

ISSN 1816-9791 (Print)  
ISSN 2541-9005 (Online)

# ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия: Математика. Механика. Информатика

2023

Том 23

Выпуск 2



IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY  
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS



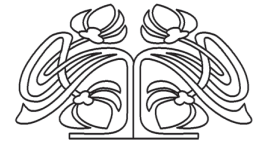
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

# ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 2

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,  
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал  
2023 Том 23

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издается с 2005 года

## СОДЕРЖАНИЕ

### Научный отдел

#### Математика

**Акишев Г.** Об оценках порядка наилучших  $M$ -членных приближений функций многих переменных в анизотропном пространстве Лоренца–Зигмунда 142

**Комаров М. А.** О скорости интерполяции наипростейшими дробями аналитических функций с регулярно убывающими коэффициентами 157

**Садекова Е. Х.** О приближении ограниченных функций тригонометрическими полиномами в метрике Хаусдорфа 169

**Рыхлов В. С.** Единственность решения начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной и формула для решения 183

#### Механика

**Каштанова С. В., Ржонницкий А. В.** Сравнение аналитического и численного решений задачи о цилиндрической оболочке с круговым отверстием под действием различных нагрузок 195

**Лекомцев С. В., Матвеев В. П., Сенин А. Н.** Пассивное демпфирование колебаний цилиндрической оболочки, взаимодействующей с текущей жидкостью 207

**Радченко В. П., Дервянка Е. Е.** Кинетика остаточных напряжений в тонкостенных цилиндрических образцах после двухстороннего поверхностного упрочнения в условиях ползучести при жестких ограничениях на угловые и осевые линейные перемещения 227

#### Информатика

**Аралбаев Т. З., Галимов Р. Р., Гетьман М. А., Клиндух О. В.** Иерархический анализ рисков моделей угроз беспилотных летательных аппаратов 241

**Егоров С. Ф., Вдовин А. Ю.** Исследование необходимости использования переменного значения баллистического коэффициента при моделировании траектории пули в стрелковом тренажере 253

**Lutoshkin I. V., Rybina M. S.** Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease [Лутешкин И. В., Рыбина М. С. Оптимальное решение в модели управления экономической системой в условиях массового заболевания] 264

Журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика»» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Запись о регистрации СМИ ПИ No ФС77-76640 от 26 августа 2019 года

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (категория К1, специальности: 1.1.1; 1.1.2; 1.1.5; 1.1.6; 1.1.7; 1.1.8; 1.1.9; 1.1.10; 1.2.2; 2.3.1). Журнал индексируется RSCI, Web of Science (ESCI), Scopus, MathSciNet, zbMATH, DOAJ

Подписной индекс издания 36017. Подписку на печатные издания можно оформить в интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru). Журнал выходит 4 раза в год. Цена свободная. Электронная версия находится в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

**Директор издательства**  
Бучко Ирина Юрьевна

**Редактор**  
Каргин Игорь Анатольевич  
**Художник**  
Соколов Дмитрий Валерьевич

**Редактор-стилист**  
Агафонов Андрей Петрович

**Верстка**  
Халова Виктория Анатольевна

**Технический редактор**  
Каргин Игорь Анатольевич

**Корректор**  
Агафонов Андрей Петрович

**Адрес учредителя, издателя и издательства (редакции):**  
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83  
Тел.: +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49, 52-26-89  
E-mail: publ@sgu.ru, izdat@sgu.ru

Подписано в печать 22.05.2023.  
Подписано в свет 31.05.2023.  
Формат 60 × 84 1/8.  
Усл. печ. л. 15,81 (17,0).  
Тираж 100 экз. Заказ 50-Т.

Отпечатано в типографии Саратовского университета.  
**Адрес типографии:**  
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2023



## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <https://mmi.sgu.ru/ru/dlya-avtorov>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования. В случае положительного решения статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <https://mmi.sgu.ru>

---

### Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,  
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,  
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: [mmi@sgu.ru](mailto:mmi@sgu.ru)

Website: <https://mmi.sgu.ru>

### Ответственный секретарь серии:

Шевцова Юлия Владиславовна

## CONTENTS

### Scientific Part

#### Mathematics

**Akishev G.** On estimates of the order of the best  $M$ -term approximations of functions of several variables in the anisotropic Lorentz–Zygmund space 142

**Komarov M. A.** Rate of interpolation of analytic functions with regularly decreasing coefficients by simple partial fractions 157

**Sadekova E. H.** On the approximation of bounded functions by trigonometric polynomials in Hausdorff metric 169

**Rykhlov V. S.** The uniqueness of the solution of an initial boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative and a formula for the solution 183

#### Mechanics

**Kashtanova S. V., Rzhonsnitskiy A. V.** Cylindrical shell with a circular hole under various loads: Comparison of analytical and numerical solutions 195

**Lekomtsev S. V., Matveenko V. P., Senin A. N.** Passive damping of vibrations of a cylindrical shell interacting with a flowing fluid 207

**Radchenko V. P., Derevyanka E. E.** Kinetics of residual stresses in thin-walled cylindrical specimens after bilateral surface hardening under creep conditions with rigid constraints on angular and axial linear displacements 227

#### Computer Sciences

**Aralbaev T. Z., Galimov R. R., Getman M. A., Klindukh O. V.** Hierarchical risk analysis of unmanned aerial vehicle threat models 241

**Egorov S. F., Vdovin A. Yu.** Investigation of the need to use the variable value of the ballistic coefficient when modeling the trajectory of the bullet in the shooter simulator 253

**Lutoshkin I. V., Rybina M. S.** Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease 264



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА  
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.  
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

**Главный редактор**

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Заместитель главного редактора**

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Ответственный секретарь**

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

**Члены редакционной коллегии:**

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Бауэр Светлана Михайловна, доктор физ.-мат. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

dell'Isola Francesco, доктор наук, профессор (Рим, Италия)

Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Омск, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)

Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)

Каплунов Юрий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Беларусь)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, профессор, акад. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Долгопрудный,

Московская обл., Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук (Ульяновск, Россия)

Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, профессор, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D. (Киль, Великобритания)

Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Беларусь)

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Цатурян Андрей Кимович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чунань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL  
"IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY.  
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS"**

**Editor-in-Chief** – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

**Deputy Editor-in-Chief** – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

**Executive Secretary** – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

**Members of the Editorial Board:**

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Svetlana M. Bauer (St. Petersburg, Russia)

Francesco dell'Isola (Rome, Italy)

Shoji Imatani (Kyoto, Japan)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

Avgust P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Nikita F. Morozov (St. Petersburg, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan, Russia)

Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny,

Moscow region, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)

Alexander F. Rezhnikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Alexander I. Shashkin (Voronezh, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

Igor' E. Tananko (Saratov, Russia)

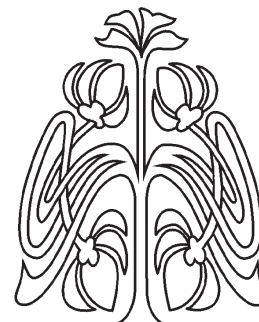
Andrey K. Tsaturyan (Moscow, Russia)

Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

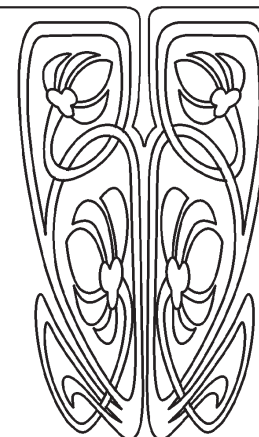
Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)

Vjacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ  
КОЛЛЕГИЯ**



## МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 142–156  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 142–156

[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru)

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-142-156>

EDN: YKNUUN

Научная статья  
УДК 517.51

### Об оценках порядка наилучших $M$ -членных приближений функций многих переменных в анизотропном пространстве Лоренца – Зигмунда

Г. Акишев

Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Казахстан, 100008, г. Астана, ул. Кажымукана, д. 11

**Акишев Габдолла**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики, [akishev\\_g@mail.ru](mailto:akishev_g@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0002-8336-6192>, AuthorID: 194028

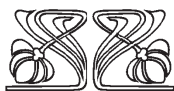
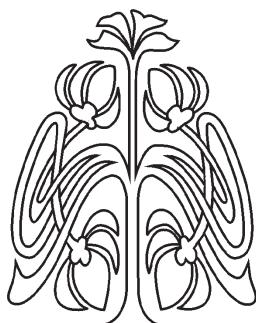
**Аннотация.** В статье рассматриваются анизотропное пространство Лоренца – Караматы периодических функций многих переменных и класс Никольского – Бесова в этом пространстве. Установлены точные по порядку оценки наилучших  $M$ -членных тригонометрических приближений функций из класса Никольского – Бесова по норме другого пространства Лоренца – Зигмунда.

**Ключевые слова:** пространство Лоренца – Зигмунда, класс Никольского – Бесова,  $M$ -членное приближение

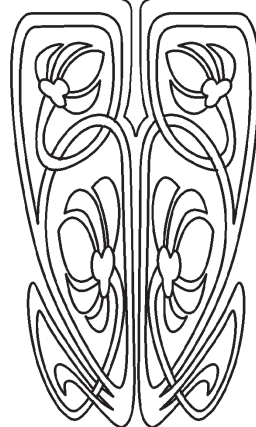
**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект АР 08855579).

**Для цитирования:** Акишев Г. Об оценках порядка наилучших  $M$ -членных приближений функций многих переменных в анизотропном пространстве Лоренца – Зигмунда // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 142–156. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-142-156>, EDN: YKNUUN

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Научный  
отдел





Article

## On estimates of the order of the best $M$ -term approximations of functions of several variables in the anisotropic Lorentz – Zygmund space

G. Akishev

Kazakhstan Branch of Lomonosov Moscow State University, 11 Kazhymukan St., Astana 100008, Kazakhstan

**Gabdolla Akishev**, akishev\_g@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8336-6192>, AuthorID: 194028

**Abstract.** The article considers the anisotropic Lorentz – Karamata space of periodic functions of several variables and the Nikol’skii – Besov class in this space. The order-sharp estimates are established for the best  $M$ -term trigonometric approximations of functions from the Nikol’skii – Besov class in the norm of another Lorentz – Zygmund space.

**Keywords:** Lorentz – Zygmund space, Nikol’skii – Besov class,  $M$ -term approximation

**Acknowledgements:** This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project AP 08855579).

**For citation:** Akishev G. On estimates of the order of the best  $M$ -term approximations of functions of several variables in the anisotropic Lorentz – Zygmund space. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 142–156 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-142-156>, EDN: YKNUUN

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

### Введение

Пусть  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$  – множества натуральных, целых и вещественных чисел соответственно;  $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ;  $\mathbb{R}^m$  –  $m$ -мерное евклидово пространство точек  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$  с вещественными координатами;  $\mathbb{I}^m = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m; 0 \leq x_j < 1; j = 1, \dots, m\} = [0, 1]^m$  –  $m$ -мерный куб;  $\mathbb{Z}_+^m$  – декартово произведение из  $m$  множеств  $\mathbb{Z}_+$ .

Пусть даны числа  $p, \tau \in (1, \infty)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ . Пространством Лоренца – Зигмунда  $L_{p,\tau}(\log L)^\alpha(\mathbb{T})$  называется множество всех измеримых по Лебегу и  $2\pi$  периодических функций  $f$ , для которых (см., например, [1])

$$\|f\|_{p,\alpha,\tau} := \left\{ \int_0^1 (f^*(t))^\tau (1 + |\log_2 t|)^{\alpha\tau} t^{\frac{\tau}{p}-1} dt \right\}^{\frac{1}{\tau}} < +\infty,$$

где  $f^*(t)$  – невозрастающая перестановка функции  $|f(2\pi x)|$ ,  $x \in [0, 1)$ ,  $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$ .

Пространство Лоренца – Зигмунда иногда обозначается как  $L_{p,\alpha,\tau}(\mathbb{T})$ . Будем пользоваться именно этим обозначением.

Отметим, что для  $\alpha = 0$  пространство  $L_{p,\alpha,\tau}(\mathbb{T})$  совпадает с пространством Лоренца  $L_{p,\tau}(\mathbb{T})$ ,  $1 < p, \tau < \infty$ , которое состоит из всех функций  $f$  таких, что (см., например, [2, гл. 1, п. 3])

$$\|f\|_{p,\tau}^* := \left( \int_0^1 f^{*\tau}(t) t^{\frac{\tau}{p}-1} dt \right)^{1/\tau} < \infty.$$



Пусть  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ ,  $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$ ,  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  и  $p_j, \tau_j \in (1, \infty)$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Через  $L_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m)$  обозначим анизотропное пространство Лоренца – Зигмунда – всех измеримых по Лебегу функций  $m$  переменных  $f$ , имеющих период  $2\pi$  по каждой переменной и для которых конечна величина

$$\|f\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}}^* := \|\dots\| f^{*1, \dots, *m} \|_{p_1, \alpha_1, \tau_1} \dots \|_{p_m, \alpha_m, \tau_m} =$$

$$= \left[ \int_0^1 \left[ \dots \left[ \int_0^1 (f^{*1, \dots, *m}(t_1, \dots, t_m))^{\tau_1} \left( \prod_{j=1}^m (1 + |\log_2 t_j|)^{\alpha_j} t_j^{\frac{1}{p_j} - \frac{1}{\tau_j}} \right)^{\tau_1} dt_1 \dots \right]^{\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}} dt_m \right]^{\frac{1}{\tau_m}},$$

где  $f^{*1, \dots, *m}(t_1, \dots, t_m)$  – невозрастающая перестановка функции  $|f(2\pi\bar{x})|$  по каждой переменной  $x_j \in [0, 1)$  при фиксированных остальных переменных (см. [3, 4]).

Для  $\alpha_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, m$  пространство  $L_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m)$  является анизотропным пространством Лоренца и обозначается  $L_{\bar{p}, \bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m)$ , а его норма  $\|f\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}}^* = \|f\|_{\bar{p}, \bar{\tau}}^*$  (см. [3]).

Если  $\alpha_j = 0$  и  $p_j = \tau_j = p$ ,  $j = 1, \dots, m$ , то  $L_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m) = L_p(\mathbb{T}^m)$  – известное пространство Лебега с нормой

$$\|f\|_p := \left( \int_{\mathbb{T}^m} |f(2\pi\bar{x})|^p d\bar{x} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Введем следующие обозначения:  $\mathring{L}_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m)$  – множество всех функций  $f \in L_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m)$  таких, что

$$\int_0^{2\pi} f(\bar{x}) dx_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m;$$

$a_{\bar{n}}(f)$  – коэффициенты Фурье функции  $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$  по системе  $\{e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle}\}$ ;

$$\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) := \sum_{\bar{n} \in \rho(\bar{s})} a_{\bar{n}}(f) e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle},$$

где  $\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle = \sum_{j=1}^m y_j x_j$ ,  $\rho(\bar{s}) := \{\bar{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : [2^{s_j-1}] \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, m\}$ ,

$[a]$  – целая часть числа  $a$  и  $s_j = 0, 1, \dots$

В теории функций хорошо известно  $S_{p, \theta}^{\bar{r}} B$  – пространство Никольского – Бесова в пространстве Лебега  $L_p(\mathbb{T}^m)$ ,  $1 \leq p < \infty$  и его различные обобщения [5–7].

В данной статье рассматривается аналог класса Никольского – Бесова в анизотропном пространстве Лоренца – Зигмунда:

$$S_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} B := \left\{ f \in \mathring{L}_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m) : \|f\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}}^* + \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}}^* \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \leq 1 \right\},$$

где  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ ,  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$ ,  $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ ,  $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$ ,  $1 < p_j, \tau_j < \infty$ ,  $0 < \theta_j \leq +\infty$ ,  $0 < r_j < +\infty$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , норма  $l_{\bar{\theta}}$  числовых последовательностей  $\{a_{\bar{n}}\}$  имеет вид

$$\|\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^m}\|_{l_{\bar{\theta}}} = \left( \sum_{n_m \in \mathbb{Z}} \left( \dots \left( \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} |a_{\bar{n}}|^{\theta_1} \right)^{\theta_2/\theta_1} \dots \right)^{\theta_m/\theta_{m-1}} \right)^{1/\theta_m}.$$



Наилучшим  $M$ -членным тригонометрическим приближением функции  $f \in L_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m)$  называется величина [8]

$$\|f - \sum_{j=1}^M b_j e^{i\langle \bar{k}^j, \bar{x} \rangle}\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}}^*,$$

где  $\{\bar{k}^j\}_{j=1}^M$  — система векторов  $\bar{k}^j = (k_1^j, \dots, k_m^j)$  с целочисленными координатами,  $b_j$  — действительные или комплексные числа.

Положим

$$e_M(S_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}^{(1)}}^{\bar{r}} B)_{\bar{q}, \bar{\beta}, \bar{\tau}^{(2)}} := \sup_{f \in S_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}^{(1)}}^{\bar{r}} B} e_M(f)_{\bar{q}, \bar{\beta}, \bar{\tau}^{(2)}},$$

где  $\bar{q} = (q_1, \dots, q_m)$ ,  $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ ,  $\bar{\tau}^{(i)} = (\tau_1^{(i)}, \dots, \tau_m^{(i)})$  и  $1 < q_j, \tau_j^{(i)} < \infty$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\beta_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Оценкам порядка наилучших  $M$ -членных тригонометрических приближений функций из классов Соболева  $W_p^r$ , Никольского – Бесова  $S_{p, \theta}^r B$ , Лизоркина – Трибеля в пространстве  $L_q(\mathbb{T}^m)$  к настоящему времени посвящено большое количество исследований Р. С. Исмагилова, Э. С. Белинского [9], Ю. Маковоза, В. Е. Майорова, Р. Девора, В. Н. Темлякова [10–12], А. С. Романюка [13], М. Хансена и У. Зикеля, С. А. Стасюка, Д. Б. Базарханова [14, 15] (более подробно см. библиографию в [8]).

Оценки наилучших  $M$ -членных приближений функций класса Никольского – Бесова в пространствах Лоренца и Лебега с анизотропными нормами исследованы в [16, 17].

Основная цель статьи — найти точный порядок величины  $e_M(S_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}^{(1)}}^{\bar{r}} B)_{\bar{q}, \bar{\beta}, \bar{\tau}^{(2)}}$ .

Через  $C(p, q, y, \dots)$  обозначим положительные величины, которые зависят от указанных параметров и отличаются для разных формул. Запись  $A(y) \asymp B(y)$  означает, что существуют положительные числа  $C_1, C_2$  такие, что  $C_1 A(y) \leq B(y) \leq C_2 A(y)$ . Для краткости записи вместо  $B \geq C_1 A$  или  $B \leq C_2 A$  часто будем писать  $B \gg A$  или  $B \ll A$  соответственно. Запись  $\log y$  означает логарифм с основанием 2 от числа  $y > 0$ .

## 1. Вспомогательные утверждения

В данном разделе приведем несколько лемм, необходимых для доказательства основных результатов статьи.

**Лемма 1** ([18]). Пусть  $\bar{\gamma}' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_m)$ ,  $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ ,  $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$  и  $0 < \gamma'_j \leq \gamma_j$ ,  $0 < \theta_j < \infty$ ,  $j = 1, \dots, m$  и  $\alpha \in (0, \infty)$ . Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\left\| \left\{ 2^{-\alpha \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle} \prod_{j=1}^m (s_j + 1)^{\lambda_j} \right\}_{\bar{s} \in Y^m(n, \bar{\gamma}')} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \ll 2^{-n\alpha\delta} n^{\sum_{j \in A} \lambda_j + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta_j}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где  $\delta = \min\{\frac{\gamma_j}{\gamma'_j} : j = 1, \dots, m\}$ ,  $A = \{j : \frac{\gamma_j}{\gamma'_j} = \delta, j = 1, \dots, m\}$ ,  $j_1 = \min\{j : j \in A\}$  и числа  $\lambda_j \in \mathbb{R}$  удовлетворяют условиям

$$\min \left\{ \sum_{j \in A \setminus \{j'\}} \lambda_j + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta_j}, \lambda_{j'} + \frac{1}{\theta_{j'}} \right\} > 0, \quad j' = \max\{j \in A\}.$$





**Лемма 2.** Пусть  $\kappa > 0$ ,  $0 < \theta_j < \infty$ ,  $\lambda_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, m$  и  $\bar{\gamma}' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_m)$ ,  $\bar{\gamma}' = (\tilde{\gamma}'_1, \dots, \tilde{\gamma}'_m)$ ,  $\gamma'_j = \tilde{\gamma}'_j = 1$  для  $j \in A$  и  $\tilde{\gamma}'_j < \gamma'_j$  для  $j \notin A$ . Тогда

$$\left\| \left\{ 2^{\kappa \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \prod_{j=1}^m (s_j + 1)^{\lambda_j} \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < n} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \ll 2^{n\kappa} n^{\sum_{j \in A} \lambda_j + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta_j}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

при условии

$$\min \left\{ \sum_{j \in A \setminus \{j'\}} \lambda_j + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta_j}, \quad \lambda_{j'} + \frac{1}{\theta_{j'}} \right\} > 0.$$

**Доказательство.** Рассмотрим множество

$$\Omega_{n, \bar{\gamma}'} = \{ \bar{s} = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < n \} = \bigcup_{l=1}^n \omega_l,$$

где  $\omega_l = \{ \bar{s} = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : l-1 \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < l \}$ ,  $\omega_l \cap \omega_k = \emptyset$ ,  $k \neq l$ .

Пусть  $\chi_{\Omega_{n, \bar{\gamma}'}}$  и  $\chi_{\omega_l}$  — характеристические функции множеств  $\Omega_{n, \bar{\gamma}'}$  и  $\omega_l$  соответственно. Тогда

$$\chi_{\Omega_{n, \bar{\gamma}'}}(\bar{s}) = \sum_{l=1}^n \chi_{\omega_l}(\bar{s}).$$

Поэтому согласно свойству нормы имеем

$$\begin{aligned} \left\| \left\{ 2^{\kappa \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \prod_{j=1}^m (s_j + 1)^{\lambda_j} \right\}_{\bar{s} \in \Omega_{n, \bar{\gamma}'}} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} &= \left\| \left\{ \sum_{l=1}^n 2^{\kappa \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \prod_{j=1}^m (s_j + 1)^{\lambda_j} \chi_{\omega_l}(\bar{s}) \right\}_{\bar{s} \in \bigcup_{l=1}^n \omega_l} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \leq \\ &\leq \sum_{l=1}^n \left\| \left\{ 2^{\kappa \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \prod_{j=1}^m (s_j + 1)^{\lambda_j} \chi_{\omega_l}(\bar{s}) \right\}_{\bar{s} \in \omega_l} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначим  $\bar{\delta} = 2\bar{\gamma}' - \bar{\gamma}$ . Тогда  $\delta_j = \gamma'_j = 1$ ,  $j \in A$  и  $\delta_j > \gamma'_j$  для  $j \in \{1, \dots, m\} \setminus A$ . Поэтому

$$\left\| \left\{ 2^{\kappa \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \prod_{j=1}^m (s_j + 1)^{\lambda_j} \chi_{\omega_l}(\bar{s}) \right\}_{\bar{s} \in \omega_l} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \leq 2^{2l\kappa} \left\| \left\{ 2^{-\kappa \langle \bar{s}, \bar{\delta} \rangle} \prod_{j=1}^m (s_j + 1)^{\lambda_j} \chi_{\omega_l}(\bar{s}) \right\}_{\bar{s} \in \omega_l} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}. \quad (2)$$

Теперь, пользуясь леммой 1 из неравенств (1) и (2), получим утверждение леммы.  $\square$

**Замечание 1.** В случае  $\theta_1 = \dots = \theta_m = \theta$  и  $A = \{1, \dots, \nu\}$  лемма 2 ранее доказана в [10, лемма Г].

## 2. Основные результаты

**Теорема.** Пусть  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ ,  $\bar{q} = (q_1, \dots, q_m)$ ,  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ ,  $\bar{\tau}^{(1)} = (\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_m^{(1)})$ ,  $\bar{\tau}^{(2)} = (\tau_1^{(2)}, \dots, \tau_m^{(2)})$ ,  $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$  и  $1 < p_j < 2 < q_j < +\infty$ ,  $1 < \tau_j^{(2)} \leq \theta_j \leq \infty$ ,  $1 < \tau_j^{(1)} < +\infty$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \beta_j < \infty$ ,  $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}$ ,  $j = 1, \dots, m$  и  $r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} = \min \{ r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j} : j = 1, \dots, m \}$ ,  $A = \min \left\{ j : r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j} = r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right\}$ ,



$j = 1, \dots, m$ ,  $j_1 = \min\{j \in A\}$  и  $\left(\frac{1}{p_j} - r_j\right) \frac{1}{q_{j_0}} < \left(\frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0}\right) \frac{1}{q_j}$ ,  $j \notin A$ . Тогда справедлива оценка

$$e_M \left( S_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}^{(1)}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} B \right)_{\bar{q}, \bar{\beta}, \bar{\tau}^{(2)}} \ll M^{-\frac{q_{j_0}}{2} \left( r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right)} (\log M)^{q_{j_0} \left( r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}} \right)} \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( 1 - \frac{1}{\tau_j^{(2)}} \right)_+ \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( 1 - \frac{1}{\theta_j} \right) (\log M)^{\sum_{j \in A} (\beta_j - \alpha_j)}$$

для натурального числа  $M > M_0 > 1$  при условиях:

а)  $2 < \tau_j^{(2)} \leq \theta_j \leq \infty$  и

$$\min \left\{ \sum_{j \in A \setminus \{j'\}} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( \frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j} \right), \beta_{j'} - \alpha_{j'} + \frac{1}{\tau_{j'}^{(2)}} - \frac{1}{\theta_{j'}} \right\} > 0, \quad (3)$$

$$\min \left\{ \sum_{j \in A \setminus \{j'\}} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j} \right), \beta_{j'} - \alpha_{j'} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_{j'}} \right\} > 0; \quad (4)$$

б) для  $1 < \tau_j^{(2)} \leq \theta_j \leq 2$  при условии (3), где  $j' = \max\{j \in A\}$  и  $a_+ = \max\{a, 0\}$ .

**Доказательство.** Пусть  $f \in S_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}^{(1)}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} B$ . Для произвольного натурального числа  $M$  найдется натуральное число  $n$  такое, что  $M \asymp 2^n n^{|A|-1}$ . Приближающий полином  $P(\Omega_M, \bar{x})$  будем искать в виде

$$P(\Omega_M, \bar{x}) = \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < n} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) + \sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} P(\Omega_{N_{\bar{s}}}, \bar{x}), \quad (5)$$

где  $\bar{\gamma}' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_m)$ ,  $\gamma'_j = \gamma_j = 1$  для  $j \in A$  и  $1 < \gamma'_j < \gamma_j$ ,  $j \notin A$ ,  $\gamma_j = \frac{r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}}{r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}}$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Полиномы  $P(\Omega_{N_{\bar{s}}}, \bar{x})$  будут построены для каждого блока  $\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x})$  согласно [9, лемма 2.3], а число  $\alpha > 1$  выбрано в процессе построения.

Предположим, что искомым полином построен. Тогда в силу равенства (5) и свойства нормы получим

$$\|f - P(\Omega_M)\|_{\bar{q}, \bar{\beta}, \bar{\tau}^{(2)}}^* \leq \left\| \sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} (\delta_{\bar{s}}(f) - P(\Omega_{N_{\bar{s}}})) \right\|_{\bar{q}, \bar{\beta}, \bar{\tau}^{(2)}}^* + \left\| \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \geq \alpha n} \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{\bar{q}, \bar{\beta}, \bar{\tau}^{(2)}}^* = J_1(f) + J_2(f). \quad (6)$$

Так как полином  $\sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} (\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) - P(\Omega_{N_{\bar{s}}}, \bar{x}))$  — непрерывная функция, то она принадлежит пространству  $L_{q_0}(\mathbb{T}^m)$ ,  $q_0 = \max\{q_1, \dots, q_m\}$  и

$$J_1(f) \ll \left\| \sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} (\delta_{\bar{s}}(f) - P(\Omega_{N_{\bar{s}}})) \right\|_{q_0}. \quad (7)$$

Так как  $q_j \in (2, +\infty)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , то  $q_0 \in (2, +\infty)$ . Поэтому согласно теореме Литтлвуда — Пэли в пространстве Лебега (см. [5, гл. I, п. 1.5.2]) и [9, лемма 2.3]



оценку (7) продолжим в следующем виде:

$$J_1(f) \ll \left( \sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} \|\delta_{\bar{s}}(f) - P(\Omega_{N_{\bar{s}}})\|_{q_0}^2 \right)^{1/2} \ll \left( \sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} N_{\bar{s}}^{-1} \prod_{j=1}^m 2^{s_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_2^2 \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Оценим  $J_2(f)$ . Пользуясь [19, теорема 3], получим

$$J_2(f) \ll \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j \left( \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right)} (s_j + 1)^{\beta_j - \alpha_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}(1)}^* \right\}_{\bar{s} \in Y^m(\alpha n, \bar{\gamma}')} \right\|_{l_{\bar{\tau}(2)}} = C J_3(f), \quad (9)$$

где  $Y^m(\alpha n, \bar{\gamma}') = \{ \bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m : \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \geq \alpha n \}$ .

Оценим  $J_3(f)$ . Пусть  $1 < \tau_j^{(2)} < \theta_j \leq \infty, j = 1, \dots, m$ . Тогда, применяя неравенство Гельдера с показателями  $\eta_j = \frac{\theta_j}{\tau_j^{(2)}} > 1, \frac{1}{\eta_j} + \frac{1}{\eta_j} = 1, j = 1, \dots, m$  и леммой 1 при  $\lambda_j = \beta_j - \alpha_j, j = 1, \dots, m$ , будем иметь

$$\begin{aligned} J_3(f) &\ll \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}(1)}^* \right\}_{\bar{s} \in Y^m(\alpha n, \bar{\gamma}')} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \times \\ &\times \left\| \left\{ 2^{-\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \left( r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \right)} \prod_{j=1}^m (s_j + 1)^{\beta_j - \alpha_j} \right\}_{\bar{s} \in Y^m(\alpha n, \bar{\gamma}')} \right\|_{l_{\bar{\epsilon}}} \ll \\ &\ll 2^{-\alpha n \left( r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \right)} (n + 1)^{\sum_{j \in A} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( \frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j} \right)} \end{aligned} \quad (10)$$

для любой функции  $f \in S_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}(1), \bar{\theta}}^{\bar{\tau}} B$ , где  $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m), \epsilon_j = \tau_j^{(2)} \eta_j', j = 1, \dots, m$  при условии

$$\min \left\{ \sum_{j \in A \setminus \{j'\}} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{\epsilon \in A \setminus \{j_1\}} \left( \frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j} \right), \beta_{j'} - \alpha_{j'} + \frac{1}{\tau_{j'}^{(2)}} - \frac{1}{\theta_{j'}} \right\} > 0. \quad (11)$$

Теперь из неравенств (9), (10) следует, что

$$J_2(f) \ll 2^{-\alpha n \left( r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \right)} (n + 1)^{\sum_{j=1}^v (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j=2}^v \left( \frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j} \right)}_+ \quad (12)$$

для любой функции  $f \in S_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}(1), \bar{\theta}}^{\bar{\tau}} B$ , при условии (11) для  $1 < \tau_j^{(2)} < \theta_j \leq \infty, j = 1, \dots, m$ .

В силу условия  $0 \leq \beta_j < \infty, j = 1, \dots, m$  справедливо неравенство

$$\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_2 \ll \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{2, \bar{\beta}, 2}^*. \quad (13)$$

Так как  $1 < p_j < 2, j = 1, \dots, m$ , то из [19, теоремы 2] следует, что

$$\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{2, \bar{\beta}, 2}^* \ll \prod_{j=1}^m 2^{s_j \left( \frac{1}{p_j} - \frac{1}{2} \right)} (s_j + 1)^{\beta_j - \alpha_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}(1)}^* \quad (14)$$

для  $\beta_j, \alpha_j \in \mathbb{R}, 1 < \tau_j^{(1)} < \infty, j = 1, \dots, m$ .



Из неравенств (13) и (14) следует, что

$$\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_2 \ll \prod_{j=1}^m 2^{s_j \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{2}\right)} (s_j + 1)^{\beta_j - \alpha_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}(1)}^* \quad (15)$$

для  $0 \leq \beta_j < \infty$  и  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ,  $1 < \tau_j^{(1)} < \infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Используя неравенство (15) из (8), получим

$$J_1(f) \ll \left( \sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} N_{\bar{s}}^{-1} \prod_{j=1}^m 2^{s_j \frac{2}{p_j}} (s_j + 1)^{(\beta_j - \alpha_j)2} \left( \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}(1)}^* \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (16)$$

если  $0 \leq \beta_j < \infty$  и  $1 < \tau_j^{(2)} < \infty$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ,  $1 < \tau_j^{(1)} < \infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Пусть  $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}$ ,  $1 < \tau_j^{(2)} < \theta_j \leq \infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Положим

$$N_{\bar{s}} = \left[ 2^n 2^{\left(\frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0}\right) \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} 2^{-\alpha n \left(\frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0}\right)} \right] + 1,$$

где координаты вектора  $\bar{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_m)$  удовлетворяют соотношениям  $\gamma'_j = \tilde{\gamma}_j$  для  $j \in A$  и  $1 < \tilde{\gamma}_j < \gamma'_j$  для  $j \notin A$ . По [10, лемма Г] нетрудно убедиться, что

$$\sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} N_{\bar{s}} \ll 2^n n^{\nu-1} \ll M.$$

Теперь, подставив значения чисел  $N_{\bar{s}}$  из (16), получим

$$J_1(f) \ll \left\{ 2^{-n} 2^{\alpha n \left(\frac{1}{p_1} - r_1\right)} \sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} 2^{-\left(\frac{1}{p_1} - r_1\right) \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \times \right. \\ \left. \times \prod_{j=1}^m 2^{s_j \frac{2}{p_j}} (s_j + 1)^{(\beta_j - \alpha_j)2} \left( \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}(1)}^* \right)^2 \right\}^{1/2}. \quad (17)$$

Так как  $\left(\frac{1}{p_j} - r_j\right) \frac{1}{q_j} < \left(\frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0}\right) \frac{1}{q_j}$ ,  $j \notin A$ , то

$$\frac{\frac{1}{p_j} - r_j}{\frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0}} < \frac{r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}}{r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}} = \gamma_j, \quad j \notin A.$$

Поэтому выберем числа  $\gamma'_j$  и  $\tilde{\gamma}_j$  так, чтобы  $\frac{\frac{1}{p_j} - r_j}{\frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0}} < \tilde{\gamma}_j < \gamma'_j < \gamma_j$ ,  $j \notin A$ . Тогда

$$2^{-\left(\frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0}\right) \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \prod_{j=1}^m 2^{s_j \frac{2}{p_j}} \leq 2^{\left(\frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0}\right) \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \prod_{j=1}^m 2^{s_j 2r_j}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} 2^{-\left(\frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0}\right) \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \prod_{j=1}^m 2^{s_j \frac{2}{p_j}} (s_j + 1)^{(\beta_j - \alpha_j)2} \left( \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}(1)}^* \right)^2 \leq$$



$$\leq \sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} 2^{\left(\frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0}\right) \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle} \prod_{j=1}^m (s_j + 1)^{(\beta_j - \alpha_j)2} \left( \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}(1)}^* \right)^2. \quad (18)$$

Если  $2 < \theta_j \leq +\infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ , то, применяя неравенство Гельдера ( $\eta_j = \frac{\theta_j}{2}$ ,  $\eta'_j = \frac{\theta_j}{\theta_j - 2}$ ,  $j = 1, \dots, m$ ) к сумме в правой части (18), будем иметь

$$\begin{aligned} & \sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} 2^{-\left(\frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0}\right) \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle} \prod_{j=1}^m 2^{s_j \frac{2}{p_j}} (s_j + 1)^{(\beta_j - \alpha_j)2} \left( \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}(1)}^* \right)^2 \ll \\ & \ll \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}(1)}^* \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \left(\frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0}\right)} \prod_{j=1}^m (s_j + 1)^{(\beta_j - \alpha_j)2} \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} \right\|_{l_{\eta'}}. \quad (19) \end{aligned}$$

Далее, по лемме 2 при  $\theta_j = \eta'_j$  и  $\lambda_j = \beta_j - \alpha_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  будем иметь

$$\left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \left(\frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0}\right)} \prod_{j=1}^m (s_j + 1)^{(\beta_j - \alpha_j)2} \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} \right\|_{l_{\eta'}} \ll 2^{n \left(\frac{1}{p_1} - r_1\right) \alpha} (n + 1)^{2 \sum_{j \in A} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\eta'_j}} \quad (20)$$

при условии

$$\min \left\{ 2 \sum_{j \in A \setminus \{j'\}} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\eta'_j}, 2(\beta_{j'} - \alpha_{j'}) + \frac{1}{\eta'_{j'}} \right\} > 0.$$

Теперь из неравенств (19) и (20) следует, что

$$\begin{aligned} & \sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} 2^{-\left(\frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0}\right) \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle} \prod_{j=1}^m 2^{s_j \frac{2}{p_j}} (s_j + 1)^{(\beta_j - \alpha_j)2} \left( \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}(1)}^* \right)^2 \ll \\ & \ll 2^{n \left(\frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0}\right) \alpha} (n + 1)^{2 \sum_{j \in A} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\eta'_j}} \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}(1)}^* \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}^2 \quad (21) \end{aligned}$$

при условии

$$\min \left\{ 2 \sum_{j \in A \setminus \{j'\}} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\eta'_j}, 2(\beta_{j'} - \alpha_{j'}) + \frac{1}{\eta'_{j'}} \right\} > 0.$$

Далее, из неравенств (17) и (21) получим

$$J_1(f) \ll \left( 2^{-n} 2^{\alpha n \left(\frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0}\right)} 2^{n \left(\frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0}\right) \alpha} (n + 1)^{2 \sum_{j \in A} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\eta'_j}} \right)^{1/2} \quad (22)$$

для любой функции  $f \in S_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}(1), \bar{\theta}}^{\bar{r}} B$  при условии

$$\min \left\{ 2 \sum_{j \in A \setminus \{j'\}} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\eta'_j}, 2(\beta_{j'} - \alpha_{j'}) + \frac{1}{\eta'_{j'}} \right\} > 0,$$

если  $0 \leq \beta_j < \infty$  и  $1 < \tau_j^{(2)} < \infty$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ,  $1 < \tau_j^{(1)} < \infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ .



В оценке  $J_2(f)$  число  $\alpha$  выбрано в следующем виде:

$$\alpha = \frac{q_{j_0}}{2} - q_{j_0} \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j^{(2)}} \right) \frac{\log n}{n}.$$

Тогда

$$n\alpha = n \frac{q_{j_0}}{2} - q_{j_0} \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j^{(2)}} \right) \log n.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & 2^{-n\alpha \left( r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right)} (n+1)^{\sum_{j \in A} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( \frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j} \right)} = \\ & = 2^{-n \frac{q_{j_0}}{2} \left( r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right)} n^{\frac{q_{j_0}}{2} \left( r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right)} \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j^{(2)}} \right) (n+1)^{\sum_{j \in A} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( \frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j} \right)} = \\ & = \left( 2^n n^{|A|-1} \right)^{-\frac{q_{j_0}}{2} \left( r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right)} n^{\left( r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right) q_{j_0}} \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( 1 - \frac{1}{\tau_j^{(2)}} \right) \times \\ & \quad \times (n+1)^{\sum_{j \in A} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( \frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j} \right)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Поэтому из неравенства (12) получим

$$\begin{aligned} J_2(f) & \ll \left( 2^n n^{|A|-1} \right)^{-\frac{q_{j_0}}{2} \left( r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right)} n^{\left( r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right) q_{j_0}} \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( 1 - \frac{1}{\tau_j^{(2)}} \right) \times \\ & \quad \times (n+1)^{\sum_{j \in A} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( \frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j} \right)} = \\ & = \left( 2^n n^{|A|-1} \right)^{-\frac{q_{j_0}}{2} \left( r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right)} n^{\left( r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}} \right) q_{j_0}} \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( 1 - \frac{1}{\tau_j^{(2)}} \right) n^{\sum_{j \in A} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( 1 - \frac{1}{\theta_j} \right)} \end{aligned} \quad (24)$$

при условии (11) для  $1 < \tau_j^{(2)} < \theta_j \leq \infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Далее

$$2^{n\alpha \left( \frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0} \right)} = 2^{n \frac{q_{j_0}}{2} \left( \frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0} \right)} n^{-q_{j_0} \left( \frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0} \right)} \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j^{(2)}} \right).$$

Поэтому из неравенства (22) следует, что

$$\begin{aligned} J_1(f) & \ll 2^{n \frac{q_{j_0}}{2} \left( \frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0} \right)} n^{-q_{j_0} \left( \frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0} \right)} \sum_{j=2}^{\nu} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j^{(2)}} \right) 2^{-\frac{n}{2}} n^{\sum_{j \in A} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j} \right)} = \\ & = C \left( 2^n n^{|A|-1} \right)^{-\frac{q_{j_0}}{2} \left( r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right)} n^{\left( r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}} \right) q_{j_0}} \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( 1 - \frac{1}{\tau_j^{(2)}} \right) \times \\ & \quad \times n^{\sum_{j \in A} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( 1 - \frac{1}{\theta_j} \right)} \end{aligned} \quad (25)$$

для любой функции  $f \in S_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}^{(1)}, \bar{\theta}}^{\bar{\tau}}$  при условиях  $2 < \theta_j < \infty$ ,  $1 < \tau_j^{(2)} \leq \theta_j \leq \infty$  и (4),  $0 \leq \beta_j < \infty$  и  $1 < \tau_j^{(2)} < \infty$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ,  $1 < \tau_j^{(2)} < \infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Теперь из неравенств (6), (24), (25) следует, что

$$\|f - P(\Omega_M)\|_{\bar{q}, \bar{\beta}, \bar{\tau}^{(2)}}^* \ll$$



$$\ll (2^n n^{|A|-1})^{-\frac{q_{j_0}}{2}} \left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}\right) n^{\left(r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}}\right) q_{j_0}} \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left(1 - \frac{1}{\tau_j^{(2)}}\right) n^{\sum_{j \in A} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left(1 - \frac{1}{\theta_j}\right)} \quad (26)$$

для любой функции  $f \in S_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}^{(1)}, \bar{\theta}} B$ , в случае  $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}$ ,  $2 < \theta_j \leq \infty$ ,  $1 < \tau_j^{(2)} \leq \theta_j \leq \infty$ ,  $j = 1, \dots, m$  при условиях (3) и (4), если  $0 \leq \beta_j < \infty$  и  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ,  $1 < \tau_j^{(1)} < \infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Поэтому из оценки (26) следует, что

$$e_M \left(S_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}^{(1)}, \bar{\theta}} B\right)_{\bar{q}, \bar{\beta}, \bar{\tau}^{(2)}} \ll (2^n n^{|A|-1})^{-\frac{q_{j_0}}{2}} \left(r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}\right) \times \\ \times n^{\left(r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}}\right) q_{j_0}} \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left(1 - \frac{1}{\tau_j^{(2)}}\right) n^{\sum_{j \in A} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left(1 - \frac{1}{\theta_j}\right)},$$

в случае  $1 < p_j < 2 < q_j < \infty$ ,  $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}$ ,  $1 < \tau_j^{(2)} \leq \theta_j \leq \infty$ ,  $2 < \theta_j \leq \infty$ ,  $0 \leq \beta_j < \infty$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ,  $1 < \tau_j^{(1)} < \infty$ ,  $j = 1, \dots, m$  при условиях (3) и (4).

Рассмотрим случай  $1 \leq \theta_j \leq 2$ . Через  $e_j$  обозначим множество всех  $s_j \in \mathbb{Z}_+$ , для которых  $(s_1, \dots, s_j, \dots, s_m) \in Y^m(n, \alpha n, \bar{\gamma}')$  при всех фиксированных  $s_k$ ,  $k \neq j$  и  $P_k = e_1 \times \dots \times e_k$ , положим

$$G_k(f, n)_{\bar{\theta}_k} = \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}^{(1)}}^* \right\}_{\bar{s}_k \in P_k} \right\|_{\bar{\theta}_k},$$

где  $\bar{s}_k = (s_1, \dots, s_k)$ ,  $\bar{\tau}_k = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ . Рассмотрим числа

$$N_{\bar{s}} = \left[ 2^{n\alpha} \left(r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}}\right) 2^n n^{|A|-1} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \left(r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}}\right) \times \right. \\ \left. \times \left( 2^{\langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}^{(1)}}^* \right)^{\theta_1} \prod_{k=1}^{m-1} G_k^{\theta_{k+1} - \theta_k}(f, n)_{\bar{\theta}_k} \right] + 1, \quad (27)$$

где  $[y]$  — целая часть числа  $y > 0$ . Тогда, учитывая, что  $r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}} < 0$ , будем иметь

$$\sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < \alpha n} N_{\bar{s}} \leq n^m + 2^n \left(r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}}\right) 2^n n^{|A|-1} \times \\ \times \sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < \alpha n} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \left(r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}}\right) \left( 2^{\langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}^{(1)}}^* \right)^{\theta_1} \prod_{k=1}^{m-1} G_k^{\theta_{k+1} - \theta_k}(f, n)_{\bar{\theta}_k} \leq \\ \leq n^m + 2^n n^{|A|-1} \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}^{(1)}}^* \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \ll 2^n n^{|A|-1} \ll M. \quad (28)$$

Подставляя значения чисел  $N_{\bar{s}}$  из (27) в (16), будем иметь

$$J_1(f) \ll \left( 2^{n\alpha} \left(r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}}\right) 2^n n^{|A|-1} \right)^{-1/2} \left( \sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < \alpha n} \left( 2^{\langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}^{(1)}}^* \right)^{2 - \theta_1} 2^{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \left(\frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0}\right) \times \right. \\ \left. \times \prod_{k=1}^{m-1} G_k^{\theta_k - \theta_{k+1}}(f, n)_{\bar{\theta}_k} \prod_{j=1}^m 2^{s_j \frac{2}{p_j}} (s_j + 1)^{(\beta_j - \alpha_j) 2} \right)^{1/2}. \quad (29)$$



Далее, применяя неравенство Гельдера при  $\eta_j = \theta_j(2 - \theta_j) > 1$ ,  $1/\eta_j + 1/\eta'_j = 1$ ,  $j = 1, \dots, m$ , из (29) получим

$$J_1(f) \ll \left( 2^{n\alpha \left( r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}} \right)} 2^n n^{|A|-1} \right)^{-1/2} \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}(1)}^* \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}^{\frac{2-\theta_m}{2}} \times \\ \times \left\| \left\{ \chi_{Y^m(n, n\alpha, \bar{\gamma}')}(\bar{s}) 2^{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \left( \frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0} \right) \prod_{j=1}^m (s_j + 1)^{(\beta_j - \alpha_j)2} \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\eta}'}}^{1/2}, \quad (30)$$

где  $\chi_{Y^m(n, n\alpha, \bar{\gamma}')}(\bar{s})$  — характеристическая функция множества  $Y^m(n, n\alpha, \bar{\gamma}')$ ,  $\bar{\eta}' = (\eta'_1, \dots, \eta'_m)$ .

Так как  $\tilde{\gamma}_j = \gamma'_j = 1$ ,  $j \in A$  и  $\tilde{\gamma}_j < \gamma'_j$ ,  $j \notin A$ , то согласно лемме 2 при  $\theta_j = \eta_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  и  $\kappa = \frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0} > 0$  имеем

$$\left\| \left\{ \chi_{Y^m(n, n\alpha, \bar{\gamma}')}(\bar{s}) 2^{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \left( \frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0} \right) \prod_{j=1}^m (s_j + 1)^{(\beta_j - \alpha_j)2} \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\eta}'}} \ll \\ \ll 2^{n\alpha \left( \frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0} \right)} n^{\sum_{j \in A} (\beta_j - \alpha_j)2 + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\eta'_j}} \quad (31)$$

при условии

$$\min \left\{ \sum_{j \in A \setminus \{j'\}} (\beta_j - \alpha_j)2 + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\eta'_j}, \quad (\beta_{j'} - \alpha_{j'})2 + \frac{1}{\eta'_{j'}} \right\} > 0.$$

Теперь из неравенств (30), (31), учитывая определение числа  $\alpha$ , получим

$$J_1(f) \ll \left( 2^{n\alpha \left( r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}} \right)} 2^n n^{|A|-1} \right)^{-1/2} \left( 2^{n\alpha \left( \frac{1}{p_{j_0}} - r_{j_0} \right)} n^{\sum_{j \in A} (\beta_j - \alpha_j)2 + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\eta'_j}} \right)^{1/2} = \\ = C \left( 2^n n^{|A|-1} \right)^{-\frac{q_{j_0}}{2}} \left( r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right) n^{\left( r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}} \right) q_{j_0}} \prod_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( 1 - \frac{1}{\tau_j^{(2)}} \right) \times \\ \times n^{\sum_{j \in A} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( 1 - \frac{1}{\theta_j} \right)} \quad (32)$$

для любой функции  $f \in S_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}(1), \bar{\theta}} B$ , в случае  $1 < \tau_j^{(2)} \leq \theta_j \leq 2$ ,  $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}$ ,  $0 \leq \beta_j < \infty$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, m$  при условии

$$\min \left\{ \sum_{j \in A \setminus \{j'\}} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left( 1 - \frac{1}{\theta_j} \right), \quad \beta_{j'} - \alpha_{j'} + 1 - \frac{1}{\theta_{j'}} \right\} > 0. \quad (33)$$

Теперь из неравенств (6), (24) и (32) следует, что

$$e_M \left( S_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}(1), \bar{\theta}} B \right)_{\bar{q}, \bar{\beta}, \bar{\tau}(2)} \ll \left( 2^n n^{|A|-1} \right)^{-\frac{q_{j_0}}{2}} \left( r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} \right) \times$$





$$\times n^{\left(r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}}\right) q_{j_0}} \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left(1 - \frac{1}{\tau_j^{(2)}}\right) n^{\sum_{j \in A} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left(1 - \frac{1}{\theta_j}\right)}$$

в случае  $1 < \tau_j^{(2)} \leq \theta_j \leq 2$ ,  $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}$ ,  $0 \leq \beta_j < \infty$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, m$  при условии (3).

Отметим, что из условия (3) следует (33).  $\square$

**Замечание 2.** В случае  $\alpha_j = \beta_j = 0$  и  $p_j = \tau_j^{(1)} = p$ ,  $q_j = \tau_j^{(2)} = q$ ,  $\theta_j = \theta$  для  $j = 1, \dots, m$  из доказанной теоремы следуют ранее известные результаты В. Н. Темлякова [10, теорема 2.2, с. 92] и А. С. Романюка [13, теорема 2.1]. Случай  $\alpha_j = \beta_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, m$  доказан в [16].

Оценки  $e_M \left( S_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}^{(1)}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} B \right)_{\bar{q}, \bar{\beta}, \bar{\tau}^{(2)}}$  в случае  $1 < p_j < q_j \leq 2$ ,  $j = 1, \dots, m$  следуют из теоремы в [20]. В случае  $\alpha_j = \beta_j = 0$  для  $j = 1, \dots, m$  точность оценки доказана в [16], а для  $\alpha_j, \beta_j \neq 0$ ,  $j = 1, \dots, m$  она будет опубликована позже. Оценка величины  $e_M \left( S_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}^{(1)}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} B \right)_{\bar{q}, \bar{\beta}, \bar{\tau}^{(2)}}$  в случае  $1 \leq \theta_j \leq \tau_j^{(2)}$ ,  $j = 1, \dots, m$  будет изучена в будущем.

### Список литературы

1. Bennett C., Sharpley R. Interpolation of Operators. Orlando : Academic Press, 1988. 469 p.
2. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. Москва : Мир, 1974. 333 с.
3. Blozinski A. P. Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms // Transactions of the American Mathematical Society. 1981. Vol. 263, № 1. P. 149–167. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1981-0590417-X>
4. Kolyada V. I. On embedding theorems // Nonlinear Analysis, Function spaces and Applic. Praha : Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic, 2007. P. 35–94. URL: <http://dml.cz/dmlcz/702492> (дата обращения: 20.02.2022).
5. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва : Наука, 1977. 456 с.
6. Аманов Т. И. Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-Ата : Наука, 1976. 224 с.
7. Лизоркин П. И., Никольский С. М. Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1989. Т. 187. С. 143–161.
8. Dǎng D., Temlyakov V. N., Ullrich T. Hyperbolic Cross Approximation. Basel ; Berlin : Springer, 2018. 229 p. (Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona).
9. Белинский Э. С. Приближение «плавающей» системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных / отв. ред. Ю. А. Брудный. Ярославль : Ярославский гос. ун-т, 1988. С. 16–33.
10. Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1986. Т. 178. С. 3–113.
11. Темляков В. Н. Конструктивные разреженные тригонометрические приближения и другие задачи для функций смешанной гладкости // Математический сборник. 2015. Т. 206, вып. 11. С. 131–160. <https://doi.org/10.4213/sm8466>
12. Temlyakov V. N. Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness // Constructive Approximation. 2017. Vol. 45, iss. 3. P. 467–495. <https://doi.org/10.1007/s00365-016-9345-3>
13. Романюк А. С. Наилучшие  $M$ -членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Известия РАН. Серия математическая. 2003. Т. 67, № 2. С. 61–100. <https://doi.org/10.4213/im427>



14. Bazarkhanov D. B., Temlyakov V. N. Nonlinear tensor product approximation of functions // Journal of Complexity. 2015. Vol. 31, iss. 6. P. 867–884. <https://doi.org/10.1016/j.jco.2015.06.005>
15. Базарханов Д. Б. Нелинейные тригонометрические приближения классов функций многих переменных // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 2016. Т. 293. С. 8–42. <https://doi.org/10.1134/S0371968516020023>, EDN: WEMXBH
16. Акишев Г. А. О точности оценок наилучшего  $M$ -членного приближения класса Бесова // Сибирские электронные математические известия. 2010. Т. 7. С. 255–274.
17. Акишев Г. О порядках  $M$ -членного приближения классов в пространстве Лоренца // Математический журнал. Алматы. 2011. Т. 11, № 1. С. 5–29.
18. Akishev G. On exact estimates of the order of approximation of functions of several variables in the anisotropic Lorentz – Zygmund space. arXiv: 2106.07188v2 [mathCA] 14 Jun 2021. 20 p.
19. Akishev G. Estimates of the order of approximation of functions of several variables in the generalized Lorentz space. arXiv: 2105.14810v1 [mathCA] 31 May 2021. 18 p.
20. Акишев Г. Об оценках порядка наилучших  $M$ -членных приближений функций многих переменных в анизотропном пространстве Лоренца – Караматы // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы (Саратов, 31 января – 4 февраля 2022 г.). Саратов : Саратовский университет [Издание], 2022. Вып. 21. С. 13–16. EDN: XCSQXT

### References

1. Bennett C., Sharpley R. *Interpolation of Operators*. Orlando, Academic Press, 1988. 469 p.
2. Stein E. M., Weiss G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton, Princeton University Press, 1971. 312 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1974. 333 p.).
3. Blozinski A. P. Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1981, vol. 263, no. 1, pp. 149–167. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1981-0590417-X>
4. Kolyada V. I. On embedding theorems. In: *Nonlinear Analysis, Function spaces and Applic.* Praha, Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic, 2007, pp. 35–94. Available at: <http://dml.cz/dmlcz/702492> (accessed February 20, 2022).
5. Nikol'skii S. M. *Priblizhenie funktsii mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniia* [Approximation of Functions of Several Variables and Embedding Theorems]. Moscow, Nauka, 1977. 456 p. (in Russian).
6. Amanov T. I. *Prostranstva differentsiruemykh funktsiy s dominiruyushchey smeshannoy proizvodnoy* [Spaces of Differentiable Functions with a Dominant Mixed Derivative]. Alma-Ata, Nauka, 1976. 224 p. (in Russian).
7. Lizorkin P. I., Nikol'skii S. M. Spaces of functions of mixed smoothness from the decomposition point of view. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1990, vol. 187, pp. 163–184.
8. Dǔng D., Temlyakov V. N., Ullrich T. *Hyperbolic Cross Approximation*. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Basel, Berlin, Springer, 2018. 229 p.
9. Belinskii E. S. Approximation by a “floating” system of exponentials on the classes of smooth periodic functions with bounded mixed derivative. In: Brudnyi Yu. A. (ed.) *Research on the Theory of Functions of Many Real Variables*. Yaroslavl, Yaroslavl State University Publ., 1988, pp. 16–33 (in Russian).
10. Temlyakov V. N. Approximations of functions with bounded mixed derivative. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1989, vol. 178, pp. 1–121.
11. Temlyakov V. N. Constructive sparse trigonometric approximation and other problems for functions with mixed smoothness. *Sbornik: Mathematics*, 2015, vol. 206, iss. 11, pp. 1628–1656. <https://doi.org/10.1070/SM2015v206n11ABEH004507>
12. Temlyakov V. N. Constructive sparse trigonometric approximation for functions with



- small mixed smoothness. *Constructive Approximation*, 2017, vol. 45, iss. 3, pp. 467–495. <https://doi.org/10.1007/s00365-016-9345-3>
13. Romanyuk A. S. Best  $M$ -term trigonometric approximations of Besov classes of periodic functions of several variables. *Izvestiya: Mathematics*, 2003, vol. 67, iss. 2, pp. 265–302. <https://doi.org/10.1070/IM2003v067n02ABEH000427>
  14. Bazarkhanov D. B., Temlyakov V. N. Nonlinear tensor product approximation of functions. *Journal of Complexity*, 2015, vol. 31, iss. 6, pp. 867–884. <https://doi.org/10.1016/j.jco.2015.06.005>
  15. Bazarkhanov D. B. Nonlinear trigonometric approximations of multivariate function classes. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 293, pp. 2–36. <https://doi.org/10.1134/S0081543816040027>
  16. Akishev G. A. On the exact estimations of the best  $M$ -terms approximation of the Besov class. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2010, vol. 7, pp. 255–274 (in Russian).
  17. Akishev G. On the order of the  $M$ -term approximation classes in Lorentz spaces. *Mathematical Journal. Almaty*, 2011, vol. 11, iss. 1, pp. 5–29 (in Russian).
  18. Akishev G. *On exact estimates of the order of approximation of functions of several variables in the anisotropic Lorentz – Zygmund space*. arXiv: 2106.07188v2 [mathCA] 14 Jun 2021. 20 p.
  19. Akishev G. *Estimates of the order of approximation of functions of several variables in the generalized Lorentz space*. arXiv: 2105.14810v1 [mathCA] 31 May 2021. 18 p.
  20. Akishev G. On estimates of the order of the best  $M$ -term approximations of functions of several variables in the anisotropic Lorentz – Karamata space. *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications: Materials of the 21st International Saratov (Saratov, January 31 – February 4, 2022)*. Saratov, Saratov State University Publ., 2022, iss. 21, pp. 13–16 (in Russian). EDN: XCSQXT

Поступила в редакцию / Received 24.02.2022

Принята к публикации / Accepted 01.11.2022

Опубликована / Published 31.05.2023



Научная статья  
УДК 517.538.5

## О скорости интерполяции наимпростейшими дробями аналитических функций с регулярно убывающими коэффициентами

М. А. Комаров

Владимирский государственный университет, Россия, 600000, г. Владимир, ул. Горького, д. 87

**Комаров Михаил Анатольевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и его приложений, [kami9@yandex.ru](mailto:kami9@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0003-4831-081X>, AuthorID: 169871

**Аннотация.** Рассматриваются задачи кратной интерполяции по узлу  $z = 0$  аналитических в единичном круге функций  $f(z) = f_0 + f_1 z + \dots$  посредством наимпростейших рациональных дробей (логарифмических производных алгебраических многочленов) со свободными полюсами и с полюсами, лежащими на окружности  $|z| = 1$ . Получены оценки остатков интерполяции при условии вида  $|f_{m-1}| < C/\sqrt{m}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Точнее, мы предполагаем, что модули коэффициентов Маклорена  $f_m$  функции  $f$  не превосходят соответствующих коэффициентов  $\alpha_m$  в разложении  $a/\sqrt{1-x}$  ( $-1 < x < 1$ ,  $0 < a \leq a^* \approx 0.34$ ) по степеням  $x$ . Для доказательства оценок используются конструкции наимпростейших дробей Паде со свободными полюсами, разработанные В. И. и Д. Я. Данченко (2001), О. Н. Косухиным (2005), В. И. Данченко и П. В. Чунаевым (2011), и развитая автором статьи (2020) конструкция интерполирующих наимпростейших дробей с полюсами на окружности. Наши теоремы дополняют и усиливают ряд результатов перечисленных работ. Используя свойства последовательности  $\{\alpha_m\}$ , удается доказать, в частности, что при ограничении  $|f_m| \leq \alpha_m$  все полюсы наимпростейшей дроби Паде функции  $f$  расположены во внешности единичной окружности.

**Ключевые слова:** наимпростейшая дробь, рациональная аппроксимация, кратная интерполяция, аналитическая функция, степенная сумма

**Для цитирования:** Комаров М. А. О скорости интерполяции наимпростейшими дробями аналитических функций с регулярно убывающими коэффициентами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 157–168. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-157-168>, EDN: QSUBAS

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Rate of interpolation of analytic functions with regularly decreasing coefficients by simple partial fractions

M. A. Komarov

Vladimir State University, 87 Gorky St., Vladimir 600000, Russia

**Mikhail A. Komarov**, [kami9@yandex.ru](mailto:kami9@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0003-4831-081X>, AuthorID: 169871



**Abstract.** We consider the problems of multiple interpolation of analytic functions  $f(z) = f_0 + f_1z + \dots$  in the unit disk with node  $z = 0$  by means of simple partial fractions (logarithmic derivatives of algebraic polynomials) with free poles and with all poles on the circle  $|z| = 1$ . We obtain estimates of the interpolation errors under a condition of the form  $|f_{m-1}| < C/\sqrt{m}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . More precisely, we assume that the moduli of the Maclaurin coefficients  $f_m$  of a function  $f$  do not exceed the corresponding coefficients  $\alpha_m$  in the expansion of  $a/\sqrt{1-x}$  ( $-1 < x < 1$ ,  $0 < a \leq a^* \approx 0.34$ ) in powers of  $x$ . To prove the estimates, the constructions of Padé simple partial fractions with free poles developed by V. I. and D. Ya. Danchenko (2001), O. N. Kosukhin (2005), V. I. Danchenko and P. V. Chunaev (2011) and the construction of interpolating simple partial fractions with poles on the circle developed by the author (2020) are used. Our theorems complement and improve a number of results of the listed works. Using properties of the sequence  $\{\alpha_m\}$  it is possible to prove, in particular, that under the condition  $|f_m| \leq \alpha_m$  all the poles of the Padé simple partial fraction of a function  $f$  lie in the exterior of the unit circle.

**Keywords:** simple partial fraction, rational approximation, multiple interpolation, analytic function, power sum

**For citation:** Komarov M. A. Rate of interpolation of analytic functions with regularly decreasing coefficients by simple partial fractions. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 157–168 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-157-168>, EDN: QSUBAS

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## 1. Введение. Конструкции кратной интерполяции

В теории рациональных приближений хорошо известны *наипростейшие дроби* (н.д.) — рациональные функции вида

$$\rho_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - z_k}, \quad z_k \in \mathbb{C}.$$

Начало активному исследованию аппроксимационных и интерполяционных свойств н.д. со свободными полюсами  $z_k$  положила работа В. И. и Д. Я. Данченко [1]; подробный обзор результатов можно найти в [2].

**1.1.** Один из важных способов аппроксимации этими аппаратами заключается в построении так называемых *наипростейших дробей Паде кратной интерполяции*. Напомним, что н.д.  $\rho_\nu$  порядка  $\nu \leq n$  является н.д. Паде  $n$ -кратной интерполяции (с узлом  $z = 0$ ) аналитической вблизи  $z = 0$  функции

$$f(z) = f_0 + f_1z + f_2z^2 + \dots, \tag{1}$$

если

$$R_n(f; z) := f(z) - \rho_\nu(z) = O(z^n), \quad z \rightarrow 0. \tag{2}$$

Задача (2) всегда однозначно разрешима [1], причем, как показал О. Н. Косухин [3], н.д.  $\rho_\nu$  совпадает с логарифмической производной  $n$ -го полинома Маклорена

$$p_n(z) := 1 + g_1z + \dots + g_nz^n \tag{3}$$

функции

$$g(z) := \exp\left(\int_0^z f(t) dt\right) = 1 + g_1z + \dots + g_nz^n + \dots \tag{4}$$



С помощью этой конструкции в [3] получена оценка остаточного члена интерполяции (2) в единичном круге  $D = \{z : |z| < 1\}$  в случае, когда  $f$  аналитична в  $D$  и принадлежит классу Харди  $H^1 = H^1(D)$ :

$$|R_n(f; z)| \leq |z|^n e^{2\pi\|f\|_1} \frac{\|f\|_1 + |zf(z)|}{1 - |z| - |z|^{n+1} e^{2\pi\|f\|_1}}, \quad z \in D \tag{5}$$

(при любом  $n$ , для которого знаменатель положителен). Здесь

$$\|f\|_1 := \|f\|_{H^1(D)} = \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

Следует подчеркнуть, что, в отличие от задачи (2), для н.д. задача интерполяции по *нескольким* узлам может не иметь решений либо иметь более одного решения; некоторые признаки однозначной разрешимости см. в работах [4, 5].

**1.2.** В [1] разработан следующий метод построения н.д. Паде. Для заданной функции (1) и натурального  $n$  обозначим через

$$\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n} \tag{6}$$

решение системы

$$S_m := \lambda_1^m + \dots + \lambda_n^m = -f_{m-1}, \quad m = 1, \dots, n,$$

где  $S_m$  — степенные суммы неизвестных комплексных чисел  $\lambda_k$ . Как известно, такая система моментов имеет решение при любых правых частях, притом единственное, и это решение совпадает с корнями многочлена

$$P(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \dots + d_n,$$

коэффициенты которого выражаются через значения степенных сумм  $S_m$  по рекуррентным формулам Ньютона

$$d_1 = -S_1, \quad d_k = -\frac{1}{k} \left( S_k + \sum_{j=1}^{k-1} S_{k-j} d_j \right), \quad k = 2, \dots, n. \tag{7}$$

Обозначив через  $\nu$  ( $\nu \leq n$ ) количество отличных от нуля чисел (6), можем, не нарушая общности, полагать, что

$$\lambda_{n,1} \neq 0, \quad \dots, \quad \lambda_{n,\nu} \neq 0, \quad \lambda_{n,\nu+1} = \dots = \lambda_{n,n} = 0.$$

Тогда искомая дробь  $n$ -кратной интерполяции функции  $f$  представится в виде

$$\rho_\nu(z) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{z - z_{n,k}}, \quad z_{n,k} := \lambda_{n,k}^{-1},$$

ибо  $\rho_\nu(z) = -S_1 - S_2z - \dots - S_n z^{n-1} + O(z^n) = f_0 + f_1z + \dots + f_{n-1}z^{n-1} + O(z^n)$  по выбору чисел  $z_{n,k}$ .

Опираясь на эту конструкцию, В. И. Данченко и П. В. Чунаев [6] доказали и возможность представления н.д. Паде в интегральной форме:

$$\rho_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{Q(z)} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta^n} \frac{\zeta^n Q(z) - z^n Q(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G = G(\gamma), \tag{8}$$



где  $\gamma$  — спрямляемый жорданов контур, охватывающий точку  $z_0 = 0$ ,  $G$  — внутренность контура (предполагается, что  $f$  аналитична в замыкании области  $G$ ), а  $Q$  — полином степени  $\nu$  с корнями в определенных выше точках  $z_{n,1}, \dots, z_{n,\nu}$ . Выражение (8) дает удобную для оценок форму остатка интерполяции (2):

$$R_n(f; z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{z^n}{Q(z)} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)Q(\zeta)}{(\zeta - z)\zeta^n} d\zeta, \quad z \in G. \quad (9)$$

Соответствующая оценка дана в [6] для интерполяции функций, коэффициенты которых подчиняются условию  $|f_{m-1}| \leq \alpha^m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , с некоторым  $\alpha > 0$ . В частности, в основном случае  $\alpha = 1$  получается следующее:

если  $|f_{m-1}| \leq 1$  для всех  $m$ , то

$$|R_n(f; z)| \leq \frac{1}{1-r} \frac{|z|^n}{r^n} \left( \frac{1 - \tau_n + r}{1 - \tau_n - r} \right)^n \ln \frac{3r}{r - |z|}, \quad |z| < r < 1 - \tau_n, \quad (10)$$

где  $\tau_n \in (0, 1)$  удовлетворяет соотношениям  $\tau_n^2 = (1 - \tau_n)^{n+1}$ ,  $\tau_n \asymp n^{-1} \ln n$ .

Скорость приближения нельзя существенно повысить, что видно из примера функции  $(1 - z)^{-1}$  [7]. Доказательство неравенства (10) опирается на интересный сам по себе результат [7, лемма 3], [8, лемма 3]:

если степенные суммы  $S_m$  чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  допускают оценку

$$|S_m| \leq 1, \quad m = 1, \dots, n, \quad (11)$$

то

$$|\lambda_k| < (1 - \tau_n)^{-1}, \quad k = 1, \dots, n;$$

при этом, для любого достаточно большого нечетного  $n$  существуют наборы чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  с тем же свойством (11) такие, что

$$\max_k |\lambda_k| > 1 + (10n)^{-1}. \quad (12)$$

В оценке (10) при каждом  $n$  радиус  $r$  отделен от 1 (и (12) показывает, что это ограничение нельзя вовсе убрать), тогда как функция  $f$  ввиду  $|f_{m-1}| \leq 1$  аналитична во всем открытом единичном круге. В теореме 1 настоящей работы при небольшом усилении ограничения на коэффициенты ( $|f_{m-1}| = O(m^{-1/2})$ ) мы установим оценку, применимую при любом  $r \in (0, 1)$  и демонстрирующую лучшую, чем оценки (5) и (10), аппроксимацию вблизи границы круга.

**1.3.** Задача аппроксимации посредством н.д. допускает естественное толкование как задача о размещении  $n$  единичных зарядов, создающих поле, близкое к заданному. Поэтому особый интерес представляют приближения простейшими дробями при тех или иных ограничениях на расположение их полюсов.

Принципиальная возможность аппроксимаций посредством н.д. с полюсами на предписанных множествах исследовалась начиная с 1960-х гг. в работах Я. Кореваара, М. Томпсона, Ч. Чуи и др. (недавние результаты по этой тематике см. в статье П. А. Бородина [9]). В то же время скорость таких аппроксимаций исследовалась мало. В случае равномерной метрики наиболее общим результатом является, по видимому, следующая оценка [10]  $n$ -кратной интерполяции функций из класса Харди  $H^1$  в круге  $D$  посредством н.д. порядка  $2n + 1$  с полюсами на окружности  $|z| = 1$ :



для любой функции  $f \in H^1$  и достаточно больших  $n \geq n_0(f)$  существуют попарно различные числа  $z_1, \dots, z_{2n+1}$  (все  $|z_k| = 1$ ) такие, что

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{z - z_k} \right| \leq |z|^n C(f) \frac{n+1}{(1 - |z|^{n+1})^2}, \quad |z| < 1, \quad (13)$$

где  $C(f) = 2e^{\pi\|f\|_1}(1 + \|f\|_1)(1 + \pi\|f\|_1 e^{\pi\|f\|_1})$ .

Напомним схему построения интерполирующих н.д. (13). Для заданной аналитической вблизи  $z = 0$  функции  $f$  снова строим функцию (4) и полином (3):

$$g(z) = p_n(z) + \pi_n(z), \quad p_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^n g_k z^k, \quad \pi_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k z^k. \quad (14)$$

Хорошо известно (см., например, [10, лемма 1]), что если при данном  $n$  полином  $p_n$  не имеет корней в открытом единичном круге, то все  $2n + 1$  корней полинома

$$Q^*(z) := p_n(z) + z^{2n+1} \overline{p_n(1/\bar{z})} \quad (15)$$

попарно различны и принадлежат окружности  $|z| = 1$ . Эти корни и выбираются в качестве  $z_1, \dots, z_{2n+1}$ . Нетрудно проверить, что для н.д.  $\rho^*(z) = (Q^*(z))'/Q^*(z)$  (ее порядок равен  $2n + 1$ ) действительно  $f(z) - \rho^*(z) = O(z^n)$ ,  $z \rightarrow 0$ .

Ниже в теореме 2 при сохранении конструкции полюсов  $z_k$  результат (13) будет усилен и дополнен на том же классе функций, что в теореме 1.

## 2. Основные результаты

Для формулировки результатов положим

$$c_1 = 1, \quad c_k = \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (16)$$

Ввиду известного разложения

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} x^k$$

имеем при  $x \in [-1, 1]$  и  $x \in (-1, 1)$  соответственно

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k} x^k \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{k-1}. \quad (17)$$

Числа  $c_k$  убывают, причем для  $k = 1, 2, \dots$  имеем по формуле Стирлинга

$$c_{k+1} \equiv \frac{(2k)!}{k! 2^k} = \frac{\theta_{2k}}{\sqrt{\pi k} \theta_k^2} < \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \quad (1 < \theta_{n+1} < \theta_n < e^{\frac{1}{12n}}).$$

Положим также

$$U(t, a) = 2a \frac{2\sqrt{1-at} - (1+a)\sqrt{1-t}}{1-a} - 2a, \quad 0 \leq at \leq a < 1, \quad (18)$$





$$v(a) = \frac{4a}{\sqrt{1-a}} - 2a \quad (v(a) \equiv U(1, a)),$$

и обозначим через  $a^*$  лежащий в интервале  $(0, 1)$  корень уравнения  $v(a) = 1$ . Функция  $U$  возрастает по первому аргументу, поэтому

$$0 \leq U(t, a) \leq v(a) \leq 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq a \leq a^* = 0.3414\dots$$

для каждого  $0 \leq t \leq 1$ .

**Теорема 1.** Пусть  $f(z) = f_0 + f_1z + \dots$  и при некотором  $a \in (0, a^*]$

$$|f_{m-1}| \leq ac_m, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где  $c_m$  — числа, определяемые равенствами (16). Тогда при любых  $n = 1, 2, \dots$  и  $r \in (0, 1)$  погрешность интерполяции Паде (2) допускает оценку

$$|R_n(f; z)| \leq \frac{|z|^n}{r^n} \frac{a}{\sqrt{1-r}} \frac{1+U(r, a)}{1-U(|z|, a)} \left( 1 + \frac{1}{\pi} \ln \frac{r^2}{r^2 - |z|^2} \right), \quad |z| < r,$$

а полюсы  $z_{n,1}, \dots, z_{n,\nu}$  н.д. Паде  $\rho_\nu$  удовлетворяют неравенству

$$|z_{n,k}| > (v(a))^{-1/n} \geq 1, \quad k = 1, \dots, n.$$

Для сравнения напомним, что в предположении  $|f_{m-1}| \leq 1$  оценка  $\min_k |z_{n,k}| \geq 1$ , вообще говоря, невозможна (см. (12)). Мы фактически доказываем, что если (11) заменить условием  $|S_m| \leq ac_m$  ( $a \leq a^*$ ;  $m = 1, \dots, n$ ), то  $\max_k |\lambda_k| < (v(a))^{1/n} \leq 1$ .

**Теорема 2.** В условиях теоремы 1 при любом  $n = 1, 2, \dots$  найдутся попарно различные числа  $z_1, \dots, z_{2n+1}$  (все  $|z_k| = 1$ ) такие, что в круге  $|z| < 1$

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{z - z_k} \right| \leq \frac{2|z|^n}{1 - |z|^{n+1}} \frac{(1+a)(1-a)^{-1}}{1 - U(|z|, a)} \left( n + \frac{1}{2} + \frac{a}{\sqrt{1-|z|}} \right). \quad (19)$$

Заметим, что теорема 2 дополняет и усиливает оценку (13) в двух направлениях. Во-первых, при  $|z| \rightarrow 1$  и фиксированном  $n$  оценка (19) имеет порядок  $O((1-|z|)^{-3/2})$ , тогда как оценка (13) — лишь порядок  $O((1-|z|)^{-2})$ . Во-вторых, функции, удовлетворяющие условиям теоремы 2, не обязаны принадлежать классу Харди  $H^1$ . Так, ввиду свойств чисел (16) имеем

$$\sqrt[k]{c_k} \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty), \quad c_1^2 + c_2^2 + \dots = \infty,$$

следовательно, почти для любого выбора знаков  $\epsilon_k = \pm 1$  функция

$$f_\epsilon(z) = a \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k c_k z^{k-1}, \quad a > 0,$$

по теореме Литтлвуда [11, стр. 228] не имеет радиальных пределов почти нигде на единичной окружности (т.е. множество тех  $\varphi \in [-\pi, \pi]$ , для которых существует  $\lim_{r \rightarrow 1-0} f_\epsilon(re^{i\varphi})$ , имеет меру нуль). Следовательно, при таком выборе множителей  $\epsilon_k$  функция  $f_\epsilon$  не может принадлежать  $H^1$ . В то же время теорема 2 применима к функции  $f_\epsilon$  при любом  $a \leq a^*$ .

Между теоремой 1 и оценками (5), (10) справедливо аналогичное сравнение.



### 3. Вспомогательные результаты

**3.1.** Нам потребуется решение рекуррентного уравнения

$$r_1 = a, \quad r_k = \frac{1}{2a} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{r_j r_{k-j}}{j} \quad (k \geq 2); \quad a > 0. \quad (20)$$

Вспользуемся методом производящих функций. Если обозначить

$$F_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k x^k, \quad F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k}{k} x^k, \quad A = \frac{1}{2a},$$

то в силу определения последовательности  $\{r_k\}$  формально будем иметь

$$\begin{aligned} AF(x)F_0(x) &= A \left( \frac{r_1}{1}x + \frac{r_2}{2}x^2 + \dots \right) (r_1x + r_2x^2 + \dots) = \\ &= A \frac{r_1}{1} r_1 x^2 + A \left( \frac{r_1}{1} r_2 + \frac{r_2}{2} r_1 \right) x^3 + \dots = r_2 x^2 + r_3 x^3 + \dots = F_0(x) - r_1 x, \end{aligned}$$

а также  $F_0(x) = xF'(x)$ . Видим, что  $F(x)$  удовлетворяет задаче Коши

$$(1 - Ay)y' = r_1, \quad y(0) = 0,$$

имеющей интеграл  $y - Ay^2/2 = r_1 x$ . Отсюда, учитывая  $F(0) = 0$ , находим

$$F(x) = A^{-1}(1 - \sqrt{1 - 2Ar_1x}).$$

Но  $A = (2a)^{-1}$ ,  $r_1 = a$ , так что (см. (17))

$$F(x) = 2a(1 - \sqrt{1 - x}) = a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k} x^k.$$

Из сравнения этого разложения с разложением  $F(x) = \sum r_k x^k / k$  вытекает

**Лемма 1.** *Решение уравнения (20) при любом  $a > 0$  дается формулой*

$$r_k = ac_k,$$

где  $c_k$  — числа, определяемые равенствами (16).

**3.2.** С помощью леммы 1 докажем следующие оценки.

**Лемма 2.** *Пусть элементы числовых последовательностей  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  и  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$  связаны рекуррентными соотношениями*

$$g_1 = b_1, \quad g_k = \frac{1}{k} \left( b_k + \sum_{j=1}^{k-1} b_{k-j} g_j \right), \quad k = 2, 3, \dots \quad (21)$$

Пусть  $n = 1, 2, \dots$ , а  $c_k$  — числа (16). Тогда при условии

$$|b_k| \leq ac_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad a \in (0, 1),$$



выполняется оценка

$$|g_k| \leq \frac{ac_k}{k} \varepsilon_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad \varepsilon_k := \frac{1 + a - 2a^k}{1 - a}, \quad (22)$$

а следовательно, и оценка

$$|g_1|t + \dots + |g_n|t^n < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ac_k}{k} \varepsilon_k t^k = U(t, a), \quad (23)$$

где  $t$  — любое число из промежутка  $(0, 1]$ .

**Доказательство.** При  $k = 1$  и  $k = 2$  оценка (22) верна, ибо  $c_1 = \varepsilon_1 = 1$ ,  $c_2 = 1/2$ ,  $\varepsilon_2 = 1 + 2a$ ,

$$|g_1| = |b_1| \leq a, \quad |g_2| \leq \frac{|b_2| + |b_1|^2}{2} \leq \frac{a(1 + 2a)}{4}.$$

Положим  $r_j := ac_j$  и допустим, что неравенство  $|g_j| \leq r_j \varepsilon_j / j$  выполнено при всех  $j \leq k - 1$ , где  $k$  — целое, большее двух. Тогда в силу (21) и  $|b_j| \leq ac_j$  имеем

$$k|g_k| \leq |b_k| + \sum_{j=1}^{k-1} |g_j| |b_{k-j}| \leq r_k + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{r_j \varepsilon_j}{j} r_{k-j} = r_k + r_1 r_{k-1} + \sum_{j=2}^{k-1} \varepsilon_j \frac{r_j r_{k-j}}{j}.$$

Учитывая монотонное возрастание множителей  $\varepsilon_j$  и тот факт, что последовательность  $\{r_j\}$  доставляет решение уравнения (20) (см. лемму 1), получаем

$$\begin{aligned} k|g_k| &\leq r_k + r_1 r_{k-1} + \varepsilon_{k-1} \sum_{j=2}^{k-1} \frac{r_j r_{k-j}}{j} = r_k + r_1 r_{k-1} (1 - \varepsilon_{k-1}) + \varepsilon_{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{r_j r_{k-j}}{j} = \\ &= r_k + ar_{k-1} (1 - \varepsilon_{k-1}) + \varepsilon_{k-1} \cdot 2ar_k. \end{aligned}$$

Но  $1 - \varepsilon_{k-1} \leq 0$ , а  $r_{k-1} > r_k$ , следовательно,

$$k|g_k| \leq r_k + ar_k (1 - \varepsilon_{k-1}) + 2ar_k \varepsilon_{k-1} = r_k (1 + a + a\varepsilon_{k-1}) = r_k \varepsilon_k.$$

Оценка (22) доказана по индукции.

Докажем неравенство (23). При любом  $t \in (0, 1]$  имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{ac_k}{k} \varepsilon_k t^k = a \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1 + a}{1 - a} - \frac{2a^k}{1 - a} \right) \frac{c_k t^k}{k},$$

причем в силу первого из тождеств (17)

$$S(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k} t^k = 2 - 2\sqrt{1 - t}.$$

Следовательно,

$$|g_1|t + \dots + |g_n|t^n < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ac_k}{k} \varepsilon_k t^k = a \frac{1 + a}{1 - a} S(t) - \frac{2a}{1 - a} S(at) \equiv U(t, a).$$

Лемма полностью доказана.  $\square$

Отметим, что из совпадения  $U(t, a)$  с суммой ряда  $\sum ac_k \varepsilon_k t^k / k$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , сразу видно возрастание функции  $U$  по первому аргументу.

**3.3.** Наконец, нам будет нужно следующее утверждение, фактически установленное в [7]. Для полноты изложения мы приводим здесь и его доказательство.



**Лемма 3.** Коэффициенты  $g_m$  функции (4) выражаются через коэффициенты  $f_m$  функции (1) по формулам (21), в которых  $b_k := f_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$

**Доказательство.** Напомним, что

$$g(z) = e^{F(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k,$$

где

$$F(z) = \int_0^z f(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} z^k, \quad b_k = f_{k-1}.$$

Ясно, что  $g_0 = g(0) = 1$ . Покажем, что

$$g_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} b_{k-j} g_j, \quad k = 1, 2, \dots$$

При  $k = 1$  равенство верно, ибо  $g_1 = g'(0) = g(0)F'(0) = b_1$ . Предположив, что оно верно при всех  $1 \leq k \leq m-1$ , докажем его справедливость при  $k = m$  ( $m \geq 2$ ).

С помощью формулы Лейбница находим

$$\begin{aligned} m!g_m &= g^{(m)}(0) = (gf)^{(m-1)}(0) = \sum_{j=0}^{m-1} C_{m-1}^j g^{(j)}(0) f^{(m-1-j)}(0) = \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} C_{m-1}^j j! g_j (m-1-j)! b_{m-j} = (m-1)! \sum_{j=0}^{m-1} g_j b_{m-j}. \end{aligned}$$

Отсюда и следует искомое. □

#### 4. Доказательство теоремы 1

В условиях теоремы функция  $f$  аналитична во всем круге  $|z| < 1$ , поэтому в качестве контура  $\gamma$  в (9) можно взять окружность  $|\zeta| = r$  с любым  $r \in (0, 1)$ . Полагая  $M_r(f) = \sup_{|\zeta|=r} |f(\zeta)|$  и оценивая интеграл в (9), получим при любом натуральном  $n$

$$|R_n(f; z)| \leq \frac{|z|^n M_r(f) M_r(Q)}{2\pi r^n |Q(z)|} \int_{|\zeta|=r} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|}, \quad |z| < r.$$

Из отмеченных в п. 1 результатов ясно, что с точностью до постоянного множителя (не влияющего на значения логарифмической производной  $Q'/Q$ ) полином  $Q$  совпадает с  $n$ -ым полиномом Маклорена функции  $g$ , определенной в (4). Таким образом, можем положить

$$Q(z) = p_n(z) = 1 + g_1 z + \dots + g_n z^n.$$

Но согласно лемме 3 величины  $g_1, g_2, \dots$  выражаются через величины  $b_1, b_2, \dots$  ( $b_j := f_{j-1}$ ) по рекуррентным формулам (21), тогда как в условиях теоремы  $|b_j| \leq ac_j$  при всех  $j$ . Следовательно, в силу (23) и  $a \leq a^*$  имеем

$$M_r(Q) < 1 + U(r, a), \quad |Q(z)| \geq 1 - U(|z|, a) > 0, \quad |z| < r < 1.$$



Кроме того, из условия  $|f_{m-1}| \leq ac_m$  следует (см. (17))

$$M_r(f) \leq \sum_{m=0}^{\infty} |f_m| r^m \leq a \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^{k-1} = \frac{a}{\sqrt{1-r}}, \quad r < 1.$$

Тем самым

$$|R_n(f; z)| \leq \frac{|z|^n}{2\pi r^n} \frac{a}{\sqrt{1-r}} \frac{1+U(r, a)}{1-U(|z|, a)} \int_{|\zeta|=r} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|}, \quad |z| < r.$$

Последний интеграл может быть выражен [12, с. 416] через значение полного эллиптического интеграла 1-го рода  $\mathbf{K}(\kappa)$ :

$$\frac{1}{2} \int_{|\zeta|=r} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|} = \int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{1-2\delta \cos t + \delta^2}} = 2\mathbf{K}(\delta),$$

где

$$\mathbf{K}(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \delta = \frac{|z|}{r} < 1.$$

Но [13, с. 26]

$$2\mathbf{K}(\kappa) \leq \pi - \ln(1-\kappa^2), \quad 0 < \kappa < 1,$$

поэтому

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=r} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|} \leq 1 + \frac{1}{\pi} \ln \frac{r^2}{r^2-|z|^2}, \quad |z| < r,$$

и мы приходим к искомой оценке остатка интерполяции.

Положим  $v = v(a)$ . Для оценки полюсов н.д. Паде  $\rho_v(z) = Q'(z)/Q(z)$  (корней  $z_{n,k}$  полинома  $Q$ ) достаточно заметить, что при  $|z| \leq \beta := v^{-1/n}$  ( $\beta \geq 1$  в силу  $a \leq a^*$ ) имеем  $|z|^k \leq \beta^k \leq \beta^n = v^{-1}$  при всех  $k = 1, \dots, n$ , а значит,

$$|Q(z)| \geq 1 - (|g_1| + \dots + |g_n|)v^{-1} > 1 - vv^{-1} = 0$$

(применили оценку (23) при  $t = 1$ ). Теорема 1 доказана.

## 5. Доказательство теоремы 2

Рассуждая как при доказательстве теоремы 1, придем к оценкам (22), (23) коэффициентов  $g_k$  функции  $g$  (см. (4)). С помощью (23) при любом  $n = 1, 2, \dots$  установим, что  $n$ -ый полином Маклорена этой функции не имеет корней в круге  $|z| < 1$ :

$$|p_n(z)| = |1 + g_1 z + \dots + g_n z^n| \geq 1 - U(|z|, a) > 0 \quad (a \leq a^*).$$

Следовательно, все  $2n + 1$  корней  $z_1, \dots, z_{2n+1}$  полинома  $Q^*$  (см. (15)) попарно различны и лежат на окружности  $|z| = 1$ . При этом верна оценка [10, лемма 2]

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{z - z_k} \right| \leq \frac{|h_n(z)| + |z^{n+1} f(z)| M}{(1 - |z|^{n+1}) |p_n(z)|}, \quad |z| < 1,$$

где

$$|h_n(z)| \leq |z|^n (2n + 1) M + |\pi'_n(z)|, \quad M = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|,$$

и, как отмечено выше,  $|p_n(z)| \geq 1 - U(|z|, a)$  (обозначение  $\pi_n(z)$  см. в (14)).



Оценим числитель дроби. В круге  $|z| < 1$  ввиду (22) и свойств чисел  $c_k$  имеем  $|f(z)| \leq a/\sqrt{1-|z|}$  и

$$\begin{aligned} |\pi'_n(z)| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k|g_k||z|^{k-1} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} ac_k\varepsilon_k|z|^{k-1} \leq |z|^na \frac{1+a}{1-a} \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k|z|^{k-n-1} \leq \\ &\leq |z|^na \frac{1+a}{1-a} \sum_{k=1}^{\infty} c_k|z|^{k-1} = \frac{|z|^na}{\sqrt{1-|z|}} \frac{1+a}{1-a}. \end{aligned}$$

С учетом  $M < 1 + v(a) < (1+a)/(1-a)$  мы получаем

$$|h_n(z)| + |z^{n+1}f(z)|M \leq |z|^n \left( 2n + 1 + \frac{(1+|z|)a}{\sqrt{1-|z|}} \right) \frac{1+a}{1-a},$$

откуда и следует искомое. Теорема 2 доказана.

### Список литературы

1. Данченко В. И., Данченко Д. Я. О приближении наимпростейшими дробями // Математические заметки. 2001. Т. 70, вып. 4. С. 553–559. <https://doi.org/10.4213/mzm767>
2. Данченко В. И., Комаров М. А., Чунаев П. В. Экстремальные и аппроксимативные свойства наимпростейших дробей // Известия вузов. Математика. 2018. № 12. С. 9–49.
3. Косухин О. Н. О некоторых нетрадиционных методах приближения, связанных с комплексными полиномами : дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Москва, 2005. 80 с.
4. Кондакова Е. Н. Интерполяция наимпростейшими дробями // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 2. С. 30–37. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-2-30-37>
5. Комаров М. А. Критерий наилучшего равномерного приближения наимпростейшими дробями в терминах альтернанса // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2015. Т. 79, вып. 3. С. 3–22. <https://doi.org/10.4213/im8266>
6. Danchenko V. I., Chunaev P. V. Approximation by simple partial fractions and their generalizations // Journal of Mathematical Sciences. 2011. Vol. 176, iss. 6. P. 844–859. <https://dx.doi.org/10.1007/s10958-011-0440-5>
7. Чунаев П. В. Об одном нетрадиционном методе аппроксимации // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 2010. Т. 270. С. 281–287. EDN: **MVSMGZ**
8. Chunaev P. V. Interpolation by generalized exponential sums with equal weights // Journal of Approximation Theory. 2020. Vol. 254. Art. 105397. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2020.105397>
9. Бородин П. А. Приближение наимпростейшими дробями с ограничением на полюсы. II // Математический сборник. 2016. Т. 207, вып. 3. С. 19–30. <https://doi.org/10.4213/sm8500>
10. Комаров М. А. О скорости аппроксимации в единичном круге функций класса  $H^1$  логарифмическими производными полиномов с корнями на границе круга // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2020. Т. 84, вып. 3. С. 3–14. <https://doi.org/10.4213/im8901>
11. Duren P. L. Theory of  $H^p$  spaces. New York ; London : Academic Press, 1970. 258 p.
12. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды : в 3 т. Т. 1 : Элементарные функции. Москва : Наука, 1981. 800 с.
13. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции : в 3 т. Т. 3 : Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. Москва : Наука, 1967. 300 с.



## References

1. Danchenko V. I., Danchenko D. Ya. Approximation by simplest fractions. *Mathematical Notes*, 2001, vol. 70, iss. 4, pp. 502–507. <https://doi.org/10.1023/A:1012328819487>
2. Danchenko V. I., Komarov M. A., Chunaev P. V. Extremal and approximative properties of simple partial fractions. *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, iss. 12, pp. 6–41. <https://doi.org/10.3103/S1066369X18120022>
3. Kosukhin O. N. *On some non-traditional methods of approximation, related to complex polynomials*. Diss. Cand. Sci. (Phiz. and Math.). Moscow, 2005. 80 p. (in Russian).
4. Kondakova E. N. Interpolation by simple partial fractions. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2009, vol. 9, iss. 2, pp. 30–37 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-2-30-37>
5. Komarov M. A. A criterion for the best uniform approximation by simple partial fractions in terms of alternance. *Izvestiya: Mathematics*, 2015, vol. 79, iss. 3, pp. 431–448. <https://doi.org/10.1070/IM2015v079n03ABEH002749>
6. Danchenko V. I., Chunaev P. V. Approximation by simple partial fractions and their generalizations. *Journal of Mathematical Sciences*, 2011, vol. 176, iss. 6, pp. 844–859. <https://dx.doi.org/10.1007/s10958-011-0440-5>
7. Chunaev P. V. On a nontraditional method of approximation. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 270, iss. 1, pp. 278–284. <https://doi.org/10.1134/S0081543810030223>, EDN: OHNDBB
8. Chunaev P. V. Interpolation by generalized exponential sums with equal weights. *Journal of Approximation Theory*, 2020, vol. 254, Art. 105397. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2020.105397>
9. Borodin P. A. Approximation by simple partial fractions with constraints on the poles. II. *Sbornik: Mathematics*, 2016, vol. 207, iss. 3, pp. 331–341. <https://doi.org/10.1070/SM8500>
10. Komarov M. A. On the rate of approximation in the unit disc of  $H^1$ -functions by logarithmic derivatives of polynomials with zeros on the boundary. *Izvestiya: Mathematics*, 2020, vol. 84, iss. 3, pp. 437–448. <https://doi.org/10.1070/IM8901>
11. Duren P. L. *Theory of  $H^p$  spaces*. New York, London, Academic Press, 1970. 258 p.
12. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. T. 1: Elementarnye funktsii* [Integrals and Series. Vol. 1: Elementary Functions]. Moscow, Nauka, 1981. 800 p. (in Russian).
13. Bateman H., Erdélyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. T. 3: Ellipticheskie i avtomorfnye funktsii. Funktsii Lamé i Mat'e* [Higher Transcendental Functions. Vol. 3: Elliptic and Automorphic Functions, Lamé and Mathieu functions]. Moscow, Nauka, 1967. 300 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 23.03.2022

Принята к публикации / Accepted 16.11.2022

Опубликована / Published 31.05.2023



Научная статья

УДК 517.518.8

## О приближении ограниченных функций тригонометрическими полиномами в метрике Хаусдорфа

Е. Х. Садекова

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Россия, 115409, г. Москва, Каширское шоссе, д. 31

**Садекова Екатерина Халиловна**, старший преподаватель кафедры высшей математики, [vetka.08@mail.ru](mailto:vetka.08@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-4124-7432>, AuthorID: 1131874

**Аннотация.** Рассматривается задача о приближении в метрике Хаусдорфа ограниченной (не обязательно однозначной)  $2\pi$ -периодической функции  $f$  тригонометрическими полиномами. Построение приближающего полинома проводится в несколько этапов. Сначала по функции  $f$  строится подходящая кусочно-постоянная  $2\pi$ -периодическая функция  $g$ , обладающая свойством  $\lambda$ -монотонности, для которой получены оценки хаусдорфова уклонения от  $f$ , модуля непрерывности и вариации. Затем по функции  $g$  строится  $2\pi$ -периодическая сплайн-функция  $\varphi$  порядка  $r$ . Получена оценка производной  $\varphi^{(r)}$  через модуль непрерывности функции  $f$ . На последнем этапе используется классическое неравенство Джексона для наилучшего приближения гладкой функции тригонометрическими полиномами. В итоге доказана точная по порядку оценка указанного отклонения функции  $f$  в метрике Хаусдорфа с явно выписанной константой. По порядку оценка совпадает с известными результатами Б. Сендова и В. А. Попова, но лучше с точки зрения выбора константы.

**Ключевые слова:** сплайн-функция, приближение тригонометрическими полиномами, метрика Хаусдорфа

**Для цитирования:** Садекова Е. Х. О приближении ограниченных функций тригонометрическими полиномами в метрике Хаусдорфа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 169–182. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-169-182>, EDN: JKUQAS

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## On the approximation of bounded functions by trigonometric polynomials in Hausdorff metric

E. H. Sadekova

National Research Nuclear University MEPHI, 31 Kashirskoye Shosse, 115409 Moscow, Russia

**Ekaterina H. Sadekova**, [vetka.08@mail.ru](mailto:vetka.08@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-4124-7432>, AuthorID: 1131874





**Abstract.** The article discusses a method for constructing a spline function to obtain estimates that are exact in order to approximate bounded functions by trigonometric polynomials in the Hausdorff metric. The introduction provides a brief history of approximation of continuous and bounded functions in the uniform metric and the Hausdorff metric. Section 1 contains the main definitions, necessary facts, and formulates the main result. An estimate for the indicated approximations is obtained from Jackson's inequality for uniform approximations. In section 2 auxiliary statements are proved. So, for an arbitrary  $2\pi$ -periodic bounded function, a spline function is constructed. Then, estimates are obtained for the best approximation, variation, and modulus of continuity of a given spline function. Section 3 contains evidence of the main results and final comments.

**Keywords:** spline function, approximation by trigonometric polynomials, Hausdorff metric

**For citation:** Sadekova E. H. On the approximation of bounded functions by trigonometric polynomials in Hausdorff metric. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 169–182 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-169-182>, EDN: JKUQAS

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

В теории приближения непрерывных функций алгебраическими полиномами пространство непрерывных на компакте  $X$  функций стандартно рассматривается с *равномерной* (чебышевской) метрикой

$$\rho(f, g) = \|f - g\| = \max \{|f(x) - g(x)| : x \in X\}.$$

В 1911 г. Д. Джексон [1] (см. также [2]) доказал оценку наилучшего приближения для непрерывных  $2\pi$ -периодических функций тригонометрическими полиномами степени не выше  $n$  через значение  $\omega(f; 1/n)$  модуля непрерывности функции  $f$ . В 60-х годах прошлого века рассматривались различные метрики пространства функций для получения точных оценок приближений непрерывных (или ограниченных) функций полиномами. Так, Б. Сендов предложил использовать метрику Хаусдорфа [3] в тех случаях, когда «близость двух функций ... является «для глаза» понятием более естественным, чем понятие их близости в любой другой метрике» (цит. по: [4, с. 509]). В этой метрике Б. Сендов установил [3], что любая ограниченная на отрезке функция приближается алгебраическими полиномами степени  $n$  со скоростью  $O(\ln n/n)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Позже В. Веселинов указал [5], что с этой же скоростью любая  $2\pi$ -периодическая функция приближается в метрике Хаусдорфа тригонометрическими полиномами. В 1970-х гг. Е. П. Долженко и Е. А. Севастьяновым были предложены новые методы исследования, использующие, в частности, понятие среднего модуля колебания функции. Это позволило получить новые оценки в прямых и обратных теоремах, относящихся к приближению ограниченных функций в хаусдорфовой метрике [6]. В дальнейшем Б. Сендовым и В. А. Поповым [7, 8] было доказано, что отмеченное наилучшее приближение алгебраическими полиномами не превосходит величины  $\max \left\{ \frac{A}{n} \ln(n\omega(f; 1/n)), \frac{A}{n} \right\}$ , где  $A$  — абсолютная постоянная.

В настоящей работе показано, как из известных результатов теории равномерных приближений тригонометрическими полиномами можно получить точные по порядку оценки для приближения в хаусдорфовой метрике ограниченной  $2\pi$ -периодической функции.



## 1. Основные определения и главный результат

Рассмотрим метрическое пространство точек на плоскости  $xOy$  с расстоянием Минковского

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$$

Хаусдорфовым расстоянием между плоскими замкнутыми множествами  $A$  и  $B$  на плоскости  $xOy$  назовем величину

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset U_\varepsilon(B), B \subset U_\varepsilon(A)\},$$

где  $U_\varepsilon(X) = \{(x, y) : \rho((x, y), X) \leq \varepsilon\}$  —  $\varepsilon$ -окрестность множества  $X$  относительно расстояния  $\rho$ .

Хаусдорфово расстояние для двух непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$  задается по правилу

$$H(f_1, f_2) = H(F(f_1), F(f_2)),$$

где  $F(f)$  — график функции  $y = f(x)$  (см. [2]).

Если рассматривать разрывные ограниченные (вообще говоря, многозначные) функции, то удобно дополнить их графики вертикальными отрезками в точках разрыва до связного множества. Под *дополненным графиком*  $F(f)$  такой функции  $f$  будем понимать наименьшее замкнутое множество плоскости  $xOy$ , содержащее график  $\{(x, f(x))\}$  этой функции, а также все точки вертикальных отрезков, образуемых любыми двумя точками множества  $(x_1, y_1)$  и  $(x_1, y_2)$ . Такое множество называется *выпуклым относительно оси  $Oy$* .

Хаусдорфовым расстоянием  $H(f, g; E)$  между двумя ограниченными функциями  $f(x)$  и  $g(x)$ , где  $x \in E$ , называется хаусдорфово расстояние между их дополненными графиками, т. е.  $H(f, g; E) = H(F(f), F(g))$ . Используем символ  $H(f, g)$  для аналогичного расстояния между  $2\pi$ -периодическими функциями.

Введем еще некоторые обозначения, используемые в работе. Для наименьшего отклонения в смысле равномерной метрики  $2\pi$ -периодической функции  $f(x)$  от тригонометрических полиномов  $T_n$  порядка не выше  $n$  применяем обозначение

$$E_n^T(f) = \inf_{T_n} \{\|f - T_n\|\},$$

где  $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ ,  $T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$ .

Аналогичное наименьшее отклонение в смысле хаусдорфова расстояния для ограниченной  $2\pi$ -периодической функции обозначим символом  $HE_n^T(f) = \inf_{T_n} \{H(f, T_n)\}$ .

Как обычно,  $\omega(f, \Delta; \delta) = \sup\{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in \Delta, |x' - x''| \leq \delta\}$  — *равномерный модуль непрерывности* функции  $f(x)$  на (конечном или бесконечном) промежутке  $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ , а  $Var_{\Delta} f$  — ее полное изменение на этом промежутке. Для  $2l$ -периодической функции  $f(x)$  пишем  $\omega(f; \delta)$  вместо  $\omega(f, [0, 2l]; \delta)$  и  $Var f$  вместо  $Var_{[0, 2l]} f$ .

Следуя [4], введем *средний модуль колебания* функции  $f(x)$  на отрезке  $\Delta$  по формуле

$$\Omega(f, \Delta; \delta) = \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} \Omega\left(f, (x - \delta/2, x + \delta/2) \cap \Delta\right) dx,$$



где  $|\Delta|$  — длина отрезка  $\Delta$ ,  $\delta > 0$ , и  $\Omega(f, E) = \sup_{x \in E} f(x) - \inf_{x \in E} f(x)$ . Для  $2l$ -периодической функции  $f(x)$  вместо  $\Omega(f, [0, 2l]; \delta)$  пишем  $\Omega(f; \delta)$ . Известно (см. [4]), что средний модуль колебания  $\Omega(f, \Delta; \delta)$  является неотрицательной, возрастающей и непрерывной функцией переменной  $\delta > 0$ .

Напомним, что функция  $\varphi(x)$  называется *кусочно-постоянной* (соответственно, *кусочно-линейной*) на конечном отрезке  $\Delta = [a, b]$ , если существует такое разбиение  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  этого отрезка точками  $\{x_k\}_{k=0}^n$ , что на каждом интервале  $(x_{k-1}, x_k)$  функция  $\varphi(x)$  постоянна (линейна), а в каждой точке  $x_j$  — непрерывна слева или справа (соответственно, просто непрерывна). Функция  $\varphi(x)$  называется *кусочно-постоянной* (*кусочно-линейной*) на бесконечном интервале  $\Delta$ , если она такова на каждом отрезке  $\hat{\Delta} \subset \Delta$ . Отметим, что кусочно-линейная  $2l$ -периодическая функция непрерывна на  $\mathbb{R}$  и имеет конечное число точек излома на периоде.

Дадим теперь определение  $\lambda$ -монотонной на интервале функции. Пусть функция  $f(x)$  (не обязательно однозначная) определена на некотором промежутке  $\Delta$ , и  $\lambda > 0$  — заданное число. Функция  $f(x)$  называется  *$\lambda$ -монотонной* на  $\Delta$ , если она является монотонной на каждом интервале  $(\alpha, \beta) \subset \Delta$  длины  $\beta - \alpha = \lambda$ , причем если  $\Delta \neq \mathbb{R}$ , то дополнительно требуем, чтобы  $f(x)$  была равна одной постоянной на каждом интервале, представляющем собой пересечение  $\Delta$  с открытой  $(\lambda/2)$ -окрестностью каждой концевой точки промежутка  $\Delta$ .

*Классическим сплайном* (сплайн-функцией) *нулевой степени* называется кусочно-постоянная функция. При  $r \in \mathbb{N}$  функция  $\varphi(x)$  называется *классическим сплайном степени  $r$* , если  $\varphi^{(r-1)}(x)$  является непостоянной непрерывной кусочно-линейной функцией. Таким образом, если  $\varphi(x)$  — классический сплайн  $r$ -ой степени, то  $r$ -я производная  $\varphi^{(r)}(x)$  кусочно-постоянна и отлична от тождественного нуля, а  $\varphi(x)$  — последовательная  $r$ -я первообразная от кусочно-постоянной функции  $\varphi^{(r)}(x)$ .

Ниже будет показано, как оценку уклонений тригонометрических полиномов в метрике Хаусдорфа от произвольной ограниченной  $2\pi$ -периодической функции можно получить из классического неравенства Джексона

$$E_{n-1}^T(\varphi) \leq \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} M, \quad (1)$$

справедливого для  $2\pi$ -периодической функции  $\varphi$ , имеющей  $(r-1)$ -ю производную  $\varphi^{(r-1)}$  с модулем непрерывности  $\omega(\varphi^{(r-1)}; \delta) \leq M\delta$ . Здесь  $\mathcal{K}_r$  — константа Фавара, определяемая по формуле

$$\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(r+1)}}{(2m+1)^{r+1}}.$$

Центральным результатом настоящей работы является следующее утверждение (см. теорему 2 в разд. 3).

Пусть  $f(x)$  — ограниченная не обязательно однозначная  $2\pi$ -периодическая функция. Тогда при всех натуральных  $n \geq 2$  выполняется оценка

$$HE_{n-1}^T(f) \leq \frac{9eC}{n} \ln \left( e + n\omega \left( f; \frac{\pi}{n} \right) \right),$$

где  $C = \sqrt[r]{\mathcal{K}_r}$ ,  $r = [\ln(e + n\omega(f; \pi/n))] \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{K}_r$  — постоянная Фавара,  $C \leq \pi/2$ .



## 2. Вспомогательные утверждения

Для доказательства основного результата понадобятся следующие леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $f$  — ограниченная  $2\pi$ -периодическая, вообще говоря, неоднородная функция,  $q \in \mathbb{N}$ . Тогда существует  $2\pi$ -периодическая кусочно-постоянная и  $\frac{\pi}{q}$ -монотонная функция  $g(x)$  такая, что

$$H(f, g) \leq \frac{3\pi}{2q}, \quad (2)$$

$$\omega\left(g; \frac{\pi}{q}\right) \leq \omega\left(f; \frac{3\pi}{q}\right), \quad (3)$$

$$\text{Var } g \leq 2q\Omega\left(f; \frac{4\pi}{q}\right). \quad (4)$$

**Доказательство.** Введем на числовой прямой промежутки  $\Delta_j$  и  $\tilde{\Delta}_j$  вида

$$\Delta_j = \left[ \left(j - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{q}, \left(j + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{q} \right), \quad \tilde{\Delta}_j = \left[ (j - 1) \frac{\pi}{q}, (j + 1) \frac{\pi}{q} \right), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Пусть  $m_j = \inf \{f(x) : x \in \tilde{\Delta}_j\}$ ,  $M_j = \sup \{f(x) : x \in \tilde{\Delta}_j\}$  ( $j \in \mathbb{Z}$ ). Определим  $2\pi$ -периодическую кусочно-постоянную функцию  $g(x)$  ее значениями на отрезке  $[0, 2\pi]$  следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} m_0, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2q}\right), \\ m_{2i}, & x \in \Delta_{2i}, \quad i = 1, \dots, q-1, \\ M_{2i-1}, & x \in \Delta_{2i-1}, \quad i = 1, \dots, q, \\ m_0, & x \in \left[2\pi - \frac{\pi}{2q}, 2\pi\right]. \end{cases}$$

Определим также  $2\pi$ -периодические функции  $m(x)$  и  $M(x)$  равенствами  $m(x) = m_{2i}$  при  $x \in \tilde{\Delta}_{2i}$  и  $M(x) = M_{2i-1}$  при  $x \in \tilde{\Delta}_{2i-1}$ , где  $i \in \mathbb{Z}$ .

В качестве иллюстрации приведем следующую таблицу:

	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	...	$j = 2q - 2$	$j = 2q - 1$
$\tilde{\Delta}_j$	$\left[-\frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{q}\right)$	$\left[0, \frac{2\pi}{q}\right)$	$\left[\frac{\pi}{q}, \frac{3\pi}{q}\right)$	...	$\left[\frac{(2q-3)\pi}{q}, \frac{(2q-1)\pi}{q}\right)$	$\left[\frac{(2q-2)\pi}{q}, 2\pi\right)$
$m_j$	$m_0$		$m_2$	...	$m_{2q-2}$	
$M_j$		$M_1$		...		$M_{2q-1}$
$\Delta$	$\left[0, \frac{\pi}{2q}\right)$	$\left[\frac{\pi}{2q}, \frac{3\pi}{2q}\right)$	$\left[\frac{3\pi}{2q}, \frac{5\pi}{2q}\right)$	...	$\left[2\pi - \frac{5\pi}{2q}, 2\pi - \frac{3\pi}{2q}\right)$	$\left[2\pi - \frac{3\pi}{2q}, 2\pi - \frac{\pi}{2q}\right)$
$g(x)$	$m_0$	$M_1$	$m_2$	...	$m_{2q-2}$	$M_{2q-1}$
						$m_0$

Здесь соответствующее  $\Delta \subset \tilde{\Delta}_j$ .

Для доказательства неравенства (2) требуется проверить такие два включения:  $F(f) \subset U_\varepsilon(F(g))$  и  $F(g) \subset U_\varepsilon(F(f))$ , где всюду далее  $\varepsilon = \frac{3\pi}{2q}$  для краткости.

Действительно, докажем, что  $F(f) \subset U_\varepsilon(F(g))$ . Для этого рассмотрим дополненные графики  $F(g)$  и  $F(f)$  на каждом из промежутков  $\tilde{\Delta}$ ,  $|\tilde{\Delta}| = \frac{2\pi}{q}$ .



Начнем с  $j = 0$  и для  $\tilde{\Delta}_0 = \left[-\frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{q}\right)$  рассмотрим промежутки, на которых функция  $g(x)$  постоянна, и точки, в которых функция  $g(x)$  меняет свое значение.

Пусть  $i = 0$ . На промежутке  $\Delta_0 \subset \tilde{\Delta}_0$  функция  $g(x)$  постоянна,  $g(x) = m_0$ , где  $m_0 = \inf_{x \in \tilde{\Delta}_0} \{f(x)\}$ . Для удобства обозначим  $F(g)|_{\Delta}$  часть дополненного графика функции  $g(x)$ , рассматриваемой на множестве  $\Delta$ , а  $U_\varepsilon(F(g)|_{\Delta_0}) - \frac{3\pi}{2q}$ -окрестность соответствующей части дополненного графика  $F(g)$ ,

$$U_\varepsilon(F(g)|_{\Delta_0}) = \left[-\frac{2\pi}{q}, \frac{2\pi}{q}\right] \times \left[m_0 - \frac{3\pi}{2q}, m_0 + \frac{3\pi}{2q}\right].$$

Рассмотрим отдельно точку  $x = \frac{\pi}{2q}$ . Функция  $g(x)$  при переходе через эту точку меняет значение и  $F(g)|_{x=\frac{\pi}{2q}} = \left\{\frac{\pi}{2q}\right\} \times [m_0, M_1]$ ,  $M_1 = \sup_{x \in \tilde{\Delta}_1} \{f(x)\}$ , где  $\tilde{\Delta}_1 = \left[0, \frac{2\pi}{q}\right)$ .

Тогда

$$U_\varepsilon(F(g)|_{x=\frac{\pi}{2q}}) = \left[-\frac{\pi}{q}, \frac{2\pi}{q}\right] \times \left[m_0 - \frac{3\pi}{2q}, M_1 + \frac{3\pi}{2q}\right].$$

Объединяя полученные на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2q}, \frac{\pi}{2q}\right]$  результаты, имеем там

$$F(f) \subset U_\varepsilon(F(g)). \tag{5}$$

Далее, задавая  $j = 1$ ,  $\tilde{\Delta}_1 = \left[0, \frac{2\pi}{q}\right)$ ,  $i = 1$ , получим промежуток  $\Delta_1 = \left[\frac{\pi}{2q}, \frac{3\pi}{2q}\right)$ . На этом промежутке  $g(x) = M_1 = \sup_{x \in \tilde{\Delta}_1} \{f(x)\}$  и требуемое включение выполняется для точек промежутка  $\Delta_1$ .

Повторяя рассуждения, будем получать включения типа (5) для каждого внутреннего промежутка.

Выделим особо случаи  $j = -1$  и  $j = q$  («концевых» промежутков).

Пусть  $j = -1$ ,  $\tilde{\Delta}_{-1} = \left[-\frac{2\pi}{q}, 0\right)$ ,  $i = -1$ , тогда получим промежуток  $\Delta_{-1} = \left[-\frac{3\pi}{2q}, -\frac{\pi}{2q}\right)$ , где функция  $g(x) = M_{2q-1}$ . В силу периодичности функции  $f(x)$  рассмотрения на промежутке  $\left[-\frac{3\pi}{2q}, -\frac{\pi}{2q}\right)$  повторяют аналогичные для  $j = 0$ .

Обозначим точку  $x^* = -\frac{\pi}{2q}$ ,  $y^* = M_0$ . Рассмотрим  $\frac{3\pi}{2q}$ -окрестность дополненного графика  $F(g)|_{x=-\frac{\pi}{2q}} = \left\{-\frac{\pi}{2q}\right\} \times [m_0, M_0]$ , т. е.

$$U_\varepsilon(F(g)|_{x=-\frac{\pi}{2q}}) = \left[-\frac{2\pi}{q}, \frac{\pi}{q}\right] \times \left[m_0 - \frac{3\pi}{2q}, M_0 + \frac{3\pi}{2q}\right], \quad \varepsilon = \frac{3\pi}{2q}.$$

Эта окрестность содержит весь график функции  $f$  на  $\tilde{\Delta}_0$ . Аналогично проводится доказательство для других интервалов.

Таким образом, дополненные графики функций  $m(x)$  и  $M(x)$  задают «коридор», который содержит дополненный график  $F(f)$  и сам находится в окрестности дополненного графика  $F(g)$  функции  $g$ .

Аналогично проводится доказательство второго включения:  $F(g) \subset U_\varepsilon(F(f))$  с тем же  $\varepsilon = \frac{3\pi}{2q}$ .

Докажем неравенство (3), т. е.  $\omega\left(g; \frac{\pi}{q}\right) \leq \omega\left(f; \frac{3\pi}{q}\right)$ .



По определению

$$\omega\left(g; \frac{\pi}{q}\right) := \sup \left\{ |g(x') - g(x'')| : x', x'' \in \Delta, |x' - x''| \leq \frac{\pi}{q} \right\},$$

$$\omega\left(f; \frac{3\pi}{q}\right) := \sup \left\{ |f(x') - f(x'')| : x', x'' \in \Delta, |x' - x''| \leq \frac{3\pi}{q} \right\}.$$

Обозначим отрезок  $\Delta_j^* = \left[ j\frac{\pi}{q}, (j+1)\frac{\pi}{q} \right]$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , а отрезок  $\Delta_j^{**} = \left[ (j-1)\frac{\pi}{q}, (j+2)\frac{\pi}{q} \right]$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . Ясно, что  $\Delta_j^* \subset \Delta_j^{**}$ . Поскольку

$$\sup_{x \in \Delta_j^*} \{g(x)\} - \inf_{x \in \Delta_j^*} \{g(x)\} \leq \sup_{x \in \Delta_j^{**}} \{f(x)\} - \inf_{x \in \Delta_j^{**}} \{f(x)\},$$

то  $\Omega(g, \Delta_j^*) \leq \Omega(f, \Delta_j^{**})$ , что и доказывает неравенство (3).

Оценим

$$\begin{aligned} Var g &= Var_{[0, 2\pi]} g = (M_1 - m_0) + (M_1 - m_2) + (M_3 - m_2) + \dots + \\ &+ (M_{2q-3} - m_{2q-2}) + (M_{2q-1} - m_{2q-2}) + (M_{2q-1} - m_0) = \\ &= \sum_{j=1}^{2q} \left( M\left(\left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{q}\right) - m\left(\left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{q}\right) \right) = \\ &= \frac{q}{\pi} \int_0^{2\pi} (M(x) - m(x)) dx \leq \frac{q}{\pi} \int_0^{2\pi} \Omega\left(f, x - \frac{2\pi}{q} - \varepsilon, x + \frac{2\pi}{q} + \varepsilon\right) dx = \\ &= 2q \Omega\left(f; \frac{4\pi}{q} + 2\varepsilon\right) \longrightarrow Var g \leq 2q \Omega\left(f; \frac{4\pi}{q}\right) \end{aligned}$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$ , где

$$M(x) - m(x) \leq \sup_{x \in \Delta^*} \{f(x)\} - \inf_{x \in \Delta^*} \{f(x)\} \leq \Omega\left(f, \left(x - \frac{2\pi}{q} - \varepsilon, x + \frac{2\pi}{q} + \varepsilon\right)\right),$$

$$\Delta^* = \left(x - \frac{2\pi}{q} - \varepsilon, x + \frac{2\pi}{q} + \varepsilon\right).$$

Данное неравенство справедливо для любого  $\varepsilon > 0$ , значит, и для  $\varepsilon = 0$ . Таким образом, неравенство (4) и лемма 1 доказаны.  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $0 < h \leq \delta$ , а ограниченная  $2\ell$ -периодическая функция  $f(x)$  является  $2\delta$ -монотонной. Тогда функция Стеклова

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x+t) dt \tag{6}$$

является  $2\ell$ -периодической,  $2(\delta - h)$ -монотонной и справедливо неравенство

$$H(f, f_h) \leq h.$$

**Доказательство.** Докажем, что

$$F(f) \subset U_\varepsilon(F(f_h)). \tag{7}$$



Пусть  $(\alpha, \beta)$  — интервал постоянства функции  $f(x)$  такой, что на любом другом интервале, содержащем  $(\alpha, \beta)$ , функция  $f(x)$  уже не является постоянной. Тогда  $\beta - \alpha \geq 2\delta \geq 2h > 0$  и функция  $f_h(x)$  на  $(\alpha + h, \beta - h)$  также является постоянной, совпадая с  $f(x)$ .

Пусть теперь  $x_0 \notin [\alpha + h, \beta - h]$ . Функция  $f(x)$  будет монотонной на отрезке  $[x_0 - 2h, x_0 + 2h]$ , а функция  $f_h(x)$  будет монотонной на отрезке  $[x_0 - h, x_0 + h]$  и  $f_h(x_0 - h) \leq f(x_0) \leq f_h(x_0 + h)$ . Неравенство следует из определения функции Стеклова, так как

$$f_h(x_0 - h) = \frac{1}{2h} \int_{x_0 - 2h}^{x_0} f(t) dt \leq f(x_0),$$

$$f(x_0) \leq f_h(x_0 + h) = \frac{1}{2h} \int_{x_0}^{x_0 + 2h} f(t) dt.$$

Поэтому существует  $x_1$  из  $[x_0 - 2h, x_0 + 2h]$  такое, что  $f_h(x_1) = f(x_0)$ . Таким образом, для всякой точки  $(x_0, f(x_0))$  существует точка  $(x_1, f_h(x_1))$  такая, что  $|x_0 - x_1| \leq h$ .

Рассмотрим случай, когда  $f(x)$  не является монотонной на  $(x_0 - 2h, x_0 + 2h)$ . Существует интервал  $(\alpha, \beta) \subset (x_0 - 2h, x_0 + 2h)$ ,  $\beta - \alpha \geq 2\delta \geq 2h > 0$ , такой, что  $f(x) = \text{const}$  на  $(\alpha, \beta)$  и  $f(x) \neq \text{const}$  на любом интервале, содержащем  $(\alpha, \beta)$ . Тогда  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  и возможны три случая:

- 1)  $x_0 \in (\alpha, \alpha + h] = \Delta_1$ ;
- 2)  $x_0 \in [\beta - h, \beta) = \Delta_2$ ;
- 3)  $x_0 \in (\alpha + h, \beta - h) = \Delta_3$ .

Рассмотрим случай 1). Пусть  $x_0 \in (\alpha, \alpha + h] = \Delta_1$ . Тогда  $f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x+t) dt$ , где  $f(x)$  — функция, монотонная на  $(\alpha - 2h, \alpha + h]$  и  $(\alpha, \alpha + h] \subset (\alpha - h, \alpha + h]$ , причем  $f_h(\alpha) = m_f \leq f_h(x_0) \leq M_f = f_h(\alpha + h)$ , а  $m_f = \inf_{x \in \Delta_1} f_h(x) = f_h(\alpha)$ ,  $M_f = \sup_{x \in \Delta_1} f_h(x) = f_h(\alpha + h)$ . Далее считаем, что  $f(x)$  и  $f_h(x)$  возрастают (для убывающих функций действуем аналогично). При этом  $f_h(\alpha) \leq f(\alpha) \leq f(x_0) \leq f_h(\alpha + h) = \text{const}$ , поскольку  $f(x)$  монотонна, а  $f_h(\alpha + h) = \text{const} = f(\alpha + h)$ . Тогда существует такое значение  $x_1 \in \Delta_1$ , что  $f_h(x_1) = f(x_0)$ .

Случай 2) рассматривается аналогично.

В случае 3) справедливы равенства  $f_h(x) = f(x) = \text{const}$  на  $\Delta_3$ . Все случаи рассмотрены, включение (7) доказано.

Докажем, что

$$F(f_h) \subset U_\varepsilon(F(f)), \tag{8}$$

т.е. каждая точка  $(x_0, f_h(x_0))$  дополненного графика функции  $f_h(x)$  содержится в  $h$ -окрестности дополненного графика функции  $f(x)$ .

Пусть  $m_f = \inf_{x \in \Delta_1} \{f(t) : |t - x_0| \leq h\}$ ,  $M_f = \sup_{x \in \Delta_1} \{f(t) : |t - x_0| \leq h\}$ . Тогда  $m_f \leq f_h(x_0) \leq M_f$ , причем существуют значения  $x_1, x_2$  такие, что  $m_f = f(x_1)$ ,  $M_f = f(x_2)$  и точки  $(x_1, m_f)$ ,  $(x_2, M_f)$  принадлежат  $F(f)$ .

Так как  $F(f)$  линейно связное, то существует непрерывная кривая, которая соединяет эти точки дополненного графика, и существует  $\tilde{x}$  из  $[x_0 - h, x_0 + h]$  такое, что  $f(\tilde{x}) = f_h(x_0)$ .

Получаем, что для каждой точки графика  $y = f_h(x)$  найдется точка графика  $y = f(x)$ , отстоящая от нее по горизонтали не более чем на  $h$ . Таким образом, включение (8) доказано.

Из вышесказанного следует, что  $H(f, f_h) \leq h$ . Лемма доказана. □



**Лемма 3.** Пусть  $h > 0$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , а интегрируемая (измеримая)  $2l$ -периодическая функция  $f(x)$  является  $2hr$ -монотонной. Тогда функция Стеклова  $f_{h,r}(x)$  порядка  $r$  для  $f(x)$  с шагом  $h$  является  $2l$ -периодической и выполняется неравенство

$$H(f, f_{h,r}) \leq rh.$$

**Доказательство.** Напомним, что для функции  $f(x)$  функция Стеклова  $f_{h,r}(x)$  порядка  $r$  с шагом  $h$  определяется следующим образом:

$$f_{h,1}(x) = f_h(x), \quad f_{h,2}(x) = (f_{h,1}(x))_h, \dots, \quad f_{h,r}(x) = (f_{h,r-1}(x))_h, \quad r = 2, 3, \dots \quad (9)$$

Воспользуемся методом математической индукции.

1. Пусть  $r = 1$ . Рассмотрим  $f_{h,1}(x) = f_h(x)$  — функцию Стеклова для  $f(x)$  порядка 1 с шагом  $h > 0$ , т.е.  $f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$ . По лемме 2 получим:

- 1)  $f_h(x)$  —  $2l$ -периодическая, как интеграл от  $2l$ -периодической функции  $f(x)$ ;
- 2)  $H(f, f_h) \leq h$ .

2. Пусть  $r = 2$ . Рассмотрим  $f_{h,2}(x) = (f_{h,1}(x))_h$ ,  $f_{h,2}(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f_{h,1}(t) dt$ . Требуется доказать:

- 1)  $f_{h,2}(x)$  —  $2l$ -периодическая;
- 2)  $H(f, f_h) \leq 2h$ .

Докажем 1). Повторяя рассуждения из леммы 2, получим, что  $f_{h,2}(x)$  —  $2l$ -периодическая, так как  $f_{h,1}(x) = f_{h,1}(x + 2l)$  по свойству интеграла от периодической функции.

Докажем 2). Для начала докажем, что  $H(f_{h,1}, f_{h,2}) \leq h$ .

Справедливо включение

$$F(f_{h,2}) \subset U_h(F(f_{h,1})). \quad (10)$$

Действительно, для любой точки  $A(x_0, f_{h,2}(x_0))$  существует точка  $B(x_1, f_{h,1}(x_1))$  такая, что  $\rho(A, B) \leq h$ . Если  $f_{h,2}(x) = \text{const}$  на  $[x_0 - h, x_0 + h]$ , то включение (10) очевидно, так как  $f_{h,2}(x) = f_{h,1}(x) = \text{const}$  при  $|x_1 - x_0| \leq h$  (из определения функции Стеклова). Если  $f_{h,2}(x) \neq \text{const}$  на  $[x_0 - h, x_0 + h]$ , то она монотонна на данном отрезке и по лемме 2  $f_{h,1}(x_0 - h) \leq f_{h,2}(x_0) \leq f_{h,1}(x_0 + h)$ . Таким образом, существует точка  $x_1 \in [x_0 - h, x_0 + h]$  такая, что  $f_{h,2}(x_0) = f_{h,1}(x_1)$ . Следовательно, включение (10) доказано.

Теперь докажем справедливость включения

$$F(f_{h,1}) \subset U_h(F(f_{h,2})). \quad (11)$$

Если  $f_{h,1}(x)$  постоянна на  $[x_0 - 2h, x_0 + 2h]$  для любой точки  $\tilde{A}(x_0, f_{h,1}(x_0))$ , то на  $[x_0 - h, x_0 + h]$  функция  $f_{h,2}(x)$  постоянна и  $f_{h,2}(x) = f_{h,1}(x) = \text{const}$ , т.е.  $|x - x_0| \leq h$ .

Если для любой точки  $\tilde{A}(x_0, f_{h,1}(x_0))$  функция  $f_{h,1}(x)$  монотонна на  $[x_0 - 2h, x_0 + 2h]$ , то функция  $f_{h,2}(x)$  также монотонна на  $[x_0 - h, x_0 + h]$  и существует точка  $x_1$  из  $[x_0 - h, x_0 + h]$  такая, что при  $f_{h,2}(x_0 - h) \leq f_{h,1}(x_0) \leq f_{h,2}(x_0 + h)$  и  $f_{h,1}(x_0) = f_{h,2}(x_1)$ . Включение (11) верно.

Значит,  $H(f_{h,1}, f_{h,2}) \leq h$ . Тогда  $H(f, f_{h,2}) \leq H(f, f_h) + H(f_{h,1}, f_{h,2}) \leq h + h \leq 2h$ , т.е. 2) доказано.

3. Далее по индукции ( $r \in \mathbb{N}$ ) предположим, что  $f_{h,r-1}(x)$  —  $2l$ -периодическая и  $H(f, f_{h,r-1}) \leq (r - 1) \cdot h$ .

Докажем, что  $f_{h,r}(x) = (f_{h,r-1}(x))_h$  —  $2l$ -периодическая и  $H(f, f_{h,r}) \leq rh$ .

Повторяя рассуждения п. 2, заменив  $f_{h,1}(x)$  на  $f_{h,r-1}(x)$  и  $f_{h,2}(x)$  на  $f_{h,r}(x)$ , придем к утверждению леммы.  $\square$





**Лемма 4.** Пусть  $h > 0$ ,  $r \in \mathbb{N}$  и  $f(x)$  — ограниченная интегрируемая (измеримая)  $2l$ -периодическая функция. Тогда почти всюду

$$\left| f_{h,r}^{(r)}(x) \right| \leq \frac{\omega(f; 2h)}{2h^r}.$$

Кроме того, если  $\text{Var } f < \infty$ , то справедливо неравенство

$$\text{Var } f_{h,r}^{(r)} \leq \frac{\text{Var } f}{h^r}.$$

**Доказательство.** Пусть  $F(x)$  — первообразная функции  $f(x)$ . Напомним, что симметрической разностью для функции  $g(x)$  называется величина

$$\Delta_\delta^1(g) = g\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - g\left(x - \frac{\delta}{2}\right), \quad \delta > 0.$$

Тогда симметрическая разность для  $F(x)$  имеет вид

$$\Delta_{2h}^1(F(x)) = F(x + h) - F(x - h).$$

Обозначим  $f_{h,1}(x) = \frac{1}{2h} \Delta_{2h}^1(F)$ .

По индукции симметрическая разность порядка  $k$  для функции  $g(x)$  задается формулой  $\Delta_\delta^k(g) = \Delta_\delta^1(\Delta_\delta^{k-1}(g))$ ,  $k = 2, 3, \dots$ . Тогда в силу определений функции Стеклова и симметрической разности порядка  $r$  получим

$$f_{h,r}(x) = \frac{\Delta_{2h}^r(F_r(x))}{(2h)^r}, \tag{12}$$

где  $F_r(x)$  —  $r$ -я последовательная первообразная функции  $f(x)$ .

Дифференцируя равенство (12)  $r$  раз, для почти всех  $x$  будем иметь

$$f_{h,r}^{(r)}(x) = \frac{\Delta_{2h}^r(f(x))}{(2h)^r}.$$

Для тех же  $x$  докажем по индукции справедливость неравенства

$$|\Delta_{2h}^r f(x)| \leq 2^{r-1} \omega(f; 2h).$$

В условиях леммы справедлива цепочка соотношений

$$\begin{aligned} \Delta_{2h}^1(f(x)) &= |f(x + h) - f(x - h)| \leq \omega(f; 2h), \\ \Delta_{2h}^2(f(x)) &\leq |f(x + 2h) - f(x) - f(x) + f(x - 2h)| \leq \\ &\leq |f(x + 2h) - f(x)| + |f(x) - f(x - 2h)| \leq 2\omega(f; 2h), \\ &\dots \\ \Delta_{2h}^r(f(x)) &\leq 2^{r-1} \omega(f; 2h). \end{aligned}$$

Тогда, используя (12), запишем

$$\left| f_{h,r}^{(r)}(x) \right| = \frac{|\Delta_{2h}^r(f(x))|}{(2h)^r} \leq \frac{2^{r-1}}{(2h)^r} \omega(f; 2h) = \frac{\omega(f; 2h)}{2h^r}.$$

Рассуждения, аналогичные проведенным выше, дают неравенства

$$\text{Var } \Delta_{2h}^1(f(x)) \leq 2 \text{Var } f, \dots, \text{Var } \Delta_{2h}^r f(x) \leq 2^r \text{Var } f.$$

Тогда

$$\text{Var } f_{h,r}^{(r)} = \frac{1}{(2h)^r} \text{Var } \Delta_{2h}^r(f(x)) \leq \frac{1}{(2h)^r} 2^r \text{Var } f = \frac{\text{Var } f}{h^r}$$

и лемма доказана. □



### 3. Доказательство основных результатов

Для формулировки и доказательства основных результатов понадобится стандартная норма в  $L_\infty(X)$

$$\|\varphi\|_\infty = \text{ess sup } |\varphi(x)| = \inf \{K : |\varphi(x)| \leq K \text{ для п.в. } x \in X\}.$$

**Теорема 1.** Пусть  $0 < h \leq \frac{\pi}{2r}$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $q = \left[\frac{\pi}{2hr}\right]$  ( $> \frac{\pi}{4hr}$ ) и  $f(x)$  — ограниченная  $2\pi$ -периодическая функция. Тогда существует такой  $2\pi$ -периодический сплайн  $\varphi(x)$  степени  $r$ , что

$$\|\varphi^{(r)}\|_\infty \leq \frac{1}{2h^r} \omega\left(f; \frac{3\pi}{q}\right) \leq \frac{6r}{h^r} \omega(f; h). \quad (13)$$

При этом верны оценки

$$\begin{aligned} H(f, \varphi) &\leq \frac{3\pi}{2q} + rh \leq 7rh, \\ HE_{n-1}^T(f) &\leq E_{n-1}^T(\varphi) + \frac{3\pi}{2q} + rh \leq E_{n-1}^T(\varphi) + 7rh, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $\varphi^{(r)}(x)$  — производная порядка  $r$ , которая в условиях теоремы существует всюду, за исключением конечного числа точек, на любом конечном промежутке.

**Доказательство.** По лемме 1 существует  $2\pi$ -периодическая кусочно-постоянная функция  $g(x)$ , которая является  $\frac{\pi}{q}$ -монотонной (а значит, и  $2hr$ -монотонной). Как было доказано ранее,

$$H(f, g) \leq \frac{3\pi}{2q}. \quad (15)$$

Пусть  $\varphi(x)$  — функция Стеклова порядка  $r$  для  $g(x)$  с шагом  $h$ , т.е.  $\varphi(x) = g_{r,h}(x)$  из леммы 2 (см. (6)). Тогда по лемме 4 имеем

$$|\varphi^{(r)}(x)| \leq \frac{\omega(g; 2h)}{2h^r}$$

(неравенство (9)).

Согласно неравенству (3) запишем

$$\|\varphi^{(r)}\|_\infty \leq \frac{1}{2h^r} \omega(g; 2h) \leq \frac{1}{2h^r} \omega\left(g; \frac{\pi}{q}\right) \leq \frac{1}{2h^r} \omega\left(f; \frac{3\pi}{q}\right).$$

В силу условий теоремы 1 верны соотношения  $q \leq \pi/2hr$  и  $6hr \leq 3\pi/q$ . Значит,

$$\|\varphi^{(r)}\|_\infty \leq \frac{1}{2h^r} \omega\left(f; \frac{3\pi}{q}\right) \leq \frac{6r}{h^r} \omega(f; h).$$

По свойству хаусдорфова расстояния из леммы 1 (неравенство (2)) с учетом неравенства  $H(g, g_{h,r}) \leq rh$  из леммы 3 получим, что

$$H(f, \varphi) \leq \frac{3\pi}{2q} + rh \leq 7rh.$$

В последней оценке величина  $3\pi/(2q)$  меньше  $6hr$ , так как по условию теоремы  $q > \pi/(4hr)$ .

Наконец, докажем неравенство (14). Имеем

$$HE_{n-1}^T(f) \leq E_{n-1}^T(\varphi) + H(f, g) + H(g, \varphi) \leq E_{n-1}^T(\varphi) + \frac{3\pi}{2q} + rh \leq E_{n-1}^T(\varphi) + 7rh.$$

Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 2.** Пусть  $f(x)$  — ограниченная не обязательно однозначная  $2\pi$ -периодическая функция. Тогда при всех натуральных  $n \geq 2$  выполняется оценка

$$HE_{n-1}^T(f) \leq \frac{9eC}{n} \ln \left( e + n\omega \left( f; \frac{\pi}{n} \right) \right),$$

где  $C = \sqrt[r]{\mathcal{K}_r}$ ,  $r = \lceil \ln(e + n\omega(f; \pi/n)) \rceil \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{K}_r$  — постоянная Фавара,  $C \leq \pi/2$ .

**Доказательство.** Положим

$$h = \frac{eC}{n}, \quad r = \lceil \ln \left( e + n\omega \left( f; \frac{\pi}{n} \right) \right) \rceil. \quad (16)$$

Рассмотрим случай, когда  $hr \leq \pi/6$ . Пусть  $q = \lfloor \frac{\pi}{2hr} \rfloor$ , имеем  $q \geq 3$ . По теореме 1 для функции  $\varphi$  справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \|\varphi^{(r)}\|_\infty &\leq \frac{1}{2h^r} \omega \left( f; \frac{3\pi}{q} \right) \leq \frac{6r}{h^r} \omega(f; h), \\ H(f, \varphi) &\leq 7rh, \quad HE_{n-1}^T(f) \leq E_{n-1}^T(\varphi) + 7rh, \end{aligned}$$

где  $0 < h \leq \frac{\pi}{2r}$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $q = \lfloor \frac{\pi}{2hr} \rfloor$  ( $> \frac{\pi}{4hr}$ ).

Используя (13), из неравенства Джексона (1) получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}^T(\varphi) &\leq \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \|\varphi^{(r)}\|_\infty \leq \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \cdot \frac{1}{2h^r} \cdot \omega \left( f; \frac{3\pi}{q} \right) \leq \frac{\mathcal{K}_r}{2(hn)^r} \cdot \omega \left( f; \frac{3\pi}{q} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2e^r} \cdot \omega \left( f; \frac{3\pi}{q} \right) \leq \frac{e}{2n} \cdot \frac{\omega \left( f; \frac{3\pi}{q} \right)}{\omega \left( f; \frac{\pi}{n} \right)}. \end{aligned}$$

Поскольку  $1 = \frac{eC}{hn}$ , или  $(\frac{1}{e})^r = (\frac{C}{hn})^r$ , из (16) получаем

$$\begin{aligned} e^r \cdot e &\geq e + n \cdot \omega \left( f; \frac{\pi}{n} \right), \\ \frac{1}{e^r} &\leq \frac{e}{e + n \cdot \omega \left( f; \frac{\pi}{n} \right)} \leq \frac{e}{n \cdot \omega \left( f; \frac{\pi}{n} \right)}. \end{aligned}$$

С учетом того, что  $q \leq \frac{\pi}{2hr} < q + 1$  и  $q \geq 3$ , имеем

$$\frac{1}{q} < \frac{1}{q} (q + 1) \frac{2hr}{\pi} = \left( 1 + \frac{1}{q} \right) \frac{2hr}{\pi} \leq \frac{8hr}{3\pi}, \quad (17)$$

$$\omega \left( f; \frac{3\pi}{q} \right) \leq \left( \frac{3n}{q} + 1 \right) \omega \left( f; \frac{\pi}{n} \right) \leq \left( \frac{8nhr}{\pi} + 1 \right) \omega \left( f; \frac{\pi}{n} \right). \quad (18)$$

Пользуясь соотношениями  $1 = \frac{eC}{hn}$ ,  $C > 1$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , из (16)–(18) получим

$$E_{n-1}^T(\varphi) \leq \frac{e}{2n} \cdot \frac{\omega \left( f; \frac{3\pi}{q} \right)}{\omega \left( f; \frac{\pi}{n} \right)} \leq \frac{e}{2n} \left( \frac{8nhr}{\pi} + 1 \right) =$$



$$= 4hr \cdot \left( \frac{e}{\pi} + \frac{e}{8hrn} \right) = 4hr \left( \frac{e}{\pi} + \frac{1}{8Cr} \right) < 4hr.$$

Здесь учли, что  $\frac{e}{\pi} + \frac{1}{8Cr} < 1$ .

Поэтому из (14) имеем

$$HE_{n-1}^T(f) \leq E_{n-1}^T(\varphi) + \frac{3\pi}{2q} + rh \leq 4hr + \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{8hr}{3\pi} + hr \leq 4hr + 4hr + hr = 9hr,$$

что совпадает с доказываемой оценкой в случае  $hr \leq \frac{\pi}{6}$ .

Рассмотрим случай  $hr > \frac{\pi}{6}$ . Поскольку  $HE_1^T(f) \leq \pi$ , то  $HE_{n-1}^T(f) \leq HE_1^T(f) \leq \pi < 6hr$ . Значит, неравенство (15) также справедливо и при  $hr > \frac{\pi}{6}$ .

Теорема доказана.  $\square$

### Список литературы

1. Jackson D. *Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung*. Inaugural-Dissertation. Göttingen, 1911. 99 S.
2. Даугавет И. К. Введение в теорию приближений функций. Ленинград : ЛГУ, 1977. 185 с.
3. Сендов Б. Х. Апроксимиране на функции с алгебрични полиноми по отношение на една метрика от хаусдорфовки тип // Годишник на Софийския университет. Физико-математически факултет. София : Наука и изкуство, 1962. Т. 55. С. 1–39.
4. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. О приближениях функций в хаусдорфовой метрике посредством кусочно монотонных (в частности, рациональных) функций // Математический сборник. 1976. Т. 101, № 4. С. 508–541.
5. Веселинов В. М. Аппроксимирование функций при помощи тригонометрических полиномов относительно одной метрики хаусдорфовского типа // Mathematica. 1967. Т. 9, № 1. С. 185–199.
6. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. О зависимости свойств функций от скорости их приближения полиномами // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1978. Т. 42, № 2. С. 270–304.
7. Сендов Б. Х., Попов В. А. Точная асимптотика наилучшего приближения алгебраическими и тригонометрическими полиномами в метрике Хаусдорфа // Математический сборник. 1972. Т. 89, № 1. С. 138–147.
8. Sendov B. Kh., Popov V. A. On a generalization of Jackson's theorem for best approximation // Journal of Approximation Theory. 1973. Vol. 9, iss. 2. P. 102–111. [https://doi.org/10.1016/0021-9045\(73\)90098-1](https://doi.org/10.1016/0021-9045(73)90098-1)
9. Боянов Т. П. Точная асимптотика наилучшего хаусдорфова приближения классов функций с заданным модулем непрерывности // Сердика Българско математическо списание. 1980. Т. 6. С. 84–97.

### References

1. Jackson D. *Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung*. Inaugural-Dissertation. Göttingen, 1911. 99 p. (in German).
2. Daugavet I. K. *Vvedenie v teoriyu priblizheniy funktsiy* [Introduction to the Theory of Approximation of Functions]. Leningrad, Leningrad State University Publ., 1977. 184 p. (in Russian).
3. Sendov B. Approximation of functions with algebraic completeness with respect to a Hausdorff type metric. *Annuaire de l'Université de Sofia. Faculté des sciences physiques et mathématiques*. Sofia, Nauka i izkustvo, 1962, vol. 55, pp. 1–39 (in Bulgarian).



4. Dolzhenko E. P., Sevast'yanov E. A. Approximations of functions in the Hausdorff metric by piecewise monotonic (in particular, rational) functions. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1976, vol. 30, iss. 4, pp. 449–477. <https://doi.org/10.1070/SM1976v030n04ABEH002283>
5. Veselinov V. M. Approximation of functions by means of trigonometric polynomials with respect to a metric of Hausdorff type. *Mathematica (Cluj)*, 1967, vol. 9, iss. 1, pp. 185–199 (in Russian).
6. Dolzhenko E. P., Sevast'yanov E. A. On the dependence of properties of functions on their degree of approximation by polynomials. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1978, vol. 12, iss. 2, pp. 255–288. <https://doi.org/10.1070/IM1978v012n02ABEH001853>
7. Sendov B. Kh., Popov V. A. The exact asymptotic behavior of the best approximation by algebraic and trigonometric polynomials in the Hausdorff metric. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1972, vol. 18, iss. 1, pp. 139–149. <https://doi.org/10.1070/SM1972v018n01ABEH001621>
8. Sendov B. Kh., Popov V. A. On a generalization of Jackson's theorem for best approximation. *Journal of Approximation Theory*, 1973, vol. 9, iss. 2, pp. 102–111. [https://doi.org/10.1016/0021-9045\(73\)90098-1](https://doi.org/10.1016/0021-9045(73)90098-1)
9. Boyanov T. P. The exact asymptotics of the best Hausdorff approximation of classes of functions with a given modulus of continuity. *Serdika Bulgarian Mathematical Journal*, 1980, vol. 6, pp. 84–97 (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 01.04.2022

Принята к публикации / Accepted 16.11.2022

Опубликована / Published 31.05.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 183–194  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 183–194  
[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru) <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-183-194>, EDN: VJGXBХ

Научная статья

УДК 517.958,517.956.32

## Единственность решения начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной и формула для решения

В. С. Рылов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

**Рылов Виктор Сергеевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и математической экономики, [rykhlovvs@yandex.ru](mailto:rykhlovvs@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0003-1556-7707>, AuthorID: 2936

**Аннотация.** Исследуется начально-граничная задача для неоднородного гиперболического уравнения второго порядка на конечном отрезке с постоянными коэффициентами и смешанной производной. Рассматривается случай закрепленных концов. Предполагается, что корни характеристического уравнения простые и лежат на вещественной оси по разные стороны от начала координат. Определяется классическое решение начально-граничной задачи. Формулируется и доказывается теорема единственности классического решения. Дается формула для решения в виде ряда, членами которого являются контурные интегралы, содержащие исходные данные задачи. Строится соответствующая спектральная задача для квадратичного пучка и формулируется теорема о разложении первой компоненты вектор-функции по производным цепочкам, соответствующим собственным функциям пучка. Эта теорема существенно используется при доказательстве теоремы единственности классического решения поставленной начально-граничной задачи.

**Ключевые слова:** гиперболическое уравнение, второй порядок, постоянные коэффициенты, смешанная производная в уравнении, конечный отрезок, начально-граничная задача, закрепленные концы, классическое решение, единственность решения, формула для решения, разложение первой компоненты вектор-функции в ряд

**Для цитирования:** Рылов В. С. Единственность решения начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной и формула для решения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 183–194. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-183-194>, EDN: VJGXBХ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

## The uniqueness of the solution of an initial boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative and a formula for the solution

V. S. Rykhlov

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Victor S. Rykhlov, rykhlovvs@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1556-7707>, AuthorID: 2936

**Abstract.** An initial boundary value problem for an inhomogeneous second-order hyperbolic equation on a finite segment with constant coefficients and a mixed derivative is investigated. The case of fixed ends is considered. It is assumed that the roots of the characteristic equation are simple and lie on the real axis on different sides of the origin. The classical solution of the initial boundary value problem is determined. The uniqueness theorem of the classical solution is formulated and proved. A formula is given for the solution in the form of a series whose members are contour integrals containing the initial data of the problem. The corresponding spectral problem for a quadratic beam is constructed and a theorem is formulated on the expansion of the first component of a vector-function with respect to the derivative chains corresponding to the eigenfunctions of the beam. This theorem is essentially used in proving the uniqueness theorem for the classical solution of the initial boundary value problem.

**Keywords:** hyperbolic equation, second order, constant coefficients, mixed derivative in the equation, finite segment, initial boundary value problem, fixed ends, classic solution, uniqueness of the solution, formula for the solution, expansion of the first component of the vector-function in a series

**For citation:** Rykhlov V. S. The uniqueness of the solution of an initial boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative and a formula for the solution. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 183–194 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-183-194>, EDN: VJGXBX

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

### Введение

Рассмотрим следующую начально-граничную задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t), \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad (3)$$

где  $(x, t) \in Q = [0, 1] \times [0, +\infty)$ ;  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ , все функции, входящие в (1)–(3), комплекснозначные,  $\varphi, \psi \in L_1[0, 1]$ ,  $f(x, t) \in L_1(Q_T)$ ,  $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$  при любом  $T > 0$ .

Рассматривается случай гиперболического уравнения (1), т. е. выполняется условие

$$p_1^2 - 4p_2 > 0.$$



В этом случае корни  $\omega_1, \omega_2$  характеристического уравнения

$$\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$$

вещественны.

Требуется найти классическое решение этой задачи в области  $Q$  при как можно более слабых условиях на параметры задачи, т. е. на функции  $\varphi, \psi, f$ .

Под *классическим решением* (используются также термины: почти классическое решение, классическое решение почти всюду (п.в.) или — более кратко — решение п.в.) понимается функция  $u(x, t)$  переменных  $(x, t) \in Q$ , которая непрерывна вместе с  $u_x(x, t)$  и  $u_t(x, t)$ , при этом  $u_x(x, t)$  и  $u_t(x, t)$  абсолютно непрерывны по  $x$  и  $t$ , выполняется п.в. в  $Q$  равенство

$$u_{xt}(x, t) = u_{tx}(x, t), \quad (4)$$

удовлетворяющая условиям (2)–(3) и п.в. уравнению (1).

Отметим, что необходимость в условии (4) обусловлена тем, что в случае, когда  $u_{xt}(x, t)$  и  $u_{tx}(x, t)$  не являются непрерывными функциями, это равенство может не выполняться на множестве положительной меры [1].

В случае классического решения задачи (1)–(3) по необходимости должны выполняться следующие условия:

- 1) условия гладкости:  $\varphi(x), \varphi'(x), \psi(x)$  абсолютно непрерывны;
- 2) условия согласования:  $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$ .

Возможны только две принципиально разные ситуации:

$$\omega_1 < 0 < \omega_2, \quad (5)$$

$$0 < \omega_1 < \omega_2. \quad (6)$$

В случае (5) соответствующая спектральная задача является регулярной по Биркгофу [2, с. 66–67], а в случае (6) — нерегулярной. Далее будем рассматривать только случай (5).

Отметим, что конкретный вид краевых условий (2) не принципиален. Могут быть рассмотрены и более общие, но регулярные по Биркгофу однородные краевые условия.

Большой вклад в решение смешанной задачи для уравнения колебаний струны при самых общих предположениях внес А. П. Хромов. Он предложил новый подход для решения такой задачи, изложенный в статьях [3–7]. Этот метод использует идеи А. Н. Крылова [8] об ускорении сходимости тригонометрического ряда, а также идеи Л. Эйлера [9] о расходящихся рядах.

В работах [10–14] указанные выше результаты были распространены на различные обобщения уравнений колебаний струны и различные постановки начально-граничных задач. В указанных ранее работах рассматривался только случай  $p_1 = 0$  (или, что то же самое,  $\omega_1 + \omega_2 = 0$ ). Задача (1)–(3) в случае, когда  $p_1 \neq 0$  (или, что то же самое,  $\omega_2 + \omega_1 \neq 0$ ), насколько нам известно, впервые была рассмотрена в работах [15, 16].

## 1. Спектральная задача, соответствующая начально-граничной задаче, и теорема о разложении первой компоненты

С задачей (1)–(3) тесно связана следующая спектральная задача:

$$L(\lambda)y = 0, \quad (7)$$





порожденная оператор-функцией  $L(\lambda)$ , определяемой дифференциальным выражением с параметром  $\lambda$

$$\ell(y, \lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y \quad (8)$$

и краевыми условиями

$$U_1(y) := y(0) = 0, \quad U_2(y) := y(1) = 0. \quad (9)$$

В качестве фундаментальной системы решений уравнения  $\ell(y, \lambda) = 0$  рассмотрим систему решений

$$y_1(x, \lambda) := e^{\lambda \omega_1 x}, \quad y_2(x, \lambda) := e^{\lambda \omega_2 x}.$$

Тогда характеристический определитель  $L(\lambda)$  [2, с. 26] имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda \omega_1} & e^{\lambda \omega_2} \end{vmatrix} = e^{\lambda \omega_2} - e^{\lambda \omega_1},$$

и его корни, очевидно, есть числа

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i}{\omega_2 - \omega_1}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10)$$

Эти числа, кроме точки  $\lambda_0 = 0$ , являются простыми собственными значениями  $L(\lambda)$ . Число  $\lambda_0 = 0$ , как легко проверить, не является собственным значением.

Обозначим через  $\gamma_k$  окружности  $\{\lambda : |\lambda - \lambda_k| = \delta\}$ , где  $\delta > 0$  и настолько мало, что внутри  $\gamma_k$  находится по одному собственному значению.

Линеаризуем задачу (7) с учетом (8). Положим  $z_1 = y$ ,  $z_2 = \lambda y$ . Получим следующую задачу в пространстве вектор-функций  $Z = (z_1, z_2)^T$ :

$$AZ = \lambda Z, \quad (11)$$

$$BZ(0) + CZ(1) = 0, \quad (12)$$

где

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{p_2} d_x^2 & -\frac{p_1}{p_2} d_x \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad d_x := \frac{d}{dx}.$$

Введем оператор  $\mathcal{L}$  в пространстве вектор-функций

$$\mathcal{L}Z := AZ, \quad D_{\mathcal{L}} = \{Z := (z_1, z_2)^T : z_1'', z_2' \in L_1[0, 1], BZ(0) + CZ(1) = 0\}. \quad (13)$$

Как показано в [17], собственные значения и производные цепочки [2, с. 28]), построенные по собственным функциям оператор-функции  $L(\lambda)$ , совпадают с собственными значениями и собственными вектор-функциями оператора  $\mathcal{L}$ , а следовательно, двукратное разложение по собственным функциям оператор-функции  $L(\lambda)$  есть не что иное, как разложение по собственным вектор-функциям оператора  $\mathcal{L}$ .

Найдем резольвенту  $\mathcal{R}_\lambda = (\mathcal{L} - \lambda \mathcal{E})^{-1}$  оператора  $\mathcal{L}$ . Для этого решим задачу

$$\mathcal{L}Z - \lambda Z = H,$$

где  $H = (h_1, h_2)^T$  или в подробной записи

$$\begin{cases} z_2 - \lambda z_1 = h_1, \\ -\frac{1}{p_2} z_1'' - \frac{p_1}{p_2} z_2' - \lambda z_2 = h_2, \end{cases} \quad (14)$$



$$z_1(0) = z_1(1) = 0.$$

Выразим  $z_2$  из первого уравнения системы (14)

$$z_2 = \lambda z_1 + h_1 \tag{15}$$

и подставим во второе уравнение системы (14). Получим

$$-\frac{1}{p_2} z_1'' - \frac{p_1}{p_2} (\lambda z_1' + h_1') - \lambda (\lambda z_1 + h_1) = h_2$$

или

$$z_1'' + \lambda p_1 z_1' + \lambda^2 p_2 z_1 = h_\lambda,$$

где

$$h_\lambda := -p_1 h_1' - \lambda p_2 h_1 - p_2 h_2. \tag{16}$$

Таким образом, первая компонента вектора  $\mathcal{R}_\lambda H$  является решением следующей краевой задачи:

$$z_1'' + \lambda p_1 z_1' + \lambda^2 p_2 z_1 = h_\lambda, \quad z_1(0) = z_1(1) = 0. \tag{17}$$

Пусть  $R_\lambda$  есть резольвента оператор-функции  $L(\lambda)$ , а  $G(x, \xi, \lambda)$  — ее функция Грина. Тогда из (17) получим представление

$$z_1(x, \lambda) = (R_\lambda h_\lambda)(x) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h_\lambda(\xi) d\xi. \tag{18}$$

А из (15) тогда найдем

$$z_2(x, \lambda) = \lambda z_1(x, \lambda) + h_1(x) = \lambda (R_\lambda h_\lambda)(x) + h_1(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h_\lambda(\xi) d\xi + h_1(x). \tag{19}$$

Из общей теории линейных операторов следует, что двукратное разложение вектор-функции  $H$  в ряд по собственным функциям  $L(\lambda)$  или, что то же самое, разложение по собственным вектор-функциям оператора  $\mathcal{L}$  имеет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \mathcal{R}_\lambda H d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \begin{pmatrix} z_1(x, \lambda) \\ z_2(x, \lambda) \end{pmatrix} d\lambda = \\ & = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \begin{pmatrix} z_1(x, \lambda) \\ \lambda z_1(x, \lambda)(x, \lambda) + h_1(x) \end{pmatrix} d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \begin{pmatrix} z_1(x, \lambda) \\ \lambda z_1(x, \lambda) \end{pmatrix} d\lambda. \end{aligned}$$

Найдем условия на компоненты вектор-функции  $H$ , при которых имеет место формула

$$\begin{aligned} h_1(x) & = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} (\mathcal{R}_\lambda H)_1 d\lambda = \\ & = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} z_1(x, \lambda) d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h_\lambda(\xi) d\xi d\lambda. \end{aligned} \tag{20}$$



Здесь запись  $(\dots)_j$  означает, что рассматривается  $j$ -я компонента вектора, стоящего внутри скобок. Для функции Грина  $G(x, \xi, \lambda)$  имеет место следующее представление:

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)\Delta(\lambda)} \left( e^{\lambda(\omega_1 x + \omega_2(1-\xi))} - e^{\lambda\omega_1(x+1-\xi)} + e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2 x)} - e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-\xi))} \right) - \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} \left( e^{\lambda\omega_1(x-\xi)} \chi(x-\xi) + e^{\lambda\omega_2(x-\xi)} \chi(\xi-x) \right), \quad (21)$$

где  $\chi(x)$  есть функция Хевисайда ( $\chi(x) = 1$ , если  $x \geq 0$ , и  $\chi(x) = 0$ , если  $x < 0$ ).

Формулу (20) можно доказать хорошо известным методом контурного интеграла Пуанкаре – Коши [2, с. 91–98]. При этом существенно используется «хорошая» оценка функции Грина (21) при  $|\rho| \rightarrow \infty$ , которая имеет место в регулярном по Биркгофу случае (5). А именно справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Если  $h'_1, h_2 \in L_p[0, 1]$  ( $p > 1$ ),  $h_1(0) = h_1(1) = 0$ , то справедлива формула (20), где ряд справа сходится абсолютно и равномерно на отрезке  $[0, 1]$ .

## 2. Единственность классического решения начально-граничной задачи

Сформулируем и докажем основной результат данной статьи. Пусть  $R_{1\lambda}$  есть интегральный оператор с ядром  $G_\xi(x, \xi, \lambda)$ .

**Теорема 2.** Если  $u(x, t)$  есть классическое решение задачи (1)–(3),  $f \in L_1(Q_T)$ , и дополнительно выполняется условие  $u_{tt} \in L_1(Q_T)$  при любом  $T > 0$ , то это решение единственно и находится по формуле

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \left( \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot, \tau) d\tau - p_1 e^{\lambda t} R_{1\lambda} \varphi + p_2 e^{\lambda t} \lambda R_\lambda \varphi + p_2 e^{\lambda t} R_\lambda \psi \right) d\lambda, \quad (22)$$

в которой ряд справа сходится абсолютно и равномерно по  $x \in [0, 1]$  при любом фиксированном  $t > 0$ .

**Доказательство.** Запишем задачу (1)–(3) в другом виде. Обозначим

$$v_1 = u, \quad v_2 = \frac{d}{dt} v_1 \left( = \frac{d}{dt} u \right), \quad (23)$$

тогда уравнение (1) запишется в виде системы

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} v_1 = v_2, \\ \frac{d}{dt} v_2 = -\frac{1}{p_2} d_x^2 v_1 - \frac{p_1}{p_2} d_x v_2 + \frac{1}{p_2} f, \end{cases} \quad (24)$$

где, как и раньше,  $d_x := d/dx$ .

Если обозначить

$$V := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{p_2} f \end{pmatrix}$$



и использовать уже введенный ранее оператор  $A$ , то система (24) запишется в виде

$$\frac{d}{dt}V(\cdot, t) = AV(\cdot, t) + F(\cdot, t), \quad (25)$$

где, по предположению теоремы,  $V_t, F \in L_1(Q_T)$ . А с использованием введенного формулой (13) оператора  $\mathcal{L}$  и с учетом формулы (25) задача (1)–(3) запишется в виде

$$\frac{d}{dt}V(\cdot, t) = \mathcal{L}V(\cdot, t) + F(\cdot, t), \quad (26)$$

$$V(x, 0) = \Xi(x), \quad (27)$$

где  $\Xi(x) = (\varphi(x), \psi(x))^T$ . При этом вектор-функция  $V$  удовлетворяет уравнению (26) п.в. в области  $Q$  и всюду на  $[0, 1]$  удовлетворяет равенству (27).

Если  $u(x, t)$  есть классическое решение задачи (1)–(3), то  $V(x, t)$  удовлетворяет условиям теоремы 1 о разложении по собственным вектор-функциям оператора  $\mathcal{L}$  для первой компоненты, т. е. имеет место представление

$$v_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} (\mathcal{R}_\lambda V(\cdot, t))_1 d\lambda, \quad (28)$$

где ряд справа сходится абсолютно и равномерно по переменной  $x \in [0, 1]$  при любом фиксированном  $t > 0$ .

По построению для вектор-функции  $V$  п.в. выполняется соотношение (26). Подействуем оператором  $\mathcal{R}_\lambda$  на обе части этого соотношения. Получим равенство

$$\mathcal{R}_\lambda V_t = \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{L}V) + \mathcal{R}_\lambda F. \quad (29)$$

Обозначим

$$Y(x, t, \lambda) := \mathcal{R}_\lambda V(\cdot, t), \quad (30)$$

и пусть  $\mathcal{G}$  есть функция Грина оператора  $\mathcal{L}$ . Из (30) тогда получим представление

$$Y(x, t, \lambda) = \int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi, \lambda) V(\xi, t) d\xi. \quad (31)$$

Покажем, что

$$\frac{d}{dt}Y(x, t, \lambda) = \int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi, \lambda) V_t(\xi, t) d\xi = \mathcal{R}_\lambda V_t(\cdot, t). \quad (32)$$

Для этого воспользуемся рассуждениями, аналогичными рассуждениям из статьи [10, с. 287–288].

Так как по построению  $V(\xi, t)$  является абсолютно непрерывной функцией по переменной  $t$ , то из (31) получим

$$Y(x, t, \lambda) = \int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi, \lambda) V(\xi, 0) d\xi + \int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi, \lambda) \int_0^t V_t(\xi, \tau) d\tau d\xi. \quad (33)$$

Но как уже отмечалось выше, на основании предположения теоремы и обозначения (23) имеем  $V_t(\xi, \tau) \in L_1(Q_T)$ . Следовательно, и  $\mathcal{G}(x, \xi, \lambda) V_t(\xi, \tau) \in L_1(Q_T)$  по



переменным  $\xi$  и  $\tau$ . Поэтому по теореме Фубини  $\int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi, \lambda) V_t(\xi, \tau) d\xi \in L_1[0, T]$  по  $\tau$ . А значит, (33) можно представить в виде

$$Y(x, t, \lambda) = \int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi, \lambda) V(\xi, 0) d\xi + \int_0^t \int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi, \lambda) V_t(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Отсюда следует, что  $Y(x, t, \lambda)$  абсолютно непрерывна по  $t$  и почти при всех  $t$  выполняется равенство (32).

Далее, преобразуем первое слагаемое справа в (29) следующим образом:

$$\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{L}V) = \mathcal{R}_\lambda((\mathcal{L} - \lambda\mathcal{E} + \lambda\mathcal{E})V) = V + \lambda\mathcal{R}_\lambda V = V + \lambda Y. \quad (34)$$

Из (29), (32), (34) тогда получим, что при фиксированных  $x$  и  $\lambda$  вектор-функция  $Y(x, t, \lambda)$  является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} Y(x, t, \lambda) - \lambda Y(x, t, \lambda) = V(x, t) + \mathcal{R}_\lambda F(\cdot, t). \quad (35)$$

И, кроме того, на основании (27)

$$Y(x, 0, \lambda) = \mathcal{R}_\lambda V(\cdot, 0) = \mathcal{R}_\lambda \Xi. \quad (36)$$

Таким образом,  $Y(x, t, \lambda)$  при любых фиксированных  $x$  и  $\lambda$  является решением задачи Коши (35)–(36).

Без особого труда можно установить, что общее решение уравнения (35) есть

$$Y_{\text{о.н.}}(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} C + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} (V(x, \tau) + \mathcal{R}_\lambda F(\cdot, \tau)) d\tau, \quad (37)$$

где  $C = (C_1, C_2)^T$  есть вектор, не зависящий от переменной  $t$ , т. е.  $C_j = C_j(x, \lambda)$ ,  $j = 1, 2$ .

Удовлетворим решение (37) начальному условию (36)

$$Y_{\text{о.н.}}(x, 0, \lambda) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \mathcal{R}_\lambda \Xi.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$C_1(x, \lambda) = (\mathcal{R}_\lambda \Xi)_1, \quad C_2(x, \lambda) = (\mathcal{R}_\lambda \Xi)_2. \quad (38)$$

Используя формулы (37)–(38), получим следующее представление для решения задачи Коши (35)–(36):

$$Y(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} (\mathcal{R}_\lambda \Xi)_1 \\ e^{\lambda t} (\mathcal{R}_\lambda \Xi)_2 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} (V(x, \tau) + \mathcal{R}_\lambda F(\cdot, \tau)) d\tau, \quad (39)$$

причем это решение единственное.

Нас интересует только первая компонента равенства (39) (см. формулу (28)), т. е. если  $Y(x, t, \lambda) = (y_1(x, t, \lambda), y_2(x, t, \lambda))^T$ , то из (39) получим с учетом (30)

$$y_1(x, t, \lambda) = (\mathcal{R}_\lambda V(\cdot, t))_1 = e^{\lambda t} (\mathcal{R}_\lambda \Xi)_1 + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} (v_1(x, \tau) + (\mathcal{R}_\lambda F(\cdot, \tau))_1) d\tau. \quad (40)$$



Учитывая, что  $u(x, t) = v_1(x, t)$ , из формул (28) и (40) получим

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} e^{\lambda t} (\mathcal{R}_\lambda \Xi)_1 d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \left( \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} (v_1(x, \tau) + (\mathcal{R}_\lambda F(\cdot, \tau))_1) d\tau \right) d\lambda.$$

А так как  $\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} v_1(x, \tau) d\tau$  есть целая аналитическая функция по  $\lambda$ , то все интегралы по контурам  $\gamma_k$  от нее равны нулю. В результате получим

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} e^{\lambda t} (\mathcal{R}_\lambda \Xi)_1 d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \left( \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} (\mathcal{R}_\lambda F(\cdot, \tau))_1 d\tau \right) d\lambda. \quad (41)$$

Запишем эту формулу в другом, более удобном для применения виде, используя представление, которое следует из (18), (19) и (16):

$$\mathcal{R}_\lambda H = \mathcal{R}_\lambda \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\lambda(-p_1 h'_1 - \lambda p_2 h_1 - p_2 h_2) \\ \lambda R_\lambda(-p_1 h'_1 - \lambda p_2 h_1 - p_2 h_2) + h_1 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

С учетом того, что  $\Xi = (\varphi, \psi)^T$ , из (42) найдем

$$(\mathcal{R}_\lambda \Xi)_1 = R_\lambda(-p_1 \varphi' - \lambda p_2 \varphi - p_2 \psi). \quad (43)$$

А с учетом того, что  $F = \left(0, \frac{1}{p_2} f\right)^T$ , из (42) найдем

$$(\mathcal{R}_\lambda F)_1 = R_\lambda(-f(\cdot, \tau)). \quad (44)$$

Тогда из (41), (43), (44) получим

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} e^{\lambda t} R_\lambda(p_1 \varphi' + \lambda p_2 \varphi + p_2 \psi) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot, \tau) d\tau d\lambda. \quad (45)$$

Имеет место равенство

$$R_\lambda \varphi' = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \varphi'(\xi) d\xi = G(x, 1, \lambda) \varphi(1) - G(x, 0, \lambda) \varphi(0) - \int_0^1 G_\xi(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi = - \int_0^1 G_\xi(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi = -R_{1\lambda} \varphi, \quad (46)$$

так как

$$G(x, 1, \lambda) = G(x, 0, \lambda) = 0$$

ввиду того, что функция Грина  $G(x, t, \lambda)$  по  $\xi$  удовлетворяет сопряженным краевым условиям к условиям (9) (см. [2, с. 20–21]).



Учитывая (46) в (45), получим в результате формулу (22) из формулировки доказываемой теоремы, причем ряды справа в этой формуле сходятся абсолютно и равномерно по  $x \in [0, 1]$  при любом фиксированном  $t > 0$ .

Тем самым теорема 2 полностью доказана.  $\square$

### Список литературы

1. Толстов Г. П. О второй смешанной производной // Математический сборник. 1949. Т. 24 (66), № 1. С. 27–51.
2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. Москва : Наука, 1969. 528 с.
3. Хромов А. П. Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56, № 2. С. 239–251. <https://doi.org/10.7868/S0044466916020149>
4. Хромов А. П. О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 280–288. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288>
5. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии // Современные методы теории краевых задач : материалы междунар. конф. : Воронежская весенняя математическая школа «Понрягинские чтения – ХХХ». Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2019. С. 291–300. EDN: TXWNBV
6. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20-й междунар. Саратовской зимней школы. Саратов : Научная книга, 2020. С. 433–439. EDN: IFLQKG
7. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы (Саратов, 31 января–4 февраля 2022 г.). Саратов : Саратовский университет [Издание], 2022. Вып. 21. С. 319–324. EDN: JPPSUX
8. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1950. 368 с.
9. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1949. 580 с.
10. Хромов А. П., Корнев В. В. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59, № 2. С. 286–300. <https://doi.org/10.1134/S0044466919020091>
11. Курдюмов В. П., Хромов А. П., Халова В. А. Смешанная задача для однородного волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью с суммируемым потенциалом // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 4. С. 444–456. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456>
12. Хромов А. П., Корнев В. В. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. С. 215–238. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238>
13. Ломов И. С. Эффективное применение метода Фурье для построения решения смешанной задачи для телеграфного уравнения // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2021. № 4. С. 37–42. EDN: IUPUAQ
14. Ломов И. С. Эффективное применение метода Фурье к решению смешанной задачи для телеграфного уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы (Саратов, 31 января–4 февраля 2022 г.). Саратов : Саратовский университет [Издание], 2022. Вып. 21. С. 178–180. EDN: TZKVJG



15. Рылов В. С. Метод расходящихся рядов решения смешанной задачи для гиперболического уравнения // Сборник материалов международной конференции «XXXII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (КРОМШ-2021). Симферополь : Полипринт, 2021. С. 22.
16. Рылов В. С. Решение начально-граничной задачи для уравнения гиперболического типа со смешанной производной // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы (Саратов, 31 января – 4 февраля 2022 г.). Саратов : Саратовский университет [Издание], 2022. Вып. 21. С. 252–255. EDN: [ICBZND](#)
17. Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Труды семинара имени И. Г. Петровского. Москва : Изд-во Московского ун-та, 1983. № 9. С. 190–229.

### References

1. Tolstov G. P. On the mixed second derivative. *Matematicheskii Sbornik. Novaya Seriya*, 1949, vol. 24 (66), iss. 1, pp. 27–51 (in Russian).
2. Naimark M. A. *Linear Differential Operators*. New York, Ungar Publ. Co. Part I, 1967. 144 p.; Part 2, 1968. 352 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1969. 528 p.).
3. Khromov A. P. Behavior of the formal solution to a mixed problem for the wave equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, iss. 2, pp. 243–255. <https://doi.org/10.1134/S0965542516020135>
4. Khromov A. P. On classic solution of the problem for a homogeneous wave equation with fixed end-points and zero initial velocity. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, vol. 19, iss. 3, pp. 280–288 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288>
5. Khromov A. P. Divergent series and functional equations related to geometric progression analogues. *Sovremennyye metody teorii kraevykh zadach: materialy mezhdun. konf. : Voronezhskaya vesenniyaya matematicheskaya shkola "Pontryaginskiye chteniya – XXX"* [Modern methods of the Theory of boundary value problems: Materials of the International conference Voronezh Spring Mathematical School "Pontryagin Readings – XXX"]. Voronezh, Voronezh State University Publ., 2019, pp. 291–300 (in Russian). EDN: [TXWNB](#)
6. Khromov A. P. Divergent series and Fourier method for wave equation. *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications: Materials of the 20th International Saratov Winter School*. Saratov, Nauchnaya kniga, 2020, pp. 433–439 (in Russian). EDN: [IFLQGK](#)
7. Khromov A. P. Divergent series and generalized mixed problem for wave equation. *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications: Materials of the 21st International Saratov Winter School (Saratov, January 31 – February 4, 2022)*. Saratov, Saratov State University Publ., 2022, iss. 21, pp. 319–324 (in Russian). EDN: [JPPSUX](#)
8. Krylov A. N. *O nekotorykh differentsial'nykh uravneniyakh matematicheskoy fiziki, imeyushchikh prilozheniya v tekhnicheskikh voprosakh* [On Some Differential Equations of Mathematical Physics that Have Applications to Technical Problems]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1950. 368 p. (in Russian).
9. Euler L. *Differentsial'noye ischislenie* [Differential Calculus]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1949. 580 p. (in Russian).
10. Khromov A. P., Kornev V. V. Classical and generalized solutions of a mixed problem for a nonhomogeneous wave equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, vol. 59, iss. 2, pp. 275–289. <https://doi.org/10.1134/S096554251902009X>
11. Kurdyumov V. P., Khromov A. P., Khalova V. A. Mixed problem for a homogeneous wave equation with a nonzero initial velocity and a summable potential. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 4, pp. 444–456 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456>





12. Khromov A. P., Kornev V. V. Divergent series in the Fourier method for the wave equation. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, iss. 4, pp. 215–238 (in Russian). <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238>
13. Lomov I. S. Effective application of the Fourier technique for constructing a solution to a mixed problem for a telegraph equation. *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, 2021, vol. 45, iss. 4, pp. 168–173. <https://doi.org/10.3103/S0278641921040038>, EDN: IUPUAQ
14. Lomov I. S. Effectiv application of the Fourier method to solving a mixed problem for the telegraph equation. *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications: Materials of the 21st International Saratov Winter School (Saratov, January 31 – February 4, 2022)*. Saratov, Saratov State University Publ., 2022, iss. 21, pp. 178–180 (in Russian). EDN: TZKVJG
15. Rykhlov V. S. Divergent series method for solving a mixed problem for a hyperbolic equation. *Sbornik materialov mezhdunarodnoj konferentsii "XXXII Krymskaya Osenniyaya Matematicheskaya Shkola-simpozium po spektral'nyim i evolyucionnym zadacham" (KROMSH-2021)* [Collection of Materials of the International Conference "XXXII Crimean Autumn Mathematical School-Symposium on Spectral and Evolutionary Problems" (KROMSH-2021)]. Simferopol, Polyprint, 2021, pp. 22 (in Russian).
16. Rykhlov V. S. The solution of the initial boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative. *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications: Materials of the 21st International Saratov Winter School (Saratov, January 31 – February 4, 2022)*. Saratov, Saratov State University Publ., 2022, iss. 21, pp. 252–255 (in Russian). EDN: ICBZND
17. Shkalikov A. A. Boundary problems for ordinary differential equations with parameter in the boundary conditions. *Journal of Soviet Mathematics*, 1986, vol. 33, iss. 6, pp. 1311–1342. <https://doi.org/10.1007/BF01084754>

Поступила в редакцию / Received 15.04.2022

Принята к публикации / Accepted 01.09.2022

Опубликована / Published 31.05.2023



## МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 195–206  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 195–206

[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru)

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-195-206>

EDN: ZXRJRF

Научная статья  
УДК 539.31

### Сравнение аналитического и численного решений задачи о цилиндрической оболочке с круговым отверстием под действием различных нагрузок

С. В. Каштанова<sup>1✉</sup>, А. В. Ржонницкий<sup>2</sup>

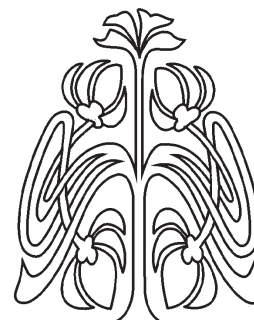
<sup>1</sup>Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Россия, 199178, г. Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., д. 61

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), Россия, 190013, г. Санкт-Петербург, Московский пр., д. 26

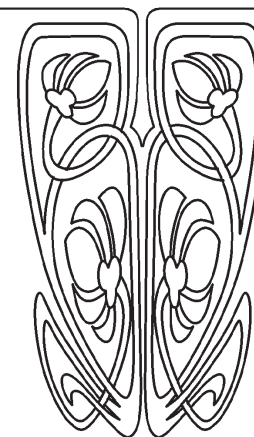
**Каштанова Станислава Викторовна**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, [kastasya@yandex.ru](mailto:kastasya@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0003-1090-0320>, AuthorID: 934447

**Ржонницкий Алексей Викторович**, старший преподаватель кафедры математики, [rzhonsnitskiy@yandex.ru](mailto:rzhonsnitskiy@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0002-5825-5036>

**Аннотация.** Представлены результаты вычислений поля напряжений цилиндрической оболочки, ослабленной круговым отверстием и находящейся под воздействием различных нагрузок: одноосного растяжения, внутреннего давления и кручения. Шесть упрощенных уравнений теории цилиндрических оболочек с большим показателем изменчивости (совпадающие с уравнениями теории пологих оболочек) сводятся к уравнению математической физики относительно потенциала напряжений, которое решается методом Фурье. Основным препятствием к получению ответа является необходимость поиска коэффициентов в разложении решения в сумму базисных функций, при которых это решение удовлетворяет граничным условиям. Также это уравнение зависит от параметра  $\beta$ , ответственного за отношение между геометрическими характеристиками оболочки и отверстия. С механической точки зрения для малых и средних отверстий этот параметр имеет ограничения  $\beta \leq 4$ , так как при больших значениях



Научный  
отдел





отверстие считается большим, и для описания напряженно-деформированного состояния применяются общие уравнения теории цилиндрических оболочек. При этом детальное изучение классических работ привело к пониманию того, что ни один из до сих пор предложенных методов поиска коэффициентов нельзя считать окончательно удачным, а результаты, полученные этими методами, разнятся. Среди разнообразия работ советских и западных ученых 60–70-х гг. XX в. выделяются численные результаты инженера Ван Дайка, которые он получил методом коллокаций. В отличие от своих современников, раскладывающих решение в ряд по малому параметру  $\beta$  и оттого получающих только результаты, близкие к плоскому случаю, Ван Дайк впервые опубликовал численные результаты для всего рабочего диапазона параметра  $\beta$  в рамках рассмотрения малых и средних отверстий. В данной статье предложен новый подход, основанный на разложении базисных функций в ряд Фурье. Впервые удалось составить бесконечную систему линейно независимых уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов. Существенно, что предложенный метод, в отличие от известного метода малого параметра, не имеет математических ограничений и может применяться не только для значений параметра  $\beta$ , близких к нулю, а для любых значений. Ограничения вплоть до  $\beta = 4$  наложены механической моделью. Составлены системы для нахождения неизвестных коэффициентов при базисных функциях для трех типов нагрузок, проведено сравнение результатов, полученных авторами, с результатами, полученными численным методом. При этом если в большинстве источников приводятся только результаты вычисления окружных напряжений на границе отверстия, то в предлагаемой работе найдено поле напряжений для всей цилиндрической оболочки, возникающее ввиду наличия отверстия, в зависимости от полярных координат  $(r, \theta)$ .

**Ключевые слова:** цилиндрические оболочки, оболочки с отверстиями, растяжение, внутреннее давление, кручение, поле напряжений, аналитический подход

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-31-60008).

**Для цитирования:** Каштанова С. В., Ржонсницкий А. В. Сравнение аналитического и численного решений задачи о цилиндрической оболочке с круговым отверстием под действием различных нагрузок // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 195–206. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-195-206>, EDN: ZXRJRF

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Cylindrical shell with a circular hole under various loads: Comparison of analytical and numerical solutions

S. V. Kashtanova<sup>1✉</sup>, A. V. Rzhonsnitskiy<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, 61 Bolshoi prospect V.O., St. Petersburg 199178, Russia

<sup>2</sup>Saint-Petersburg State Institute of Technology, 26 Moskovski Ave., St. Petersburg 190013, Russia

Stanislava V. Kashtanova, [kastasya@yandex.ru](mailto:kastasya@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0003-1090-0320>, AuthorID: 934447

Alexey V. Rzhonsnitskiy, [rzhonsnitskiy@yandex.ru](mailto:rzhonsnitskiy@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0002-5825-5036>



**Abstract.** In this paper, the authors present the results of calculations of the stress field of a cylindrical shell weakened by a circular hole and under the influence of various loads: uniaxial tension, internal pressure and torsion. Six simplified equations of the theory of cylindrical shells with a high variability index (coinciding with the equations of the theory of shallow shells) are reduced to an equation of mathematical physics with respect to the stress potential, which is solved by the Fourier method. The main obstacle to obtaining an answer is the need to search for coefficients in the decomposition of the solution into the sum of the basis functions for which this solution satisfies the boundary conditions. Also, this equation depends on the parameter  $\beta$ , which is responsible for the relationship between the geometric characteristics of the shell and the hole. From a mechanical point of view, for small and medium holes, this parameter has limitations of  $\beta \leq 4$ , because for large values, the hole is considered large, and the general equations of the theory of cylindrical shells are used to describe the stress-strain state. At the same time, a detailed study of classical works has led to the understanding that none of the previously proposed methods for finding coefficients can be considered definitively successful, and the results obtained by these methods vary. Among the variety of works by Soviet and Western scientists of the 1960-70s years of the twentieth century, the numerical results of engineer Van Dyke, which he obtained by collocation, stand out. Unlike his contemporaries, who lay out the solution in a row for a small parameter  $\beta$  and therefore get results only close to the flat case, Van Dyke first published results for the entire working range of the parameter  $\beta$  in the framework of considering small and medium holes. The authors proposed a new approach based on the decomposition of basic functions into a Fourier series. For the first time, it was possible to compose an infinite system of linearly independent equations for finding unknown coefficients. It is essential that the proposed method, unlike the well-known small parameter method, has no mathematical limitations and can be used not only for the values of the parameter  $\beta$  close to zero, but for any values. Restrictions up to  $\beta = 4$  are imposed by the mechanical model. In this paper, systems for finding unknown coefficients for basic functions for three types of loads are compiled, and the results obtained by the authors are compared with the results obtained by the numerical method. At the same time, if in most sources only the results of calculating the circumferential stresses at the boundary of the hole are given, in the proposed work the stress field for the entire cylindrical shell is found, arising due to the presence of the hole, depending on the polar coordinates  $(r, \theta)$ .

**Keywords:** cylindrical shells, shell with cutouts, axial tension, inner pressure, torsion, stress field, analytical approach

**Acknowledgements:** The work was supported by Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-31-60008).

**For citation:** Kashtanova S. V., Rzhonskiy A. V. Cylindrical shell with a circular hole under various loads: Comparison of analytical and numerical solutions. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 195–206 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-195-206>, EDN: ZXRJRF

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

В недавних работах авторов статьи [1, 2] был пересмотрен классический подход к решению задачи об осевом растяжении цилиндрической оболочки с круглым вырезом. Главным параметром этой задачи является некоторый геометрический параметр  $\beta$ , содержащий соотношение между радиусом отверстия, радиусом цилиндрической оболочки и толщиной оболочки. Если этот параметр равен нулю, то получается плоская



задача (и, в частности, задача Кирша в случае, когда граничным условием является осевое растяжение). Необходимость пересмотреть классический подход возникла по целому ряду причин: малая область применимости решения (близкая к задаче Кирша), отсутствие общей системы для поиска неизвестных базисных коэффициентов решения, отсутствие исследования линейной зависимости некоторых уравнений, связывающих эти коэффициенты, отсутствие явных формул для поля напряжений и возможности проведения аналитического анализа. Классический способ, предложенный в [3], заключался в разложении в степенной ряд решения и коэффициентов по малому параметру  $\beta$ , что сразу накладывало ограничения на область применимости. Активные попытки реализовать эту идею предпринимались в 1960-е гг. XX в., что отражено в работах [4–7], однако аналитические формулы для напряжений так и не были получены. Далее к этой задаче подходили только численно, а теперь уже методами конечных элементов [8–14]. Подробная история вопроса и анализ имеющихся подходов изложены в [15].

Авторы настоящей работы предложили разложить базисные функции решения в ряды Фурье и разделить переменные [1]. Это позволило впервые получить бесконечную линейную систему для поиска неизвестных коэффициентов. Затем было предложено найти и исключить линейно зависимое уравнение и после некоторой замены переменных доказать редуцируемость системы [2]. Этот метод позволяет получить результаты для любых механически допустимых  $\beta$  (от 0 до 4). В данной работе эта идея, помимо осевого растяжения, применяется к другим граничным условиям: внутреннему давлению и кручению. Приведено сравнение аналитических результатов авторов и численных результатов, полученных Ван Дайком [16] методом коллокаций.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается цилиндрическая оболочка радиуса  $R$  и толщины  $h$ , ослабленная круговым отверстием радиуса  $r_0$ , под воздействием различных нагрузок. Основным параметром, ответственным за отношение между геометрическими характеристиками оболочки и отверстия, является

$$\beta^2 = r_0^2 \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{4Rh},$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Заметим, что предельный переход при  $\beta \rightarrow 0$  приводит к плоской задаче.

Уравнение, выведенное Лурье [3], для такой оболочки имеет вид

$$\Delta\Delta\Phi + 8i\beta^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

и содержит функцию  $\Phi = \frac{Eh}{8\beta^2 R} w - iU$ , зависящую от нормального прогиба  $w$ , функции напряжений  $U$  и модуля Юнга  $E$ .

Связь функции  $U$  с тензором напряжений  $T$  задается соотношением

$$\begin{pmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \\ -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $\sigma = T/h$  — срединное поверхностное напряжение.



Уравнение (1) рассматривается с тремя типами граничных условий:

I) растяжение на бесконечности вдоль координаты  $x$  нагрузкой  $p$ :

– на бесконечности  $T_x = p$ ,  $T_{xy} = 0$ ,  $T_y = 0$ ,  $w = 0$ ;

– на границе отверстия в полярных координатах  $(r, \theta)$  – свободный край

$$T_{rr}|_{r=r_0} = 0, \quad T_{r\theta}|_{r=r_0} = 0, \quad M_r|_{r=r_0} = 0, \quad Q_r|_{r=r_0} = 0; \quad (3)$$

II) равномерное внутреннее давление  $q_0$  ( $q = q_0 r_0 / 2$ ):

– на бесконечности  $T_x = q$ ,  $T_y = 2q$ ,  $T_{xy} = 0$ , или в полярных координатах

$$2T_r = q(3 - \cos 2\theta), \quad 2T_{r\theta} = q \sin 2\theta, \quad 2T_\theta = q(3 + \cos 2\theta);$$

– на границе отверстия в полярных координатах

$$T_{rr}|_{r=r_0} = 0, \quad T_{r\theta}|_{r=r_0} = 0, \quad M_r|_{r=r_0} = 0, \quad Q_r|_{r=r_0} = -\frac{q_0 r_0}{2}; \quad (4)$$

III) кручение:

– на бесконечности  $T_x = 0$ ,  $T_{xy} = \tau$ ,  $T_y = 0$ ,  $\tau = M/2\pi R^2$ , или в полярных координатах

$$T_r = \tau \sin 2\theta, \quad T_\theta = -\tau \sin 2\theta, \quad T_{r\theta} = \tau \cos 2\theta;$$

– на границе отверстия в полярных координатах условия (3).

Решение, предложенное авторами в [1, 2] и основанное на разложении базисных функций в ряд Фурье, может быть записано в следующей форме (для случаев I, II и III соответственно):

$$\Phi_I = -i \frac{py^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) f_n, \quad (5)$$

$$\Phi_{II} = -i \frac{qy^2}{2} - i \frac{2qx^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) f_n, \quad (6)$$

$$\Phi_{III} = -i\tau xy + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) f_n. \quad (7)$$

При этом для I и II типов граничных условий, ввиду симметричности, функция  $f_n(r, \theta)$  раскладывается в ряд по косинусам:

$$f_n(r, \theta) = \frac{g(r, n, 0)}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} g(r, n, l) \cos 2l\theta, \quad (8)$$

а для III типа, ввиду антисимметричности, – по синусам:

$$f_n(r, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{g}(r, n, l) \sin 2l\theta. \quad (9)$$

В свою очередь,

$$g(n, r, l) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + l} \frac{H_n^{(1)}((1+i)\beta r)}{H_n^{(1)}((1+i)\beta)} (J_{n+2l}((1+i)\beta r) + J_{n-2l}((1+i)\beta r)),$$



$$n = 1, \dots, \infty, \quad l = 0, 1, \dots, \infty, \quad (10)$$

$$\tilde{g}(n, r, l) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + l} \frac{H_n^{(1)}((1+i)\beta r)}{H_n^{(1)}((1+i)\beta)} (J_{n-2l}((1+i)\beta r) - J_{n+2l}((1+i)\beta r)),$$

$$n = 1, \dots, \infty, \quad l = 1, \dots, \infty. \quad (11)$$

Здесь  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  — целая часть числа,  $H_n^{(1)}(\cdot)$  — функции Ханкеля I рода, а  $J_{n\pm 2l}(\cdot)$  — функции Бесселя.

При любых константах  $a_n$  и  $b_n$  функции  $\Phi$ , определенные равенствами (5)–(7) и (8)–(11), удовлетворяют уравнению (1) и граничным условиям на бесконечности. Для всех трех случаев коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  могут быть найдены из условия (3) или (4) на границе отверстия. Тем самым функции  $\Phi$  для всех типов граничных условий будут полностью определены, а с ними из соотношений (2) будут найдены и напряжения цилиндрической оболочки, ослабленной круговым отверстием под воздействием различных нагрузок.

## 2. Системы

Удачное представление (5)–(7) решения уравнения (1) позволило впервые получить в явном виде бесконечную систему линейных уравнений для поиска коэффициентов  $a_n$  и  $b_n$ . В работе [1] такая система была получена для граничных условий I типа. При этом авторами было доказано, что одно из уравнений является линейной комбинацией четырех других, а потому его следовало исключить из дальнейшего решения. Из настоящей работы видно, что задача с граничными условиями II типа сохраняет почти все свойства системы с I типом граничных условий, в то время как для случая кручения система значительно меняется ввиду антисимметрии. В работе [2] доказана редуцируемость всех полученных бесконечных систем. Для всех типов граничных условий получены матричные формы систем при помощи подстановки решения (5) в (3) для I типа, (6) в (4) для II и (7) в (3) для III типа. Как видно ниже, подходящая замена  $t_i(n, l)$  на  $\tilde{t}_i(n, l)$  и  $g(n, l)$  на  $\tilde{g}(n, l)$  в третьем случае позволяет сохранить одинаковую структуру матриц всех систем (табл. 1, 2):

$$t_3(n, l) = i(-4l^2 \nu g(n, l) + \nu g'(n, l) + g''(n, l)),$$

$$t_4(n, l) = i(12l^2 g(n, l) - (1 + \nu + 4l^2(2 - \nu))g'(n, l) + g'''(n, l)),$$

$$\tilde{t}_3(n, l) = i(-4l^2 \nu \tilde{g}(n, l) + \nu \tilde{g}'(n, l) + \tilde{g}''(n, l)),$$

$$\tilde{t}_4(n, l) = i(12l^2 \tilde{g}(n, l) - (1 + \nu + 4l^2(2 - \nu))\tilde{g}'(n, l) + \tilde{g}'''(n, l)).$$

## 3. Результаты вычислений

На рис. 1 представлены графики напряжений  $\sigma_{\theta\theta}/p$  для I, II и III типов граничных условий, полученные аналитическим методом, рассмотренным в данной работе (рис. 1, а, в, д соответственно), и полученные Ван Дайком в 1965 г. методом коллокаций [16] (рис. 1, б, г, е соответственно).

На рис. 2, а, б, в представлены поля напряжений  $\sigma_{\theta\theta}/p$  соответственно для I, II, III типов граничных условий при  $\beta = 0.1, 1, 4$ .



Таблица 1 / Table 1

Система для I и II типов граничных условий (ГУ)  
System for the I and II types of boundary conditions

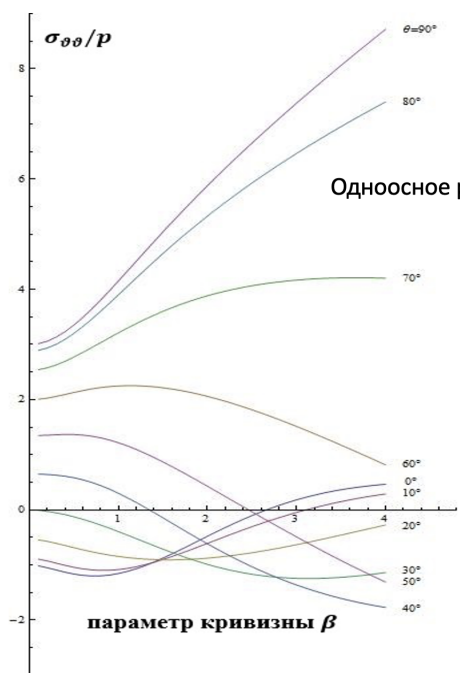
n	0		1		2		3		Неизв.коэфф	Св. столбец I тип ГУ	Св. столбец II тип ГУ
	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re			
0	$t_3(0,0)$	$t_3(0,0)$	$t_3(1,0)$	$t_3(1,0)$	$t_3(2,0)$	$t_3(2,0)$	$t_3(3,0)$	$t_3(3,0)$	$a_0$	0	0
0	$t_4(0,0)$	$t_4(0,0)$	$t_4(1,0)$	$t_4(1,0)$	$t_4(2,0)$	$t_4(2,0)$	$t_4(3,0)$	$t_4(3,0)$	$b_0$	0	$16\beta^2 q$
1	$g(0,1)$	$g(0,1)$	$g(1,1)$	$g(1,1)$	$g(2,1)$	$g(2,1)$	$g(3,1)$	$g(3,1)$	$a_1$	$-\frac{p}{4}$	$\frac{q}{4}$
1	$g'(0,1)$	$g'(0,1)$	$g'(1,1)$	$g'(1,1)$	$g'(2,1)$	$g'(2,1)$	$g'(3,1)$	$g'(3,1)$	$b_1$	$-\frac{p}{2}$	$\frac{q}{2}$
									$\vdots$		
1	$t_3(0,1)$	$t_3(0,1)$	$t_3(1,1)$	$t_3(1,1)$	$t_3(2,1)$	$t_3(2,1)$	$t_3(3,1)$	$t_3(3,1)$	$a_2$	0	0
1	$t_4(0,1)$	$t_4(0,1)$	$t_4(1,1)$	$t_4(1,1)$	$t_4(2,1)$	$t_4(2,1)$	$t_4(3,1)$	$t_4(3,1)$	$b_2$	0	0
2	$g(0,2)$	$g(0,2)$	$g(1,2)$	$g(1,2)$	$g(2,2)$	$g(2,2)$	$g(3,2)$	$g(3,2)$	$a_3$	0	0
2	$g'(0,2)$	$g'(0,2)$	$g'(1,2)$	$g'(1,2)$	$g'(2,2)$	$g'(2,2)$	$g'(3,2)$	$g'(3,2)$	$b_3$	0	0
...											

Таблица 2 / Table 2

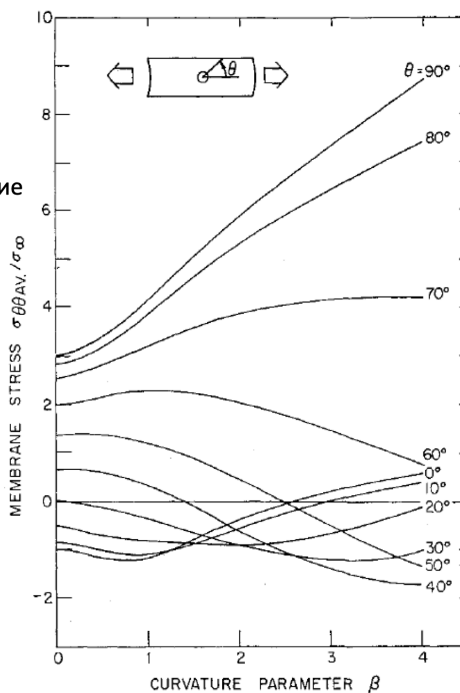
Система для III типа граничных условий (ГУ)  
System for the III type of boundary conditions

n	1		2		3		4		Неизв.коэфф	Св. столбец III тип ГУ
	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re		
1	$\tilde{t}_3(1,1)$	$\tilde{t}_3(1,1)$	$\tilde{t}_3(2,1)$	$\tilde{t}_3(2,1)$	$\tilde{t}_3(3,1)$	$\tilde{t}_3(3,1)$	$\tilde{t}_3(4,1)$	$\tilde{t}_3(4,1)$	$a_1$	0
1	$\tilde{t}_4(1,1)$	$\tilde{t}_4(1,1)$	$\tilde{t}_4(2,1)$	$\tilde{t}_4(2,1)$	$\tilde{t}_4(3,1)$	$\tilde{t}_4(3,1)$	$\tilde{t}_4(4,1)$	$\tilde{t}_4(4,1)$	$b_1$	0
1	$\tilde{g}(1,1)$	$\tilde{g}(1,1)$	$\tilde{g}(2,1)$	$\tilde{g}(2,1)$	$\tilde{g}(3,1)$	$\tilde{g}(3,1)$	$\tilde{g}(4,1)$	$\tilde{g}(4,1)$	$a_2$	$-\frac{\tau}{2}$
1	$\tilde{g}'(1,1)$	$\tilde{g}'(1,1)$	$\tilde{g}'(2,1)$	$\tilde{g}'(2,1)$	$\tilde{g}'(3,1)$	$\tilde{g}'(3,1)$	$\tilde{g}'(4,1)$	$\tilde{g}'(4,1)$	$b_2$	$-\tau$
									$\vdots$	
2	$\tilde{t}_3(1,2)$	$\tilde{t}_3(1,2)$	$\tilde{t}_3(2,2)$	$\tilde{t}_3(2,2)$	$\tilde{t}_3(3,2)$	$\tilde{t}_3(3,2)$	$\tilde{t}_3(4,2)$	$\tilde{t}_3(4,2)$	$a_3$	0
2	$\tilde{t}_4(1,2)$	$\tilde{t}_4(1,2)$	$\tilde{t}_4(2,2)$	$\tilde{t}_4(2,2)$	$\tilde{t}_4(3,2)$	$\tilde{t}_4(3,2)$	$\tilde{t}_4(4,2)$	$\tilde{t}_4(4,2)$	$b_3$	0
2	$\tilde{g}(1,2)$	$\tilde{g}(1,2)$	$\tilde{g}(2,2)$	$\tilde{g}(2,2)$	$\tilde{g}(3,2)$	$\tilde{g}(3,2)$	$\tilde{g}(4,2)$	$\tilde{g}(4,2)$	$a_4$	0
2	$\tilde{g}'(1,2)$	$\tilde{g}'(1,2)$	$\tilde{g}'(2,2)$	$\tilde{g}'(2,2)$	$\tilde{g}'(3,2)$	$\tilde{g}'(3,2)$	$\tilde{g}'(4,2)$	$\tilde{g}'(4,2)$	$b_4$	0
...										

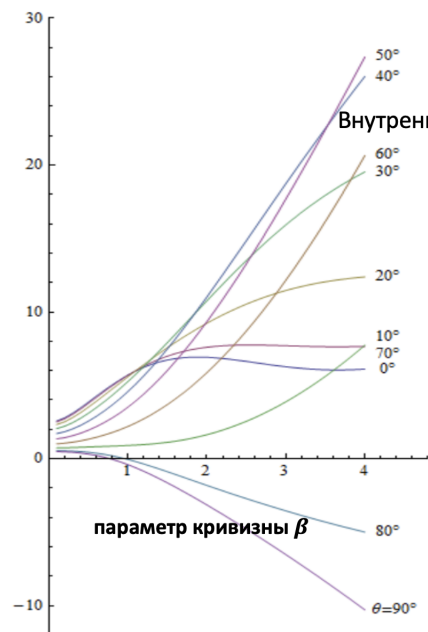




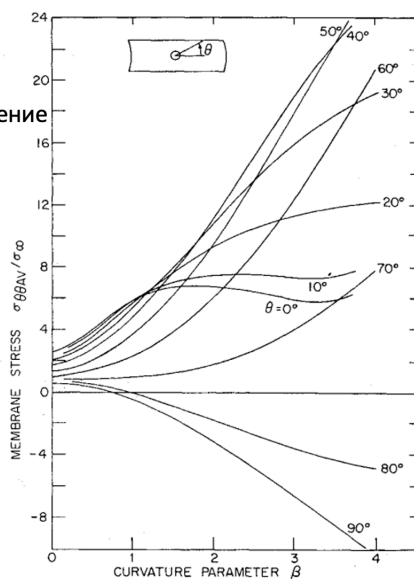
а / а



б / б



в / с

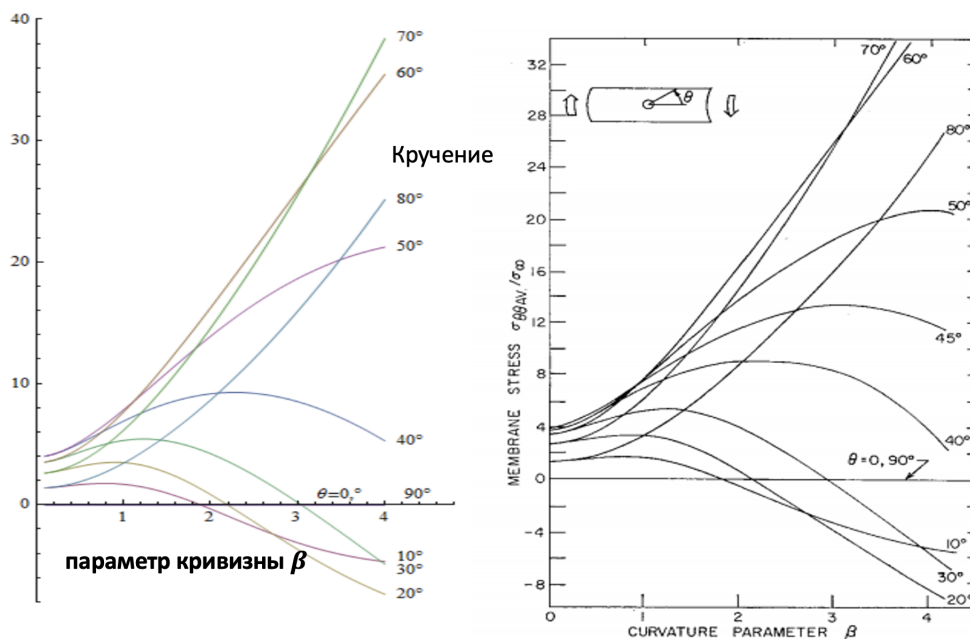


9 Membrane stress at the hole under pressure loading.

г / д

Рис. 1. Сравнение напряжений  $\sigma_{\theta\theta}/p$  для I (а, б) и II (в, г) типов условий, полученных аналитическим методом, представленным в данной работе, и методом коллокаций из работы Ван Дайка [16]

Fig. 1. Comparison of  $\sigma_{\theta\theta}/p$  for the type I (a, b), and II (c, d) boundary conditions, obtained by the analytical method in this paper and by the collocation method in Van Dyke's paper [16]

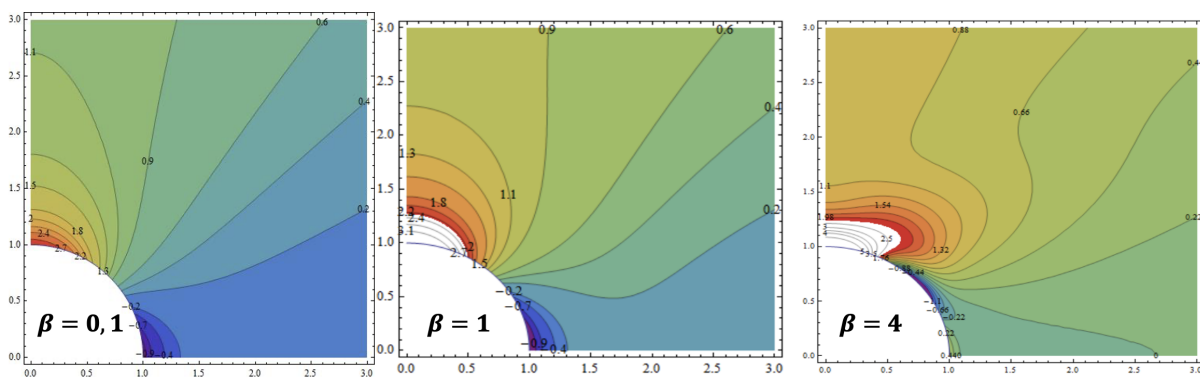


$\partial / e$

$e / f$

Окончание рис. 1. Сравнение напряжений  $\sigma_{\theta\theta}/p$  для III ( $\partial, e$ ) типа условий, полученных аналитическим методом, представленным в данной работе, и методом коллокаций из работы Ван Дайка [16]

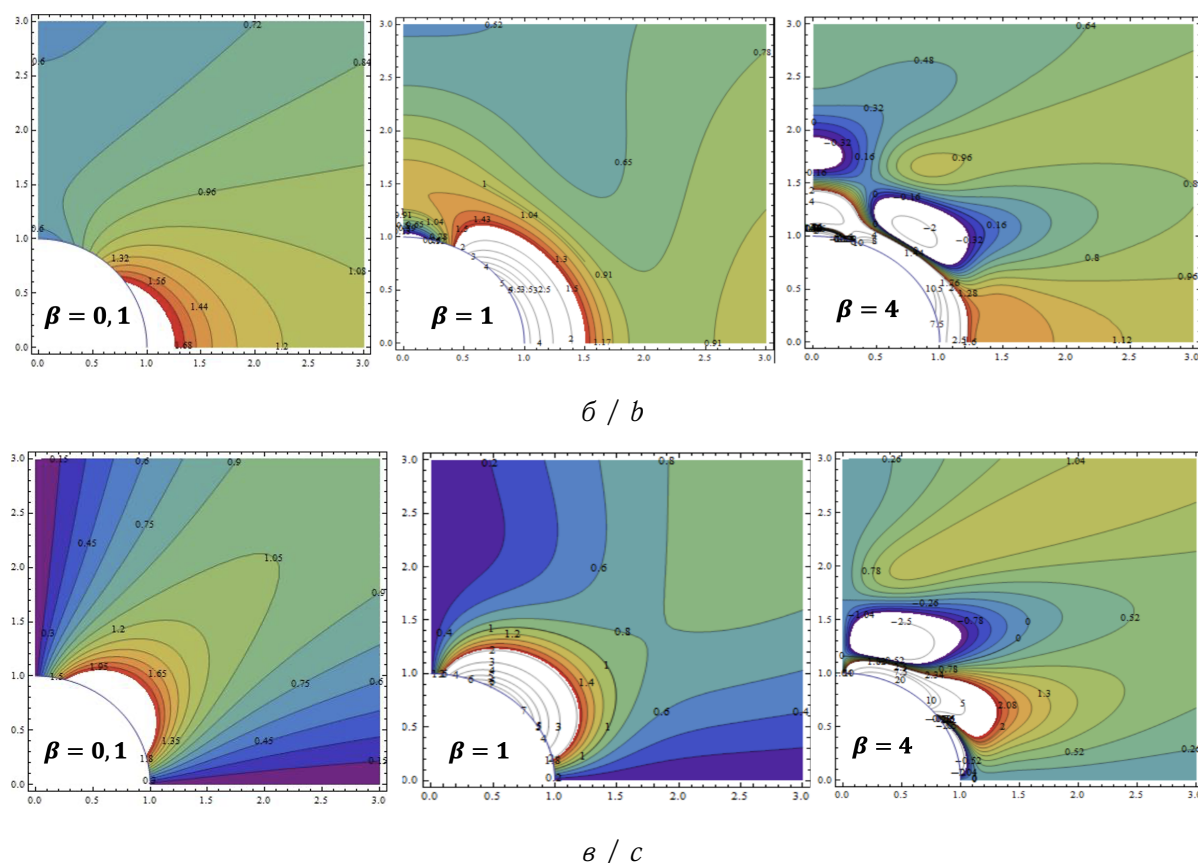
Continuation of Fig. 1. Comparison of  $\sigma_{\theta\theta}/p$  for the type III ( $e, f$ ) boundary conditions, obtained by the analytical method in this paper and by the collocation method in Van Dyke's paper [16]



$a / a$

Рис. 2. Поле напряжений  $\sigma_{\theta\theta}/p$  при  $\beta = 0.1, 1, 4$  для разных типов граничных условий:  $a$  — тип I (растяжение) (цвет онлайн)

Fig. 2. Stress field  $\sigma_{\theta\theta}/p$  at  $\beta = 0.1, 1, 4$  for different types of boundary conditions:  $a$  — type I (axial tension) (color online)



Окончание рис. 2. Поле напряжений  $\sigma_{\theta\theta}/p$  при  $\beta = 0.1, 1, 4$  для разных типов граничных условий:  $b$  — тип II (внутреннее давление);  $c$  — тип III (кручение) (цвет онлайн)

Continuation of Fig. 2. Stress field  $\sigma_{\theta\theta}/p$  at  $\beta = 0.1, 1, 4$  for different types of boundary conditions:  $b$  — type II (internal pressure);  $c$  — type III (torsion) (color online)

## Выводы

Результаты, полученные авторами статьи аналитическим путем, абсолютно совпадают с численными результатами из работы [16], которые были получены методом коллокаций для всех трех типов граничных условий в 1965 г. (см. рис. 1). На тот момент Ван Дайк единственный получил результаты до  $\beta = 4$ , так как другие ученые использовали разложение по малому параметру, не позволяющее работать в таком диапазоне. Более того, результаты, полученные ранее в работах других авторов, различались, а в некоторых решениях были допущены ошибки. Представленная в данной работе модель не имеет математических ограничений. При этом, в отличие от большинства известных работ, где приводятся только результаты вычисления окружных напряжений на границе отверстия, в предлагаемой работе найдено поле напряжений для всей цилиндрической оболочки, возникающее в силу наличия отверстия, в зависимости от полярных координат  $(r, \theta)$  (см. рис. 2).

## Список литературы

1. Каштанова С. В., Ржонсницкий А. В. Аналитический подход к выводу поля напряжений цилиндрической оболочки с круговым отверстием при растяжении // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2021. № 2. С. 64–75. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.07>
2. Kashtanova S. V., Rzhonsnitskiy A. V. Investigation of systems of the stress field problem



- of a cylindrical shell with a circular cutout under various boundary conditions // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2022. Vol. 44. Art. 259. <https://doi.org/10.1007/s40430-022-03534-7>
3. Лурье А. И. Концентрации напряжений в области отверстия на поверхности кругового цилиндра // Прикладная математика и механика. 1946. Т. 10. С. 397–406.
  4. Гузь А. Н. Цилиндрические оболочки, ослабленные отверстиями. Киев : Наукова думка, 1974. 271 с.
  5. Lekkerkerker J. G. On the Stress Distribution in Cylindrical Shells Weakened by a Circular Hole. Delft : Uitgeverij Waltman, 1965. 99 p.
  6. Naghdi A. K., Eringen A. C. Stress distribution in a circular cylindrical shell with a circular cutout // Archive of Applied Mechanics. 1965. Vol. 34, iss. 3. P. 161–172. <https://doi.org/10.1007/BF00532170>
  7. Eringen A. C., Naghdi A. K., Thiel C. C. State of Stress in a Circular Cylindrical Shell With a Circular Hole. Welding Research Council, 1965. 21 p. (Welding Research Council Bulletin, vol. 102).
  8. Foo S. S. B. On the limit analysis of cylindrical shells with a single cutout // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 1992. Vol. 49, iss. 1. P. 1–16. [https://doi.org/10.1016/0308-0161\(92\)90069-R](https://doi.org/10.1016/0308-0161(92)90069-R)
  9. Кабанов В. В., Железнов Л. П. Применение метода конечных элементов к расчету на прочность круговых цилиндрических оболочек с вырезами // Ученые записки ЦАГИ. 1985. Т. 16, № 3. С. 92–99. EDN: MWFNGB
  10. Shariati M., Akbarpour A. Ultimate strength analysis of combined loaded stainless steel circular tubes with hole // Journal of Basic and Applied Scientific Research. 2012. iss. 2 (8). P. 8457–8465.
  11. Lee S. E., Sahin S., Rigo P. Ultimate strength of cylindrical shells with cutouts // Ships and Offshore Structures. 2017. Vol. 12, iss. S1. P. 151–173. <https://doi.org/10.1080/17445302.2016.1271592>
  12. Kolodiazhnyi A., Mednikova M. The Influence of the deformation nonlinearity on stress concentration in cylindrical shells with holes under torsion // Materials Science Forum. 2019. Vol. 968. P. 548–559. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.548>
  13. Chawla K., Ray-Chaudhuri S. Stress and strain concentration factors in orthotropic composites with hole under uniaxial tension // Curved and Layered Structures. 2018. Vol. 5, iss. 1. P. 213–231. <https://doi.org/10.1515/cls-2018-0016>
  14. Silpa V. J. K., Raghu Vamsi B. V. S., Gowtham Kumar K. Structural analysis of thin isotropic and orthotropic plates using finite element analysis // Indian Journal of Medical Ethics. 2017. Vol. 4, iss. 6. P. 17–27. <https://doi.org/10.14445/23488360/IJME-V4I6P104>
  15. Kashtanova S. V., Rzhonsnitskiy A. V., Gruzdkov A. A. On the issue of analytical derivation of stress state in a cylindrical shell with a circular hole under axial tension // Materials Physics and Mechanics. 2021. Vol. 47. P. 186–195. [https://doi.org/10.18149/MPM.4722021\\_3](https://doi.org/10.18149/MPM.4722021_3)
  16. Van Dyke P. Stresses about a circular hole in a cylindrical shell // AIAA Journal. 1965. Vol. 3, iss. 9. P. 1733–1742. <https://doi.org/10.2514/3.3234>

## References

1. Kashtanova S. V., Rzhonsnitskiy A. V. An analytical approach to obtaining the stress field of a cylindrical shell with a circular hole under tension. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, iss. 2, pp. 64–75 (in Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.07>
2. Kashtanova S. V., Rzhonsnitskiy A. V. Investigation of systems of the stress field problem of a cylindrical shell with a circular cutout under various boundary conditions. *Journal of*



- the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2022, vol. 44, Art. 259. <https://doi.org/10.1007/s40430-022-03534-7>
3. Lurie A. I. Concentration of stresses in the vicinity of an aperture in the surface of a circular cylinder. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 1946, vol. 10, pp. 397–406 [English transl. by N. Brunswick, New York University, Inst. of Math. Sci., 1960].
  4. Guz A. N. *Tsilindricheskie obolochki, oslablennye otverstiyami* [Cylindrical Shells with Cutouts]. Kiev, Naukova dumka, 1974. 271 p. (in Russian).
  5. Lekkerkerker J. G. *On the Stress Distribution in Cylindrical Shells Weakened by a Circular Hole*. Delft, Uitgeverij Waltman, 1965. 99 p.
  6. Naghdi A. K., Eringen A. C. Stress distribution in a circular cylindrical shell with a circular cutout. *Archive of Applied Mechanics*, 1965, vol. 34, iss. 3, pp. 161–172. <https://doi.org/10.1007/BF00532170>
  7. Eringen A. C., Naghdi A. K., Thiel C. C. *State of Stress in a Circular Cylindrical Shell With a Circular Hole*. Welding Research Council Bulletin, vol. 102. Welding Research Council, 1965. 21 p.
  8. Foo S. S. B. On the limit analysis of cylindrical shells with a single cutout. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 1992, vol. 49, iss. 1, pp. 1–16. [https://doi.org/10.1016/0308-0161\(92\)90069-R](https://doi.org/10.1016/0308-0161(92)90069-R)
  9. Kabanov V. V., Zheleznov L. P. Application of the Finite-Elements method to the strength analysis of circular cylindrical shells with cutouts. *TsAGI Notes*, 1985, vol. 16, iss. 3, pp. 92–99 (in Russian). EDN: [MWFNGB](https://www.edn.net/MWFNGB)
  10. Shariati M., Akbarpour A. Ultimate strength analysis of combined loaded stainless steel circular tubes with hole. *Journal of Basic and Applied Scientific Research*, 2012, iss. 2 (8), pp. 8457–8465.
  11. Lee S. E., Sahin S., Rigo P. Ultimate strength of cylindrical shells with cutouts. *Ships and Offshore Structures*, 2017, vol. 12, iss. S1, pp. 151–173. <https://doi.org/10.1080/17445302.2016.1271592>
  12. Kolodiaznyi A., Mednikova M. The Influence of the deformation nonlinearity on stress concentration in cylindrical shells with holes under torsion. *Materials Science Forum*, 2019, vol. 968, pp. 548–559. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.548>
  13. Chawla K., Ray-Chaudhuri S. Stress and strain concentration factors in orthotropic composites with hole under uniaxial tension. *Curved and Layered Structures*, 2018, vol. 5, iss. 1, pp. 213–231. <https://doi.org/10.1515/cls-2018-0016>
  14. Silpa V. J. K., Raghu Vamsi B. V. S., Gowtham Kumar K. Structural analysis of thin isotropic and orthotropic plates using finite element analysis. *Indian Journal of Medical Ethics*, 2017, vol. 4, iss. 6, pp. 17–27. <https://doi.org/10.14445/23488360/IJME-V4I6P104>
  15. Kashtanova S. V., Rzhonsnitskiy A. V., Gruzdkov A. A. On the issue of analytical derivation of stress state in a cylindrical shell with a circular hole under axial tension. *Materials Physics and Mechanics*, 2021, vol. 47, pp. 186–195. [https://doi.org/10.18149/MPM.4722021\\_3](https://doi.org/10.18149/MPM.4722021_3)
  16. Van Dyke P. Stresses about a circular hole in a cylindrical shell. *AIAA Journal*, 1965, vol. 3, iss. 9, pp. 1733–1742. <https://doi.org/10.2514/3.3234>

Поступила в редакцию / Received 21.03.2022

Принята к публикации / Accepted 01.11.2022

Опубликована / Published 31.05.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 207–226

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 207–226

[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru)

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-207-226>, EDN: XMXZRM

Научная статья

УДК 517.98

## Пассивное демпфирование колебаний цилиндрической оболочки, взаимодействующей с текущей жидкостью

С. В. Лекомцев, В. П. Матвеев, А. Н. Сенин<sup>✉</sup>

Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук, Россия, 614013, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1

**Лекомцев Сергей Владимирович**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, [lekomtsev@icmm.ru](mailto:lekomtsev@icmm.ru), <https://orcid.org/0000-0002-8331-2979>, AuthorID: 671355

**Матвеев Валерий Павлович**, доктор технических наук, академик РАН, заведующий отделом, [mvp@icmm.ru](mailto:mvp@icmm.ru), <https://orcid.org/0000-0003-2787-6558>, AuthorID: 14481

**Сенин Александр Николаевич**, младший научный сотрудник, [senin.a@icmm.ru](mailto:senin.a@icmm.ru), <https://orcid.org/0000-0002-7537-0001>, AuthorID: 1030284

**Аннотация.** Оценена возможность пассивного демпфирования колебаний тонкостенной цилиндрической оболочки, взаимодействующей с текущей жидкостью. Механизм основан на шунтировании закреплённого на поверхности конструкции разомкнутого пьезоэлектрического кольца внешней электрической цепью, состоящей из последовательно соединённых сопротивления и катушки индуктивности. Выбор их оптимальных величин осуществлён численно с использованием разработанного конечно-элементного алгоритма. Предложенный подход основан на решении серии модальных задач. Он позволяет получить более высокие показатели демпфирования, чем традиционно используемые для этой цели аналитические выражения, и приводит к наименьшей разнице между собственными частотами колебаний конструкции и электрической цепи. При моделировании пространственной оболочки её криволинейная поверхность аппроксимируется совокупностью плоских сегментов. В каждом из них выполняются соотношения теории слоистых пластин и уравнения линейной теории пьезоупругости, записанные для случая плоского напряжённого состояния. Данный подход позволяет оставить в векторах напряжённости электрического поля и электрической индукции отличными от нуля только компоненты, нормальные к электродированной поверхности пьезокольца. Основные соотношения, описывающие безвихревую динамику идеальной сжимаемой жидкости в случае малых возмущений, формулируются в терминах потенциала возмущения скорости. Соответствующее волновое уравнение записывается в связанной с конструкцией системе координат и совместно с условием непроницаемости и граничными условиями преобразуется к слабой форме методом Бубнова – Галёркина. В работе проанализировано изменение комплексных собственных значений электромеханической системы в зависимости от сопротивления и индуктивности последовательной электрической цепи. Проведено сравнение различных способов вычисления её оптимальных параметров. Построены амплитудно-частотные характеристики, демонстрирующие снижение амплитуды вынужденных гармонических колебаний при заданной скорости течения жидкости.



**Ключевые слова:** пассивное демпфирование колебаний, пьезоэлектрическое кольцо, электрическая цепь, цилиндрическая оболочка, текущая жидкость, метод конечных элементов

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-71-10054).

**Для цитирования:** Лekomтцев С. В., Матвеев В. П., Сенин А. Н. Пассивное демпфирование колебаний цилиндрической оболочки, взаимодействующей с текущей жидкостью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 207–226. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-207-226>, EDN: XMXZRM

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Passive damping of vibrations of a cylindrical shell interacting with a flowing fluid

S. V. Lekomtsev, V. P. Matveenko, A. N. Senin✉

Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 1 Academician Korolev St., Perm 614013, Russia

**Sergey V. Lekomtsev**, lekomtsev@icmm.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8331-2979>, AuthorID: 671355

**Valerii P. Matveenko**, mvp@icmm.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2787-6558>, AuthorID: 14481

**Alexander N. Senin**, senin.a@icmm.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7537-0001>, AuthorID: 1030284

**Abstract.** The possibility of passive damping of vibrations of a thin-walled cylindrical shell interacting with a flowing fluid is evaluated. The mechanism is based on connecting the open piezoelectric ring fixed on the surface of the structure to an external shunt electric circuit consisting of series-connected resistance and inductance coil. Their optimal values were selected numerically using the developed finite-element algorithm. The proposed approach is based on solving a series of modal problems. It allows us to obtain higher damping ratios compared to those evaluated by the commonly used analytical expressions and leads to the smallest difference in the natural frequencies of the structure and the electric circuit. In modeling a spatial shell, its curvilinear surface is approximated by a set of flat segments. Each of them is supposed to comply with the relations of the theory of multilayer plates and the equations of linear theory of piezoelectricity written for the case of plane stress state. With this approach, in the vectors of electric field and electric induction it is possible to keep nonzero only such components that are normal to the electroded surface of the piezoelectric ring. The constitutive relations, describing the vortex-free dynamics of an ideal compressible fluid in the case of small perturbations, are formulated in terms of the perturbation velocity potential. The corresponding wave equation is written in the coordinate system associated with the structure and is transformed together with the impermeability condition and boundary conditions to a weak form using the Bubnov – Galerkin method. The paper analyzes the variation of the complex eigenvalues of an electromechanical system depending on the values of resistance and inductance of a series electric circuit. Different methods for calculating the optimal parameters of the system are compared. The frequency response curves demonstrating a decrease in the amplitude of forced harmonic vibrations at a given fluid flow velocity are obtained.



**Keywords:** passive vibrations damping, piezoelectric ring, electric circuit, cylindrical shell, flowing fluid, finite element method

**Acknowledgements:** The study was supported by the grant of the Russian Scientific Foundation (project No. 18-71-10054).

**For citation:** Lekomtsev S. V., Matveenko V. P., Senin A. N. Passive damping of vibrations of a cylindrical shell interacting with a flowing fluid. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 207–226 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-207-226>, EDN: XMXZRM

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Техника пассивного демпфирования колебаний конструкции за счёт прикрепления к ней пьезоэлемента и соединения его электродированных поверхностей с внешней электрической цепью, обладающей импедансом, известна достаточно давно [1]. В настоящее время такой подход нашёл широкое практическое применение благодаря возможности осуществлять управление динамическим поведением объектов, находящихся в труднодоступных местах, ограниченном пространстве или под водой.

Известно, что можно добиться существенного снижения амплитуды резонанса или увеличения скорости затухания свободных колебаний за счёт подбора номинальных значений различных элементов электрической цепи [1–8]. Обзор работ по этой тематике представлен в публикациях [9–11] и книге [12]. Отдельно отметим статьи [13–19], в которых рассматриваются вопросы пассивного подавления шума подводных объектов или колебаний конструкций, взаимодействующих с жидкостью. В большинстве из этих работ выбор параметров электрической цепи, обеспечивающих наилучшее демпфирование заданной моды колебаний конструкции, осуществляется с помощью аналитических выражений, предложенных в [1]. Из приведённых выше публикаций только в [17] исследуется конструкция, взаимодействующая с текущей жидкостью. В данной статье рассматривается подводная подъёмная поверхность в виде консольно-закреплённой прямоугольной пластины. Экспериментально показано, что её собственные частоты колебаний слабо зависят от скорости жидкости (числа Рейнольдса), текущей в поперечном направлении. Это позволило использовать в теоретических расчётах аналитические выражения [1], а в конечно-элементных — модель неподвижной акустической среды. Тем не менее, полученные результаты продемонстрировали возможность пассивного демпфирования колебаний пластины, функционирующей в таких условиях. Однако применимость используемого подхода в случае зависимости собственных частот колебаний конструкции от скорости течения жидкости или при наличии в системе механизма сильного гидродинамического демпфирования не обсуждается. В связи с этим актуальным является разработка инструмента для подбора параметров пассивной электрической цепи, обеспечивающих подавление резонансных колебаний тонкостенной конструкции, взаимодействующей с текущей жидкостью.

С целью проведения детального исследования в этой области предлагается использовать апробированную ранее методологию и подход [20] в комбинации с эффективным конечно-элементным алгоритмом, представленным в данной работе.



## 1. Основные соотношения

Рассматривается пространственная тонкостенная цилиндрическая оболочка, на внешней поверхности которой расположено  $P$  поляризованных в направлении толщины (ось  $\bar{z}$ ) пьезоэлектрических разомкнутых колец. Внутренняя поверхность конструкции взаимодействует с жидкостью, текущей со скоростью  $U$  в направлении оси  $Ox$  (рис. 1, а). К каждому  $k$ -му пьезокольцу ( $k = 1, 2, \dots, P$ ) через электродированные поверхности подключена собственная электрическая цепь, состоящая из последовательно соединённых резистора сопротивления  $R_k$  и катушки индуктивности  $L_k$ .

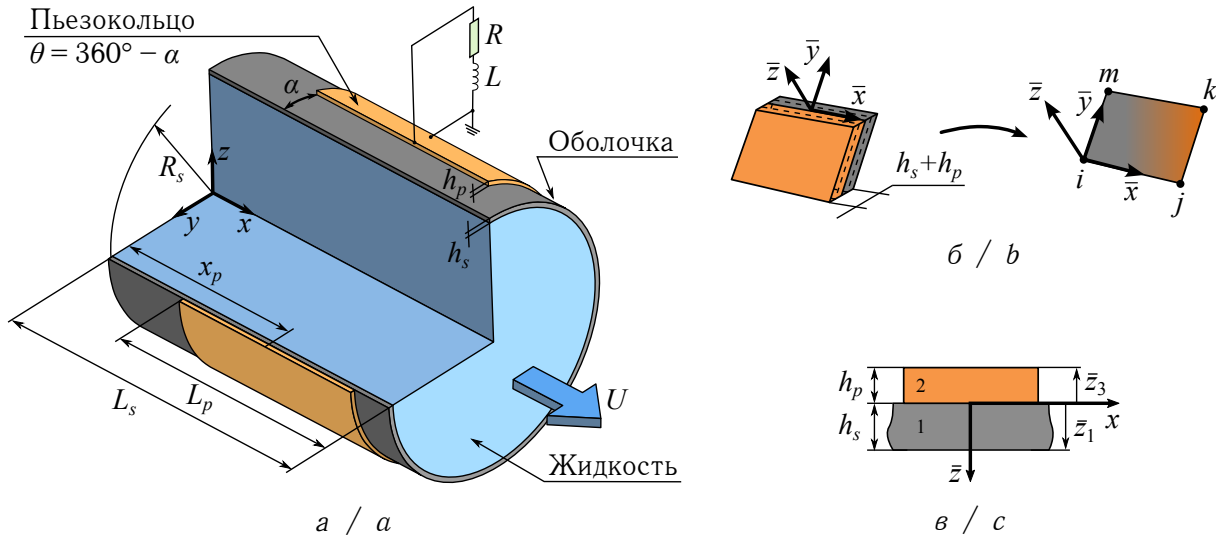


Рис. 1. Круговая цилиндрическая оболочка с пьезоэлектрическим кольцом, взаимодействующая с текущей жидкостью (а), конечный элемент оболочки (б), поперечное сечение слоистой конструкции (в) (цвет онлайн)

Fig. 1. Circular cylindrical shell with a piezoelectric ring and interacting with flowing fluid (a), shell finite element (b), cross-section of the laminated structure (c) (color online)

При моделировании пространственной тонкостенной оболочки полагается, что её криволинейная поверхность достаточно точно может быть аппроксимирована совокупностью плоских сегментов (рис. 1, б) [21]. В каждом из них выполняются соотношения классической теории слоистых пластин [22] и уравнения линейной теории пьезоупругости [23], записанные для случая плоского напряжённого состояния [22]. С учётом допущений и гипотез, изложенных в [24], они формулируются для каждого  $n$ -го ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) слоя в виде [25, 26]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\bar{x}\bar{x}} \\ \sigma_{\bar{y}\bar{y}} \\ \sigma_{\bar{x}\bar{y}} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{12} & 0 \\ \tilde{Q}_{12} & \tilde{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} \\ \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} \\ \varepsilon_{\bar{x}\bar{y}} \end{Bmatrix}^{(n)} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{e}_{31} \\ 0 & 0 & \tilde{e}_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_{\bar{z}} \end{Bmatrix}^{(n)}, \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_{\bar{z}} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{e}_{31} & \tilde{e}_{32} & 0 \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} \\ \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} \\ \varepsilon_{\bar{x}\bar{y}} \end{Bmatrix}^{(n)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{e}_{33} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_{\bar{z}} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (2)$$

или

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{(n)} &= \tilde{\mathbf{c}}^{(n)} \bar{\varepsilon} - \tilde{\mathbf{e}}^{(n)} \bar{\mathbf{E}}^{(n)}, \\ \bar{\mathbf{D}}^{(n)} &= (\tilde{\mathbf{e}}^{(n)})^T \bar{\varepsilon} + \tilde{\mathbf{e}}^{(n)} \bar{\mathbf{E}}^{(n)}. \end{aligned}$$



где  $\bar{\sigma}$  и  $\bar{\epsilon}$  — векторы, содержащие компоненты тензора напряжений и тензора малых деформаций в случае плоского напряжённого состояния;  $\bar{\mathbf{E}}$  и  $\bar{\mathbf{D}}$  — векторы напряжённости электрического поля и электрической индукции;  $\tilde{\mathbf{c}}$  — матрица упругих констант, вычисленная при постоянном электрическом поле;  $\tilde{\mathbf{e}}$  — матрица пьезоэлектрических констант;  $\tilde{\epsilon}$  — матрица диэлектрических констант, вычисленная при постоянных деформациях. Здесь и далее прямая черта сверху означает принадлежность величины к системе координат  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , связанной с боковой поверхностью конструкции (рис. 1, б). При отсутствии пьезоэлектрического эффекта в  $n$ -ом слое слагаемое, содержащее матрицу  $\tilde{\epsilon}$ , и уравнение (2) не учитываются.

Элементы матриц  $\tilde{\mathbf{c}}^{(n)}$ ,  $\tilde{\mathbf{e}}^{(n)}$  и  $\tilde{\epsilon}^{(n)}$  вычисляются следующим образом [27, 28]:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{ij}^{(n)} &= Q_{ij}^{(n)} - \frac{Q_{i3}^{(n)} Q_{j3}^{(n)}}{Q_{33}^{(n)}}, & \tilde{Q}_{66}^{(n)} &= Q_{66}^{(n)}, \\ \tilde{e}_{3j}^{(n)} &= e_{3j}^{(n)} - \frac{e_{33}^{(n)} Q_{j3}^{(n)}}{Q_{33}^{(n)}}, & \tilde{\epsilon}_{33}^{(n)} &= \epsilon_{33}^{(n)} - \frac{e_{33}^{(n)} e_{33}^{(n)}}{Q_{33}^{(n)}}, \quad i, j = \overline{1, 2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Коэффициенты  $Q_{ij}^{(n)}$  записываются в терминах инженерных констант [22]:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{11}^{(n)} &= \frac{E_1^{(n)}}{1 - \nu_{12}^{(n)} \nu_{21}^{(n)}}, & \tilde{Q}_{12}^{(n)} &= \frac{\nu_{12}^{(n)} E_2^{(n)}}{1 - \nu_{12}^{(n)} \nu_{21}^{(n)}} = \frac{\nu_{21}^{(n)} E_1^{(n)}}{1 - \nu_{12}^{(n)} \nu_{21}^{(n)}}, \\ \tilde{Q}_{22}^{(n)} &= \frac{E_2^{(n)}}{1 - \nu_{12}^{(n)} \nu_{21}^{(n)}}, & \tilde{Q}_{66}^{(n)} &= G_{12}^{(n)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $E_1^{(n)}$  и  $E_2^{(n)}$  — модули упругости материала в направлении осей  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ ,  $\nu_{ij}^{(n)}$  — коэффициенты Пуассона,  $G_{12}^{(n)}$  — модуль сдвига в плоскости  $\bar{x}\bar{y}$ .

Полагается, что вектор электрического поля ортогонален к электродированным поверхностям, а его интенсивность однородна во всём  $n$ -ом пьезоэлектрическом слое [24]:

$$E_{\bar{z}}^{(n)} = -\frac{\psi^{(n)}}{h^{(n)}}, \quad (5)$$

где  $\psi^{(n)}$  — разность электрических потенциалов (напряжение) между верхней и нижней электродированными поверхностями  $n$ -го пьезоэлектрического слоя,  $h^{(n)}$  — толщина  $n$ -го слоя.

Малые деформации плоского сегмента определяются соотношениями классической теории пластин [22]:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}\}^T &= \{\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^0, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^0, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^0\}^T + \bar{z} \{\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^1, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^1, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^1\}^T, \\ \bar{\epsilon}^0 &= \{\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^0, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^0, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^0\}^T = \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right\}^T, \\ \bar{\epsilon}^1 &= \{\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^1, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^1, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^1\}^T = \left\{ -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}, -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2}, -2\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}\bar{y}} \right\}^T, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  и  $\bar{w}$  — перемещения точек срединной поверхности сегмента в направлении осей  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  декартовой системы координат  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .



Обобщённый вектор деформаций  $\bar{\varepsilon}$  записывается с использованием обозначений (6) в виде

$$\bar{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}^0 \\ \bar{\varepsilon}^1 \end{Bmatrix} = \{ \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^0, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^0, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^0, \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^1, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^1, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^1 \}^T. \quad (7)$$

С учётом выражений (1) и (5) вектор усилий и моментов  $\bar{\mathbf{t}}$  определяется как

$$\bar{\mathbf{t}} = \{ N_{\bar{x}\bar{x}}, N_{\bar{y}\bar{y}}, N_{\bar{x}\bar{y}}, M_{\bar{x}\bar{x}}, M_{\bar{y}\bar{y}}, M_{\bar{x}\bar{y}} \}^T = \mathbf{S}\bar{\varepsilon} - \mathbf{G}\bar{\mathbf{E}}_z, \quad (8)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} & \cdots & g_{2N} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ g'_{11} & g'_{12} & \cdots & g'_{1n} & \cdots & g'_{1N} \\ g'_{21} & g'_{22} & \cdots & g'_{2n} & \cdots & g'_{2N} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

где коэффициенты, входящие в матрицы  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{G}$ , вычисляются следующим образом:

$$A_{ij} = \sum_{n=1}^N \tilde{Q}_{ij}^{(n)}(\bar{z}_n - \bar{z}_{n+1}), \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \tilde{Q}_{ij}^{(n)}(\bar{z}_n^2 - \bar{z}_{n+1}^2),$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N \tilde{Q}_{ij}^{(n)}(\bar{z}_n^3 - \bar{z}_{n+1}^3), \quad i, j = 1, 2, 6, \quad (9)$$

$$g_{in} = (\bar{z}_n - \bar{z}_{n+1})\tilde{e}_{3i}^{(n)} = h^{(n)}\tilde{e}_{3i}^{(n)}, \quad g'_{in} = \frac{1}{2}(\bar{z}_n^2 - \bar{z}_{n+1}^2)\tilde{e}_{3i}^{(n)}, \quad i = 1, 2.$$

Нормальная компонента  $E_z$  вектора напряжённости электрического поля  $\bar{\mathbf{E}}$  определяется в каждом  $n$ -ом слое материала согласно уравнению (5) с помощью выражения

$$\bar{\mathbf{E}}_z = -\mathbf{B}_\psi \boldsymbol{\psi} = - \begin{bmatrix} 1/h^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/h^{(2)} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/h^{(n)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1/h^{(N)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi^{(1)} \\ \psi^{(2)} \\ \vdots \\ \psi^{(n)} \\ \vdots \\ \psi^{(N)} \end{Bmatrix}. \quad (10)$$

Уравнение (2) также переписывается с учётом (5):

$$\bar{\mathbf{D}}_z = \mathbf{G}^T \bar{\varepsilon} + \mathbf{H}\bar{\mathbf{E}}_z, \quad \mathbf{H} = \text{diag}(\tilde{\epsilon}_{33}^{(1)}, \tilde{\epsilon}_{33}^{(2)}, \dots, \tilde{\epsilon}_{33}^{(n)}, \dots, \tilde{\epsilon}_{33}^{(N)}). \quad (11)$$

Приведённая постановка предназначена для описания поведения тонких пространственных оболочек, имеющих в общем случае  $N$  ортотропных упругих и пьезоэлектрических слоёв. При моделировании конструкции с пьезоэлектрическим кольцом полагается, что несущая оболочка состоит из  $M$  упругих ортотропных слоёв, а при наличии пьезокольца к ним добавляется ещё один пьезоэлектрический ( $N = M + 1$ ). Учитывая вышесказанное, выражение (8) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{t}} &= \mathbf{S}_s \bar{\varepsilon}, & n &= \overline{1, M}, \\ \bar{\mathbf{t}} &= \mathbf{S}_p \bar{\varepsilon} - \mathbf{G}\bar{\mathbf{E}}_z, & n &= N, \end{aligned} \quad (12)$$

а соотношение (11) используется только при  $n = N$ .



Пьезокольцо представляет собой один слой трансверсально-изотропного материала толщиной  $h_p$  (рис. 1, в), в котором всего две электрические неизвестные: разность потенциалов  $\psi$  (напряжение) и электрический заряд  $q$ . В таком случае матрицы, входящие в выражения (10) и (11), принимают вид

$$\mathbf{G} = \{g_{11}, g_{21}, 0, g'_{11}, g'_{21}, 0\}^T, \quad \mathbf{V}_\psi = 1/h_p, \quad \mathbf{H} = \tilde{\epsilon}_{33}. \quad (13)$$

Математическая постановка задачи динамики электроупругой пространственной оболочки основана на вариационном принципе возможных перемещений, который записывается в матричном виде с учётом работы внешних поверхностных сил и сил инерции [24, 29]:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^P \int_{(S_p)_k} \left( \delta \bar{\mathbf{e}}^T (\mathbf{S}_p)_k \bar{\mathbf{e}} + \delta \bar{\mathbf{e}}^T \mathbf{G} \frac{\psi_k}{(h_p)_k} + \frac{\delta \psi_k}{(h_p)_k} \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{e}} \right) dS - \delta \psi^T \mathbf{C}_p \psi + \\ & + \sum_{k=1}^P \int_{(S_p)_k} \delta \bar{\mathbf{d}}^T (\mathbf{J}_p)_k \ddot{\mathbf{d}} dS + \delta \psi^T \mathbf{q} + \int_{S_s} \delta \bar{\mathbf{e}}^T \mathbf{S}_s \bar{\mathbf{e}} dS + \int_{S_s} \delta \bar{\mathbf{d}}^T \mathbf{J}_s \ddot{\mathbf{d}} dS - \\ & - \int_{S_f} \delta \bar{w} p dS = \int_{S_\sigma} \delta \bar{\mathbf{d}}^T \bar{\mathbf{f}} dS \end{aligned} \quad (14)$$

и дополняется уравнением для последовательной  $RL$ -цепи, связывающим напряжение на каждом пьезоэлементе  $\psi_k$  с соответствующим электрическим зарядом  $q_k$  [24]:

$$\psi - \mathbf{R}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{L}\ddot{\mathbf{q}} = 0. \quad (15)$$

Здесь и далее подстрочными индексами  $s$ ,  $p$  и  $f$  обозначена принадлежность величины к конструкции, пьезоэлектрическому кольцу и жидкости;  $\bar{\mathbf{d}} = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \theta_{\bar{x}}, \theta_{\bar{y}}, \theta_{\bar{z}}\}^T$  — обобщённый вектор перемещений, включающий углы поворота  $\theta_{\bar{x}}$ ,  $\theta_{\bar{y}}$ ,  $\theta_{\bar{z}}$  относительно соответствующих осей системы координат  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ;  $\psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_P\}^T$  и  $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_P\}^T$  — векторы разности потенциалов и электрических зарядов;  $S_s$  — поверхность основной конструкции;  $S_f$  и  $S_\sigma$  — области оболочки, которые взаимодействуют с текущей жидкостью и находятся под действием статической нагрузки  $\bar{\mathbf{f}}$ ;  $p$  — гидродинамическое давление жидкости;  $\mathbf{R} = \text{diag}(R_1, R_2, \dots, R_P)$  и  $\mathbf{L} = \text{diag}(L_1, L_2, \dots, L_P)$  — диагональные матрицы, содержащие значения сопротивлений и индуктивностей  $RL$ -цепей, подключённых к каждому из пьезоэлементов. Матрицы инерции  $\mathbf{J}$  и ёмкостей  $\mathbf{C}_p$  определяются с помощью выражений:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_0 & 0 & 0 & -J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_0 & 0 & 0 & -J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_0 & 0 & 0 & -J_1 \\ -J_1 & 0 & 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & -J_1 & 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & -J_1 & 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & C_P \end{bmatrix},$$

$$J_0 = \sum_{n=1}^N \rho^{(n)} (\bar{z}_n - \bar{z}_{n+1}), \quad J_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \rho^{(n)} (\bar{z}_n^2 - \bar{z}_{n+1}^2),$$

$$J_2 = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N \rho^{(n)} (\bar{z}_n^3 - \bar{z}_{n+1}^3), \quad C_k = \tilde{\epsilon}_{33}^{(k)} A_k / (h_p)_k, \quad (16)$$



где  $\rho^{(n)}$  — плотность  $n$ -го слоя материала,  $C_k$  и  $A_k$  — ёмкость и площадь  $k$ -го пьезоэлектрического слоя.

Основные соотношения, описывающие безвихревую динамику идеальной сжимаемой жидкости объёма  $V_f$  в случае малых возмущений, формулируются в терминах потенциала возмущения скорости  $\phi$  [30–32]. Соответствующее волновое уравнение записывается в декартовой системе координат  $(x, y, z)$  и совместно с условием непроницаемости и граничными условиями преобразуется к слабой форме [32]:

$$\int_{V_f} \nabla F_m \cdot \nabla \hat{\phi} dV + \int_{V_f} F_m \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} dV + \int_{V_f} F_m \frac{2U}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t \partial x} dV - \int_{V_f} F_m \frac{U^2}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} dV - \int_{S_f} F_m \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} dS - \int_{S_f} F_m U \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} dS = 0, \quad m = \overline{1, m_f}. \quad (17)$$

Здесь  $\hat{\phi}$  и  $\hat{w}$  — пробные решения для потенциала скорости и нормальных перемещений конструкции  $\bar{w}$ ;  $c$  — скорость звука в жидкой среде;  $t$  — время;  $F_m$  и  $m_f$  — базисные функции и их количество.

Давление текущей жидкости  $p$ , входящее в уравнение (14), вычисляется по линеаризованной формуле Бернулли

$$p = -\rho_f \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} \right), \quad (18)$$

где  $\rho_f$  — плотность жидкости.

При решении уравнения (17) используются следующие граничные условия:

$$x = 0 : \phi = 0, \quad x = L_s : \partial \phi / \partial x = 0. \quad (19)$$

## 2. Конечно-элементная реализация

После подстановки выражений (7) и (18) в (14) получим связанную систему уравнений (14), (15), (17). При построении её конечно-элементного аналога пробное решение для потенциала возмущения скорости  $\hat{\phi}$ , базисные функции  $F_m$ , разность электрических потенциалов  $\psi$ , электрический заряд  $q$ , мембранные перемещения оболочки  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$  описываются с использованием билинейных функций формы Лагранжа. Изгибные перемещения  $\bar{w}$ , углы поворота  $\theta_x$  и  $\theta_y$  аппроксимируются несовместными кубическими полиномами Эрмита [33]. Конечные элементы, которые граничат с жидкостью, содержат по семь узловых неизвестных:  $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$  и  $\phi$ . Каждый  $k$ -й пьезоэлемент имеет всего две искомым величины: разность потенциалов  $\psi_k$  и заряд  $q_k$ . Они являются общими для всех его узлов. Дискретизация расчётных областей жидкости и конструкции осуществляется с использованием пространственных 8-узловых призматических и плоских четырёхугольных конечных элементов соответственно. После применения известных процедур метода конечных элементов получим [33, 34]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{r}, \quad (20)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_f & \mathbf{C}_{fs} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{sf} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{R} \end{bmatrix},$$



$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_s & \mathbf{K}_{sp} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{ps} & -\mathbf{K}_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f & \mathbf{A}_{fs} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{sf} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{u} = \{\phi, \mathbf{d}, \psi, \mathbf{q}\}^T$ ,  $\mathbf{r} = \{0, \mathbf{f}, 0, 0\}^T$ , а типовые матрицы отдельно взятого конечного элемента определяются известным образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_f^e &= \int_{V_f} \frac{1}{c^2} \mathbf{F}^T \mathbf{F} dV, & \bar{\mathbf{M}}_s^e &= \int_{S_s} \mathbf{N}^T \mathbf{J}_s \mathbf{N} dS + \int_{(S_p)_k} \mathbf{N}^T (\mathbf{J}_p)_k \mathbf{N} dS, & (21) \\ \mathbf{C}_f^e &= \int_{V_f} \frac{2U}{c^2} \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \mathbf{F} dV, & \bar{\mathbf{C}}_{fs}^e &= - \int_{S_f} \mathbf{F}^T \mathbf{N}_w dS, & \bar{\mathbf{C}}_{sf}^e &= \int_{S_f} \rho_f \mathbf{N}_w^T \mathbf{F} dS, \\ \mathbf{K}_f^e &= \int_{V_f} (\nabla \mathbf{F})^T \nabla \mathbf{F} dV, & \bar{\mathbf{K}}_s^e &= \int_{S_s} \mathbf{B}^T \mathbf{S}_s \mathbf{B} dS + \int_{(S_p)_k} \mathbf{B}^T (\mathbf{S}_p)_k \mathbf{B} dS, \\ \bar{\mathbf{K}}_{sp}^e &= \int_{(S_p)_k} \mathbf{B}^T \mathbf{G} \frac{1}{(h_p)_k} dS, & (\mathbf{K}_p^e)_k &= C_k, & \bar{\mathbf{K}}_{ps}^e &= \int_{(S_p)_k} \frac{1}{(h_p)_k} \mathbf{G}^T \mathbf{B} dS, \\ \mathbf{A}_f^e &= \int_{V_f} \frac{U^2}{c^2} \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dV, & \bar{\mathbf{A}}_{fs}^e &= - \int_{S_f} U \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} dS, & \bar{\mathbf{A}}_{sf}^e &= \int_{S_f} \rho_f U \mathbf{N}_w^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dS. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{N}_w$  — функции формы для потенциала возмущения скорости жидкости, обобщённого вектора узловых перемещений оболочки  $\bar{\mathbf{d}}$  и его нормальной составляющей  $\bar{w}$ ;  $\mathbf{B}$  — матрица градиентов, связывающая вектор деформаций с вектором узловых перемещений оболочечного конечного элемента;  $\mathbf{I}$  — единичная матрица. В определяющих соотношениях (6) отсутствует уравнение для поворота вокруг оси  $\bar{z}$ . С целью устранения этой проблемы в матрицу жёсткости конечного элемента оболочки добавляются нулевые строки и столбцы и вводится фиктивный момент [21]. Матрицы с чертой сверху ( $\bar{\mathbf{K}}_s^e$ ,  $\bar{\mathbf{M}}_s^e$  и т. д.) формируются в системе координат  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , связанной с боковой поверхностью конструкции. Преобразование узловых перемещений и сил к глобальной декартовой системе координат  $(x, y, z)$  осуществляется для каждого элемента с помощью матрицы направляющих косинусов известным образом [21, 33, 35]. При отсутствии пьезоэлектрического слоя слагаемое, содержащее интеграл по поверхности  $(S_p)_k$ , не учитывается.

Формулировка задачи о собственных и вынужденных установившихся гармонических колебаниях электроупругой тонкостенной оболочки, взаимодействующей с текущей жидкостью, основана на представлении решения в форме экспоненты. В первом случае используется выражение (22), а во втором — (23):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \{\phi(\mathbf{x}, t), \mathbf{d}(\mathbf{x}, t), \psi(\mathbf{x}, t), \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)\}^T = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) e^{i\lambda t}, \quad (22)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \{\phi(\mathbf{x}, t), \mathbf{d}(\mathbf{x}, t), \psi(\mathbf{x}, t), \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)\}^T = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) e^{i\Omega t}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) e^{i\Omega t}, \quad (23)$$

где  $\tilde{\mathbf{u}}$  — функция, зависящая только от координат  $\mathbf{x}$ ;  $\Omega$  — окружная частота приложенного воздействия;  $i$  — мнимая единица;  $\lambda = \omega + i\gamma$  — характеристический показатель, где  $\omega$  — собственная частота колебаний, а  $\gamma$  — величина, характеризующая демпфирование системы.

Подстановка выражений (22) и (23) в систему уравнений (20) позволяет получить

$$(-\lambda^2 \mathbf{M} + i\lambda \mathbf{C} + \mathbf{K} + \mathbf{A}) \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (24)$$

$$(-\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{C} + \mathbf{K} + \mathbf{A}) \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{r}}. \quad (25)$$



Уравнение (24) сводится к обобщённой задаче на собственные значения (26) для несимметричных матриц удвоенной размерности [36], которая решается с использованием неявно перезапускаемого метода Арнольди [37]:

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{K} + \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + i\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} i\lambda \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} = 0. \quad (26)$$

Численная реализация приведённой постановки выполнена в среде MATLAB с привлечением возможностей пакета ANSYS для создания конечно-элементной сетки.

В данной работе рассматриваются тонкостенные конструкции с разными вариантами кинематических граничных условий на краях. При их обозначении используются следующие сокращения: F — свободный край, S — свободное опирание ( $v = w = 0$ ), C — жёсткое закрепление ( $u = v = w = 0, \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ ).

### 3. Верификация численного алгоритма

В данном разделе продемонстрирована работоспособность разработанного конечно-элементного алгоритма и достоверность получаемого с его помощью решения. Результаты, полученные с использованием изложенной выше математической постановки, обозначены через «shell». Сравнение собственных частот колебаний свободно опертой на обоих краях (SS) цилиндрической оболочки ( $L_s = 5$  м,  $R_s = 1$  м,  $h_s = 0.02$  м), полностью выполненной из пьезокерамики PZT-5H [38], приведено в табл. 1. Через  $j$  и  $m$  обозначено количество полуволн в окружном и меридиональном направлениях. В расчётах использовались следующие граничные условия для потенциала скоростей:  $\phi = 0$  при  $x = 0$  и  $x = L_s$ . Здесь и далее через «open circuit» (o/c) и «short circuit» (s/c) обозначены электрические граничные условия, соответствующие режимам работы пьезоэлемента с разомкнутыми и замкнутыми электродами. Представленные данные демонстрируют хорошее совпадение результатов, полученных при наличии жидкости и её отсутствии.

В следующем примере рассмотрена жёстко закреплённая на обоих краях круговая цилиндрическая оболочка, содержащая внутри неподвижную жидкость ( $U = 0$ ). На её внешней поверхности расположено одно незамкнутое кольцо из пьезоэлектрического материала, к которому подключена последовательная  $RL$ -цепь (рис. 1, а). В расчётах использовались приведённые ниже параметры, если не указано иное:

*изотропная оболочка*

$$L_s = 231 \text{ мм}, \quad R_s = 77.25 \text{ мм}, \quad h_s = 1.5 \text{ мм}, \quad E_1 = E_2 = E_s = 205 \text{ ГПа}, \\ \nu_{12} = \nu_{21} = \nu_s = 0.3, \quad \rho = \rho_s = 7800 \text{ кг/м}^3;$$

*пьезокерамическое кольцо*

$$L_p = 50 \text{ мм}, \quad h_p = 1 \text{ мм}, \quad x_p/L_s = 0.5, \quad \theta = 63^\circ, \\ Q_{11} = Q_{22} = 109 \text{ ГПа}, \quad Q_{12} = 61 \text{ ГПа}, \quad Q_{13} = Q_{23} = 54 \text{ ГПа}, \\ Q_{33} = 93 \text{ ГПа}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = 24 \text{ ГПа}, \quad \rho = \rho_p = 7500 \text{ кг/м}^3, \\ e_{31} = e_{32} = -4.9 \text{ Кл/м}^2, \quad e_{33} = 14.9 \text{ Кл/м}^2, \quad e_{15} = e_{24} = 10.6 \text{ Кл/м}^2, \\ \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 820\epsilon_0, \quad \epsilon_{33} = 840\epsilon_0, \quad \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

*идеальная жидкость*

$$\rho_f = 997 \text{ кг/м}^3, \quad c = 1500 \text{ м/с}.$$



Таблица 1 / Table 1

Сравнение собственных частот колебаний (Гц) свободно опёртой на обоих краях цилиндрической оболочки при разных электрических граничных условиях  
 A comparison of the natural vibration frequencies (Hz) of a simply supported shell with or without fluid at different combinations of electrical boundary conditions

Без жидкости						С жидкостью					
$(j, m)$		Short circuit		Open circuit		$(j, m)$		Short circuit		Open circuit	
$j$	$m$	[38]	shell	[38]	shell	$j$	$m$	[38]	shell	[38]	shell
1	1	88.23	88.13	93.79	93.73	1	1	44.76	44.61	48.27	48.11
	2	216.26	217.24	228.23	229.39		2	107.39	107.80	115.61	115.97
	0	275.96	280.59	275.96	280.59		3	154.13	154.93	166.07	166.71
	3	311.65	313.21	330.65	332.76		4	189.33	190.10	204.21	204.72
	4	366.97	368.50	392.13	393.95		5	217.19	217.52	234.47	234.47
2	1	37.32	36.81	40.11	39.60	2	1	19.92	19.58	21.46	21.32
	2	114.21	114.11	122.68	122.62		2	62.60	62.37	67.62	67.49
	3	193.79	194.31	207.92	208.57		3	108.58	108.65	117.25	117.43
	4	259.35	260.09	278.43	279.32		4	149.02	149.26	160.91	161.28
	5	308.46	308.55	331.55	331.66		5	182.82	182.81	197.40	197.59

В табл. 2 приведены величины действительных и мнимых частей комплексных собственных значений  $\lambda$ , полученные с использованием изложенного подхода, в сравнении с результатами расчёта на основе трёхмерных уравнений линейной теории пьезоупругости [39]. В отличие от предыдущего примера здесь использовались следующие граничные условия для жидкой среды:  $\partial\phi/\partial n = 0$  при  $x = 0$  и  $\phi = 0$  при  $x = L_s$ . Относительная ошибка не превышает 0.5% для частот колебаний  $\omega$  и 2% для демпфирования  $\gamma$ . Несмотря на это, используемая оболочечная постановка качественно верно описывает появление в спектре новой собственной частоты колебаний. Она возникает в результате образования резонансного  $RLC$ -контура при шунтировании пьезоэлемента внешней  $RL$ -цепью. Соответствующая мода колебаний выделена жирным начертанием в табл. 2. При отсутствии в системе других механизмов диссипации энергии её отличительной чертой является большая величина мнимой части  $\gamma$ .

Таблица 2 / Table 2

Сравнение собственных частот колебаний цилиндрической оболочки с жидкостью и пьезоэлектрическим кольцом, подключённым к внешней  $RL$ -цепи (Гц)  
 A comparison of the natural vibration frequencies of a shell with quiescent fluid and piezoelectric element, connected to an external  $RL$ -circuit (Hz)

$i$	Short circuit		Open circuit		$R = 500 \text{ Ом}, L = 0.9 \text{ Гн}$			
	ANSYS	shell	ANSYS	shell	3D [39]		shell	
	$\omega_i$	$\omega_i$	$\omega_i$	$\omega_i$	$\omega_i$	$\gamma_i$	$\omega_i$	$\gamma_i$
1	983.765	985.234	985.087	986.571	<b>774.862</b>	<b>43.709</b>	<b>772.545</b>	<b>43.277</b>
2	985.547	987.493	985.552	987.495	989.464	0.001	987.489	0.001
3	1066.227	1069.960	1066.227	1069.960	988.536	0.443	988.536	0.438
4	1067.960	1071.515	1069.403	1073.008	1072.100	0.000	1069.960	0.000
5	1149.400	1149.917	1149.638	1150.164	1077.845	0.284	1074.621	0.278
6	1210.480	1208.447	1211.613	1209.544	1152.672	0.030	1150.371	0.030

Постановка задачи о собственных колебаниях при использовании трёхмерных уравнений линейной пьезоупругости для описания поведения пьезоэлемента при





наличии внешней  $RL$ -цепи приводит к неклассической проблеме на собственные значения [39, 40]. Она решается методом Мюллера с использованием библиотеки Intel® Math Kernel Library для основных операций с разреженными матрицами. Несмотря на применение технологии параллельных вычислений, расчёты занимают длительное время из-за необходимости несколько раз находить определитель системы на каждой итерации. Использование подхода, изложенного в разд. 1, позволяет получить квадратичную задачу на собственные значения (26), решение которой требует меньше вычислительных ресурсов и позволяет сократить время расчётов в некоторых случаях в двести и более раз.

#### 4. Численные результаты

В данном разделе показана возможность использования пьезоэлектрического элемента в виде разомкнутого кольца, подключённого к внешней  $RL$ -цепи, для демпфирования колебаний тонкостенной оболочки, взаимодействующей с потоком жидкости. Расположение пьезокольца на поверхности конструкции, в котором оно функционирует наиболее эффективно, определяется численно из условия максимума коэффициента электромеханической связи  $K_i$ , полученного для  $i$ -ой частоты (формы) колебаний [1]

$$K_i = \sqrt{\left(\frac{\omega_i^{o/c}}{\omega_i^{s/c}}\right)^2 - 1} \rightarrow \max, \quad (27)$$

где  $\omega_i^{o/c}$  и  $\omega_i^{s/c}$  — собственные частоты колебаний системы в режимах о/с и с/с, имеющие номер  $i$  в возрастающем спектре.

Анализ изменения комплексных собственных значений электромеханической системы в зависимости от сопротивления  $R$  и индуктивности  $L$  электрической цепи позволяет подобрать их оптимальные величины, обеспечивающие максимальную скорость затухания свободных колебаний. В качестве критерия используется условие

$$f(R, L) = |\Delta\lambda_i| = |\lambda_i - \lambda_{ic}| \rightarrow \min, \quad (28)$$

где  $\lambda_i$  и  $\lambda_{ic}$  — комплексные собственные значения, соответствующие демпфируемой ( $i$ -ой) моде колебаний и моде электрической цепи, подключённой к пьезокольцу.

Начальное приближение в задаче оптимизации (28) находится с помощью формул, предложенных в [1]. Здесь и далее обозначение «pp» соответствует выражениям, полученным в [1] с использованием техники размещения полюсов,

$$L_i^{pp} = \frac{1}{C_i (\omega_i^{s/c})^2 (1 + K_i^2)^2}, \quad R_i^{pp} = \frac{2K_i}{C_i \omega_i^{s/c} \sqrt{(1 + K_i^2)^3}}, \quad C_i = C_0 (1 - K_i^2), \quad (29)$$

а обозначение «tf» — выражениям, полученным в [1] на основе передаточной функции,

$$L_i^{tf} = \frac{1}{C_i (\omega_i^{s/c})^2 (1 + K_i^2)}, \quad R_i^{tf} = \frac{\sqrt{2}K_i}{C_i \omega_i^{s/c} (1 + K_i^2)}, \quad (30)$$

где  $C_0$  — статическая ёмкость пьезоэлемента.

По мнению авторов работы [1], выражение (29) должно обеспечить совпадение собственных частот колебаний конструкции и электрической цепи, а также максимальную скорость их затухания. Соотношения (30), в свою очередь, должны приводить к



наибольшему снижению амплитуды вынужденных установившихся гармонических колебаний. В публикациях [20, 39] показано, что сформулированные в [1] аналитические выражения не позволяют получить действительно оптимальные значения индуктивности и сопротивления с точки зрения скорости затухания колебаний.

Пассивное демпфирование колебаний круговой цилиндрической оболочки осуществляется с помощью незамкнутого пьезоэлектрического кольца, соединённого с внешней  $RL$ -цепью. Выбор параметров, обеспечивающих его максимально эффективное функционирование, осуществляется из решения задачи оптимизации (27), в которой коэффициент электромеханической связи является функцией координаты  $x_p$  и угла  $\theta$  (рис. 1, а). Последнее означает, что пьезокерамическое тело имеет переменную длину в окружном направлении. В качестве иллюстрации на рис. 2 приведена поверхность  $K_1(\xi, \theta)$  для конфигурации, рассмотренной во втором примере разд. 3. Максимальное значение  $K_1$  обозначено крестиком. Безразмерная координата  $\xi = x_p/L_s$  определяет положение центра пьезокольца по длине конструкции. Низшая форма колебаний данной оболочки имеет четыре полуволны в окружном направлении, что соответствует числу локальных максимумов функции  $K_1(\xi, \theta)$ . Все следующие расчёты выполнялись при оптимальных параметрах  $\xi = 0.5$  и  $\theta = 63^\circ$ .

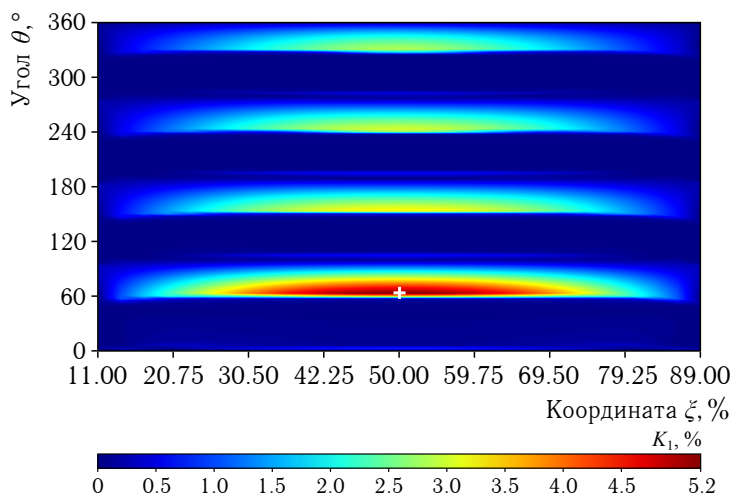


Рис. 2. Распределение коэффициента электромеханической связи  $K_1(\xi, \theta)$  (цвет онлайн)

Fig. 2. Electromechanical coupling coefficient  $K_1(\xi, \theta)$  (color online)

В табл. 3 приведены параметры последовательной  $RL$ -цепи, обеспечивающие демпфирование низшей частоты (формы) колебаний оболочки, взаимодействующей с внутренним потоком жидкости. Его скорость течения выбиралась из условия  $U = 0.5U_D$ , где  $U_D$  — критическая скорость, при которой наступает потеря устойчивости в виде дивергенции. Параметры  $RL$ -цепи, подключённой к пьезокольцу, определены численно с использованием условия (28) и приведены в табл. 3. Там же представлены значения, вычисленные по аналитическим формулам (29) и (30).

Из результатов следует, что условие (28) обеспечивает наибольшую скорость затухания свободных колебаний и наименьшим образом влияет на частотный спектр. Последнее подтверждается тем фактом, что значения  $\omega_1$  и  $\omega_{1c}$  отличаются от частоты колебаний  $\omega_1^{o/c}$ , полученной при отсутствии электрической цепи, всего на 0.02%. При этом возросшая относительно значений «open circuit» мнимая часть  $\gamma_1$  свидетельствует об увеличении скорости затухания свободных колебаний. Характерный вид изоповерхности  $f(R, L)$  приведён на рис. 3, а в окрестности экстремума. Значения параметров, вычисленные разными способами, показаны точками 1–3. Данный рисунок наглядно демонстрирует их расположение относительно минимума функции  $f(R, L)$ .

Амплитудно-частотные характеристики, демонстрирующие демпфирование вынужденных установившихся гармонических колебаний, приведены на рис. 3, б. Они

Таблица 3 / Table 3

Оптимальные параметры внешней  $RL$ -цепи, вычисленные различными способами, и комплексные собственные значения (Гц)  
 Optimal parameters of the external  $RL$ -circuit calculated in various ways and complex eigenvalues (Hz)

Вариант	Параметры цепи		$\lambda_1$		$\lambda_{1c}$	
	$R$ , Ом	$L$ , Гн	$\omega_1$	$\gamma_1$	$\omega_{1c}$	$\gamma_{1c}$
Условие (28)	506.60	0.8591	787.099	22.160	786.934	22.365
Наgood [1], pp	499.15	0.8711	792.861	15.106	776.014	28.318
Наgood [1], tf	353.54	0.8740	800.472	12.507	767.474	18.118
Open circuit	$1 \times 10^{15}$	$1 \times 10^{15}$	787.171	0.034	—	—

получены при действии на оболочку внутреннего равномерного давления 100 кПа. Все из рассмотренных вариантов обеспечивают снижение амплитуды колебаний первого резонанса в несколько десятков раз, но параметры, определённые по формулам (30), позволяют достичь наилучшего результата (кривая 3).

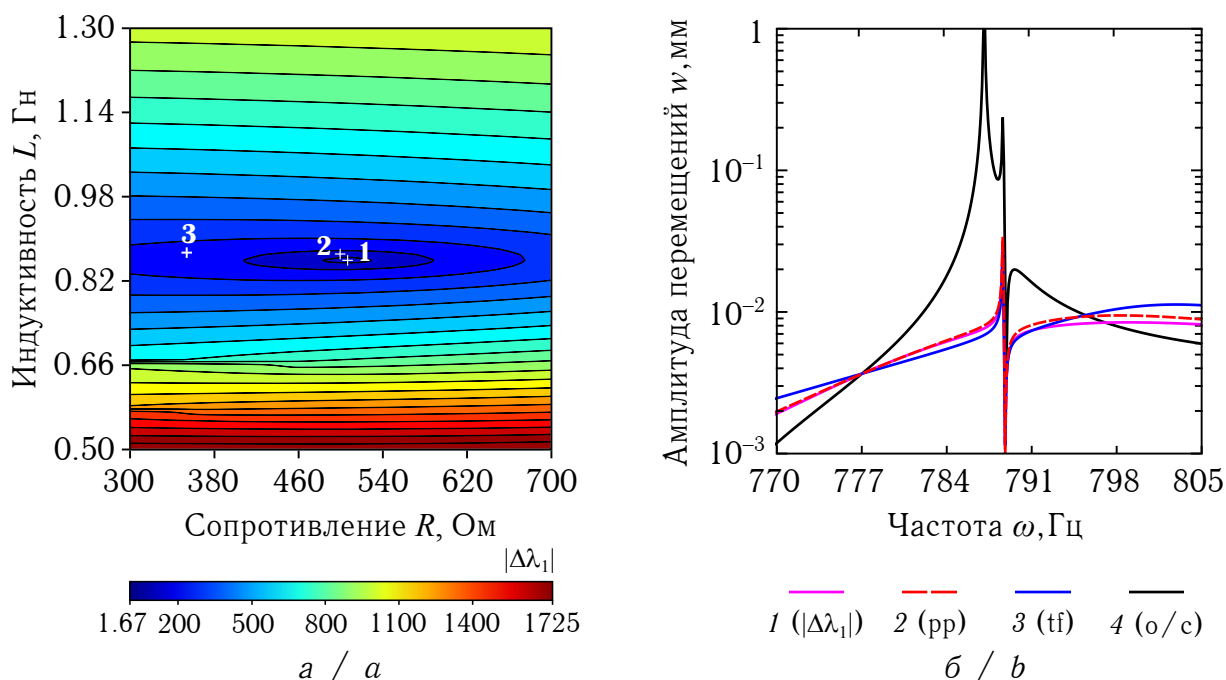


Рис. 3. Изоповерхность  $f(R, L)$  (а) и амплитудно-частотные характеристики (б), полученные для оболочки при скорости течения жидкости  $U = 0.5U_D$  (цвет онлайн)  
 Fig. 3. Isosurface  $f(R, L)$  (a) and frequency response curves (b) obtained for a shell at fluid velocity  $U = 0.5U_D$  (color online)

### Заклучение

Сформулирована математическая постановка задачи и разработан конечно-элементный алгоритм её численной реализации, предназначенные для анализа собственных и вынужденных установившихся гармонических колебаний взаимодействующих с текущей жидкостью пространственных оболочек с пьезоэлектрическими элементами, подключёнными к внешним электрическим цепям.

Проведён анализ изменения комплексных собственных значений электромеханической системы в зависимости от параметров электрической цепи, состоящей из



последовательно соединённых резистора и катушки индуктивности. Из решения задачи оптимизации подобраны их оптимальные величины, обеспечивающие наибольшую скорость затухания свободных колебаний. Показано, что предложенный подход позволяет получить более высокие показатели демпфирования, чем традиционно используемые для этой цели аналитические выражения.

Построены амплитудно-частотные характеристики, демонстрирующие снижение амплитуды вынужденных гармонических колебаний при разных скоростях течения жидкости. На их примере проведено сравнение различных способов вычисления оптимальных параметров шунтирующей  $RL$ -цепи.

### Список литературы

1. Hagood N. W., von Flotow A. H. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks // Journal of Sound and Vibration. 1991. Vol. 146, iss. 2. P. 243–268. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90762-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90762-9)
2. Park C. H., Inman D. J. Enhanced piezoelectric shunt design // Shock and Vibration. 2003. Vol. 10. P. 127–133. <https://doi.org/10.1155/2003/863252>
3. Fleming A. J., Moheimani S. O. R. Control orientated synthesis of high-performance piezoelectric shunt impedances for structural vibration control // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2005. Vol. 13, iss. 1. P. 98–112. <https://doi.org/10.1109/TCST.2004.838547>
4. Porfiri M., Maurini C., Pouget J.-P. Identification of electromechanical modal parameters of linear piezoelectric structures // Smart Materials and Structures. 2007. Vol. 16, iss. 2. P. 323–331. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/16/2/010>
5. Thomas O., Ducarne J., Deü J.-F. Performance of piezoelectric shunts for vibration reduction // Smart Materials and Structures. 2012. Vol. 21, iss. 1. Art. 015008. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/21/1/015008>
6. Soltani P., Kerschen G., Tondreau G., Deraemaeker A. Piezoelectric vibration damping using resonant shunt circuits: An exact solution // Smart Materials and Structures. 2014. Vol. 23, iss. 12. Art. 125014. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/23/12/125014>
7. Heuss O., Salloum R., Mayer D., Melz T. Tuning of a vibration absorber with shunted piezoelectric transducers // Archive of Applied Mechanics. 2016. Vol. 86. P. 1715–1732. <https://doi.org/10.1007/s00419-014-0972-5>
8. Toftekær J. F., Benjeddou A., Høgsberg J. General numerical implementation of a new piezoelectric shunt tuning method based on the effective electromechanical coupling coefficient // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2020. Vol. 27, iss. 22. P. 1908–1922. <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1549297>
9. Gripp J. A. B., Rade D. A. Vibration and noise control using shunted piezoelectric transducers: A review // Mechanical Systems and Signal Processing. 2018. Vol. 112. P. 359–383. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.04.041>
10. Presas A., Luo Y., Wang Z., Valentin D., Egusquiza M. A review of PZT patches applications in submerged systems // Sensors. 2018. Vol. 18, iss. 7. 2251. <https://doi.org/10.3390/s18072251>
11. Marakakis K., Tairidis G. K., Koutsianitis P., Stavroulakis G. E. Shunt piezoelectric systems for noise and vibration control: A review // Frontiers in Built Environment. 2019. Vol. 5. 64. <https://doi.org/10.3389/fbuil.2019.00064>
12. Moheimani S. O. R., Fleming A. J. Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping. 1st ed. London : Springer, 2006. 287 p. <https://doi.org/10.1007/1-84628-332-9>
13. Zhang J. M., Chang W., Varadan V. K., Varadan V. V. Passive underwater acoustic damping using shunted piezoelectric coatings // Smart Materials and Structures. 2001. Vol. 10, iss. 2. P. 414–420. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/10/2/404>



14. Larbi W., Deü J.-F., Ohayon R. Finite element formulation of smart piezoelectric composite plates coupled with acoustic fluid // *Composite Structures*. 2012. Vol. 94, iss. 2. P. 501–509. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.08.010>
15. Sun Y., Li Z., Huang A., Li Q. Semi-active control of piezoelectric coating's underwater sound absorption by combining design of the shunt impedances // *Journal of Sound and Vibration*. 2015. Vol. 355. P. 19–38. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.06.036>
16. Larbi W. Numerical modeling of sound and vibration reduction using viscoelastic materials and shunted piezoelectric patches // *Computers & Structures*. 2020. Vol. 232. 105822. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.07.024>
17. Pernod L., Lossouarn B., Astolfi J.-A., Deü J.-F. Vibration damping of marine lifting surfaces with resonant piezoelectric shunts // *Journal of Sound and Vibration*. 2021. Vol. 496. 115921. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115921>
18. Lekomtsev S. V., Oshmarin D. A., Sevodina N. V. An approach to the analysis of hydroelastic vibrations of electromechanical systems, based on the solution of the non-classical eigenvalue problem // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2021. Vol. 28. P. 1957–1964. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1716120>
19. Iurlov M. A., Kamenskikh A. O., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Passive suppression of resonance vibrations of a plate and parallel plates assembly, interacting with a fluid // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2022. Vol. 22, iss. 9. 2250101. <https://doi.org/10.1142/S0219455422501012>
20. Matveenko V. P., Iurlova N. A., Oshmarin D. A., Sevodina N. V., Iurlov M. A. An approach to determination of shunt circuits parameters for damping vibrations // *International Journal of Smart and Nano Materials*. 2018. Vol. 9, iss. 2. P. 135–149. <https://doi.org/10.1080/19475411.2018.1461144>
21. Zienkiewicz O. C. *Finite Element Method in Engineering Science*. London : McGraw-Hill, 1971. 521 p.
22. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. 2nd ed. Boca Raton : CRC Press, 2004. 858 p. <https://doi.org/10.1201/b12409>
23. ANSI/IEEE Std176-1987. IEEE Standard on Piezoelectricity. New York : IEEE, 1988. 66 p. <https://doi.org/10.1109/IEEESTD.1988.79638>
24. Thomas O., Deü J.-F., Ducarne J. Vibrations of an elastic structure with shunted piezoelectric patches: Efficient finite element formulation and electromechanical coupling coefficients // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2009. Vol. 80, iss. 2. P. 235–268. <https://doi.org/10.1002/nme.2632>
25. Moon S. H., Kim S. J. Active and passive suppressions of nonlinear panel flutter using finite element method // *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. 2001. Vol. 39, № 11. P. 2042–2050. <https://doi.org/10.2514/2.1217>
26. Yao G., Li F.-M. The stability analysis and active control of a composite laminated open cylindrical shell in subsonic airflow // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2014. Vol. 25, iss. 3. P. 259–270. <https://doi.org/10.1177/1045389X13491020>
27. Benjeddou A., Deü J.-F., Letombe S. Free vibrations of simply-supported piezoelectric adaptive plates: An exact sandwich formulation // *Thin-Walled Structures*. 2002. Vol. 40, iss. 7–8. P. 573–593. [https://doi.org/10.1016/S0263-8231\(02\)00013-7](https://doi.org/10.1016/S0263-8231(02)00013-7)
28. Sheng G. G., Wang X. Thermoelastic vibration and buckling analysis of functionally graded piezoelectric cylindrical shells // *Applied Mathematical Modelling*. 2010. Vol. 34, iss. 9. P. 2630–2643. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.11.024>
29. Allik H., Hughes J. R. Finite element method for piezoelectric vibration // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1970. Vol. 2, iss. 2. P. 151–157. <https://doi.org/10.1002/nme.1620020202>



30. Ильгамов М. А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. Москва : Наука, 1969. 182 с. EDN: KYUCTU
31. Paidoussis M. P. Fluid-structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow : in 2 vols. 2nd ed. Vol. 2. London : Elsevier Academic Press, 2016. 944 p. <https://doi.org/10.1016/C2011-0-08058-4>
32. Бочкарёв С. А., Лekomцев С. В., Матвеев В. П. Гидроупругая устойчивость прямоугольной пластины, взаимодействующей со слоем текущей идеальной жидкости // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2016. № 6. P. 108–120. <https://dx.doi.org/10.7868/S0568528116060049>
33. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The Finite Element Method : in 3 vols. 5th ed. Vol. 2. Solid Mechanics. Oxford ; Boston : Butterworth-Heinemann, 2000. 459 p.
34. Reddy J. N. An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: With applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics. 2nd ed. Oxford University Press, 2015. 768 p.
35. Bochkarov S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P., Senin A. N. Hydroelastic stability of partially filled coaxial cylindrical shells // Acta Mechanica. 2019. Vol. 230, iss. 11. P. 3845–3860. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02453-4>
36. Tisseur F., Meerbergen K. The quadratic eigenvalue problem // SIAM Review. 1988. Vol. 43, iss. 2. P. 235–286. <https://doi.org/10.1137/S0036144500381988>
37. Lehoucq R. B., Sorensen D. C. Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 1996. Vol. 17, iss. 4. P. 789–821. <https://doi.org/10.1137/S0895479895281484>
38. Larbi W., Deü J.-F., Ohayon R. Vibration of axisymmetric composite piezoelectric shells coupled with internal fluid // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2007. Vol. 71, iss. 12. P. 1412–1435. <https://doi.org/10.1002/nme.1987>
39. Lekomtsev S. V., Oshmarin D. A., Sevodina N. V. An approach to the analysis of hydroelastic vibrations of electromechanical systems, based on the solution of the non-classical eigenvalue problem // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2021. Vol. 28, iss. 19. P. 1957–1964. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1716120>
40. Yurlova N. A., Sevodina N. V., Oshmarin D. A., Iurlov M. A. Algorithm for solving problems related to the natural vibrations of electro-viscoelastic structures with shunt circuits using ANSYS data // International Journal of Smart and Nano Materials. 2019. Vol. 10, iss. 2. P. 156–176. <https://doi.org/10.1080/19475411.2018.1542356>

### References

1. Hagood N. W., von Flotow A. H. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, vol. 146, iss. 2, pp. 243–268. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90762-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90762-9)
2. Park C. H., Inman D. J. Enhanced piezoelectric shunt design. *Shock and Vibration*, 2003, vol. 10, pp. 127–133. <https://doi.org/10.1155/2003/863252>
3. Fleming A. J., Moheimani S. O. R. Control orientated synthesis of high-performance piezoelectric shunt impedances for structural vibration control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2005, vol. 13, iss. 1, pp. 98–112. <https://doi.org/10.1109/TCST.2004.838547>
4. Porfiri M., Maurini C., Pouget J.-P. Identification of electromechanical modal parameters of linear piezoelectric structures. *Smart Materials and Structures*, 2007, vol. 16, iss. 2, pp. 323–331. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/16/2/010>
5. Thomas O., Ducarne J., Deü J.-F. Performance of piezoelectric shunts for vibration reduction. *Smart Materials and Structures*, 2012, vol. 21, iss. 1, Art. 015008. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/21/1/015008>



6. Soltani P., Kerschen G., Tondreau G., Deraemaeker A. Piezoelectric vibration damping using resonant shunt circuits: An exact solution. *Smart Materials and Structures*, 2014, vol. 23, iss. 12, Art. 125014. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/23/12/125014>
7. Heuss O., Salloum R., Mayer D., Melz T. Tuning of a vibration absorber with shunted piezoelectric transducers. *Archive of Applied Mechanics*, 2016, vol. 86, pp. 1715–1732. <https://doi.org/10.1007/s00419-014-0972-5>
8. Toftekar J. F., Benjeddou A., Høgsberg J. General numerical implementation of a new piezoelectric shunt tuning method based on the effective electromechanical coupling coefficient. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2020, vol. 27, iss. 22, pp. 1908–1922. <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1549297>
9. Gripp J. A. B., Rade D. A. Vibration and noise control using shunted piezoelectric transducers: A review. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, vol. 112, pp. 359–383. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.04.041>
10. Presas A., Luo Y., Wang Z., Valentin D., Egusquiza M. A review of PZT patches applications in submerged systems. *Sensors*, 2018, vol. 18, iss. 7, 2251. <https://doi.org/10.3390/s18072251>
11. Marakakis K., Tairidis G. K., Koutsianitis P., Stavroulakis G. E. Shunt piezoelectric systems for noise and vibration control: A review. *Frontiers in Built Environment*, 2019, vol. 5, 64. <https://doi.org/10.3389/fbuil.2019.00064>
12. Moheimani S. O. R., Fleming A. J. *Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping*. 1st ed. London, Springer, 2006. 287 p. <https://doi.org/10.1007/1-84628-332-9>
13. Zhang J. M., Chang W., Varadan V. K., Varadan V. V. Passive underwater acoustic damping using shunted piezoelectric coatings. *Smart Materials and Structures*, 2001, vol. 10, iss. 2, pp. 414–420. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/10/2/404>
14. Larbi W., Deü J.-F., Ohayon R. Finite element formulation of smart piezoelectric composite plates coupled with acoustic fluid. *Composite Structures*, 2012, vol. 94, iss. 2, pp. 501–509. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.08.010>
15. Sun Y., Li Z., Huang A., Li Q. Semi-active control of piezoelectric coating's underwater sound absorption by combining design of the shunt impedances. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, vol. 355, pp. 19–38. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.06.036>
16. Larbi W. Numerical modeling of sound and vibration reduction using viscoelastic materials and shunted piezoelectric patches. *Computers & Structures*, 2020, vol. 232, 105822. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.07.024>
17. Pernod L., Lossouarn B., Astolfi J.-A., Deü J.-F. Vibration damping of marine lifting surfaces with resonant piezoelectric shunts. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, vol. 496, 115921. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115921>
18. Lekomtsev S. V., Oshmarin D. A., Sevodina N. V. An approach to the analysis of hydroelastic vibrations of electromechanical systems, based on the solution of the non-classical eigenvalue problem. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2021, vol. 28, pp. 1957–1964. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1716120>
19. Iurlov M. A., Kamenskikh A. O., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Passive suppression of resonance vibrations of a plate and parallel plates assembly, interacting with a fluid. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2022, vol. 22, iss. 9, 2250101. <https://doi.org/10.1142/S0219455422501012>
20. Matveenko V. P., Iurlova N. A., Oshmarin D. A., Sevodina N. V., Iurlov M. A. An approach to determination of shunt circuits parameters for damping vibrations. *International Journal of Smart and Nano Materials*, 2018, vol. 9, iss. 2, pp. 135–149. <https://doi.org/10.1080/19475411.2018.1461144>



21. Zienkiewicz O. C. *Finite Element Method in Engineering Science*. London, McGraw-Hill, 1971. 521 p.
22. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. 2nd ed. Boca Raton, CRC Press, 2004. 858 p. <https://doi.org/10.1201/b12409>
23. *ANSI/IEEE Std176-1987. IEEE Standard on Piezoelectricity*. New York, IEEE, 1988. 66 p. <https://doi.org/10.1109/IEEESTD.1988.79638>
24. Thomas O., Deü J.-F., Ducarne J. Vibrations of an elastic structure with shunted piezoelectric patches: Efficient finite element formulation and electromechanical coupling coefficients. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009, vol. 80, iss. 2, pp. 235–268. <https://doi.org/10.1002/nme.2632>
25. Moon S. H., Kim S. J. Active and passive suppressions of nonlinear panel flutter using finite element method. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 2001, vol. 39, iss. 11, pp. 2042–2050. <https://doi.org/10.2514/2.1217>
26. Yao G., Li F.-M. The stability analysis and active control of a composite laminated open cylindrical shell in subsonic airflow. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2014, vol. 25, iss. 3, pp. 259–270. <https://doi.org/10.1177/1045389X13491020>
27. Benjeddou A., Deü J.-F., Letombe S. Free vibrations of simply-supported piezoelectric adaptive plates: An exact sandwich formulation. *Thin-Walled Structures*, 2002, vol. 40, iss. 7–8, pp. 573–593. [https://doi.org/10.1016/S0263-8231\(02\)00013-7](https://doi.org/10.1016/S0263-8231(02)00013-7)
28. Sheng G. G., Wang X. Thermoelastic vibration and buckling analysis of functionally graded piezoelectric cylindrical shells. *Applied Mathematical Modelling*, 2010, vol. 34, iss. 9, pp. 2630–2643. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.11.024>
29. Allik H., Hughes J. R. Finite element method for piezoelectric vibration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1970, vol. 2, iss. 2, pp. 151–157. <https://doi.org/10.1002/nme.1620020202>
30. Il'gamov M. A. *Kolebaniya uprigikh obolochek, soderzhaschikh zhidkost' i gaz* [Vibrations of Elastic Shells Containing Liquid and Gas]. Moscow, Nauka, 1969. 182 p. (in Russian).
31. Païdoussis M. P. *Fluid-structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*. Vol. 2. 2nd ed. London, Elsevier Academic Press, 2016. 944 p. <https://doi.org/10.1016/C2011-0-08058-4>
32. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Hydroelastic stability of a rectangular plate interacting with a layer of ideal flowing fluid. *Fluid Dynamics*, 2016, vol. 51, iss. 6, pp. 821–833. <https://doi.org/10.1134/S0015462816060132>
33. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. *The Finite Element Method. Vol. 2. Solid Mechanics*. 5th ed. Oxford, Boston, Butterworth-Heinemann, 2000. 459 p.
34. Reddy J. N. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: With applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics*. 2nd ed. Oxford University Press, 2015. 768 p.
35. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P., Senin A. N. Hydroelastic stability of partially filled coaxial cylindrical shells. *Acta Mechanica*, 2019, vol. 230, iss. 11, pp. 3845–3860. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02453-4>
36. Tisseur F., Meerbergen K. The quadratic eigenvalue problem. *SIAM Review*, 1988, vol. 43, iss. 2, pp. 235–286. <https://doi.org/10.1137/S0036144500381988>
37. Lehoucq R. B., Sorensen D. C. Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 1996, vol. 17, iss. 4, pp. 789–821. <https://doi.org/10.1137/S0895479895281484>
38. Larbi W., Deü J.-F., Ohayon R. Vibration of axisymmetric composite piezoelectric shells coupled with internal fluid. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, vol. 71, iss. 12, pp. 1412–1435. <https://doi.org/10.1002/nme.1987>





39. Lekomtsev S. V., Oshmarin D. A., Sevodina N. V. An approach to the analysis of hydroelastic vibrations of electromechanical systems, based on the solution of the non-classical eigenvalue problem. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2021, vol. 28, iss. 19, pp. 1957–1964. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1716120>
40. Yurlova N. A., Sevodina N. V., Oshmarin D. A., Iurlov M. A. Algorithm for solving problems related to the natural vibrations of electro-viscoelastic structures with shunt circuits using ANSYS data. *International Journal of Smart and Nano Materials*, 2019, vol. 10, iss. 2. pp. 156–176. <https://doi.org/10.1080/19475411.2018.1542356>

Поступила в редакцию / Received 26.04.2022

Принята к публикации / Accepted 18.11.2022

Опубликована / Published 31.05.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 227–240  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 227–240  
[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru) <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-227-240>, EDN: VGQVUH

Научная статья

УДК 539.376:539.4.014.13

## Кинетика остаточных напряжений в тонкостенных цилиндрических образцах после двухстороннего поверхностного упрочнения в условиях ползучести при жестких ограничениях на угловые и осевые линейные перемещения

В. П. Радченко, Е. Е. Деревянка✉

Самарский государственный технический университет, Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244

**Радченко Владимир Павлович**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики, [radchenko.vp@samgtu.ru](mailto:radchenko.vp@samgtu.ru), <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>, AuthorID: 113673

**Деревянка Екатерина Евгеньевна**, аспирант кафедры прикладной математики и информатики, [derevyanka.ee@samgtu.ru](mailto:derevyanka.ee@samgtu.ru), <https://orcid.org/0000-0001-9229-6766>, AuthorID: 949549

**Аннотация.** Приведена методика решения задачи о релаксации остаточных напряжений после двухстороннего поверхностного упрочнения полого цилиндра в условиях ползучести при жестко зафиксированных первоначально заданных осевой деформации и угла закручивания. Решение построено для сложных режимов нагружения, включающих чистую термоэкспозицию, осевую нагрузку, крутящий момент, внутреннее давление и их комбинации. Численный анализ выполнен на примере тонкостенного цилиндра из стали X18H10T при температуре  $T = 600^\circ\text{C}$ , внутренняя и внешняя поверхности которого упрочнены в режиме ультразвукового упрочнения. Реконструкция начальных полей остаточных напряжений и пластических деформаций выполнена на основании известной экспериментальной информации о распределении осевой и окружной компонент тензора напряжений в тонких поверхностно упрочненных областях на внешней и внутренней поверхностях. Построена феноменологическая модель ползучести стали X18H10T при  $T = 600^\circ\text{C}$ . Задача реологического деформирования в пределах первых двух стадий ползучести решалась численно с использованием дискретизации по времени и по радиусу. Расчетным путем установлено, что при наличии жестких ограничений на угловые и осевые линейные перемещения наблюдается уменьшение скорости релаксации остаточных напряжений по сравнению со случаем, когда эти ограничения отсутствуют. Приведены графики, отражающие кинетику остаточных напряжений в зависимости от последовательности приложения температурно-силовых нагрузок в различные временные сечения.

**Ключевые слова:** тонкостенные цилиндрические трубки, двухстороннее поверхностное упрочнение, остаточные напряжения, ползучесть, релаксация, растяжение, кручение, внутреннее давление, ограничения на перемещения

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-29-00434).

**Для цитирования:** Радченко В. П., Деревянка Е. Е. Кинетика остаточных напряжений в тонкостенных цилиндрических образцах после двухстороннего поверхностного упрочнения в




условиях ползучести при жестких ограничениях на угловые и осевые линейные перемещения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 227–240. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-227-240>, EDN: VGQVUH

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Kinetics of residual stresses in thin-walled cylindrical specimens after bilateral surface hardening under creep conditions with rigid constraints on angular and axial linear displacements

V. P. Radchenko, E. E. Derevyanka 

Samara State Technical University, 244 Molodogvardeyskaya St., Samara 443100, Russia

Vladimir P. Radchenko, radchenko.vp@samgtu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>, AuthorID: 113673

Ekaterina E. Derevyanka, derevyanka.ee@samgtu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9229-6766>, AuthorID: 949549

**Abstract.** A method for solving the problem of relaxing residual stresses after bilateral surface hardening of a hollow cylinder under creep conditions with rigid constraints on the initially specified axial deformation and twist angle is presented. The solution is developed for complex loading regimes including pure thermal exposure, axial loading, torque, internal pressure, and their combinations. A numerical simulation was conducted on a thin-walled cylindrical specimen comprised of X18N10T steel, subjected to a temperature of  $T = 600^\circ\text{C}$ , with the inner and outer surfaces subjected to ultrasonic peening. The reconstruction of the initial fields of residual stresses and plastic deformations was carried out based on the known experimental information on the distribution of axial and circumferential stress components in thin surface-hardened areas on the inner and outer surfaces. A phenomenological model of creep of steel alloy X18N10T at  $T = 600^\circ\text{C}$  is constructed. The rheological deformation problem within the first two stages of creep was numerically solved using time and radius discretization. The calculations established that the presence of rigid constraints on angular and linear axial displacements resulted in a decrease in the rate of relaxation of residual stresses compared to the case where these constraints are absent. Graphs illustrating the kinetics of residual stresses with respect to the sequence of temperature and loading forces at different timestamps are presented.

**Keywords:** thin-walled cylindrical tubes, bilateral surface hardening, residual stresses, creep, relaxation, tension, torsion, internal pressure, displacement constraints

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-29-00434).

**For citation:** Radchenko V. P., Derevyanka E. E. Kinetics of residual stresses in thin-walled cylindrical specimens after bilateral surface hardening under creep conditions with rigid constraints on angular and axial linear displacements. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 227–240 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-227-240>, EDN: VGQVUH

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



## Введение

Решение проблемы повышения показателей надежности деталей ответственных элементов конструкций при минимизации материалоемкости — сложная задача. Наряду с созданием новых материалов и конструкторских решений, что достаточно затратно, широко используются технологические процедуры при изготовлении металлических деталей, одной из которых является поверхностное пластическое деформирование (ППД).

Наличие сжимающих остаточных напряжений в упрочненном слое приводит к повышению характеристик мало- и многоциклового усталости, микротвердости и других показателей по сравнению с неупрочненными деталями [1–9]. В частности, в тонкостенных продуктопроводах авиационных пневмогидросистем усталостные трещины образуются как на внешней, так и на внутренней поверхностях [10]. Этот факт служит обоснованием применения методов ППД и к таким деталям.

С фундаментальных позиций механики деформируемого твердого тела задачи формирования и релаксации остаточных напряжений для полых и сплошных цилиндрических тел в условиях термоэкспозиции при действии растягивающих осевых нагрузок, крутящих моментов, давления рассматривались во многих работах [11–16], но в основном для одностороннего упрочнения внешней поверхности.

Новый тип задач такого рода рассмотрен в [12], где решена задача для сплошного поверхностно упрочненного цилиндра при жестких ограничениях на линейные осевые и угловые деформации. В развитие этого направления в настоящей работе ставится задача разработки математической модели и реализации на ее основе метода расчета кинетики остаточных напряжений на внешней и внутренней упрочненных поверхностях тонкостенных цилиндрических тел в условиях ползучести при температурно-силовом нагружении осевой нагрузкой, крутящим моментом и внутренним давлением при жестких ограничениях на линейные осевые и угловые перемещения одного из торцевых сечений.

## 1. Постановка задачи

Исследуется проблема оценки релаксации остаточных напряжений с начальным двухсторонним напряженно-деформированным состоянием (НДС) в тонкостенных цилиндрических образцах, наведенным в результате процедуры поверхностного пластического деформирования, в условиях высокотемпературной ползучести и сложных режимах нагружения — осевого растяжения, кручения, внутреннего давления и их комбинаций при ограничениях на линейные осевые и угловые перемещения.

Для решения задачи используется цилиндрическая система координат  $(r, \theta, z)$ , где через  $\sigma_i$  обозначаются компоненты тензора остаточных напряжений (ОН), а через  $q_i$  ( $i = r, \theta, z$ ) — компоненты тензора остаточных пластических деформаций (ПД). Недиagonalные компоненты тензоров здесь не учитываются ввиду малости их значений по сравнению с нормальными, что подтверждается теоретическими и экспериментальными исследованиями [13].

Методика решения включает в себя реализацию следующих этапов:

- 1) восстановление напряженно-деформированного состояния в полом цилиндрическом образце после процедуры двухстороннего поверхностного упрочнения при «комнатной» температуре;
- 2) расчет полей остаточных напряжений с учетом «мгновенной» температурно-силовой нагрузки;

- 3) наложение жестких ограничений, возникших вследствие нагружения, на осевые и угловые перемещения;
- 4) расчет релаксации остаточных напряжений и приложенных усилий на фоне высокотемпературной ползучести материала при сложном нагружении (растяжение, кручение, внутреннее давление и их комбинации).

## 2. Формирование напряженно-деформированного состояния после поверхностного пластического деформирования и температурно-силовой нагрузки

На первом этапе решения рассматриваемой задачи (момент времени  $t = 0 - 0$ ) требуется восстановить в тонкостенном цилиндрическом образце поля остаточных напряжений и пластических деформаций, сформированные после процедуры двухстороннего поверхностного упрочнения.

Для этой цели воспользуемся феноменологическим методом, подробно изложенным в работе [11] и апробированным на экспериментальных данных для трубок  $\varnothing 12 \times 1$  мм из стали X18H10T после двухстороннего виброударного поверхностного упрочнения дробью. В качестве замечания отметим, что в отличие от феноменологического метода многочисленные работы [17–21] по прямому моделированию напряженно-деформированного состояния деталей после упрочнения с использованием специализированного программного обеспечения дают в большей степени качественную, нежели количественную, картину распределения остаточных напряжений, поскольку учет всех технологических факторов является сложной задачей в силу случайности многих факторов.

Расчетные соотношения для определения НДС в полых цилиндрах после упрочнения хорошо известны [11] и имеют следующий вид:

$$\sigma_r(r) = \frac{1}{r} \int_{R_1}^r \sigma_\theta(\xi) d\xi \quad (R_1 \leq r \leq R_2); \quad (1)$$

$$q_\theta(r) = \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{E_0(1 + \alpha\mu)^2} r^{-\nu} \int_{R_1}^r \xi^{\nu-1} [\sigma_r(\xi) + (1 + \alpha)\sigma_\theta(\xi)] d\xi - \frac{1 + \mu}{E_0(1 + \alpha\mu)} [(1 - \mu)\sigma_\theta(r) - \mu\sigma_r(r)], \quad \nu = \frac{2 + \alpha}{1 + \alpha\mu}; \quad (2)$$

$$q_z(r) = \alpha q_\theta(r), \quad q_r(r) = -q_\theta(r)(1 + \alpha); \quad (3)$$

$$\varepsilon_z^0 = \frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} \xi \left\{ q_z(\xi) - \frac{\mu}{E_0} [\sigma_r(\xi) + \sigma_\theta(\xi)] \right\} d\xi; \quad (4)$$

$$\sigma_z(r) = E_0 [\varepsilon_z^0 - q_z(r)] + \mu [\sigma_r(r) + \sigma_\theta(r)], \quad (5)$$

где  $E_0$  — модуль Юнга при температуре упрочнения  $T_0$ ;  $\mu$  — коэффициент Пуассона;  $\alpha$  — феноменологический параметр анизотропии упрочнения.

Из (1)–(5) следует, что поля остаточных напряжений и деформаций однозначно определяются, если известна экспериментальная зависимость для  $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r)$  и параметр  $\alpha$ . Но экспериментальные данные для  $\sigma_\theta$  можно определить лишь в тонком упрочненном приповерхностном слое (рис. 1, в, г). Поэтому в [22] предложена экстраполяция экспериментальных данных для  $R_1 \leq r \leq R_2$  в виде аналитической зависимости

$$\sigma_\theta(r) = \sigma_0 - \sigma_1 \exp\left(-\frac{(r - R_1 - h_1^*)^2}{b_1^2}\right) - \sigma_2 \exp\left(-\frac{(R_2 - r - h_2^*)^2}{b_2^2}\right), \quad (6)$$



где значения параметров после упрочнения внутренней ( $R_1 = 5$  мм) и внешней ( $R_2 = 6$  мм) поверхностей трубок X18H10T следующие:  $h_1^* = -0.04$  мм,  $h_2^* = 0.05$  мм,  $\sigma_0 = 88.4$  МПа,  $\sigma_1 = 283.2$  МПа,  $\sigma_2 = 981.6$  МПа,  $b_1 = 0.087$  мм,  $b_2 = 0.105$  мм. В [11] приведено и значение  $\alpha = 4.2$ . Расчетные эпюры остаточных напряжений для окружной и осевой компонент в приповерхностных внутренней и внешних областях при значениях  $E_0 = 1.98 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu = 0.285$  представлены на рис. 1, *в-е* (маркеры — экспериментальные данные, пунктирные линии 1 — расчет).

При «мгновенном» температурно-силовом нагружении (момент времени  $t=0+0$ ) с «комнатной» температуры  $T=T_0$  ( $E=E_0$ ) до температуры «эксплуатации»  $T=T_1$  ( $E=E_1$ ) полагаем, что дополнительные пластические деформации не возникают, и к моменту полного прогрева до температуры  $T=T_1$  справедливо считать, что (2) выполняется и при модуле Юнга  $E=E_1$ . Поэтому достаточно все компоненты тензора остаточных напряжений умножить на коэффициент  $E_1/E_0$ . Заметим, что ввиду «мгновенного» прогрева образца температурное поле не влияет на напряженное состояние образца и способствует только объемному изменению его геометрии. Так, в момент времени  $t=0+0$  в результате действия внешних усилий (осевой продольной силы  $F$ , крутящего момента  $M$ , внутреннего давления  $q$ ) компоненты тензора остаточных напряжений испытывают «скачок» на величину «рабочих» напряжений, соответствующих упругому решению краевой задачи:

$$\begin{aligned}\sigma_z(r, 0+0) &= \frac{E_1}{E_0}\sigma_z(r) + \frac{F}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}; \\ \sigma_\theta(r, 0+0) &= \frac{E_1}{E_0}\sigma_\theta(r) + \frac{qR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[ 1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right]; \\ \sigma_r(r, 0+0) &= \frac{E_1}{E_0}\sigma_r(r) + \frac{qR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[ 1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right]; \quad \tau(r, 0+0) = \frac{M}{J}r,\end{aligned}\quad (7)$$

а для компонент тензора полных деформаций имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon_i(r, 0+0) &= [(1 + \mu)\sigma_i(r, 0+0) - \mu\sigma^*] / E_1 + q_i(r) \quad (i = r, \theta, z), \\ \gamma(r, 0+0) &= \tau(r, 0+0) / G_1, \quad G_1 = E_1 / 2(1 + \mu).\end{aligned}\quad (8)$$

Здесь и далее  $\tau(r, t) = \sigma_{\theta z}(r, t)$  — касательное напряжение;  $\gamma(r, t) = 2\varepsilon_{\theta z}(r, t)$  — деформация сдвига;  $J = \pi(R_2^4 - R_1^4) / 2$  — момент инерции сечения относительно оси цилиндра;  $E_1$  и  $G_1$  — модули Юнга и сдвига материала при температуре  $T = T_1$ ;  $\sigma^* = \sigma_r(r, 0+0) + \sigma_\theta(r, 0+0) + \sigma_z(r, 0+0)$ .

Описанные выше соотношения представляют собой начальное напряженно-деформированное состояние упрочненного полого цилиндрического образца и являются исходными данными для решения краевой задачи релаксации остаточных напряжений при ползучести в условиях фиксированных жестких ограничений на осевую деформацию и угол поворота, которые сформулированы ниже.

### 3. Методика решения краевой задачи релаксации остаточных напряжений в условиях ползучести при ограничениях на осевые и угловые перемещения

Постановка краевой задачи релаксации остаточных напряжений тонкостенного упрочненного цилиндрического образца при комбинированном нагружении осевой



силой, крутящим моментом и внутренним давлением и фиксированных ограничениях на угловые и осевые перемещения включает в себя следующие соотношения:

– уравнения равновесия:

$$r \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr} + \sigma_r(r, t) = \sigma_\theta(r, t); \quad (9)$$

$$2\pi \int_{R_1}^{R_2} \sigma_z(r, t) r dr = F(t); \quad 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \tau(r, t) r^2 dr = M(t), \quad (10)$$

где  $\sigma_r(r, t)$ ,  $\sigma_\theta(r, t)$ ,  $\sigma_z(r, t)$ ,  $\tau(r, t)$  – радиальное, окружное, осевое и касательное напряжения;  $F(t)$  – продольная растягивающая сила;  $M(t)$  – крутящий момент;

– уравнение совместности деформаций:

$$r \frac{d\varepsilon_\theta(r, t)}{dr} + \varepsilon_\theta(r, t) = \varepsilon_r(r, t), \quad (11)$$

где  $\varepsilon_r(r, t)$ ,  $\varepsilon_\theta(r, t)$  – радиальная и окружная компоненты тензора полных деформаций;

– гипотезу плоских сечений:

$$\varepsilon_z(r, t) = \varepsilon_z(t) = \varepsilon_z^*, \quad \varepsilon_z^* = \varepsilon(r, 0 + 0) = \text{const}, \quad (12)$$

где  $\varepsilon_z(r, t)$  – осевая компонента тензора полных деформаций;

– гипотезу прямых радиусов:

$$\gamma(r, t) = r\varphi(t) = r\varphi^*, \quad \varphi^* = \gamma(r, 0 + 0)/r = \text{const}, \quad (13)$$

где  $\gamma(r, t)$  – деформация сдвига,  $\varphi(t)$  – относительный угол закручивания;

– краевые условия:

$$\forall t \geq 0 \quad \sigma_r(R_1, t) = -q; \quad \sigma_r(R_2, t) = 0; \quad (14)$$

– уравнения для полной деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(r, t) &= e_i(r, t) + q_i(r) + p_i(r, t) \quad (i = r, \theta, z), \\ \gamma(r, t) &= \gamma^e(r, t) + \gamma^p(r, t), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $e_i$ ,  $\gamma^e$  – компоненты тензора упругих деформаций;  $p_i$ ,  $\gamma^p$  – компоненты тензора деформаций ползучести, рассчитываемые по соответствующей теории ползучести для заданного материала изделия. Отметим, что в начальный момент времени  $t = 0$  значения компонент тензора деформаций ползучести равны нулю.

Затем, используя описанные выше соотношения и применяя методику работ [12, 14], где реализовано решение краевой задачи релаксации остаточных напряжений поверхностно упрочненного сплошного цилиндра при совместном действии растяжения и кручения, используя закон Гука для упругих деформаций, путем несложных математических преобразований и последовательным исключением  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_z$  задача сводится к неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка относительно радиальной компоненты  $\sigma_r$ :

$$r^2 \frac{d^2\sigma_r(r, t)}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr} = g(r, t), \quad (16)$$



решение которого имеет вид

$$\sigma_r(r, t) = \frac{qR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[ 1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right] + \frac{1}{2} \int_{R_1}^r \frac{g(\xi, t)}{\xi} d\xi + \frac{1}{2r^2} \left[ \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( \int_{R_1}^{R_2} g(\xi, t) \xi d\xi - R_2^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{g(\xi, t)}{\xi} d\xi \right) - \int_{R_1}^r g(\xi, t) \xi d\xi \right], \quad (17)$$

где

$$g(r, t) = \frac{E_1}{1 - \mu^2} \left[ \frac{2 + \alpha}{1 + \alpha} q_r(r) + p_r(r, t) - p_\theta(r, t) - r \left( \frac{dp_\theta(r, t)}{dr} + \mu \frac{dp_z(r, t)}{dr} \right) + \frac{r(1 + \alpha\mu)}{1 + \alpha} \frac{dq_r(r)}{dr} \right].$$

С учетом (17) получены соотношения и для окружной и осевой компонент тензора остаточных напряжений:

$$\sigma_\theta(r, t) = \frac{d}{dr} [r\sigma_r(r, t)]; \quad (18)$$

$$\sigma_z(r, t) = E_1 [\varepsilon_z^* - q_z(r) - p_z(r, t)] + \mu [\sigma_r(r, t) + \sigma_\theta(r, t)]. \quad (19)$$

Распределение  $\tau(r, t)$  находим с учетом закона Гука  $\gamma^e = \tau(r, t)/G_1$ , соотношений (13) и (15):

$$\tau(r, t) = G_1 [r\varphi^* - \gamma^p(r, t)], \quad (20)$$

где  $\varphi^*$  — фиксированный угол закручивания, определенный в момент силового нагружения.

Таким образом, для определения характеристик напряженно-деформированного состояния рассматриваемого полого цилиндрического образца в условиях ползучести при зафиксированных ограничениях на осевые и угловые деформации в произвольный момент времени  $t$  ( $t \in [0, t^*]$ ,  $t^*$  — заданное время расчета ползучести) и начальных условиях (7), (8) используется расчетная методика, включающая соотношения (17)–(20).

#### 4. Результаты расчетов и их анализ

В рамках настоящей работы в качестве объекта исследования рассматривались цилиндрические трубки  $\varnothing 12 \times 1$  мм из стали X18H10T после виброударного ультразвукового упрочнения внешней и внутренней поверхностей.

Для реализации методики расчета релаксации остаточных напряжений соотношения (17)–(20) дополняются определяющими уравнениями ползучести материала. В литературе отсутствуют экспериментальные данные для стали X18H10T при температуре  $T = 600^\circ\text{C}$ . В связи с этим в нашей работе, по рекомендации авторов исследования [11], для модельных расчетов ползучести используются данные экспериментов раннего аналога стали X18H10T — 08X18H9 из работы [23]. На основе этих данных и характера зависимостей деформаций ползучести от времени при температуре  $T = 600^\circ\text{C}$  и шести уровнях нагружения в [11] была построена реологическая модель, базирующаяся на теории ползучести Ю. П. Самарина [24], имеющая следующий вид:

$$p_{ij} = v_{ij} + w_{ij}; \quad (21)$$



$$\dot{w}_{ij} = \frac{3}{2} c S^{m-1} \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma^0 \right); \quad (22)$$

$$\sigma^0 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}; \quad (23)$$

$$v_{\nu\nu}(t) = (1 + \mu') \beta_{\nu\nu}(t) - \mu' (\beta_{11}(t) + \beta_{22}(t) + \beta_{33}(t)); \quad (24)$$

$$\dot{\beta}_{\nu\nu}(t) = \begin{cases} \lambda [b S^{n-1} \sigma_{\nu\nu} - \beta_{\nu\nu}(t)], & [b S^{n-1} \sigma_{\nu\nu} - \beta_{\nu\nu}(t)] \sigma_{\nu\nu} > 0; \\ 0, & [b S^{n-1} \sigma_{\nu\nu} - \beta_{\nu\nu}(t)] \sigma_{\nu\nu} \leq 0; \end{cases} \quad (25)$$

где  $p_{ij}$  — тензор деформаций ползучести;  $w_{ij}$  и  $v_{ij}$  — тензоры деформаций вязкого течения и вязкопластической (необратимой) компоненты деформаций ползучести  $p_{ij}$  ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ), суммирование по индексу  $\nu\nu$  не производится, так как расчет  $v_{ij}$  выполняется в главных осях;  $\mu'$  — коэффициент Пуассона для компоненты  $v_{\nu\nu}$  (согласно рекомендациям [25] можно принять  $\mu' = 0.42$ );  $S$  — интенсивность напряжений;  $c, n, \lambda, b, m$  — реологические константы.

Константы модели (21)–(25) определялись согласно методике [24], и в результате авторами [11] были получены следующие значения при  $T_1 = 600^\circ\text{C}$  ( $E_1 = 1.53 \cdot 10^5$  МПа):  $c = 3.33 \cdot 10^{-20}$ ,  $m = 7.2$ ,  $\lambda = 0.17$ ,  $b = 4.27 \cdot 10^{-9}$ ,  $n = 3.087$ .

Задача ползучести решалась известным методом «шагов по времени» [11, 12, 14], при этом для интегрирования соотношений в (22)–(25) использовался метод Эйлера.

Далее рассмотрим влияние сформулированных ограничений (12), (13) и различных режимов сложного нагружения на релаксацию остаточных напряжений на основе данных численного эксперимента.

На рис. 1 приведены эпюры радиальной  $\sigma_r$  (а, б), окружной  $\sigma_\theta$  (в, г) и осевой  $\sigma_z$  (д, е) компонент тензора остаточных напряжений в различные временные срезы при комбинированном нагружении осевой растягивающей силой  $F = 3455.75$  Н, крутящим моментом  $M = 4391.68$  Н·мм и внутренним давлением  $q = 20$  МПа за расчетное время  $t = 50$  ч. Релаксация ОН в моменты времени  $t = \{0.1; 1; 50\}$  ч показана кривыми 4–6, причем штриховая линия отражает распределение ОН при отсутствии ограничений на перемещения. Из анализа представленных графиков следует, что при наличии жестких ограничений на угловые и осевые линейные деформации наблюдается уменьшение скорости релаксации остаточных напряжений при сравнении с релаксацией без ограничений, что с точки зрения инженерной практики является положительным фактором.

Детально исследованы процессы релаксации при различных комбинациях первоначально заданных растягивающей нагрузки  $F = \{0; 3455.75\}$  Н, крутящего момента  $M = \{0; 4391.68\}$  Н·мм и внутреннего давления  $q = \{0; 20\}$  МПа. На рис. 2 продемонстрированы зависимости для осевого напряжения  $\sigma_z(R, t)$  на внутренней ( $R = R_1$ ) и внешней ( $R = R_2$ ) поверхностях цилиндра после температурно-силовой нагрузки во время ползучести за  $t = 50$  ч при ограничениях на угловые и осевые линейные перемещения и комбинированных режимах нагружения (1 — термоэкспозиция, 2 — кручение + внутреннее давление, 3 — растяжение + внутреннее давление, 4 — кручение + растяжение + внутреннее давление). Заметим, что во всех рассмотренных режимах нагружения происходит довольно быстрый процесс релаксации остаточных напряжений, к моменту времени  $t = 0.1$  ч все компоненты в 3–4 раза меньше (по модулю) по сравнению с начальными значениями после упрочнения, и через  $t = 50$  ч наблюдается почти полная релаксация остаточных напряжений на упрочненных поверхностях (кроме компонент  $\sigma_z = \sigma_z(r, t)$ ).

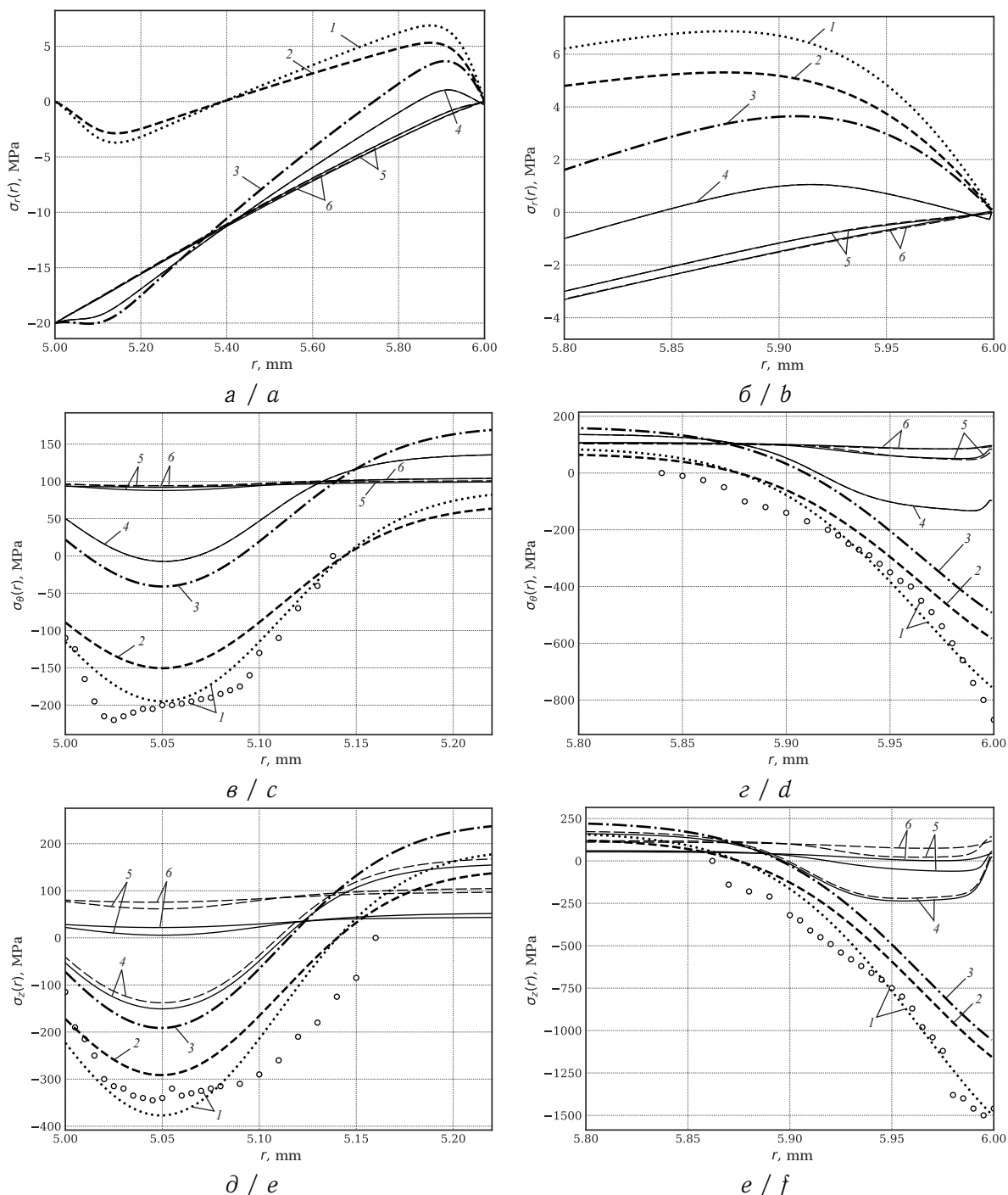


Рис. 1. Расчетные эпюры остаточных напряжений  $\sigma_r(r, t)$  (а, б),  $\sigma_\theta(r, t)$  (в, г),  $\sigma_z(r, t)$  (д, е) при температурно-силовой нагрузке при ползучести: а – по всей толщине образца; в, д – со стороны внутренней поверхности; б, г, е – со стороны внешней поверхности. Обозначения: 1 – после упрочнения при  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  ( $t = 0 - 0$ ); 2 и 3 – температурная и силовая нагрузка при  $T_1 = 600^\circ\text{C}$  и усилиях  $F = 3455.75\text{ Н}$ ,  $M = 4981.68\text{ Н} \cdot \text{мм}$ ,  $q = 20\text{ МПа}$  ( $t = 0 + 0$ ); 4-6 – в процессе ползучести при  $t = \{0.1; 1; 50\}$  ч; маркеры – экспериментальные данные

Fig. 1. Graphs of calculated residual stresses  $\sigma_r(r, t)$  (a, b),  $\sigma_\theta(r, t)$  (c, d),  $\sigma_z(r, t)$  (e, f) at temperature-force loading at different timestamps during creep: a – along the entire depth of the specimen; c, e – from the inner surface; b, d, f – from the outer surface. Definitions: 1 – after the surface hardening procedure at  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  ( $t = 0 - 0$ ); 2 and 3 – after temperature-force loading at  $T_1 = 600^\circ\text{C}$  and forces  $F = 3455.75\text{ N}$ ,  $M = 4981.68\text{ N} \cdot \text{mm}$ ,  $q = 20\text{ MPa}$  ( $t = 0 + 0$ ); 4-6 – during the creep process at  $t = \{0.1; 1; 50\}$  hours; markers – experimental data

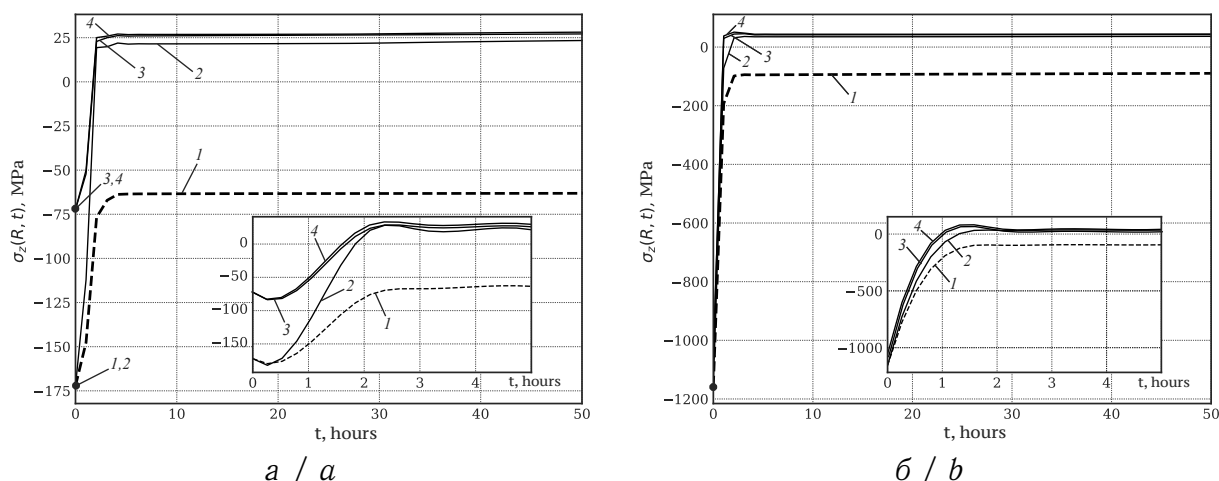


Рис. 2. Эпюры релаксации осевых напряжений  $\sigma_z(R, t)$  на внутренней (а) и внешней (б) поверхностях упрочненного полого цилиндра на фоне ползучести за время  $t=50$  ч при ограничениях на перемещения и комбинированных режимах нагружения: 1 – термоэкспозиция; 2 – кручение + внутреннее давление; 3 – растяжение + внутреннее давление; 4 – кручение + растяжение + внутреннее давление

Fig. 2. Axial stresses  $\sigma_z(R, t)$  relaxation diagrams on the inner (a) and outer (b) surfaces of the hardened hollow cylinder during the creep process for the time  $t = 50$  h with displacement constraints and combined loadings: 1 – thermal exposure; 2 – torsion + internal pressure; 3 – axial tension + internal pressure; 4 – torsion + axial tension + internal pressure

## Заключение

Разработан и реализован метод расчета кинетики остаточных напряжений в тонкостенных полых цилиндрических образцах после двухстороннего поверхностного пластического упрочнения в условиях ползучести при жестких ограничениях на угловые и осевые линейные перемещения, вызванные приложенными растягивающей нагрузкой и крутящим моментом с учетом дополнительного воздействия от внутреннего давления.

Расчетным путем установлено, что при наличии жестких ограничений на угловые и осевые линейные перемещения наблюдается уменьшение скорости релаксации остаточных напряжений по сравнению со случаем, когда эти ограничения отсутствуют, что свидетельствует об эффективности технологии ППД и при высоких температурах в условиях сложного нагружения.

Полученные результаты играют важную роль с точки зрения инженерной практики, поскольку рассмотренные полые трубки из стали X18H10T используются как продуктопроводы в авиадвигателестроении, где ППД является штатной технологической операцией.

## Список литературы

1. Кузнецов Н. Д., Цейтлин В. И., Волков В. И. Технологические методы повышения надежности деталей машин. Москва : Машиностроение, 1993. 304 с.
2. Биргер И. А. Остаточные напряжения. Москва : Машгиз, 1963. 233 с.
3. Сулима А. М., Шулов В. А., Ягодкин Ю. Д. Поверхностный слой и эксплуатационные свойства деталей машин. Москва : Машиностроение, 1988. 197 с.
4. Кудрявцев И. В. Поверхностный наклеп для повышения прочности и долговечности деталей машин поверхностным пластическим деформированием. Москва : Машиностроение, 1969. 214 с.



5. *Soady K. A.* Life assessment methodologies incorporating shot peening process effects: Mechanistic consideration of residual stresses and strain hardening. Part 1 – Effect of shot peening on fatigue resistance // *Materials Science and Technology*. 2013. Vol. 29, iss. 6. P. 637–651. <https://doi.org/10.1179/1743284713Y.0000000222>
6. *Terres M. A., Laalai N., Sidhom H.* Effect of nitriding and shot-peening on the fatigue behavior of 42CrMo4 steel: Experimental analysis and predictive approach // *Materials & Design*. 2012. Vol. 35. P. 741–748. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.09.055>
7. *Павлов В. Ф., Кирпичев В. А., Вакулук В. С.* Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочненных деталей по остаточным напряжениям. Самара : Изд-во СНЦ РАН, 2012. 125 с.
8. *Павлов В. Ф., Букастый А. С., Семенова О. Ю.* Прогнозирование предела выносливости поверхностно упрочненных деталей с концентраторами напряжений // *Вестник машиностроения*. 2019. № 1. С. 3–7. EDN: [VТАЕРК](https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.09.055)
9. *Majzoobi G. H., Azadikhah K., Nemati J.* The effects of deep rolling and shot peening on fretting fatigue resistance of Aluminum-7075-T6 // *Materials Science and Engineering: A*. 2009. Vol. 516, iss. 1. P. 235–247. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2009.03.020>
10. *Старцев Н. И.* Трубопроводы газотурбинных двигателей. Москва : Машиностроение, 1976. 272 с.
11. *Радченко В. П., Бербасова Т. И., Цветков В. В., Саушкин М. Н.* Математическое моделирование релаксации остаточных напряжений в тонкостенных трубопроводах в состоянии поставки и после двухстороннего поверхностного упрочнения при ползучести // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2021. № 3. С. 117–128. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.3.11>
12. *Деревянка Е. Е., Радченко В. П., Цветков В. В.* Релаксация остаточных напряжений в поверхностно упрочненном цилиндре в условиях ползучести при жестких ограничениях на линейные и угловые деформации // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2021. № 3. С. 118–127. <https://doi.org/10.31857/S057232992103003X>
13. *Радченко В. П., Павлов В. Ф., Саушкин М. Н.* Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния в поверхностно упрочненных втулках с учетом остаточных касательных напряжений // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2019. № 1. С. 138–150. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.1.12>
14. *Радченко В. П., Цветков В. В.* Кинетика напряженно-деформированного состояния в поверхностно упрочненном цилиндрическом образце при сложном напряженном состоянии в условиях ползучести // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*. 2014. № 1 (34). С. 93–108. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1313>
15. *Радченко В. П., Кочеров Е. П., Саушкин М. Н., Смыслов В. А.* Экспериментальное и теоретическое исследование влияния растягивающей нагрузки на релаксацию остаточных напряжений в упрочненном цилиндрическом образце в условиях ползучести // *Прикладная механика и техническая физика*. 2015. Т. 56, № 2. С. 169–177. <https://doi.org/10.15372/PMTF20150217>
16. *Радченко В. П., Цветков В. В., Саушкин М. Н.* Релаксация остаточных напряжений в упрочненном цилиндре в условиях ползучести при нагружении осевой силой, крутящим моментом и внутренним давлением // *Прикладная механика и техническая физика*. 2020. Т. 61, № 4. С. 96–107. <https://doi.org/10.15372/PMTF20200412>
17. *Sherafatnia K., Farrahi G. H., Mahmoudi A. H., Ghasemi A.* Experimental measurement and analytical determination of shot peening residual stresses considering friction and real unloading behavior // *Materials Science and Engineering: A*. 2016. Vol. 657, iss. 7. P. 309–321. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2016.01.070>



18. Xie L., Wang Ch., Wang L., Wang Z., Jiang Ch., Lu W., Ji V. Numerical analysis and experimental validation on residual stress distribution of titanium matrix composite after shot peening treatment // *Mechanics of Materials*. 2016. Vol. 99. P. 2–8. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2016.05.005>
19. Gallitelli D., Boyer V., Gelineau M., Colaitis Y., Rouhaud E., Retraint D., Kubler R., Desvignes M., Barrallier L. Simulation of shot peening: From process parameters to residual stress fields in a structure // *Comptes Rendus Mechanique*. 2016. Vol. 344, iss. 4. P. 355–374. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2016.02.006>
20. Zimmermann M., Klemenz M., Schulze V. Literature review on shot peening simulation // *International Journal of Computational Materials Science and Surface Engineering*. 2010. Vol. 3, iss. 4. P. 289–310. <https://doi.org/10.1504/ijcmsse.2010.036218>
21. Лебедев В. А., Чумак И. В. Кинетическая модель упрочнения поверхностного слоя деталей виброударными методами ППД // Упрочняющие технологии и покрытия. 2008. № 7. С. 3–8. EDN: JWEXDN
22. Радченко В. П., Павлов В. Ф., Бербасова Т. И., Саушкин М. Н. Метод реконструкции остаточных напряжений и пластических деформаций в тонкостенных трубопроводах в состоянии поставки и после двухстороннего виброударного поверхностного упрочнения дробью // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 2. С. 123–133. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.2.10>
23. Можаровская Т. Н., Можаровский В. Н., Штефан Н. И. О зависимости времени до разрушения и установившейся скорости деформаций ползучести конструкционных материалов // Вісник Національного Технічного Університету України Київський Політехнічний Інститут. Серія: Машинобудування. 2010. № 59. С. 37–40. EDN: VAXUEV
24. Самарин Ю. П. Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами. Куйбышев : Куйбышевский госуниверситет, 1979. 84 с.
25. Радченко В. П., Еремин Ю. А. Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций. Москва : Машиностроение-1, 2004. 265 с.

### References

1. Kuznetsov N. D., Tseitlin V. I., Volkov V. I. *Tekhnologicheskie metody povysheniya nadezhnosti detaley mashin* [Technological Methods of Enhancing Machines Components Reliability]. Moscow, Mashinostroenie, 1993. 304 p. (in Russian).
2. Birger I. A. *Ostatochnye napryazheniya* [Residual Stresses]. Moscow, Mashgiz, 1963. 233 p. (in Russian).
3. Sulima A. M., Shulov V. A., Yagodkin Yu. D. *Poverkhnostnyi sloi i ekspluatatsionnye svoistva detalei mashin* [Surface Layer and Operational Properties of Machine Parts]. Moscow, Mashinostroenie, 1988. 197 p. (in Russian).
4. Kudryavtsev I. V. *Poverkhnostnyi naklep dlia povysheniia prochnosti i dolgovechnosti detalei mashin poverkhnostnym plasticheskim deformirovaniem* [Surface Riveting to Increase the Strength and Durability of Machine Parts by Surface Plastic Deformation]. Moscow, Mashinostroenie, 1969. 214 p. (in Russian).
5. Soady K. A. Life assessment methodologies incorporating shot peening process effects: Mechanistic consideration of residual stresses and strain hardening. Part 1 – Effect of shot peening on fatigue resistance. *Materials Science and Technology*, 2013, vol. 29, iss. 6, pp. 637–651. <https://doi.org/10.1179/1743284713Y.0000000222>
6. Terres M. A., Laalai N., Sidhom H. Effect of nitriding and shot-peening on the fatigue behavior of 42CrMo4 steel: Experimental analysis and predictive approach. *Materials & Design*, 2012, vol. 35, pp. 741–748. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.09.055>
7. Pavlov V. F., Kirpichev V. A., Vakulyuk V. S. *Prognozirovanie soprotivleniia ustalosti poverkhnostno uprochnennykh detalei po ostatochnym napriazheniyam* [Prediction of



- Fatigue Resistance of Surface-Hardened Parts by Residual Stresses]. Samara, Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences Publ., 2012. 125 p. (in Russian).
8. Pavlov V. F., Bukaty A. S., Semenova O. Yu. Prediction of the endurance limit of surface-hardened parts with stress concentrators. *Vestnik Mashinostroeniya*, 2019, iss. 1, pp. 3–7 (in Russian). EDN: [VTAEPK](#)
  9. Majzooobi G. H., Azadikhah K., Nemati J. The effects of deep rolling and shot peening on fretting fatigue resistance of Aluminum-7075-T6. *Materials Science and Engineering: A*, 2009, vol. 516, iss. 1, pp. 235–247. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2009.03.020>
  10. Starcev N. I. *Truboprovody gazoturbinykh dvigatelej* [Pipelines of Gas Turbine Engines]. Moscow, Mashinostroenie, 1976. 272 p. (in Russian).
  11. Radchenko V. P., Berbasova T. I., Tsvetkov V. V., Saushkin M. N. Mathematical modeling of relaxation of residual stresses in thin-walled pipelines in the delivery state and after bilateral surface hardening at creep. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2013, iss. 3, pp. 117–128 (in Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.3.11>
  12. Derevyanka E. E., Radchenko V. P., Tsvetkov V. V. Relaxation of residual stresses in a surface-hardened cylinder under creep conditions and rigid restrictions on linear and angular deformations. *Mechanics of Solids*, 2020, vol. 55, iss. 6, pp. 898–906. <https://doi.org/10.3103/S0025654420660024>
  13. Radchenko V. P., Pavlov V. F., Saushkin M. N. Mathematical modeling of the stress-strain state in surface hardened thin-walled tubes with regard to the residual shear stresses. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, iss. 1, pp. 138–150 (in Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.1.12>
  14. Radchenko V. P., Tsvetkov V. V. Kinetics of the stress-strain state of surface hardened cylindrical specimen under complex stress state of creep. *Journal of Samara State Technical University, Series Physical and Mathematical Sciences*, 2014, iss. 1 (34), pp. 93–108 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1313>
  15. Radchenko V. P., Kocherov E. P., Saushkin M. N., Smyslov V. A. Experimental and theoretical studies of the influence of a tensile load on the relaxation of residual stresses in a hardened cylindrical specimen under creep conditions. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2015, vol. 56, iss. 2, pp. 313–320. <https://doi.org/10.1134/S0021894415020170>
  16. Radchenko V. P., Tsvetkov V. V., Saushkin M. N. Residual stress relaxation in a hardened cylinder under creep, loaded by an axial force, torque and internal pressure. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2020, vol. 61, iss. 4, pp. 583–592. <https://doi.org/10.1134/S0021894420040124>
  17. Sherafatnia K., Farrahi G. H., Mahmoudi A. H., Ghasemi A. Experimental measurement and analytical determination of shot peening residual stresses considering friction and real unloading behavior. *Materials Science and Engineering: A*, 2016, vol. 657, iss. 7, pp. 309–321. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2016.01.070>
  18. Xie L., Wang Ch., Wang L., Wang Z., Jiang Ch., Lu W., Ji V. Numerical analysis and experimental validation on residual stress distribution of titanium matrix composite after shot peening treatment. *Mechanics of Materials*, 2016, vol. 99, pp. 2–8. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2016.05.005>
  19. Gallitelli D., Boyer V., Gelineau M., Colaitis Y., Rouhaud E., Retraint D., Kubler R., Desvignes M., Barrallier L. Simulation of shot peening: From process parameters to residual stress fields in a structure. *Comptes Rendus Mécanique*, 2016, vol. 344, iss. 4, pp. 355–374. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2016.02.006>
  20. Zimmermann M., Klemenz M., Schulze V. Literature review on shot peening simulation. *International Journal of Computational Materials Science and Surface Engineering*, 2010, vol. 3, iss. 4, pp. 289–310. <https://doi.org/10.1504/ijcmsse.2010.036218>



21. Lebedev V. A., Chumak I. V. Kinetic model of hardening of the surface layer of parts by vibro-impact PPD methods. *Strengthening Technologies and Coatings*, 2008, iss. 7, pp. 3–8 (in Russian). EDN: [JWEXDN](#)
22. Radchenko V. P., Pavlov V. F., Berbasova T. I., Saushkin M. N. The method of reconstruction of residual stresses and plastic deformations in thin-walled pipelines in the delivery state and after bilateral vibro-shock surface hardening with a shot. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, iss. 2, pp. 123–133 (in Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.2.10>
23. Mozharovskaya T. N., Mozharovsky V. N., Stefan N. I. On the dependence of the time to destruction and the steady rate of creep deformations of structural materials. *Journal of Mechanical Engineering NTUU “Kyiv Polytechnic Institute”*, 2010, iss. 59, pp. 37–40 (in Russian). EDN: [VAXUEV](#)
24. Samarin Yu. P. *Uravneniia sostoianiiia materialov so slozhnymi reologicheskimi svoistvami* [Equations of State of Materials with Complex Rheological Properties]. Kuibyshev, Kuibyshev State University Publ., 1979. 84 p. (in Russian).
25. Radchenko V. P., Eremin Yu. A. *Reologicheskoe deformirovanie i razrushenie materialov i elementov konstruktsii* [Rheological Deformation and Fracture of Materials and Structural Elements]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2004. 265 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 25.02.2023

Принята к публикации / Accepted 20.03.2023

Опубликована / Published 31.05.2023



## ИНФОРМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 241–252  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 241–252

[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru)

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-241-252>

EDN: QTWFDI

Научная статья  
УДК 004.07

### Иерархический анализ рисков моделей угроз беспилотных летательных аппаратов

Т. З. Аралбаев, Р. Р. Галимов✉,  
М. А. Гетьман, О. В. Клиндух

Оренбургский государственный университет, Россия, 460018, г. Оренбург, пр. Победы, д. 13

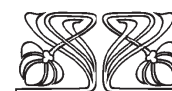
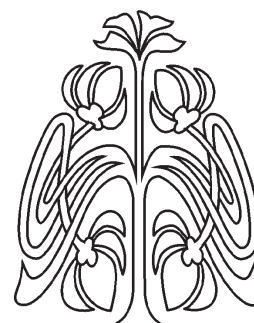
**Аралбаев Ташбулат Захарович**, доктор технических наук, заведующий кафедрой вычислительной техники и защиты информации, [atz1953@gmail.com](mailto:atz1953@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0001-6515-7808>, AuthorID: 261750

**Галимов Ринат Равилевич**, кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной техники и защиты информации, [rin-galimov@yandex.ru](mailto:rin-galimov@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0002-0692-3645>, AuthorID: 572426

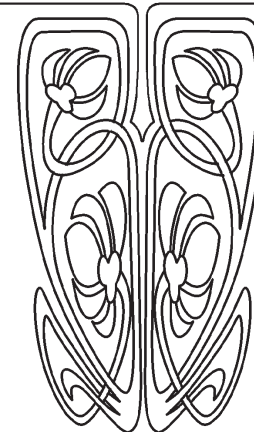
**Гетьман Мария Аликовна**, магистрант кафедры вычислительной техники и защиты информации, [deprivedofwonders@gmail.com](mailto:deprivedofwonders@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0001-5895-4956>

**Клиндух Оксана Викторовна**, ведущий инженер кафедры вычислительной техники и защиты информации, [oksana-klinduh@mail.ru](mailto:oksana-klinduh@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-0865-6963>

**Аннотация.** Актуальность рассматриваемых в работе вопросов определяется широким применением в деятельности человека беспилотных летательных аппаратов, высокой аварийностью и необходимостью научного обоснования затрат на их безопасность при использовании в различных условиях эксплуатации, в частности, в системах мониторинга распределенных в пространстве объектов. Цель исследования — разработка рекомендаций по оптимизации затрат на системы защиты беспилотных летательных аппаратов на основе иерархического анализа рисков моделей угроз. Результаты: разработанная концепция исследований базируется на принципе определения адекватных соотношений между рисками от угроз для летательных



Научный  
отдел







аппаратов и затратами на их защиту. В процессе исследования разработаны метод и программное средство, позволяющие осуществить построение и анализ трехуровневой модели рисков от угроз. На нижнем уровне данной модели определяются оценки рисков для частных моделей угроз отдельных участков маршрута, на среднем уровне — оценки рисков для кластеров частных моделей угроз и на верхнем уровне — максимальные оценки рисков для всего маршрута. В процессе вычислительных экспериментов с использованием разработанного метода было определено, в частности, превышение стоимостных затрат на защиту по общей модели угроз по сравнению с частной и кластерной моделями соответственно на 47 и 20%. Применение метода иерархического анализа позволяет рассчитать суммарные риски и оценить соответствующие стоимостные затраты для различных модификаций систем защиты. Результаты расчета могут быть использованы в качестве рекомендаций при оценке затрат на построение системы защиты беспилотных летательных аппаратов.

**Ключевые слова:** мобильные объекты информатизации, защита информации, анализ рисков, беспилотные летательные аппараты

**Для цитирования:** Аралбаев Т. З., Галимов Р. Р., Гетьман М. А., Клиндух О. В. Иерархический анализ рисков моделей угроз беспилотных летательных аппаратов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 241–252. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-241-252>, EDN: QTWFDI

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Hierarchical risk analysis of unmanned aerial vehicle threat models

T. Z. Aralbaev, R. R. Galimov<sup>✉</sup>, M. A. Getman, O. V. Klindukh

Orenburg State University, 13 Prospect Pobedy, Orenburg 460018, Russia

**Tashbulat Z. Aralbaev**, atz1953@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6515-7808>, AuthorID: 261750

**Rinat R. Galimov**, rin-galimov@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0692-3645>, AuthorID: 572426

**Maria A. Getman**, deprivedofwonders@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-5895-4956>

**Oksana V. Klindukh**, oksana-klinduh@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0865-6963>

**Abstract.** The relevance of the issues considered in the work is determined by the widespread use of unmanned aerial vehicles in human activities, the high accident rate and the need for scientific justification of the cost of their safety when used in various operating conditions, in particular, in systems for monitoring objects distributed in space. The purpose of the study is to develop recommendations for optimizing the costs of protection systems for unmanned aerial vehicles based on a hierarchical risk analysis of threat models. Results include the developed concept of research which is based on the principle of determining adequate ratios between the risks from threats to aircraft and the costs of their protection. In the process of research, a method and a software tool were developed that allow the construction and analysis of a three-level risk model from threats. At the lower level of this model, risk assessments are determined for private threat models of individual sections of the route, at the middle level the same is done with risk assessments for clusters of private threat models, and at the upper level, maximum risk assessments for the entire route are performed. In the process of computational experiments



using the developed method, it was determined, in particular, that the cost of protection for the general threat model exceeded the private and cluster models by 47% and 20%, respectively. The application of the hierarchical analysis method makes it possible to calculate the total risks and evaluate the corresponding cost costs for various modifications of protection systems. The results of the calculation can be used as recommendations when estimating the costs of building a protection system for unmanned aerial vehicles.

**Keywords:** mobile informatization objects, information security, risk analysis, unmanned aerial vehicles

**For citation:** Aralbaev T. Z., Galimov R. R., Getman M. A., Klindukh O. V. Hierarchical risk analysis of unmanned aerial vehicle threat models. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 241–252 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-241-252>, EDN: QTWFDI

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Актуальность рассматриваемых в работе вопросов определяется широким применением в деятельности человека беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) и высокой аварийностью этих средств при использовании в различных условиях эксплуатации, в частности в системах мониторинга распределенных в пространстве объектов.

К объектам мониторинга БПЛА могут быть отнесены подвижные составы военного назначения, рассредоточенные в пространстве промышленные установки и сооружения, транспортные системы и коммуникации, а также целый ряд других объектов с распределенной структурой, эффективность работы которых зависит от качества систем наблюдения и контроля [1, 2].

Предметом исследования настоящей работы являются системы защиты информации БПЛА как основного звена в системе мониторинга распределенных объектов.

Специфика объектов мониторинга определяет повышенные требования к техническим и экономическим характеристикам системы защиты БПЛА, в частности: по функциональной полноте, интеллектуальным показателям, производительности, надежности и стоимостным параметрам. К особым требованиям относятся: повышение качества подсистем предупреждения полетных угроз, снижение ошибок операторов, создание средств резервного копирования управляющих программ и баз данных, повышение качества каналов передачи информации и средств защиты от несанкционированного управления аппаратом [3, 4]. Невыполнение перечисленных требований, согласно статистическим данным, стало причиной более чем 25% аварий летательных аппаратов, снижения эффективности их применения. Стоимостные затраты на приобретение промышленных БПЛА, а также на ликвидацию последствий аварий, согласно официальным данным<sup>1,2</sup>, могут достигать нескольких миллионов рублей.

В современной научно-технической литературе, интернет-ресурсах и патентной документации представлены результаты исследований, направленных на повышение надежности применения БПЛА, и критерии оценки эффективности их использования.

<sup>1</sup>Защита электрических сетей от природных рисков. URL: <https://www.osce.org/files/f/documents/8/d/293556.pdf> (дата обращения: 04.04.2022).

<sup>2</sup>Air alert: 8 dangerous drone incidents. URL: <https://www.kaspersky.com/blog/drone-incidents/29000/> (дата обращения: 04.04.2022).



Важность задачи обеспечения безопасности БПЛА отражена в международных и российских нормативных документах<sup>3,4</sup>.

Особенностью большинства публикаций является направленность их на повышение надежности аппаратов. В качестве критериев эффективности предложено использовать вероятность выполнения задачи летательным аппаратом, стоимость выполнения задачи, стоимость съема информации с единицы площади земной поверхности [1, 2]. Однако при этом не рассматриваются в должной мере вопросы эффективности затрат на средства защиты БПЛА для протяженных маршрутов с различным характером распределения рисков от угроз безопасности аппаратов, что приводит к нерациональным затратам на средства защиты информации (СЗИ). Это характерно для участков маршрутов с незначительными рисками, на которых появляется избыточность защитных мер и наличие незадействованных ресурсов СЗИ. В рассмотренных работах отмечено недостаточное внимание исследователей, уделенное вопросам анализа рисков в СЗИ БПЛА, используемых в задачах мониторинга распределенных объектов. При этом модели угроз обычно строятся без должного учета особенностей пространственного и временного изменения параметров контролируемого объекта по маршруту следования аппарата.

## 1. Постановка задачи

Цель исследований — разработка рекомендаций по оптимизации затрат на СЗИ БПЛА на основе иерархического анализа рисков моделей угроз аппарата в задаче мониторинга распределенных объектов.

Для достижения цели решены следующие задачи:

- определены концепция и целевая функция исследований;
- построена детализированная функциональная модель определения суммарных рисков потери информации БПЛА, отражающая основную концепцию исследований в работе;
- разработаны имитационная модель и метод для иерархического анализа рисков от угроз БПЛА;
- определены рекомендации для оптимизации СЗИ БПЛА в задаче мониторинга распределенных объектов информатизации.

Концепция исследований работы основана на следующих положениях:

- эффективность СЗИ определяется адекватными соотношениями рисков от угроз и затратами на создание СЗИ;
- для построения эффективной СЗИ необходим иерархический анализ рисков, позволяющий оценить угрозы на всем протяжении маршрута БПЛА и на отдельных его участках;
- для анализа рисков необходимо построение трехуровневой системы рисков от угроз БПЛА, на верхнем уровне которой определяются суммарные оценки максимальных рисков для всего маршрута БПЛА, составляющих общую модель угроз (ОМУ), на нижнем уровне — оценки рисков для частных моделей угроз (ЧМУ) для отдельных участков маршрута, на втором уровне — оценки рисков для кластеров частных моделей угроз (КМУ);

<sup>3</sup>Беспилотные авиационные системы (БАС) : утв. Генеральным секретарем и опубликовано с его санкции. Международная организация гражданской авиации, 2011. 50 с.

<sup>4</sup>Об утверждении федеральных правил использования воздушного пространства Российской Федерации : постановление Правительства РФ от 11.03.2010 № 138 (ред. 02.12.2020). Доступ из справ.-правовой системы «КонсультантПлюс».



- кластерный анализ частных моделей угроз проводится также для сокращения перечня моделей угроз и, соответственно, объемов проектных работ на создание частных СЗИ;
- для всех трех уровней рисков составляются соответствующие гистограммы распределения рисков по участкам следования БПЛА;
- анализ распределения рисков проводится по трем видам гистограмм, а оценка распределения затрат на СЗИ определяется из условия пропорциональности их величин величинам оценок рисков.

Целевая функция исследований имеет следующий вид:

$$Z_{iss} \rightarrow \min, \quad R_{real} \leq R_{accept},$$

где  $Z_{iss}$  — стоимость системы защиты информации (information security system) БПЛА;  $R_{real}$  и  $R_{accept}$  — соответственно реальные и допустимые суммарные риски потери информации БПЛА.

## 2. Метод иерархического анализа рисков БПЛА

На рис. 1 представлена детализированная функциональная модель для исследования распределения суммарных рисков потери информации БПЛА по маршруту его следования.

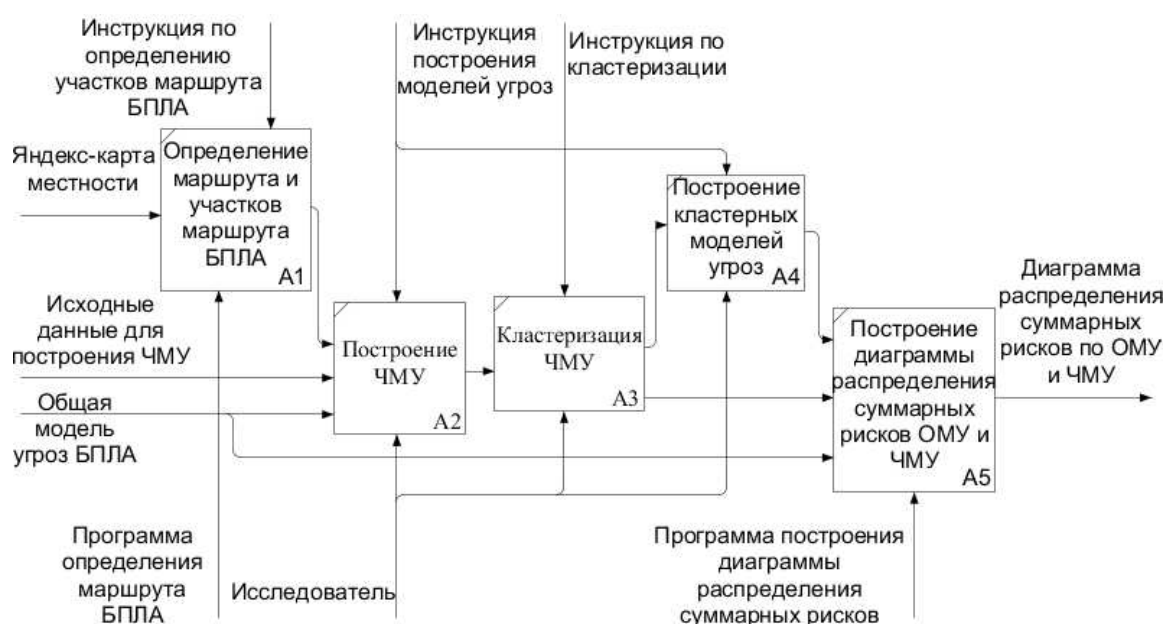


Рис. 1. Детализированная функциональная модель иерархического анализа рисков

Fig. 1. Detailed functional model of hierarchical risk analysis

В качестве исходных данных исследования в работе приняты: Яндекс-карта местности с нанесенными на нее объектами мониторинга, сведения по общей (базовой) модели угроз для построения СЗИ БПЛА на всем маршруте мониторинга распределенного объекта, а также сведения об объекте защиты, которые могут быть затребованы для построения частных моделей угроз БПЛА для отдельных участков маршрута. В качестве объекта мониторинга взяты промышленные объекты нефтедобычи в Оренбургской области.



Результатными данными функциональной модели являются три диаграммы суммарных рисков моделей угроз на различных участках маршрута:

- диаграмма рисков  $D1$ , соответствующая общей модели угроз маршруту аппарата, построенной для всего маршрута следования БПЛА;
- диаграмма рисков  $D2$ , соответствующая кластерным моделям угроз, составляющим множество:  $MB = \{MB1, MB2, \dots, MBN\}$ ;
- диаграмма рисков  $D3$ , соответствующая частным моделям угроз (ЧМУ), составляющим множество:  $MC = \{MC1, MC2, \dots, MCM\}$ .

Число частных моделей  $M$  определяется экспертами в результате разбиения маршрута следования БПЛА на участки с учетом следующих основных факторов:

- цели и задачи мониторинга;
- категория значимости объекта мониторинга;
- перечень и характер расположения (локализации) контролируемых объектов на карте;
- технологическая специфика объектов мониторинга;
- топология расположения объектов на карте местности;
- особенности маршрута БПЛА, в частности: рельефа местности, населенных пунктов, климатических условий, транспортных коммуникаций, линий электро-снабжения.

Число кластеров  $N$  определяется в результате решения задачи кластеризации ЧМУ.

Функция  $A1$  на рис. 1 предназначена для определения минимального по длине маршрута и может быть реализована с использованием метода коммивояжера [5]. Особенностью разработанного метода является выбор оптимального маршрута по принципу  $\min / \min$ , позволяющему для заданного множества облетаемых объектов сначала определить на основе полного перебора все маршруты с минимальной протяженностью с различными стартовыми площадками, а затем из них выбрать маршрут минимальной длины.

На рис. 2 представлена в качестве примера графическая модель маршрута БПЛА со стартовой площадкой в вершине 1.

Пронумерованные вершины маршрута соответствуют номерам объектов мониторинга. Прямоугольные области на карте полета БПЛА, выделенные серым цветом, соответствуют участкам маршрута БПЛА с характерными для этих маршрутов частными моделями угроз: ЧМУ1–ЧМУ13.

Функции  $A2$  и  $A4$  на рис. 1 реализуются на основе типовых методик построения моделей угроз и получения численных оценок рисков<sup>5,6</sup>.

Функция  $A3$  предназначена для определения кластеров частных моделей угроз и может быть реализована любым из доступных методов кластеризации. В настоящей работе использован модифицированный вариант метода  $K$ -средних [6, 7], в основе которого лежит алгоритм вычисления среднего значения риска угроз по всем угрозам для каждой частной модели и определение классификационного кода модели

<sup>5</sup>Базовая модель угроз безопасности информации в ключевых системах информационной инфраструктуры (утв. ФСТЭК России 18.05.2007). URL: <https://zlonov.ru/laws/ics/> (дата обращения: 10.11.2018).

<sup>6</sup>Банк данных угроз безопасности информации. ФСТЭК России. URL: <https://bdu.fstec.ru/threat> (дата обращения: 10.11.2018).

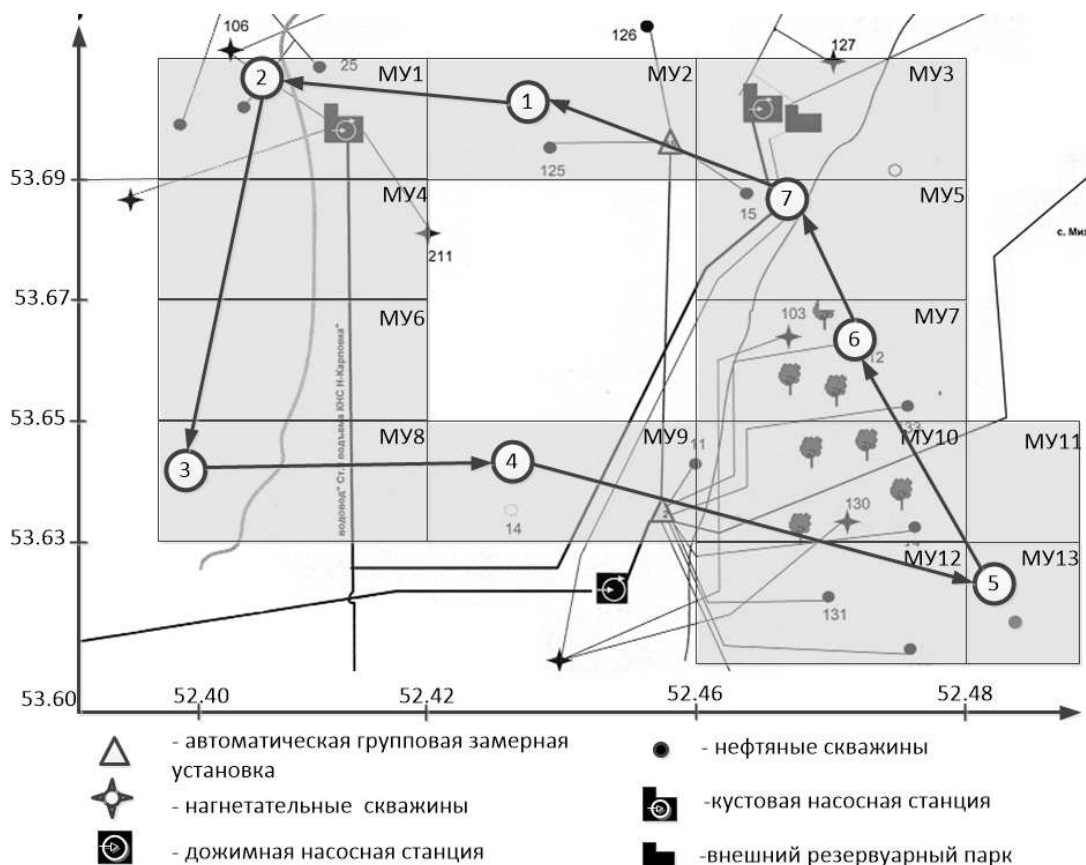


Рис. 2. Графическая модель маршрута БПЛА

Fig. 2. UAV route graphic model

$K = k_1 k_2 \dots k_i \dots k_N$ , в котором разряды определяются по следующему выражению:

$$k_i = \begin{cases} 1, & R_i \geq R_{mid}, \\ 0, & R_i < R_{mid}, \end{cases} \quad i = 1..N, \quad R_{mid} = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{N},$$

где  $N$  — число угроз,  $R_i$  — риск от реализации  $i$ -й угрозы в ЧМУ,  $R_{mid}$  — среднее значение риска по всем угрозам частной модели угроз.

Кластеры формируются на основе одинаковых классификационных кодов частных моделей угроз, получаемых в результате анализа значений оценок вероятностей успешной атаки, ущерба и рисков угроз для каждой ЧМУ. Число  $N$  и перечень угроз в рассматриваемой задаче постоянны на всех уровнях иерархии. При разработке ЧМУ использовались угрозы информационной безопасности из банка угроз ФСТЭК<sup>7</sup>.

На рис. 3 представлена экранная форма программы кластеризации ЧМУ для одного из вычислительных экспериментов. Анализ частных моделей угроз на примере кластеризации по величине рисков позволил определить пять кластеров. Характеристики трех кластеров приведены на рис. 3.

Границы моделей угроз для воздушного коридора (см. рис. 2) распределены в зависимости от наличия различных объектов, встречающихся на пути движения БПЛА, таких как реки, автомагистрали, населенные пункты, проселочные дороги и др.

<sup>7</sup>Банк данных угроз безопасности информации. ФСТЭК России. URL: <https://bdu.fstec.ru/threat> (дата обращения: 10.11.2018).

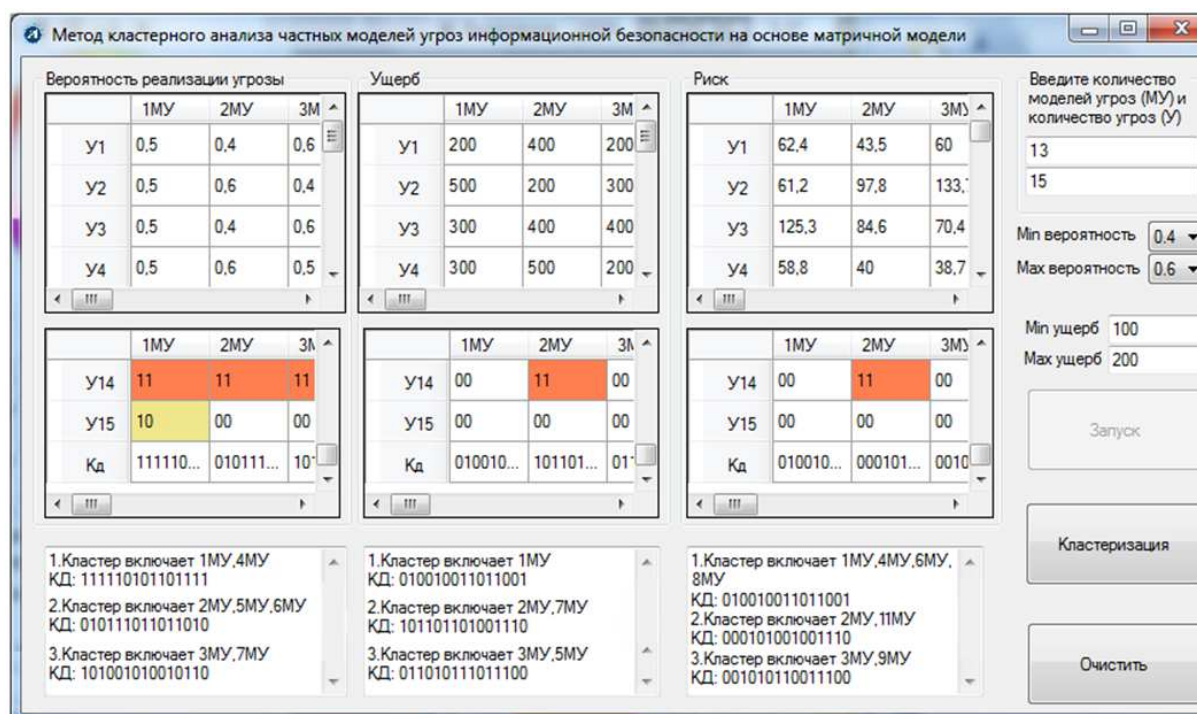


Рис. 3. Экранная форма кластеризации частных моделей угроз БПЛА в задаче мониторинга распределенных объектов нефтедобычи

Fig. 3. Screen form of clustering private UAV threat models in the problem of monitoring distributed oil production facilities

При движении вдоль рек и лесных массивов для БПЛА могут появляться угрозы природного, техногенного или антропогенного характера, например: умышленный перехват и изменение сигнала управления БПЛА, сканирование информации, передаваемой между пунктом управления и БПЛА, угон аппарата.

В таблице представлена в качестве примера характеристика кластеров БПЛА по рискам информационной безопасности, свойственных для конкретного маршрута БПЛА (см. рис. 2).

Характеристики кластеров моделей угроз БПЛА  
Table. Characteristics of UAV threat model clusters

1МУ, 4МУ, 6МУ, 8МУ	Наличие реки, объектов нефтедобычи, нефтепроводов	Попадание БПЛА в реку; авария на объектах нефтедобычи
2МУ, 11МУ	Наличие объектов нефтедобычи, нефтепроводов	Авария на объектах нефтедобычи
3МУ, 9МУ	Наличие объектов нефтедобычи, нефтепроводов, автомобильных дорог	Деструктивное воздействие на БПЛА человеком; авария на объектах нефтедобычи
5МУ, 7МУ, 10МУ, 11МУ	Наличие объектов нефтедобычи нефтепроводов, автомобильных дорог, высоких деревьев	Деструктивное воздействие на БПЛА человеком; авария на объектах нефтедобычи; столкновение с высотным объектом вследствие навигационных погрешностей аппаратуры БПЛ
13МУ	Наличие объектов нефтедобычи	Авария на объектах нефтедобычи

Функция А5 на рис. 1 предназначена для построения гистограмм распределения суммарных рисков по участкам маршрута БПЛА и может быть реализована с исполь-



зованием разработанного метода и программы для иерархического анализа рисков [6]. Программа позволяет проводить вычислительные эксперименты по иерархическому анализу рисков, в ходе которых можно задавать различное число моделей угроз, перечень угроз и величин соответствующих им рисков, проводить кластеризацию ЧМУ, строить модели кластерных угроз и общей модели угроз (ОМУ), определять соотношения суммарных рисков для моделей угроз на всех уровнях иерархии для всех участков маршрута следования БПЛА.

Общая модель угроз для всего маршрута определяется максимальными значениями оценок рисков по каждой угрозе для всего маршрута БПЛА. При построении кластерной модели угроз (КМУ) для каждого кластера задаются оценки рисков от угроз, являющиеся максимальными значениями рисков этих же угроз среди всех ЧМУ данного кластера. Это позволяет обеспечить гарантированный уровень защиты для всех ЧМУ кластера и некоторую перезащищенность объекта на участках с незначительными рисками. Кластерная модель угроз позволяет снизить временные (а в ряде случаев и стоимостные) затраты на построение СЗИ за счет сокращения объема проектных работ по сравнению с индивидуальным (оригинальным) проектированием СЗИ.

На рис. 4 представлена в качестве иллюстрации гистограмма распределения рисков для одного из вычислительных экспериментов на каждом из 13 участков маршрута, приведенного на рис. 2. Столбцы, заштрихованные синим цветом, соответствуют риску ОМУ, оранжевым — КМУ, а коричневым цветом — ЧМУ.

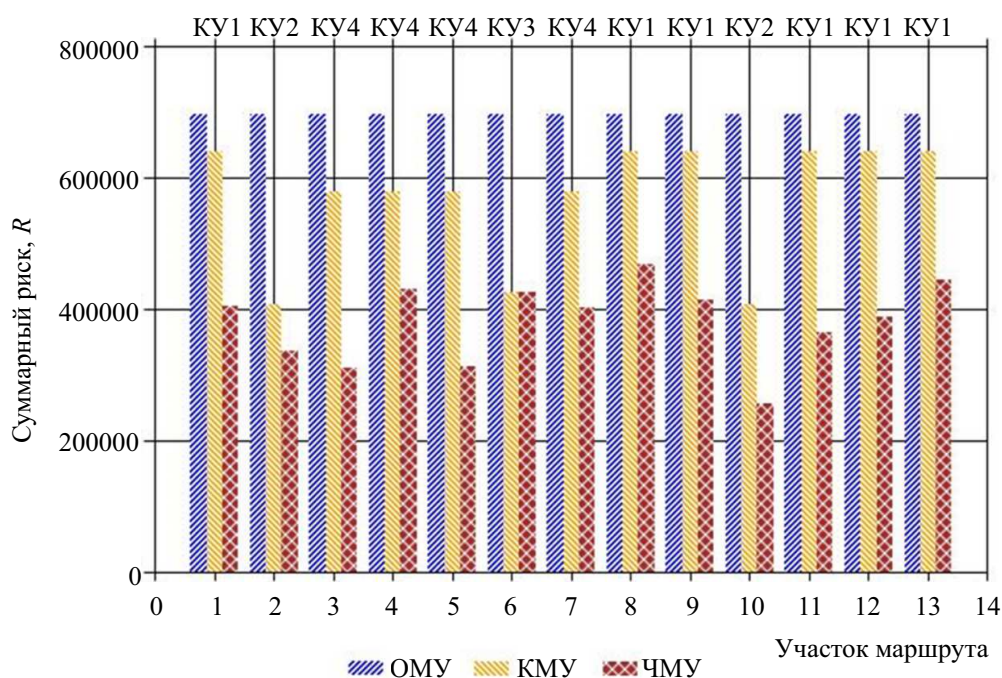


Рис. 4. Экспериментальные гистограммы распределения суммарных рисков БПЛА по участкам маршрута для различных иерархических уровней для 8 кластеров (цвет онлайн)

Fig. 4. Experimental histograms of the distribution of the total UAV risks by route sections for different hierarchical levels for 8 clusters (color online)

Анализ результатов, полученных на ряде экспериментов в процессе исследований, показал, что снижение суммарного риска от угроз, рассчитанного в ОМУ, по отношению к аналогичным рискам в КМУ в среднем составляет 20%, а по отношению





к аналогичным рискам ЧМУ, соответственно, 47%. Снижение суммарного риска от угроз, рассчитанного в КМУ, по отношению к аналогичным рискам ЧМУ в среднем составляет 33%.

Полученные результаты позволяют судить о степени избыточности средств нейтрализации рисков в СЗИ, используемых для защиты БПЛА на участках среднего и верхнего уровней иерархии.

Оптимальные стоимостные затраты на построение СЗИ согласно ГОСТ 50.1.093-2014<sup>8</sup> составляют до 50% от величины риска. Это соотношение позволяет оценить затраты на СЗИ, полученные в результате проведенного иерархического анализа рисков, и оптимально распределить их для защиты БПЛА на протяжении полетного маршрута. Нижний порог стоимости распространенных типов промышленных БПЛА, в частности DJI Matrice 210, DJI Matrice 300 RTK, находится в пределах полутора миллионов рублей<sup>9</sup>. Экономический эффект от оптимизации системы защиты БПЛА с учетом полученных результатов анализа составляет не менее трехсот тысяч рублей.

Следует отметить, что применение непосредственно ЧМУ для построения системы защиты может потребовать дополнительных временных и стоимостных ресурсов для оригинальной настройки конфигураций средств защиты под конкретную модель угроз, а также для обеспечения переключения режимов работы средств при изменении кластера или ЧМУ в маршруте БПЛА. Эффективность построения СЗИ, адаптивной характеру изменения рисков от угроз, может быть уточнена с учетом особенностей оригинального проектирования СЗИ для каждого участка маршрута БПЛА. В зависимости от условий задачи мониторинга возможна адаптация отдельных аппаратов на прохождение маршрутов одного или нескольких кластеров моделей угроз.

Разработанные метод и программа для проведения иерархического анализа могут быть использованы для защиты информационной системы БПЛА, а также для наземных мобильных средств спецназначения, например беспилотных автомобилей.

Для применения разработанной концепции защиты БПЛА для мониторинга распределенных технологических объектов необходимо выполнение ряда мер, в частности:

- необходимы средства геоинформационной системы (ГИС), определяющие топологию размещения промышленных объектов, а также объектов природного и техногенного характера по маршруту движения БПЛА;
- для построения частных моделей рекомендуется использовать существующую статистику инцидентов безопасности на объекте мониторинга и учитывать мнения экспертов при определении границ действия моделей угроз;
- в качестве инструментальных средств для реализации иерархического анализа можно использовать авторские разработки, а также доступные программные средства, например, картографические комплексы программного обеспечения [5], средства оптимизации маршрутов БПЛА, средства кластерного анализа и построения гистограмм;
- использование кластерных и частных моделей угроз БПЛА позволяет оптимизировать затраты на СЗИ;
- в качестве методов оптимизации затрат, наряду с традиционными, рекомендуется применение методов функционально-параметрической адаптации и самоорганизации средств защиты в условиях изменения моделей угроз.

<sup>8</sup>Р 50.1.093-2014 Менеджмент риска. Принципы оценки эффективности воздействий на риск. URL: <https://files.stroyinf.ru/Data2/1/4293767/4293767854.pdf> (дата обращения: 10.11.2020).

<sup>9</sup>Рейтинг промышленных дронов 2020. URL: <https://aeromotus.ru/rejting-promyshlennyh-dronov-2020/> (дата обращения: 04.04.2022).



## Заключение

Полученные результаты позволяют:

- управлять рисками на основе принципов прогнозирования и превентивного принятия мер безопасности полетов, оперативного управления во время полета и анализа результатов защиты по завершении задачи мониторинга;
- при построении СЗИ с учетом моделей угроз для всех уровней рисков в процессе полета можно производить перераспределение вычислительных и информационных ресурсов СЗИ и системы управления БПЛА с учетом специфики угроз на каждом участке маршрута;
- полученные результаты могут быть использованы при построении адаптивных, самоорганизующихся систем защиты мобильных объектов информатизации.

### Список литературы

1. *Винограденко А. М., Ладонкин О. В., Юров А. С.* Система мониторинга технического состояния подвижных объектов военного назначения с использованием беспроводных технологий // *T-Comm: Телекоммуникации и транспорт*. 2015. Т. 9, № 1. С. 51–55. EDN: [TILBZP](#)
2. *Tang Miaomiao, Wang Changzhou, Zhong Zhi.* Unmanned aerial vehicle (UAV) monitoring system based on integrated responder and response and ADS-B OUT/IN methods of UAV monitoring system. Patent China. № CN109727493A. 2019.
3. *Михайлов В. В., Самсонов А. В.* Критерии эффективности беспилотных летательных аппаратов в решении задач мониторинга окружающей среды // *Проблемы обеспечения безопасности при ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций*. 2013. № 1–1 (2). С. 365–369. EDN: [WDNQZF](#)
4. *Петренко С. А., Симонов С. В.* Управление информационными рисками. Экономически оправданная безопасность. Москва : Компания АйТи ; ДМК Пресс, 2004. 384 с. (Информационные технологии для инженеров).
5. *Чекина Е. В., Михеев С. В., Остроглазов Н. А., Михеева Т. И.* Метод построения маршрутов беспилотного летательного аппарата на интерактивной электронной карте // *Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений : труды VII Всероссийской научной конференции (с приглашением зарубежных ученых) : в 3 т. Т. 1.* Уфа : УГАТУ, 2019. С. 1–6. EDN: [UXZUQC](#)
6. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022613608 Российская Федерация. Метод иерархического анализа рисков моделей угроз мобильного объекта информатизации : № 2022612182 : заявл. 21.02.2022 : опублик. 14.03.2022 / Т. З. Аралбаев, Р. Р. Галимов ; заявитель федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Оренбургский государственный университет». EDN: [XXOTXN](#)
7. *Аралбаев Т. З., Гетьман М. А.* Оптимизация защиты беспилотного летательного аппарата в задаче мониторинга распределенных объектов нефтедобычи // *Polish Journal of Science*. 2021. № 39. P. 36–40. EDN: [URBBNS](#)

### References

1. Vinogradenko A. M., Ladonkin O. V., Yurov A. S. Monitoring system the technical condition rolling military object with use radio technology. *T-Comm: Telecommunications and Transport*, 2015, vol. 9, iss. 1, pp. 51–55 (in Russian). EDN: [TILBZP](#)
2. Tang Miaomiao, Wang Changzhou, Zhong Zhi. *Unmanned aerial vehicle (UAV) monitoring system based on integrated responder and response and ADS-B OUT/IN methods of UAV monitoring system*. Patent China, no. CN109727493A, 2019.
3. Mikhailov V. V., Samsonov A. V. Criteria for the effectiveness of unmanned aerial vehicles



- in solving environmental monitoring problems. *Problemy obespecheniya bezopasnosti pri likvidatsii posledstviy chrezvychaynykh situatsiy* [Problems of Ensuring Safety During Liquidation of Consequences of Emergency Situations], 2013, iss. 1–1 (2), pp. 365–369 (in Russian). EDN: : WDNQZF
4. Petrenko S. A., Simonov S. V. *Upravlenie informatsionnymi riskami. Ekonomicheskii opravdannaya bezopasnost'* [Management of Information Risks. Economically Justified Security]. Moscow, IT Academy, DMK Press, 2004. 384 p. (in Russian).
  5. Chekina E. V., Mikheev S. V., Ostroglazov N. A., Mikheeva T. I. A method for constructing unmanned aerial vehicle routes on an interactive electronic map. *Informatsionnye tekhnologii intellektual'noy podderzhki prinyatiya resheniy* [Information Technologies for Intelligent Decision Support]: Proceedings of the VII All-Russian Scientific Conference (with the invitation of foreign scientists). Vol. 1. Ufa, USATU, 2019, pp. 1–6 (in Russian). EDN: [UXZUQC](#)
  6. Aralbaev T. Z., Galimov R. R. The method of hierarchical risk analysis of threat models of a mobile informatization object. *Certificate of state registration of the computer program No. 2022613608*. Published 03/14/2022 (in Russian).
  7. Aralbaev T., Getman M. Optimizing the protection of an unmanned aerial vehicle in the task of monitoring distributed oil production facilities. *Polish Journal of Science*, 2021, iss. 39, pp. 36–40 (in Russian). EDN: [URBBNS](#)

Поступила в редакцию / Received 28.04.2022

Принята к публикации / Accepted 18.11.2022

Опубликована / Published 31.05.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 253–263  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 253–263  
mmi.sgu.ru <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-253-263>, EDN: IXKNHK

Научная статья  
УДК 004.94

## Исследование необходимости использования переменного значения баллистического коэффициента при моделировании траектории пули в стрелковом тренажере

С. Ф. Егоров<sup>1</sup>, А. Ю. Вдовин<sup>2</sup>✉

<sup>1</sup>Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения РАН, Россия, 426067, г. Ижевск, ул. Татьяны Барамзиной, д. 34

<sup>2</sup>Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова, Россия, 426069, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7

**Егоров Станислав Феликсович**, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, stos.mitm@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4737-0706>, AuthorID: 609410

**Вдовин Алексей Юрьевич**, кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной техники, vd\_aleks@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8268-3375>, AuthorID: 677382

**Аннотация.** При разработке электронных стрелковых тренажеров для ручного автоматического оружия, не использующих боеприпасы, необходимо добиться максимально реалистичного моделирования траектории полета пули для каждого выстрела с учетом множества факторов. Традиционно при моделировании траектории используется система дифференциальных уравнений внешней баллистики. Использование в такой математической модели постоянного значения баллистического коэффициента не позволяет добиться высокой точности моделирования траектории по таким важным для решения «задачи встречи» параметрам, как полное время полета и превышение траектории для всех прицельных дальностей стрелкового оружия. Начальными значениями в математической модели на основе системы дифференциальных уравнений внешней баллистики являются угол бросания (зависит от установок прицела), начальная скорость и баллистический коэффициент пули, а рассчитываются такие параметры, как текущее превышение, дальность, время, скорость и направление. Приводятся оценки погрешностей расчета координат баллистической траектории при различных подходах к использованию значения баллистического коэффициента. Сделан вывод о том, что на текущий момент при моделировании траектории полета пули вполне оправданным является упрощение, основанное на использовании постоянного значения баллистического коэффициента, но при соответствующих требованиях тактико-технического задания актуальным будет вопрос исследования способов повышения точности моделирования траектории. Одним из таких способов является вариант использования значения баллистического коэффициента, зависящего от угла бросания, предложенный в настоящей статье.

**Ключевые слова:** баллистический коэффициент, внешняя баллистика, математическая модель, траектория полета пули, стрелковый тренажер

**Для цитирования:** Егоров С. Ф., Вдовин А. Ю. Исследование необходимости использования переменного значения баллистического коэффициента при моделировании траектории пули в



стрелковом тренажере // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 253–263. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-253-263>, EDN: IXKNHK

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Investigation of the need to use the variable value of the ballistic coefficient when modeling the trajectory of the bullet in the shooter simulator

S. F. Egorov<sup>1</sup>, A. Yu. Vdovin<sup>2</sup>✉

<sup>1</sup>Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the RAS, 34 Tat'iany Baramzinoi St., Izhevsk 426067, Russia

<sup>2</sup>Kalashnikov Izhevsk State Technical University, 7 Studencheskaya St., Izhevsk 426069, Russia

Stanislav F. Egorov, [stos.mitm@mail.ru](mailto:stos.mitm@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-4737-0706>, AuthorID: 609410

Aleksey Yu. Vdovin, [vd\\_aleks@mail.ru](mailto:vd_aleks@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0001-8268-3375>, AuthorID: 677382

**Abstract.** When developing electronic shooting simulators for manual automatic weapons that do not use ammunition, it is necessary to achieve the maximum realistic modeling of the bullet flight path for each shot taking into account a set of factors. Traditionally, a system of differential equations of outer ballistics is used in modeling the trajectory. The use of a constant value of the ballistic coefficient in such a mathematical model does not allow to achieve high accuracy of modeling the trajectory for such important for solving the “task of the meeting” parameters as complete flight time and excess of the trajectory for all targeted range of small arms. The initial values in the mathematical model based on the system of differential equations of the outer ballistic are the casting angle (depends on the settings of the sight), the initial speed and the ballistic coefficient of the bullet, and such parameters as the current excess, range, time, speed and direction are calculated. Estimates of the errors of the calculation of the coordinates of the ballistic trajectory at various approaches to the use of the value of the ballistic coefficient are given. It is concluded that at the moment when modeling the flight trajectory of the bullet, simplification based on the use of a constant value of the ballistic coefficient is quite justified but with the relevant requirements of the tactical and technical task the study of ways to increase the accuracy of the trajectory modeling will become relevant. One of these paths is using the value of the ballistic coefficient, depending on the casting angle proposed in this article.

**Keywords:** ballistic coefficient, external ballistics, mathematical model, bullet flight path, shooting simulator

**For citation:** Egorov S. F., Vdovin A. Yu. Investigation of the need to use the variable value of the ballistic coefficient when modeling the trajectory of the bullet in the shooter simulator. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 253–263 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-253-263>, EDN: IXKNHK

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

При разработке электронных стрелковых тренажеров для ручного автоматического оружия, не использующих боеприпасы (например, с имитаторами АК74, РПК74, АКМ,



ПКМ, СВД и т.п.) [1–11], возникает задача максимально реалистичного моделирования траектории каждого выстрела с учетом множества факторов [12–14]: установок прицела, параметров атмосферы и типа боеприпасов, последний существенно влияет на начальную скорость пули и определяет баллистический коэффициент (БК).

Исследования БК базируются на нормативных документах по баллистическим характеристикам боеприпасов стрелкового оружия [15], опыте разработки профессионального оптико-электронного стрелкового тренажера «Ингибитор» 1УЗ3 (в Институте механики УдмФИЦ УрО РАН и на кафедре вычислительной техники ИЖГТУ имени М. Т. Калашникова совместно с АО «Концерн “Калашников”») и разработке семейства общедоступных электронных тренажеров «СТрИж» нескольких уровней аппаратной реализации [16–18].

Целью статьи является уточнение вопроса влияния переменного баллистического коэффициента пули на точность оценки траекторных параметров полета с целью оптимизации процесса внешнебаллистического моделирования в стрелковом тренажере для решения «задачи встречи».

## 1. Математическая модель внешней баллистики

При моделировании настильной баллистической траектории пули без учета угла места цели на базе системы дифференциальных уравнений по дальности (1) с законом сопротивления воздуха 1943 г. [19] используют следующие типичные допущения [13, 14].

1. Кривизна и вращение земли игнорируются, ускорение свободного падения  $g$  выбрано, например, для параллели  $55^\circ$  и постоянно  $g = 9.815 \text{ м/с}^2$ .

2. Влияние прецессии, нутации и деривации пули не учитывается (точнее, эти факторы включены в рассеивание траекторий, которое в рамках настоящих исследований учитывается лишь оценочно), рассматривается только движение центра масс пули.

3. Баллистический коэффициент пули для закона сопротивления 1943 г.  $c_{43}$  считается постоянным.

4. В рамках большинства исследований температура, давление воздуха и скорость бокового ветра постоянны и имеют стандартные значения:  $T = 288^\circ \text{K}$  ( $15^\circ \text{C}$ ),  $p = 760 \text{ мм р.с.}$  и  $W = 0 \text{ м/с.}$

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = -c_1 v C_x \left( \frac{v}{a} \right) \\ \frac{d\gamma}{dx} = -\frac{g}{u^2} \\ \frac{dy}{dx} = \gamma = \text{tg } \theta \\ \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{u} \\ v = u \sqrt{1 + \gamma^2}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $t$  — время движения пули;  $x, y$  — координаты центра масс пули;  $a = 340.4 \text{ м/с}$  — скорость звука;  $u = v \cos \theta$  — проекция скорости  $v$  на ось  $Ox$ ;  $\gamma = \text{tg } \theta$  — тангенс угла  $\theta$  вектора скорости;  $C_x \left( \frac{v}{a} \right)$  — функция лобового сопротивления воздуха по закону 1943 г. (рис. 1), аппроксимируется от  $M = v/a$  — числа Маха в [20];  $c_1 = 0.00048104 c_{43}$  — коэффициент сопротивления.

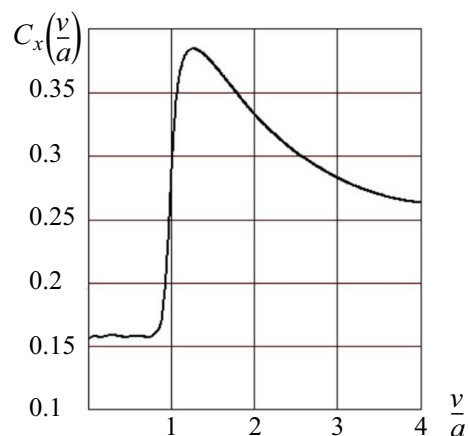


Рис. 1.  $C_x(M)$  по закону сопротивления 1943 г.

Fig. 1.  $C_x(M)$  according to the law of resistance of 1943

В авторской программе моделирования полета пули система (1) решается интегрированием с шагом 0.2 м методом Рунге – Кутты [13] и позволяет изменять и проверять все параметры на каждом цикле. Тип оружия (например, АК74, РПК74, АКМ, ПКМ, СВД) и боеприпаса (рассматриваются только пули со стальным сердечником) определяют начальную скорость  $v_0$  и БК пули  $c_{43}$ , установки прицела — угол бросания  $\theta_0$ . Однако даже в [15] приводятся данные, которые подчеркивают хотя и незначительное (+2% для пули патрона типа  $5.45 \times 39$  мм и -3% для пули патрона типа  $7.62 \times 54$  мм на дистанции от 50 до 1000 м), но изменение БК пули по траектории (к сожалению, не указан БК в начале траектории, поэтому нет априорной информации даже о характере изменений).

Баллистический коэффициент  $c_{43}$  описывает форму пули, ее геометрию и вес:  $c_{43} = i_{43} \frac{d^2}{q}$ , где  $d$  — диаметр миделева сечения пули (м),  $q$  — масса пули (кг),  $i_{43}$  — коэффициент формы (типичное значение 0.8, ..., 1.4 определяется экспериментально, в общем случае зависит от  $v$  и  $\theta_0$  [21–23]). Исследования заключаются в экспериментальном подборе  $i_{43}$  (фактически  $c_{43}$ ) в авторской программе моделирования баллистики (обратная задача внешней баллистики), добиваясь соответствия табличным значениям [15] главных параметров баллистики для решения стрелковой «задачи встречи»: времени подлета пули к рубежам дальности (частично учитывая еще и скорость подлета) и превышения траектории на нисходящем участке (с погрешностью таблиц) для типичных образцов стрелкового вооружения (АК74, РПК74, АКМ, ПКМ, СВД). В данной статье приводятся исследования только по пуле СВД — патрон типа  $7.62 \times 54$  мм (вес пули со стальным сердечником 9.6 г, дульная энергия пули 337 кгм, начальная скорость 830 м/сек, угол вылета равен 0).

Таблицы [15] составлены для стандартных погодных условий (+15°C тепла, давление 760 мм р.с.) и не отличаются высокой точностью представления важных данных: время подлета к рубежу  $\pm 0.005$  с, угол бросания  $\pm 0.5'$ , скорость на рубеже  $\pm 0.5$  м/с и превышение по траектории от  $\pm 0.5$  см (до 400 м) до  $\pm 5$  см (от 500 м). Так, допуск на значение времени  $\pm 0.005$  с в случае движущейся мишени 2–3 м/с дает возможную погрешность координат  $\pm 1$ –1.5 см, что приемлемо для стрелкового тренажера, а допуск превышений траектории  $\pm 5$  см уже может привести к фиксации промаха. Также в таблицах [15] указана высота в вершине траектории над горизонтом оружия (рис. 2), а превышения по траектории указаны над горизонтальной линией прицеливания (глаз–прорезь–мушка–цель, рис. 2) при нулевом угле места цели, и получается, что в начале траектории в точке вылета  $y_0 \approx -5.1$  см (высота мушки над дульным срезом СВД, таблицы [15] составлены для механического прицела), и этот момент иногда игнорируется в исследовательских статьях или учет не прописан явно.

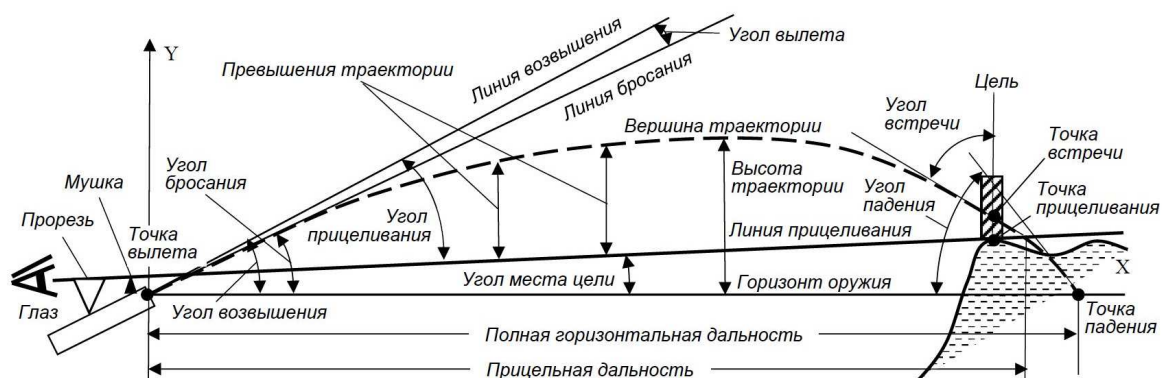


Рис. 2. Основные параметры баллистической траектории  
Fig. 2. Basic parameters of the ballistic trajectory



## 2. Оценка значений переменного баллистического коэффициента в зависимости от угла бросания

В работе [22] сделана попытка выявить зависимость значения БК от дальности для СВД (что в принципе эквивалентно зависимости от скорости или от времени для стандартных условий) с учетом соответствия табличным данным [15] только углов бросания и падения, времени полета и скорости в точке встречи и высоты лишь в вершине траектории. По результатам анализа этой зависимости был установлен колебательный характер БК( $x$ ) с пиками на 100, 500, 900 и 1100 м. Кроме этого, в [22] проведена проверка отклонений (в % от табличного) превышений баллистической траектории при стрельбе на прицельную дальность 600 м через каждые 100 м. Полученные рассогласования, особенно на 500 м (12.85%, что соответствует  $\approx 10$  см) не могут удовлетворить требованиям к стрелковым тренажерам, так как реальная стрельба осуществляется с приблизительным положением прицела, поражение мишени чаще всего происходит на нисходящей траектории до дальности прицела, и пули не должны перелетать мишень из-за систематического рассогласования превышений (фактически это ошибка, даже несмотря на учет случайного рассеивания пуль). В связи с этим и появилась необходимость проводить настоящие исследования для повышения точности моделирования траектории с выявлением зависимости БК от других параметров математической модели, в качестве одного из которых выбран начальный угол бросания.

Методика подбора баллистического коэффициента в зависимости от начального угла бросания (фактически установок прицела), опираясь на эталонные данные [15], считает безусловным приоритетом нулевое превышение на дальности прицела с одновременным выдерживанием допуска превышения на предыдущей дальности нисходящего участка траектории ( $\pm 0.5$  см или  $\pm 5.0$  см), оставаясь при этом в приемлемом допуске полному времени полета для заданной дальности времени подлета к дальности ( $\pm 0.01$  с, соответствует погрешности расчета координат не более  $\pm 2-3$  см, для больших дальностей допустимо  $\pm 0.02$  с, или  $\pm 4-6$  см), и состоит из следующих этапов:

1) для каждого значения установок прицела стрелкового оружия подбираем БК ( $\pm 0.01$ ), в первую очередь, по полному времени полета для заданной дальности времени подлета к его рубежу (не более  $\pm 0.005$  с изначально), далее выставляем угол бросания ( $\pm 1''$ ), добиваясь нулевого ( $\pm 0.33$  см) превышения на дальности прицела;

2) проверяем высоту траектории, рассогласование превышения на предыдущей дистанции с табличным ( $-50$  до 500 м и  $-100$  от 600 м) не должно быть больше ее допуска:  $\pm 0.5$  см (до 400–500 м) или  $\pm 5.0$  см (от 500–600 м);

3) если рассогласование превышения превышает допуск в большую сторону (вверх чаще всего), повторяем цикл, уменьшая БК, но не позволяем полному времени полета пули существенно выйти за расширенный допуск (не более  $\pm 0.01, \dots, 0.02$  с): увеличивая БК, мы делаем траекторию более крутой и увеличиваем полное время полета пули, а уменьшая — делаем траекторию более полой и уменьшаем время.

Таким образом, наиболее приоритетным в предложенной методике подбора БК( $\theta_0$ ) является соответствие допуску превышения на дистанции установок прицела, далее превышение на предыдущем рубеже, затем полное время полета, и последним в порядке приоритетности является проверочное превышение на следующем после прицела рубеже. Соответствие таблиц с допуском значений угла бросания, угла падения, скорости на рубеже и высоты траектории для моделирования баллистики





в стрелковом тренажере решению реалистичной «задачи встречи» принципиального значения не имеет (особенно учитывая обязательное случайное рассеивание пули). По методике рассчитаны значения переменного БК ( $\theta_0$ ) для пули СВД (патрон типа 7.62 × 54мм) с проверкой полного времени полета пули и превышения по всей траектории, результаты приведены в табл. 1–3.

Таблица 1 / Table 1

Оценка точности расчета траектории при использовании значений переменного БК( $\theta_0$ ) для прицельных дальностей 100–300 м  
 Estimation of the accuracy of trajectory calculation when using values of variable BC( $\theta_0$ ) for sighting ranges of 100–300 m

Прицел – $\theta_0$	БК	$t$ , мс	Рассогласование на различных дальностях рассчитанного превышения траектории с эталонным значением, см							
			50 м	100 м	150 м	200 м	250 м	300 м	350 м	400 м
1 – 264''	8.99	128.5	–0.56	–0.20	–14.00	–	–	–	–	–
2 – 390''	7.07	266.9	–0.50	+0.20	+0.49	–0.00	+0.10	+0.12	–	–
3 – 565''	6.21	415.0	–1.25	–1.27	–0.65	–0.50	+0.45	–0.20	0.00	+1.24

Таблица 2 / Table 2

Оценка точности расчета траектории при использовании значений переменного БК( $\theta_0$ ) для прицельных дальностей 400–700 м  
 Estimation of the accuracy of trajectory calculation when using values of variable BC( $\theta_0$ ) for sighting ranges of 400–700 m

Прицел – $\theta_0$	БК	$t$ , с	Рассогласование на различных дальностях рассчитанного превышения траектории с эталонным значением, см								
			100 м	200 м	300 м	400 м	500 м	600 м	700 м	800 м	900 м
4 – 799''	6.59	589.4	–0.90	–0.0	–0.15	0.0	+0.2	–	–	–	–
5 – 1052''	6.37	0.7723	–1.74	–1.4	+0.20	+0.6	0.0	+4.7	–	–	–
6 – 1361''	6.39	0.9827	–2.70	–2.4	–4.10	–0.6	+4.5	0.0	+6.8	+32.0	–
7 – 1717''	6.35	1.2149	–2.40	–0.9	–3.00	–10.3	+1.4	+4.7	0.0	+4.4	+22.3

Таблица 3 / Table 3

Оценка точности расчета траектории при использовании значений переменного БК( $\theta_0$ ) для прицельных дальностей 800–1300 м  
 Estimation of the accuracy of trajectory calculation when using values of variable BC( $\theta_0$ ) for sighting ranges of 800–1300 m

Прицел – $\theta_0$	БК	$t$ , с	Рассогласование на различных дальностях рассчитанного превышения траектории с эталонным значением, см						
			200 м	400 м	600 м	800 м	1000 м	1200 м	1400 м
8 – 2170''	6.45	1.4902	–7.0	–3.1	–6.6	0.0	+3.3	–	–
9 – 2696''	6.47	1.7903	+4.0	–1.3	–4.2	+2.0	–6.0	–	–
10 – 3288''	6.43	2.1050	+1.4	–6.2	–10.7	+5.5	0.0	+25.5	–
11 – 4019''	6.48	2.4564	+2.3	+5.2	+10.4	+4.0	+1.9	–3.2	–
12 – 4824''	6.49	2.8198	+0.3	+1.3	+4.2	+25.2	–0.4	0.0	–19.0
13 – 5674''	6.45	3.1883	+2.8	–3.5	+2.8	+8.8	+1.3	+3.2	–0.4



В табл. 4 сведены результаты проверки траектории пули СВД на прицельной дальности 600 м с разными подходами к использованию значения БК из приведенных источников по расхождению превышения для сравнительного анализа.

Таблица 4 / Table 4

Параметры траектории пули СВД при константном БК, БК(x), БК( $\theta_0$ )  
Parameters of the trajectory of the SVD bullet at constants BC, BC(x), BC( $\theta_0$ )

Дальность, м / $\theta_0$	100	200	300	400	500	600/23'	700	800
Постоянный $c_{43}$ по [14]	6.52	6.52	6.52	6.52	6.52	6.52/22'55"	6.52	6.52
РасхождениеС, %	-3.6	-1.2	-2.7	+2.0	+8.4	-	+3.2	+7.3
$c_{43}(x)$ по [22]	20.48	10.24	6.854	6.913	7.231	6.841/23'	6.683	6.569
РасхождениеХ, %	5.89	4.43	1.75	6.27	12.85	-	-	-
$c_{43}(\theta_0)$	6.39	6.39	6.39	6.39	6.39	6.39/22'41"	6.39	6.39
РасхождениеУ, %	-4.8	-2.5	-3.4	-0.5	+6.4	-	+5.2	+9.4

Анализ данных табл. 4 показал, что константное значение БК, используемое в математической модели стрелкового тренажера «Ингибитор» [14], обеспечивает даже лучшее соответствие эталонной траектории (РасхождениеС), чем в работе [22] с использованием переменного по дальности БК(x) (РасхождениеХ), и укладывается в пределы допуска ( $\pm 5$  см). Испытание же предложенного БК( $\theta_0$ ) показало, что отклонение нисходящей траектории (РасхождениеУ) также укладывается в допуск ( $-0.5\%$ ,  $+6.4\%$ ,  $0\%$ ,  $+5.2\%$ ) и лучше предыдущих вариантов, но имеет несколько худшие результаты на восходящем участке траектории. Таким образом, базовая математическая модель внешней баллистики (1), теоретически представленная в [20], вполне обоснованно использует константное значение БК [13, 14], так как проведенные исследования показали лишь незначительное улучшение траекторных характеристик при переменном БК, к тому же достигаемое лишь на самом ключевом ее участке. Но современные вычислительные средства вполне позволяют без ущерба для производительности реализовать баллистическое моделирование в реальном времени для десятка рабочих мест тренажера и с переменным БК, поэтому исследования для более точного моделирования траектории пули необходимо продолжать.

## Заключение

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы.

1. Хотя результаты моделирования с постоянным БК показали соответствующую ТТЗ на создание тренажера погрешность [13, 14], но нисходящая траектория систематически несколько завышена, а восходящая занижена. В связи с этим актуальны дальнейшие исследования по выявлению зависимостей переменного БК.
2. Попытки [22] использовать зависимый от текущей дальности БК(x) показали как колебательный характер изменения БК(x), так и неустойчивую погрешность расчета, связанную, вероятно, с недостаточной точностью эталонных таблиц и опорой только на высоту траектории, что не позволяет рекомендовать данный подход в подобном виде в стрелковых тренажерах.
3. Результаты моделирования баллистики с зависимым от установок прицела БК( $\theta_0$ ) показали меньшую погрешность по всей баллистической траектории при минимальном усложнении только инициализации начальных значений расчета, что позволяет использовать разработанное ПО баллистики в современных стрелковых тренажерах.



4. Если считать приоритетным при моделировании траектории пули в стрелковом тренажере только ее превышение на нисходящем участке, игнорируя высокую точность времени подлета, то достаточно использования  $BK(\theta_0)$ , что дает на 25% меньшую погрешность на этом участке, чем при использовании постоянного значения  $BK$ .

5. Целесообразно провести исследования  $BK(\theta_0)$  с зависимостью от текущего углового положения вектора скорости, который априорно из-за прецессии пули оказывает существенное влияние на изменение лобового сопротивления воздуха и от начальной скорости.

Таким образом, хотя константное значение баллистического коэффициента является обоснованным допущением математической модели внешней баллистики, необходимо стремиться к улучшению точности моделирования баллистической траектории. Исследование возможных путей повышения точности может быть целесообразно при соответствующих требованиях ТТЗ.

### Список литературы

1. *Munoz J. E., Pope A. T., Velez L. E.* Integrating biocybernetic adaptation in virtual reality training concentration and calmness in target shooting // *Physiological Computing Systems*. Cham : Springer, 2019. P. 218–237. (Lecture Notes in Computer Science, vol. 10057). [https://doi.org/10.1007/978-3-030-27950-9\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-030-27950-9_12)
2. *Labr M., Hagara L.* Using open source on multiparametric measuring system of shooting // 2019 International Conference on Military Technologies (ICMT). Brno, Czech Republic, 2019. P. 1–6. <https://doi.org/10.1109/MILTECHS.2019.8870093>
3. *Bogatynov D., Lameski P., Trajkovik V.* Firearms training simulator based on low cost motion tracking sensor // *Multimedia Tools and Applications*. 2017. Vol. 76, iss. 1. P. 1403–1418. <https://doi.org/10.1007/s11042-015-3118-z>
4. *Gudzbeler G., Struniawski J.* Functional assumptions of «Virtual system to improve shooting training and intervention tactics of services responsible for security» (VirtPol) // *Conference on Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High Energy Physics Experiments (Wilga, Poland)*. 2017. Vol. 10445, Art. 104456M. 6 p. <https://doi.org/10.1117/12.2281622>
5. *Gudzbeler G., Struniawski J.* Methodology of shooting training using modern IT techniques // *Conference on Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High Energy Physics Experiments (Wilga, Poland)*. 2017. Vol. 10445, Art. 104456L. 6 p. <https://doi.org/10.1117/12.2281618>
6. *Fan Y. C., Wen C. Y.* A virtual reality soldier simulator with body area networks for team training // *Sensors*. 2019. Vol. 19, iss. 3. Art. 451. <https://doi.org/10.3390/s19030451>
7. *de Armas C., Tori R., Netto A. V.* Use of virtual reality simulators for training programs in the areas of security and defense: A systematic review // *Multimedia Tools and Applications*. 2020. Vol. 79. P. 3495–3515. <https://doi.org/10.1007/s11042-019-08141-8>
8. *Fedaravicius A., Pilkauskas K., Slizys E., Survila A.* Research and development of training pistols for laser shooting simulation system // *Defence Technology*. 2020. Vol. 16, iss. 3. P. 530–534. <https://doi.org/10.1016/j.dt.2019.06.018>
9. *Maciejewski M., Piszczek M., Pomianek M., Palka N.* Optoelectronic tracking system for shooting simulator — tests in a virtual reality application // *Photonics Letters of Poland*. 2020. Vol. 12, iss. 2. P. 61–63. <https://doi.org/10.4302/plp.v12i2.1025>
10. *Taylor P., Piszczek M., Pomianek M., Palka N.* Dispatch priming and the police decision to use deadly force // *Police Quarterly*. 2020. Vol. 23, iss. 3. P. 311–332. <https://doi.org/10.1177/1098611119896653>
11. *Maciejewski M., Piszczek M., Pomianek M., Palka N.* Design and evaluation of a



- SteamVR tracker for training applications – simulations and measurements // *Metrology and Measurement Systems*. 2020. Vol. 27, iss. 4. P. 601–614. <https://doi.org/10.24425/mms.2020.134841>
12. Егоров С. Ф. Стрелковый тренажер «Ингибитор»: функциональная схема программного обеспечения // *Интеллектуальные системы в производстве*. 2019. Т. 17, № 2. С. 19–29. <https://doi.org/10.22213/2410-9304-2019-2-19-29>
  13. Егоров С. Ф., Вдовин А. Ю., Шелковников Ю. К. Стрелковый тренажер «Ингибитор»: программное обеспечение баллистики оружия калибра 5.45 // *Интеллектуальные системы в производстве*. 2021. Т. 19, № 2. С. 50–61. <https://doi.org/10.22213/2410-9304-2021-2-50-61>
  14. Егоров С. Ф., Вдовин А. Ю., Коробейникова И. В., Петухов К. Ю., Сяктерев В. Н. Стрелковый тренажер «Ингибитор»: математическое обеспечение баллистики оружия калибра 7.62 // *Интеллектуальные системы в производстве*. 2021. Т. 19, № 3. С. 121–133. <https://doi.org/10.22213/2410-9304-2021-3-121-133>
  15. Таблицы стрельбы по наземным целям из стрелкового оружия калибров 5.45 и 7.62 мм. Москва : Воениздат, 1977. 264 с.
  16. Егоров С. Ф., Казаков В. С., Коробейников В. В. Стрелковый тренажер на общедоступных компонентах // *Интеллектуальные системы в производстве*. 2011. № 1 (17). С. 182–185. EDN: [NXVFQB](#)
  17. Егоров С. Ф., Коробейников В. В., Казаков В. С. Информационно-измерительные системы оборонного назначения: стрелковые тренажеры и электронные мишени // *Механика и физико-химия гетерогенных сред, наносистем и новых материалов : материалы научных исследований*. Ижевск : Ин-т механики УрО РАН, 2015. С. 328–349. EDN: [ULMFGF](#)
  18. Егоров С. Ф., Шелковников Ю. К., Осипов Н. И., Кизнерцев С. Р., Метелева А. А. Исследование оптико-электронных регистраторов точки прицеливания стрелковых тренажеров // *Проблемы механики и материаловедения. Труды Института механики УрО РАН*. Ижевск : Ин-т механики УрО РАН, 2017. С. 227–248. EDN: [ZFJKKF](#)
  19. Ермолаев С. И., Комаров Л. Б., Чурбанов Е. В. Внешняя баллистика. Ленинград : [б. и.], 1958. 716 с.
  20. Коновалов А. А., Николаев Ю. В. Внешняя баллистика. Ижевск : Изд-во Ин-та прикладной механики УрО РАН, 2003. 192 с.
  21. Гудич И. Г., Козлитин И. А. О расчете баллистических коэффициентов пуль и снарядов // *Электронные информационные системы*. 2015. № 4 (7). С. 81–88. EDN: [VLDHED](#)
  22. Хайков В. Л. Математическая модель внешней баллистики снайперской винтовки Драгунова на основе оценки баллистических коэффициентов по данным таблиц стрельбы // *Вопросы оборонной техники. Серия 16: Технические средства противодействия терроризму*. 2017. № 11–12 (113–114). С. 16–23. EDN: [ZVZGMF](#)
  23. Cherkov I. B., Hurnovych A. V., Lapyts'kyi S. V., Oliarnyk B. O., Trofymenko V. H., Maistrenko O. A. Method of Conversion for the Ballistic Coefficient of Bullets // *Strength of Materials*. 2020. Vol. 52. P. 419–422. <https://doi.org/10.1007/s11223-020-00193-8>

### References

1. Munoz J. E., Pope A. T., Velez L. E. Integrating biocybernetic adaptation in virtual reality training concentration and calmness in target shooting. *Physiological Computing Systems. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 10057. Cham, Springer, 2019, pp. 218–237. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-27950-9\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-030-27950-9_12)
2. Labr M., Hagara L. Using open source on multiparametric measuring system of shooting. *2019 International Conference on Military Technologies (ICMT)*. Brno, Czech Republic, 2019, pp. 1–6. <https://doi.org/10.1109/MILTECHS.2019.8870093>



3. Bogatinov D., Lameski P., Trajkovik V. Firearms training simulator based on low cost motion tracking sensor. *Multimedia Tools and Applications*, 2017, vol. 76, iss. 1, pp. 1403–1418. <https://doi.org/10.1007/s11042-015-3118-z>
4. Gudzbeler G., Struniawski J. Functional assumptions of “Virtual system to improve shooting training and intervention tactics of services responsible for security” (VirtPol). *Conference on Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High Energy Physics Experiments (Wilga, Poland)*, 2017, vol. 10445, Art. 104456M, 6 p. <https://doi.org/10.1117/12.2281622>
5. Gudzbeler G., Struniawski J. Methodology of shooting training using modern IT techniques. *Conference on Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High Energy Physics Experiments (Wilga, Poland)*, 2017, vol. 10445, Art. 104456L, 6 p. <https://doi.org/10.1117/12.2281618>
6. Fan Y. C., Wen C. Y. A virtual reality soldier simulator with body area networks for team training. *Sensors*, 2019, vol. 19, iss. 3, Art. 451. <https://doi.org/10.3390/s19030451>
7. de Armas C., Tori R., Netto A. V. Use of virtual reality simulators for training programs in the areas of security and defense: A systematic review. *Multimedia Tools and Applications*, 2020, vol. 79, pp. 3495–3515. <https://doi.org/10.1007/s11042-019-08141-8>
8. Fedaravicius A., Pilkauskas K., Slizys E., Survila A. Research and development of training pistols for laser shooting simulation system. *Defence Technology*, 2020, vol. 16, iss. 3, pp. 530–534. <https://doi.org/10.1016/j.dt.2019.06.018>
9. Maciejewski M., Piszczek M., Pomianek M., Palka N. Optoelectronic tracking system for shooting simulator – tests in a virtual reality application. *Photonics Letters of Poland*, 2020, vol. 12, iss. 2, pp. 61–63. <https://doi.org/10.4302/plp.v12i2.1025>
10. Taylor P., Piszczek M., Pomianek M., Palka N. Dispatch priming and the police decision to use deadly force. *Police Quarterly*, 2020, vol. 23, iss. 3, pp. 311–332. <https://doi.org/10.1177/1098611119896653>
11. Maciejewski M., Piszczek M., Pomianek M., Palka N. Design and evaluation of a SteamVR tracker for training applications – simulations and measurements. *Metrology and Measurement Systems*, 2020, vol. 27, iss. 4, pp. 601–614. <https://doi.org/10.24425/mms.2020.134841>
12. Egorov S. F. Shooting simulator “Inhibitor”: functional scheme of the software. *Intelligent Systems in Manufacturing*, 2019, vol. 17, iss. 2, pp. 19–29 (in Russian). <https://doi.org/10.22213/2410-9304-2019-2-19-29>
13. Egorov S. F., Vdovin A. Yu., Shelkovnikov Yu. K. Shooting simulator “Inhibitor”: Ballistics software for 5.45 caliber weapons. *Intelligent Systems in Manufacturing*, 2021, vol. 19, iss. 2, pp. 50–61 (in Russian). <https://doi.org/10.22213/2410-9304-2021-2-50-61>
14. Egorov S. F., Vdovin A. Yu., Korobeinikova I. V., Petukhov K. Yu., Siakterev V. N. Shooting simulator “Inhibitor”: Mathematical support for ballistics of 7.62 caliber weapons. *Intelligent Systems in Manufacturing*, 2021, vol. 19, iss. 3, pp. 121–133 (in Russian). <https://doi.org/10.22213/2410-9304-2021-3-121-133>
15. *Tablitsy strel'by po nazemnym tselyam iz strelkovogo oruzhiya kalibrov 5.45 i 7.62 mm* [Tables of Shooting at Ground Targets with Small Srms of 5.45 and 7.62 mm Calibers]. Moscow, Voenizdat, 1977. 264 p. (in Russian).
16. Egorov S. F., Kazakov V. S., Korobeinikov V. V. Shooting simulator based on publicly available components. *Intelligent Systems in Manufacturing*, 2011, iss. 1 (17), pp. 182–185 (in Russian). EDN: **NXVFQB**
17. Egorov S. F., Korobeinikov V. V., Kazakov V. S. Information-measuring systems for defense purposes: shooting simulators and electronic targets. *Mekhanika i fiziko-khimiya geterogennykh sred, nanosistem i novykh materialov* [Mechanics and Physico-chemistry of Heterogeneous Media, Nanosystems and New Materials]: Materials of Scientific Research.



- Izhevsk, Institute of Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences Publ., 2015, pp. 328–349 (in Russian). EDN: [ULMFGF](#)
18. Egorov S. F., Shelkovnikov Yu. K., Osipov N. I., Kiznertsev S. R., Meteleva A. A. Research of optical-electronic recorders of the aiming point of shooting simulators. *Problemy mekhaniki i materialovedeniia. Trudy Instituta mekhaniki UrO RAN* [Problems of Mechanics and Materials Science. Proceedings of the Institute of Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences]. Izhevsk, Institute of Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences Publ., 2017, pp. 227–248. EDN: [ZFJKKF](#)
  19. Ermolaev S. I., Komarov L. B., Churbanov E. V. *Vneshnjaja ballistika* [External Ballistic]. Leningrad, 1958. 716 p. (in Russian).
  20. Konovalov A. A., Nikolaev Yu. V. *Vneshnjaja ballistika* [External Ballistic]. Izhevsk, Institute of Applied Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences Publ., 2003. 192 p. (in Russian).
  21. Gudich I. G., Kozlitsin I. A. On the calculation of ballistic coefficients of bullets and shells. *Elektronnyye informatsionnyye sistemy* [Electronic Information Systems], 2015, iss. 4 (7), pp. 81–88. EDN: [VLDHED](#)
  22. Khaikov V. L. Mathematical model of external ballistics of a Dragunov sniper rifle based on the evaluation of ballistic coefficients according to the shooting tables. *Voprosy oboronnoy tekhniki. Seriya 16: Tekhnicheskie sredstva protivodeystviya terrorizmu* [Issues of Defense Technology. Series 16: Technical Means of Countering Terrorism], 2017, iss. 11–12 (113–114), pp. 16–23 (in Russian). EDN: [ZVZGMF](#)
  23. Chepkov I. B., Hurnovych A. V., Lapyts'kyi S. V., Oliiarnyk B. O., Trofymenko V. H., Maistrenko O. A. Method of conversion for the ballistic coefficient of bullets. *Strength of Materials*, 2020, vol. 52, pp. 419–422. <https://doi.org/10.1007/s11223-020-00193-8>

Поступила в редакцию / Received 12.05.2022

Принята к публикации / Accepted 18.11.2022

Опубликована / Published 31.05.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 264–273

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 264–273

[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru)

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-264-273>, EDN: BTQTSM

Article

## Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease

I. V. Lutoshkin<sup>✉</sup>, M. S. Rybina

Ulyanovsk State University, 42 Leo Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia

Igor V. Lutoshkin, [lutoshkiniv@ulsu.ru](mailto:lutoshkiniv@ulsu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-4108-7646>, AuthorID: 12324

Maria S. Rybina, [rybina\\_maria@icloud.com](mailto:rybina_maria@icloud.com), AuthorID: 1185864

**Abstract.** In the conditions of a mass disease, governing bodies of an economic system face a number of tasks related to the need to minimize its negative effects. This requires a tool that allows timely predicting the dynamics of the situation and determining what measures need to be taken. In this paper, a specialized mathematical model is proposed as such a tool, taking into account socio-biological and economic factors. The model is a dynamic optimal control problem with a delay in phase variables. The values of the model parameters were estimated using statistical data on the COVID-19 pandemic in the Russian Federation and the Ulyanovsk region. As target functionals, the following are considered: “social criterion” — a decrease in the number of cases; “economic criterion” — an increase in the relative profit of an economic system. To solve the problem, the authors apply a modification of the numerical parameterization method developed in their early studies. The article presents and analyzes the results of the numerical experiment aimed at studying the obtained optimal solutions. It is shown that: the optimal solution for social and economic criteria when changing budgets is stable; most of the parameters of the optimal solution are weakly elastic relative to the values of variables considered; the parameters of the optimal solution when using the economic criterion are more susceptible to change than when using the social criterion; the nature of the change in the parameters of the optimal solution for the Ulyanovsk region and for the Russian Federation is similar. Thus, the paper offers a tool for analyzing an economic problem in conditions of mass disease and confirms the applicability of the tool for finding optimal management strategies in various economic systems.

**Keywords:** optimal control, mathematical modeling, optimal solution analysis, economic system, mass disease, COVID-19

**For citation:** Lutoshkin I. V., Rybina M. S. Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 264–273. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-264-273>, EDN: BTQTSM

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Научная статья  
УДК 517.977.5,519.863

## Оптимальное решение в модели управления экономической системой в условиях массового заболевания

И. В. Лутошкин<sup>✉</sup>, М. С. Рыбина

Ульяновский государственный университет, Россия, 432017, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42

**Лутошкин Игорь Викторович**, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой цифровой экономики, lutoshkiniv@ulsu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4108-7646>, AuthorID: 12324

**Рыбина Мария Сергеевна**, магистрант факультета математики, информационных и авиационных технологий, rybina\_maria@icloud.com, AuthorID: 1185864

**Аннотация.** В условиях массового заболевания перед органами управления экономической системы возникает ряд задач, связанных с необходимостью минимизировать его негативные эффекты. Для этого требуется инструмент, позволяющий оперативно прогнозировать динамику ситуации и определять, какие меры требуется принять. В данной работе в качестве такого инструмента предлагается специализированная математическая модель, учитывающая социально-биологические и экономические факторы. Модель представляет собой динамическую задачу оптимального управления с запаздыванием по фазовым переменным. Значения параметров модели оценены с использованием статистических данных о пандемии COVID-19 в Российской Федерации и Ульяновской области. В качестве целевого функционала рассматриваются: «социальный критерий» — уменьшение количества заболевших; «экономический критерий» — увеличение относительной прибыли экономической системы. Для решения задачи авторами применяется модификация численного метода параметризации, развиваемого ими в ранних исследованиях. В статье представлены и проанализированы результаты численного эксперимента, направленного на исследование полученных оптимальных решений. Показано, что оптимальное решение для социального и экономического критериев при изменении бюджетов является устойчивым; большинство параметров оптимального решения слабо эластичны относительно рассмотренных значений переменных; параметры оптимального решения при использовании экономического критерия более подвержены изменению, чем при использовании социального критерия; характер изменения параметров оптимального решения для Ульяновской области и для РФ является схожим. Таким образом, в работе предлагается инструмент анализа экономической проблемы в условиях массового заболевания, подтверждается применимость инструмента для поиска оптимальных стратегий управления в различных экономических системах.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, математическое моделирование, анализ оптимального решения, экономическая система, массовое заболевание, COVID-19

**Для цитирования:** *Lutoshkin I. V., Rybina M. S. Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease [Лутошкин И. В., Рыбина М. С. Оптимальное решение в модели управления экономической системой в условиях массового заболевания] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 264–273. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-264-273>, EDN: VTQTSM*

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)





## Introduction

The globalization of economy and growth of the world population lead to the fact that mass diseases have an impact on all aspects of society. In particular, they affect the social sphere, since morbidity increases negative processes in society and in some cases can lead to a reduction in the population [1]. In addition, changes are taking place in the economic sphere: with the introduction of restrictive measures to prevent the growth of morbidity, the business activity of economic entities decreases, labor productivity decreases [2]. Under the current conditions, a governing body of an economic system faces a number of tasks related to the need to minimize negative effects of a mass disease. Such tasks include: determining the amount of expenses for hospitalization of patients and providing them with medical care, informing citizens about the disease and ways to combat it, making a decision on the introduction of restrictive measures [3]. For their effective solution, a tool is needed to quantify the impact of the disease on socio-economic factors and determine a management strategy in conditions mentioned above. An example of a mass disease affecting the economy of the whole world is the COVID-19 pandemic. Due to the speed of the spread of the disease, it became necessary to promptly make decisions on the allocation of resources for health and social support, and on the need to introduce restrictive measures. As an effective tool for implementing these actions, a mathematical model describing this situation can act. In current publications devoted to modeling the dynamics of mass diseases [4–12], the socio-biological aspect of the epidemic is taken into account (SIR or SEIR-type compartmentalization models are used). But it is also important to hold the accompanying analysis of economic indicators which are closely interconnected with socio-biological factors. In particular, [6] emphasizes the need for quantitative assessments of the interconnection of a pandemic with economy and healthcare in order to build strategies for managing them. Therefore, a model should describe the intersection of biosocial environment, economy and healthcare, allow predicting the dynamics of mass diseases and determining optimal strategies for their containment.

### 1. Mathematical model

This paper presents the development of the model proposed in [13, 14].

Considering the biological aspect of the impact of a mass disease, the population ( $N$ , people) of a region is divided into the following groups:

$P$  – persons who comply with restrictive measures (for example, self-isolation) and thereby minimize the risk of infection for themselves;

$S$  – persons who do not comply with restrictive measures and, therefore, are potentially susceptible to infection;

$E$  – infected persons who have the disease in the incubation stage;

$I$  – ill persons (persons with both an asymptomatic and symptomatic forms of a disease are taken into account);

$Q$  – ill persons, who are hospitalized;

$R$  – recovered;

$D$  – deceased.

The socio-economic aspect is described by the following indicators:

$Y$  – gross output (RUB);

$\pi$  – profit of an economic entity (RUB);

$K$  – cost of fixed assets of an economic entity (RUB);



$L$  – amount of productive labour (persons);

$Z$  – a number of beds in hospitals to accommodate the ill (units).

In addition, investments in the implementation of the control actions of the authorities are considered:

$u_1$  – investments in the re-equipment of existing beds for the accommodation of the ill (RUB);

$u_2$  – investments in increasing the number of beds due to the construction of new hospitals (RUB);

$u_3$  – investments in an information campaign to combat the disease (RUB), as well as moments of managerial decision-making:

$\tau_1$  – a moment when governing bodies introduce restrictive measures;

$\tau_2$  – a moment when the restrictions are lifted.

The effect of management decisions can be described as follows:

if  $t = \tau_1$ , then  $S(t) = (1 - a)S(t)$ ,  $P(t) = P(t) + aS(t)$ ;

if  $t = \tau_2$ , then  $S(t) = S(t) + bP(t)$ ,  $P(t) = (1 - b)P(t)$ ;

where  $a$  is the share of the group “persons potentially susceptible to infection”, which passes into the group “persons who comply with restrictive measures” at  $\tau_1$ ;  $b$  is the share of the group “persons who comply with restrictive measures”, which passes into the group “persons potentially susceptible to infection” at  $\tau_2$ .

The mathematical model of control over an economic entity in conditions of mass diseases is formulated below as a system of differential and algebraic relations.

Dynamics of the number of persons potentially susceptible to infection:

$$\frac{dS}{dt} = k_{PS}P(t) + k_{RS}R(t - \tau) - \left( k_{SE} \left( \frac{I(t)}{N(t)} \right) + k_{SP}(U_3(t)) - \rho \right) S(t), \quad (1)$$

where  $\rho$  is natural population growth as a percentage of the total population;  $\tau$  is the time during which the immunity of the recovered remains;  $k_{SP}$  is the intensity of the transition of persons at risk of infection to the group of those, who comply with restrictive measures;  $k_{SE}$  is the intensity of the transition of persons at risk of infection to the group of the infected in the incubation period;  $k_{RS}$  is the intensity of repeated morbidity;  $k_{PS}$  is the intensity with which persons drop out of the number of those who comply with restrictive measures.

In general,  $k_{SE}$  is a function of the ratio of the number of cases to the total population, and  $k_{SP}$  is a function of the amount of investment in the information campaign. Then the dynamics of the number of persons complying with restrictive measures can be represented as:

$$\frac{dP}{dt} = k_{SP}(U_3(t))S(t) - k_{PS}P(t). \quad (2)$$

Increase in the number of infected persons with the incubation stage of the disease:

$$\frac{dE}{dt} = k_{SE} \left( \frac{I(t)}{N(t)} \right) S(t) - k_{EI}E(t), \quad (3)$$

where  $k_{EI}$  is the intensity of the transition of infected persons with the incubation stage of the disease into the group of the ill.

Change in the number of cases:

$$\frac{dI}{dt} = k_{EI}E(t) - (k_{IQ} + k_{IR} + k_{ID})I(t), \quad (4)$$



where  $k_{IQ}$  is the intensity of hospitalization of the ill;  $k_{IR}$  is the intensity of recovery of non-hospitalized patients;  $k_{ID}$  is the mortality rate of non-hospitalized patients.

Dynamics of hospitalization:

$$\frac{dQ}{dt} = k_{IQ}I(t) - (k_{QD} + k_{QR})Q(t), \quad (5)$$

where  $k_{QD}$  is the mortality rate of the hospitalized ill persons;  $k_{QR}$  is the recovery rate of the hospitalized ill persons.

Increase in the number of the recovered:

$$\frac{dR}{dt} = k_{IR}I(t) + k_{QR}Q(t) - k_{RS}R(t). \quad (6)$$

Change in the number of the deceased:

$$\frac{dD}{dt} = k_{QD}Q(t) + k_{ID}I(t). \quad (7)$$

Change in the number of beds to accommodate the ill:

$$\frac{dZ}{dt} = g(u_2(t - \tilde{\tau})) - \mu Z(t) + ku_1(t), \quad (8)$$

where  $g(u_2)$  is a function that matches investments in the construction of new hospitals with an increase in the number of beds;  $\tilde{\tau}$  is the time of implementation of investments;  $\mu$  is the depreciation of hospital funds;  $k$  is the parameter that determines the ratio of the number of beds converted to accommodate patients and investments in the conversion.

Population of a region:

$$N(t) = P(t) + S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t). \quad (9)$$

General amount of effective labour:

$$L(t) = s_1P(t) + s_2S(t) + s_3E(t) + s_4R(t). \quad (10)$$

where  $s_k = e_k \cdot m$ ,  $k = \overline{1, 4}$ ;  $m$  is the share of the working-age population of the total population;  $e_1$  is the labor efficiency coefficient of a healthy person who complies with restrictive measures and works remotely;  $e_2$  is the labor efficiency coefficient of a healthy person working full-time;  $e_3$  is the labor efficiency coefficient of a person whose disease is in the incubation stage;  $e_4$  is the labor efficiency coefficient of a recovered person working full-time. Thus,  $s_k$ ,  $k = \overline{1, 4}$ , is the share of investments of the productive labour of persons from the corresponding groups.

The value of the gross output of an economic entity:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)), \quad (11)$$

where  $K$  is the cost of fixed assets of an economic entity;  $L$  is the volume of productive labour. Note that the value of  $L(t)$ , according to (10), takes into account the influence of a mass disease. Thus, it is indirectly contained in the value of gross output ( $Y$ ).

Profit of a region:

$$\pi(t) = Y(t) - u_1(t) - u_2(t) - u_3(t). \quad (12)$$



Gross output depends on the biosocial effect of a mass disease, therefore, profit also indirectly takes this effect into account.

The volume of investments is assumed to be limited:

$$u_i(t) \geq 0, \quad \int_{t_0}^T u_i(t) dt \leq B_i, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (13)$$

where  $B_1$  is the amount of the budget the conversion of existing beds;  $B_2$  is the amount of the budget for construction of new hospitals;  $B_3$  is the amount of the budget for an information campaign to combat mass disease.

It is assumed that the number of hospitalized does not exceed the number of beds:

$$Q(t) \leq Z(t). \quad (14)$$

To select a control strategy, it is necessary to introduce a criterion that allows determining the best item from a set of control strategies [15–19]. We introduce a functional that contains a combination of criteria: economic (maximizing cumulative relative profit) and social (minimizing the number of cases):

$$\int_{t_0}^T (\alpha_1 \pi(t) - \alpha_2 E(t)) dt \rightarrow \max_{u_1, u_2, u_3, \tau_1, \tau_2}, \quad (15)$$

where  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  are share parameters whose values should be determined by experts. The system (1)–(14) in combination with the quality criterion (15) is a problem of optimal control with a delay. Its solution requires the use of specialized numerical methods, for example, considered in [20, 21].

## 2. Numerical experiment

To find the optimal solution, estimates of the parameters of the model (1)–(15) are required. The graduate work by M. S. Rybina “Mathematical modeling of optimal control over an economic entity in conditions of a mass disease” (Ulyanovsk State University, 2022) provides estimates of parameters for the Russian Federation and the Ulyanovsk region based on data on the COVID-19 pandemic in 2020 (Table 1). There were also estimates of functional dependencies between the model parameters (Table 2) and based on the proposed model, the optimal control parameters for the economies of the Russian Federation and the Ulyanovsk region.

To find optimal solutions, the authors’ software package and algorithms considered in [20] were used. Parameterization method was used to find the solution of the problem (1)–(15) in the class of piecewise constant controls  $u_i(t) = c_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ,  $t \in [t_0; T]$ . Here  $c_i$  are constant values,  $1 \leq i \leq 3$ .

Numerical experiment was held using the data obtained in the condition of absence of vaccination. The beginning of the pandemic in Russia in the middle of March 2020 was the initial point, while the final point was December 2020. Thus, the planning period considered in the problem is  $t_0 = 0$ ,  $T = 9.5$ .

Tables 3 and 4 present the optimal values of the control parameters corresponding to allocated budgets. Each budget was varied by  $\pm 1\%$  and  $\pm 10\%$ , other things being equal. The parameters of optimal solutions were compared with the corresponding parameters calculated in the absence of budget variation.



Table 1

Estimates of the parameters for the Russian Federation and the Ulyanovsk region

Parameter	Region		Parameter	Region	
	Russia	Ulyanovsk region		Russia	Ulyanovsk region
$a$	0.415	0.416	$b$	0.271	0.377
$c_1$	0.174	0.122	$c_2$	$1.845 \cdot 10^{-11}$	$2.0975 \cdot 10^{-11}$
$k_{PS}$	0.64	0.5	$k_{QD}$	0.1	0.13
$k_{RS}$	0.0002	0.0002	$k_{IR}$	2.8	2.36
$k_{QR}$	2.0	2.8	$k_{ID}$	0	0
$k$	$3.415 \cdot 10^{-6}$	$2.719 \cdot 10^{-6}$	$m$	0.482	0.467
$e_1$	0.879	0.879	$e_2$	1	1
$e_3$	0.43	0.43	$e_4$	1	1
$\mu$	$8.33 \cdot 10^{-3}$	$8.33 \cdot 10^{-3}$	$\rho$	$-9.516 \cdot 10^{-5}$	$-3.636 \cdot 10^{-3}$

Table 2

Estimates of parameter functions for the Russian Federation and the Ulyanovsk region

Parameter function	Region	
	Russia	Ulyanovsk region
$k_{SE}(I)$	$1.11 \cdot 10^{-7}I$	$7.7 \cdot 10^{-6}I$
$k_{SP}(u_3)$	$0.174 + 1.845 \cdot 10^{-11}u_3$	$0.122 + 2.097 \cdot 10^{-3}u_3$
$g(u_2)$	$1.381 \cdot 10^{-7}u_2$	0
$F(K, L)$	$7.47 \cdot 10^{-5}K^{0.4387}L^{1.3667}$	$28.228K^{0.3815}L^{0.5728}$
$K(t)$	$3.4973 \cdot 10^{14}e^{0.0102t}$	$1.256128 \cdot 10^{12}e^{0.01178t}$

Table 3

Optimal control parameters for the Russian Federation

Functional coefficients	Budget value change	$u_1$ , RUB	$u_2$ , RUB	$u_3$ , RUB	$\tau_1$ , months	$\tau_2$ , months
$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ (economic criterion)	-	7153989000	2521637000	43737850	0.896	2.029
	$0.9B_1$	6919106000	2712544000	47096230	0.834	2.180
	$0.9B_2$	7153989000	2280855000	43957200	0.893	2.034
	$0.9B_3$	7161150000	2526688000	39482390	0.894	2.034
	$1.1B_1$	7381289000	2367600000	41148330	0.953	1.908
	$1.1B_2$	7146835000	2776578000	43781630	0.897	2.027
	$1.1B_3$	7139688000	2524162000	48183900	0.896	2.028
	$0.99B_1$	7125093000	2544446000	44177640	0.889	2.047
	$0.99B_2$	7153989000	2498920000	43781630	0.896	2.030
	$0.99B_3$	7153989000	2526688000	43430630	0.896	2.030
	$1.01B_1$	7175102000	2506545000	43497840	0.901	2.017
	$1.01B_2$	7146835000	2549403000	43825460	0.894	2.032
$1.01B_3$	7146835000	2529218000	44308020	0.894	2.032	
$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$ (social criterion)	-	8463473000	3031374000	52842080	0.000	9.500
	$0.9B_1$	7617126000	3031374000	52842080	0.000	9.500
	$0.9B_2$	8463473000	2728237000	52842080	0.000	9.500
	$0.9B_3$	8463473000	3031374000	47557870	0.000	9.500



Continuation of Table 3

Functional coefficients	Budget value change	$u_1$ , RUB	$u_2$ , RUB	$u_3$ , RUB	$\tau_1$ , months	$\tau_2$ , months
$\alpha_1 = 0$ , $\alpha_2 = 1$ (social criterion)	$1.1B_1$	9309820000	3031374000	52842080	0.000	9.500
	$1.1B_2$	8463473000	3334511000	52842080	0.000	9.500
	$1.1B_3$	8463473000	3031374000	58126290	0.000	9.500
	$0.99B_1$	8378838000	3031374000	52842080	0.000	9.500
	$0.99B_2$	8463473000	3001060000	52842080	0.000	9.500
	$0.99B_3$	8463473000	3031374000	52313660	0.000	9.500
	$1.01B_1$	8548108000	3031374000	52842080	0.000	9.500
	$1.01B_2$	8463473000	3061688000	52842080	0.000	9.500
	$1.01B_3$	8463473000	3031374000	53370500	0.000	9.500

Table 4

Optimal control parameters for the Ulyanovsk region

Functional coefficients	Budget value change	$u_1$ , RUB	$u_3$ , RUB	$\tau_1$ , months	$\tau_2$ , months
$\alpha_1 = 1$ , $\alpha_2 = 0$ (economic criterion)	–	1302991	43215870	1.068	1.691
	$0.9B_1$	1246425	45979050	1.003	1.795
	$0.9B_3$	1304295	38933220	1.065	1.693
	$1.1B_1$	1357908	41066070	1.126	1.604
	$1.1B_3$	1300386	47632680	1.068	1.690
	$0.99B_1$	1296430	43606770	1.060	1.702
	$0.99B_3$	1302991	42869410	1.067	1.691
	$1.01B_1$	1308145	43000220	1.073	1.682
	$1.01B_3$	1302991	43735460	1.068	1.690
$\alpha_1 = 0$ , $\alpha_2 = 1$ (social criterion)	–	1578947	52842106	0.000	9.500
	$0.9B_1$	1421052	52842060	0.000	9.500
	$0.9B_3$	1578947	47557850	0.000	9.500
	$1.1B_1$	1736842	52842060	0.000	9.500
	$1.1B_3$	1578947	58126260	0.000	9.500
	$0.99B_1$	1563158	52842060	0.000	9.500
	$0.99B_3$	1578947	52313640	0.000	9.500
	$1.01B_1$	1594736	52842060	0.000	9.500
	$1.01B_3$	1578947	53370480	0.000	9.500

The analysis of the values in Tables 3 and 4 shows that:

1. The optimal solution for social and economic criteria when changing budgets is sustainable. If the budget changes by 1% (10%), the optimal parameter values change by less than 1% (10%). This means that the vast majority of the parameters of the optimal solution are weakly elastic.

2. The parameters of the optimal solution when using the economic criterion are more susceptible to change than when using the social criterion.

3. The change in the parameters of the optimal solution for both the Ulyanovsk region and the Russian Federation is common. In other words, there is a similar effect of the variables' values on the optimal strategies for economic entities of a different scale and complexity. Consequently, the applicability of the model for such subjects is confirmed.



## Conclusion

The paper proposes a mathematical model as a tool for determining optimal control strategies over an economic entity in conditions of mass diseases. The model includes socio-biological and economic factors, as well as control measures.

Based on the modification of the parametrization method developed by the authors, optimal control strategies over an economy in conditions of mass disease were determined for the Russian Federation and the Ulyanovsk region. A numerical experiment aimed at studying the stability of the parameters of the optimal solution with variation in the values of budgets was held. As a result, it was shown that the parameters of the optimal solution are stable and change in a similar way for the considered economic entities. This confirms the possibility of using the model for economic entities of various scales and complexity.

Further development of the study includes supplementing the model with a vaccination factor, as well as finding and analyzing optimal solutions for non-zero values of both coefficients of the target functional.

## References

1. Kul'kova I. A. The coronavirus pandemic influence on demographic processes in Russia. *Human Progress*, 2020, vol. 6, iss. 1, pp. 2–11 (in Russian). <https://doi.org/10.34709/IM.161.5>
2. Bobkov A. V., Vereshchagina V. K. Correctional dynamics of economic activity under the influence of measures to control the pandemic. *Innovation and Investment*, 2020, vol. 8, pp. 94–98 (in Russian). EDN: LHLLQP
3. Funk S., Gilad E., Watkins C., Jansen V. A. A. The spread of awareness and its impact on epidemic outbreaks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2009, vol. 106, iss. 16, pp. 6872–6877. <https://doi.org/10.1073/pnas.0810762106>
4. Wani A. U., Bakshi A., Wani M. A. Dynamics of COVID-19: Modelling and analysis. *Journal of Infectious Diseases and Epidemiology*, 2020, vol. 6, pp. 1–11. <https://doi.org/10.23937/2474-3658/1510128>
5. Arino J., Brauer F., van den Driessche P., Watmough J., Wu J. Simple models for containment of a pandemic. *Journal of the Royal Society Interface*, 2006, vol. 3, iss. 8, pp. 453–457. <https://doi.org/10.1098/rsif.2006.0112>
6. Atkeson A. What will be the economic impact of Covid-19 in the US? Rough estimates of disease scenarios. *NBER Working Papers*, 2020, Art. 26867. Available at: [https://www.nber.org/system/files/working\\_papers/w26867/w26867.pdf](https://www.nber.org/system/files/working_papers/w26867/w26867.pdf) (accessed May 29, 2021).
7. Brauer F., Castillo-Chavez C. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Texts in Applied Mathematics, vol. 40. New York, Springer, 2012. 508 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1686-9>
8. Britton N. F. *Essential Mathematical Biology*. London, Springer, 2003. 335 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0049-2>
9. Castillo-Chavez C., Blower S., van den Driessche P., Kirschner D., Yakubu A. A. (eds.) *Mathematical Approaches for Emerging and Reemerging Infectious Diseases: Models, Methods, and Theory*. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, vol. 126. New York, Springer, 2002. 377 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0065-6>
10. He S., Tang S., Rong L. A discrete stochastic model of COVID-19 outbreak: Forecast and control. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2020, vol. 17, iss. 4, pp. 2792–2804. <https://doi.org/10.3934/mbe.2020153>
11. Volz E., Meyers L. A. Susceptible-infected-recovered epidemics in dynamic contact networks. *Proceedings of the Royal Society B*, 2007, vol. 274, iss. 1628, pp. 2925–2934. <https://doi.org/10.1098/rspb.2007.1159>



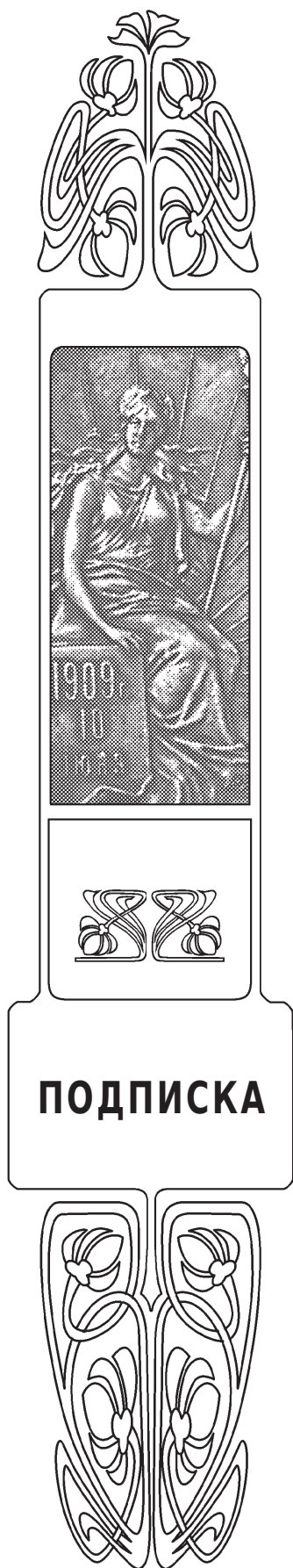
12. Matveev A. V. The mathematical modeling of the effective measures against the COVID-19 spread. *National Security and Strategic Planning*, 2020, vol. 2020, iss. 1 (29), pp. 23–39 (in Russian). <https://doi.org/10.37468/2307-1400-2020-1-23-39>
13. Rybina M. S. Mathematical model of optimal resource control in conditions of a pandemic. *Proceedings of the International Youth Scientific Forum “LOMONOSOV–2021” 2021* (in Russian). Available at: [https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2021/data/22519/127569\\_uid543558\\_report.pdf](https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2021/data/22519/127569_uid543558_report.pdf) (accessed May 29, 2021).
14. Rybina M. S. The problem of estimating the parameters of the mathematical model of the impact of the pandemic on the economy. *Collection of Abstracts of the Congress of Young Scientists (ITMO University)*, 2021 (in Russian). Available at: <https://kmu.itmo.ru/digests/article/7045> (accessed May 29, 2021).
15. Iqret Araz S. Analysis of a Covid-19 model: Optimal control, stability and simulations. *Alexandria Engineering Journal*, 2020, vol. 60, iss. 1, pp. 647–658. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.09.058>
16. Macalisang J., Caay M., Arcede J., Caga-Anan R. Optimal control for a COVID-19 model accounting for symptomatic and asymptomatic. *Computational and Mathematical Biophysics*, 2020, vol. 8, pp. 168–179. <https://doi.org/10.1515/cmb-2020-0109>
17. Ovsyannikova N. I. Problem of optimal control of epidemic in view of latent period. *Civil Aviation High Technologies*, 2017, vol. 20, iss. 2, pp. 144–152. EDN: YLJOFL
18. Zamir M., Abdeljawad T., Nadeem F., Khan A., Yousef A. An optimal control analysis of a COVID-19 model. *Alexandria Engineering Journal*, 2021, vol. 60, iss. 2, pp. 2875–2884. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.01.022>
19. Andreeva E. A., Semykina N. A. Optimal control of the spread of an infectious disease with allowance for an incubation period. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2005, vol. 45, iss. 7, pp. 1133–1139. EDN: LJBSEB
20. Lutoshkin I. V. The parameterization method for optimizing the systems which have integro-differential equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2011, vol. 4, iss. 1, pp. 44–56 (in Russian). EDN: NQWBZH
21. Samarskiy A. A. *Vvedenie v chislennyye metody* [Introduction to Numerical Methods]. St. Petersburg, Lan', 2005. 288 p. (in Russian). EDN: QJDBV

Поступила в редакцию / Received 22.11.2022

Принята к публикации / Accepted 25.12.2022

Опубликована / Published 31.05.2023





### **Подписка на печатную версию**

Подписной индекс издания 36017  
Оформить подписку на печатную версию  
можно в интернет-каталоге  
ГК «Урал-Пресс» ([ural-press.ru](http://ural-press.ru))  
Журнал выходит 4 раза в год  
Цена свободная

Электронная версия журнала находится  
в открытом доступе ([mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru))

### **Адрес издательства (редакции):**

410012, Саратов, Астраханская, 83  
**Тел.:** +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89  
**Факс:** +7(845-2) 27-85-29  
**E-mail:** [izdat@sgu.ru](mailto:izdat@sgu.ru)

### **Адрес редколлегии серии:**

410012, Саратов, Астраханская, 83,  
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,  
механико-математический факультет  
**Тел./факс:** +7(845-2) 26-15-54  
**E-mail:** [mmi@sgu.ru](mailto:mmi@sgu.ru)  
**Website:** <https://mmi.sgu.ru>



ISSN 1816-9791 (Print). ISSN 2541-9005 (Online)  
Известия Саратовского университета. Новая серия.  
Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023.  
Том 23, выпуск 2

## ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Новая серия

Серия: Акмеология образования. Психология развития  
Серия: История. Международные отношения

**Серия: Математика. Механика. Информатика**

Серия: Науки о Земле

Серия: Социология. Политология

Серия: Физика

Серия: Филология. Журналистика

Серия: Философия. Психология. Педагогика

Серия: Химия. Биология. Экология

Серия: Экономика. Управление. Право

