frac{\alpha}{2}}} \int_{-A}^A \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1 - (n+1)\frac{\alpha}{2})} \left( \frac{|x^* - \xi|}{\sqrt{\gamma}(t^*)^{\frac{\alpha}{2}}} \right)^n \varphi(\xi) d\xi, \quad (31)$$

где константы  $A$  и  $N$  выбираются из требования, чтобы погрешность аппроксимации правой части уравнения (30) не превосходила  $\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — фиксированное число, обусловленное требованием к точности решаемой физической или технологической задачи.

В соответствии с непрерывным методом решения нелинейных операторных уравнений уравнению (31) сопоставляется задача Коши

$$\begin{aligned} & \frac{d\gamma(v)}{dv} = \\ = & q(v) \left[ \frac{1}{2\sqrt{\gamma(v)}(t^*)^{\alpha/2}} \int_{-A}^A \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1 - (n+1)\frac{\alpha}{2})} \left( \frac{|x^* - \xi|}{\sqrt{\gamma(v)}(t^*)^{\alpha/2}} \right)^n \varphi(\xi) d\xi - u^*(t^*, x^*) \right], \\ & \gamma(0) = \gamma_0, \end{aligned}$$

где  $q(v) = \pm 1$ . Знак  $q(v)$  выбирается из требования отрицательности логарифмической нормы производной по  $\gamma$  функции

$$\left[ \frac{1}{2\sqrt{\gamma(v)}(t^*)^{\frac{\alpha}{2}}} \int_{-A}^A \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1 - (n+1)\frac{\alpha}{2})} \left( \frac{|x^* - \xi|}{\sqrt{\gamma(v)}(t^*)^{\frac{\alpha}{2}}} \right)^n \varphi(\xi) d\xi \right].$$

**Замечание 10.** Если это требование невыполнимо, то для решения уравнения (31) используются обобщения, описанные в разделе 2.

Рассмотрим следующий модельный пример.

**Пример 2.** Рассмотрим начальную задачу (27)–(28), где

$$\varphi(x) = \log \left( \frac{x^2 + 5}{x^2 + 2} \right), \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

Коэффициент  $\gamma$ , который будем восстанавливать, зафиксируем равным 2.5.

В качестве известного априорно значения возьмем значение  $u(0.25, 0.5)$ , полученное при приближенном вычислении интеграла в формуле (31) по квадратурной формуле средних прямоугольников на интервале  $[-10, 10]$  с шагом  $h = 10^{-4}$ . Было получено следующее значение функции  $u$ :  $u(0.25, 0.5) = 0.63395$ .

Пусть  $L$  — число итераций метода Эйлера,  $\theta$  — шаг метода Эйлера,  $\gamma_0$  — начальное приближение метода,  $\varepsilon$  — погрешность восстановления  $\gamma$ ,  $\eta$  — невязка.

Полученные численные результаты приведены в табл. 2.



Таблица 2 / Table 2

Восстановление коэффициента  $\gamma$   
Recovery of the coefficient  $\gamma$

№	L	$\theta$	$\gamma_0$	$\approx \gamma$	$\varepsilon$	$\eta$
1	500	0.1	1.0	2.36609	0.13391	$5.9 \cdot 10^{-3}$
2	1000	0.1	1.0	2.48247	0.01753	$6.2 \cdot 10^{-4}$
3	1500	0.1	1.0	2.49488	0.00512	$6.7 \cdot 10^{-5}$
4	2000	0.1	1.0	2.49623	0.00377	$7.3 \cdot 10^{-6}$
5	10000	0.01	0.5	2.47918	0.02082	$7.6 \cdot 10^{-4}$
6	2000	0.1	4.0	2.49666	0.00334	$1.2 \cdot 10^{-5}$
7	5000	0.1	10.0	2.49640	0.00360	$2.2 \cdot 10^{-10}$

**Замечание 11.** В процессе счета по непрерывному операторному методу интеграл в формуле (31) вычислялся по квадратурной формуле средних прямоугольников на интервале  $[-10, 10]$ , но уже с шагом  $h = 10^{-1}$ . Таким образом, даже довольно грубое вычисление интеграла в формуле (31) практически не оказывает влияния на сходимость метода.

#### 4.2. Приближенный метод определения показателя $\alpha$

Поставим задачу о восстановлении неизвестного показателя производной  $\alpha$  при дополнительном предположении о том, что известным (точно либо приближенно) является значение  $\psi = u(t^*, x^*)$ , где  $(t^*, x^*) \in R^+ \times R$  — фиксированная точка.

Известно [31], что общее решение задачи (27)–(28) дается следующей интегральной формулой:

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha, x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi, \quad (32)$$

где функция Грина  $G(\alpha, x, t)$  определяется следующим образом:

$$G(\alpha, x, t) = \frac{z}{2|x|} M(z, \beta), \quad z = \frac{|x|}{t^\beta}, \quad \beta = \frac{\alpha}{2},$$

$$M(z, \beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Br}} e^{\sigma - z\sigma^\beta} \frac{d\sigma}{\sigma^{1-\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n! \Gamma[-\beta n + (1 - \beta)]}, \quad \forall z \in C,$$

символ Br обозначает интеграл Бромвича.

Зафиксируем в формуле (32)  $t = t^*$  и  $x = x^*$ , после чего перепишем (32) в следующем виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha, \xi, t) \varphi(x - \xi) d\xi - \psi = 0, \quad \psi = u(t^*, x^*). \quad (33)$$

Уравнение (33) служит основой для построения численного метода решения задачи восстановления значения параметра  $\alpha$ .

Введем вспомогательную функцию  $\bar{\alpha}(\sigma)$ ,  $\sigma \geq 0$ , такую, что  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \bar{\alpha}(\sigma) = \alpha$ . В соответствии с описанием непрерывного операторного метода функция  $\bar{\alpha}(\sigma)$  удовлетворяет





следующей задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d\bar{\alpha}}{d\sigma} = \nu \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} G(\bar{\alpha}(\sigma), \xi, t) \varphi(x - \xi) d\xi - \psi \right\}, \tag{34}$$

$$\bar{\alpha}(0) = \chi, \tag{35}$$

где значение  $\chi$  фиксируется произвольным образом внутри интервала  $(0, 1)$ , а значение параметра  $\nu = \pm 1$  фиксируется таким образом, чтобы обеспечить сходимость метода к решению задачи.

Для решения начальной задачи (34)–(35) может быть применен любой из численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Воспользуемся методом Эйлера. Пусть  $\theta$  — шаг метода Эйлера, а  $L$  — число итераций метода Эйлера. Обозначим  $\bar{\alpha}_r = \bar{\alpha}(\sigma_r)$ , где  $\sigma_r = r\theta$ . Тогда вычислительная схема реализуется последовательным ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ) счетом по следующей расчетной формуле:

$$\bar{\alpha}(\sigma_{r+1}) = \bar{\alpha}(\sigma_r) + \theta \left\{ \nu_r \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} G(\bar{\alpha}_r, \xi, t) \varphi(x - \xi) d\xi - \psi \right\} \right\}, \tag{36}$$

где  $\nu_r = \pm 1$ .

Результат вычислений фиксируется посредством формулы  $\alpha \approx \bar{\alpha}(\sigma_L)$ .

Рассмотрим следующий модельный пример.

**Пример 3.** Рассмотрим начальную задачу (27)–(28), где  $\varphi(x) = \log\left(\frac{x^2 + 5}{x^2 + 2}\right)$ ,  $\gamma = 5/2$ . Коэффициент  $\alpha$ , который будем восстанавливать, зафиксируем равным  $1/2$ . В качестве известного априорно значения возьмем значение  $u(0.25, 0.5)$ .

В результате вычисления значения  $u(t, x)$  при  $t^* = 0.25$ ,  $x^* = 0.5$  при помощи приближенного вычисления интеграла в правой части формулы (36) по квадратурной формуле средних прямоугольников на интервале  $[-10, 10]$  с шагом  $h = 10^{-4}$  получено следующее приближенное значение функции  $u$ :  $u(0.25, 0.5) = 0.63396$ .

Обозначим  $L$  — число итераций метода Эйлера,  $\theta$  — шаг метода Эйлера,  $\alpha_0$  — начальное приближение метода,  $\varepsilon$  — погрешность восстановления  $\alpha$ .

Полученные численные результаты представлены в табл. 3.

Таблица 3 / Table 3

Восстановление коэффициента  $\alpha$   
Recovery of the coefficient  $\alpha$

№	$L$	$\theta$	$\alpha_0$	$\approx \alpha$	$\varepsilon$	Невязка
1	300	0.1	0.1	0.48543	0.01457	$1.7 \cdot 10^{-3}$
2	300	0.1	0.4	0.49663	0.00337	$3.9 \cdot 10^{-4}$
3	300	0.1	0.6	0.50323	0.00323	$3.7 \cdot 10^{-4}$
4	300	0.1	0.8	0.50915	0.00915	$1.1 \cdot 10^{-3}$
5	1000	0.1	0.9	0.51019	0.01019	$3.0 \cdot 10^{-7}$
6	1000	0.1	1.0	0.51019	0.01019	$3.6 \cdot 10^{-7}$
7	1000	0.1	1.1	0.51019	0.01019	$4.3 \cdot 10^{-7}$



В табл. 4 приводятся результаты, если  $u(0.25, 0.5)$  известно с погрешностью 0.07 (первая строка табл. 4) и 0.03 (вторая строка табл. 4).

Таблица 4 / Table 4

Восстановление коэффициента  $\alpha$  по дополнительной информации, заданной с погрешностью  
Recovery of the coefficient  $\alpha$  using additional information given with error

№	$u(t^*, x^*)$	$L$	$\theta$	$\alpha_0$	$\approx \alpha$	$\varepsilon$	Невязка
1	0.64	1000	0.1	0.1	0.55401	0.05401	$4.9 \cdot 10^{-7}$
2	0.63	1000	0.1	0.1	0.46615	0.03385	$6.3 \cdot 10^{-7}$

## Выводы

В работе предложены приближенные методы решения прямых и обратных задач для параболических уравнений. Прямые и обратные задачи решаются по единой методологии — исходная задача преобразуется в интегральное уравнение, которое затем аппроксимируется по технологии метода коллокации (или механических квадратур). Построенная вычислительная схема реализуется в соответствии с непрерывным методом решения нелинейных операторных уравнений.

Отметим несколько принципиальных моментов. При приближенном решении прямой задачи для нелинейных параболических уравнений в качестве узлов коллокации выбраны узлы локальных сплайнов, реализующие наилучшую по порядку аппроксимацию класса функций  $P_r(G, M)$ , к которому принадлежат решения линейных параболических уравнений. Исследованы коэффициентная задача и задача восстановления порядка дробной производной. Предложена новая методика обоснования проекционных методов решения линейных и нелинейных интегральных уравнений.

Предложенная методика может быть распространена на ряд других прямых и обратных задач математической физики.

## Список литературы

1. Ladyženskaja O. A., Solonnikov V. A. *Ural'ceva N. N. Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*. Providence : American Mathematical Society, 1988. 648 p.
2. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Москва : Мир, 1972. 588 с.
3. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики : в 2 т. Т. 2. Москва : Медиа, 2012. 886 с.
4. Крылов Н. В. Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гельдера. Новосибирск : Научная книга, 1998. 178 с.
5. Крылов Н. В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. Москва : Наука, 1985. 376 с.
6. Корпусов М. О. Конспект лекций по курсу «Нелинейные эллиптические и параболические уравнения математической физики для аспирантов». Москва : Физический факультет МГУ, 2016. 188 с.
7. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. Москва : Физматлит, 2009. 256 с.
8. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. Москва : ЛИБРОКОМ, 2009. 784 с.
9. Вабищевич П. Н. Вычислительные методы математической физики. Нестационарные задачи. Москва : Вузовская книга, 2008. 228 с.



10. *Kabanikhin S. I.* Inverse and ill-posed problems. Theory and Applications. Berlin ; Boston : De Gruyter, 2011. 475 p. <https://doi.org/10.1515/9783110224016>
11. *Hasanov H. A., Romanov V. G.* Introduction to Inverse Problems for Differential Equations. Springer International Publishing AG, 2017. 261 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-62797-7>
12. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. Москва : Изд-во МГУ, 1994. 206 с.
13. *Beilina L., Klibanov M. V.* Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems. New York : Springer, 2012. 408 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7805-9>
14. *Бойков И. В., Рязанцев В. А.* Об одном приближенном методе определения коэффициента теплопроводности // Журнал Средневолжского математического общества. 2019. Т. 21, № 2. С. 149–163. <https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201902.149-163>
15. *Бойков И. В., Рязанцев В. А.* Об одном итерационном методе решения параболических уравнений // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы (Саратов, 31 января – 4 февраля 2022 г.). Саратов : Саратовский университет [Издание], 2022. Вып. 21. С. 50–54. EDN: [BVALVE](https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.202201.50-54)
16. *Daleckiĭ Ju. L., Kreĭn M. G.* Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space. Providence : American Mathematical Society, 1974. 386 p. (Translations of Mathematical Monographs. Vol. 43).
17. *Dekker K., Verwer J. G.* Stability of Runge – Kutta methods for stiff nonlinear differential equations. New York : Elsevier Science Ltd, 1984. 308 p.
18. *Lozinskii S. M.* Note on a paper by V. S. Godlevskii // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1973. Vol. 13, iss. 2. P. 232–234. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(73\)90144-4](https://doi.org/10.1016/0041-5553(73)90144-4)
19. *Kantorovich L. V., Akilov G. P.* Functional Analysis. Oxford : Pergamon Press, 1982. 600 p.
20. *Krasnosel'skii M. A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., Rutitskii Ya. B., Stetsenko Ya. V.* Approximate Solution of Operator Equations. Groningen : Wolters-Noordhoff Publishing, 1972. 496 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-010-2715-1>
21. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. Москва : Бином. Лаборатория знаний. 2011. 640 с. EDN: [QJXMXL](https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201101.640)
22. *Гавурин М. К.* Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов // Известия вузов. Математика. 1958. № 5. С. 18–31.
23. *Пузынин И. В., Бояджиев Т. Л., Виницкий С. И., Земляная Е. В., Пузынина Т. П., Чулуунбаатар О.* О методах вычислительной физики для исследования моделей сложных физических процессов // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2007. Т. 38, вып. 1. С. 144–232.
24. *Voikov I. V.* On a continuous method for solving nonlinear operator equations // Differential Equations. 2012. Vol. 48, № 9. P. 1288–1295. <https://doi.org/10.1134/S001226611209008X>
25. *Voikov I. V., Ryazantsev V. A.* On Optimal Approximation of Geophysical Fields // Numerical Analysis and Applications. 2021. Vol. 14, iss. 1. P. 13–29. <https://doi.org/10.1134/S199542392101002X>
26. *Lanczos K.* Applied Analysis. New Jersey : Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1956. 539 p.
27. *Бойков И. В., Кривулин Н. П.* Аналитические и численные методы идентификации динамических систем. Пенза : Изд-во Пензенского гос. ун-та, 2016. 398 с.
28. *Бойков И. В., Кривулин Н. П.* Приближенный метод восстановления входных сигналов измерительных преобразователей // Измерительная техника. 2021. № 12. С. 3–7. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-12-3-7>, EDN: [PVVHQW](https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.202112.3-7)
29. *Бойков И. В., Рязанцев В. А.* Численное восстановление начального условия в задачах Коши для линейных параболических и гиперболических уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 3 (55). С. 72–88. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2020-3-6>



30. Boykov I. V., Ryazantsev V. A. An approximate method for solving an inverse coefficient problem for the heat equation // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2021. Vol. 15, iss. 2. P. 175–189. <https://doi.org/10.1134/S1990478921020010>
31. Mainardi F. On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation // Waves and Stability in Continuous Media / ed. by S. Rionero, T. Ruggert. World Scientific, Singapore, 1994. P. 246–251.
32. Учайкин В. В. Метод дробных производных. Ульяновск : Артишок. 2008. 512 с.
33. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. Amsterdam : Gordon and Breach Science Publishers, 1993. 1006 p.

### References

1. Ladyženskaja O. A., Solonnikov V. A. Ural'ceva N. N. *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*. Providence, American Mathematical Society, 1988. 648 p.
2. Lions Zh.-L. *Nekotorye metody resheniia nelineinykh kraevykh zadach* [Some Methods for Solution of Nonlinear Boundary Problems]. Moscow, Mir, 1972, 588 p. (in Russian).
3. Mors F. M., Feshbakh G. *Metody teoreticheskoi fiziki* [Methods of Theoretical Physics]. Vol. 2. Moscow, Media, 2012. 886 p. (in Russian).
4. Krylov N. V. *Lektsii po ellipticheskim i parabolicheskim uravneniam v prostranstvakh Gel'dera* [Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Holder Spaces]. Novosibirsk, Nauchnaya kniga, 1998. 178 p. (in Russian).
5. Krylov N. V. *Nelineinye ellipticheskie i parabolicheskie uravneniia vtorogo poriadka* [Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations of the Second Order]. Moscow, Nauka, 1985, 376 p. (in Russian).
6. Korpusov M. O. *Konspekt lektsii po kursu "Nelineinye ellipticheskie i parabolicheskie uravneniia matematicheskoi fiziki dlia aspirantov"* [Lecture Notes on the Course "Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations of Mathematical Physics for Postgraduate Students"]. Moscow, Moscow University Press, 2016. 188 p. (in Russian).
7. Polianin A. D., Zaitsev V. F., Zhurov A. I. *Metody resheniia nelineinykh uravnenii matematicheskoi fiziki i mekhaniki* [Methods for Solution of Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 256 p. (in Russian).
8. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. *Vychislitel'naiia teploperedacha* [Computational Heat Transfer]. Moscow, LIBROKOM, 2009. 784 p. (in Russian).
9. Vabishchevich P. N. *Vychislitel'nye metody matematicheskoi fiziki. Nestatsionarnye zadachi* [Computational Methods of Mathematical Physics. Nonstationary Problems]. Moscow, Vuzovskaya kniga, 2008. 228 p. (in Russian).
10. Kabanikhin S. I. *Inverse and ill-posed problems. Theory and Applications*. Berlin, Boston, De Gruyter, 2011. 475 p. <https://doi.org/10.1515/9783110224016>
11. Hasanov H. A., Romanov V. G. *Introduction to Inverse Problems for Differential Equations*. Springer International Publishing AG, 2017. 261 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-62797-7>
12. Denisov A. M. *Vvedenie v teoriiu obratnykh zadach* [Introduction to the Inverse Problems Theory]. Moscow, Moscow University Press, 1994. 206 p. (in Russian).
13. Beilina L., Klivanov M. V. *Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems*. New York, Springer, 2012. 408 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7805-9>
14. Boikov I. V., Ryazantsev V. A. On the approximate method for determination of heat conduction coefficient. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* [Middle Volga Mathematical Society Journal], 2019, vol. 21, iss. 2, pp. 149–163 (in Russian). <https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201902.149-163>
15. Boikov I. V., Ryazantsev V. A. On an iterative method for solution of parabolic equations. *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications: Materials of the 21st International Saratov Winter School* (Saratov, January 31 – February 4, 2022). Saratov,



- Saratov State University Publ., 2022, iss. 21, pp. 50–54 (in Russian). EDN: [BVALVE](#)
16. Daletskii Ju. L., Krein M. G. *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space*. Translations of Mathematical Monographs. Vol. 43. Providence, American Mathematical Society, 1974. 386 p.
  17. Dekker K., Verwer J. G. *Stability of Runge – Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations*. New York, Elsevier Science Ltd, 1984. 308 p.
  18. Lozinskii S. M. Note on a paper by V. S. Godlevskii. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1973, vol. 13, iss. 2, pp. 232–234. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(73\)90144-4](https://doi.org/10.1016/0041-5553(73)90144-4)
  19. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Functional Analysis*. Oxford, Pergamon Press, 1982. 600 p.
  20. Krasnosel'skii M. A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., Rutitskii Ya. B., Stetsenko Ya. V. *Approximate Solution of Operator Equations*. Groningen, Wolters-Noordhoff Publishing, 1972. 496 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-010-2715-1>
  21. Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobel'kov G. M. *Chislennyye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Binom. Laboratoriya znaniy, 2011. 640 p. (in Russian). EDN: [QJXMXL](#)
  22. Gavurin M. K. Nonlinear functional equations and continuous analogs of iterative methods. *Izvestiya VUZ. Matematika*, 1958, iss. 5, pp. 18–31 (in Russian).
  23. Puzynin I. V., Boiadzhiev T. L., Vinit'skii S. I., Zemlianaia E. V., Puzynina T. P., Chuluunbaatar O. Methods of computational physics for investigation of models of complex physical systems. *Physics of Particles and Nuclei*, 2007, vol. 38, iss. 1, pp. 70–116. <https://doi.org/10.1134/S1063779607010030>
  24. Boikov I. V. On a continuous method for solving nonlinear operator equations. *Differential Equations*, 2012, vol. 48, iss 9, pp. 1288–1295. <https://doi.org/10.1134/S001226611209008X>
  25. Boikov I. V., Ryazantsev V. A. On optimal approximation of geophysical fields. *Numerical Analysis and Applications*, 2021, vol. 14, iss. 1, pp. 13–29. <https://doi.org/10.1134/S199542392101002X>
  26. Lanczos K. *Applied Analysis*. New Jersey, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1956. 539 p.
  27. Boikov I. V., Krivulin N. P. *Analiticheskie i chislennyye metody identifikatsii dinamicheskikh sistem* [Analytical and Numerical Methods for Identification of Dynamical Systems]. Penza, Penza State University Publ., 2016. 398 p. (in Russian).
  28. Boikov I. V., Krivulin N. P. On an approximate method for reconstructing input signals of measuring transformers. *Measurement Techniques*, 2021, iss. 12, pp. 3–7 (in Russian). <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-12-3-7>, EDN: [PVVHQW](#)
  29. Boikov I. V., Ryazantsev V. A. Numerical recovery of the initial condition in the Cauchy problems for linear parabolic and hyperbolic equations. *University Proceedings. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences*, 2020, iss. 3 (55), pp. 72–88 (in Russian). <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2020-3-6>
  30. Boikov I. V., Ryazantsev V. A. An approximate method for solving an inverse coefficient problem for the heat equation. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2021, vol. 15, iss. 2, pp. 175–189. <https://doi.org/10.1134/S1990478921020010>
  31. Mainardi F. On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation. In: Rionero S., Ruggert T. (eds.) *Waves and Stability in Continuous Media*. World Scientific, Singapore, 1994, pp. 246–251.
  32. Uchaikin V. V. *Metod drobnnykh proizvodnykh* [Method of Fractional Derivatives]. Ulyanovsk, Artishok, 2008. 512 p. (in Russian).
  33. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*. Amsterdam, Gordon and Breach Science Publishers, 1993. 1006 p.

Поступила в редакцию / Received 12.04.2022

Принята к публикации / Accepted 02.03.2023

Опубликована / Published 31.08.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 311–319

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 311–319

[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru)

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-311-319>, EDN: GUFKKJ

Научная статья

УДК 519.663

## Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом. Часть I. Классическое решение смешанной задачи

В. П. Курдюмов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

**Курдюмов Виталий Павлович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и математической экономики, [Kurdyumov47@yandex.ru](mailto:Kurdyumov47@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0001-8534-7692>, AuthorID: 9902

**Аннотация.** Резольвентным подходом и использованием идеи А. Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье исследуются свойства формального решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом и нулевой начальной функцией. Такой метод позволяет получать глубокие результаты о сходимости формального ряда с произвольными граничными условиями и без завышения требований гладкости исходных данных. Рассматриваемые в статье разнопорядковые граничные условия таковы, что у оператора соответствующей спектральной задачи возможно наличие бесконечного множества кратных собственных значений и соответствующих им присоединенных функций. Получено классическое решение без завышения требований на начальную скорость  $u'_t(x, 0) = \psi(x)$ . Показано, что при  $\psi(x) \in L[0, 1]$  формальное решение, являясь равномерным пределом классических, есть обобщенное решение, а когда  $\psi(x) \in L_p[0, 1]$ ,  $1 < p \leq 2$ , формальное решение обладает значительно более гладкими свойствами по сравнению со случаем  $\psi(x) \in L[0, 1]$ .

**Ключевые слова:** метод Фурье, формальное решение, волновое уравнение, резольвента

**Для цитирования:** Курдюмов В. П. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом. Часть I. Классическое решение смешанной задачи // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 311–319. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-311-319>, EDN: GUFKKJ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

## Classic and generalized solutions of the mixed problem for wave equation with a summable potential. Part I. Classic solution of the mixed problem

V. P. Kurdyumov

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Vitalii P. Kurdyumov, Kurdyumov47@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8534-7692>, AuthorID: 9902

**Abstract.** The resolvent approach and the using of the idea of A. N. Krylov on the acceleration of convergence of Fourier series, the properties of a formal solution of a mixed problem for a homogeneous wave equation with a summable potential and a zero initial function are studied. This method makes it possible to obtain deep results on the convergence of a formal series with arbitrary boundary conditions and without overestimating the requirements for the smoothness of the initial data. The different-order boundary conditions considered in the article are such that the operator corresponding to the spectral problem may have an infinite set of multiple eigenvalues and their associated functions. A classical solution is obtained without overstating the requirements for the initial velocity  $u'_t(x, 0) = \psi(x)$ . It is shown that for  $\psi(x) \in L[0, 1]$  the formal solution, being the uniform limit of the classical ones, is a generalized solution, and when  $\psi(x) \in L_p[0, 1]$ ,  $1 < p \leq 2$ , the formal solution has much smoother properties than the case  $\psi(x) \in L[0, 1]$ .

**Keywords:** Fourier method, formal solution, wave equation, resolvent

**For citation:** Kurdyumov V. P. Classic and generalized solutions of the mixed problem for wave equation with a summable potential. Part I. Classic solution of the mixed problem. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 311–319 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-311-319>, EDN: GUFKKJ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

### Введение

Рассматривается смешанная задача

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, \infty), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u'_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2)$$

$$u'_x(0, t) + \beta u'_x(1, t) + \alpha_1 u(0, t) + \beta_1 u(1, t) = \alpha u(0, t) + u(1, t) = 0, \quad (3)$$

где  $q(x) \in L[0, 1]$ ,  $q(x)$  и  $\psi(x)$  — комплекснозначные функции,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  — комплексные числа.

К задаче (1)–(3) по методу Фурье привлекается оператор Штурма – Лиувилля  $-y'' + q(x)y$  с регулярными при  $1 + \alpha\beta \neq 0$  граничными условиями

$$y'(0) + \beta y'(1) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = \alpha y(0) + y(1) = 0,$$

который охватывает все линейные двухточечные разнопорядковые граничные условия (при необходимости заменой переменной  $x$  на  $1 - x$ ). Он выделяется тем, что в силу асимптотических формул его собственных значений [1, с. 74]

$$\lambda_n = \rho_n^2, \quad \lambda_n'^2 = \rho_n'^2 \quad (\lambda = \rho^2, \quad \operatorname{Re} \rho \geq 0),$$



$$\rho_n = 2n\pi + b_1 + \varepsilon_n, \quad \rho'_n = 2n\pi + b_2 + \varepsilon'_n, \quad (4)$$

где  $b_{1,2} = -i \ln(d \pm \sqrt{d^2 - 1})$ ,  $d = -\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}$ ,  $\varepsilon_n = o(1)$ ,  $\varepsilon'_n = o(1)$ . Только в нем при  $b_1 = b_2$  возможно наличие бесконечного множества кратных собственных значений и им соответствующих присоединенных функций. Один из таких наиболее трудных случаев и рассматривается в статье. Считаем, что в задаче (1)–(3)  $\alpha = 0$ ,  $\beta = -1$ :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t), \quad (5)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u'_t(x, 0) = \psi(x), \quad (6)$$

$$u'_x(0, t) - u'_x(1, t) + \alpha_1 u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0. \quad (7)$$

Отметим, что задача (5)–(7) содержит все трудности любой другой задачи, когда  $b_1 = b_2$ , а случай  $b_1 \neq b_2$  изучается так же, как в [2, 3]. Исследование проводится методом Фурье с помощью резольвентного подхода [4–6] и идеи А. Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье. Такой подход позволяет получать глубокие результаты о сходимости формального ряда для смешанной задачи с произвольными граничными условиями без завышения требований гладкости исходных данных. Так в [6] для задачи (1), (3) с начальными условиями  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $u'_t(x, 0) = 0$  получено классическое решение без завышения требований гладкости на  $\varphi(x)$ , и с привлечением знаменитых теорем Карлесона [7] и Ханта [8] о сходимости тригонометрических рядов Фурье почти всюду (п.в.) также показано, что формальное решение сходится п.в. для  $\varphi(x) \in L_p[0, 1]$ ,  $p > 1$ , а его сумма является обобщенным решением. В [2, 3] аналогичные результаты получены для задачи (1), (2) с граничными условиями  $u(0, t) = u(1, t) = 0$  или  $u'_x(0, t) + \alpha_1 u(0, t) + \beta_1 u(1, t) = u'_x(1, t) + \alpha_2 u(0, t) + \beta_2 u(1, t) = 0$ . Наша задача также требует глубокого применения метода А. Н. Крылова. Так же, как, например, в [2, 3], разбиваем формальный ряд на несколько рядов и суммы некоторых из них точно вычисляем. В частности, вычисляется ряд  $u_1(x, t)$  (формула (8)), определяемый резольвентой оператора  $L_0 : -y''$ ,  $y'(0) - y'(1) = y(1) = 0$ . Этот оператор имеет бесконечное множество кратных собственных значений, каждому из которых соответствуют [9] одна собственная и одна присоединенная функции. В итоге мы получим классическое решение задачи (5)–(7) при минимальных требованиях на  $\psi(x)$  и обобщенное решение и в крайнем случае  $\psi(x) \in L[0, 1]$ .

## 1. Преобразование формального решения

При  $q(x) \in C[0, 1]$  вопрос о классическом решении задачи (5)–(7) при минимальных требованиях на  $\psi(x)$  исследован в [10]. Теперь при  $q(x) \in L[0, 1]$  минимальными требованиями для существования классического решения являются:  $\psi(x)$  абсолютно непрерывна,  $\psi(1) = 0$  и  $\psi'(x) \in L_p[0, 1]$ ,  $1 < p \leq 2$ . А под классическим решением понимаем функцию  $u(x, t)$ , абсолютно непрерывную вместе с первой производной по  $x$  и  $t$  и удовлетворяющую условиям (5)–(7), когда уравнение (5) выполняется п.в. Для простоты будем считать, что  $\psi(x) \in W_2^1[0, 1]$ , т.е.  $\psi(x)$  абсолютно непрерывна и  $\psi'(x) \in L_2[0, 1]$  (при  $\psi'(x) \in L_p[0, 1]$ ,  $1 < p \leq 2$ , теорема о классическом решении задачи (5)–(7) доказывается аналогично с привлечением теоремы Хаусдорфа – Юнга). Оператор Штурма – Лиувилля, связанный по методу Фурье с задачей (5)–(7), имеет вид

$$Ly = -y'' + q(x)y, \quad U_1(y) = y'(0) - y'(1) + \alpha_1 y(0) = 0, \quad U_2(y) = y(1) = 0.$$



Для его собственных значений справедливы асимптотические формулы (4) при  $b_1 = b_2$ . Обозначим  $\tilde{\gamma}_n = \{\rho \mid |\rho - 2n\pi| = \delta\}$ , где  $\delta > 0$  и достаточно мало,  $n \geq n_0$ , а  $n_0$  таково, что при  $n \geq n_0$  внутри  $\tilde{\gamma}_n$  находятся по одному  $\rho_n$  и  $\rho'_n$  (которые могут и совпадать). Пусть  $\gamma_n$  — образ  $\tilde{\gamma}_n$  в  $\lambda$ -плоскости ( $\lambda = \rho^2$ ,  $\text{Re} \rho \geq 0$ ). Формальное решение задачи (5)–(7) возьмем в виде [11, 12]

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

где  $r > 0$  таково, что внутри  $|\lambda| = r$  находятся все собственные значения  $\lambda_n, \lambda'_n$ , для которых  $n < n_0$ , а  $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$  — резольвента оператора  $L$  ( $E$  — единичный оператор,  $\lambda$  — спектральный параметр). Представляя  $\psi(x)$  в виде, аналогичном [10, формула (10)], т. е.  $\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$ , где  $\psi_1(x) \in W_2^1[0, 1]$ ,  $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$ ,  $\psi_2(x) \in C^2[0, 1]$ ,  $\psi_2(x) \in D_L$  ( $D_L$  — область определения оператора  $L$ ), для формального решения  $u(x, t)$ , учитывая [10, лемма 2], получим формулу

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^4 u_j(x, t),$$

где

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda^0 \psi_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda, & (8) \\ u_2(x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \psi_1 - R_\lambda^0 \psi_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda, \\ u_3(x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda^0 g) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda, \\ u_4(x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda g - R_\lambda^0 g) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda, \end{aligned}$$

$R_\lambda^0$  — резольвента оператора  $L_0$ :  $L_0 y = -y''$ ,

$$U_1^0(y) = y'(0) - y'(1) = 0, \quad U_2^0(y) = y(1) = 0,$$

$\mu_0$  находится вне контуров  $|\lambda| = r$  и  $\gamma_n$  при  $n \geq n_0$ ,  $g = (L - \mu_0 E)\psi_2$ , поэтому  $g(x) \in L[0, 1]$ .

**Лемма 1** ([10, теорема 8]). Для  $R_\lambda$  и  $R_\lambda^0$  имеют место формулы

$$\begin{aligned} R_\lambda f &= v_1(x, \rho)(f, z_1) + v_2(x, \rho)(f, z_2) + (M_\rho f)(x), \\ R_\lambda^0 f &= v_1^0(x, \rho)(f, z_1^0) + v_2^0(x, \rho)(f, z_2^0) + (M_\rho^0 f)(x), \end{aligned}$$



где  $z_j(x, \rho)$  ( $j = 1, 2$ ) — решения уравнения  $y'' - q(x)y + \rho^2 y = 0$  с начальными условиями  $z_1(0, \rho) = z_2'(0, \rho) = 1$ ,  $z_1'(0, \rho) = z_2(0, \rho) = 0$ ,

$$v_1(x, \rho) = \frac{1}{\Delta(\rho)} \{ [-u_2(z_2)z_2'(1, \rho) - u_1(z_2)z_2(1, \rho)]z_1(x, \rho) + [u_1(z_1)z_2(1, \rho) + u_2(z_1)z_2'(1, \rho)]z_2(x, \rho) \},$$

$$v_2(x, \rho) = \frac{1}{\Delta(\rho)} \{ [u_2(z_2)z_1'(1, \rho) + u_1(z_2)z_1(1, \rho)]z_1(x, \rho) + [-u_1(z_1)z_1(1, \rho) - u_2(z_1)z_1'(1, \rho)]z_2(x, \rho) \},$$

$$\Delta(\rho) = U_1(z_1)U_2(z_2) - U_1(z_2)U_2(z_1), \quad (M_\rho f)(x) = \int_0^x \begin{vmatrix} z_1(x, \rho) & z_2(x, \rho) \\ z_1(t, \rho) & z_2(t, \rho) \end{vmatrix} f(t) dt,$$

$z_1^0, z_2^0, v_1^0, v_2^0, M_\rho^0$  — те же, что и  $z_1, z_2, v_1, v_2, M_\rho$ , но взяты для оператора  $L_0$ , т. е.  $z_1^0(x, \rho) = \cos \rho x$ ,  $z_2^0(x, \rho) = \frac{\sin \rho x}{\rho}$ ,

$$v_1^0(x, \rho) = \frac{1}{\Delta_0(\rho)} [-z_2^0(1, \rho)z_1^0(x, \rho) + z_2^0(x, \rho)], \quad v_2^0(x, \rho) = \frac{1}{\Delta_0(\rho)} [z_1^0(1, \rho) - 1]z_1^0(x, \rho),$$

$$\Delta_0(\rho) = U_1^0(z_1^0)U_2^0(z_2^0) - U_1^0(z_2^0)U_2^0(z_1^0) = 1 - \cos \rho, \quad (f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Обозначим

$$J_1(x, \rho) = v_1^0(x, \rho)(\psi_1, z_1^0) + v_2^0(x, \rho)(\psi_1, z_2^0),$$

$$J_2(x, \rho) = v_1(x, \rho)(\psi_1, z_1) + v_2(x, \rho)(\psi_1, z_2) - v_1^0(x, \rho)(\psi_1, z_1^0) - v_2^0(x, \rho)(\psi_1, z_2^0),$$

$$J_3(x, \rho) = \frac{1}{\lambda - \mu_0} [v_1^0(x, \rho)(g, z_1^0) + v_2^0(x, \rho)(g, z_2^0)],$$

$$J_4(x, \rho) = \frac{1}{\lambda - \mu_0} [v_1(x, \rho)(g, z_1) + v_2(x, \rho)(g, z_2) - v_1^0(x, \rho)(g, z_1^0) - v_2^0(x, \rho)(g, z_2^0)].$$

Так как  $(M_\rho f)(x)$ ,  $(M_\rho^0 f)(x)$  — целые по  $\lambda$ , то по лемме 1

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^4 u_j(x, t) = \sum_{j=1}^4 \left( -\frac{1}{2\pi i} \right) \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) J_j(x, \rho) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda.$$

## 2. Исследование ряда $u_1(x, t)$

Будем исследовать ряды  $u_j(x, t)$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ). Сначала исследуем ряд  $u_1(x, t)$ .

**Лемма 2.** *Имеет место формула*

$$u_1(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(1)}(x, t), \tag{9}$$

где  $u_0^{(1)}(x, t) = 2(1-x)t(\psi_1, 1)$ ,

$$u_n^{(1)}(x, t) = \frac{2}{n\pi} a_n \sin \rho_n x \sin \rho_n t + \frac{1}{(n\pi)^2} b_n \sin \rho_n x \sin \rho_n t +$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{n\pi} b_n (1-x) \cos \rho_n x \sin \rho_n t - \frac{2}{n\pi} b_n t \sin \rho_n x \cos \rho_n t, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (10) \\
 & a_n = (\xi \psi_1(\xi), \sin \rho_n \xi), \quad b_n = (\psi_1(\xi), \cos \rho_n \xi), \quad \rho_n = 2n\pi.
 \end{aligned}$$

Доказательство получается по теореме вычетов.

**Лемма 3.** *Имеет место формула*

$$u_1(x, t) = u_0^{(1)}(x, t) + V(x + t) - V(x - t), \quad (11)$$

где  $V(x) = \sum_{i=1}^3 S_i(x)$ ,  $S_1(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} a_n \cos \rho_n x$ ,  $S_2(x) = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} b_n \sin \rho_n x$ ,  
 $S_3(x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} b_n \cos \rho_n x$ .

**Доказательство.** По формулам умножения тригонометрических функций из (10) получаем

$$u_n^{(1)}(x, t) = V_n(x + t) - V_n(x - t),$$

где  $V_n(x) = -\frac{a_n}{n\pi} \cos \rho_n x + \frac{b_n}{n\pi} (1-x) \sin \rho_n x - \frac{b_n}{2(n\pi)^2} \cos \rho_n x$ . Отсюда и из (9) сразу следует (11).  $\square$

**Лемма 4.** *Ряд  $V(x)$  сходится равномерно на любом отрезке и для его суммы имеет место формула*

$$\begin{aligned}
 V(x) = & \int_0^x d\tau \int_0^\tau \left[ \frac{1}{2} \widetilde{\psi}_1(\tau_1) - (\psi_1, 1) \right] d\tau_1 + (1-x) \int_0^x \left[ \frac{1}{2} \widetilde{\psi}_1(\tau) - (\psi_1, 1) \right] d\tau - \\
 & - \frac{1}{2} \widetilde{W}(x) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} (\psi_1, \cos \rho_n \xi) + (W, 1), \quad (12)
 \end{aligned}$$

где  $\widetilde{\psi}_1(x) (\widetilde{W}(x))$  есть четное 1-периодическое продолжение функции  $\psi_1(x) + \psi_1(1-x) (W(x) + W(1-x))$ ,  $x \in [0, \frac{1}{2}]$  и  $W(x) = \int_x^1 \tau \psi_1(\tau) d\tau$ .

**Доказательство.** Сначала найдем сумму ряда  $S_1(x)$ . Имеем  $\frac{\sin \rho_n \xi}{n\pi} = 2 \int_0^\xi \cos \rho_n \tau d\tau$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} a_n \cos \rho_n x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (W, \cos \rho_n \xi) \cos \rho_n x$ . Поскольку

$$(W, \cos \rho_n \xi) = (W(\xi) + W(1-\xi), \cos \rho_n \xi)_{\frac{1}{2}},$$

где  $(f, g)_{\frac{1}{2}} = \int_0^{1/2} f(\xi) g(\xi) d\xi$ , то

$$-S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} a_n \cos \rho_n x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (W(\xi) + W(1-\xi), \cos \rho_n \xi) \cos \rho_n x.$$

Поэтому

$$S_1(x) = -\frac{1}{2} \widetilde{W}(x) + (W, 1). \quad (13)$$



Для ряда  $S_2(x)$  сначала рассмотрим

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \rho_n x = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_1(\xi) + \psi_1(1 - \xi), \cos \rho_n \xi)_{\frac{1}{2}} \cos \rho_n x. \quad (14)$$

Этот ряд является рядом Фурье функции  $\frac{1}{4}\widetilde{\psi}_1(x) - \frac{1}{2}(\psi_1, 1)$ . Интегрируя (14), получаем

$$S_2(x) = (1 - x) \int_0^x \left[ \frac{1}{2}\widetilde{\psi}_1(\tau) - (\psi_1, 1) \right] d\tau. \quad (15)$$

А интегрируя (14) два раза, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} b_n \cos \rho_n x = - \int_0^x d\tau \int_0^{\tau} [\widetilde{\psi}_1(\tau_1) - 2(\psi_1, 1)] d\tau_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} (\psi_1, \cos \rho_n \xi).$$

Поэтому

$$S_3(x) = \frac{1}{2} \int_0^x d\tau \int_0^{\tau} [\widetilde{\psi}_1(\tau_1) - 2(\psi_1, 1)] d\tau_1 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} (\psi_1, \cos \rho_n \xi). \quad (16)$$

Из (13), (15) и (16) следует (12).  $\square$

**Теорема 1.** Ряд  $u_1(x, t)$  сходится равномерно по  $x \in [0, 1]$  и  $t \in [0, T]$  при любом  $T > 0$ , его сумма определяется формулой (11), где  $V(x)$  есть (12), п.в. удовлетворяет уравнению (5) при  $q(x) = 0$ .

**Доказательство.** Формула (11) сразу следует из лемм 3, 4, а доказательство последнего утверждения проводится, как и в [5, лемма 6], введением множества  $M = \{x | x \in [-A, A], \widetilde{\psi}'_1(x), \widetilde{W}(x) \text{ конечны}\}$  и учетом того, что  $\widetilde{\psi}_1(x) \in W_2^1[-A, A]$ ,  $\widetilde{W}(x) \in W_2^2[-A, A]$  при любом  $A > 0$ .  $\square$

*Продолжение следует.*

### Список литературы

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. Москва : Наука, 1969. 528 с.
2. Хромов А. П. Смешанная задача для однородного волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58, № 9. С. 1583–1596. <https://doi.org/10.31857/S004446690002535-9>, EDN: [YYDVDF](#)
3. Курдюмов В. П., Хромов А. П., Халова В. А. Смешанная задача для однородного волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью с суммируемым потенциалом // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 4. С. 444–456. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456>, EDN: [BEUDSC](#)
4. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход в методе Фурье // Доклады академии наук. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140. <https://doi.org/10.7868/S0869565214260041>, EDN: [SJQEEN](#)
5. Хромов А. П. Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 56, вып. 2. С. 239–251. <https://doi.org/10.7868/S0044466916020149>, EDN: [VIPLNL](#)



6. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Смешанная задача для волнового уравнения с суммируемым потенциалом в случае двух точечных условий разных порядков // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 4. С. 505–517. <https://doi.org/10.1134/S0374064117040082>, EDN: YIODUP
7. Carleson L. On convergence and growth of partial sums of Fourier series // Acta Mathematica. 1966. Vol. 116, iss. 1. P. 135–157. <https://doi.org/10.1007/BF02392815>
8. Hunt R. On the convergence of Fourier series // Orthogonal Expansions and Their Continuous Analogues: Proceedings of the Conference Held at Southern Illinois University, Edwardsville, April 27–29, 1967. Carbondale, JL : Southern Illinois University Press, 1968. P. 235–255.
9. Ильин В. А. О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1976. Т. 142. С. 148–155.
10. Гуревич А. П., Курдюмов В. П., Хромов А. П. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 1. С. 13–29. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-1-13-29>, EDN: VUSODD
11. Расулов М. Л. Метод контурного интеграла. Москва : Наука, 1964. 462 с.
12. Вагабов А. И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д. : Изд-во Ростовского ун-та, 1994. 160 с.

### References

1. Naymark M. A. *Lineynye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators]. Moscow, Nauka, 1969. 528 p. (in Russian).
2. Khromov A. P. Mixed problem for homogeneous wave equation with non-zero initial velocity. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2018, vol. 58, iss. 9, pp. 1531–1543. <https://doi.org/10.1134/S0965542518090099>
3. Kurdyumov V. P., Khromov A. P., Khalova V. A. Mixed problem for a homogeneous wave equation with a nonzero initial velocity with summable potential. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 4, pp. 444–456 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456>, EDN: BEUDSC
4. Burlutskaya M. S., Khromov A. P. Resolvent approach in the Fourier method. *Doklady Mathematics*, 2014, vol. 90, iss. 2, pp. 545–548. <https://doi.org/10.1134/S1064562414060076>, EDN: UFVTOF
5. Khromov A. P. Behavior of the formal solution to a mixed problem for the wave equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, iss. 2, pp. 243–255. <https://doi.org/10.1134/S0965542516020135>, EDN: WSPZGX
6. Burlutskaya M. S., Khromov A. P. Mixed problem for the wave equation with integrable potential in the case of two-point boundary conditions of distinct orders. *Differential Equations*, 2017, vol. 53, iss. 4, pp. 497–508. <https://doi.org/10.1134/S0012266117040085>, EDN: XNEPDT
7. Carleson L. On convergence and growth of partial sums of Fourier series. *Acta Mathematica*, 1966, vol. 116, iss. 1, pp. 135–157. <https://doi.org/10.1007/BF02392815>
8. Hunt R. On the convergence of Fourier series. In: *Orthogonal Expansions and Their Continuous Analogues*. Proceedings of the Conference Held at Southern Illinois University, Edwardsville, April 27–29, 1967. Carbondale, JL, Southern Illinois University Press, 1968, pp. 235–255.
9. Il'in V. A. Existence of a reduced system of eigen- and associated functions for a nonselfadjoint ordinary differential operator. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1979, vol. 142, pp. 157–164. <https://www.mathnet.ru/eng/tm2564>



10. Gurevich A. P., Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Justification of the Fourier method in a mixed problem for a wave equation with a nonzero initial velocity. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, vol. 16, iss. 1, pp. 13–29 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-1-13-29>, EDN: VUSODD
11. Rasulov M. L. *Metod konturnogo integrala* [Contour Integral Method]. Moscow, Nauka, 1964. 462 p. (in Russian).
12. Vagabov A. I. *Vvedeniye v spektral'nyy chuvstvitel'nost' differentsial'nykh reaktsiy* [Introduction to the Spectral Theory of Differential Operators]. Rostov-on-Don, Rostov University Publ., 1994. 160 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 22.04.2022

Принята к публикации / Accepted 01.09.2022

Опубликована / Published 31.08.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 320–338  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 320–338  
mmi.sgu.ru <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-320-338>, EDN: AKZMKQ

Научная статья

УДК 517.51

## Принцип унитарного расширения в нульмерных локально компактных группах

С. Ф. Лукомский, Ю. С. Крусс<sup>✉</sup>

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

**Лукомский Сергей Федорович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, lukomskisf@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3038-2698>, AuthorID: 17323

**Крусс Юлия Сергеевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, krussus@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-2146-5985>, AuthorID: 848294

**Аннотация.** Цель статьи — разработка алгоритмов построения ступенчатых жестких фреймов в произвольной локально компактной нульмерной группе. Вначале указываем способ построения ступенчатой масштабирующей функции. Для построения масштабирующей функции используем ориентированное дерево и указываем условия на дерево, при котором оно порождает маску  $m_0$  масштабирующей функции. Затем находим условия на маски  $m_0, m_1, \dots, m_q$ , при которых соответствующие вейвлет функции  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_q$  порождают жесткий фрейм. Для этого используем принцип унитарного расширения. Используя найденные условия, указываем конструктивный способ построения таких масок. В заключение приводим примеры построения жестких фреймов.

**Ключевые слова:** жесткие вейвлет фреймы, нульмерные группы, масштабирующие функции, деревья, принцип унитарного расширения

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00037, <https://rscf.ru/project/22-21-00037/>).

**Для цитирования:** Лукомский С. Ф., Крусс Ю. С. Принцип унитарного расширения в нульмерных локально компактных группах // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 320–338. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-320-338>, EDN: AKZMKQ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Unitary extension principle on zero-dimensional locally compact groups

S. F. Lukomskii, Iu. S. Kruss<sup>✉</sup>

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

**Sergei F. Lukomskii**, lukomskisf@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3038-2698>, AuthorID: 17323

**Iuliia S. Kruss**, krussus@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-2146-5985>, AuthorID: 848294



**Abstract.** In this article, we obtain methods for constructing step tight frames on an arbitrary locally compact zero-dimensional group. To do this, we use the principle of unitary extension. First, we indicate a method for constructing a step scaling function on an arbitrary zero-dimensional group. To construct the scaling function, we use an oriented tree and specify the conditions on the tree under which the tree generates the mask  $m_0$  of a scaling function. Then we find conditions on the masks  $m_0, m_1, \dots, m_q$  under which the corresponding wavelet functions  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_q$  generate a tight frame. Using these conditions, we indicate a way of constructing such masks. In conclusion, we give examples of the construction of tight frames.

**Keywords:** tight wavelet frames, zero-dimensional groups, refinable functions, trees, unitary extension principle

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-21-00037, <https://rscf.ru/project/22-21-00037/>).

**For citation:** Lukomskii S. F., Kruss Iu. S. Unitary extension principle on zero-dimensional locally compact groups. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 320–338 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-320-338>, EDN: AKZMKQ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Жесткие вейвлет фреймы (их часто называют фреймами Парсеваля) на прямой являются важным инструментом в обработке изображений [1]. Жесткие вейвлет фреймы, основанные на кратномасштабном анализе (КМА), можно рассматривать как обобщение ортогональных вейвлетов, полученных из КМА. Основным инструментом их построения является принцип унитарного расширения и некоторые его модификации. В 1997 г. публикация [2] принципа унитарного расширения для построения жестких вейвлет фреймов в  $\mathbb{R}$  повлекла новую волну как теоретических исследований, так и приложений к обработке информации. Полученные таким образом фреймы имеют быстрые алгоритмы как разложения, так и восстановления, чем и обусловлена их привлекательность. В качестве примера можно привести жесткие фреймы, построенные по центрированным  $B$ -сплайнам порядка  $m$ . Большой список публикаций на эту тему можно найти в [1].

Используя принцип унитарного расширения, удалось построить жесткие вейвлет фреймы в группах Виленкина [3] и в полях положительной характеристики [4, 5]. В поле  $\mathbb{Q}_p$   $p$ -адических чисел указан метод нахождения вейвлет фреймов по заданному КМА  $(V_n)$  с масштабирующей функцией  $\varphi$  и маской  $m_0$  [6]. Доказывается, что вейвлеты  $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(r)} \in V_1$  порождают фрейм (с различными границами), если  $\varphi$  имеет компактный носитель и

$$\overline{\text{span}\{\psi^{(j)}(x-h) : j, h\}} = W_0,$$

где  $W_0$  — ортогональное дополнение  $V_0$  до  $V_1$ , т. е.  $V_1 = V_0 \oplus W_0$ . При построении этих фреймов не использовался принцип унитарного расширения, и полученные фреймы не являются жесткими. В случае произвольной нульмерной группы ортогональный КМА и соответствующие вейвлеты построены в [7], но методов построения жестких фреймов и даже примеров (кроме ортонормированных базисов) нет.

В этой статье предлагается метод построения жестких фреймов в произвольной локально компактной нульмерной группе, основанный на принципе унитарного расширения.





Статья организована следующим образом. В разд. 1 приведены основные понятия и факты из теории нульмерных групп. В разд. 2 обсуждается вопрос построения масштабирующей функции  $\varphi$  и ее маски  $m_0$ . Для построения маски используется дерево, в вершинах которого стоят значения маски. В конструкции жестких вейвлет фреймов, основанных на КМА, функции  $\psi^{(\ell)}$ , порождающие жесткий вейвлет фрейм, ищутся из соотношения

$$\hat{\psi}^{(\ell)}(\chi) = \hat{\varphi}(\chi A^{-1})m_{\ell}(\chi), \quad (\ell = 1, 2, \dots, q),$$

и задача построения вейвлетов  $\psi^{(\ell)}$  сводится к нахождению масок  $m_{\ell}$ . В теореме 3 (разд. 3) принцип унитарного расширения адаптирован для произвольной нульмерной группы. Указываются условия на маски  $m_{\ell}$ , при которых система сжатий и сдвигов  $p^{\frac{n}{2}}\psi^{(\ell)}(A^n x - h)$  образует жесткий фрейм, и дана конструкция таких масок. Приводятся примеры.

## 1. Нульмерные группы и их характеры

Пусть  $(G, \dot{+})$  — локально компактная нульмерная абелева группа, топология в которой порождена системой открытых подгрупп [8]

$$\dots \supset G_{-n} \supset \dots \supset G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n \supset \dots,$$

где  $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = G$ ,  $\bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = \{0\}$ .  $p$  — порядок смежных классов  $G_n/G_{n+1}$  при всех  $n \in \mathbb{Z}$ . Будем всегда предполагать, что  $p$  — простое число. Последовательность подгрупп  $G_n$  обычно называют *базисной цепочкой*.

В этом случае база топологии образована всевозможными смежными классами  $G_n \dot{+} g$ ,  $g \in G$ . При каждом  $n \in \mathbb{Z}$  выбираем элемент  $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$  и фиксируем его. Тогда любой элемент  $g \in G$  однозначно представим в виде

$$g = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n, \quad a_n = \overline{0, p-1}. \quad (1)$$

Сумма (1) содержит конечное число слагаемых с отрицательными номерами. Систему  $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  будем называть *базисной*. Отображение  $\lambda : G \rightarrow [0, +\infty)$ , определенное равенством  $\lambda(g) = \sum_{n=m}^{+\infty} a_n p^{-n-1}$ , называют отображением Монна [9]. Очевидно  $\lambda(G_n) = [0, p^{-n}]$ .

Классическим примером нульмерной группы является группа Виленкина и группа  $p$ -адических чисел (см. [8, ч. 1, § 2]). Через  $X$  будем обозначать набор характеров группы  $(G, \dot{+})$ , который есть группа относительно умножения. Пусть далее  $G_n^{\perp} = \{\chi \in X : \forall x \in G_n, \chi(x) = 1\}$  — аннулятор подгруппы  $G_n$ . Каждый аннулятор  $G_n^{\perp}$  является группой относительно умножения, и подгруппы  $G_n^{\perp}$  образуют возрастающую последовательность

$$\dots \subset G_{-n}^{\perp} \subset \dots \subset G_0^{\perp} \subset G_1^{\perp} \subset \dots \subset G_n^{\perp} \subset \dots \quad (2)$$

с условиями  $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^{\perp} = X$ ,  $\bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^{\perp} = \{1\}$ .

Смежные классы  $G_{n+1}^{\perp}/G_n^{\perp}$  имеют порядок  $p$ . Группа характеров  $X$  есть нульмерная с базисной цепочкой (2). Эта группа может быть снабжена топологией, использующей базисную цепочку (2). Семейство смежных классов  $G_n^{\perp} \cdot \chi$ ,  $\chi \in X$



можно выбрать в качестве базы топологии. Семейство таких смежных классов вместе с пустым множеством образует полукольцо  $\mathcal{X}$ . Используя смежные классы  $G_n^\perp \cdot \chi$ , можно определить меру  $\nu$  посредством равенств  $\nu(G_n^\perp \cdot \chi) = \nu(G_n^\perp) = p^n$ . Мера  $\nu$  может быть продолжена на  $\sigma$ -алгебру измеримых множеств стандартным способом. Используя эту меру, можно построить абсолютно сходящийся интеграл  $\int_X F(\chi) d\nu(\chi)$ .

Интеграл  $\int_G f(x) d\mu(x)$  определяется аналогично.

Значение  $\chi(g)$  характера  $\chi$  на элементе  $g \in G$  будем обозначать  $(\chi, g)$ . Преобразование Фурье  $\widehat{f}$  функции  $f \in L_2(G)$  определяется равенством

$$\widehat{f}(\chi) = \int_G f(x) \overline{(\chi, x)} d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{G_{-n}} f(x) \overline{(\chi, x)} d\mu(x),$$

где предел понимается по норме  $L_2(X)$ . Для любой  $f \in L_2(G)$  справедлива формула обращения

$$f(x) = \int_X \widehat{f}(\chi) (\chi, x) d\nu(\chi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{G_n^\perp} \widehat{f}(\chi) (\chi, x) d\nu(\chi),$$

где предел также понимается по норме  $L_2(G)$ . Если  $f, g \in L_2(G)$ , то справедлива формула Планшереля [8]

$$\int_G f(x) \overline{g(x)} d\mu(x) = \int_X \widehat{f}(\chi) \overline{\widehat{g}(\chi)} d\nu(\chi).$$

С введенной топологией группа  $X$  характеров также будет локально компактной нульмерной группой. Кроме того, имеется двойственная ситуация: каждый элемент  $x \in G$  есть характер группы  $X$ , и  $G_n$  есть аннулятор подгруппы  $G_n^\perp$ . В дальнейшем объединение дизъюнктивных множеств  $E_j$  будем обозначать через  $\bigsqcup E_j$ .

Для произвольного  $n \in \mathbb{Z}$  выберем характер  $r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$  и зафиксируем его. Совокупность функций  $(r_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  называется системой Радемахера. Любой характер  $\chi$  может быть записан в виде произведения  $\chi = \prod_{j=-m}^{+\infty} r_j^{\alpha_j}$ ,  $\alpha_j = \overline{0, p-1}$ .

Обозначим

$$H_0 = \{h \in G : h = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} a_{-s}g_{-s}, s \in \mathbb{N}, a_j = \overline{0, p-1}\},$$

$$H_0^{(s)} = \{h \in G : h = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} a_{-s}g_{-s}, a_j = \overline{0, p-1}\}, s \in \mathbb{N}.$$

При отображении Монна  $\lambda(H_0) = \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigsqcup \{0\}$  и  $\lambda(H_0^{(s)}) = \mathbb{N}_0 \cap [0, p^{s-1}]$ . Это означает, что  $H_0$  есть аналог множества  $\mathbb{N}_0$  целых неотрицательных чисел.

**Определение 1.** Определим отображение  $\mathcal{A}: G \rightarrow G$  равенством  $\mathcal{A}x := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_{n-1}$ ,

где  $x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n \in G$ . Так как каждый элемент  $x \in G$  однозначно представляется в виде  $x = \sum a_n g_n$ , то отображение  $\mathcal{A}: G \rightarrow G$  взаимно однозначно. Отображение  $\mathcal{A}$  называется оператором растяжения, если  $\mathcal{A}(x \dot{+} y) = \mathcal{A}x \dot{+} \mathcal{A}y$  для всех  $x, y \in G$ .

Отметим, что если  $G$  — группа Виленкина ( $p \cdot g_n = 0$ ) или группа всех  $p$ -адических чисел ( $p \cdot g_n = g_{n+1}$ ), то  $\mathcal{A}$  есть аддитивный оператор и, следовательно, оператор растяжения. Более того, если существуют фиксированные числа  $c_1, c_2, \dots, c_\tau = \overline{0, p-1}$  такие, что  $pg_n = c_1 g_{n+1} \dot{+} c_2 g_{n+2} \dot{+} \dots \dot{+} c_\tau g_{n+\tau}$ , тогда оператор  $\mathcal{A}$  будет аддитивным. Будем предполагать, что это условие выполнено. По определению положим  $(\chi \mathcal{A}, x) = (\chi, \mathcal{A}x)$ . Ясно, что  $\mathcal{A}g_n = g_{n-1}$ ,  $r_n \mathcal{A} = r_{n+1}$ ,  $\mathcal{A}G_n = G_{n-1}$ ,  $G_n^\perp \mathcal{A} = G_{n+1}^\perp$ .



**Лемма 1** ([10]). Для любой нульмерной группы:

$$\begin{aligned} 1) \int_{G_0^\perp} (\chi, x) d\nu(\chi) &= \mathbf{1}_{G_0}(x); & 2) \int_{G_0} (\chi, x) d\mu(x) &= \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi); \\ 3) \int_{G_n^\perp} (\chi, x) d\nu(\chi) &= p^n \mathbf{1}_{G_n}(x); & 4) \int_{G_n} (\chi, x) d\mu(x) &= \frac{1}{p^n} \mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi). \end{aligned}$$

**Лемма 2** ([10]). Пусть  $\chi_{n,s} = r_n^{\alpha_n} r_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \dots r_{n+s}^{\alpha_{n+s}}$  есть характер, не принадлежащий  $G_n^\perp$ . Тогда  $\int_{G_n^\perp \chi_{n,s}} (\chi, x) d\nu(\chi) = p^n (\chi_{n,s}, x) \mathbf{1}_{G_n}(x)$ .

**Лемма 3** ([10]). Пусть  $h_{n,s} = a_{n-1}g_{n-1} + a_{n-2}g_{n-2} + \dots + a_{n-s}g_{n-s} \notin G_n$ . Тогда  $\int_{G_n + h_{n,s}} (\chi, x) d\mu(x) = \frac{1}{p^n} (\chi, h_{n,s}) \mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi)$ .

**Определение 2** ([10]). Пусть  $M, N \in \mathbb{N}$ . Обозначим через  $\mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$  множество функций  $f \in L_2(G)$  таких, что: 1)  $\text{supp } f \subset G_{-N}$ ; 2)  $f$  постоянна на смежных классах  $G_M + g$ . Класс  $\mathfrak{D}_{G_{-N}}(G_M^\perp)$  определяется аналогично.

**Лемма 4** ([11]). Для любых фиксированных  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s = 0, 1, \dots, p-1$  множество  $H_0$  есть ортонормированный базис в  $L_2(G_0^\perp r_0^{\alpha_0} r_1^{\alpha_1} \dots r_s^{\alpha_s})$ .

**Лемма 5** ([11]). Пусть  $s \in \mathbb{N}$ . Для любых фиксированных  $\alpha_{-1}, \dots, \alpha_{-s} = \overline{0, p-1}$  семейство  $p^{\frac{s}{2}} \mathcal{A}^s H_0$  есть ортонормированный базис в  $L_2(G_{-s}^\perp r_{-s}^{\alpha_{-s}} \dots r_{-1}^{\alpha_{-1}})$ .

**Лемма 6.** Если  $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_0}(G_{-N})$ , то  $\varphi$  периодична с любым периодом  $g \in G_0$ .

Это очевидно.

Для данной функции  $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$  определяем подпространства

$$V_n = \overline{\text{span}\{\varphi(\mathcal{A}^n \cdot \dot{-} h), h \in H_0\}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Будем говорить, что подпространства  $\{V_n\}$  образуют КМА в  $L_2(G)$ , если выполнены условия

$$V_n \subset V_{n+1}, n \in \mathbb{Z}, \quad \overline{\cup_n V_n} = L_2(G), \quad \cap_n V_n = \{0\}.$$

Функцию  $\varphi \in L_2(G)$  называют *масштабирующей*, если

$$\varphi(x) = p \sum_{h \in H_0} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h) \tag{3}$$

для некоторой последовательности  $(\beta_h) \in l^2$ . Равенство (3) называют *масштабирующим уравнением*. В частотной форме равенство (3) имеет вид

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi) \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}), \quad m_0(\chi) = \sum_{h \in H_0} \beta_h \overline{\chi \mathcal{A}^{-1}, h},$$

где  $m_0$  — маска для (3).

**Лемма 7** ([11]). Если масштабирующая функция  $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$ ,  $M, N \in \mathbb{N}$ , то масштабирующее уравнение имеет вид

$$\varphi(x) = p \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h).$$



Если система сдвигов  $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$  образует ортонормированный базис в  $V_0$ , то КМА  $(V_n)$  называют ортогональным. Ортогональный КМА используют для построения ортогональных аффинных систем, которые образуют базис  $L_2(\mathbb{G})$ .

**Теорема 1 ([7]).** Пусть  $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_0}(G_{-N})$  — масштабирующая функция и  $|\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$ . Тогда  $\varphi$  порождает ортогональный КМА.

Условие  $|\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$  можно заменить на более слабое.

**Теорема 2.** Пусть  $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_0}(G_{-N})$  — масштабирующая функция, для которой  $\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp) = 1$  и  $|\hat{\varphi}(\chi)| \leq 1$ . Тогда  $\varphi$  порождает КМА.

**Доказательство.** 1. Покажем, что  $V_0 \subset V_1$ . Заметим, что  $\varphi$  периодична с любым периодом  $a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \dots \dot{+} a_\nu g_\nu$ . В частности, если  $x \in G_0 \dot{+} a_{-1} g_{-1} \dot{+} \dots \dot{+} a_{-s} g_{-s}$ , то  $(x \dot{+} a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \dots \dot{+} a_\nu g_\nu) \in G_0 \dot{+} a_{-1} g_{-1} \dot{+} a_{-2} g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} a_{-s} g_{-s}$ . Это означает, что

$$\varphi(x \pm (a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \dots \dot{+} a_\nu g_\nu)) = \varphi(x).$$

Пусть  $f \in V_0$ . По определению подпространства  $V_0$  для любого  $\varepsilon > 0$  существуют числа  $c_{0, \tilde{h}}$  такие, что

$$\|f(\cdot) - \sum_{\tilde{h} \in h_0^{(m)}} c_{0, \tilde{h}} \varphi(\cdot \dot{-} \tilde{h})\|_2 < \varepsilon. \quad (4)$$

Так как  $\varphi$  масштабирующая, то

$$\varphi(x \dot{-} \tilde{h}) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} \mathcal{A}\tilde{h} \dot{-} h). \quad (5)$$

Ввиду периодичности

$$\varphi(\mathcal{A}x \dot{-} \mathcal{A}\tilde{h} \dot{-} h) = \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} \alpha_{-1} g_{-1} \dot{-} \alpha_{-2} g_{-2} \dot{-} \dots \dot{-} \alpha_{-t} g_{-t})$$

для некоторых  $\alpha_j$ . Поэтому из (4) и (5) следует  $f \in V_1$ .

2. Покажем, что  $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \{0\}$ . Если  $f \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ , то  $f(x) = \text{const}$  на  $G_n$  для всех  $n$ . Из этого следует, что  $f(x) = 0$ .

3. Равенство  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n = L_2(G)$  следует из леммы 13. Теорема доказана.  $\square$

Можно выбрать маску  $m_0(\chi) \in \mathfrak{D}_{G_{-N}^\perp}(G_0^\perp)$  так, что  $m_0(G_{-N}^\perp) = 1$ ,  $|m_0(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$ . Тогда соответствующая масштабирующая функция  $\varphi$  порождает ортогональный КМА. В этом случае ортогональные вейвлеты  $\psi_\ell(x)$  определяются равенствами

$$\psi_\ell(x) = \sum_{h \in H_0} \beta_h^{(\ell)} \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h). \quad (6)$$

В частотной форме (6) записывается в виде

$$\hat{\psi}_\ell(\chi) = \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) m_\ell(\chi), \quad \ell = 1, 2, \dots, p-1,$$

где  $m_\ell(\chi) = m_0(\chi r_0^{-\ell})$ .

Система  $(\psi_\ell(x \dot{-} h))_{h \in H_0, \ell=1,2,\dots,p-1}$  есть ортогональный базис ортогонального дополнения  $V_1 \ominus V_0 = \{x \in V_1 : x \perp V_0\}$  [7].



Если сдвиги  $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$  не ортогональны, то можно пытаться выбрать функции  $\psi_\ell(x)$  так, чтобы для любой  $f \in L_2(G)$

$$f(x) = \sum_{\ell=1}^r \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{h \in H_0} (f, \psi_\ell(\mathcal{A}^n \cdot \dot{-} h)) \psi_\ell(\mathcal{A}^n x \dot{-} h).$$

В этом случае аффинная система  $\psi_\ell(\mathcal{A}^n x \dot{-} h)$  называется *фреймом Парсевалья* или *жестким вейвлет фреймом*.

В статье построены жесткие вейвлет фреймы на произвольной нульмерной локально компактной группе. Поскольку в произвольной нульмерной группе неизвестно, как ведет себя маска за пределами подгруппы  $G_1^\perp$ , рассматривается случай, когда масштабирующая функция  $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_{G_0}(G_{-N})$ , что эквивалентно  $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{G_{-N}^\perp}(G_0^\perp)$ .

## 2. Масштабирующие функции в нульмерных группах

В этом параграфе предложен способ построения масштабирующих функций  $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_0}(G_{-N})$ , т.е.  $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{G_{-N}^\perp}(G_0^\perp)$ .

Очевидно, что маска

$$m_0(\chi) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \overline{\beta_h(\chi, A^{-1}h)} \tag{7}$$

постоянна на смежных классах  $G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_{-N+s}^{\alpha_{-N+s}}$ .

Пусть  $m_0(G_0^\perp \mathcal{A}^{-N}) = 1$ . Тогда  $\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi) m_0(\chi \mathcal{A}^{-1}) \dots m_0(\chi \mathcal{A}^{-N})$ .

Обозначим значения маски на  $G_{-N}^\perp$  через

$$\lambda_j = \lambda_{\alpha_{-N} \alpha_{-N+1} \dots \alpha_0} := m_0(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \dots r_0^{\alpha_0}).$$

Здесь  $j = \alpha_{-N} + \alpha_{-N+1}p + \dots + \alpha_0 p^N$ .

Матрица  $p^{-\frac{N+1}{2}} \overline{\beta_h(\chi, A^{-1}h)}$  унитарна. Поэтому маска  $m_0$  определяется своими значениями на смежных классах

$$G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \dots r_0^{\alpha_0}. \tag{8}$$

Так как  $(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)$  постоянна на смежных классах (8), имеем

$$(\chi \mathcal{A}^{-1}, h) = (G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0}, a_{-1}g_0 \dot{+} a_{-2}g_{-1} \dot{+} \dots + a_{-N-1}g_{-N}) = A_{m,n},$$

где  $m = \alpha_{-N} + \alpha_{-N+1}p + \dots + \alpha_0 p^N$ ,  $n = a_{-1} + a_{-2}p + \dots + a_{-N-1}p^N$ .

Запишем равенство (7) в виде

$$\begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} & \dots & A_{0,p^{N+1}-1} \\ A_{1,0} & A_{1,1} & \dots & A_{1,p^{N+1}-1} \\ A_{2,0} & A_{2,1} & \dots & A_{2,p^{N+1}-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p^{N+1}-1,0} & A_{p^{N+1}-1,1} & \dots & A_{p^{N+1}-1,p^{N+1}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{p^{N+1}-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{p^{N+1}-1} \end{pmatrix}.$$



Для нахождения  $\lambda_j$  строим дерево  $T$  (рис. 1).

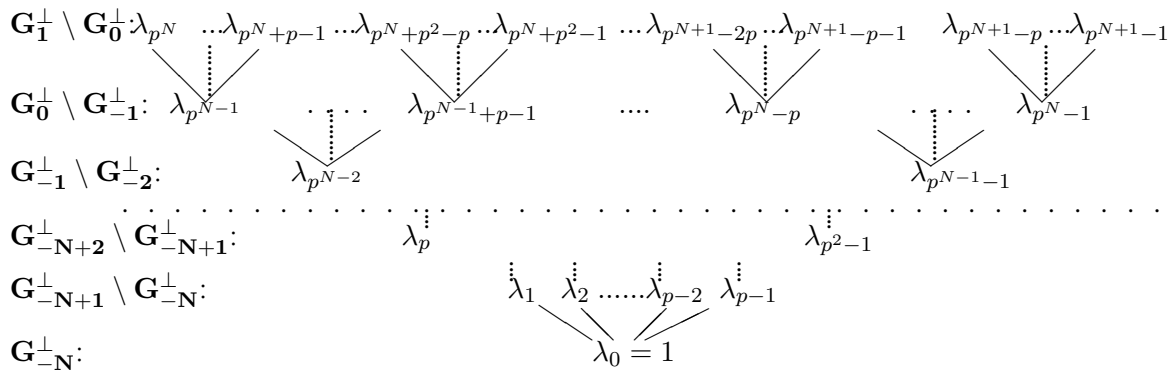


Рис. 1. Дерево  $T$  / Fig. 1. A tree  $T$

В этом дереве числа  $\lambda_{j_s} : p^{s-1} \leq j_s \leq p^s - 1, s \geq 0$  образуют  $s$ -й уровень. Для фиксированного числа  $s \in \mathbb{N}$  рассмотрим все пути  $\lambda_{j_s} \rightarrow \lambda_{j_{s-1}} \rightarrow \dots \rightarrow \lambda_{j_0} = \lambda_0$  от  $\lambda_{j_s}$  к корню  $\lambda_0$ . Множество всех произведений  $\lambda_{j_s} \lambda_{j_{s-1}} \dots \lambda_{j_0}$  состоит из всех значений функции  $\hat{\varphi}(\chi)$  на множестве  $G_{-N+s}^\perp \setminus G_{-N+s-1}^\perp$ .

1. Выберем числа  $\lambda_j$  так, что на каждом пути есть, по крайней мере, один ноль. Тогда  $\hat{\varphi}(G_1^\perp \setminus G_0^\perp) = 0$ .

2. Пусть  $M < N$  – фиксированные числа. Если все произведения  $\lambda_{j_{N-M+1}} \lambda_{j_{N-M}} \dots \times \lambda_{j_1} \lambda_{j_0} = 0$ , но существуют произведения  $\lambda_{j_{N-M}} \lambda_{j_{N-M-1}} \dots \lambda_{j_1} \lambda_{j_0} \neq 0$ , то  $\hat{\varphi}(G_{-M+1}^\perp \setminus G_{-M}^\perp) = 0$ . Это означает, что  $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{G_{-N}^\perp}(G_{-M}^\perp)$  но  $\hat{\varphi} \notin \mathfrak{D}_{G_{-N}^\perp}(G_{-M-1}^\perp)$ . В частности, для  $M = 0$  имеем  $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{G_{-N}^\perp}(G_0^\perp)$ .

Таким образом, имеем некоторый способ построения ступенчатых масштабирующих функций  $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_{-M}}(G_{-N})$ .

**Пример 1.** В дереве  $T$  положим  $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{p^{N-1}} = 1$  и  $\lambda_j = 0$  для  $p^N \leq j \leq p^{N+1} - 1$ . В этом случае маска  $m_0(\chi) = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$  и соответствующая масштабирующая функция  $\varphi(x) = \mathbf{1}_{G_0}(x)$  порождают ортогональный КМА. Вейвлеты  $\psi_\ell(x)$  определяются равенством [7]

$$\hat{\psi}_\ell(\chi) = \hat{\varphi}(\chi A^{-1}) m_\ell(\chi), \quad \ell = 1, 2, \dots, p - 1,$$

где  $m_\ell(\chi) = m_0(\chi r_0^{-\ell})$ .

**Пример 2.** Пусть  $p = 3, N = 1$ . Построим дерево (рис. 2).

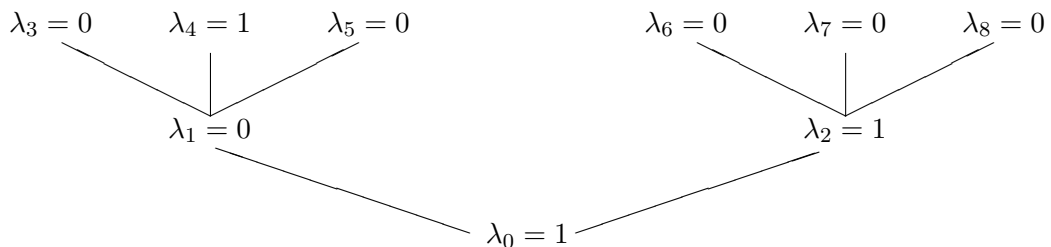


Рис. 2. Дерево  $T$  при  $p = 3, N = 1$

Fig. 2. A tree  $T$  for  $p = 3, N = 1$

Это дерево порождает маску  $m_0(\chi) = \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp} + \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp r_{-1}^2} + \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp r_{-1}^1 r_0^1}$  и масштабирующую функцию  $\hat{\varphi}(\chi) = \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp}(\chi) + \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp r_{-1}^2}(\chi) \neq \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$ . В разд. 3 покажем, что  $\varphi$  порождает неортогональный КМА и жесткий вейвлет фрейм.



### 3. Жесткие фреймы в нульмерных группах

Для функции  $\varphi \in L_2(G)$  используется стандартное обозначение

$$\varphi_{n,h} = p^{\frac{n}{2}} \varphi(\mathcal{A}^n \cdot \dot{-} h), \quad h \in H_0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**Лемма 8.** *Имеет место равенство*

$$\hat{\varphi}_{n,h}(\chi) = \frac{1}{p^{\frac{n}{2}}} \overline{(\chi \mathcal{A}^{-n}, h)} \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-n}).$$

**Лемма 9.** *Пусть  $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$  – масштабирующая функция, для которой  $\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp) = 1$ . Тогда*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{h \in H_0} |(f, \varphi_{n,h})|^2 \right) \geq \|f\|_2^2, \tag{9}$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \left( \sum_{h \in H_0} |(f, \varphi_{n,h})|^2 \right) = 0. \tag{10}$$

Если  $|\hat{\varphi}| \leq 1$ , то

$$\sum_{h \in H_0} |(f, \varphi_{n,h})|^2 \leq \|f\|_2^2, \tag{11}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{h \in H_0} |(f, \varphi_{n,h})|^2 \right) = \|f\|_2^2.$$

**Доказательство.** Обозначим

$$E_1 = \{\chi \in G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha-N} r_{-N+1}^{\alpha-N+1} \dots r_{-1}^{\alpha-1} : \hat{\varphi}(\chi) \neq 0\},$$

$$E_0 = \{\chi \in G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha-N} \dots r_{-1}^{\alpha-1} r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}} : \hat{\varphi}(\chi) \neq 0, \alpha_0 + \dots + \alpha_{M-1} \neq 0\}.$$

Для скалярного произведения  $(f, \varphi_{n,h})$  имеем

$$\begin{aligned} \left( \sum_{h \in H_0} |(f, \varphi_{n,h})|^2 \right)^{1/2} &= p^{\frac{n}{2}} \left( \sum_{h \in H_0} \left| \int_G f(x) \overline{\varphi(\mathcal{A}^n x \dot{-} h)} d\mu(x) \right|^2 \right)^{1/2} = \\ &= p^{\frac{n}{2}} \left( \sum_{h \in H_0} \left| \int_X \hat{f}(\chi) \frac{1}{p^n} (\chi \mathcal{A}^{-n}, h) \overline{\hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-n})} d\nu(\chi) \right|^2 \right)^{1/2} = \\ &= p^{\frac{n}{2}} \left( \sum_{h \in H_0} \left| \int_X p^n \hat{f}(\chi \mathcal{A}^n) \frac{1}{p^n} (\chi, h) \overline{\hat{\varphi}(\chi)} d\nu(\chi) \right|^2 \right)^{1/2} = \\ &= p^{\frac{n}{2}} \left( \sum_{h \in H_0} \left| \int_X \hat{f}(\chi \mathcal{A}^n)(\chi, h) \overline{\hat{\varphi}(\chi)} d\nu(\chi) \right|^2 \right)^{1/2} \geq \\ &\geq p^{\frac{n}{2}} \left( \sum_{h \in H_0} \left| \int_{E_1} \hat{f}(\chi \mathcal{A}^n)(\chi, h) \overline{\hat{\varphi}(\chi)} d\nu(\chi) \right|^2 \right)^{1/2} - \\ &- p^{\frac{n}{2}} \left( \sum_{h \in H_0} \left| \int_{E_0} \hat{f}(\chi \mathcal{A}^n)(\chi, h) \overline{\hat{\varphi}(\chi)} d\nu(\chi) \right|^2 \right)^{1/2} = \sum_1 - \sum_0. \end{aligned}$$



Используя равенство Парсеваля, вычисляем  $\sum_1$  :

$$\begin{aligned}
 \sum_1 &= p^{\frac{n}{2}} \left( \sum_{h \in H_0} \left| \int_{E_1} \hat{f}(\chi \mathcal{A}^n)(\chi, h) \overline{\hat{\varphi}(\chi)} d\nu(\chi) \right|^2 \right)^{1/2} = \\
 &= p^{\frac{n}{2}} \left( \sum_{h \in H_0} \left| \int_{G_0^\perp} \hat{f}(\chi \mathcal{A}^n) \overline{\hat{\varphi}(\chi)}(\chi, h) d\nu(\chi) \right|^2 \right)^{1/2} = \\
 &= p^{\frac{n}{2}} \left( \int_{G_0^\perp} |\hat{f}(\chi \mathcal{A}^n) \overline{\hat{\varphi}(\chi)}|^2 d\nu(\chi) \right)^{1/2} \geq p^{\frac{n}{2}} \left( \int_{G_{-N}^\perp} |\hat{f}(\chi \mathcal{A}^n)|^2 d\nu(\chi) \right)^{1/2} = \\
 &= \left( \int_{G_{-N}^\perp} |\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) \right)^{1/2} \rightarrow \|f\|_2 \quad (12)
 \end{aligned}$$

при  $n \rightarrow +\infty$ .

Теперь вычисляем сумму  $\sum_0$ . Используя инвариантность интеграла относительно сдвига и равенство  $\mathbf{1}_{G_0^\perp r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}}(\chi r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}) = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$ , получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_0 &= p^{\frac{n}{2}} \left( \sum_{h \in H_0} \left| \int_{E_0} \hat{f}(\chi \mathcal{A}^n)(\chi, h) \overline{\hat{\varphi}(\chi)} d\nu(\chi) \right|^2 \right)^{1/2} = \\
 &= p^{\frac{n}{2}} \left( \sum_{h \in H_0} \left| \int_{G_M^\perp \setminus G_0^\perp} \hat{f}(\chi \mathcal{A}^n)(\chi, h) \overline{\hat{\varphi}(\chi)} d\nu(\chi) \right|^2 \right)^{1/2} = \\
 &= p^{\frac{n}{2}} \left( \sum_{h \in H_0} \left| \int_X \mathbf{1}_{G_M^\perp \setminus G_0^\perp}(\chi) \hat{f}(\chi \mathcal{A}^n)(\chi, h) \overline{\hat{\varphi}(\chi)} d\nu(\chi) \right|^2 \right)^{1/2} = \\
 &= p^{\frac{n}{2}} \left( \sum_{h \in H_0} \left| \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_{M-1}} \int_X \mathbf{1}_{G_0^\perp r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}}(\chi) \hat{f}(\chi \mathcal{A}^n)(\chi, h) \overline{\hat{\varphi}(\chi)} d\nu(\chi) \right|^2 \right)^{1/2} = \\
 &= p^{\frac{n}{2}} \left( \sum_{h \in H_0} \left| \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_{M-1}} \int_X \mathbf{1}_{G_0^\perp r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}}(\chi r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}) \times \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \hat{f}(\chi r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}} \mathcal{A}^n)(\chi r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}, h) \overline{\hat{\varphi}(\chi r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})} d\nu(\chi) \right|^2 \right)^{1/2} = \\
 &= p^{\frac{n}{2}} \left( \sum_{h \in H_0} \left| \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_{M-1}} \int_{G_0^\perp} \hat{f}(\chi r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}} \mathcal{A}^n)(\chi r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}, h) \times \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \overline{\hat{\varphi}(\chi r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})} d\nu(\chi) \right|^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Применяя неравенство Минковского в правой части и учитывая равенство

$$|(r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}, h)| = 1,$$

имеем

$$\sum_0 \leq p^{\frac{n}{2}} \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_{M-1}} \left( \sum_{h \in H_0} \left| \int_{G_0^\perp} \hat{f}(\chi r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}} \mathcal{A}^n)(\chi r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}, h) \times \right. \right.$$





$$\begin{aligned} & \left. \times \overline{\hat{\varphi}(\chi r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}) d\nu(\chi)} \right|^2)^{1/2} = \\ & = p^{\frac{n}{2}} \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_{M-1}} \left( \sum_{h \in H_0} \left| \int_{G_0^\perp} \hat{f}(\chi r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}} \mathcal{A}^n) \overline{\hat{\varphi}(\chi r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})}(\chi, h) d\nu(\chi) \right|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Используя равенство Парсеваля для системы  $H_0$  на  $G_0^\perp$  и инвариантность интеграла, получаем окончательно

$$\begin{aligned} & \sum_0 \leq p^{\frac{n}{2}} \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_{M-1}} \left( \int_{G_0^\perp} |\hat{f}(\chi r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}} \mathcal{A}^n) \overline{\hat{\varphi}(\chi r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})}|^2 d\nu(\chi) \right)^{1/2} \leq \\ & \leq p^{\frac{n}{2}} \max |\hat{\varphi}| \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_{M-1}} \left( \int_{G_0^\perp} |\hat{f}(\chi r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}} \mathcal{A}^n)|^2 d\nu(\chi) \right)^{1/2} = p^{\frac{n}{2}} \max |\hat{\varphi}| \times \\ & \times \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_{M-1}} \left( \int_X \mathbf{1}_{G_0^\perp r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}}(\chi r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}) |\hat{f}(\chi r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}} \mathcal{A}^n)|^2 d\nu(\chi) \right)^{1/2} = \\ & = p^{\frac{n}{2}} \max |\hat{\varphi}| \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_{M-1}} \left( \int_X \mathbf{1}_{G_0^\perp r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}}(\chi) |\hat{f}(\chi \mathcal{A}^n)|^2 d\nu(\chi) \right)^{1/2} = \\ & = p^{\frac{n}{2}} \max |\hat{\varphi}| \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_{M-1}} \left( \frac{1}{p^n} \int_X \mathbf{1}_{G_0^\perp r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}}(\chi \mathcal{A}^{-n}) |\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) \right)^{1/2} = \\ & = \max |\hat{\varphi}| \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_{M-1}} \left( \int_X \mathbf{1}_{G_0^\perp r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}}(\chi \mathcal{A}^{-n}) |\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) \right)^{1/2} =: \max |\hat{\varphi}| S(n). \quad (13) \end{aligned}$$

Так как  $G_0^\perp r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}} \subset X \setminus G_0^\perp$ , то  $S(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ . В то же время

$$S(n) \leq \int_X \mathbf{1}_{G_0^\perp r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}}(\chi \mathcal{A}^{-n}) |\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) \leq \int_{G_M^\perp \mathcal{A}^n} |\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow -\infty$ . Используя (12) и (13), получаем (9), (10).

Если  $|\hat{\varphi}| \leq 1$ , то по аналогии с (12) имеем

$$\sum_1 \leq p^{\frac{n}{2}} \left( \int_{G_0^\perp} |\hat{f}(\chi \mathcal{A}^n)|^2 d\nu(\chi) \right)^{1/2} = \left( \int_{G_0^\perp \mathcal{A}^n} |\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) \right)^{1/2} \rightarrow \|\hat{f}\|_2.$$

при  $n \rightarrow +\infty$ , и лемма доказана. □

**Определение 3.** Пусть  $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_0}(G_{-N})$  — масштабирующая функция,  $\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp) = 1$  и  $|\hat{\varphi}| \leq 1$ . Квазиинтерполяционный многочлен определяется равенством

$$\mathcal{P}_n : f \mapsto \sum_{h \in H_0} (f, \varphi_{n,h}) \varphi_{n,h}$$

для произвольной  $f \in L_2(G)$ .

**Лемма 10.** Для любой функции  $f \in L_2(G)$   $\lim_{n \rightarrow -\infty} \mathcal{P}_n f = 0$ .



**Доказательство.** Так как  $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_0}(G_{-N})$  и  $|\hat{\varphi}| \leq 1$ , то

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{h \in H_0} b_h \varphi(x \cdot h) \right\|_2^2 &= \left\| \sum_{h \in H_0} b_h \hat{\varphi}(\chi) \overline{(\chi, h)} \right\|_2^2 = \int_X \left| \sum_{h \in H_0} b_h \hat{\varphi}(\chi) \overline{(\chi, h)} \right|^2 d\nu(\chi) = \\ &= \int_{G_0^\perp} |\hat{\varphi}(\chi)|^2 \sum_{h \in H_0} |b_h(\chi, h)|^2 d\nu(\chi) \leq \int_{G_0^\perp} \left| \sum_{h \in H_0} b_h(\chi, h) \right|^2 d\nu(\chi) = \sum_{h \in H_0} |b_h|^2 \end{aligned}$$

и

$$\left\| \sum_{h \in H_0} b_h \varphi_{n,h} \right\|_2 \leq \left( \sum_h |b_h|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

Это означает, что  $\varphi_{n,h}$  — бесселева система. Используя (10), получаем, что

$$\left\| \sum_{h \in H_0} (f, \varphi_{n,h}) \varphi_{n,h} \right\|_2 \leq \left( \sum_{h \in H_0} |(f, \varphi_{n,h})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow -\infty$ . □

**Лемма 11.** Имеет место оценка  $\|\mathcal{P}_n\| \leq 1$ .

**Доказательство.** Из (14) и (11) очевидно получаем

$$\|\mathcal{P}_n f\|_2 = \left\| \sum_{h \in H_0} (f, \varphi_{n,h}) \varphi_{n,h} \right\|_2 \leq \left( \sum_{h \in H_0} |(f, \varphi_{n,h})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_2. \quad \square$$

**Лемма 12.** Имеет место оценка  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathcal{P}_n f, f) = \|f\|^2$ .

**Доказательство.** Используя лемму 8, имеем

$$\widehat{\mathcal{P}_n(f)} = \frac{1}{p^{\frac{n}{2}}} \sum_{h \in H_0} (f, \varphi_{n,h}) \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-n}) \overline{(\chi \mathcal{A}^{-n}, h)}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в равенство

$$(\mathcal{P}_n f, f) = \int_X \widehat{\mathcal{P}_n(f)} \overline{\hat{f}} d\nu(\chi),$$

получаем

$$(\mathcal{P}_n f, f) = \frac{1}{p^{\frac{n}{2}}} \int_X \sum_{h \in H_0} (f, \varphi_{n,h}) \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-n}) \overline{(\chi \mathcal{A}^{-n}, h)} \overline{\hat{f}} d\nu(\chi).$$

Используя равенство

$$(f, \varphi_{n,h}) = p^{\frac{n}{2}} \int_G f(x) \overline{\varphi(\mathcal{A}^n x \cdot h)} d\mu(x) = \frac{1}{p^{\frac{n}{2}}} \int_X \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi \mathcal{A}^{-n})} (\xi \mathcal{A}^{-n}, h) d\nu(\xi),$$

получаем  $(\mathcal{P}_n f, f) =$

$$= \frac{1}{p^n} \int_X \sum_{h \in H_0} \int_X \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi \mathcal{A}^{-n})} (\xi \mathcal{A}^{-n}, h) d\nu(\xi) \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-n}) \overline{(\chi \mathcal{A}^{-n}, h)} \overline{\hat{f}} d\nu(\chi) =$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{p^n} \sum_{h \in H_0} \int_X \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-n}) \overline{(\chi \mathcal{A}^{-n}, h)} \overline{\hat{f}(\chi)} d\nu(\chi) \int_X \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi \mathcal{A}^{-n})} (\xi \mathcal{A}^{-n}, h) d\nu(\xi) = \\
 &= \frac{1}{p^n} \sum_{h \in H_0} \left| \int_X \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-n}) \overline{(\chi \mathcal{A}^{-n}, h)} \overline{\hat{f}(\chi)} d\nu(\chi) \right|^2 = \\
 &= p^n \sum_{h \in H_0} \left| \int_X \hat{\varphi}(\chi) \overline{(\chi, h)} \overline{\hat{f}(\chi \mathcal{A}^n)} d\nu(\chi) \right|^2 = \\
 &= p^n \sum_{h \in H_0} \left| \int_{G_0^\perp} \hat{\varphi}(\chi) \overline{(\chi, h)} \overline{\hat{f}(\chi \mathcal{A}^n)} d\nu(\chi) \right|^2.
 \end{aligned}$$

Используя равенство Парсеваля для системы  $H_0$  на  $G_0^\perp$ , имеем

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}_n f, f) &= p^n \int_{G_0^\perp} |\hat{\varphi}(\chi) \overline{\hat{f}(\chi \mathcal{A}^n)}|^2 d\nu(\chi) = p^n \int_X \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi) |\hat{\varphi}(\chi) \hat{f}(\chi \mathcal{A}^n)|^2 d\nu(\chi) = \\
 &= \int_X \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi \mathcal{A}^{-n}) |\hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-n}) \hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) = \int_{G_{0-N}^\perp} |\hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-n}) \hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) = \\
 &= \int_{G_n^\perp} |\hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-n}) \hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) = \int_{G_{n-N}^\perp} |\hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-n})|^2 |\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) + \\
 &\quad + \int_{G_n^\perp \setminus G_{n-N}^\perp} |\hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-n})|^2 |\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi).
 \end{aligned}$$

Так как  $\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp) = 1$  и  $|\hat{\varphi}| \leq 1$ , то

$$\int_{G_{n-N}^\perp} |\hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-n})|^2 |\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) = \int_{G_{n-N}^\perp} |\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) \rightarrow \|f\|_{L_2(X)}^2 = \|f\|_{L_2(G)}^2$$

и

$$\int_{G_n^\perp \setminus G_{n-N}^\perp} |\hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-n})|^2 |\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) \leq \int_{G_n^\perp \setminus G_{n-N}^\perp} |\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi) \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow +\infty$ . Это завершает доказательство леммы 12. □

**Лемма 13.**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}_n f = f$ .

**Доказательство.** Используя леммы 11 и 12, получаем

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathcal{P}_n f - f\|_{L_2(G)}^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \|\mathcal{P}_n f\|_{L_2(G)}^2 - 2(\mathcal{P}_n f, f) + \|f\|^2 \right) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \|\mathcal{P}_n f\|_{L_2(G)}^2 - \|f\|_{L_2(G)}^2 \right) \leq 0.
 \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Адаптируем унитарный принцип расширения для произвольной нульмерной группы. Запишем масштабирующее уравнение

$$\varphi(x) = p \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \varphi(Ax \dot{-} h)$$



в частотной форме

$$\hat{\varphi}(\chi) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)} = \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) m_0(\chi)$$

и определим функции

$$\psi_\ell(x) = p \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h^{(\ell)} \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h); \quad \ell = 1, 2, \dots, q-1, \quad q \geq p.$$

Имеем в частотной форме

$$\hat{\psi}_\ell(\chi) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h^{(\ell)} \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)} = \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) m_\ell(\chi),$$

где

$$\sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h^{(\ell)} \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)} = m_\ell(\chi).$$

Обозначим

$$\psi_{\ell, n, h}(x) = p^{\frac{n}{2}} \psi_\ell(\mathcal{A}^n x \dot{-} h), \quad \mathcal{P}_{n, \ell}(f) = \sum_{h \in H_0} (f, \psi_{\ell, n, h}) \psi_{\ell, n, h}.$$

**Лемма 14.** Пусть  $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_0}(G_{-N})$  — масштабирующая функция с маской  $m_0$ ,  $|\hat{\varphi}| \leq 1$  и  $\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp) = 1$ . Пусть  $(m_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$  — совокупность масок, удовлетворяющих условиям:

- 1)  $\sum_{\ell=0}^{q-1} |m_\ell(\chi)|^2 = 1$  в тех точках  $\chi$ , где  $\hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \neq 0$ ;
- 2)  $\sum_{\ell=0}^{q-1} m_\ell(\xi) \overline{m_\ell(\chi)} = 0$  в тех точках  $\chi \in G_0^\perp r_0^k$ ,  $\xi \in G_0^\perp r_0^j$ ,  $k \neq j$ , где  $\hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \times \hat{\varphi}(\xi \mathcal{A}^{-1}) \neq 0$ .

Тогда

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n-1} + \sum_{\ell=1}^{q-1} \sum_{h \in H_0} (f, \psi_{\ell, n-1, h}) \psi_{\ell, n-1, h}. \quad (16)$$

**Доказательство.** Обозначим  $\psi_0 = \varphi$  и запишем равенство (16) в виде

$$\mathcal{P}_n(f) = \sum_{\ell=0}^{q-1} \mathcal{P}_{n-1, \ell}(f)$$

и в частотной форме

$$\widehat{\mathcal{P}_n(f)} = \sum_{\ell=0}^{q-1} \widehat{\mathcal{P}_{n-1, \ell}(f)}. \quad (17)$$

Так как  $\mathcal{P}_{n, \ell} = \mathcal{D}^n \mathcal{P}_{0, \ell} \mathcal{D}^{-n}$ , нам достаточно доказать (17) только для  $n = 1$ , т. е.

$$\widehat{\mathcal{P}_1(f)} = \sum_{\ell=0}^{q-1} \widehat{\mathcal{P}_{0, \ell}(f)}.$$



Напомним, что

$$\mathcal{P}_1(f) = \sum_{h \in H_0} (f, \varphi_{1,h}) \varphi_{1,h} = \sum_{h \in H_0} (f, \varphi_{1,h}) p^{\frac{1}{2}} \varphi(\mathcal{A}x - h).$$

Найдем преобразование Фурье для  $\mathcal{P}_1(f)$  (здесь  $\chi \in G_1^\perp$ )

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{P}_1(f)} &= p^{\frac{1}{2}} \sum_{h \in H_0} (f, \varphi_{1,h}) \widehat{\varphi_{1,h}}(\chi) = p^{\frac{1}{2}} \sum_{h \in H_0} (f, \varphi_{1,h}) \frac{1}{p} \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)} \widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) = \\ &= \widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \sum_{h \in H_0} \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)} \int_G f(x) \overline{\varphi(\mathcal{A}x - h)} d\mu(x) = \\ &= \widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \sum_{h \in H_0} \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)} \int_X \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\varphi_{1,h}}(\xi)} d\nu(\xi) = \\ &= \widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \sum_{h \in H_0} \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)} \int_X \widehat{f}(\xi) \frac{1}{p} \overline{\widehat{\varphi}(\xi \mathcal{A}^{-1})}(\xi \mathcal{A}^{-1}, h) d\nu(\xi) = \\ &= \widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \sum_{h \in H_0} \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)} \int_X \widehat{f}(\xi \mathcal{A}) \overline{\widehat{\varphi}(\xi)}(\xi, h) d\nu(\xi) = \\ &= \widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \sum_{h \in H_0} \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)} \int_{G_0^\perp} \widehat{f}(\xi \mathcal{A}) \overline{\widehat{\varphi}(\xi)}(\xi, h) d\nu(\xi) = \\ &= \widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \widehat{f}(\chi \mathcal{A}^{-1} \mathcal{A}) \overline{\widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1})} = |\widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1})|^2 \widehat{f}(\chi). \end{aligned}$$

В предпоследнем равенстве использовали тот факт, что  $H_0$  есть ортонормированный базис в  $L_2(G_0^\perp)$ . Найдем преобразование Фурье для  $\mathcal{P}_{0,\ell}(f) = \sum_{h \in H_0} (f, \psi_{\ell,0,h}) \psi_{\ell,0,h}$ .

По определению  $\psi_\ell$  имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{P}_{0,\ell}(f)} &= \sum_{h \in H_0} (f, \psi_{\ell,0,h}) \widehat{\psi_{\ell,0,h}} = \sum_{h \in H_0} (f, \psi_{\ell,0,h}) \int_G \psi_\ell(x - h) \overline{(\chi, x)} d\mu(x) = \\ &= \widehat{\psi}_\ell(\chi) \sum_{h \in H_0} (f, \psi_{\ell,0,h}) \overline{(\chi, h)} = \widehat{\psi}_\ell(\chi) \sum_{h \in H_0} \overline{(\chi, h)} \int_G f(x) \psi_\ell(x - h) d\mu(x) = \\ &= \widehat{\psi}_\ell(\chi) \sum_{h \in H_0} \overline{(\chi, h)} \int_X \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\psi}_\ell(\xi)}(\xi, h) d\nu(\xi) = \\ &= \widehat{\psi}_\ell(\chi) \sum_{h \in H_0} \overline{(\chi, h)} \int_X \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\varphi}(\xi \mathcal{A}^{-1})} m_\ell(\xi)(\xi, h) d\nu(\xi) = \\ &= \widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) m_\ell(\chi) \sum_{h \in H_0} \overline{(\chi, h)} \int_X \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\varphi}(\xi \mathcal{A}^{-1})} m_\ell(\xi)(\xi, h) d\nu(\xi). \end{aligned}$$

Пусть  $\chi \in G_0^\perp r_0^j$ ,  $j = \overline{0, p-1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\ell} \widehat{\mathcal{P}_{0,\ell}(f)} &= \\ &= \widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \sum_{h \in H_0} \overline{(\chi, h)} \int_X (\xi, h) \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\varphi}(\xi \mathcal{A}^{-1})} \sum_{\ell=0}^{q-1} \overline{m_\ell(\xi)} m_\ell(\chi) d\nu(\xi) = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \sum_{h \in H_0} \overline{(\chi, h)} \int_{G_0^\perp} (\xi, h) \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi \mathcal{A}^{-1})} \sum_{\ell=0}^{q-1} \overline{m_\ell(\xi)} m_\ell(\chi) d\nu(\xi) = \\
 &= \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \sum_{h \in H_0} \sum_{k=0}^{p-1} \overline{(\chi, h)} \int_{G_0^\perp r_0^k} (\xi, h) \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi \mathcal{A}^{-1})} \sum_{\ell=0}^{q-1} \overline{m_\ell(\xi)} m_\ell(\chi) d\nu(\xi) = \\
 &= \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \sum_{h \in H_0} \overline{(\chi, h)} \int_{G_0^\perp r_0^j} (\xi, h) \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi \mathcal{A}^{-1})} \sum_{\ell=0}^{q-1} \overline{m_\ell(\xi)} m_\ell(\chi) d\nu(\xi) + \\
 &+ \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \sum_{h \in H_0} \sum_{k \neq j} \overline{(\chi, h)} \int_{G_0^\perp r_0^k} (\xi, h) \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi \mathcal{A}^{-1})} \sum_{\ell=0}^{q-1} \overline{m_\ell(\xi)} m_\ell(\chi) d\nu(\xi).
 \end{aligned}$$

Так как  $H_0$  есть ортонормированный базис в  $L_2(G_0^\perp r_0^j)$ , то

$$\sum_{h \in H_0} \overline{(\chi, h)} \int_{G_0^\perp r_0^j} (\xi, h) \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi \mathcal{A}^{-1})} \sum_{\ell=0}^{q-1} \overline{m_\ell(\xi)} m_\ell(\chi) d\nu(\xi) = \hat{f}(\chi) \overline{\hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1})} \sum_{\ell=0}^{q-1} \overline{m_\ell(\chi)} m_\ell(\chi).$$

Используя второе условие леммы, имеем

$$\sum_{h \in H_0} \sum_{k \neq j} \overline{(\chi, h)} \int_{G_0^\perp r_0^k} (\xi, h) \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi \mathcal{A}^{-1})} \sum_{\ell=0}^{q-1} \overline{m_\ell(\xi)} m_\ell(\chi) d\nu(\xi) = 0.$$

Используя первое условие леммы, получаем окончательно

$$\sum_{\ell} \widehat{\mathcal{P}_{0,\ell}(f)} = \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \hat{f}(\chi) \overline{\hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1})} \sum_{\ell=0}^{q-1} \overline{m_\ell(\chi)} m_\ell(\chi) = |\hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1})|^2 \hat{f}(\chi).$$

Таким образом, равенство

$$\widehat{\mathcal{P}_1(f)} = \sum_{\ell=0}^{q-1} \widehat{\mathcal{P}_{0,\ell}(f)}$$

доказано. □

**Теорема 3.** Пусть маска  $m_0$  и масштабирующая функция  $\varphi$  построены по порождающему дереву  $\Gamma$ . Пусть  $(m_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$  — семейство масок, удовлетворяющих условиям:

- 1)  $\sum_{\ell=0}^{q-1} |m_\ell(\chi)|^2 = 1$  в тех точках  $\chi$ , где  $\hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \neq 0$ ;
- 2)  $\sum_{\ell=0}^{q-1} \overline{m_\ell(\xi)} m_\ell(\chi) = 0$  в тех точках  $\chi \in G_0^\perp r_0^k$ ,  $\xi \in G_0^\perp r_0^j$ ,  $k \neq j$ , где  $\hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \times \overline{\hat{\varphi}(\xi \mathcal{A}^{-1})} \neq 0$ .

Используя эти маски, определим функции  $\psi_\ell(x)$ ,  $\ell = 1, \dots, q-1$  равенствами

$$\hat{\psi}_\ell(\chi) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h^{(\ell)} \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \overline{\hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)} = \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) m_\ell(\chi).$$

Тогда аффинная система

$$\psi_{\ell,n,h}(x) = p^{\frac{n}{2}} \psi_\ell(\mathcal{A}^n x - h), \quad \ell = 1, \dots, q-1, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad h \in H_0,$$

образует жесткий фрейм в  $L_2(G)$ .

**Доказательство.** Применяя (16) последовательно, имеем

$$\mathcal{P}_n f = \mathcal{P}_{n'} f + \sum_{\ell=1}^{q-1} \sum_{j=n'}^{n-1} \sum_{h \in H_0} (f, \phi_{\ell,j,h}) \phi_{\ell,j,h}.$$

Устремляя  $n' \rightarrow -\infty$  и используя лемму 10, имеем

$$\mathcal{P}_n f = \sum_{\ell=1}^{q-1} \sum_{j < n} \sum_{h \in H_0} (f, \phi_{\ell,j,h}) \phi_{\ell,j,h}. \tag{18}$$

Устремляя  $n \rightarrow +\infty$  в обеих частях равенства (18), имеем для любой  $f \in L_2(G)$

$$f = \sum_{\ell=1}^{q-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{h \in H_0} (f, \phi_{\ell,n-1,h}) \phi_{\ell,n-1,h}.$$

Это доказывает, что система  $(\psi_{\ell,n,h}(x))_{\ell=1,\dots,q-1}$  есть жесткий фрейм. □

**Следствие 1.** Пусть  $G_{-N}^\perp \chi_\ell$  ( $\ell = \overline{1, q-1}$ ) смежные классы, для которых  $m_0(G_{-N}^\perp \chi_\ell) = 0$  и  $\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp \chi_\ell \mathcal{A}^{-1}) \neq 0$ . Определим маски  $m_\ell$  и вейвлеты  $\psi_\ell$  равенствами

$$m_\ell(\chi) = \mathbf{1}_{G_{-N}^\perp \chi_\ell}(\chi) \quad (\ell = \overline{1, q-1}), \quad \hat{\psi}_\ell(\chi) = m_\ell(\chi) \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}).$$

Тогда вейвлеты  $(\psi_\ell)$  ( $\ell = \overline{1, q-1}$ ) порождают жесткий фрейм.

Вернемся к примеру 2 из разд. 3, в котором построены маска

$$m_0(\chi) = \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp}(\chi) + \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp r_{-1}^2}(\chi) + \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp r_{-1}^1 r_0^1}(\chi)$$

и преобразование Фурье масштабирующей функции

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi) m_0(\chi \mathcal{A}^{-1}) = \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp}(\chi) + \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp r_{-1}^2}(\chi).$$

Нарисуем графики для  $m_0$  и  $\hat{\varphi}$  (рис. 3–5).

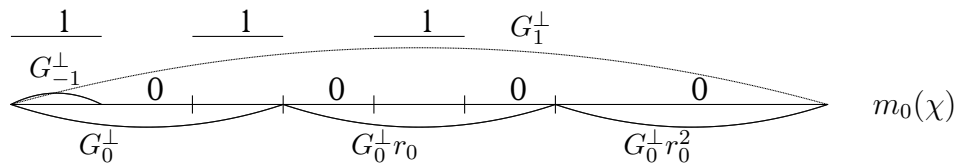


Рис. 3. Маска  $m_0(\chi)$  / Fig. 3. The mask  $m_0(\chi)$

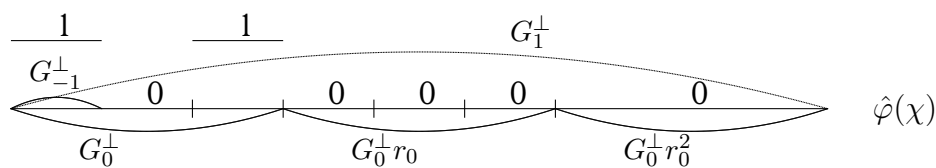


Рис. 4. Преобразование Фурье  $\hat{\varphi}(\chi)$  / Fig. 4. The Fourier transform  $\hat{\varphi}(\chi)$

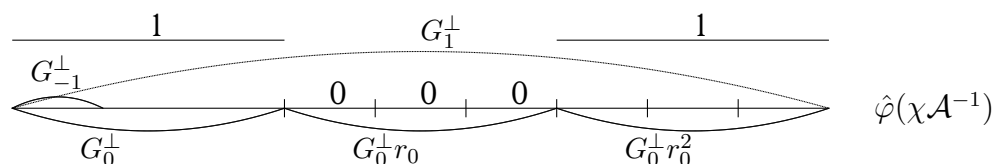


Рис. 5. Преобразование Фурье  $\hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1})$   
 Fig. 5. The Fourier transform  $\hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1})$

Воспользуемся следствием и определим маски следующим образом:

$$m_1(\chi) = \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp r_{-1}}(\chi), \quad m_2(\chi) = \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp r_0^2}(\chi), \\ m_3(\chi) = \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp r_0^2 r_{-1}}(\chi), \quad m_4(\chi) = \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp r_0^2 r_{-1}^2}(\chi).$$

Соответствующие вейвлеты  $\psi_\ell$ ,  $\ell = \overline{1, 4}$  порождают жесткий фрейм.

## Заключение

В статье изложен метод построения жестких фреймов в произвольной локально компактной нульмерной группе, основанный на принципе унитарного расширения (теорема 3).

## Список литературы

1. Mathematics in Image Processing / ed. by H. Zhao. 2013. 245 p. (IAS/Park City Mathematics Series. Vol. 19). <https://doi.org/10.1090/pcms/019>
2. Ron A., Shen Z. Affine systems in  $L_2(\mathbb{R}^d)$ : The analysis of the analysis operator // Journal of Functional Analysis. 1997. Vol. 148, iss. 2. P. 408–447. <https://doi.org/10.1006/jfan.1996.3079>
3. Farkov Y., Lebedeva E., Skopina M. Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties // International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing. 2015. Vol. 13, iss. 5. 1550036 (19 p.) <https://doi.org/10.1142/S0219691315500368>
4. Shah F. A., Debnath L. Tight wavelet frames on local fields // Analysis. 2013. Vol. 33, iss. 3. P. 293–307. <https://doi.org/10.1524/anly.2013.1217>
5. Ahmad O., Bhat M. Y., Sheikh N. A. Construction of Parseval framelets associated with GMRA on local fields of positive characteristic // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2021. Vol. 42, iss. 3. P. 344–370. <https://doi.org/10.1080/01630563.2021.1878370>
6. Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M.  $p$ -adic multiresolution analysis and wavelet frames // Journal of Fourier Analysis and Applications. 2010. Vol. 16. P. 693–714. <https://doi.org/10.1007/s00041-009-9118-5>
7. Лукомский С. Ф. Кратномасштабный анализ на нульмерных группах и всплесковые базисы // Математический сборник. 2010. Т. 201, № 5. С. 41–64. <https://doi.org/10.4213/sm7580>
8. Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. Баку : Элм, 1981. 180 с.
9. Albeverio S., Khrennikov A. Yu, Shelkovich V. M. Theory of  $p$ -adic Distributions: Linear and Nonlinear Models. Cambridge : Cambridge University Press, 2010. 351 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139107167>





10. Lukomskii S. F. Step refinable functions and orthogonal MRA on  $p$ -adic Vilenkin groups // *Journal of Fourier Analysis and Applications*. 2014. Vol. 20, iss. 1. P. 42–65. <https://doi.org/10.1007/s00041-013-9301-6>
11. Lukomskii S., Vodolazov A.  $p$ -adic tight wavelet frames. 12 mar 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.06352>

### References

1. Zhao H. (ed.). *Mathematics in Image Processing*. IAS/Park City Mathematics Series, 2013. Vol. 19. 245 p. <https://doi.org/10.1090/pcms/019>
2. Ron A., Shen Z. Affine systems  $L_2(\mathbb{R}^d)$ : The analysis of the analysis operator. *Journal of Functional Analysis*, 1997, vol. 148, iss. 2, pp. 408–447. <https://doi.org/10.1006/jfan.1996.3079>
3. Farkov Y., Lebedeva E., Skopina M. Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 2015, vol. 13, iss. 5, 1550036 (19 p). <https://doi.org/10.1142/S0219691315500368>
4. Shah F. A., Debnath L. Tight wavelet frames on local fields. *Analysis*, 2013, vol. 33, iss. 3, pp. 293–307. <https://doi.org/10.1524/anly.2013.1217>
5. Ahmad O., Bhat M. Y., Sheikh N. A. Construction of Parseval framelets associated with GMRA on local fields of positive characteristic. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2021, vol. 42, iss. 3, pp. 344–370. <https://doi.org/10.1080/01630563.2021.1878370>
6. Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M.  $p$ -adic multiresolution analysis and wavelet frames. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2010, vol. 16, pp. 693–714. <https://doi.org/10.1007/s00041-009-9118-5>
7. Lukomskii S. F. Multiresolution analysis on zero-dimensional Abelian groups and wavelets bases. *Sbornik: Mathematics*, 2010, vol. 201, iss. 5, pp. 669–691. <https://doi.org/10.1070/SM2010v201n05ABEH004088>
8. Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzafarli G. M., Rubinstein A. I. *Mul'tiplikativnye sistemy funktsij i garmonicheskij analiz na nul'mernykh gruppakh* [Multiplicative Systems of Functions and Harmonic Analysis on Zero-Dimensional Groups]. Baku, Elm, 1981. 180 p. (in Russian).
9. Albeverio S., Khrennikov A. Yu, Shelkovich V. M. *Theory of  $p$ -adic Distributions: Linear and Nonlinear Models*. Cambridge, Cambridge University Press, 2010. 351 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139107167>
10. Lukomskii S. F. Step refinable functions and orthogonal MRA on  $p$ -adic Vilenkin groups. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2014, vol. 20, iss. 1, pp. 42–65. <https://doi.org/10.1007/s00041-013-9301-6>
11. Lukomskii S., Vodolazov A.  $P$ -adic tight wavelet frames. 12 mar 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.06352>

Поступила в редакцию / Received 16.06.2022

Принята к публикации / Accepted 22.11.2022

Опубликована / Published 31.08.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 339–347  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 339–347  
[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru) <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-339-347>, EDN: BUXAKG

Научная статья  
УДК 517.518.153

## О функциях типа ван дер Вардена

А. И. Рубинштейн, Д. С. Теляковский<sup>✉</sup>

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Россия, 115409, г. Москва, Каширское ш., д. 31

**Рубинштейн Александр Иосифович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, [rubinshtein\\_aleksandr@mail.ru](mailto:rubinshtein_aleksandr@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0001-8863-5438>, AuthorID: 14669

**Теляковский Дмитрий Сергеевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, [dtelyakov@mail.ru](mailto:dtelyakov@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-1579-2154>, AuthorID: 14223

**Аннотация.** Пусть  $\omega(t)$  — произвольная функция типа модуля непрерывности, у которой  $\omega(t)/t \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +0$ . Для  $\omega(t)$  на отрезке  $[0; 1]$  построена непрерывная нигде не дифференцируемая функция  $V_\omega(x)$  типа ван дер Вардена, для которой выполнены следующие условия: 1) модуль непрерывности функции  $V_\omega(x)$  удовлетворяет оценке  $O(\omega(t))$  при  $t \rightarrow +0$ ; 2) найдется число  $c > 0$ , для которого в каждой точке  $x_0$  при  $x \rightarrow x_0$  выполнено  $\limsup |V_\omega(x) - V_\omega(x_0)|/\omega(|x - x_0|) > c$ ; 3) в каждой точке  $x_0$  при  $x \rightarrow x_0$  выполнено  $\liminf |V_\omega(x) - V_\omega(x_0)|/\omega(|x - x_0|) = 0$ .

**Ключевые слова:** модуль непрерывности, нигде не дифференцируемая функция, функция типа ван дер Вардена

**Для цитирования:** Рубинштейн А. И., Теляковский Д. С. О функциях типа ван дер Вардена // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 339–347. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-339-347>, EDN: BUXAKG

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## On functions of van der Waerden type

A. I. Rubinstein, D. S. Telyakovskii<sup>✉</sup>

National Research Nuclear University MEPHI, 31 Kashirskoe shosse, Moscow 115409, Russia

**Aleksandr I. Rubinstein**, [rubinshtein\\_aleksandr@mail.ru](mailto:rubinshtein_aleksandr@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0001-8863-5438>, AuthorID: 14669

**Dmitrii S. Telyakovskii**, [dtelyakov@mail.ru](mailto:dtelyakov@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-1579-2154>, AuthorID: 14223

**Abstract.** Let  $\omega(t)$  be an arbitrary modulus of continuity type function, such that  $\omega(t)/t \rightarrow +\infty$ , as  $t \rightarrow +0$ . We construct a continuous nowhere-differentiable function  $V_\omega(x)$ ,  $x \in [0; 1]$ , that



satisfies the following conditions: 1) its modulus of continuity satisfies the estimate  $O(\omega(t))$  as  $t \rightarrow +0$ ; 2) for some positive  $c$  at each point  $x_0$  holds  $\limsup |V_\omega(x) - V_\omega(x_0)|/\omega(|x - x_0|) > c$  as  $x \rightarrow x_0$ ; 3) at each point  $x_0$  holds  $\liminf |V_\omega(x) - V_\omega(x_0)|/\omega(|x - x_0|) = 0$  as  $x \rightarrow x_0$ .

**Keywords:** modulus of continuity, nowhere-differentiable function, van der Waerden type function

**For citation:** Rubinstein A. I., Telyakovskii D. S. On functions of van der Waerden type. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 339–347 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-339-347>, EDN: BUXAKG

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Пусть функция  $\omega(t)$  на отрезке  $[0; 1]$  удовлетворяет критерию С. М. Никольского модуля непрерывности в пространстве непрерывных функций

$$\begin{aligned} 0 = \omega(0) < \omega(t) \quad \text{при } t > 0; \\ \omega(t_1) \leq \omega(t_2), \quad \omega(t_1 + t_2) \leq \omega(t_1) + \omega(t_2) \quad \text{при } t_2 \geq t_1 > 0; \end{aligned} \tag{1}$$

и

$$H^\omega = \left\{ f(x) : \omega_f(\delta) = \sup_{\substack{0 < h \leq \delta \\ 0 \leq x < x+h \leq 1}} |f(x+h) - f(x)| = O(\omega(\delta)) \right\}$$

— класс Никольского – Гельдера. Будем рассматривать только такие  $\omega(t)$ , что

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\omega(t)}{t} = \infty. \tag{2}$$

Как показал С. Б. Стечкин<sup>1</sup>, для любого модуля непрерывности  $\omega(t)$  существует выпуклая вверх функция  $\hat{\omega}(t)$  такая, что  $\omega(t) \leq \hat{\omega}(t) \leq 2\omega(t)$ . Очевидно, что  $\hat{\omega}(t)$  удовлетворяет условиям (1). Поэтому, не ограничивая общности, функцию  $\omega(t)$  можно считать выпуклой вверх.

В настоящей работе строится пример функции  $V_\omega(x) \in H^\omega$  типа функции ван дер Вардена<sup>2</sup>, которая при некотором положительном значении  $c$  удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \limsup_{h \rightarrow 0, x+h \in [0;1]} \frac{|V_\omega(x+h) - V_\omega(x)|}{\omega(|h|)} > c \quad \text{при всех } x \in [0; 1]; \\ \liminf_{h \rightarrow 0, x+h \in [0;1]} \frac{|V_\omega(x+h) - V_\omega(x)|}{\omega(|h|)} = 0 \quad \text{при всех } x \in [0; 1]. \end{cases} \tag{3}$$

В работе А. И. Рубинштейна [5] был построен пример функции  $f(x) \in H^\omega$ , для которой в каждой точке выполнено первое из условий (3) и доказано, что при предположении (2) второе из условий (3) выполняется почти всюду для любой функции из  $H^\omega$ . В работе [5] соответствующий пример, как и в классическом примере К. Вейерштрасса [6] непрерывной нигде не дифференцируемой функции, был получен как сумма равномерно сходящегося лакунарного тригонометрического ряда. Пример из

<sup>1</sup>Лемма С. Б. Стечкина с согласия ее автора была впервые опубликована в работе А. В. Ефимова [1, с. 78, лемма 4].

<sup>2</sup>Похоже, что первый пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции принадлежит Б. Больцано [2] (Boltsano, около 1830 г.). Используя ту же идею, что и Б. Больцано, но независимо от него и друг от друга, примеры непрерывных нигде не дифференцируемых функций дали Т. Такаги [3] (Takagi, 1903 г.) и ван дер Варден [4] (van der Waerden, 1930 г.). Наибольшую известность получил пример ван дер Вардена.



настоящей работы получен как сумма лакунарного ряда пилообразных функций и следует примеру ван дер Вардена. Аналог функции  $V_\omega(x)$ , построенной в настоящей работе, использовался в работе Д. С. Теляковского [7] по теории моногенности. Примеры функций, которые удовлетворяют условию, аналогичному первому из условий (3), были получены в работах А. С. Белова [8] и Ю. С. Мишуры, А. Шида [9], при этом у А. С. Белова соответствующий пример дает сумма лакунарного тригонометрического ряда, а в работе Ю. С. Мишуры и А. Шида — лакунарного ряда пилообразных функций типа Такаги – ван дер Вардена.

Для построения функции  $V_\omega(x)$  покажем сначала, что существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел  $\{n_k\}$ , для которой при каждом  $k > 1$  выполнены неравенства

$$\sum_{s=1}^{k-1} 2^{n_s} \omega(2^{-n_s}) < \frac{1}{k} \frac{\omega(2^{-n_k})}{2^{-n_k}}, \quad \sum_{s=k+1}^{\infty} \omega(2^{-n_s}) < \frac{1}{k} \omega(2^{-n_k}). \quad (4)$$

Последовательно определим числа  $n_k$ . Положим  $n_1 := 1$ . Пусть числа  $n_s$  при всех номерах  $s < k$  уже определены. Определим величину  $n_k$ . Сумма  $\sum_{s=1}^{k-1} 2^{n_s} \omega(2^{-n_s})$  имеет конечное значение, а величина  $\frac{\omega(2^{-n_k})}{2^{-n_k}} \rightarrow +\infty$  при  $n_k \rightarrow \infty$ . Поэтому для всех достаточно больших  $n_k$  выполнено первое неравенство (4).

При рассмотрении второго неравенства (4) надо иметь в виду, что стоящее в правой части неравенства (4) значение  $n_k$  должно быть определено до того, как определены величины  $n_s$ , стоящие в левой части (4). Это возможно, если номера  $n_k$  удовлетворяют некоторым дополнительным условиям. Определим эти условия.

При каждом натуральном  $k > 1$  второе неравенство (4) можно записать так:

$$\frac{1}{k} \omega(2^{-n_k}) = \frac{1}{k} \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \right) \omega(2^{-n_k}) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\omega(2^{-n_k})}{2^j} > \sum_{s=k+1}^{\infty} \omega(2^{-n_s}) = \sum_{j=1}^{\infty} \omega(2^{-n_{k+j}}),$$

т. е.

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\omega(2^{-n_k})}{2^j} > \sum_{j=1}^{\infty} \omega(2^{-n_{k+j}}).$$

Поэтому для выполнения при каждом  $k$  второго неравенства (4) достаточно, чтобы для всех  $k$  и  $j$  выполнялось

$$\frac{1}{k} \frac{\omega(2^{-n_k})}{2^j} > \omega(2^{-n_{k+j}}). \quad (5)$$

Номера  $n_k$  в левой части неравенства (5) меньше номеров  $n_{k+j}$  в правой части (5), поэтому, если обозначить  $m := k + j$ , то эти соотношения примут вид

$$\omega(2^{-n_m}) < \frac{1}{m-j} \frac{\omega(2^{-n_{m-j}})}{2^j}, \quad j = 1, \dots, m-1, \quad k \in \mathbb{N},$$

а после замены  $m$  на  $k$  и  $m-j$  на  $j$  эти соотношения запишутся так:

$$\omega(2^{-n_k}) < \frac{1}{j} \frac{\omega(2^{-n_j})}{2^{k-j}}, \quad j = 1, \dots, k-1, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (6)$$



Для каждого номера  $k$  получено  $k$  неравенств, которым должны удовлетворять величины  $\omega(2^{-n_k})$  для того, чтобы были выполнены условия (4). Это самое первое неравенство (4), которое выполнено при всех достаточно больших значениях  $n_k$  и система из  $k - 1$  неравенства (6), каждое из которых тоже выполнено при достаточно больших  $n_k$ . Поэтому, если выбрать  $n_k$  достаточно большими, то все неравенства (4) будут выполнены.

Существование строго возрастающей последовательности натуральных чисел  $\{n_k\}$ , для которой при каждом  $k > 1$  выполнены неравенства (4), установлено.

Функцию  $V_\omega(x)$  определим, используя последовательность  $\{n_k\}$ . Положим

$$V_\omega(x) := \sum_{k \in \mathbb{N}} v_k(x), \quad x \in [0; 1],$$

где при  $x \in [0; 2 \cdot 2^{-n_k}]$

$$v_k(x) := \omega(2^{-n_k}) 2^{n_k} (2^{-n_k} - |x - 2^{-n_k}|), \tag{7}$$

$$v_k(2^{-(n_k-1)}j + x) := v_k(x) \text{ при } j = 1, \dots, 2^{n_k-1},$$

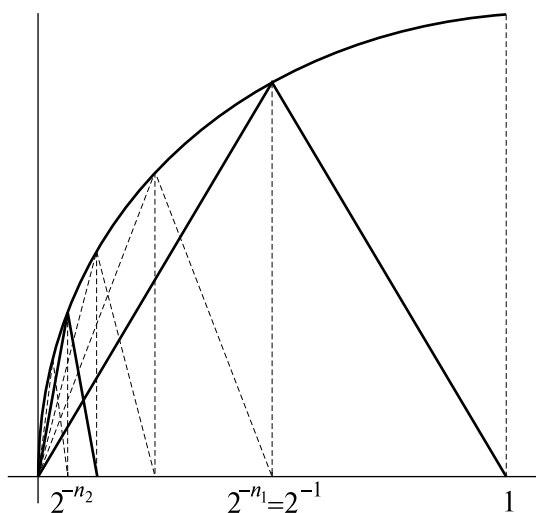


Рис. 1. Первые периоды функций  $v_k(x)$

Fig. 1. The first periods of the functions  $v_k(x)$

т. е. на отрезке  $[0; 2^{-(n_k-1)}]$  график функции  $v_k(x)$  является равнобедренным треугольником высотой  $\omega(2^{-n_k})$  и основанием  $2^{-(n_k-1)}$ , далее периодически продолженным на весь отрезок  $[0; 1]$  с периодом  $2^{-(n_k-1)}$  (рис. 1, жирными линиями выделены первые периоды функций  $v_1(x)$  и  $v_2(x)$ ).

Сначала проверим, что так определенная функция  $V_\omega(x)$  принадлежит классу  $H^\omega$ . Для этого оценим модуль приращения  $|V_\omega(x+h) - V_\omega(x)|$  при  $x, x+h \in [0; 1]$ , будем считать, что  $h > 0$ . Найдем номер  $k$ , при котором (рис. 2)

$$2^{-n_{k+1}} < h \leq 2^{-n_k}, \tag{8}$$

и представим приращение  $V_\omega(x+h) - V_\omega(x)$  в следующем виде:

$$V_\omega(x+h) - V_\omega(x) = \sum_{s=1}^{k-1} (v_s(x+h) - v_s(x)) + (v_k(x+h) - v_k(x)) + \sum_{s=k+1}^{\infty} (v_s(x+h) - v_s(x)) \equiv \sum_{(1),k} + \sum_{(2),k} + \sum_{(3),k}. \tag{9}$$

Сначала оценим сумму  $\sum_{(1),k}$ . Имеем

$$\left| \sum_{(1),k} \right| \leq \sum_{s=1}^{k-1} |(v_s(x+h) - v_s(x))|.$$

Каждая функция  $v_s(x)$  является кусочно-линейной и угловые коэффициенты звеньев ее графика равны  $\pm 2^{n_s} \omega(2^{-n_s})$ . Поэтому

$$|(v_s(x+h) - v_s(x))| \leq 2^{n_s} \omega(2^{-n_s}) \cdot h.$$



Отсюда, по первому неравенству (4), получаем

$$\left| \sum_{(1),k} \right| \leq \left( \sum_{s=1}^{k-1} 2^{n_s} \omega(2^{-n_s}) \right) \cdot h < < \frac{1}{k} 2^{n_k} \omega(2^{-n_k}) \cdot h.$$

Так как  $2^{n_k} \omega(2^{-n_k})$  — угловой коэффициент отрезка, вписанного в график функции  $\omega(t)$  и лежащего над  $[0; 2^{-n_k}]$ , и  $h \leq 2^{-n_k}$ , то в силу выпуклости  $\omega(t)$  вверх выполняется неравенство  $2^{n_k} \omega(2^{-n_k}) \cdot h \leq \omega(h)$  (см. рис. 2) и, значит,

$$\left| \sum_{(1),k} \right| \leq \frac{1}{k} \omega(h). \quad (10)$$

Аналогично (см. рис. 2)

$$\left| \sum_{(2),k} \right| = |v_k(x+h) - v_k(x)| \leq 2^{n_k} \omega(2^{-n_k}) \cdot h \leq \omega(h). \quad (11)$$

Теперь оценим сумму  $\sum_{(3),k}$ . Для этой суммы выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \left| \sum_{(3),k} \right| &\leq \sum_{s=k+1}^{\infty} |v_s(x+h) - v_s(x)| \leq \sum_{s=k+1}^{\infty} (|v_s(x+h)| + |v_s(x)|) \leq \\ &\leq 2 \sum_{s=k+1}^{\infty} \max_{[0;1]} |v_s(x)| = 2 \sum_{s=k+1}^{\infty} \omega(2^{-n_s}) = 2 \left( \omega(2^{-n_{k+1}}) + \sum_{s=k+2}^{\infty} \omega(2^{-n_s}) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

К сумме в последнем члене цепочки этих соотношений применим второе неравенство (4) при  $k+1$ . Учитывая, что  $2^{-n_{k+1}} < h$ , отсюда получаем (см. рис. 2)

$$\left| \sum_{(3),k} \right| \leq 2 \left( 1 + \frac{1}{k+1} \right) \omega(2^{-n_{k+1}}) \leq 2 \left( 1 + \frac{1}{k+1} \right) \omega(h). \quad (13)$$

Таким образом, из соотношений (10), (11) и (13) для каждого  $0 \leq x < x+h \leq 1$  при  $k$ , удовлетворяющем (8), следует оценка приращения

$$|V_\omega(x+h) - V_\omega(x)| \leq \left( \frac{1}{k} + 1 + 2 + \frac{2}{k+1} \right) \omega(h) \leq 5 \omega(h). \quad (14)$$

Принадлежность функции  $V_\omega(x)$  классу  $H^\omega[0;1]$  установлена.

Теперь проверим, что для каждой точки  $x \in [0;1]$  выполнено первое соотношение (3). Для этого покажем, что найдется такое  $c > 0$ , одно и то же для всех  $x \in [0;1]$ , что при каждом номере  $k$  на расстоянии не больше  $2^{-n_k}$  и не меньше  $2^{-(n_k+1)}$  от точки  $x$  найдется точка  $x_k \in [0;1]$ , в которой выполнено неравенство

$$\frac{|V_\omega(x_k) - V_\omega(x)|}{\omega(|x_k - x|)} > c. \quad (15)$$

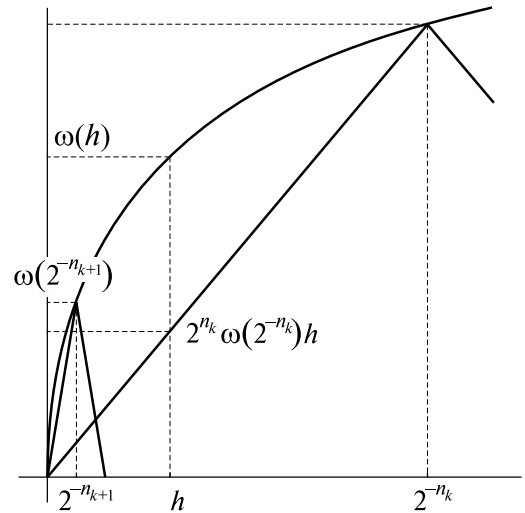


Рис. 2. Сравнение величины  $\omega(h)$  со значениями  $\sum_{(1),k}$ ,  $\sum_{(2),k}$  и  $\sum_{(3),k}$

Fig. 2. Comparing the value  $\omega(h)$  with the values  $\sum_{(1),k}$ ,  $\sum_{(2),k}$ , and  $\sum_{(3),k}$



Точку  $x_k$  определим по функции  $v_k$ . Графиком кусочно-линейной функции  $v_k$  является ломаная со звеньями равной длины и угловыми коэффициентами, равными  $\pm 2^{n_k} \omega(2^{-n_k})$ , знаки угловых коэффициентов чередуются. Каждое звено лежит над отрезком длины  $2^{-n_k}$ . Обозначим  $[c; d]$  тот из отрезков, который содержит точку  $x$ , если точка  $x$  лежит на границе двух отрезков, то отрезок  $[c; d]$  — любой из них. В качестве точки  $x_k$  возьмем конец отрезка  $[c; d]$ , который лежит дальше от  $x$ , если  $x$  — середина  $[c; d]$ , то в качестве  $x_k$  берем любой из концов  $[c; d]$ .

По неравенству треугольника

$$\frac{|V_\omega(x_k) - V_\omega(x)|}{\omega(|x_k - x|)} \geq \frac{|\sum_{(2),k}| - |\sum_{(1),k}| - |\sum_{(3),k}|}{\omega(|x_k - x|)}.$$

Для получения нижней оценки  $\frac{|V_\omega(x_k) - V_\omega(x)|}{\omega(|x_k - x|)}$  значение  $|\sum_{(2),k}|$  оценим снизу, а значения  $|\sum_{(1),k}|$  и  $|\sum_{(3),k}|$  — сверху.

Точки  $x$  и  $x_k$  лежат под одним звеном ломаной, являющейся графиком функции  $v_k(x)$ , и для  $x$  и  $x_k$  точек выполнено  $2^{-n_k} \geq |x - x_k| \geq 2^{-(n_k+1)}$ , поэтому

$$\begin{aligned} \left| \sum_{(2),k} \right| &= |v_k(x_k) - v_k(x)| = 2^{n_k} \omega(2^{-n_k}) |x_k - x| > \\ &> 2^{n_k} \omega(|x_k - x|) 2^{-(n_k+1)} = \frac{1}{2} \omega(|x_k - x|). \end{aligned}$$

При  $h = x_k - x$  из неравенства (10) следует оценка  $|\sum_{(1),k}| \leq \frac{1}{k} \omega(|x_k - x|)$ . При получении соотношений (12) была получена оценка  $|\sum_{(3),k}| \leq 2 \sum_{s=k+1}^{\infty} \omega(2^{-n_s})$ , откуда, учитывая второе неравенство (4), при  $h = x_k - x$  получаем, что

$$\left| \sum_{(3),k} \right| \leq 2 \sum_{s=k+1}^{\infty} \omega(2^{-n_s}) < \frac{2}{k} \omega(2^{-n_k}) \leq \frac{2}{k} \omega(2|x_k - x|) \leq \frac{4}{k} \omega(|x_k - x|).$$

Следовательно, на расстоянии не больше  $2^{-n_k}$  и не меньше  $2^{-(n_k+1)}$  от каждой точки  $x \in [0; 1]$  найдется точка  $x_k \in [0; 1]$ , для которой

$$\frac{|V_\omega(x_k) - V_\omega(x)|}{\omega(|x_k - x|)} \geq \frac{|\sum_{(2),k}| - |\sum_{(1),k}| - |\sum_{(3),k}|}{\omega(|x_k - x|)} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{k} - \frac{4}{k}.$$

Поскольку  $x_k \rightarrow x$  при  $k \rightarrow \infty$ , то отсюда следует, что

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{|V_\omega(x+h) - V_\omega(x)|}{\omega(|h|)} \geq \frac{1}{2}$$

и первое из соотношений (3) выполнено при  $c = \frac{1}{2}$ .

Теперь проверим выполнение второго соотношения (3). Возьмем произвольную точку  $x \in [0; 1]$ . Обозначим  $x_k$  какую-либо точку отрезка  $[0; 1]$ , лежащую на расстоянии  $2^{-(n_k-1)}$  от  $x$ . Поскольку период функции  $v_k(x)$  равен  $2^{-(n_k-1)}$ , то

$$V_\omega(x_k) - V_\omega(x) = \sum_{s=1}^{k-1} (v_s(x_k) - v_s(x)) + \sum_{s=k+1}^{\infty} (v_s(x_k) - v_s(x)).$$



Отсюда, используя неравенства (4), получаем, что

$$\begin{aligned} |V_\omega(x_k) - V_\omega(x)| &\leq \sum_{s=1}^{k-1} |v_s(x_k) - v_s(x)| + 2 \sum_{s=k+1}^{\infty} \max_{[0;1]} v_s(x) \leq \\ &\leq \sum_{s=1}^{k-1} 2^{n_s} \omega(2^{-n_s}) |x_k - x| + 2 \sum_{s=k+1}^{\infty} \omega(2^{-n_s}) \leq \\ &\leq \frac{1}{k} 2^{n_k} \omega(2^{-n_k}) \cdot 2^{-(n_k-1)} + 2 \frac{1}{k} \omega(2^{-n_k}) = \frac{4}{k} \omega(2^{-n_k}) < \frac{4}{k} \omega(x_k - x). \end{aligned}$$

Поскольку  $h = x_k - x \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то отсюда получаем, что

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \frac{|V_\omega(x+h) - V_\omega(x)|}{\omega(|h|)} = 0.$$

Второе соотношение (3) также доказано.

Так как  $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\omega(t)}{t} = \infty$ , то, если бы в некоторой точке  $x$  функция  $V_\omega(x)$  имела производную, в этой точке выполнялось бы равенство  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|V_\omega(x+h) - V_\omega(x)|}{\omega(|h|)} = 0$ , что противоречит первому соотношению (3). Следовательно, функция  $V_\omega(x)$  не дифференцируема ни в одной точке.

Все анонсированные свойства функции  $V_\omega(x)$  типа ван дер Вардена проверены.

Все сказанное остается справедливым для рядов, полученных следующим образом. Пусть

$$\psi_1(x) = \begin{cases} x & \text{на } [0, \frac{1}{4}], \\ \frac{1}{2} - x & \text{на } [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], \\ x - 1 & \text{на } [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

График  $\psi_1(x)$  есть ломаная с вершинами в точках  $(0; 0)$ ,  $(\frac{1}{4}; \frac{1}{4})$ ,  $(\frac{3}{4}; -\frac{1}{4})$ ,  $(1; 0)$  и  $\varphi_1(x) := 4\sqrt{3}\psi_1(x)$ , т. е.  $\|\varphi_1(x)\|_{L_2(0;1)} = 1$ .

Определим систему  $\varphi_m(x) := \varphi_1(2^{m-1}x)$  как периодическую с периодом 1. Очевидно, что

$$\varphi_m(x) = 4\sqrt{2} \int_0^x r_{m+1}(t) dt,$$

где  $r_j(x) = \text{sign}(\sin 2^j \pi x)$  — система Радемахера (см. например [10]).

В работе [11] А. И. Рубинштейн, в частности, показал, что система  $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$  слабо мультипликативна, т. е.

$$\int_0^1 \varphi_{k_1}(x) \dots \varphi_{k_s}(x) dx = 0 \quad \text{при } 1 \leq k_1 < \dots < k_s$$

и [12] для нее при любом  $p > 2$

$$\left( \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq A_p \left( \sum_{k=1}^n c_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$





—  $S_p$ -система — неравенство Хинчина, установленное впервые для системы Радемахера, кроме того,  $S_p$ -система является системой Банаха

$$\left(\sum_{k=1}^n c_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq B_p \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)\right| dx.$$

Как показал В. Ф. Гапошкин [12], ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$  почти всюду безусловно сходится при  $\{c_k\} \in l_2$  и почти всюду расходится при  $\{c_k\} \notin l_2$ .

Для системы Радемахера сходимость почти всюду при  $\{c_k\} \in l_2$  доказал Радемахер в 1922 г., а расходимость почти всюду при  $\{c_k\} \notin l_2$  — Хинчин и Колмогоров в 1925 г.

В настоящей работе речь идет как раз о рядах по системе  $\{\varphi_m(x)\}$ .

### Список литературы

1. Ефимов А. В. Линейные методы приближения непрерывных периодических функций // Математический сборник. 1961. Т. 54 (96), вып. 1. С. 51–90.
2. Bolzano B. Functionenlehre // Bolzano B., Petr K., Rychlik K. Bernard Bolzano's Schriften. Band 1. Praha, Královská česka společnost nauk v Praze, 1930. P. 80–184.
3. Takagi T. A simple example of a continuous function without derivative // Tokyo Sugaku-Butsurigakkwai Hokoku. 1901. Vol. 1. P. 176–177. <https://doi.org/10.11429/subutsuhokoku1901.1.F176>
4. van der Waerden B. L. Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion // Mathematische Zeitschrift. 1930. Vol. 32. P. 474–475. <https://doi.org/10.1007/BF01194647>
5. Рубинштейн А. И. Об  $\omega$ -лакунарных рядах и о функциях классов  $H^\omega$  // Математический сборник. 1964. Т. 65 (107), вып. 2. С. 239–271.
6. Weierstrass K. Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen // Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre: Vorlesung, gehalten in Berlin 1886 Mit der akademischen Antrittsrede, Berlin 1857, und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86. Wiesbaden : Vieweg+Teubner Verlag, 1988. P. 190–193. [https://doi.org/10.1007/978-3-322-91273-2\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-322-91273-2_5)
7. Теляковский Д. С. Об условиях моногенности // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы (Саратов, 31 января – 4 февраля 2022 г.). Саратов : Саратовский университет [Издание], 2022. Вып. 21. С. 289–293. EDN: CZHBTY
8. Белов А. С. О локальных свойствах некоторых функций из класса Гельдера // Известия вузов. Математика. 1992. № 8. С. 13–20.
9. Mishura Y., Schied A. On (signed) Takagi – Landsberg functions: pth variation, maximum, and modulus of continuity // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2019. Vol. 473, iss. 1. P. 258–272. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.12.047>
10. Качмаж С., Штейнгаус Г. Теория ортогональных рядов. Москва : ГИФМЛ, 1958. 507 с.
11. Рубинштейн А. И. Об одном множестве слабо мультипликативных систем // Математические заметки. 2019. Т. 105, вып. 3. С. 471–475. <https://doi.org/10.4213/mzm11856>, EDN: VWDTV1
12. Гапошкин В. Ф. О сходимости рядов по слабо мультипликативным системам функций // Математический сборник. 1972. Т. 89 (131), вып. 3 (11). С. 355–365.



## References

1. Efimov A. V. Linear methods of approximating continuous periodic functions. *Matematicheskii Sbornik. Novaya Seriya*, 1961, vol. 54 (96), iss. 1, pp. 51–90. (in Russian).
2. Bolzano B. Funktionenlehre. In: Bolzano B., Petr K., Rychlik K. *Bernard Bolzano's Schriften*. Band 1. Praha, Královská česká společnost nauk v Praze, 1930, pp. 80–184.
3. Takagi T. A simple example of a continuous function without derivative. *Tokyo Sugaku-Butsurigakkwai Hokoku*, 1901, vol. 1, pp. 176–177. <https://doi.org/10.11429/subutsuhokoku1901.1.F176>
4. van der Waerden B. L. Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion. *Mathematische Zeitschrift*, 1930, vol. 32, pp. 474–475 (in German). <https://doi.org/10.1007/BF01194647>
5. Rubinshtein A. I. On  $\omega$ -lacunary series and functions of the classes  $H^\omega$ . *Matematicheskii Sbornik. Novaya Seriya*, 1964, vol. 65 (107), iss. 2, pp. 239–271 (in Russian).
6. Weierstrass K. Über kontinuierliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen. In: *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre: Vorlesung, gehalten in Berlin 1886 Mit der akademischen Antrittsrede, Berlin 1857, und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86*. Wiesbaden, Vieweg+Teubner Verlag, 1988, pp. 190–193. [https://doi.org/10.1007/978-3-322-91273-2\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-322-91273-2_5) (in German).
7. Telyakovskij D. S. On monogeneity conditions. *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications: Materials of the 21st International Saratov Winter School (Saratov, January 31 – February 4, 2022)*. Saratov, Saratov State University Publ., 2022, iss. 21, pp. 289–293 (in Russian). EDN: CZHBTY
8. Belov A. S. Local properties of some functions in the Hölder class. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1992, vol. 36, iss. 8, pp. 10–17.
9. Mishura Y., Schied A. On (signed) Takagi–Landsberg functions: pth variation, maximum, and modulus of continuity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2019, vol. 473, iss. 1, pp. 258–272. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.12.047>
10. Kaczmarz S., Steinhaus H. *Theorie der Orthogonalreihen*. Chelsea Publishing Company, 1951. 296 p. (Russ. ed.: Moscow, GIFML, 1958. 507 p.).
11. Rubinshtein A. I. On a Set of Weakly Multiplicative Systems. *Mathematical Notes*, 2019, vol. 105, iss. 3, pp. 473–477. <https://doi.org/10.1134/S0001434619030192>
12. Gaposkin V. F. On the convergence of series of weakly multiplicative systems of functions. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1972, vol. 18, iss. 3, pp. 361–372. <https://doi.org/10.1070/SM1972v018n03ABEH001818>

Поступила в редакцию / Received 26.04.2022

Принята к публикации / Accepted 04.11.2022

Опубликована / Published 31.08.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 348–356

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 348–356

[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru)

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-348-356>, EDN: CZBAYY

Научная статья

УДК 517.98

## К вопросу об остаточности сильных показателей колеблемости на множестве решений дифференциальных уравнений третьего порядка

А. Х. Сташ<sup>✉</sup>, Н. А. Лобода

Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета, Россия, 385000, г. Майкоп, ул. Первомайская, д. 208

**Сташ Айдамир Хазретович**, кандидат физико-математических наук, декан факультета математики и компьютерных наук, [aidamir.stash@gmail.com](mailto:aidamir.stash@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0003-3008-7859>, AuthorID: 956099

**Лобода Надежда Алексеевна**, старший преподаватель кафедры математического анализа и методики преподавания математики, [n-loboda@yandex.ru](mailto:n-loboda@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0002-6249-6158>, AuthorID: 1051724

**Аннотация.** В работе исследуются различные разновидности показателей колеблемости (верхние или нижние, сильные или слабые) нестрогих знаков, нулей и корней ненулевых решений линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка с непрерывными и ограниченными на положительной полуоси коэффициентами. Ненулевое решение линейного однородного уравнения не может обнуляться в силу теоремы существования и единственности. Поэтому спектры всех перечисленных показателей колеблемости (т. е. их множества значений на ненулевых решениях) состоят из одного нулевого значения. Известно, что спектры показателей колеблемости линейных однородных уравнений второго порядка также состоят из одного значения. Следовательно, на множестве решений уравнений до второго порядка наблюдается остаточность всех характеристик колеблемости. На множестве решений уравнений третьего порядка сильные показатели колеблемости гиперкорней не являются остаточными, т. е. не являются инвариантными относительно изменения решения на любом конечном участке полуоси времени. Доказано, что на множестве решений уравнений третьего порядка сильные показатели колеблемости нестрогих знаков, нулей и корней не являются остаточными. Параллельно доказано существование функции из указанного множества, обладающей следующими свойствами: все перечисленные показатели колеблемости являются точными, но не абсолютными. При этом все сильные показатели, как и все слабые, равны между собой.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения, колеблемость, число нулей, частота Сергеева, показатель колеблемости, остаточный функционал

**Благодарности:** Авторы выражают глубокую благодарность профессору И. Н. Сергееву за обсуждение результатов статьи.

**Для цитирования:** Сташ А. Х., Лобода Н. А. К вопросу об остаточности сильных показателей колеблемости на множестве решений дифференциальных уравнений третьего порядка //



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 348–356. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-348-356>, EDN: CZBAYY

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## On the question of the residual of strong exponents of oscillation on the set of solutions of third-order differential equations

A. Kh. Stash<sup>✉</sup>, N. A. Loboda

Caucasus Mathematical Center Adyghe State University, 208 Pervomayskaya St., Maykop 385000, Russia

Aydamir Kh. Stash, [aidamir.stash@gmail.com](mailto:aidamir.stash@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0003-3008-7859>, AuthorID: 956099

Nadezhda A. Loboda, [n-loboda@yandex.ru](mailto:n-loboda@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0002-6249-6158>, AuthorID: 1051724

**Abstract.** In this paper, we study various types of exponents of oscillation (upper or lower, strong or weak) of non-strict signs, zeros, and roots of non-zero solutions of linear homogeneous differential equations of the third order with continuous and bounded coefficients on the positive semi-axis. A nonzero solution of a linear homogeneous equation cannot be zeroed due to the existence and uniqueness theorem. Therefore, the spectra of all the listed exponents of oscillation (i.e. their sets of values on nonzero solutions) consist of one zero value. In addition, it is known that the spectra of the oscillation exponents of linear homogeneous equations of the second order also consist of a single value. Consequently, on the set of solutions of equations up to the second order there is a residual of all exponents of oscillation. On the set of solutions of third-order equations, strong exponents vibrations of hyper roots are not residual, i.e. are not invariant with respect to the change in the solution at any finite section of the half-axis of time. In this article, it is proved that on the set of solutions of third-order equations, strong oscillation indices of non-strict signs, zeros, and roots are not residual. In parallel, the existence of a function from the specified set with the following properties is proved: all listed exponents of oscillation are accurate, but not absolute. At the same time, all strong exponents like all weak ones, are equal to each other.

**Keywords:** differential equations, oscillation, number of zeros, Sergeev's frequency, exponent of oscillation, residual functional

**Acknowledgements:** The authors express their deep gratitude to Professor I. N. Sergeev for discussing the results of the article.

**For citation:** Stash A. Kh., Loboda N. A. On the question of the residual of strong exponents of oscillation on the set of solutions of third-order differential equations. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 348–356 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-348-356>, EDN: CZBAYY

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Ляпуновские характеристики колеблемости решений линейных однородных дифференциальных уравнений и систем впервые были введены И. Н. Сергеевым в работах [1–4]. Новое направление успешно развивается не только учениками И. Н. Сергеева и его российскими коллегами, но и белорусскими [5–10].



В настоящей работе будем рассматривать следующие их разновидности:

- показатели колеблемости *нулей, смен знаков (строгих или нестрогих), корней или гиперкорней*;
- *верхние* или *нижние* показатели колеблемости (в случае их совпадения — *точные*);
- *сильные* или *слабые* показатели колеблемости (в случае их совпадения — *абсолютные*).

Подсчет последних происходит путем усреднения числа нулей (или смен знаков, или корней, или гиперкорней) проекции решения  $x$  дифференциальной системы на какую-либо прямую, причем эта прямая выбирается так, чтобы полученное среднее значение оказалось минимальным: если указанная минимизация производится перед усреднением, то получаются слабые показатели колеблемости, а если после, то — сильные показатели колеблемости. При этом для вычисления этих характеристик решения  $y$  линейного уравнения  $n$ -го порядка осуществляется переход к вектор-функции  $x = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ .

Важным свойством ляпуновских характеристик, призванным облегчить их исследование, является *остаточность* [11], т. е. инвариантность относительно изменения решения на любом конечном участке полуоси времени. Свойство остаточности на множестве решений линейных однородных дифференциальных уравнений произвольного порядка сначала для скалярных частот строгих смен знаков и нулей было установлено И. Н. Сергеевым в [1] (аналогично доказывается и остаточность частот корней). Слабые показатели колеблемости гиперкорней любых решений, как оказалось [3], всегда совпадают с их показателями блуждаемости, которые являются остаточными.

Далее, для решений линейных однородных уравнений первого порядка все характеристики колеблемости равны нулю, так как эти решения попросту не имеют нулей, а для всех решений любого уравнения второго порядка все верхние (как и все нижние) частоты равны между собой, поскольку нули его решений чередуются и в принципе не могут быть кратными [12]. Следовательно, на множестве решений уравнений первого и второго порядков наблюдается остаточность всех характеристик колеблемости.

Отсутствие свойства остаточности у всех сильных показателей колеблемости решений дифференциальных систем доказано в работах [13, 14], а у сильных показателей колеблемости гиперкорней на множестве решений уравнений третьего порядка — в [15]. В настоящей статье обсуждаются вопросы остаточности у сильных показателей колеблемости нестрогих знаков, нулей и корней на множестве решений линейных однородных уравнений третьего порядка.

## 1. Основные обозначения и определения

Для заданного натурального  $n$  рассмотрим множество  $\mathcal{E}^n$  линейных однородных уравнений  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty),$$

задаваемых ограниченными непрерывными функциями

$$a \equiv (a_1, \dots, a_n): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения.

Множество всех ненулевых решений уравнения  $a \in \mathcal{E}^n$  обозначим через  $\mathcal{S}_*(a)$ . Далее, звездочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Положим  $\mathcal{S}_*^n = \bigcup_{a \in \mathcal{E}^n} \mathcal{S}_*(a)$ .



**Определение 1** ([1]). Скажем, что в точке  $t > 0$  происходит *нестрогая смена знака* функции  $y \in \mathcal{S}_*^n$ , если в любой окрестности этой точки функция  $y$  принимает как неположительные, так и неотрицательные значения.

**Определение 2** ([1–3]). Для момента  $t > 0$  и функции  $y \in \mathcal{S}_*^n$  введем следующие обозначения:

$\nu^\sim(y, t)$  — число ее точек *нестрогих смен знаков* на промежутке  $(0, t]$ ;

$\nu^0(y, t)$  — число ее *нулей* на промежутке  $(0, t]$ ;

$\nu^+(y, t)$  — число ее *корней* (т. е. нулей с учетом их *кратности*) на промежутке  $(0, t]$ ;

$\nu^*(y, t)$  — число ее *гиперкорней* (т. е. нулей с учетом их *кратности*) на промежутке  $(0, t]$ , где в процессе подсчета этого количества:

— каждый некрatный корень берется ровно один раз;

— любой кратный корень берется бесконечно много раз независимо от его фактической кратности.

Далее, для вектора  $m \in \mathbb{R}_*^n$  и вектор-функции  $\psi y = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$  введем обозначение  $\nu^s(y, m, t) \equiv \nu^s(\langle \psi y, m \rangle, t)$ , где  $s \in \{\sim, 0, +, *\}$ ,  $\langle \psi y(\cdot), m \rangle$  — скалярное произведение.

**Определение 3** ([2–4]). *Верхние (нижние) сильный и слабый показатели колеблемости знаков, нулей и корней* функции  $y \in \mathcal{S}_*^n$  при  $s \in \{\sim, 0, +, *\}$  соответственно зададим формулами

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_\bullet^s(y) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^s(y, m, t) & \left( \check{\nu}_\bullet^s(y) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^s(y, m, t) \right), \\ \hat{\nu}_\circ^s(y) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^s(y, m, t) & \left( \check{\nu}_\circ^s(y) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^s(y, m, t) \right). \end{aligned}$$

В случае совпадения сильного или слабого верхнего показателя колеблемости решения  $y$  с одноименным нижним будем называть его *точным* и обозначать  $\nu_\bullet^s(y)$  или  $\nu_\circ^s(y)$ .

Из сформулированных определений вытекают

**Замечание 1.** Для любого  $y \in \mathcal{S}_*^n$  имеют место следующие соотношения:

$$\hat{\nu}_\circ^\sim(y) \leq \hat{\nu}_\circ^0(y) \leq \hat{\nu}_\circ^+(y) \leq \hat{\nu}_\circ^*(y), \quad \check{\nu}_\circ^\sim(y) \leq \check{\nu}_\circ^0(y) \leq \check{\nu}_\circ^+(y) \leq \check{\nu}_\circ^*(y),$$

$$\hat{\nu}_\bullet^\sim(y) \leq \hat{\nu}_\bullet^0(y) \leq \hat{\nu}_\bullet^+(y) \leq \hat{\nu}_\bullet^*(y), \quad \check{\nu}_\bullet^\sim(y) \leq \check{\nu}_\bullet^0(y) \leq \check{\nu}_\bullet^+(y) \leq \check{\nu}_\bullet^*(y).$$

**Замечание 2.** Для любых  $y \in \mathcal{S}_*^n$  и  $s \in \{\sim, 0, +, *\}$  справедливы неравенства

$$\hat{\nu}_\circ^s(y) \leq \hat{\nu}_\bullet^s(y), \quad \check{\nu}_\circ^s(y) \leq \check{\nu}_\bullet^s(y).$$

**Определение 4** ([11]). Для заданных множеств  $M$  и  $F = \{f : \mathbb{R}_+ \rightarrow M\}$  назовем функцию  $\lambda : F \rightarrow \mathbb{R}$  *остаточной*, если для любых функций  $f, g \in F$ , удовлетворяющих хотя бы для одного  $t_0 \in \mathbb{R}_+$  условию  $f(t) = g(t)$  при всех  $t \geq t_0$ , имеет место равенство  $\lambda(f) = \lambda(g)$ .



## 2. Вспомогательные определения и факты

Для нормированного пространства  $\mathcal{G}$  квадратных матриц порядка  $n$  с положительными определителями обозначим  $\mathcal{B}_r(H_0) = \{H \in \mathcal{G} \mid \|H - H_0\| \leq r\}$  (нормы в пространствах строк, столбцов и матриц определим как максимум модулей их элементов).

**Лемма 1** ([16]). Для каждой пары уравнений  $a, b \in \mathcal{E}^n$ , произвольных  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}_+$  и пары фундаментальных систем решений  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{S}(a)$ ,  $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{S}(b)$  с образованной ими парой фундаментальных матриц  $X(t_0), Y(t_1) \in \mathcal{G}$  найдется уравнение  $c \in \mathcal{E}^n$  с фундаментальной системой решений  $z_1, \dots, z_n \in \mathcal{S}(c)$ , удовлетворяющей условиям

$$z_i(t) = \begin{cases} x_i(t), & 0 \leq t \leq t_0, \\ y_i(t), & t \geq t_1. \end{cases} \quad i = 1, \dots, n,$$

а если, кроме того, фиксирована пара матриц  $H_0, H_1 \in \mathcal{G}$ , то существует такое  $\delta > 0$ , что указанное уравнение можно выбрать еще и для каждой пары матриц  $X(t_0) \in \mathcal{B}_\delta(H_0)$ ,  $Y(t_1) \in \mathcal{B}_\delta(H_1)$ , бесконечно дифференцируемым по ним (как по параметрам).

**Замечание 3.** Минимумы в определениях показателей колеблемости гиперкорней можно брать не по всем ненулевым векторам  $m$ , а лишь по единичным, поскольку справедливо

$$\nu^*(y, m, t) = \nu^*(y, m/|m|, t), \quad y \in \mathcal{S}_*^n, \quad m \in \mathbb{R}_*^n.$$

**Определение 5** ([3]). Пусть  $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_*^n$  — непрерывно-дифференцируемая функция. Тогда вектор  $m \in \mathbb{R}_*^n$  назовем:

а) *критической нормалью к функции  $x$  на отрезке  $[0; t]$* , если для него хотя бы в один момент  $\tau_0 \in [0; t]$  выполняются равенства  $\langle x(\tau_0), m \rangle = \langle \dot{x}(\tau_0), m \rangle = 0$ , — множество всех таких векторов обозначим через  $C_x(t)$ ;

б) *критической нормалью к функции  $x$  (на всей полупрямой  $\mathbb{R}_+$ )*, если для него хотя бы в один момент  $\tau_0 \in \mathbb{R}_+$  выполняются равенства  $\langle x(\tau_0), m \rangle = \langle \dot{x}(\tau_0), m \rangle = 0$ , — множество всех таких векторов обозначим через  $C_x$ ;

в) *концевой ортогональю к функции  $x$  на отрезке  $[0; t]$* , если вектор  $m$  ортогонален хотя бы одному из векторов  $x(0)$  или  $x(t)$ .

**Замечание 4.** Равенство  $\nu^*(x, m, t) = \infty$  возможно только в случае, когда вектор  $m \in \mathbb{R}_*^n$  является критической нормалью к функции  $x$  на отрезке  $[0; t]$ .

Можно рассматривать единичную сферу  $S^{n-1}$  в  $\mathbb{R}^n$  как самостоятельное топологическое пространство с индуцированной из  $\mathbb{R}^n$  топологией и со стандартной мерой  $\text{mes}$ , являющейся  $(n - 1)$ -мерной площадью поверхности.

Рассмотрим множество

$$G_x(t) \equiv S^{n-1} \setminus (C_x(t) \cup x^\perp(0) \cup x^\perp(t))$$

всех векторов  $m \in S^{n-1}$ , не являющихся для функции  $x$  на отрезке  $[0; t]$  ни критическими нормальями, ни концевыми ортогоналями.

**Лемма 2** ([3]). Для любой непрерывно-дифференцируемой функции  $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_*^n$  и любого значения  $t > 0$  множество  $G_x(t)$  имеет на сфере  $S^{n-1}$  полную меру, открыто и всюду плотно, а на каждом его компоненте связности величина  $\nu^*(x, m, t)$  принимает постоянное конечное значение.



**Замечание 5** ([3]). Лемма 1 утверждает, в частности, что для каждого значения  $t > 0$  множество  $G_x(t) \cap S^{n-1}$  единичных критических нормалей к функции  $x$  на отрезке  $[0; t]$  имеет на сфере  $S^{n-1}$  меру нуль, замкнуто и нигде не плотно.

### 3. Формулировка и доказательство основных результатов

**Теорема 1.** Существует функция  $y \in S_*^3$ , удовлетворяющая соотношениям

$$\nu_{\bullet}^{\sim}(y) = \nu_{\bullet}^0(y) = \nu_{\bullet}^+(y) > \nu_{\circ}^0(y) = \nu_{\circ}^+(y) = \nu_{\circ}^{\sim}(y).$$

**Теорема 2.** Каждый из функционалов  $\hat{\nu}_{\bullet}^{\sim}, \check{\nu}_{\bullet}^{\sim}, \hat{\nu}_{\bullet}^0, \check{\nu}_{\bullet}^0, \hat{\nu}_{\bullet}^+, \check{\nu}_{\bullet}^+, : S_*^3 \rightarrow \mathbb{R}$  не является остаточным.

**Доказательство.** 1. Выберем уравнение  $a \in \mathcal{E}^3$  вида  $\ddot{y} + 9y = 0$  с фундаментальной системой решений

$$x_1 = \cos 3t, \quad x_2 = \sin 3t, \quad x_3 = 1, \tag{1}$$

определитель Вронского которой удовлетворяет неравенству

$$\begin{vmatrix} \cos 3t & \sin 3t & 1 \\ -3 \sin 3t & 3 \cos 3t & 0 \\ -9 \cos 3t & -9 \sin 3t & 0 \end{vmatrix} = 27 \sin^2 t + 27 \cos^2 t = 27 > 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

По выбранной системе из трех функций

$$y_1 = \sin 3t, \quad y_2 = e^{-t}, \quad y_3 = \cos 3t \tag{2}$$

с положительным определителем Вронского

$$\Delta(t) \equiv \begin{vmatrix} \sin 3t & e^{-t} & \cos 3t \\ 3 \cos 3t & -e^{-t} & -3 \sin 3t \\ -9 \sin 3t & e^{-t} & -9 \cos 3t \end{vmatrix} = 30e^{-t}$$

восстановим линейное однородное уравнение  $b \in \mathcal{E}^n$  вида

$$\frac{1}{\Delta(t)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \dot{y}_3 & \dot{y} \\ \ddot{y}_1 & \ddot{y}_2 & \ddot{y}_3 & \ddot{y} \\ \dddot{y}_1 & \dddot{y}_2 & \dddot{y}_3 & \dddot{y} \end{vmatrix} = 0,$$

решениями которого они являются (см. [17]). Раскладывая определитель по элементам последнего столбца, убеждаемся, что коэффициенты построенного уравнения являются ограниченными функциями на  $\mathbb{R}_+$ .

2. Выберем такие числа  $t_1$  и  $t_2$ , что  $t_1 < t_2$ . В соответствии с леммой 1 построим на участке  $[t_1, t_2]$  уравнение  $c \in \mathcal{E}^3$  (с гладкими коэффициентами), переводящее набор (1) решений, заданных на отрезке  $[0, t_1]$ , в набор (2) решений, заданных на луче  $[t_2, +\infty)$ : уравнение  $c$  слева от отрезка  $[t_1, t_2]$  совпадает с уравнением  $a$ , а справа — с уравнением  $b$ . Здесь первое решение начального набора переходит в первое решение конечного набора, второе — во второе, а третье — в третье. Обозначим полученные кусочно составленные решения этого уравнения через  $z_1, z_2, z_3$  соответственно, т. е.

$$z_i(t) = \begin{cases} x_i(t), & t \in [0, t_1], \\ y_i(t), & t \in [t_2, +\infty). \end{cases}$$





3. Рассмотрим два решения:

$$z = z_1 + z_2 \in \mathcal{S}_*(c), \quad y = y_1 + y_2 \in \mathcal{S}_*(b),$$

совпадающие друг с другом на луче  $[t_2, +\infty)$ . Для вектора  $m_1 = (9, 0, 1)$  имеем представление

$$\langle \psi y(t), m_1 \rangle = 10e^{-t} > 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

$$\langle \psi z(t), m_1 \rangle = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_1], \\ \langle \psi y(t), m_1 \rangle, & t \in [t_2, +\infty). \end{cases}$$

Отсюда, с одной стороны, в силу неравенства (3) при любых  $s \in \{\sim, 0, +\}$  и  $t > 0$  имеем  $\nu^s(y, m_1, t) = 0$ , откуда

$$\hat{\nu}_\bullet^s(y) = \check{\nu}_\bullet^s(y) = 0. \tag{4}$$

С другой стороны, при любом  $s \in \{\sim, 0, +, *\}$  имеем  $\nu^s(z, m_1, t_1) = \infty$ . Для любого вектора  $m = (\alpha, \beta, \gamma)$  при  $t \geq t_2$  имеем представление

$$\langle \psi z(t), m \rangle = A_1 \sin(3t) + A_2 \cos(3t) + A_3 e^{-t},$$

где  $A_1 \rightarrow 0, A_2 \rightarrow 0, A_3 \rightarrow 10$  при  $m \rightarrow m_1$ . Поэтому скалярное произведение  $\langle \psi z(t), m \rangle$  отделено от нуля на промежутке  $[t_2, +\infty)$ , при этом согласно теореме 2 из [3] выполнено  $\nu^*(z, m, t_2) < \infty$ . При каждом  $s \in \{\sim, 0, +\}$  справедливы равенства

$$\check{\nu}_\circ^s(z) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^s(z, m, t) = 0. \tag{5}$$

4. При любом  $m$ , неколлинеарном  $m_1$ , скалярное произведение  $\langle \psi z(t), m \rangle$ , начиная с некоторого достаточно большого значения  $t_3(m)$ , на любом промежутке длины  $\pi$  будет иметь ровно три нуля. При этом для многих векторов  $m$  согласно лемме 2 выполнено неравенство  $\nu^*(z, m, t_3(m)) < \infty$ . Следовательно, при любом  $s \in \{\sim, 0, +\}$  справедливо

$$\hat{\nu}_\bullet^s(z) = \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^s(z, m, t) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \left[ \frac{3t}{\pi} \right] = 3,$$

где  $[s]$  — целая часть числа  $s$ .

Для нижних сильных показателей колеблемости решения  $z$  имеют место аналогичные равенства, поэтому справедлива цепочка равенств

$$\hat{\nu}_\bullet^s(z) = \check{\nu}_\bullet^s(z) = 3. \tag{6}$$

Несовпадение друг с другом величин (5) и (6) завершает доказательство теоремы 1.

Несовпадение друг с другом величин (4) и (6) означает неостаточность рассматриваемых частот, тем самым завершается доказательство теоремы 2.  $\square$

### Список литературы

1. Сергеев И. Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды Семинара им. И. Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294. <http://mi.mathnet.ru/tsp65>



2. Сергеев И. Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2012. Т. 76, № 1. С. 149–172. <https://doi.org/10.4213/im5035>, EDN: RDNIDF
3. Сергеев И. Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Математический сборник. 2013. Т. 204, № 1. С. 119–138. <https://doi.org/10.4213/sm7928>, EDN: QBGCJF
4. Сергеев И. Н. Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Математические заметки. 2016. Т. 99, № 5. С. 732–751. <https://doi.org/10.4213/mzm10555>, EDN: VUAJCH
5. Бурлаков Д. С., Цой С. В. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Труды Семинара им. И. Г. Петровского. 2014. Вып. 30. С. 75–93. <http://mi.mathnet.ru/tsp71>
6. Быков В. В. О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 4. С. 419–425. <https://doi.org/10.1134/S0374064116040026>, EDN: VTOWHB
7. Барабанов Е. А., Войделевич А. С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 10. С. 1302–1320. <https://doi.org/10.1134/S0374064116100034>, EDN: WORTCF
8. Барабанов Е. А., Войделевич А. С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 12. С. 1595–1609. <https://doi.org/10.1134/S0374064116120013>, EDN: XGYVHD
9. Барабанов Е. А., Войделевич А. С. Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Доклады Национальной Академии наук Беларуси. 2016. Т. 60, № 1. С. 24–31. EDN: VSPOJR
10. Войделевич А. С. О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2019. № 1. С. 28–32. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-28-32>
11. Сергеев И. Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111–166.
12. Сергеев И. Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2011. № 6. С. 21–26. EDN: OJWOAZ
13. Сташ А. Х. Некоторые свойства показателей колеблемости решений двумерной системы // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2019. № 5. С. 48–51. EDN: TSAYXA
14. Сташ А. Х. Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости линейных систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31, вып. 1. С. 59–69. <https://doi.org/10.35634/vm210105>
15. Сташ А. Х. Об отсутствии свойства остаточности у полных гиперчастот решений дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2017. № 2. С. 65–68. EDN: YKGIIN
16. Сергеев И. Н. Об управлении решениями линейного дифференциального уравнения // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2009. № 3. С. 25–33. EDN: MKTYMH
17. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. Москва : Едиториал УРСС, 2004. 240 с. EDN: QJMGQF

### References

1. Sergeev I. N. Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation. *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 135, iss. 1, pp. 2764–2793. <https://doi.org/10.1007/s10958-006-0142-6>



2. Sergeev I. N. Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential system. *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, iss. 1, pp. 139–162. <https://doi.org/10.1070/IM2012v076n01ABEH002578>
3. Sergeev I. N. The remarkable agreement between the oscillation and wandering characteristics of solutions of differential systems. *Sbornik: Mathematics*, 2013, vol. 204, iss. 1, pp. 114–132. <https://doi.org/10.1070/SM2013v204n01ABEH004293>
4. Sergeev I. N. Oscillation, rotation, and wandering exponents of solutions of differential systems. *Mathematical Notes*, 2016, vol. 99, iss. 5, pp. 729–746. <https://doi.org/10.1134/S0001434616050114>
5. Burlakov D. S., Tsoii S. V. Coincidence of complete and vector frequencies of solutions of a linear autonomous system. *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 210, iss. 2, pp. 155–167. <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2554-7>
6. Bykov V. V. On the Baire classification of Sergeev frequencies of zeros and roots of solutions of linear differential equations. *Differential Equations*, 2016, vol. 52, iss. 4, pp. 413–420. <https://doi.org/10.1134/S0012266116040029>
7. Barabanov E. A., Voidelevich A. S. Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs, and roots for solutions of linear differential equations: I. *Differential Equations*, 2016, vol. 52, iss. 10, pp. 1249–1267. <https://doi.org/10.1134/S0012266116100013>
8. Barabanov E. A., Voidelevich A. S. Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs, and roots for solutions of linear differential equations: II. *Differential Equations*, 2016, vol. 52, iss. 12, pp. 1523–1538. <https://doi.org/10.1134/S0012266116120016>
9. Barabanov E. A., Vaidzelevich A. S. Spectra of the upper Sergeev frequencies of zeros and signs of linear differential equations. *Doklady NAN Belarusi*, 2016, vol. 60, iss. 1, pp. 24–31 (in Russian). EDN: [VSPOJR](https://doi.org/10.1134/S0012266116120016)
10. Vaidzelevich A. S. On spectra of upper Sergeev frequencies of linear differential equations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2019, iss. 1, pp. 28–32 (in Russian). <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-28-32>
11. Sergeev I. N. A contribution to the theory of Lyapunov exponents for linear systems of differential equations. *Journal of Soviet Mathematics*, 1986, vol. 33, iss. 6, pp. 1245–1292. <https://doi.org/10.1007/BF01084752>
12. Sergeev I. N. Oscillation and wandering of solutions to a second order differential equation. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2011, vol. 66, pp. 250–254. <https://doi.org/10.3103/S0027132211060052>
13. Stash A. Kh. Some properties of oscillation indicators of solutions to a two-dimensional system. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2019, vol. 74, pp. 202–204. <https://doi.org/10.3103/S0027132219050061>
14. Stash A. Kh. The absence of residual property for strong exponents of oscillation of linear systems. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, iss. 1, pp. 59–69 (in Russian). <https://doi.org/10.35634/vm210105>
15. Stash A. Kh. The absence of residual property for total hyper-frequencies of solutions to third order differential equations. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2017, vol. 72, pp. 81–83. <https://doi.org/10.3103/S0027132217020085>
16. Sergeev I. N. Controlling solutions to a linear differential equation. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2009, vol. 64, pp. 113–120. <https://doi.org/10.3103/S0027132209030048>
17. Filippov A. F. *Vvedenie v teoriyu differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the Theory of Differential Equations]. Moscow, Editorial URSS, 2004. 240 p. (in Russian). EDN: [QJMGQF](https://doi.org/10.1134/S0012266116120016)

Поступила в редакцию / Received 12.03.2022

Принята к публикации / Accepted 08.12.2022

Опубликована / Published 31.08.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 357–369  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 357–369  
[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru) <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-357-369>, EDN: VGTILO

Научная статья  
УДК 517.929.4

## Устойчивость трехслойных дифференциально-разностных схем с весами в пространстве суммируемых функций с носителями в сетеподобной области

В. Н. Хоанг<sup>✉</sup>, В. В. Провоторов

Воронежский государственный университет, Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., д. 1

**Хоанг Ван Нгуен**, аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, [faded9x@gmail.com](mailto:faded9x@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0001-6970-2770>, AuthorID: 1136856

**Провоторов Вячеслав Васильевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, [wwprov@mail.ru](mailto:wwprov@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0001-8761-7174>, AuthorID: 497347

**Аннотация.** Работа является естественным продолжением ранних исследований авторов при анализе условий слабой разрешимости одномерных начально-краевых задач с изменяющейся на графе (сети) пространственной переменной в направлении увеличения размерности  $n$  ( $n > 1$ ) сетеподобной области изменения этой переменной. Первые результаты в указанном направлении (при  $n = 3$ ) были получены одним из авторов для линеаризованной системы Навье – Стокса, в дальнейшем — для существенно более сложной нелинейной системы Навье – Стокса. При этом анализ проводился классическим путем, используя априорные оценки норм слабых решений в соболевских пространствах функций. В данном исследовании (при произвольном  $n > 1$ ) предлагается другой подход получения условий слабой разрешимости линейных начально-краевых задач — редукция исходной задачи к дифференциально-разностной системе, идея которой восходит к методу Е. Роте полудискретизации начально-краевой задачи по временной переменной. Рассматриваются дифференциально-разностная система уравнений с весовыми параметрами и соответствующая ей трехслойная дифференциально-разностная схема (множество схем). Полученная система является аналогом начально-краевой задачи для уравнения параболического типа с пространственной переменной, изменяющейся в сетеподобной области  $n$ -мерного евклидова пространства. Основная цель — установление области изменения весовых параметров, гарантирующей устойчивость дифференциально-разностной схемы (непрерывность по исходным данным задачи), получение оценок операторных норм слабых решений схемы, построение последовательности решений дифференциально-разностной системы, слабо компактной в пространстве ее состояний. Последнее является важным элементом при использовании численных методов анализа широкого класса прикладных многомерных задач и построения вычислительных алгоритмов для отыскания приближений их решений. Результаты применимы в прикладных задачах оптимизации, возникающих при моделировании сетевых процессов переноса сплошных сред с помощью формализмов дифференциально-разностных систем.

**Ключевые слова:** дифференциально-разностная схема, весовые параметры, сетеподобная область, условия устойчивости



**Для цитирования:** Хоанг В. Н., Провоторов В. В. Устойчивость трехслойных дифференциально-разностных схем с весами в пространстве суммируемых функций с носителями в сетеподобной области // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 357–369. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-357-369>, EDN: VGTILO

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Stability of three-layer differential-difference schemes with weights in the space of summable functions with supports in a network-like domain

V. N. Hoang<sup>✉</sup>, V. V. Provotorov

Voronezh State University, 1 Universitetskaya pl., Voronezh 394018, Russia

**Van N. Hoang**, fadded9x@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6970-2770>, AuthorID: 1136856

**Vyacheslav V. Provotorov**, wwprov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8761-7174>, AuthorID: 497347

**Abstract.** The work is a natural continuation of the authors' earlier studies in the analysis of the conditions for the weak solvability of one-dimensional initial-boundary value problems with a space variable changing on a graph (network) in the direction of increasing the dimension  $n$  ( $n > 1$ ) of the network-like domain of change of this variable. The first results in this direction (for  $n = 3$ ) were obtained by one of the authors for the linearized Navier – Stokes system, later for a much more complex nonlinear Navier – Stokes system. The analysis was carried out in the classical way, using a priori estimates for the norms of weak solutions in Sobolev spaces of functions. In this study (for arbitrary  $n > 1$ ) another approach is proposed to obtain conditions for the weak solvability of linear initial-boundary value problems reduction of the original problem to a differential-difference system, the idea of which goes back to E. Rothe's method of semi-discretization of the initial-boundary value problem by temporary variable. A differential-difference system of equations with weighted parameters and its corresponding three-layer differential-difference scheme (a set of schemes) are considered. The resulting system is an analog of the initial-boundary value problem for a parabolic type equation with a space variable changing in a network-like domain of an  $n$ -dimensional Euclidean space. The main aim is to establish a domain of the range of weight parameters that guarantees the stability of the differential-difference scheme (continuity by the initial data of the problem), to obtain estimates for the operator norms of the weak solutions of the scheme, to construct a sequence of solutions for a differential-difference system that is weakly compact in its state space. The latter is an important element when using numerical methods of analysis of a wide class of applied multidimensional problems and constructing computational algorithms for finding approximations to their solutions. The results are applicable in applied optimization problems arising from modeling network processes of continuum transport with the help of the formalisms of differential-difference systems.

**Keywords:** differential-difference scheme, weight parameters, network-like domain, stability conditions

**For citation:** Hoang V. N., Provotorov V. V. Stability of three-layer differential-difference schemes with weights in the space of summable functions with supports in a network-like domain. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23,



iss. 3, pp. 357–369 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-357-369>, EDN: VGTILO

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

В инженерной практике потоковые явления, возникающие в процессе транспортировки сплошной среды и газов по сетевому или магистральному носителям, удобно рассматривать в дискретно изменяющемся времени. Такое видение приводит к полуаппроксимации дифференциальных систем, определяющих математическую модель указанного процесса, по временной переменной [1–3]. Этот подход восходит к методу полудискретизации Е. Роте [4], примененному им в 1930 г. к одномерному параболическому уравнению и обоснованному в рамках классической разрешимости при условии необходимой гладкости исходных данных. Представленные ниже результаты распространяют метод Роте на случай краевых задач для параболических уравнений общего вида в слабой постановке. Теоретической базой исследования явилась общая теория устойчивости разностных схем (см., например, [5, с. 382]) с той лишь разницей, что операторно-разностная схема, полученная полуаппроксимацией дифференциальной системы, рассматривается в классе слабых решений эллиптического уравнения этой системы. Исследуется трехслойная операторно-разностная схема с весовыми параметрами и эллиптическим оператором, определенным в соболевском пространстве функций с носителями в ограниченной сетеподобной области  $n$ -мерного евклидова пространства ( $n \geq 2$ ). Ставится и решается вопрос отыскания достаточных условий, гарантирующих устойчивость схемы и описания множества значений весовых параметров. Эти условия являются достаточными для слабой разрешимости специальной начально-краевой задачи для параболического уравнения. Используемый в работе подход и предложенные методы исследования расширяют возможности анализа нестационарных процессов гидродинамики [6–10].

## 1. Необходимые обозначения, понятия и определения

Сетеподобная ограниченная область  $D \subset \mathbb{R}^n$  с границей  $\partial D$  состоит из подобластей  $D_l$  с границами  $\partial D_l$  ( $l = \overline{1, N}$ ), попарно примыкающих определенным образом в  $M$  узловых местах  $\omega_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ,  $1 \leq M \leq N - 1$ ):  $D = \hat{D} \cup \hat{\omega}$ ,  $\hat{D} = \bigcup_{l=1}^N D_l$ ,  $\hat{\omega} = \bigcup_{j=1}^M \omega_j$ ,  $D_l \cap D_{l'} = \emptyset$  ( $l \neq l'$ ),  $\omega_j \cap \omega_{j'} = \emptyset$  ( $j \neq j'$ ),  $D_l \cap \omega_j = \emptyset \forall l, j$  [3]. В  $\omega_j$  при фиксированном  $j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) подобласть  $D_{l_0}$  имеет общие границы с  $D_{l_s}$  ( $s = \overline{1, m_j}$ ), являющиеся поверхностями примыкания  $S_{j_s}$  ( $\text{meas } S_{j_s} > 0$ )  $D_{l_s}$  к  $D_{l_0}$ :  $\bigcup_{s=1}^{m_j} S_{j_s} = S_j \subset \partial D_{l_0}$ . Таким образом,  $\omega_j$  определяется поверхностью  $S_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ). Структура области  $D$  аналогична геометрическому графу-дереву [1, 2]: каждая подобласть  $D_l$  имеет одно либо два узловых места и не менее одной поверхности примыкания к другим подобластям. Считаем, что  $S_j$  и  $S_{j_s}$  являются гладкими поверхностями, области  $D_l$  — звездные относительно некоторого шара, своего для каждой  $D_l$ .

Везде ниже используются классические пространства Лебега и Соболева. Пусть  $L_2(\Omega)$  ( $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ) — гильбертово пространство действительных измеримых по Лебегу функций  $u(x)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , скалярное произведение и норма в  $L_2(\Omega)$  определены формулами  $(u, v)_\Omega = \int_\Omega u(x)v(x)dx$  и  $\|u\|_\Omega = \sqrt{(u, u)}$ . Далее,  $W_2^1(\Omega)$  — гильбертово



пространство элементов  $u(x) \in L_2(\Omega)$ , для которых  $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\kappa} \in L_2(\Omega)$ ,  $\kappa = \overline{1, n}$ , скалярное произведение и норма:  $(u, v)_\Omega^{(1)} = \int_\Omega \left( u(x)v(x) + \sum_{\kappa=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_\kappa} \frac{\partial v(x)}{\partial x_\kappa} \right) dx$ ,  $\|u\|_\Omega^{(1)} = \sqrt{(u, u)_\Omega^{(1)}}$ ; применительно к  $D$ :  $\int_D u(x)dx = \sum_{l=1}^N \int_{D_l} u(x)dx$ , для  $L_2(\Omega)$ ,  $W_2^1(\Omega)$  соотношения

$$(u, v)_D = \int_D u(x)v(x)dx, \quad \|u\|_D = \sqrt{(u, v)_D}, \quad (1)$$

$$(u, v)_D^{(1)} = \int_D \left( u(x)v(x) + \sum_{\kappa=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_\kappa} \frac{\partial v(x)}{\partial x_\kappa} \right) dx, \quad \|u\|_D^{(1)} = \sqrt{(u, v)_D^{(1)}}. \quad (2)$$

Далее, обозначим через  $C(\overline{D})$  совокупность непрерывных в  $\overline{D}$  функций  $u(x)$ ,  $C^1(\overline{D}_l)$  ( $l = \overline{1, N}$ ) – совокупности функций из  $C(\overline{D})$ , для которых при фиксированном  $l$  в  $\overline{D}_l$  существуют непрерывные производные  $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\kappa} \in L_2(\Omega)$ ,  $\kappa = \overline{1, n}$ , и  $C^1(\overline{D}) = \prod_{l=1}^N C^1(\overline{D}_l)$  – совокупность функций, скалярное произведение и норма которых определяются формулами (2).

Обозначим через  $\widetilde{C}_0^1(D)$  множество функций  $u(x) \in C^1(\overline{D})$  с компактным носителем в области  $D$ , удовлетворяющих условиям

$$\int_{S_j} a(x)_{S_j} \frac{\partial u(x)_{S_j}}{\partial \mathbf{n}_j} ds + \sum_{i=1}^{m_j} \int_{S_{j_i}} a(x)_{S_{j_i}} \frac{\partial u(x)_{S_{j_i}}}{\partial \mathbf{n}_{j_i}} ds = 0, \quad x \in S_{j_i}, \quad i = \overline{1, m_j}, \quad (3)$$

на поверхностях  $S_j$ ,  $S_{j_i}$  ( $i = \overline{1, m_j}$ ) всех узловых мест  $\omega_j$ ,  $j = \overline{1, M}$ ; назовем (3) условиями взаимного примыкания подобластей  $D_l$ , элементы  $\widetilde{C}_0^1(D)$  равны нулю вблизи границы  $\partial D$ . Здесь  $a(x) \in L_2(D)$  и  $a(x)_{S_j}$ ,  $u(x)_{S_j}$ ,  $a(x)_{S_{j_i}}$ ,  $u(x)_{S_{j_i}}$  – сужения функций  $a(x)$ ,  $u(x)$  на  $S_j$  и  $S_{j_i}$ , векторы  $\mathbf{n}_j$  и  $\mathbf{n}_{j_i}$  – внешние нормали к  $S_j$  и  $S_{j_i}$ , соответственно,  $i = \overline{1, m_j}$ ,  $j = \overline{1, M}$ . В дальнейшем для упрощения записи символы, означающие сужение, и знак  $D$  в  $(\cdot, \cdot)_D$ ,  $\|\cdot\|_D$ ,  $(\cdot, \cdot)_D^{(1)}$ ,  $\|\cdot\|_D^{(1)}$  (см. (1), (2)) будут нами опускаться.

**Определение 1.** Замыкание множества  $\widetilde{C}_0^1(\overline{D})$  по норме (2) назовем пространством  $\widetilde{W}_0^1(D)$ .

## 2. Дифференциально-разностная схема с весами

В дальнейшем изложении используются обозначения и понятия, аналогичные принятым в [5, с. 351]. В пространстве  $\widetilde{W}_0^1(D)$  рассматривается множество трехслойных дифференциально-разностных схем с весовыми параметрами  $\sigma$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  ( $\sigma$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  – вещественные числа), от выбора которых зависят устойчивость и точность схем.

На отрезке  $[0, T]$  введем равномерную сетку с шагом  $\tau = T/K$ :  $\omega_\tau = \{t_k = k\tau, k = 0, 1, \dots, K\}$ .

Исходя из простоты представления результатов, для функций  $y(k) := y(x; k)$ ,



$k = 0, 1, \dots, K$ , введем следующие обозначения, учитывая границы изменения индекса  $k$ :

$$\begin{aligned} y &= y(k), \quad \hat{y} = y(k+1), \quad \check{y} = y(k-1), \\ y_t &= \frac{1}{\tau}(\hat{y} - y), \quad y_{\bar{t}} = \frac{1}{\tau}(y - \check{y}), \quad y_t^\circ = \frac{1}{2\tau}(\hat{y} - \check{y}), \quad y_{\bar{t}\bar{t}} = \frac{1}{\tau^2}(\hat{y} - 2y + \check{y}), \\ y_t^{(\sigma)} &= \sigma y_t + (1 - \sigma)y_{\bar{t}}, \quad y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y + \sigma_2 \check{y}. \end{aligned} \quad (4)$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$\begin{aligned} y_t &= y_t^\circ + \frac{\tau}{2}y_{\bar{t}\bar{t}}, \quad y_{\bar{t}} = y_t^\circ - \frac{\tau}{2}y_{\bar{t}\bar{t}}, \\ y &= \frac{1}{2}(\hat{y} + \check{y}) - \frac{1}{2}(\hat{y} - 2y + \check{y}) = \frac{1}{2}(\hat{y} + \check{y}) - \frac{\tau^2}{2}y_{\bar{t}\bar{t}}, \\ \hat{y} &= y + \frac{1}{2}(\hat{y} - \check{y}) + \frac{1}{2}(\hat{y} - 2y + \check{y}) = y + \tau y_t^\circ + \frac{\tau^2}{2}y_{\bar{t}\bar{t}}, \\ \check{y} &= y - \frac{1}{2}(\hat{y} - \check{y}) + \frac{1}{2}(\hat{y} - 2y + \check{y}) = y - \tau y_t^\circ + \frac{\tau^2}{2}y_{\bar{t}\bar{t}}, \\ y_t^{(\sigma)} &= y_t^\circ + \frac{1}{2}(2\sigma - 1)\tau y_{\bar{t}\bar{t}}, \quad y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = y + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau y_t^\circ + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\tau^2 y_{\bar{t}\bar{t}}. \end{aligned} \quad (5)$$

В пространстве  $\widetilde{W}_0^1(D)$  рассмотрим трехслойную дифференциально-разностную схему с весами  $\sigma$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ :

$$\begin{aligned} y_t^{(\sigma)} - \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left( a_{\kappa l}(x) \frac{\partial y^{(\sigma_1, \sigma_2)}}{\partial x_l} \right) + b(x)y^{(\sigma_1, \sigma_2)} &= f(k), \quad k = \overline{1, K-1}, \\ y(0) &= \varphi_0(x), \quad y(1) = \varphi_1(x), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left( a_{\kappa l}(x) \frac{\partial y^{(\sigma_1, \sigma_2)}}{\partial x_l} \right) = \sum_{\kappa, l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left( a_{\kappa l}(x) \frac{\partial y^{(\sigma_1, \sigma_2)}}{\partial x_l} \right), \quad f(k) := f(x; k), \quad k = \overline{1, K-1}.$$

Для каждого фиксированного  $k$  ( $k = \overline{1, K-1}$ ) функция  $y(k+1) \in \widetilde{W}_0^1(D)$  является решением уравнения (6) и удовлетворяет краевому условию

$$y(k+1) |_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K-1, \quad (7)$$

при этом предполагаются выполненными условия

$$|b(x)| \leq \beta, \quad x \in D, \quad a_* \xi^2 \leq \sum_{\kappa, l=1}^n a_{\kappa l}(x) \xi_\kappa \xi_l \leq a^* \xi^2, \quad \xi^2 = \sum_{\kappa=1}^n \xi_\kappa^2, \quad (8)$$

с фиксированными положительными постоянными  $a_*$ ,  $a^*$ ,  $\beta$  и произвольными параметрами  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , кроме того,  $a_{\kappa l}(x) = a_{l\kappa}(x)$ ,

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x) \in \widetilde{W}_0^1(D), \quad f(k) = f(x; k) \in L_2(D) \quad (k = \overline{1, K-1}). \quad (9)$$

**Определение 2.** Совокупность функций  $y(k+1) \in \widetilde{W}_0^1(D)$ ,  $k = 1, 2, \dots, K-1$ , называется слабым решением системы (6), (7), если для каждого  $y(k+1)$  удовлетворяются тождества

$$\begin{aligned} \int_D y_t^{(\sigma)} \eta(x) dx + \ell(y^{(\sigma_1, \sigma_2)}, \eta) &= \int_D f(k) \eta(x) dx, \quad k = \overline{1, K-1}, \\ y(0) &= \varphi_0(x), \quad y(1) = \varphi_1(x), \end{aligned} \quad (10)$$





при произвольной функции  $\eta(x) \in \widetilde{W}_0^1(D)$ ; здесь  $\ell(y^{(\sigma_1, \sigma_2)}, \eta)$  определяется соотношением

$$\ell(y^{(\sigma_1, \sigma_2)}, \eta) = \int_D \left( \sum_{\kappa, \iota=1}^n a_{\kappa \iota}(x) \frac{\partial y^{(\sigma_1, \sigma_2)}}{\partial x_\iota} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_\kappa} + b(x) y^{(\sigma_1, \sigma_2)} \eta(x) \right) dx.$$

**Замечание 1.** Для схемы (6) помимо  $\varphi_0(x)$  следует задать  $\varphi_1(x)$ . Это можно осуществить, например, используя двухслойную схему 2-го порядка точности  $\frac{1}{\tau}[y(1) - y(0)] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left( a_{\kappa \iota}(x) \frac{\partial [y(1) + y(0)]}{\partial x_\iota} \right) + \frac{1}{2} b(x)[y(1) + y(0)] = f(1)$ . Слабая разрешимость такого уравнения относительно  $y(1) = \varphi_1(x)$  устанавливается рассуждениями, аналогичными при доказательстве теоремы 1.

**Замечание 2.** При каждом фиксированном  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, K - 1$ ) соотношение (6) в пространстве  $\widetilde{W}_0^1(D)$  описывает эллиптическую краевую задачу относительно  $y(k+1) = \hat{y}$ .

**Теорема 1.** При выполнении условий (8), (9) система (6), (7) при достаточно малых  $\tau$  однозначно слабо разрешима в пространстве  $\widetilde{W}_0^1(D)$ .

**Доказательство.** Аналогично рассуждениям, приведенным в работе [2], устанавливается свойство полноты и базисности в пространствах  $\widetilde{W}_0^1(D)$  и  $L_2(D)$  системы обобщенных собственных функций оператора  $\mathbf{A}y = -\frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left( a_{\kappa \iota}(x) \frac{\partial y}{\partial x_\iota} \right) + b(x)y$ ,  $\mathbf{A} : \widetilde{W}_0^1(D) \rightarrow L_2(D)$ . Оператор  $\mathbf{A}$  имеет вещественные собственные значения конечной кратности с предельной точкой на  $+\infty$ . Сказанное означает, что для краевой задачи  $\mathbf{A}\phi = \lambda\phi + g$  ( $\lambda$  — постоянная,  $g \in L_2(\Gamma)$ ) в слабой постановке справедливы утверждения альтернативы Фредгольма в пространстве  $\widetilde{W}_0^1(D)$ .

Положив в (6)  $k = 1$ , получаем в  $\widetilde{W}_0^1(D)$  относительно  $y(2)$  краевую задачу  $\sigma_1 \mathbf{A}y(2) + \frac{1}{\tau} \sigma y(2) = F(\varphi_0, \varphi_1)$  в слабой постановке (здесь  $F(\varphi_0, \varphi_1) = \mathbf{A}((\sigma_1 + \sigma_2 - 1) \times \varphi_1(x) - \sigma_2 \varphi_0(x)) + \frac{1}{\tau}(2\sigma - 1)\varphi_1(x) - \frac{1}{\tau}(\sigma - 1)\varphi_0(x) + f(1)$ ), которая при  $\sigma\sigma_1 > 0$  и достаточно малом  $\tau$  слабо разрешима. Это же утверждение верно, если в (6) положить  $k = 2, 3, \dots, K - 1$ . Теорема доказана.  $\square$

Для дифференциально-разностной схемы (6) получим достаточные условия устойчивости и априорные оценки для различных норм функций  $y(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, K$ , пространства  $\widetilde{W}_0^1(D)$ .

Предварительно приведем схему (6) к каноническому виду. Вводя операторные обозначения в  $\widetilde{W}_0^1(D)$   $\mathbf{B}y = \mathbf{I}y + \tau(\sigma_1 - \sigma_2)\mathbf{A}y$ ,  $\mathbf{C}y = \frac{1}{2}(2\sigma - 1)\mathbf{I}y$ ,  $\mathbf{R}y = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\mathbf{A}y$  (здесь  $\mathbf{I}$  — единичный оператор) и учитывая соотношения (4), (5), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{B}y_t + \tau \mathbf{C}y_{tt} + \tau^2 \mathbf{R}y_{tt} + \mathbf{A}y &= f(k), \quad k = 1, 2, \dots, K - 1, \\ y(0) &= \varphi_0(x), \quad y(1) = \varphi_1(x). \end{aligned} \tag{11}$$

**Замечание 3.** При  $\sigma = \frac{1}{2}$  и  $\sigma_1 = \sigma_2 > 0$  трехслойная дифференциально-разностная схема (6) определяется симметричной канонической схемой (11):  $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{C} = 0$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{A}$ , анализ которой аналогичен анализу классической схемы [4, р. 351] с той лишь разницей, что все рассуждения осуществляются для операторов  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{R}$  в соболевском пространстве  $\widetilde{W}_0^1(D)$ .



**Определение 3.** Совокупность функций  $y(k+1) \in \widetilde{W}_0^1(D)$ ,  $k = 1, 2, \dots, K-1$ , называется слабым решением системы (7), (11), если для каждого  $y(k+1)$  удовлетворяются тождества

$$\int_D (\mathbf{B}y_t + \mathbf{C}y_{\bar{t}} + \mathbf{R}y_{\bar{t}})\eta(x)dx + \ell(y, \eta) = \int_D f(k)\eta(x)dx, \quad k = \overline{1, K-1},$$

$$y(0) = \varphi_0(x), \quad y(1) = \varphi_1(x),$$

при произвольной функции  $\eta(x) \in \widetilde{W}_0^1(D)$ .

**Энергетическое тождество.** Учитывая равенство  $y = \frac{1}{2}(\hat{y} + \check{y}) - \frac{\tau^2}{2}y_{\bar{t}}$  (второе соотношение (5)), преобразуем схему (11) к виду

$$\mathbf{B}y_t + \tau\mathbf{C}y_{\bar{t}} + \tau^2 \left( \mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{A} \right) y_{\bar{t}} + \frac{1}{2}\mathbf{A}(\hat{y} + \check{y}) = f(k), \quad k = \overline{1, K-1}, \quad (12)$$

$$y(0) = \varphi_0(x), \quad y(1) = \varphi_1(x).$$

Умножим скалярно обе части (12) на  $2\tau y_t = \tau(y_t + y_{\bar{t}}) = \hat{y} - \check{y}$  и, учитывая равенство  $\tau y_{\bar{t}} = y_t - y_{\bar{t}}$  (см. (4)), получим

$$2\tau(\mathbf{B}y_t, y_t) + \tau(\mathbf{C}(y_t - y_{\bar{t}}), y_t + y_{\bar{t}}) + \tau^2 \left( \left( \mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{A} \right) (y_t - y_{\bar{t}}), y_t + y_{\bar{t}} \right) + \frac{1}{2}(\mathbf{A}(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = 2\tau(f(k), y_t). \quad (13)$$

Так как  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{C}$  — самосопряженные по Лагранжу операторы, имеют место соотношения

$$\left( \left( \mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{A} \right) (y_t - y_{\bar{t}}), (y_t + y_{\bar{t}}) \right) = \left( \left( \mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{A} \right) y_t, y_t \right) - \left( \left( \mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{A} \right) y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}} \right),$$

$$(\mathbf{C}(y_t - y_{\bar{t}}), y_t + y_{\bar{t}}) = (\mathbf{C}y_t, y_t) - (\mathbf{C}y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}), \quad (14)$$

$$(\mathbf{A}(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = (\mathbf{A}\hat{y}, \hat{y}) - (\mathbf{A}\check{y}, \check{y}),$$

$$(\mathbf{A}(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = [\mathbf{A}\hat{y}, \hat{y}] + \mathbf{A}y, y] - [\mathbf{A}y, y] + \mathbf{A}\check{y}, \check{y}].$$

Кроме того, при любых  $w, z \in \widetilde{W}_0^1(D)$

$$(\mathbf{A}w, w) + (\mathbf{A}z, z) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}(w+z), w+z) + \frac{1}{2}(\mathbf{A}(w-z), w-z).$$

Полагая в полученном соотношении  $w = \hat{y}$ ,  $z = y$ , а затем  $w = y$ ,  $z = \check{y}$ , преобразуем выражение  $(\mathbf{A}(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y})$ , используя последнее соотношение в (14):

$$(\mathbf{A}(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{A}(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + (\mathbf{A}(\hat{y} - y), \hat{y} - y)] - \frac{1}{2}[(\mathbf{A}(y + \check{y}), y + \check{y}) + (\mathbf{A}(y - \check{y}), y - \check{y})].$$

Подставляя это соотношение вместе с первыми двумя соотношениями из (14) в равенство (13), учитывая при этом  $(\mathbf{A}(\hat{y} - y), \hat{y} - y) = \tau^2(\mathbf{A}y_t, y_t)$  и  $(\mathbf{A}(y - \check{y}), y - \check{y}) = \tau^2(\mathbf{A}y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}})$ , приходим к основному энергетическому тождеству для трехслойной схемы (11):

$$2\tau(\mathbf{B}y_t, y_t) + \left[ \frac{1}{4}(\mathbf{A}(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + \left( \left( \tau^2 \left( \mathbf{R} - \frac{1}{4}\mathbf{A} \right) + \tau\mathbf{C} \right) y_t, y_t \right) \right] =$$



$$= \left[ \frac{1}{4}(\mathbf{A}(y + \check{y}), y + \check{y}) + \left( \left( \tau^2(\mathbf{R} - \frac{1}{4}\mathbf{A}) + \tau\mathbf{C} \right) y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}} \right) \right] + 2\tau(f(k), y_{\check{t}}), \quad (15)$$

которое является аналогом уравнения энергетического баланса для эволюционной дифференциальной системы в области  $D \times (0, T)$  изменения переменных  $x$  и  $t$ , соответствующей системе (6), (7).

### 3. Устойчивость дифференциально-разностной схемы

Все последующие утверждения представлены для схемы (11), очевидно, они имеют место и для (6). При  $2\sigma - 1 \geq 0$ ,  $\sigma_1 - \sigma_2 \geq 0$ ,  $\sigma_1 + \sigma_2 > \frac{1}{2}$  имеем в соотношении (15)  $\mathbf{B} = \mathbf{I} + \tau(\sigma_1 - \sigma_2)\mathbf{A} > 0$ ,  $\mathbf{C} = \frac{1}{2}(2\sigma - 1)\mathbf{I} \geq 0$ ,  $\mathbf{R} - \frac{1}{4}\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2})\mathbf{A} > 0$ .

Определим понятие устойчивости трехслойной дифференциально-разностной схемы (11), при этом будем использовать специальную норму (составную норму [5, с. 383]) вида

$$\|Y(k+1)\|^2 = \frac{1}{4}\|y(k+1) + y(k)\|_{(1)}^2 + \|y(k+1) - y(k)\|_{(2)}^2 + \|y_t\|_{(3)}^2 \quad (16)$$

для элементов  $Y(k+1)$  пространства  $\widetilde{W}_0^1(D) \oplus \widetilde{W}_0^1(D)$ , где  $y(k+1)$ ,  $y(k)$  являются элементами пространства  $\widetilde{W}_0^1(D)$ , а  $\|\cdot\|_{(1)}$ ,  $\|\cdot\|_{(2)}$  и  $\|\cdot\|_{(3)}$  — некоторые нормы  $\widetilde{W}_0^1(D)$  и  $L_2(D)$ . Учитывая представления (16), тождество (15) примет вид

$$2\tau(\mathbf{B}y_{\check{t}}, y_{\check{t}}) + \|Y(k+1)\|^2 = \|Y(k)\|^2 + 2\tau(f(k), y_{\check{t}}), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \|Y(k+1)\|^2 &= \frac{1}{4}\|y(k+1) + y(k)\|_{\mathbf{A}}^2 + \tau^2\|y_t\|_{\mathbf{R} - \frac{1}{4}\mathbf{A}}^2 + \tau\|y_t\|_{\mathbf{C}}^2, \\ \|Y(k)\|^2 &= \frac{1}{4}\|y(k) + y(k-1)\|_{\mathbf{A}}^2 + \tau^2\|y_{\bar{t}}\|_{\mathbf{R} - \frac{1}{4}\mathbf{A}}^2 + \tau\|y_{\bar{t}}\|_{\mathbf{C}}^2, \end{aligned} \quad (18)$$

при этом  $\|Y(1)\|^2 = \frac{1}{4}\|y(1) + y(0)\|_{\mathbf{A}}^2 + \tau^2\|y_{\bar{t}}(0)\|_{\mathbf{R} - \frac{1}{4}\mathbf{A}}^2 + \tau\|y_{\bar{t}}(0)\|_{\mathbf{C}}^2$  и (см. (4))  $y_{\bar{t}}(0) = \frac{1}{\tau}(y(1) - y(0))$ , через  $\|\cdot\|_{\mathbf{Q}}$  обозначена операторная норма  $\mathbf{Q}$ .

В силу линейности дифференциально-разностной системы (7), (11) слабое решение ее представимо в виде  $y(k+1) = y_o(k+1) + y_f(k+1)$  для фиксированного  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, K-1$ ), где  $y_o(k+1) \in \widetilde{W}_0^1(D)$  — решение однородной задачи

$$\mathbf{B}y_{\check{t}} + \tau\mathbf{C}y_{\bar{t}\bar{t}} + \tau^2\mathbf{R}y_{\bar{t}\bar{t}} = 0, \quad y(0) = \varphi_0(x), \quad y(1) = \varphi_1(x), \quad (19)$$

а  $y_f(k+1) \in \widetilde{W}_0^1(D)$  — решение неоднородной задачи

$$\mathbf{B}y_{\check{t}} + \tau\mathbf{C}y_{\bar{t}\bar{t}} + \tau^2\mathbf{R}y_{\bar{t}\bar{t}} + \mathbf{A}y = f(k), \quad y(0) = y(1) = 0. \quad (20)$$

**Определение 4.** Дифференциально-разностная схема (11) называется устойчивой:

1) по начальным данным  $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ , если для задачи (19) справедлива априорная оценка

$$\|y(k+1)\|^{(1)} \leq C_1\|\varphi_1\|^{(1)} + C_2\|\varphi_0\|^{(1)} + C_3\|y_{\bar{t}}(0)\|, \quad k = \overline{1, K-1},$$

при любых  $\varphi_0(x)$  и  $\varphi_1(x)$  из  $\widetilde{W}_0^1(D)$ ;



2) по правой части, если для задачи (20) справедлива априорная оценка

$$\|y(k+1)\|^{(1)} \leq C_4 \|f(k)\|_{2,1}, \quad k = \overline{1, K-1},$$

при любых  $f(k)$  ( $k = \overline{1, K-1}$ ) из  $L_2(D)$ . Постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — положительные, не зависящие от  $\tau$  и  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), f(k)$ . Дифференциально-разностная схема (11) устойчива, если она устойчива по начальным данным и по правой части.

**Теорема 2.** Если выполнены условия  $\sigma \geq \frac{1}{2}, \sigma_1 \geq \sigma_2, \sigma_1 + \sigma_2 > \frac{1}{2}$  и условия (8), (9), то дифференциально-разностная схема (11) является устойчивой.

**Доказательство.** При доказательстве теоремы используется тождество (17) и очевидное соотношение

$$2\tau(f(k), y_t^\circ) \leq \alpha\tau \|y_t^\circ\|^2 + \frac{\tau}{\alpha} \|f(k)\|^2 \quad (21)$$

с произвольной не зависящей от  $\tau$  постоянной  $\alpha > 0$ .

*Устойчивость по начальным данным.* Из (17) при  $f(k) = 0$  вытекает неравенство  $\|Y(k+1)\|^2 \leq \|Y(k)\|^2$ , которое после суммирования по  $k'$  от 1 до  $k$  приводит к оценке

$$\|Y(k+1)\| \leq \|Y(1)\|. \quad (22)$$

Исходя из представления нормы  $\|Y(k+1)\|^2$  в соотношениях (18), получаем неравенство  $\|Y(k+1)\|^2 \geq D_* \|y(k+1)\|_{\mathbf{A}}^2$ , где  $D_* = \min\{\frac{1}{2}, \sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2}\}$ , при этом  $D_* > 0$ . Таким образом, приходим к оценке

$$\sqrt{D_*} \|y(k+1)\|_{\mathbf{A}} \leq \|Y(k+1)\|. \quad (23)$$

Далее, исходя из представления  $\|Y(1)\|^2$ , получаем оценку нормы  $\|Y(1)\|$ :

$$\|Y(1)\| \leq \frac{1}{2} \|y(1) + y(0)\|_{\mathbf{A}} + \sqrt{\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{1}{4}} \|y(1) - y(0)\|_{\mathbf{A}} + \sqrt{\frac{2\sigma - 1}{2}} \tau \|y_{\bar{t}}(0)\|. \quad (24)$$

Подставляя в (22) оценки (23) и (24) (при  $y(0) = \varphi_0(x), y(1) = \varphi_1(x)$ ), приходим к оценке

$$\begin{aligned} \|y(k+1)\|_{\mathbf{A}} &\leq \frac{1}{2\sqrt{D_*}} \|\varphi_1 + \varphi_0\|_{\mathbf{A}} + \sqrt{\frac{1}{2D_*} (\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2})} \|\varphi_1 - \varphi_0\|_{\mathbf{A}} + \\ &+ \sqrt{\frac{2\sigma - 1}{D_*}} \tau \|y_{\bar{t}}(0)\|, \quad k = \overline{1, K-1}, \quad y_{\bar{t}}(0) = \frac{1}{\tau} (\varphi_1(x) - \varphi_0(x)). \end{aligned}$$

Для анализа задач прикладного характера полученное неравенство можно несколько изменить, оценив  $\|Y(1)\|^2$  с помощью энергетических норм  $\|y(0)\|_{\mathbf{A}}^2$  и  $\|y(1)\|_{\mathbf{A}}^2$ :  $\|Y(1)\|^2 \leq D^* [\|y(1)\|_{\mathbf{A}}^2 + \|y(0)\|_{\mathbf{A}}^2 + \frac{1}{2} T \|y_{\bar{t}}(0)\|^2]$ , здесь  $D^* = \max\{\frac{1}{2}, \sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2}, 2\sigma - 1\}$ . Тогда из полученного неравенства следует

$$\|Y(1)\| \leq \sqrt{D^*} \left[ \|y(1)\|_{\mathbf{A}} + \|y(0)\|_{\mathbf{A}} + \sqrt{\frac{T}{2}} \|y_{\bar{t}}(0)\| \right],$$

и, учитывая (23), оценка (22) представляется в виде

$$\|y(k+1)\|_{\mathbf{A}} \leq \sqrt{\frac{D^*}{D_*}} \left[ \|y(1)\|_{\mathbf{A}} + \|y(0)\|_{\mathbf{A}} + \sqrt{\frac{T}{2}} \|y_{\bar{t}}(0)\| \right], \quad k = \overline{1, K-1},$$

что и доказывает устойчивость схемы (19) по начальным данным.



*Устойчивость по правой части.* Обратимся к анализу задачи (20), учитывая при этом  $Y(1) = 0$ . Исходя из тождества (17), используя соотношение (21) ( $\alpha = \alpha^*$ ,  $0 < \alpha^* < 2$ ) и  $\mathbf{B} > \mathbf{I}$ , приходим к неравенству

$$(2 - \alpha^*)\tau \|y_t^\circ\|^2 + \|Y(k+1)\|^2 \leq \|Y(k)\|^2 + \frac{\tau}{\alpha^*} \|f(k)\|^2.$$

После суммирования этого неравенства по  $k'$  от 1 до  $k$  получаем

$$\sum_{k'=1}^k \tau \|y_t^\circ(k')\|^2 \leq \frac{1}{\alpha^*(2 - \alpha^*)} \sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|^2. \quad (25)$$

Оценим сумму  $\sum_{k'=1}^k \tau \|y_t^\circ(k')\|^2$ . Так как  $y(k+1) + y(k) = 2\tau \sum_{k'=1}^k y_t^\circ(k')$ , то

$$\|y(k+1) + y(k)\|^2 \leq 4\tau^2 \left( \sum_{k'=1}^k y_t^\circ(k') \right)^2 \leq 4k\tau \sum_{k'=1}^k \tau \|y_t^\circ(k')\|^2. \quad (26)$$

Для  $\zeta(k'+1) = y(k'+1) - y(k')$  справедливо  $\zeta(k'+1) = 2\tau y_t^\circ(k') - \zeta(k')$  и  $\|\zeta(k'+1)\| \leq 2\tau \|y_t^\circ(k')\| + \|\zeta(k')\|$ ,  $k' = 1, 2, \dots, k$ . Суммируя последнее неравенство по  $k'$  от 1 до  $k$ , получаем  $\|\zeta(k+1)\| \leq 2 \sum_{k'=1}^k \tau \|y_t^\circ(k')\|$  или

$$\|y(k+1) - y(k)\|^2 \leq 4 \left( \sum_{k'=1}^k \tau \|y_t^\circ(k')\| \right)^2 \leq 4k\tau \sum_{k'=1}^k \tau \|y_t^\circ(k')\|^2. \quad (27)$$

Складывая (26), (27) и учитывая соотношение (25), приходим к неравенству

$$\|y(k+1)\|^2 \leq 4 \frac{T}{\alpha^*(2 - \alpha^*)} \|f(k)\|_{2,1}^2. \quad (28)$$

Если в тождестве (17) использовать соотношение (21) при  $\alpha = 2$ , то приходим к неравенству  $\|Y(k+1)\|^2 \leq \|Y(k)\|^2 + \frac{\tau}{\alpha^*} \|f(k)\|^2$ , после суммирования которого по  $k'$  от 1 до  $k$  получаем

$$\|Y(k+1)\|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|^2 = \frac{1}{2} \|f(k)\|_{2,1}^2. \quad (29)$$

Из (23) следует неравенство  $D_*^2 \left\| \frac{\partial y(k+1)}{\partial x} \right\|^2 \leq D_* \|y(k+1)\|_{\mathbf{A}}^2 \leq \|Y(k+1)\|^2$ ,

$$a_* D_* \left\| \frac{\partial y(k+1)}{\partial x} \right\|^2 \leq D_* \|y(k+1)\|_{\mathbf{A}}^2 \leq \|Y(k+1)\|^2,$$

подставляя которое в (29), приходим к неравенству

$$\left\| \frac{\partial y(k+1)}{\partial x} \right\|^2 \leq \frac{1}{2a_* D_*} \|f(k)\|_{2,1}^2. \quad (30)$$



Суммируя (28) и (30), получаем  $\|y(k+1)\|^{(1)2} \leq \left(\frac{4T}{\alpha^*(2-\alpha^*)} + \frac{1}{2D_*^2}\right) \|f(k)\|_{2,1}^2$ , что дает оценку в норме (2) пространства  $W_2^1(D)$ :

$$\|y(k+1)\|^{(1)} \leq C \|f(k)\|_{2,1}, \quad k = \overline{1, K-1}, \quad (31)$$

с положительной постоянной  $C$ , зависящей только от  $\alpha^*$  и  $D_*$ . Устойчивость схемы (11) доказана.  $\square$

Априорные оценки (28), (30) и (31) можно использовать для доказательства слабой разрешимости дифференциальной системы, соответствующей системе (6), (7), аналогично тому, как это сделано в работе [3].

## Заключение

В работе получены условия устойчивости совокупности дифференциально-разностных схем (9) (или (13)) в терминах весовых параметров  $\sigma$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — условия теоремы 2. При этом представлены априорные оценки норм слабых решений этих схем, которые представляют эффективный инструмент не только для отыскания условий разрешимости схемы, но и непрерывности ее по исходным данным. Кроме того, получено обоснование метода полудискретизации по временной переменной эволюционной дифференциальной системы: 1) редукция этой системы с пространственной переменной, изменяющейся на сетеподобной области к дифференциально-разностной системе (9), (10); 2) достаточные условия, при выполнении которых свойства дифференциально-разностной системы переносятся на дифференциальную систему. Использование дифференциально-разностной системы для анализа эволюционной дифференциальной указывают путь алгоритмизации полученных результатов, необходимый при решении прикладных задач. Следует отметить, что представленные в работе результаты можно использовать при изучении различного рода сетеподобных процессов прикладного характера [11–13].

## Список литературы

1. *Provotorov V. V., Sergeev S. M., Hoang V. N.* Point control of a differential-difference system with distributed parameters on the graph // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17, вып. 3. С. 277–286. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.305>
2. *Zhabko A. P., Provotorov V. V., Shindyapin A. I.* Optimal control of a differential-difference parabolic system with distributed parameters on the graph // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17, вып. 4. С. 433–448. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.411>
3. *Хоанг В. Н., Провоторов В. В.* Устойчивость трехслойной симметричной дифференциально-разностной схемы в классе суммируемых на сетеподобной области функций // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27, вып. 137. С. 80–94. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-137-80-94>
4. *Rothe E.* Über die Wärmeleitungsgleichung mit nichtkonstanten Koeffizienten im räumlichen Falle // Mathematische Annalen. 1931. Vol. 104. P. 355–362. <https://doi.org/10.1007/BF01457943>
5. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. Москва : Наука, 1977. 655 с.
6. *Dobova A., Fernandez-Cara E., Gonzalez-Burgos M.* Controllability results for linear viscoelastic fluids of the Maxwell and Jeffreys kinds // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences – Series I – Mathematics. 2000. Vol. 331, iss. 7. P. 537–542. [https://doi.org/10.1016/S0764-4442\(00\)01662-1](https://doi.org/10.1016/S0764-4442(00)01662-1)



7. Boldrini J. L., Doubova A., Fernandez-Cara E., Gonzalez-Burgos M. Some controllability results for linear viscoelastic fluids // *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2012. Vol. 50, iss. 2. P. 900–924. <https://doi.org/10.1137/100813592>
8. Renardy M. On control of shear flow of an upper convected Maxwell fluid // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2007. Vol. 87. P. 213–218. <https://doi.org/10.1002/zamm.200610313>
9. Wachsmuth D., Roubicek T. Optimal control of planar flow of incompressible non-Newtonian fluids // *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendung*. 2010. Vol. 29. P. 351–376. <https://doi.org/10.4171/ZAA/1412>
10. Debbouche A., Nieto J. J. Sobolev type fractional abstract evolution equations with nonlocal conditions and optimal multi-controls // *Applied Mathematics and Computation*. 2014. Vol. 245. P. 74–85. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.07.073>
11. Baranovskii E. S. Steady flows of an Oldroyd fluid with threshold slip // *Communications on Pure and Applied Analysis*. 2019. Vol. 18, iss. 2. P. 735–750. <https://doi.org/10.3934/cpaa.2019036>
12. Baranovskii E. S., Artemov M. A. Solvability of the Boussinesq approximation for water polymer solutions // *Mathematics*. 2019. Vol. 7, iss. 7. Art. 611. <https://doi.org/10.3390/math7070611>
13. Artemov M. A., Baranovskii E. S. Global existence results for Oldroyd fluids with wall slip // *Acta Applicandae Mathematicae*. 2017. Vol. 147, iss. 1. P. 197–210. <https://doi.org/10.1007/s10440-016-0076-z>

### References

1. Provotorov V. V., Sergeev S. M., Hoang V. N. Point control of a differential-difference system with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 3, pp. 277–286. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.305>
2. Zhabko A. P., Provotorov V. V., Shindyapin A. I. Optimal control of a differential-difference parabolic system with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, iss. 4, pp. 433–448. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.411>
3. Hoang V. N., Provotorov V. V. Stability of a three-layer symmetric differential-difference scheme in the class of functions summable on a network-like domain. *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, iss. 137, pp. 80–94 (in Russian). <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-137-80-94>
4. Rothe E. Über die Wärmeleitungsgleichung mit nichtkonstanten Koeffizienten im räumlichen Falle. *Mathematische Annalen*, 1931, vol. 104, pp. 340–362 (in German). <https://doi.org/10.1007/BF01457943>
5. Samarsky A. A. *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1977. 655 c. (in Russian).
6. Doubova A., Fernandez-Cara E., Gonzalez-Burgos M. Controllability results for linear viscoelastic fluids of the Maxwell and Jeffreys kinds. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences – Series I – Mathematics*, 2000, vol. 331, iss. 7, pp. 537–542. [https://doi.org/10.1016/S0764-4442\(00\)01662-1](https://doi.org/10.1016/S0764-4442(00)01662-1)
7. Boldrini J. L., Doubova A., Fernandez-Cara E., Gonzalez-Burgos M. Some controllability results for linear viscoelastic fluids. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2012, vol. 50, iss. 2, pp. 900–924. <https://doi.org/10.1137/100813592>
8. Renardy M. On control of shear flow of an upper convected Maxwell fluid. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2007, vol. 87, pp. 213–218. <https://doi.org/10.1002/zamm.200610313>
9. Wachsmuth D., Roubicek T. Optimal control of planar flow of incompressible non-Newtonian



- fluids. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendung*, 2010, vol. 29, pp. 351–376. <https://doi.org/10.4171/ZAA/1412>
10. Debbouche A., Nieto J. J. Sobolev type fractional abstract evolution equations with nonlocal conditions and optimal multi-controls. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, vol. 245, pp. 74–85. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.07.073>
  11. Baranovskii E. S. Steady flows of an Oldroyd fluid with threshold slip. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2019, vol. 18, iss. 2, pp. 735–750. <https://doi.org/10.3934/cpaa.2019036>
  12. Baranovskii E. S., Artemov M. A. Solvability of the Boussinesq approximation for water polymer solutions. *Mathematics*, 2019, vol. 7, iss. 7, Art. 611. <https://doi.org/10.3390/math7070611>
  13. Artemov M. A., Baranovskii E. S. Global existence results for Oldroyd fluids with wall slip. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2017, vol. 147, iss. 1, pp. 197–210. <https://doi.org/10.1007/s10440-016-0076-z>

Поступила в редакцию / Received 15.09.2022

Принята к публикации / Accepted 24.10.2022

Опубликована / Published 31.08.2023





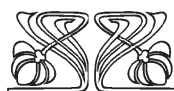
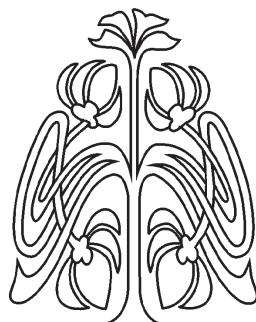
## МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 370–410  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 370–410

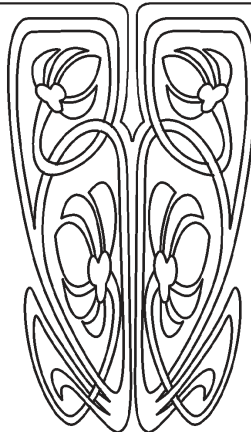
[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru)

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-370-410>

EDN: YSOXDU



Научный  
отдел



Обзорная статья  
УДК 539.3

### Математические модели деформирования оболочечных конструкций и алгоритмы их исследования Часть I. Модели деформирования оболочечных конструкций

**В. В. Карпов, П. А. Бакусов<sup>✉</sup>,  
А. М. Масленников, А. А. Семенов**

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Россия, 190005, г. Санкт-Петербург, ул. 2-я Красноармейская, д. 4

**Карпов Владимир Васильевич**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем и технологий, [vvkarpov@lan.spbgasu.ru](mailto:vvkarpov@lan.spbgasu.ru), <https://orcid.org/0000-0001-7911-4067>, AuthorID: 339002

**Бакусов Павел Анатольевич**, старший преподаватель кафедры информационных систем и технологий, [bakusovpavel@gmail.com](mailto:bakusovpavel@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0003-1215-1183>, AuthorID: 936766

**Масленников Александр Матвеевич**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры строительной механики, [aleksmaslennikov@yandex.ru](mailto:aleksmaslennikov@yandex.ru), AuthorID: 541277

**Семенов Алексей Александрович**, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий, [sw.semenov@gmail.com](mailto:sw.semenov@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0001-9490-7364>, AuthorID: 648893

**Аннотация.** Приводятся сведения по истории развития теории тонких оболочек в хронологическом порядке с указанием конкретных ученых и их вклада в совершенствование теории. Обзор работ состоит из тех публикаций, которые касаются именно разработки теории оболочек. Излагаются математические модели деформирования тонких упругих оболочек, как наиболее точные, так и упрощенные. Изложение ведется на основе публикации российских авторов, вклад которых



в совершенствование теории оболочек наиболее существенен (В. В. Новожилов, А. И. Лурье, А. Л. Гольденвейзер, Х. М. Муштари, В. З. Власов). Отмечены также ученые, внесшие существенный вклад в теорию, методы расчета, исследования прочности, устойчивости и колебаний оболочек. Отдельно показано применение этих моделей для исследования ребристых оболочек. Приводятся сведения по разработке нелинейной теории оболочек и показаны нелинейные соотношения для деформаций. Анализируются математические модели деформирования тонких оболочек, полученные разными авторами. Показано, что если срединная поверхность оболочки отнесена к ортогональной системе координат, то выражения деформаций, полученные разными авторами, практически совпадают (отличаются членами, которыми ввиду их малости можно пренебречь). А. Л. Гольденвейзером разработаны математические модели деформирования тонких оболочек, когда их срединная поверхность отнесена к произвольной косоугольной системе координат. Для задач статики записывается функционал полной потенциальной энергии деформации, представляющий собой разность потенциальной энергии и работы внешних сил. Из условия минимума этого функционала выводятся уравнения равновесия и естественные краевые условия. Для задач динамики составляется функционал полной энергии деформации оболочки, в котором кроме потенциальной энергии деформации оболочки и работы внешних сил участвует еще и кинетическая энергия деформации оболочки. Также из условия минимума этого функционала выводятся уравнение движения и естественные краевые и начальные условия. Приводятся некоторые сведения по результатам современных исследований в теории тонких оболочек.

**Ключевые слова:** упругие тонкие оболочки, история развития, ребристые оболочки, упрощенные теории оболочек, современные проблемы, вариационные методы, уравнения равновесия, уравнения движения

**Для цитирования:** Карпов В. В., Бакусов П. А., Масленников А. М., Семенов А. А. Математические модели деформирования оболочечных конструкций и алгоритмы их исследования. Часть I. Модели деформирования оболочечных конструкций // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 370–410. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-370-410>, EDN: YSOXDU

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Review

## Simulation models and research algorithms of thin shell structures deformation Part I. Shell deformation models

V. V. Karpov, P. A. Bakusov<sup>✉</sup>, A. M. Maslennikov, A. A. Semenov

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, 4 Vtoraya Krasnoarmeiskaya St., Saint Petersburg 190005, Russia

Vladimir V. Karpov, [vvkarpov@lan.spbgasu.ru](mailto:vvkarpov@lan.spbgasu.ru), <https://orcid.org/0000-0001-7911-4067>, AuthorID: 339002

Pavel A. Bakusov, [bakusovpavel@gmail.com](mailto:bakusovpavel@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0003-1215-1183>, AuthorID: 936766

Alexander M. Maslennikov, [aleksmaslennikov@yandex.ru](mailto:aleksmaslennikov@yandex.ru), AuthorID: 541277

Alexey A. Semenov, [sw.semenov@gmail.com](mailto:sw.semenov@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0001-9490-7364>, AuthorID: 648893

**Abstract.** In the article the development of thin shell construction theory is considered according to the contribution of researchers, chronology, including the most accurate and simplified



solutions. The review part of the article consists only of those publications which are related to the development of shell theory. The statement is based on the works of famous Russian researchers (V. V. Novozhilov, A. I. Lurie, A. L. Goldenweiser, H. M. Mushtari, V. Z. Vlasov), who developed the specified theory the most. The paper also mentions the researchers who improved the theory, calculation methods in aspects of strength, sustainability and vibrations of thin elastic shell constructions. Separately the application of the models for ribbed shells constructions is shown. It is reporting the basic principles of nonlinear thin shell construction theory development, including the nonlinear relations for deformations. In the article it is shown that if median surface of the shell is referred to the orthogonal coordinate system, then the expressions for deformations, obtained by different authors, practically correspond. The case in which the median surface of the shell is referred to an oblique-angled coordinate system was developed by A. L. Goldenweiser. For static problem, the functional of the total potential energy of deformation, representing the difference between the potential energy and the work of external forces, is used. The equilibrium equations and natural boundary conditions are derived from the minimum condition of this functional. In case of dynamic problem, the functional of the total deformation energy of the shell is described in which it is necessary to consider the kinetic energy of shell deformation. It is necessary to underline that the condition for minimum of the specified functional lets to derive the movement equations and natural boundary and initial conditions. Also, in the article the results of contemporary research of thin shell theory are presented.

**Keywords:** elastic thin shell, timeline, ribbed shells, simplified shell theories, present troubles, variational methods, equilibrium equations, equations of motion

**For citation:** Karpov V. V., Bakusov P. A., Maslennikov A. M., Semenov A. A. Simulation models and research algorithms of thin shell structures deformation. Part I. Shell deformation models. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 370–410 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-370-410>, EDN: YSOXDU

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Тонкостенные оболочечные конструкции отличаются разнообразием форм и существенно более высокой жесткостью, чем пластины. Они применяются в различных областях техники: в машиностроении (корпуса всевозможных машин, улитки турбин); в приборостроении (гибкие упругие элементы: сильфоны, мембраны); в гражданском и промышленном строительстве (покрытия и перекрытия большепролетных сооружений: рынки, цирки, складские помещения, ангары, пандусы, навесы и козырьки); в кораблестроении (корпуса судов, сухих и плавучих доков); в авиационном (фюзеляжи и крылья самолетов); в ракетостроении (корпуса ракет); в подвижном составе железных дорог (кузовы вагонов, цистерны); в промышленной аппаратуре (всевозможные емкости); в котлостроении (котлы); в трубопроводах (трубы, компенсаторы); в атомной энергетике (защитные оболочки реакторов) и т.д.

Использование оболочечных конструкций в различных областях техники требует проведения расчетов их прочности, устойчивости и колебаний, а для этого необходимо, чтобы были разработаны теории оболочек, причем нужны и наиболее точные, и приближенные. При проектировании оболочек покрытия строительных сооружений нужна сравнительно невысокая точность расчетов, так как все равно будет назначен коэффициент запаса прочности. В авиационном и приборостроении необходима высокая степень прочности и, следовательно, более точные теории оболочек. Для



повышения жесткости оболочек, чтобы избежать их потери устойчивости, оболочка подкрепляется ребрами, а по технологическим причинам могут иметь вырезы, значит, нужны математические модели деформирования не только оболочек постоянной толщины, но и ступенчато-переменной толщины. Приведенный в статье обзор теории тонких оболочек и оболочек, подкрепленных ребрами жесткости, позволяет, исходя из поставленных задач исследования, выбрать наиболее приемлемую модель деформирования оболочек.

## 1. История развития теории оболочек

Оболочкой называется трехмерное тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми существенно меньше, чем другие размеры. Такая конструкция считается тонкой, если отношение ее толщины к радиусу кривизны меньше, чем  $1/20$ . В противном случае оболочка считается толстой.

Современная теория тонких оболочек сформировалась благодаря трудам основоположников теории оболочек, таких как Н. Арон [1], А. Лов [2], Н. Рейсснер [3], Л. Донелл [4], Б. Г. Галеркин [5], С. Фейнберг [6], А. И. Лурье [7], Х. М. Муштари [8], А. Л. Гольденвейзер [9], В. В. Новожилов [10], В. З. Власов [11], Ю. Н. Работнов [12], И. Н. Векуа [13], С. А. Амбарцумян [14], Н. А. Алумяэ [15].

Изначально было принято предположение, что нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности, малы по сравнению с другими напряжениями и что среда, заполняемая оболочкой, обладает свойством сплошности, поэтому деформации и напряжения являются непрерывными функциями.

По аналогии с теорией пластин в теории оболочек применяется два основных метода получения разрешающих уравнений. Первый основан на разложении функций перемещений и напряжений в ряды по степеням  $z$ . Этот метод для пластин был предложен А. Коши и С. Пуассоном. В теории оболочек этот метод применялся в работах Ф. Краусса [16] и Н. А. Кильчевского [17]. Второй метод основан на применении некоторых гипотез. Этот метод для пластин был предложен Г. Кирхгофом. Метод, основанный на применении гипотез (например, гипотезы прямой нормали), быстро завоевал общее признание, так как вносил физическую ясность и имел большую наглядность, поэтому большинство авторов использовали этот метод при разработке теории оболочек. Следует заметить, что метод Коши – Пуассона, если учитывать большее число слагаемых, должен давать более точные уравнения теории оболочек и тем самым представляется универсальным методом. Однако еще в 1883 г. Сен-Венан указывал на недоказанную сходимости получающихся рядов (область и характер сходимости этих рядов до сих пор не исследованы). В свою очередь, метод Кирхгофа также имеет существенный недостаток. Теория Кирхгофа является приближенной и не может быть развита в точную теорию. Однако кроме гипотезы прямой нормали (Кирхгофа) можно использовать гипотезу, учитывающую поперечные сдвиги, а также гипотезу, при которой нормаль, проведенная к срединной поверхности оболочки, до деформирования не только поворачивается (учитываются поперечные сдвиги), но и искривляется. В первых двух случаях перемещения, а следовательно, деформации и напряжения, изменяющиеся вдоль толщины оболочки, изменяются по линейному закону, а в третьем — по кубическому. С этой точки зрения теория Коши – Пуассона была бы более предпочтительной, если бы вопрос сходимости получающихся рядов был решен.

Основная сложность в теории оболочек по сравнению с теорией пластин заключается в том, что в пластинах зависимость деформаций от перемещений находится на



плоскости, а в оболочках — на некоторой поверхности, что существенно усложняет все дифференциальные зависимости.

Если на плоскости для диагонали  $ds$  прямоугольника со сторонами  $dx$  и  $dy$  ( $x, y$  — ортогональные координаты) имеет место соотношение

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

то на криволинейной поверхности это соотношение принимает вид

$$ds^2 = A^2 dx^2 + B^2 dy^2,$$

где  $A, B$  — параметры Ляме поверхности оболочки. Здесь  $x, y$  — криволинейные координаты (точнее было бы сказать — координатные линии, так как координаты  $x, y$  могут быть как линейными, так и угловыми), и они являются ортогональными. Параметры Ляме  $A, B$  и кривизны оболочки  $k_x = 1/R_1, k_y = 1/R_2$  ( $R_1, R_2$  — главные радиусы кривизны оболочки) связаны между собой уравнениями Кодацци и Гаусса.

В указанных ранее работах рассматривались упругие оболочки постоянной толщины в геометрически линейной постановке. В основном считалась справедливой гипотеза прямой нормали (исключениями являются работы Н. Рейсснера, в которых учитываются поперечные сдвиги). Материал в основном считается изотропным. Только в работе С. А. Амбарцумяна учитывается анизотропия материала.

В работе В. В. Новожилова получены геометрически линейные зависимости деформаций  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  в срединной поверхности оболочки (толщиной  $h$ ), принятой за координатную поверхность, которые зависят от перемещений  $U, V, W$  (в направлении координат  $x, y$  и  $z$  соответственно). Эти зависимости характеризуют изменения размеров малого элемента срединной поверхности оболочки при деформировании. Функции изменения кривизн  $\chi_1, \chi_2$  и кручения  $\chi_{12}$  характеризуют его искривление. Поскольку сеть координатных линий  $x$  и  $y$  на деформированной срединной поверхности перестает быть ортогональной, то  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \chi_1, \chi_2, \chi_{12}$  характеризуют это состояние.

Упрощенный вариант модели был разработан Х. М. Муштари, Л. Н. Донелл и В. З. Власовым (техническая теория оболочек). Уравнения в перемещениях были получены Х. М. Муштари, а уравнения в смешанной форме (относительно функции прогиба  $W$  и некоторой функции напряжений  $\Phi$ ) — В. З. Власовым.

Оболочечные конструкции благодаря своей кривизне могут выдерживать существенно более высокие нагрузки, чем пластины, но у них один недостаток: они могут терять устойчивость. Исследование устойчивости оболочек изначально проводилось на основе подхода Л. Эйлера (т.е. переход к задаче на собственные значения, и при этом решались линейные уравнения). Такой метод исследования устойчивости оболочек применялся, например, в работах Э. И. Григолюка и В. В. Кабанова [18], а также П. Е. Товстика [19].

В связи с возросшим интересом инженеров, прежде всего самолетостроителей, к вопросам устойчивости оболочек под действием разного вида нагрузок в 1930-е и 1940-е гг. интенсивное развитие получила нелинейная теория оболочек.

Нелинейная теория пластин, разработанная трудами И. Г. Бубнова [20] и Th. Карман [21], послужила некоторой базой для разработки нелинейной теории оболочек.

В развитии данной теории основополагающую роль сыграли работы Х. М. Муштари (1939), А. И. Лурье (1940), В. В. Новожилова (1948, 1962), Н. А. Алумяэ (1949), В. З. Власова (1949), В. И. Феодосьева (1949, [22]), И. И. Воровича (1955, [23]).



И. И. Ворович доказал существование решений нелинейных задач теории оболочек. Вопросам существования решений также посвящены работы L. Donell [24], Th. Karman и H. Shen Tsien [25], K. Marguerre [26].

Появилась возможность исследовать устойчивость оболочек с учетом геометрической нелинейности, выявлять местные и общие формы потери устойчивости. Особенно активный рост таких исследований в России начался с появлением ЭВМ (1951 г., но практическое использование ЭВМ в инженерных расчетах началось примерно с 1956 г., когда на математических факультетах университетов стали готовить специалистов по программированию на ЭВМ) и опубликованием в 1959 г. В. В. Петровым метода последовательных нагружений [27], который позволил решение нелинейных задач свести к последовательному решению линейных задач с изменяющимися на каждом этапе нагружения коэффициентами.

Для повышения жесткости оболочки подкрепляются ребрами. Основные идеи расчета ребристых оболочек были высказаны в конце 40-х гг. XX в. А. И. Лурье и В. З. Власовым, которые заложили два основных подхода к расчету ребристых оболочек. Как А. И. Лурье [28], так и В. З. Власов [29] считали, что ребра взаимодействуют с обшивкой по линии. Третий подход к ребристой оболочке основан на «размазывании» жесткости ребер по всей оболочке. В большинстве работ авторов до настоящего времени применяются первые два подхода (работы И. Я. Амиро и В. А. Заруцкого [30], Е. С. Гребня [31], Б. К. Михайлова [32], В. М. Рассудова [33], Г. Н. Белосточного [34], О. И. Теребушко [35], С. А. Тимашева [36], И. Е. Милейковского и И. П. Гречанинова [37] и др.). Третий подход применялся, например, в работе Е. Ф. Бурмистрова [38]. Введение ребер по линии упрощает математическую модель оболочки, но приводит к пренебрежению многими важными физическими факторами, что сказывается на точности получаемых решений.

В конце 60-х гг. прошлого столетия ученик А. И. Лурье П. А. Жилин предложил рассматривать ребристую оболочку как оболочку дискретно-переменной толщины [39]. Аналогичный подход применялся в работах Л. В. Енджиевского [40] и И. Н. Преображенского [41]. Впоследствии (начало 80-х гг.) В. В. Карповым [42] была разработана геометрически нелинейная модель пологих оболочек ступенчато-переменной толщины, имеющих ребра, накладки и вырезы, в которой учитывалось дискретное расположение ребер и вырезов, контакт с обшивкой по полосе, жесткое соединение ребер при пересечении, сдвиговая и крутильная жесткость ребер, поперечные сдвиги, т.е. все наиболее важные факторы, влияющие на напряженно-деформированное состояние и устойчивость оболочек, которыми раньше пренебрегали из-за сложности их учета [43]. Им была доказана эквивалентность подходов В. З. Власова и А. И. Лурье к расчету ребристых оболочек и разработан метод конструктивной анизотропии, учитывающий сдвиговую и крутильную жесткости ребер.

С появлением новых композиционных материалов (стеклопластик, углепластик, боропластик и т. д.) возникла необходимость исследования устойчивости оболочек из таких материалов. Одной из первых работ по исследованию устойчивости оболочек из композиционных материалов является работа Р. Б. Рикардса и Г. А. Тетерса [44]. В ней рассматривались упругие оболочки постоянной толщины и считалась справедливой гипотеза прямой нормали.

Нельзя сказать, что по исследованию устойчивости оболочек из композиционных материалов имеется обширная литература. Такие материалы используются в самолетостроении для изготовления некоторых деталей, так как эти детали легкие и высокопрочные, однако дорогостоящие. Вместе с изготовлением конструкций из



композиционных материалов изготавливается и сам материал. На макет будущей конструкции укладываются волокна из какого-либо материала (например, стеклянные) — это основа, а в качестве связующего может быть, например, эпоксидная смола. Следующий слой укладывается под углом к первому и т.д., а могут слои укладываться в одном направлении (это так называемый однонаправленный композит, который представляет собой ортотропный материал). После затверждения связующего получается очень прочный материал, не уступающий по прочности стали, но в 2.5 раза более легкий.

Дороговизна материала, сложность изготовления конструкции — все это причины того, что композиционные материалы в строительстве пока еще используются мало. Кроме того, недостаточно исследована работа конструкций из таких материалов. Для композиционных материалов усложняются все соотношения теории оболочек, в том числе и критерии прочности. Исследованию прочности, устойчивости и нелинейных колебаний ребристых оболочек из композиционных материалов посвящены работы А. А. Семенова [45–47].

По теории, методам расчета, исследованию прочности, устойчивости и колебаний оболочечных конструкций имеется обширный набор публикаций. В этой связи особо необходимо отметить вклад некоторых авторов. Одним из первых подробно изложил вариационный метод вывода уравнений равновесия оболочек и естественных краевых условий А. С. Вольмир [48–50]. Он предложил критерий определения момента потери устойчивости оболочек при динамическом нагружении и провел многочисленные исследования по динамике пластин и оболочек.

Ученик В. В. Новожилова К. Ф. Черных разработал нелинейную теорию тонких оболочек, допускающих большие деформации [51–53]. Такими свойствами обладают изделия из высокопластичных материалов (эластомеров).

Ученик В. З. Власова В. В. Петров разработал метод последовательных нагружений и провел обширные исследования устойчивости пологих оболочек двоякой кривизны [54, 55], а также разработал теорию оболочек с наведенной неоднородностью для исследования их при нахождении в агрессивных средах.

Ученик А. Л. Гольденвейзера Л. Ю. Коссович внес существенный вклад в решение нестационарных задач теории упругих тонких оболочек и в исследование резонансных явлений в упругих телах [56, 57].

Кроме того, в дополнение к перечисленным выше следует отметить работы следующих авторов: Э. Л. Аксельрад [58], К. З. Галимов [59], В. Н. Паймушин [60], Г. И. Пшеничнов [61], В. А. Максимюк [62], И. Е. Милейковский и С. И. Трушин [63], А. Н. Гузь [64], Л. И. Балабух [65], В. И. Шалашилин и Е. Б. Кузнецов [66], С. С. Гаврюшин [67], Н. В. Валишвили [68], А. Д. Коваленко [69], Н. П. Абовский [70], Н. А. Алфутов [71], Б. Я. Кантор [72], А. В. Кармишин [73], В. И. Климанов и С. А. Тимашев [74], И. Г. Терегулов [75], В. А. Крысько [76], А. К. Перцев [77], А. П. Филин [78], С. А. Кабриц и Е. Н. Михайловский [52], М. С. Корнишин [79], С. Н. Кривошапка [80], Е. Meissner [81], И. С. Чернышенко [64], В. Л. Якушев [82], Л. В. Андреев, Н. И. Ободан, А. Г. Лебедев [83] и др.

Можно назвать даже целые школы, где в нашей стране проводились глубокие исследования оболочечных конструкций. Это Московская, Ленинградская, Казанская, Ростовская, Саратовская, Красноярская научные школы. Из бывших советских республик следует отметить Украинскую (Киев, Днепропетровск, Харьков), Грузинскую (Тбилиси, Кутаиси), Армянскую (Ереван), Прибалтийскую (Рига, Вильнюс), Молдавскую (Кишинеу) школы.



В Советском Союзе были популярны и престижны проводимые регулярно в различных городах, где есть соответствующие научные школы, Всесоюзные конференции по теории пластин и оболочек.

## 2. Математические модели деформирования оболочек

Рассмотрим основные математические модели тонких упругих оболочек, разработанные разными авторами. Так как большой вклад в современную теорию тонких оболочек внесли российские ученые, то описание основных подходов к формированию теории оболочек будем излагать, опираясь на их публикации.

Обозначения одних и тех же параметров у разных авторов — разные. Чтобы внести единообразие в изложение теории оболочек, примем ортогональную систему координат  $x, y, z$ , как показано на рис. 1.

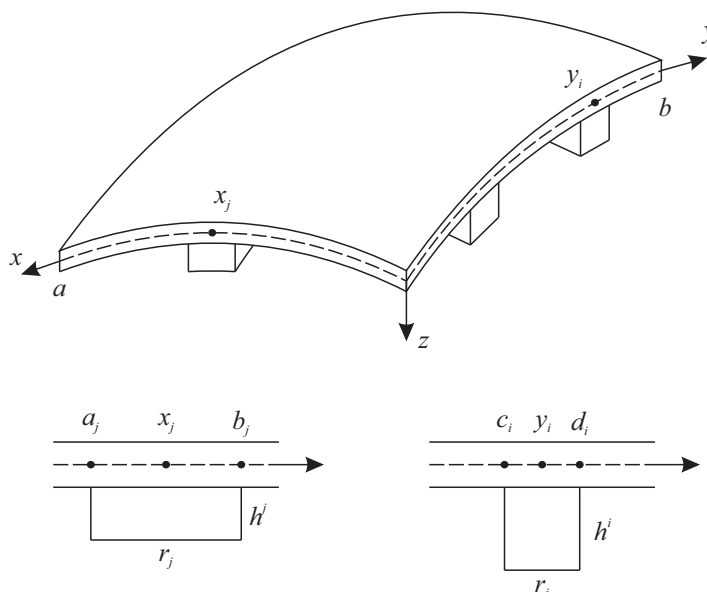


Рис. 1. Оболочка ступенчато-переменной толщины  
Fig. 1. Shells of step-variable thickness

Криволинейные координаты  $x, y$  проходят по линиям главных кривизн (координатные линии  $x, y$ , если эти координаты угловые) и изменяются в пределах от 0 до  $a$  и от 0 до  $b$  соответственно. Для оси  $z$  за 0 принят срединный слой, поэтому по данному направлению координата меняется от  $-h/2$  до  $h/2$ . Далее по тексту используются следующие обозначения:

$U, V, W$  — перемещения точек срединной поверхности вдоль координат  $x, y, z$  [м];  
 $\Psi_x, \Psi_y$  — углы поворота нормали в плоскостях  $xOz, yOz$ , характеризующие поперечные сдвиги [рад];

$\epsilon_x, \epsilon_y$  — деформации удлинения вдоль координат  $x, y$  [-];

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  — деформации сдвига в плоскостях  $xOy, xOz, yOz$  [-];

$\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$  — функции изменения кривизны и функция кручения [1/м];

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  — нормальные напряжения в направлении координат  $x, y, z$  [МПа];

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  — касательные напряжения в плоскостях  $xOy, xOz, yOz$  [МПа];

$N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}$  — нормальные усилия вдоль координат  $x, y$  и сдвиговые усилия в плоскости  $xOy$  [МПа·м];





$M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}$  — изгибающие моменты в направлении координат  $x, y$  и крутящие моменты [МПа·м<sup>2</sup>];

$Q_x, Q_y$  — поперечные (перерезывающие) силы в плоскостях  $xOz, yOz$  [МПа·м].

Индекс  $z$  сверху параметров обозначает, что они рассматриваются в слое, отстоящем на расстояние  $z$  от координатной поверхности.

Рассматривать будем только линейно-упругие деформации.

## 2.1. Теория тонких упругих оболочек, разработанная В. В. Новожиловым

Рассматривается геометрически линейный вариант оболочек произвольного вида. Считается справедливой гипотеза прямой нормали (модель Кирхгофа – Лява). В этом случае тангенциальные деформации в слое, отстоящем на расстояние  $z$  от координатной поверхности, примут вид ( $k_x = 1/R_1, k_y = 1/R_2, k_1 = k_x + k_y$ ) [10]:

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z(\chi_1 - \varepsilon_x k_x), \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z(\chi_2 - \varepsilon_y k_y), \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + z(2\chi_{12} - k_1 \gamma_{xy}). \quad (1)$$

Здесь для геометрически линейного варианта [10] деформации примут вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} V - k_x W, & \varepsilon_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U - k_y W, \\ \gamma_{xy} &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{U}{A} \right), \\ \chi_1 &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right), \\ \chi_2 &= -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right), \\ \chi_{12} &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right) - \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right) + \frac{\partial B}{\partial x} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right) \right) \right], \end{aligned}$$

где  $A, B$  — параметры Ляме поверхности оболочки.

Соотношения (1) получены при условии, что в слое, отстоящем на  $z$  от координатной поверхности, параметры Ляме и радиусы кривизны имеют вид

$$A^z = A(1 + zk_x), \quad B^z = B(1 + zk_y), \quad R_1^z = R_1 + z, \quad R_2^z = R_2 + z,$$

а перемещения примут вид

$$U^z = U + z\theta_1, \quad V^z = V + z\theta_2, \quad W^z = W,$$

где

$$\theta_1 = -\left( \frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right), \quad \theta_2 = -\left( \frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right).$$

Кроме того, при преобразовании некоторых выражений использовались уравнения Кодацци

$$\frac{\partial}{\partial y} (k_x A) = k_y \frac{\partial A}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} (k_y B) = k_x \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Вывод соотношений (1) покажем на примере получения выражения для  $\varepsilon_x^z$ :

$$\varepsilon_x^z = \frac{1}{A(1 + zk_x)} \frac{\partial U^z}{\partial x} + \frac{V^z}{AB(1 + zk_x)(1 + zk_y)} \frac{\partial}{\partial y} (A(1 + zk_x)) - \frac{W^z}{R_1 + z}.$$



Используя уравнение Кодацци  $k_y \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (k_x A)$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial y} (A(1 + zk_x)) = \frac{\partial}{\partial y} (A + zk_x A) = \frac{\partial A}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial y} (k_x A) = \frac{\partial A}{\partial y} + zk_y \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} (1 + zk_y).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^z &= \frac{1}{1 + zk_x} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{1 + zk_y}{AB(1 + zk_y)} \frac{\partial A}{\partial y} (V + z\theta_2) - k_x W \right) = \\ &= \frac{1}{1 + zk_x} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} V - k_x W + z \left( \frac{1}{A} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \theta_2 \right) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, получим соотношения ( $\varepsilon_y^z, \gamma_{xy}^z$  получаются аналогично)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^z &= \frac{1}{1 + zk_x} (\varepsilon_x + z\chi_1), \quad \varepsilon_y^z = \frac{1}{1 + zk_y} (\varepsilon_y + z\chi_2), \\ \gamma_{xy}^z &= \frac{1}{(1 + zk_x)(1 + zk_y)} (\gamma_{xy} + 2z\chi_{12} + z^2 k_1 \chi_{12}). \end{aligned} \quad (2)$$

Теперь, используя разложение в ряд Тейлора функции  $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots$ , получим

$$\frac{1}{1 + zk_x} = 1 - zk_x + z^2 k_x^2 - \dots, \quad \frac{1}{1 + zk_y} = 1 - zk_y + z^2 k_y^2 - \dots$$

В этом разложении будем удерживать только первые два члена, считая величины  $z^2/R_1^2, z^2/R_2^2, z^2/(R_1 R_2)$  малыми и отбрасывая их.

Итак, преобразуем, например,  $\varepsilon_x^z$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^z &= \frac{1}{1 + zk_x} (\varepsilon_x + z\chi_1) = (1 - zk_x) (\varepsilon_x + z\chi_1) = \varepsilon_x + z(\chi_1 - k_x \varepsilon_x) - z^2 k_x \chi_1 \approx \\ &\approx \varepsilon_x + z(\chi_1 - k_x \varepsilon_x). \end{aligned}$$

Таким образом, преобразуя еще  $\varepsilon_y^z$  и  $\gamma_{xy}^z$ , получим (1). Более точные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^z &= \varepsilon_x + z(\chi_1 - k_x \varepsilon_x) - z^2 k_x \chi_1, \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z(\chi_2 - k_y \varepsilon_y) - z^2 k_y \chi_2, \\ \gamma_{xy}^z &= \gamma_{xy} + z(2\chi_{12} - k_1 \gamma_{xy}) - z^2 (k_1 \chi_{12} - k_x k_y \gamma_{xy}). \end{aligned}$$

Для упругих изотропных материалов, исходя из закона Гука, напряжения будут иметь вид

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x^z + \mu \varepsilon_y^z), \quad \sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_y^z + \mu \varepsilon_x^z), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma_{xy}^z. \quad (3)$$

Потенциальная энергия деформации оболочки, равная работе внутренних сил, записывается в виде [10]

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \varepsilon_x^z + \sigma_y \varepsilon_y^z + \tau_{xy} \gamma_{xy}^z) (1 + zk_x) (1 + zk_y) AB dx dy dz. \quad (4)$$



Используя (2) и (3), В. В. Новожилов потенциальную энергию деформации оболочки (4) привел к виду

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left( N_x \varepsilon_x + M_x \chi_1 + N_y \varepsilon_y + M_y \chi_2 + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \gamma_{xy} + \frac{1}{2} M_{xy} (2\chi_{12} - k_y \gamma_{xy}) + \frac{1}{2} M_{yx} (2\chi_{12} - k_x \gamma_{xy}) \right) AB dx dy.$$

Здесь усилия и моменты имеют вид

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{E}{1 - \mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{1 + zk_y}{1 + zk_x} (\varepsilon_x + z\chi_1) + \mu (\varepsilon_y + z\chi_2) \right) dz, \\ N_y &= \frac{E}{1 - \mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{1 + zk_x}{1 + zk_y} (\varepsilon_y + z\chi_2) + \mu (\varepsilon_x + z\chi_1) \right) dz, \\ N_{xy} &= \frac{E}{2(1 + \mu)} \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma_{xy} + 2z\chi_{12} + z^2 k_1 \chi_{12}) \frac{dz}{1 + zk_x}, \\ N_{yx} &= \frac{E}{2(1 + \mu)} \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma_{xy} + 2z\chi_{12} + z^2 k_1 \chi_{12}) \frac{dz}{1 + zk_y}, \\ M_x &= \frac{E}{1 - \mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{1 + zk_y}{1 + zk_x} (\varepsilon_x + z\chi_1) + \mu (\varepsilon_y + z\chi_2) \right) z dz, \\ M_y &= \frac{E}{1 - \mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{1 + zk_x}{1 + zk_y} (\varepsilon_y + z\chi_2) + \mu (\varepsilon_x + z\chi_1) \right) z dz, \\ M_{xy} &= \frac{E}{2(1 + \mu)} \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma_{xy} + 2z\chi_{12} + z^2 k_1 \chi_{12}) \frac{z dz}{1 + zk_x}, \\ M_{yx} &= \frac{E}{2(1 + \mu)} \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma_{xy} + 2z\chi_{12} + z^2 k_1 \chi_{12}) \frac{z dz}{1 + zk_y}. \end{aligned} \tag{5}$$

Если теперь в выражении (5) разложить в ряд по степени  $z$  выражения  $\frac{1}{1+zk_x}$  и  $\frac{1}{1+zk_y}$ , то усилия и моменты можно записать в виде

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{E}{1 - \mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu\chi_2 - \varepsilon_x k_2) - z^2 k_2 \chi_1) dz, \\ N_y &= \frac{E}{1 - \mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu\chi_1 + \varepsilon_y k_2) + z^2 k_2 \chi_2) dz, \\ N_{xy} &= \frac{E}{2(1 + \mu)} \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma_{xy} + z(2\chi_{12} - k_x \gamma_{xy}) - z^2 k_2 \chi_{12}) dz, \\ N_{yx} &= \frac{E}{2(1 + \mu)} \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma_{xy} + z(2\chi_{12} + k_y \gamma_{xy}) + z^2 k_2 \chi_{12}) dz, \\ M_x &= \frac{E}{1 - \mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (z(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + z^2(\chi_1 + \mu\chi_2 - \varepsilon_x k_2) - z^3 k_2 \chi_1) dz, \\ M_y &= \frac{E}{1 - \mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (z(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + z^2(\chi_2 + \mu\chi_1 + \varepsilon_y k_2) + z^3 k_2 \chi_2) dz, \end{aligned} \tag{6}$$



$$M_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{-h/2}^{h/2} (z\gamma_{xy} + z^2(2\chi_{12} - k_x\gamma_{xy}) - z^3k_2\chi_{12}) dz,$$

$$M_{yx} = \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{-h/2}^{h/2} (z\gamma_{xy} + z^2(2\chi_{12} + k_y\gamma_{xy}) + z^3k_2\chi_{12}) dz.$$

Здесь  $k_2 = k_x - k_y$ .

Зачастую используют упрощенный подход к формированию соотношений для тонких оболочек, когда принимается, что в слое, отстоящем на  $z$  от координатной поверхности, параметры Ляме и радиусы кривизн остаются неизменяемыми. В этом случае

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\chi_1, \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\chi_2, \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12}.$$

В результате указанных упрощений усилия и моменты могут быть записаны в виде

$$N_x = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \quad N_y = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x),$$

$$N_{xy} = N_{yx} = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \gamma_{xy},$$

$$M_x = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (\chi_1 + \mu\chi_2), \quad M_y = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (\chi_2 + \mu\chi_1),$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \frac{Eh^3}{12(1+\mu)} \chi_{12}. \tag{7}$$

Для такого варианта соотношений теории тонких оболочек выражение потенциальной энергии деформации оболочки будет иметь вид

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (N_x\varepsilon_x + N_y\varepsilon_y + N_{xy}\gamma_{xy} + M_x\chi_1 + M_y\chi_2 + 2M_{xy}\chi_{12}) AB dx dy.$$

Формулы (7) в теории оболочек употребляются наиболее часто. Достоинство этих формул заключается в их простоте и полной аналогии с соответствующими формулами теории пластин. Но в то же время их принятие вносит в теорию оболочек некоторые противоречия.

На противоречия, вносимые в теорию оболочек этими формулами, впервые обратил внимание В. З. Власов. Однако, по мнению В. В. Новожилова, все эти противоречия не превосходят погрешности, вносимые в теорию оболочек исходными допущениями теории тонких оболочек.

Проведя преобразование (4) по-иному, чем это делал В. В. Новожилов, можно получить еще один вариант более точных выражений для усилий и моментов (использованы соотношения (1), а не (2)).

Заготовим некоторые выражения. Будем считать малыми и пренебрегать только  $z^2/R^2$

$$\left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) = 1 + z \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + z^2 \frac{1}{R_1 R_2} \approx 1 + zk_1.$$

Теперь в (3) подставим (1). В результате получим

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\alpha_1 + z(\beta_1 - \gamma_1)), \quad \varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\gamma_3,$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\alpha_2 + z(\beta_2 - \gamma_2)), \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\gamma_4, \tag{8}$$



$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} (\gamma_{xy} + z\beta_3), \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + z\beta_3.$$

Здесь  $\alpha_1 = \varepsilon_x + \mu\varepsilon_y$ ,  $\alpha_2 = \varepsilon_y + \mu\varepsilon_x$ ,  $\beta_1 = \chi_1 + \mu\chi_2$ ,  $\beta_2 = \chi_2 + \mu\chi_1$ ,  $\beta_3 = 2\chi_{12} - k_1\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_1 = \varepsilon_x k_x + \mu\varepsilon_y k_y$ ,  $\gamma_2 = \varepsilon_y k_y + \mu\varepsilon_x k_x$ ,  $\gamma_3 = \chi_1 - \varepsilon_x k_x$ ,  $\gamma_4 = \chi_2 - \varepsilon_y k_y$ .

Выражения (8) подставим в (4):

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{E}{1-\mu^2} (\alpha_1 + z(\beta_1 - \gamma_1)) (\varepsilon_x + z\gamma_3) + \frac{E}{1-\mu^2} (\alpha_2 + z(\beta_2 - \gamma_2)) (\varepsilon_y + z\gamma_4) + \frac{E}{2(1+\mu)} (\gamma_{xy} + z\beta_3) (\gamma_{xy} + z\beta_3) \right] (1 + zk_1) AB \, dx \, dy \, dz.$$

Потенциальную энергию деформаций запишем в виде

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b [N_x \varepsilon_x + M_x \gamma_3 + N_y \varepsilon_y + M_y \gamma_4 + N_{xy} \gamma_{xy} + M_{xy} \beta_3] AB \, dx \, dy.$$

Здесь

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x (1 + zk_1) \, dz = \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\alpha_1 + z(\beta_1 - \gamma_1)) (1 + zk_1) \, dz, \\ M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x (1 + zk_1) z \, dz = \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\alpha_1 + z(\beta_1 - \gamma_1)) (1 + zk_1) z \, dz, \\ N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y (1 + zk_1) \, dz = \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\alpha_2 + z(\beta_2 - \gamma_2)) (1 + zk_1) \, dz, \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y (1 + zk_1) z \, dz = \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\alpha_2 + z(\beta_2 - \gamma_2)) (1 + zk_1) z \, dz, \\ N_{xy} &= N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} (1 + zk_1) \, dz = \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma_{xy} + z\beta_3) (1 + zk_1) \, dz, \\ M_{xy} &= M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} (1 + zk_1) z \, dz = \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma_{xy} + z\beta_3) (1 + zk_1) z \, dz. \end{aligned} \tag{9}$$

Выражение (9) несколько отличается от соответствующих выражений, принятых в работе [10], но они получены без внесения еще каких-либо упрощений. Это нужно, чтобы в дальнейшем использовать такую форму получения усилий и моментов при рассмотрении оболочек, подкрепленных ребрами жесткости. Рассмотрим такие оболочки.

## 2.2. Применение теории В. В. Новожилова к ребристым оболочкам

Пусть со стороны вогнутости оболочка подкреплена ортогональной сеткой ребер, параллельных координатным линиям (см. рис. 1), высота и расположение которых задаются с помощью единичных столбчатых функций  $\bar{\delta}(x - x_j)$ ,  $\bar{\delta}(y - y_i)$  [42, 84]:

$$H(x, y) = \sum_{j=1}^m h^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n h^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i).$$



Здесь  $h^j, h^i$  — высота ребер параллельных осей  $y$  и  $x$  соответственно,  $h^{ij} = \min \{h^i, h^j\}$ ,  $\bar{\delta}(x - x_j), \bar{\delta}(y - y_i)$  — единичные столбчатые функции, равные единице в местах присоединения ребер и равные нулю вне таких мест.

Если  $h^j = h^j(y), h^i = h^i(x)$ , то  $h^{ij} = \min \{h^i(x_j), h^j(y_i)\}$ .

Таким образом, толщина всей конструкции равна  $h + H$ . Если  $H > 0$ , то оболочка подкреплена ребрами или накладками, а если  $H < 0$ , то она ослаблена вырезами. Считаем, что общая толщина конструкции  $h + H$  удовлетворяет условиям тонкостенных оболочек.

Используя выражения усилий и моментов для оболочки постоянной толщины как образец (9), найдем выражения усилий и моментов для оболочки, подкреплённой ребрами жесткости:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-h/2}^{h/2+H} \frac{E}{1-\mu^2} [\alpha_1 + z(\beta_1 - \gamma_1)] (1 + zk_1) dz = \\
 &= \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2+H} [\alpha_1 + z(\beta_1 - \gamma_1 + \alpha_1 k_1) + z^2 k_1 (\beta_1 - \gamma_1)] dz = \\
 &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ (h + \bar{F}) \alpha_1 + \bar{S} (\beta_1 - \gamma_1 + \alpha_1 k_1) + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) k_1 (\beta_1 - \gamma_1) \right], \\
 M_x &= \int_{-h/2}^{h/2+H} \frac{E}{1-\mu^2} [\alpha_1 + z(\beta_1 - \gamma_1)] (1 + zk_1) z dz = \\
 &= \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2+H} [\alpha_1 z + z^2 (\beta_1 - \gamma_1 + \alpha_1 k_1) + z^3 k_1 (\beta_1 - \gamma_1)] dz = \\
 &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \bar{S} \alpha_1 + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\beta_1 - \gamma_1 + \alpha_1 k_1) + \bar{G} k_1 (\beta_1 - \gamma_1) \right], \\
 N_y &= \int_{-h/2}^{h/2+H} \frac{E}{1-\mu^2} [\alpha_2 + z(\beta_2 - \gamma_2)] (1 + zk_1) dz = \\
 &= \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2+H} [\alpha_2 + z(\beta_2 - \gamma_2 + \alpha_2 k_1) + z^2 k_1 (\beta_2 - \gamma_2)] dz = \\
 &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ (h + \bar{F}) \alpha_2 + \bar{S} (\beta_2 - \gamma_2 + \alpha_2 k_1) + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) k_1 (\beta_2 - \gamma_2) \right], \\
 M_y &= \int_{-h/2}^{h/2+H} \frac{E}{1-\mu^2} [\alpha_2 + z(\beta_2 - \gamma_2)] (1 + zk_1) z dz = \\
 &= \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2+H} [\alpha_2 z + z^2 (\beta_2 - \gamma_2 + \alpha_2 k_1) + z^3 k_1 (\beta_2 - \gamma_2)] dz = \\
 &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \bar{S} \alpha_2 + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\beta_2 - \gamma_2 + \alpha_2 k_1) + \bar{G} k_1 (\beta_2 - \gamma_2) \right], \\
 N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2+H} \frac{E}{2(1+\mu)} [\gamma_{xy} + z\beta_3] (1 + zk_1) dz = \\
 &= \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{-h/2}^{h/2+H} [\gamma_{xy} + z(\beta_2 + k_1 \gamma_{xy}) + z^2 k_1 \beta_3] dz = \\
 &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left[ (h + \bar{F}) \gamma_{xy} + \bar{S} (\beta_2 + k_1 \gamma_{xy}) + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) k_1 \beta_3 \right],
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2+H} \frac{E}{2(1+\mu)} [\gamma_{xy} + z\beta_3] (1 + zk_1) z dz = \\
&= \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{-h/2}^{h/2+H} [z\gamma_{xy} + z^2(\beta_2 + k_1\gamma_{xy}) + z^3k_1\beta_3] dz = \\
&= \frac{E}{2(1+\mu)} \left[ \bar{S}\gamma_{xy} + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\beta_2 + k_1\gamma_{xy}) + \bar{G}k_1\beta_3 \right],
\end{aligned}$$

где  $\bar{F}$ ,  $\bar{S}$ ,  $\bar{J}$ ,  $\bar{G}$  – функции, характеризующие площадь поперечного или продольного сечения ребра, приходящуюся на единицу длины сечения, статический момент и момент инерции этого сечения, причем

$$\begin{aligned}
\bar{F} &= \int_{h/2}^{h/2+H} dz = H, \quad \bar{S} = \int_{h/2}^{h/2+H} z dz = \frac{1}{2}H(h+H), \\
\bar{J} &= \int_{h/2}^{h/2+H} z^2 dz = \frac{1}{4}h^2H + \frac{1}{2}hH^2 + \frac{1}{3}H^3, \\
\bar{G} &= \int_{h/2}^{h/2+H} z^3 dz = \frac{1}{4}H(h+H) \left( \left( \frac{h}{2} + H \right)^2 + \frac{h^2}{4} \right).
\end{aligned}$$

Более точный вариант выражений для жесткостных характеристик описан в работе [45].

Если оболочка подкреплена ребрами, расположенными со стороны выпуклости, то меняется знак на противоположный только у  $\bar{S}$ .

В развернутом виде  $\bar{F}$ ,  $\bar{S}$ ,  $\bar{J}$ ,  $\bar{G}$  принимают вид

$$\begin{aligned}
\bar{F} &= \sum_{j=1}^m F^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n F^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \\
\bar{S} &= \sum_{j=1}^m S^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n S^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \\
\bar{J} &= \sum_{j=1}^m J^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n J^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m J^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \\
\bar{G} &= \sum_{j=1}^m G^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n G^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m G^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i),
\end{aligned}$$

где, например,  $F^j = h^j$ ,  $S^j = \frac{1}{2}h^j(h + h^j)$ ,  $J^j = \frac{1}{4}h^2h^j + \frac{1}{2}h(h^j)^2 + \frac{1}{3}(h^j)^3$ ,

$$G^j = \frac{1}{4}h^j(h + h^j) \left( \left( \frac{h}{2} + h^j \right)^2 + \frac{h^2}{4} \right).$$

Ребра, параллельные оси  $y$  ( $j$ -е ребра), расположены при  $a_j \leq x \leq b_j$ , а ребра, параллельные оси  $x$  ( $i$ -е ребра), расположены при  $c_i \leq y \leq d_i$ . Причем  $a_j = x_j - \frac{\tilde{r}_j}{2}$ ,  $b_j = x_j + \frac{\tilde{r}_j}{2}$ ,  $c_i = y_i - \frac{\tilde{r}_i}{2}$ ,  $d_i = y_i + \frac{\tilde{r}_i}{2}$ ,  $\tilde{r}_j = \frac{r_j}{A}$ ,  $\tilde{r}_i = \frac{r_i}{B}$ .



### 2.3. Выражения усилий и моментов, полученные А. И. Лурье

Еще один вариант соотношений для тонких оболочек разработал А. И. Лурье [85] — он не отбрасывал члены, которые кажутся малыми (некоторые из них отбрасываются другими авторами). Усилия и моменты он представляет в виде

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[ \varepsilon_x + \mu\varepsilon_y - \frac{h^2}{12} k_2 (\chi_1 - k_x \varepsilon_x) \right], \\ N_y &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[ \varepsilon_y + \mu\varepsilon_x + \frac{h^2}{12} k_2 (\chi_2 - k_y \varepsilon_y) \right], \\ N_{xy} &= \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left[ \gamma_{xy} - \frac{h^2}{12} k_2 (\chi_{12} - k_x \gamma_{xy}) \right], \\ N_{yx} &= \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left[ \gamma_{xy} + \frac{h^2}{12} k_2 (\chi_{12} - k_y \gamma_{xy}) \right], \\ M_x &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} [\chi_1 + \mu\chi_2 - k_2 \varepsilon_x], \quad M_y = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} [\chi_2 + \mu\chi_1 + k_2 \varepsilon_y], \\ M_{xy} &= \frac{Eh^3}{12(1+\mu)} \left[ \chi_{12} - \frac{1}{2} k_x \gamma_{xy} \right], \quad M_{yx} = \frac{Eh^3}{12(1+\mu)} \left[ \chi_{12} + \frac{1}{2} k_y \gamma_{xy} \right]. \end{aligned}$$

В развернутом виде эти соотношения принимают вид

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu\chi_2 - k_2 \varepsilon_x) - z^2 k_2 (\chi_1 - k_x \varepsilon_x)) dz, \\ N_y &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu\chi_1 + k_2 \varepsilon_y) + z^2 k_2 (\chi_2 - k_y \varepsilon_y)) dz, \\ N_{xy} &= \frac{Eh}{2(1+\mu)} \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma_{xy} + z(2\chi_{12} - k_x \gamma_{xy}) - z^2 k_2 (\chi_{12} - k_x \gamma_{xy})) dz, \\ N_{yx} &= \frac{Eh}{2(1+\mu)} \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma_{xy} + z(2\chi_{12} + k_y \gamma_{xy}) + z^2 k_2 (\chi_{12} - k_y \gamma_{xy})) dz, \\ M_x &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu\chi_2 - k_2 \varepsilon_x) - z^2 k_2 (\chi_1 - k_x \varepsilon_x)) z dz, \\ M_y &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu\chi_1 + k_2 \varepsilon_y) + z^2 k_2 (\chi_2 - k_y \varepsilon_y)) z dz, \\ M_{xy} &= \frac{Eh}{2(1+\mu)} \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma_{xy} + z(2\chi_{12} - k_x \gamma_{xy}) - z^2 k_2 (\chi_{12} - k_x \gamma_{xy})) z dz, \\ M_{yx} &= \frac{Eh}{2(1+\mu)} \int_{-h/2}^{h/2} (\gamma_{xy} + z(2\chi_{12} + k_y \gamma_{xy}) + z^2 k_2 (\chi_{12} - k_y \gamma_{xy})) z dz. \end{aligned}$$

Если пренебречь величинами  $z^2/R_1^2$ ,  $z^2/R_2^2$ ,  $z^2/(R_1 R_2)$ , то эти соотношения совпадут с соотношениями (6).

Для ребристых оболочек при учете соотношений А. И. Лурье усилия и моменты примут вид

$$N_x = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ (h + \bar{F}) (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + \bar{S} (\chi_1 + \mu\chi_2 - k_2 \varepsilon_x) - \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) k_2 (\chi_1 - k_x \varepsilon_x) \right],$$



$$\begin{aligned}
 N_y &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ (h + \bar{F}) (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + \bar{S} (\chi_2 + \mu\chi_1 + k_2\varepsilon_y) + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) k_2 (\chi_2 - k_y\varepsilon_y) \right], \\
 M_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \bar{S} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1 + \mu\chi_2 - k_2\varepsilon_x) - \bar{G}k_2 (\chi_1 - k_x\varepsilon_x) \right], \\
 M_y &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \bar{S} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_2 + \mu\chi_1 + k_2\varepsilon_y) + \bar{G}k_2 (\chi_2 - k_y\varepsilon_y) \right], \\
 N_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left[ (h + \bar{F}) \gamma_{xy} + \bar{S} (2\chi_{12} - k_x\gamma_{xy}) - \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) k_2 (\chi_{12} - k_x\gamma_{xy}) \right], \\
 M_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left[ \bar{S}\gamma_{xy} + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (2\chi_{12} - k_x\gamma_{xy}) - \bar{G}k_2 (\chi_{12} - k_x\gamma_{xy}) \right], \\
 N_{yx} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left[ (h + \bar{F}) \gamma_{xy} + \bar{S} (2\chi_{12} + k_y\gamma_{xy}) + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) k_1 (\chi_{12} - k_y\gamma_{xy}) \right], \\
 M_{yx} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left[ \bar{S}\gamma_{xy} + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (2\chi_{12} + k_y\gamma_{xy}) - \bar{G}k_1 (\chi_{12} - k_y\gamma_{xy}) \right].
 \end{aligned}$$

#### 2.4. Геометрически нелинейные соотношения для деформаций

Для оболочек произвольного вида при учете геометрической нелинейности деформации  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} V - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2, \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2, \\
 \gamma_{xy} &= \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} U - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} V + \frac{1}{2} \theta_1 \theta_2, \\
 \theta_1 &= - \left( \frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right), \quad \theta_2 = - \left( \frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Принимая во внимание (10) и то, что  $U^z = U + z\theta_1, V^z = V + z\theta_2, W^z = W$ , получим соотношения для изгибных деформаций, которые ранее в публикациях не встречались:

$$\begin{aligned}
 \chi_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \theta_2 + \frac{1}{A} k_x \frac{\partial W}{\partial x} \theta_1 - \frac{1}{2} k_x \theta_1^2, \\
 \chi_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial \theta_2}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \theta_1 + \frac{1}{B} k_y \frac{\partial W}{\partial y} \theta_2 - \frac{1}{2} k_y \theta_2^2, \\
 \chi_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial \theta_2}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \theta_1}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \theta_1 - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \theta_2 + \frac{1}{A} k_y \frac{\partial W}{\partial x} \theta_2 + \frac{1}{B} k_x \frac{\partial W}{\partial y} \theta_1 \right).
 \end{aligned}$$

#### 2.5. Упрощенный вариант модели тонких оболочек

В теории оболочек используют еще ряд зависимостей, упрощающих их расчет. Так, Х. М. Муштари [8] в выражениях  $\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$  пренебрегает членами  $U/R$  и  $V/R$ . Это будет закономерно, когда напряжения от моментов сравнимы по величине с напряжениями от усилий, и перемещения являются быстро изменяющимися функциями. Также он ввел еще ряд упрощений.



Такие соотношения часто используют в теории пологих оболочек. Выражения для  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\chi_{12}$  теперь примут вид

$$\begin{aligned}\chi_1 &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y}, \\ \chi_2 &= -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x}, \\ \chi_{12} &= -\frac{1}{AB} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

Усилия и моменты будут иметь вид (7), а уравнения равновесия примут вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial B N_x}{\partial x} + \frac{\partial A N_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial y} N_{xy} - \frac{\partial B}{\partial x} N_y + AB q_1 &= 0, \\ \frac{\partial B N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial A N_y}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} N_{xy} - \frac{\partial A}{\partial y} N_x + AB q_2 &= 0, \\ \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left( \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) + \frac{N_x}{R_1} + \frac{N_y}{R_2} &= q.\end{aligned}\tag{11}$$

В. З. Власов [86] вводит в рассмотрение функцию напряжения  $\Phi(x, y)$ , связанную с усилиями соотношениями

$$\begin{aligned}N_x &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ N_y &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ N_{xy} &= \frac{1}{AB} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right).\end{aligned}\tag{12}$$

Используя формулы (7) и (12), деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  можно выразить через функцию  $\Phi(x, y)$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Eh} (N_x - \mu N_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{Eh} (N_y - \mu N_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{Eh} N_{xy}.\tag{13}$$

Используя третье уравнение равновесия (11), подставив в него выражения (12), и одно из уравнений совместности деформаций, подставив в него (13), получатся уравнения в смешанной форме относительно функций  $W(x, y)$  и  $\Phi(x, y)$ .

Для пологих оболочек прямоугольного плана ( $A = 1$ ,  $B = 1$ ) они принимают вид

$$\begin{aligned}D \Delta \Delta W &= L(W, \Phi) + \nabla_k^2 \Phi + q, \\ \frac{1}{Eh} \Delta \Delta \Phi + \frac{1}{2} L(W, W) + \nabla_k^2 W &= 0,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla_k^2 A_1 = k_x \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}, \\ L(A_1, A_2) &= \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial y}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.\end{aligned}$$

Уравнения в смешанной форме часто применяют при шарнирно-подвижном закреплении контура оболочки.

Аналогичные нелинейные дифференциальные уравнения для плиты были получены Т. Карманом еще 1907 г.



## 2.6. Математические модели деформирования тонких оболочек, разработанные А. Л. Гольденвейзером

Рассмотрим тонкие упругие оболочки, геометрически линейный вариант. Считается справедливой гипотеза прямой нормали. Один из вариантов соотношений теории тонких оболочек, разработанный А. Л. Гольденвейзером [87], предполагает, что координаты  $x$  и  $y$  являются параметрами ортогональной системы координат.

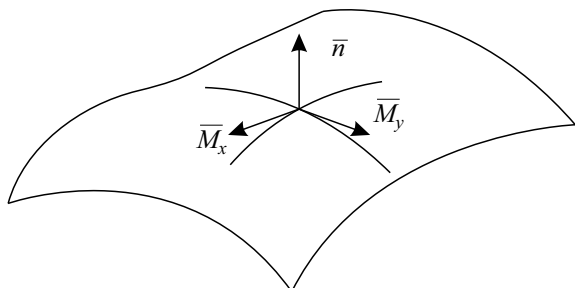


Рис. 2. Оси основного триедра на поверхности  
Fig. 2. The axes of the main trihedron on the surface

Вводится вектор упругих смещений срединной поверхности оболочки

$$\vec{u} = \vec{u}(x, y) = u \frac{\vec{M}_x}{A} + v \frac{\vec{M}_y}{B} - w \vec{n},$$

где  $u, v, w$  — компоненты смещения (рис. 2).

В этом случае тангенциальные деформации  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  в координатной поверхности и в слое, отстоящем на  $z$  от координатной поверхности, практически совпадают с теми, что были получены В. В. Новожиловым. Изгибные деформации  $\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$  отличаются только членами, содержащими  $R_{12}$ .

Теперь рассмотрим соотношения теории тонких оболочек, полученные А. Л. Гольденвейзером, когда координаты  $x, y$  (координатные линии  $x, y$ , если эти координаты угловые) не являются ортогональными. Угол между координатными линиями  $x$  и  $y$  обозначим  $\chi$ . Вводятся обозначения для углов поворота:

$\gamma_1$  — угол, на который поворачивается вектор  $\vec{M}_x$  в сторону вектора  $\vec{n}$  в плоскости  $(\vec{M}_x, \vec{n})$ ;

$\gamma_2$  — аналогично в плоскости  $(\vec{M}_y, \vec{n})$ ;

$\omega_1$  — угол, на который поворачивается вектор  $\vec{M}_x$  в сторону вектора  $\vec{M}_y$  в касательной плоскости;

$\omega_2$  — аналогично, когда вектор  $\vec{M}_y$  поворачивается в сторону вектора  $\vec{M}_x$ .

Вводится вектор упругого вращения  $\vec{\Omega}$

$$\vec{\Omega} = -\frac{\gamma_2}{\sin(\chi)} \frac{\vec{M}_x}{A} + \frac{\gamma_1}{\sin(\chi)} \frac{\vec{M}_y}{B} + \delta \vec{n},$$

где  $\delta = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ .

Считается, что перемещения малы по сравнению с толщиной оболочки, а углы поворота малы по сравнению с единицей ( $\sin(\gamma_1) = \gamma_1, \cos(\gamma_1) = 1, A' = A, B' = B$ , где  $A', B'$  — параметры Ляме деформированной поверхности).

Пусть  $\vec{M}' = \vec{M} + \vec{u}$  — вектор деформированной поверхности,

$$\vec{M}'_x = \vec{M}_x + \vec{u}_x, \quad \vec{M}'_y = \vec{M}_y + \vec{u}_y,$$

где  $\vec{u}_x, \vec{u}_y$  — производные по соответствующим координатам. Для произвольной косоугольной системы координат тангенциальные деформации будут иметь вид

$$\varepsilon_x = \frac{\vec{u}_x}{A} \frac{\vec{M}_x}{A}, \quad \varepsilon_y = \frac{\vec{u}_y}{B} \frac{\vec{M}_y}{B}, \quad \gamma_{xy} = \omega,$$



$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = \frac{\vec{u}_x \vec{N}_{(y)}}{A} + \frac{\vec{u}_y \vec{N}_{(x)}}{B}, \quad \gamma_1 = \frac{\vec{u}_x}{A} \vec{n}, \quad \gamma_2 = \frac{\vec{u}_y}{B} \vec{n}.$$

Здесь

$$\frac{\vec{N}_{(x)}}{A} = \frac{1}{\sin(\chi)} \frac{\vec{M}_x}{A} - \frac{\cos(\chi)}{\sin(\chi)} \frac{\vec{M}_y}{B}, \quad \frac{\vec{N}_{(y)}}{B} = \frac{1}{\sin(\chi)} \frac{\vec{M}_y}{B} - \frac{\cos(\chi)}{\sin(\chi)} \frac{\vec{M}_x}{A}.$$

Имеют место важные соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\vec{u}_x}{A} &= (\varepsilon_x - \operatorname{ctg}(\chi) \omega_1) \frac{\vec{M}_x}{A} + \frac{\omega_1}{\sin(\chi)} \frac{\vec{M}_y}{B} + \gamma_1 \vec{n}, \\ \frac{\vec{u}_y}{B} &= (\varepsilon_y - \operatorname{ctg}(\chi) \omega_2) \frac{\vec{M}_y}{B} + \frac{\omega_2}{\sin(\chi)} \frac{\vec{M}_x}{A} + \gamma_2 \vec{n}. \end{aligned}$$

Изгибные деформации примут вид (случай произвольных криволинейных координат)

$$\chi_1 = \frac{\bar{\Omega}_x \vec{M}_y}{A} \frac{1}{B}, \quad \chi_2 = \frac{\bar{\Omega}_y \vec{M}_x}{B} \frac{1}{A}, \quad \chi_{12} = \tau, \quad \tau^{(1)} = \frac{\bar{\Omega}_x \vec{M}_x}{A} \frac{1}{A}, \quad \tau^{(2)} = \frac{\bar{\Omega}_y \vec{M}_y}{B} \frac{1}{B}.$$

Индекс у  $\bar{\Omega}$  означает дифференцирование по соответствующей координате.

Выражения  $\varepsilon_x^z, \varepsilon_y^z, \gamma_{xy}^z$  практически совпадают с теми, что получил В. В. Новожилов. Введем вспомогательные векторы  $\vec{V}_{(x)}$  и  $\vec{V}_{(y)}$ , которые можно выразить через тангенциальные деформации по формулам

$$\frac{\vec{V}_{(x)}}{A} = \frac{\vec{u}_x}{A} + \bar{\Omega} \times \frac{\vec{M}_x}{A}, \quad \frac{\vec{V}_{(y)}}{B} = \frac{\vec{u}_y}{B} + \bar{\Omega} \times \frac{\vec{M}_y}{B},$$

а также в виде

$$\begin{aligned} \frac{\vec{V}_{(x)}}{A} &= \frac{\varepsilon_x - \cos(\chi) \omega^{(1)}}{\sin^2(\chi)} \frac{\vec{M}_x}{A} + \frac{\omega^{(1)} - \cos(\chi) \varepsilon_x}{\sin^2(\chi)} \frac{\vec{M}_y}{B}, \\ \frac{\vec{V}_{(y)}}{B} &= \frac{\varepsilon_y + \cos(\chi) \omega^{(2)}}{\sin^2(\chi)} \frac{\vec{M}_y}{B} - \frac{\omega^{(2)} + \cos(\chi) \varepsilon_y}{\sin^2(\chi)} \frac{\vec{M}_x}{A}, \end{aligned}$$

где  $\omega^{(1)} = \sin(\chi) \frac{\omega}{2} + \cos(\chi) \varepsilon_x$ ,  $\omega^{(2)} = -\sin(\chi) \frac{\omega}{2} - \cos(\chi) \varepsilon_y$ .

Если срединная поверхность задана в произвольных криволинейных координатах, то имеем

$$\begin{aligned} \tau^{(1)} &= \tau - \cos(\chi) \chi_1 + \frac{1}{R_{12}} \left( \sin(\chi) \varepsilon_y - \cos(\chi) \frac{\omega}{2} \right) - \frac{1}{R'_1} \frac{\omega}{2}, \\ \tau^{(2)} &= -\tau + \cos(\chi) \chi_2 - \frac{1}{R_{12}} \left( \sin(\chi) \varepsilon_x - \cos(\chi) \frac{\omega}{2} \right) - \frac{1}{R'_2} \frac{\omega}{2}. \end{aligned}$$

Выражая второе равенство из первого, получим

$$2\tau = \tau^{(1)} - \tau^{(2)} + \cos(\chi_1 + \chi_2) + \frac{1}{R_{12}} (\cos(\chi) \omega - \sin(\chi) (\varepsilon_x + \varepsilon_y)) + \frac{\omega}{2} \left( \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2} \right).$$

Тангенциальные и изгибные деформации записываются в скалярной форме

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (u + \cos(\chi) v) - \frac{B \sin^2(\chi)}{A^2} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} v - \frac{w}{R'_1}, \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial y} (v + \cos(\chi) u) - \frac{A \sin^2(\chi)}{B^2} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} u - \frac{w}{R'_2}, \\
 \omega_1 &= \frac{\sin(\chi)}{A} \frac{\partial v}{\partial x} - \left[ \frac{\sin(\chi)}{B} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \frac{1}{A} \frac{\partial \chi}{\partial x} \right] u + \\
 &+ \cos(\chi) \left[ \frac{B \sin(\chi)}{A^2} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \frac{1}{A} \frac{\partial \chi}{\partial x} \right] v + \frac{1}{\sin(\chi)} \left( \frac{1}{R_{12}} + \frac{\cos(\chi)}{R'_1} \right) w, \\
 \omega_2 &= \frac{\sin(\chi)}{B} \frac{\partial u}{\partial y} + \cos(\chi) \left[ \frac{A \sin(\chi)}{B^2} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \frac{1}{B} \frac{\partial \chi}{\partial y} \right] u - \\
 &- \left[ \frac{\sin(\chi)}{A} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \frac{1}{B} \frac{\partial \chi}{\partial y} \right] v + \frac{1}{\sin(\chi)} \left( \frac{1}{R_{12}} + \frac{\cos(\chi)}{R'_2} \right) w, \\
 \omega &= \omega_1 + \omega_2, \\
 \gamma_1 &= - \left( \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u}{R'_1} - \frac{v}{R_{12}} \right), \\
 \gamma_2 &= - \left( \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R'_2} - \frac{u}{R_{12}} \right), \\
 \delta &= \frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1), \\
 \chi_1 &= - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\gamma_1 - \cos(\chi) \gamma_2}{\sin(\chi)} - \frac{\sin(\chi)}{B} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \gamma_2 + \frac{\delta}{R_{12}}, \\
 \chi_2 &= - \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\gamma_2 - \cos(\chi) \gamma_1}{\sin(\chi)} - \frac{\sin(\chi)}{A} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \gamma_1 - \frac{\delta}{R_{12}}, \\
 \tau^{(1)} &= - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\gamma_2 - \cos(\chi) \gamma_1}{\sin(\chi)} - \frac{B \sin(\chi)}{A^2} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \gamma_1 + \frac{\delta}{R'_1}, \\
 \left[ \tau^{(1)} = \tau - \cos(\chi) \chi_1 + \frac{1}{R_{12}} \left( \sin(\chi) \varepsilon_y - \cos(\chi) \frac{\omega}{2} \right) - \frac{1}{R'_1} \frac{\omega}{2} \right], \\
 \tau^{(2)} &= - \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\gamma_1 - \cos(\chi) \gamma_2}{\sin(\chi)} - \frac{A \sin(\chi)}{B^2} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \gamma_2 + \frac{\delta}{R'_2}, \\
 \left[ \tau^{(2)} = -\tau + \cos(\chi) \chi_2 - \frac{1}{R_{12}} \left( \sin(\chi) \varepsilon_x - \cos(\chi) \frac{\omega}{2} \right) - \frac{1}{R'_2} \frac{\omega}{2} \right], \\
 \zeta_1 &= - \frac{1}{A} \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{1}{\sin(\chi)} \left( \frac{\gamma_2}{R'_1} + \frac{\gamma_1}{R_{12}} \right), \quad \zeta_2 = - \frac{1}{B} \frac{\partial \delta}{\partial y} - \frac{1}{\sin(\chi)} \left( \frac{\gamma_1}{R'_1} + \frac{\gamma_2}{R_{12}} \right).
 \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь символ  $\{ \}$  означает символ Кристоффеля.

Для ортогональной системы координат А. Л. Гольденвейзером получена система уравнений равновесия в перемещениях (три уравнения относительно трех неизвестных функций  $u, v, w$ ).

Для случая произвольных криволинейных координат А. Л. Гольденвейзером были выведены уравнения равновесия, которым должны удовлетворять  $\vec{R}^{(x)}, \vec{R}^{(y)}$  (векторы



упругих усилий) и  $\vec{Q}^{(x)}$ ,  $\vec{Q}^{(y)}$  (векторы упругих моментов):

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial y} (A\vec{R}^{(x)}) - \frac{\partial}{\partial x} (B\vec{R}^{(y)}) + AB \sin(\chi) \vec{P} = 0, \\ & -\frac{\partial}{\partial y} (A\vec{Q}^{(x)}) - \frac{\partial}{\partial x} (B\vec{Q}^{(y)}) - A\vec{R}^{(x)} \times \vec{M}_y - B\vec{R}^{(y)} \times \vec{M}_x + AB \sin(\chi) \vec{Q} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

и уравнения непрерывности деформаций

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial y} \vec{\Omega}_x - \frac{\partial}{\partial x} \vec{\Omega}_y = 0, \\ & -\frac{\partial}{\partial y} \vec{V}_{(x)} + \frac{\partial}{\partial x} \vec{V}_{(y)} + \vec{\Omega}_y \times \vec{M}_x - \vec{\Omega}_x \times \vec{M}_y = 0. \end{aligned}$$

Векторы  $\vec{R}^{(x)}$ ,  $\vec{R}^{(y)}$ ,  $\vec{Q}^{(x)}$ ,  $\vec{Q}^{(y)}$  выражаются через внутренние усилия и моменты оболочки по формулам

$$\begin{aligned} \vec{R}^{(x)} &= S_2 \frac{\vec{M}_x}{A} - T_2 \frac{\vec{M}_y}{B} + N_2 \vec{n}, & \vec{R}^{(y)} &= -T_1 \frac{\vec{M}_x}{A} - S_1 \frac{\vec{M}_y}{B} + N_1 \vec{n}, \\ \vec{Q}^{(x)} &= G_2 \frac{\vec{M}_x}{A} - H_2 \frac{\vec{M}_y}{B}, & \vec{Q}^{(y)} &= -H_1 \frac{\vec{M}_x}{A} - G_1 \frac{\vec{M}_y}{B}. \end{aligned}$$

Здесь в ранее введенных обозначениях

$$\begin{aligned} T_1 &= N_x, & T_2 &= N_y, & S_1 &= N_{xy}, & S_2 &= N_{yx}, \\ G_1 &= M_x, & G_2 &= M_y, & H_1 &= M_{xy}, & H_2 &= M_{yx}. \end{aligned}$$

Векторы  $\vec{\Omega}_x$ ,  $\vec{\Omega}_y$ ,  $\vec{V}_{(x)}$ ,  $\vec{V}_{(y)}$  можно выразить через компоненты деформаций соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\vec{\Omega}_x}{A} &= \frac{\tau^{(1)} - \cos(\chi) \chi^{(1)}}{\sin^2(\chi)} \frac{\vec{M}_x}{A} + \frac{\chi^{(1)} - \cos(\chi) \tau^{(1)}}{\sin^2(\chi)} \frac{\vec{M}_y}{B} + \xi_1 \vec{n}, \\ \frac{\vec{\Omega}_y}{B} &= -\frac{\chi^{(2)} + \cos(\chi) \tau^{(2)}}{\sin^2(\chi)} \frac{\vec{M}_x}{A} + \frac{\tau^{(2)} - \cos(\chi) \chi^{(2)}}{\sin^2(\chi)} \frac{\vec{M}_y}{B} + \xi_2 \vec{n}, \\ \frac{\vec{V}_{(x)}}{A} &= \frac{\varepsilon^{(1)} - \cos(\chi) \omega^{(1)}}{\sin^2(\chi)} \frac{\vec{M}_x}{A} + \frac{\omega^{(1)} - \cos(\chi) \varepsilon^{(1)}}{\sin^2(\chi)} \frac{\vec{M}_y}{B}, \\ \frac{\vec{V}_{(y)}}{B} &= -\frac{\omega^{(2)} + \cos(\chi) \varepsilon^{(2)}}{\sin^2(\chi)} \frac{\vec{M}_x}{A} + \frac{\varepsilon^{(2)} - \cos(\chi) \omega^{(2)}}{\sin^2(\chi)} \frac{\vec{M}_y}{B}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(2)} &= \varepsilon_x, & \varepsilon^{(1)} &= \varepsilon_y, & \chi^{(1)} &= -\chi_1, & \chi^{(2)} &= -\chi_2, \\ \omega^{(1)} &= \sin(\chi) \frac{\omega}{2} + \cos(\chi) \varepsilon_x, & \omega^{(2)} &= -\sin(\chi) \frac{\omega}{2} - \cos(\chi) \varepsilon_y, \\ \tau^{(1)} &= \tau - \cos(\chi) \chi_1 + \frac{1}{R_{12}} \left( \sin(\chi) \varepsilon_y - \cos(\chi) \frac{\omega}{2} \right) - \frac{1}{R'_1} \frac{\omega}{2}, \\ \tau^{(2)} &= -\tau + \cos(\chi) \chi_2 - \frac{1}{R_{12}} \left( \sin(\chi) \varepsilon_x - \cos(\chi) \frac{\omega}{2} \right) - \frac{1}{R'_2} \frac{\omega}{2}, \end{aligned}$$



$$\xi_1 = \left| \frac{\bar{\Omega}_x}{A} \right|, \quad \xi_2 = \left| \frac{\bar{\Omega}_y}{B} \right|.$$

Имеет место также соотношение

$$\omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \cos(\chi) (\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)}) = 0.$$

Этим исчерпываются статические соотношения теории тонких оболочек, когда имеет место произвольная криволинейная система координат.

Для ортогональной системы координат получаем уравнения равновесия в перемещениях (три уравнения относительно трех неизвестных функций  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$ ,  $w(x, y)$ ). Эти уравнения получаются из уравнений (15) путем построения трех скалярных соотношений и отбрасывания в них второстепенных слагаемых.

## 2.7. Вариационный метод получения уравнений равновесия и движения оболочек и естественных краевых и начальных условий

Для задач статики уравнения равновесия оболочек и естественные краевые условия можно получить на основе вариационного принципа Лагранжа. Составляется функционал полной потенциальной энергии деформации оболочки, представляющий собой разность потенциальной энергии  $E_p$  и работы внешних сил  $A_R$ .

Находится первая вариация этого функционала и приравнивается к нулю. После соответствующих преобразований, приравнивая коэффициенты при вариации функции перемещений в двойном интеграле к нулю, получаются уравнения равновесия [48]. Известно, что учет поперечных сдвигов для тонких оболочек дает практически тот же результат при нахождении критической нагрузки потери устойчивости оболочки, что и в том случае, когда считается справедливой гипотеза прямой нормали. А вот когда ведется исследование устойчивости оболочек, подкрепленных ребрами жесткости, то учет поперечных сдвигов существенно влияет на результаты расчета.

Учет поперечных сдвигов позволяет исследовать оболочки средней толщины. При выводе уравнений равновесия вариационным методом будем использовать модель оболочки, учитывающую поперечные сдвиги. В этом случае функционал полной потенциальной энергии деформации оболочки принимает вид (модель Тимошенко – Рейсснера)

$$E_s = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left( N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \gamma_{xy} + M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + (M_{xy} + M_{yx}) \chi_{12} + Q_x (\Psi_x - \theta_1) + Q_y (\Psi_y - \theta_2) - 2qW - 2P_x U - 2P_y V \right) AB dx dy.$$

Здесь  $q$ ,  $P_x$ ,  $P_y$  – компоненты внешней нагрузки вдоль координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  имеют вид (10), функции изменения кривизны и кручения

$$\chi_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_y, \quad \chi_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_x,$$

$$\chi_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_y - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_x \right),$$

где  $\Psi_x(x, y)$ ,  $\Psi_y(x, y)$  – углы поворота отрезка нормали в срединной поверхности оболочки в сечениях  $xOz$ ,  $yOz$  соответственно.

Усилия, моменты и поперечные силы, входящие в функционал, зависят от того, какая задача решается (линейно-упругая, нелинейно-упругая, задача ползучести), для оболочки постоянной толщины или ступенчато-переменной толщины.



Для получения уравнений равновесия необходимо найти первую вариацию функционала  $E_s$  и приравнять ее к нулю.

$$\begin{aligned} \delta E_s = \int_{a_1}^a \int_0^b \left( N_x \delta \varepsilon_x + N_y \delta \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \delta \gamma_{xy} + M_x \delta \chi_1 + M_y \delta \chi_2 + \right. \\ \left. + (M_{xy} + M_{yx}) \delta \chi_{12} + Q_x \delta (\Psi_x - \theta_1) + Q_y \delta (\Psi_y - \theta_2) - \right. \\ \left. - q \delta W - P_x \delta U - P_y \delta V \right) AB dx dy = 0. \end{aligned}$$

Это вариационное уравнение нужно преобразовать так, используя интегрирование по частям, чтобы под знаком двойного интеграла не было вариаций от производных функций  $U, V, W, \Psi_x, \Psi_y$ .

Подробно распишем преобразование первого члена вариационного уравнения:

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b AB N_x \delta \left( \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} V - k_x W + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right)^2 \right) dx dy = \\ = \int_0^a \int_0^b \left[ BN_x \delta \frac{\partial U}{\partial x} + N_x \frac{\partial A}{\partial y} \delta V - AB k_x N_x \delta W + \right. \\ \left. + AB N_x \left( \frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right) \delta \left( \frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right) \right] dx dy = \\ = \int_0^b BN_x \delta U|_0^a dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial BN_x}{\partial x} \delta U dx dy + \\ + \int_0^a \int_0^b \left( N_x \frac{\partial A}{\partial y} \delta V - AB k_x N_x \delta W + AB k_x N_x \left( \frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right) \delta U \right) dx dy - \\ - \int_0^b BN_x \theta_1 \delta W|_0^a dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial}{\partial x} (BN_x \theta_1) \delta W dx dy = \\ = - \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial BN_x}{\partial x} + AB k_x N_x \theta_1 \right) \delta U - N_x \frac{\partial A}{\partial y} \delta V + \right. \\ \left. + \left( AB k_x N_x - \frac{\partial}{\partial x} (BN_x \theta_1) \right) \delta W \right] dx dy + \\ + \int_0^b (BN_x \delta U - BN_x \theta_1 \delta W)|_0^a dy. \end{aligned}$$

При преобразовании остальных членов вариационного уравнения  $\delta E_s = 0$  промежуточные действия опускаем. Итак, получим

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b AB N_y \delta \left( \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U - k_y W + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right)^2 \right) dx dy = \\ = - \int_0^a \int_0^b \left[ \left( AB k_y N_y \theta_2 + \frac{\partial AN_y}{\partial y} \right) \delta V - N_y \frac{\partial B}{\partial x} \delta U + \right. \\ \left. + \left( AB k_y N_y - \frac{\partial}{\partial y} (AN_y \theta_2) \right) \delta W \right] dx dy + \int_0^a (AN_y \delta V - AN_y \theta_2 \delta W)|_0^b dx, \\ \int_0^a \int_0^b \frac{1}{2} AB (N_{xy} + N_{yx}) \delta \left( \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} U - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} V + \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right) \left( \frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right) dx dy = \\
 = & - \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{1}{2} AB k_x (N_{xy} + N_{yx}) \theta_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} A (N_{xy} + N_{yx}) + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \frac{\partial A}{\partial y} \right) \delta U + \right. \\
 & + \left( \frac{1}{2} AB k_y (N_{xy} + N_{yx}) \theta_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} B (N_{xy} + N_{yx}) + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \frac{\partial B}{\partial x} \right) \delta V - \\
 & \left. - \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} B (N_{xy} + N_{yx}) \theta_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} A (N_{xy} + N_{yx}) \theta_1 \right) \delta W \right] dx dy + \\
 & + \int_0^a \left( \frac{1}{2} A (N_{xy} + N_{yx}) \delta U - \frac{1}{2} A (N_{xy} + N_{yx}) \theta_1 \delta W \right) \Big|_0^b dx + \\
 & + \int_0^b \left( \frac{1}{2} B (N_{xy} + N_{yx}) \delta V - \frac{1}{2} B (N_{xy} + N_{yx}) \theta_2 \delta W \right) \Big|_0^a dy, \\
 & \int_0^a \int_0^b AB Q_x \left( \delta \Psi_x + \frac{1}{A} \delta \frac{\partial W}{\partial x} + k_x \delta U \right) dx dy + \\
 & + \int_0^a \int_0^b AB Q_y \left( \delta \Psi_y + \frac{1}{B} \delta \frac{\partial W}{\partial y} + k_y \delta V \right) dx dy = \\
 = & - \int_0^a \int_0^b \left[ -AB k_x Q_x \delta U - AB k_y Q_y \delta V + \left( \frac{\partial B Q_x}{\partial x} + \frac{\partial A Q_y}{\partial y} \right) \delta W - \right. \\
 & \left. - AB Q_x \delta \Psi_x - AB Q_y \delta \Psi_y \right] dx dy + \\
 & + \int_0^a A Q_y \delta W \Big|_0^b dx + \int_0^b B Q_x \delta W \Big|_0^a dy, \\
 & \int_0^a \int_0^b AB M_x \delta \left( \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_y \right) dx dy = \\
 = & - \int_0^a \int_0^b \left[ \frac{\partial B M_x}{\partial x} \delta \Psi_x - M_x \frac{\partial A}{\partial y} \delta \Psi_y \right] dx dy + \int_0^b B M_x \delta \Psi_x \Big|_0^a dy, \\
 & \int_0^a \int_0^b AB M_y \delta \left( \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_x \right) dx dy = \\
 = & - \int_0^a \int_0^b \left[ \frac{\partial A M_y}{\partial y} \delta \Psi_y - M_y \frac{\partial B}{\partial x} \delta \Psi_x \right] dx dy + \int_0^a A M_y \delta \Psi_y \Big|_0^b dx, \\
 & \int_0^a \int_0^b \frac{1}{2} AB (M_{xy} + M_{yx}) \delta \left( \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_x - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_y \right) dx dy = \\
 = & - \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} A (M_{xy} + M_{yx}) + \frac{1}{2} (M_{xy} + M_{yx}) \frac{\partial A}{\partial y} \right) \delta \Psi_x + \right. \\
 & + \left. \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} B (M_{xy} + M_{yx}) + \frac{1}{2} (M_{xy} + M_{yx}) \frac{\partial B}{\partial x} \right) \delta \Psi_y \right] dx dy + \\
 & + \int_0^b \frac{1}{2} B (M_{xy} + M_{yx}) \delta \Psi_y \Big|_0^a dy + \int_0^a \frac{1}{2} A (M_{xy} + M_{yx}) \delta \Psi_x \Big|_0^b dx.
 \end{aligned}$$

Окончательно вариационное уравнение примет вид

$$\delta E_s = - \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial B N_x}{\partial x} - N_y \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial A (N_{xy} + N_{yx})}{\partial y} + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \frac{\partial A}{\partial y} + \right. \right.$$



$$\begin{aligned}
 & + ABk_x \left( N_x \theta_1 + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \theta_2 \right) - ABk_x Q_x + P_x AB \Big) \delta U + \\
 & + \left( \frac{\partial AN_y}{\partial y} - N_x \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial B (N_{xy} + N_{yx})}{\partial x} + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \frac{\partial B}{\partial x} + \right. \\
 & + ABk_y \left( N_y \theta_2 + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \theta_1 \right) - ABk_y Q_y + P_y AB \Big) \delta V + \\
 & + \left( AB (k_x N_x + k_y N_y) - \frac{\partial}{\partial x} B \left( N_x \theta_1 + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \theta_2 \right) - \right. \\
 & - \frac{\partial}{\partial y} A \left( N_y \theta_2 + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \theta_1 \right) + \frac{\partial B Q_x}{\partial x} + \frac{\partial A Q_y}{\partial y} + q AB \Big) \delta W + \\
 & + \left( \frac{\partial B M_x}{\partial x} - M_y \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial A (M_{xy} + M_{yx})}{\partial y} + \frac{1}{2} (M_{xy} + M_{yx}) \frac{\partial A}{\partial y} - AB Q_x \right) \delta \Psi_x + \\
 & + \left. \left( \frac{\partial A M_y}{\partial y} - M_x \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial B (M_{xy} + M_{yx})}{\partial x} + \frac{1}{2} (M_{xy} + M_{yx}) \frac{\partial B}{\partial x} - AB Q_y \right) \delta \Psi_y \right] dx dy + \\
 & + \int_0^a \left[ \frac{1}{2} A (N_{xy} + N_{yx}) \delta U + AN_y \delta V - \left( AN_y \theta_2 + \frac{1}{2} A (N_{xy} + N_{yx}) \theta_1 + A Q_y \right) \delta W + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} A (M_{xy} + M_{yx}) \delta \Psi_x + AM_y \delta \Psi_y \right] \Big|_0^b dx + \\
 & + \int_0^b \left[ BN_x \delta U + \frac{1}{2} B (N_{xy} + N_{yx}) \delta V - \left( BN_x \theta_1 + \frac{1}{2} B (N_{xy} + N_{yx}) \theta_2 + B Q_x \right) \delta W + \right. \\
 & \quad \left. + BM_x \delta \Psi_x + \frac{1}{2} B (M_{xy} + M_{yx}) \delta \Psi_y \right] \Big|_0^a dy = 0.
 \end{aligned}$$

Так как вариации искоемых функций  $\delta U$ ,  $\delta V$ ,  $\delta W$ ,  $\delta \Psi_x$ ,  $\delta \Psi_y$  на отрезках  $[0, a]$  и  $[0, b]$  не равны нулю, то из условия равенства нулю двойного интеграла получим уравнения равновесия, а из равенства нулю одинарных интегралов — краевые условия на контуре оболочки. Итак, уравнения равновесия принимают вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial B N_x}{\partial x} - N_y \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (A (N_{xy} + N_{yx})) + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \frac{\partial A}{\partial y} - ABk_x Q_x + \\
 & \quad + ABk_x \left( N_x \theta_1 + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \theta_2 \right) + ABP_x = 0, \\
 & \frac{\partial A N_y}{\partial y} - N_x \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (B (N_{xy} + N_{yx})) + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \frac{\partial B}{\partial x} - ABk_y Q_y + \\
 & \quad + ABk_y \left( N_y \theta_2 + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \theta_1 \right) + ABP_y = 0 \\
 & \quad \frac{AB(k_x N_x + k_y N_y) - \frac{\partial}{\partial x} B \left( N_x \theta_1 + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \theta_2 \right) -}{- \frac{\partial}{\partial y} A \left( N_y \theta_2 + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \theta_1 \right) + \frac{\partial B Q_x}{\partial x} + \frac{\partial A Q_y}{\partial y} + ABq} = 0, \\
 & \frac{\partial B M_x}{\partial x} - M_y \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (A (M_{xy} + M_{yx})) + \frac{1}{2} (M_{xy} + M_{yx}) \frac{\partial A}{\partial y} - AB Q_x = 0, \\
 & \frac{\partial A M_y}{\partial y} - M_x \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (B (M_{xy} + M_{yx})) + \frac{1}{2} (M_{xy} + M_{yx}) \frac{\partial B}{\partial x} - AB Q_y = 0.
 \end{aligned}$$



Подчеркнутые члены в этих уравнениях отражают геометрическую нелинейность. Подчеркнутыми в первых двух уравнениях членами обычно пренебрегают, считая их несущественными. Из равенства нулю одномерных интегралов получаются естественные краевые условия.

Краевые условия принимают вид при  $x = 0, x = a$

$$\begin{aligned} N_x = 0 \quad \text{или} \quad U = 0, \\ N_{xy} + N_{yx} = 0 \quad \text{или} \quad V = 0, \\ BN_x\theta_1 + \frac{1}{2}B(N_{xy} + N_{yx})\theta_2 + BQ_x = 0 \quad \text{или} \quad W = 0, \\ M_x = 0 \quad \text{или} \quad \Psi_x = 0, \\ M_{xy} + M_{yx} = 0 \quad \text{или} \quad \Psi_y = 0, \end{aligned}$$

при  $y = 0, y = b$

$$\begin{aligned} N_{xy} + N_{yx} = 0 \quad \text{или} \quad U = 0, \\ N_y = 0 \quad \text{или} \quad V = 0, \\ AN_y\theta_2 + \frac{1}{2}A(N_{xy} + N_{yx})\theta_1 + AQ_y = 0 \quad \text{или} \quad W = 0, \\ M_{xy} + M_{yx} = 0 \quad \text{или} \quad \Psi_x = 0, \\ M_y = 0 \quad \text{или} \quad \Psi_y = 0. \end{aligned}$$

Например, при шарнирно-неподвижном закреплении края оболочки при  $x = 0$  должны выполняться условия

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0, \quad M_x = 0, \quad \Psi_y = 0.$$

Если при  $x = 0$  оболочка закреплена жестко, то краевые условия примут вид

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0, \quad \Psi_x = 0, \quad \Psi_y = 0.$$

Если при  $x = 0$  оболочка свободна (не закреплена), то должны выполняться условия

$$N_x = 0, \quad N_{xy} + N_{yx} = 0, \quad Q_x = 0, \quad M_x = 0, \quad M_{xy} + M_{yx} = 0.$$

Для задач динамики кроме потенциальной энергии деформации оболочки еще рассматривается кинетическая энергия. Если нагрузка, действующая на оболочку, является функцией не только пространственных координат  $x, y$ , но и временной координаты  $t$ , то и все функции перемещений и углов поворота нормали тоже будут функциями координат  $x, y$  и  $t$ . В этом случае рассматривается динамическая задача.

Функционал полной энергии деформации оболочки (функционал Гамильтона – Остроградского) будет иметь вид [50]

$$E_d = \int_{t_0}^{t_1} (E_k - E_s) dt,$$

где  $E_k$  — кинетическая энергия деформации оболочки, имеющая вид

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \left[ (\dot{U}^z)^2 + (\dot{V}^z)^2 + (\dot{W}^z)^2 \right] AB dx dy dz.$$



Здесь  $\rho$  — плотность материала оболочки, точками обозначены производные по  $t$ ,  $E_s = E_p - A_R$  — разность потенциальной энергии деформации оболочки и работы внешних сил.

Из условия минимума функционала  $E_d$

$$\delta E_d = 0$$

после соответствующих преобразований можно получить уравнения движения. Покажем это.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (E_k - E_s) dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta E_k - \delta E_s) dt = 0.$$

Преобразование  $\delta E_s$  было рассмотрено ранее. Теперь преобразуем  $\delta E_k$ .

$$\begin{aligned} \delta E_k &= \frac{\rho}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} [2\dot{U}^z \delta \dot{U}^z + 2\dot{V}^z \delta \dot{V}^z + 2\dot{W}^z \delta \dot{W}^z] AB dx dy dz = \\ &= \rho \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} [(\dot{U} + z\dot{\Psi}_x) \delta \dot{U} + (\dot{U} + z\dot{\Psi}_x) z \delta \dot{\Psi}_x + (\dot{V} + z\dot{\Psi}_y) \delta \dot{V} + \\ &\quad + (\dot{V} + z\dot{\Psi}_y) z \delta \dot{\Psi}_y + \dot{W} \delta \dot{W}] AB dx dy dz = \\ &= \rho \int_0^a \int_0^b \left[ h\dot{U} \delta \dot{U} + \frac{h^3}{12} \dot{\Psi}_x \delta \dot{\Psi}_x + h\dot{V} \delta \dot{V} + \frac{h^3}{12} \dot{\Psi}_y \delta \dot{\Psi}_y + h\dot{W} \delta \dot{W} \right] AB dx dy, \\ \delta \int_{t_0}^{t_1} E_k dt &= -\rho \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a \int_0^b \left[ h(\ddot{U} \delta U + \ddot{V} \delta V + \ddot{W} \delta W) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^3}{12} (\ddot{\Psi}_x \delta \Psi_x + \ddot{\Psi}_y \delta \Psi_y) \right] dt dx dy + \\ &+ \rho \int_0^a \int_0^b \left[ h(\dot{U} \delta U + \dot{V} \delta V + \dot{W} \delta W) + \frac{h^3}{12} (\dot{\Psi}_x \delta \Psi_x + \dot{\Psi}_y \delta \Psi_y) \right] dx dy \Big|_{t_0}^{t_1}. \end{aligned}$$

Используя ранее преобразованное выражение  $\int_{t_0}^{t_1} \delta E_s dt$  и приравнявая в тройном интеграле коэффициенты при  $\delta U$ ,  $\delta V$ ,  $\delta W$ ,  $\delta \Psi_x$ ,  $\delta \Psi_y$  к нулю, получим уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial B N_x}{\partial x} - N_y \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (A(N_{xy} + N_{yx})) + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \frac{\partial A}{\partial y} - ABk_x Q_x + \\ + ABk_x \left( N_x \theta_1 + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \theta_2 \right) + ABP_x = ABh\rho \frac{\partial^2 U}{dt^2}, \\ \frac{\partial A N_y}{\partial y} - N_x \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (B(N_{xy} + N_{yx})) + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \frac{\partial B}{\partial x} - ABk_y Q_y + \\ + ABk_y \left( N_y \theta_2 + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \theta_1 \right) + ABP_y = ABh\rho \frac{\partial^2 V}{dt^2}, \quad (16) \\ AB(k_x N_x + k_y N_y) - \frac{\partial}{\partial x} B \left( N_x \theta_1 + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \theta_2 \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial y} A \left( N_y \theta_2 + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \theta_1 \right) + \frac{\partial B Q_x}{\partial x} + \frac{\partial A Q_y}{\partial y} + ABq = ABh\rho \frac{\partial^2 W}{dt^2}, \\ \frac{\partial B M_x}{\partial x} - M_y \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (A(M_{xy} + M_{yx})) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2} (M_{xy} + M_{yx}) \frac{\partial A}{\partial y} - ABQ_x = AB\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2}, \\ & \frac{\partial AM_y}{\partial y} - M_x \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (B (M_{xy} + M_{yx})) + \\ & + \frac{1}{2} (M_{xy} + M_{yx}) \frac{\partial B}{\partial x} - ABQ_y = AB\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Начальные условия при  $t = t_0$  будут иметь вид

$$\begin{aligned} U &= 0 \quad \text{или} \quad \dot{U} = 0, \\ V &= 0 \quad \text{или} \quad \dot{V} = 0, \\ W &= 0 \quad \text{или} \quad \dot{W} = 0, \\ \Psi_x &= 0 \quad \text{или} \quad \dot{\Psi}_x = 0, \\ \Psi_y &= 0 \quad \text{или} \quad \dot{\Psi}_y = 0. \end{aligned}$$

Возможно, что оба соотношения будут равны нулю.

Стоящие в уравнениях движения справа члены называются инерционными членами. Уравнения движения (16) учитывают инерцию вращения.

Для ребристых оболочек вариация  $\delta E_k$  примет вид

$$\begin{aligned} \delta E_k &= \rho \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2+H} \left[ (\dot{U} + z\dot{\Psi}_x) \delta \dot{U} + (\dot{U} + z\dot{\Psi}_x) z\dot{\Psi}_x + \right. \\ & \left. + (\dot{V} + z\dot{\Psi}_y) \delta \dot{V} + (\dot{V} + z\dot{\Psi}_y) z\dot{\Psi}_y + \dot{W} \delta \dot{W} \right] AB \, dx \, dy \, dz = \\ & = \rho \int_0^a \int_0^b \left[ (h + \bar{F}) \dot{U} \delta \dot{U} + \bar{S} \dot{\Psi}_x \delta \dot{U} + \bar{S} \dot{U} \delta \dot{\Psi}_x + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \dot{\Psi}_x \delta \dot{\Psi}_x + \right. \\ & \left. + (h + \bar{F}) \dot{V} \delta \dot{V} + \bar{S} \dot{\Psi}_y \delta \dot{V} + \bar{S} \dot{V} \delta \dot{\Psi}_y + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \dot{\Psi}_y \delta \dot{\Psi}_y + (h + \bar{F}) \dot{W} \delta \dot{W} \right] AB \, dx \, dy, \\ \delta \int_{t_0}^{t_1} E_k \, dt &= -\rho \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left[ (h + \bar{F}) \ddot{U} + \bar{S} \ddot{\Psi}_x \right] \delta U + \left[ \bar{S} \ddot{U} + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \ddot{\Psi}_x \right] \delta \Psi_x + \right. \\ & \left. + \left[ (h + \bar{F}) \ddot{V} + \bar{S} \ddot{\Psi}_y \right] \delta V + \left[ \bar{S} \ddot{V} + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \ddot{\Psi}_y \right] \delta \Psi_y + (h + \bar{F}) \ddot{W} \delta W \right\} AB \, dx \, dy \, dt + \\ & + \rho \int_0^a \int_0^b \left\{ \left[ (h + \bar{F}) \dot{U} + \bar{S} \dot{\Psi}_x \right] \delta U + \left[ \bar{S} \dot{U} + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \dot{\Psi}_x \right] \delta \Psi_x + \right. \\ & \left. + \left[ (h + \bar{F}) \dot{V} + \bar{S} \dot{\Psi}_y \right] \delta V + \left[ \bar{S} \dot{V} + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \dot{\Psi}_y \right] \delta \Psi_y + (h + \bar{F}) \dot{W} \delta W \right\} \Big|_{t_0}^{t_1} AB \, dx \, dy. \end{aligned}$$

В этом случае (для ребристых оболочек) инерционные члены примут вид

$$\begin{aligned} & AB\rho \left[ (h + \bar{F}) \ddot{U} + \bar{S} \ddot{\Psi}_x \right], \quad AB\rho \left[ (h + \bar{F}) \ddot{V} + \bar{S} \ddot{\Psi}_y \right], \quad AB\rho (h + \bar{F}) \ddot{W}, \\ & AB\rho \left[ \bar{S} \ddot{U} + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \ddot{\Psi}_x \right], \quad AB\rho \left[ \bar{S} \ddot{V} + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \ddot{\Psi}_y \right]. \end{aligned}$$

Если считается справедливой гипотеза прямой нормали (не учитываются поперечные сдвиги и инерция вращения), то инерционные члены примут вид (будет три уравнения)

$$AB\rho h \ddot{U}, \quad AB\rho h \ddot{V}, \quad AB\rho h \ddot{W}.$$



### 2.8. Некоторые нерешенные проблемы теории оболочек

Соотношения, выведенные В. В. Новожиловым, А. И. Лурье и Х. М. Муштари, приведенные в предыдущем пункте, основываются на

**Требования 1:** параметризация, описывающая срединную поверхность оболочки, должна быть такой, чтобы базис в касательной плоскости к этой поверхности был ортогональным, а базисные векторы — главными (нормальные кривизны в их направлении — главные).

Данное требование очень сильно сокращает область поверхностей, которые могут рассматриваться в рамках данных теорий. Рассмотрим такой пример. Для гипара (гиперболического параболоида), форма которого была очень популярна в 1960–1980-е гг. в качестве покрытий [88, 89], известно как минимум четыре вида задания [90]:

- 1)  $z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$ ;
- 2)  $z = a_0xy + a_1x + a_2y + a_3$ ;
- 3)  $x = \sqrt{p}(\alpha + \beta)$ ,  $y = \sqrt{q}(\alpha - \beta)$ ,  $z = 2\alpha\beta$ ;
- 4)  $x = \sqrt{p}\alpha \operatorname{ch}(\beta)$ ,  $y = \sqrt{q}\alpha \operatorname{sh}(\beta)$ ,  $z = \frac{\alpha^2}{2}$ .

Первые два вида — явные, последние два — параметрические. На рис. 3 представлены гипары, соответствующие представленным заданиям.

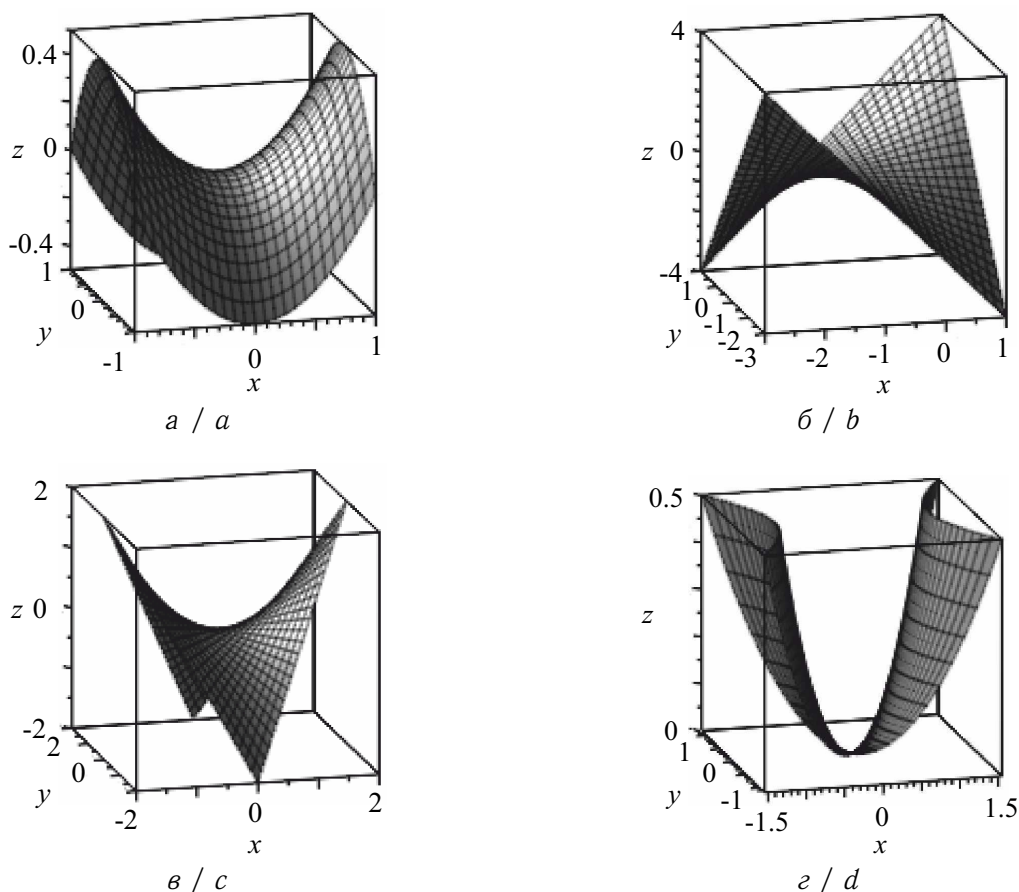


Рис. 3. Гипары, построенные: *a* — по заданию 1 ( $x, y \in [-1, 1]$ ,  $p = q = 1$ ); *b* — по заданию 2 ( $x, y \in [-3, 1]$ ,  $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$ ), *c* — по заданию 3 ( $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ ,  $p = q = 1$ ), *d* — по заданию 4 ( $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ ,  $p = q = 1$ )

Fig. 3. Hypars built by: *a* is set 1 ( $x, y \in [-1, 1]$ ,  $p = q = 1$ ), *b* is set 2 ( $x, y \in [-3, 1]$ ,  $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$ ), *c* is set 3 ( $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ ,  $p = q = 1$ ), *d* is set 4 ( $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ ,  $p = q = 1$ )



Покажем, что все эти виды задания не удовлетворяют требованию 1. Для этого можно проверить, является ли метрика, порождаемая заданием, евклидовой. В нашем случае поверхность является двумерным объектом, поэтому метрика  $g$  описывается тензором 2-валентности. Для проверки евклидовости достаточно проверить, что элемент  $g_{12} = g_{21}$  равен нулю. Если это не так, что требование 1 не удовлетворяется.

Для первых двух заданий элемент  $g_{12}$  рассчитывается по формуле

$$g_{12} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Для первого случая имеем

$$g_{12} = -\frac{xy}{pq},$$

а для второго —

$$g_{12} = (a_0x + a_2)(a_0y + a_1).$$

Для последних двух заданий элемент  $g_{12}$  представляется в виде

$$g_{12} = \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \right\rangle, \quad \vec{r} = (x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta), z(\alpha, \beta)).$$

В случае третьего представления —

$$g_{12} = 4\alpha\beta + p - q,$$

а четвертого —

$$g_{12} = \alpha \operatorname{sh}(\beta) \operatorname{ch}(\beta) (p + q).$$

Как видно, ни одно из известных заданий гипара не удовлетворяет требованию 1. Следовательно, и теориями В. В. Новожилова, А. И. Лурье и Х. М. Муштари в этом случае пользоваться нельзя.

Описанная проблема решается с учетом дополнительных слагаемых. Первой отечественной работой, где требование 1 не использовалось, была работа А. Л. Гольденвейзера [87]: выражения (14) позволяют проводить исследование любых  $C^2$ -гладких поверхностей. Однако эти выражения громоздки и сложны для анализа (в этой работе не расписаны символы Кристоффеля, которые участвуют в данных выражениях). Для большего удобства можно использовать аппарат тензорного исчисления, позволяющего коротко и в бескоординатном виде описывать уравнения равновесия. Впервые в отечественной теории этот подход предложил К. Ф. Черных [53]. Сейчас имеется ряд работ, использующих именно такое представление [91–93].

Несколько иной подход к описанию деформации поверхностей был предложен А. В. Погореловым [94, 95]. В последнее время развивается еще одно направление геометрических моделей, описанное в работе Н. М. Ивочкиной и Н. В. Филимоненковой [96]. Представленные в этой работе инструменты представляют интерес в области вывода и последующего анализа деформации срединной поверхности оболочки.

## Заключение

Из российских ученых основные соотношения для тонких упругих оболочек были разработаны А. И. Лурье, В. В. Новожиловым и А. Л. Гольденвейзером. Считалось, что перемещения малы (геометрически линейный вариант модели), система координат ортогональная, справедлива гипотеза прямой нормали, рассматривались



только линейно-упругие деформации (справедлив закон Гука). Полученные авторами соотношения практически совпали, отличия составляли только некоторые члены, которыми можно пренебречь ввиду их малости.

А. Л. Гольденвейзер получил соотношения тонких оболочек, когда координатная поверхность отнесена к произвольным косоугольным системам координат (не ортогональным). Но эти соотношения получились очень громоздкими.

Рассмотрены также модели оболочек, подкрепленных ребрами жесткости. Показан вариационный метод получения уравнений равновесия и естественных краевых условий.

Основные соотношения теории тонких оболочек представляют собой:

- геометрические соотношения (связь деформаций и перемещений);
- физические соотношения (связь напряжений и деформаций);
- функционал полной потенциальной энергии деформации оболочки или уравнение равновесия;
- краевые условия, соответствующие виду закрепления контура оболочки.

В совокупности все эти соотношения задачу расчета оболочки делают статически определимой.

Как показал анализ работ по расчетам оболочечных конструкций, наиболее часто используются упрощенные модели, когда в слое, отстоящем на расстояние  $z$  от координатной поверхности, параметры Ляме и радиусы кривизн оболочки считаются неизменяющимися. Но В. В. Новожилов показал, что эти упрощения не приводят к большим погрешностям, чем исходные допущения, однако расчеты оболочек по уточненным моделям проводить необходимо, так как при исследовании устойчивости оболочек могут проявиться ранее незамеченные эффекты.

Таким образом, в работе проведен достаточно полный анализ моделей упругого деформирования тонких оболочек.

*Продолжение следует.*

### Список литературы

1. Aron H. Das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dünnen, beliebig gekrümmten elastischen Schale // Journal für die reine und angewandte Mathematik / ed. C. W. Borchardt. Berlin ; Boston : De Gruyter, 1874. Vol. 78. P. 136–174. <https://doi.org/10.1515/9783112389843-010>
2. Love A. E. H. XVI. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell // Philosophical Transactions of the Royal Society of London A. 1888. Vol. 179. P. 491–546. <https://doi.org/10.1098/rsta.1888.0016>
3. Reissner H. Formänderung und Spannungen einer dünnwandigen, an den Rändern frei aufliegenden, beliebig belasteten Zylinderschale. Eine Erweiterung der Navierschen Integrationsmethode // ZAMM. 1933. Vol. 13, iss. 2. P. 133–138. <https://doi.org/10.1002/zamm.19330130219>
4. Donell L. H. Stability of Thin-Walled Tubes Under Torsion // NASA. Rep. № 479. 1933. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19930091553> (дата обращения: 16.11.2022).
5. Галеркин Б. Г. К теории упругой цилиндрической оболочки // Доклады Академии наук СССР. 1934. Т. 4, № 5–6. С. 270–275.
6. Фейнберг С. К вопросу о построении моментной теории цилиндрических оболочек // Проект и стандарт. 1936. № 12. С. 7–11.
7. Лурье А. И. Исследования по теории упругих оболочек // Труды Ленинградского индустриального института. 1937. № 6, вып. 3. С. 37–52.
8. Муштару Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек // Известия физико-математического общества при Казанском университете. Серия 8. 1938. Т. 11. С. 71–150.





9. Гольденвейзер А. Л. Уравнения теории оболочек // Прикладная математика и механика. 1940. Т. 4, вып. 2. С. 35–42.
10. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Ленинград : Оборонгиз, 1941. 431 с.
11. Власов В. З. Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек // Прикладная математика и механика. 1944. Т. 8, вып. 2. С. 109–140.
12. Работнов Ю. Н. Основные уравнения теории оболочек // Доклады Академии наук СССР. 1945. Т. 47, № 2. С. 90–93.
13. Векуа И. Н. К теории тонких пологих упругих оболочек // Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12, вып. 1. С. 69–74.
14. Амбарцумян С. А. К теории анизотропных пологих оболочек // Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12, вып. 1. С. 75–80.
15. Алумяэ Н. А. Дифференциальные уравнения состояний равновесия тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии // Прикладная математика и механика. 1949. Т. 13, вып. 1. С. 95–106.
16. Krauss F. Über die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie schwach deformierter Schalen // Mathematische Annalen. 1929. Vol. 101, iss. 1. P. 61–92. <https://doi.org/10.1007/BF01454824>
17. Кильчевский Н. А. Обобщение современной теории оболочек // Прикладная математика и механика. 1939. Т. 2, вып. 4. С. 427–438.
18. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. Москва : Наука, 1978. 359 с.
19. Товстик П. Е. Устойчивость тонких оболочек. Москва : Наука. Физматлит, 1995. 320 с.
20. Бубнов И. Г. Строительная механика корабля : ч. 1–2. Санкт-Петербург : тип. Мор. м-ва, 1912–1914. Ч. 1. 1912. 330 с. ; Ч. 2. 1914. 647 с.
21. Karman Th. V. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau // Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften. Leipzig, 1910. Vol. 4. P. 311–385. [https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1_5)
22. Феодосьев В. И. Упругие элементы точного приборостроения: Теория и расчет. Москва : Оборонгиз, 1949. 344 с.
23. Ворович И. И. О существовании решений в нелинейной теории оболочек // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1955. Т. 19, № 4. С. 173–186.
24. Donell L. N. A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending // Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. 1934. Vol. 56, iss. 11. P. 795–806. <https://doi.org/10.1115/1.4019867>
25. Karman Th. V., Tsien H.-S. The buckling of spherical shells by external pressure // Journal of the Aeronautical Sciences. 1939. Vol. 7, iss. 2. P. 43–50. <https://doi.org/10.2514/8.1019>
26. Marguerre K. Zur Theorie der gekremten Platte grosser Formänderung. Berlin : Ablershof Bucherei, 1939. (Jahrbuch 1939 deutscher Luftfahrtsforschung. Bd. 1).
27. Петров В. В. К расчету пологих оболочек при конечных прогибах // Научные доклады высшей школы. Строительство. 1959. № 1. С. 27–35.
28. Лурье А. И. Общие уравнения оболочки, подкрепленной ребрами жесткости. Ленинград, 1948. 28 с.
29. Власов В. З. Контактные задачи по теории оболочек и тонкостенных стержней // Известия Академии наук СССР. Отделение технических наук. 1949. № 6. С. 819–939.
30. Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Поляков П. С. Ребристые цилиндрические оболочки. Киев : Наукова думка, 1973. 248 с.
31. Гребень Е. С. Основные соотношения технической теории ребристых оболочек // Известия Академии наук СССР. Механика. 1965. № 3. С. 81–92.
32. Михайлов Б. К. Пластины и оболочки с разрывными параметрами. Ленинград : Изд-во ЛГУ, 1980. 196 с.
33. Рассудов В. М. Деформация пологих оболочек, подкрепленных ребрами жесткости // Ученые записки Саратовского университета. 1956. Т. 52. С. 51–91.
34. Белосточный Г. Н. Аналитические методы интегрирования дифференциальных урав-



- нений термоупругости геометрически нерегулярных оболочек // Доклады Академии военных наук. Поволжское региональное отделение. 1999. № 1. С. 14–26.
35. *Теребушко О. И.* Устойчивость и закритическая деформация оболочек, подкрепленных редко расставленными ребрами // Расчет пространственных конструкций : сб. ст. Москва : Машстройиздат, 1964. Вып. 9. С. 131–160.
  36. *Тимашев С. А.* Устойчивость подкрепленных оболочек. Москва : Стройиздат, 1974. 256 с.
  37. *Милейковский И. Е., Гречанинов И. П.* Устойчивость прямоугольных в плане пологих оболочек // Расчет пространственных конструкций : сб. ст. Москва : Машстройиздат, 1969. Вып. 12. С. 168–176.
  38. *Бурмистров Е. Ф.* Симметричная деформация оболочки, мало отличающейся от цилиндрической // Прикладная математика и механика. 1949. Т. 13, вып. 4. С. 401–412.
  39. *Жилин П. А.* Общая теория ребристых оболочек // Прочность гидротурбин: Труды ЦКТИ. 1971. Вып. 88. С. 46–70.
  40. *Енджиевский Л. В.* Нелинейные деформации ребристых оболочек. Красноярск : Изд-во Красноярского ун-та, 1982. 295 с.
  41. *Преображенский И. Н.* Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями. Москва : Машиностроение, 1981. 191 с.
  42. *Ильин В. П., Карпов В. В.* Устойчивость ребристых оболочек при больших перемещениях. Ленинград : Стройиздат, 1986. 168 с.
  43. *Карпов V. V.* Models of the shells having ribs, reinforcement plates and cutouts // International Journal of Solids and Structures. 2018. Vol. 146. P. 117–135. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.03.024>
  44. *Рикардс Р. Б., Тетерс Г. А.* Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига : Зинатне, 1974. 310 с.
  45. *Карпов V. V., Semenov A. A.* Refined model of stiffened shells // International Journal of Solids and Structures. 2020. Vol. 199. P. 43–56. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.03.019>
  46. *Semenov A. A.* Mathematical model of deformation of orthotropic shell structures under dynamic loading with transverse shears // Computers & Structures. 2019. Vol. 221. P. 65–73. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2019.05.017>
  47. *Semenov A. A.* Strength and stability of geometrically nonlinear orthotropic shell structures // Thin-Walled Structures. 2016. Vol. 106. P. 428–436. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2016.05.018>
  48. *Вольмир А. С.* Гибкие пластины и оболочки. Москва : Гостехиздат, 1956. 419 с.
  49. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформированных систем. Москва : Наука, 1956. 984 с.
  50. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. Москва : Наука, 1972. 432 с.
  51. *Черных К. Ф.* Теория тонких оболочек из эластомеров — резиноподобных материалов // Успехи механики. 1983. Т. 6, № 1–2. С. 111–147.
  52. *Черных К. Ф., Кабриц С. А., Михайловский Е. И., Товстик П. Е., Шамина В. А.* Общая нелинейная теория упругих оболочек. Санкт-Петербург : Изд-во СПбГУ, 2002. 388 с.
  53. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек : в 2 т. Т. 2. Некоторые вопросы теории. Ленинград : Изд-во ЛГУ, 1964. 396 с.
  54. *Петров В. В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1975. 119 с.
  55. *Петров В. В., Иноземцев В. К., Синева Н. Ф.* Теория наведенной неоднородности и ее приложения к проблеме устойчивости пластин и оболочек. Саратов : Изд-во Саратовского государственного технического ун-та, 1996. 312 с.
  56. *Коссович Л. Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1986. 176 с.
  57. *Коссович Л. Ю.* Асимптотическое интегрирование нелинейных уравнений теории упру-



- гости для цилиндрической оболочки // Механика деформируемых сред : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1977. Вып. 3. С. 86–96.
58. Аксельрад Э. Л. Гибкие оболочки. Москва : Наука, 1976. 376 с.
  59. Муштары Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань : Таткнигоиздат, 1957. 431 с.
  60. Паймушин В. Н. Статические и динамические балочные формы потери устойчивости длинной ортотропной цилиндрической оболочки при внешнем давлении // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72, вып. 6. С. 1014–1027.
  61. Пшеничнов Г. И. Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластин. Москва : Наука, 1982. 352 с.
  62. Maksimyuk V. A., Storozhuk E. A., Chernyshenko I. S. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) // International Applied Mechanics. 2012. Vol. 48. P. 613–687. <https://doi.org/10.1007/s10778-012-0544-8>
  63. Милейковский И. Е., Трушин С. И. Расчет тонкостенных конструкций. Москва : Стройиздат, 1989. 200 с.
  64. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Чехов В. Н., Шнеренко К. Н. Цилиндрические оболочки, ослабленные отверстиями. Киев : Наукова думка, 1974. 272 с.
  65. Балабух Л. И., Алфутов Н. А., Усюкин В. И. Строительная механика ракет. Москва : Высшая школа, 1984. 391 с.
  66. Шалашилин В. Н., Кузнецов Е. Б. Методы продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. Москва : Эдиториал УРСС, 1999. 224 с.
  67. Gavyushin S. S., Nikolaeva A. S. Method of change of the subspace of control parameters and its application to problems of synthesis of nonlinearly deformable axisymmetric thin-walled structures // Mechanics of Solids. 2016. Vol. 51. P. 339–348. <https://doi.org/10.3103/S0025654416030110>
  68. Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. Москва : Машиностроение, 1976. 278 с.
  69. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. Киев : Наукова думка, 1970. 306 с.
  70. Абовский Н. П., Чернышов В. Н., Павлов А. С. Гибкие ребристые пологие оболочки : учеб. пособие. Красноярск : [б.и.], 1975. 128 с.
  71. Алфутов Н. А. Устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной поперечным силовым набором и нагруженной внешним равномерным давлением // Инженерный сборник. 1956. Т. 23. С. 36–46.
  72. Кантор Б. Я. Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. Киев : Наукова думка, 1971. 136 с.
  73. Кармишин А. В., Лясковец В. А., Мяченков В. И., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. Москва : Машиностроение, 1975. 376 с.
  74. Климанов В. И., Тимашев С. А. Нелинейные задачи подкрепленных оболочек. Свердловск : УНЦ АН СССР, 1985. 291 с.
  75. Терегулов И. Г. Изгиб и устойчивость тонких пластин и оболочек при ползучести. Москва : Наука, 1969. 206 с.
  76. Крысько В. А. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1976. 216 с.
  77. Перцев А. К., Платонов Э. Г. Динамика оболочек и пластин. Ленинград : Судостроение, 1987. 316 с.
  78. Филин А. П. Элементы теории оболочек. Ленинград : Стройиздат, 1987. 384 с.
  79. Корнишин М. С. Нелинейные задачи теории пластин и оболочек и методы их решения. Москва : Наука, 1964. 192 с.
  80. Кривошапко С. Н. О возможностях оболочечных сооружений в современной архитектуре и строительстве // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2013. № 1. С. 51–56.



81. *Meissner E.* Das Elastizitätsproblem für dünne Schalen von Ringflächen, Kugel- und Kegelform // *Phisikalische Zeitschrift*. 1913. Vol. 14. P. 343–349.
82. *Якушев В. Л.* Нелинейные деформации и устойчивость тонких оболочек. Москва : Наука, 2004. 276 с.
83. *Андреев Л. В., Ободан Н. И., Лебедев А. Г.* Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации. Москва : Наука, 1988. 208 с.
84. *Карпов В. В.* Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения : в 2 ч. Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. Москва : Физматлит, 2010. 288 с.
85. *Лурье А. И.* Общая теория упругих тонких оболочек // *Прикладная математика и механика*. 1940. Т. 4, вып. 2. С. 7–34.
86. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее приложение в технике. Москва ; Ленинград : Гостехиздат, 1949. 784 с.
87. *Гольденвейзер А. Л.* Теория тонких упругих оболочек. Москва : ГИТТЛ, 1953. 544 с.
88. *Милейковский И. Е., Купар А. К.* Гипары. Расчет и проектирование пологих оболочек покрытий в форме гиперболических параболоидов. Москва : Стройиздат, 1978. 223 с.
89. *Дыховичный Ю. А., Жуковский Э. З.* Пространственные составные конструкции : учеб. пособие. Москва : Высшая школа, 1989. 288 с.
90. *Кривошапко С. Н., Иванов В. Н., Халаби С. М.* Аналитические поверхности: материалы по геометрии 500 поверхностей и информация к расчету на прочность тонких оболочек. Москва : Наука, 2006. 544 с.
91. *Жилин П. А.* Прикладная механика. Основы теории оболочек : учеб. пособие. Санкт-Петербург : Изд-во Политехнического ун-та, 2006. 167 с.
92. *Михайлова Е. Ю., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В.* Общая теория упругих оболочек : учеб. пособие. Москва : Изд-во МАИ, 2018. 112 с.
93. *Михайлова Е. Ю., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В.* Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек // *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки*. 2018. Т. 160, кн. 3. С. 561–577. EDN: [YZSUDR](#)
94. *Погорелов А. В.* Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. Москва : Наука, 1967. 280 с.
95. *Погорелов А. В.* Изгибание выпуклых поверхностей. Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1951. 183 с.
96. *Ivochkina N. M., Filimonenkova N. V.* Differential geometry in the theory of Hessian operators. URL: <https://arxiv.org/pdf/1904.04157.pdf> (дата обращения: 08.07.2021).

### References

1. Aron H. Das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dünnen, beliebig gekrümmten elastischen Schale. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* / ed. C. W. Borchardt. Berlin, Boston, De Gruyter, 1874, vol. 78, pp. 136–174 (in German). <https://doi.org/10.1515/9783112389843-010>
2. Love A. E. H. XVI. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, 1888, vol. 179, pp. 491–546. <https://doi.org/10.1098/rsta.1888.0016>
3. Reissner H. Formänderung und Spannungen einer dünnwandigen, an den Rändern frei aufliegenden, beliebig belasteten Zylinderschale. Eine Erweiterung der Navierschen Integrationsmethode. *ZAMM*, 1933, vol. 13, iss. 2, pp. 133–138 (in German). <https://doi.org/10.1002/zamm.19330130219>
4. Donell L. H. Stability of Thin-Walled Tubes Under Torsion. NASA, 1933, Rep. no. 479. Available at: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19930091553> (accessed November 16, 2022).
5. Galerkin B. G. On the theory of elastic cylindrical shell. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1934, vol. 4, no. 5–6, pp. 270–275 (in Russian).
6. Feinberg S. On the construction of the moment theory of cylindrical shells. *Proekt i standart* [Project and Standard], 1936, iss. 12, pp. 7–11 (in Russian).



7. Lurie A. I. Research on the theory of elastic shells. *Trudy Leningradskogo industrial'nogo instituta* [Proceedings of the Leningrad Industrial Institute], 1937, no. 6, iss. 3, pp. 37–52 (in Russian).
8. Mushtari H. M. Some generalizations of the theory of thin shells. *Izvestiya fiziko-matematicheskogo obshchestva pri Kazanskom universitete. Seriya 8* [Proceedings of the Physics and Mathematics Society at Kazan University. Series 8], 1938, vol. 11, pp. 71–150 (in Russian).
9. Goldenweiser A. L. Equations of shell theory. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1940, vol. 4, iss. 2, pp. 35–42 (in Russian).
10. Novozhilov V. V. *Teoriya tonkikh obolochek* [Theory of Thin Shells]. Leningrad, Oborongiz, 1941. 431 p. (in Russian).
11. Vlasov V. Z. Basic differential equations of the general theory of elastic shells. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1944, vol. 8, iss. 2, pp. 109–140 (in Russian).
12. Robotnov Yu. N. Basic equations of shell theory. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1945, vol. 47, iss. 2, pp. 90–93 (in Russian).
13. Vekua I. N. On the theory of thin flat elastic shells. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1948, vol. 12, iss. 1, pp. 69–74 (in Russian).
14. Ambartsumyan S. A. On the theory of anisotropic flat shells. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1948, vol. 12, iss. 1, pp. 75–80 (in Russian).
15. Alumae N. A. Differential equations of equilibrium states of thin-walled elastic shells in the post-critical stage. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1949, vol. 13, iss. 1, pp. 95–106 (in Russian).
16. Krauss F. Über die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie schwach deformierter Schalen. *Mathematische Annalen*, 1929, vol. 101, iss. 1, pp. 61–92 (in German). <https://doi.org/10.1007/BF01454824>
17. Kilchevsky N. A. Generalization of the modern theory of shells. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1939, vol. 2, iss. 4, pp. 427–438 (in Russian).
18. Grigolyuk E. I., Kabanov V. V. *Ustoychivost' obolochek* [Shell Stability]. Moscow, Nauka, 1978. 359 p. (in Russian).
19. Tovstik P. E. *Ustoychivost' tonkikh obolochek* [Stability of Thin Shells]. Moscow, Nauka. Fizmatlit, 1995. 320 p. (in Russian).
20. Bubnov I. G. *Stroitel'naya mekhanika korablya* [Ship Construction Mechanics]. Pt. 1–2. Sankt-Peterburg, tip. Mor. m-va, 1912–1914. Pt. 1, 1912. 330 p. ; Pt. 2, 1914. 647 p. (in Russian).
21. Karman Th. V. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Leipzig, 1910, vol. 4, pp. 311–385 (in German). [https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1_5)
22. Feodos'ev V. I. *Uprugie elementy tochnogo priborostroeniya: Teoriya i raschet* [Elastic Elements of Precision Instrumentation: Theory and Calculation]. Moscow, Oborongiz, 1949. 344 p. (in Russian).
23. Vorovich I. I. On the existence of solutions in nonlinear shell theory. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya matematicheskaya*, 1955, vol. 19, iss. 4, pp. 173–186 (in Russian).
24. Donell L. N. A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 1934, vol. 56, iss. 11, pp. 795–806. <https://doi.org/10.1115/1.4019867>
25. Karman Th. V, Tsien H.-S. The buckling of spherical shells by external pressure. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1939, vol. 7, iss. 2, pp. 43–50. <https://doi.org/10.2514/8.1019>
26. Marguerre K. *Zur Theorie der gekremnten Platte grosser Formänderung*. Jahrbuch 1939 deutscher Luftfahrtsforschung. Bd. 1. Berlin, Ablershof Buecherei, 1939 (in German).



27. Petrov V. V. To the calculation of flat shells with finite deflections. *Nauchnye doklady vysshey shkoly. Stroitel'stvo* [Scientific Reports of the Higher School. Construction], 1959, iss. 1, pp. 27–35 (in Russian).
28. Lurie A. I. *Obshchie uravneniya obolochki, podkreplennoy rebrami zhestkosti* [General Equations of a Shell Supported by Stiffeners]. Leningrad, 1948. 28 p. (in Russian).
29. Vlasov V. Z. Contact problems in the theory of shells and thin-walled rods. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Otdelenie tekhnicheskikh nauk*, 1949, iss. 6, pp. 819–939 (in Russian).
30. Amiro I. Ya., Zarutskiy V. A., Polyakov P. S. *Rebristye tsilindricheskie obolochki* [Ribbed Cylindrical Shells]. Kiev, Naukova dumka, 1973. 248 p. (in Russian).
31. Greben' E. S. The main relations of the technical theory of ribbed shells. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika*, 1965, iss. 3, pp. 81–92 (in Russian).
32. Mikhaylov B. K. *Plastiny i obolochki s razryvnymi parametrami* [Plates and Shells with Discontinuous Parameters]. Leningrad, Leningrad University Publ., 1980. 196 p. (in Russian).
33. Rassudov V. M. Deformation of flat shells supported by stiffening ribs. *Uchenye zapiski Saratovskogo universiteta*, 1956, vol. 52, pp. 51–91 (in Russian).
34. Belostochnyy G. N. Analytical methods for integrating differential equations of thermoelasticity of geometrically irregular shells. *Doklady Akademii voennykh nauk. Povolzhskoe regional'noe otdelenie* [Doklady of the Academy of Military Sciences. Volga Region Regional Office], 1999, iss. 1, pp. 14–26 (in Russian).
35. Terebushko O. I. Stability and supercritical deformation of shells supported by sparsely spaced ribs. *Raschet prostranstvennykh konstruktsiy* [Calculation of Spatial Structures]. Moscow, Mashstroyizdat, 1964, iss. 9, pp. 131–160 (in Russian).
36. Timashev S. A. *Ustoychivost' podkreplennykh obolochek* [Stability of Reinforced Shells]. Moscow, Stroyizdat, 1974. 256 p. (in Russian).
37. Mileykovskiy I. E., Grechaninov I. P. Stability of rectangular flat shells in terms of. *Raschet prostranstvennykh konstruktsiy* [Calculation of Spatial Structures]. Moscow, Mashstroyizdat, 1969, iss. 12, pp. 168–176 (in Russian).
38. Burmistrov E. F. Symmetric deformation of a shell that differs little from a cylindrical one. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1949, vol. 13, iss. 4, pp. 401–412 (in Russian).
39. Zhilin P. A. General theory of ribbed shells. *Prochnost' gidroturbin: Trudy TsKTI* [Strength of Hydraulic Turbines: Proceedings of the CCTI], 1971, iss. 88, pp. 46–70 (in Russian).
40. Endzhievskiy L. V. *Nelineynye deformatsii rebristykh obolochek* [Nonlinear Deformations of Ribbed Shells]. Krasnoyarsk, Krasnoyarsk University Publ., 1982. 295 p. (in Russian).
41. Preobrazhenskiy I. N. *Ustoychivost' i kolebaniya platinok i obolochek s otverstiyami* [Stability and Vibrations of Plates and Shells with Holes]. Moscow, Mashinostroenie, 1981. 191 p. (in Russian).
42. Il'in V. P., Karpov V. V. *Ustoychivost' rebristykh obolochek pri bol'shikh peremeshcheniyakh* [Stability of Ribbed Shells at Large Displacements]. Leningrad, Stroyizdat, 1986. 168 p. (in Russian).
43. Karpov V. V. Models of the shells having ribs, reinforcement plates and cutouts. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, vol. 146, pp. 117–135. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.03.024>
44. Rikards R. B., Teters G. A. *Ustoychivost' obolochek iz kompozitnykh materialov* [Stability of Shells Made of Composite Materials]. Riga, Zinatne, 1974. 310 p. (in Russian).
45. Karpov V. V., Semenov A. A. Refined model of stiffened shells. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, vol. 199, pp. 43–56. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.03.019>



46. Semenov A. A. Mathematical model of deformation of orthotropic shell structures under dynamic loading with transverse shears. *Computers & Structures*, 2019, vol. 221, pp. 65–73. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2019.05.017>
47. Semenov A. A. Strength and stability of geometrically nonlinear orthotropic shell structures. *Thin-Walled Structures*, 2016, vol. 106, pp. 428–436. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2016.05.018>
48. Vol'mir A. S. *Gibkie plastiny i obolochki* [Flexible Plates and Shells]. Moscow, Gostekhizdat, 1956. 419 p. (in Russian).
49. Vol'mir A. S. *Ustoychivost' deformirovannykh system* [Stability of Deformed Systems]. Moscow, Nauka, 1956. 984 p. (in Russian).
50. Vol'mir A. S. *Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek* [Nonlinear Dynamics of Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1972. 432 p. (in Russian).
51. Chernykh K. F. Theory of thin shells of elastomers — rubber-like materials. *Uspekhi mekhaniki* [Advances in Mechanics], 1983, vol. 6, iss. 1–2, pp. 111–147 (in Russian).
52. Chernykh K. F., Kabrits S. A., Mikhaylovskiy E. I., Tovstik P. E., Shamina V. A. *Obshchaya nelineynaya teoriya uprugikh obolochek* [General Nonlinear Theory of Elastic Shells]. St. Petersburg, St. Petersburg State University Publ., 2002. 388 p. (in Russian).
53. Chernykh K. F. *Lineynaya teoriya obolochek. T. 2. Nekotorye voprosy teorii* [Linear Theory of Shells. Vol. 2. Some Questions of Theory]. Leningrad, Leningrad State University Publ., 1964. 396 p. (in Russian).
54. Petrov V. V. *Metod posledovatel'nykh nagruzheniy v nelineynoy teorii plastinok i obolochek* [Sequential Loading Method in the Nonlinear Theory of Plates and Shells]. Saratov, Saratov University Publ., 1975. 119 p. (in Russian).
55. Petrov V. V., Inozemtsev V. K., Sineva N. F. *Teoriya navedennoy neodnorodnosti i ee prilozheniya k probleme ustoychivosti plastin i obolochek* [Theory of Induced Inhomogeneity and its Applications to the Problem of Stability of Plates and Shells]. Saratov, State Technical University of Saratov Publ., 1996. 312 p. (in Russian).
56. Kossovich L. Yu. *Nestatsionarnye zadachi teorii uprugikh tonkikh obolochek* [Nonstationary Problems of the Theory of Elastic Thin Shells]. Saratov, Saratov University Publ., 1986. 176 p. (in Russian).
57. Kossovich L. Yu. Asymptotic integration of nonlinear equations of elasticity theory for a cylindrical shell. *Mekhanika deformiruemykh sred* [Mechanics of Deformable Media]. Saratov, Saratov University Publ., 1977, iss. 3, pp. 86–96 (in Russian).
58. Aksel'rad E. L. *Gibkie obolochki* [Flexible Shells]. Moscow, Nauka, 1976. 376 p. (in Russian).
59. Mushtari Kh. M., Galimov K. Z. *Nelineynaya teoriya uprugikh obolochek* [Nonlinear Theory of Elastic Shells]. Kazan, Tatknigoizdat, 1957. 431 p. (in Russian).
60. Paimushin V. N. Static and dynamic beam forms of loss of stability of a long orthotropic cylindrical shell under external pressure. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 2008, vol. 72, iss. 6, pp. 1014–1027 (in Russian).
61. Pshenichnov G. I. *Teoriya tonkikh uprugikh setchatykh obolochek i plastin* [Theory of Thin Elastic Mesh Shells and Plates]. Moscow, Nauka, 1982. 352 p. (in Russian).
62. Maksimyuk V. A., Storozhuk E. A., Chernyshenko I. S. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review). *International Applied Mechanics*, 2012, vol. 48, pp. 613–687. <https://doi.org/10.1007/s10778-012-0544-8>
63. Mileykovskiy I. E., Trushin S. I. *Raschet tonkostennykh konstruktsiy* [Calculation of Thin-Walled Structures]. Moscow, Stroyizdat, 1989. 200 p. (in Russian).
64. Guz' A. N., Chernyshenko I. S., Chekhov V. N., Shnerenko K. N. *Tsilindricheskie obolochki, oslablennye otverstiyami* [Cylindrical Shells Weakened by Holes]. Kiev, Naukova dumka, 1974. 272 p. (in Russian).



65. Balabukh L. I., Alfutov N. A., Usyukin V. I. *Stroitel'naya mekhanika raket* [Rocket Construction Mechanics]. Moscow, Vysshaya shkola, 1984. 391 p. (in Russian).
66. Shalashilin V. N., Kuznetsov E. B. *Metody prodolzheniya resheniya po parametru i nailuchshaya parametrizatsiya* [Methods of Continuation of the Solution by Parameter and the Best Parameterization]. Moscow, Editorial URSS, 1999. 224 p. (in Russian).
67. Gavryushin S. S., Nikolaeva A. S. Method of change of the subspace of control parameters and its application to problems of synthesis of nonlinearly deformable axisymmetric thin-walled structures. *Mechanics of Solids*, 2016, vol. 51, pp. 339–348. <https://doi.org/10.3103/S0025654416030110>
68. Valishvili N. V. *Metody rascheta obolochek vrashcheniya na ETsVM* [Methods of Calculation of Shells of Rotation on ECM]. Moscow, Mashinostroenie, 1976. 278 p. (in Russian).
69. Kovalenko A. D. *Osnovy termouprugosti* [Fundamentals of Thermoelasticity]. Kiev, Naukova dumka, 1970. 306 p. (in Russian).
70. Abovskiy N. P., Chernyshov V. N., Pavlov A. S. *Gibkie rebristye plogie obolochki* [Flexible Ribbed flat Shells]. Krasnoyarsk, 1975. 128 p. (in Russian).
71. Alfutov N. A. Stability of a cylindrical shell supported by a transverse force set and loaded with an external uniform pressure. *Inzhenernyy sbornik* [Engineering Collection], 1956, vol. 23, pp. 36–46 (in Russian).
72. Kantor B. Ya. *Nelineynye zadachi teorii neodnorodnykh plogikh obolochek* [Nonlinear Problems of the Theory of Inhomogeneous Flat Shells]. Kiev, Naukova dumka, 1971. 136 p. (in Russian).
73. Karmishin A. V., Lyaskovets V. A., Myachenkov V. I., Frolov A. N. *Statika i dinamika tonkostennykh obolocheknykh konstruktsiy* [Statics and Dynamics of Thin-Walled Shell Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1975. 376 p. (in Russian).
74. Klimanov V. I., Timashev S. A. *Nelineynye zadachi podkreplennykh obolochek* [Nonlinear Problems of Reinforced Shells]. Sverdlovsk, UNTs AN SSSR, 1985. 291 p. (in Russian).
75. Teregulov I. G. *Izgib i ustoychivost' tonkikh plastin i obolochek pri polzuchesti* [Bending and Stability of Thin Plates and Shells Under Creep]. Moscow, Nauka, 1969. 206 p. (in Russian).
76. Krysko V. A. *Nelineynaya statika i dinamika neodnorodnykh obolochek* [Nonlinear Statics and Dynamics of Inhomogeneous Shells]. Saratov, Saratov University Publ., 1976. 216 p. (in Russian).
77. Pertsev A. K., Platonov E. G. *Dinamika obolochek i plastin* [Dynamics of Shells and Plates]. Leningrad, Sudostroenie, 1987. 316 p. (in Russian).
78. Filin A. P. *Elementy teorii obolochek* [Elements of Shell Theory]. Leningrad, Stroyizdat, 1987. 384 p. (in Russian).
79. Kornishin M. S. *Nelineynye zadachi teorii plastin i obolochek i metody ikh resheniya* [Nonlinear Problems of the Theory of Plates and Shells and Methods of Their Solution]. Moscow, Nauka, 1964. 192 p. (in Russian).
80. Krivoshapko S. N. About the possibilities of shell structures in modern architecture and construction. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktsiy i sooruzheniy*, 2013, iss. 1, pp. 51–56 (in Russian).
81. Meissner E. Das Elastizitätsproblem für dünne Schalen von Ringflächen, Kugel- und Kegelform. *Phisikalische Zeitschrift*, 1913, vol. 14, pp. 343–349 (in German).
82. Yakushev V. L. *Nelineynye deformatsii i ustoychivost' tonkikh obolochek* [Nonlinear Deformations and Stability of Thin Shells]. Moscow, Nauka, 2004. 276 p. (in Russian).
83. Andreev L. V., Obodan N. I., Lebedev A. G. *Ustoychivost' obolochek pri neosesimmetrichnoy deformatsii* [Stability of Shells under Non-axisymmetric Deformation]. Moscow, Nauka, 1988. 208 p. (in Russian).
84. Karpov V. V. *Prochnost' i ustoychivost' podkreplennykh obolochek vrashcheniya. Ch. 1. Modeli i algoritmy issledovaniya prochnosti i ustoychivosti podkreplennykh obolochek*





- vrashcheniya* [The Strength and Stability of the Reinforced Shells of Rotation. Part 1. Models and Algorithms for Studying the Strength and Stability of Reinforced Shells of Rotation]. Moscow, Fizmatlit, 2010. 288 p. (in Russian).
85. Lurie A. I. General theory of elastic thin shells. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1940, vol. 4, iss. 2, pp. 7–34 (in Russian).
  86. Vlasov V. Z. *Obshchaya teoriya obolochek i ee prilozhenie v tekhnike* [General Theory of Shells and its Application in Engineering]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat, 1949. 784 p. (in Russian).
  87. Gol'denveyzer A. L. *Teoriya tonkikh uprugikh obolochek* [Theory of thin Elastic Shells]. Moscow, GITTL, 1953. 544 p. (in Russian).
  88. Mileykovskiy I. E., Kupar A. K. *Gipary. Raschet i proektirovanie pologikh obolochek pokrytiy v forme giperbolicheskikh paraboloidov* [Hypars. Calculation and Design of flat Shells of Coatings in the Form of Hyperbolic Paraboloids]. Moscow, Stroyizdat, 1978. 223 p. (in Russian).
  89. Dykhovichnyy Yu. A., Zhukovskiy E. Z. *Prostranstvennye sostavnye konstruksii* [Spatial Composite Constructions]. Moscow, Vysshaya shkola, 1989. 288 p. (in Russian).
  90. Krivoshapko S. N., Ivanov V. N., Khalabi S. M. *Analiticheskie poverkhnosti: materialy po geometrii 500 poverkhnostey i informatsiya k raschetu na prochnost' tonkikh obolochek* [Analytical Surfaces: Materials on the Geometry of 500 Surfaces and Information for Calculating the Strength of Thin Shells]. Moscow, Nauka, 2006. 544 p. (in Russian).
  91. Zhilin P. A. *Prikladnaya mekhanika. Osnovy teorii obolochek* [Applied Mechanics. Fundamentals of Shell Theory]. St. Petersburg, St. Petersburg Polytechnic University Publ., 2006. 167 p. (in Russian).
  92. Mikhaylova E. Yu., Tarlakovskiy D. V., Fedotenkov G. V. *Obshchaya teoriya uprugikh obolochek* [General Theory of Elastic Shells]. Moscow, MAI Publ., 2018. 112 p. (in Russian).
  93. Mikhailova E. Yu., Tarlakovsky D. V., Fedotenkov G. V. Generalized linear model of dynamics of thin elastic shells. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific Notes of Kazan University. Series of Physical and Mathematical Sciences], 2018, vol. 160, book 3, pp. 561–577 (in Russian). EDN: [YZSUDR](https://arxiv.org/abs/1904.04157)
  94. Pogorelov A. V. *Geometricheskie metody v nelineynoy teorii uprugikh obolochek* [Geometric Methods in the Nonlinear Theory of Elastic Shells]. Moscow, Nauka, 1967. 280 p. (in Russian).
  95. Pogorelov A. V. *Izhibanie vypuklykh poverkhnostey* [Bending of Convex Surfaces]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1951. 183 p. (in Russian).
  96. Ivochkina N. M., Filimonenkova N. V. *Differential geometry in the theory of Hessian operators*. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1904.04157.pdf> (accessed July 8, 2021).

Поступила в редакцию / Received 16.11.2022

Принята к публикации / Accepted 16.01.223

Опубликована / Published 31.08.2023



## ИНФОРМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 411–417  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 411–417

[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru)

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-411-417>

EDN: YLMFVF

Article

### Cloud service for interactive simulation of production location

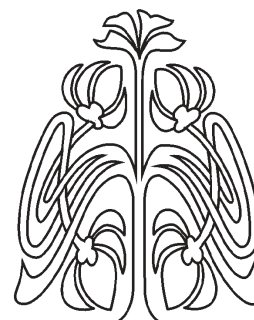
A. S. Velichko

Far Eastern Federal University, 10 Ajax Bay, Russky Island, Vladivostok 690922, Russia

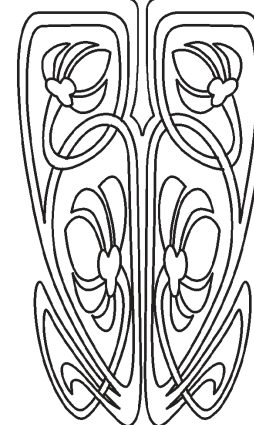
Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, 5 Radio St., Vladivostok 690041, Russia

**Andrei S. Velichko**, [vandre@dvo.ru](mailto:vandre@dvo.ru), <https://orcid.org/0000-0001-8760-316X>, AuthorID: 228264

**Abstract.** The paper deals with a problem of decision-making support for production location problem. The paper describes the mathematical model of production location. Minimization of total cost of delivery of raw materials to the place of production is used as a criterion of potential production location. The problem belongs to the class of binary mathematical programming problems with linear constraints but could be reduced to a set of linear programming problems solved by sequential or parallel computing. Based on the mathematical model a software tool is implemented as a cloud service on heterogeneous computing architecture. The software architecture includes the simulation module and modules for control and visualization. The ontology and declarative model for information exchange between the modules are designed with JSON format. This declarative model includes the objects considered in the mathematical model which are “products”, “areas” and “communications”. The simulation module is implemented on a high-performance server platform. Visualization module allows us to present graphically the original and the resulting matrix data and to modify the input parameters of the model interactively. The control and visualization modules are produced within IACPaaS cloud platform. Communication between the modules is established via asynchronous http-queries. The paper demonstrates the use of the software tool for the simulation of production location for the Russian Far East regions based on input data provided by open statistics sources.



Научный  
отдел





**Keywords:** digital economy, smart product-service systems, transportation, cloud platform

**Acknowledgements:** The paper was supported by Ministry of Science and Higher Education of Russia (project No. 0202-2021-0004, and “Advanced Engineering Schools” project No. 075-15-2022-1143).

**For citation:** Velichko A. S. Cloud service for interactive simulation of production location. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 411–417. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-411-417>, EDN: YLMFVF

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 519.87

## Облачный сервис для задачи оптимизации местоположения

А. С. Величко

<sup>1</sup>Дальневосточный федеральный университет, Россия, 690922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, д. 10

<sup>2</sup>Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН (ИАПУ ДВО РАН), Россия, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, д. 5

**Величко Андрей Сергеевич**, кандидат физико-математических наук, <sup>1</sup>профессор Института математики и компьютерных технологий; <sup>2</sup>научный сотрудник, [vandre@dvo.ru](mailto:vandre@dvo.ru), <https://orcid.org/0000-0001-8760-316X>, AuthorID: 228264

**Аннотация.** В статье рассматривается система поддержки принятия решений по проблеме размещения производства. Описана математическая модель, в которой в качестве критерия потенциального размещения производства используется минимизация общей стоимости доставки сырья к месту производства. Задача относится к классу бинарных задач математического программирования с линейными ограничениями, но может быть сведена к набору задач линейного программирования, решаемых с помощью последовательных или параллельных вычислений. На основе математической модели и программного инструмента реализован облачный сервис на гетерогенной вычислительной архитектуре. Архитектура программного обеспечения включает модуль моделирования и модули управления и визуализации. Онтология и декларативная модель обмена информацией между модулями разработаны в формате JSON. Эта декларативная модель включает в себя объекты, рассматриваемые в математической модели: «продукты», «места размещения» и «коммуникации». Модуль моделирования реализован на высокопроизводительной серверной платформе. Модуль визуализации позволяет графически представить исходные и результирующие матричные данные, а также интерактивно изменять входные параметры модели. Модули управления и визуализации созданы на облачной платформе IASPaas. Связь между модулями устанавливается посредством асинхронных http-запросов. В статье показано использование разработанного программного инструментария для моделирования размещения производства в регионах Дальнего Востока России на основе статистических данных из открытых источников.

**Ключевые слова:** цифровая экономика, умные товарно-сервисные системы, транспорт, облачная платформа

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (проект № 0202-2021-0004 и проект «Передовые инженерные школы» № 075-15-2022-1143).

**Для цитирования:** Velichko A. S. Cloud service for interactive simulation of production location [Величко А. С. Облачный сервис для задачи оптимизации местоположения] // Известия



Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 411–417. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-411-417>, EDN: YLMFVF

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

## Introduction

Modern business is largely based on digital technologies that affect market competition by giving such advantages like reducing costs, expanding the geography of supply, and increasing the market share. Digital technologies provide broad opportunities to automate production processes. Digital platforms as complex software solutions help for digitalizing business processes such as logistics, production, supply management, and others.

In papers [1–3] authors analyze different types of software systems and platforms and reveal their advantages and disadvantages focusing on comparing software solutions in terms of the business problems they solve. The results of this analysis show that not all the actual business problems are covered by modern software solutions despite a wide range of Russian and foreign software platforms. At the stage of organization and production planning such business problems and other related issues are to choose the optimal location, to analyze demand for products, and to select reliable suppliers. That is why the development of new software solutions that use modern information technologies to support various stages of digital production is an important problem and it is aimed at the economic development of a country overall.

## 1. Mathematics of production location problem

This section sketches the mathematical model of production location. It is based on a broader problem of interregional trade flow models [4].

Companies produce their products that are called “final products” if they use other products or “raw materials” which are delivered from different suppliers. The suppliers of these raw materials are located at the nodes of the transportation network. A company can deliver raw materials from different suppliers and a single supplier might not always provide a shipment to any node. Also, for this simple model, we consider that only one supplier is located at each node.

Let us consider the model of  $N$ -nodes transportation network among  $N$  regions each of them is producing and consuming different  $M$  products. Let  $z_{ij}^k$  be an unknown volume of a product type  $k = 1, \dots, M$  delivered from region  $i$  to the region  $j$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ . The flow  $z_{ii}^k$  is not necessarily assumed to be zero and is interpreted as a self-produced product consumption in this region that is not transported outside.

The price  $p_j^k$  and the amount  $v_j^k$  of delivered product that can be provided from supplier  $j$  are given. We also consider transportation unit costs among nodes as  $t_{ij}$ . Let us aggregate all the external regions to the region  $N + 1$  and let us consider additional unknown flows  $z_{N+1,j}^k$ .

Denoting  $D_j^k$  as the demand at node  $j$  for product  $k$  in a case of the closed economy of  $N$ -nodes, the first group of constraints of a location problem is

$$\sum_{i=1}^{N+1} z_{ij}^k = D_j^k. \quad (1)$$

For each node  $j = 1, \dots, N$  and product  $k = 1, \dots, M$  we need to consider the



constraints for the supply at node  $i = 1, \dots, N$

$$0 \leq z_{ij}^k \leq v_i^k. \quad (2)$$

For each node  $j$  as a potential place for production location the total cost of products delivery from all the nodes is  $W(j) = \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^{N+1} (p_i^k + t_{ij}) z_{ij}^k$ .

Let  $y_j$  be a binary variable that equals 1 if the region  $j$  is chosen as a place for production or equals zero otherwise. We should consider the constraint

$$\sum_j^N y_j \geq 1 \quad (3)$$

which means that we locate the production at least at one node.

The criteria of potential production location for a company at the node can be formalized as the minimization of the total cost of delivery of raw materials to the selected node from the others. Thus, the total cost of delivered products which should be minimized to find the optimal production location is

$$\min \sum_{j=1}^N W(j) y_j = \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^N (p_i^k + t_{ij}) z_{ij}^k y_j. \quad (4)$$

Minimization of function (4) under constraints (1)–(3) is a mixed-integer problem with nonlinear and non-convex objective function by  $z_{ij}^k$  and  $y_j$  variables that leaves us a little hope for an effective accurate or approximate solution due to its NP-hardness.

The case of only one place of production is equivalent to constraint  $\sum_j^N y_j = 1$ . Therefore optimal  $y_{j^*} = 1$  for only one  $j^*$  and  $y_j = 0$  for  $j \neq j^*$ . In this situation, it is sufficient to solve separate  $N$  decomposed linear programs  $\min W(j)$  for each  $j$  under the above-mentioned constraints (1), (2). Thus we can find the optimal node for production location as  $j^* = \arg \min W(j)$ . Due to the independence of these  $N$  cost minimization problems it is possible to organize parallel computations using different algorithms [5]. Let us notice that these cost minimization problems can be also decomposed into independent problems for each delivered product due to the lack of binding constraints on different products.

## 2. Software tool for simulation

Based on the mathematical model a software tool is implemented as a cloud service on heterogeneous computing architecture. Considering the key requirements for the software tool the IACPaaS cloud platform<sup>1</sup> was chosen for implementation of the visualization and control modules of the software.

The software architecture includes the simulation module and modules for control and visualization. The ontology and declarative model for information exchange between the modules are designed in JSON format. This declarative model includes the objects considered in the mathematical model which are “products”, “areas” and “communications”.

<sup>1</sup>*Oblachnaya platforma dlya razrabotki, upravleniya i udalennogo ispol'zovaniya intellektual'nykh oblachnykh servisov* (Intelligent Applications, Control and Platform as a Service). Available at: <https://iacpaas.dvo.ru> (accessed September 28, 2022).



The simulation module is implemented on a high-performance server platform. The visualization module allows us to present graphically the original and the resulting matrix data and to modify the input parameters of the model interactively. The control and visualization modules are produced within the IACPaaS cloud platform. Communication between the modules is established via asynchronous HTTP-queries.

The production location problem module which solves a set of linear programming problems is implemented using Octave open-source software<sup>2</sup> running on the virtual machine of “Far Eastern Computing Resource” Shared Resource Center<sup>3</sup>. Parallel implementation of the code use “octave-mpi” module<sup>4</sup> for Octave.

As an example, we take input data from the paper [6].

The nodes of potential production location are the administrative centers of 9 regions of the Far East of Russia: 1 – Primorsky Krai (Vladivostok), 2 – Khabarovsk Krai (Khabarovsk), 3 – Amur region (Blagoveshchensk), 4 – Jewish Autonomous region (Birobidzhan), 5 – the Republic of Sakha Yakutia (Yakutsk), 6 – Magadan region (Magadan), 7 – Sakhalin region (Yuzhno-Sakhalinsk), 8 – Kamchatka territory (Petropavlovsk), 9 – Chukotka Autonomous district (Anadyr). The territories which are external to the system of these regions are aggregated into region 10 labelled as “Others”. If the product flows are zero they are excluded from the figure.

The implementation of the visualization module of the cloud software solution opens a convenient opportunity to use and demonstrate the mathematical results of transportation modeling for any user over the Internet. The visualization module graphically represents matrix data about product flows in the form of a directed graph in which the arcs are product flows and the vertices represent the destination points of these flows. The visual representation of optimal transportation flows from all the nodes to the potential place for production at nodes “1” and “2” respectively for product “4” is shown in Figure 1.

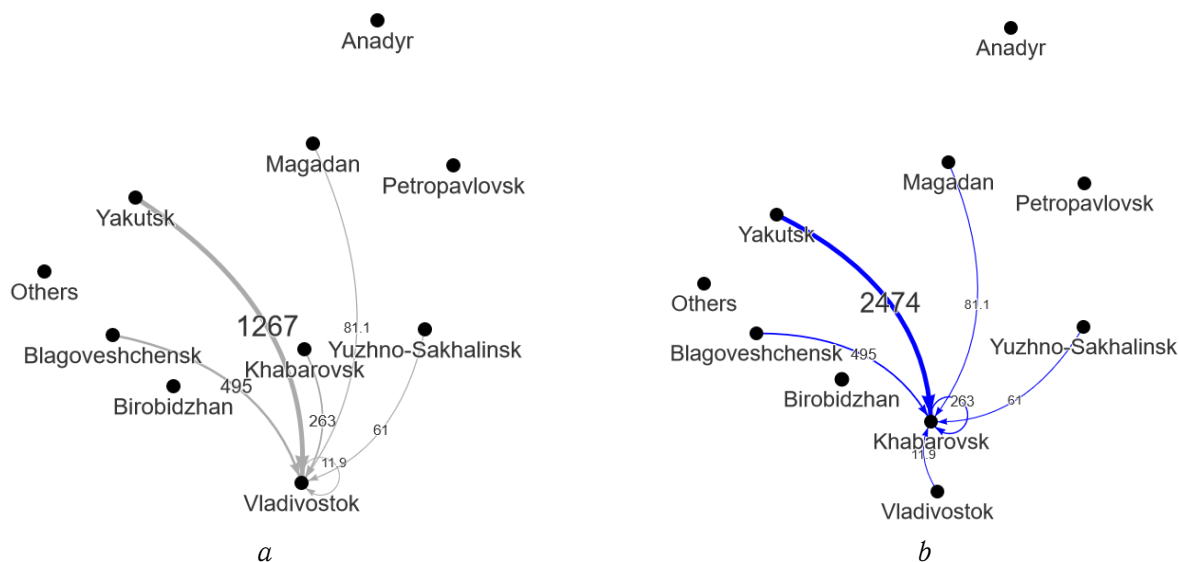


Fig. 1. Visualization of production location at Vladivostok region (a) and Khabarovsk region (b) for product “4”

<sup>2</sup>GNU Octave: High-level language for numerical computations. Available at: <https://www.gnu.org/software/octave/> (accessed September 28, 2022).

<sup>3</sup>Shared Resource Center “Far Eastern Computing Resource”. Available at: <https://www.cc.dvo.ru> (accessed September 28, 2022).

<sup>4</sup>Octave-mpi module. Available at: <https://github.com/carlosedfalco/octave-mpi> (accessed September 28, 2022).



The visualization module of the software tool could also visualize aggregate information for any subgroup of products and regions. This could be used as a tool for the assessment of the self-sufficiency of regions by products as it is shown in Figure 2. The presented example allows us to find out the nature of the interrelations of economies of regions of the Far East of Russia in the conditions of the existing spatial structure of the location of demand and supply.

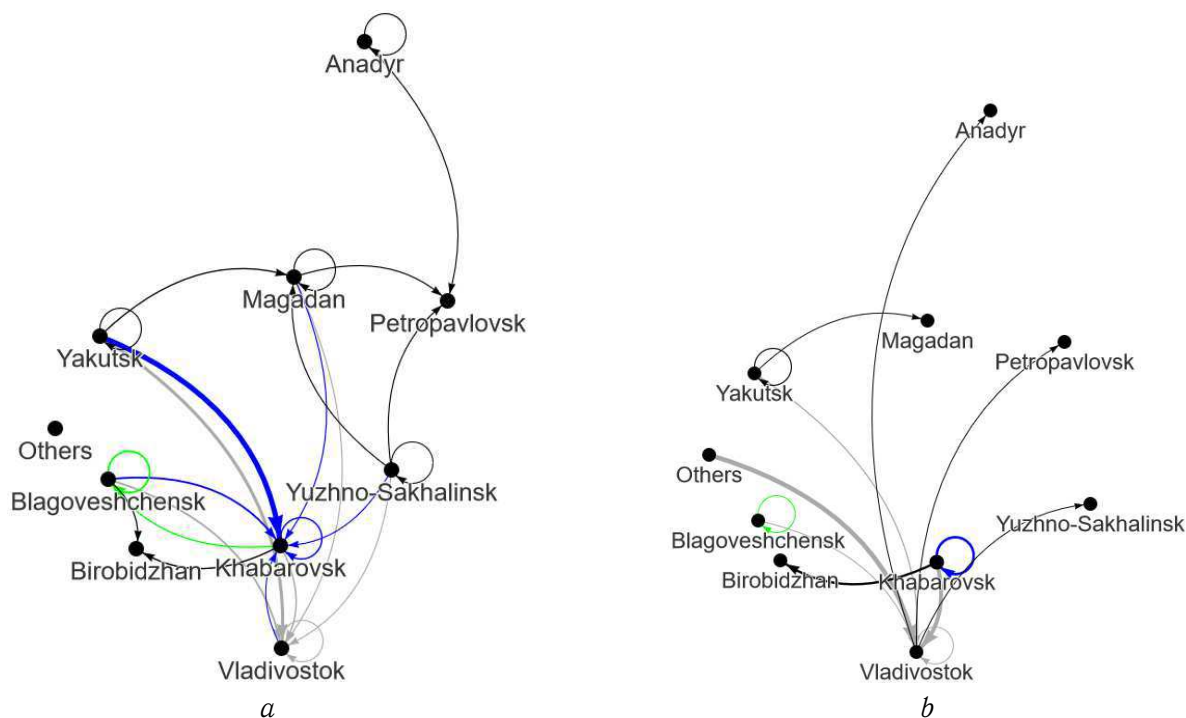


Fig. 2. Visualization of “self-sufficiency” of regions for product “4” (a) and product “5” (b)

## Conclusion

The paper describes the cloud software solution that is intended for interactive simulation of production location. The simulation service is cloud-based and consists of three main modules: the production location module, the control module, and the visualization module.

The module of simulation of production locations is based on the mathematical model of input product cost minimization. The simulation module is implemented on a high-performance computing architecture, and the control and visualization modules are implemented on the IACPaaS cloud platform using a multi-agent approach. Interaction between the computing cluster and the IACPaaS platform is carried out via the HTTP protocol based on dynamic asynchronous requests.

The software tool is intended for businesses that intend to simulate the possible production location. Also, it could be used by specialists of various ministries and departments dealing with the problem of production location planning and can be used for simulation for other regions of Russia.

## References

1. Rahul M., Shukla R., Singh S., Yadav V., Mishra A. A survey on state-of-the-art of cloud computing: Its challenges and solutions. In: *Recent Trends in Communication and Electronics. Proceedings of the International Conference on Recent Trends in Communication and Electronics (ICCE-2020), Ghaziabad, India, 28–29 November, 2020*. London, Imprint CRC Press, 2021. 6 p. <https://doi.org/10.1201/9781003193838>



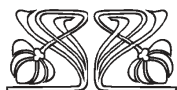
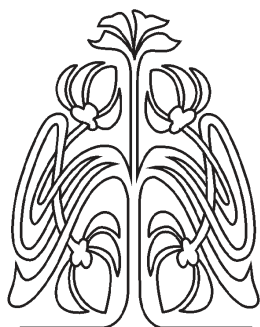
2. Henzel R., Herzwurm G. Cloud Manufacturing: A state-of-the-art survey of current issues. *Procedia CIRP*, 2018, vol. 72, pp. 947–952. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2018.03.055>
3. Gribova V. V., Velichko A. S., Kolmogorov A. V. The concept of a digital platform for industrial activities. *Information Technologies*, 2019, vol. 25, iss. 8, pp. 502–511 (in Russian). <https://doi.org/10.17587/it.25.502-511>, EDN: EIWHZK
4. Velichko A. S. Interactive simulation software for multi-regional model of freight transportation. *CEUR Workshop Proceedings*, 2018, vol. 2098, pp. 419–430.
5. Velichko A. S. Parallel algorithms with feasible set partitioning for large-scale optimization problems. *Upravlenie bol'shimi sistemami* [Large Systems Management], 2016, vol. 62, pp. 60–74 (in Russian). EDN: WKHFKP
6. Velichko A. S., Gribova V. V., Fedorishchev L. A. Cloud service for interactive simulation of interregional trade flows. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2019, vol. 53, iss. 7, pp. 811–820. <https://doi.org/10.3103/S0146411619070289>

Поступила в редакцию / Received 22.11.2022

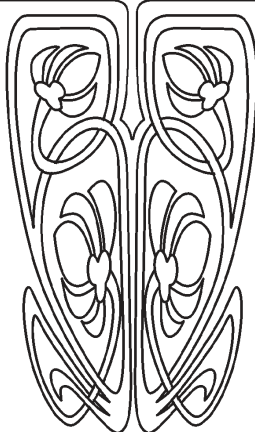
Принята к публикации / Accepted 25.12.2022

Опубликована / Published 31.08.2023





**ПОДПИСКА**



### **Подписка на печатную версию**

Подписной индекс издания 36017.  
Оформить подписку на печатную версию  
можно в интернет-каталоге  
ГК «Урал-Пресс» ([ural-press.ru](http://ural-press.ru)).  
Журнал выходит 4 раза в год.  
Цена свободная

Электронная версия журнала находится  
в открытом доступе ([mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru))

### **Адрес издательства (редакции):**

410012, Саратов, Астраханская, 83

**Тел.:** +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49, 52-26-89

**Факс:** +7(845-2) 27-85-29

**E-mail:** [publ@sgu.ru](mailto:publ@sgu.ru), [izdat@sgu.ru](mailto:izdat@sgu.ru)

### **Адрес редколлегии серии:**

410012, Саратов, Астраханская, 83,

СГУ имени Н. Г. Чернышевского,  
механико-математический факультет

**Тел./факс:** +7(845-2) 26-15-54

**E-mail:** [mmi@sgu.ru](mailto:mmi@sgu.ru)

**Website:** <https://mmi.sgu.ru>



ISSN 1816-9791 (Print). ISSN 2541-9005 (Online)  
Известия Саратовского университета. Новая серия.  
Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023.  
Том 23, выпуск 3

## ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Новая серия

Серия: Акмеология образования. Психология развития  
Серия: История. Международные отношения

**Серия: Математика. Механика. Информатика**

Серия: Науки о Земле  
Серия: Социология. Политология

Серия: Физика  
Серия: Филология. Журналистика

Серия: Философия. Психология. Педагогика  
Серия: Химия. Биология. Экология

Серия: Экономика. Управление. Право

