

ISSN 1816-9791 (Print)  
ISSN 2541-9005 (Online)

# ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия: Математика. Механика. Информатика

2023

Том 23

Выпуск 4



IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY  
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS



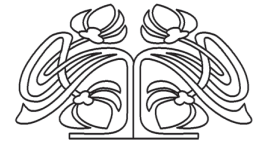
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

# ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 4

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,  
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал  
2023 Том 23

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издается с 2005 года

## СОДЕРЖАНИЕ

### Научный отдел

#### Математика

**Kelbert M. Y., Suhov Y.** Wasserstein and weighted metrics for multidimensional Gaussian distributions  
[Кельберт М. Я., Сухов Ю. Метрика Вассерштейна и взвешенные метрики для многомерных распределений Гаусса] 422

**Можей Н. П.** Однородные пространства неразрешимых групп Ли, не допускающие эквивалентных связностей ненулевой кривизны 435

**Терехин П. А.** Орторекурсивные разложения, порожденные ядром Cere 443

#### Механика

**Богачев И. В., Недин Р. Д.** Идентификация двумерных полей предварительных напряжений в неоднородных пластинах 456

**Dol A. V., Gulyaeva A. O., Falkovich A. S., Maystrenko D. N., Generalov M. I., Solovyov A. V., Terin D. V., Lemeshkin M. O.** Development and approbation of a mobile test bench for mechanical uniaxial compression testing of biological tissues  
[Доль А. В., Гуляева А. О., Фалькович А. С., Майстренко Д. Н., Генералов М. И., Соловьёв А. В., Терин Д. В., Лемешкин М. О. Разработка и апробация мобильного стенда для механических испытаний на одноосное сжатие биологических тканей] 472

**Перельмутер М. Н.** Напряженное состояние вблизи дентальных имплантатов при резорбции костных тканей 482

**Полиенко А. В., Иванов Д. В., Киреев С. И., Бессонов Л. В., Мулдашева А. М., Оленко Е. С.** Численный анализ напряженно-деформированного состояния остеотомий первой плюсневой кости 496

**Радченко В. П., Бербасова Т. И., Саушкин М. Н., Акинфиева М. М.** Релаксация остаточных напряжений в поверхностно упрочненных вращающихся призматических элементах конструкций в условиях ползучести 512

#### Информатика

**Дорофеев Н. В., Греченева А. В.** Алгоритм выделения движений и классификации походки по данным акселерометра мобильного телефона 531

**Персова М. Г., Соловейчик Ю. Г., Патрушев И. И., Насыбуллин А. В., Алтынбекова Г. Ж., Леонович Д. А.** Оптимизация разработки нефтяных месторождений на основе 3D-модели пласта, полученной в результате автоадаптации 544

Журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика»» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Запись о регистрации СМИ ПИ No ФС77-76640 от 26 августа 2019 года

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (категория К1, специальности: 1.1.1; 1.1.2; 1.1.5; 1.1.6; 1.1.7; 1.1.8; 1.1.9; 1.1.10; 1.2.2; 2.3.1). Журнал индексируется RSCI, Web of Science (ESCI), Scopus, MathSciNet, zbMATH, DOAJ

Подписной индекс издания 36017. Подписку на печатные издания можно оформить в интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru). Журнал выходит 4 раза в год. Цена свободная. Электронная версия находится в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

**Директор издательства**  
Бучко Ирина Юрьевна

**Редактор**  
Каргин Игорь Анатольевич

**Художник**  
Соколов Дмитрий Валерьевич

**Редактор-стилист**  
Агафонов Андрей Петрович

**Верстка**  
Халова Виктория Анатольевна

**Технический редактор**  
Каргин Игорь Анатольевич

**Корректор**  
Агафонов Андрей Петрович

**Адрес учредителя, издателя и издательства (редакции):**  
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83  
Тел.: +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49, 52-26-89  
E-mail: publ@sgu.ru, izdat@sgu.ru

Подписано в печать 22.11.2023.  
Подписано в свет 30.11.2023.  
Формат 60 × 84 1/8.  
Усл. печ. л. 16,27 (17,5).  
Тираж 100 экз. Заказ 127-Т.

Отпечатано в типографии Саратовского университета.  
**Адрес типографии:**  
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2023



## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <https://mmi.sgu.ru/dlya-avtorov>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования. В случае положительного решения статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <https://mmi.sgu.ru>

### Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,  
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,  
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: [mmi@sgu.ru](mailto:mmi@sgu.ru)

Website: <https://mmi.sgu.ru>

### Ответственный секретарь серии:

Шевцова Юлия Владиславовна

## CONTENTS

### Scientific Part

#### Mathematics

**Kelbert M. Y., Suhov Y.** Wasserstein and weighted metrics for multidimensional Gaussian distributions 422

**Mozhey N. P.** Homogeneous spaces of unsolvable Lie groups that do not admit equiaffine connections of nonzero curvature 435

**Terekhin P. A.** Orthorecursive expansion generated by the Szegő kernel 443

#### Mechanics

**Bogachev I. V., Nedin R. D.** Identification of two-dimensional prestress fields in inhomogeneous plates 456

**Dol A. V., Gulyaeva A. O., Falkovich A. S., Maystrenko D. N., Generalov M. I., Solovyov A. V., Terin D. V., Lemeshkin M. O.** Development and approbation of a mobile test bench for mechanical uniaxial compression testing of biological tissues 472

**Perelmuter M. N.** Stress state near dental implants accounting bone tissues resorption 482

**Polienko A. V., Ivanov D. V., Kireev S. I., Bessonov L. V., Muldasheva A. M., Olenko E. S.** Numerical analysis of the stress-strain state of osteotomies of the first metatarsal bone 496

**Radchenko V. P., Berbasova T. I., Saushkin M. N., Akinfiyeva M. M.** Relaxation of residual stresses in surface-hardened rotating prismatic elements of structures under creep conditions 512

#### Computer Sciences

**Dorofeev N. V., Grecheneva A. V.** Algorithm for motion detection and gait classification based on mobile phone accelerometer data 531

**Persova M. G., Soloveichik Yu. G., Patrushev I. I., Nasybullin A. V., Altynbekova G. Zh., Leonovich D. A.** Optimization of oil field development based on a 3D reservoir model obtained as a result of history matching 544

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА  
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.  
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

**Главный редактор**

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Заместитель главного редактора**

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Ответственный секретарь**

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

**Члены редакционной коллегии:**

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Бауэр Светлана Михайловна, доктор физ.-мат. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

dell'Isola Francesco, доктор наук, профессор (Рим, Италия)

Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Омск, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)

Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)

Каплунов Юрий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Беларусь)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, профессор, акад. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Долгопрудный,

Московская обл., Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук (Ульяновск, Россия)

Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, профессор, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D. (Киль, Великобритания)

Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Беларусь)

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Цатурян Андрей Кимович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чунань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL  
"IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY.  
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS"**

**Editor-in-Chief** – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

**Deputy Editor-in-Chief** – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

**Executive Secretary** – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

**Members of the Editorial Board:**

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Svetlana M. Bauer (St. Petersburg, Russia)

Francesco dell'Isola (Rome, Italy)

Shoji Imatani (Kyoto, Japan)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

Avgust P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Nikita F. Morozov (St. Petersburg, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan, Russia)

Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny,

Moscow region, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)

Alexander F. Rezhnikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Alexander I. Shashkin (Voronezh, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

Igor' E. Tananko (Saratov, Russia)

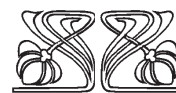
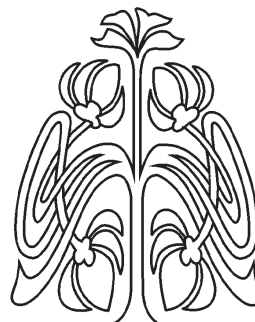
Andrey K. Tsaturyan (Moscow, Russia)

Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)

Vyacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ  
КОЛЛЕГИЯ**





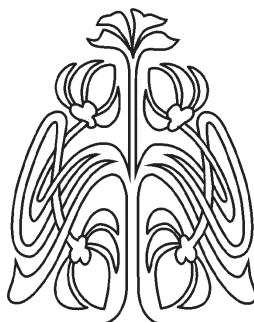
## МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 422–434  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 422–434

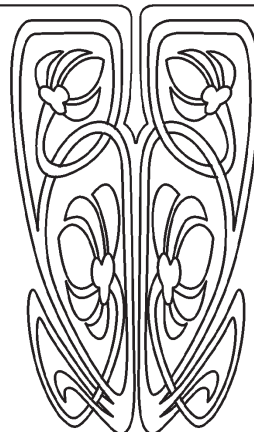
[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru)

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-422-434>

EDN: ANLRAB



Научный  
отдел



Article

### Wasserstein and weighted metrics for multidimensional Gaussian distributions

M. Y. Kelbert<sup>1</sup>✉, Y. Suhov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Higher School of Economics — National Research University, 20 Myasnitskaya St., Moscow 101000, Russia

<sup>2</sup>DPMMS, Penn State University, 201 Old Main, State College, PA 16802, USA

**Mark Y. Kelbert**, [mkelbert@hse.ru](mailto:mkelbert@hse.ru), <https://orcid.org/0000-0002-3952-2012>, AuthorID: 1137288

**Yurii Suhov**, [yms@statslab.cam.ac.uk](mailto:yms@statslab.cam.ac.uk), AuthorID: 1131362

**Abstract.** We present a number of low and upper bounds for Lévy – Prokhorov, Wasserstein, Fréchet, and Hellinger distances between probability distributions of the same or different dimensions. The weighted (or context-sensitive) total variance and Hellinger distances are introduced. The upper and low bounds for these weighted metrics are proved. The low bounds for the minimum of different errors in sensitive hypothesis testing are proved.

**Keywords:** Lévy – Prokhorov distance, Wasserstein distance, weighted total variance distance, Dobrushin’s inequality, weighted Pinsker’s inequality, weighted le Cam’s inequality, weighted Fano’s inequality

**Acknowledgements:** This research is supported by the Russian Science Fund (project No. 23-21-00052).

**For citation:** Kelbert M. Y., Suhov Y. Wasserstein and weighted metrics for multidimensional Gaussian distributions. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 422–434. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-422-434>, EDN: ANLRAB

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Научная статья  
УДК 519.85

## Метрика Вассерштейна и взвешенные метрики для многомерных распределений Гаусса

М. Я. Кельберт<sup>1✉</sup>, Ю. Сухов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия, 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20

<sup>2</sup>Университет штата Пенсильвания, Соединенные Штаты Америки, Пенсильвания, 16802, г. Стейт-Колледж, кампус Университи-Парк, ул. Олд Мейн, д. 201

**Кельберт Марк Яковлевич**, кандидат физико-математических наук, профессор-исследователь департамента статистики и анализа данных факультета экономических наук, mkelbert@hse.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3952-2012>, AuthorID: 1137288

**Сухов Юрий**, кандидат физико-математических наук, профессор математического факультета, yms@statslab.cam.ac.uk, AuthorID: 1131362

**Аннотация.** Приводится ряд нижних и верхних оценок для расстояний Леви – Прохорова, Вассерштейна, Фреше и Хеллингера между вероятностными распределениями одной и той же или разных размерностей. Вводится взвешенное (или контекстно зависимое) расстояние полной вариации и расстояние Хеллингера. Доказаны верхняя и нижняя оценки для этих взвешенных метрик. Доказаны нижние оценки минимума суммы различных ошибок при проверке чувствительных гипотез.

**Ключевые слова:** расстояние Леви – Прохорова, расстояние Вассерштейна, взвешенное расстояние полной вариации, неравенство Добрушина, взвешенное неравенство Пинскера, взвешенное неравенство Ле Кама, взвешенное неравенство Фано

**Благодарности:** Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00052).

**Для цитирования:** Kelbert M. Y., Suhov Y. Wasserstein and weighted metrics for multidimensional Gaussian distributions [Кельберт М. Я., Сухов Ю. Метрика Вассерштейна и взвешенные метрики для многомерных распределений Гаусса] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 422–434. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-422-434>, EDN: ANLRAB

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

### Introduction

In this note, we review basic facts about the metrics for probability measures and provide specific formulae and simplified proofs that could not be easily found in the literature. Alongside the classical results such as the evaluation of the Lévy – Prokhorov distance in terms of the Wasserstein distance presented in Section 1, we discuss some novel approaches. In Section 2, we review a recent development related to the distances between the distributions of different dimensions. Finally, in Section 3, we present the context-sensitive (or weighted) total variance distance and establish a number of new inequalities mimicking some classical results from the information theory. Sections 1 and 2 of the paper are basically a review but contain several improvements. Section 3 is purely original and was never published before.



## 1. Lévy – Prokhorov and Wasserstein distances

Let  $\mathbf{P}_i$ ,  $i = 1, 2$ , be probability distributions on a metric space  $\mathcal{W}$  with metric  $r$ . Define the Lévy – Prokhorov distance  $\rho^{L-P}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$  between  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  as the infimum of numbers  $\varepsilon > 0$  such that for any closed set  $C \subset \mathcal{W}$ ,

$$\mathbf{P}_1(C) - \mathbf{P}_2(C_\varepsilon) < \varepsilon, \quad \mathbf{P}_2(C) - \mathbf{P}_1(C_\varepsilon) < \varepsilon \quad (1)$$

where  $C_\varepsilon$  stands for the  $\varepsilon$ -neighborhood of  $C$  in metric  $r$ . It could be easily checked that  $\rho^{L-P}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \leq \tau(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ , i. e. the total variance distance. Next, define the Wasserstein distance  $W_p^r(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$  between  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  by

$$W_p^r(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \inf_{\bar{\mathbf{P}}} (\mathbf{E}_{\bar{\mathbf{P}}} [r(X_1, X_2)^p])^{1/p}$$

where the infimum is taken over all joint  $\bar{\mathbf{P}}$  on  $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$  with marginals  $\mathbf{P}_i$ . In the case of Euclidean space with  $r(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$ , the index  $r$  is omitted.

**Theorem 1** (Dobrushin’s bound).

$$\rho^{L-P}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \leq [W_1^r(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)]^{1/2}. \quad (2)$$

**Proof.** Suppose that there exists a closed set  $C$  for which at least one of the inequalities (1) fails, say  $\mathbf{P}_1(C) \geq \varepsilon + \mathbf{P}_2(C_\varepsilon)$ . Then, for any joint  $\bar{\mathbf{P}}$  with marginals  $\mathbf{P}_1$  and  $\mathbf{P}_2$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\bar{\mathbf{P}}} [r(X_1, X_2)] &\geq \mathbf{E}_{\bar{\mathbf{P}}} [\mathbf{1}(r(X_1, X_2) \geq \varepsilon)r(X_1, X_2)] \geq \varepsilon \bar{\mathbf{P}}(r(X_1, X_2) \geq \varepsilon) \geq \\ &\geq \varepsilon \bar{\mathbf{P}}(X_1 \in C, X_2 \in W \setminus C_\varepsilon) \geq \varepsilon [\bar{\mathbf{P}}(X_1 \in C) - \bar{\mathbf{P}}(X_1 \in C, X_2 \in C_\varepsilon)] \geq \\ &\geq \varepsilon [\bar{\mathbf{P}}(X_1 \in C) - \bar{\mathbf{P}}(X_2 \in C_\varepsilon)] = \varepsilon [\mathbf{P}_1(X_1 \in C) - \mathbf{P}_2(X_2 \in C_\varepsilon)] \geq \varepsilon^2. \end{aligned}$$

This leads to (2), as claimed.  $\square$

The Lévy – Prokhorov distance is quite tricky to compute, whereas the Wasserstein distance can be found explicitly in a number of cases. Say, in 1D case  $\mathcal{W} = \mathbf{R}^1$  we have (cf. [1]).

**Theorem 2.**

$$W_1(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \int_{\mathbf{R}} |F_1(x) - F_2(x)| dx. \quad (3)$$

**Proof.** First, check the upper bound  $W_1(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \leq \int_{\mathbf{R}} |F_1(x) - F_2(x)| dx$ . Consider  $\xi \sim U[0, 1]$ ,  $X_i = F_i^{-1}(\xi)$ ,  $i = 1, 2$ . Then, in view of Fubini theorem,

$$\mathbf{E}[|X_1 - X_2|] = \int_0^1 |F_1^{-1}(y) - F_2^{-1}(y)| dy = \int_{\mathbf{R}} |F_1(x) - F_2(x)| dx.$$

Let us now prove the inverse inequality. Set  $Y = X_2 - X_1 \vee 0$ ,  $Z = X_1 - X_2 \vee 0$  then  $\mathbf{E}[|X_1 - X_2|] = \mathbf{E}[Y] + \mathbf{E}[Z]$ . It could be easily checked that

$$\mathbf{E}[Z] = \int_{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{P}}(X_1 \leq y, X_2 \geq y) dy.$$

A similar argument can be done for  $Y$ , by swapping  $X_1$  and  $X_2$ . This yields

$$\mathbf{E}[|X_1 - X_2|] = \int_{\mathbf{R}} [\bar{\mathbf{P}}(X_1 \leq y, X_2 \geq y) + \bar{\mathbf{P}}(X_2 \leq y, X_1 \geq y)] dy =$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbf{R}} [\mathbf{P}_1(X_1 \leq y) + \mathbf{P}_2(X_2 \leq y) - 2\bar{\mathbf{P}}(X_1 \leq y, X_2 \leq y)] dy \geq \\
 &\geq \int_{\mathbf{R}} [F_1(x) + F_2(x) - 2\min[F_1(x), F_2(x)]] dx = \int_{\mathbf{R}} |F_1(x) - F_2(x)| dx. \quad \square
 \end{aligned}$$

**Proposition 1.** For  $d = 1$  and  $p > 1$

$$\begin{aligned}
 W_p(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)^p &= p(p-1) \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_y^{\infty} \max[F_2(y) - F_1(x), 0](x-y)^{p-2} dx + \\
 &+ p(p-1) \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_x^{\infty} \max[F_1(x) - F_2(y), 0](y-x)^{p-2} dy.
 \end{aligned}$$

**Proof.** Follows from the identity

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}[|X - Y|^p] &= p(p-1) \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_y^{\infty} [F_2(y) - F(x, y)](x-y)^{p-2} dx + \\
 &+ p(p-1) \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_x^{\infty} [F_1(x) - F(x, y)](y-x)^{p-2} dy.
 \end{aligned}$$

The minimum is achieved for  $\bar{F}(x, y) = \min[F_1(x), F_2(y)]$ . Alternative expression (see [2]):

$$W_p(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)^p = \int_0^1 |F_1^{-1}(t) - F_2^{-1}(t)|^p dt. \quad \square$$

**Proposition 2.** Let  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in \mathbf{R}^{2d}$  be jointly Gaussian random variables (RVs) with  $\mathbf{E}[\mathbf{X}] = \mu^X, \mathbf{E}[\mathbf{Y}] = \mu^Y$ . Then the Frechet-1 distance

$$\begin{aligned}
 \rho^{F_1}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &:= \mathbf{E} \left[ \sum_{j=1}^d |X_j - Y_j| \right] = \\
 &= \sum_{j=1}^d \left[ (\mu_j^X - \mu_j^Y) \left( 1 - 2\Phi\left(-\frac{(\mu_j^X - \mu_j^Y)}{\hat{\sigma}_j}\right) \right) + 2\hat{\sigma}_j \varphi\left(-\frac{(\mu_j^X - \mu_j^Y)}{\hat{\sigma}_j}\right) \right], \quad (4)
 \end{aligned}$$

where  $\hat{\sigma}_j = ((\sigma_j^X)^2 + (\sigma_j^Y)^2 - 2\text{Cov}(X_j, Y_j))^{1/2}$ ,  $\varphi$  and  $\Phi$  are PDF and CDF of the standard Gaussian RV. Note that in the case  $\mu^X = \mu^Y$  the first term in (4) vanishes, and the second term gives

$$\rho^{F_1}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^d \hat{\sigma}_j.$$

We present also expressions for the Frechet-3 and Frechet-4 distances

$$\begin{aligned}
 \rho^{F_3}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \left( \sum_{j=1}^d \mathbf{E}|X_j - Y_j|^3 \right)^{1/3} = \left( \sum_{j=1}^d (\mu_j^X - \mu_j^Y)^3 \left( 1 - 2\Phi\left(-\frac{(\mu_j^X - \mu_j^Y)}{\hat{\sigma}_j}\right) \right) + \right. \\
 &+ 6(\mu_j^X - \mu_j^Y)^2 \hat{\sigma}_j \varphi\left(-\frac{(\mu_j^X - \mu_j^Y)}{\hat{\sigma}_j}\right) + 3(\hat{\sigma}_j)^2 (\mu_j^X - \mu_j^Y) \left[ 1 - 2\Phi\left(-\frac{(\mu_j^X - \mu_j^Y)}{\hat{\sigma}_j}\right) \right] -
 \end{aligned}$$





$$-2 \frac{(\mu_j^X - \mu_j^Y)}{\hat{\sigma}_j} \varphi \left( -\frac{(\mu_j^X - \mu_j^Y)}{\hat{\sigma}_j} \right) + 2(\hat{\sigma}_j)^3 \varphi \left( -\frac{(\mu_j^X - \mu_j^Y)}{\hat{\sigma}_j} \right) \left[ \left( \frac{(\mu_j^X - \mu_j^Y)}{\hat{\sigma}_j} \right)^2 + 2 \right]^{1/3},$$

$$\rho^{F_4}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \left( \sum_{j=1}^d \mathbf{E}|X_j - Y_j|^4 \right)^{1/4} = \left( \sum_{j=1}^d (\mu_j^X - \mu_j^Y)^4 + 6(\mu_j^X - \mu_j^Y)^2(\hat{\sigma}_j)^2 + 3(\hat{\sigma}_j)^4 \right)^{1/4}.$$

Let  $\mu_j^X = \mu_j^Y$ . The expressions for  $\rho^{F_1} - \rho^{F_4}$  are minimized when  $\text{Cov}(X_j, Y_j), j = 1, \dots, d$  are maximal. However, this fact does not lead immediately to the explicit expressions for Wasserstein’s metrics. The problem here is that the joint covariance matrix  $\Sigma_{\mathbf{X}, \mathbf{Y}}$  should be positive-definite. So, the straightforward choice  $\text{Corr}(X_j, Y_j) = 1$  is not always possible, see Theorem 3 below.

Maurice René Fréchet (1878–1973), a French mathematician, worked in topology, functional analysis, probability theory, and statistics. He was the first to introduce the concept of a metric space (1906) and prove the representation theorem in  $L_2$  (1907). However, in both cases the credit was given to other people: Hausdorff and Riesz. Some sources claim that he discovered the Cramér – Rao inequality before anybody else, but such a claim was impossible to verify since the lecture notes of his class appeared to be lost. Fréchet worked in several places in France before moving to Paris in 1928. In 1941 he succeeded Borel as the Chair of Calculus of Probabilities and Mathematical Physics in Sorbonne. In 1956 he was elected to the French Academy of Sciences, at the age of 78, which was rather unusual. He influenced and mentored a number of young mathematicians, notably Fortet and Loève. He was an enthusiast of Esperanto; some of his papers were published in this language.

In the Gaussian case, it is convenient to use the following extension of Dobrushin’s bound for  $p = 2$ :

$$\rho^{L-P}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \leq [W_p(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)]^{p/2}, \quad p \geq 1.$$

**Theorem 3.** Let  $\mathbf{X}_i \sim N(\mu_i, \Sigma_i^2), i = 1, 2$ , be  $d$ -dimensional Gaussian RVs. For simplicity, assume that both matrices  $\Sigma_1^2$  and  $\Sigma_2^2$  are non-singular<sup>1</sup>. The  $L_2$  – Wasserstein distance  $W_2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = W_2(N(\mu_1, \Sigma_1^2), N(\mu_2, \Sigma_2^2))$  equals

$$W_2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = [ \|\mu_1 - \mu_2\|^2 + \text{tr}(\Sigma_1^2) + \text{tr}(\Sigma_2^2) - 2\text{tr}[(\Sigma_1 \Sigma_2^2 \Sigma_1)^{1/2}] ]^{1/2} \quad (5)$$

where  $(\Sigma_1 \Sigma_2^2 \Sigma_1)^{1/2}$  stands for the positive-definite matrix square-root. The value (5) is achieved when  $\mathbf{X}_2 = \mu_2 + A(\mathbf{X}_1 - \mu_1)$  where  $A = \Sigma_1^{-1}(\Sigma_1 \Sigma_2^2 \Sigma_1)^{1/2} \Sigma_1^{-1}$ .

**Corollary.** Let  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ . Then for  $d = 1: W_2(X_1, X_2) = |\sigma_1 - \sigma_2|$ . For  $d = 2$

$$W_2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = [ \text{tr}(\Sigma_1^2) + \text{tr}(\Sigma_2^2) - 2[\text{tr}(\Sigma_1^2 \Sigma_2^2) + 2\sqrt{\det(\Sigma_1 \Sigma_2)}]^{1/2} ]^{1/2}. \quad (6)$$

Note that the expression in (6) vanishes when  $\Sigma_1^2 = \Sigma_2^2$ .

**Example 1.** (a) Let  $\mathbf{X} \sim N(0, \Sigma_X^2), \mathbf{Y} \sim N(0, \Sigma_Y^2)$  where  $\Sigma_X^2 = \sigma_X^2 \mathbf{I}_d$  and  $\Sigma_Y^2 = \sigma_Y^2 \mathbf{I}_d$ . Then  $W_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sqrt{d}|\sigma_X - \sigma_Y|$ .

(b) Let  $d = 2, \mathbf{X} \sim N(0, \Sigma_X^2), \mathbf{Y} \sim N(0, \Sigma_Y^2)$  where  $\Sigma_X^2 = \sigma_X^2 \mathbf{I}_2, \Sigma_Y^2 = \sigma_Y^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$  and  $\rho \in (-1, 1)$ . Then

$$W_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 2^{1/2} \left( \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - \sigma_X \sigma_Y [2 + 2(1 - \rho^2)^{1/2}]^{1/2} \right)^{1/2}.$$

<sup>1</sup>In general case the statement holds with  $\Sigma_1^{-1}$  understood as Moore – Penrose inversion.



(c) Let  $d = 2$ ,  $\mathbf{X} \sim N(0, \Sigma_X^2)$ ,  $\mathbf{Y} \sim N(0, \Sigma_Y^2)$  where  $\Sigma_X^2 = \sigma_X^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\Sigma_Y^2 = \sigma_Y^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & 1 \end{pmatrix}$  and  $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1)$ . Then

$$W_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 2^{1/2} \left( \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - \sigma_X \sigma_Y [2 + 2\rho_1 \rho_2 + 2(1 - \rho_1^2)^{1/2} (1 - \rho_2^2)^{1/2}]^{1/2} \right)^{1/2}.$$

Note, that in the case  $\rho_1 = \rho_2$ ,  $W_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sqrt{2} |\sigma_X - \sigma_Y|$  as in (a).

**Proof.** First, reduce to the case  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  by using the identity  $W_2^2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \|\mu_1 - \mu_2\|^2 + W_2^2(\xi_1, \xi_2)$  with  $\xi_i = X_i - \mu_i$ . Note that the infimum in (5) is always attained on Gaussian measures as  $W_2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$  is expressed in terms of the covariance matrix  $\Sigma^2 = \Sigma_{X,Y}^2$  only (cf. (8) below). Let us write the covariance matrix in the block form

$$\Sigma^2 = \begin{pmatrix} \Sigma_1^2 & K \\ K^T & \Sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ K^T \Sigma_1^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_1^{-1} K \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (7)$$

where the so-called Shur's complement  $S = \Sigma_2^2 - K^T \Sigma_1^{-2} K$ . The problem is reduced to finding the matrix  $K$  in (7) that minimizes the expression

$$\int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 d\mathbf{P}_{\mathbf{X}, \mathbf{Y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{tr}(\Sigma_1^2) + \text{tr}(\Sigma_2^2) - 2\text{tr}(K) \quad (8)$$

subject to constraining that the matrix  $\Sigma^2$  in (7) is positively definite. The goal is to check that the minimum (5) is achieved when Shur's complement  $S$  in (7) equals 0. Consider the fiber  $\sigma^{-1}(S)$ , i.e. the set of all matrix  $K$  such that  $\sigma(K) := \Sigma_Y^2 - K^T (\Sigma_X^2)^{-1} K = S$ . It is enough to check the maximum value of  $\text{tr}(K)$  on this fiber equals

$$\max_{K \in \sigma^{-1}(S)} \text{tr}(K) = \text{tr} [(\Sigma_Y (\Sigma_X^2 - S) \Sigma_Y)^{1/2}]. \quad (9)$$

Since the matrix  $S$  is positively defined, it is easy to check that the fiber  $S = 0$  should be selected. In order to establish (9), represent the positively definite matrix  $\Sigma_Y^2 - S$  in the form  $\Sigma_Y^2 - S = U D_r^2 U^T$  where the diagonal matrix  $D_r^2 = \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_r^2, 0, \dots, 0)$  and  $\lambda_i > 0$ . Next,  $U = (U_r | U_{d-r})$  is the orthogonal matrix of the corresponding eigen vectors. We obtain the following  $r \times r$  identity:

$$(\Sigma_X^{-1} K U_r D_r^{-1})^T (\Sigma_X^{-1} K U_r D_r^{-1}) = \mathbf{I}_r.$$

It means that  $\Sigma_X^{-1} K U_r D_r^{-1} = O_r$ , an 'orthogonal'  $d \times r$  matrix, with  $O_r^T O_r = \mathbf{I}_r$ , and  $K = \Sigma_X O_r D_r U_r^T$ . The matrix  $O_r$  parametrises the fiber  $\sigma^{-1}(S)$ . As a result, we have an optimization problem

$$\text{tr}(O^T M) \rightarrow \max, M = \Sigma_X U_r D_r,$$

in a matrix-valued argument  $O_r$ , subject to the constraint  $O_r^T O_r = \mathbf{I}_r$ . A straightforward computation gives the answer  $\text{tr}[(M^T M)^{1/2}]$  which is equivalent to (9). The technical details can be found in [3] and [4].  $\square$

For general zero means RVs  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{R}^d$  with the covariance matrices  $\Sigma_i^2, i = 1, 2$  the following inequality holds [5]

$$\text{tr}(\Sigma_1^2) + \text{tr}(\Sigma_2^2) - 2\text{tr}[(\Sigma_1 \Sigma_2^2 \Sigma_1)^{1/2}] \leq \mathbf{E}[\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|^2] \leq \text{tr}(\Sigma_1^2) + \text{tr}(\Sigma_2^2) + 2\text{tr}[(\Sigma_1 \Sigma_2^2 \Sigma_1)^{1/2}].$$



## 2. The distances between distributions of different dimensions

For  $m \leq d$  define a set of matrices with orthonormal rows:

$$O(m, d) = \{V \in \mathbf{R}^{m \times d} : VV^T = \mathbf{I}_m\}$$

and a set of affine maps  $\varphi : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^m$  such that  $\varphi_{V,b}(x) = Vx + b$ .

**Definition 1.** For any measures  $\mu \in M(\mathbf{R}^m)$  and  $\nu \in M(\mathbf{R}^d)$ , the embeddings of  $\mu$  into  $\mathbf{R}^d$  are the set of  $d$ -dimensional measures  $\Phi^+(\mu, d) := \{\alpha \in M(\mathbf{R}^d) : \varphi_{V,\beta}(\alpha) = \mu\}$  for some  $V \in O(m, d), b \in \mathbf{R}^m$ , and the projections of  $\nu$  onto  $\mathbf{R}^m$  are the set of  $m$ -dimensional measures  $\Phi^-(\nu, m) := \{\beta \in M(\mathbf{R}^m) : \varphi_{V,\beta}(\nu) = \beta\}$  for some  $V \in O(m, d), b \in \mathbf{R}^m$ .

Given a metric  $\gamma$  between measures of the same dimension, define the projection distance  $\gamma^-(\mu, \nu) := \inf_{\beta \in \Phi^-(\nu, m)} \gamma(\mu, \beta)$  and the embedding distance  $\gamma^+(\mu, \nu) := \inf_{\alpha \in \Phi^+(\mu, d)} \gamma(\alpha, \nu)$ . It may be proved [6] that  $\gamma^+(\mu, \nu) = \gamma^-(\mu, \nu)$ , denote the common value by  $\hat{\gamma}(\mu, \nu)$ .

**Example 2.** Let us compute the Wasserstein distance between one-dimensional  $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$  and  $d$ -dimensional  $Y \sim N(\mu_2, \Sigma)$ . Denote by  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d$  the eigenvalues of  $\Sigma$ . Then

$$\hat{W}_2(X, Y) = \begin{cases} \sigma - \sqrt{\lambda_1} \text{ if } \sigma > \sqrt{\lambda_1}, \\ 0 \text{ if } \sqrt{\lambda_d} \leq \sigma \leq \sqrt{\lambda_1}, \\ \sqrt{\lambda_d} - \sigma \text{ if } \sigma < \sqrt{\lambda_d}. \end{cases} \quad (10)$$

Indeed, in view of Theorem 3, write

$$\begin{aligned} (W_2^-(X, Y))^2 &= \min_{\|\mathbf{x}\|_2=1, b \in \mathbf{R}} \left[ \|\mu_1 - \mathbf{x}^T \mu_2 - b\|_2^2 + \right. \\ &\left. + \text{tr}(\sigma^2 + \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} - 2\sigma \sqrt{\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x}}) \right] = \min_{\|\mathbf{x}\|_2=1} (\sigma - \sqrt{\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x}})^2, \end{aligned}$$

and (10) follows.

**Example 3** (Wasserstein-2 distance between Dirac measure on  $\mathbf{R}^m$  and a discrete measure on  $\mathbf{R}^d$ ). Let  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$  and  $\mu_1 \in M(\mathbf{R}^m)$  be the Dirac measure with  $\mu_1(\mathbf{y}) = 1$ , i.e., all mass centered at  $\mathbf{y}$ . Let  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^d$  be distinct points,  $p_1, \dots, p_k \geq 0$ ,  $p_1 + \dots + p_k = 1$ , and let  $\mu_2 \in M(\mathbf{R}^d)$  be the discrete measure of point masses with  $\mu_2(\mathbf{x}_i) = p_i, i = 1, \dots, k$ . We seek the Wasserstein distance  $\hat{W}_2(\mu_1, \mu_2)$  in a closed-form solution. Suppose  $m \leq d$ , then

$$\begin{aligned} (W_2^-(\mu_1, \mu_2))^2 &= \inf_{V \in O(m, d), b \in \mathbf{R}^m} \sum_{i=1}^k p_i \|V \mathbf{x}_i + b - \mathbf{y}\|_2^2 = \\ &= \inf_{V \in O(m, d)} \sum_{i=1}^k p_i \|V \mathbf{x}_i - \sum_{i=1}^k p_i V \mathbf{x}_i\|_2^2 = \inf_{V \in O(m, d)} \text{tr}(VCV^T) \end{aligned}$$

noting that the second infimum is attained by  $b = \mathbf{y} - \sum_{i=1}^k p_i V \mathbf{x}_i$  and defining  $C$  in the last infimum to be

$$C := \sum_{i=1}^k p_i \left( \mathbf{x}_i - \sum_{i=1}^k p_i \mathbf{x}_i \right) \left( \mathbf{x}_i - \sum_{i=1}^k p_i \mathbf{x}_i \right)^T \in \mathbf{R}^{d \times d}.$$



Let the eigenvalue decomposition of the symmetric positive semi-definite matrix  $C$  be  $C = Q\Lambda Q^T$  with  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ ,  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d \geq 0$ . Then

$$\inf_{V \in O(m,d)} \text{tr}(VCV^T) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_{d-i}$$

and is attained when  $V \in O(m, d)$  has row vectors given by the last  $m$  columns of  $Q \in O(d)$ . □

A closely related question is to find a projection of zero-mean Gaussian models to the space of a low dimension  $r$  such distance between the projections of  $\mathbf{X}$  and  $\mathbf{Y}$  is maximal. We start the discussion with the TV distance. Suppose  $r \ll d$ , and we want to find a low-dimensional projection  $A \in \mathbf{R}^{r \times d}$ ,  $AA^T = \mathbf{I}_r$  of the multidimensional data  $\mathbf{X} \sim N(\mu_1, \Sigma_1)$  and  $\mathbf{Y} \sim N(\mu_2, \Sigma_2)$  such that  $\text{TV}(A\mathbf{X}, A\mathbf{Y}) \rightarrow \max$ . The problem may be reduced to the case  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\Sigma_1 = \mathbf{I}_d$ ,  $\Sigma_2 = \Sigma$ , cf. [7]. Based on the results from [7, 8] it is natural to maximize

$$\min[1, \sum_{i=1}^r g(\gamma_i)]$$

where  $g(x) = (\frac{1}{x} - 1)^2$  and  $\gamma_i$  are the eigenvalues of  $A\Sigma A^T$ . Consider all permutations  $\pi$  of these eigenvalues. Let

$$\pi^* = \text{argmax}_{\pi} \sum_{i=1}^r g(\lambda_{\pi(i)}), \quad \gamma_i = \lambda_{\pi^*(i)}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Then rows of matrix  $A$  should be selected as the normalized eigenvectors of  $\Sigma$  associated with the eigenvalues  $\gamma_i$ .

**Remark.** For zero-mean Gaussian models, this procedure may be repeated mutatis mutandis for any of the so-called  $f$ -divergences  $D_f(\mathbf{P} \parallel \mathbf{Q}) := \mathbf{E}_{\mathbf{P}} [f(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}})]$  where  $f$  is a convex function such that  $f(1) = 0$ , cf. [7]. The most interesting examples are:

- 1) KL-divergence:  $f(t) = t \log t$  and  $g(x) = \frac{1}{2}(x - \log x - 1)$ ;
- 2) symmetric KL-divergence:  $f(t) = (t - 1) \log t$  and  $g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x} - 2)$ ;
- 3) the total variance distance:  $f(t) = \frac{1}{2}|t - 1|$  and  $g(x) = (\frac{1}{x} - 1)^2$ ;
- 4) the square of Hellinger distance:  $f(t) = (\sqrt{t} - 1)^2$  and  $g(x) = (\frac{x+1}{x})^2$ ;
- 5)  $\chi^2$ -divergence:  $f(t) = (t - 1)^2$  and  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$ .

For estimations, the following result is utterly useful.

**Theorem 4** (Poincaré Separation Theorem). *Let  $\Sigma$  be a real symmetric  $d \times d$  matrix, and  $A$  be a semi-orthogonal  $r \times d$  matrix. The eigenvalues of  $\Sigma$  (sorted in the descending order) and the eigenvalues of  $A\Sigma A^T$  denoted by  $\{\gamma_i, i = 1, \dots, r\}$  (sorted in the descending order) satisfy*

$$\lambda_{d-(r-i)} \leq \gamma_i \leq \lambda_i, \quad i = 1, \dots, r.$$



Let  $X_1, X_2$  be random variables with the probability density functions  $p, q$ , respectively. Define the Kullback – Leibler (KL) divergence

$$\text{KL}(\mathbf{P}_{X_1} \parallel \mathbf{P}_{X_2}) = \int p \log \frac{p}{q}.$$

The KL-divergence is not symmetric and does not satisfy the triangle inequality. However, it gives rise to the so-called Jensen – Shannon metric [9]

$$\text{JS}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \sqrt{D(\mathbf{P} \parallel \mathbf{R}) + D(\mathbf{Q} \parallel \mathbf{R})}$$

with  $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{P} + \mathbf{Q})$ . It is a low bound for the total variance distance

$$0 \leq \text{JS}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \leq \text{TV}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}).$$

Jensen – Shannon metric is not easy to compute in terms of covariance matrices in a multi-dimensional Gaussian case.

A natural way to develop a computationally effective distance in the Gaussian case is to define first a metric between the positive-definite matrices. Let  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  be the generalized eigenvalues, i.e. the solutions of  $\det(\Sigma_1 - \lambda \Sigma_2) = 0$ . Define the distance between the positively definite matrices by  $d(\Sigma_1, \Sigma_2) = \sqrt{\sum_{j=1}^d (\ln \lambda_j)^2}$ , and a *geodesic* metric between Gaussian PDs  $X_1 \sim \mathbf{N}(\mu_1, \Sigma_1)$  and  $X_2 \sim \mathbf{N}(\mu_2, \Sigma_2)$ :

$$d(X_1, X_2) = (\delta^T S^{-1} \delta)^{1/2} + \left( \sum_{j=1}^d (\ln \lambda_j)^2 \right)^{1/2} \tag{11}$$

where  $\delta = \mu_1 - \mu_2$  and  $S = \frac{1}{2}\Sigma_1 + \frac{1}{2}\Sigma_2$ . Equivalently,

$$d^2(\Sigma_1, \Sigma_2) = \text{tr} \left[ (\ln(\Sigma_1^{-1/2} \Sigma_2 \Sigma_1^{-1/2}))^2 \right]. \tag{12}$$

**Remark.** It may be proved that the set of symmetric positively-definite matrices  $M^+(d, \mathbf{R})$  is a Riemannian manifold, and (12) is a geodesic distance corresponding to the bilinear form  $B(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 4\text{tr}(\mathbf{X}\mathbf{Y})$  on the tangent space of symmetric matrices  $M(d, \mathbf{R})$ .

Note that the geodesic distance (11) and (12) between Gaussian PDs (or corresponding covariance matrices) is equivalent to the formula for the Fisher information metric for the multivariate normal model [5]. Indeed, the multivariate normal model is a differentiable manifold, equipped with the Fisher information as the Riemannian metric, which may be used in statistical inference.

**Example 4.** Consider i.i.d. random variables  $Z_1, \dots, Z_n$  being bi-variately normally distributed with diagonal covariance matrices, i.e. we focus on the manifold  $M_{diag} = \{\mathbf{N}(\mu, \Lambda) : \mu \in \mathbf{R}^2, \Lambda \text{ diagonal}\}$ . In this manifold, consider the submodel  $M_{diag}^* = \{\mathbf{N}(\mu, \sigma^2 \mathbf{I}) : \mu \in \mathbf{R}^2, \sigma^2 \in \mathbf{R}_+\}$  corresponding to the hypothesis  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ . First, consider the standard statistical estimates  $\bar{Z}$  for the mean and  $s_1^2, s_2^2$  for the variances. If  $\bar{\sigma}^2$  denotes the geodesic estimate of the common variance, the squared distance between the initial estimate and the geodesic estimate under the hypothesis  $H_0$  is given by

$$\frac{n}{2} \left[ \left( \ln \frac{\bar{\sigma}^2}{s_1^2} \right)^2 + \left( \ln \frac{\bar{\sigma}^2}{s_2^2} \right)^2 \right]$$

which is minimized by  $\bar{\sigma}^2 = s_1 s_2$ . Hence, instead of the arithmetic mean of the initial variance estimates, we use an estimate of the geometric mean of these quantities.  $\square$



Finally, we present the distance between the symmetric positively definite matrices of different dimensions. Let  $m \leq d$ ,  $A$  is  $m \times m$  and  $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$  is  $d \times d$ ; here  $B_{11}$  is  $m \times m$  block. Then the distance is defined as follows

$$d_2(A, B) := \left( \sum_{j=1}^m (\max[0, \ln \lambda_j(A^{-1} B_{11})])^2 \right)^{1/2}. \tag{13}$$

In order to estimate the distance (13), after the simultaneous diagonalization of matrices  $A$  and  $B$ , the following classical result is useful.

**Theorem 5** (Cauchy interlacing inequalities). *Let  $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$  be a  $d \times d$  symmetric positively definite matrix with eigenvalues  $\lambda_1(B) \leq \dots \leq \lambda_d(B)$  and  $m \times m$  block  $B_{11}$ . Then*

$$\lambda_j(B) \leq \lambda_j(B_{11}) \leq \lambda_{j+d-m}(B), j = 1, \dots, m.$$

### 3. Context sensitive probability metrics

Let the weight function or graduation  $\varphi > 0$  of the phase space  $\mathcal{X}$  is given (cf. [10, 11]). Define the total weighted variation (TWV) distance

$$\tau_\varphi(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \frac{1}{2} \left( \sup_A \left[ \int_A \varphi d\mathbf{P}_1 - \int_A \varphi d\mathbf{P}_2 \right] + \sup_A \left[ \int_A \varphi d\mathbf{P}_2 - \int_A \varphi d\mathbf{P}_1 \right] \right).$$

Similarly, define the weighted Hellinger distance. Let  $p_1, p_2$  be the densities of  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  wrt to a measure  $\nu$ . Then

$$\eta_\varphi(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \int \varphi (\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2})^2 d\nu \right)^{1/2}.$$

**Lemma 1.** *Let  $p_1, p_2$  be the densities of  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  wrt to a measure  $\nu$ . Then  $\tau_\varphi(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$  is a distance and*

$$\tau_\varphi(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \frac{1}{2} \int \varphi |p_1 - p_2| d\nu. \tag{14}$$

**Proof.** The triangular inequality and other properties of the distance follow immediately. Next,

$$\begin{aligned} \int_{p_1 > p_2} \varphi (p_1 - p_2) &= \frac{1}{2} \left( \int \varphi p_1 - \int \varphi p_2 \right) + \frac{1}{2} \int \varphi |p_1 - p_2| d\nu, \\ \int_{p_2 > p_1} \varphi (p_2 - p_1) &= \frac{1}{2} \left( \int \varphi p_2 - \int \varphi p_1 \right) + \frac{1}{2} \int \varphi |p_1 - p_2| d\nu. \end{aligned}$$

Summing these equalities, one gets (14). □

Let  $\int \varphi p_1 d\nu \geq \int \varphi p_2 d\nu$ . Then, by the weighted Gibbs inequality [10],  $\text{KL}_\varphi(\mathbf{P}_1 || \mathbf{P}_2) \geq 0$ .

**Theorem 6** (Weighted Pinsker’s inequality).

$$\frac{1}{2} \int \varphi |p_1 - p_2| \leq \sqrt{\text{KL}_\varphi(\mathbf{P}_1 || \mathbf{P}_2) / 2} \sqrt{\int \varphi p_1}.$$



**Proof.** Define the function  $G(x) = x \log x - x + 1$ . The following bound holds

$$G(x) = x \log x - x + 1 \geq \frac{3(x-1)^2}{2(x+2)}, \quad x > 0. \tag{15}$$

Indeed, since both terms of the inequality (15) coincide at  $x = 1$ , and their first derivatives coincide at  $x = 1$ , the following inequality  $f''(x) = \frac{1}{x} \geq \frac{27}{(x+2)^3}$  proves the result. Now, by the Cauchy – Schwarz inequality

$$\begin{aligned} \left( \int \varphi p_2 \left| \frac{p_1}{p_2} - 1 \right| \right)^2 &\leq \int \varphi \frac{\left(\frac{p_1}{p_2} - 1\right)^2}{\frac{p_1}{p_2} + 2} p_2 \int \varphi \left( \frac{p_1}{p_2} + 2 \right) p_2 \leq \\ &\leq 3 \int \varphi \frac{\left(\frac{p_1}{p_2} - 1\right)^2}{\frac{p_1}{p_2} + 2} p_2 \int \varphi p_1 \leq \int \varphi g\left(\frac{p_1}{p_2}\right) p_2 \int \varphi p_1 \leq \text{KL}_\varphi(\mathbf{P}_1 \| \mathbf{P}_2) \int \varphi p_1. \quad \square \end{aligned}$$

**Theorem 7** (Weighted Le Cam’s inequality).

$$\tau_\varphi(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \geq \eta_\varphi(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)^2.$$

**Proof.** In view of inequality

$$\frac{1}{2}|p_1 - p_2| = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 - \min[p_1, p_2] \geq \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 - \sqrt{p_1 p_2},$$

one gets

$$\tau_\varphi(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \geq \frac{1}{2} \int \varphi p_1 + \frac{1}{2} \int \varphi p_2 - \int \varphi \sqrt{p_1 p_2} = \eta_\varphi(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)^2. \quad \square$$

Next, we relate TWV distance to the sum of sensitive errors of both types in statistical estimates. Let  $C$  be the critical domain for checking the hypothesis  $H_1 : \mathbf{P}_1$  versus the alternative  $H_2 : \mathbf{P}_2$ . Define by  $\alpha_\varphi = \int_C \varphi p_1$  and  $\beta_\varphi = \int_{\mathcal{X} \setminus C} \varphi p_2$  the weighted error probabilities of the I and II types.

**Lemma 2.** Let  $d = d_C$  be the decision rule with the critical domain  $C$ . Then

$$\inf_d [\alpha_\varphi + \beta_\varphi] = \frac{1}{2} \left[ \int \varphi d\mathbf{P}_1 + \int \varphi d\mathbf{P}_2 \right] - \tau_\varphi(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2).$$

**Proof.** Denote  $C^* = \{x : p_2(x) > p_1(x)\}$ . Then, the result follows from the equality for all  $C$

$$\begin{aligned} \int_C \varphi d\mathbf{P}_1 + \int_{\mathcal{X} \setminus C} \varphi d\mathbf{P}_2 &= \frac{1}{2} \left[ \int \varphi d\mathbf{P}_1 + \int \varphi d\mathbf{P}_2 \right] + \\ &+ \int \varphi |p_1 - p_2| [\mathbf{1}(x \in C \cap \mathcal{X} \setminus C^*) - \mathbf{1}(x \in C \cap C^*)]. \quad \square \end{aligned}$$

**Theorem 8** (Weighted Fano’s inequality). Let  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_M$ ,  $M \geq 2$  be probability distributions such that  $\mathbf{P}_j \ll \mathbf{P}_k, \forall j, k$ . Then

$$\begin{aligned} \inf_d \max_{1 \leq j \leq M} \int \varphi(x) \mathbf{1}(d(x) \neq j) d\mathbf{P}_j(x) &\geq \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int \varphi d\mathbf{P}_j - \\ &- \frac{1}{\log(M-1)} \left[ \frac{1}{M^2} \sum_{j,k} \text{KL}_\varphi(\mathbf{P}_j, \mathbf{P}_k) + \log 2 \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int \varphi d\mathbf{P}_j \right] \end{aligned} \tag{16}$$

where the infimum is taken over all tests with values in  $\{1, \dots, M\}$ .



**Proof.** Let  $Z \in \{1, \dots, M\}$  be a random variable such that  $\mathbf{P}(Z = i) = \frac{1}{M}$  and let  $X \sim \mathbf{P}_Z$ . Note that  $\mathbf{P}_Z$  is a mixture distribution so that for any measure  $\nu$  such that  $\mathbf{P}_Z \ll \nu$ , we have  $\frac{d\mathbf{P}_Z}{d\nu} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{d\mathbf{P}_k}{d\nu}$  and so

$$\mathbf{P}(Z = j|X) = d\mathbf{P}_j(x) \left( \sum_{k=1}^M d\mathbf{P}_k(x) \right)^{-1}.$$

It implies by Jensen’s inequality applied to the convex function  $-\log x$

$$\begin{aligned} & \int \varphi(x) \sum_{j=1}^M \mathbf{P}(Z = j|X = x) \log \mathbf{P}(Z = j|X = x) d\mathbf{P}_X(x) \leq \\ & \leq \frac{1}{M^2} \sum_{j,k} \int \varphi \log \left( \frac{d\mathbf{P}_j}{d\mathbf{P}_k} \right) d\mathbf{P}_j - \log(M) \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int \varphi p_j = \\ & = \frac{1}{M^2} \sum_{j,k} \text{KL}_\varphi(\mathbf{P}_j, \mathbf{P}_k) - \log(M) \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int \varphi p_j. \end{aligned} \tag{17}$$

On the other hand, denote by  $q_j = \frac{\mathbf{P}(Z=j|X)}{\mathbf{P}(Z \neq d(X)|X)}$  and  $h(x) = x \log x + (1 - x) \log(1 - x)$ . Note that  $h(x) \geq -\log 2$  and by Jensen’s inequality  $\sum_{j \neq d(X)} q_j \log q_j \geq -\log(M - 1)$ . The following inequality holds

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M \mathbf{P}(Z = j|X) \log \mathbf{P}(Z = j|X) = \\ & = h(\mathbf{P}(Z \neq d(X)|X)) + \mathbf{P}(Z \neq d(X)|X) \sum_{j \neq d(X)} q_j \log q_j \geq \\ & \geq -\log 2 - \log(M - 1) \mathbf{P}(d(X) \neq Z|X) \log(M - 1). \end{aligned} \tag{18}$$

Integration of (18) yields

$$\begin{aligned} & \int \varphi(x) \sum_{j=1}^M \mathbf{P}(Z = j|X = x) \log \mathbf{P}(Z = j|X = x) d\mathbf{P}_X(x) \geq \\ & \geq -\log 2 \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \int \varphi d\mathbf{P}_j - \log(M - 1) \max_{1 \leq j \leq M} \int \varphi(x) \mathbf{1}(d(x) \neq j) d\mathbf{P}_j. \end{aligned} \tag{19}$$

Combining (17) and (19) proves (16). □

### References

1. Vallander S. S. Calculation of the Wasserstein distance between probability distributions on the line. *Theory of Probability & Its Applications*, 1974, vol. 18, iss. 4, pp. 784–786. <https://doi.org/10.1137/1118101>
2. Rachev S. T. The Monge–Kantorovich mass transference problem and its stochastic applications. *Theory of Probability & Its Applications*, 1985, vol. 29, iss. 4, pp. 647–676. <https://doi.org/10.1137/1129093>
3. Givens C. R., Shortt R. M. A class of Wasserstein metrics for probability distributions. *The Michigan Mathematical Journal*, 1984, vol. 31, iss. 2, pp. 231–240. <https://doi.org/10.1307/mmj/1029003026>





4. Olkin I., Pukelsheim F. The distances between two random vectors with given dispersion matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 1982, vol. 48, pp. 257–263. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(82\)90112-4](https://doi.org/10.1016/0024-3795(82)90112-4)
5. Dowson D. C., Landau B. V. The Fréchet distance between multivariate Normal distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, 1982, vol. 12, iss. 3, pp. 450–455. [https://doi.org/10.1016/0047-259X\(82\)90077-X](https://doi.org/10.1016/0047-259X(82)90077-X)
6. Cai Y., Lim L.-H., Distances between probability distributions of different dimensions. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2022, vol. 68, iss. 6, pp. 4020–4031. <https://doi.org/10.1109/TIT.2022.3148923>
7. Dwivedi A., Wang S., Tajer A. Discriminant analysis under  $f$ -divergence measures. *Entropy*, 2022, vol. 24, iss. 2, art. 188, 26 p. <https://doi.org/10.3390/e24020188>
8. Devroye L., Mehrabian A., Reddad T. The total variation distance between high-dimensional Gaussians. *ArXiv*, 2020, ArXiv:1810.08693v5, pp. 1–12.
9. Endres D. M., Schindelin J. E. A new metric for probability distributions. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2003, vol. 49, iss. 7, pp. 1858–1860. <https://doi.org/10.1109/TIT.2003.813506>
10. Stuhl I., Suhov Y., Yasaei Sekeh S., Kelbert M. Basic inequalities for weighted entropies. *Aequationes Mathematicae*, 2016, vol. 90, iss. 4, pp. 817–848. <https://doi.org/10.1007/s00010-015-0396-5>
11. Stuhl I., Kelbert M., Suhov Y., Yasaei Sekeh S. Weighted Gaussian entropy and determinant inequalities. *Aequationes Mathematicae*, 2022, vol. 96, iss. 1, pp. 85–114. <https://doi.org/10.1007/s00010-021-00861-3>

Поступила в редакцию / Received 09.12.2022

Принята к публикации / Accepted 25.12.2022

Опубликована / Published 30.11.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 435–442  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 435–442  
[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru) <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-435-442>, EDN: DRMGUT

Научная статья

УДК 514.76

## Однородные пространства неразрешимых групп Ли, не допускающие эквиаффинных связностей ненулевой кривизны

Н. П. Можей

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Беларусь, 220013, г. Минск, ул. П. Бровки, д. 6

**Можей Наталья Павловна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий, [mozheynatalya@mail.ru](mailto:mozheynatalya@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0001-9237-7208>, AuthorID: 386807

**Аннотация.** Важный подкласс среди однородных пространств формируют изотропно-точные однородные пространства, в частности, этот подкласс содержит все однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность. Аффинная связность является эквиаффинной, если она допускает параллельную форму объема. Целью работы является локальное описание трехмерных однородных пространств, не допускающих инвариантных эквиаффинных связностей ненулевой кривизны, рассматривается случай неразрешимой группы Ли преобразований. Определены основные понятия: изотропно-точная пара, инвариантная аффинная связность, тензоры кривизны и кручения, тензор Риччи, эквиаффинная связность. Локальное изучение однородных пространств равносильно исследованию пар, состоящих из алгебры Ли и ее подалгебры. Для трехмерных однородных пространств неразрешимых групп Ли, допускающих инвариантные связности только ненулевой кривизны, определено, при каких условиях пространство не допускает эквиаффинных связностей. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, главным образом, локальный характер. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и связностей на них. Полученные результаты могут быть использованы в работах по дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям, топологии, а также в других областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах, а алгоритмы могут быть компьютеризированы и применены для решения аналогичных задач в больших размерностях.

**Ключевые слова:** эквиаффинная связность, группа Ли, однородное пространство, тензор кривизны, тензор Риччи

**Для цитирования:** Можей Н. П. Однородные пространства неразрешимых групп Ли, не допускающие эквиаффинных связностей ненулевой кривизны // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 435–442. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-435-442>, EDN: DRMGUT

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

## Homogeneous spaces of unsolvable Lie groups that do not admit equiaffine connections of nonzero curvature

N. P. Mozhey

Belarussian State University of Informatics and Radioelectronics, 6 P. Brovki St., Minsk 220013, Belarus

Natalya P. Mozhey, mozheynatalya@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9237-7208>, AuthorID: 386807

**Abstract.** An important subclass among homogeneous spaces is formed by isotropically-faithful homogeneous spaces, in particular, this subclass contains all homogeneous spaces admitting invariant affine connection. An affine connection is equiaffine if it admits a parallel volume form. The purpose of the work is the local description of the three-dimensional homogeneous spaces that do not admit invariant equiaffine connections of nonzero curvature. We have concerned the case of the unsolvable Lie group of transformations. The basic notions, such as an isotropically-faithful pair, an invariant affine connection, curvature and torsion tensors, Ricci tensor, equiaffine connection are defined. A local study of homogeneous spaces is equivalent to the investigation of pairs consisting of a Lie algebra and its subalgebra. For three-dimensional homogeneous spaces of nonsolvable Lie groups that admit invariant connections of nonzero curvature only, it is determined under what conditions the space does not admit equiaffine connections. Studies are based on the use of properties of the Lie algebras, Lie groups and homogeneous spaces and they mainly have local character. A feature of the methods presented in the work is the application of a purely algebraic approach to the description of homogeneous spaces and connections on them. The results obtained in the work can be used in works on differential geometry, differential equations, topology, as well as in other areas of mathematics and physics, since many fundamental problems in these areas relate to the investigation of invariant objects on homogeneous spaces, the algorithms can be computerized and used for the solution of similar problems in large dimensions.

**Keywords:** equiaffine connection, Lie group, homogeneous space, curvature tensor, Ricci tensor

**For citation:** Mozhey N. P. Homogeneous spaces of unsolvable Lie groups that do not admit equiaffine connections of nonzero curvature. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 435–442 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-435-442>, EDN: DRMGUT

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

### Введение

«Кривые и поверхности, служившие основными объектами изучения в классической дифференциальной геометрии, все больше вытесняются теперь  $n$ -мерными дифференцируемыми многообразиями с заданными на них различными геометрическими структурами» [1, с. 5]. Основная трудность построения инвариантного дифференциального исчисления на многообразии заключается в необходимости отождествлять касательные пространства к многообразию в различных его точках, следовательно, требуется определить параллельный перенос геометрических объектов из одной точки многообразия в другую. Эту трудность можно обойти, фиксируя на многообразии дополнительные структуры, например связности.

Еще Феликс Клейн [2] утверждал, что наиболее полезным способом изучения геометрических структур является изучение симметрий, т.е. групп преобразований,



сохраняющих особенности структуры. Концепции и методы, основанные на группах преобразований, значительно изменили лицо современной математики и физики. Это обстоятельство связано в первую очередь с конструктивным подходом, который вносит в математику использование групп Ли. Одной из наиболее значительных идей Софуса Ли является выделение класса транзитивных групп преобразований как класса объектов, которые могут быть изучены конструктивно, так как любая проблема, относящаяся к однородным пространствам, может быть разрешена в явном виде и сведена к классификационной задаче. Важный подкласс среди всех однородных пространств формируют изотропно-точные однородные пространства, в частности, этот подкласс содержит все однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность. Этой связностью задается геометрия на многообразии, связность определяет ковариантное дифференцирование и параллельный перенос тензоров.

Аффинная связность является эквиаффинной, если она допускает параллельную форму объема (см. [3]). Однородные пространства неразрешимых групп Ли, допускающие аффинные связности только ненулевой кривизны, приведены в работе [4].

В данной работе изучается, при каких условиях указанные пространства не допускают эквиаффинных связностей.

## 1. Основные определения

Пусть  $M$  — дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа  $\bar{G}$ ,  $G = \bar{G}_x$  — стабилизатор произвольной точки  $x \in M$ . Пусть  $\bar{\mathfrak{g}}$  — алгебра Ли группы Ли  $\bar{G}$ , а  $\mathfrak{g}$  — подалгебра, соответствующая подгруппе  $G$ . Проблема классификации однородных пространств  $(M, \bar{G})$  равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли  $(\bar{G}, G)$ , где  $G \subset \bar{G}$ , так как многообразие  $M$  может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов  $\bar{G}/G$  (подробнее см. [5]); описание пар  $(\bar{G}, G)$ , ассоциированных с данной парой  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ , дано Г. Д. Мостовым [6]. Пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление  $\mathfrak{g}$ . Там, где это не станет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к  $\mathfrak{g}$  в  $\bar{\mathfrak{g}}$ , и фактор-пространство  $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ .

*Аффинной связностью* на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  называется такое отображение  $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ , что его ограничение на  $\mathfrak{g}$  — изотропное представление подалгебры, а все отображение является  $\mathfrak{g}$ -инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве  $(M, \bar{G})$  находятся во взаимно однозначном соответствии (см., например, [7]) с аффинными связностями на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ . Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для  $G$  должно быть точным, если  $\bar{G}$  эффективна на  $\bar{G}/G$  [8, 9]. *Тензоры кривизны*  $R$  и *кручения*  $T$  инвариантной связности можно выразить в терминах связности  $\Lambda$  следующим образом (подробнее см. [8]):  $R(x_m, y_m) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$ ,  $T(x_m, y_m) = \Lambda(x)y_m - \Lambda(y)x_m - [x, y]_m$  для всех  $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ . Будем говорить, что  $\Lambda$  имеет нулевое кручение (или является связностью без кручения), если  $T = 0$ . Определим *тензор Риччи*  $\text{Ric}(y, z) = \text{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}$ . Будем говорить, что аффинная связность  $\Lambda$  является *локально эквиаффинной*, если  $\text{tr}\Lambda([x, y]) = 0$  для всех  $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$  (т. е.  $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}]) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$ ). Аффинная связность с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквиаффинна [3].

Под *эквиаффинной связностью* будем понимать аффинную связность  $\Lambda$  (без кручения), для которой  $\text{tr}\Lambda(x) = 0$  для всех  $x \in \bar{\mathfrak{g}}$ . В этом случае очевидно, что  $\Lambda(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$ .



## 2. Описание однородных пространств, не допускающих эквивалентных связностей

Будем описывать пару  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  при помощи таблицы умножения алгебры Ли  $\bar{\mathfrak{g}}$ . Через  $\{e_1, \dots, e_n\}$  обозначим базис  $\bar{\mathfrak{g}}$  ( $n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$ ). Будем полагать, что подалгебра Ли  $\mathfrak{g}$  порождается векторами  $e_1, \dots, e_{n-3}$ , а  $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$  — базис  $\mathfrak{m}$ . Для нумерации подалгебр используем запись  $d.n$ , а для нумерации пар — запись  $d.n.t$ , соответствующие приведенным в [4], здесь  $d$  — размерность подалгебры,  $n$  — номер подалгебры в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ , а  $t$  — номер пары  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ .

**Теорема 1.** *Все трехмерные однородные пространства, определяемые парами  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ , такие, что  $\bar{\mathfrak{g}}$  неразрешима, допускающие инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, но не допускающие эквивалентных связностей, локально имеют следующий вид:*

–  $\mathfrak{g}$  разрешима:

2.1.2.	$e_1$	$e_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	2.3.2.	$e_1$	$e_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$					
	$e_1$	0	0	$u_1$	$-u_2$	0	$e_1$	0	0	$-u_2$	$u_1$	0				
	$e_2$	0	0	0	0	$u_3$	$e_2$	0	0	0	0	$u_3$				
	$u_1$	$-u_1$	0	0	0	$e_1$	$u_1$	$u_2$	0	0	$e_1$	0				
	$u_2$	$u_2$	0	$-e_1$	0	0	$u_2$	$-u_1$	0	$-e_1$	0	0				
	$u_3$	0	$-u_3$	0	0	0	$u_3$	0	$-u_3$	0	0	0				
2.3.3.	$e_1$	$e_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	2.9.12.	$e_1$	$e_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$					
	$e_1$	0	0	$-u_2$	$u_1$	0	$e_1$	0	$-e_2$	$u_1$	$-2u_2$	$2u_3$				
	$e_2$	0	0	0	0	$u_3$	$e_2$	$e_2$	0	0	0	$u_1$				
	$u_1$	$u_2$	0	0	$-e_1$	0	$u_1$	$-u_1$	0	0	$e_2$	0				
	$u_2$	$-u_1$	0	$e_1$	0	0	$u_2$	$2u_2$	0	$-e_2$	0	$-e_1$				
	$u_3$	0	$-u_3$	0	0	0	$u_3$	$-2u_3$	$-u_1$	0	$e_1$	0				
3.8.8.	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	4.13.3.	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$u_1$	$u_2$	$u_3$		
	$e_1$	0	0	$e_3$	$u_1$	0	0	$e_1$	0	$e_2$	$e_3$	0	$u_1$	0	0	
	$e_2$	0	0	$e_3$	0	$u_2$	$-u_3$	$e_2$	$-e_2$	0	0	$e_3$	0	$u_1$	0	
	$e_3$	$-e_3$	$-e_3$	0	0	0	$u_1$	$e_3$	$-e_3$	0	0	$-e_2$	0	0	$u_1$	
	$u_1$	$-u_1$	0	0	0	$e_3$	0	$e_4$	0	$-e_3$	$e_2$	0	0	$-u_3$	$u_2$	
	$u_2$	0	$-u_2$	0	$-e_3$	0	$2e_2 - e_1$	$u_1$	$-u_1$	0	0	0	0	$-e_2$	$-e_3$	
	$u_3$	0	$u_3$	$-u_1$	0	$e_1 - 2e_2$	0	$u_2$	0	$-u_1$	0	$u_3$	$e_2$	0	$-e_4$	
								$u_3$	0	0	$-u_1$	$-u_2$	$e_3$	$e_4$	0	
4.11.2.	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	4.13.2.	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
	$e_1$	0	0	$e_3$	$e_4$	$u_1$	0	0	$e_1$	0	$e_2$	$e_3$	0	$u_1$	0	0
	$e_2$	0	0	$-e_3$	$e_4$	0	$u_2$	$-u_3$	$e_2$	$-e_2$	0	0	$e_3$	0	$u_1$	0
	$e_3$	$-e_3$	$e_3$	0	0	0	$u_1$	0	$e_3$	$-e_3$	0	0	$-e_2$	0	0	$u_1$
	$e_4$	$-e_4$	$-e_4$	0	0	0	$u_1$ ,	$e_4$	0	$-e_3$	$e_2$	0	0	$-u_3$	$u_2$ ;	
	$u_1$	$-u_1$	0	0	0	0	$e_4$	$e_3$	$-u_1$	0	0	0	0	$e_2$	$e_3$	
	$u_2$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	$-e_4$	0	$e_2$	0	$-u_1$	0	$u_3$	$-e_2$	0	$e_4$	
	$u_3$	0	$u_3$	0	$-u_1$	$-e_3$	$-e_2$	0	$u_3$	0	0	$-u_1$	$-u_2$	$-e_3$	$-e_4$	0



–  $\mathfrak{g}$  неразрешима:

6.1.3.	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	$e_5$	$-e_6$	$u_1$	$-u_2$	0
$e_2$	$-2e_2$	0	$e_1$	0	0	$e_5$	0	$u_1$	0
$e_3$	$2e_3$	$-e_1$	0	0	$e_6$	0	$u_2$	0	0
$e_4$	0	0	0	0	$e_5$	$e_6$	$u_1$	$u_2$	0
$e_5$	$-e_5$	0	$-e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	$u_1$
$e_6$	$e_6$	$-e_5$	0	$-e_6$	0	0	0	0	$u_2$
$u_1$	$-u_1$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	$-e_5$
$u_2$	$u_2$	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	$-e_6$
$u_3$	0	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	$e_5$	$e_6$	0

Действительно, в работе [4] найдены все трехмерные однородные пространства, определяемые парами  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ , такие, что  $\bar{\mathfrak{g}}$  неразрешима, допускающие инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны. Используя полученную классификацию, найдем, существуют ли эквивалентные связности на пространствах указанного вида.

Поскольку ограничение  $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$  на  $\mathfrak{g}$  — изотропное представление подалгебры, связность определяется своими значениями на  $\mathfrak{m}$ . При  $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$  связность будем называть нулевой.

Аффинная связность является нулевой в случаях 2.9.12, 4.11.2, 4.13.2, 4.13.3, 3.8.8, 2.1.2, 2.3.2, 2.3.3, тензоры кручения в указанных случаях также нулевые. В случае 6.1.3 аффинная связность имеет вид

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1} + p_{1,3} \end{pmatrix},$$

$r_{1,1}, p_{1,3} \in \mathbb{R}$ , а тензор кручения —

$$T(u_1, u_2) = (0, 0, 0), \quad T(u_1, u_3) = (-p_{1,3} + r_{1,1}, 0, 0), \quad T(u_2, u_3) = (0, -p_{1,3} + r_{1,1}, 0).$$

Соответственно, в случае 6.1.3  $T = 0$  при  $r_{1,1} = p_{1,3}$ .

Заметим, что во всех этих случаях, кроме 2.9.12 и 3.8.8, имеем  $\text{tr}\Lambda([y, z]) = 0$  для всех  $y, z \in \bar{\mathfrak{g}}$ , т.е. указанная тривиальная связность является локально эквивалентной, а в случае 6.1.3 локально эквивалентная связность (без кручения) принимает вид

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} p_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3} \end{pmatrix}.$$

В случае 2.9.12 имеем  $[u_2, u_3] = -e_1$ , но  $\text{tr}\Lambda(e_1) \neq 0$ , т.е. связность не является локально эквивалентной, в случае 3.8.8 аналогично  $[u_2, u_3] = 2e_2 - e_1$ , поскольку  $\text{tr}\Lambda(2e_2 - e_1) \neq 0$ , связность не является локально эквивалентной.

Тензор кривизны в случае 2.9.12

$$R(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(u_1, u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$



тогда тензор Риччи  $\text{Ric}(y, z) = \text{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

и не является симметрическим. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Таким образом, получаем тензоры Риччи, приведенные в таблице.

Тензоры Риччи / Table. Ricci tensors

Пара	Тензор Риччи	Пара	Тензор Риччи
2.1.2	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2.3.2	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.3.3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2.9.12, 3.8.8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
4.11.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	4.13.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
4.13.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	6.1.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}^2 + 2 \end{pmatrix}$

Тензор Риччи является симметрическим тогда и только тогда, когда связность локально эквивариантна, т. е. во всех приведенных случаях, кроме случаев 2.9.12 и 3.8.8, что соответствует полученному выше.

Для пар  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  выпишем изотропные представления. В случаях

$$\begin{array}{l}
 2.1. \begin{matrix} x & & \\ & -x & \\ & & y \end{matrix}; 2.3. \begin{matrix} & x & \\ -x & & \\ & & y \end{matrix}; 2.9. \begin{matrix} x & & y \\ & -2x & \\ & & 2x \end{matrix}; 3.8. \begin{matrix} x & & z \\ & y & \\ & & -y \end{matrix}; \\
 4.11. \begin{matrix} x & z & u \\ & y & \\ & & -y \end{matrix}; 4.13. \begin{matrix} x & y & z \\ & & u \\ & & -u \end{matrix}; 6.1. \begin{matrix} x & z & w \\ u & y & v \end{matrix}
 \end{array}$$

$\Lambda(\mathfrak{g})$  не принадлежит  $\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$ , поэтому соответствующие пары  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  не допускают эквивариантных связностей, здесь для упрощения записи вместо стандартного обозначения для подалгебры в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{использована запись} \quad \begin{matrix} x & & \\ & -x & \\ & & y \end{matrix},$$

причем переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат  $\mathbb{R}$ , а базис подалгебры по умолчанию выбирается, придавая одной из переменных значение 1, а остальным  $-0$ , нумерация базисных векторов соответствует алфавиту.



Прямыми вычислениями получаем, что остальные однородные пространства, найденные в работе [4], допускают эквиаффинные связности, т.е. других трехмерных однородных пространств неразрешимых групп Ли, допускающих аффинные связности только ненулевой кривизны, но не допускающих эквиаффинных связностей, кроме приведенных в теореме 1, не существует.

## Заключение

Таким образом, найдено и приведено в явном виде полное локальное описание трехмерных однородных пространств с неразрешимой группой преобразований, допускающих инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, но не допускающих эквиаффинных связностей. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и структур на них. Полученные результаты могут быть использованы в работах по дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям, топологии, а также в других областях математики и физики, а алгоритмы могут быть компьютеризированы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

## Список литературы

1. Белько И. В., Бурдун А. А., Ведерников В. И., Феденко А. С. Дифференциальная геометрия. Минск : Изд-во БГУ, 1982. 255 с.
2. Klein F. A comparative review of recent researches in geometry // *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1893. Vol. 2. P. 215–249. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1893-00147-X>
3. Nomizu K., Sasaki T. *Affine Differential Geometry: Geometry of Affine Immersions*. Cambridge ; New York : Cambridge University Press, 1994. 263 p.
4. Mozhey N. P. Connections of nonzero curvature on homogeneous spaces of unsolvable transformation groups // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2018. Vol. 15. P. 773–785. <https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.063>
5. Helgason S. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*. Academic Press, 1978. 628 p. <https://doi.org/10.1090/gsm/034>
6. Mostow G. D. The extensibility of local Lie groups of transformations and groups of surfaces // *Annals of Mathematics*. 1950. Vol. 52, iss. 3. P. 606–636. <https://doi.org/10.2307/1969437>
7. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces // *American Journal of Mathematics*. 1954. Vol. 76, iss. 1. P. 33–65. <https://doi.org/10.2307/2372398>
8. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of Differential Geometry*. New York : John Wiley and Sons, 1963. Vol. 1. 454 p.
9. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of Differential Geometry*. New York : John Wiley and Sons, 1969. Vol. 2. 488 p.

## References

1. Belko I. V., Burdun A. A., Vedernikov V. I., Fedenko A. S. *Differentsial'naya geometriya* [Differential Geometry]. Minsk, BSU Publ., 1982. 255 p. (in Russian).
2. Klein F. A comparative review of recent researches in geometry. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1893, vol. 2, pp. 215–249. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1893-00147-X>
3. Nomizu K., Sasaki T. *Affine Differential Geometry: Geometry of Affine Immersions*. Cambridge, New York, Cambridge University Press, 1994. 263 p.
4. Mozhey N. P. Connections of nonzero curvature on homogeneous spaces of unsolvable transformation groups. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2018, vol. 15, pp. 773–785. <https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.063>





5. Helgason S. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*. Academic Press, 1978. 628 p. <https://doi.org/10.1090/gsm/034>
6. Mostow G. D. The extensibility of local Lie groups of transformations and groups of surfaces. *Annals of Mathematics*, 1950, vol. 52, iss. 3, pp. 606–636. <https://doi.org/10.2307/1969437>
7. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *American Journal of Mathematics*, 1954, vol. 76, iss. 1, pp. 33–65. <https://doi.org/10.2307/2372398>
8. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of Differential Geometry*. Vol. 1. New York, John Wiley and Sons, 1963. 454 p.
9. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of Differential Geometry*. Vol. 2. New York, John Wiley and Sons, 1969. 488 p.

Поступила в редакцию / Received 23.08.2022

Принята к публикации / Accepted 22.03.2023

Опубликована / Published 30.11.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 443–455  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 443–455  
[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru) <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-443-455>, EDN: FNPHQP

Научная статья  
УДК 517.5

## Орторекурсивные разложения, порожденные ядром Сеге

П. А. Терехин

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1

**Терехин Павел Александрович**, доктор физико-математических наук, <sup>1</sup>заведующий кафедрой математического анализа; <sup>2</sup>ведущий научный сотрудник лаборатории «Многомерная аппроксимация и приложения», [terekhinpa@mail.ru](mailto:terekhinpa@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0002-7874-9324>, AuthorID: 13326

**Аннотация.** В статье рассматриваются системы подпространств пространства Харди, порожденные ядром Сеге. Основной результат работы заключается в установлении сходимости орторекурсивных разложений по рассматриваемым системам подпространств. Заметим, что условия сходимости орторекурсивных разложений оказываются несколько более ограниченными по сравнению с ранее полученными условиями сходимости порядкосохраняющих слабых жадных алгоритмов и фреймовых разложений.

**Ключевые слова:** гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, пространство Харди, ядро Сеге, орторекурсивное разложение, фрейм

**Благодарности:** Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-71-30001) в МГУ им. М. В. Ломоносова.

**Для цитирования:** Терехин П. А. Орторекурсивные разложения, порожденные ядром Сеге // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 443–455. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-443-455>, EDN: FNPHQP

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Orthorecursive expansions generated by the Szegő kernel

P. A. Terekhin

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Lomonosov Moscow State University, Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, GSP-1, Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia

**Pavel A. Terekhin**, [terekhinpa@mail.ru](mailto:terekhinpa@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0002-7874-9324>, AuthorID: 13326



**Abstract.** This article considers systems of subspaces of the Hardy space generated by the Szegő kernel. The main result of the work is to establish the convergence of orthorecursive expansions with respect to the considered systems of subspaces. Note that the conditions for the convergence of orthorecursive expansions prove to be somewhat more restrictive compared to the previously obtained conditions for the convergence of order-preserving weak greedy algorithms and frame expansions.

**Keywords:** reproducing kernel Hilbert space, Hardy space, Szegő kernel, orthorecursive expansion, frame

**Acknowledgements:** This research was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-71-30001) at Lomonosov Moscow State University.

**For citation:** Terekhin P. A. Orthorecursive expansion generated by the Szegő kernel. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 443–455 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-443-455>, EDN: FNPHQP

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Хорошо известно, что геометрия функционального гильбертова пространства в значительной степени определяется свойствами его воспроизводящего ядра. Такие различные задачи, как распределение нулей и интерполяция функций, приближение функций и представление рядами, мультипликативная структура пространства и описание ассоциированных с ней пространств и алгебр, а также целый ряд других задач получают свое решение на основе исследования поведения воспроизводящего ядра данного функционального пространства. С точки зрения теории функций и функционального анализа представляет интерес следующий вопрос:

*Какими аппроксимативными и представляющими свойствами (полнота, базисность и т. п.) обладает последовательность  $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  дискретизированных значений воспроизводящего ядра?*

Естественно, что ответ на этот вопрос в его «глобальной» постановке не может быть универсальным, т. е. ситуация существенным образом зависит от конкретного функционального гильбертова пространства, которое будет рассматриваться. В данной работе мы будем иметь дело исключительно с пространством Харди  $H^2(\mathbb{D})$  в единичном круге  $\mathbb{D}$  и его воспроизводящим ядром

$$K_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z}, \quad \lambda, z \in \mathbb{D},$$

которое называется ядром Сеге (или ядром Коши). Основной вопрос заключается в нахождении условий сходимости орторекурсивных разложений по системам подпространств пространства Харди, порожденных ядром Сеге. Ответ на этот вопрос (теорема 2 из разд. 4) получен на основе изучения аппроксимативных свойств подпространств специального вида  $\mathcal{K}_{r,n} = [K_{r,n,j}]_{j=0}^{n-1}$ , натянутых на значения ядра Сеге  $K_{r,n,j}$ , соответствующих перемещенным на радиус  $r$  корням  $n$ -ой степени из единицы  $\lambda_{r,n,j} = re^{2\pi ij/n}$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ .

## 1. Предварительные сведения

**Функциональные гильбертовы пространства.** Гильбертово пространство  $H$ , состоящее из функций  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , называется *функциональным*, если для каждого



$\lambda \in \Omega$  корректно определен и ограничен *оценочный функционал*  $f \mapsto f(\lambda)$ , т. е. существует положительная постоянная  $C_\lambda$  такая, что для всех  $f \in H$  выполняется неравенство  $|f(\lambda)| \leq C_\lambda \|f\|$ . По теореме Рисса о представлении ограниченного линейного функционала в гильбертовом пространстве для каждого  $\lambda \in \Omega$  существует единственный элемент  $K_\lambda \in H$  такой, что  $f(\lambda) = \langle f, K_\lambda \rangle$ . *Воспроизводящим ядром* функционального гильбертова пространства  $H$  называется функция  $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , определяемая посредством

$$K(\lambda, \omega) := \langle K_\lambda, K_\omega \rangle = K_\lambda(\omega), \quad \lambda, \omega \in \Omega.$$

**Пространство Харди и ядро Сеге.** Пространство Харди  $H^2 = H^2(\mathbb{D})$  состоит из всех аналитических в единичном круге  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  функций  $f(z)$ , для которых конечна норма

$$\|f\|_{H^2} = \sup_{0 < r < 1} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Пусть  $\Lambda \subset \mathbb{D}$  — счетное множество точек и  $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  — последовательность значений ядра Сеге. Как следует из классической теоремы Сеге о нулях, подпространство  $[K_\lambda : \lambda \in \Lambda]$  (замыкание линейной оболочки последовательности) совпадает с пространством  $H^2(\mathbb{D})$  в том и только том случае, когда

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (1 - |\lambda|) = \infty. \tag{1}$$

Напротив, существование биортогональной системы  $\{L_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset H^2(\mathbb{D})$  (т. е.  $\langle K_\lambda, L_\mu \rangle_{H^2} = \delta_{\lambda\mu}$ , где  $\delta_{\lambda\mu}$  — символ Кронекера) эквивалентно выполнению условия Бляшке

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (1 - |\lambda|) < \infty. \tag{2}$$

Несовместность условий полноты и минимальности показывает, что система  $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  не может быть базисом пространства  $H^2(\mathbb{D})$  ни при каком  $\Lambda$ . Тем не менее, система  $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  образует базисную последовательность (т. е. базис в замыкании своей линейной оболочки) тогда и только тогда, когда наряду с условием Бляшке выполняется условие Карлесона (см. [1], а также [2, гл. 10])

$$\prod_{\mu \in \Lambda, \mu \neq \lambda} \left| \frac{\mu - \lambda}{1 - \bar{\lambda}\mu} \right| \geq c, \quad \lambda \in \Lambda, \tag{3}$$

с некоторой постоянной  $c > 0$ . При этом (собственное) подпространство  $K = [K_\lambda : \lambda \in \Lambda]$  удовлетворяет равенству  $K^\perp = BH^2$ , где  $B$  — произведение Бляшке с нулями  $\Lambda$  и  $K^\perp$  — ортогональное дополнение.

Рассмотрим нормированное ядро Сеге

$$\widehat{K}_\lambda(z) = \frac{(1 - |\lambda|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \bar{\lambda}z}, \quad \lambda, z \in \mathbb{D}.$$

Заметим, что система  $\{\widehat{K}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  не только не может быть базисом пространства Харди, но также не образует фрейм Даффина – Шеффера в  $H^2(\mathbb{D})$ . В самом деле, нижнее и верхнее фрейм-неравенства

$$A\|f\|_{H^2}^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle f, \widehat{K}_\lambda \rangle_{H^2}|^2 \leq B\|f\|_{H^2}^2, \quad f \in H^2,$$



вступают в противоречие друг с другом, поскольку первое из них влечет за собой полноту системы и тем самым условие (1), а второе, известное также как условие Ньюмана

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (1 - |\lambda|^2) |f(\lambda)|^2 \leq B \|f\|_{H^2}^2, \quad (4)$$

имеет следствием условие (2) (достаточно положить  $f \equiv 1$  в условии (4)). При этом (3)  $\Rightarrow$  (4) и, наоборот, каждое множество, удовлетворяющее условию (4), является конечным объединением множеств, удовлетворяющих условию (3) [3, Ch. 2, § 5]. Последнее утверждение является частным случаем гипотезы Фейхтингера, доказанной Маркусом, Шпильманом и Шриваставой [4] и эквивалентной гипотезе Кадисона – Зингера.

В противоположность вышеупомянутым результатам о несуществовании базисов и фреймов Даффина – Шеффера вида  $\{\widehat{K}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  результат Тотика [5] в эквивалентной формулировке утверждает справедливость формулы восстановления

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle f, p_{n,k} \rangle_{H^2} K_{\lambda_k}, \quad f \in H^2,$$

для каждой последовательности  $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ,  $\Lambda = (\lambda_n)$ , удовлетворяющей условию (1), где  $p_{n,k}$  – алгебраические полиномы, не зависящие от  $f$ . Тем не менее, формула восстановления Тотика не предоставляет ряда по системе значений ядра Сеге. В статье Фрикейна, Хоя и Лефевра [6] был поставлен следующий вопрос:

*Существует ли последовательность точек  $\Lambda = (\lambda_n) \subset \mathbb{D}$  такая, что  $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  является представляющей системой в пространстве  $H^2$ ?*

Напомним, что последовательность  $\{K_{\lambda_n}\}_{n=1}^\infty$  называется *представляющей системой* в пространстве  $H^2$ , если для всех  $f \in H^2$  существует последовательность коэффициентов  $(c_n) \subset \mathbb{C}$  такая, что справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n K_{\lambda_n}.$$

Здесь, в отличие от понятия базиса, не требуется единственности представляющего функцию  $f$  ряда. Положительный ответ на вопрос Фрикейна, Хоя и Лефевра получен в статье [7] с использованием понятия фрейма [8], более общего, нежели фрейм Даффина – Шеффера. Заметим, что фреймовый подход позволяет лишь утверждать существование коэффициентов  $(c_n)$  представляющего ряда, но не дает эффективного способа вычисления этих коэффициентов. В связи с этим в статье [9] были найдены условия сходимости порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма по системе подпространств пространства Харди, порожденных ядром Сеге. В настоящей работе изучаются орторекурсивные разложения по подпространствам так же, как и жадные алгоритмы, указывающие эффективный метод нахождения коэффициентов ряда.

**Орторекурсивное разложение по последовательности элементов.** Орторекурсивное разложение, определение которого предложено Т. П. Лукашенко в 1999 г., представляет собой конструктивную процедуру решения задачи представления функций рядами по элементам заданной последовательности функций (см. [10]).

Пусть  $\mathcal{H}$  – гильбертово пространство и  $\{e_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{H}$  – последовательность его элементов, которую для удобства будем считать нормированной, т. е.  $\|e_k\| = 1$ ,



$k = 1, 2, \dots$ . Для элемента  $f \in \mathcal{H}$  построим по индукции его рекурсивные коэффициенты Фурье  $\hat{f}_k$ . Предположим, что коэффициенты  $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{n-1}$  уже построены. Тогда полагаем  $R_{n-1}f = f - \sum_{k=1}^{n-1} \hat{f}_k e_k$  и  $\hat{f}_n = \langle R_{n-1}f, e_n \rangle$ . Ряд

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k e_k$$

называется *рекурсивным рядом Фурье* элемента  $f \in \mathcal{H}$ .

## 2. Орторекурсивные разложения по системе подпространств

Пусть задана система подпространств

$$H_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

гильбертова пространства  $H$ . Обозначим через  $P_k$  оператор ортогонального проектирования из  $H$  на  $H_k$  и рассмотрим операторные произведения

$$Q_k = P_k(I - P_{k-1}) \dots (I - P_1), \quad R_k = (I - P_k) \dots (I - P_1), \quad k = 1, 2, \dots$$

Для произвольного  $h \in H$  имеем  $Q_k h \in H_k$  и  $R_k h$  ортогонально  $Q_k h$ , причем  $Q_k h + R_k h = R_{k-1} h$  (полагаем, что пустое произведение  $R_0 = I$ ). Отсюда для сумм

$$S_n h = \sum_{k=1}^n Q_k h, \quad n = 1, 2, \dots,$$

по индукции получаем соотношения

$$h = S_n h + R_n h, \quad \|h\|^2 = \sum_{k=1}^n \|Q_k h\|^2 + \|R_n h\|^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Формальный ряд

$$h \sim \sum_{k=1}^{\infty} Q_k h, \quad Q_k h \in H_k,$$

называется *орторекурсивным разложением*  $h \in H$  по системе подпространств  $\{H_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Орторекурсивное разложение сходится к  $h$ , т. е.

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k h = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n h,$$

если и только если  $R_n h \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  или, что равносильно, если и только если выполняется равенство Парсеваля

$$\|h\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|Q_k h\|^2.$$

Последовательность подпространств  $\{H_k\}_{k=1}^{\infty}$  называется *системой орторекурсивного разложения* в том случае, когда для каждого  $h \in H$  орторекурсивное разложение



сходится к  $h$ . Свойства орторекурсивных разложений по подпространствам рассматривались в работах [11] и [12].

Достаточное условие системы орторекурсивного разложения получено в статьях [13, 14] и основано на идее кросс-аппроксимации, т. е. на изучении поведения величин наилучшего приближения, с одной стороны, элементов  $h \in H_k$  полиномами по некоторой специально выбранной системе элементов гильбертова пространства  $H$  и, с другой стороны, полинома по такой вспомогательной системе посредством подпространств  $H_k$ . Перейдем к точным формулировкам.

Пусть  $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$  — полная система элементов гильбертова пространства  $H$ . Рассмотрим величину наилучшего приближения порядка  $N$

$$E_N(h) = \inf_{p: \deg p < N} \|h - p\|$$

элемента  $h \in H$  полиномами  $p = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e_n$  степени  $\deg p < N$ .

Далее, во избежание путаницы будем обозначать

$$\text{dist}(p, H_k) = \inf_{h \in H_k} \|p - h\|$$

величину наилучшего приближения элемента (в частности, полинома)  $p$  посредством подпространства  $H_k$ .

Наконец, выберем строго возрастающую последовательность натуральных  $(n_k)$  и предположим, что выполняются следующие неравенства для смешанных приближений: во-первых

$$E_{n_k}(h) \leq \tau_{k,j} \|h\|, \quad h \in H_j, \quad j = 1, \dots, k-1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

и, во-вторых, для полиномов  $p$  по системе  $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$\text{dist}(p, H_k) \leq \sigma \|p\|, \quad \deg p < n_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

**Теорема 1** (достаточное условие системы орторекурсивного разложения [13, 14]). *Предположим, что последовательность натуральных  $(n_k)$  такова, что имеют место оценки (5) и (6) с постоянными  $\sigma < 1$  и*

$$\sup_k \sum_{j=1}^{k-1} \tau_{k,j}^2 < \infty.$$

*Тогда последовательность подпространств  $\{H_k\}_{k=1}^{\infty}$  является системой орторекурсивного разложения в пространстве  $H$ .*

### 3. Подпространства, порожденные ядром Сеге

Пусть  $0 < r < 1$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Рассмотрим семейство подпространств

$$\mathcal{K}_{r,n} = [K_{r,n,j}]_{j=0}^{n-1},$$

порожденных значениями ядра Сеге  $K_{\lambda}(z)$ , дискретизированного в корнях  $n$ -ой степени из единицы, перемещенных на окружность радиуса  $r$ :

$$\lambda_{r,n,j} = r e^{2\pi i j/n}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$



Другими словами, функция  $f \in \mathcal{K}_{r,n}$  имеет вид

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \zeta_j K_{r,n,j}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\zeta_j}{1 - r e^{-2\pi i j/n} z}, \quad \zeta = (\zeta_j) \in \mathbb{C}^n.$$

**Лемма 1.** Для всех  $f \in \mathcal{K}_{r,n}$  имеет место равенство

$$\|f\|_{H^2} = \left( \frac{1}{1 - r^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{\zeta}_k|^2 r^{2k} \right)^{1/2},$$

где  $\hat{\zeta}_k = \sum_{j=0}^{n-1} \zeta_j e^{-2\pi i j k/n}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , — дискретное преобразование Фурье (ДПФ) вектора  $\zeta \in \mathbb{C}^n$ .

**Доказательство.** По определению, для  $f \in \mathcal{K}_{r,n}$  имеем

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\zeta_j}{1 - r e^{-2\pi i j/n} z} = \sum_{j=0}^{n-1} \zeta_j \sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{-2\pi i j k/n} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\zeta}_k r^k z^k.$$

Учитывая, что последовательность  $(\hat{\zeta}_k)$  является периодической с периодом  $n$ , получаем

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{\zeta}_k|^2 \sum_{l=0}^{\infty} r^{2(k+ln)} = \frac{1}{1 - r^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{\zeta}_k|^2 r^{2k}. \quad \square$$

Оценим величину наилучшего приближения порядка  $N$

$$E_N(f) = \inf_p \|f - p\|_{H^2}, \quad \deg p < N,$$

функции  $f \in \mathcal{K}_{r,n}$  алгебраическими полиномами  $p(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^k$  степени  $\deg p < N$ .

**Лемма 2.** Для всех  $f \in \mathcal{K}_{r,n}$  выполняется неравенство

$$E_N(f) \leq r^{N - \langle N \rangle_n} \|f\|_{H^2}, \quad N = 1, 2, \dots,$$

где  $\langle N \rangle_n = N \bmod n$  — остаток от деления  $N$  на  $n$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $Sh(z) = zh(z)$ ,  $h \in H^2$ , оператор сдвига. Заметим, что сопряженный оператор  $S^*$  имеет вид

$$S^*h(z) = S^* \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{k-1},$$

и поэтому для любого  $N$  справедливо равенство

$$\|S^{N^*}h\|_{H^2} = \left( \sum_{k=N}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{1/2} = E_N(h).$$





Далее, нетрудно видеть, что значения ядра Сеге  $K_\lambda(z)$  являются собственными функциями оператора  $S^*$ :

$$S^*K_\lambda = \bar{\lambda}K_\lambda.$$

Отсюда следует, что

$$S^{N^*}f = S^{N^*} \sum_{j=0}^{n-1} \zeta_j K_{r,n,j} = r^N \sum_{j=0}^{n-1} \zeta_j e^{-2\pi i j N/n} K_{r,n,j} = r^N \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j K_{r,n,j},$$

где  $\eta_j = \zeta_j e^{-2\pi i j N/n}$ , т. е. вектор  $\eta$  является модуляцией  $\zeta$ . Видим, что  $S^{N^*}f$  принадлежит  $\mathcal{K}_{r,n}$  вместе с  $f$ . По лемме 1

$$\|S^{N^*}f\|_{H^2} = r^N \left( \frac{1}{1-r^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{\eta}_k|^2 r^{2k} \right)^{1/2},$$

где ДПФ от модуляции является сдвигом ДПФ:

$$\hat{\eta}_k = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j e^{-2\pi i j k/n} = \sum_{j=0}^{n-1} \zeta_j e^{-2\pi i j (N+k)/n} = \hat{\zeta}_{N+k}.$$

Ясно, что  $\hat{\zeta}_{N+k} = \hat{\zeta}_{\langle N \rangle_{n+k}}$  и

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{\eta}_k|^2 r^{2k} &= \sum_{k=0}^{n-\langle N \rangle_{n-1}} |\hat{\zeta}_{\langle N \rangle_{n+k}}|^2 r^{2k} + \sum_{k=n-\langle N \rangle_n}^{n-1} |\hat{\zeta}_{\langle N \rangle_{n+k}}|^2 r^{2k} = \\ &= \sum_{k=\langle N \rangle_n}^{n-1} |\hat{\zeta}_k|^2 r^{2(k-\langle N \rangle_n)} + \sum_{k=0}^{\langle N \rangle_{n-1}} |\hat{\zeta}_k|^2 r^{2(k+n-\langle N \rangle_n)} \leq r^{-2\langle N \rangle_n} \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{\zeta}_k|^2 r^{2k}. \end{aligned}$$

Окончательно находим

$$E_N(f) = \|S^{N^*}f\|_{H^2} \leq r^{N-\langle N \rangle_n} \|f\|_{H^2}. \quad \square$$

Теперь поменяем местами подпространства алгебраических полиномов с подпространствами  $\mathcal{K}_{r,n}$  в задаче оценки величины наилучшего приближения

$$\text{dist}(p, \mathcal{K}_{r,n}) = \inf_{f \in \mathcal{K}_{r,n}} \|p - f\|_{H^2}.$$

**Лемма 3.** Для любого алгебраического полинома  $p(z)$  степени  $\deg p < n$  имеет место равенство

$$\text{dist}(p, \mathcal{K}_{r,n}) = r^n \|p\|_{H^2}.$$

**Доказательство.** Воспользуемся хорошо известным равенством

$$\text{dist}(p, \mathcal{K}_{r,n}) = \sup_{g \in \mathcal{K}_{r,n}^\perp, \|g\|_{H^2}=1} |\langle p, g \rangle_{H^2}|.$$

Здесь принадлежность  $g \in \mathcal{K}_{r,n}^\perp$  означает, что функция  $g$  ортогональна подпространству  $\mathcal{K}_{r,n}$ . Так как это подпространство порождено значениями воспроизводящего



ядра, то  $g(\lambda_j) = 0$ , где  $\lambda_j = re^{2\pi ij/n}$ ,  $j = 0, \dots, n - 1$ . Последнее условие, в свою очередь, эквивалентно представлению  $g = hB$ , где  $h \in H^2$  и

$$B(z) = \prod_{j=0}^{n-1} b_j(z), \quad b_j(z) = \frac{\overline{\lambda_j}}{|\lambda_j|} \frac{\lambda_j - z}{1 - \overline{\lambda_j}z},$$

— произведение Бляшке. Для рассматриваемых нами точек  $\lambda_j$  имеем

$$B(z) = r^n \prod_{j=0}^{n-1} \frac{e^{2\pi ij/n} - z/r}{e^{2\pi ij/n} - rz} = r^n \frac{1 - (z/r)^n}{1 - (rz)^n} = r^n - \left( \frac{1}{r^n} - r^n \right) \sum_{k=1}^{\infty} r^{nk} z^{nk}.$$

Поэтому, если  $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ , то

$$h(z)B(z) = r^n \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k + \dots$$

(многоточие соответствует степеням  $z^k$  при  $k \geq n$ ), откуда

$$\langle p, g \rangle_{H^2} = \langle p, hB \rangle_{H^2} = r^n \langle p, h \rangle_{H^2}.$$

В итоге

$$\text{dist}(p, \mathcal{K}_{r,n}) = \sup_{\|h\|_{H^2}=1} r^n |\langle p, h \rangle_{H^2}| = r^n \|p\|_{H^2},$$

так как  $\|h\|_{H^2} = \|g\|_{H^2} = 1$  ввиду того, что  $|B(z)| = 1$  при  $|z| = 1$ . □

#### 4. Сходимость орторекурсивных разложений по системе подпространств, порожденных ядром Сеге

Рассмотрим вместо семейства  $\mathcal{K}_{r,n}$  с произвольными индексами  $r$  и  $n$  последовательность подпространств

$$\mathcal{K}_k = \mathcal{K}_{r_k, n_k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где последовательность радиусов  $(r_k)$  и последовательность натуральных  $(n_k)$  строго возрастают и удовлетворяют условию согласования

$$\frac{a}{n_k} \leq 1 - r_k \leq \frac{b}{n_k}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{7}$$

с некоторыми постоянными  $0 < a \leq b < \infty$ . Покажем, что в этом случае утверждения лемм 1, 2 и 3 допускают уточнение.

**Следствие 1.** При выполнении условия согласования (7) существуют постоянные  $0 < A \leq B < \infty$  такие, что для всех  $k \in \mathbb{N}$  и всех  $(\zeta_j) \in \mathbb{C}^{n_k}$  выполняются неравенства

$$A \left( \sum_{j=0}^{n_k-1} |\zeta_j|^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{j=0}^{n_k-1} \zeta_j \widehat{K}_{r_k, n_k, j} \right\|_{H^2} \leq B \left( \sum_{j=0}^{n_k-1} |\zeta_j|^2 \right)^{1/2}.$$



**Доказательство.** Прежде всего, заметим, что

$$\widehat{K}_{r_k, n_k, j} = (1 - r_k^2)^{1/2} K_{r_k, n_k, j},$$

и по лемме 1 мы имеем

$$\left\| \sum_{j=0}^{n_k-1} \zeta_j \widehat{K}_{r_k, n_k, j} \right\|_{H^2}^2 = \frac{1 - r_k^2}{1 - r_k^{2n_k}} \sum_{j=0}^{n_k-1} |\hat{\zeta}_j|^2 r_k^{2j}.$$

Используя тривиальные оценки  $r_k^{2n_k} < r_k^{2j} \leq 1$ , получаем

$$\frac{r_k^{2n_k} (1 - r_k^2)}{1 - r_k^{2n_k}} \sum_{j=0}^{n_k-1} |\hat{\zeta}_j|^2 \leq \left\| \sum_{j=0}^{n_k-1} \zeta_j \widehat{K}_{r_k, n_k, j} \right\|_{H^2}^2 \leq \frac{(1 - r_k^2)}{1 - r_k^{2n_k}} \sum_{j=0}^{n_k-1} |\hat{\zeta}_j|^2.$$

С учетом равенства Парсеваля для ДПФ

$$\sum_{j=0}^{n_k-1} |\hat{\zeta}_j|^2 = n_k \sum_{j=0}^{n_k-1} |\zeta_j|^2$$

будем иметь

$$\frac{r_k^{2n_k} n_k (1 - r_k^2)}{1 - r_k^{2n_k}} \sum_{j=0}^{n_k-1} |\zeta_j|^2 \leq \left\| \sum_{j=0}^{n_k-1} \zeta_j \widehat{K}_{r_k, n_k, j} \right\|_{H^2}^2 \leq \frac{n_k (1 - r_k^2)}{1 - r_k^{2n_k}} \sum_{j=0}^{n_k-1} |\zeta_j|^2.$$

На основании условия согласования (7) заключаем, что

$$a \leq n_k (1 - r_k^2) \leq 2b$$

и

$$e^{-b} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{b}{n_k}\right)^{n_k} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} r_k^{n_k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} r_k^{n_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{n_k}\right)^{n_k} = e^{-a},$$

откуда, ввиду того что  $0 < r_k^{n_k} < 1$ , находим

$$0 < \alpha \leq r_k^{n_k} \leq \beta < 1, \quad k = 1, 2, \dots \tag{8}$$

Окончательно получим

$$\frac{\alpha^2 a}{1 - \alpha^2} \sum_{j=0}^{n_k-1} |\zeta_j|^2 \leq \left\| \sum_{j=0}^{n_k-1} \zeta_j \widehat{K}_{r_k, n_k, j} \right\|_{H^2}^2 \leq \frac{2b}{1 - \beta^2} \sum_{j=0}^{n_k-1} |\zeta_j|^2. \quad \square$$

**Следствие 2.** При выполнении условия согласования (7) существует постоянная  $C$  такая, что для всех  $k \in \mathbb{N}$  и всех  $f \in \mathcal{K}_k$  справедливо неравенство

$$E_N(f) \leq C r_k^N \|f\|_{H^2}, \quad N = 1, 2, \dots$$

**Доказательство.** По лемме 2

$$E_N(f) \leq r_k^{N - \langle N \rangle_{n_k}} \|f\|_{H^2}.$$

Осталось заметить, что в силу (8)

$$r_k^{-\langle N \rangle_{n_k}} < r_k^{-n_k} \leq \alpha^{-1} = C. \quad \square$$



**Следствие 3.** При выполнении условия согласования (7) существует постоянная  $\sigma < 1$  такая, что для всех  $k \in \mathbb{N}$  и всех алгебраических полиномов  $p$  степени  $\deg p < n_k$  выполняется неравенство

$$\text{dist}(p, \mathcal{K}_k) \leq \sigma \|p\|_{H^2}.$$

**Доказательство.** По лемме 3

$$\text{dist}(p, \mathcal{K}_k) \leq r_k^{n_k} \|p\|_{H^2},$$

где в силу (8) для всех  $k$  имеем  $r_k^{n_k} \leq \beta = \sigma < 1$ . □

**Теорема 2.** Пусть последовательность натуральных  $(n_k)$  является лакунарной

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq q > 1, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и вместе со строго возрастающей последовательностью радиусов  $(r_k)$  удовлетворяет условию согласования (7).

Тогда последовательность подпространств  $\{\mathcal{K}_k = \mathcal{K}_{r_k, n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ , порожденных ядром Сеге, является системой орторекурсивного разложения в пространстве  $H^2$ .

**Доказательство.** Проверим, что выполнены условия теоремы 1. Следствие 3 показывает, что имеет место (6). Следствие 2 при  $k = 1, 2, \dots$  и  $j = 1, \dots, k - 1$  дает оценку

$$E_{n_k}(f) \leq Cr_j^{n_k}, \quad f \in \mathcal{K}_j,$$

т. е. имеет место (5) с постоянными  $\tau_{k,j} = Cr_j^{n_k}$ . Осталось убедиться в конечности величины

$$\sup_k \sum_{j=1}^{k-1} \tau_{k,j}^2 = C \sup_k \sum_{j=1}^{k-1} r_j^{2n_k} \leq C \sup_k \sum_{j=1}^{k-1} r_j^{2n_j q^{k-j}}.$$

Из условия согласования (7) получаем  $r_j \leq 1 - \frac{a}{n_j}$ , и поэтому  $r_j^{n_j} \leq e^{-a}$  при достаточно больших  $j \geq j_0$  (заведомо начиная с  $n_{j_0} > a$ ). В итоге имеем

$$\sup_k \sum_{j=1}^{k-1} \tau_{k,j}^2 \leq Cj_0 + C \sup_{k > j_0} \sum_{j=j_0}^{k-1} e^{-2aq^{k-j}} \leq Cj_0 + \sum_{j=1}^{\infty} e^{-2aq^j} < \infty. \quad \square$$

### Список литературы

1. Carleson L. On bounded analytic functions and closure problems // Arkiv för Matematik. 1952. Bd. 2, no. 2–3. S. 283–291. <https://doi.org/10.1007/BF02590884>
2. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. Москва : ИИЛ, 1963. 311 с.
3. Partington J. R. Interpolation, Identification, and Sampling. Oxford : Clarendon Press, 1997. 267 p.
4. Marcus A. W., Spielman D. A., Srivastava N. Interlacing families II: Mixed characteristic polynomials and the Kadison–Singer problem // Annals of Mathematics. 2015. Vol. 182, iss. 1. P. 327–350. <https://doi.org/10.4007/annals.2015.182.1.8>
5. Totik V. Recovery of  $H^p$ -functions // Proceedings of the American Mathematical Society. 1984. Vol. 90, iss. 4. P. 531–537. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1984-0733401-3>



6. Fricain E., Khoi L. H., Lefèvre P. Representing systems generated by reproducing kernels // *Indagationes Mathematicae*. 2018. Vol. 29, iss. 3. P. 860–872. <https://doi.org/10.1016/j.indag.2018.01.004>
7. Speransky K. S., Terekhin P. A. A representing system generated by the Szegő kernel for the Hardy space // *Indagationes Mathematicae*. 2018. Vol. 29, iss. 5. P. 1318–1325. <https://doi.org/10.1016/j.indag.2018.06.001>
8. Терехин П. А. Фреймы в банаховом пространстве // *Функциональный анализ и его приложения*. 2010. Т. 44, вып. 3. С. 50–62. <https://doi.org/10.4213/faa2994>, EDN: RLQVMH
9. Speransky K. S. On the convergence of the order-preserving weak greedy algorithm for subspaces generated by the Szegő kernel in the Hardy space // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2021. Т. 21, вып. 3. С. 336–342. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-336-342>, EDN: XUZAEN
10. Лукашенко Т. П. О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. 2001. № 1. С. 6–10. <http://mi.mathnet.ru/vmumm1436>
11. Лукашенко Т. П., Садовничий В. А. Орторекурсивные разложения по подпространствам // *Доклады Академии наук*. 2012. Т. 445, № 2. С. 135–138. EDN: OZLEWD
12. Галатенко В. В., Лукашенко Т. П., Садовничий В. А. О свойствах орторекурсивных разложений по подпространствам // *Труды МИАН*. 2014. Т. 284. С. 138–141. <https://doi.org/10.1134/S0371968514010075>, EDN: RWZVWR
13. Политов А. В. Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. 2010. № 3. С. 3–7. <https://www.mathnet.ru/rus/vmumm777>
14. Кудрявцев А. Ю. О сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам // *Математические заметки*. 2012. Т. 92, № 5. С. 707–720. <https://doi.org/10.4213/mzm8933>, EDN: PSHWUT

### References

1. Carleson L. On bounded analytic functions and closure problems. *Arkiv för Matematik*, 1952, vol. 2, iss. 2–3, pp. 283–291. <https://doi.org/10.1007/BF02590884>
2. Hoffman K. *Banach Spaces of Analytic Functions*. New Jersey, Prentice Hall Inc., 1962. 242 p. (Russ. ed.: Moscow, IIL, 1963. 311 p.).
3. Partington J. R. *Interpolation, Identification, and Sampling*. Oxford, Clarendon Press, 1997. 267 p.
4. Marcus A. W., Spielman D. A., Srivastava N. Interlacing families II: Mixed characteristic polynomials and the Kadison–Singer problem. *Annals of Mathematics*, 2015, vol. 182, iss. 1, pp. 327–350. <https://doi.org/10.4007/annals.2015.182.1.8>
5. Totik V. Recovery of  $H^p$ -functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1984, vol. 90, iss. 4, pp. 531–537. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1984-0733401-3>
6. Fricain E., Khoi L. H., Lefèvre P. Representing systems generated by reproducing kernels. *Indagationes Mathematicae*, 2018, vol. 29, iss. 3, pp. 860–872. <https://doi.org/10.1016/j.indag.2018.01.004>
7. Speransky K. S., Terekhin P. A. A representing system generated by the Szegő kernel for the Hardy space. *Indagationes Mathematicae*, 2018, vol. 29, iss. 5, pp. 1318–1325. <https://doi.org/10.1016/j.indag.2018.06.001>
8. Terekhin P. A. Frames in Banach space. *Functional Analysis and Its Applications*, 2010, vol. 44, iss. 3, pp. 199–208. <https://doi.org/10.1007/s10688-010-0024-z>
9. Speransky K. S. On the convergence of the order-preserving weak greedy algorithm for subspaces generated by the Szegő kernel in the Hardy space. *Izvestiya of Saratov*



- University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 3, pp. 336–342. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-336-342>
10. Lukashenko T. P. Properties of orthorecursive expansions in nonorthogonal systems. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*, 2001, iss. 1, pp. 6–10 (in Russian). <https://www.mathnet.ru/eng/vmumm1436>
  11. Lukashenko T. P., Sadovnichii V. A. Orthorecursive expansions with respect to subspaces. *Doklady Mathematics*, 2012, vol. 86, iss. 1, pp. 472–475. <https://doi.org/10.1134/S1064562412040096>
  12. Galatenko V. V., Lukashenko T. P., Sadovnichii V. A. On the properties of orthorecursive expansions with respect to subspaces. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2014, vol. 284, pp. 129–132. <https://doi.org/10.1134/S0081543814010076>
  13. Politov A. V. Orthorecursive expansions in Hilbert spaces. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*, 2010, iss. 3, pp. 3–7 (in Russian). <https://www.mathnet.ru/eng/vmumm777>
  14. Kudryavtsev A. Yu. On the convergence of orthorecursive expansions in nonorthogonal wavelets. *Mathematical Notes*, 2012, vol. 92, iss. 5, pp. 643–656. <https://doi.org/10.1134/S0001434612110077>

Поступила в редакцию / Received 24.07.2023

Принята к публикации / Accepted 28.08.2023

Опубликована / Published 30.11.2023

## МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 456–471  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 456–471

[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru)

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-456-471>

EDN: POZOJY

Научная статья  
УДК 539.3

### Идентификация двумерных полей предварительных напряжений в неоднородных пластинах

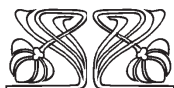
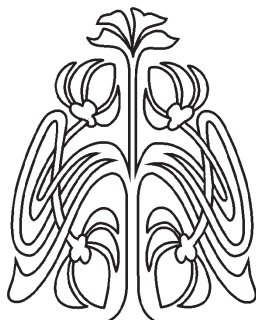
И. В. Богачев<sup>✉</sup>, Р. Д. Недин

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

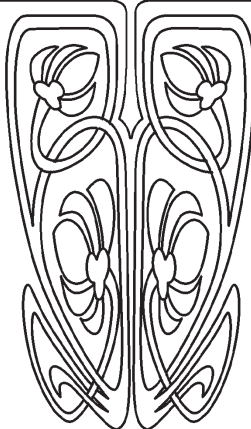
**Богачев Иван Викторович**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, [bogachev89@yandex.ru](mailto:bogachev89@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0002-4725-5102>, AuthorID: 879750

**Недин Ростислав Дмитриевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории упругости, [rdn90@bk.ru](mailto:rdn90@bk.ru), <https://orcid.org/0000-0003-4366-9591>, AuthorID: 805678

**Аннотация.** На основе модели планарных колебаний сплошных и имеющих отверстия или включения неоднородных предварительно напряженных пластин рассмотрены новые обратные задачи идентификации компонент тензора предварительных напряжений (ПН), являющихся функциями двух координат, при анализе акустического отклика в процессе зондирования. ПН задавались как результат решения вспомогательных задач о статическом нагружении пластин некоторой начальной нагрузкой. Для решения основной и вспомогательных задач расчета функций смещения пластин разработана конечно-элементная (КЭ) схема на основе выведенных соответствующих слабых постановок задач, реализованная в виде программных комплексов в КЭ-пакете FreeFem++. Были рассмотрены защемленные по одной грани прямоугольные пластины, как сплошные, так и имеющие отверстие или жесткую вставку. Сформулированы обратные задачи идентификации трех функций ПН, зависящих от двух координат, на основе дополнительной информации об акустическом отклике на нез защемленных гранях пластин в результате рассмотрения нескольких наборов зондирующих нагрузок на нескольких



Научный  
отдел





частотах. Ввиду нелинейности обратных задач для их решения был разработан итерационный подход, сочетающий на каждой итерации решение прямых задач для текущих приближений искомых функций и определение поправок к ним из построенного операторного уравнения. Для решения операторного уравнения разработан проекционный метод, позволяющий представить поправки в виде разложений по заданным системам функций и свести решение к исследованию плохо обусловленных СЛАУ относительно наборов коэффициентов разложений с помощью метода А. Н. Тихонова. Приведены результаты вычислительных экспериментов по одновременной идентификации двумерных полей ПН, соответствующих различным видам начальных воздействий на рассмотренные пластины.

**Ключевые слова:** предварительные напряжения, упругие пластины, неоднородность, включения, двумерные обратные задачи, акустический метод

**Благодарности:** Авторы благодарят профессора А. О. Ватульяна за значительный вклад в развитие методов решения обратных задач, которые применяются в данной работе.

Исследование выполнено в Южном федеральном университете при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-71-10045, <https://rscf.ru/project/18-71-10045/>).

**Для цитирования:** Богачев И. В., Недин Р. Д. Идентификация двумерных полей предварительных напряжений в неоднородных пластинах // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 456–471. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-456-471>, EDN: POZOJY

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Identification of two-dimensional prestress fields in inhomogeneous plates

I. V. Bogachev<sup>✉</sup>, R. D. Nedin

I. I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University, 8A Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

**Ivan V. Bogachev**, bogachev89@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4725-5102>, AuthorID: 879750

**Rostislav D. Nedin**, rdn90@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4366-9591>, AuthorID: 805678

**Abstract.** Based on the model of in-plane oscillations of inhomogeneous prestressed plates, the new inverse problems of identifying the components of the prestress tensor via acoustic response probing are considered for the plates with and without holes and inclusions; the prestress components are assumed to be functions of two coordinates. Prestresses were set as a result of solving auxiliary problems of static loading of plates by some initial mechanical load. To solve the main and auxiliary problems of calculating the plates' displacement functions, a finite element (FE) scheme was developed based on the derived corresponding weak problem statements, implemented in the form of software systems in the FE package FreeFem++. Rectangular plates clamped along one face, both solid and having a hole or a rigid insert, were considered. Inverse problems of identification of three prestress functions depending on two coordinates are formulated on the basis of additional data about the acoustic response on the non-clamped edges of the plates as a result of considering several sets of probing loads at several frequencies. In view of the nonlinearity of the inverse problems under study, an iterative approach was developed to solve them, which combines solving the direct problems for current approximations of the desired functions and the determination of the corresponding corrections from the operator equation built





at each iteration. To solve the operator equation, a projection method has been employed that allows one to present the corrections in the form of expansions in terms of some smooth given functions and reduce the problem solution to the study of ill-conditioned SLAEs with respect to sets of the expansion coefficients using the A. N. Tikhonov method. The results of computational experiments on the simultaneous identification of two-dimensional prestress fields corresponding to various types of initial actions on the considered plates are discussed.

**Keywords:** residual stress state, elastic plates, inhomogeneity, inclusions, two-dimensional inverse problems, acoustic method

**Acknowledgements:** The authors thank Professor A. O. Vatulyan for his significant contribution to the development of methods for solving inverse problems, which are used in this paper.

The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 18-71-10045, <https://rscf.ru/project/18-71-10045/>), in the Southern Federal University.

**For citation:** Bogachev I. V., Nedin R. D. Identification of two-dimensional prestress fields in inhomogeneous plates. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 456–471 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-456-471>, EDN: POZOJY

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Поля предварительных (остаточных, внутренних) напряжений (ПН) [1] являются характерным следствием многих технологических процессов, применяемых при изготовлении объектов и конструкций из новых материалов со сложными неоднородными физико-механическими свойствами, таких как функционально-градиентные материалы (ФГМ). При производстве ФГМ часто применяется термическая обработка [2], в частности наплавка, спекание, нагартовка и другие, затем в процессе остывания полученных образцов в них могут сохраняться остаточные напряжения. Наличие ПН в образцах должно учитываться в производственных процессах, так как они зачастую оказывают существенное влияние на эксплуатационные характеристики изготовленных узлов и деталей. Также ПН могут присутствовать в деталях, используемых в промышленных конструкциях, имеющих технологические вырезы и отверстия [3]. В их окрестностях возникает значительная концентрация остаточных напряжений, из-за которой могут появляться трещины и деформированные зоны, что повлечет за собой потерю работоспособности деталей. В связи с этим весьма актуальными являются построение адекватных моделей объектов и конструкций из новых материалов, позволяющих учесть их неоднородность, форму и наличие предварительно напряженного состояния (ПНС), а также разработка эффективных неразрушающих методик идентификации уровня и распределения ПН в них, которые могут быть применимы как в процессе изготовления, так и при эксплуатации.

Разработка методов измерения ПН является достаточно востребованной тематикой, ей посвящено большое количество исследований, при этом интерес к ней значительно возрос в последнее время (см., например, обзорные работы [4, 5]). Существенную практическую значимость имеет изучение задач по определению ПН, возникающих в процессе сварочных операций. Статья [6] посвящена построению и сравнению с экспериментальными данными трехмерной модели «деформация-ползучесть» с учетом распределения ПН в сварных швах жаропрочных сплавов на основе никеля, используемых в разработке компонентов авиадвигателей. В работе [7] метод глухих отверстий (the blind-hole method) использовался для проверки распределения оста-



точного напряжения в сварном шве кольцевой конструкции. Сравнение результатов испытаний с расчетами методом конечных элементов позволило сформулировать рекомендации по оптимальному режиму сварки кольцевых конструкций. В [8] представлена методика измерения растягивающих остаточных напряжений, возникших на границах соединения материалов в двух образцах композитных трехслойных пластин при использовании газовой вольфрамовой дуговой сварки.

Также важное значение имеет создание схем идентификации ПН на этапе проектирования и при их текущем мониторинге. Статья [9] посвящена построению модели прогнозирования ПН при экспериментальном исследовании авиационных тонкостенных рам, получаемых фрезерованием из алюминиевых пластин, в которых из-за низкой жесткости существенное влияние на деформацию оказывают остаточные напряжения. Построение неразрушающего подхода к определению ПН в тонких пластинах представлено в работе [10]. Подход основан на параметризации ПНС с помощью функции напряжений Эри, что позволило определять эти параметры из задачи нелинейной оптимизации.

Стоит отметить, что ряд смежных задач идентификации неоднородных полей ПНС в пластинах был изучен ранее. В статье [11] исследованы обратные задачи идентификации полей ПН при анализе изгибных колебаний пластин в рамках гипотез Тимошенко с помощью нескольких методик, основанных на акустическом подходе. В работе [12] рассмотрена задача в аналогичной постановке для перфорированной двухфазной пластины из ФГМ. Модели круглых сплошной и кольцевой неоднородных по радиальной координате предварительно напряженных пластин Тимошенко разработаны в статье [13]. Рассмотрены одномерные обратные задачи идентификации ПН, решение которых производится с помощью проекционного подхода, позволяющего определять искомые ПН в заданных классах функций.

Основной целью данной работы является использование ранее разработанных моделей и подходов для построения эффективной методики идентификации реальных двумерных законов изменения полей ПНС, возникающих в сплошных, а также имеющих отверстия и включения пластинах, при исследовании акустического отклика с использованием нескольких режимов зондирования. При этом восстанавливаемые поля ПН должны являться решением некоторых вспомогательных задач о неизвестном в рамках обратной задачи начальном воздействии на пластины.

## 1. Общая постановка задачи

Рассмотрим установившиеся колебания неоднородной предварительно напряженной изотропной тонкой пластины толщины  $h$ , занимающей область  $S \times [-h/2, h/2]$  ( $S$  — область срединного сечения), в которой могут иметься отверстия либо включения. Будем рассматривать случай плоского напряженного состояния, когда на площадках, перпендикулярных оси  $x_3$ , отсутствуют напряжения: отличными от нуля являются две компоненты вектора перемещений:  $u_1(x_1, x_2)$  и  $u_2(x_1, x_2)$ . Линеаризованная постановка задачи в таком случае имеет вид [14, 15]:

$$\begin{aligned} T_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i &= 0, \\ T_{ij} &= \sigma_{ij} + u_{i,m} \sigma_{mj}^0, \\ \sigma_{ij} &= \lambda^* \delta_{ij} u_{m,m} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}), \\ u_i|_{l_u} &= 0, \quad T_{ij} n_j|_{l_\sigma} = P_i, \quad i, j, m = 1, 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $T_{ij}$  — компоненты несимметричного тензора напряжений Пиолы,  $\sigma_{ij}$  — компоненты классического тензора напряжений,  $\sigma_{mj}^0$  — компоненты тензора ПН,  $\omega$  —

частота установившихся колебаний,  $\lambda^* = 2\lambda\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}$  — параметр Ламе плоского напряженно-деформированного состояния, который, как и параметры Ламе  $\lambda(x_1, x_2)$ ,  $\mu(x_1, x_2)$ , и плотность  $\rho(x_1, x_2)$ , является функцией двух координат. Три компоненты симметричного тензора ПН  $\sigma_{11}^0(x_1, x_2)$ ,  $\sigma_{12}^0(x_1, x_2)$ ,  $\sigma_{22}^0(x_1, x_2)$ , удовлетворяющие уравнениям равновесия  $\sigma_{ij,j}^0 = 0$ , также зависят от двух координат. При записи постановки (1) и далее для компактности представления сумм с повторяющимися индексами использовано соглашение Эйнштейна; для записи производных принято обозначение  $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$ .

Применяемая модель позволяет описывать неоднородные материалы, в том числе ФГМ, используя представление характеристик пластин (параметров Ламе и плотности) в виде функциональных зависимостей от координат.

Будем считать, что на части границы  $l_u \times [-h/2, h/2]$  пластина жестко закреплена, на другой части границы  $l_\sigma \times [-h/2, h/2]$  к ней приложена механическая нагрузка, задаваемая компонентами  $P_i$ .

Запишем слабую постановку [14] задачи (1), которая получается на основе проектирования уравнений движения на поле возможных перемещений  $v_i$ , удовлетворяющих главным граничным условиям  $v_i|_{l_u} = 0$ :

$$\begin{aligned} & \int_S (\sigma_{11}^0 u_{i,1} v_{i,1} + \sigma_{12}^0 (u_{i,1} v_{i,2} + u_{i,2} v_{i,1}) + \sigma_{22}^0 u_{i,2} v_{i,2}) dS + \\ & + \int_S (\lambda u_{i,i} v_{j,j} + 2\mu \varepsilon_{ij}^u \varepsilon_{ij}^v - \omega^2 \rho u_i v_i) dS - \int_{l_\sigma} P_i v_i dl = 0, \quad (2) \\ & \varepsilon_{ij}^u \varepsilon_{ij}^v = u_{1,1} v_{1,1} + \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) (v_{1,2} + v_{2,1}) + u_{2,2} v_{2,2}. \end{aligned}$$

Слабая постановка задачи в виде (2) позволяет построить эффективные конечно-элементные (КЭ) схемы расчета колебаний пластин.

В качестве модельных объектов исследования далее рассматриваются прямоугольные пластины, как сплошные, так и имеющие круглое отверстие, либо круговое включение (вставку), серединные сечения которых ограничены областью  $\{x_1 \in [0, l], x_2 \in [-a/2, a/2]\}$  (рис. 1). Одна из граней  $x_1 = 0$  каждой из пластин считается жестко закрепленной, колебания вызываются приложенными к другим граням нормальными и касательными нагрузками. В рамках разработанной модели могут быть рассмотрены пластины другой формы, а также имеющие большее число отверстий либо включений или их комбинации.

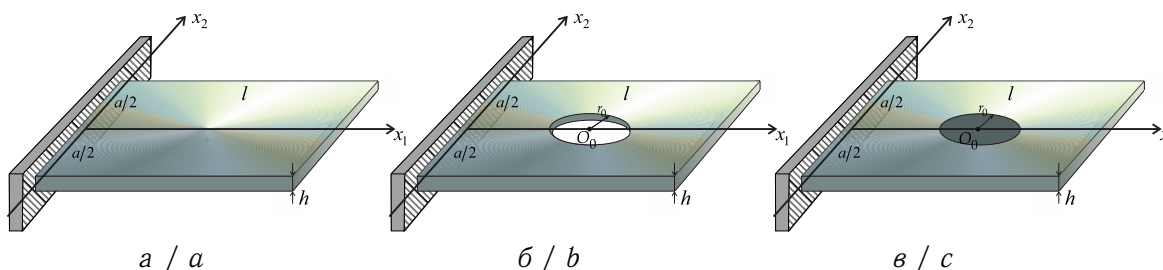


Рис. 1. Общий вид рассматриваемых пластин: а — сплошная; б — с круглым отверстием; в — с круговым включением (вставкой)

Fig. 1. General view of the considered plates: a — solid; b — with round hole; c — with circular inclusion (insert)



## 2. Вспомогательные задачи расчета полей ПН

В данной работе основной задачей является идентификация реалистичных законов изменения полей ПН, возникающих в сплошных, а также имеющих отверстия и включения пластинах. В таком случае двумерные функции ПН могут задаваться как результат решения вспомогательных задач о приложении к границам защемленных пластин некоторой начальной статической нагрузки  $P_i^0$ . В такой постановке равновесие пластин описывается уравнениями

$$\sigma_{11,1}^0 + \sigma_{12,2}^0 = 0, \quad \sigma_{21,1}^0 + \sigma_{22,2}^0 = 0. \quad (3)$$

Слабую постановку задачи в таком случае можно записать в виде

$$\int_S \left( \lambda u_{i,i}^0 v_{j,j}^0 + 2\mu \left( u_{1,1}^0 v_{1,1}^0 + \frac{1}{2} (u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0) (v_{1,2}^0 + v_{2,1}^0) + u_{2,2}^0 v_{2,2}^0 \right) \right) dS - \int_{l_\sigma} P_i^0 v_i^0 dl = 0. \quad (4)$$

Здесь  $v_i^0$  — начальные пробные функции, удовлетворяющие главным начальным граничным условиям.

Тогда из решения задачи (4) определяются функции начального смещения  $u_i^0$ , затем по формуле обобщенного закона Гука для них вычисляются функции напряжений  $\sigma_{ij}^0 = \lambda^* \delta_{ij} u_{m,m}^0 + \mu (u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0)$ , использующиеся в качестве законов изменения полей ПН в постановках задачи (1) и (2).

Для решения записанных в слабых постановках основной (2) и вспомогательной (4) задач разработаны КЭ схемы решения, реализованные в пакете FreeFem++ [15]. При расчетах была использована КЭ сетка с квадратичной аппроксимацией с разбиением не менее  $100 \times 60$ . При этом для пластин с отверстиями и включениями в этих областях использовалось локальное сгущение сетки для увеличения точности расчетов. Начальная нагрузка выбиралась таким образом, чтобы значения полученных полей ПН относительно модуля Юнга  $E$  рассматриваемого материала пластин лежали в диапазоне изменения  $\max |\sigma_{ij}^0/E| = 10^{-6} \div 10^{-3}$ , соответствующем наиболее часто встречающимся ПН на практике.

Ниже представлены результаты нескольких экспериментов по расчету полей ПН, возникающих в случае приложения разных видов начальных нагрузок, с помощью разработанной КЭ-схемы решения. Размеры рассматриваемых пластин:  $l = 1.3$  м,  $a = 0.5$  м, радиус отверстия или вставки составляет  $r_0 = 0.2$  м. Основной материал пластин — сталь, имеющая характеристики  $E = 198$  ГПа,  $\nu = 0.28$ ,  $\rho = 7.88$  т/м<sup>3</sup>. Рассматривался случай вставки из жесткого материала — кубического нитрида бора, с характеристиками  $E = 706$  ГПа,  $\nu = 0.26$ ,  $\rho = 3.44$  т/м<sup>3</sup>. Рассмотренные виды предварительных статических нагружений для сплошных и имеющих отверстие и включение пластин, вызывающих ПН, изображены на рис. 2.

**Эксперимент 1.** Рассмотрено поле ПН для сплошной пластины, вызванное начальной растягивающей вдоль оси  $x_1$  нагрузкой, изображенной на рис. 2, а. На рис. 3 представлены соответствующие трехмерные графики рассчитанных с помощью разработанной КЭ-схемы компонент  $\sigma_{11}^0$ ,  $\sigma_{12}^0$ ,  $\sigma_{22}^0$ , измеряемых в Па. Здесь и далее трехмерные изображения повернуты таким образом, чтобы передать наиболее характерные части исследуемых функций.

Заметим, что в этом и следующем экспериментах компонента  $\sigma_{22}^0(x_1, x_2)$  близка к нулю везде, кроме окрестностей областей жесткой заделки и нагружения (это связано с видом прикладываемых начальных нагрузок).

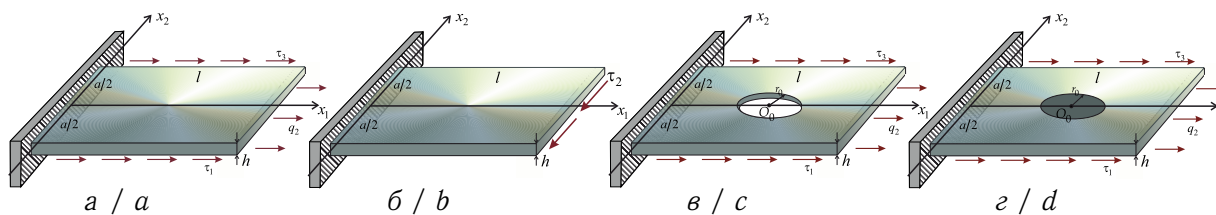


Рис. 2. Рассмотренные виды статических нагрузок, вызывающих поля ПН, в экспериментах по расчету ПН в сплошных (а, б) и имеющих отверстие (в) или включение (г) пластинах  
 Fig. 2. Considered types of static loads that cause PS fields in experiments on calculating ST in solid (a, b) and having a hole (c) or an inclusion (d) plates

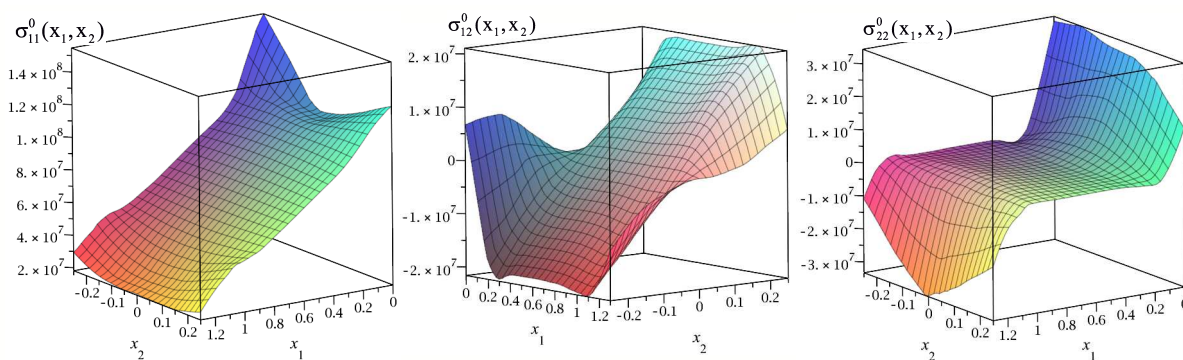


Рис. 3. Рассчитанные поля ПН в сплошной пластине, вызванные растягивающей нагрузкой (цвет онлайн)

Fig. 3. Calculated PS fields in a solid plate caused by a tensile load (color online)

**Эксперимент 2.** Рассмотрено поле ПН для сплошной пластины, вызванное начальной сдвиговой нагрузкой, изображенной на рис. 2, б. Трехмерные графики рассчитанных компонент  $\sigma_{11}^0$ ,  $\sigma_{12}^0$ ,  $\sigma_{22}^0$  представлены на рис. 4.

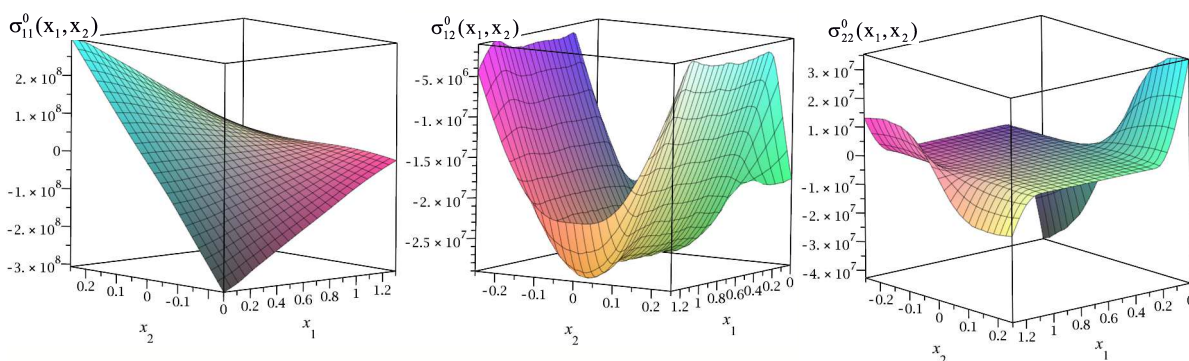


Рис. 4. Рассчитанные поля ПН в сплошной пластине, вызванные сдвиговой нагрузкой (цвет онлайн)

Fig. 4. Calculated PS fields in a solid plate caused by shear load (color online)

**Эксперимент 3.** Рассмотрено поле ПН для пластины с отверстием, вызванное начальной растягивающей нагрузкой, изображенной на рис. 2, в. Трехмерные графики рассчитанных компонент  $\sigma_{11}^0$ ,  $\sigma_{12}^0$ ,  $\sigma_{22}^0$  представлены на рис. 5.

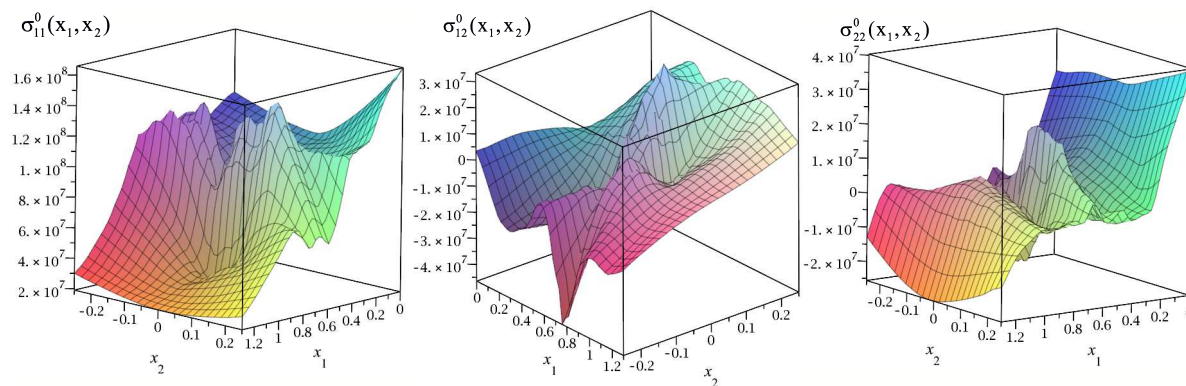


Рис. 5. Рассчитанные поля ПН в пластине с отверстием, вызванные растягивающей нагрузкой (цвет онлайн)

Fig. 5. Calculated PS fields in a plate with a hole caused by tensile load (color online)

**Эксперимент 4.** Рассмотрено поле ПН для пластины с жесткой вставкой, вызванное начальной растягивающей нагрузкой, изображенной на рис. 2, *г*. Трехмерные графики рассчитанных компонент  $\sigma_{11}^0$ ,  $\sigma_{12}^0$ ,  $\sigma_{22}^0$  представлены на рис. 6.

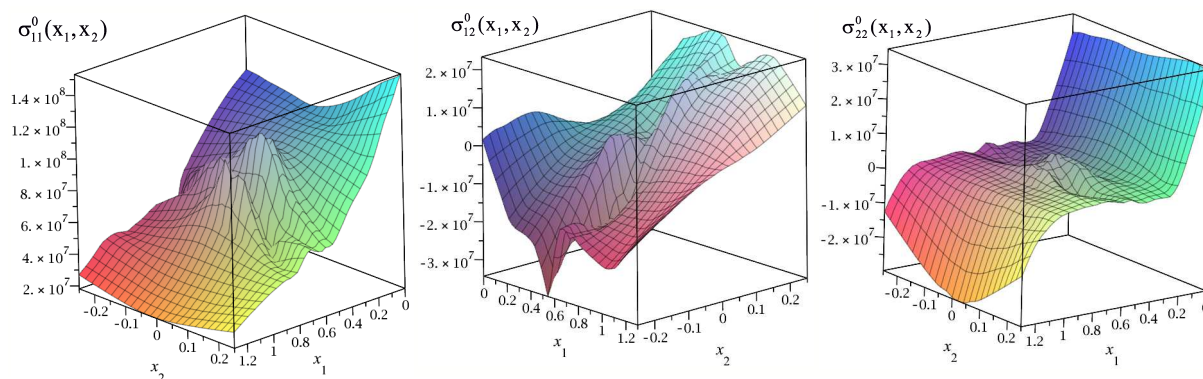


Рис. 6. Рассчитанные поля ПН в пластине с жесткой вставкой, вызванные растягивающей нагрузкой (цвет онлайн)

Fig. 6. Calculated PS fields in a plate with a rigid insert caused by a tensile load (color online)

**Замечание.** На рис. 5 и 6 видно, что в окрестности отверстия и вставки имеются локальные возмущения функций ПН (концентраторы ПН), однако общий характер этих функций, а также уровни ПН соответствуют функциям на рис. 5 для начального растяжения сплошной пластины.

### 3. Обратные задачи идентификации рассчитанных двумерных полей ПН

На практике, при проведении мониторинга состояния пластин, функции  $\sigma_{ij}^0(x_1, x_2)$ , описывающие распределение ПН, возникших в результате некоторого начального воздействия на пластину (см., например, эксперименты из раздела 2), являются неизвестными, и актуальной проблемой становится решение обратных задач (ОЗ) их идентификации [16]. Для этого применяются различные методики, в частности неразрушающий акустический подход, в рамках которого в качестве дополнительной



информации для ОЗ используется акустический отклик, измеренный в некоторых точках объекта в процессе проведения экспериментов по зондированию в различных частотных диапазонах. На его основе *обратные задачи* для рассматриваемых пластин можно сформулировать следующим образом.

Определить три функции-компоненты тензора ПН  $\sigma_{11}^0(x_1, x_2)$ ,  $\sigma_{12}^0(x_1, x_2)$ ,  $\sigma_{22}^0(x_1, x_2)$ , входящие в состав слабой постановки (2), из экспериментов по зондированию пластин под действием наборов нагрузок вида

$$(T_{11}n_1 + T_{12}n_2)|_{l_\sigma} = P_1, \quad (T_{21}n_1 + T_{22}n_2)|_{l_\sigma} = P_2, \quad (5)$$

с использованием полученной при их проведении дополнительной информации об измеренных на части границы амплитудах перемещений вида

$$u_i|_{l_\sigma} = f_i(\omega), \quad i = 1, 2, \quad \omega \in [\omega_-, \omega_+]. \quad (6)$$

Другие механические параметры пластин при этом считались известными.

Заметим, что сформулированная ОЗ об отыскании поля ПН представляет собой нелинейную коэффициентную обратную задачу, решение которой требует использования специальных методов. Для решения ОЗ в данной работе построен итерационный процесс, подобный разработанным ранее для решения других ОЗ [11, 17, 18], на каждом шаге которого определяются приближения искомым функциям ПН, его схема представлена ниже.

**Этап 0.** Для искомым функций  $\sigma_{ij}^0(x_1, x_2)$  выбираются начальные приближения  $\sigma_{ij}^{0(0)}(x_1, x_2)$  на основе априорной информации об их ограниченности. В качестве начальных приближений могут также выбираться нулевые значения ПН, как это сделано в данной работе.

**Этап 1.** Для текущих приближений ПН с помощью построенной КЭ-схемы рассчитываются поля перемещений  $u_i^{(n)}(x_1, x_2)$ . Здесь  $n$  — номер текущей итерации.

**Этап 2.** Поправки  $\delta\sigma_{ij}^0(x_1, x_2)$  определяются из операторного соотношения, построенного на основе полученного ранее в работе [14] соотношения в общем виде, с использованием дополнительной информации ОЗ (6):

$$\int_S \delta\sigma_{kj}^0 u_{i,j}^{(n)} u_{i,k}^{(n)} dS + \int_{l_\sigma} P_i (f_i - u_i^{(n)}) dl = 0, \quad \omega \in [\omega_-, \omega_+]. \quad (7)$$

Оно представляет собой интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, решение которого является некорректной задачей и требует использования регуляризационных методов [19].

**Этап 3.** Поправки, найденные на втором этапе, используются для вычисления следующих приближений искомым функциям ПН:

$$\sigma_{ij}^{0(n)} = \sigma_{ij}^{0(n-1)} + \delta\sigma_{ij}^0. \quad (8)$$

Затем на третьем этапе проверяются условия выхода из итерационного процесса: либо величина функционала невязки станет меньше некоторого заданного малого числа  $\varepsilon_0$ , либо число итераций превысит заданное значение  $N$ , либо величина поправок станет несущественной. Повторение этапов 1–3 продолжается до выполнения одного из этих условий.

В данной работе также произведена доработка второго этапа описанного выше итерационного процесса с помощью использования основ проекционных подходов,



предложенных ранее в работах [11, 20], позволяющих определять поправки к искомым функциям ПН в заданных классах функций. В рамках проекционного подхода функции поправок были представлены в виде разложений по некоторым системам линейно независимых базисных функций вида

$$\delta\sigma_{ij}^0(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^M C_{ij}^m \psi_m(x_1, x_2). \quad (9)$$

Далее подставим разложения (9) в соотношение (7):

$$\sum_{m=1}^M \left( C_{kj}^m \int_S \psi_m u_{i,j}^{(n)} u_{i,k}^{(n)} dS \right) + \int_{l_\sigma} P_i (f_i - u_i^{(n)}) dl_\sigma = 0. \quad (10)$$

Затем, выбирая набор из  $K_\omega$  частот  $\omega_k$ , на которых производится зондирование, с использованием  $K_{\text{exp}}$  видов зондирующих нагрузок будем проводить  $K = K_\omega \times K_{\text{exp}}$  испытаний. Для каждого  $t$ -го испытания, соответственно, обозначим  $P_i^t$  — компоненты прикладываемой при его проведении нагрузки,  $f_i^t$  — дополнительную информацию ОЗ,  $U_i^t$  — рассчитанные компоненты поля перемещений  $u_i^{(n)}(x_1, x_2)$  для текущей итерации. Тогда данный этап итерационного процесса сводится к решению системы  $K$  линейных алгебраических уравнений относительно  $3M$  коэффициентов  $C_{kj}^m$  разложения (9), которую можно записать в виде

$$\sum_{m=1}^M J_{kj}^{tm} C_{kj}^m = F^t, \quad t = \overline{1, K}, \quad (11)$$

$$J_{kj}^{tm} = \int_S \psi_m U_{i,j}^t U_{i,k}^t dS, \quad F^t = \int_{l_\sigma} P_i^t (f_i^t - U_i^t) dl_\sigma.$$

Полученная СЛАУ (11) решается с помощью метода А. Н. Тихонова [19], затем по формулам (9) определяются искомые поправки к функциям ПН.

**Замечание.** Количество  $K$  уравнений СЛАУ (10), определяемое количеством частот, на которых производится зондирование, и количеством экспериментов по зондированию, вообще говоря, может не быть равно числу  $3M$  неизвестных коэффициентов разложения  $C_{ij}^m$ . В таком случае СЛАУ (11) является прямоугольной, и для ее решения метод Тихонова также применим. При этом, если известно, что поле ПН самоуравновешено, то в силу взаимосвязи компонент ПН друг с другом, которые в таком случае можно выразить через одну функцию напряжений Эри [17], число неизвестных коэффициентов можно сократить.

Также стоит учитывать, что поскольку в рассматриваемой постановке ОЗ необходимо определять одновременно три функции-компоненты тензора ПН, число экспериментов по зондированию (отличающихся видом нагружения) должно быть не меньше трех.

#### 4. Вычислительные эксперименты по решению ОЗ

На основе предложенного в разделе 4 итерационного процесса был проведен ряд вычислительных экспериментов по идентификации функций двумерного распределения трех компонент ПН в рассмотренных пластинах. При этом искомые функции ПН в экспериментах являлись решением соответствующих вспомогательных задач о





действии начальных нагрузок на пластины, результаты для которых представлены в разделе 2.

Для зондирования в каждом примере было использовано по три вида нагрузок. Для всех рассмотренных пластин применялись серии экспериментов по сжатию вдоль оси  $x_2$ , растяжению вдоль оси  $x_1$  и приложению сдвиговой нагрузки (касательных нагрузок вдоль всех незащемленных граней). В каждом эксперименте зондирование проводилось на четырех выбранных частотах, расположенных в окрестностях первых четырех резонансных частот или вблизи какой-либо одной из них.

В проекционном методе, применяемом на 2-м этапе каждого шага итерационного процесса, число базисных функций в каждом разложении (9) было выбрано равным  $M = 6$ , при этом в качестве них были выбраны следующие полиномы:  $\psi_1 = 1$ ,  $\psi_2 = x_1$ ,  $\psi_3 = x_2$ ,  $\psi_4 = x_1x_2$ ,  $\psi_5 = x_1^2$ ,  $\psi_6 = x_2^2$ . Разложение (9) в таком случае приняло вид

$$\delta\sigma_{ij}^0(x_1, x_2) = C_{ij}^1 + C_{ij}^2x_1 + C_{ij}^3x_2 + C_{ij}^4x_1x_2 + C_{ij}^5x_1^2 + C_{ij}^6x_2^2. \quad (12)$$

В СЛАУ (11) при этом входит  $3M = 18$  неизвестных коэффициентов, и она состоит из  $K = K_\omega \times K_{\text{exp}} = 4 \times 3 = 12$  уравнений. Как уже отмечалось выше, в таком случае она являлась прямоугольной и плохо обусловленной, и для ее решения применялся регуляризационный метод Тихонова.

Во всех экспериментах в качестве начального приближения было выбрано нулевое поле ПН  $\sigma_{ij}^{0(0)}(x_1, x_2) = 0$ , что является достаточно удобным с практической точки зрения и позволяет не проводить дополнительные исследования перед основной итерационной процедурой идентификации.

Для каждого эксперимента результаты идентификации представлены в виде трехмерных изображений, на которых график точного решения отображается в виде сплошной поверхности с градиентной заливкой, начальное приближение — в виде синих кубиков, восстановленное решение — в виде черных точек. Также для каждого результата восстановления рассчитаны средние по площади пластин значения погрешности, вычисляемые по формуле

$$\bar{\gamma}_{ij} = \frac{1}{S} \int_S \frac{|\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}^{0(n)}|}{\max_{x_1, x_2} |\sigma_{ij}^0|} dx_1 dx_2 \cdot 100\%, \quad (13)$$

позволяющие оценить погрешность реконструкции без учета локальных особенностей восстанавливаемых функций в области заделки, отверстия или вставки. В формуле (13)  $\sigma_{ij}^0$  — точные значения функций ПН,  $\sigma_{ij}^{0(n)}$  — восстановленные на  $n$ -й итерации.

**Эксперимент 1.** Сплошная пластина. Восстановление поля ПН, вызванного растягивающей в направлении  $x_1$  начальной нагрузкой (эксперимент 1 из раздела 2). Были выбраны частоты  $\omega_1 = 190$ ,  $\omega_2 = 990$ ,  $\omega_3 = 1900$ ,  $\omega_4 = 2500$  (Гц) в окрестностях первых четырех резонансов. Для восстановления потребовалось 10 итераций. Результаты представлены на рис. 7. Средние погрешности, вычисленные по формуле (13), составили  $\bar{\gamma}_{11} = 3.48\%$ ,  $\bar{\gamma}_{12} = 8.81\%$ ,  $\bar{\gamma}_{22} = 7.29\%$ .

Результаты эксперимента показывают, что функции  $\sigma_{11}^0$  и  $\sigma_{12}^0$ , являющиеся существенно неоднородными, восстанавливаются достаточно точно. Функция  $\sigma_{22}^0$ , близкая к нулю из-за вида начальной нагрузки (что уже отмечалось в разделе 2), восстанавливается также достаточно хорошо везде, кроме области жесткой заделки. Это связано с тем, что в данной области ядра операторного уравнения (7) могут обращаться в нуль. Однако для решения практических задач идентификации подобный результат

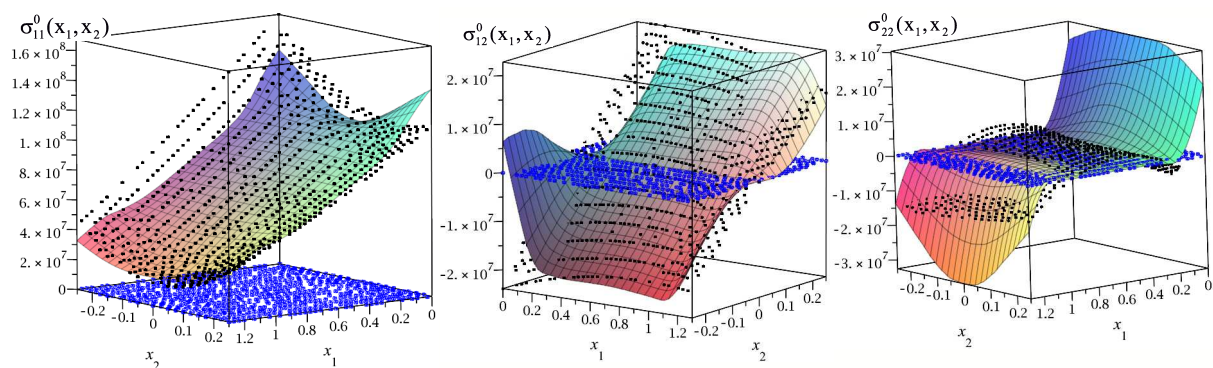


Рис. 7. Результат идентификации рассчитанных полей ПН в сплошной пластине, вызванных растягивающей начальной нагрузкой (цвет онлайн)

Fig. 7. The result of identification of the calculated PS fields in a solid plate caused by a tensile initial load (color online)

(качественное восстановление уровня и характера искомой функции вне области заделки) является вполне удовлетворительным. Заметим, что данное явление для  $\sigma_{22}^0$  проявлялось и в последующих экспериментах.

**Эксперимент 2.** Сплошная пластина. Восстановление поля ПН, вызванного сдвиговой начальной нагрузкой (эксперимент 2 из раздела 2). Частоты зондирования:  $\omega_1 = 230$ ,  $\omega_2 = 980$ ,  $\omega_3 = 2040$ ,  $\omega_4 = 2800$  (Гц). Для восстановления потребовалось 12 итераций. Результаты представлены на рис. 8. Средние погрешности:  $\bar{\gamma}_{11} = 1.05\%$ ,  $\bar{\gamma}_{12} = 2.02\%$ ,  $\bar{\gamma}_{22} = 1.81\%$ .

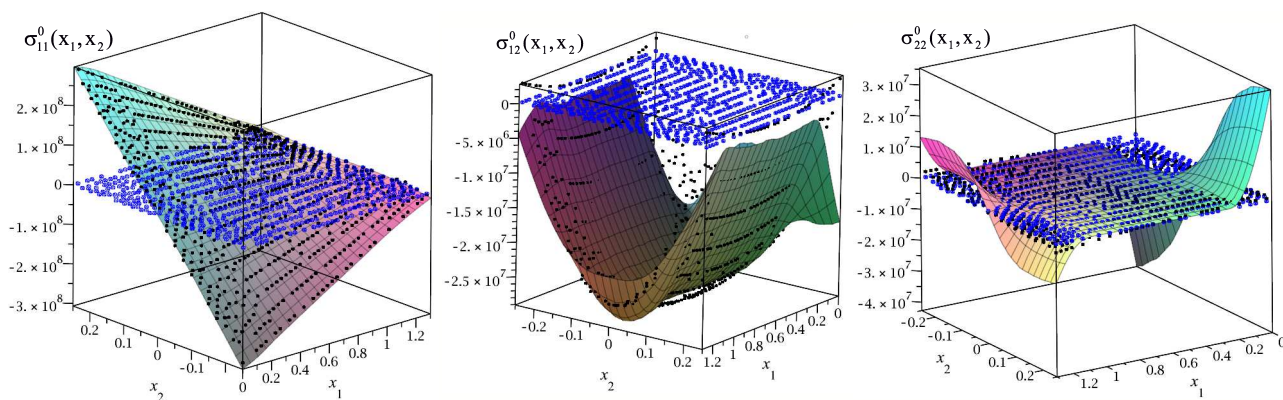


Рис. 8. Результат идентификации рассчитанных полей ПН в сплошной пластине, вызванных сдвиговой начальной нагрузкой (цвет онлайн)

Fig. 8. The result of identification of the calculated PS fields in a solid plate caused by a shear initial load (color online)

Заметим, что достаточно точно восстановился существенно немонотонный закон изменения функции  $\sigma_{12}^0$ .

**Эксперимент 3.** Восстановление поля ПН в пластине с отверстием, вызванного растягивающей в направлении  $x_1$  начальной нагрузкой (эксперимент 3 из раздела 2). Частоты зондирования:  $\omega_1 = 120$ ,  $\omega_2 = 130$ ,  $\omega_3 = 140$ ,  $\omega_4 = 150$  (Гц) (расположенные слева от первого резонанса). Для восстановления потребовалось 5 итераций; поправки, вычисляемые на последующих итерациях, были близки к нулю. Результаты представлены на рис. 9. Средние погрешности:  $\bar{\gamma}_{11} = 5.93\%$ ,  $\bar{\gamma}_{12} = 1.03\%$ ,  $\bar{\gamma}_{22} = 7.01\%$ .

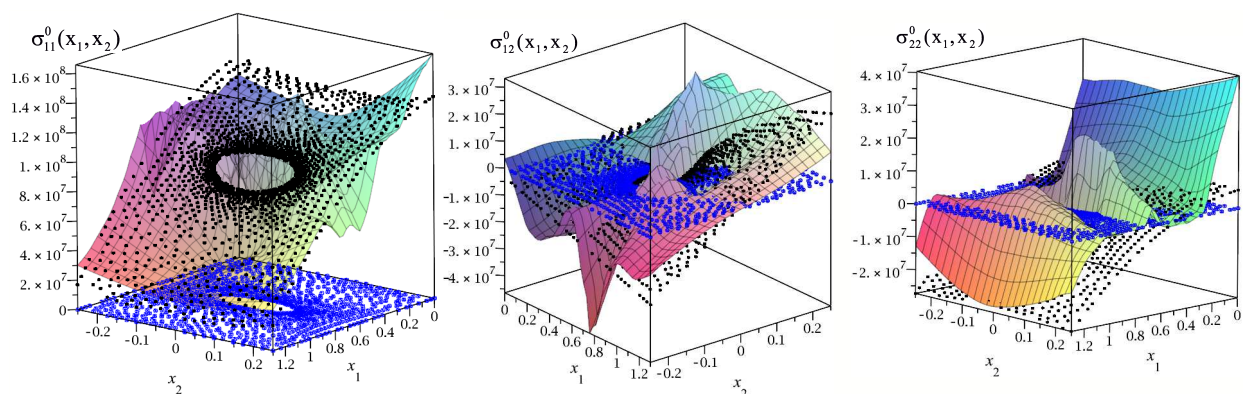


Рис. 9. Результат идентификации рассчитанных полей ПН в пластине с отверстием, вызванных растягивающей начальной нагрузкой (цвет онлайн)

Fig. 9. The result of identification of the calculated PS fields in a plate with a hole caused by a tensile initial load (color online)

**Эксперимент 4.** Восстановление поля ПН в пластине с жесткой вставкой, вызванного растягивающей в направлении  $x_1$  начальной нагрузкой (эксперимент 4 из раздела 2). Частоты зондирования:  $\omega_1 = 120$ ,  $\omega_2 = 130$ ,  $\omega_3 = 140$ ,  $\omega_4 = 150$  (Гц). Для восстановления потребовалось 18 итераций. Результаты представлены на рис. 10. Средние погрешности:  $\bar{\gamma}_{11} = 2.31\%$ ,  $\bar{\gamma}_{12} = 4.26\%$ ,  $\bar{\gamma}_{22} = 5.73\%$ .

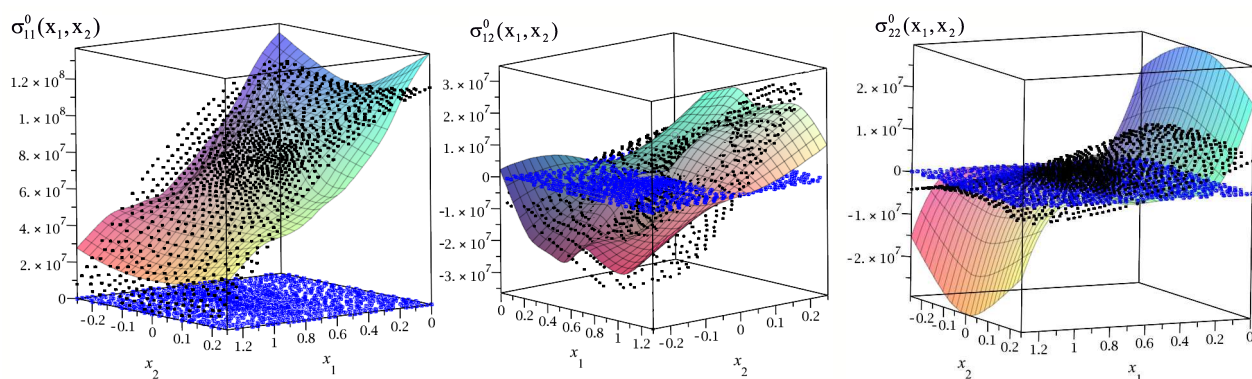


Рис. 10. Результат идентификации рассчитанных полей ПН в пластине с жесткой вставкой, вызванных растягивающей начальной нагрузкой (цвет онлайн)

Fig. 10. The result of identification of the calculated PS fields in a plate with a rigid insert caused by a tensile initial load (color online)

Результаты экспериментов 3 и 4 по восстановлению ПН в пластинах с отверстием и вставкой показывают, что разработанная методика позволяет определять уровень и общий характер распределения ПН в рассмотренных пластинах без учета локальных особенностей вблизи отверстия или вставки. При необходимости более точной идентификации ПН в окрестности отверстия или вставки могут быть применены иные специализированные методы, в которых решение, полученное с помощью данного подхода, может быть использовано в качестве начального приближения.

Также отметим, что поскольку идентификация проводится в общем виде и поправки к неизвестным функциям ищутся в произвольных классах функций, разработанная схема позволяет проводить идентификацию полей ПН любого характера вне



зависимости от природы их возникновения (ПН могут быть следствием произвольных начальных нагрузок, вызывающих упругие или пластические деформации, термических воздействий и других процессов). Также к преимуществам предложенного подхода следует отнести то, что восстановление достаточно эффективно производится для нулевого начального приближения, что является существенным фактором при решении практических задач.

## Заключение

Построенная модель планарных колебаний предварительно напряженных пластин позволяет рассматривать пластины различной формы, в том числе при наличии в них отверстий и вставок; учитывать неоднородность свойств в плоскости пластин, а также задавать распределение предварительных напряжений в них как аналитически, так и численно — в виде решений вспомогательных задач о воздействии начальных нагрузок, реализуемых в разработанных конечно-элементных схемах расчета. Для исследования поставленных новых обратных задач идентификации ПН на основе акустического зондирования разработана итерационная схема, на каждом шаге которой применяется проекционный подход для поиска поправок к искомым функциям. В результате ее использования при проведении нескольких экспериментов по зондированию удается достаточно эффективно восстанавливать одновременно три компоненты двумерного поля ПН, что было проиллюстрировано наборами вычислительных экспериментов. Методика также оказалась применимой для пластин, имеющих отверстия либо включения, и позволила определить общий уровень и характер распределения ПН (без учета локальных особенностей в зонах концентраторов), что дает возможность использовать ее для широкого спектра объектов.

## Список литературы

1. Ватульян А. О., Дударев В. В., Недин Р. Д. Предварительные напряжения: моделирование и идентификация. Ростов-на-Дону : Изд-во ЮФУ, 2015. 206 с.
2. Carpinteri A., Pugno N. Thermal loading in multi-layer and/or functionally graded materials: Residual stress field, delamination, fatigue and related size effects // International Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43, iss. 3–4. P. 828–841. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.05.009>
3. Дородов П. В., Поспелова И. Г. Исследование напряженного состояния в пластине, ослабленной концентратором напряжений // Достижения науки и техники АПК. 2013. № 8. С. 67–70.
4. Schajer G. S. Practical Residual Stress Measurement Methods. Wiley, 2013. 560 p.
5. Guo J., Fu H., Pan B., Kang R. Recent progress of residual stress measurement methods: A review // Chinese Journal of Aeronautics. 2021. Vol. 34, iss. 2. P. 54–78. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2019.10.010>
6. Uzun F., Korsunsky A. M. The use of eigenstrain theory and fuzzy techniques for intelligent modeling of residual stress and creep relaxation in welded superalloys // Materials Today: Proceedings. 2020. Vol. 33, iss. 4. P. 1880–1883. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.04.910>
7. Ma W., Zhang H., Zhu W., Xu F., Yang C. Study on Residual Stress of Welded Hoop Structure // Applied Sciences. 2021. Vol. 10, iss. 8. Art. 2838. <https://doi.org/10.3390/app10082838>
8. Li N., Zhang M., Ye J.-L., Liu C. Experimental investigation on residual stress distribution in zirconium/titanium/steel tri-metal explosively welded composite plate after cutting and welding of a cover plate // Journal of Manufacturing Processes. 2021. Vol. 64. P. 55–63. <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2021.01.034>



9. Yi S., Wu Y., Gong H., Peng C., He Y. Experimental Analysis and Prediction Model of Milling-Induced Residual Stress of Aeronautical Aluminum Alloys // *Applied Sciences*. 2021. Vol. 11, iss. 13. Art. 5881. <https://doi.org/10.3390/app11135881>
10. Huang C., Wang L., Wang K. Residual stress identification in thin plates based on modal data and sensitivity analysis // *International Journal of Solids and Structures*. 2022. Vol. 236–237, iss. 4. Art. 111350. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111350>
11. Nedin R. D., Vatulyan A. O., Bogachev I. V. Direct and inverse problems for prestressed functionally graded plates in the framework of the Timoshenko model // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2018. Vol. 41, iss. 4. P.1600–1618. <https://doi.org/10.1002/mma.4688>
12. Nedin R. D. Modeling and frequency analysis of prestressed functionally graded plates with holes // *Computational Continuum Mechanics*. 2019. Vol. 12, iss. 2. P. 192–201. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.2.17>
13. Bogachev I. V. Determination of Prestress in Circular Inhomogeneous Solid and Annular Plates in the Framework of the Timoshenko Hypotheses // *Applied Sciences*. 2021. Vol. 11, iss. 21. Art. 9819. <https://doi.org/10.3390/app11219819>
14. Nedin R. D., Vatulyan A. O. Inverse Problem of Non-homogeneous Residual Stress Identification in Thin Plates // *International Journal of Solids and Structures*. 2013. Vol. 50, iss. 13. P. 2107–2114. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.03.008>
15. Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии : учеб. пособие. Ростов-на-Дону : Изд-во ЮФУ, 2008. 256 с.
16. Ватульян А. О. Коэффициентные обратные задачи механики. Москва : Физматлит, 2019. 272 с.
17. Богачев И. В., Ватульян А. О., Дударев В. В., Лапина П. А., Недин Р. Д. Идентификация свойств неоднородной пластины в рамках модели Тимошенко // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2017. Т. 17, вып. 4. С. 419–430. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-4-419-430>
18. Nedin R. D., Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Bogachev I. V. Detection of nonuniform residual strain in a pipe // *International Journal of Solids and Structures*. 2018. Vol. 139–140. P. 121–128. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.01.026>
19. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. Москва : Наука, 1986. 288 с.
20. Ватульян А. О., Богачев И. В. О проекционном методе идентификации характеристик неоднородных тел // *Доклады Академии наук*. 2018. Т. 478, № 5. С. 532–535. <https://doi.org/10.7868/S0869565218050079>, EDN: YPEEZO

## References

1. Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Nedin R. D. *Predvaritel'nye napriazheniia: modelirovanie i identifikatsiia* [Prestresses: Modeling and Identification]. Rostov-on-Don, Southern Federal University Publ., 2015. 206 p. (in Russian).
2. Carpinteri A., Pugno N. Thermal loading in multi-layer and/or functionally graded materials: Residual stress field, delamination, fatigue and related size effects. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, vol. 43, iss. 3–4, pp. 828–841. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.05.009>
3. Dorodov P. V., Pospelova I. G. Investigation of the stress state in a plate weakened by a stress concentrator. *Dostizheniya nauki i tekhniki APK* [Achievements of Science and Technology of the Agro-industrial Complex], 2013, vol. 8, pp. 67–70 (in Russian).
4. Schajer G. S. *Practical Residual Stress Measurement Methods*. Wiley, 2013. 560 p.
5. Guo J., Fu H., Pan B., Kang R. Recent progress of residual stress measurement methods: A review. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2021, vol. 34, iss. 2, pp. 54–78. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2019.10.010>



6. Uzun F., Korsunsky A. M. The use of eigenstrain theory and fuzzy techniques for intelligent modeling of residual stress and creep relaxation in welded superalloys. *Materials Today: Proceedings*, 2020, vol. 33, iss. 4, pp. 1880–1883. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.04.910>
7. Ma W., Zhang H., Zhu W., Xu F., Yang C. Study on Residual Stress of Welded Hoop Structure. *Applied Sciences*, 2021, vol. 10, iss. 8, art. 2838. <https://doi.org/10.3390/app10082838>
8. Li N., Zhang M., Ye J.-L., Liu C. Experimental investigation on residual stress distribution in zirconium/titanium/steel tri-metal explosively welded composite plate after cutting and welding of a cover plate. *Journal of Manufacturing Processes*, 2021, vol. 64, pp. 55–63. <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2021.01.034>
9. Yi S., Wu Y., Gong H., Peng C., He Y. Experimental Analysis and Prediction Model of Milling-Induced Residual Stress of Aeronautical Aluminum Alloys. *Applied Sciences*, 2021, vol. 11, iss. 13, art. 5881. <https://doi.org/10.3390/app11135881>
10. Huang C., Wang L., Wang K. Residual stress identification in thin plates based on modal data and sensitivity analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 2022, vol. 236–237, art. 111350. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111350>
11. Nedin R. D., Vatulyan A. O., Bogachev I. V. Direct and inverse problems for prestressed functionally graded plates in the framework of the Timoshenko model. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2018, vol. 41, iss. 4, pp. 1600–1618. <https://doi.org/10.1002/mma.4688>
12. Nedin R. D. Modeling and frequency analysis of prestressed functionally graded plates with holes. *Computational Continuum Mechanics*, 2019, vol. 12, iss. 2, pp. 192–201. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.2.17>
13. Bogachev I. V. Determination of Prestress in Circular Inhomogeneous Solid and Annular Plates in the Framework of the Timoshenko Hypotheses. *Applied Sciences*, 2021, vol. 11, iss. 21, art. 9819. <https://doi.org/10.3390/app11219819>
14. Nedin R. D., Vatulyan A. O. Inverse Problem of Non-homogeneous Residual Stress Identification in Thin Plates. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 50, iss. 13, pp. 2107–2114. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.03.008>
15. Zhukov M. Yu., Shiryayeva E. V. *Ispol'zovanie paketa konechnykh elementov FreeFem++ dlya zadach gidrodinamiki, elektroforeza i biologii* [Using the FreeFem++ Finite Element Package for Problems in Fluid Dynamics, Electrophoresis and Biology]. Rostov-on-Don, Southern Federal University Publ., 2008. 256 p. (in Russian).
16. Vatulyan A. O. *Koeffitsientnye obratnye zadachi mekhaniki* [Coefficient inverse problems of mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2019. 272 p. (in Russian).
17. Bogachev I. V., Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Lapina P. A., Nedin R. D. Identification of Properties of Inhomogeneous Plate in the Framework of the Timoshenko Model. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, vol. 17, iss. 4, pp. 419–430 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-4-419-430>
18. Nedin R. D., Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Bogachev I. V. Detection of nonuniform residual strain in a pipe. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, vol. 139–140, pp. 121–128. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.01.026>
19. Tihonov A. N., Arsenin V. Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods of ill-posed problems solving]. Moscow, Nauka, 1986. 288 p. (in Russian).
20. Vatulyan A. O., Bogachev I. V. The projection method for identification of the characteristics of inhomogeneous solids. *Doklady Physics*, 2018, vol. 63, iss. 2, pp. 82–85. <https://doi.org/10.1134/S1028335818020088>, EDN: XYCLQT

Поступила в редакцию / Received 24.10.2022

Принята к публикации / Accepted 27.01.2023

Опубликована / Published 30.11.2023



Article

## Development and approbation of a mobile test bench for mechanical uniaxial compression testing of biological tissues

A. V. Dol<sup>1</sup>✉, A. O. Gulyaeva<sup>1</sup>, A. S. Falkovich<sup>1</sup>, D. N. Maystrenko<sup>2</sup>,  
M. I. Generalov<sup>2</sup>, A. V. Solovyov<sup>3</sup>, D. V. Terin<sup>1</sup>, M. O. Lemeshkin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

<sup>2</sup>Russian Scientific Center for Radiology and Surgical Technologies named after Academician A. M. Granov, 70 Leningradskaya St., Saint-Petersburg 197758, Russia

<sup>3</sup>Vsevolozhsk Clinical Interdistrict Hospital, 20 Koltushskoe Highway, Vsevolozhsk 188643, Leningrad region, Russia

**Alexander V. Dol**, dolav86@ya.ru, <https://orcid.org/0000-0001-5842-1615>, AuthorID: 601135

**Alena O. Gulyaeva**, asirid2010@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0007-2937-6414>, AuthorID: 914421

**Alexander S. Falkovich**, falkovichas@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9079-3064>, AuthorID: 459455

**Dmitry N. Maystrenko**, may64@inbox.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8174-7461>, AuthorID: 711488

**Michail I. Generalov**, mikhail.generalov@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-8980-5240>, AuthorID: 860839

**Alexey V. Solovyov**, Solovyev-LOKB@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6671-3893>

**Denis V. Terin**, terinden@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2850-4406>, AuthorID: 136880

**Maxim O. Lemeshkin**, lemeshkinmo@sgu.ru

**Abstract.** A technique and a prototype of a mobile test bench for conducting experiments on uniaxial compression of biological tissue samples have been developed. The test bench consists of high-precision scales, an electronic caliper with modified grips, and a video camera. With the help of the test bench, a series of experiments (120 in total) was carried out to determine Young's modulus of atherosclerotic plaques and vascular walls removed from the human body no later than a few hours. A database of plaques and artery walls' mechanical characteristics, as close as possible to their real strength properties, has been formed. In addition, regression dependencies linking Hounsfield units and Young's moduli of atherosclerotic plaques were constructed. The uniaxial compression technique has been verified on the Instron 3342 universal testing machine. Also, to demonstrate the applicability of the developed technique and test bench for uniaxial compression of hard tissues, experiments were conducted with 14 samples of bovine spongy bone.

**Keywords:** biomechanics, atherosclerosis, mobile test bench, compression, Young's modulus

**Acknowledgements:** There is no conflict of interest. The work was carried out within the framework of the State Assignment (project No. FSRR-2023-0009). The work was also supported by Vladimir Potanin Charitable Foundation (project No. GSAD-0013/23). The study was approved by the Ethics Committee of the Federal State Budgetary Institution "Russian Scientific Center for Radiology and Surgical Technologies named after Academician A. M. Granov" (Protocol No. 01-03/2023 from 30.03.2023).

**For citation:** Dol A. V., Gulyaeva A. O., Falkovich A. S., Maystrenko D. N., Generalov M. I., Solovyov A. V., Terin D. V., Lemeshkin M. O. Development and approbation of a mobile test



bench for mechanical uniaxial compression testing of biological tissues. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 472–481. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-472-481>, EDN: IWZXSA

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 531/534:[57+61]

## **Разработка и апробация мобильного стенда для механических испытаний на одноосное сжатие биологических тканей**

**А. В. Доль<sup>1</sup>✉, А. О. Гуляева<sup>1</sup>, А. С. Фалькович<sup>1</sup>, Д. Н. Майстренко<sup>2</sup>,  
М. И. Генералов<sup>2</sup>, А. В. Соловьёв<sup>3</sup>, Д. В. Терин<sup>1</sup>, М. О. Лемешкин<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

<sup>2</sup>Российский научный центр радиологии и хирургических технологий имени академика А. М. Гранова, Россия, 197758, г. Санкт-Петербург, ул. Ленинградская, д. 70

<sup>3</sup>Всеволожская клиническая межрайонная больница, Россия, Ленинградская область, 188643, г. Всеволожск, Колтушское шоссе, д. 20

**Доль Александр Викторович**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник учебной лаборатории цифровых медицинских технологий, [dolav86@ya.ru](mailto:dolav86@ya.ru), <https://orcid.org/0000-0001-5842-1615>, AuthorID: 601135

**Гуляева Алёна Олеговна**, аспирант кафедры математической теории упругости и биомеханики, [asirid2010@mail.ru](mailto:asirid2010@mail.ru), <https://orcid.org/0009-0007-2937-6414>, AuthorID: 914421

**Фалькович Александр Савельевич**, доктор технических наук, заведующий кафедрой медицинской кибернетики, [falkovichas@yandex.ru](mailto:falkovichas@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0001-9079-3064>, AuthorID: 459455

**Майстренко Дмитрий Николаевич**, доктор медицинских наук, профессор, директор, [mau64@inbox.ru](mailto:mau64@inbox.ru), <https://orcid.org/0000-0001-8174-7461>, AuthorID: 711488

**Генералов Михаил Игоревич**, кандидат медицинских наук, заведующий отделением сосудистой, абдоминальной и трансплантационной хирургии, [mikhail.generalov@gmail.com](mailto:mikhail.generalov@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0001-8980-5240>, AuthorID: 860839

**Соловьёв Алексей Викторович**, кандидат медицинских наук, сосудистый хирург, [Solovyev-LOKB@mail.ru](mailto:Solovyev-LOKB@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0002-6671-3893>

**Терин Денис Владимирович**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник учебной лаборатории цифровых медицинских технологий, [terinden@mail.ru](mailto:terinden@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-2850-4406>, AuthorID: 136880

**Лемешкин Максим Олегович**, научный сотрудник учебной лаборатории цифровых медицинских технологий, [lemeshkinmo@sgu.ru](mailto:lemeshkinmo@sgu.ru)

**Аннотация.** Разработаны методика и прототип мобильного испытательного стенда для проведения экспериментов на одноосное сжатие образцов биологических тканей. Стенд состоит из высокоточных весов, электронного штангенциркуля с модифицированными захватами и видеокамеры. С помощью стенда проведена серия экспериментов (в общей сложности 120) по определению модуля Юнга атеросклеротических бляшек и сосудистых стенок, удаленных из организма не позднее нескольких часов. Сформирована база данных механических характеристик бляшек и стенок артерий, максимально приближенных к их реальным прочностным





свойствам. Кроме того, были построены регрессионные зависимости, связывающие единицы Хаунсфилда и модули Юнга атеросклеротических бляшек. Методика одноосного сжатия верифицирована на универсальной испытательной машине Instron 3342. Также для демонстрации применимости разработанной методики и стенда для одноосного сжатия твердых тканей проведены эксперименты с 14 образцами губчатой кости крупного рогатого скота.

**Ключевые слова:** биомеханика, атеросклероз, мобильный испытательный стенд, компрессия, модуль Юнга

**Благодарности:** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Работа выполнена в рамках государственного задания (проект № FSSR-2023-0009). Работа выполнена при поддержке Благотворительного фонда Владимира Потанина (проект № GSAD-0013/23). Исследование одобрено Этическим комитетом ФГБУ «Российский научный центр радиологии и хирургических технологий им. академика А. М. Гранова» (протокол № 01-03/2023 от 30.03.2023).

**Для цитирования:** Dol A. V., Gulyaeva A. O., Falkovich A. S., Maystrenko D. N., Generalov M. I., Solovyov A. V., Terin D. V., Lemeshkin M. O. Development and approbation of a mobile test bench for mechanical uniaxial compression testing of biological tissues [Доль А. В., Гуляева А. О., Фалькович А. С., Майстренко Д. Н., Генералов М. И., Соловьёв А. В., Терин Д. В., Лемешкин М. О. Разработка и апробация мобильного стенда для механических испытаний на одноосное сжатие биологических тканей] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 472–481. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-472-481>, EDN: IWZXSA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

## Introduction

During biomechanical modeling of arteries affected by atherosclerosis, the problem of determining the mechanical characteristics of vessel walls and atherosclerotic plaques arises [1, 2]. It is also obvious that in the area of atherosclerotic plaques, the wall is pathologically changed, which means that its properties can differ significantly from the ones of healthy tissue. The literature often presents data obtained for plaques as a whole without information on individual structural elements such as core, fibrous cap, or soft component [3]. There are a number of articles devoted to the mechanical properties of arterial wall structural elements (intima, media, and adventitia) and plaques [4], but those studies are carried out on cadaveric samples after a considerable period after death. In addition, testing machines are mostly located in special laboratories outside medical institutions, so tissue samples are stored for quite a long time and often even frozen during transportation to the place of experiments [4]. All this significantly affects the properties of tissues, so the results may differ from the real ones. Thus, the problem of developing mobile testing devices [5, 6], that can be installed directly in the clinic for testing immediately after surgery is an urgent one.

For bone tissues, descriptions of methods for determining mechanical characteristics by computed tomography (CT) based on the Hounsfield units have long been found in the literature [7, 8]. The task seems to be relevant to similarly determine properties of atherosclerotic plaques, which are also identified on CT [9].

The purpose of this work is to create and test the methodology and a prototype of the test bench for conducting experiments on compression of biological tissue samples.



## Materials and methods

During the experiment, the movable traverse of the testing machine presses on a sample, and the force and displacement of the traverse are recorded at every moment. The sample's cross-sectional area, as well as its initial height, is considered to be known, therefore, after the experiment, the force at every moment is converted into stress, and the displacement is converted into strain. Further, according to the constructed "stress-strain" dependence, Young's modulus of the sample can be determined. This method for compression testing can be implemented both on a mobile device based on a strain gauge and a linear actuator [6], as well as using high-precision scales and an electronic caliper. In this study, the latter option was implemented with some design modifications.

The test bench for implementing the methodology consists of high-precision scales (measurement accuracy up to 0.01 g, maximum value — 5 kg), an electronic caliper (measurement accuracy up to 0.01 mm), and a video camera (Fig. 1, *a*). For tighter fixation of the caliper and ensuring uniform pressure on the sample, its design was supplemented with removable platforms grown on a 3D printer (Fig. 1, *b*).

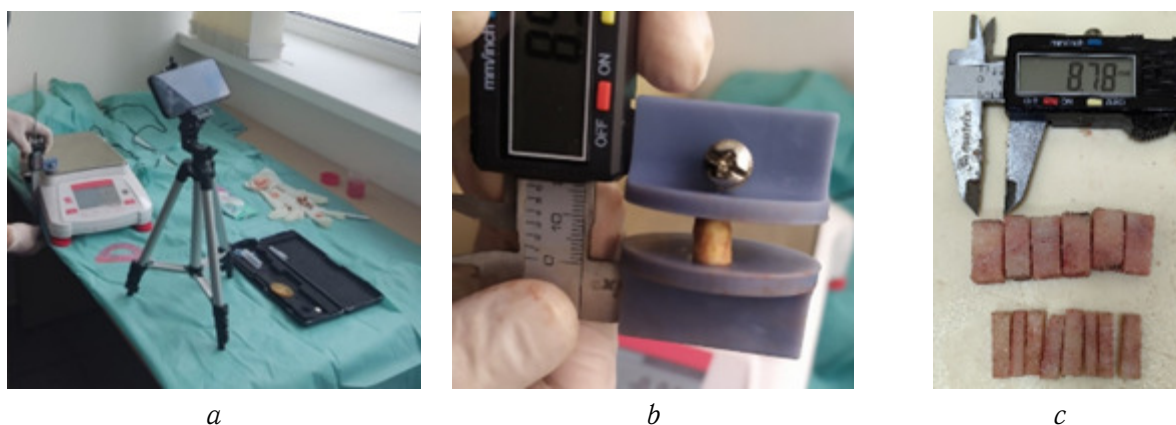


Fig. 1. The test bench components and typical samples: *a* is the general view; *b* are special removable platforms for caliper and a cylindrical sample of the plaque; *c* are samples of bovine cancellous bone (color online)

For experiments, samples of the correct geometric shape with a circle- or square-shaped cross section were prepared from vessels with atherosclerotic lesions. For compression tests, it is necessary to prepare specimens whose linear dimension along the compression axis is greater than any linear dimension of the cross-section. With large lesions, this is not difficult to perform the above for both soft and hard plaques. For example, Fig. 1, *b* shows a cylindrical sample from a femoral artery section (soft plaque). As a rule, the size in the direction of the compression axis ranged from 4.5 to 9 mm, while the linear size of the cross-section (diameter or rib length) varied from 2 to 5 mm. From one side of the vessel belonging to a particular patient with a large amount of atherosclerotic deposits, it may be possible to prepare several samples for testing.

In a number of experiments, it is possible to isolate the plaque fibrous cap: in fact, it is an altered and compacted intima [10, 11]. Usually, a fibrous cap is easily separated from the atherosclerotic deposits in cases of severe calcification. Arterial walls' sections were studied too: both pathologically altered and healthy. When compressing the walls and plaques fibrous caps, as a rule, it was not possible to maintain the required ratio of the geometric parameters of the sample, since the thickness of these structures ranged



from 0.3 to 2.5 mm. But calculations in such cases were also carried out according to the formulas for linear uniaxial compression within the framework of the theory of elasticity. In most experiments, it is possible to preliminarily assess whether the plaque contains a calcified component. Thus, even at the preparation stage, a preliminary classification of the samples was carried out, and for hard plaques, the ultimate strength was additionally determined.

To assess the possibility of using the created prototype to study the strength properties of solid biological tissues, experiments were carried out on uniaxial compression of bovine cancellous bone samples. To do this, prismatic samples of the rectangular cross-section were isolated from the bovine femur metaphysis [12] (Fig. 1, c), the ratio of height to width of which was about 4 to 1.

After preparing the samples, the surface area and the initial height of each of them are measured, that is, the linear size in the direction of the compression axis. Measurements were taken with a digital caliper.

The experiment itself on a mobile test bench is as follows. The sample is placed on the scale's surface, and one caliper jaw with a wide flat nozzle (platform) is brought to its upper face. With the second jaw, the tool rests against the lower edge of the table directly under the scales so that the bar is perpendicular to the plane of the scale platform. The scale and caliper readings are reset to zero. Video recording starts and the operator slowly and evenly moves the upper jaw of the caliper towards the scale's platform, compressing the sample. When the limit value on the scales is reached, a typical sound of sample destruction occurs, or if further compression is impossible (in the case of a high degree of plaque calcification), the experiment stops, as the video recording.

Next, the video is analyzed frame by frame, and the readings of the scales and calipers corresponding to each other are recorded in the table. Further, in the Excel software, the caliper readings are converted into strain, which in this case represents the relative shortening of the sample in the direction of the compression axis. The scale readings are converted into stress. Based on the obtained set of points, a stress-strain dependence is constructed. Further, using the linear section of the graph, Young's modulus can be calculated using the classical formula of Hooke's law for the case of uniaxial tension:

$$E = \sigma/\varepsilon.$$

Young's modulus is calculated at several points (usually 10 points on the graph), after which the average value is taken. This value is taken as the modulus of elasticity for the test sample.

In the case when during the experiment there was a fracture of the calcified plaque, identified by a typical sound, the ultimate strength was additionally determined.

The methodology was verified through mechanical experiments on the Instron 3342 Universal Testing Machine and the mobile test bench on hard (highly calcified) and soft plaque specimens. To verify samples of each type, 7 experiments were carried out. Initially, tests were carried out on a mobile test bench, and the load on the sample was given in the range from 0 to 10 N. This made it possible to deform each sample minimally and not to leave the elastic deformation zone.

## Results

In cooperation with the Russian Scientific Center for Radiology and Surgical Technologies named after Academician A. M. Granov, a number of experiments were



conducted aimed at studying mechanical characteristics of atherosclerotic plaques of different densities and localization. Young's modulus values were obtained for hard (heavily calcified) and soft plaques.

Except for plaques, sections of internal carotid arteries (ICA) and common carotid arteries (CCA), as well as the walls of femoral arteries (FA), which are not subject to changes, were tested on a mobile test bench. In addition, in some cases, it was possible to isolate fibrous caps of the ICA plaques and sections of the walls behind the plaque (the outer part of the vessel behind the calcified plaque, ICA only), for which Young's moduli were also obtained. Young's moduli and ultimate strengths of bovine cancellous bone samples were also determined.

The results of the tests with the number of samples were summarized in the Table. The results for each type of tissue were checked using the Kolmogorov – Smirnov test to see if the distribution was normal. In all cases, the distributions were found to be normal, so standard deviations are listed in the table.

Table

Number of samples, average Young's moduli, and ultimate strengths

Sample type	Quantity, pcs.	Average Young's modulus, MPa	Ultimate strength, MPa
Soft plaque, ICA	39	0.29±0.17	–
Hard plaque, ICA	24	0.85±0.39	1.12±0.67
Soft plaque, FA	8	0.28±0.19	–
Hard plaque, FA	8	1.12±0.54	2.24±1.17
Arterial wall, ICA	14	0.32±0.24	–
Arterial wall, CCA	5	0.35±0.24	–
Arterial wall, FA	10	0.27±0.16	–
Fibrous cap	5	0.12±0.05	–
Arterial wall (ICA) near plaque	7	0.08±0.02	–
Bovine cancellous bone	14	318.5±92.7	9.25±5.82

In addition, regression dependences were built between the Hounsfield units and Young's moduli obtained during the experiments. For 11 patients at the time of writing, CT scans were obtained with contrasting sections of the vascular bed affected by atherosclerosis (CT scans were available only for patients with plaques in the ICA). On CT, Hounsfield units were calculated for calcified plaques as well as for soft plaques for each patient. Next, a graph of the dependence of Young's moduli on the Hounsfield units was constructed for each case considered. According to this graph, a regression dependence was built, shown in Fig. 2.

It should be noted that Fig. 2 clearly shows the division into separate groups of soft and hard (calcified) plaques.

It should be noted that the average value of Hounsfield units for plaques was 242. At the same time, in [9] the authors obtained

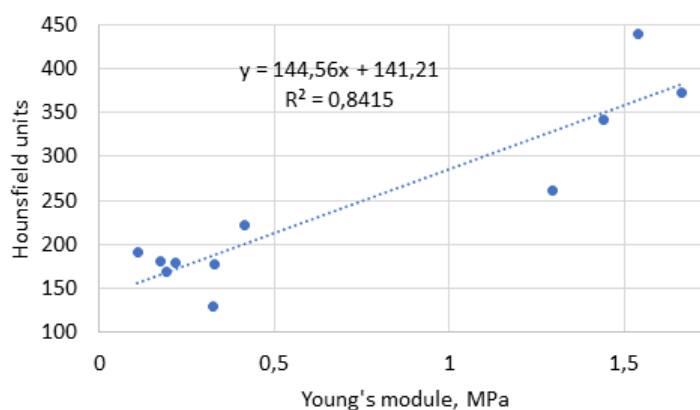


Fig. 2. Dependence between Young's moduli and Hounsfield units



an average value of 256.7 for the calcified part of the plaque. It is obvious that only dense structural elements of atherosclerotic deposits are clearly visible on CT scans; therefore, the obtained values, even for conditionally soft plaques, were also considered in this comparative analysis.

The results of experiments on the mobile test bench and Instron testing machine for soft plaques obtained during the verification of the method differed by no more than 4.3%, and for hard (heavily calcified) plaques, by no more than 9.5%. Typical stress-strain curves for hard and soft plaques obtained on the Instron testing machine and the mobile test bench are shown in Fig. 3.

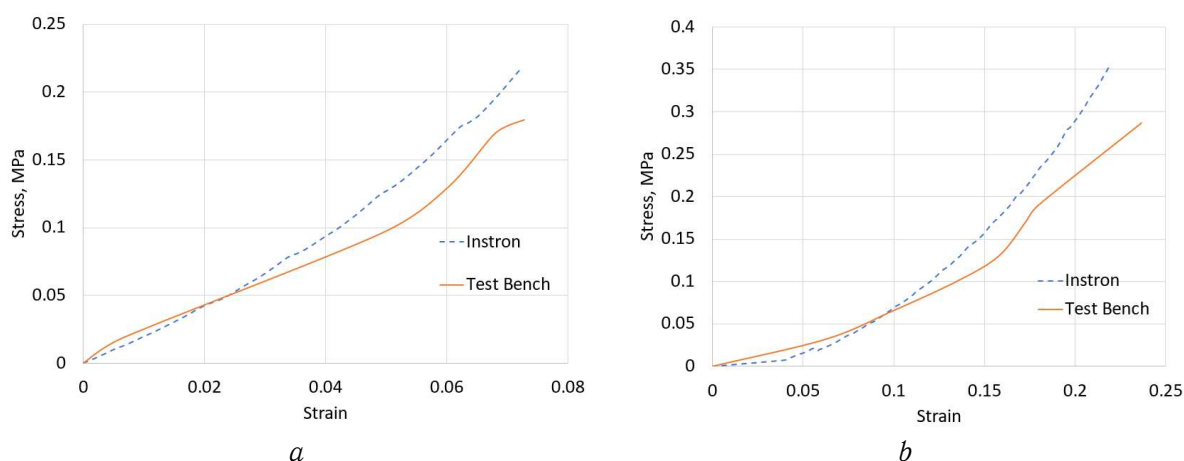


Fig. 3. Typical “stress-strain” dependences obtained on a testing machine and a mobile test bench: *a* – for hard plaques; *b* – for soft plaques

## Discussion

A series of experiments were carried out to determine the mechanical characteristics of blood vessels and atherosclerotic plaques immediately after surgical removal, as well as Young’s modulus of bovine cancellous bone. Samples of the studied soft tissues practically did not lose their properties, which allows us to say that numerical calculations using obtained modules will be as accurate and physiological as possible. In fact, this situation, when it is possible to perform experiments with samples immediately after they have been removed from the body, is unique, since they usually need to be transported from the clinic to a mechanical laboratory, which can take quite a long time. In addition, transportation usually involves freezing samples, which can significantly affect their mechanical properties. At the same time, cadaveric material in the framework of experiments does not allow for obtaining reliable information about the properties, which, moreover, has a number of legal restrictions.

A series of experiments were carried out to determine Young’s modulus of atherosclerotic plaques, sections of the vascular wall removed from the body no later than a few hours ago (in some cases experiments were carried out immediately after the surgery), as well as bovine cancellous bone. This made it possible to collect a database of the most relevant mechanical characteristics of plaques and confirm the possibility of using the test bench on bone tissues.

The results are similar to literature data [3, 12–14]. In [13] the average values of the fibrous cap Young’s modulus were  $0.082 \pm 0.033$  MPa (8 samples), which is consistent with the data obtained in this study ( $0.12 \pm 0.05$  MPa). Results in [13, 14] are also in good agreement with the data on the properties of the altered ICA wall in the plaque



area. Thus, in [14] the Young's modulus of the altered wall is given as  $0.059 \pm 0.047$  MPa, and the data from the Table ( $0.08 \pm 0.02$  MPa) are included in this range of values.

According to the literature data, Young's moduli of ICA walls differ significantly, however, the values from the Table are in excellent order of magnitude agreement with the published values. The mechanical properties of FA are also consistent with literature data. For example, in [15] the Young's modulus of CCA wall is indicated as equal to 0.49 MPa, which is in good agreement with the data from the Table. However, it should be noted that in many modern studies, it is customary to model the FA using hyperelastic material models [16], therefore, to calculate the Mooney – Rivlin constants it will be necessary to build a stress-strain curve using the points obtained on a mobile test bench.

Paper [3] presents the results of the mechanical properties study of carotid and femoral atherosclerotic plaques, and the values obtained in this work differ slightly from the source. In [3] elasticity moduli of plaques in common femoral (0.44 MPa) and carotid (0.89 MPa) arteries differed by almost two times. At the same time, according to data from the Table, there is no such difference for soft and hard plaques in corresponding arteries: 0.28 MPa to 0.29 MPa for soft plaques in femoral and carotid arteries, respectively; 1.12 MPa to 0.85 MPa for hard plaques in femoral and carotid arteries, respectively. Such a difference in ratios may be due to the degree of calcification of the studied plaques in [3] and in this work. Moreover, authors in [3] pointed out that before testing, samples were frozen at a temperature of  $-20$  degrees Celsius, which could change their mechanical properties.

In [17], a value of 2.49 MPa was given for the ultimate strength of a calcified plaque located in the iliac artery, which is quite close to 2.24 MPa obtained for plaques in FA. Anatomically, the femoral artery is, in fact, a continuation of the iliac artery, and atherosclerotic plaques in these vessels often cover fairly long areas, so it seems appropriate to compare mechanical properties with the results from the Table. For the ultimate strength of hard plaques from carotid arteries, we were unable to find data, so this result is still seen as new and requires clarification by enlarging the number of experiments.

As for the calculated Young's moduli of the bovine cancellous bone, the average value of which ( $318.5 \pm 92.7$  MPa) corresponds to the literature data [12], where the Young's modulus of femoral metaphysis ranges from 314 to 504 MPa. The calculated ultimate strength of cancellous bone is in good agreement with the ultimate strength of a similar horse bone presented in [18].

Thus, the methodology and its implementation on a mobile test bench show good agreement with literature data for both soft and hard biological tissues.

The human factor proves to be the main limitation of the developed technique. That is the operator's ability to accurately place and then compress the specimen relatively evenly and slowly.

## Conclusion

In this study methodology and prototype of a test bench for conducting uniaxial compression experiments on biological tissue samples were developed and tested. A series of experiments was performed to determine the Young's modulus of atherosclerotic plaques and vascular wall sections removed from the body no later than a few hours ago, as well as the Young's modulus of bovine cancellous bone tissue. This made it possible to create a database of the most relevant mechanical characteristics of the plaques. Also, regression dependencies were constructed, connecting Hounsfield units and Young's moduli obtained during the experiments.



## References

1. Ivanov D. V., Dol A. V., Kuzyk Yu. I. Biomechanical bases of forecasting occurrence of carotid atherosclerosis. *Russian Journal of Biomechanics*, 2017, vol. 21, iss. 1, pp. 29–40 (in Russian). <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2017.1.03>, EDN: YMFRLF
2. Gasser T., Holzapfel G. Modeling plaque fissuring and dissection during balloon angioplasty intervention. *Annals of Biomedical Engineering*, 2007, vol. 35, pp. 711–723. <https://doi.org/10.1007/s10439-007-9258-1>
3. Cunnane E. M., Mulvihill J. J. E., Barrett H. E., Hennessy M. M., Kavanagh E. G., Walsh M. T. Mechanical properties and composition of carotid and femoral atherosclerotic plaques: A comparative study. *Journal of Biomechanics*, 2016, vol. 49, iss. 15, pp. 3697–3704. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2016.09.036>
4. Holzapfel G. A., Schulze-Bauer C. A. J., Stadler M. Mechanics of angioplasty: Wall, balloon and stent. *Proceedings of the ASME 2000 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Mechanics in Biology*. Orlando, Florida, USA. November 5–10, 2000. pp. 141–156. <https://doi.org/10.1115/IMECE2000-1927>
5. Arrizabalaga J. H., Simmons A. D., Nollert M. U. Fabrication of an economical arduino-based uniaxial tensile tester. *Journal of Chemical Education*, 2017, vol. 94, iss. 4, pp. 530–533. <https://doi.org/10.1021/acs.jchemed.6b00639>
6. Geasa M. M. Development of an Arduino based universal testing apparatus. *Archives of Agriculture Sciences Journal*, 2021, vol. 4, iss. 3, pp. 121–130. <https://doi.org/10.21608/AASJ.2021.226282>
7. Bessonov L. V., Golyadkina A. A., Dmitriev P. O., Dol A. V., Zolotov V. S., Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Y., Titova Y. I., Ulyanov V. Y., Kharlamov A. V. Constructing the dependence between the Young's modulus value and the Hounsfield units of spongy tissue of human femoral heads. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 182–193. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-182-193>, EDN: SNBJNB
8. Ramirez J., Isaza J., Mariaka I., Velez J. Analysis of bone demineralization due to the use of exoprosthesis by comparing Young's Modulus of the femur in unilateral transfemoral amputees. *Prosthetics and Orthotics International*, 2011, vol. 35, iss. 4, pp. 459–466. <https://doi.org/10.1177/0309364611420478>
9. Wintermark M., Jawadi S. S., Rapp J. H., Tihan T., Tong E., Glidden D. V., Abedin S., Schaeffer S., Acevedo-Bolton G., Boudignon B., Orwoll B., Pan X., Saloner D. High-resolution CT imaging of carotid artery atherosclerotic plaques. *American Journal of Neuroradiology*, 2008, vol. 29, iss. 5, pp. 875–882. <https://doi.org/10.3174/ajnr.A0950>
10. Wissing T. B., Van der Heiden K., Serra S. M., Smits A. I. P. M., Bouten C. V. C., Gijzen F. J. H. Tissue-engineered collagenous fibrous cap models to systematically elucidate atherosclerotic plaque rupture. *Scientific Reports*, 2022, vol. 12, art. 5434. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-08425-4>
11. Yanev S., Zhelyazkova-Savova M., Chaldakov G. The fibrous cap: A promising target in the pharmacotherapy of atherosclerosis. *Biomedical Reviews*, 2019, vol. 30, pp. 136–141. <https://doi.org/10.14748/bmr.v30.6394>
12. Endo K., Yamada S., Todoh M., Takahata M., Iwasaki N., Tadano S. Structural strength of cancellous specimens from bovine femur under cyclic compression. *PeerJ*, 2016, vol. 4, art. e1562. <https://doi.org/10.7717/peerj.1562>
13. Barrett S. R. H., Sutcliffe M. P. F., Howarth S., Li Z.-Y., Gillard J. H. Experimental measurement of the mechanical properties of carotid atherothrombotic plaque fibrous cap. *Journal of Biomechanics*, 2009, vol. 42, iss. 11, pp. 1650–1655. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2009.04.025>
14. Tracqui P., Broisat A., Toczek J., Mesnier N., Ohayon J., Riou L. Mapping elasticity moduli of atherosclerotic plaque in situ via atomic force microscopy. *Journal of Structural*



- Biology*, 2011, vol. 174, iss. 1, pp. 115–123. <https://doi.org/10.1016/j.jsb.2011.01.010>
15. Matsumoto T., Sugita S., Yaguchi T. Biomechanics of blood vessels: Structure, mechanics, and adaptation. In: Niinomi M., Narushima T., Nakai M. (eds.) *Advances in Metallic Biomaterials*. Springer Series in Biomaterials Science and Engineering, vol. 3. Springer, Berlin, Heidelberg, 2015, pp. 71–98. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-46836-4\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-662-46836-4_4)
  16. Kim Y.-H., Kim J.-E., Ito Y., Shih A. M., Brott B., Anayiotos A. Hemodynamic analysis of a compliant femoral artery bifurcation model using a fluid structure interaction framework. *Annals of Biomedical Engineering*, 2008, vol. 36, pp. 1753–1763. <https://doi.org/10.1007/s10439-008-9558-0>
  17. Barrett H. E., Van der Heiden K., Farrell E., Gijsen F. J. H., Akyildiz A. C. Calcifications in atherosclerotic plaques and impact on plaque biomechanics. *Journal of Biomechanics*, 2019, vol. 87, pp. 1–12. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2019.03.005>
  18. Vahey J. W., Lewis J. L., Vanderby R. Jr. Elastic moduli, yield stress, and ultimate stress of cancellous bone in the canine proximal femur. *Journal of Biomechanics*, 1987, vol. 20, iss. 1, pp. 29–33. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(87\)90264-8](https://doi.org/10.1016/0021-9290(87)90264-8)

Поступила в редакцию / Received 23.08.2023

Принята к публикации / Accepted 28.09.2023

Опубликована / Published 30.11.2023





Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 482–495

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 482–495

[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru)

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-482-495>, EDN: ORWLCI

Научная статья

УДК 539.3

## Напряженное состояние вблизи дентальных имплантатов при резорбции костных тканей

М. Н. Перельмутер

Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН, Россия, 119526, г. Москва, просп. Вернадского, д. 101, корп. 1

**Перельмутер Михаил Натанович**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, [perelm@ipmnet.ru](mailto:perelm@ipmnet.ru), <https://orcid.org/0000-0002-8430-5412>, AuthorID: 14187

**Аннотация.** Представлены результаты численного моделирования методом граничных интегральных уравнений (МГИУ) влияния резорбции костных тканей на напряженное состояние вблизи винтовых дентальных имплантатов при действии нормальной и наклонной сжимающих нагрузок. Используется прямой вариант МГИУ для кусочно-однородных подобластей. Расчет напряженного состояния имплантата и окружающих костных тканей выполнялся для состояния плоской деформации в предположении полного соединения материалов на границе имплантата и кости (остеоинтеграции) и состоял из двух этапов: 1) анализа всей конструкции имплантата со сглаженным винтовым соединением между имплантатом и окружающими костными тканями; 2) исследования распределения напряжений с учетом формы винтового соединения имплантата и костных тканей. Модель первого этапа расчета состояла из семи подобластей, соответствующих элементам конструкции имплантата и участкам костных тканей. На втором этапе расчета предполагалось, что впадины в губчатой кости, которые образуются после установки имплантата, соответствуют винтовой резьбе на имплантате. Рассмотрено влияние резорбции костных тканей на концентрацию напряжений в витках резьбы имплантата и в губчатой костной ткани. Построение численных моделей выполнялось при допущении, что следствием резорбции костной ткани является формирование полости (лунки резорбции) вокруг имплантата. Вычисления проводились в предположении, что костные ткани являются изотропными и однородными упругими материалами. Установлено, что в результате резорбции происходит значительное перераспределение напряжений в костных тканях и имплантате. Максимальные эквивалентные напряжения в кортикальной костной ткани снижаются, в губчатой костной ткани — возрастают. Результаты представлены в виде распределений интенсивности напряжений по границам подобластей расчетной модели.

**Ключевые слова:** имплантат, винтовое соединение, резорбция костной ткани, метод граничных интегральных уравнений, напряженно-деформированное состояние, концентрация напряжений

**Благодарности:** Работа выполнена по программе государственного задания № 123021700050-1.

**Для цитирования:** Перельмутер М. Н. Напряженное состояние вблизи дентальных имплантатов при резорбции костных тканей // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 482–495. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-482-495>, EDN: ORWLCI

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

## Stress state near dental implants accounting bone tissues resorption

M. N. Perelmuter

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, 101-1 Prospekt Vernadskogo, Moscow 119526, Russia

Mikhail N. Perelmuter, perelm@ipmnet.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8430-5412>, AuthorID: 14187

**Abstract.** The results of numerical modeling by the boundary integral equations method (BIEM) of the effect of bone tissues resorption on the stress state near screw dental implants under action of normal and inclined compressive loads are presented. The direct version of the BIEM for piecewise homogeneous sub-regions is used. The computation of the implant and the surrounding bone tissues stresses was carried out for plane strain state, assuming the complete bonding of materials at the interface of the implant and bones (osteointegration) and consisted of two stages: 1) analysis of the entire implant structure with smoothed screw joint between implant and the surrounding bone tissues; 2) studies of stress distribution taking into account the shape of the screw joint of the implant and bone tissues. The model of the first stage of computations consisted of 7 sub-regions corresponding to the parts of the implant structure and bone tissues zones. On the second stage of computations it was assumed that those hollows in the spongy bone, which had formed in a bone after implant penetration, are conformed to the screw thread on the implant. The effect of bone tissues resorption on stresses concentration in the screw joint of implants and spongy bone tissue is considered. The creating of computation models was performed on the assumption that the result of bones resorption is the cavity formation around implants. The computations were performed under the assumption that the bone tissues are isotropic and homogeneous elastic materials. It was found that as a result of resorption, there is a significant stresses redistribution in bone tissues and the implant with maximum equivalent stresses decreasing in the cortical bone tissue and increasing in spongy bone tissue. The results are presented as the distributions of stress intensity along the sub-regions boundaries of the computational model.

**Keywords:** implant, screw joint, bone tissues resorption, method of boundary integral equations, stress-strain state, stress concentration

**Acknowledgements:** This work was supported by the state program State Assignment No. 123021700050-1.

**For citation:** Perelmuter M. N. Stress state near dental implants accounting bone tissues resorption. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 482–495 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-482-495>, EDN: ORWLCI

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

### Введение

Одной из основных проблем в стоматологической имплантологии является резорбция костных тканей, которая сокращает время службы имплантатов. Причины резорбции многообразны и зависят от качества костных тканей пациентов, а также от технологии медицинских процедур установки имплантатов [1]. Перегрев костной ткани при сверлении в процессе установки имплантата может быть одной из причин



повреждения костных тканей и последующей их резорбции. Установка имплантатов с избыточным усилием может привести к значительным напряжениям в кортикальной и губчатой костных тканях, что также является фактором, способствующим резорбции костных тканей вблизи имплантатов. Резорбция костных тканей зависит от модели имплантатов, их размеров, форм и материалов, из которых они изготовлены. Биологическими факторами, влияющими на резорбцию костных тканей, являются, кроме недостаточного качества костной ткани, ранняя нагрузка имплантата и неудовлетворительная остеоинтеграция между имплантатом и костной тканью. Формирование на имплантате зубного камня, являющегося источником бактерий, является дополнительной причиной резорбции. Различные аспекты причин резорбции костных тканей обсуждаются в работах [2–6].

Для моделирования напряженного состояния стоматологических имплантатов и костных тканей в последние десятилетия используются численные методы. Наибольшее распространение получил метод конечных элементов (МКЭ) [7–12]. МГИУ в задачах стоматологической биомеханики используется не так широко. Одно из первых применений этого метода было в 1993 г. для анализа напряженного состояния соединения цилиндрического имплантата и костной ткани [13]. МГИУ также применялся для анализа напряженного состояния стоматологических имплантатов, изготовленных из различных материалов (титана или керамики) [14]. Сравнительный анализ применения МКЭ и МГИУ для оценки напряженного состояния имплантатов и костной ткани был выполнен в [15, 16]. При использовании МГИУ, ввиду независимого моделирования перемещений и напряжений на поверхности тела, в зонах с высокими градиентами напряжений можно получить результаты, сопоставимые с результатами, полученными с помощью МКЭ, но без существенного измельчения сетки элементов. В данной работе МГИУ используется для сравнительного анализа влияния глубины зоны вертикальной резорбции костных тканей на напряженное состояние в этих тканях и имплантате.

## 1. Методика численного решения

Для численного анализа напряженно-деформированного состояния в работе используется прямой вариант МГИУ [17]. Двумерная составная конструкция моделируется набором однородных подобластей. Такой подход позволяет рассматривать соединения различных материалов в конструкции, а также условия неидеального соединения между подобластями. Граничное интегральное уравнение (ГИУ) теории упругости для каждой однородной подобласти конструкции без учета массовых сил и температурных воздействий имеет вид [17]

$$c_{ij}(p)u_i(p) = \int_{\Gamma} [G_{ij}(p, q)t_i(q) - F_{ij}(p, q)u_i(q)]d\Gamma(q), \quad i, j = 1, 2, \quad (1)$$

где точки  $p$  и  $q$  принадлежат границе подобласти  $\Gamma$ ,  $u_i(q)$  — перемещения и  $t_i(q)$  — усилия на границе подобласти,  $c_{ij}(p)$  — функции, зависящие от локальной геометрии границы подобласти в точке  $p$ . Функции  $G_{ij}(p, q)$  и  $F_{ij}(p, q)$  являются фундаментальными решениями Кельвина для задачи теории упругости (плоская деформация) [17].

На участках идеального контакта подобластей полагаем, что выполняются условия непрерывности для перемещений и равновесия для усилий ( $k$  и  $n$  — номера соседних подобластей)

$$u_i^k(p) = u_i^n(p), \quad t_i^k(p) = -t_i^n(p). \quad (2)$$



Для численного решения ГИУ используются изопараметрические квадратичные граничные элементы. Дискретизация границ подобластей и аппроксимация переменных позволяет заменить вычисление интегралов по всей поверхности подобласти в ГИУ (1) суммой интегралов по совокупности граничных элементов, представляющих поверхность подобласти, и получить для каждой точки коллокации  $p$  дискретное представление ГИУ. Сингулярное поведение фундаментальных решений в ГИУ (1) проявляется в основном при вычислении интегралов по элементам, содержащим точку коллокации  $p$ . Ввиду этого рассматривается два случая расположения точки  $p$ : а)  $p \notin e$ ; б)  $p \in e$ , здесь  $e$  — граничный элемент, по которому выполняется интегрирование. В первом случае интегрирование выполняется по квадратурным формулам Гаусса – Лежандра с учетом сгущения точек интегрирования в направлении точки коллокации. При  $p \in e$  фундаментальное решение плоской задачи теории упругости для перемещений  $G_{ij}(p, q)$  содержит слабую логарифмическую особенность и интегралы в дискретном представлении ГИУ, содержащие эту функцию, вычисляются с использованием квадратурной формулы с логарифмической весовой функцией. Фундаментальное решение для поверхностных усилий  $F_{ij}(p, q)$  содержит сильную особенность, и вычисление суммы соответствующих интегралов и параметра  $c_{ij}(p)$  выполняется косвенным путем, исходя из смещения тела как жесткого целого (см. описание алгоритма численного интегрирования для двумерных и пространственных задач в [18]). Обходя последовательно узловые точки границ всех подобластей, получаем систему дискретных ГИУ для всей конструкции. Учет граничных условий на внешних границах подобластей и дополнительных условий на участках соединения подобластей (2) позволяет получить из системы дискретных ГИУ для всех подобластей конструкции систему линейных алгебраических уравнений для определения узловых неизвестных задачи. Методика численного решения ГИУ реализована в комплексе программ «МЕГРЭ» (МЕтод ГРаничных Элементов) [18–20], который использован для получения результатов, приведенных в данной статье.

При резорбции костной ткани вблизи имплантата происходит формирование полости (лунки резорбции) между имплантатом и костью, приводящее к обнажению верхней части имплантата. Расчет напряженно-деформированного состояния имплантата и окружающих костных тканей с учетом резорбции выполнен в постановке плоского деформированного состояния и состоял из двух этапов: 1) анализа всей конструкции имплантата со сглаженным винтовым соединением между имплантатом и окружающими костными тканями; 2) исследования распределения напряжений в винтовом соединении в зоне сцепления имплантата с костной тканью. Лунка резорбции между имплантатом и костной тканью моделировалась как клиновидное отслоение кости в верхней части имплантата. Расчеты выполнены при допущении, что костная ткань является изотропным и однородным упругим материалом. Значения модулей упругости кортикальной и губчатой костных тканей изменяются в достаточно широком диапазоне [21]. При выполнении данного исследования полагалось, что модуль упругости губчатой костной ткани —  $E_s = 0.5$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu_s = 0.35$ , а модуль упругости кортикальной костной ткани —  $E_c = 18$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu_c = 0.3$ . Полагалось, что коронка имплантата является керамической ( $E_k = 70$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu_k = 0.19$ ), остальные части имплантата изготовлены из титана ( $E_t = 110$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu_t = 0.3$ ).

Результаты расчетов представлены в виде распределений интенсивности напряжений по границам подобластей расчетной модели. Интенсивность напряжений (эквивалентные напряжения, напряжения по Мизесу) для состояния плоской деформации определяется как  $\sigma_i = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}$ , где  $\sigma_{1,2,3}$  — главные напряжения.

## 2. Анализ влияния резорбции костной ткани на напряженное состояние на полной конструкции имплантата

Полная конструкция разборного имплантата включает в себя собственно имплантат (искусственный корень, внедряемый в костную ткань десны), керамическую коронку с каркасом и соединительные детали (абатмент и винт). Расчетная модель данного этапа (содержит 7 подобластей) с учетом резорбции костной ткани, с указанием вида нагрузки и граничных условий, а также увеличенное изображение верхней части модели представлены на рис. 1 (для удобства графического представления

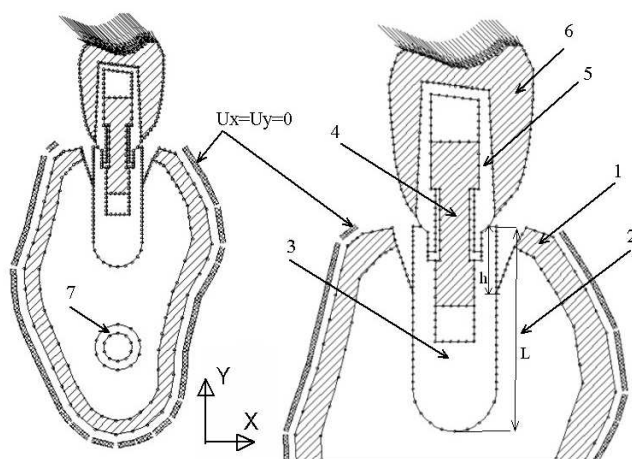


Рис. 1. Дискретизация границ подобластей имплантата и костных тканей, действие наклонной нагрузки, глубина зоны резорбции между имплантатом и костью  $h/L = 1/3$ , семь подобластей (1 — внешний слой кортикальной кости; 2 — губчатая кость; 3 — имплантат; 4 — винт; 5 — абатмент; 6 — керамическая коронка и каркас; 7 — кортикальная стенка канала), 1166 узлов во всей модели

Fig. 1. Boundary elements discretization of the implant and surrounding bone tissues under inclined load application, bone resorption cavity depth  $h/L = 1/3$ , seven subregions (1 — external layer of the cortical bone; 2 — spongy bone; 3 — implant, 4 — screw; 5 — abutment; 6 — crown and framework; 7 — cortical wall of the channel), total 1166 nodes

кортикальной кости полагалось равным толщине слоя этой кости. Расчетные модели были сформированы для двух случаев глубины  $h$  лунки резорбции между имплантатом (подобласть 3) и костными тканями —  $h/L = 1/3$  (см. рис. 1) и  $h/L = 1/2$ .

Сжимающая нагрузка величиной  $p = 6$  МПа, соответствующая усилию жевания (по результатам работы [22]), прикладывалась к окклюзионной поверхности коронки в двух вариантах (в вертикальном направлении и под углом  $45^\circ$  к вертикали) (см. рис. 1, зона б). По внешней границе кортикальной кости (рис. 1, зона 1) заданы нулевые перемещения (за исключением участков, примыкающих к корню имплантата). Заштрихованная тонкая зона показывает область заданных нулевых перемещений по внешней границе кортикальной кости (это обозначение только на рисунке, не

внешний слой кортикальной кости, винт, каркас и коронка заштрихованы). Три подобласти моделируют костные ткани: подобласть 1 — внешний слой кортикальной кости (средняя толщина слоя 1.7 мм), подобласть 2 — губчатая кость — основная часть костной ткани челюсти; подобласть 7 — слой кортикальной кости толщиной 1 мм, формирующий стенки нижнечелюстного канала диаметром 3 мм. Остальные подобласти модели соответствуют элементам конструкции имплантата (длина цилиндрической части имплантата  $L = 14$  мм, подобласть 3). Между всеми соединенными элементами модели полагается выполнение условий идеального сцепления, включая зону соединения цилиндрической части имплантата и губчатой костной ткани (полная остеоинтеграция). Полость, образующаяся при резорбции, моделируется как клиновидное отслоение костных тканей от верхней части имплантата на участке глубиной  $h$ , расстояние от верхнего края поверхности имплантата до верхнего края



является частью модели). При площади контактной поверхности коронки  $S \approx 1 \text{ см}^2$  заданное усилие  $p$  соответствует приложенной силе  $F \approx 600 \text{ Н}$ .

Анализ результатов расчетов показал, что при резорбции костной ткани происходит значительное перераспределение напряжений вблизи имплантата. Напряжения в кортикальной костной ткани снижаются, в губчатой — возрастают (таблица).

Максимальные эквивалентные напряжения в костных тканях (МПа)

Table. Maximum equivalent stresses in the bone tissues (MPa)

Глубина лунки резорбции	Нормальная нагрузка		Наклонная нагрузка	
	Кортикальная кость	Губчатая кость	Кортикальная кость	Губчатая кость
Нет резорбции	69.	2.6	76.1	4.3
1/3 высоты имплантата	18.6	16.7	16.9	28.4
1/2 высоты имплантата	7.0	22.4	19.5	45.2

Распределение интенсивности напряжений по границе губчатой кости с учетом резорбции ( $h/L = 1/3$ ) приведено на рис. 2 для нормальной и наклонной нагрузок. При нормальной нагрузке максимальные напряжения наблюдаются у основания лунки, образовавшейся при резорбции костной ткани, в зоне контакта губчатой кости и имплантата (рис. 2, а). При наклонной нагрузке значительные напряжения, вызванные изгибом, возникают также в зоне контакта губчатой кости и основания имплантата (рис. 2, б).

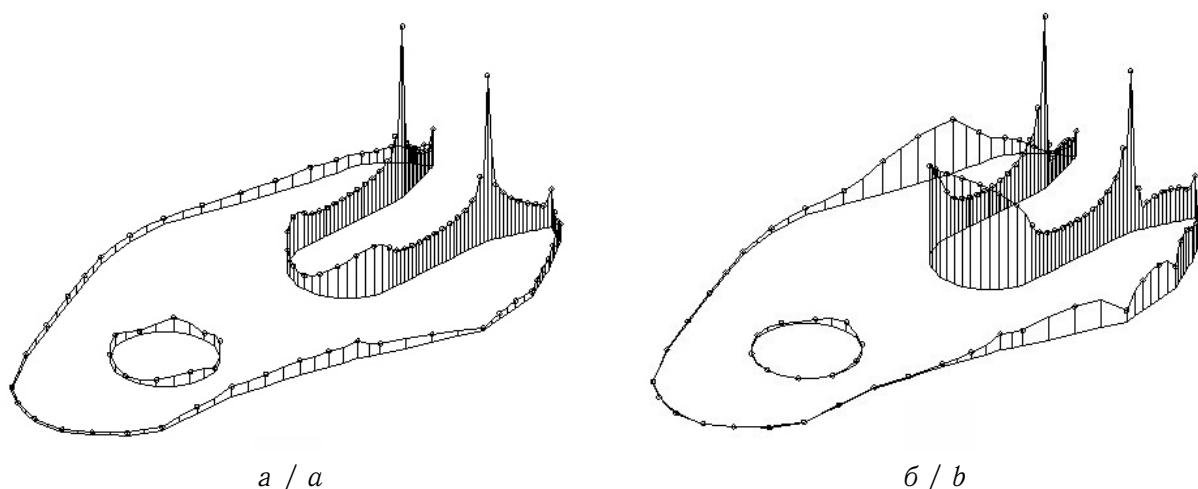


Рис. 2. Интенсивность напряжений  $\sigma_i$  вдоль контура губчатой кости,  $h/L = 1/3$ : а — нормальная нагрузка на коронку,  $\sigma_{i,\text{max}} = 16.7 \text{ МПа}$ ; б — наклонная нагрузка на коронку,  $\sigma_{i,\text{max}} = 28.4 \text{ МПа}$

Fig. 2. Stresses intensity  $\sigma_i$  along the spongy bone contour,  $h/L = 1/3$ : a is normal load on the crown,  $\sigma_{i,\text{max}} = 16.7 \text{ МПа}$ ; b is inclined load on the crown,  $\sigma_{i,\text{max}} = 28.4 \text{ МПа}$

Увеличение глубины лунки резорбции на 50% (до  $h/L = 1/2$ ) приводит к значительному возрастанию максимальных напряжений в губчатой кости (рис. 3).

Для оценки влияния модуля упругости губчатой костной ткани на величину максимума интенсивности напряжений выполнена серия расчетов при различных значениях модуля упругости кортикальной кости (рис. 4). При возрастании модуля упругости губчатой кости (что соответствует увеличению ее плотности) величина эквивалентных напряжений возрастает, если  $E_s > 3 \text{ ГПа}$ . При меньших значениях

модуля упругости губчатой кости ( $0.5 \leq E_s \leq 3$ , ГПа) величина максимальных эквивалентных напряжений меняется слабо и практически не зависит от модуля упругости кортикальной кости.

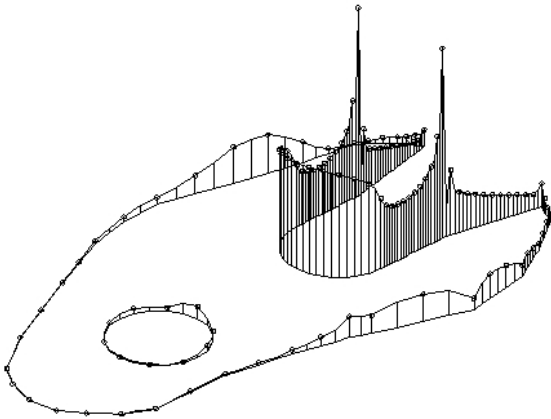


Рис. 3. Интенсивность напряжений  $\sigma_i$  вдоль контура губчатой кости,  $h/L = 1/2$ , наклонная нагрузка на коронку,  $\sigma_{i,\max} = 45.2$  МПа  
Fig. 3. Stresses intensity  $\sigma_i$  along the spongy bone contour,  $h/L = 1/2$ , inclined load on the crown,  $\sigma_{i,\max} = 45.2$  МПа

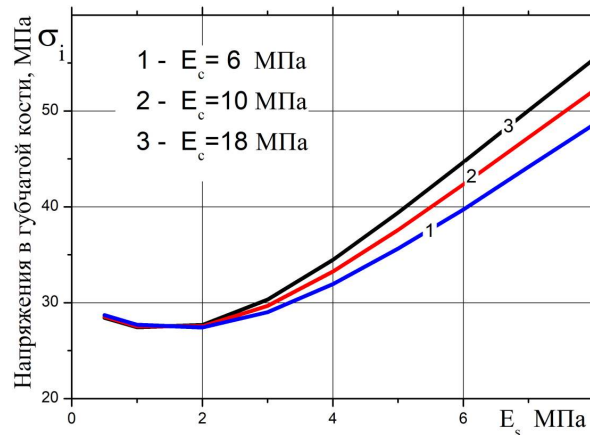


Рис. 4. Максимальные напряжения  $\sigma_i$  в губчатой кости,  $h/L = 1/3$ , наклонная нагрузка на коронку

Fig. 4. Maximum stresses  $\sigma_i$  in the spongy bone,  $h/L = 1/3$ , inclined load on the crown

### 3. Напряженное состояние при резорбции с учетом формы винтового соединения имплантата и костной ткани

Исследование влияния резорбции костной ткани на напряженное состояние вблизи имплантата выполнено на модели винтового соединения имплантата и костной ткани. Внешняя часть конструкции (коронка и абатмент) отсечена, и нагрузка прикладывалась непосредственно к имплантату. Полагалось, что углубления в губчатой кости, образующиеся при внедрении имплантата в костную ткань, соответствуют резьбе на имплантате. Предполагалось также, что на границе имплантата и кости выполняются условия идеального соединения, что соответствует полной остеоинтеграции в системе кость – имплантат. Форма поперечного сечения выступов винтового соединения, канавок между витками резьбы на имплантате и форма углублений в кости моделировались как равносторонний треугольник со стороной  $a = 0.93$  мм (при 12 зубцах по длине  $L = 14$  мм имплантата). Радиус закругления вершин зубцов и впадин между витками ( $r$ ) принимался равным половине радиуса окружности  $R$ , вписанной в равносторонний треугольник со стороной  $a$ :  $R = 0.5a \cdot \operatorname{tg}(30^\circ)$ ,  $r = 0.5R$ . Расчеты выполнены при нормальной и наклонной нагрузках. Модель состояла из трех подобластей, представляющих костные ткани (кортикальную и губчатую) и внедряемую в костную ткань винтовую часть имплантата (рис. 5). Граничные условия (зоны закрепления) показаны на рисунке тонкой штриховой полосой, так же как на рис. 1. Сжимающая нагрузка  $p = 10$  МПа прикладывалась по нормали и под углом  $45^\circ$  к плоскости сечения имплантата в предположении, что нагрузка, приложенная к верхней части коронки, передается на сечение имплантата (ширина сечения  $d = 5.68$  мм).

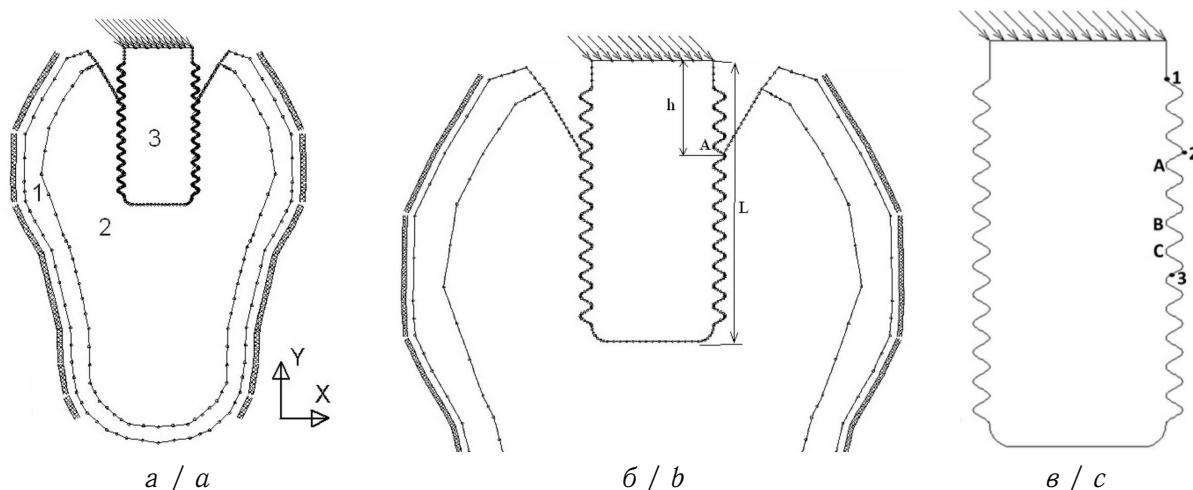


Рис. 5. Дискретизация границ подобластей имплантата и костных тканей с учетом винтового соединения, действие наклонной нагрузки, глубина зоны резорбции  $h/L = 1/3$ , три подобласти, 1740 узлов во всей модели: а — модель целиком (1 — кортикальная кость; 2 — губчатая кость, 3 — имплантат); б — зона резорбции в увеличенном масштабе; в — имплантат, А, В, С — положения максимумов напряжений при различной глубине зоны резорбции

Fig. 5. Boundary elements discretization with screw joint of the implant and surrounding bone tissues under inclined load application, bone resorption cavity depth  $h/L = 1/3$ , three subregions, total 1740 nodes: a is the whole model (1 is cortical bone; 2 is sponge bone; 3 is implant root); b is enlarged resorption zone; c is implant, A, B, C is positions of stresses maximum for different resorption cavity depths

Увеличение нагрузки выполнено для учета изгибающего момента, возникающего ввиду несимметрии коронки. Как и в разделе 2, зона резорбции моделируется как клиновидное отслоение костных тканей от верхней части имплантата на участке глубиной  $h$ . Расчеты выполнены для трех вариантов глубины лунки резорбции костной ткани —  $h/L = 1/3$  (см. рис. 5),  $h/L = 1/2$  и  $h/L = 0.6$ . Расстояние от края имплантата до верхнего края кортикальной кости полагалось равным радиусу имплантата  $0.5d = 2.84$  мм для всех вариантов глубины лунки резорбции.

Распределения интенсивности напряжений по границе губчатой кости при учете винтовой формы соединения имплантата и костной ткани для нормальной и наклонной нагрузок приведены на рис. 6. При нормальной нагрузке максимальные эквивалентные напряжения наблюдаются у основания лунки, образовавшейся при резорбции кости, в зоне контакта губчатой кости и имплантата. Значительные напряжения возникают также в зоне контакта губчатой кости с нижней частью имплантата (рис. 6, а). При наклонной нагрузке ввиду наличия изгиба интенсивность напряжений значительно возрастает. Максимальные эквивалентные напряжения также наблюдаются у основания лунки, образовавшейся при резорбции кости, в области контакта губчатой кости и имплантата в зоне действия сжимающих напряжений. Напряжения у основания лунки резорбции со стороны растяжения меньше максимальных значений эквивалентных напряжений со стороны сжатия на 3–5% (рис. 6, б). В области контакта губчатой кости с нижней частью имплантата (рис. 6, б) эквивалентные напряжения значительно ниже максимальных величин.

Резорбция костной ткани приводит к значительному перераспределению напряжений в имплантате. Напряжения по границе модели импланта при нормальной нагрузке при учете резорбции приведены на рис. 7, а. В результате резорбции кости положение



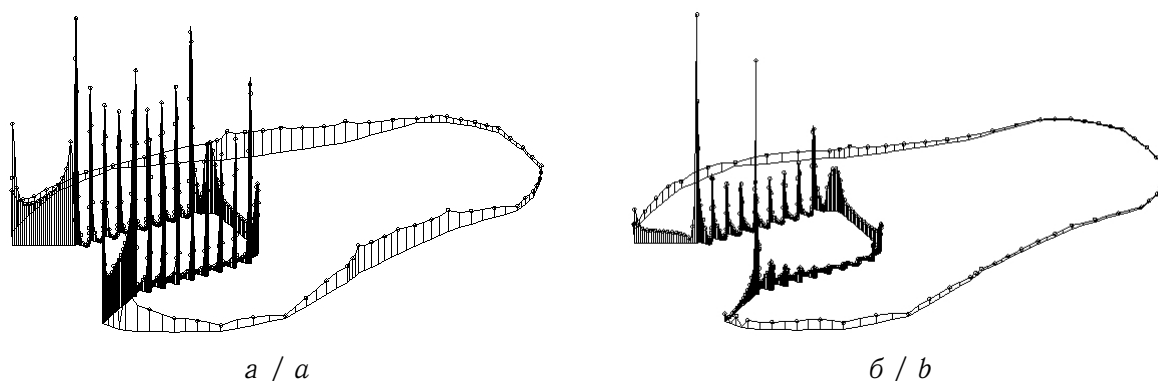


Рис. 6. Интенсивность напряжений  $\sigma_i$  вдоль контура губчатой кости,  $h/L = 1/3$ , учет винтового соединения: *a* — нормальная нагрузка,  $\sigma_{i,\max} = 14.7$  МПа; *b* — наклонная нагрузка,  $\sigma_{i,\max} = 62.4$  МПа

Fig. 6. Intensity of stresses  $\sigma_i$  along the spongy bone contour,  $h/L = 1/3$ , screw joint modelling: *a* is normal load,  $\sigma_{i,\max} = 14.7$  МПа; *b* is inclined load,  $\sigma_{i,\max} = 62.4$  МПа

максимума напряжений в имплантате смещается от верхней части имплантата (где располагается при отсутствии резорбции, см. [14]) и наблюдается у основания лунки резорбции. Распределение напряжений по контуру модели имплантата при наклонной нагрузке и учете резорбции костной ткани представлено на рис. 7, б. При действии наклонной нагрузки максимальные значения напряжений в имплантате (так же как и в губчатой кости) наблюдаются у основания лунки резорбции со стороны сжатия, и величина максимальных напряжений значительно выше, чем при отсутствии резорбции. При увеличении глубины лунки резорбции максимальные напряжения значительно возрастают.

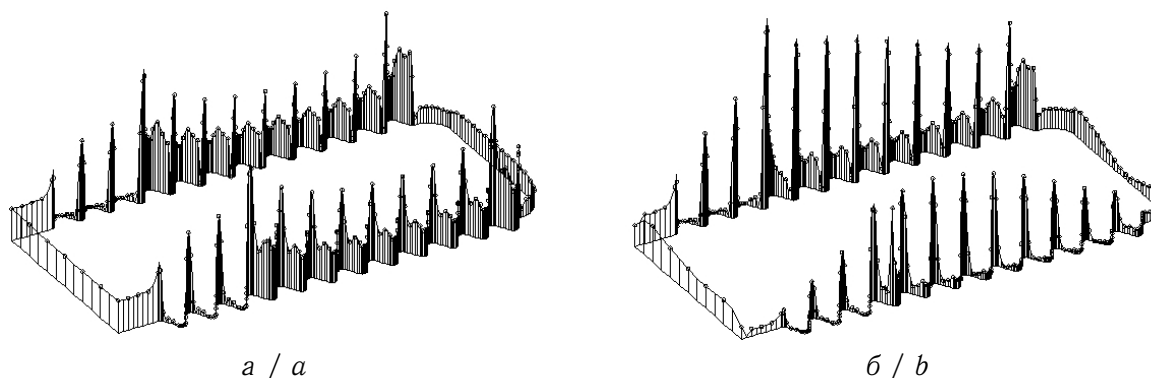


Рис. 7. Интенсивность напряжений  $\sigma_i$  вдоль контура имплантата,  $h/L = 1/3$ , учет винтового соединения: *a* — нормальная нагрузка,  $\sigma_{i,\max} = 37.1$  МПа; *b* — наклонная нагрузка,  $\sigma_{i,\max} = 107.7$  МПа

Fig. 7. Intensity of stresses  $\sigma_i$  along the implant contour,  $h/L = 1/3$ , screw joint modelling: *a* is normal load on the implant,  $\sigma_{i,\max} = 37.1$  МПа; *b* is inclined load on the implant,  $\sigma_{i,\max} = 107.7$  МПа

Анализ результатов расчетов при учете формы винтового соединения имплантата и костной ткани показывает, что, как и при расчете полной конструкции имплантата без учета формы винтового соединения, наблюдается значительное перераспределение напряжений вблизи имплантата при резорбции костной ткани. При увеличении глубины лунки резорбции напряжения в кортикальной костной ткани снижаются, а в губчатой — возрастают, как при нормальной, так и при наклонной нагрузках (рис. 8).



Под действием наклонной нагрузки значительная концентрация напряжений в имплантате наблюдается на стороне сжатия. На рис. 9 приведены графики интенсивности напряжений на стороне сжатия вдоль контура имплантата для трех рассмотренных вариантов глубины лунки резорбции. За начало отсчета длины контура принята точка 1 на поверхности имплантата (см. рис. 5, в) и на рис. 9 представлены распределения интенсивности напряжений на участке поверхности имплантата между точкам 2 и 3 (расстояние от точки 1 до точки 2 вдоль контура модели  $s \approx 3.6$  мм, точка 3 расположена на выступе имплантата, следующем после линии контакта между губчатой костью и имплантатом при  $h/L = 0.6$ ).

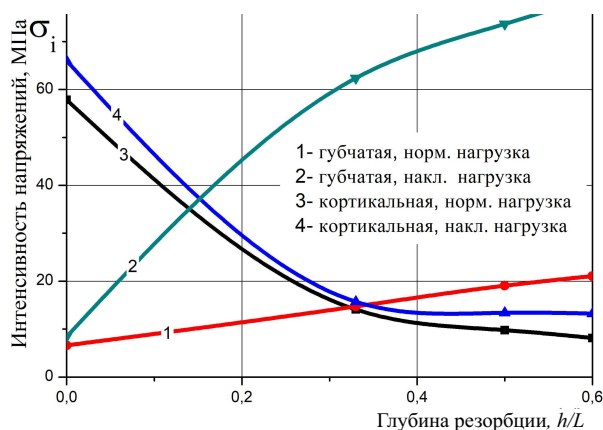


Рис. 8. Винтовое соединение, максимальные напряжения в костной ткани при изменении глубины лунки резорбции  $h/L$   
 Fig. 8. Screw join, maximum stresses in the bone tissues; resorption cavity depth  $h/L$  variation

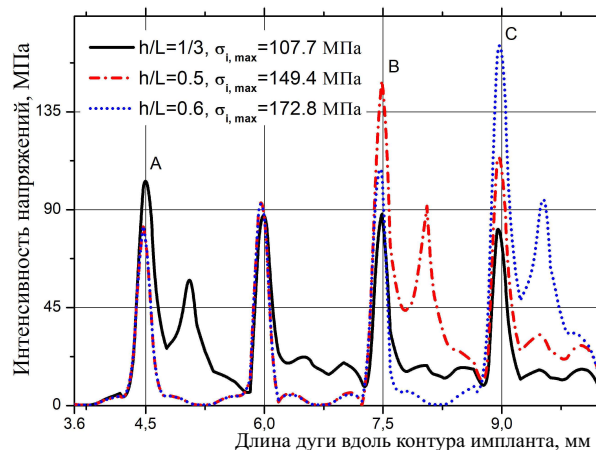


Рис. 9. Распределение напряжений вдоль части винтовой поверхности имплантата, наклонная нагрузка  
 Fig. 9. Stresses along the part of screw implant surface, inclined load

Во всех рассмотренных вариантах глубины лунки резорбции концентрация напряжений наблюдается на дне канавки резьбы, расположенной на имплантате перед линией контакта с губчатой костью. С увеличением глубины лунки резорбции величина максимума напряжений возрастает. Выбор участка поверхности имплантата между точкам 2 и 3 дает возможность представить распределение напряжений для трех рассмотренных вариантов глубины лунки резорбции с указанием их максимальных значений. Точка А (см. рис. 5, б, в и рис. 9) указывает положение максимума при  $h/L = 1/3$ . Точки В и С, соответствующие максимумам напряжений при  $h/L = 1/2$  и  $h/L = 0.6$ , указаны на рис. 5, в и рис. 9. Отметим, что в губчатой кости, вблизи линии контакта с имплантатом, на дне углубления, образованного при внедрении имплантата в кость, также наблюдаются максимальные напряжения (см. рис. 6).

Максимальные напряжения в костных тканях при учете резорбции, полученные как на полной конструкции имплантата (см. таблицу), так и при учете формы винтового соединения, превышают пределы прочности кортикальной и губчатой костных тканей на растяжение и сжатие (см. [23, 24]). Следует отметить, что представленные результаты получены при достаточно высокой нагрузке на имплантат ( $F \approx 600$  Н). По другим оценкам [25], жевательная нагрузка на имплантат не превышает  $F \approx 150$  Н, при которой напряжения в костных тканях будут в четыре раза меньше. Но даже в этом случае при наклонном приложении нагрузки максимальные напряжения в



губчатой кости при  $h/L = 1/3$  составляют  $\sigma_{i,max} \approx 7.1$  МПа, что сравнимо с пределом прочности губчатой кости. При учете концентрации напряжений в винтовом соединении в имплантате имеются зоны высоких напряжений, не превышающих пределов текучести и прочности титана. Действие высоких напряжений приводит к снижению долговечности имплантата, но более вероятным результатом резорбции костных тканей является отторжение имплантата.

## Заключение

1. Установлено, что при резорбции костной ткани происходит значительное перераспределение напряжений в костной ткани вблизи имплантата. Максимальные эквивалентные напряжения в кортикальной костной ткани снижаются, в губчатой костной ткани — возрастают.

2. Возрастание напряжений в губчатой кости существенно зависит от степени резорбции костной ткани и при значительной резорбции превышает предел прочности костной ткани.

3. Влияние резорбции костной ткани на напряженное состояние вблизи имплантата наиболее существенно при наклонной нагрузке. В этом случае при резорбции, не превышающей трети высоты имплантата, может наблюдаться деструкция губчатой костной ткани.

4. Высокие напряжения в кортикальной кости в пришеечной зоне контакта этой кости с имплантатом могут являться одной из причин начала резорбции костной ткани. При значительных наклонных нагрузках возможно образование односторонней резорбции кости.

5. Резорбция костной ткани приводит к перераспределению напряжений не только в костном ложе вблизи имплантата, но и в самом имплантате. При значительных наклонных нагрузках максимальные эквивалентные напряжения в имплантате значительно возрастают, что может привести к снижению долговечности имплантата.

## Список литературы

1. *Параскевич В. Л.* Дентальная имплантология: Основы теории и практики. 3-е изд. Москва : Медицинское информационное агентство, 2011. 400 с.
2. *Brunski J. B.* Biomechanical factors affecting the bone-dental implant interface // *Clinical Materials*. 1992. Vol. 10, iss. 3. P. 153–201. [https://doi.org/10.1016/0267-6605\(92\)90049-Y](https://doi.org/10.1016/0267-6605(92)90049-Y)
3. *Hashim D., Cionca N.* A comprehensive review of peri-implantitis risk factors // *Current Oral Health Reports*. 2020. Vol. 7, iss. 3. P. 262–273. <https://doi.org/10.1007/s40496-020-00274-2>
4. *Kowalski J., Lapinska B., Nissan J., Lukomska-Szymanska M.* Factors influencing marginal bone loss around dental implants: A narrative review // *Coatings*. 2021. Vol. 11, iss. 7. P. 865–877. <https://doi.org/10.3390/coatings11070865>
5. *Nimbalkar S., Dhattrak P., Gherde C., Joshi S.* A review article on factors affecting bone loss in dental implants // *Materials Today: Proceedings*. 2021. Vol. 43, pt. 2. P. 970–976. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.07.428>
6. *Aydin K., Okten K., Ugur L.* An analytical and numerical approach to the determination of thermal necrosis in cortical bone drilling // *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*. 2022. Vol. 38, iss. 10. P. 3640–3644. <https://doi.org/10.1002/cnm.3640>
7. *Kitamura E., Stegaroiu R., Nomura S., Miyakawa O.* Influence of marginal bone resorption on stress around an implant — a three-dimensional finite element analysis // *Journal of Oral Rehabilitation*. 2005. Vol. 32, iss. 4. P. 279–286. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2842.2004.01413.x>



8. Wolff J., Narra N., Antalainen A.-K., Valasek J., Kaiser J., Sandor G. K., Marcian P. Finite element analysis of bone loss around failing implants // *Materials & Design*. 2014. Vol. 61. P. 177–184. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2014.04.080>
9. Linetskiy I., Demenko V., Linetska L., Yefremov O. Impact of annual bone loss and different bone quality on dental implant success — a finite element study // *Computers in Biology and Medicine*. 2017. Vol. 91. P. 318–325. <https://doi.org/10.1016/j.compbiomed.2017.09.016>
10. Chang Y., Tambe A. A., Maeda Y., Wada M., Gonda T. Finite element analysis of dental implants with validation: To what extent can we expect the model to predict biological phenomena? A literature review and proposal for classification of a validation process // *International Journal of Implant Dentistry*. 2018. Vol. 4. P. 1–14. <https://doi.org/10.1186/s40729-018-0119-5>
11. Buyuk F. N., Savran E., Karpat F. Review on finite element analysis of dental implants // *Journal of Dental Implant Research*. 2022. Vol. 41, iss. 3. P. 50–63. <https://doi.org/10.54527/jdir.2022.41.3.50>
12. Дьяченко Д. Ю., Дьяченко С. В. Применение метода конечных элементов в компьютерной симуляции для улучшения качества лечения пациентов в стоматологии: систематический обзор // *Кубанский научный медицинский вестник*. 2021. Т. 28, № 5. С. 98–116. <https://doi.org/10.25207/1608-6228-2021-28-5-98-116>
13. Wolfe L. A. Stress analysis of endosseous implants using the Boundary Integral Equation (BIE) method // *Journal of Biomedical Engineering*. 1993. Vol. 15, iss. 4. P. 319–323. [https://doi.org/10.1016/0141-5425\(93\)90009-N](https://doi.org/10.1016/0141-5425(93)90009-N)
14. Перельмутер М. Н. Исследование напряженно-деформированного состояния стоматологических имплантатов методом граничных интегральных уравнений // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2018. № 2. С. 83–95. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.08>
15. Citarella R., Armentani E., Caputo F., Lepore M. Stress analysis of an endosseous dental implant by BEM and FEM // *The Open Mechanical Engineering Journal*. 2012. Vol. 6. P. 115–124. <https://doi.org/10.2174/1874155X01206010115>
16. Perrella M., Franciosa P., Gerbino S. FEM and BEM stress analysis of mandibular bone surrounding a dental implant // *The Open Mechanical Engineering Journal*. 2015. Vol. 9. P. 282–292. <https://doi.org/10.2174/1874155X01509010282>
17. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. Москва : Мир, 1981. 494 с.
18. Перельмутер М. Н. Применение метода граничных элементов при исследовании пространственного напряженного состояния составных конструкций // *Проблемы прочности и динамики в авиадвигателестроении*. Вып. 4 : сб. ст. Москва : ЦИАМ, 1989. С. 74–99. (Труды ЦИАМ. № 1237).
19. Perelmuter M. Boundary element analysis of structures with bridged interfacial cracks // *Computational Mechanics*. 2013. Vol. 51, iss. 4. P. 523–534. <https://doi.org/10.1007/s00466-012-0817-4>
20. Perelmuter M. Analysis of interaction of bridged cracks and weak interfaces // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2018. Vol. 149. P. 349–360. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.10.011>
21. Odin G., Savoldelli C., Bouchard P.-O., Tillier Y. Determination of Young's modulus of mandibular bone using inverse analysis // *Medical Engineering and Physics*. 2010. Vol. 32, iss. 6. P. 630–637. <https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2010.03.009>
22. Король Д. М., Николов В. В., Оникко Е. Л., Ефименко А. С. Определение интенсивности окклюзионного давления у пациентов на ортопедическом приеме // *Современная медицина: актуальные вопросы*. 2015. № 8–9 (42). С. 40–46. EDN: UINWJH
23. Misch C. E., Qu Z., Bidez M. W. Mechanical properties of trabecular bone in the human mandible: Implications for dental implant treatment planning and surgical placement //



- Journal of Oral and Maxillofacial Surgery. 1999. Vol. 57. P. 700–706. [https://doi.org/10.1016/S0278-2391\(99\)90437-8](https://doi.org/10.1016/S0278-2391(99)90437-8)
24. Reilly D. T., Burstein A. H. The elastic and ultimate properties of compact bone tissue // Journal of Biomechanics. 1975. Vol. 8, iss. 6. P. 393–405. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(75\)90075-5](https://doi.org/10.1016/0021-9290(75)90075-5)
25. Олесова В. Н., Бронштейн Д. А., Лернер А. Я., Олесов Е. Е., Бобер С. А., Узунян Н. А. Напряженно-деформированное состояние в протезной конструкции на дентальном имплантате при цементной фиксации искусственной коронки // Российский журнал биомеханики. 2016. Т. 20, № 4. С. 311–315. <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2016.4.02>

### References

1. Paraskevich V. L. *Dental'naya implantologiya: Osnovy teorii i praktiki* [Dental Implantology: The Fundamentals of Theory and Practice]. 3rd ed. Moscow, Medical News Agency Publ., 2011. 400 p. (in Russian).
2. Brunski J. B. Biomechanical factors affecting the bone-dental implant interface. *Clinical Materials*, 1992, vol. 10, iss. 3, pp. 153–201. [https://doi.org/10.1016/0267-6605\(92\)90049-Y](https://doi.org/10.1016/0267-6605(92)90049-Y)
3. Hashim D., Cionca N. A comprehensive review of peri-implantitis risk factors. *Current Oral Health Reports*, 2020, vol. 7, iss. 3, pp. 262–273. <https://doi.org/10.1007/s40496-020-00274-2>
4. Kowalski J., Lapinska B., Nissan J., Lukomska-Szymanska M. Factors influencing marginal bone loss around dental implants: A narrative review. *Coatings*, 2021, vol. 11, iss. 7, pp. 865–877. <https://doi.org/10.3390/coatings11070865>
5. Nimbalkar S., Dhattrak P., Gherde C., Joshi S. A review article on factors affecting bone loss in dental implants. *Materials Today: Proceedings*, 2021, vol. 43, pt. 2, pp. 970–976. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.07.428>
6. Aydin K., Okten K., Ugur L. An analytical and numerical approach to the determination of thermal necrosis in cortical bone drilling. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 2022, vol. 38, iss. 10, pp. 3640–3644. <https://doi.org/10.1002/cnm.3640>
7. Kitamura E., Stegaroiu R., Nomura S., Miyakawa O. Influence of marginal bone resorption on stress around an implant — a three-dimensional finite element analysis. *Journal of Oral Rehabilitation*, 2005, vol. 32, iss. 4, pp. 279–286. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2842.2004.01413.x>
8. Wolff J., Narra N., Antalainen A.-K., Valasek J., Kaiser J., Sandor G. K., Marcian P. Finite element analysis of bone loss around failing implants. *Materials & Design*, 2014, vol. 61, pp. 177–184. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2014.04.080>
9. Linetskiy I., Demenko V., Linetska L., Yefremov O. Impact of annual bone loss and different bone quality on dental implant success — a finite element study. *Computers in Biology and Medicine*, 2017, vol. 91, pp. 318–325. <https://doi.org/10.1016/j.combiomed.2017.09.016>
10. Chang Y., Tambe A. A., Maeda Y., Wada M., Gonda T. Finite element analysis of dental implants with validation: To what extent can we expect the model to predict biological phenomena? A literature review and proposal for classification of a validation process. *International Journal of Implant Dentistry*, 2018, vol. 4, pp. 1–14. <https://doi.org/10.1186/s40729-018-0119-5>
11. Buyuk F. N., Savran E., Karpat F. Review on finite element analysis of dental implants. *Journal of Dental Implant Research*, 2022, vol. 41, iss. 3, pp. 50–63. <https://doi.org/10.54527/jdir.2022.41.3.50>
12. Dyachenko D. Yu., Dyachenko S. V. Finite element method in computer simulation for improved patient care in dentistry: A systematic review. *Kuban Scientific Medical Bulletin*,



- 2021, vol. 28, iss. 5, pp. 98–116 (in Russian). <https://doi.org/10.25207/1608-6228-2021-28-5-98-116>
13. Wolfe L. A. Stress analysis of endosseous implants using the Boundary Integral Equation (BIE) method. *Journal of Biomedical Engineering*, 1993, vol. 15, iss. 4, pp. 319–323. [https://doi.org/10.1016/0141-5425\(93\)90009-N](https://doi.org/10.1016/0141-5425(93)90009-N)
  14. Perelmuter M. N. Analysis of stress-strain state of dental implants by the boundary integral equations method. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, iss. 2, pp. 83–95 (in Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.08>
  15. Citarella R., Armentani E., Caputo F., Lepore M. Stress analysis of an endosseous dental implant by BEM and FEM. *The Open Mechanical Engineering Journal*, 2012, vol. 6, pp. 115–124. <https://doi.org/10.2174/1874155X01206010115>
  16. Perrella M., Franciosa P., Gerbino S. FEM and BEM stress analysis of mandibular bone surrounding a dental implant. *The Open Mechanical Engineering Journal*, 2015, vol. 9, pp. 282–292. <https://doi.org/10.2174/1874155X01509010282>
  17. Banerjee P. K., Butterfield R. *Boundary Element Methods in Engineering Science*. London, McGraw Hill, 1981. 452 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1981. 494 p.).
  18. Perelmuter M. N. Application of the boundary elements method for analysis of 3D stress state of composite structures. *Problemy prochnosti i dinamiki v aviadvigatelestroenii. Vyp. 4. (Trudy TsIAM no. 1237)* [Problems of Strength and Dynamics in Aircraft Engine. Iss. 4. Proceedings of CIAM no. 1237]. Moscow, CIAM, 1989, pp. 74–99 (in Russian).
  19. Perelmuter M. Boundary element analysis of structures with bridged interfacial cracks. *Computational Mechanics*, 2013, vol. 51, iss. 4, pp. 523–534. <https://doi.org/10.1007/s00466-012-0817-4>
  20. Perelmuter M. Analysis of interaction of bridged cracks and weak interfaces. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2018, vol. 149, pp. 349–360. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.10.011>
  21. Odin G., Savoldelli C., Bouchard P.-O., Tillier Y. Determination of Young's modulus of mandibular bone using inverse analysis. *Medical Engineering and Physics*, 2010, vol. 32, iss. 6, pp. 630–637. <https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2010.03.009>
  22. Korol D. M., Nikolov V. V., Onipko E. L., Efimenko A. S. Determining the intensity of the occlusal pressure in patients at the orthopaedic reception. *Sovremennaya meditsina: aktual'nye voprosy* [Modern Medicine: Topical Issues], 2015, iss. 8–9 (42), pp. 40–46 (in Russian). EDN: [UINWJH](https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2010.03.009)
  23. Misch C. E., Qu Z., Bidez M. W. Mechanical properties of trabecular bone in the human mandible: Implications for dental implant treatment planning and surgical placement. *Journal of Oral and Maxillofacial Surgery*, 1999, vol. 57, pp. 700–706. [https://doi.org/10.1016/S0278-2391\(99\)90437-8](https://doi.org/10.1016/S0278-2391(99)90437-8)
  24. Reilly D. T., Burstein A. H. The elastic and ultimate properties of compact bone tissue. *Journal of Biomechanics*, 1975, vol. 8, iss. 6, pp. 393–405. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(75\)90075-5](https://doi.org/10.1016/0021-9290(75)90075-5)
  25. Olesova V. N., Bronstein D. A., Lerner A. Y., Olesov E. E., Bober S. A., Uzunyan N. A. Stress-strain state in prosthetic construction on dental implant with cement fixing artificial crown. *Russian Journal of Biomechanics*, 2016, vol. 20, iss. 4, pp. 311–315 (in Russian). <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2016.4.02>

Поступила в редакцию / Received 30.11.2022

Принята к публикации / Accepted 23.01.2023

Опубликована / Published 30.11.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 496–511  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 496–511  
mmi.sgu.ru <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-496-511>, EDN: OZSOKF

Научная статья  
УДК 531/534:[57+61]

## Численный анализ напряженно-деформированного состояния остеотомий первой плюсневой кости

А. В. Полиенко, Д. В. Иванов, С. И. Киреев, Л. В. Бессонов<sup>✉</sup>,  
А. М. Мулдашева, Е. С. Оленко

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

**Полиенко Асель Валерьевна**, старший преподаватель кафедры математической теории упругости и биомеханики, st\_aav@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4471-6599>, AuthorID: 682840

**Иванов Дмитрий Валерьевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, ivanovdv@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-1640-6091>, AuthorID: 201794

**Киреев Сергей Иванович**, доктор медицинских наук, заведующий кафедрой основ медицины и медицинских технологий, kireevsi@ Rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3318-5633>, AuthorID: 620012

**Бессонов Леонид Валентинович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, bessonov@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5636-1644>, AuthorID: 774968

**Мулдашева Алина Мирболатовна**, лаборант отдела компьютерного моделирования в биомедицине и материаловедении, alinamuldasheva@yandex.ru, AuthorID: 1209728

**Оленко Елена Сергеевна**, доктор медицинских наук, профессор кафедры основ медицины и медицинских технологий, olenko@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1573-0623>, AuthorID: 499088

**Аннотация.** Отклонение первого пальца стопы кнаружи, взаимосвязанное с отклонением первой плюсневой кости кнутри, встречается у 46% пациентов старшей возрастной группы и называется вальгусной деформацией первого пальца стопы. Негативное влияние данной патологии на качество жизни пациентов является причиной обращения за медицинской помощью, золотым стандартом оказания которой считается хирургическая коррекция, а базисной хирургической техникой служит остеотомия (распиливание кости и фиксация ее фрагментов имплантатами) первой плюсневой кости. При этом идеальная остеотомия должна обеспечивать первоначальную стабильность в раннем послеоперационном периоде. Однако большое число способов выполнения остеотомии, а также преимущества и недостатки каждого из хирургических приемов не позволяют считать какой-то из них наиболее успешным. В этой связи цель работы состояла в разработке и валидации биомеханической модели остеотомии первой плюсневой кости для анализа ее стабильности и надежности в зависимости от типа остеотомии, степени смещения фрагментов кости, а также количества скрепляющих винтов. В данном исследовании проведено биомеханическое моделирование наиболее часто используемых вариантов остеотомии первой плюсневой кости стопы при хирургическом лечении ее вальгусной деформации. С этой целью было создано 10 моделей остеотомий отдельной первой плюсневой кости, которые затем были подвергнуты статическому нагружению для анализа



их напряженно-деформированного состояния и оценки их успешности. Выявлены успешные (стабильные и надежные) варианты лечения, а также неуспешные. Неуспешными приняты два из десяти рассмотренных вариантов — остеотомии типа scarf со смещением фрагментов кости на 2/3 ее диаметра и закрепленными одним винтом. Выявлено, что остеотомии типа chevron показали более высокую стабильность в сравнении со scarf-osteotomиями. В данном исследовании впервые проведены численные эксперименты для сравнительного анализа стабильности и прочности наиболее часто используемых вариантов остеотомий на базе модели одной кости. Разработана и валидирована на основе натуральных экспериментов биомеханическая модель scarf-osteotomий первой плюсневой кости.

**Ключевые слова:** биомеханика, плюсневая кость, вальгусная деформация, МКЭ, напряжения по Мизесу, валидация численной модели

**Благодарности:** Работа выполнена в рамках государственного задания № FSRR-2023-0009.

**Для цитирования:** Полиенко А. В., Иванов Д. В., Киреев С. И., Бессонов Л. В., Мулдашева А. М., Оленко Е. С. Численный анализ напряженно-деформированного состояния остеотомий первой плюсневой кости // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 496–511. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-496-511>, EDN: OZSOKF

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Numerical analysis of the stress-strain state of osteotomies of the first metatarsal bone

A. V. Polienko, D. V. Ivanov, S. I. Kireev, L. V. Bessonov<sup>✉</sup>,  
A. M. Muldasheva, E. S. Olenko

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

**Asel V. Polienko**, st\_aav@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4471-6599>, AuthorID: 682840

**Dmitry V. Ivanov**, ivanovdv@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-1640-6091>, AuthorID: 201794

**Sergey I. Kireev**, kireevsi@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3318-5633>, AuthorID: 620012

**Leonid V. Bessonov**, bessonov@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5636-1644>, AuthorID: 774968

**Alina M. Muldasheva**, alinamuldasheva@yandex.ru, AuthorID: 1209728

**Elena S. Olenko**, olenco@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1573-0623>, AuthorID: 499088

**Abstract.** Deviation of the first toe to the outside, interconnected with the deviation of the first metatarsal bone to the inside, occurs in 46% of patients of the older age group and is called valgus deformity of the first toe. The negative impact of this pathology on the quality of life of patients is the reason for seeking medical help, the gold standard of which is surgical correction, and the basic surgical technique is osteotomy (sawing the bone and fixing its fragments with implants) of the first metatarsal. At the same time, an ideal osteotomy should provide initial stability in the early postoperative period. However, a large number of ways to perform osteotomy, as well as the advantages and disadvantages of each of the surgical techniques, do not allow to consider one of them as the most successful. In this regard, the aim of the work was to develop and validate a biomechanical model of osteotomy of the first metatarsal bone to analyze its stability and reliability depending on the type of osteotomy, the degree of displacement of





bone fragments, as well as the number of fastening screws. In this study, biomechanical modeling of the most commonly used variants of osteotomy of the first metatarsal bone of the foot in the surgical treatment of its valgus deformity was carried out. For this purpose, 10 models of osteotomies of a separate first metatarsal bone were created, which were then subjected to static loading to analyze their stress-strain state and assess their success. Successful (stable and reliable) treatment options were identified, as well as unsuccessful ones. Two of the ten options considered were unsuccessful – scarf type osteotomies with displacement of bone fragments by 2/3 of its diameter and fixed with a single screw. It was revealed that osteotomies of the chevron type showed higher stability in comparison with scarf osteotomies. As a result, we note that in this study, numerical experiments were conducted for the first time to compare the stability and strength of the most commonly used variants of osteotomies based on a single bone model. A biomechanical model of scarf osteotomy of the first metatarsal bone has been developed and validated on the basis of mechanical experiments.

**Keywords:** biomechanics, metatarsal bone, valgus deformity, FEM, Mises stresses, numerical model validation

**Acknowledgements:** The work was carried out within the framework of the State Assignment No. FSRR-2023-0009.

**For citation:** Polienko A. V., Ivanov D. V., Kireev S. I., Bessonov L. V., Muldasheva A. M., Olenko E. S. Numerical analysis of the stress-strain state of osteotomies of the first metatarsal bone. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 496–511 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-496-511>, EDN: OZSOKF

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Отклонение первого пальца стопы кнаружи (hallux valgus, или вальгусная деформация первого пальца стопы) характеризуется высокой частотой встречаемости, достигающей 46% у пациентов старшей возрастной группы [1]. Значительное негативное влияние указанной патологии на качество жизни большинства пациентов служит причиной обращения за медицинской помощью. Консервативные методы лечения не позволяют исправить данную деформацию. Золотым стандартом специализированной медицинской помощи пациентам с обсуждаемой патологией признана хирургическая коррекция [2]. Основным патогенетическим звеном возникновения болезненной «косточки на стопе» является изменение нормального положения первой плюсневой кости (в медицинской литературе обозначается М1), которая отклоняется кнутри, как показано на рис. 1. Здесь  $\alpha$  — угол между осями первой плюсневой кости и основной фаланги первого пальца стопы. В норме величина угла  $\alpha$  не превышает  $8^\circ$ . Большее значение угла указывает на патологическое отклонение, т. е. вальгусную деформацию первого пальца стопы.

В связи с этим базисной хирургической техникой лечения вальгусного отклонения первого пальца стопы служит остеотомия М1 [3]. Сущность указанной операции заключается в распиливании кости (osteotomy), в результате которого образуются два фрагмента. Смещение одного фрагмента относительно другого позволяет восстановить нормальное анатомическое положение М1 и первого пальца стопы.



Фактически хирург во время указанной операции выполняет искусственный перелом со смещением, т.е. остеотомию. Основным условием для успешного заживления перелома является наличие взаимного контакта и отсутствие значительной подвижности между фрагментами кости [3,4]. Более того, при идеальной остеотомии первоначальная стабильность имеет первостепенное значение в раннем послеоперационном периоде. Данное обстоятельство существенным образом влияет на выбор хирургической тактики и методики послеоперационного восстановительного лечения с учетом двухстороннего характера патологии. Зачастую возникает своеобразный конфликт интересов между стремлением к одномоментному исправлению деформации на обеих стопах и ранней активизацией пациента в послеоперационном периоде.

Сложившаяся клиническая практика не предполагает четких количественных критериев для решения указанных вопросов в каждом конкретном случае, что не соответствует принципам современной персонализированной медицины. С учетом различных геометрических параметров линии пересечения M1 и имплантатов (винты, пластины, спицы), используемых для соединения фрагментов кости между собой, предложено более 150 способов выполнения обсуждаемой операции. Каждый из способов имеет свои преимущества и недостатки [4]. Актуальной проблемой современной хирургии стопы остается поиск и обоснование наиболее эффективного (успешного) способа остеотомии M1. До сих пор не существует общепризнанного универсального алгоритма предоперационного планирования хирургической коррекции hallux valgus.

Наиболее распространенным подходом к решению данной проблемы остается эмпирический, основанный на анализе клинических результатов применения различных способов операции. Существенным недостатком указанного подхода служит невозможность учета и корректного сравнения многообразия индивидуальных параметров, основными из которых являются показатели стабильности системы «кость – имплантаты». Экспериментальный метод сравнения различных способов остеотомии M1 обладает множеством недостатков. Среди них – невозможность использования одинаковых экспериментальных образцов M1 человека, а также существенное отличие искусственных (пластиковых) костей от натуральных. В последнее время для решения подобных проблем было предложено использовать биомеханическое моделирование с применением метода конечных элементов [5]. Отечественными и зарубежными авторами оцениваются прочностные свойства системы «кость – имплантат» под действием статических нагрузок [6–10], а также исследуется влияние остеотомии первой плюсневой кости на биомеханику стопы [11]. Изучено также влияние общей дряблости связок на ухудшение состояния при вальгусной деформации [12]. В то же время полного анализа стабильности разных типов остеотомий выполнено до сих пор не было.



Рис. 1. Рентгенограмма переднего отдела левой стопы в прямой проекции (контур первой плюсневой кости, обозначенной M1, обведен пунктирной линией)

Fig. 1. Radiograph of the forefoot of the left foot in direct projection (the contour of the first metatarsal bone, labeled M1, is circled with a dotted line)

Цель данной работы состояла в разработке и валидации биомеханической модели остеотомии первой плюсневой кости для анализа ее стабильности и надежности в зависимости от типа остеотомии, степени смещения фрагментов кости, а также количества скрепляющих винтов.

## 1. Материалы и методы

### 1.1. Построение 3D модели кости

Трехмерная твердотельная модель первой плюсневой кости, включающая губчатую и компактную костные ткани, была построена на основе результатов компьютерной томографии конкретного пациента. Модель создавалась в программном комплексе Mimics, а затем в системе автоматизированного проектирования SolidWorks разрезалась (для создания остеотомии) и совмещалась с твердотельными моделями винтов, также построенными в системе SolidWorks. В данной работе оценивались два типа остеотомий: scarf и chevron, которые проиллюстрированы на рис. 2. На рис. 3 показана укороченная (в сравнении со стандартной на рис. 2, а) остеотомия scarf. Рис. 4 иллюстрирует расположение винтов в случае, если остеотомия scarf крепится только одним винтом, а не двумя, как показано на рис. 2, а.

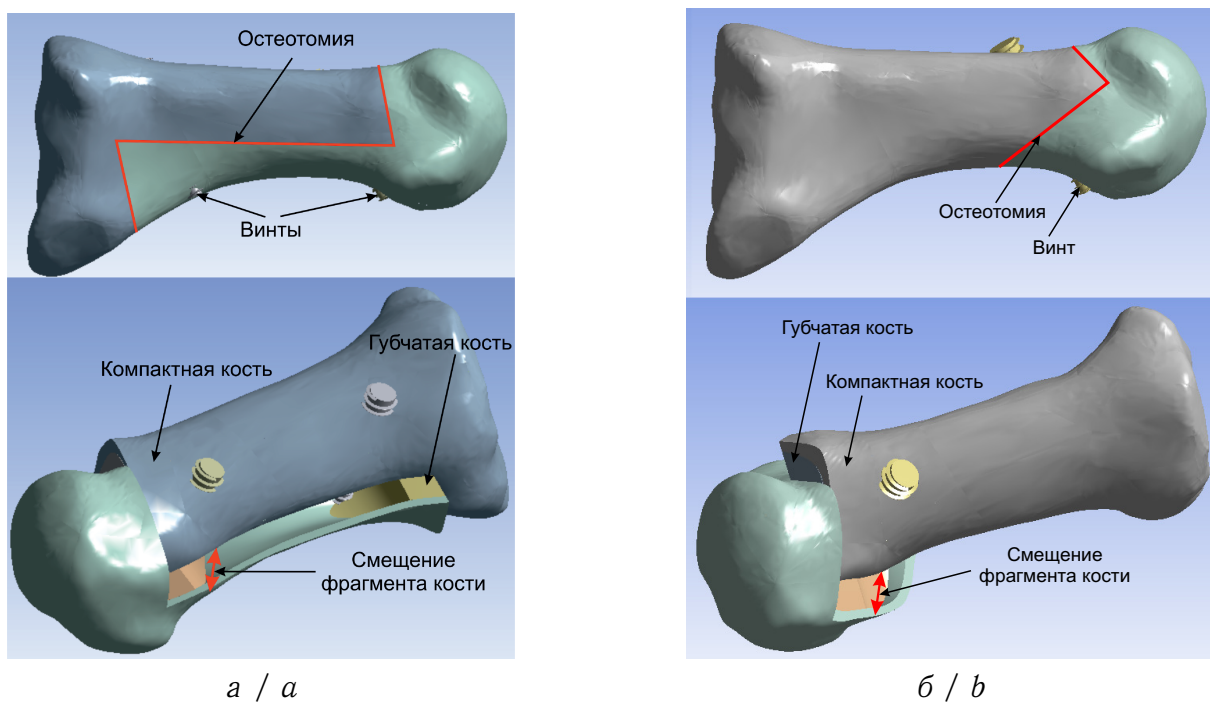


Рис. 2. Остеотомии первой плюсневой кости: а — scarf; б — chevron (цвет онлайн)  
Fig. 2. Osteotomies of the first metatarsal bone: a is scarf; b is chevron (color online)

В результате конечно-элементному анализу напряженно-деформированного состояния системы «кость – имплантат» подвергалось 10 моделей остеотомий первой плюсневой кости, описание которых представлено в табл. 1 (смещение — величина смещения одного фрагмента относительно другого поперек кости, выражено в долях диаметра кости; количество винтов — 1 или 2, также указано расположение винта вдоль оси кости).

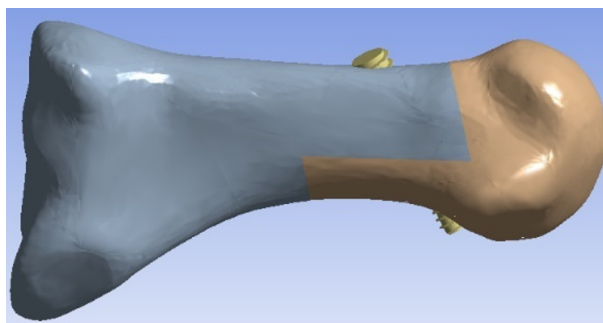
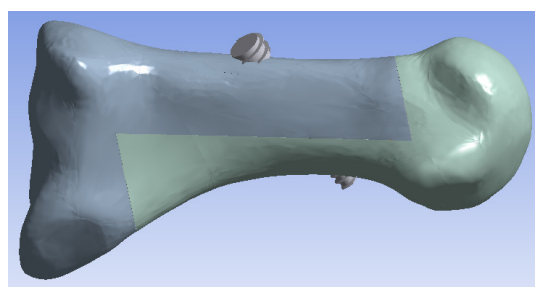
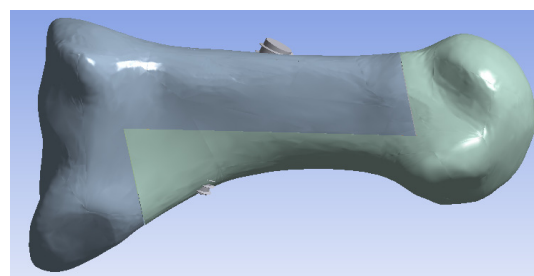


Рис. 3. Остеотомия scarf укороченная (цвет онлайн)  
Fig. 3. Shortened scarf osteotomy (color online)



*a / a*



*б / б*

Рис. 4. Расположение винтов при остеотомии scarf и креплении фрагментов одним винтом:  
*a* — винт кпереди; *б* — винт кзади (цвет онлайн)

Fig. 4. Screw placement for scarf osteotomy and single screw fixation: *a* is screw to the front; *b* is screw to the back (color online)

Таблица 1 / Table 1

Параметры моделей остеотомий / Parameters of osteotomy models

Модель	Смещение фрагментов кости	Тип остеотомии	Кол-во винтов
Мод. 1	1/3	scarf	2
Мод. 2	1/3	scarf	1, кзади
Мод. 3	1/3	scarf	1, кпереди
Мод. 4	2/3	scarf	2
Мод. 5	2/3	scarf	1, кзади
Мод. 6	2/3	scarf	1, кпереди
Мод. 7	1/3	scarf укороченная	1
Мод. 8	2/3	scarf укороченная	1
Мод. 9	1/3	chevron	1
Мод. 10	2/3	chevron	1

## 1.2. Постановка задачи биомеханики

Решалась статическая задача биомеханики о напряженно-деформированном состоянии системы «кость – имплантат»:

– уравнения равновесия (полагаем, что объемные силы отсутствуют):

$$\sigma_{ij,i} = 0; \quad (1)$$

– уравнения закона Гука, связывающие компоненты тензора напряжений и деформаций:

$$\sigma_{ij} = \lambda \Theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}; \quad (2)$$



– соотношения Коши, связывающие тензор деформаций и вектор перемещения:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{3}$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений,  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора малых деформаций,  $u_i$  – компоненты вектора перемещений,  $\lambda, \mu$  – упругие константы Ламе,  $\Theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  – объемное расширение,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера, индексы  $i$  и  $j$  принимают значения от 1 до 3, знак « $\cdot$ » в нижнем индексе обозначает частную производную по соответствующей координате.

В данной работе граничные условия имели смешанный вид (см. рис. 4). Граница фрагментов кости была разбита на две области так, что

$$S = S_\sigma + S_u.$$

На одной области границы  $S_\sigma$  действуют поверхностные силы:

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)n_j|_{S_\sigma} = P_i(x_1, x_2, x_3),$$

где  $P_i$  – компоненты вектора заданных на  $S_\sigma$  поверхностных сил,  $n_j$  – компоненты вектора внешней нормали к поверхности.

На второй области границы  $S_u$  заданы перемещения:

$$u_i(x_1, x_2, x_3)n_j|_{S_u} = u_i^*(x_1, x_2, x_3),$$

где  $u_i^*$  – компоненты вектора заданных на  $S_u$  перемещений.

Рассматривалось действие консольной нагрузки [10] величиной 31 Н, приложенной к головке кости с подошвенной стороны под углом 75° (соответствует 15° наклона оси кости к горизонтали) к оси кости. Конец кости жестко закреплялся [10, 13]. Такое закрепление используется многими авторами при натуральных экспериментах, соответствует анатомическому положению кости человека в положении стоя и моделирует реакцию опоры под стопой [13]. Задача решалась численно методом конечных элементов в системе Ansys 19.2. Области закрепления и область приложения нагрузки показаны на рис. 5.

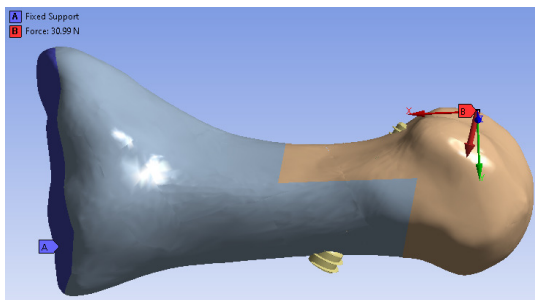


Рис. 5. Граничные условия: А – жесткая заделка; В – консольная нагрузка 31 Н (цвет онлайн)

Fig. 5. Boundary conditions: A – rigid fixation; B – cantilever load 31 N (color online)

При моделировании учитывалось два типа контактного взаимодействия между фрагментами кости и винтами: полный контакт и контакт с трением (табл. 2).

Таблица 2 / Table 2

Контактирующие тела и типы контактного взаимодействия  
Contacting bodies and types of contact interaction

Контактирующие тела	Тип контактного взаимодействия
Часть кости – винт	Полный контакт (Bonded в Ansys)
Часть кости – часть кости	Контакт с трением (Frictional в Ansys)



Далее приведем математическое описание типов контактного взаимодействия (рис. 6).

При контакте двух тел на поверхности контакта  $S_{cont}$  (рис. 6) должно выполняться условие непроникания одного тела в другое, которое может быть записано в виде

$$(x_A - x_B) \cdot \bar{n} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $x_A, x_B$  — радиус-векторы точек тел  $A, B$ , а  $\bar{n}$  — единичная нормаль к поверхности контакта  $S_{cont}$ .

Также на границе контакта возникают распределенные по поверхности контакта сжимающие усилия  $t_i$ , направленные по нормали (рис. 6):

$$t_{ni} = t_i \cdot \bar{n} \leq 0, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Неравенство (5) выполняется, если тела находятся в контакте.

Касательные усилия на контактной поверхности  $t_{ti}$  могут быть как положительными, так и отрицательными. Они подчиняются закону трения Кулона (6), в соответствии с которым при относительном движении контактирующих тел

$$|t_{ni}| = \mu_{cont} |t_i|. \quad (6)$$

Здесь  $\mu_{cont}$  — коэффициент трения (принимался равным 0.2).

В соответствии с (4)–(6) в данной работе ставились следующие условия контакта (7) и (8):

– полный контакт (называется Bonded в системе Ansys):

$$\begin{aligned} u_i^A(x_1, x_2, x_3)|_{S_{cont}} &= u_i^B(x_1, x_2, x_3)|_{S_{cont}}, \\ \sigma_{ij}^A(x_1, x_2, x_3)|_{S_{cont}} &= \sigma_{ij}^B(x_1, x_2, x_3)|_{S_{cont}}; \end{aligned} \quad (7)$$

– контакт с трением (называется Contact with friction в системе Ansys):

$$\begin{aligned} u_n^A(x_1, x_2, x_3)|_{S_{cont}} &= u_n^B(x_1, x_2, x_3)|_{S_{cont}}, \\ \sigma_n^A(x_1, x_2, x_3)|_{S_{cont}} &= \sigma_n^B(x_1, x_2, x_3)|_{S_{cont}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $u_i^A, u_i^B$  — компоненты векторов перемещений контактирующих точек тел  $A$  и  $B$  соответственно,  $\sigma_{ij}^A, \sigma_{ij}^B$  — компоненты тензоров напряжений контактирующих точек тел  $A$  и  $B$  соответственно,  $u_n^A, u_n^B$  — проекции векторов перемещений контактирующих точек тел  $A$  и  $B$  соответственно на вектор внешней нормали к телу  $A$ ,  $\sigma_n^A, \sigma_n^B$  — проекции векторов напряжений контактирующих точек тел  $A$  и  $B$  соответственно на внешние нормали.

Контактная задача формулировалась с помощью метода множителей Лагранжа [14], при котором потенциал контактных сил (9) добавляется к уравнению принципа возможных перемещений:

$$W_{cont} = - \int_{S_{cont}} \bar{t}(x_A - x_B) ds. \quad (9)$$

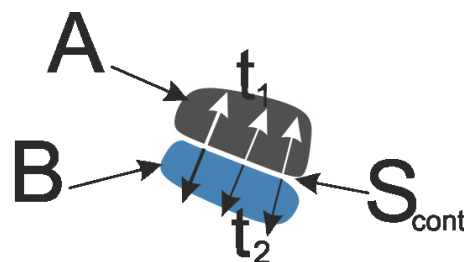


Рис. 6. Контактное взаимодействие двух тел (цвет онлайн)

Fig. 6. Contact interaction between two bodies (color online)



Здесь  $\bar{t}$  — вектор контактных усилий, которые действуют по поверхности контакта двух тел  $A, B$ . Он является множителем Лагранжа и подлежит определению.

Принципиальное отличие постановки [6] и постановки задачи данного исследования состоит в том, что нами учитывалось два типа костной ткани (губчатая и компактная), свойства которых представлены в табл. 3 [7].

Таблица 3 / Table 3

Механические свойства / Mechanical properties		
Материал	Модуль Юнга, МПа	Коэффициент Пуассона
Компактная кость	12 000	0.3
Губчатая кость	300	0.3
Титановый сплав (винт)	11 000	0.3

### 1.3. Сеточная сходимость

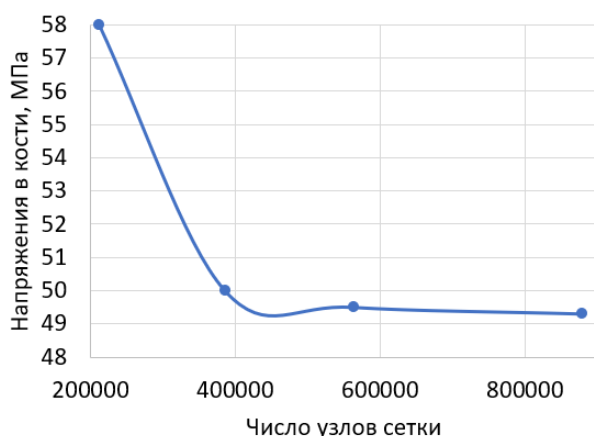


Рис. 7. График сеточной сходимости  
Fig. 7. Graph of mesh convergence

Исследовалась сеточная сходимость. Итоговая вычислительная сетка для каждой модели содержала порядка 600 тыс. узлов. График сеточной сходимости (зависимость максимальных напряжений в кости от числа узлов вычислительной сетки) для модели с chevron-остеотомией показан на рис. 7.

### 1.4. Валидация модели

Для валидации модели был проведен натурный эксперимент на испытательной машине Instron. Для этого на образце первой плюневой кости, изъятый во время хирургического вмешательства по ампутации стопы не ранее трех часов до эксперимента, была выполнена scarf-остеотомия (рис. 8, а, б). Один конец кости фиксировался с помощью цианакрилатного клея с щелочным полимеризующим агентом (пищевая сода). Далее образец закреплялся на столе испытательной машины под углом  $15^\circ$  к горизонту (рис. 8, в) и выполнялся эксперимент по его консольному изгибу со скоростью 2 мм/мин [13].

Результаты натурального эксперимента в виде графика Нагрузка (Н) — Перемещение (мм) сравнивались с аналогичным численным экспериментом, выполненным в Ansys 19.2. На рис. 9 представлены результаты обоих экспериментов. Из сравнения двух кривых видно, что результаты численного и натурального экспериментов схожи, а относительная разница не превышает 15%. В области пиковых нагрузок кривые пересекаются. Погрешность может быть обоснована неоднородностью механических свойств костной ткани, что в численной модели в рамках данной работы не учитывается.

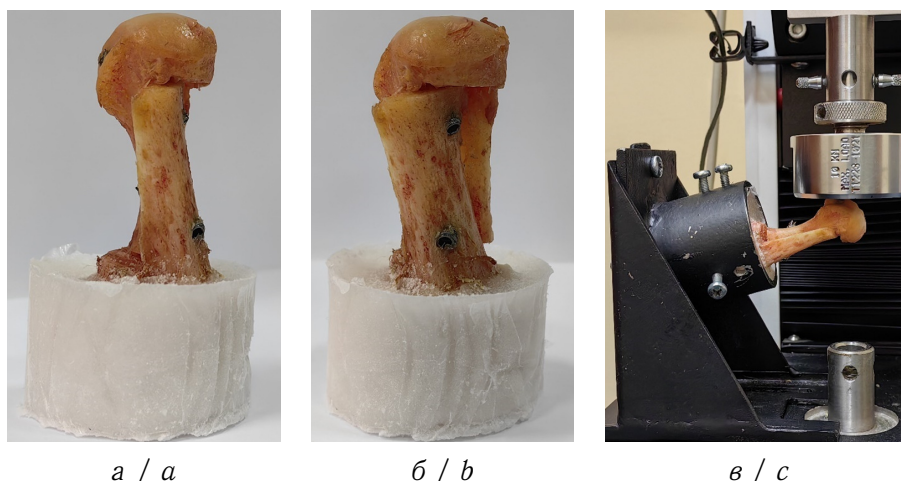


Рис. 8. Кость (остеотомия scarf): *a* — образец перед экспериментом (вид сбоку); *b* — образец перед экспериментом (вид спереди); *c* — образец в испытательной машине (цвет онлайн)

Fig. 8. Bone (scarf osteotomy): *a* is specimen before experiment (side view); *b* is specimen before experiment (front view); *c* is specimen in testing machine (color online)

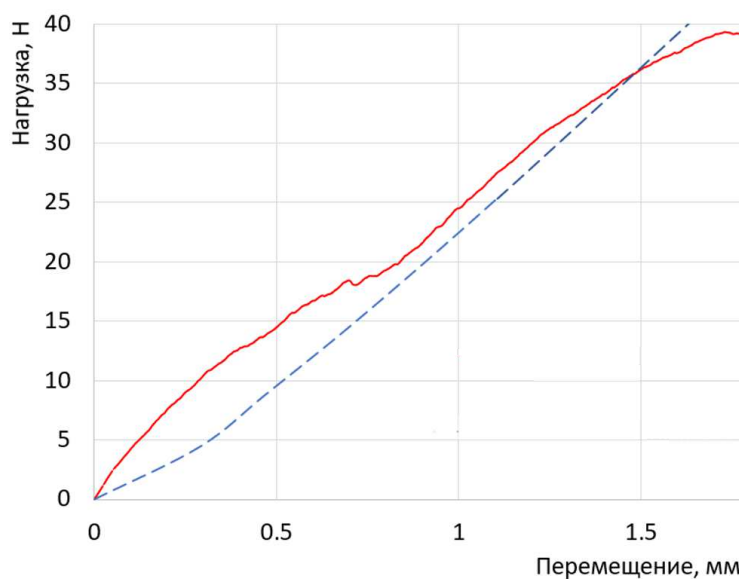


Рис. 9. Валидация модели остеотомии: сравнение натурального (сплошная линия) и численного (пунктирная линия) экспериментов

Fig. 9. Validation of the osteotomy model: comparison of field (solid line) and numerical (dotted line) experiments

## Результаты

Результаты численных расчетов представлены в табл. 4, а также на рис. 10 (типичные поля полных перемещений) и рис. 11 (типичные поля эквивалентных напряжений).





Таблица 4 / Table 4

Характеристики напряженно-деформированного состояния моделей остеотомий  
 Characteristics of the stress-strain state of osteotomy models

Модель	Максимальные перемещения, мм	Максимальные напряжения в винтах, МПа	Максимальные напряжения в кортикальной кости, МПа	Максимальные напряжения в губчатой кости, МПа
Мод. 1	1.30	107	70	6.7
Мод. 2	1.60	200	120	6.9
Мод. 3	1.38	201	125	4.0
Мод. 4	1.89	192	85	10.7
Мод. 5	5.73	890	320	8.3
Мод. 6	5.83	760	325	10.3
Мод. 7	0.73	190	75	3.6
Мод. 8	0.98	145	140	4.4
Мод. 9	0.32	88	49	2.6
Мод. 10	0.39	73	58	2.7

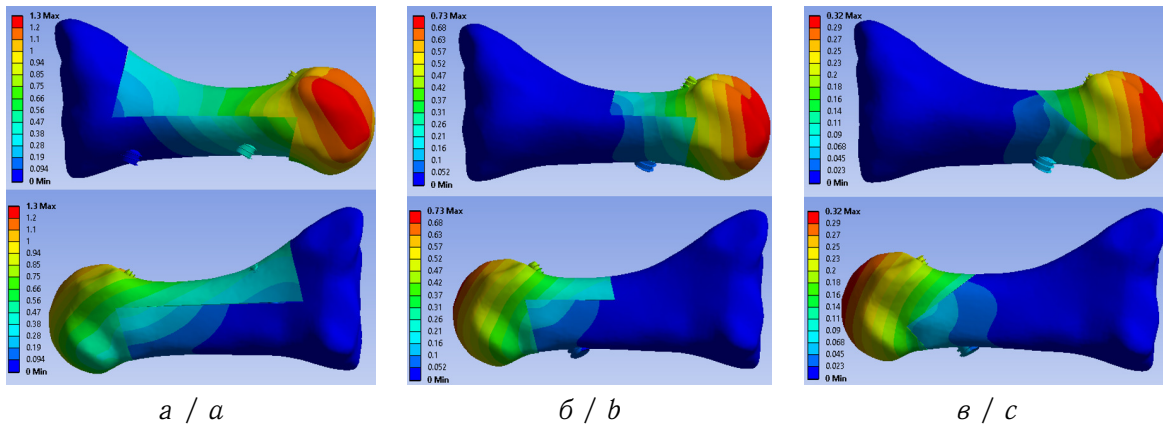


Рис. 10. Типичные поля полных перемещений (мм): *a* – scarf-osteotomy; *б* – scarf-osteotomy укороченная; *в* – chevron-osteotomy (цвет онлайн)  
 Fig. 10. Typical total displacement fields (mm): *a* is scarf osteotomy; *b* is scarf shortened osteotomy; *c* is chevron osteotomy (color online)

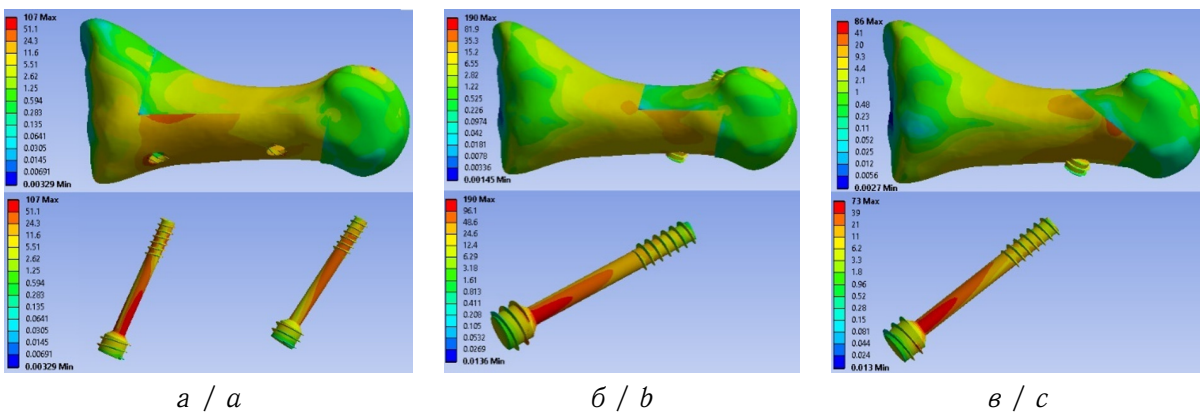


Рис. 11. Типичные поля эквивалентных напряжений (МПа): *a* – scarf-osteotomy; *б* – scarf-osteotomy укороченная; *в* – chevron-osteotomy (цвет онлайн)  
 Fig. 11. Typical equivalent stress fields (MPa): *a* is scarf osteotomy; *b* is scarf shortened osteotomy; *c* is chevron osteotomy (color online)



## Обсуждение

В данной работе сделана попытка осуществить биомеханическое моделирование наиболее часто используемых вариантов хирургического лечения вальгусной деформации первого пальца стопы. Для этого было создано 10 моделей остеотомий отдельной первой плюсневой кости, которые затем подвергнуты статическому нагружению с целью анализа их напряженно-деформированного состояния и оценки их успешности. Используются разработанные ранее биомеханические критерии оценки успешности лечения [19], которые позволяют оценить стабильность фиксации системы «кость – имплантат» и долговечность (надежность, механическую прочность) имплантатов.

Перед обсуждением полученных результатов отметим следующее. Несмотря на то, что современные исследователи часто используют модели всей стопы, К. S. Shih с соавт. [8] показали, что и модели одиночной плюсневой кости, и модель всей стопы дают схожие напряженно-деформированные состояния имплантатов и костных тканей. Более того, представленная в данной работе модель остеотомии одиночной плюсневой кости была валидирована на основе результатов натуральных экспериментов. К тому же были получены максимальные эквивалентные напряжения в кости и имплантатах, близкие по значениям к величинам из статьи [8] при тех же нагрузках. Одиночная плюсневая кость использована и в работе [7] для сравнения двух типов остеотомий с позиций прочности и стабильности, а результаты подтверждаются клиническими данными. Эти факты позволяют обосновать использование модели одиночной плюсневой кости для моделирования и сравнительного анализа стабильности остеотомий.

Перейдем непосредственно к обсуждению результатов и обратимся к табл. 4. Наименее стабильными оказались модели Мод. 5 и Мод. 6, показавшие наибольшие полные перемещения, и соответствующие остеотомии типа scarf со смещением одного фрагмента относительно другого на  $2/3$  и закрепленные одним винтом. Также следует отметить, что остеотомия типа chevron (Мод. 9 и Мод. 10) оказалась существенно более стабильной, чем остеотомия типа scarf, так как показала наименьшие полные перемещения в сравнении со всеми остальными моделями.

Что касается прочности и долговечности конструкций, то Мод. 5 и Мод. 6 оказались и наименее прочными. В то же время Мод. 9 и Мод. 10 (chevron-остеотомия) оказались наиболее прочными и показали наименьшую склонность к поломке. На самом деле прочность системы «кость – имплантат» в целом и ее отдельных элементов определяется механическими напряжениями (например, эквивалентными напряжениями, интенсивностью напряжений), возникающими в ней при типовых нагрузках. Внутренние напряжения в имплантатах сравниваются с их прочностными характеристиками: пределом выносливости (при циклических нагрузках), пределами текучести и прочности [16, 17, 19] с некоторым коэффициентом запаса прочности. Другими словами, напряжения в имплантатах не должны превышать допускаемые пределы, которые для металлов могут быть рассчитаны в соответствии с ГОСТ<sup>1</sup>. Как правило, для титановых сплавов в качестве допускаемого напряжения берется предел прочности с коэффициентом запаса 3 [19]. Винты изготовлены из титанового сплава, предел прочности которого составляет 970 МПа. Таким образом, допускаемое напряжение для них не превышает 323 МПа. Анализ значений эквивалентных напряжений

<sup>1</sup>ГОСТ Р 34233.1-2017 Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность. Общие требования. Москва : Стандартинформ, 2019. 29 с.



из табл. 4 показывает, что критерию прочности по допускаемым напряжениям не удовлетворяют модели Мод. 5 и Мод. 6.

В то же время предел прочности компактной кости, по данным литературы [18], не превышает 161 МПа, а губчатой — до 15 МПа [15]. С этих позиций в моделях Мод. 5 и Мод. 6 в компактной кости в области крепления винтов, а также в области контакта костных тканей могут начаться разрушения, при этом в губчатой кости предельные значения напряжений не достигаются. Однако они оказываются близкими к пределу прочности губчатой кости в моделях Мод. 4 и Мод. 6.

Таким образом, с учетом биомеханических критериев успешности варианты лечения, соответствующие моделям Мод. 1 – Мод. 4, а также Мод. 7 – Мод. 10, могут быть признаны успешными. Можно заключить, что стандартная scarf-остеотомия и chevron-остеотомия с точки зрения биомеханики являются равноценными, что подтверждается и клиническими результатами [20].

Следует отметить ограничения данной работы, которые, в первую очередь, заключаются в использовании модели одиночной кости, а не всей стопы в целом. Также отметим тот факт, что в исследовании материалы костных тканей усреднялись по всему объему губчатой и компактной кости и считались линейно-упругими и изотропными. Еще одно ограничение касается того, что в работе исследована плюсневая кость только одного пациента.

## Выводы

Впервые проведены численные эксперименты для сравнительного анализа стабильности и прочности наиболее часто используемых типов остеотомий на базе модели одной кости. Разработана и валидирована на основе натуральных экспериментов биомеханическая модель scarf-остеотомии первой плюсневой кости. С помощью биомеханических критериев успешности выявлены успешные и неуспешные варианты остеотомий.

## Список литературы

1. Nix S., Smith M., Vicenzino B. Prevalence of hallux valgus in the general population: A systematic review and meta-analysis // Journal of Foot and Ankle Research. 2010. Vol. 27, iss. 3. P. 21. <https://doi.org/10.1186/1757-1146-3-21>
2. Ray J. J., Friedmann A. J., Hanselman A. E., Vaida J., Dayton P. D., Hatch D. J., Smith B., Santrock R. D. Hallux Valgus // Foot & Ankle Orthopaedics. 2019. Vol. 4, iss. 2. Art. 2473011419838500. <https://doi.org/10.1177/2473011419838500>
3. Sammarco V. J., Acevedo J. Stability and fixation techniques in first metatarsal osteotomies // Foot and Ankle Clinics. 2001. Vol. 6, iss. 3. P. 409–432. [https://doi.org/10.1016/S1083-7515\(03\)00105-0](https://doi.org/10.1016/S1083-7515(03)00105-0)
4. Unal M., Baran O., Uzun B., Turan A.T. Comparison of screw-fixation stabilities of first metatarsal shaft osteotomies: A biomechanical study // Acta Orthopaedica et Traumatologica Turcica. 2010. Vol. 44, iss. 1. P. 70–75. <https://doi.org/10.3944/AOTT.2010.2209>
5. Matzaroglou C., Bougas P., Panagiotopoulos E., Saridis A., Karanikolas M., Kouzoudis D. Ninety-degree chevron osteotomy for correction of hallux valgus deformity: Clinical data and finite element analysis // The Open Orthopaedics Journal. 2010. Vol. 4. P. 152–156. <https://doi.org/10.2174/1874325001004010152>
6. Голядкина А. А., Полиенко А. В., Киреев С. И., Курманов А. Г., Киреев В. С. Анализ биомеханических параметров остеотомии первой плюсневой кости // Российский журнал биомеханики. 2019. Т. 23, № 3. С. 400–410. <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2019.3.06>



7. Li Y., Wang Y., Tang K., Tao X. Modified scarf osteotomy for hallux valgus: From a finite element model to clinical results // *Journal of Orthopaedic Surgery*. 2022. Vol. 30, iss. 3. Art. 10225536221143816. <https://doi.org/10.1177/10225536221143816>
8. Shih K. S., Hsu C. C., Huang G. T. Biomechanical Investigation of Hallux Valgus Deformity Treated with Different Osteotomy Methods and Kirschner Wire Fixation Strategies Using the Finite Element Method // *Bioengineering (Basel)*. 2023. Vol. 10, iss. 4. Art. 499. <https://doi.org/10.3390/bioengineering10040499>
9. Xie Q., Li X., Wang P. Three dimensional finite element analysis of biomechanics of osteotomy ends with three different fixation methods after hallux valgus minimally invasive osteotomy // *Journal of Orthopaedic Surgery*. 2023. Vol. 31, iss. 2. Art. 10225536231175235. <https://doi.org/10.1177/10225536231175235>
10. Shin K. S., Hsu C. C., Lin T. W., Huang K. T., Hou Sh. M. Biomechanical evaluation of different hallux valgus treatment with plate fixations using single first metatarsal bone model and musculoskeletal lower extremity model // *Journal of Biomechanical Science and Engineering*. 2021. Vol. 16, iss. 2. P. 1–12. <https://doi.org/10.1299/jbse.21-00073>
11. Guo J., Wang L., Mao R., Chang C., Wen J., Fan Y. Biomechanical evaluation of the first ray in pre-/post-operative hallux valgus: A comparative study // *Clinical Biomechanics*. 2018. Vol. 60. P. 1–8. <https://doi.org/10.1016/j.clinbiomech.2018.06.002>
12. Wong D. W., Wang Y., Chen T. L., Yan F., Peng Y., Tan Q., Ni M., Leung A. K., Zhang M. Finite element analysis of generalized ligament laxity on the deterioration of hallux valgus deformity (bunion) // *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*. 2020. Vol. 8. Art. 571192. <https://doi.org/10.3389/fbioe.2020.571192>
13. Favre P., Farine M., Snedeker J. G., Maquieira G. J., Espinosa N. Biomechanical consequences of first metatarsal osteotomy in treating hallux valgus // *Clinical Biomechanics*. 2010. Vol. 25, iss. 7. P. 721–727. <https://doi.org/10.1016/j.clinbiomech.2010.05.002>
14. Коробейников С. Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2000. 262 с.
15. Goldstein S. A. The mechanical properties of trabecular bone: Dependence on anatomic location and function // *Journal of Biomechanics*. 1987. Vol. 20, iss. 11–12. P. 1055–1061. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(87\)90023-6](https://doi.org/10.1016/0021-9290(87)90023-6)
16. Titanium Alloys in Medical Applications // AZoM. 2023. URL: <https://www.azom.com/article.aspx?ArticleID=1794> (дата обращения: 05.04.2023).
17. Material Data Sheet // SLM solutions. Ti-Alloy Ti6Al4V ELI (Grade 23). URL: [https://www.slm-solutions.com/fileadmin/Content/Powder/MDS/MDS\\_Ti-Alloy\\_Ti6Al4V\\_\\_ELI\\_0719\\_EN.pdf](https://www.slm-solutions.com/fileadmin/Content/Powder/MDS/MDS_Ti-Alloy_Ti6Al4V__ELI_0719_EN.pdf) (дата обращения: 05.04.2023).
18. Havaladar R., Pilli S. C., Putti B. B. Insights into the effects of tensile and compressive loadings on human femur bone // *Advanced Biomedical Research*. 2014. Vol. 3. Art. 110. <https://doi.org/10.4103/2277-9175.129375>
19. Иванов Д. В. Биомеханическая поддержка решения врача при выборе варианта лечения на основе количественных критериев оценки успешности // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 62–89. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-62-89>
20. Ma Q., Liang X., Lu J. Chevron osteotomy versus scarf osteotomy for hallux valgus correction: A meta-analysis // *Foot and Ankle Surgery*. 2019. Vol. 25, iss. 6. P. 755–760. <https://doi.org/10.1016/j.fas.2018.09.003>

## References

1. Nix S., Smith M., Vicenzino B. Prevalence of hallux valgus in the general population: A systematic review and meta-analysis. *Journal of Foot and Ankle Research*, 2010, vol. 27, iss. 3, pp. 21. <https://doi.org/10.1186/1757-1146-3-21>
2. Ray J. J., Friedmann A. J., Hanselman A. E., Vaida J., Dayton P. D., Hatch D. J.,



- Smith B., Santrock R. D. Hallux Valgus. *Foot & Ankle Orthopaedics*, 2019, vol. 4, iss. 2, art. 2473011419838500. <https://doi.org/10.1177/2473011419838500>
3. Sammarco V. J., Acevedo J. Stability and fixation techniques in first metatarsal osteotomies. *Foot and Ankle Clinics*, 2001, vol. 6, iss. 3, pp. 409–432. [https://doi.org/10.1016/S1083-7515\(03\)00105-0](https://doi.org/10.1016/S1083-7515(03)00105-0)
  4. Unal M., Baran O., Uzun B., Turan A.T. Comparison of screw-fixation stabilities of first metatarsal shaft osteotomies: A biomechanical study. *Acta Orthopaedica et Traumatologica Turcica*, 2010, vol. 44, iss. 1, pp. 70–75. <https://doi.org/10.3944/AOTT.2010.2209>
  5. Matzaroglou C., Bougas P., Panagiotopoulos E., Saridis A., Karanikolas M., Kouzoudis D. Ninety-degree chevron osteotomy for correction of hallux valgus deformity: Clinical data and finite element analysis. *The Open Orthopaedics Journal*, 2010, vol. 4, pp. 152–156. <https://doi.org/10.2174/1874325001004010152>
  6. Golyadkina A. A., Polienko A. V., Kireev S. I., Kurmanov A. G., Kireev V. S. Analysis of biomechanical parameters of the first metatarsal bone osteotomy. *Russian Journal of Biomechanics*, 2019, vol. 23, iss. 3, pp. 400–410 (in Russian). <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2019.3.06>
  7. Li Y., Wang Y., Tang K., Tao X. Modified scarf osteotomy for hallux valgus: From a finite element model to clinical results. *Journal of Orthopaedic Surgery*, 2022, vol. 30, iss. 3, art. 10225536221143816. <https://doi.org/10.1177/10225536221143816>
  8. Shih K. S., Hsu C. C., Huang G. T. Biomechanical Investigation of Hallux Valgus Deformity Treated with Different Osteotomy Methods and Kirschner Wire Fixation Strategies Using the Finite Element Method. *Bioengineering (Basel)*, 2023, vol. 10, iss. 4, art. 499. <https://doi.org/10.3390/bioengineering10040499>
  9. Xie Q., Li X., Wang P. Three dimensional finite element analysis of biomechanics of osteotomy ends with three different fixation methods after hallux valgus minimally invasive osteotomy. *Journal of Orthopaedic Surgery*, 2023, vol. 31, iss. 2, art. 10225536231175235. <https://doi.org/10.1177/10225536231175235>
  10. Shin K. S., Hsu C. C., Lin T. W., Huang K. T., Hou Sh. M. Biomechanical evaluation of different hallux valgus treatment with plate fixations using single first metatarsal bone model and musculoskeletal lower extremity model. *Journal of Biomechanical Science and Engineering*, 2021, vol. 16, iss. 2, pp. 1–12. <https://doi.org/10.1299/jbse.21-00073>
  11. Guo J., Wang L., Mao R., Chang C., Wen J., Fan Y. Biomechanical evaluation of the first ray in pre-/post-operative hallux valgus: A comparative study. *Clinical Biomechanics*, 2018, vol. 60, pp. 1–8. <https://doi.org/10.1016/j.clinbiomech.2018.06.002>
  12. Wong D. W., Wang Y., Chen T. L., Yan F., Peng Y., Tan Q., Ni M., Leung A. K., Zhang M. Finite element analysis of generalized ligament laxity on the deterioration of hallux valgus deformity (bunion). *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*, 2020, vol. 8, art. 571192. <https://doi.org/10.3389/fbioe.2020.571192>
  13. Favre P., Farine M., Snedeker J. G., Maquieira G. J., Espinosa N. Biomechanical consequences of first metatarsal osteotomy in treating hallux valgus. *Clinical Biomechanics*, 2010, vol. 25, iss. 7, pp. 721–727. <https://doi.org/10.1016/j.clinbiomech.2010.05.002>
  14. Korobeynikov S. N. *Nelineynoe deformirovanie tverdykh tel* [Nonlinear Deformation of Solids]. Novosibirsk, SO RAS Publ., 2000. 262 p. (in Russian).
  15. Goldstein S. A. The mechanical properties of trabecular bone: Dependence on anatomic location and function. *Journal of Biomechanics*, 1987, vol. 20, iss. 11–12, pp. 1055–1061. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(87\)90023-6](https://doi.org/10.1016/0021-9290(87)90023-6)
  16. Titanium Alloys in Medical Applications. *AZoM*, 2023. Available at: <https://www.azom.com/article.aspx?ArticleID=1794> (accessed April 5, 2023).
  17. Material Data Sheet. *SLM solutions. Ti-Alloy Ti6Al4V ELI (Grade 23)*. Available at: [https://www.slm-solutions.com/fileadmin/Content/Powder/MDS/MDS\\_Ti-Alloy\\_Ti6Al4V\\_\\_ELI\\_0719\\_EN.pdf](https://www.slm-solutions.com/fileadmin/Content/Powder/MDS/MDS_Ti-Alloy_Ti6Al4V__ELI_0719_EN.pdf) (accessed April 5, 2023).
  18. Havaladar R., Pilli S. C., Putti B. B. Insights into the effects of tensile and compressive



- loadings on human femur bone. *Advanced Biomedical Research*, 2014, vol. 3, art. 110. <https://doi.org/10.4103/2277-9175.129375>
19. Ivanov D. V. Biomechanical support for the physician's decision when choosing a treatment option based on quantitative success criteria. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 62–89 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-62-89>
  20. Ma Q., Liang X., Lu J. Chevron osteotomy versus scarf osteotomy for hallux valgus correction: A meta-analysis. *Foot and Ankle Surgery*, 2019, vol. 25, iss. 6, pp. 755–760. <https://doi.org/10.1016/j.fas.2018.09.003>

Поступила в редакцию / Received 23.08.2023

Принята к публикации / Accepted 28.09.2023

Опубликована / Published 30.11.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 512–530  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 512–530  
mmi.sgu.ru <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-512-530>, EDN: TAEGBQ

Научная статья  
УДК 539.376:621.787

## Релаксация остаточных напряжений в поверхностно упрочненных вращающихся призматических элементах конструкций в условиях ползучести

В. П. Радченко<sup>✉</sup>, Т. И. Бербасова, М. Н. Саушкин, М. М. Акинфиева

Самарский государственный технический университет, Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244

**Радченко Владимир Павлович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики, radchenko.vp@samgtu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>, AuthorID: 113673

**Бербасова Татьяна Игоревна**, кандидат технических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, t.i.ber@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8070-4846>, AuthorID: 834419

**Саушкин Михаил Николаевич**, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики, saushkin.mn@samgtu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8260-2069>, AuthorID: 103114

**Акинфиева Мария Михайловна**, аспирант кафедры прикладной математики и информатики, mar.akinfiieva@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8771-8127>

**Аннотация.** Разработан метод решения краевых задач релаксации остаточных напряжений во вращающемся поверхностно упрочненном призматическом образце в условиях высокотемпературной ползучести. Задача моделирует напряженно-деформированное состояние поверхностно упрочненного призматического стержня, торцевое сечение которого закреплено на абсолютно жестком диске, вращающегося с постоянной угловой скоростью. На первом этапе решена задача реконструкции полей остаточных напряжений и пластических деформаций после процедуры упрочнения, играющих роль начального напряженно-деформированного состояния. На втором этапе решается задача релаксации остаточных напряжений в условиях ползучести. Выполнено детальное исследование влияния угловой скорости на интенсивность релаксации остаточных напряжений в различных сечениях по осевой координате для призматического образца 10×10×150 мм из сплава ЭП742 при температуре 650 °С после ультразвукового механического упрочнения одной из его граней. Анализ результатов расчета позволил установить, что для угловой скорости, изменяющейся от 1500 до 2500 об/мин, наблюдается нетривиальный эффект, заключающийся в том, что релаксация остаточных напряжений в более нагруженных сечениях, находящихся под действием осевых растягивающих напряжений вследствие вращения, происходит менее интенсивно, чем в «хвостовом» сечении, где осевая нагрузка равна нулю. Полученные в работе результаты могут быть полезными при оценке эффективности поверхностно упрочненных вращающихся деталей в условиях высокотемпературной ползучести.

**Ключевые слова:** остаточные напряжения, поверхностное пластическое деформирование, вращающийся призматический образец, ползучесть, релаксация



**Благодарности:** Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-29-00434, <https://rscf.ru/project/23-29-00434/>).

**Для цитирования:** Радченко В. П., Бербасова Т. И., Саушкин М. Н., Акинфиева М. М. Релаксация остаточных напряжений в поверхностно упрочненных вращающихся призматических элементах конструкций в условиях ползучести // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 512–530. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-512-530>, EDN: TAEGBQ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Relaxation of residual stresses in surface-hardened rotating prismatic elements of structures under creep conditions

V. P. Radchenko<sup>✉</sup>, T. I. Berbasova, M. N. Saushkin, M. M. Akinfieva

Samara State Technical University, 244 Molodogvardeyskaya St., Samara 443100, Russia

**Vladimir P. Radchenko**, radchenko.vp@samgtu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>, AuthorID: 113673

**Tatiana I. Berbasova**, t.i.ber@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8070-4846>, AuthorID: 834419

**Mikhail N. Saushkin**, saushkin.mn@samgtu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8260-2069>, AuthorID: 103114

**Mariya M. Akinfieva**, mar.akinfieva@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8771-8127>

**Abstract.** A method for solving boundary problems of relaxation of residual stresses in a rotating surface-hardened prismatic specimen under high-temperature creep conditions has been developed. The problem models the stress-strain state of a surface-hardened prismatic rod with one end fixed to an infinitely rigid disk rotating at a constant angular velocity. In the first stage, we solve the problem of reconstructing fields of residual stresses and plastic deformations after the hardening procedure, which play the role of the initial stress-strain state, is solved. In the second stage, we address the problem of relaxation of residual stresses under creep conditions is addressed. A detailed study of the influence of angular velocity on the intensity of residual stress relaxation in different sections along the axial coordinate is carried out for a 10×10×150 mm prismatic specimen made of EP742 alloy at a temperature of 650 °C, following ultrasonic mechanical hardening of one of its faces. The analysis of the calculation results revealed that for angular velocities ranging from 1500 rpm to 2500 rpm, a non-trivial effect is observed. The relaxation of residual stresses in more stressed sections experiencing axial tensile stresses due to rotation occurs less intensively than in the “tail” section, where the axial load is zero. The obtained results from this study can be useful in assessing the effectiveness of surface-hardened rotating components under high-temperature creep conditions.

**Keywords:** residual stresses, surface plastic deformation, rotating prismatic specimen, creep, relaxation

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-29-00434), <https://rscf.ru/en/project/23-29-00434/>).

**For citation:** Radchenko V. P., Berbasova T. I., Saushkin M. N., Akinfieva M. M. Relaxation of residual stresses in surface-hardened rotating prismatic elements of structures under creep





conditions. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 512–530 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-512-530>, EDN: TAEGBQ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Технологии поверхностного пластического упрочнения широко используются для повышения ресурса деталей ответственных элементов конструкций в авиадвигателестроении, энергетическом машиностроении и других отраслях промышленности. Это обусловлено образованием полей остаточных напряжений в приповерхностном слое материала деталей, с которыми связывается улучшение ряда показателей надежности: повышаются микротвердость и предел выносливости при много- и малоцикловом нагружении, улучшаются трибологические характеристики и другие показатели [1–11]. Решение краевых задач, связанных с оценкой кинетики остаточных напряжений в процессе ползучести, состоит из двух этапов. На первом этапе необходимо решить задачу реконструкции (формирования) остаточных напряжений и пластических деформаций после процедуры поверхностного упрочнения. Здесь можно выделить два подхода для решения этой задачи. В ряде публикаций авторы используют феноменологический подход, базирующийся на экспериментально известной информации о распределении одной или двух компонент тензора остаточных напряжений [12–17]. Такая постановка задач соответствует классу обратных краевых задач, и их решение даже в упругой постановке представляет большие трудности [18, 19].

Существенное продвижение в области теоретических методов реконструкции остаточных напряжений связано с многократно возросшими возможностями прямого математического моделирования технологических процессов (обработка микрошариками, обкатка роликом, алмазное выглаживание и др.) на основе современного программного обеспечения в многочисленных коммерческих пакетах, базирующихся в основном на методе конечных элементов. Например, в [20] за счет варьирования технологических параметров обработки поверхности микрошариками (длительность обработки, скорость и направление макрошариков и др.) для трехмерного случая удалось получить поля остаточных напряжений и исследовать влияние технологических параметров на их характер и величину. Аналогичные подходы реализованы в исследованиях [21–26].

Однако многочисленные попытки прямого моделирования процесса упрочнения в большинстве случаев позволяют получить распределение остаточных напряжений лишь на качественном уровне, поскольку учесть все параметры реального технологического процесса поверхностного пластического упрочнения сложно, а зачастую, в силу различных стохастических возмущений, и невозможно. На втором этапе исследования полученное остаточное напряженно-деформированное состояние после упрочнения используется в краевых задачах ползучести упрочненных элементов конструкций для оценки скорости релаксации остаточных напряжений и эффективности методов поверхностного пластического упрочнения для деталей при высокой температуре. Данная тематика находится в активной разработке. В частности, решен ряд задач для полых и сплошных поверхностно упрочненных цилиндрических деталей в условиях квазистатического нагружения при кручении, внутреннем давлении, осевом растяжении, чистой термоэкспозиции (температурная выдержка без приложения си-



ловых нагрузок) и их различных комбинациях [27–30], а также при дополнительных кинематических ограничениях на осевые и угловые перемещения [31–33]. Важный класс задач связан с учетом влияния массовых сил при вращении на релаксацию остаточных напряжений, имеющих прозрачный интерес в области авиадвигателестроения и энергетического машиностроения. Первая попытка решения задач такого типа предпринята для поверхностно упрочненного цилиндра в [34]. Здесь методика расчета основана на использовании приближенного метода [15], согласно которому полагалось, что поскольку толщина поверхностного упрочненного слоя мала по сравнению с радиусом цилиндрического образца, то этот слой не оказывает существенного влияния на жесткость и деформируемость самого цилиндра. Поэтому тонкий упрочненный слой представлялся «наклеенным» на цилиндр и деформирующимся с ним в режиме «жесткого» нагружения под действием осевой растягивающей силы, но оценить погрешность этого метода теоретически не представляется возможным. Впервые точное (но численное) решение задачи о релаксации остаточных напряжений при вращении сплошного упрочненного цилиндра в условиях ползучести приведено в [35].

В настоящей работе обобщается подход [35] применительно к вращающемуся поверхностно упрочненному призматическому образцу.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается вращающийся поверхностно упрочненный призматический образец в условиях высокотемпературной ползучести. Геометрические параметры образца и введенная для дальнейшего исследования декартова система координат  $OXYZ$  представлены на рис. 1.

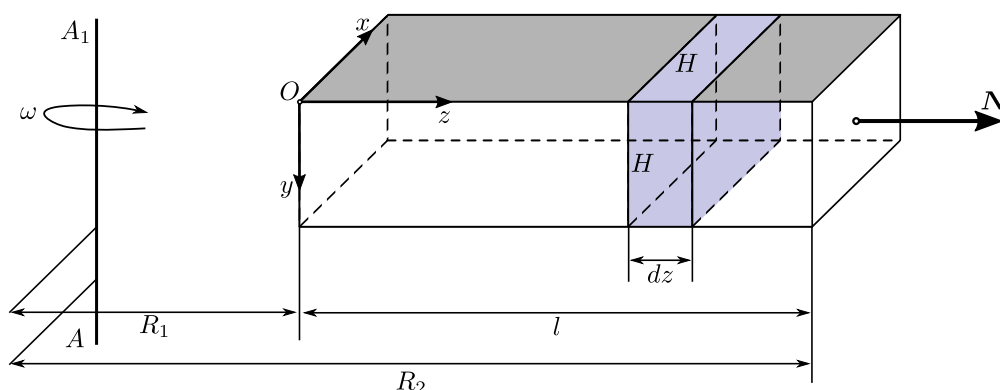


Рис. 1. Схема растяжения призматического образца от действия центробежной силы  $N$  при вращении с угловой скоростью  $\omega$

Fig. 1. The stretching scheme of a prismatic specimen under the action of the centrifugal force  $N$  during rotation with an angular velocity  $\omega$

Грань в плоскости  $XOY$  консольно (жестко) закреплена, что можно трактовать как стержень, закрепленный на абсолютно жестком диске радиуса  $R_1$ . Вращение задается относительно оси  $AA_1$  с угловой скоростью  $\omega$ . Система координат жестко связана с вращающимся призматическим образцом. Одна из его граней подвержена процедуре поверхностного пластического деформирования (залита темным цветом на рис. 1), и в тонком приповерхностном слое сформировано поле остаточных напряжений. При вращении в объеме образца возникает неоднородное осевое напряженное состояние за счет переменной нагрузки  $N(z)$ , под действием которой развиваются деформации ползучести в каждом сечении, ортогональном оси  $OZ$ , и происходит



перераспределение (релаксация) остаточных напряжений в тонком приповерхностном слое. Целью работы является разработка метода расчета релаксации наведенных остаточных напряжений после процедуры поверхностного пластического упрочнения в призматическом образце в поле массовых сил в условиях ползучести материала.

Последовательность решения сформулированной задачи аналогична изложенной в работе [35] и состоит из реализации следующих этапов:

- 1) реконструкция полей остаточных напряжений и пластических деформаций после процедуры упрочнения при нормальной («комнатной») температуре  $T = T_0$ ;
- 2) перерасчет полей остаточных напряжений при приложении температурно-силовых стационарных нагрузок от вращения и изменении температуры со значения  $T = T_0$  (модуль Юнга материала  $E_0$ ) до температуры «эксплуатации»  $T = T_1$  ( $T_1 > T_0$ , модуль Юнга при этой температуре  $E_1$ );
- 3) расчет релаксации остаточных напряжений в упрочненном призматическом образце вследствие ползучести при температуре  $T = T_1$ .

## 2. Напряженно-деформированное состояние вращающегося призматического образца

Рассмотрим сначала закон изменения осевого напряжения во вращающемся неупрочненном призматическом образце. Величина центробежной силы от вращения, действующей на элемент объема  $H \times H \times dz$  (см. рис. 1), определяется формулой [36]

$$dN = \omega^2(R_1 + z)\rho F(z)dz, \quad 0 \leq z \leq l = R_2 - R_1, \quad (1)$$

где  $\omega$  — угловая скорость;  $\rho = \gamma/g$  — плотность материала;  $\gamma$  — удельный вес;  $g$  — ускорение свободного падения;  $F(z)$  — площадь поперечного сечения (в рассматриваемом случае  $F(z) = H^2 = \text{const}$ ). Из (1) получаем

$$N(z) = \rho\omega^2 \int_z^l (R_1 + \xi)F(\xi)d\xi. \quad (2)$$

Учитывая, что  $F(z) = \text{const}$ , из (2) для напряжения  $\sigma^0(z) = N(z)/F$  имеем

$$\sigma_z^0(z) = \rho\omega^2 \left[ R_1(l - z) + \frac{l^2 - z^2}{2} \right]. \quad (3)$$

Формулу (3) с учетом обозначения  $l = R_2 - R_1$  можно представить в виде

$$\sigma_z^0(z) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 R_2^2 \left[ 1 - \left( \frac{R_1 + z}{R_2} \right)^2 \right], \quad 0 \leq z \leq R_2 - R_1. \quad (4)$$

Из формул (3) и (4) следует, что при  $\omega = \text{const}$  осевое напряжение  $\sigma_z^0(z)$  при фиксированной величине  $z$  не зависит от времени. Этот факт используется в дальнейшем при «наложении» на поле остаточных напряжений «эксплуатационных» нагрузок от осевых напряжений.

## 3. Реконструкция остаточных напряжений и пластических деформаций после упрочнения

Задача реконструкции остаточных напряжений и пластических деформаций в предположении, что все компоненты тензоров напряжений и деформаций зависят лишь от



координаты  $y$ , использования гипотез плоских сечений и анизотропии упрочнения по координатам  $x$  и  $z$  (см. рис. 1), решена в [12], и получены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{\text{res}} &= \frac{1 + \alpha\nu}{\alpha + \nu} \sigma_x^{\text{res}}, & q_x &= -\frac{\alpha(1 - \nu^2)}{E_0(\alpha + \nu)} \sigma_x^{\text{res}}, \\ q_z &= -\frac{1 - \nu^2}{E_0(\alpha + \nu)} \sigma_x^{\text{res}}, & q_y &= \frac{(1 + \alpha)(1 - \nu^2)}{E_0(\alpha + \nu)} \sigma_x^{\text{res}}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\sigma_x^{\text{res}} = \sigma_x^{\text{res}}(y)$ ,  $\sigma_z^{\text{res}} = \sigma_z^{\text{res}}(y)$  — компоненты тензора остаточных напряжений;  $q_x = q_x(y)$ ,  $q_y = q_y(y)$ ,  $q_z = q_z(y)$  — компоненты тензора остаточных пластических деформаций;  $E_0$  — модуль Юнга при температуре упрочнения;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\alpha$  — феноменологический параметр, характеризующий анизотропию компонент  $q_x$  и  $q_z$  вследствие технологии упрочнения [12]. Остальные компоненты тензоров остаточных напряжений и пластических деформаций полагаются равными нулю, поскольку их значения (по модулю) на порядок меньше, чем у представленных в (5) [12]. Таким образом, для реконструкции остаточного напряженно-деформированного состояния необходимо иметь аналитическое выражение для компоненты  $\sigma_x^{\text{res}} = \sigma_x^{\text{res}}(y)$ ,  $0 \leq y \leq H$ . В дальнейших расчетах используются экспериментальные данные после одностороннего ультразвукового упрочнения призматического образца прямоугольного сечения из сплава ЭП742 для компоненты  $\sigma_x = \sigma_x(y)$ , приведенные в работе [12] и представленные лишь в области сжатия материала.

Экстраполяция экспериментальных данных на все значения  $0 \leq y \leq H$  выполнена с использованием зависимости

$$\sigma_x^{\text{res}}(y) = \sigma_0 - \sigma_1 \exp\left(-\frac{(y - y^*)^2}{b^2}\right), \quad (6)$$

где  $\sigma_x^{\text{res}}(y^*) = \min_{0 \leq y \leq H} \sigma_x(y)$ ;  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  и  $b$  — параметры, методика определения которых с использованием условия самоуравновешенности эпюры остаточных напряжений изложена в [12].

В частном случае изотропного упрочнения (обработка дробью, ультразвуковое (механическое) упрочнение, термопластическое упрочнение и другие технологии) параметр  $\alpha = 1$  [12] и формулы (5) принимают более простой вид:

$$\sigma_z^{\text{res}} = \sigma_x^{\text{res}}, \quad q_x = q_z = -\frac{1 - \nu}{E_0} \sigma_x^{\text{res}}, \quad q_y = \frac{2(1 - \nu)}{E_0} \sigma_x^{\text{res}}. \quad (7)$$

#### 4. Расчет напряженно-деформированного состояния при мгновенном приложении температурно-силового нагружения

Рассмотрим следующую схему нагружения поверхностно упрочненного призматического образца: сначала образец прогревается (условно мгновенно) с температуры упрочнения  $T_0$  (модуль Юнга  $E_0$ ) до температуры «эксплуатации»  $T_1$  (модуль Юнга  $E_1$ ), а затем цилиндр начинает вращаться с угловой скоростью  $\omega$ . Предполагается, что при температурно-силовом нагружении не возникают вторичные пластические деформации, т. е. происходит упругая догрузка упрочненного образца. Поэтому  $q_x = q_x(y)$  не зависит от температуры, и второе соотношение (5) для температуры  $T_1$  можно записать в виде

$$q_x(y) = -\frac{\alpha(1 - \nu^2)}{E_1(\alpha + \nu)} \frac{E_1}{E_0} \cdot \sigma_x^{\text{res}}(y). \quad (8)$$



Соотношение (8) по форме будет аналогично второму соотношению (5), если все эпюры остаточных напряжений умножить на коэффициент  $E_1/E_0$ . В результате получаем распределение остаточных напряжений при температуре  $T_1$ .

При расчете напряженно-деформированного состояния в условиях ползучести при вращении с угловой скоростью  $\omega$  и температуре  $T_1$  в любой момент времени  $t$  в дальнейшем будем использовать следующие обозначения:  $\sigma_i = \sigma_i(y, z, t)$  — для компонент тензора напряжений;  $\varepsilon_i(y, z, t)$ ,  $e_i(y, z, t)$ ,  $p_i(y, z, t)$  — для компонент тензоров полной, упругой и реологической деформаций соответственно,  $i = x, y, z$ . Тогда в начальный момент времени при  $t = 0$  имеем:

$$\begin{aligned}\sigma_z(y, z, 0) &= \frac{\rho\omega^2 R_2^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{R_1 + z}{R_2} \right)^2 \right] + \frac{E_1}{E_0} \sigma_z^{\text{res}}(y), \\ \sigma_x(y, z, 0) &= \frac{E_1}{E_0} \sigma_x^{\text{res}}(y), \\ \varepsilon_z(y, z, 0) &= \frac{1}{E_1} [\sigma_z(y, z, 0) - \nu\sigma_x(y, z, 0)] + q_z(y), \\ \varepsilon_x(y, z, 0) &= \frac{1}{E_1} [\sigma_x(y, z, 0) - \nu\sigma_z(y, z, 0)] + q_x(y),\end{aligned}$$

где  $\sigma_x^{\text{res}}(y)$ ,  $\sigma_z^{\text{res}}(y)$  — остаточные напряжения после упрочнения, определяемые формулами (5), (6).

## 5. Расчет релаксации остаточных напряжений во вращающемся призматическом образце в условиях ползучести

Решить аналитически поставленную задачу релаксации остаточных напряжений при ползучести невозможно в силу нелинейности любой теории ползучести для металлических материалов. Поэтому в настоящей работе разработан численный метод. Учитывая неоднородность напряженного состояния для компоненты  $\sigma_z^0(z)$ , задаваемого (1), и его стационарность по координате  $z \in [0, l]$  при вращении, выполняется дискретизация призматического образца по этой координате:  $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_N = l$  с постоянным шагом  $\Delta z = l/N$ , где  $N$  — количество отрезков разбиения. Далее упрочненный образец рассматривается как составной стержень из  $N$  элементарных стержней прямоугольного сечения с высотой  $\Delta z$ , при этом в каждом сечении напряжение  $\sigma_z^0(z)$  ( $z_{i-1} \leq z \leq z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ) можно считать постоянным. В связи с этим расчет релаксации остаточных напряжений в каждом сечении  $z = z_k$  вращающегося образца можно выполнять автономно, полагая, что в этом сечении действует постоянная нагрузка  $\sigma_z^0(z_k)$ .

Для каждого элементарного стержня вводится гипотеза плоских сечений в виде

$$\varepsilon_z(y, z_k, t) = \varepsilon_z^0(z_k, t), \quad \varepsilon_x(y, z_k, t) = \varepsilon_x^0(z_k, t).$$

Тогда в любой момент времени справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}\varepsilon_z(y, z_k, t) &= e_z(y, z_k, t) + q_z(y) + p_z(y, z_k, t) = \varepsilon_z^0(z_k, t), \\ \varepsilon_x(y, z_k, t) &= e_x(y, z_k, t) + q_x(y) + p_x(y, z_k, t) = \varepsilon_x^0(z_k, t).\end{aligned}\tag{9}$$

Величины  $\varepsilon_z^0(z_k, t)$  и  $\varepsilon_x^0(z_k, t)$  имеют представление

$$\begin{aligned}\varepsilon_z^0(z_k, t) &= \frac{1}{E_1} \sigma_z^0(z_k) + p_z^0(z_k, t), \\ \varepsilon_x^0(z_k, t) &= -\frac{\nu}{E_1} \sigma_z^0(z_k) + p_x^0(z_k, t).\end{aligned}\tag{10}$$



Тогда (9) с учетом (10) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_1} [\sigma_z(y, z_k, t) - \nu \sigma_x(y, z_k, t)] + q_z(y) + p_z(y, z_k, t) &= \frac{1}{E_1} \sigma_z^0(z_k) + p_z^0(z_k, t), \\ \frac{1}{E_1} [\sigma_x(y, z_k, t) - \nu \sigma_z(y, z_k, t)] + q_x(y) + p_x(y, z_k, t) &= -\frac{\nu}{E_1} \sigma_z^0(z_k) + p_x^0(z_k, t). \end{aligned}$$

Решая полученную систему относительно  $\sigma_z(y, z_k, t)$  и  $\sigma_x(y, z_k, t)$ , находим

$$\begin{aligned} \sigma_z(y, z_k, t) &= \sigma_z^0(z_k) + \frac{E_1}{1 - \nu^2} [(p_z^0(z_k, t) + \nu p_x^0(z_k, t)) - \\ &\quad - (q_z(y) + \nu q_x(y)) - (p_z(y, z_k, t) + \nu p_x(y, z_k, t))], \\ \sigma_x(y, z_k, t) &= \frac{E_1}{1 - \nu^2} [(p_x^0(z_k, t) + \nu p_z^0(z_k, t)) - \\ &\quad - (q_x(y) + \nu q_z(y)) - (p_x(y, z_k, t) + \nu p_z(y, z_k, t))]. \end{aligned} \quad (11)$$

Однако для реализации расчетов напряжений  $\sigma_z(y, z_k, t)$  и  $\sigma_x(y, z_k, t)$  на основании (11) необходимо знать величины  $p_x^0(z_k, t)$  и  $p_z^0(z_k, t)$ , которые пока неизвестны. Для их определения запишем условия равенства внутренних и внешних сил, действующих в любом сечении, параллельном координатным плоскостям  $ZOY$  и  $XOY$ :

$$\int_0^H \sigma_z(y, z_k, t) dy = \int_0^H \sigma_z^0(z_k) dy, \quad \int_0^H \sigma_x(y, z_k, t) dy = 0. \quad (12)$$

Подставляя (11) в (12), учитывая, что при  $z = z_k$  величина  $\sigma_z^0(z_k) = \text{const}$ , решая полученную систему уравнений относительно  $p_x^0$  и  $p_z^0$ , окончательно находим

$$\begin{aligned} p_z^0(z_k, t) &= \int_0^H [q_z(y) + p_z(y, z_k, t)] dy, \\ p_x^0(z_k, t) &= \int_0^H [q_x(y) + p_x(y, z_k, t)] dy. \end{aligned} \quad (13)$$

Объединяя (11) и (13), получаем систему для расчета кинетики остаточных напряжений  $\sigma_z(y, z_k, t)$  и  $\sigma_x(y, z_k, t)$  в процессе ползучести во вращающемся упрочненном призматическом образце. Начальные условия для этой системы следующие:  $p_z(y, z_k, 0) = 0$ ;  $p_x(y, z_k, 0) = 0$ .

Таким образом, если известны компоненты тензора деформаций ползучести  $p_z(y, z_k, t)$  и  $p_x(y, z_k, t)$ , то величины  $\sigma_x(y, z_k, t)$  и  $\sigma_z(y, z_k, t)$  определяются из системы (11), (13). Для определения деформации ползучести используется теория, описывающая первую и вторую стадии ползучести и имеющая для рассматриваемого в настоящей работе сложного напряженного состояния в призматическом образце следующий вид [37]:

$$\begin{aligned} p_j(t) &= v_j(t) + w_j(t); \\ \begin{cases} v_x(t) = (1 + \mu'')\beta_x(t) - \mu''(\beta_x(t) + \beta_z(t)), \\ v_z(t) = (1 + \mu'')\beta_z(t) - \mu''(\beta_z(t) + \beta_x(t)); \\ \dot{\beta}_j(t) = \begin{cases} \lambda B_j(t), & B_j(t)\sigma_j(t) > 0, \\ 0, & B_j(t)\sigma_j(t) \leq 0, \end{cases} \\ B_j(t) = a(S(t)/\sigma^{**})^{n-1}(\sigma_j(t)/\sigma^{**}) - \beta_j(t), & j = x, z; \end{cases} \\ \dot{w}_z(t) &= c \left( \frac{S(t)}{\sigma^{**}} \right)^{m-1} \left( \frac{\sigma_z(t) - \frac{1}{2}\sigma_x(t)}{\sigma^{**}} \right); \\ \dot{w}_x(t) &= c \left( \frac{S(t)}{\sigma^{**}} \right)^{m-1} \left( \frac{\sigma_x(t) - \frac{1}{2}\sigma_z(t)}{\sigma^{**}} \right), \end{aligned} \quad (14)$$



где  $p_j(t)$ ,  $v_j(t)$ ,  $w_j(t)$  — компоненты тензоров полной деформации ползучести, вязкопластической деформации и деформации вязкого течения соответственно;  $\mu''$  — аналог коэффициента Пуассона для компонент  $v_x(t)$ ,  $v_z(t)$  (по рекомендации [37] можно использовать  $\mu'' = 0,42$ );  $S(t) = \sqrt{\sigma_x^2(t) + \sigma_z^2(t) - \sigma_x(t)\sigma_z(t)}$  — интенсивность напряжений;  $\sigma^{**}$ ,  $\lambda$ ,  $a$ ,  $n$ ,  $c$ ,  $m$  — параметры модели, методика идентификации которых хорошо известна и изложена в [37].

Начальные условия для уравнений (14) имеют следующий вид:

$$v_j(0) = w_j(0) = \beta_j(0) = 0, \quad j = x, z. \quad (15)$$

С использованием теории ползучести (14) рассчитываются значения  $p_x(y, z_k, t)$  и  $p_z(y, z_k, t)$ , входящие в формулы (11) и (13). Эти величины рассчитываются численно «шагами» по времени. Суть метода состоит в следующем. Сначала осуществляется дискретизация по временной координате  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = t^*$  с шагом  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$  ( $i = 0, 1, \dots, K - 1$ ) и по пространственной переменной  $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_M = H$  ( $H$  — толщина образца, см. рис. 1). Пусть нам известны значения всех функций, входящих в (14) в каждой точке  $(t_i, y_j)$ , а значит, известны и значения  $p_x(y_j, z_k, t_i)$ ,  $p_z(y_j, z_k, t_i)$ . Тогда на основании (14) вычисляются приращения компонент деформации ползучести  $\Delta p_x(y_j, z_k, t_i)$ ,  $\Delta p_z(y_j, z_k, t_i)$  за шаг времени  $\Delta t_i$ , при этом приращения соответствующих величин, входящих в дифференциальные соотношения (14), вычисляются, например, по методу Эйлера. Далее находятся значения

$$\begin{aligned} p_x(y_j, z_k, t_{i+1}) &= p_x(y_j, z_k, t_i) + \Delta p_x(y_j, z_k, t_i), \\ p_z(y_j, z_k, t_{i+1}) &= p_z(y_j, z_k, t_i) + \Delta p_z(y_j, z_k, t_i), \end{aligned}$$

а затем по формулам (11), (13) определяются  $\sigma_x(y_j, z_k, t_{i+1})$ ,  $\sigma_z(y_j, z_k, t_{i+1})$ , и процесс итерационно продолжается до достижения значением времени заданного интервала расчета  $t = t_N = t^*$ . На первом шаге при  $\Delta t_0 = t_1 - t_0$  используются начальные условия (15) и значения напряжений  $\sigma_x(y, z_k, 0)$  и  $\sigma_z(y, z_k, 0)$  в момент приложения температурно-силового нагружения.

Рассмотрим теперь температурно-силовую разгрузку после ползучести в момент времени  $t = t^* + 0$ . Пусть сначала осуществляется силовая упругая разгрузка, т. е. полагается  $\omega = 0$ . Тогда получаем соотношения для остаточных напряжений из (11)

$$\begin{aligned} \sigma_z(y, z_k, t^*) &= \frac{E_1}{1 - \nu^2} [(p_z^0(z_k, t^*) + \nu p_x^0(z_k, t^*)) - \\ &\quad - (q_z(y) + \nu q_x(y)) - (p_z(y, z_k, t^*) + \nu p_x(y, z_k, t^*))], \\ \sigma_x(y, z_k, t^*) &= \frac{E_1}{1 - \nu^2} [(p_x^0(z_k, t^*) + \nu p_z^0(z_k, t^*)) - \\ &\quad - (q_x(y) + \nu q_z(y)) - (p_x(y, z_k, t^*) + \nu p_z(y, z_k, t^*))]. \end{aligned} \quad (16)$$

Чтобы найти остаточные напряжения после температурной разгрузки с температуры  $T_1$  до температуры  $T_0$ , достаточно в (16)  $E_1$  заменить на  $E_0$ .

## 6. Результаты расчетов и их анализ

В модельных расчетах использовался призматический образец из сплава ЭП742 с геометрическими размерами  $10 \times 10 \times 150$  мм после ультразвукового (механического) упрочнения<sup>1</sup> при нормальной («комнатной») температуре  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  (модуль

<sup>1</sup>Здесь величина параметра анизотропии в формулах (5)  $\alpha = 1$  и остаточное напряженно-деформированное состояние задается соотношениями (7).



Юнга при этой температуре  $E_0 = 2.21 \cdot 10^5$  МПа). Расчет релаксации остаточных напряжений осуществлялся при температуре  $T_1 = 650^\circ\text{C}$  (модуль Юнга при этой температуре  $E_1 = 1.79 \cdot 10^5$  МПа) при четырех значениях скорости вращения  $\omega = \{1500; 2000; 2500; 3000\}$  об/мин и длительности «испытаний» 100 ч. Плотность материала  $\rho = 83200$  г/м<sup>3</sup>, коэффициент  $\nu = 1/3$  полагался независимым от температуры. Численные значения геометрических параметров (см. рис. 1) следующие:  $R_1 = 517$  мм,  $R_2 = 667$  мм. Значения параметров модели ползучести (14) сплава ЭП742 при температуре  $650^\circ\text{C}$  приведены в [38]:  $\sigma^{**} = 500$  МПа;  $\lambda = 0.022$  1/ч;  $a = 6.1 \cdot 10^{-3}$ ;  $n = 3.29$ ;  $m = 14.3$ ;  $c = 0.722 \cdot 10^{-6}$ .

Расчеты для оценки кинетики остаточных напряжений во вращающемся образце в условиях ползучести выполнялись в пяти сечениях при значениях  $z = 0$  (условно — «корневое» сечение), 37.5 мм, 75.0 мм, 112.5 мм, 150.0 мм (условно — «хвостовое» сечение).

На первом этапе выполнена реконструкция напряженно-деформированного состояния образца из сплава ЭП742 после ультразвукового упрочнения его грани с использованием экспериментальных данных для режима упрочнения, длительностью 20 с, приведенных для компоненты  $\sigma_x^{\text{res}} = \sigma_x^{\text{res}}(y)$  в работе [12] и представленных на рис. 2 сплошной линией. Используя методику этой работы, определены параметры аппроксимации (6):  $\sigma_0 = 119.2$  МПа;  $\sigma_1 = 1230.7$  МПа;  $b = 0.097$  мм. Результаты аппроксимации приведены на рис. 2 штриховой линией. И, наконец, с использованием (6) и (7) определены компоненты тензоров остаточных напряжений и пластических деформаций. Еще раз отметим, что в соотношениях (5) при ультразвуковом упрочнении параметр анизотропии упрочнения  $\alpha = 1$ .

На втором этапе выполнялся расчет осевых остаточных  $\sigma_z^0(z)$ , вызванных вращением, по формуле (4) при различных значениях  $\omega$ . Соответствующие графики приведены на рис. 3.

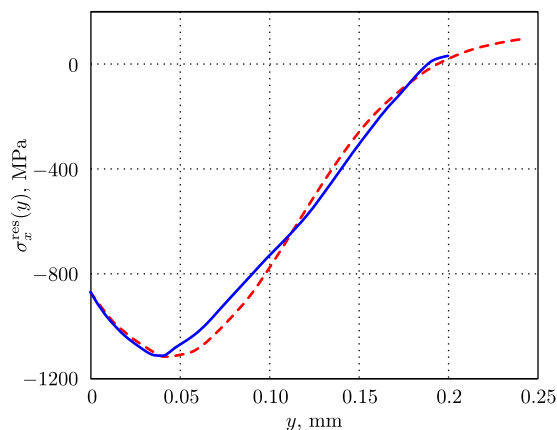


Рис. 2. Экспериментальная (сплошная линия) и расчетная (штриховая линия) эпюры остаточных напряжений в поверхностном слое призматического образца (сплав ЭП742) после ультразвукового упрочнения

Fig. 2. Experimental (solid line) and calculated (dashed line) profiles of residual stresses in the surface layer of a prismatic sample (EP742 alloy) after ultrasonic strengthening

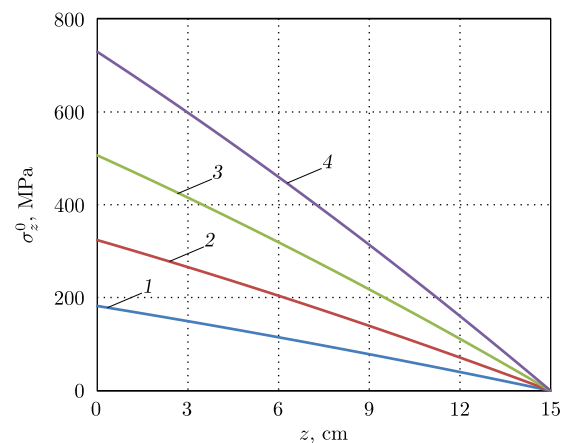


Рис. 3. Распределение осевого напряжения  $\sigma_z^0$  в сечениях образца при различной скорости вращений  $\omega$ : 1 — 1500 об/мин; 2 — 2000 об/мин; 3 — 2500 об/мин; 4 — 3000 об/мин

Fig. 3. Distribution of the axial stress  $\sigma_z^0$  in the cross-sections of the sample at different rotation speeds  $\omega$ : 1 — of 1500 rpm; 2 — of 2000 rpm; 3 — of 2500 rpm; 4 — 3000 rpm

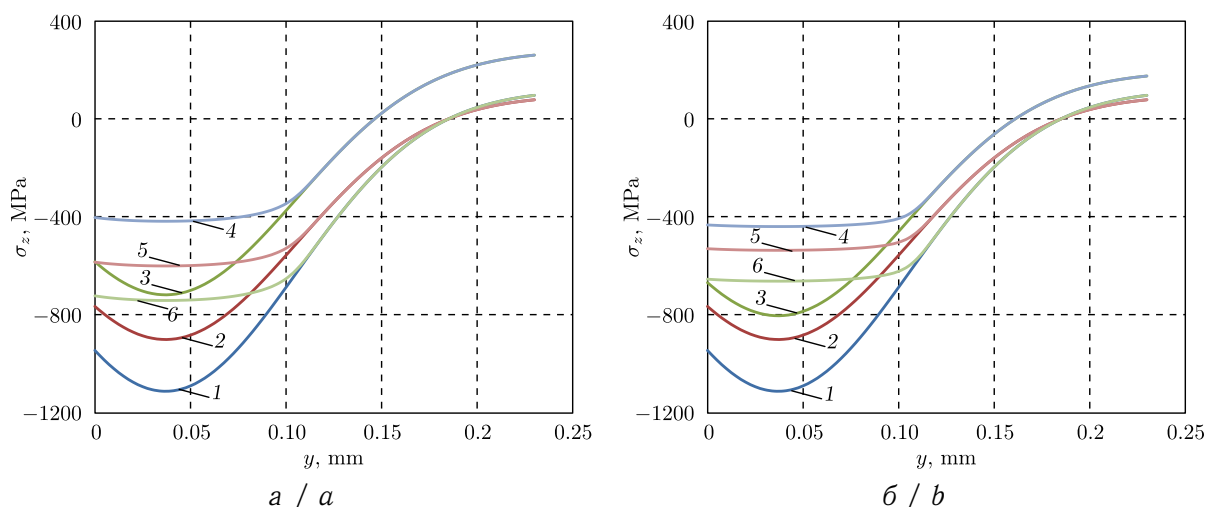




На заключительном этапе выполнялся расчет релаксации остаточных напряжений в процессе ползучести образца за время 100 ч в условиях температурно-силового нагружения с последующей температурно-силовой разгрузкой образца в момент времени  $t^* = 100$  ч. Наибольший интерес представляет анализ кинетики компоненты  $\sigma_z(y, z_k, t)$ , поскольку здесь на первоначально наведенное после процедуры упрочнения напряженное состояние накладывается «рабочее» внешнее напряжение, вызванное вращением образца. В качестве примера на рис. 4, а–в приведены эпюры распределения этой компоненты при  $\omega = 1500$  об/мин (157.1 рад/с) в сечениях  $z = 0$ ,  $z = 75$  мм и  $z = 150$  мм соответственно, и аналогично на рис. 4, г–е приведены зависимости в «корневом» сечении  $z = 0$  при  $\omega = 2000$  об/мин (209.4 рад/с),  $\omega = 2500$  об/мин (261.8 рад/с),  $\omega = 3000$  об/мин (314.2 рад/с). Отметим, что распределение остаточных напряжений  $\sigma_z$  в «хвостовом» сечении (рис. 4, в) не зависит от величины угловой скорости  $\omega$ , поскольку осевое растягивающее напряжение от вращения при  $z = 150$  мм в этом сечении отсутствуют. Здесь фактически наблюдается релаксация остаточных напряжений в условиях чистой термоэкспозиции.

Анализ зависимостей на рис. 4, а–в свидетельствует, что при  $\omega = 1500$  об/мин релаксация напряжений в сечениях, где осевое растягивающее напряжение выше, происходит менее интенсивно, чем в «хвостовом» сечении ( $z = 150$  мм), где осевая нагрузка от вращения равна нулю.

Это следует из сравнения кривой 1, которая соответствует распределению напряжения  $\sigma_z$  после процедуры упрочнения, с кривой б, которая соответствует распределению этой компоненты после ползучести в течение 100 ч с последующей температурно-силовой разгрузкой. Аналогичный эффект наблюдался при  $\omega = 2000$  об/мин и  $\omega = 2500$  об/мин. Отметим, что максимальные осевые растягивающие напряжения от вращения в «корневом» сечении не превосходят 500 МПа (см. рис. 3) при этих трех значениях угловой скорости. Таким образом, в этом диапазоне изменения  $\omega$  наличие растягивающих осевых напряжений приводит к замедлению процесса релаксации остаточных напряжений по сравнению с условиями чистой термоэкспозиции в сечении  $z = 150$  мм, где ползучесть происходит только под действием остаточных (собственных) напряжений. Аналогичный нетривиальный вывод получен и в работе [35] при исследовании релаксации остаточных напряжений во вращающемся цилиндрическом образце.



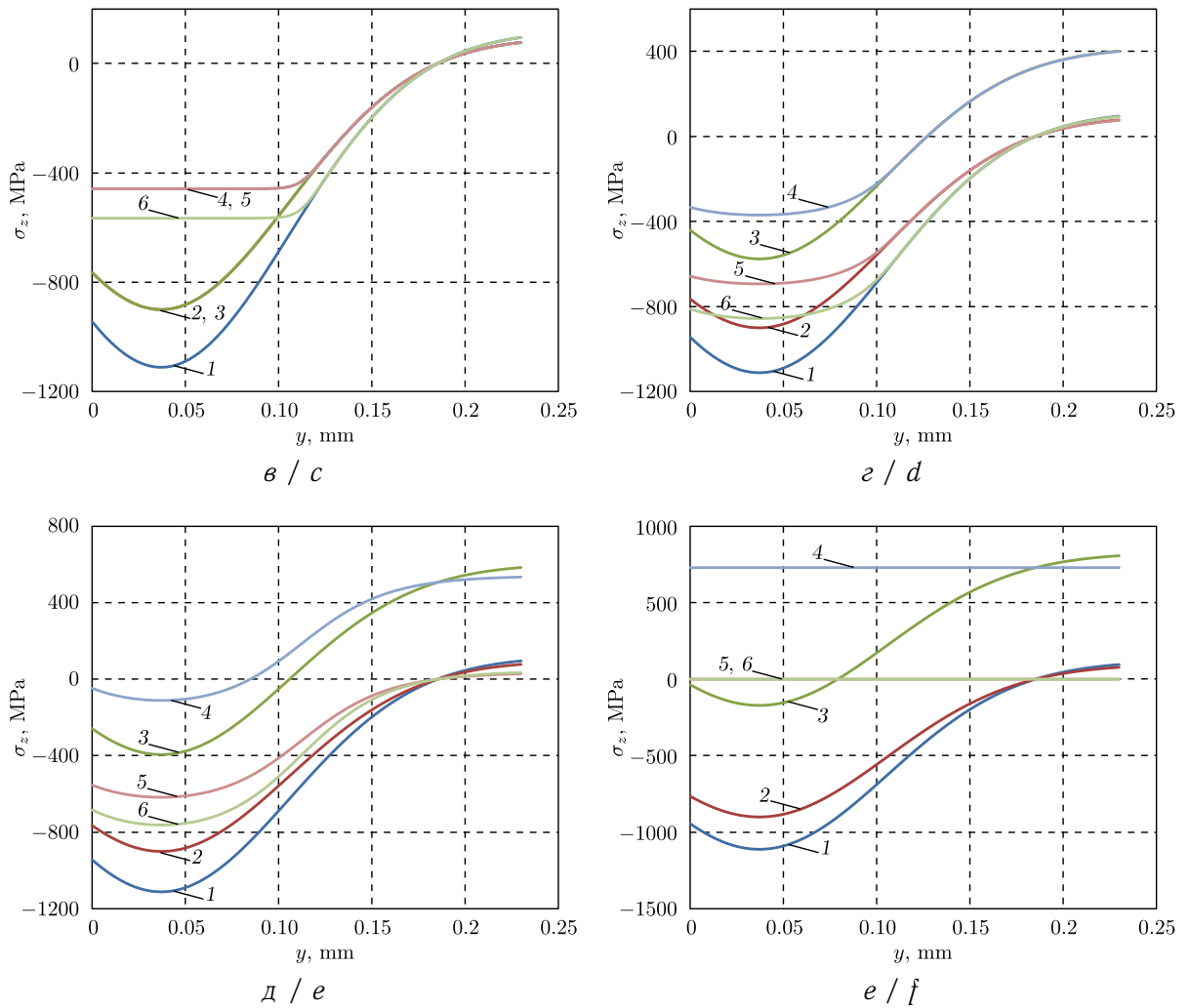


Рис. 4. Кинетика компоненты остаточных напряжений  $\sigma_z(y, t)$  в условиях ползучести при  $\omega = 1500$  об/мин в сечениях  $z = 0$  (а),  $z = 75$  мм (б),  $z = 150$  мм (в); в сечении  $z = 0$  при  $\omega = 2000$  об/мин (г), при  $\omega = 2500$  об/мин (д), при  $\omega = 3000$  об/мин (е). Расчетные значения: 1 – после процедуры упрочнения при  $20^\circ\text{C}$  в момент времени  $t = 0 - 0$ ; 2 – после температурной нагрузки до  $650^\circ\text{C}$  в момент времени  $t = 0 + 0$ ; 3 – после силовой нагрузки от вращения при  $650^\circ\text{C}$  в момент времени  $t = 0 + 0$ ; 4 – после ползучести при температурно-силовой нагрузке при  $650^\circ\text{C}$  в момент времени  $t = 100 - 0$  ч; 5 – после силовой разгрузки при  $650^\circ\text{C}$  при  $t = 100 + 0$  ч; 6 – после температурной разгрузки до  $20^\circ\text{C}$  в момент времени  $t = 100 + 0$  ч

Fig. 4. The kinetics of residual stresses component  $\sigma_z(y, t)$  under creep conditions at  $\omega = 1500$  rpm in sections  $z = 0$  (a),  $z = 75$  mm (b),  $z = 150$  mm (c); in the section  $z = 0$  at  $\omega = 2000$  rpm (d), at  $\omega = 2500$  rpm (e), at  $\omega = 3000$  rpm (f). Calculated values: 1 – after the hardening procedure at  $20^\circ\text{C}$  at time  $t = 0 - 0$ ; 2 – after temperature loading up to  $650^\circ\text{C}$  at time  $t = 0 + 0$ ; 3 – after force loading from rotation at  $650^\circ\text{C}$  at time  $t = 0 + 0$ ; 4 – after creep under temperature-force loading at  $650^\circ\text{C}$  at time  $t = 100 - 0$  h; 5 – after force unloading at  $650^\circ\text{C}$  at time  $t = 100 + 0$  h; 6 – after temperature unloading to  $20^\circ\text{C}$  at time  $t = 100 + 0$  h

Проанализируем теперь процесс релаксации остаточных напряжений  $\sigma_z$  в «корневом» сечении ( $z = 0$ ) в зависимости от величин угловой скорости, сравнивая кривые 1 и 6 на рис. 4, а, г–е. Здесь наблюдается немонотонная зависимость скорости релаксации от  $\omega$  (или то же самое – от осевого растягивающего напряжения): при  $\omega \in [1500; 2000]$  об/мин процесс релаксации замедляется (значения напряжения  $\sigma_z$



при 100 часах (кривая б) по модулю увеличиваются) с увеличением  $\omega$ ; затем при  $\omega = 2500$  об/мин процесс релаксации интенсифицируется (значения напряжения  $\sigma_z$  (кривая б на рис. 4, д) по модулю начинают уменьшаться по сравнению с графиком на рис. 4, з), а при  $\omega = 3000$  об/мин они практически полностью релаксируют (кривая б на рис. 4, е) и их распределение по координате  $y \in [0, 10]$  мм при  $t = 100$  ч до температурно-силовой разгрузки (кривая 4) совпадает со значением растягивающей осевой нагрузки от вращения (см. рис. 3, кривая 4 при  $z = 0$ ).

Анализ интенсивности релаксации остаточных напряжений  $\sigma_z$  по длине вращающегося образца показал монотонное увеличение степени релаксации от «корневого» сечения ( $z = 0$ ) до «хвостового» сечения ( $z = 150$  мм) для  $\omega = \{1500; 2000; 2500\}$  об/мин, при этом максимальные значения осевого растягивающего напряжения от вращения в «корневом» сечении изменяются от 182.3 до 506.4 МПа (см. рис. 3). Однако при  $\omega = 3000$  об/мин, что соответствует уровню растягивающих напряжений от вращения 729 МПа при  $z = 0$ , ситуация становится иной и наблюдается немонотонная зависимость степени релаксации в сечениях по длине образца: при  $z = 0$  происходит полная релаксация остаточных напряжений  $\sigma_z$ ; далее до  $z = 75$  мм происходит монотонное замедление процесса релаксации, а для значений  $z$ , больших 75 мм, вновь монотонное увеличение скорости релаксации, но в «хвостовом» сечении уровень сжимающих остаточных напряжений еще достаточно высокий, в частности при  $y \in [0; 0.1]$  мм величина  $\sigma_z(y) = -560$  МПа.

Полученные результаты могут быть использованы для оценки эффективности поверхностно пластического упрочнения для вращающихся деталей авиационной техники в условиях высокотемпературной ползучести, поскольку никелевый сплав ЭП742 (ХН62БМКТЮ) широко применяется в конструкциях газотурбинных авиационных двигателей.

## Заключение

Предложена и реализована методика расчета релаксации остаточных напряжений во вращающемся поверхностно упрочненном призматическом образце, закрепленном на абсолютно жестком диске, в условиях ползучести с начальным напряженно-деформированным состоянием после процедуры ультразвукового упрочнения. Исследовано влияние скорости вращения на кинетику остаточных напряжений в модельных расчетах для односторонне упрочненного призматического образца  $10 \times 10 \times 150$  мм из сплава ЭП742 при температуре  $650^\circ\text{C}$  и четырех значениях угловой скорости  $\omega = \{1500; 2000; 2500; 3000\}$  об/мин.

Выполненные модельные расчеты скорости релаксации остаточных напряжений при  $\omega = \{1500; 2000; 2500\}$  об/мин позволили установить нетривиальный эффект замедления релаксации остаточных напряжений в более нагруженных осевой растягивающей нагрузкой от вращения сечениях призматического образца по сравнению с менее нагруженными, при этом в «хвостовом» сечении, где осевая нагрузка от массовых сил равна нулю, релаксация наиболее интенсивная. Но при  $\omega = 3000$  об/мин этот эффект не наблюдается и в «корневом» сечении происходит полная релаксация остаточных напряжений, а в других сечениях наблюдается немонотонный характер интенсивности релаксации остаточных напряжений по длине призматического образца.

Полученные результаты могут быть полезны при оценке эффективности поверхностно-пластического упрочнения вращающихся деталей, например газотурбинного двигателя, в условиях высокотемпературной ползучести.



## Список литературы

1. Биргер И. А. Остаточные напряжения. Москва : Машгиз, 1963. 232 с.
2. Павлов В. Ф., Кирпичев В. А., Иванов В. Б. Остаточные напряжения и сопротивление усталости упрочненных деталей с концентраторами напряжений. Самара : Самарский науч. центр РАН, 2008. 64 с.
3. Сулима А. М., Шувалов В. А., Ягодкин Ю. Д. Поверхностный слой и эксплуатационные свойства деталей машин. Москва : Машиностроение, 1988. 240 с.
4. Ножницкий Ю. А., Фишгойт А. В., Ткаченко Р. И., Теплова С. В. Разработка и применение новых методов упрочнения деталей ГТД, основанных на пластическом деформировании поверхностных слоев // Вестник двигателестроения. 2006. № 2. С. 8–16.
5. Dai K., Shaw L. Analysis of fatigue resistance improvements via surface severe plastic deformation // International Journal of Fatigue. 2008. Vol. 30, iss. 8. P. 1398–1408. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2007.10.010>
6. James M. N., Hughes D. J., Chen Z., Lombard H., Hattingh D. G., Asquith D., Yates J. R., Webster P. J. Residual stresses and fatigue performance // Engineering Failure Analysis. 2007. Vol. 14, iss. 2. P. 384–395. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2006.02.011>
7. Majzoubi G. H., Azadikhah K., Nemati J. The effect of deep rolling and shot peening on fretting fatigue resistance of Aluminum-7075-T6 // Materials Science and Engineering: A. 2009. Vol. 516, iss. 1–2. P. 235–247. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2009.03.020>
8. Soady K. A. Life assessment methodologies incorporating shot peening process effects: Mechanistic consideration of residual stresses and strain hardening. Part. 1. Effect of shot peening on fatigue resistance // Materials Science and Technology. 2013. Vol. 29, iss. 6. P. 673–651. <https://doi.org/10.1179/1743284713Y.0000000222>
9. Terres M. A., Laalai N., Sidhom H. Effect of nitriding and shot peening on the fatigue behavior of 42CrMo4 steel: Experimental analysis and predictive approach // Materials & Design. 2012. Vol. 35. P. 741–748. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.09.055>
10. Павлов В. Ф., Кирпичев В. А., Вакулюк В. С. Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочненных деталей по остаточным напряжениям. Самара : Самарский науч. центр РАН, 2012. 125 с. EDN: TAFJVZ
11. Радченко В. П., Морозов А. П. Экспериментальное исследование влияния пневмодробеструйной обработки, температурных выдержек и многоцикловых усталостных испытаний на физико-механическое состояние упрочненного слоя цилиндрических образцов из сплавов В95 и Д16Т // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2010. № 5 (21). С. 222–228. <https://doi.org/10.14498/vsgtu829>, EDN: NCTNON
12. Радченко В. П., Саушкин М. Н., Бочкова Т. И. Математическое моделирование формирования и релаксации остаточных напряжений в плоских образцах из сплава ЭП742 после ультразвукового упрочнения в условиях высокотемпературной ползучести // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2016. № 1. С. 93–112. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.1.07>, EDN: VQTANL
13. Радченко В. П., Павлов В. Ф., Саушкин М. Н. Исследование влияния анизотропии поверхностного пластического упрочнения на распределение остаточных напряжений в полых и сплошных цилиндрических образцах // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2015. № 1. С. 130–147. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.1.09>, EDN: TVSBYV
14. Радченко В. П., Саушкин М. Н. Математические модели восстановления и релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочненном слое цилиндрических элементов конструкций при ползучести // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2004. № 11. С. 3–17. EDN: SPETFD



15. Радченко В. П., Саушкин М. Н. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях. Москва : Машиностроение-1, 2005. 226 с. EDN: [RXLJLN](#)
16. Сазанов В. П., Кирпичев В. А., Вакулук В. С., Павлов В. Ф. Определение первоначальных деформаций в упрочненном слое цилиндрической детали методом конечно-элементного моделирования с использованием расчетного комплекса PATRAN/NASTRAN // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2015. Т. 19, № 2 (68). С. 35–40. EDN: [VYWUPR](#)
17. Вакулук В. С., Сазанов В. П., Шадрин В. К., Микушев Н. Н., Злобин А. С. Применение метода термоупругости при конечно-элементном моделировании остаточного напряженного состояния в поверхностно упрочненных деталях // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2014. Т. 16, № 4. С. 168–174. EDN: [SZGRAD](#)
18. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. Москва : Физматлит, 2007. 223 с. EDN: [UGLKIJ](#)
19. Ватульян А. О., Дударев В. В. О некоторых проблемах реконструкции неоднородного предварительно напряженного состояния в упругих телах // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 2. С. 25–32. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-25-32>, EDN: [KZFEQT](#)
20. Chen H., Wang S., Lu S., Qiao Y., Wang X., Fan N., Guo P., Niu J. Simulation and experimental validation of residual stress and surface roughness of high manganese steel after shot peening // Procedia CIRP. 2018. Vol. 71. P. 227–231. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2018.05.066>
21. Isa M. R., Sulaiman S. N., Zaroog O. S. Experimental and simulation method of introducing compressive residual stress in ASTM A516 grade 70 steel // Key Engineering Materials. 2019. Vol. 803. P. 27–31. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.803.27>
22. Киселев И. А., Жуков Н. А., Васильев Б. Е., Селиванов А. Н. Учет остаточных напряжений при расчетах прочности элементов замковых соединений. Часть 1. Моделирование дробеструйной обработки // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2018. № 11. С. 49–59. <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2018-11-49-59>, EDN: [YOUZDF](#)
23. Meguid S. A., Maicic L. A. Finite element modeling of shot peening residual stress relaxation in turbine disk assemblies // Journal of Engineering Materials and Technology. 2015. Vol. 137, iss. 3. Art. 031003. <https://doi.org/10.1115/1.4030066>
24. Gallitelli D., Boyer V., Gelineau M., Colaitis Y., Rouhaud E., Retraint D., Kubler R., Desvignes M., Barrallier L. Simulation of shot peening: From process parameters to residual stress fields in a structure // Comptes Rendus Mécanique. 2016. Vol. 344, iss. 4–5. P. 355–374. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2016.02.006>
25. Zimmermann M., Klemenz M., Schulze V. Literature review on shot peening simulation // International Journal of Computational Materials Science and Surface Engineering. 2010. Vol. 3, iss. 4. P. 289–310. <https://doi.org/10.1504/ijcmsse.2010.036218>
26. Purohil R., Verma C. S., Rana R. S., Dwivedi R., Dwivedi S. Simulation of shot peening process // Materials Today: Proceedings. 2017. Vol. 4, iss. 2A. P. 1244–1251. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.01.144>
27. Радченко В. П., Саушкин М. Н. Прямой метод решения краевой задачи релаксации остаточных напряжений в упрочненном изделии цилиндрической формы при ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50, № 6. С. 90–99. EDN: [NRCYUX](#)
28. Радченко В. П., Кочеров Е. П., Саушкин М. Н., Смыслов В. А. Экспериментальное и теоретическое исследование влияния растягивающей нагрузки на релаксацию остаточных напряжений в упрочненном цилиндрическом образце в условиях ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56, № 2. С. 169–177.



- <https://doi.org/10.15372/PTMF20150217>, EDN: TWGXHH
29. Радченко В. П., Цветков В. В., Саушкин М. Н. Релаксация остаточных напряжений в упрочненном цилиндре в условиях ползучести при нагружении осевой силой, крутящим моментом и внутренним давлением // Прикладная механика и техническая физика. 2020. Т. 61, № 4. С. 96–107. <https://doi.org/10.15372/PTMF20200412>, EDN: DOAXGA
  30. Радченко В. П., Саушкин М. Н., Цветков В. В. Влияние термоэкспозиции на релаксацию остаточных напряжений в упрочненном цилиндрическом образце в условиях ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57, № 3. С. 196–207. <https://doi.org/10.15372/PTMF20160320>, EDN: WAIBFN
  31. Деревянка Е. Е., Радченко В. П., Цветков В. В. Релаксация в поверхностно упрочненном цилиндре в условиях ползучести при жестких ограничениях на линейные и угловые деформации // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2021. № 3. С. 118–127. <https://doi.org/10.31857/S057232992103003X>, EDN: OVGDFP
  32. Радченко В. П., Деревянка Е. Е. Кинетика остаточных напряжений в тонкостенных цилиндрических образцах после двухстороннего поверхностного упрочнения в условиях ползучести при жестких ограничениях на угловые и осевые линейные перемещения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 227–240. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-227-240>, EDN: VGQVUH
  33. Радченко В. П., Деревянка Е. Е. Моделирование ползучести и релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочненных элементах статически не определимых стержневых систем // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2018. Т. 22, № 4. С. 647–668. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1631>, EDN: YSDYYX
  34. Саушкин М. Н., Просвиркина Е. А. Релаксация остаточных напряжений в поверхностно упрочненном слое сплошного вращающегося цилиндра в условиях ползучести // Математическое моделирование и краевые задачи : Труды Третьей Всероссийской научной конференции (29–31 мая 2006 г.). Часть 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. Самара : СамГТУ, 2006. С. 192–199. <https://www.mathnet.ru/rus/mmkz558>
  35. Радченко В. П., Либерман А. Е., Блохин О. Л. Релаксация остаточных напряжений в поверхностно упрочненном вращающемся цилиндре в условиях ползучести // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2022. Т. 26, № 1. С. 119–139. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1884>, EDN: GFBZBC
  36. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б. Расчет на прочность деталей машин. Москва : Машиностроение, 1979. 702 с.
  37. Самарин Ю. П. Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами. Куйбышев : Куйбышевский гос. ун-т, 1979. 84 с.
  38. Радченко В. П., Еремин Ю. А. Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций. Москва : Машиностроение-1, 2004. 265 с. EDN: QNATSX

### References

1. Birger I. A. *Ostatochnyye napriazheniia* [Residual Stresses]. Moscow, Mashgiz, 1963. 232 p. (in Russian).
2. Pavlov V. F., Kirpichev V. A., Ivanov V. B. *Ostatochnyye napriazheniia i soprotivlenie ustalosti uprochnennykh detalei s kontsentratorami napriazhenii* [Residual Stresses and Fatigue Resistance of Hardened Parts with Stress Concentrators]. Samara, Samara Scientific Center of the RAS Publ., 2008. 64 p. (in Russian)
3. Sulima A. M., Shuvalov V. A., Yagodkin Yu. D. *Poverkhnostnyi sloi i ekspluatatsionnye svoistva detalei mashin* [Surface Layer and Performance of Machine Parts]. Moscow, Mashinostroenie, 1988. 240 p. (in Russian).



4. Nozhnitskiy Yu. A., Fishgoit A. V., Tkachenko R. I., Teplova S. V. Development and application of new GTE parts hardening methods based on the plastic deformation of the surface layers. *Vestnik Dvigatelsestroeniia*, 2006, iss. 2, pp. 8–16 (in Russian).
5. Dai K., Shaw L. Analysis of fatigue resistance improvements via surface severe plastic deformation. *International Journal of Fatigue*, 2008, vol. 30, iss. 8, pp. 1398–1408. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2007.10.010>
6. James M. N., Hughes D. J., Chen Z., Lombard H., Hattingh D. G., Asquith D., Yates J. R., Webster P. J. Residual stresses and fatigue performance. *Engineering Failure Analysis*, 2007, vol. 14, iss. 2, pp. 384–395. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2006.02.011>
7. Majzoobi G. H., Azadikhah K., Nemati J. The effect of deep rolling and shot peening on fretting fatigue resistance of Aluminum-7075-T6. *Materials Science and Engineering: A*, 2009, vol. 516, iss. 1–2, pp. 235–247. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2009.03.020>
8. Soady K. A. Life assessment methodologies incorporating shot peening process effects: Mechanistic consideration of residual stresses and strain hardening. Part 1. Effect of shot peening on fatigue resistance. *Materials Science and Technology*, 2013, vol. 29, iss. 6, pp. 673–651. <https://doi.org/10.1179/1743284713Y.0000000222>
9. Terres M. A., Laalai N., Sidhom H. Effect of nitriding and shot peening on the fatigue behavior of 42CrMo4 steel: Experimental analysis and predictive approach. *Materials & Design*, 2012, vol. 35, pp. 741–748. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.09.055>
10. Pavlov V. F., Kirpichev V. A., Vakulyuk V. S. *Prognozirovanie soprotivleniya ustalosti poverkhnostno uprochnionnykh detalei po ostatochnym napriazheniyam* [Prediction of Fatigue Resistance of Surface Reinforced Parts by Residual Stresses]. Samara, Samara Scientific Center of the RAS Publ., 2012. 125 p. (in Russian). EDN: [TAFJVZ](#)
11. Radchenko V. P., Morozov A. P. Experimental study of the effect induced by air shot-blasting processing, thermal exposition and high cycle fatigue tests on physical and mechanical condition hardening layer of cylindrical samples of alloys V95 and D16T. *Journal of Samara State Technical University, Series Physical and Mathematical Sciences*, 2010, iss. 5 (21), pp. 222–228 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu829>, EDN: [NCTNON](#)
12. Radchenko V. P., Saushkin M. N., Bochkova T. I. Mathematical modeling and experimental study of forming and relaxation of residual stresses in plane samples made of EP742 alloy after ultrasonic hardening under high-temperature creep conditions. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, iss. 3–4, pp. 88–98. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/eng.2018.3.09>, EDN: [CYWBG0](#)
13. Radchenko V. P., Pavlov V. F., Saushkin M. N. Investigation of surface plastic hardening anisotropy influence on residual stresses distribution in hollow and solid cylindrical specimens. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, iss. 1, pp. 130–147 (in Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.1.09>, EDN: [TVSBYV](#)
14. Radchenko V. P., Saushkin M. N. Mathematical models of recovery and relaxation of residual stresses in a surface-hardened layer of cylindrical specimens under creep conditions. *Izvestiya vuzov. Mashinostroyeniye*, 2004, iss. 11, pp. 3–17 (in Russian). EDN: [SPETFD](#)
15. Radchenko V. P., Saushkin M. N. *Polzuchest' i relaksatsiya ostatochnykh napriazheniy v uprochnennyykh konstruktsiyakh* [Creep and Relaxation of Residual Stresses in Hardened Structures]. Moscow, Mashinostroyeniye-1, 2005. 226 p. (in Russian). EDN: [RXLJLN](#)
16. Sazanov V. P., Kirpichev V. A., Vakulyuk V. S., Pavlov V. F. The definition of initial deformations in the cylindrical parts surface layer by Finite Elements Modeling method using PATRAN/NASTRAN program complex. *Vestnik UGATU*, 2015, vol. 19, iss. 2 (68), pp. 35–40 (in Russian). EDN: [VYWUPR](#)
17. Vakulyuk V. S., Sazanov V. P., Shadrin V. K., Mikushev N. N., Zlobin A. S. Thermoelasticity method application on finite elements modeling of residual strained state in surface hardened parts. *Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2014, vol. 16, iss. 4, pp. 168–174 (in Russian). EDN: [SZGRAD](#)



18. Vatulyan A. O. *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela* [Inverse Problems in Mechanics of Solids]. Moscow, Fizmatlit, 2007. 223 p. (in Russian). EDN: UGLKIJ
19. Vatulyan A. O., Dudarev V. V. On some problems of reconstruction of inhomogeneous pre-stressed state in elastic solids. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2009, vol. 9, iss. 4, pt. 2, pp. 25–32 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-25-32>, EDN: KZFEQT
20. Chen H., Wang S., Lu S., Qiao Y., Wang X., Fan N., Guo P., Niu J. Simulation and experimental validation of residual stress and surface roughness of high manganese steel after shot peening. *Procedia CIRP*, 2018, vol. 71, pp. 227–231. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2018.05.066>
21. Isa M. R., Sulaiman S. N., Zarog O. S. Experimental and simulation method of introducing compressive residual stress in ASTM A516 grade 70 steel. *Key Engineering Materials*, 2019, vol. 803, pp. 27–31. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.803.27>
22. Kiselev I. A., Zhukov N. A., Vasilyev B. E., Selivanov A. N. Modeling of residual stresses when calculating strength of lock joint elements. Part 1. Modeling of the shot peening process. *Izvestiya vuzov. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions Machine Building], 2018, iss. 11, pp. 49–59 (in Russian). <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2018-11-49-59>, EDN: YOUZDF
23. Meguid S. A., Maicic L. A. Finite element modeling of shot peening residual stress relaxation in turbine disk assemblies. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 2015, vol. 137, iss. 3, art. 031003. <https://doi.org/10.1115/1.4030066>
24. Gallitelli D., Boyer V., Gelineau M., Colaitis Y., Rouhaud E., Retraint D., Kubler R., Desvignes M., Barrallier L. Simulation of shot peening: From process parameters to residual stress fields in a structure. *Comptes Rendus Mécanique*, 2016, vol. 344, iss. 4–5, pp. 355–374. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2016.02.006>
25. Zimmermann M., Klemenz M., Schulze V. Literature review on shot peening simulation. *International Journal of Computational Materials Science and Surface Engineering*, 2010, vol. 3, iss. 4, pp. 289–310. <https://doi.org/10.1504/ijcmsse.2010.036218>
26. Purohil R., Verma C. S., Rana R. S., Dwivedi R., Dwivedi S. Simulation of shot peening process. *Materials Today: Proceedings*, 2017, vol. 4, iss. 2A, pp. 1244–1251. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.01.144>
27. Radchenko V. P., Saushkin M. N. Direct method of solving the boundary-value problem of relaxation of residual stresses in a hardened cylindrical specimen under creep conditions. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2009, vol. 50, iss. 6, pp. 989–997. <https://doi.org/10.1007/s10808-009-0133-8>, EDN: UZQMFB
28. Radchenko V. P., Kocherov E. P., Saushkin M. N., Smyslov V. A. Experimental and theoretical studies of the influence of a tensile load on the relaxation of residual stresses in a hardened cylindrical specimen under creep conditions. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2015, vol. 56, iss. 2, pp. 313–320. <https://doi.org/10.1134/S0021894415020170>, EDN: UGHRIL
29. Radchenko V. P., Tsvetkov V. V., Saushkin M. N. Residual stress relaxation in a hardened cylinder under creep, loaded by an axial force, torque and internal pressure. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2020, vol. 61, iss. 4, pp. 583–592. <https://doi.org/10.1134/S0021894420040124>, EDN: REDSOB
30. Radchenko V. P., Saushkin M. N., Tsvetkov V. V. Effect of thermal exposure on the residual stress relaxation in a hardened cylindrical sample under creep conditions. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, vol. 57, iss. 3, pp. 559–568. <https://doi.org/10.1134/S0021894416030202>, EDN: WVPKZL
31. Derevyanka E. E., Radchenko V. P., Tsvetkov V. V. Relaxation of residual stresses in a surface-hardened cylinder under creep conditions and rigid restrictions on linear





- and angular deformations. *Mechanics of Solids*, 2020, vol. 55, iss. 6, pp. 898–906. <https://doi.org/10.3103/S0025654420660024>, EDN: VVJDZI
32. Radchenko V. P., Derevyanka E. E. Kinetics of residual stresses in thin-walled cylindrical specimens after bilateral surface hardening under creep conditions with rigid constraints on angular and axial linear displacements. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 227–240 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-227-240>, EDN: VGQVUH
33. Radchenko V. P., Derevyanka E. E. Mathematical modeling of creep and residual stresses relaxation in surface hardened elements of statically indefinable rod systems. *Journal of Samara State Technical University, Series Physical and Mathematical Sciences*, 2018, vol. 22, iss. 4, pp. 647–668 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1631>, EDN: YSDYYX
34. Saushkin M. N., Prosvirkina E. A. Relaxation of residual stresses in a surface-hardened layer of a solid rotating cylinder under creep conditions. *Proceedings of the Third All-Russian Scientific Conference (29–31 May 2006). Part 1. Matematicheskoe Modelirovanie i Kraevye Zadachi*. Samara, Samara State Technical University Publ., 2006, pp. 192–199 (in Russian). <https://www.mathnet.ru/mmkz558>
35. Radchenko V. P., Liberman A. E., Blokhin O. L. Relaxation of residual stresses in a surface-hardened rotating cylinder under creep conditions. *Journal of Samara State Technical University, Series Physical and Mathematical Sciences*, 2022, vol. 26, iss 1, pp. 119–139 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1884>, EDN: GFBZBC
36. Birger I. A., Shorr B. F., Iosilevich G. B. *Raschet na prochnost' detalei mashin* [Calculation of the Strength of Machine Parts]. Moscow, Mashinostroenie, 1979. 702 p. (in Russian).
37. Samarin Yu. P. *Uravneniya sostoyaniya materialov so slozhnymi reologicheskimi svoistvami* [Equations of State of Materials with Complex Rheological Properties]. Kuibyshev, Kuibyshev State University Publ., 1979. 84 p. (in Russian).
38. Radchenko V. P., Eremin Yu. A. *Reologicheskoe deformirovanie i razrushenie materialov i elementov konstruktsiy* [Rheological Deformation and Fracture of Materials and Structural Elements]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2004. 265 p. (in Russian). EDN: QNAT SX

Поступила в редакцию / Received 20.07.2023

Принята к публикации / Accepted 28.09.2023

Опубликована / Published 30.11.2023



## ИНФОРМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 531–543  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 531–543

[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru)

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-531-543>

EDN: [WNESNS](https://www.edn.ru/wnesns)

Научная статья

УДК 004.048

### Алгоритм выделения движений и классификации походки по данным акселерометра мобильного телефона

Н. В. Дорофеев<sup>1✉</sup>, А. В. Греченева<sup>1,2</sup>

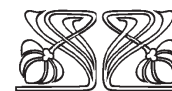
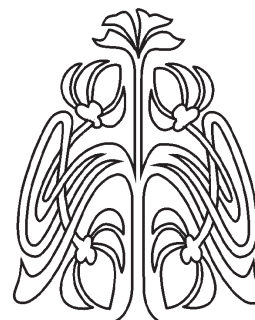
<sup>1</sup>Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых, Россия, 600000, г. Владимир, ул. Горького, д. 87

<sup>2</sup>Российский государственный аграрный университет — МСХА имени К. А. Тимирязева, Россия, 127434, г. Москва, ул. Тимирязевская, д. 49

**Дорофеев Николай Викторович**, доктор технических наук, заведующий кафедрой «Управление и контроль в технических системах», [dorofeevvnv@yandex.ru](mailto:dorofeevvnv@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0002-1636-7654>, AuthorID: 232176

**Греченева Анастасия Владимировна**, кандидат технических наук, <sup>1</sup>доцент кафедры «Управление и контроль в технических системах»; <sup>2</sup>доцент кафедры прикладной информатики, [grechenevaav@yandex.ru](mailto:grechenevaav@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0002-7341-5237>, AuthorID: 821738

**Аннотация.** В работе кратко описывается развитие информационно-технических средств с применением биометрических данных, в частности параметров походки человека. Описываются проблемы оценки параметров походки с помощью акселерометра мобильного телефона в реальных условиях. Обосновывается актуальность настоящего исследования в области разработки алгоритмов оценки биометрических показателей походки по данным носимых устройств. Рассматриваются основные подходы к обработке данных акселерометра носимых устройств, указываются основные недостатки и проблемы при повышении качества оценки параметров походки. Описывается алгоритм обработки данных акселерометра мобильного телефона. В предлагаемом алгоритме отбор шаблонов движений при походке в регистрируемых данных осуществляется на основе статистической информации в рамках «плавающего» временного окна (частотная компонента с максимальным вкладом в спектре сигнала акселерометра, длительностью отбираемых



Научный  
отдел





временных сегментов), а также на основе значения коэффициента корреляции, отбираемых временных сегментов. На этапе сегментации данных временное окно для поиска сегментов движений, а также допустимые пороги отбора движений по их длительности изменяются в зависимости от индивидуальных особенностей походки и активности человека. Классификация отобранных сегментов по характеру движений походки осуществляется на основе нейронной сети прямого распространения. В качестве функции активации для скрытых слоев в работе применялся сигмоид, а для выходного слоя — нормализованная экспоненциальная функция. Обучение нейронной сети происходило методом градиентного обратного спуска с кросс-энтропией в качестве критерия оптимизации. За счет отбора сегментов с высоким коэффициентом корреляции классификация данных показывает качество различения движений выше 95%.

**Ключевые слова:** алгоритм, походка, движения, выделение, классификация, акселерометр, мобильный телефон, носимое устройство

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект № МК-1558.2021.1.6).

**Для цитирования:** Дорофеев Н. В., Греченева А. В. Алгоритм выделения движений и классификации походки по данным акселерометра мобильного телефона // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 531–543. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-531-543>, EDN: WNESNS  
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Algorithm for motion detection and gait classification based on mobile phone accelerometer data

N. V. Dorofeev<sup>1</sup>✉, A. V. Grecheneva<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Vladimir State University, 87 Gorky St., Vladimir 600000, Russia

<sup>2</sup>Russian State Agrarian University — Moscow Agricultural Academy named after K. A. Timiryazev, 49 Timiryazevskaya St., Moscow 127434, Russia

**Nikolay V. Dorofeev**, dorofeevvn@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1636-7654>, AuthorID: 232176

**Anastasya V. Grecheneva**, grechenevaav@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7341-5237>, AuthorID: 821738

**Abstract.** This paper briefly describes the development of information technology tools using biometric data, in particular, human gait parameters. The problems of assessing gait parameters using a mobile phone accelerometer in real conditions are briefly described. The relevance of this research is substantiated in the field of developing algorithms for assessing biometric gait indicators based on data from wearable devices. The main approaches to the processing of wearable device accelerometer data are considered, the main shortcomings and problems in improving the quality of gait parameter estimation are indicated. The algorithm for processing data from a mobile phone accelerometer is described. In the proposed algorithm, the selection of movement patterns during gait in the recorded data is carried out on the basis of statistical information within the “floating” time window (frequency component with the maximum contribution to the spectrum of the accelerometer signal, the duration of the selected time segments), as well as on the basis of the value of the correlation coefficient, selected time segments. At the stage of data segmentation,



the time window of searching of movement segments, as well as the allowable thresholds of selecting movements by their duration, change depending on the individual characteristics of the gait and human activity. The classification of the selected segments according to the nature of gait movements is carried out on the basis of a feed-forward neural network. The sigmoid was used as the activation function for the hidden layers, and the normalized exponential function was used for the output layer. The neural network was trained using the gradient backdescent method with cross entropy as an optimization criterion. Due to the selection of segments with a high correlation coefficient, the classification of data shows the quality of distinguishing movements above 95%.

**Keywords:** algorithm, gait, movements, selection, classification, accelerometer, mobile phone, wearable device

**Acknowledgements:** The work was carried out with the financial support of a grant from the President of the Russian Federation (project No. МК-1558.2021.1.6).

**For citation:** Dorofeev N. V., Grecheneva A. V. Algorithm for motion detection and gait classification based on mobile phone accelerometer data. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 531–543 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-531-543>, EDN: WNESNS

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Развитие информационных технологий и электроники позволяет по-новому взглянуть на решение многих задач, в частности сбора и обработки биометрической информации. Одним из типов биометрической информации является походка человека. Несмотря на то что исследование особенностей походки человека и разработка информационно-технических средств регистрации и оценивания параметров походки осуществляются не первое десятилетие, данное направление по-прежнему является актуальным. Защита данных и аутентификация, персонализированная медицина, игровая индустрия и другие направления гражданской и военной отрасли используют данные о параметрах походки человека [1–3]. Причем все большее внимание уделяется не только распознаванию различных видов деятельности (совершаемых движений), но и их цикличности, зависимости результатов оценки параметров движений от различных факторов. Увеличиваются требования к достоверности оценивания [1, 4–6].

Существуют различные подходы к регистрации параметров походки: видеокамеры, система из нательных датчиков, в том числе стационарные системы, датчики носимых устройств [7–12]. Такие носимые устройства, как мобильный телефон или смарт-браслеты, имеют в своем составе датчики акселерометра или гироскопа и находятся в постоянном контакте с человеком, что позволяет осуществлять постоянный мониторинг движений человека на основе встроенных датчиков в скрытом («прозрачном») для человека режиме. Одними из особенностей измерения и недостатками систем контроля движений человека, построенных на основе носимого устройства, являются наличие одного измерительного датчика (измерение в одной точке пространства в один момент времени) и влияние различных факторов на результаты измерения [1, 13]. К таким факторам относятся: произвольное месторасположение и случайная смена местоположения телефона; отсутствие жесткой фиксации мобильного телефона к телу человека (имеются работы с жесткой фиксацией мобильного телефона, но они не получили дальнейшего практического внедрения); конструктивные особенности телефона (место расположения и ориентация датчика внутри телефона); метроло-



гические характеристики датчика и регистрация изменения ускорения свободного падения (косвенные измерения параметров движения). Поскольку при совершаемых движениях (походке) задействуется большое количество мышц, связок, суставов, участков нервной системы и при моделировании описывается многопараметрической моделью движения, то задача оценки параметров походки и возможных особенностей функционирования костной и нервно-мышечной системы (в частности, постановка диагноза заболевания) по ограниченному набору датчиков (для носимых устройств — по одному датчику) является некорректной, что усложняет процесс оценки движений и физиологических параметров человека. Таким образом, задача разработки новых алгоритмов автоматизированного сбора и обработки данных с датчиков носимых устройств для повышения качества оценки параметров движений и физиологических особенностей человека по-прежнему актуальна.

Целью данной работы является повышение качества оценки движений (походки) по данным акселерометра мобильного телефона за счет разработки алгоритма на основе нейросетевых технологий.

## 1. Подходы к обработке данных

В общем виде алгоритмы обработки данных походки на основе акселерометра мобильного телефона сводятся к следующим шагам: предварительная обработка, включая распознавание активности и фильтрацию сигнала от помех, затем выполняется процедура выделения границ повторяющихся движений (сегментация) с нормализацией, после нее осуществляется анализ отобранных сегментов и сравнение с персональной моделью. Применяемые подходы характеризуются вычислительной сложностью и, соответственно, скоростью распознавания (получения результатов).

Получаемые с акселерометрического датчика временные ряды несут в себе высокочастотные шумы, которые получаются в результате случайного перемещения мобильного телефона, ошибки смещения и т.п., поэтому на этапе предварительной обработки применяют фильтрацию на основе оконного усреднения или вейвлет-разложения и реконструкции [14]. Однако, как отмечается в работе [1], положительный эффект от предварительной фильтрации носит ограниченный характер и для устранения шумов требуется системный подход более высокого уровня.

Распознавание активности зачастую совмещается с процедурой сегментации и направлено на выделение во временных рядах движений, относящихся к походке человека, исключая другие типы движения. Распознавание активности осуществляется по пороговым критериям в рамках временного окна, на основе различных классификаторов по базовым признакам регистрируемых сигналов и автокорреляции.

Сегментация выполняется по циклически появляющимся паттернам при повторении одних и тех же движений (при цикличности) или на основе временных окон (фреймов). К первому типу сегментации относят алгоритмы, основанные на обработке экстремумов в рамках временного окна, пересечении нуля, вектора значимости, фазы движений, корреляции и динамических вариаций. После выделения сегментов уточняют размер временного окна и нормализуют выделенные сегменты по времени (наиболее часто с применением процедуры динамической деформации времени DWT). Сегментация на основе фреймов позволяет выделять циклические движения на коротких временных интервалах (малом количестве циклических движений), однако у данного подхода имеется недостаток, связанный с четкой границей временных окон, — они не учитывают временные изменения походки и фазу движений.

На основе выделенных шаблонов движений на этапе сегментации формируется мо-



дель походки человека. Наилучшим образом зарекомендовали себя методы построения моделей на основе полученных признаков походки во временной, частотной области или описанные статистическими показателями. На основе полученных моделей осуществляется дальнейшее различение и классификация регистрируемых движений. Для различения и классификации движений выполняют сравнение входных последовательностей с имеющимися шаблонами или применяют методы машинного обучения [15].

Особое внимание при оценке параметров походки по данным акселерометра мобильного устройства уделяется влиянию различных факторов на результаты оценки. S. Sprager и M. B. Jurić [1] отмечают два аспекта изменения индивидуальной модели походки. Первый связан с физиологическими изменениями (бессознательные изменения) и психологическими (контролируемые и неконтролируемые [16–18]). Второй аспект связан с внешними факторами (одежда, поверхность дороги, дополнительная нагрузка на костно-мышечную систему организма). По нашему мнению, следует различить факторы, приводящие к изменению самой походки человека, и факторы, связанные с погрешностями измерений, которые искажают представление о походке [12]. В первом случае изменения походки должны учитываться в индивидуальной модели походки, а во втором случае необходима компенсация влияния внешних факторов для повышения точности оценки индивидуальных показателей походки. В системах безопасности на этапе аутентификации пользователя влияние внешних факторов может быть учтено в индивидуальной модели. В системах персонализированной медицины, наоборот, необходимо точно оценивать индивидуальные особенности походки без мешающих факторов. Задача компенсации мешающих факторов является непростой. К примеру, на рис. 1 показано влияние перемещения мобильного устройства на результаты измерения в зависимости от типа штанов, а на рис. 2 — изменение походки в зависимости от типа обуви. Как видно из представленных на рисунках данных, погрешности измерений существенно влияют на точность оценки параметров походки — при неизменной походке (измерения проводились друг за другом, накопленные данные усреднялись) форма регистрируемых сигналов с акселерометра мобильного телефона изменяется. На рис. 1 и 2 представлены данные для одного испытуемого, остальные испытуемые имеют собственные коэффициенты отклонения, но общий тренд изменений соответствует приведенным результатам.

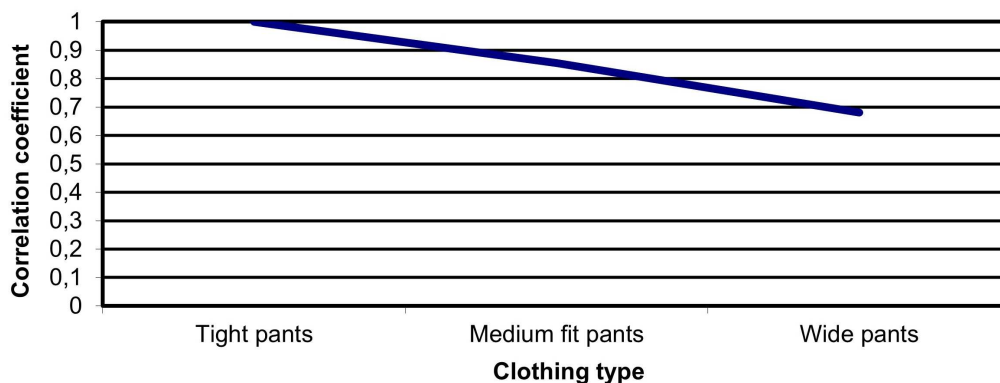


Рис. 1. Влияние типа штанов на результаты оценки походки

Fig. 1. Influence of pants type on gait scores

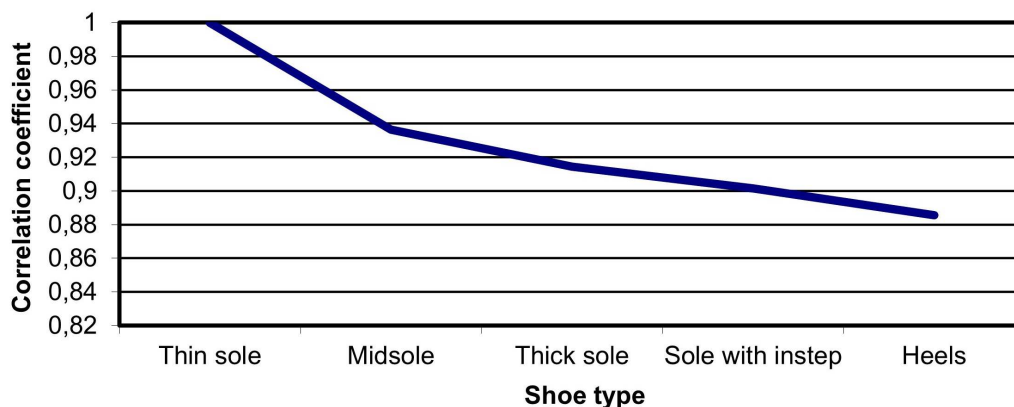


Рис. 2. Влияние типа обуви на результаты оценки походки

Fig. 2. Effect of shoe sole type on gait scores

В большинстве исследований анализ походки по данным мобильного телефона проходил в лабораторных условиях, при которых измерения осуществлялись в контролируемых условиях с минимизацией внешних факторов, присутствующих при походке в повседневной жизни. На практике акселерометр мобильного телефона кроме походки человека очень часто фиксирует шумы, которые связаны с движениями человека, не относящимися к походке (перемещение телефона в пространстве, движения при стоянии на месте и другие двигательные действия). На рис. 3 эти мешающие движения отражены слева и справа, а сама походка фиксируется в середине. В процедуре сегментации попадают временные интервалы, которые по локальным минимумам и длительности интерпретируются как полезные движения (рис. 4 — красные отметки указывают на времена определения полезных движений).

Также на практике возможны ситуации, когда во временных рядах появляются два близких отчета, относящиеся к одному движению, но принадлежащие двум соседним временным окнам (фреймам). В этом случае появляется вероятность включения в результат сегментации двойных шаблонов (рис. 5 — среднее движение определилось дважды, что отражено в плоском пике красной отметки начала сегмента).

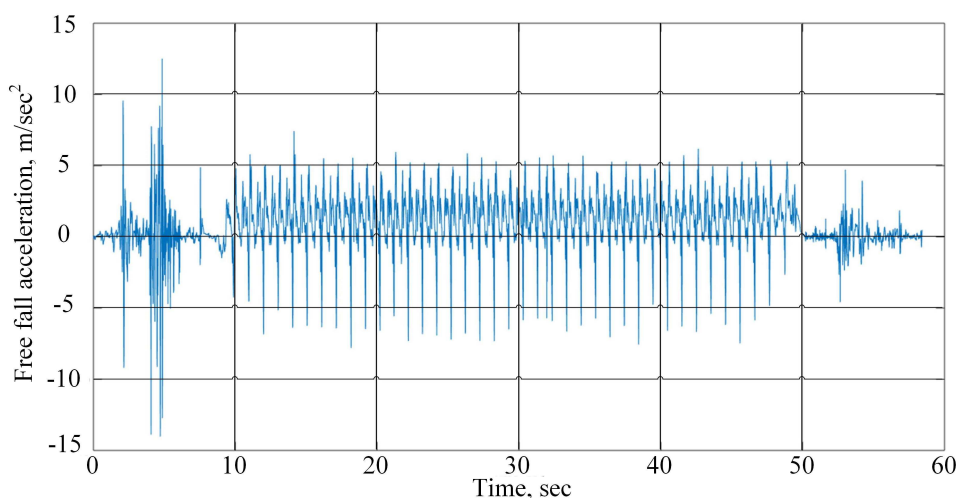


Рис. 3. Пример исходных данных для обработки (цвет онлайн)

Fig. 3. Example of initial data for processing (color online)

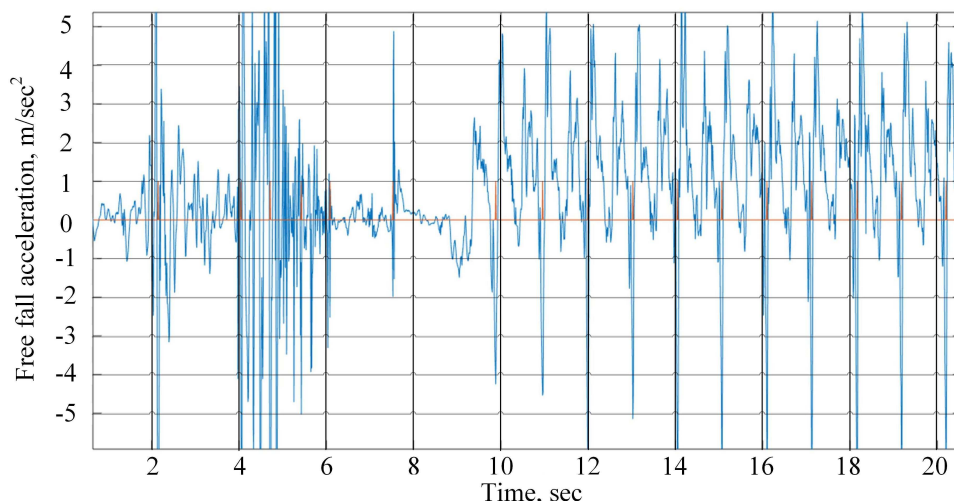


Рис. 4. Пример ложного принятия решений о присутствии движения человека (левая часть графика) (цвет онлайн)

Fig. 4. Example of false decision making about the presence of human movement (left side of the graph) (color online)

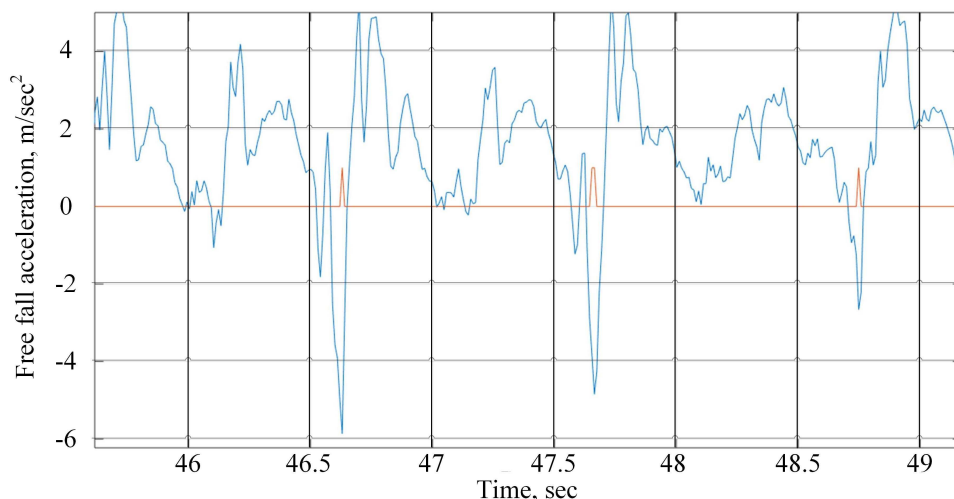


Рис. 5. Пример двойного отбора сегмента данных (средний пик красного цвета) (цвет онлайн)

Fig. 5. Example of double sampling of a data segment (middle peak in red) (color online)

## 2. Алгоритм обработки

В качестве алгоритма обработки данных акселерометра мобильного телефона для оценки параметров походки предлагается алгоритм, представленный на рис. 6. Поскольку время оценки биометрических показателей походки не сильно критично задержкам (как для процедуры аутентификации, так и для медицинской диагностики), т.е. с учетом большого количества негативных факторов, оказывающих влияние на результаты оценки, задержка в получении оценочных данных в несколько минут допускается (важно качество получаемых оценок), то осуществляется накопление данных в рамках временного окна  $T$ . В качестве критерия функционирования алгоритма выступает критерий отбора наиболее «удачных» шаблонов, которые имеют наименьшие искажения (резкие всплески, смены движений и т. п.) от кратковремен-





ных факторов. Отбор шаблонов с наименьшими искажениями, которые наиболее четко отражают индивидуальные особенности походки, а не шумы, позволяет качественнее осуществлять процедуры коррекции индивидуальной модели, кластеризации и классификации.

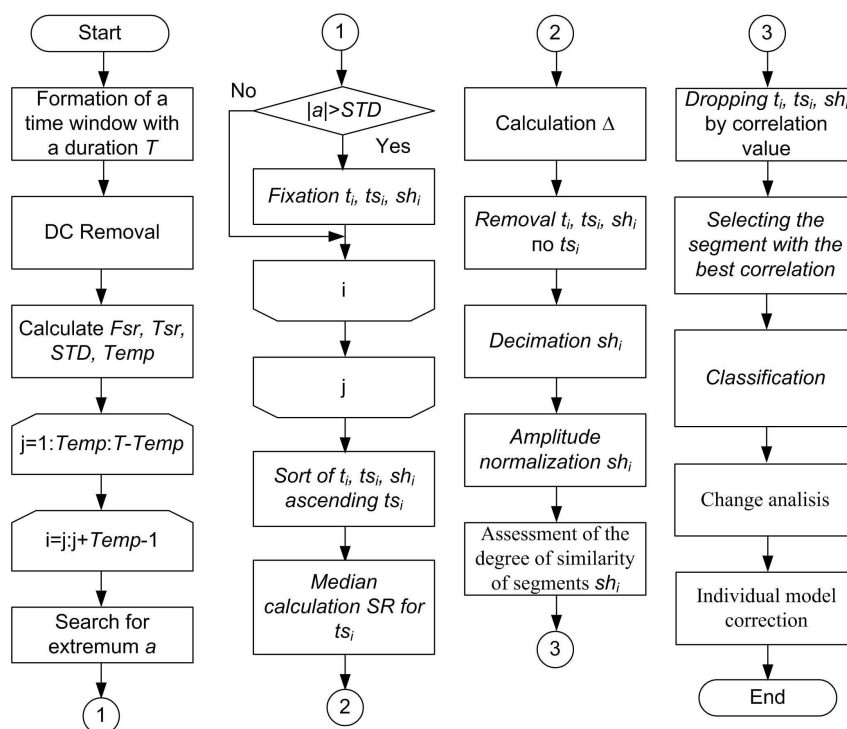


Рис. 6. Алгоритм обработки / Fig. 6. Processing algorithm

В рамках временного окна  $T$  удаляется постоянная составляющая и по спектру сигнала определяются частотная составляющая с максимальным вкладом  $Fsr$ , соответствующий ей период  $Tsr$ , а также по временной последовательности — среднеквадратическое отклонение  $STD$  и локальное временное окно  $Temp$  для поиска локальных минимумов при сегментации данных. Временное окно  $Temp$  формируется в два раза больше основного периода колебаний (движений) с целью попадания в  $Temp$  всего движения. Локальное временное окно рассчитывается по следующей формуле:

$$Temp = ]2 \times Tsr \times Fd[, \tag{1}$$

где  $Fd$  — частота дискретизации.

Далее скользящим окном  $Temp$  (с шагом, равным величине окна  $Temp$ ) по временной последовательности  $T$  осуществляется процедура сегментации на основе поиска локальных экстремумов (в зависимости от выбранных настроек по минимумам или максимумам) внутри окна  $Temp$ . Модуль значения найденного экстремума сравнивается со среднеквадратическим отклонением  $STD$ , и в случае превышения значения  $STD$  фиксируется время появления экстремума  $t_i$ , шаблон движения (как сегмент данных между предыдущим и текущим экстремумом)  $sh_i$  и длительность шаблона  $ts_i$ . Сравнение величины экстремума со среднеквадратическим отклонением позволяет отбросить сегменты с присутствием случайных всплесков и других случайных движений. Модуль берется для отрицательных значений (минимумов). Это позволяет сохранять индивидуальные особенности сегментов (движений) и не искажать форму сигнала в отличие от алгоритмов с фильтрацией на основе скользящего среднего.



Полученные наборы  $t_i$ ,  $sh_i$ ,  $ts_i$  сортируются по возрастанию относительно набора  $ts_i$ , по которому далее определяют значение медианы  $SR$ . Использование медианы вместо среднего значения позволяет снизить количество выбросов (сегментов, которые по длительности не характерны длительностям основной массы отобранных сегментов) в отобранных сегментах. На основании медианы рассчитывается допустимый интервал отклонения длительности сегментов  $\Delta$  от медианы как

$$\pm\Delta = SR \pm \left[ \frac{SR \times Int}{100} \right], \quad (2)$$

где  $Int$  — допустимый процент отклонения длительности движений от медианы в процентах. Коэффициент  $Int$  индивидуален для каждого человека, на начальном этапе обучения алгоритма может составлять 10%.

Отбор сегментов по длительности осуществляется на основе выражения  $SR - \Delta < ts_i < SR + \Delta$ . Сегменты (и информация о них), не удовлетворяющие данному критерию, отбрасываются. Среди отобранных сегментов определяется сегмент  $sh_i$  с минимальной длительностью  $min(ts_i)$ , до которой осуществляется процедура децимации остальных отобранных сегментов. После децимации вычисляется значение корреляции между полученными сегментами и отбрасываются сегменты, которые имеют корреляцию с большинством сегментов менее установленного порога (в работе применялся порог 0.9).

### 3. Результаты и выводы

Практическая проверка предложенного алгоритма показала повышение качества отбора сегментов (рис. 7), которые относятся непосредственно к движениям человека (походке).

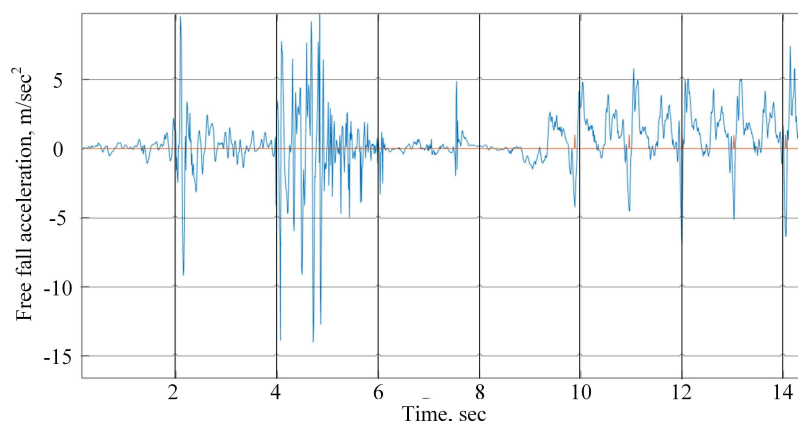


Рис. 7. Пример отбора информативных временных отрезков предложенным алгоритмом (цвет онлайн)

Fig. 7. An example of the selection of informative time intervals by the proposed algorithm (color online)

В результате применения предложенного алгоритма исключаются случаи перепутывания мешающих движений с полезными движениями, дублирование сегментов. За счет отбора по значению коэффициента корреляции удаляется часть сегментов, имеющих существенные искажения в данных, — к ним относятся движения, зарегистрированные при разных местоположениях мобильного телефона, или «некорректно» выполненные движения (спотыкания, резкая остановка или смена вида движения



и т.п.), а также случайные всплески в данных, вызванные действием случайных кратковременных факторов.

В качестве нейросетевого классификатора в работе применялась сеть прямого распространения. На входы классификатора подаются отобранный сегмент, коэффициент корреляции, среднее значение и среднеквадратическое отклонение значений ускорения (данных с датчика акселерометра) в сегменте. Классификатор оценивает принадлежность сегмента к одному из движений и принадлежность самого движения к человеку, на модели (данных) которого обучался классификатор. В случае положительного решения классификатора анализируется тренд изменения оцениваемых параметров и при необходимости осуществляется перестройка индивидуальной модели с переобучением классификатора.

Обучение нейросетевого классификатора (рис. 8) выполнялось методом градиентного обратного спуска с кросс-энтропией в качестве критерия оптимизации. На рис. 8 зеленые блоки показывают процент правильного различения событий (номер

Matrix of errors of the neural network classifier at the testing stage

Output class number	1	397 15,1%	1 0,0%	2 0,1%	0 0,0%	99,3% 0,7%
	2	94 3,6%	623 23,7%	25 1,0%	2 0,1%	83,7% 16,3%
	3	38 1,4%	15 0,6%	667 25,4%	13 0,5%	91,0% 9,0%
	4	40 1,5%	3 0,1%	4 0,2%	700 26,7%	93,7% 6,3%
		69,8% 30,2%	97,0% 3,0%	95,6% 4,4%	97,9% 2,1%	91,0% 9,0%
		1	2	3	4	
		Expected class number				

Рис. 8. Результаты классификации на 4 группы (цвет онлайн)

Fig. 8. Classification results into 4 groups (color online)

датчика акселерометра осуществляет отбор сегментов с наилучшей корреляцией в рассматриваемом временном интервале с целью наполнения базы данных шаблонов движения человека. Благодаря коррекции границ допуска на этапе сегментации появляется возможность отслеживать изменения в скорости походки и корректировать интервалы временного окна в процедуре сегментации. На основе применения нейросетевого классификатора осуществляется оценка типа движения и устанавливается принадлежность движения определенному человеку.

строки означает номер класса на выходе нейронной сети и равняется номеру столбца, означающему ожидаемый номер класса на выходе нейронной сети до принятия решения о принадлежности к классу), красные блоки — процент перепутывания события (номер класса на выходе нейронной сети не соответствует ожидаемому номеру класса).

В качестве функции активации использовались сигмоид для скрытых слоев и нормализованная экспоненциальная функция для выходного слоя. Вероятность правильного различения сигналов классификатором составляла 0.95 при количестве скрытых слоев не менее 100. При снижении количества скрытых слоев до 10 вероятность правильного различения данного классификатора снижалась до 0.9. Различение только собственных движений испытуемого составляло 100%. Таким образом, предложенный алгоритм кроме отбора информативных временных отрезков (относящихся к движениям) с



### Список литературы

1. *Sprager S., Juric M. B.* Inertial Sensor-Based Gait Recognition: A Review // *Sensors*. 2015. Vol. 15. P. 22089–22127. <https://doi.org/10.3390/s150922089>
2. *Connor P., Ross A.* Biometric recognition by gait: A survey of modalities and features // *Computer Vision and Image Understanding*. 2018. Vol. 167. P. 1–27. <https://doi.org/10.1016/j.cviu.2018.01.007>
3. *Guelta B., Tlemsani R., Chouraqui S., Benouis M.* An improved behavioral biometric system based on gait and ECG signals // *International Journal of Intelligent Engineering & Systems*. 2019. Vol. 12, iss. 6. P. 147–156. <https://doi.org/10.22266/ijies2019/1231.14>
4. *Ren Y., Chuah M. C.* User verification leveraging gait recognition for smartphone enabled mobile healthcare systems // *IEEE Transactions on Mobile Computing*. 2015. Vol. 14, iss. 9. P. 1961–1974. <https://doi.org/10.1109/TMC.2014.2365185>
5. *Khabir K. M., Siraj Md. S., Ahmed M., Ahmed M. U.* Prediction of gender and age from inertial sensor-based gait dataset // *Joint 2019 8th International Conference on Informatics, Electronics & Vision (ICIEV) & 3rd International Conference on Imaging, Vision & Pattern Recognition (IVPR)*, Eastern Washington University, May 30–June 4, 2019, pp. 371–376. <https://doi.org/10.1109/ICIEV.2019.8858521>
6. *Shema-Shiratzaky S., Beer Y., Mor A., Elbaz A.* Smartphone-based inertial sensors technology – Validation of a new application to measure spatiotemporal gait metrics // *Gait & Posture*. 2022. Vol. 93. P. 102–106. <https://doi.org/10.1016/j.gaitpost.2022.01.024>
7. *Garufov D., Bours P.* User authentication based on foot motion // *SIViP*. 2011. Vol. 5. P. 457–467. <https://doi.org/10.1007/s11760-011-0249-1>
8. *Reyes O. C., Vera-Rodriguez R., Scully P. J., Ozanyan K. B.* Analysis of spatio-temporal representations for robust footstep recognition with deep residual neural networks // *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 2018. Vol. 4. P. 1–13. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2018.2799847>
9. *Соколова А. И., Конушин А. С.* Методы идентификации человека по походке в видео // *Труды института системного программирования РАН*. 2019. Т. 31, вып. 1. С. 69–82. [https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2019-31\(1\)-5](https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2019-31(1)-5), EDN: PGFXZW
10. *Хельвас А. В., Беляйкина Н. Г., Гиля-Зетинов А. А., Черникова Д. Д., Шабунин В. М., Япрыцев Е. О.* Распознавание жестов с помощью нейронной сети и применение этого подхода для создания игровых гаджетов нового поколения // *Труды МФТИ*. 2017. № 2 (34). С. 1–7. EDN: ZBMXML
11. *Teh P.S., Zhang N., Tan S.-Y., Shi Q., Khoh W.H., Nawaz R.* Strengthen user authentication on mobile devices by using user's touch dynamics pattern // *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*. 2020. Vol. 11, iss. 10. P. 4019–4039. <https://doi.org/10.1007/s12652-019-01654-y>
12. *Zhang X., Yao L., Huang C., Gu T., Yang Z., Liu Y.* DeepKey: A multimodal biometric authentication system via deep decoding gaits and brainwaves // *ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology*. 2020. Vol. 11, iss. 4. Art. 49. <https://doi.org/10.1145/3393619>
13. *Grecheneva A. V., Dorofeev N. V., Goryachev M. S.* Estimation of human biomechanics during registration with a wearable device // *Journal of Physics Conference Series*. 2021. Vol. 2096, iss. 1. Art. 012117. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2096/1/012117>
14. *Lu H., Huang J., Saha T., Nachman L.* Unobtrusive gait verification for mobile phones // *Proceedings of the 2014 ACM International Symposium on Wearable Computers*. Seattle, WA, USA, Sept. 13–17, 2014. P. 91–98. <https://doi.org/10.1145/2634317.2642868>
15. *Oguz A., Ertugrul O. F.* Human identification based on accelerometer sensors obtained by mobile phone data // *Biomedical Signal Processing and Control*. 2022. Vol. 77. Art. 103847. <https://doi.org/10.1016/j.bspc.2022.103847>
16. *Tandon R., Javid P., Giulio I. D.* Mobile phone use is detrimental for gait stability in



young adults // *Gait & Posture*. 2021. Vol. 88. P. 37–41. <https://doi.org/10.1016/j.gaitpost.2021.05.001>

17. Pierce A., Ignasiak N. K., Eiteman-Pang W. K., Rakovsky C. Mobile phone sensors can discern medication-related gait quality changes in Parkinson's patients in the home environment // *Computer Methods and Programs in Biomedicine Update*. 2021. Vol. 1, Art. 100028. <https://doi.org/10.1016/j.cmpbup.2021.100028>
18. Lunardini F., Malavolti M., Pedrocchi A. L. G., Borghese N. A., Ferrante S. A mobile app to transparently distinguish single-from dual-task walking for the ecological monitoring of age-related changes in daily-life gait // *Gait & Posture*. 2021. Vol. 86. P. 27–32. <https://doi.org/10.1016/j.gaitpost.2021.02.028>

### References

1. Sprager S., Juric M. B. Inertial Sensor-Based Gait Recognition: A Review. *Sensors*, 2015, vol. 15, pp. 22089–22127. <https://doi.org/10.3390/s150922089>
2. Connor P., Ross A. Biometric recognition by gait: A survey of modalities and features. *Computer Vision and Image Understanding*, 2018, vol. 167, pp. 1–27. <https://doi.org/10.1016/j.cviu.2018.01.007>
3. Guelta B., Tlemsani R., Chouraqui S., Benouis M. An improved behavioral biometric system based on gait and ECG signals. *International Journal of Intelligent Engineering & Systems*, 2019, vol. 12, iss. 6, pp. 147–156. <https://doi.org/10.22266/ijies2019/1231.14>
4. Ren Y., Chuah M. C. User verification leveraging gait recognition for smartphone enabled mobile healthcare systems. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 2015, vol. 14, iss. 9, pp. 1961–1974. <https://doi.org/10.1109/TMC.2014.2365185>
5. Khabir K. M., Siraj Md. S., Ahmed M., Ahmed M. U. Prediction of gender and age from inertial sensor-based gait dataset. *Joint 2019 8th International Conference on Informatics, Electronics & Vision (ICIEV) & 3rd International Conference on Imaging, Vision & Pattern Recognition (IVPR)*, Eastern Washington University, May 30 – June 4, 2019, pp. 371–376. <https://doi.org/10.1109/ICIEV.2019.8858521>
6. Shema-Shiratzaky S., Beer Y., Mor A., Elbaz A. Smartphone-based inertial sensors technology – Validation of a new application to measure spatiotemporal gait metrics. *Gait & Posture*, 2022, vol. 93, pp. 102–106. <https://doi.org/10.1016/j.gaitpost.2022.01.024>
7. Garufov D., Bours P. User authentication based on foot motion. *SIViP*, 2011, vol. 5, pp. 457–467. <https://doi.org/10.1007/s11760-011-0249-1>
8. Reyes O. C., Vera-Rodriguez R., Scully P. J., Ozanyan K. B. Analysis of spatio-temporal representations for robust footstep recognition with deep residual neural networks. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2018, vol. 4, pp. 1–13. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2018.2799847>
9. Sokolova A. I., Konushin A. S. Methods of gait recognition in video. *Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS*, 2019, vol. 31, iss. 1, pp. 69–82 (in Russian). [https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2019-31\(1\)-5](https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2019-31(1)-5), EDN: PGFXZW
10. Helvas A. V., Belyaikina N. G., Gilya-Zetinov A. A., Chernikova D. D., Shabunin V. M., Yapryntsev E. O. Gesture recognition using a neural network and the application of this approach to create a new generation of gaming gadgets. *Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology*, 2017, iss. 2 (34). pp. 1–7 (in Russian). EDN: ZBMXML
11. Teh P. S., Zhang N., Tan S.-Y., Shi Q., Khoh W. H., Nawaz R. Strengthen user authentication on mobile devices by using user's touch dynamics pattern. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, 2020, vol. 11, iss. 10, pp. 4019–4039. <https://doi.org/10.1007/s12652-019-01654-y>
12. Zhang X., Yao L., Huang C., Gu T., Yang Z., Liu Y. DeepKey: A multimodal biometric authentication system via deep decoding gaits and brainwaves. *ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology*, 2020, vol. 11, iss. 4, art. 49. <https://doi.org/10.1145/3393619>



13. Grecheneva A. V., Dorofeev N. V., Goryachev M. S. Estimation of human biomechanics during registration with a wearable device. *Journal of Physics Conference Series*, 2021, vol. 2096, iss. 1, art. 012117. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2096/1/012117>
14. Lu H., Huang J., Saha T., Nachman L. Unobtrusive gait verification for mobile phones. *Proceedings of the 2014 ACM International Symposium on Wearable Computers*. Seattle, WA, USA, Sept. 13–17, 2014, pp. 91–98. <https://doi.org/10.1145/2634317.2642868>
15. Oguz A., Ertugrul O. F. Human identification based on accelerometer sensors obtained by mobile phone data. *Biomedical Signal Processing and Control*, 2022, vol. 77, art. 103847. <https://doi.org/10.1016/j.bspc.2022.103847>
16. Tandon R., Javid P., Giulio I. D. Mobile phone use is detrimental for gait stability in young adults. *Gait & Posture*, 2021, vol. 88, pp. 37–41. <https://doi.org/10.1016/j.gaitpost.2021.05.001>
17. Pierce A., Ignasiak N. K., Eiteman-Pang W. K., Rakovsky C. Mobile phone sensors can discern medication-related gait quality changes in Parkinson's patients in the home environment. *Computer Methods and Programs in Biomedicine Update*, 2021, vol. 1, art. 100028. <https://doi.org/10.1016/j.cmpbup.2021.100028>
18. Lunardini F., Malavolti M., Pedrocchi A. L. G., Borghese N. A., Ferrante S. A mobile app to transparently distinguish single-from dual-task walking for the ecological monitoring of age-related changes in daily-life gait. *Gait & Posture*, 2021, vol. 86, pp. 27–32. <https://doi.org/10.1016/j.gaitpost.2021.02.028>

Поступила в редакцию / Received 05.10.2022

Принята к публикации / Accepted 07.04.2023

Опубликована / Published 30.11.2023



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 544–558  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 544–558  
[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru) <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-544-558>, EDN: XGVLMБ

Научная статья  
УДК 004.94+517.95

## Оптимизация разработки нефтяных месторождений на основе 3D-модели пласта, полученной в результате автоадаптации

М. Г. Персова<sup>1</sup>✉, Ю. Г. Соловейчик<sup>1</sup>, И. И. Патрушев<sup>1</sup>, А. В. Насыбуллин<sup>2</sup>,  
Г. Ж. Алтынбекова<sup>1</sup>, Д. А. Леонович<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский государственный технический университет, Россия, 630073, г. Новосибирск, пр-т К. Маркса, д. 20

<sup>2</sup>Альметьевский государственный нефтяной институт, Россия, 423450, г. Альметьевск, ул. Ленина, д. 2

**Персова Марина Геннадьевна**, доктор технических наук, заведующий научно-исследовательской лабораторией моделирования и обработки данных наукоемких технологий, [persova@ami.nstu.ru](mailto:persova@ami.nstu.ru), <https://orcid.org/0000-0003-1425-3538>, AuthorID: 153048

**Соловейчик Юрий Григорьевич**, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной математики, [soloveychik@ami.nstu.ru](mailto:soloveychik@ami.nstu.ru), <https://orcid.org/0000-0003-2843-3214>, AuthorID: 35709

**Патрушев Илья Игоревич**, аспирант кафедры прикладной математики, [patrushev@ami.nstu.ru](mailto:patrushev@ami.nstu.ru), <https://orcid.org/0000-0003-4195-9085>, AuthorID: 911167

**Насыбуллин Арслан Валерьевич**, доктор технических наук, заведующий кафедрой разработки и эксплуатации нефтяных и газовых месторождений, [argsval@bk.ru](mailto:argsval@bk.ru), <https://orcid.org/0000-0003-1943-5082>, AuthorID: 393097

**Алтынбекова Гулайым Жанатовна**, аспирант кафедры прикладной математики, [gulaiymaltynbekova19@gmail.com](mailto:gulaiymaltynbekova19@gmail.com)

**Леонович Дарьяна Александровна**, младший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории моделирования и обработки данных наукоемких технологий, [Leonovich.D.A@yandex.ru](mailto:Leonovich.D.A@yandex.ru)

**Аннотация.** В работе предлагается подход к оптимизации разработки нефтяных месторождений. Целевая функция включает взвешенные квадраты целевых показателей разработки и регуляризирующие добавки, в которых коэффициенты ищутся адаптивно. Регуляризирующие добавки обеспечивают выполнение ограничений на оптимизируемые параметры и быструю сходимость процесса оптимизации. При минимизации целевой функции выполняется линеаризация целевых показателей, и значения оптимизируемых параметров на очередной итерации ищутся путем решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), получаемой из минимизации квадратичного функционала. Значения целевых показателей и их чувствительности к оптимизируемым параметрам вычисляются путем гидродинамического 3D-моделирования для модели месторождения, полученной в результате автоадаптации за период, предшествующий периоду оптимизации. Расчеты выполняются в распределенной вычислительной системе, состоящей из многоядерных персональных компьютеров. Для проведения апробации предлагаемого подхода была использована модель участка месторождения высоковязкой нефти Республики Татарстан. Оптимизация проведена с различными весовыми коэффициентами и желательными значениями добычи нефти в соответствующем целевом показателе. Показано, что оптимизированные планы обеспечивают более эффективную разработку нефтяного месторождения по сравнению с планом, использованным на практике. Вместе



с этим оптимальный план, построенный по адаптированной модели месторождения на ранней стадии разработки, оптимизирует разработку и для модели, адаптированной на основе данных, полученных за весь период разработки месторождения. Это позволяет сделать вывод, что планы разработки, построенные по модели, адаптированной на основе данных, полученных за короткий срок, будут примерно в той же степени оптимизировать и характеристики добычи для реального месторождения. Время решения оптимизационных задач, содержащих около 500 параметров, в распределенной вычислительной системе составило около суток.

**Ключевые слова:** оптимизация разработки нефтяных месторождений, гидродинамическое 3D-моделирование, автоадаптация модели месторождения, прогноз характеристик нефтедобычи, цифровая модель нефтяных месторождений

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № FSUN-2020-0012).

**Для цитирования:** Персова М. Г., Соловейчик Ю. Г., Патрушев И. И., Насыбуллин А. В., Алтынбекова Г. Ж., Леонович Д. А. Оптимизация разработки нефтяных месторождений на основе 3D-модели пласта, полученной в результате автоадаптации // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 544–558. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-544-558>, EDN: XGVLMB

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Optimization of oil field development based on a 3D reservoir model obtained as a result of history matching

M. G. Persova<sup>1✉</sup>, Yu. G. Soloveichik<sup>1</sup>, I. I. Patrushev<sup>1</sup>, A. V. Nasybullin<sup>2</sup>,  
G. Zh. Altynbekova<sup>1</sup>, D. A. Leonovich<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Novosibirsk State Technical University, 20 K. Marx Ave., Novosibirsk 630073, Russia

<sup>2</sup>Almetyevsk State Oil Institute, 2 Lenina St., Almetyevsk 423450, Russia

Marina G. Persova, persova@ami.nstu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1425-3538>, AuthorID: 153048

Yuri G. Soloveichik, soloveychik@ami.nstu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2843-3214>, AuthorID: 35709

Ilya I. Patrushev, patrushev@ami.nstu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4195-9085>, AuthorID: 911167

Arslan V. Nasybullin, arsva@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1943-5082>, AuthorID: 393097

Gulayym Zh. Altynbekova, gulaiymaltynbekova19@gmail.com

Daryana A. Leonovich, Leonovich.D.A@yandex.ru

**Abstract.** The paper proposes an approach to optimizing the development of oil fields. The objective function includes weighted squares of development target indicators and regularizing terms, in which the coefficients are searched adaptively. Regularizing terms ensure the fulfillment of restrictions on the optimized parameters and the rapid convergence of the optimization process. When minimizing the objective function, linearization of the target indicators is performed, and the values of the optimized parameters at the next iteration are sought by solving the system of linear algebraic equations obtained from minimizing the quadratic functional. The values of the target indicators and their sensitivity to the parameters being optimized are calculated by fluid dynamic 3D modeling for the oil reservoir model obtained as a result of history matching for the period preceding the optimization period. Calculations are performed in a distributed computing system consisting of multi-core personal computers. To test the proposed approach, a





model of a high-viscosity oil field in Tatarstan was used. The optimization was carried out with various weighting factors and desired oil recovery values in the corresponding target indicator. It is shown that the optimized plans provide more efficient development of the oil field compared to the plan used in practice. At the same time, the optimal plan, built on the basis of a reservoir model history-matched at an early stage of development, optimizes development for a model history-matched throughout the entire period of field development. This allows us to conclude that development plans obtained from a model history-matched using a short time period will optimize production characteristics for a real field to about the same extent. The time for solving optimization problems containing about 500 parameters in a distributed computing system was about a day.

**Keywords:** optimization of oil field development, fluid dynamic 3D modeling, history matching of the reservoir model, prediction of oil production characteristics, digital model of oil reservoirs

**Acknowledgements:** This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. FSUN-2020-0012).

**For citation:** Persova M. G., Soloveichik Yu. G., Patrushev I. I., Nasybullin A. V., Altynbekova G. Zh., Leonovich D. A. Optimization of oil field development based on a 3D reservoir model obtained as a result of history matching. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 544–558 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-544-558>, EDN: XGVLMБ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Оптимальное управление и точность прогнозов являются важными факторами, определяющими эффективность разработки нефтяных месторождений. Целевая функция и характеристики используемого метода оптимизации, включающие выполнение технологических ограничений, влияют на корректность определения оптимальных параметров, а адекватность используемых цифровых моделей месторождений — на точность прогнозов нефтедобычи. Задачи оптимизации разработки нефтяных месторождений изучаются многими авторами (см., например, [1–16]). Чаще всего исследуются задачи оптимизации и режимов добычи, но часть авторов рассматривают и проблему оптимизации расположения скважин (см., например, [1, 2]).

Для поиска минимума целевой функции применяются различные методы, в том числе статистические, метод роя частиц (например, [3, 4]) и генетические алгоритмы (например, [5]). Эти методы, как правило, требуют большого количества итераций. Для сокращения вычислительных затрат вместо полного гидродинамического моделирования предлагается также выбирать суррогатные модели («прокси-модели»), в качестве которых могут использоваться эмпирические зависимости (например, [6]) или обученные нейронные сети (см., например, [7, 8]). Очевидно, что применение суррогатных моделей приводит к снижению качества прогноза, поэтому некоторые авторы (см., например, [2]) предлагают использовать суррогатные модели на первом этапе оптимизации, а на втором — выполнять полное гидродинамическое моделирование.

Авторы работы [9] предлагают использовать нейронные сети для поиска оптимального плана разработки. Недостатком такого подхода является то, что анализируются лишь сами практические данные работы из истории эксплуатации скважин и никак не используются математические модели сложных физических процессов, протекающих в коллекторе.

Довольно часто в задачах оптимизации нефтедобычи в качестве целевой функции



используется чистый дисконтированный доход (ЧДД) (см., например, [7, 10–13]). С учетом того, что оптимизация может выполняться на достаточно длительный период, недостатком этого подхода является привязка к конкретным ценам на нефть и сопутствующим затратам. Кроме того, при использовании ЧДД в качестве целевой функции ее зависимость от искомым параметров управления разработкой вычисляется через показатели разработки месторождения, такие как объем добытой нефти, обводненность, объем закачиваемых агентов, на которые искомые параметры влияют в противоположных направлениях. Это существенно ухудшает сходимость процесса минимизации и еще более усугубляет проблему неустойчивости ценовой конъюнктуры на длительных периодах планирования. В связи с этим некоторые авторы (см., например, [12]) предлагают использовать бикритериальные методы оптимизации ЧДД и объемов нефти в сочетании со статистическими методами поиска оптимальных параметров.

Мы предлагаем подход, отличительными особенностями которого является следующее.

1. Целевая функция включает в себя слагаемые, отвечающие за различные характеристики добычи, с весовыми коэффициентами. Это позволит анализировать различные стратегии оптимального планирования при разных экономических условиях с последующим анализом ЧДД.
2. Модель месторождения строится в результате автоматической адаптации с использованием подхода [17]. Это позволяет повысить качество прогнозов добычи.
3. В целевую функцию включены регуляризирующие добавки, которые обеспечивают выполнение ограничений на параметры. Ограничения устанавливаются как с учетом технологических требований, так и для того, чтобы за одну итерацию процесса минимизации значения параметров изменялись не слишком сильно. Минимизация целевой функции выполняется с использованием метода Гаусса – Ньютона, в котором прогнозы для планов разработки и функции чувствительности к их параметрам рассчитываются путем 3D-моделирования многофазного потока, представленного в работе [18]. Коэффициенты регуляризации подбираются адаптивно на каждой итерации. Это позволяет обеспечить получение технологически оправданных (реализуемых) планов разработки, а также быструю сходимость итерационного процесса решения оптимизационной задачи.
4. Для обеспечения вычислительной эффективности используется многоуровневое распараллеливание в распределенной вычислительной системе, состоящей из стандартных многоядерных компьютеров (система распараллеливания описана в работах [17, 19]).

## 1. Параметризация, целевая функция и метод ее минимизации

Мы используем следующую параметризацию плана разработки нефтяного месторождения. Для каждой скважины временной интервал планирования разбивается на подинтервалы  $(t_{k-1}^w, t_k^w)$  ( $w$  — номер скважины,  $k$  — номер интервала), на каждом из которых параметром является объем добычи/закачки ( $Q_k^w$ ) (рис. 1). Вместо объемов добычи/закачки  $Q_k^w$  на некоторых (или всех) скважинах в качестве параметра может использоваться забойное давление  $p_k^w$ . Границы временных интервалов могут быть разными для разных скважин и также могут быть искомыми параметрами

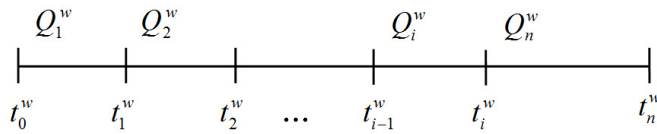


Рис. 1. Параметризация режимов работы скважин  
Fig. 1. Parameterization of well operation modes

в плане разработки месторождения. Основным технологическим ограничением является уровень допустимого давления для добывающих и нагнетательных скважин. Кроме того, для добывающих скважин могут быть заданы

значения обводненности, при которых скважина перестает использоваться и выключается.

Целевая функция имеет следующий вид:

$$\Phi^\gamma(\Theta) = \sum_{w=1}^{NW} \left( \int_{t_0}^{t_n} \alpha_1 V_w^{water,prod}(\Theta, t) dt \right)^2 + \sum_{w=1}^{NW} \left( \int_{t_0}^{t_n} \alpha_2 V_w^{water,inj}(\Theta, t) dt \right)^2 + \left( \int_{t_0}^{t_n} \alpha_3 |V^{sum,oil}(\Theta, t) - V^{sum,oil,*}(t)| dt \right)^2 + \sum_{p=1}^{NP} \gamma_p (\theta_p - \bar{\theta}_p)^2 \rightarrow \min_{\Theta}, \quad (1)$$

где  $(t_0, t_n)$  — интервал построения плана ( $t_0 = t_0^w$  и  $t_n = t_n^w$  для всех  $w$ ),  $NW$  — количество скважин,  $V_w^{water,prod}$  — объем добытой воды из  $w$ -й скважины,  $V_w^{water,inj}$  — объем закаченной в  $w$ -ю скважину жидкости,  $V^{sum,oil}$  — суммарный объем добываемой нефти,  $V^{sum,oil,*}$  — желаемый суммарный объем добываемой нефти,  $NP$  — количество параметров,  $\Theta$  — вектор параметров  $\theta_p$  ( $\bar{\theta}_p$  — значения параметров  $\theta_p$  на предыдущей итерации),  $\gamma_p$  — параметры регуляризации,  $\alpha_i = \alpha_i(t)$  — весовые коэффициенты, определяющие стратегию оптимизации.

Заметим, что значения весовых коэффициентов и желаемый объем добываемой нефти могут быть заданы разными в различные временные интервалы.

Введем следующие обозначения:

$$F_{1,w}(\Theta) = \int_{t_0}^{t_n} \alpha_1 V_w^{water,prod}(\Theta, t) dt, F_{2,w}(\Theta) = \int_{t_0}^{t_n} \alpha_2 V_w^{water,inj}(\Theta, t) dt, \\ F_{3,w}(\Theta) = \int_{t_0}^{t_n} \alpha_3 |V^{sum,oil}(\Theta, t) - V^{sum,oil,*}(t)| dt. \quad (2)$$

Перед началом оптимизации задаются некоторые стартовые значения параметров  $\bar{\theta}_p$ , удовлетворяющие технологическим ограничениям. В окрестности этих параметров выполним линеаризацию функций  $F_{l,w}(\Theta)$ :

$$F_{l,w}(\Theta) \approx F_{l,w}(\bar{\Theta}) + \sum_{p=1}^{NP} \left. \frac{\partial F_{l,w}}{\partial \theta_p} \right|_{\Theta=\bar{\Theta}} \Delta \theta_p, \quad l = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где производные  $\frac{\partial F_{l,w}}{\partial \theta_p}$  отражают чувствительность  $F_{l,w}$  к изменению параметра  $\theta_p$ , а  $\Delta \theta_p = \theta_p - \bar{\theta}_p$ .



После подстановки соотношений (3) в (1) получаем функционал с линеаризованными в окрестности параметров  $\bar{\Theta}$  целевыми показателями:

$$\tilde{\Phi}^\gamma(\Theta) = \sum_{l=1}^3 \sum_{w=1}^{NW} \left( F_{l,w}(\bar{\Theta}) + \sum_{p=1}^{NP} \left. \frac{\partial F_{l,w}}{\partial \theta_p} \right|_{\Theta=\bar{\Theta}} \Delta\theta_p \right)^2 + \sum_{p=1}^{NP} \gamma_p (\Delta\theta_p)^2 \rightarrow \min_{\Delta\theta_p}. \quad (4)$$

Минимизация (4) по  $\Delta\theta_p$  приводит к СЛАУ следующего вида:

$$(\mathbf{B} + \mathbf{\Gamma}) \Delta\Theta = \mathbf{d}, B_{ij} = \sum_{l=1}^3 \sum_{w=1}^{NW} \frac{\partial F_{l,w}}{\partial \theta_i} \frac{\partial F_{l,w}}{\partial \theta_j}, d_i = - \sum_{l=1}^3 \sum_{w=1}^{NW} \frac{\partial F_{l,w}}{\partial \theta_i} F_{l,w}(\bar{\Theta}). \quad (5)$$

Для расчета значений  $V_w^{water,prod}(\Theta, t)$ ,  $V_w^{water,inj}(\Theta, t)$ ,  $V^{sum,oil}(\Theta, t)$ , входящих в функции (2), используется метод гидродинамического 3D-моделирования многофазного многокомпонентного потока, предложенный в работе [18]. Фактически решается прямая задача многофазной фильтрации на период  $(t_0, t_n)$  для режимов работы скважин, описываемых вектором параметров  $\bar{\Theta}$ , и модели резервуара, полученной в результате автоадаптации [17] до момента времени  $t_0$  (т.е. до начала периода оптимизации и формирования прогноза).

Для расчета производных  $\frac{\partial F_{l,w}}{\partial \theta_p}$  решается  $NP$  прямых задач для режимов работы скважин, описываемых векторами параметров  $\bar{\Theta}^p$ . Каждый вектор  $\bar{\Theta}^p$  получается путем изменения компоненты  $\bar{\theta}_p$  на  $d\theta_p$ , т.е.  $\bar{\Theta}^p = (\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_p + d\theta_p, \dots, \bar{\theta}_{NP})$ , значение  $d\theta_p$  выбирается порядка 10–20% от текущего значения параметра  $\bar{\theta}_p$ . Значения производных  $\frac{\partial F_{l,w}}{\partial \theta_p}$  вычисляются как  $\frac{F_{l,w}(\bar{\Theta}^p) - F_{l,w}(\bar{\Theta})}{d\theta_p}$ .

Матрица  $\mathbf{\Gamma}$  в СЛАУ (5) является диагональной с элементами  $\gamma_p$  на главной диагонали, которые подбираются адаптивно на каждой итерации так, чтобы удовлетворялись ограничения на параметры, установленные следующим образом.

На каждой итерации вначале для каждого из параметров вычисляются значения  $\theta_p^{\min}$  и  $\theta_p^{\max}$ , которые являются нижней и верхней границами допустимых значений  $\theta_p$  на текущей итерации. Значения  $\theta_p^{\min}$  и  $\theta_p^{\max}$  вычисляются из условия того, что приращение  $\Delta\theta_p$  не может быть больше, чем  $\kappa \cdot d\theta_p$ , где  $\kappa$  – некоторый коэффициент (исследования показали, что этот коэффициент следует выбирать в диапазоне  $2 \leq \kappa \leq 5$ ). Эти ограничения позволяют обеспечить монотонную и достаточно быструю сходимость. Кроме того, должны выполняться условия  $\theta_p^{tech,\min} < \theta_p^{\min}$  и  $\theta_p^{\max} < \theta_p^{tech,\max}$ , где  $\theta_p^{tech,\min}$  и  $\theta_p^{tech,\max}$  – технологические ограничения на параметр  $\theta_p$ .

## 2. Пример оптимизации разработки на длительный период и анализ точности получаемых прогнозов

Для проведения исследований была использована модель участка Бурейкинского месторождения, описанного в работе [20].

Эта модель была получена в результате автоадаптации за период 1980–2020 гг. с помощью подхода, предложенного в работе [17]. Высокое качество полученной модели подтверждается хорошим совпадением расчетных и наблюдаемых данных (см. [20] и рис. 2). Таким образом, эта модель резервуара с высокой степенью адекватности соответствует реальным условиям.

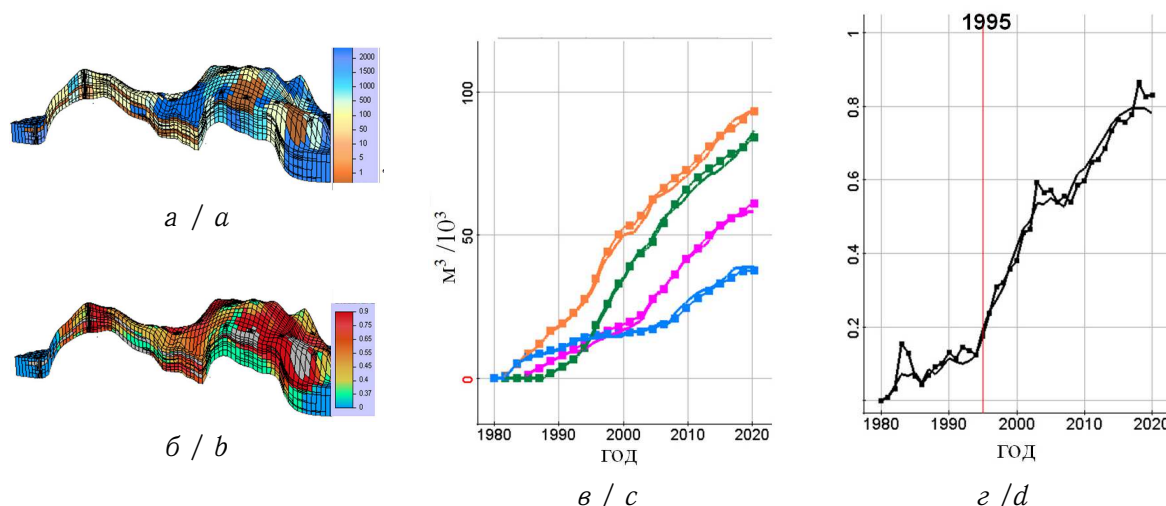


Рис. 2. Результаты адаптации по участку Бурейкинского месторождения (истинная модель): *a* — распределение проницаемости; *b* — распределение нефтенасыщенности на конец 2020 г. (серым цветом показаны слабопроницаемые и непроницаемые зоны); *в* — расчетные и наблюдаемые значения накопленной нефти для отдельных скважин месторождения; *г* — обводненность смеси, добываемой из всех скважин месторождения (кривые с метками соответствуют наблюдаемым данным, кривые без меток — расчетным данным) (цвет онлайн)

Fig. 2. History matching results for the Bureikinskoye field block (true model): *a* is permeability distribution; *b* is distribution of oil saturation at the end of 2020 (weakly permeable and impermeable zones are shown in gray); *c* is calculated and observed values of cumulative oil for individual wells in the field; *d* is water cut of the mixture produced from all wells of the field block (curves with labels correspond to the observed data, curves without labels correspond to the calculated data) (color online)

Численные эксперименты для обоснования валидности предложенного способа оптимизации проводились следующим образом.

Латерально и вертикально неоднородная модель коллектора, представленная на рис. 2, *a*, была взята в качестве истинной модели, а рассчитанные для нее данные добычи по скважинам взяты в качестве практических данных. Из рис. 2, *г* видно, что примерно в 1995 г. начинается рост обводненности, поэтому предположим, что мы находимся (условно) в 1995 г. и попробуем спланировать дальнейшую разработку с использованием различных значений весовых коэффициентов (см. формулу (1)).

Поскольку в реальности мы не знаем истинную модель резервуара, для максимальной близости к практической ситуации выполним автоадаптацию (с использованием подхода, предложенного в работе [17]) по данным на период времени с 1980 по 1995 г. Тем самым мы имитируем характерную для практики ситуацию, когда имеем лишь данные нефтедобычи, по которым можно построить приближенную модель резервуара, но при этом у нас есть точная (истинная) модель, и можно оценить качество получаемых по приближенной модели планов разработки и проверкой на истинной модели.

При адаптации определялось около 500 параметров, включающих значения абсолютных проницаемостей, параметров фазовых проницаемостей и смещений контрольных точек латеральных границ водонефтяного контакта. В процессе адаптации было сделано 4 итерации на 14 шестиядерных компьютерах (84 вычислительных ядра). Время адаптации составило 8 часов. Далее эту модель мы будем называть адаптированной.



Оптимизация будет проводиться для адаптированной модели, а затем построенный прогноз будет проверяться на истинной модели. Период оптимизации для всех скважин был взят с 1995 по 2025 г. Его разбиение на подинтервалы показано на рис. 3.

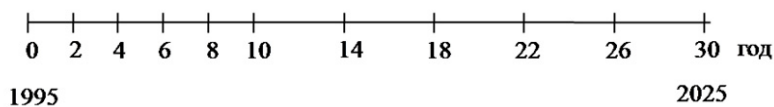


Рис. 3. Период оптимизации и его разбиение на подинтервалы  
 Fig. 3. Optimization period and its division into subintervals

План расположения нагнетательных и добывающих скважин представлен на рис. 4. В качестве параметров используются значения среднесуточных объемов добычи/закачки жидкости (дебиты) на каждом подинтервале для каждой скважины. Общее количество параметров — 460. Стартовые значения параметров (т. е. значения для режима, который далее мы будем называть исходным) были взяты постоянными для всех временных подинтервалов и близкими к значениям дебитов соответствующих скважин в конце 1995 г.

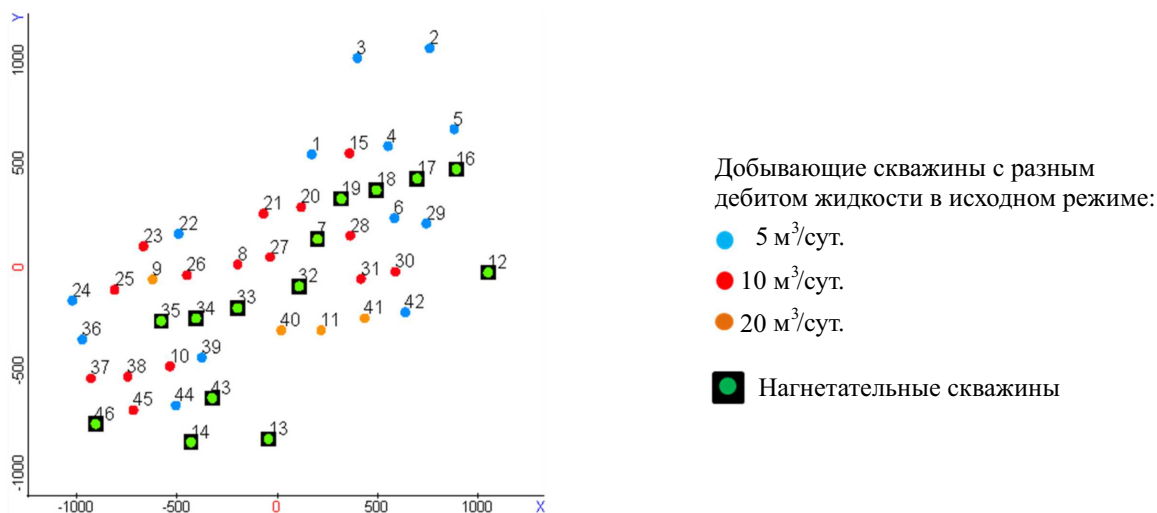


Рис. 4. План расположения скважин и значения дебитов жидкости в исходном режиме (цвет онлайн)

Fig. 4. Well location plan and values of fluid flow rates in the initial mode (color online)

Было проведено три варианта оптимизации, отличающихся значением весового коэффициента  $\alpha_3$  и уровнем желаемого объема добываемой нефти  $V^{sum,oil,*}$  (соответствующие значения представлены в таблице).

Значения  $\alpha_3$  и  $V^{sum,oil,*}$  для трех вариантов оптимизации  
 Table. Values of  $\alpha_3$  and  $V^{sum,oil,*}$  for three variants of optimization

Параметр	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
$\alpha_3$	0.01	0.1	0.1
$V^{sum,oil,*}/10^3$ м <sup>3</sup> /год	90	65	90

Значения остальных весовых коэффициентов были взяты:  $\alpha_1 = 0.1$ ,  $\alpha_2 = 0.01$ . При таком выборе весовых коэффициентов в варианте 1 вклады в функционал, отвечающие

за минимизацию обводненности и достижение желаемого уровня нефти, имеют примерно одинаковый порядок, а в вариантах 2 и 3 вклад слагаемого, отвечающего за достижение желаемого уровня нефти, на порядок превышает остальные вклады.

На параметры были заданы следующие технологические ограничения. Давление должно быть в диапазоне от 10 до 250 атм., а объем добываемой жидкости не должен превышать 60 м<sup>3</sup>/сут. Кроме того, в случае если на скважине обводненность составляет более 95% или дебит добываемой нефти составляет менее 1 т/сут., то добыча на этой скважине останавливается.

В рассмотренных вариантах оптимизации было сделано 4–6 итераций, после чего значение функционала практически переставало меняться. Для проведения вычислений также использовалось 14 шестиядерных компьютеров (84 вычислительных ядра), время оптимизации составило около 20 часов.

На рис. 5 представлены среднегодовые объемы добываемой и закачиваемой жидкости (по участку в целом) для трех вариантов оптимизации.

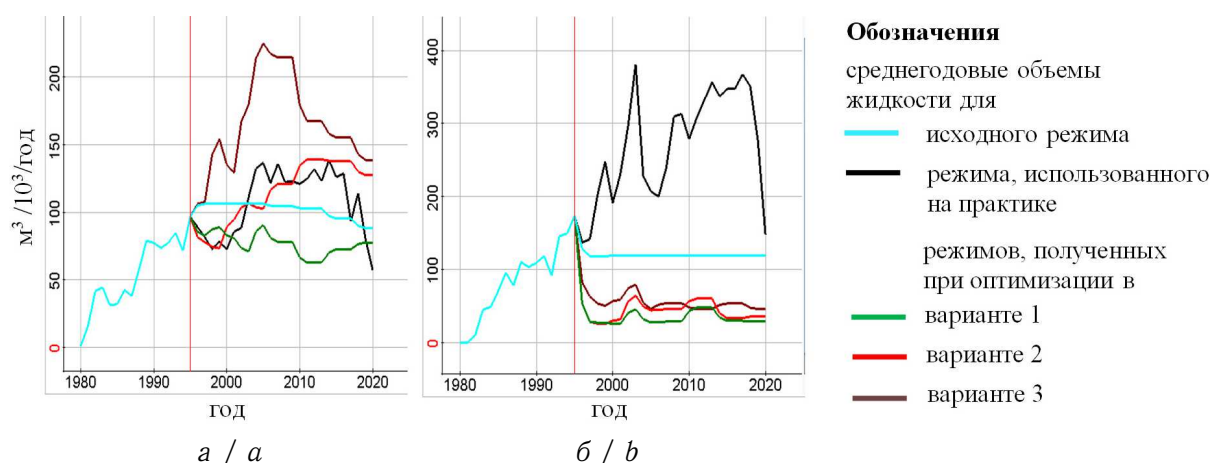


Рис. 5. Среднегодовые объемы добываемой (а) и закачиваемой (б) жидкости для различных режимов; вертикальная красная линия соответствует времени начала оптимизации (цвет онлайн)

Fig. 5. Average annual volumes of produced (a) and injected (b) fluid for different modes; the vertical red line corresponds to the optimization start time (color online)

Для сравнения на рис. 5 приведены объемы для исходного режима и для режима, использованного при разработке этого месторождения на практике, где решения по изменению режимов применялись по ходу выполнения разработки. Несмотря на то что оптимизация проводилась до 2025 г., здесь и далее графики приведены до 2020 г., до которого имеются данные, полученные на практике. Отметим, что хотя для исходного режима были заданы одинаковые значения дебитов на всех временных подынтервалах, объем добычи в конце периода в процессе моделирования был уменьшен из-за установленных ограничений на обводненность и дебит нефти (голубая кривая на рис. 5, а).

На рис. 6 приведены соответствующие рассмотренным выше режимам добычи/закачки характеристики добычи: накопленная нефть, обводненность и среднегодовые объемы добычи нефти. На рисунках слева приведены характеристики для адаптированной модели, по которой выполнялась оптимизация, а на рисунках справа — для истинной модели.

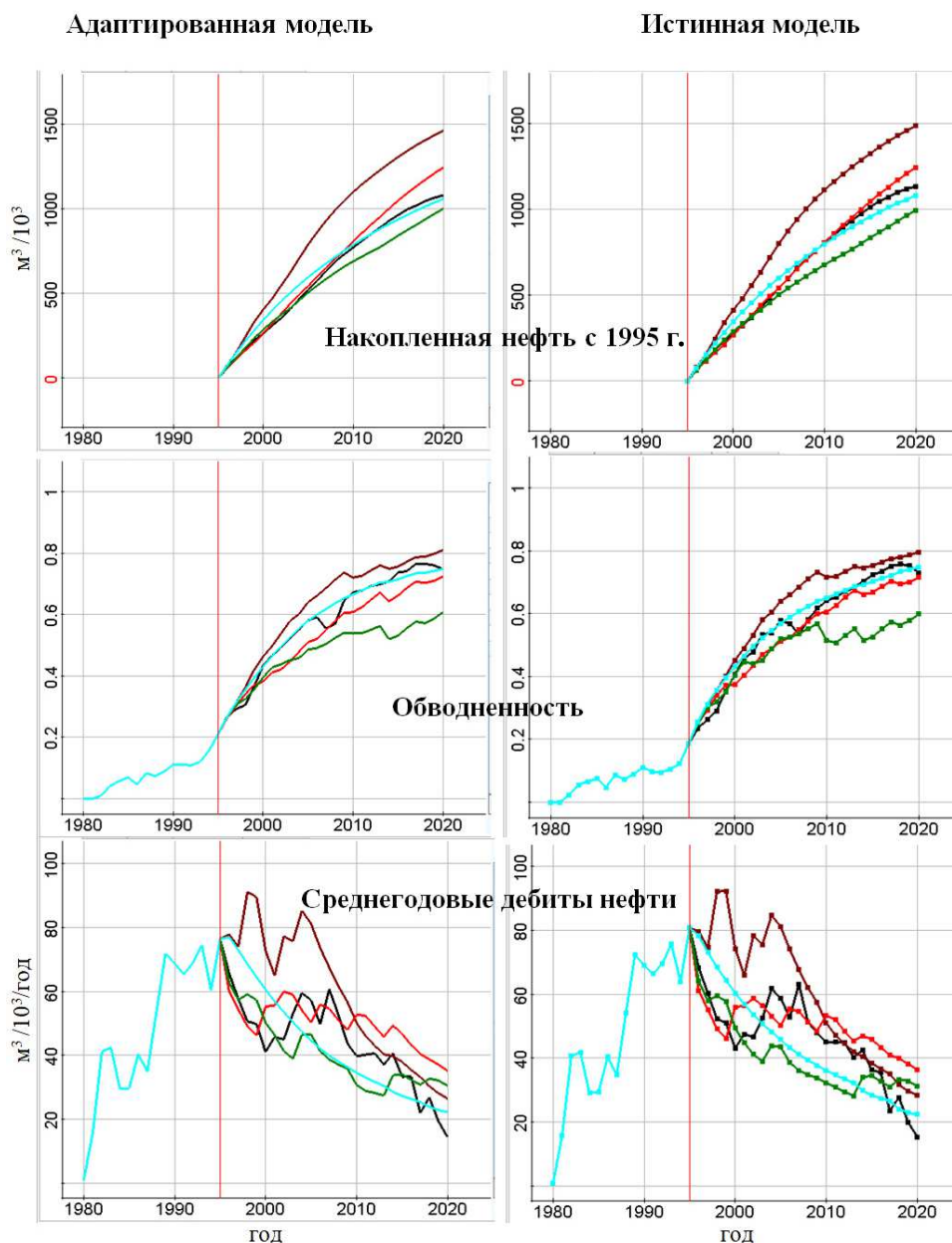


Рис. 6. Характеристики добычи, полученные для различных режимов разработки для адаптированной модели, по которой выполнялась оптимизация (кривые без меток на рисунках слева), и истинной модели (кривые с метками на рисунках справа) резервуара; соответствие цветов режимам аналогичны рис. 5 (цвет онлайн)

Fig. 6. Production characteristics obtained for various development modes for the adapted reservoir model (unlabeled curves in the figures on the left), which was used for optimization, and for the true reservoir model (curves with marks in the figures on the right); the correspondence of colors to modes are similar to Fig. 5 (color online)

Из представленных результатов видно, что в варианте 1 существенно снизился объем добычи, в варианте 2 среднегодовая добыча близка к уровню добычи, используемому при разработке этого месторождения на практике (за исключением поздней стадии), а в варианте 3 среднегодовая добыча существенно выше используемой на практике. При этом среднегодовой объем закачки, полученный в результате опти-





мизации, во всех вариантах существенно ниже, чем в исходном режиме и режиме, который был использован на практике.

Из представленных на рис. 6 результатов видно, что характеристики нефтедобычи, полученные для адаптированной модели, для всех режимов хорошо соответствуют характеристикам, рассчитанным по истинной модели. Этот факт свидетельствует о том, что получаемые для адаптированных моделей месторождений оптимизированные (с учетом выбранной стратегии) планы будут практически в той же степени оптимизированными и для реального месторождения, несмотря на то, что, конечно, сами прогнозные характеристики при прогнозировании на очень длительный период могут несколько отличаться.

В результате оптимизации с различными весовыми коэффициентами было получено следующее. В варианте 1 количество добытой нефти было несколько меньше, чем для режима, используемого на практике, но при этом значение обводненности, полученное на конец прогнозного периода, существенно ниже практического (0.6 против 0.8). В варианте 2 характеристики примерно совпадают с характеристиками, полученными на практике до 2010 г., но в конце прогнозного периода оптимизированный по варианту 2 план показывает возможность увеличения добытой нефти и снижение обводненности по сравнению с режимом, использованным на практике. В варианте 3 количество добытой нефти существенно выше по сравнению с режимом, использованным на практике, при этом в конце прогнозного периода значение обводненности было примерно таким же. При этом приблизительно до 2008 г. уровень добычи в варианте 3 был существенно увеличен по сравнению с практическим режимом, а после 2008 г. оставался примерно таким же.

Таким образом, в результате оптимизации по варианту 3 существенное увеличение объемов добытой нефти в середине разработки не ухудшило характеристики добычи в поздней стадии, что позволяет сделать вывод о возможности более эффективной разработки месторождения.

## Заключение

Предложен подход к оптимизации разработки нефтяных месторождений. Он основан на минимизации целевой функции, включающей слагаемые, отвечающие за уровень обводненности, объемы закачиваемой жидкости и желательного объема добытой нефти. Слагаемые входят в целевую функцию с весовыми коэффициентами, которые позволяют рассматривать различные стратегии разработки. В минимизируемый функционал входит также регуляризирующий член, который обеспечивает как монотонную и быструю сходимость итерационного процесса, так и выполнение технологических ограничений на параметры. Значения целевой функции и чувствительности к параметрам вычисляются путем гидродинамического 3D-моделирования для модели месторождения, полученной в результате автоадаптации.

Результаты оптимизации, выполненной для модели месторождения высококовязкой нефти на длительный период, показали следующее. Полученные оптимизированные планы обеспечивают более эффективную разработку нефтяного месторождения по сравнению с планом, использованным на практике. Кроме того, показано, что оптимальный план, построенный по модели месторождения, адаптированной по ранней стадии разработки, оптимизирует разработку и для модели, адаптированной по всему периоду разработки месторождения и принятой за «истинную». А поскольку «истин-



ная» модель с высокой точностью описывает практические данные, то можно ожидать, что планы разработки, полученные по модели, адаптированной по короткому сроку, будут примерно в той же степени оптимизировать и характеристики добычи для реального месторождения.

Время решения оптимизационных задач, содержащих около 500 параметров, в распределенной вычислительной системе составило около суток. При этом использовалось 14 шестиядерных компьютеров с процессорами Intel I7-8700K (3.7 ГГц, 32 Гб памяти).

### Список литературы

1. *Shirangi M. G., Durlofsky L. J.* Closed-loop field development under uncertainty by use of optimization with sample validation // SPE Journal. Society of Petroleum Engineers. 2015. Vol. 20. P. 908–922. <https://doi.org/10.2118/173219-PA>
2. *de Brito D. U., Durlofsky L. J.* Well control optimization using a two-step surrogate treatment // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2020. Vol. 187. Art. 106565. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.106565>
3. *Bai Y., Hou J., Liu Y., Zhao D., Bing S., Xiao W., Zhao W.* Energy-consumption calculation and optimization method of integrated system of injection-reservoir-production in high water-cut reservoir // Energy. 2022. Vol. 239. Art. 121961. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2021.121961>
4. *Nasir Y., Yu W., Sepehrnoori K.* Hybrid derivative-free technique and effective machine learning surrogate for nonlinear constrained well placement and production optimization // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2020. Vol. 186. Art. 106726. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.106726>
5. *Negahdari Z., Khandoozi S., Ghaedi M., Malayeri M. R.* Optimization of injection water composition during low salinity water flooding in carbonate rocks: A numerical simulation study // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2022. Vol. 209. Art. 109847. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.109847>
6. *Tugan M. F., Weijermars R.* Improved EUR prediction for multi-fractured hydrocarbon wells based on 3-segment DCA: Implications for production forecasting of parent and child wells // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2020. Vol. 187. Art. 106692. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.106692>
7. *Alfarizi M. G., Stanko M., Bikmukhametov T.* Well control optimization in waterflooding using genetic algorithm coupled with Artificial Neural Networks // Upstream Oil and Gas Technology. 2022. Vol. 9. Art. 100071. <https://doi.org/10.1016/j.upstre.2022.100071>
8. *Ng C. S. W., Ghahfarokhi A. J., Amar M. N.* Production optimization under waterflooding with Long Short-Term Memory and metaheuristic algorithm // Petroleum. 2022. Vol. 9, iss. 1. P. 53–60. <https://doi.org/10.1016/j.petlm.2021.12.008>
9. *Tang L., Li J., Lu W., Lian P., Wang H., Jiang H., Wang F., Jia H.* Well control optimization of waterflooding oilfield based on deep neural network // Geofluids. 2021. Vol. 2021. Art. 8873782. <https://doi.org/10.1155/2021/8873782>
10. *Jansen J. D., Douma S. D., Brouwer D. R., Van den Hof P. M. J., Bosgra O. H., Heemink A. W.* Closed loop reservoir management // SPE Reservoir Simulation Symposium. The Woodlands, Texas, February 2009. Art. SPE-119098-MS. <https://doi.org/10.2118/119098-MS>
11. *Wang C., Li G., Reynolds A. C.* Production optimization in closed-loop reservoir management // SPE Journal. 2009. Vol. 14, iss. 3. P. 506–523. <https://doi.org/10.2118/109805-PA>
12. *Awasthi U., Marmier R., Grossmann I. E.* Multiperiod optimization model for oilfield production planning: Bicriterion optimization and two-stage stochastic programming



- model // Optimization and Engineering. 2019. Vol. 20. P. 1227–1248. <https://doi.org/10.1007/s11081-019-09455-0>
13. Rodriguez A. X., Aristizabal J., Cabrales S., Gomez J. M., Medaglia A. L. Optimal waterflooding management using an embedded predictive analytical model // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2022. Vol. 208. Pt. B. Art. 109419. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.109419>
  14. Dang C., Nghiem L., Nguyen N., Yang C., Chen Z., Bae W. Modeling and optimization of alkaline-surfactant-polymer flooding and hybrid enhanced oil recovery processes // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2018. Vol. 169. P. 578–601. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2018.06.017>
  15. Zhao H., Xu L., Guo Z., Liu W., Zhang Q., Ning X., Li G., Shi L. A new and fast waterflooding optimization workflow based on INSIM-derived injection efficiency with a field application // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2019. Vol. 179. P. 1186–1200. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.04.025>
  16. Xue X., Chen G., Zhang K., Zhang L., Zhao X., Song L., Wang M., Wang P. A divide-and-conquer optimization paradigm for waterflooding production optimization // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2022. Vol. 211. Art. 110050. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.110050>
  17. Persova M. G., Soloveichik Y. G., Vagin D. V., Grif A. M., Kiselev D. S., Patrushev I. I., Nasybullin A. V., Ganiev B. G. The design of high-viscosity oil reservoir model based on the inverse problem solution // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2021. Vol. 199. Art. 108245. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2020.108245>
  18. Soloveichik Y. G., Persova M. G., Grif A. M., Ovchinnikova A. S., Patrushev I. I., Vagin D. V., Kiselev D. S. A method of FE modeling multiphase compressible flow in hydrocarbon reservoirs // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2022. Vol. 390. Art. 114468. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.114468>
  19. Persova M. G., Soloveichik Y. G., Vagin D. V., Kiselev D. S., Sivenkova A. P., Grif A. M. Improving the computational efficiency of solving multisource 3-D airborne electromagnetic problems in complex geological media // Computational Geosciences. 2021. Vol. 25, iss. 6. P. 1957–1981. <https://doi.org/10.1007/s10596-021-10095-6>
  20. Насыбуллин А. В., Персова М. Г., Орехов Е. В., Шайдуллин Л. К., Соловейчик Ю. Г., Патрушев И. И. Моделирование ПАВ-полимерного заводнения на участке Бурейкинского месторождения // Нефтяное хозяйство. 2022. № 7. С. 38–42. <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2022-7-38-42>

### References

1. Shirangi M. G., Durlofsky L. J. Closed-loop field development under uncertainty by use of optimization with sample validation. *SPE Journal. Society of Petroleum Engineers*, 2015, vol. 20, pp. 908–922. <https://doi.org/10.2118/173219-PA>
2. de Brito D. U., Durlofsky L. J. Well control optimization using a two-step surrogate treatment. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2020, vol. 187, art. 106565. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.106565>
3. Bai Y., Hou J., Liu Y., Zhao D., Bing S., Xiao W., Zhao W. Energy-consumption calculation and optimization method of integrated system of injection-reservoir-production in high water-cut reservoir. *Energy*, 2022, vol. 239, art. 121961. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2021.121961>
4. Nasir Y., Yu W., Sephrnoori K. Hybrid derivative-free technique and effective machine learning surrogate for nonlinear constrained well placement and production optimization. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2020, vol. 186, art. 106726. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.106726>



5. Negahdari Z., Khandoozi S., Ghaedi M., Malayeri M. R. Optimization of injection water composition during low salinity water flooding in carbonate rocks: A numerical simulation study. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2022, vol. 209, art. 109847. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.109847>
6. Tugan M. F., Weijermars R. Improved EUR prediction for multi-fractured hydrocarbon wells based on 3-segment DCA: Implications for production forecasting of parent and child wells. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2020, vol. 187, art. 106692. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.106692>
7. Alfarizi M. G., Stanko M., Bikmukhametov T. Well control optimization in waterflooding using genetic algorithm coupled with Artificial Neural Networks. *Upstream Oil and Gas Technology*, 2022, vol. 9, art. 100071. <https://doi.org/10.1016/j.upstre.2022.100071>
8. Ng C. S. W., Ghahfarokhi A. J., Amar M. N. Production optimization under waterflooding with Long Short-Term Memory and metaheuristic algorithm. *Petroleum*, 2022, vol. 9, iss. 1, pp. 53–60. <https://doi.org/10.1016/j.petlm.2021.12.008>
9. Tang L., Li J., Lu W., Lian P., Wang H., Jiang H., Wang F., Jia H. Well control optimization of waterflooding oilfield based on deep neural network. *Geofluids*, 2021, vol. 2021, art. 8873782. <https://doi.org/10.1155/2021/8873782>
10. Jansen J. D., Douma S. D., Brouwer D. R., Van den Hof P. M. J., Bosgra O. H., Heemink A. W. Closed loop reservoir management. *SPE Reservoir Simulation Symposium*, The Woodlands, Texas, February 2009, art. SPE-119098-MS. <https://doi.org/10.2118/119098-MS>
11. Wang C., Li G., Reynolds A. C. Production optimization in closed-loop reservoir management. *SPE Journal*, 2009, vol. 14, iss. 3, pp. 506–523. <https://doi.org/10.2118/109805-PA>
12. Awasthi U., Marmier R., Grossmann I. E. Multiperiod optimization model for oilfield production planning: Bicriterion optimization and two-stage stochastic programming model. *Optimization and Engineering*, 2019, vol. 20, pp. 1227–1248. <https://doi.org/10.1007/s11081-019-09455-0>
13. Rodriguez A. X., Aristizabal J., Cabrales S., Gomez J. M., Medaglia A. L. Optimal waterflooding management using an embedded predictive analytical model. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2022, vol. 208, pt. B, art. 109419. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.109419>
14. Dang C., Nghiem L., Nguyen N., Yang C., Chen Z., Bae W. Modeling and optimization of alkaline-surfactant-polymer flooding and hybrid enhanced oil recovery processes. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2018, vol. 169, pp. 578–601. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2018.06.017>
15. Zhao H., Xu L., Guo Z., Liu W., Zhang Q., Ning X., Li G., Shi L. A new and fast waterflooding optimization workflow based on INSIM-derived injection efficiency with a field application. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2019, vol. 179, pp. 1186–1200. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.04.025>
16. Xue X., Chen G., Zhang K., Zhang L., Zhao X., Song L., Wang M., Wang P. A divide-and-conquer optimization paradigm for waterflooding production optimization. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2022, vol. 211, art. 110050. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.110050>
17. Persova M. G., Soloveichik Y. G., Vagin D. V., Grif A. M., Kiselev D. S., Patrushev I. I., Nasybullin A. V., Ganiev B. G. The design of high-viscosity oil reservoir model based on the inverse problem solution. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2021, vol. 199, art. 108245. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2020.108245>
18. Soloveichik Y. G., Persova M. G., Grif A. M., Ovchinnikova A. S., Patrushev I. I., Vagin D. V., Kiselev D. S. A method of FE modeling multiphase compressible flow in



- hydrocarbon reservoirs. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2022, vol. 390, art. 114468. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.114468>
19. Persova M. G., Soloveichik Y. G., Vagin D. V., Kiselev D. S., Sivenkova A. P., Grif A. M. Improving the computational efficiency of solving multisource 3-D airborne electromagnetic problems in complex geological media. *Computational Geosciences*, 2021, vol. 25, iss. 6, pp. 1957–1981. <https://doi.org/10.1007/s10596-021-10095-6>
20. Nasybullin A. V., Persova M. G., Orekhov E. V., Shaidullin L. K., Soloveichik Y. G., Patrushev I. I. Modeling of surfactant-polymer flooding on Bureikinskoye field block. *Neftyanoe khozyaystvo* [Oil Industry], 2022, iss. 7, pp. 38–42 (in Russian). <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2022-7-38-42>

Поступила в редакцию / Received 28.09.2022

Принята к публикации / Accepted 20.11.2022

Опубликована / Published 30.11.2023

ISSN 1816-9791

23004



9 771816 979101

ISSN 1816-9791 (Print). ISSN 2541-9005 (Online)  
Известия Саратовского университета. Новая серия.  
Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023.  
Том 23, выпуск 4

## ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Новая серия

Серия: Акмеология образования. Психология развития  
Серия: История. Международные отношения

**Серия: Математика. Механика. Информатика**

Серия: Науки о Земле  
Серия: Социология. Политология

Серия: Физика  
Серия: Филология. Журналистика

Серия: Философия. Психология. Педагогика  
Серия: Химия. Биология. Экология

Серия: Экономика. Управление. Право

