

ISSN 1816-9791 (Print)
ISSN 2541-9005 (Online)

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия: Математика. Механика. Информатика

2024

Том 24

Выпуск 2



IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS



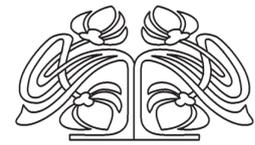
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 2

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал
2024 Том 24

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издается с 2005 года

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

Dosiyev A. A. A highly accurate difference method for solving the Dirichlet problem of the Laplace equation on a rectangular parallelepiped with boundary values in $C^{k,1}$ [**Досиев А. А.** Разностный метод высокой точности при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа на прямоугольном параллелепипеде с граничными значениями $C^{k,1}$] 162

Nápoles J. E., Guzmán P. M., Bayraktar B. New integral inequalities in the class of functions (h, m) -convex [**Наполес Х. Э., Гузман П. М., Байрактар Б.** Новые интегральные неравенства в классе (h, m) -выпуклых функций] 173

Савчин В. М., Чинь Ф. Т. О потенциальности, дискретизации и интегральных инвариантах бесконечномерных систем Биркгофа 184

Цыбуля Л. М. Алгоритмический поиск целых абелевых корней многочлена с целыми абелевыми коэффициентами 193

Yurko V. A. Global solvability of the inverse spectral problem for differential systems on a finite interval [**Юрко В. А.** Глобальная разрешимость обратной спектральной задачи для дифференциальных систем на конечном интервале] 200

Механика

Ватульян А. О., Юров В. О. Об одном новом подходе к идентификации неоднородных механических свойств упругих тел 209

Кириллова И. В. Асимптотическая теория гиперболического погранслоя в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях тангенциального типа 222

Крылова Е. Ю. Математическая модель колебаний ортотропных сетчатых микрополярных цилиндрических оболочек в условиях температурных воздействий 231

Панфилов И. А., Айзикович С. М., Васильев А. С. Анализ упругих и упругопластических моделей при интерпретации результатов наноиндентирования 245

Хайрулин А. Р., Ракишева И. О., Кучумов А. Г., Голуб М. В., Шехмаматов Р. М., Лазарьков П. В. Исследование влияния характеристик межсистемных шунтов на гемодинамические показатели и распределение кислорода 254

Информатика

Demidenko O. M., Aksionova N. A., Varuyeu A. V. Implementation of the identification and recognition system cognitive behavior of the observed [**Демиденко О. М., Аксёнова Н. А., Воруйев А. В.** Реализация системы идентификации и распознавания когнитивного поведения наблюдаемого] 275

Rusilko T. V., Pankov A. V. Queuing network model of a call center with customer retrials and impatient customers [**Русилко Т. В., Паньков А. В.** Сеть массового обслуживания с повторными вызовами и нетерпеливыми клиентами как модель колл-центра] 287

Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Сидорякина В. В., Кузнецова И. Ю., Атаян А. М. Использование параллельных вычислений для оценки процесса переноса загрязняющих веществ в мелководных водоемах 298

Журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика»» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Запись о регистрации СМИ ПИ № ФС77-76640 от 26 августа 2019 г. Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (категория К1, специальности: 1.1.1; 1.1.2; 1.1.5; 1.1.6; 1.1.7; 1.1.8; 1.1.9; 1.1.10; 1.2.2; 2.3.1). Журнал индексируется RSCI, Web of Science (ESCI), Scopus, MathSciNet, zbMATH, DOAJ

Подписной индекс издания 36017. Подписку на печатные издания можно оформить в интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru). Журнал выходит 4 раза в год. Цена свободная. Электронная версия находится в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

Директор издательства

Бучко Ирина Юрьевна

Редактор

Каргин Игорь Анатольевич

Редактор-стилист

Агафонов Андрей Петрович

Верстка

Халова Виктория Анатольевна

Технический редактор

Каргин Игорь Анатольевич

Корректор

Агафонов Андрей Петрович

В оформлении издания использованы работы художника Соколова Дмитрия Валерьевича (13.11.1940–20.11.2023)

Адрес учредителя, издателя

и издательства (редакции):

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49,
52-26-89

E-mail: publ@sgu.ru, izdat@sgu.ru

Подписано в печать 22.05.2024.

Подписано в свет 31.05.2024.

Формат 60 × 84 1/8.

Усл. печ. л. 18,37 (19,75).

Тираж 100 экз. Заказ 55-Т.

Отпечатано в типографии
Саратовского университета.

Адрес типографии:

410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2024



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <https://mmi.sgu.ru/ru/dlya-avtorov>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования. В случае положительного решения статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <https://mmi.sgu.ru>

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@sgu.ru

Website: <https://mmi.sgu.ru>

Ответственный секретарь серии:

Шевцова Юлия Владиславовна

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

Dosiyev A. A. A highly accurate difference method for solving the Dirichlet problem of the Laplace equation on a rectangular parallelepiped with boundary values in C^k . 162

Nápoles J. E., Guzmán P. M., Bayraktar B. New integral inequalities in the class of functions (h, m) -convex 173

Savchin V. M., Trinh P. T. On potentiality, discretization, and integral invariants of the infinite-dimensional Birkhoff systems 184

Tsybulya L. M. Algorithmic search for integer Abelian roots of a polynomial with integer Abelian coefficients 193

Yurko V. A. Global solvability of the inverse spectral problem for differential systems on a finite interval 200

Mechanics

Vatulyan A. O., Yurov V. O. On a new approach to identifying inhomogeneous mechanical properties of elastic bodies 209

Kirilova I. V. Asymptotic theory of the hyperbolic boundary layer in shells of revolution at shock edge loading of the tangential type 222

Krylova E. Yu. Mathematical model of orthotropic meshed micropolar cylindrical shells oscillations under temperature effects 231

Panfilov I. A., Aizikovich S. M., Vasiliev A. S. Analysis of elastic and elastoplastic models when interpreting nanoindentation results 245

Khairulin A. R., Rakisheva I. O., Kuchumov A. G., Golub M. V., Shekhmametiev R. M., Lazarkov P. V. Investigation of the influence of intersystem shunt characteristics on hemodynamic parameters and oxygen distribution 254

Computer Sciences

Demidenko O. M., Aksionova N. A., Varuyeu A. V. Implementation of the identification and recognition system cognitive behavior of the observed 275

Rusilko T. V., Pankov A. V. Queueing network model of a call center with customer retrials and impatient customers 287

Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Sidoryakina V. V., Kuznetsova I. Yu., Atayan A. M. Using parallel computing to evaluate the transport of pollutants in shallow waters 298



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Бауэр Светлана Михайловна, доктор физ.-мат. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

dell'Isola Francesco, доктор наук, профессор (Рим, Италия)

Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Омск, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)

Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)

Каплунув Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Беларусь)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Матвеенко Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, профессор, акад. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Долгопрудный,

Московская обл., Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук (Ульяновск, Россия)

Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, профессор, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D. (Киль, Великобритания)

Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Беларусь)

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Цатурян Андрей Кимович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чунань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
"IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY.
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS"**

Editor-in-Chief – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Svetlana M. Bauer (St. Petersburg, Russia)

Francesco dell'Isola (Rome, Italy)

Shoji Imatani (Kyoto, Japan)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

Avgust P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Nikita F. Morozov (St. Petersburg, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan, Russia)

Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny,

Moscow region, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)

Alexander F. Rezhnikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Alexander I. Shashkin (Voronezh, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

Igor' E. Tananko (Saratov, Russia)

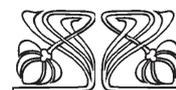
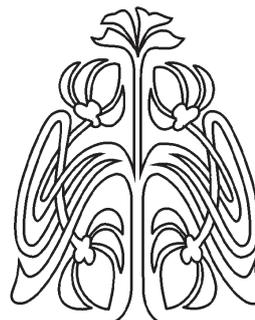
Andrey K. Tsaturyan (Moscow, Russia)

Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)

Vyacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**



МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 162–172

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 162–172

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-162-172>

EDN: [WNJQOX](https://www.edn.ru/entry/WNJQOX)

Article

A highly accurate difference method for solving the Dirichlet problem of the Laplace equation on a rectangular parallelepiped with boundary values in $C^{k,1}$

A. A. Dosiyeu

Western Caspian University, 31 Istiglaliyyat St., Baku AZ1001, Azerbaijan

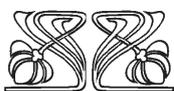
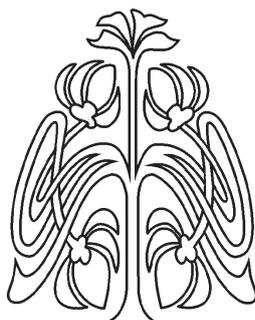
Adiguzel A. Dosiyeu, dosiyeuadiguzel@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-9154-8116>

Abstract. A three-stage difference method for solving the Dirichlet problem of Laplace's equation on a rectangular parallelepiped is proposed and justified. In the first stage, approximate values of the sum of the pure fourth derivatives of the solution are defined on a cubic grid by the 14-point difference operator. In the second stage, approximate values of the sum of the pure sixth derivatives of the solution are defined on a cubic grid by the simplest 6-point difference operator. In the third stage, the system of difference equations for the sought solution is constructed again by using the 6-point difference operator with the correction by the quantities determined in the first and the second stages. It is proved that the proposed difference solution to the Dirichlet problem converges uniformly with the order $O(h^6(|\ln h| + 1))$, when the boundary functions on the faces are from $C^{7,1}$ and on the edges their second, fourth, and sixth derivatives satisfy the compatibility conditions, which follows from the Laplace equation. A numerical experiment is illustrated to support the analysis made.

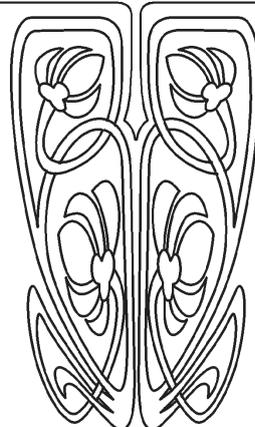
Keywords: finite difference method, 3D Laplace equation, cubic grids on parallelepiped, 14-point averaging operator, error estimations

For citation: Dosiyeu A. A. A highly accurate difference method for solving the Dirichlet problem of the Laplace equation on a rectangular parallelepiped with boundary values in $C^{k,1}$. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 162–172. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-162-172>, EDN: [WNJQOX](https://www.edn.ru/entry/WNJQOX)

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Научный
отдел





Научная статья
УДК 518.517.944/947

Разностный метод высокой точности при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа на прямоугольном параллелепипеде с граничными значениями в $C^{k,1}$

А. А. Досиев

Западно-Каспийский университет, Азербайджан, AZ1001, г. Баку, ул. Истиглалият, д. 31

Досиев Адигезал Ахмед оглу, доктор физико-математических наук, преподаватель кафедры механики и математики, dosiyevadiguzel@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-9154-8116>

Аннотация. В работе предлагается и обосновывается трехэтапный разностный метод для решения задачи Дирихле уравнения Лапласа на прямоугольном параллелепипеде. На первом этапе приближенное значение суммы из чистых четвертых производных решения определяется 14-точечным разностным оператором на кубической сетке. На втором этапе приближенное значение суммы из чистых шестых производных решения определяется простейшим 6-точечным разностным оператором. На третьем этапе система разностных уравнений для искомого решения конструируется также с помощью 6-точечного разностного оператора с коррекцией по результатам первого и второго этапов. Доказано, что предложенная разностная схема решения для задачи Дирихле сходится со скоростью $O(h^6(|\ln h| + 1))$, когда граничные функции на гранях из $C^{7,1}$, а на ребрах их вторые, четвертые и шестые производные удовлетворяют условию согласования, вытекающего из уравнения Лапласа.

Ключевые слова: конечно разностный метод, 3D уравнения Лапласа, кубические сетки в параллелепипеде, 14-точечный оператор усреднения, оценки погрешности

Для цитирования: Dosiyeu A. A. A highly accurate difference method for solving the Dirichlet problem of the Laplace equation on a rectangular parallelepiped with boundary values in $C^{k,1}$ [Досиев А. А. Разностный метод высокой точности при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа на прямоугольном параллелепипеде с граничными значениями $C^{k,1}$] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 162–172. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-162-172>, EDN: WJNQOX

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

A highly accurate method is one of the powerful tools for reducing the number of unknowns, which is the main problem in the numerical solution of differential equations to get reasonable results. In the most of approximations to get highly accurate results the difference operators with a high number of patterns are used, which increase the number of bandwidth of the difference equations. It is obvious that the complexity of the realization methods for the difference equations increases depending on the number of the bandwidth of the matrices of these systems of difference equations. As it was shown by R. E. Tarjan [1], in the case of the Gaussian elimination method the bandwidth elimination for $n \times n$ matrices with the bandwidth b , the computational cost is of order $O(b^2n)$.

One of the effective methods of increased accuracy which uses the simplest finite difference approximation by correcting the right-hand-side term with the application of the high order differences of the numerical solution of differential equation, was proposed by L. Fox [2] without theoretical justification. Some modification of Fox's approach was given by Woods [3]. A theoretical justification of Fox's method was presented by Volkov in [4, 5]. From Volkov's results in the case of the Dirichlet problem for Poisson's equation on a rectangular domain Π , it follows that the approximate solution obtained by the q -th correction of the right-hand side of the 5-point



scheme, the convergence order in the uniform metric is $O(h^{2q})$, h is the mesh step, when the exact solution u has $(2q + 2)$ -th derivatives on $\bar{\Pi}$ satisfying a Hölder condition with exponent $\lambda \in (0, 1)$, i.e., $u \in C^{2q+2,\lambda}(\bar{\Pi})$.

In Berikelashvili and Midodashvili [6] it is proved that the corrected 5-point difference scheme on the rectangular grid is convergent at the rate $O(|h|^m)$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$, in the discrete L_2 -norm, provided that the exact solution belongs to the Sobolev space W_2^m , $m \in [2, 4]$.

In Volkov [7] a two-stage difference method for solving the Dirichlet problem for Laplace's equation on a rectangular parallelepiped was proposed. It was assumed that the given boundary functions on the faces of a parallelepiped have the sixth derivatives satisfying the Hölder condition, and on the edges, besides the continuity they satisfy the compatibility condition for second derivatives, which results from the Laplace equation. It was proved that by using a simple 7-point scheme in two stages the order of uniform error can be improved up to $O(h^4 \ln h^{-1})$. From the conditions imposed on the boundary functions in [7], it does not follow as it was mistakenly declared in [6] that the exact solution belongs to $C^{6,\lambda}(\bar{\Pi})$.

Moreover, as it was shown in [8], the theoretical justification of the difference schemes needs special attention when the boundary values of a solution belong to the Hölder classes $C^{2l-1,1}$ and $2l - 2$ order derivatives satisfy the conjunction condition followed from the Laplace equation. In this case, some of $2l$ order derivatives may be unbounded near the boundary of the solution domain, and for the rate of convergence of the 27-point difference solution, when $l = 3$, $O(h^6(|\ln h| + 1))$ of order is obtained.

In this paper, a three-stage difference method constructed a special combination of 15-point and 7-point schemes for solving the Dirichlet problem of Laplace's equation on a rectangular parallelepiped is proposed and justified. It is proved that the obtained difference method converges uniformly with an order of $O(h^6(|\ln h| + 1))$ when the boundary functions on the faces are from $C^{7,1}$, and on the edges their second, fourth, and sixth derivatives satisfy the compatibility conditions which follows from the Laplace equation.

A numerical experiment is illustrated to support the analysis made.

1. The Dirichlet problem on rectangular parallelepiped

Let $R = \{(x_1, x_2, x_3) : 0 < x_i < a_i, i = 1, 2, 3\}$ be an open rectangular parallelepiped, Γ_j ($j = 1, 2, \dots, 6$) be its faces including the boundaries such that Γ_j for $j = 1, 2, 3$ (for $j = 4, 5, 6$) belongs to the plane $x_j = 0$ (to the plane $x_{j-3} = a_{j-3}$). Let $\Gamma = \cup_{j=1}^6 \Gamma_j$ be the boundary of the parallelepiped, let γ be the union of the edges of R , and let $\Gamma'_j = \Gamma_j \setminus \gamma$ and $\gamma_{\mu\nu} = \Gamma_\mu \cap \Gamma_\nu$. We say that $f \in C^{k,\lambda}(D)$ if f has continuous k -th derivatives on D satisfying a Hölder condition with exponent $\lambda \in (0, 1]$, which is a Lipschitz condition when $\lambda = 1$.

We consider the boundary value problem

$$\Delta u = 0 \text{ on } R, \quad u = \varphi_j \text{ on } \Gamma_j, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \tag{1}$$

where $\Delta \equiv \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$, φ_j are given functions.

Assume that

$$\varphi_j \in C^{7,1}(\Gamma_j), \quad j = 1, 2, \dots, 6, \tag{2}$$

$$\varphi_\mu = \varphi_\nu \text{ on } \gamma_{\mu\nu}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial t_\mu^2} + \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial t_\nu^2} + \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial t_{\mu\nu}^2} = 0 \text{ on } \gamma_{\mu\nu}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^4 \varphi_\mu}{\partial t_\mu^4} + \frac{\partial^4 \varphi_\mu}{\partial t_\mu^2 \partial t_{\mu\nu}^2} = \frac{\partial^4 \varphi_\nu}{\partial t_\nu^4} + \frac{\partial^4 \varphi_\mu}{\partial t_\nu^2 \partial t_{\nu\mu}^2} \text{ on } \gamma_{\mu\nu}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^6 \varphi_\mu}{\partial t_\mu^6} + \frac{\partial^6 \varphi_\mu}{\partial t_\mu^4 \partial t_{\mu\nu}^2} + \frac{\partial^6 \varphi_\mu}{\partial t_\mu^2 \partial t_\nu^2} = \frac{\partial^6 \varphi_\nu}{\partial t_\mu^2 \partial t_\nu^4} + \frac{\partial^6 \varphi_\nu}{\partial t_\nu^6} + \frac{\partial^6 \varphi_\mu}{\partial t_\nu^4 \partial t_{\mu\nu}^2} \text{ on } \gamma_{\mu\nu}, \tag{6}$$



where $1 \leq \mu < \nu \leq 6$, $\nu - \mu \neq 3$, $t_{\mu\nu}$ is an element in $\gamma_{\mu\nu}$, t_μ and t_ν is an element of the normal to $\gamma_{\mu\nu}$ on the face Γ_μ and Γ_ν , respectively.

Let $\sigma(j) = 3\{j/3\} + 1$, where $\{a\}$ is the fractional part of a .

Lemma 1. *In the open parallelepiped R it holds that*

$$\frac{\partial^4 u(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_j^4} = \frac{\partial^4 u(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_{\sigma(j)}^4} + \frac{\partial^4 u(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_{\sigma(j+1)}^4} + 2 \frac{\partial^4 u(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_{\sigma(j)}^2 \partial x_{\sigma(j+1)}^2}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6 u(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_j^6} &= -\frac{\partial^6 u(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_{\sigma(j)}^6} - \frac{\partial^6 u(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_{\sigma(j+1)}^6} - \\ &- 3 \frac{\partial^6 u(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_{\sigma(j)}^4 \partial x_{\sigma(j+1)}^2} - 3 \frac{\partial^6 u(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_{\sigma(j)}^2 \partial x_{\sigma(j+1)}^4}, \end{aligned} \quad (8)$$

where u is the solution to the Dirichlet problem (1).

Proof. The proof directly follows from the Laplace equation. □

On \bar{R} , we define the functions

$$v^k = v^k(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^{2k} u(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_j^{2k}}, \quad k = 2, 3, \quad (9)$$

where u is the solution to the Dirichlet problem (1).

Lemma 2. *The functions (9) coincide with the unique continuous solution on \bar{R} of the boundary value problems*

$$\Delta v^k = 0 \text{ on } R, \quad v^k = \psi_j^k \text{ on } \Gamma_j, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad k = 2, 3, \quad (10)$$

where

$$\begin{aligned} \psi_j^2 = \psi_j^2(x_{\sigma(j)}, x_{\sigma(j+1)}) &= \frac{\partial^4 \varphi_j(x_{\sigma(j)}, x_{\sigma(j+1)})}{\partial x_{\sigma(j)}^4} + \frac{\partial^4 \varphi_j(x_{\sigma(j)}, x_{\sigma(j+1)})}{\partial x_{\sigma(j+1)}^4} + \\ &+ \frac{\partial^4 \varphi_j(x_{\sigma(j)}, x_{\sigma(j+1)})}{\partial x_{\sigma(j)}^2 \partial x_{\sigma(j+1)}^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\psi_j^3 = \psi_j^3(x_{\sigma(j)}, x_{\sigma(j+1)}) = -\frac{\partial^6 \varphi_j(x_{\sigma(j)}, x_{\sigma(j+1)})}{\partial x_{\sigma(j)}^4 \partial x_{\sigma(j+1)}^2} - \frac{\partial^6 \varphi_j(x_{\sigma(j)}, x_{\sigma(j+1)})}{\partial x_{\sigma(j)}^2 \partial x_{\sigma(j+1)}^4}. \quad (12)$$

Proof. On the basis of (2)–(6), Theorem 2.1 in [9] it follows that a solution u of problem (1) belongs to the class $C^{7,\lambda}(\bar{R})$, $0 < \lambda < 1$. Since any order derivatives of a harmonic function are also harmonic, the functions v^k , $k = 2, 3$ satisfy Laplace's equation. The boundary conditions in (10) with (11) and (12) follow from (1), Lemma 1 and (9). Then by Theorem 3.1 in [9] each of the functions v^k , $k = 2, 3$ is the unique continuous solution on \bar{R} of problem (10). □

Lemma 3. *Even order derivatives in the form*

$$\frac{\partial^8 u}{\partial x^{2p} \partial x^{2q} \partial x^{8-2p-2q}}, \quad 0 \leq p \leq 4, \quad 0 \leq q \leq 4 - p, \quad (13)$$

of the solution u of problem (1) are bounded on R .



Proof. Let $\omega = \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^6}$. We have

$$\Delta\omega = 0 \text{ on } R, \quad \omega = \Phi_j \text{ on } \Gamma_j, \quad j = 1, 2, \dots, 6,$$

where

$$\Phi_j = \frac{\partial^6 \varphi_j}{\partial x_1^6}, \quad j = 2, 3, 5, 6, \tag{14}$$

$$\Phi_j = -\frac{\partial^6 \varphi_j}{\partial x_2^6} - 3\frac{\partial^6 \varphi_j}{\partial x_2^4 \partial x_3^2} - 3\frac{\partial^6 \varphi_j}{\partial x_2^2 \partial x_3^4} - \frac{\partial^6 \varphi_j}{\partial x_3^6}, \quad j = 1, 4. \tag{15}$$

From (1)–(6) follows that the boundary functions Φ_j , $j = 1, 2, \dots, 6$ defined by (14) and (15) satisfy the conditions

$$\Phi_j \in C^{1,1}(\Gamma_j), \quad \Phi_\mu = \Phi_\nu \text{ on } \gamma_{\mu\nu}.$$

Then, on the basis of Theorem 4.1 in [9] the pure second-order derivatives of the function ω are bounded in R . Then

$$\begin{aligned} \sup_{(x_1, x_2, x_3) \in R} \left| \frac{\partial^8 u}{\partial x_1^8} \right| &= \sup_{(x_1, x_2, x_3) \in R} \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right| < \infty, \\ \sup_{(x_1, x_2, x_3) \in R} \left| \frac{\partial^8 u}{\partial x_1^6 \partial x_2^2} \right| &= \sup_{(x_1, x_2, x_3) \in R} \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right| < \infty, \\ \sup_{(x_1, x_2, x_3) \in R} \left| \frac{\partial^8 u}{\partial x_1^6 \partial x_3^2} \right| &= \sup_{(x_1, x_2, x_3) \in R} \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_3^2} \right| < \infty. \end{aligned}$$

Similarly, by taking $\omega = \frac{\partial^6 u}{\partial x_2^6}$, and $\omega = \frac{\partial^6 u}{\partial x_3^6}$ the boundedness of the remainder even order derivatives in (13) are proved. \square

Lemma 4. Let u be the solution of problem (1), $\rho(x_1, x_2, x_3)$ be the distance from the current point of R to its boundary and let $\partial/\partial l \equiv \alpha_1 \partial/\partial x_1 + \alpha_2 \partial/\partial x_2 + \alpha_3 \partial/\partial x_3$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ be the l – directional differentiation operator. Then

$$\left| \frac{\partial^{10} u(x_1, x_2, x_3)}{\partial l^{10}} \right| \leq c_0 \rho^{-2}(x_1, x_2, x_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \in R, \tag{16}$$

where c_0 is a constant independent of the direction l of the operator $\partial/\partial l$.

Proof. Since any tenth-order derivative of u can be obtained by two times differentiating some of the derivatives of the form (13), on the basis of Lemma 3 from [10, Chapter 4, Sec. 3] and Lemma 3, we have

$$\max_{0 \leq \mu \leq 10} \max_{0 \leq \nu \leq 10 - \mu} \left| \frac{\partial^{10} u(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^\mu \partial x_2^\nu \partial x_3^{10 - \mu - \nu}} \right| \leq c_1 \rho^{-2}(x_1, x_2, x_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \in R. \tag{17}$$

From (17) follows the inequality (16). \square

2. $O(h^6 \|\ln h\|)$ order accurate approximate solution

Consider a cubic mesh with the mesh size $h > 0$ formed by the planes $x_i = 0, h, 2h, \dots (i = 1, 2, 3)$. Assume that $a_i/h \geq 4$ ($i = 1, 2, 3$) are integers. Let D_h be the set of mesh nodes, $R_h = R \cap D_h$, $\Gamma_{jh} = \Gamma_j \cap D_h$, $\Gamma_h = \Gamma \cap D_h$, $\Gamma'_{jh} = \Gamma'_j \cap D_h$, and $\Gamma'_h = \Gamma'_{1h} \cup \dots \cup \Gamma'_{6h}$. We put $\bar{R}_h = R_h \cup \Gamma_h$, $\bar{R}'_h = R_h \cup \Gamma'_h$. Let $R^k_h \subset R_h$ be the set of nodes of R_h lying at a distance of kh away from the boundary Γ of R . It is clear that $k = 1, 2, \dots, N(h)$, where $N(h) = [\min\{a_1, a_2, a_3\}/(2h)]$.



For the grid functions on R_h , we consider the 6-point difference operator A as

$$Au(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6} \sum_{p=1(1)}^6 u_p,$$

and the 14-point difference operator S as

$$Su(x_1, x_2, x_3) \equiv \frac{1}{56} \left(8 \sum_{p=1(1)}^6 u_p + \sum_{q=7(3)}^{14} u_q \right),$$

where the sum $\sum_{(k)}$ is taken over the grid nodes that are at a distance of $\sqrt{k}h$ from the point (x_1, x_2, x_3) , u_p and u_q are the values of u at the corresponding grid points.

Consider two systems of grid equations

$$v_h = Av_h + g_h, \quad \text{on } R_h, \quad v_h = 0 \quad \text{on } \Gamma'_h, \tag{18}$$

$$\bar{v}_h = A\bar{v}_h + \bar{g}_h, \quad \text{on } R_h, \quad \bar{v}_h = 0 \quad \text{on } \Gamma'_h, \tag{19}$$

where g_h and \bar{g}_h are given functions and $|g_h| \leq \bar{g}_h$ on R_h .

Lemma 5. *The solutions v_h and \bar{v}_h to systems (18) and (19) satisfy the inequality*

$$|v_h| \leq \bar{v}_h \quad \text{on } R_h.$$

Proof. The proof of Lemma 5 follows from the comparison theorem (see [11, Chapter 4]). \square

2.1. The first stage

Let v_h^2 be a solution of the following finite difference problem

$$v_h^2 = Sv_h^2 \text{ on } R_h, \quad v_h^2 = \psi_j \text{ on } \Gamma_{jh}, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \tag{20}$$

where ψ_j , $j = 1, 2, \dots, 6$ are functions defined in (11).

Let c, c_1, c_2, \dots denote positive constants independent of the nearby multiplier, of which some possibly have identical values.

Lemma 6. *The following estimation holds*

$$\max_{(x_1, x_2, x_3) \in \bar{R}_h} |v_h^2 - v^2| \leq c_1 h^4 (|\ln h| + 1),$$

where v^2 is the function (9) when $k = 2$ and v_h^2 is the solution of the system of grid equations (20).

Proof. By Lemma 2,

$$\Delta v^2 = 0 \text{ on } R, \quad v = \psi_j^2 \text{ on } \Gamma_j, \quad j = 1, 2, \dots, 6,$$

where functions ψ_j^2 defined by (11).

For the error function

$$\varepsilon_h^2 = v_h^2 - v^2, \tag{21}$$

we have

$$\varepsilon_h^2 = S\varepsilon_h^2 + (Sv^2 - v^2) \text{ on } R_h, \quad \varepsilon_h^2 = 0 \text{ on } \Gamma_h.$$

Let ε_h^2 be represented as

$$\varepsilon_h^2 = \varepsilon_h^{2,1} + \varepsilon_h^{2,2} + \dots + \varepsilon_h^{2,N(h)}, \tag{22}$$



where $\varepsilon_h^{2,k}$, $1 \leq k \leq N(h)$ is the solution of system

$$\varepsilon_h^{2,k} = S\varepsilon_h^{2,k} + \xi^k \text{ on } R_h, \quad \varepsilon_h^{2,k} = 0 \text{ on } \Gamma_h,$$

with

$$\xi^k = \begin{cases} Sv^2 - v^2 & \text{on } R_h^k, \\ 0 & \text{on } R_h \setminus R_h^k. \end{cases}$$

By virtue of Lemma 4 in [12], we have

$$\max_{(x_1, x_2, x_3) \in R_h} |\varepsilon_h^{2,k}| \leq 5k \max_{(x_1, x_2, x_3) \in R_h^k} |Sv^2 - v^2|, \quad 1 \leq k \leq N(h). \tag{23}$$

To estimate $Sv^2 - v^2$ on R_h^k , for $k = 1, 2, \dots, N(h)$, first we note that, from (9) and Lemma 4 follows

$$\left| \frac{\partial^6 v^2(x_1, x_2, x_3)}{\partial l^6} \right| \leq c_2 \left| \frac{\partial^{10} u(x_1, x_2, x_3)}{\partial l^{10}} \right| \leq c_3 \rho^{-2}(x_1, x_2, x_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \in R. \tag{24}$$

Let $x_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$ be a node of the grid $R_h^{k_0} \subset R_h$, where k_0 be an arbitrary integer number $2 \leq k_0 \leq N(h)$ and let $r_6(x_1, x_2, x_3; x_0)$ be the Lagrange remainder corresponding to this point in Taylor formula

$$v^2(x_1, x_2, x_3) = p_5(x_1, x_2, x_3; x_0) + r_6(x_1, x_2, x_3; x_0), \tag{25}$$

where

$$Sp_5(x_{10}, x_{20}, x_{30}; x_0) = v^2(x_{10}, x_{20}, x_{30}). \tag{26}$$

Then on the basis of (24), we have

$$Sr_6(x_{10}, x_{20}, x_{30}; x_0) \leq c_4 \frac{h^6}{(k_0 h)^2} = c_4 \frac{h^4}{k_0^2}. \tag{27}$$

From (25)–(27), we obtain

$$\max_{(x_1, x_2, x_3) \in R_h^k} |Sv^2 - v^2| \leq c_4 \frac{h^4}{k^2}, \quad 2 \leq k \leq N(h). \tag{28}$$

Let $x_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$ be a node of the grid $R_h^1 \subset R_h$, and the nodes of operator S lie at the distance h or $\sqrt{3}h$ from this point. We estimate r_6 at the nodes of the operator S . To do this we take a node $(x_{10} - h, x_{20} - h, x_{30} + h)$ and consider the continuous function

$$\tilde{v}^2(s) = v^2 \left(x_{10} - \frac{s}{\sqrt{3}}, x_{20} - \frac{s}{\sqrt{3}}, x_{30} + \frac{s}{\sqrt{3}} \right), \quad -\sqrt{3}h \leq s \leq \sqrt{3}h, \tag{29}$$

of one variable s . By estimation (24), we have

$$\left| \frac{d^6}{ds^6} \tilde{v}^2(s) \right| \leq c_5 \left(\sqrt{3}h - s \right)^{-2}, \quad 0 \leq s < \sqrt{3}h. \tag{30}$$

The function

$$\tilde{r}_6 = r_6 \left(x_{10} - \frac{s}{\sqrt{3}}, x_{20} - \frac{s}{\sqrt{3}}, x_{30} + \frac{s}{\sqrt{3}}; x_0 \right)$$

is the remainder term of the representation of the function (29) around the point $s = 0$ by Taylor's formula with the fifth order polynomial.



By using integral form of the remainder term and (30), we obtain (see [8])

$$\left| r_6 \left(x_{10} - \frac{s}{\sqrt{3}}, x_{20} - \frac{s}{\sqrt{3}}, x_{30} + \frac{s}{\sqrt{3}}; x_0 \right) \right| \leq c_6 h^4. \tag{31}$$

For the remaining nodes of the operator S the estimation (31) can be obtained analogically. Since the maximum norm of the operator S is equal to one, we have

$$|Sr_6(x_{10}, x_{20}, x_{30}; x_0)| \leq c_7 h^4. \tag{32}$$

By (25), (26) and (32), we obtain

$$\max_{(x_1, x_2, x_3) \in R_h^1} |Sv^2 - v^2| \leq c_8 h^4. \tag{33}$$

On the basis of (21)–(23), (28) and (33), we have

$$\max_{(x_1, x_2, x_3) \in R_h} |v_h^2 - v^2| \leq c_9 h^4 \sum_{k=1}^{N(h)} \frac{1}{k} \leq c_1 h^4 (|\ln h| + 1).$$

□

2.2. The second stage

Let v_h^3 be a solution to the following finite difference problem

$$v_h^3 = Av_h^3 \text{ on } R_h, \quad v_h^3 = \psi_j^3 \text{ on } \Gamma'_{jh}, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \tag{34}$$

where $\psi_j^3, j = 1, 2, \dots, 6$ are functions defined by (12).

Lemma 7. *On R_h , it holds that,*

$$\max_{(x_1, x_2, x_3) \in \bar{R}'_h} |v_h^3 - v^3| \leq c_2 h^2 (|\ln h| + 1), \tag{35}$$

where v^3 is the function (9) for $k = 3$, v_h^3 is a solution to system (34).

Proof. By Lemma 2, we have

$$\Delta v^3 = 0 \text{ on } R, \quad v^3 = \psi_j^3 \text{ on } \Gamma_j, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \tag{36}$$

where functions ψ_j^3 define boundary values in (12), and from (2)–(6) it follows that

$$\psi_j^3 \in C^{1,1}(\Gamma_j), \quad 0 < \lambda < 1, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \tag{37}$$

$$\psi_\mu^3 = \psi_\nu^3 \text{ on } \gamma_{\mu\nu}, \tag{38}$$

on the basis of (36)–(38) that satisfy the conditions of Theorem 5.1 in [9] which follows estimation (35). □

2.3. The third stage

Let v_h^2 and v_h^3 be the solution of the difference problems (20) and (34) respectively. We approximate the solution of the given Dirichlet problem (1) on the grid \bar{R}_h as a solution u_h of the following difference problem

$$u_h = Au_h - \frac{h^4}{36} v_h^2 - \frac{h^6}{720} v_h^3 \text{ on } R_h, \tag{39}$$

$$u_h = \varphi_j \text{ on } \Gamma'_{jh}, \quad j = 1, 2, \dots, 6. \tag{40}$$

Theorem 1. Under the conditions (2)–(6), the estimation

$$\max_{(x_1, x_2, x_3) \in \overline{R}'_h} |u_h - u| \leq c_3 h^6 (|\ln h| + 1), \tag{41}$$

is valid, where u is the solution of the Dirichlet problem (1) u_h is the solution of system (39), (40).

Proof. Under the smoothness properties of the boundary values specified in (2)–(6), the solution u of the Dirichlet problem (1) has eighth-order partial derivatives that are continuous on R , and by using Taylor’s formula with the remainder term in the Lagrange form for each $(x_1, x_2, x_3) \in R_h$, we obtain

$$u(x_1, x_2, x_3) = Au(x_1, x_2, x_3) - \frac{h^4}{36}v^2 - \frac{h^6}{720}v^3 - r(x_1, x_2, x_3), \tag{42}$$

where v^k , $k = 2, 3$ are the functions defined by (9)

$$\max_{(x_1, x_2, x_3) \in R} |r(x_1, x_2, x_3)| \leq c_4 h^8. \tag{43}$$

We put

$$\varepsilon_h = u_h - u \text{ on } \overline{R}'_h,$$

where u_h is the solution of the finite difference problem (39), (40).

From (39) and (42), and taking into account that $u_h = u = \varphi_j$ on Γ_{jh} , we obtain the following system of difference equations for the error ε_h :

$$\varepsilon_h = A\varepsilon_h + \frac{h^4}{36}(v^2 - v_h^2) + \frac{h^6}{720}(v^3 - v_h^3) + r \text{ on } R_h, \tag{44}$$

$$\varepsilon_h = 0 \text{ on } \Gamma'_h. \tag{45}$$

On the basis of Lemma 6, Lemma 7, and the estimation (43), we obtain

$$\left| \frac{h^4}{36}(v^2 - v_h^2) + \frac{h^6}{720}(v^3 - v_h^3) + r \right| \leq c_5 h^8 (|\ln h| + 1),$$

where $c_5 = \max \{c_1/36, c_2/720, c_4\}$.

Furthermore, from Lemma 5 it follows that for the solution ε_h of problem (44), (45) the following estimation is true

$$|\varepsilon_h| \leq \bar{\varepsilon}_h, \tag{46}$$

where $\bar{\varepsilon}_h$ is a solution of the problem

$$\bar{\varepsilon}_h = A\bar{\varepsilon}_h + c_5 h^8 (|\ln h| + 1) \text{ on } R_h, \quad \bar{\varepsilon}_h \geq 0 \text{ on } \Gamma'_h. \tag{47}$$

It is easy to check that the function $\bar{\varepsilon}_h = c_5 h^6 (|\ln h| + 1)(l^2 - r^2)$, where $l = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, and $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ is a solution of problem (47). Then from (46), follows (41). \square

3. Numerical results

Let $R = \{(x_1, x_2, x_3) : 0 < x_i < 1, i = 1, 2, 3\}$, and let $\Gamma_j, j = 1, 2, \dots, 6$ be its faces.

$$\Delta u = 0 \text{ on } R, \quad u = \varphi(x_1, x_2, x_3) \text{ on } \Gamma, \tag{48}$$

where

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = e^{3x_1} \cosh(4x_2) \cos(5x_3) + (x_1^8 - 28x_1^6 x_2^2 + 70x_1^4 x_2^4 - 28x_1^2 x_2^6 + x_2^8) \tan^{-1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right) +$$



$$+ (8x_1^7x_2 - 56x_1^5x_2^3 + 56x_1^3x_2^5 - 8x_1x_2^7) \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

is the exact solution of problem (48) and $\varphi \in C^{7,1}(\Gamma)$.

We use the following notations:

$$\|U_h - U\|_{\Omega_h} = \max_{\Omega_h} |U_h - U|, \quad E_m = \frac{\|U_h - U_{2^{-m}}\|_{\Omega_h}}{\|U_h - U_{2^{-(m+1)}}\|_{\Omega_h}},$$

where U is the trace of the exact solution of the continuous problem on Ω_h , and U_h is its approximate value obtained by the proposed method.

The numerical results given in Table show that the maximum error of the approximate solution obtained by the proposed method absolute values convergent of order $O(h^6 \ln h)$, since $2^6 > E_n > 2^6 n / (n + 1)$.

Table. Numerical results for Problem (48)

$h = 2^{-n}$	$\max_{\Gamma_h} u_{2^{-n}} - u $	E_n	$2^6 n / (n + 1)$
2^{-3}	1.537D - 07	48.394	48.000
2^{-4}	3.176D - 09	60.231	51.200
2^{-5}	5.273D - 11	62.625	53.333
2^{-6}	8.420D - 13	63.071	54.857
2^{-7}	1.335D - 14	-	-

Conclusion

A new three-stage difference method with an accuracy of order $O(h^6(|\ln h| + 1))$, where h is mesh size, is proposed and justified by using one fourth-order and two second-order schemes for the approximate solution of the 3D Laplace’s equation. It is assumed that the boundary functions on the faces are from $C^{7,1}$, and on the edges, their second, fourth, and sixth derivatives satisfy the compatibility conditions, which follows from the Laplace equation.

The idea of this method can be used to design a new scheme with an order of convergence $O(h^8(|\ln h| + 1))$, when $\varphi_j \in C^{9,1}(\Gamma_j)$, $j = 1, \dots, 6$.

Moreover, from the estimation (41) the multiplier $|\ln h|$ can be removed by replacing in (2) the condition $\varphi_j \in C^{7,1}(\Gamma_j)$ with the condition $\varphi_j \in C^{8,\lambda}(\Gamma_j)$, $0 < \lambda < 1$.

The proposed method can be applied when parallelepiped is used as one of the covering figures in some version of domain decomposition methods [13], in the composite grids method for problems in polyhedra and a prism with polygonal base (see [14, 15]). Furthermore, this method can be used to highly approximate the derivatives of the unknown solution of Laplace’s equation (see [16–19]).

References

1. Tarjan R. E. Graph theory and Gaussian elimination. In: Bunch J. R., Rose D. J. (eds.) *Sparse Matrix Computations*. Academic Press, 1976, pp. 3–22. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-141050-6.50006-4>
2. Fox L. Some improvements in the use of relaxation methods for the solution of ordinary and partial differential equations. *Proceedings of the Royal Society A*, 1947, vol. 190, pp. 31–59. <https://doi.org/10.1098/rspa.1947.0060>
3. Woods L. C. Improvements to the accuracy of arithmetical solutions to certain two-dimensional field problems. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1950, vol. 3, iss. 3, pp. 349–363. <https://doi.org/10.1093/qjmam/3.3.349>
4. Volkov E. A. Solving the Dirichlet problem by a method of corrections with higher order differences. I. *Differentsial’nye Uravneniya*, 1965, vol. 1, iss. 7, pp. 946–960 (in Russian).
5. Volkov E. A. Solving the Dirichlet problem by a method of corrections with higher order differences. II. *Differentsial’nye Uravneniya*, 1965, vol. 1, iss. 8, pp. 1070–1084 (in Russian).
6. Berikelashvili G. K., Midodashvili B. G. Compatible convergence estimates in the method of refinement by higher-order differences. *Differential Equations*, 2015, vol. 51, iss. 1, pp. 107–115. <https://doi.org/10.1134/S0012266115010103>



7. Volkov E. A. A two-stage difference method for solving the Dirichlet problem for the Laplace equation on a rectangular parallelepiped. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2009, vol. 49, iss. 3, pp. 496–501. <https://doi.org/10.1134/S0965542509030117>
8. Volkov E. A., Dosiyevev A. A. A highly accurate homogeneous scheme for solving the Laplace equation on a rectangular parallelepiped with boundary values in C^{k1} . *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, vol. 52, iss. 6, pp. 879–886. <https://doi.org/10.1134/S0965542512060152>
9. Volkov E. A. On differential properties of solutions of the Laplace and Poisson equations on a parallelepiped and efficient error estimates of the method of nets. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1969, vol. 105, pp. 54–78.
10. Mikhailov V. P. *Partial Differential Equations*. Moscow, Mir, 1978. 396 p. (in Russian).
11. Samarskii A. A. *The Theory of Difference Schemes*. Marcel, Dekker Inc., 2001. 761 p.
12. Volkov E. A. Application of a 14-point averaging operator in the grid method. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, vol. 50, iss. 12, pp. 2023–2032. <https://doi.org/10.1134/S0965542510120055>
13. Smith B., Bjorstad P., Gropp W. *Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 1996. 238 p.
14. Volkov E. A. On the smoothness of solutions to the Dirichlet problem and the method of composite grids on polyhedra. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1981, vol. 150, pp. 71–103.
15. Volkov E. A. A method of composite grids on a prism with an arbitrary polygonal base. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2003, vol. 243, pp. 1–23. <https://doi.org/10.1046/j.1468-2982.2003.00539.x>
16. Volkov E. A. On the grid method for approximating the derivatives of the solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation on the rectangular parallelepiped. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2004, vol. 19, iss. 3, pp. 269–278. <https://doi.org/10.1515/1569398041126500>
17. Dosiyevev A. A. The high accurate block-grid method for solving Laplace's boundary value problem with singularities. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2004, vol. 42, iss. 1, pp. 153–178. <https://doi.org/10.1137/S0036142900382715>
18. Dosiyevev A. A. The block-grid method for the approximation of the pure second order derivatives for the solution of Laplace's equation on a staircase polygon. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2014, vol. 259, pt. A, pp. 14–23. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2013.03.022>
19. Dosiyevev A. A., Sarikaya H. A highly accurate difference method for approximating the solution and its first derivatives of the Dirichlet problem for Laplace's equation on a rectangle. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2021, vol. 18, art. 252. <https://doi.org/10.1007/s00009-021-01900-8>

Поступила в редакцию / Received 23.03.2023

Принята к публикации / Accepted 29.08.2023

Опубликована / Published 31.05.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 173–183

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 173–183

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-173-183>, EDN: WYDLVW

Article

New integral inequalities in the class of functions (h, m) -convex

J. E. Nápoles^{1,2}, P. M. Guzmán^{1,3}, B. Bayraktar⁴✉

¹National University of the Northeast (UNNE), FaCENA, Ave. Libertad 5450, Corrientes 3400, Argentina

²Universidad Tecnológica Nacional (UTN), French 414, Resistencia, Chaco 3500, Argentina

³National University of the Northeast (UNNE), Facultad de Ciencias Agrarias, Juan Bautista Cabral 2131, Corrientes 3400, Argentina

⁴Bursa Uludag University, Faculty of Education Gorukle Campus, Bursa 16059, Turkey

Juan E. Nápoles, jnapoles@exa.unne.edu.ar, <https://orcid.org/0000-0003-2470-1090>

Paulo M. Guzmán, paulomatiassguzman@hotmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-7490-5668>

Bahtiyar Bayraktar, bbayraktar@uludag.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0001-7594-8291>

Abstract. In this article, we have defined new weighted integral operators. We formulated a lemma in which we obtained a generalized identity through these integral operators. Using this identity, we obtain some new generalized Simpson's type inequalities for (h, m) -convex functions. These results we obtained using the convexity property, the classical Hölder inequality, and its other form, the power mean inequality. The generality of our results lies in two fundamental points: on the one hand, the integral operator used and, on the other, the notion of convexity. The first, because the “weight” allows us to encompass many known integral operators (including the classic Riemann and Riemann – Liouville), and the second, because, under an adequate selection of the parameters, our notion of convexity contains several known notions of convexity. This allows us to show that many of the results reported in the literature are particular cases of ours.

Keywords: convex functions, (m, h) -convex functions, Simpson's type inequality, Hermite – Hadamard inequality, Hölder inequality, weighted integrals

For citation: Nápoles J. E., Guzmán P. M., Bayraktar B. New integral inequalities in the class of functions (h, m) -convex. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 173–183. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-173-183>, EDN: WYDLVW

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 517.518.86:517.218.244:517.927.2

Новые интегральные неравенства в классе (h, m) -выпуклых функций

Х. Э. Наполес^{1,2}, П. М. Гузман^{1,3}, Б. Байрактар⁴✉

¹Северо-восточный национальный университет, факультет точных и естественных наук и геодезии, Аргентина 3400, г. Корриентес, просп. Либертад, 5450

²Национальный технологический университет, региональный факультет, Аргентина, 3500, г. Чако, Ресистенсия, Французский 414

³Северо-восточный национальный университет, факультет сельскохозяйственных наук, Аргентина 3400, г. Корриентес, Хуан Баутиста Кабрал 2131

⁴Университет Бурса Улудаг, педагогический факультет, Турция, 16059, г. Бурса, Кампус Горукле



Наполес Хуан Эдуардо, jnapoles@exa.unne.edu.ar, <https://orcid.org/0000-0003-2470-1090>

Гузман Пауло Матиас, paulomatiassguzman@hotmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-7490-5668>

Байрактар Бахтияр, bbayraktar@uludag.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0001-7594-8291>

Аннотация. В статье определены новые взвешенные интегральные операторы. Сформулирована лемма, в которой получено обобщенное тождество через эти интегральные операторы. С использованием данного тождества получены некоторые новые обобщенные неравенства типа Симпсона для (h, m) -выпуклых функций. Эти результаты получены на основе свойства выпуклости, классического неравенства Гельдера и его другой формы — неравенства степенного среднего. Общность результатов статьи заключается в двух основных моментах. Первый — используемый интегральный оператор, так как «вес» позволяет охватить многие известные интегральные операторы, в том числе классические Римана и Римана – Лиувилля. Второй момент — используемое понятие выпуклости, при адекватном выборе параметров оно содержит несколько уже известных понятий выпуклости. Это позволяет сделать заключение, что многие известные в литературе результаты являются частными случаями рассматриваемых в статье.

Ключевые слова: выпуклые функции, (m, h) -выпуклые функции, неравенство типа Симпсона, неравенство Эрмита – Адамара, неравенство Гельдера, взвешенные интегралы

Для цитирования: *Nápoles J. E., Guzmán P. M., Bayraktar B.* New integral inequalities in the class of functions (h, m) -convex [Наполес Х. Э., Гузман П. М., Байрактар Б. Новые интегральные неравенства в классе (h, m) -выпуклых функций] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 173–183. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-173-183>, EDN: WYDLVW

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

The concept of convexity for a number of scientific disciplines related to mathematics (Optimization Theory, Numerical Analysis, Computational Mathematics, etc.) is the main concept since it is closely related to estimating the mean value of a function given on an interval. Today in the literature there are many different classes of convexity of a function that extend this concept. The Definition of convexity is given in the literature as follows:

Definition 1. The function $\phi : [v^*, \vartheta^*] \rightarrow \mathbb{R}$, is said to be convex if we have

$$\phi(\varsigma y + (1 - \varsigma)x) \leq \varsigma\phi(y) + (1 - \varsigma)\phi(x)$$

$\forall x, y \in [v^*, \vartheta^*]$ and $\varsigma \in [0, 1]$.

In [1], a fairly wide range of convexity classes and their relations are given.

In the literature, the well-known Simpson-type inequality is presented as follows.

If $\phi \in C^4(v^*, \vartheta^*)$ and $\|\phi^{(4)}\|_\infty := \sup_{x \in (v^*, \vartheta^*)} |\phi^{(4)}(x)| < \infty$, then

$$\left| \frac{\vartheta^* - v^*}{3} \left[\frac{\phi(v^*) + \phi(\vartheta^*)}{2} + 2\phi\left(\frac{v^* + \vartheta^*}{2}\right) \right] - \int_{v^*}^{\vartheta^*} \phi(x) dx \right| \leq \frac{(\vartheta^* - v^*)^5}{2880} \|\phi^{(4)}\|_\infty. \quad (1)$$

A number of recent studies have been devoted to refinements and generalizations of Simpson's type inequalities for various classes of convex functions. For example, for the quasi-convex functions Alomari and Hussain in [2] and Set et al in [3] in terms of differentiable functions obtained some Simpson's type inequalities. Bayraktar in [4], presented Hadamard and Simpson's type parametric integral inequalities for concave and r -convex functions in terms of special means. New generalized integral inequalities of the Simpson and Hadamard type for convex functions, or functions satisfying the Lipschitz or Lagrange conditions, were obtained by the



authors in [5]. In [6] Dragomir et al and Liu in [7] presented Simpson’s type inequalities for the continuously differentiable functions and their application. Hussain and Qaisar in [8] established some new inequalities of Simpson’s type for functions whose third derivatives are prequasiinvex and preinvex. In [9] Park presented generalized Simpson’s type and Hadamard type integral inequalities for functions whose q -th powers of second derivatives are decreasing (α, m) -geometrically convex. In [10–13] authors established new inequalities of Simpson’s type based on s -convexity. In [14–16] authors established new inequalities of Simpson’s type for extended (s, m) -convex and generalized (s, m) -preinvex functions. Extended Simpson-type inequalities for the class of differentiable concave functions related to the Hadamard inequality were obtained by Hsu et al in [17]. Simpson’s type double integral inequalities and applications for numerical integration were given by Ujević in [18].

In [19–21] we presented the following Definitions.

Definition 2. Let $h : [0, 1] \rightarrow (0, 1]$ and $\phi : X = [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$. If inequality

$$\phi(\varsigma\xi + m(1 - \varsigma)\zeta) \leq h^s(\varsigma)\phi(\xi) + m(1 - h^s(\varsigma))\phi(\zeta) \tag{2}$$

is fulfilled for all $\xi, \zeta \in X$ and $\varsigma \in [0, 1]$, where $0 \leq m \leq 1, s \in (0, 1]$. Then the function ϕ will be called the (h, m) -convex modification of the first type on X .

Definition 3. Let $h : [0, 1] \rightarrow (0, 1]$ and $\phi : X = [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$. If inequality

$$\phi(\varsigma\xi + m(1 - \varsigma)\zeta) \leq h^s(\varsigma)\phi(\xi) + m(1 - h(\varsigma))^s\phi(\zeta) \tag{3}$$

is fulfilled for all $\xi, \zeta \in X$ and $\varsigma \in [0, 1]$, where $s \in [-1, 1], 0 \leq m \leq 1$. Then the function ϕ will be called the (h, m) -convex modification of the second type on X .

Remark 1. From the Definitions above, the sets (h, m) -convex modified functions of the first and second types characterized by the triple $(h(\varsigma), m, s)$ are denoted by $N_{h,m}^{s,1}[v^*, \vartheta^*]$ and $N_{h,m}^{s,2}[v^*, \vartheta^*]$, respectively. In [20, 21] you can see the convex classes obtained from the special cases of this triple.

Remark 2. In the different notions of convexity, if the direction of the inequality changes, it will be called concave.

In our work, we use the Euler Gamma functions Γ [22] and Γ_κ [23]:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^\infty \varsigma^{z-1} e^{-\varsigma} d\varsigma, \quad \text{Re}(z) > 0, \\ \Gamma_\kappa(z) &= \int_0^\infty \varsigma^{z-1} e^{-\varsigma^\kappa/\kappa} d\varsigma, \quad \kappa > 0. \end{aligned}$$

Here $\Gamma_\kappa(z) = (\kappa)^{\frac{z}{\kappa}-1} \Gamma\left(\frac{z}{\kappa}\right)$ and $\Gamma_\kappa(z + \kappa) = z\Gamma_\kappa(z)$, and $\lim_{\kappa \rightarrow 1} \Gamma_\kappa(z) = \Gamma(z)$.

To facilitate understanding of the subject of research, we first give the Definition of the Riemann – Liouville fractional integral: (with $0 \leq v^* < \varsigma < \vartheta^* \leq \infty$).

Definition 4. Let $\phi \in L_1[v^*, \vartheta^*]$. Then the Riemann – Liouville fractional integrals of order $\alpha \in \mathbb{C}, \text{Re}(\alpha) > 0$ are defined by (right and left respectively):

$${}^\alpha I_{v^*} \phi(\sigma) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{v^*}^\sigma \phi(\varsigma)(\sigma - \varsigma)^{\alpha-1} d\varsigma, \quad \sigma > v^* \tag{4}$$

and

$${}^\alpha I_{\vartheta^*} \phi(\sigma) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\sigma^{\vartheta^*} \phi(\varsigma)(\varsigma - \sigma)^{\alpha-1} d\varsigma, \quad \sigma < \vartheta^*. \tag{5}$$



Next we present the weighted integral operators, which will be the basis of our work.

Definition 5. Let $\phi \in L([v^*, \vartheta^*])$ and let function $w \in C[0, 1]$, and $w \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, with a piecewise continuous derivative on $[0, 1]$. Then

$$J_{v^*}^w \phi(\sigma) = \int_{v^*}^{\sigma} \phi(\varsigma) w' \left(\frac{\sigma - \varsigma}{\sigma - v^*} \right) d\varsigma$$

and

$$J_{\vartheta^*}^w \phi(\sigma) = \int_{\sigma}^{\vartheta^*} \phi(\varsigma) w' \left(\frac{\varsigma - \sigma}{\vartheta^* - \sigma} \right) d\varsigma$$

are defined respectively as right and left weighted fractional integrals with $v^* < \sigma \leq \vartheta^*$.

Remark 3. Consider some particular cases of Definition 5:

- 1) putting $w'(\varsigma) \equiv 1$, we get the ordinary Riemann integral;
- 2) if $w'(\varsigma) = \frac{(\sigma - v^*)^{\alpha-1} \varsigma^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, then we obtain (4), and (5) can be obtained similarly;
- 3) with convenient kernel choices w' we can get:
 - the k-Riemann – Liouville fractional integrals, from [24];
 - the fractional integral (right-sided) from [25], of a function ϕ with respect to another function g on $[v^*, \vartheta^*]$;
 - the right and left integral operator from [26];
 - the right and left sided generalized fractional integral operators from [27];
 - the integral operators from [28] and [29], can also be obtained from above Definition by imposing similar conditions to w' .

Of course, there are other known integral operators, fractional or not, that can be obtained as particular cases of the previous one, but we leave it to interested readers.

The purpose of this work is to obtain new Simpson-type inequalities through the weighted integrals of Definition 5 and to show that these results generalize a number of well-known results from the literature, including those for Hadamard-type inequalities.

1. Results

Our results are obtained using the following lemma:

Lemma 1. Let $\phi : [v^*, \vartheta^*] \rightarrow \mathbb{R}$ and $\phi \in C[v^*, \vartheta^*]$ with $v^*, \vartheta^* \in \mathbb{R}$ and $\vartheta^* > 0$. If $\phi \in L^1([v^*, \vartheta^*])$, then the equality

$$\begin{aligned} & \frac{\varrho + 2}{\vartheta^* - v^*} \left\{ w(1) (\phi(\vartheta^*) + \phi(v^*)) - w(0) \left[\phi \left(\frac{\varrho \vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho + 2} \right) + \phi \left(\frac{\varrho v^* + v^* + \vartheta^*}{\varrho + 2} \right) \right] \right\} - \\ & \quad - \left(\frac{\varrho + 2}{\vartheta^* - v^*} \right)^2 \left[J_{\frac{\varrho \vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho + 2}+}^w \phi(\vartheta^*) + J_{\frac{\varrho v^* + v^* + \vartheta^*}{\varrho + 2}-}^w \phi(v^*) \right] = \\ & \quad = \int_0^1 w(\varsigma) \left[\phi' \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} \vartheta^* + \frac{1 - \varsigma}{\varrho + 2} v^* \right) - \phi' \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} v^* + \frac{1 - \varsigma}{\varrho + 2} \vartheta^* \right) \right] d\varsigma \end{aligned}$$

is true for every $\varrho \in \mathbb{N}$.

Proof. By properties we have

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 w(\varsigma) \left[\phi' \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} \vartheta^* + \frac{1 - \varsigma}{\varrho + 2} v^* \right) - \phi' \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} v^* + \frac{1 - \varsigma}{\varrho + 2} \vartheta^* \right) \right] d\varsigma = \\ &= \int_0^1 w(\varsigma) \phi' \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} \vartheta^* + \frac{1 - \varsigma}{\varrho + 2} v^* \right) d\varsigma - \int_0^1 w(\varsigma) \phi' \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} v^* + \frac{1 - \varsigma}{\varrho + 2} \vartheta^* \right) d\varsigma = I_1 - I_2. \end{aligned}$$



Integrating by parts and changing the variable in I_1 , we state that

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 w(\varsigma) \phi' \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} \vartheta^* + \frac{1 - \varsigma}{\varrho + 2} v^* \right) d\varsigma = \\
 &= \frac{\varrho + 2}{\vartheta^* - v^*} \left[w(1) \phi(\vartheta^*) - w(0) \phi \left(\frac{\varrho \vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho + 2} \right) \right] - \\
 &\quad - \left(\frac{\varrho + 2}{\vartheta^* - v^*} \right)^2 \int_{\frac{\varrho \vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho + 2}}^{\vartheta^*} w' \left[\frac{z - \frac{\varrho \vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho + 2}}{\frac{\vartheta^* - v^*}{\varrho + 2}} \right] \phi(z) dz.
 \end{aligned}$$

Since $\frac{\vartheta^* - v^*}{\varrho + 2} = \vartheta^* - \frac{\varrho \vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho + 2}$, finally for I_1 we get

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 w(\varsigma) \phi' \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} \vartheta^* + \frac{1 - \varsigma}{\varrho + 2} v^* \right) d\varsigma = \\
 &= \frac{\varrho + 2}{\vartheta^* - v^*} \left[w(1) \phi(\vartheta^*) - w(0) \phi \left(\frac{\varrho \vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho + 2} \right) \right] - \\
 &\quad - \left(\frac{\varrho + 2}{\vartheta^* - v^*} \right)^2 \int_{\frac{\varrho \vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho + 2}}^{\vartheta^*} w' \left[\frac{z - \frac{\varrho \vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho + 2}}{\frac{\vartheta^* - v^*}{\varrho + 2}} \right] \phi(z) dz = \\
 &= \frac{\varrho + 2}{\vartheta^* - v^*} \left[w(1) \phi(\vartheta^*) - w(0) \phi \left(\frac{\varrho \vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho + 2} \right) \right] - \left(\frac{\varrho + 2}{\vartheta^* - v^*} \right)^2 J_{\frac{\varrho \vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho + 2}^+}^w \phi(\vartheta^*). \tag{6}
 \end{aligned}$$

Similarly for I_2 , we obtain

$$I_2 = \frac{\varrho + 2}{a - b} \left[w(1) \phi(v^*) - w(0) \phi \left(\frac{\varrho v^* + v^* + \vartheta^*}{\varrho + 2} \right) \right] + \left(\frac{\varrho + 2}{\vartheta^* - v^*} \right)^2 J_{\frac{\varrho v^* + v^* + \vartheta^*}{\varrho + 2}^-}^w \phi(v^*). \tag{7}$$

Subtracting (7) from (6) we obtain the desired equality. This completes the proof. \square

Remark 4. Consider in the previous result $\varrho = 0$, $w(\varsigma) = \frac{\varsigma^\alpha}{2} - \frac{1}{5}$, then Lemma 2.1 of [16] is easily obtained.

Remark 5. Analogously, if $\varrho = 0$, and $w(\varsigma) = \frac{\varsigma^\alpha}{2} - \frac{1}{3}$, then Lemma 1 of [11] is easily obtained.

Remark 6. If we choose $\varrho = 0$, and $w(\varsigma) = \frac{\varsigma}{2} - \frac{1}{3}$, then we get Lemma 1 from [10].

Remark 7. In the case $\varrho = 0$, $w(\varsigma) = \varsigma$, we obtain Lemma 1 from [5]

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\vartheta^* - v^*} \int_{v^*}^{\vartheta^*} \phi(z) dz = \\
 &= \frac{\vartheta^* - v^*}{4} \int_0^1 \varsigma \left[\phi' \left(\frac{1 - \varsigma}{2} v^* + \frac{1 + \varsigma}{2} \vartheta^* \right) - \phi' \left(\frac{1 + \varsigma}{2} v^* + \frac{1 - \varsigma}{2} \vartheta^* \right) \right] d\varsigma.
 \end{aligned}$$

Remark 8. Multiplying both sides of (6) and (7) by $\left(\frac{\vartheta^* - v^*}{\varrho + 2} \right)^2$, we get respectively

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\vartheta^* - v^*}{\varrho + 2} \right)^2 I_1 &= \frac{\vartheta^* - v^*}{\varrho + 2} \left[w(1) \phi(\vartheta^*) - w(0) \phi \left(\frac{\varrho \vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho + 2} \right) \right] - J_{\frac{\varrho \vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho + 2}^+}^w \phi(\vartheta^*) = \\
 &= \left(\frac{\vartheta^* - v^*}{\varrho + 2} \right)^2 \int_0^1 w(\varsigma) \phi' \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} \vartheta^* + \frac{1 - \varsigma}{\varrho + 2} v^* \right) d\varsigma, \\
 \left(\frac{\vartheta^* - v^*}{\varrho + 2} \right)^2 I_2 &= \frac{\vartheta^* - v^*}{\varrho + 2} \left[w(1) \phi(v^*) - w(0) \phi \left(\frac{\varrho v^* + v^* + \vartheta^*}{\varrho + 2} \right) \right] - J_{\frac{\varrho v^* + v^* + \vartheta^*}{\varrho + 2}^-}^w \phi(v^*) = \\
 &= \left(\frac{\vartheta^* - v^*}{\varrho + 2} \right)^2 \int_0^1 w(\varsigma) \phi' \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} v^* + \frac{1 - \varsigma}{\varrho + 2} \vartheta^* \right) d\varsigma.
 \end{aligned}$$

Let us call

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \left(\frac{\vartheta^* - v^*}{\varrho + 2}\right)^2 I_1 + \left(\frac{\vartheta^* - v^*}{\varrho + 2}\right)^2 I_2 = \\ &= \frac{\vartheta^* - v^*}{\varrho + 2} \left\{ w(1) (\phi(\vartheta^*) + \phi(v^*)) - w(0) \left[\phi\left(\frac{\varrho\vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho + 2}\right) + \phi\left(\frac{\varrho v^* + v^* + \vartheta^*}{\varrho + 2}\right) \right] \right\} - \\ &\quad - \left[J_{\frac{\varrho\vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho + 2}}^w \phi(\vartheta^*) + J_{\frac{\varrho v^* + v^* + \vartheta^*}{\varrho + 2}}^w \phi(v^*) \right]. \end{aligned}$$

Theorem 1. Let $\phi : [v^*, \vartheta^*] \rightarrow \mathbb{R}$ a differentiable function. If $\phi \in L^1([v^*, \vartheta^*])$, then we have

$$|\mathbf{L}| \leq \mathbf{B} \cdot w(0) \|\phi'\|_1,$$

where $\mathbf{B} = \left(\frac{\vartheta^* - v^*}{\varrho + 2}\right)^2$, and $\|\phi'\|_1 = \int_{v^*}^{\vartheta^*} |\phi'(x)| dx < \infty$.

Proof. From Remark 8 after changing variables, we obtain

$$\begin{aligned} |\mathbf{L}| &\leq \left(\frac{\vartheta^* - v^*}{\varrho + 2}\right)^2 \int_0^1 w(\varsigma) \left| \phi' \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} \vartheta^* + \frac{1 - \varsigma}{\varrho + 2} v^* \right) \right| d\varsigma + \\ &\quad + \left(\frac{\vartheta^* - v^*}{\varrho + 2}\right)^2 \int_0^1 w(\varsigma) \left| \phi' \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} v^* + \frac{1 - \varsigma}{\varrho + 2} \vartheta^* \right) \right| d\varsigma \leq \\ &\leq \left(\frac{\vartheta^* - v^*}{\varrho + 2}\right)^2 \left\{ \int_{\frac{\varrho\vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho + 2}}^{\vartheta^*} w' \left[\frac{z - \frac{\varrho\vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho + 2}}{\frac{\vartheta^* - v^*}{\varrho + 2}} \right] |\phi'(z)| dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_{v^*}^{\frac{\varrho v^* + v^* + \vartheta^*}{\varrho + 2}} w' \left[\frac{\frac{\varrho v^* + v^* + \vartheta^*}{\varrho + 2} - z}{\frac{\vartheta^* - v^*}{\varrho + 2}} \right] |\phi'(z)| dz \right\}. \end{aligned}$$

Therefore, the proof is finished. □

Remark 9. If we take $w(\varsigma) = \frac{\varsigma^\alpha}{2} - \frac{1}{5}$ and $\varrho = 0$, we have the Theorem 3.2 of [16].

Theorem 2. Let $0 < m \leq 1$, $0 \leq v^* < \vartheta^*$ and ϕ function defined on the interval $[v^*, \vartheta^*]$, and $\phi \in C^1(v^*, \vartheta^*)$, where $v^*, \vartheta^* \in \mathbb{R}$. If $\phi \in L^1([v^*, \vartheta^*])$ and $|\phi'| \in N_{h,m}^{s,2}[v^*, \vartheta^*]$ for some fixed $s \in (0, 1]$, then the inequality

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{A} - \left(\frac{\varrho + 2}{\vartheta^* - v^*}\right)^2 \left[J_{\frac{\varrho\vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho + 2}}^w \phi(\vartheta^*) + J_{\frac{\varrho v^* + v^* + \vartheta^*}{\varrho + 2}}^w \phi(v^*) \right] \right| &\leq \\ &\leq (|\phi'(v^*)| + |\phi'(\vartheta^*)|) \int_0^1 w(\varsigma) h^s \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2}\right) d\varsigma + \\ &\quad + m \left(\left| \phi' \left(\frac{v^*}{m}\right) \right| + \left| \phi' \left(\frac{\vartheta^*}{m}\right) \right| \right) \int_0^1 w(\varsigma) \left[1 - h \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2}\right) \right]^s d\varsigma \end{aligned} \tag{8}$$

holds with

$$\mathbf{A} = \frac{\varrho + 2}{\vartheta^* - v^*} \left\{ w(1) (\phi(\vartheta^*) + \phi(v^*)) - w(0) \left[\phi\left(\frac{\varrho\vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho + 2}\right) + \phi\left(\frac{\varrho v^* + v^* + \vartheta^*}{\varrho + 2}\right) \right] \right\}.$$

Proof. By using the second type (h, m) -convex property of the ϕ' function, we get

$$\left| \phi' \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} \vartheta^* + \frac{1 - \varsigma}{\varrho + 2} v^* \right) \right| = \left| \phi' \left(\left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} \right) \vartheta^* + \left(1 - \frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} \right) v^* \right) \right| \leq$$



$$\leq h^s \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} \right) \left| \phi'(\vartheta^*) \right| + m \left[1 - h \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} \right) \right]^s \left| \phi' \left(\frac{v^*}{m} \right) \right|$$

and

$$\left| \phi' \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} v^* + \frac{1 - \varsigma}{\varrho + 2} \vartheta^* \right) \right| \leq h^s \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} \right) \left| \phi'(v^*) \right| + m \left[1 - h \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} \right) \right]^s \left| \phi' \left(\frac{\vartheta^*}{m} \right) \right|.$$

So, using the Lemma 1 we obtain

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{A} - \left(\frac{\varrho + 2}{\vartheta^* - v^*} \right)^2 \left[J_{\frac{\varrho\vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho + 2}}^w \phi(\vartheta^*) + J_{\frac{\varrho v^* + v^* + \vartheta^*}{\varrho + 2}}^w \phi(v^*) \right] \right| \leq \\ & \leq (\phi'(v^*) + \phi'(\vartheta^*)) \int_0^1 w(\varsigma) \left[1 - h \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} \right) \right]^s d\varsigma + \\ & + m \left(\phi' \left(\frac{v^*}{m} \right) + \phi' \left(\frac{\vartheta^*}{m} \right) \right) \int_0^1 w(\varsigma) h^s \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} \right) d\varsigma. \end{aligned}$$

Which is the inequality sought, this ends the proof. □

Remark 10. Taking ϕ' s -convex function, $\varrho = 0$, and $w(\varsigma) = \frac{\varsigma^\alpha}{2} - \frac{1}{3}$, from (8) we obtain the Theorem 6 of [11]. Under these conditions, Corollary 1 and Remark 3 of this paper remain valid.

Remark 11. If we take $|\phi'|$ s -convex, i.e. $h(\vartheta) = \vartheta$, $m = 1$ and $w(\varsigma) = \varsigma^\alpha$, and $\varrho = 0$, we get Theorem 5 of [30].

Theorem 3. Let $0 < m \leq 1$, $0 \leq v^* < \vartheta^*$ and ϕ function defined on the interval $[v^*, \vartheta^*]$, and $\phi \in C^1(v^*, \vartheta^*)$, where $v^*, \vartheta^* \in \mathbb{R}$. If $\phi \in L^1([v^*, \vartheta^*])$ and $|\phi'|^q \in N_{h,m}^{s,2}[v^*, \vartheta^*]$ for some fixed $s \in (0, 1]$ and $q > 1$ with $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, then the following inequality is fulfilled

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{A} - \left(\frac{\varrho + 2}{\vartheta^* - v^*} \right)^2 \left[J_{\frac{\varrho\vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho + 2}}^w \phi(\vartheta^*) + J_{\frac{\varrho v^* + v^* + \vartheta^*}{\varrho + 2}}^w \phi(v^*) \right] \right| \leq \\ & \leq \mathbf{B} \left[(|\phi'(v^*)|^q + |\phi'(\vartheta^*)|^q) \mathbf{C} + m \left(\left| \phi' \left(\frac{v^*}{m} \right) \right|^q + \left| \phi' \left(\frac{\vartheta^*}{m} \right) \right|^q \right) \mathbf{D} \right], \end{aligned} \tag{9}$$

with \mathbf{A} as before, and \mathbf{B} , \mathbf{C} and \mathbf{D} they will be specified later.

Proof. As in the proof of the previous result, we have

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{A} - \left(\frac{\varrho + 2}{\vartheta^* - v^*} \right)^2 \left[J_{\frac{\varrho\vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho + 2}}^w \phi(\vartheta^*) + J_{\frac{\varrho v^* + v^* + \vartheta^*}{\varrho + 2}}^w \phi(v^*) \right] \right| \leq \\ & \leq \int_0^1 w(\varsigma) \left| \phi' \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} \vartheta^* + \frac{1 - \varsigma}{\varrho + 2} v^* \right) \right| d\varsigma + \int_0^1 w(\varsigma) \left| \phi' \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} v^* + \frac{1 - \varsigma}{\varrho + 2} \vartheta^* \right) \right| d\varsigma. \end{aligned} \tag{10}$$

Using the Hölder inequality on the two integrals of (10) gives us $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 w(\varsigma) \left| \phi' \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} \vartheta^* + \frac{1 - \varsigma}{\varrho + 2} v^* \right) \right| d\varsigma \leq \\ & \leq \left(\int_0^1 w^p(\varsigma) d\varsigma \right)^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 \left| \phi' \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} \vartheta^* + \frac{1 - \varsigma}{\varrho + 2} v^* \right) \right|^q d\varsigma \right]^{\frac{1}{q}}, \\ & \int_0^1 w(\varsigma) \left| \phi' \left(\frac{1 + \varrho + \varsigma}{\varrho + 2} v^* + \frac{1 - \varsigma}{\varrho + 2} \vartheta^* \right) \right| d\varsigma \leq \end{aligned} \tag{11}$$

$$\leq \left(\int_0^1 w^p(\varsigma) d\varsigma \right)^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 \left| \phi' \left(\frac{1+\varrho+\varsigma}{\varrho+2} v^* + \frac{1-\varsigma}{\varrho+2} \vartheta^* \right) \right|^q d\varsigma \right]^{\frac{1}{q}}. \tag{12}$$

Taking into account the (h, m) -convexity of $|\phi'|^q$ we obtain

$$\begin{aligned} & \left[\int_0^1 \left| \phi' \left(\frac{1+\varrho+\varsigma}{\varrho+2} \vartheta^* + \frac{1-\varsigma}{\varrho+2} v^* \right) \right|^q d\varsigma \right]^{\frac{1}{q}} \leq \\ & \leq \left[|\phi'(\vartheta^*)|^q \int_0^1 h^s \left(\frac{1+\varrho+\varsigma}{\varrho+2} \right) d\varsigma + m \left| \phi' \left(\frac{v^*}{m} \right) \right|^q \int_0^1 \left(1 - h \left(\frac{1+\varrho+\varsigma}{\varrho+2} \right) \right)^s d\varsigma \right]^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} & \left[\int_0^1 \left| \phi' \left(\frac{1+\varrho+\varsigma}{\varrho+2} v^* + \frac{1-\varsigma}{\varrho+2} \vartheta^* \right) \right|^q d\varsigma \right]^{\frac{1}{q}} \leq \\ & \leq \left[|\phi'(v^*)|^q \int_0^1 h^s \left(\frac{1+\varrho+\varsigma}{\varrho+2} \right) d\varsigma + m \left| \phi' \left(\frac{\vartheta^*}{m} \right) \right|^q \int_0^1 \left(1 - h \left(\frac{1+\varrho+\varsigma}{\varrho+2} \right) \right)^s d\varsigma \right]^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \tag{14}$$

so, using (13) and (14) in (11) and (12), and then in (10), rearranging, grouping and denoting $\mathbf{B} = \left(\int_0^1 w^p(\varsigma) d\varsigma \right)^{\frac{1}{p}}$, $\mathbf{C} = \int_0^1 h^s \left(\frac{1+\varrho+\varsigma}{\varrho+2} \right) d\varsigma$ and $\mathbf{D} = \int_0^1 \left(1 - h \left(\frac{1+\varrho+\varsigma}{\varrho+2} \right) \right)^s d\varsigma$ leads us to the desired inequality. \square

Remark 12. As in the previous Remark, this result yields Theorem 6 and Corollary 1 of [30].

Remark 13. If we work with convex functions, i.e. $h(\varsigma) = \varsigma$, $s = m = 1$ and $w(\varsigma) = \varsigma$, then the above result becomes Theorem 2.3 from [31]. Theorem 1 of [32] is also a particular case of this result.

Remark 14. The Theorem 7, Corollary 2, and Remark 4 of [11] are also particular cases of this result.

The next result is a different version of (9).

Theorem 4. Let $0 < m \leq 1$, $0 \leq v^* < \vartheta^*$ and ϕ function defined on the interval $[v^*, \vartheta^*]$, and $\phi \in C^1(v^*, \vartheta^*)$, where $v^*, \vartheta^* \in \mathbb{R}$. If $\phi \in L^1([v^*, \vartheta^*])$ and $|\phi'|^q \in N_{h,m}^{s,2}[v^*, \vartheta^*]$ for some fixed $s \in (0, 1]$ and $q > 1$, then the following inequality is fulfilled

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{A} - \left(\frac{\varrho+2}{\vartheta^* - v^*} \right)^2 \left[J_{\frac{\varrho\vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho+2}}^w \phi(\vartheta^*) + J_{\frac{\varrho v^* + v^* + \vartheta^*}{\varrho+2}}^w \phi(v^*) \right] \right| \leq \\ & \leq \mathbf{E} \left[(|\phi'(v^*)|^q + |\phi'(\vartheta^*)|^q) \mathbf{F} + m \left(\left| \phi' \left(\frac{v^*}{m} \right) \right|^q + \left| \phi' \left(\frac{\vartheta^*}{m} \right) \right|^q \right) \mathbf{G} \right], \end{aligned}$$

with \mathbf{A} as before, $\mathbf{E} = \left(\int_0^1 w(\varsigma) d\varsigma \right)^{1-\frac{1}{p}}$, $\mathbf{F} = \int_0^1 w(\varsigma) h^s \left(\frac{1+\varrho+\varsigma}{\varrho+2} \right) d\varsigma$ and

$$\mathbf{G} = \int_0^1 w(\varsigma) \left(1 - h \left(\frac{1+\varrho+\varsigma}{\varrho+2} \right) \right)^s d\varsigma.$$

Proof. As before

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{A} - \left(\frac{\varrho+2}{\vartheta^* - v^*} \right)^2 \left[J_{\frac{\varrho\vartheta^* + \vartheta^* + v^*}{\varrho+2}}^w \phi(\vartheta^*) + J_{\frac{\varrho v^* + v^* + \vartheta^*}{\varrho+2}}^w \phi(v^*) \right] \right| \leq \\ & \leq \int_0^1 w(\varsigma) \left| \phi' \left(\frac{1+\varrho+\varsigma}{\varrho+2} \vartheta^* + \frac{1-\varsigma}{\varrho+2} v^* \right) \right| d\varsigma + \int_0^1 w(\varsigma) \left| \phi' \left(\frac{1+\varrho+\varsigma}{\varrho+2} v^* + \frac{1-\varsigma}{\varrho+2} \vartheta^* \right) \right| d\varsigma. \end{aligned}$$



Using now that well-known power mean inequality with modulus properties takes us to:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 w(\varsigma) \left| \phi' \left(\frac{1+\varrho+\varsigma}{\varrho+2} \vartheta^* + \frac{1-\varsigma}{\varrho+2} v^* \right) \right| d\varsigma + \int_0^1 w(\varsigma) \left| \phi' \left(\frac{1+\varrho+\varsigma}{\varrho+2} v^* + \frac{1-\varsigma}{\varrho+2} \vartheta^* \right) \right| d\varsigma \leq \\ & \leq \left(\int_0^1 w(\varsigma) d\varsigma \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\int_0^1 w(\varsigma) \left| \phi' \left(\frac{1+\varrho+\varsigma}{\varrho+2} \vartheta^* + \frac{1-\varsigma}{\varrho+2} v^* \right) \right| d\varsigma \right]^{\frac{1}{q}} + \\ & + \left(\int_0^1 w(\varsigma) d\varsigma \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\int_0^1 w(\varsigma) \left| \phi' \left(\frac{1+\varrho+\varsigma}{\varrho+2} v^* + \frac{1-\varsigma}{\varrho+2} \vartheta^* \right) \right| d\varsigma \right]^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

From the (h, m) -convexity of $|\phi'|^q$ and a simple but tedious algebraic work, the proof of the Theorem is completed. \square

Remark 15. Under assumption $|\phi'|^q$ s -convex and $w(\varsigma) = \varsigma^\alpha$, we get Theorem 7 of [30]. If we additionally put that $\alpha = 1$, it follows Theorem 2 of [32] and Theorem 1 of [33]. The reader can also easily check that Theorem 9 and Corollary 4 of [11] are particular cases of our result and that Remark 6 of said work is still valid.

Conclusions

In this paper, various extensions and generalizations of the classical Simpson’s inequality have been established, in the context of weighted integral operators. Throughout our work, we have seen how various results reported in the literature are particular cases of ours, which shows the breadth of strength of these. However, we did not want to conclude without pointing out two more aspects regarding the breadth of our results. Firstly, referring to the integral operator used, given that the weight function can include several known cases, we can add that if $w'(\varsigma) = \frac{(\sigma-v^*)^{\alpha-1} \varsigma^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ (or that is, we consider the k -integral of [34]), the Lemma 1 reduces to Lemma 2.1 of [35], obviously many of the results of that work, can also be obtained from ours, considering convex functions. The second issue is the notion of convexity used, which we have shown contains several well-known. This, together with the way of writing the argument (in reality we obtain families of inequalities), means that our results cover many of those published so far. Finally, we want to point out that this weighted operator can be used in the study of other inequalities, for example, the Minkowski inequality (see, for example, [36]), in this paper they use the weight indicated above, thus these results can be generalized using a general weight $w'(\varsigma)$.

References

1. Nápoles J. E., Rabossi F., Samaniego A. D. Convex functions: Ariadne’s thread or Charlotte’s spiderweb? *Advanced Mathematical Models & Applications*, 2020, vol. 5, iss. 2, pp. 176–191.
2. Alomari M., Hussain S. Two inequalities of Simpson type for quasi-convex functions and applications. *Applied Mathematics E-Notes*, 2011, vol. 11, pp. 110–117.
3. Set E., Özdemiş E., Sarıkaya M. Z. On new inequalities of Simpson’s type for quasi-convex functions with applications. *Tamkang Journal of Mathematics*, 2012, vol. 43, iss. 3, pp. 357–364. <https://doi.org/10.5556/j.tkjm.43.2012.616>
4. Bayraktar B. Some integral inequalities for functions whose absolute values of the third derivative is concave and r -convex. *Turkish Journal of Inequalities*, 2020, vol. 4, iss. 2, pp. 59–78.
5. Bayraktar B., Nápoles J. E., Rabossi F. On generalizations of integral inequalities. *Problemy Analiza – Issues of Analysis*, 2022, vol. 11 (29), iss. 2, pp. 3–23. <https://doi.org/10.15393/j3.art.2022.11190>
6. Dragomir S. S., Agarwal R. P., Cerone P. On Simpson’s inequality and applications. *Journal of Inequalities and Applications*, 2000, vol. 5, iss. 6, pp. 533–579. <https://doi.org/10.1155/S102558340000031X>
7. Liu Z. An inequality of Simpson type. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 2005, vol. 461, iss. 2059, pp. 2155–2158. <https://doi.org/10.1098/rspa.2005.1505>
8. Hussain S., Qaisar S. Generalizations of Simpson’s type inequalities through preinvexity and prequasiinvexity. *Punjab University Journal of Mathematics*, 2014, vol. 46, iss. 2, pp. 1–9.



9. Park J. Hermite–Hadamard type and Simpson’s type inequalities for the decreasing (α, m) -geometrically convex functions. *Applied Mathematical Sciences*, 2014, vol. 61–64, pp. 3181–3195.
10. Sarıkaya M. Z., Set E., Özdemir M. E. On new inequalities of Simpson’s type for s -convex functions. *Computers & Mathematics with Applications*, 2010, vol. 60, iss. 8, pp. 2191–2199. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.07.033>
11. Desalegn H., Mijena J. B., Nwaeze E. R., Abdi T. Simpson’s type inequalities for s -convex functions via a generalized proportional fractional integral. *Foundations*, 2022, vol. 2, pp. 607–616. <https://doi.org/10.3390/foundations2030041>
12. Hua J., Xi B.-Y., Qi F. Some new inequalities of Simpson type for strongly s -convex functions. *Afrika Matematika*, 2015, vol. 26, pp. 741–752 <http://dx.doi.org/10.1007/s13370-014-0242-2>
13. Kashuri A., Meftah B., Mohammed P. O. Some weighted Simpson type inequalities for differentiable s -convex functions and their applications. *Journal of Fractional Calculus and Nonlinear Systems*, 2021, vol. 1, iss. 1, pp. 75–94. <http://dx.doi.org/10.48185/jfcns.v1i1.150>
14. Du T. S., Li Y. J., Yang Z. Q. A generalization of Simpson’s inequality via differentiable mapping using extended (s, m) -convex functions. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, vol. 293, pp. 358–369. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.08.045>
15. Du T. S., Liao J. G., Li Y. J. Properties and integral inequalities of Hadamard–Simpson type for the generalized (s, m) -preinvex functions, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 2016, vol. 9, iss. 5, pp. 3112–3126. <http://dx.doi.org/10.22436/jnsa.009.05.102>
16. Luo C., Du T. Generalized Simpson type inequalities involving Riemann–Liouville fractional integrals and their applications. *Filomat*, 2020, vol. 34, iss. 3, pp. 751–760. <https://doi.org/10.2298/FIL2003751L>
17. Hsu K. C., Hwang S. R., Tseng K. L. Some extended Simpson type inequalities and applications. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 2017, vol. 43, iss. 2, pp. 409–425.
18. Ujević N. Double integral inequalities of Simpson type and applications. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2004, vol. 14, pp. 213–223. <https://doi.org/10.1007/BF02936109>
19. Bayraktar B., Nápoles J. E. Hermite–Hadamard weighted integral inequalities for (h, m) -convex modified functions. *Fractional Differential Calculus*, 2022, vol. 12, iss. 2, pp. 235–248. <https://doi.org/10.7153/fdc-2022-12-15>
20. Bayraktar B., Nápoles J. E. New generalized integral inequalities via (h, m) -convex modified functions. *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2022, vol. 60, pp. 3–15. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2022-60-01>
21. Bayraktar B., Nápoles J. E. Integral inequalities for mappings whose derivatives are (h, m, s) -convex modified of second type via Katugampola integrals. *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, 2022, vol. 49, iss. 2, pp. 371–383. <https://doi.org/10.52846/ami.v49i2.1596>
22. Rainville E. D. *Special Functions*. New York, Macmillan Co., 1960. 365 p.
23. Díaz R., Pariguan E. On hypergeometric functions and Pochhammer k -symbol. *Divulgaciones Matemáticas*, 2007, vol. 15, iss. 2, pp. 179–192. <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0405596>
24. Mubeen S., Habibullah G. M. k -fractional integrals and application. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 2012, vol. 7, iss. 2, pp. 89–94.
25. Akkurt A. E., Yildirim M., Yildirim H. On some integral inequalities for (k, h) -Riemann–Liouville fractional integral. *New Trends in Mathematical Sciences*, 2016, vol. 4, iss. 1, pp. 138–146. <http://dx.doi.org/10.20852/ntmsci.2016217824>
26. Jarad F., Abdeljawad T., Shah T. On the weighted fractional operators of a function with respect to another function. *Fractals*, 2020, vol. 28, iss. 8, art. 2040011. <http://dx.doi.org/10.1142/S0218348X20400113>
27. Sarıkaya M. Z., Ertugral F. On the generalized Hermite–Hadamard inequalities. *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, 2020, vol. 47, iss. 1, pp. 193–213. <https://doi.org/10.52846/ami.v47i1.1139>
28. Jarad F., Ugurlu U., Abdeljawad T., Baleanu D. On a new class of fractional operators. *Advances in Difference Equations*, 2017, vol. 2017, iss. 247, pp. 1–16. <https://doi.org/10.1186/s13662-017-1306-z>
29. Khan T. U., Khan M. A. Generalized conformable fractional integral operators. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 2019, vol. 346, pp. 378–389. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2018.07.018>
30. Özdemir M. E., Kavurmaci H., Yildiz C. Fractional integral inequalities via s -convex functions. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 2017, vol. 5, iss. 1, pp. 18–22. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1201.4915>



31. Dragomir S. S., Agarwal R. P. Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. *Applied Mathematics Letters*, 1998, vol. 11, iss. 5, pp. 91–95. [https://doi.org/10.1016/S0893-9659\(98\)00086-X](https://doi.org/10.1016/S0893-9659(98)00086-X)
32. Kirmaci U. S., Bakula M. K., Özdemir M. E., Pecaric J. Hadamard-type inequalities for s -convex functions. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, vol. 193, iss. 1, pp. 26–35. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.03.030>
33. Pearce C. E. M., Pecaric J. Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulae. *Applied Mathematics Letters*, 2000, vol. 13, pp. 51–55. [https://doi.org/10.1016/S0893-9659\(99\)00164-0](https://doi.org/10.1016/S0893-9659(99)00164-0)
34. Hudzik H., Maligranda L. Some remarks on s -convex functions. *Aequationes Mathematicae*, 1994, vol. 48, iss. 1, pp. 100–111. <https://doi.org/10.1007/BF01837981>
35. Wu S., Iqbal S., Aamir M., Samraiz M., Younus A. On some Hermite–Hadamard inequalities involving k -fractional operators. *Journal of Inequalities and Applications*, 2021, vol. 2021, iss. 32. <https://doi.org/10.1186/s13660-020-02527-1>
36. Aljaaidia T. A., Pachpatte D. New generalization of reverse Minkowski's inequality for fractional integral. *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications*, 2021, vol. 5, iss. 1, pp. 72–81. <https://doi.org/10.31197/atnaa.756605>

Поступила в редакцию / Received 28.03.2023

Принята к публикации / Accepted 10.10.2023

Опубликована / Published 31.05.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 184–192

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 184–192

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-184-192>, EDN: SHEHGU

Научная статья
УДК 531.011

О потенциальности, дискретизации и интегральных инвариантах бесконечномерных систем Биркгофа

В. М. Савчин[✉], Ф. Т. Чинь

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Савчин Владимир Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор Математического института им. С. М. Никольского, savchin-vm@rudn.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3850-6747>, AuthorID: 14052

Чинь Фьюк Тоан, аспирант Математического института им. С. М. Никольского, tr.phuocuoan@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-7707-322X>

Аннотация. При исследовании уравнений движения систем различной физической природы появляются задачи определения качественных показателей и свойств движения по известным структуре и свойствам рассматриваемых уравнений. Такими качественными показателями для конечномерных систем являются, в частности, интегральные инварианты — интегралы от некоторых функций, сохраняющие свое значение в процессе движения системы. Они были введены в аналитическую механику А. Пуанкаре. В дальнейшем была установлена связь интегральных инвариантов с рядом фундаментальных понятий классической динамики. Основная цель данной работы — распространить некоторые положения теории интегральных инвариантов на широкие классы уравнений движения бесконечномерных систем. Используя заданное действие по Гамильтону, получены уравнения движения потенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы, обобщающие известные уравнения Биркгофа. Для них построен разностный аналог с дискретным временем. На его основе найдена разностная аппроксимация соответствующего интегрального инварианта первого порядка.

Ключевые слова: бесконечномерные системы Биркгофа, дискретизация, интегральные инварианты, потенциальность

Благодарности: Работа выполнена при частичной поддержке Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы (проект № 002092-0-000).

Для цитирования: Савчин В. М., Чинь Ф. Т. О потенциальности, дискретизации и интегральных инвариантах бесконечномерных систем Биркгофа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 184–192. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-184-192>, EDN: SHEHGU

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

On potentiality, discretization, and integral invariants of the infinite-dimensional Birkhoff systems

V. M. Savchin[✉], P. T. Trinh

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, 6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russia

Vladimir M. Savchin, savchin-vm@rudn.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3850-6747>, AuthorID: 14052

Phuoc Toan Trinh, tr.phuocuoan@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-7707-322X>



Abstract. In the study of the equations of motion of systems of various physical nature, there are problems in determining the qualitative indicators and properties of motion according to the known structure and properties of the equations under consideration. Such qualitative indicators for finite-dimensional systems are, in particular, integral invariants — integrals of some functions that retain their value during the system movement. They were introduced into analytical mechanics by A. Poincaré. In the future, the connection of integral invariants with a number of fundamental concepts of classical dynamics was established. The main purpose of this work is to extend some notions of the theory of integral invariants to broad classes of equations of motion of infinite-dimensional systems. Using a given Hamilton's action, the equations of motion of potential systems with an infinite number of degrees of freedom are obtained, generalizing the well-known Birkhoff equations. A difference analog with discrete time is constructed for them. Based on it, a difference approximation of the corresponding integral invariant of the first order is found.

Keywords: infinite-dimensional Birkhoff systems, discretization, integral invariants, potentiality

Acknowledgements: This work was partially supported by the Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (project No. 002092-0-000).

For citation: Savchin V. M., Trinh P. T. On potentiality, discretization, and integral invariants of the infinite-dimensional Birkhoff systems. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 184–192 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-184-192>, EDN: SHEHGU

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

В работе [1] получены необходимые и достаточные условия вариационности (потенциальности) операторного уравнения с первой производной по времени

$$\begin{aligned} \widehat{N}(u) &\equiv P_{u,t}u_t - Q(t, u) = 0, \\ u &\in D(\widehat{N}) \subseteq U \subseteq V, \quad t \in [\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1] \subset \mathbb{R}, \quad u_t \equiv D_t u \equiv \frac{d}{dt}u. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\forall t \in [\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1], \forall u \in U_1$ оператор $P_{u,t} : U_1 \rightarrow V_1$ является линейным; $Q : [\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1] \times U_1 \rightarrow V_1$ — произвольный оператор, вообще говоря, нелинейный; $D(\widehat{N})$ — область определения оператора \widehat{N} ,

$$D(\widehat{N}) = \left\{ u \in U : u(t) \in W \forall t \in [\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1], u|_{t=\widetilde{T}_0} = \varphi_1, u|_{t=\widetilde{T}_1} = \varphi_2, \varphi_i \in U_1, i = 1, 2 \right\};$$

$U = C^1([\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1]; U_1)$, $V = C^1([\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1]; V_1)$, U_1, V_1 — линейные нормированные пространства над полем действительных чисел \mathbb{R} , $U_1 \subseteq V_1$. Множество W определяется внешними связями, наложенными на систему.

Операторное уравнение (1) может быть обыкновенным дифференциальным, дифференциальным уравнением в частных производных, интегро-дифференциальным уравнением, уравнением с отклоняющимися аргументами и другими, а также системой таких уравнений.

На этом пути, в частности, выявлена взаимосвязь полученного операторного вариационного уравнения с классическими уравнениями Биркгофа [2, 3], являющимися обобщениями канонических уравнений Гамильтона.

Будем использовать обозначения и терминологию работ [4–7].

1. Постановка задач

Пусть состояние бесконечномерной потенциальной системы определяется вектор-функцией $u(x, t) = (u^1(x, t), u^2(x, t), \dots, u^{2n}(x, t))$, $(x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T)$, Ω — ограниченная область из \mathbb{R}^m с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$.

Предположим, что при этом действие по Гамильтону имеет вид

$$F[u] = \int_0^T \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{2n} R_i(x, t, u_{\alpha}) u_t^i - B(u_{\alpha}) \right] dx dt, \tag{2}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i, \quad |\alpha| = \overline{0, s},$$

где $R_i = R_i(x, t, u_{\alpha})$, $B = B(u_{\alpha})$ — заданные достаточно гладкие функции, $u_t^i = \frac{\partial u^i}{\partial t}$, $i = \overline{1, 2n}$,
 $u_{\alpha} = D_{\alpha} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{(\partial x_1)^{\alpha_1} (\partial x_2)^{\alpha_2} \dots (\partial x_m)^{\alpha_m}}$.

Будем рассматривать функционал (2) на множестве

$$D(N) = \left\{ u \in U = (U^1, \dots, U^{2n}) : u^i \in U^i = C_{x,t}^{2s,1}(\overline{\Omega} \times [0, T]) : u^i|_{t=0} = \varphi_0^i(x), \right. \\ \left. u^i|_{t=T} = \varphi_1^i(x), \quad \frac{\partial^{\nu} u^i}{\partial n_x^{\nu}} \Big|_{\Gamma_T} = \psi_{\nu}^i(x, t), \quad i = \overline{1, 2n}, \quad |\nu| = \overline{0, s-1} \right\}, \tag{3}$$

где $\overline{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T)$, n_x — внешняя нормаль к $\partial\Omega$; $\varphi_0^i, \varphi_1^i, \psi_{\nu}^i(x, t)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Цель работы — найти уравнения движения, определяемые действием по Гамильтону (2), построить их разностный аналог с дискретным временем и на этой основе найти разностную аппроксимацию соответствующего линейного интегрального инварианта.

2. Система уравнений движения

Обозначим плотность функции Лагранжа

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, t, u_{\alpha}, u_t) = \sum_{k=1}^{2n} R_k u_t^k - B. \tag{4}$$

Первая вариация (2) равна

$$\delta F[u, \delta u] = \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{2n} \left(\sum_{|\alpha|=0}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha}^i} \delta u_{\alpha}^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^i} \delta u_t^i \right) dx dt. \tag{5}$$

Введем плотности обобщенных импульсов p_i , $i = \overline{1, 2n}$ по формулам

$$p_i = \frac{\delta L}{\delta u_t^i} = R_i, \quad i = \overline{1, 2n},$$

где $L = \int_{\Omega} \mathcal{L} dx$; $\frac{\delta L}{\delta u_t^i}$ — вариационная производная.

Поскольку

$$\delta u^i|_{t=0} = 0, \quad \delta u^i|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial^{\nu} (\delta u^i)}{\partial n_x^{\nu}} \Big|_{\Gamma_T} = 0, \quad i = \overline{1, 2n}, \quad |\nu| = \overline{0, s-1},$$

то, интегрируя по частям, из (5) получаем

$$\delta F[u, \delta u] = \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{2n} \left[\sum_{|\alpha|=0}^s (-1)^{|\alpha|} D_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha}^i} \right) - \frac{dp_i}{dt} \right] \delta u^i dx dt.$$



Приравнявая эту вариацию к нулю, находим систему уравнений движения в виде

$$\sum_{|\alpha|=0}^s (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\alpha^i} \right) - \frac{dp_i}{dt} = 0, \quad i = \overline{1, 2n}. \quad (6)$$

Отметим, что

$$D_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\alpha^i} \right) = D_\alpha \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial R_k}{\partial u_\alpha^i} u_t^k - \frac{\partial B}{\partial u_\alpha^i} \right) = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{|\beta|=0}^s \binom{\alpha}{\beta} D_{\alpha-\beta} \left(\frac{\partial R_k}{\partial u_\alpha^i} \right) D_\beta u_t^k - D_\alpha \frac{\partial B}{\partial u_\alpha^i},$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{dR_i}{dt} = \frac{\partial R_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{2n} \sum_{|\beta|=0}^s \frac{\partial R_i}{\partial u_\beta^k} D_\beta u_t^k,$$

где

$$\binom{\alpha}{\beta} = \begin{cases} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_m}{\beta_m}, & \text{если } \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} : \alpha_i \geq \beta_i, \\ 0, & \text{если } \exists i \in \{1, 2, \dots, m\} : \alpha_i < \beta_i, \end{cases}$$

$$\binom{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{\alpha_i!}{\beta_i! (\alpha_i - \beta_i)!}.$$

С учетом этого система уравнений (6) может быть представлена в виде

$$N_i \equiv \sum_{k=1}^{2n} \sum_{|\beta|=0}^s \left[\sum_{|\alpha|=0}^s (-1)^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D_{\alpha-\beta} \left(\frac{\partial R_k}{\partial u_\alpha^i} \right) - \frac{\partial R_i}{\partial u_\beta^k} \right] D_\beta u_t^k - \frac{\partial R_i}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=0}^s (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \frac{\partial B}{\partial u_\alpha^i} = 0, \quad i = \overline{1, 2n}. \quad (7)$$

Справедлива

Теорема 1. Экстремали функционала (2) являются решениями системы уравнений (7).

Отметим, что из (7) как частный случай следуют уравнения Биркгофа [3].

3. Дискретизация по времени

Разобьем отрезок $[0, T]$ на l равных частей узлами $t_j = j\tau$, $j = \overline{0, l}$, где $\tau = l^{-1}T$. Введем операторы сужения [8]

$$\overline{T}_r u^i(x, t) = \overline{u}_r^i = (u^i(x, t_k))_{k=0}^l, \quad i = \overline{1, 2n}$$

(столбцы высоты $r = l + 1$). Такие столбцы образуют линейное пространство, которое будем обозначать \overline{U}_r^i . Для удобства обозначим $\overline{u}_r = (\overline{u}_r^1, \overline{u}_r^2, \dots, \overline{u}_r^{2n})$, $\tilde{u}_j = u(x, t_j)$, $\tilde{u}_j^i = u^i(x, t_j)$.

Обозначим \overline{N} оператор дискретного аналога задачи (7), (3), полученной на основе функционала (2).

Положим

$$D(\overline{N}) = \left\{ \overline{u}_r \in \overline{U}_r = \left(\overline{U}_r^1, \dots, \overline{U}_r^{2n} \right) : \tilde{u}_r^i \in C^{2s}(\overline{\Omega}) : \tilde{u}_0^i = \varphi_0^i(x), \tilde{u}_l^i = \varphi_1^i(x), \right.$$

$$\left. \frac{\partial^\nu \tilde{u}_j^i}{\partial n_x^\nu} \Big|_{\partial\Omega} = \psi_\nu^i(x, t_j), \quad i = \overline{1, 2n}, |\nu| = \overline{0, s}, j = \overline{0, l} \right\}.$$

Заменим (4) на

$$\overline{\mathcal{L}}_j = \overline{\mathcal{L}}(x, t, D_\alpha \tilde{u}_j, \tilde{u}_{j+1}) = \sum_{i=1}^{2n} R_{i,j} \frac{\tilde{u}_{j+1}^i - \tilde{u}_j^i}{\tau} - B_j, \quad j = \overline{0, l-1},$$

где $R_{i,j} = R_i(x, t_j, D_\alpha \tilde{u}_j)$, $B_j = B(D_\alpha \tilde{u}_j)$.

Далее аппроксимируем интегралы

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{\Omega} \mathcal{L} dx dt \approx \frac{T}{l} \int_{\Omega} \overline{\mathcal{L}}_j dx.$$

Функционал (2) заменяем разностным действием по Гамильтону

$$\overline{F}[\overline{u}_r] = \frac{T}{l} \sum_{j=0}^{l-1} \int_{\Omega} \overline{\mathcal{L}}_j dx. \tag{8}$$

Тогда

$$\delta \overline{F}[\overline{u}_r, \delta \overline{u}_r] = \frac{T}{l} \sum_{j=0}^{l-1} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{2n} \left[\sum_{|\alpha|=0}^s \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}_j}{\partial (D_\alpha \tilde{u}_j^k)} \delta (D_\alpha \tilde{u}_j^k) + \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}_j}{\partial \tilde{u}_{j+1}^k} \delta \tilde{u}_{j+1}^k \right] dx. \tag{9}$$

Поскольку

$$\delta \tilde{u}_0^i = 0, \quad \delta \tilde{u}_l^i = 0, \quad \frac{\partial \nu (\delta \tilde{u}_j^i)}{\partial n_x^\nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad i = \overline{1, 2n}, \quad j = \overline{0, l}, \quad |\nu| = \overline{0, s-1},$$

то, интегрируя по частям, из (9) имеем

$$\delta \overline{F}[\overline{u}_r, \delta \overline{u}_r] = \frac{T}{l} \sum_{j=1}^{l-1} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{2n} \left[\sum_{|\alpha|=0}^s (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \left(\frac{\partial \overline{\mathcal{L}}_j}{\partial (D_\alpha \tilde{u}_j^k)} \right) + \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}_{j-1}}{\partial \tilde{u}_j^k} \right] \delta \tilde{u}_j^k dx. \tag{10}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=0}^s (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \left[\frac{\partial \overline{\mathcal{L}}_j}{\partial (D_\alpha \tilde{u}_j^k)} \right] &= \sum_{|\alpha|=0}^s (-1)^{|\alpha|} \sum_{i=1}^{2n} D_\alpha \left[\frac{\partial R_{i,j}}{\partial (D_\alpha \tilde{u}_j^k)} \frac{\tilde{u}_{j+1}^i - \tilde{u}_j^i}{\tau} \right] - \frac{R_{k,j}}{\tau} - \\ &\quad - \sum_{|\alpha|=0}^s (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \left[\frac{\partial B_j}{\partial (D_\alpha \tilde{u}_j^k)} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{|\alpha|, |\beta|=0}^s (-1)^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D_{\alpha-\beta} \left[\frac{\partial R_{i,j}}{\partial (D_\alpha \tilde{u}_j^k)} \right] D_\beta \left(\frac{\tilde{u}_{j+1}^i - \tilde{u}_j^i}{\tau} \right) - \frac{R_{k,j}}{\tau} - \\ &\quad - \sum_{|\alpha|=0}^s (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \left[\frac{\partial B_j}{\partial (D_\alpha \tilde{u}_j^k)} \right], \\ &\quad \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}_{j-1}}{\partial \tilde{u}_j^k} = \frac{R_{k,j-1}}{\tau}. \end{aligned}$$



Из равенства нулю первой вариации (10) получаем систему уравнений движения в дискретном по времени случае

$$\begin{aligned} \bar{N}_{k,j} \equiv \sum_{i=1}^{2n} \sum_{|\alpha|,|\beta|=0}^s (-1)^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D_{\alpha-\beta} \left[\frac{\partial R_{i,j}}{\partial (D_{\alpha} \tilde{u}_j^k)} \right] D_{\beta} \left(\frac{\tilde{u}_{j+1}^i - \tilde{u}_j^i}{\tau} \right) - \\ - \frac{R_{k,j} - R_{k,j-1}}{\tau} - \sum_{|\alpha|=0}^s (-1)^{|\alpha|} D_{\alpha} \left[\frac{\partial B_j}{\partial (D_{\alpha} \tilde{u}_j^k)} \right] = 0, \quad k = \overline{1, 2n}, \quad j = \overline{1, l-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Теорема 2. Уравнения (11) являются разностным по времени аналогом (7).

4. Интегральные инварианты

4.1. Непрерывный случай

Пусть $u = u(\lambda; x, t)$, $\lambda \in \Lambda = [0, 1]$ — произвольное однопараметрическое множество элементов из U непрерывно дифференцируемых по λ . Его можно рассматривать как кривую C в U . Будем считать, что $u(0; x, t) = u(1; x, t)$ для всех $(x, t) \in Q_T$, т.е. кривая замкнута.

Введем обозначение $\delta u = \frac{\partial u(\lambda; x, t)}{\partial \lambda} d\lambda$. Возьмем произвольный отрезок $[T_0, T_1]$ из $[0, T]$.

Вариация функционала $F[u(\lambda; x, t)] = \int_{T_0}^{T_1} L dt$ принимает вид

$$\begin{aligned} \delta F[u, \delta u] &= \int_{T_0}^{T_1} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{2n} \left(\sum_{|\alpha|=0}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha}^i} \delta u_{\alpha}^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^i} \delta u_t^i \right) dx dt = \\ &= \int_{T_0}^{T_1} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{2n} \left\{ (-1)^{|\alpha|} D_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha}^i} \right) \delta u^i + \left[\frac{d}{dt} (p_i \delta u^i) - \frac{dp_i}{dt} \delta u^i \right] \right\} dx dt = \\ &= \int_{T_0}^{T_1} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{2n} \left[\sum_{|\alpha|=0}^s (-1)^{|\alpha|} D_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha}^i} \right) - \frac{dp_i}{dt} \right] \delta u^i dx dt + \\ &\quad + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{2n} p_i \delta u^i \Big|_{t=T_1} dx - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{2n} p_i \delta u^i \Big|_{t=T_0} dx. \end{aligned}$$

Вдоль действительных траекторий — решений системы (6) — вариация $\delta F[u, \delta u]$ принимает вид

$$\begin{aligned} \delta F[u, \delta u] &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{2n} p_i \delta u^i \Big|_{t=T_1} dx - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{2n} p_i \delta u^i \Big|_{t=T_0} dx = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{2n} R_i \delta u^i \Big|_{t=T_1} dx - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{2n} R_i \delta u^i \Big|_{t=T_0} dx. \end{aligned}$$

Поскольку для замкнутой кривой C интеграл $\int_0^1 \delta F = 0$, то получаем равенство

$$\int_0^1 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{2n} R_i \delta u^i \Big|_{t=T_1} dx = \int_0^1 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{2n} R_i \delta u^i \Big|_{t=T_0} dx.$$

Таким образом,

$$\int_{\Lambda} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{2n} R_i \delta u^i dx = \oint_C \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{2n} R_i \delta u^i dx \tag{12}$$

является относительным линейным интегральным инвариантом первого порядка системы, описываемой лагранжианом (4).

Теорема 3. Система уравнений (7) имеет относительный интегральный инвариант первого порядка вида (12).

4.2. Дискретный случай

Используя (8), запишем функционал

$$\bar{F} [\bar{u}_r] = \frac{T}{l} \sum_{j=j_0}^{j_1} \int_{\Omega} \bar{\mathcal{L}}_j dx, \tag{13}$$

считая, что $0 < j_0 < j_1 < l$.

Находим первую вариацию (13)

$$\begin{aligned} \delta \bar{F} [\bar{u}_r, \delta \bar{u}_r] &= \frac{T}{l} \sum_{j=j_0}^{j_1} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{2n} \left[\sum_{|\alpha|=0}^s \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_j}{\partial (D_{\alpha} \tilde{u}_j^k)} \delta (D_{\alpha} \tilde{u}_j^k) + \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_j}{\partial \tilde{u}_{j+1}^k} \delta \tilde{u}_{j+1}^k \right] dx = \\ &= \frac{T}{l} \sum_{j=j_0}^{j_1} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{2n} \left\{ \sum_{|\alpha|=0}^s (-1)^{|\alpha|} D_{\alpha} \left[\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_j}{\partial (D_{\alpha} \tilde{u}_j^k)} \right] \delta \tilde{u}_j^k + \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_j}{\partial \tilde{u}_{j+1}^k} \delta \tilde{u}_{j+1}^k \right\} dx = \\ &= \frac{T}{l} \sum_{j=j_0}^{j_1} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{2n} \left\{ \sum_{|\alpha|=0}^s (-1)^{|\alpha|} D_{\alpha} \left[\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_j}{\partial (D_{\alpha} \tilde{u}_j^k)} \right] + \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_{j-1}}{\partial \tilde{u}_j^k} \right\} \delta \tilde{u}_j^k dx + \\ &\quad + \frac{T}{l} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_{j_1-1}}{\partial \tilde{u}_{j_1}^k} \delta \tilde{u}_{j_1}^k dx - \frac{T}{l} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_{j_0-1}}{\partial \tilde{u}_{j_0}^k} \delta \tilde{u}_{j_0}^k dx. \end{aligned}$$

Вдоль действительных траекторий его первая вариация (13) равна

$$\begin{aligned} \delta \bar{F} [\bar{u}_r, \delta \bar{u}_r] &= \frac{T}{l} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_{j_1-1}}{\partial \tilde{u}_{j_1}^k} \delta \tilde{u}_{j_1}^k dx - \frac{T}{l} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_{j_0-1}}{\partial \tilde{u}_{j_0}^k} \delta \tilde{u}_{j_0}^k dx = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{2n} R_{k,j_1-1} \delta \tilde{u}_{j_1}^k dx - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{2n} R_{k,j_0-1} \delta \tilde{u}_{j_0}^k dx. \end{aligned}$$

Далее, повторяя приведенные выше рассуждения, получаем

$$\int_0^1 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{2n} R_{k,j_1-1} \delta \tilde{u}_{j_1}^k dx = \int_0^1 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{2n} R_{k,j_0-1} \delta \tilde{u}_{j_0}^k dx.$$

Следовательно,

$$\oint_C \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{2n} R_{k,j-1} \delta \tilde{u}_j^k dx, j = \overline{1, l} \tag{14}$$

являются аналогами линейных интегральных инвариантов первого порядка системы (11).

Теорема 4. Формула (14) определяет дискретный по времени аналог относительно интегрального инварианта первого порядка (12).



5. Пример

Рассмотрим следующее уравнение в частных производных:

$$\tilde{N}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2k^2 \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (15)$$

описывающее движение мембраны.

Здесь $u = u(x, y, t)$ — неизвестная функция; a, k — константы, $(x, y, t) \in Q_T = (0, l^1) \times (0, l^2) \times (0, T)$.

Положим

$$D(\tilde{N}) = \left\{ u \in U = C^2(\overline{Q}_T) : u|_{x=0} = u|_{y=0} = u|_{x=l^1} = u|_{y=l^2} = 0, \right. \\ \left. u|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad u|_{t=T} = \varphi_2(x) \right\},$$

где φ_1, φ_2 — заданные функции.

Обозначим $\begin{cases} u^1 = u, \\ u^2 = u_t^1. \end{cases}$ Уравнение (15) эквивалентно системе вида

$$\tilde{N}_1 \equiv e^{2k^2 t} u_t^2 - e^{2k^2 t} a^2 \left(\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial y^2} \right) + 2k^2 e^{2k^2 t} u^2 = 0, \quad \tilde{N}_2 \equiv -e^{2k^2 t} u_t^1 + e^{2k^2 t} u^2 = 0. \quad (16)$$

Ей соответствует лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} \int_0^{l^2} \int_0^{l^1} e^{2k^2 t} \left\{ -u^2 u_t^1 + u^1 u_t^2 + 2k^2 u^1 u^2 + (u^2)^2 + a^2 \left[\left(\frac{\partial u^1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^1}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy$$

и функции Биркгофа

$$R_1 = -\frac{1}{2} e^{2k^2 t} u^2, \quad R_2 = \frac{1}{2} e^{2k^2 t} u^1, \\ B = -\frac{1}{2} e^{2k^2 t} \left[2k^2 u^1 u^2 + (u^2)^2 + a^2 \left(\left(\frac{\partial u^1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^1}{\partial y} \right)^2 \right) \right].$$

Отсюда можно вывести систему уравнений в дискретном по времени случае

$$\overline{N}_{1,j} \equiv \frac{1}{2} e^{2k^2 t_j} \frac{\tilde{u}_{j+1}^2 - \tilde{u}_j^2}{\tau} + \frac{1}{2} \frac{e^{2k^2 t_j} \tilde{u}_j^2 - e^{2k^2 t_{j-1}} \tilde{u}_{j-1}^2}{\tau} + \\ + e^{2k^2 t_j} \left[k^2 \tilde{u}_j^2 - a^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_j^1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_j^1}{\partial y^2} \right) \right] = 0, \\ \overline{N}_{2,j} \equiv -\frac{1}{2} e^{2k^2 t_j} \frac{\tilde{u}_{j+1}^1 - \tilde{u}_j^1}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{e^{2k^2 t_j} \tilde{u}_j^1 - e^{2k^2 t_{j-1}} \tilde{u}_{j-1}^1}{\tau} + e^{2k^2 t_j} (k^2 \tilde{u}_j^1 + \tilde{u}_j^2) = 0.$$

Используя формулы (12) и (14), находим относительные линейные интегральные инварианты первого порядка системы (16) в непрерывном случае

$$\oint_C \int_0^{l^2} \int_0^{l^1} \left(-\frac{1}{2} e^{2k^2 t} u^2 \delta u^1 + \frac{1}{2} e^{2k^2 t} u^1 \delta u^2 \right) dx dy$$

и в дискретном случае

$$\oint_C \int_0^{l^2} \int_0^{l^1} \left(-\frac{1}{2} e^{2k^2 t_{j-1}} \tilde{u}_{j-1}^2 \delta \tilde{u}_j^1 + \frac{1}{2} e^{2k^2 t_{j-1}} \tilde{u}_{j-1}^1 \delta \tilde{u}_j^2 \right) dx dy.$$



Заключение

Из вариационного принципа с использованием заданного действия по Гамильтону получены весьма общие уравнения движения бесконечномерных систем. Как частный случай из них следуют известные уравнения Биркгофа. Для них построен разностный аналог с дискретным временем. На его основе найдена разностная аппроксимация относительного линейного интегрального инварианта первого порядка.

Список литературы

1. Savchin V. M. Operator approach to the Birkhoff equations // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. 1995. Т. 2, №. 2. С. 111–123.
2. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. Ижевск : Удмуртский ун-т, 1999. 408 с.
3. Santilli R. M. Foundations of theoretical mechanics II. New York : Springer, 1983. 370 с.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем. Москва : Наука, 1989. 656 с.
5. Савчин В. М. Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. Москва : Изд-во Университета дружбы народов, 1991. 237 с.
6. Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г. Вариационные принципы для непотенциальных операторов // Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Новейшие достижения». 1992. № 40. С. 3–176.
7. Галиуллин А. С., Гафаров Г. Г., Малайшка Р. П., Хван А. М. Аналитическая динамика систем Гельмгольца, Биркгофа и Намбу. Москва : Успехи физических наук, 1997. 324 с.
8. Треногин В. А. Функциональный анализ : учебник. 3-е изд. Москва : Физматлит, 2002. 488 с.

References

1. Savchin V. M. Operator approach to the Birkhoff equations. *Vestnik Rossiiskogo universiteta druzhby narodov. Seriya: Matematika*, 1995, vol. 2, iss. 2. pp. 111–123 (in Russian).
2. Birkhoff G. D. *Dynamical Systems*. American Mathematical Society Colloquium Publications. Vol. 9. New York, American Mathematical Society, 1927. 305 p. (Russ. ed.: Izhevsk, Udmurt University Publ., 1999. 408 p.).
3. Santilli R. M. *Foundations of Theoretical Mechanics II*. New York, Springer, 1983. 370 p.
4. Samarsky A. A. *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1989. 656 p. (in Russian).
5. Savchin V. M. *Matematicheskie metody mekhaniki beskonечnomernykh nepotentsial'nykh sistem* [Mathematical Methods of Mechanics of Infinite-dimensional Non-potential Systems]. Moscow, RUDN University Publ., 1991. 237 p. (in Russian).
6. Filippov V. M., Savchin V. M., Shorokhov S. G. Variational principles for nonpotential operators. *Journal of Mathematical Sciences*, 1994, vol. 68, pp. 275–398.
7. Galiullin A. S., Gafarov G. G., Malayshka R. P., Khvan A. M. *Analiticheskaya dinamika sistem Gel'mgol'tsa, Birkgofo i Nambu* [Analytical Dynamics of Helmholtz, Birkhoff and Nambu Systems]. Moscow, Uspekhi fizicheskikh nauk, 1997. 324 p. (in Russian).
8. Trenogin V. A. *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. 3rd ed. Moscow, Fizmatlit, 2002. 488 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 29.01.2023

Принята к публикации / Accepted 19.02.2023

Опубликована / Published 31.05.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 193–199
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 193–199
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-193-199>, EDN: XHDOSA

Научная статья
УДК 519.688

Алгоритмический поиск целых абелевых корней многочлена с целыми абелевыми коэффициентами

Л. М. Цыбуля

Московский педагогический государственный университет, Россия, 119435, г. Москва, ул. Малая Пироговская, д. 1, стр. 1

Цыбуля Лилия Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, <https://orcid.org/0000-0001-7062-8782>, AuthorID: 505215, liliya-kinder@mail.ru

Аннотация. В работе рассматриваются операции над целыми абелевыми числами ранга n . Такие числа по определению являются элементами поля комплексных чисел и имеют вид многочленов с целыми коэффициентами от заданного первообразного корня из единицы степени n , при этом степени таких многочленов ограничены функцией Эйлера $\varphi(n)$. Приведен пример, показывающий, что внутри круга на комплексной плоскости можно найти бесконечно много целых абелевых чисел. Для описанных операций, в частности, представлен алгоритм вычисления обратного для данного целого абелева числа ранга n , что позволяет рассматривать не только кольца таких чисел, но и поля целых абелевых чисел. Естественная арифметика, возникающая для таких алгебраических структур, приводит к вопросу об изучении многочленов с целыми абелевыми коэффициентами. Исследуется задача поиска корней таких многочленов. Предложен алгоритм нахождения целых абелевых корней многочленов над кольцом целых абелевых чисел. Этот алгоритм основан на выдвинутом предложении о том, что все корни заданного многочлена ограничены некоторой областью. Проведены компьютерные вычисления, подтверждающие статистическую верность предложения.

Ключевые слова: абелево число, алгоритм, корень многочлена

Благодарности: Идейным руководителем данного исследования был профессор А. В. Гришин (Московский педагогический государственный университет). Автор также весьма признателен А. А. Прокopcеву за помощь в компьютерных вычислениях.

Для цитирования: Цыбуля Л. М. Алгоритмический поиск целых абелевых корней многочлена с целыми абелевыми коэффициентами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 193–199. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-193-199>, EDN: XHDOSA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Algorithmic search for integer Abelian roots of a polynomial with integer Abelian coefficients

L. M. Tsybulya

Moscow Pedagogical State University, 1/1 Malaya Pirogovskaya St., Moscow 119435, Russia

Liliya M. Tsybulya, liliya-kinder@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7062-8782>, AuthorID: 505215

Abstract. In this work, we consider the operations over Abelian integers of rank n . By definition, such numbers are elements of the complex field and have the form of polynomials with integer coefficients



from the n th degree primitive root of 1. In contrast, the degrees of such polynomials are not greater than Euler's totient function $\varphi(n)$. We provide an example to show that there are infinitely many Abelian integers inside any zero-centered circle on the complex plane. In this work, for considered operations we give in particular the algorithm of calculation of the inverse for the Abelian integer of rank n . It allows us to analyze not only the rings of such numbers but also the fields of Abelian integers. Natural arithmetics for such algebraic structures leads us to study the polynomials with integer Abelian coefficients. Thus, in the presented work we also investigate the problem of finding roots of such polynomials. As a result, we provide an algorithm that finds the integer Abelian roots of the polynomials over the ring of Abelian integers. This algorithm is based on the proposed statement that all roots of the polynomial are bounded by some domain. The computer calculations confirm the statistical truth of the statement.

Keywords: Abelian number, algorithm, polynomial root

Acknowledgements: The ideological leader of this research was Professor A. V. Grishin (Moscow Pedagogical State University). The author is also very grateful to A. A. Prokoptsev for help with computer calculations.

For citation: Tsybulya L. M. Algorithmic search for integer Abelian roots of a polynomial with integer Abelian coefficients. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 193–199 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-193-199>, EDN: XHDOSA This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Как хорошо известно, абелевы поля, т. е. алгебраические расширения поля рациональных чисел с коммутативной группой Галуа, играют важную роль в алгебре и алгебраической теории чисел. Согласно теореме Кронекера – Вебера эти расширения описываются с помощью так называемых круговых (циклотомических) расширений. Связанные с этим исследования весьма содержательны и интересны (см. [1]). При этом довольно часто возникают трудные вычислительные вопросы, ответить на которые без применения компьютера не представляется возможным. Именно таким вопросам и посвящена эта работа. Более конкретно, в ней рассматриваются вычисления в целых абелевых числах с применением компьютерной техники (см. [1–5]).

1. Базовые понятия, обозначения и терминология

Как обычно, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ — целые, рациональные, вещественные и комплексные числа, ζ — первообразный корень из единицы степени n , $\varphi(n)$ — функция Эйлера, $\Phi_n(x)$ — многочлен деления круга на n частей (минимальный многочлен для ζ).

Определение 1. Абелево число ранга n — это число из поля \mathbb{C} вида

$$\alpha = a_0 + a_1\zeta + \dots + a_{l-1}\zeta^{l-1}, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad l = \varphi(n). \quad (1)$$

Определение 2. Представление (1) будем называть *каноническим видом числа α* .

Несложно видеть, что представление в каноническом виде единственно.

Определение 3. *Весом абелева числа*, заданного в каноническом виде, называется число $\omega(\alpha) = \max |a_i|$.

Соотношения между весом и модулем данного абелева числа могут быть разными: модуль может совпадать с весом, быть больше и меньше его.

Приведем следующий, на первый взгляд достаточно удивительный, пример того, что модуль целого абелева числа меньше единицы, а его вес при этом может быть сколь угодно большим. Этот пример интересен еще и тем, что он показывает, что внутри круга на комплексной плоскости может быть бесконечно много целых абелевых чисел. Рассмотрим

$$\alpha = 1 - \zeta + \zeta^2,$$



где $\zeta = e^{\pi i/5}$ является примитивным корнем из единицы 5-й степени, $\omega(\alpha) = 1$. Несложно проверить, что $|\alpha| < 1$. При возведении α в натуральную степень величина $|\alpha|$ уменьшается, а вес $\omega(\alpha)$ увеличивается.

Пусть $\mathbb{Q}(\zeta)$ — круговое поле (абелево поле ранга n), $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$, \mathbb{Z}_{ab} — кольцо целых абелевых чисел, $\mathbb{Z}[\zeta] = \mathbb{Z}_{ab}(\zeta)$ — кольцо целых абелевых чисел ранга n вида (1), например, $\mathbb{Z}[i]$ — кольцо целых гауссовых чисел ранга 4.

Определение 4. Каждое целое абелево число α может быть представлено в виде

$$\alpha = p(\alpha) + q(\alpha),$$

где $p(\alpha)$ имеет вид $p(\alpha) = \Theta u$ и называется *главной частью числа* $p(\alpha)$, Θ — некоторый многочлен от ζ , а u — некоторое целое число, $|u| = \omega(\alpha)$, а $q(\alpha)$ — оставшиеся слагаемые, имеющие меньший вес.

Определение 5. Если $f = f(x) \in \mathbb{Z}[\zeta][x]$ — многочлен с целыми абелевыми коэффициентами, то его *весом* называется число $\omega(f) = \max\{\omega(c(f))\}$, где $c(f)$ — множество коэффициентов многочлена $f(x)$.

Пусть $\mathbb{Q}_{ab}(\zeta)$, $\mathbb{Z}_{ab}(\zeta)$ — поле абелевых чисел и кольцо целых абелевых чисел ранга n . Пусть далее \mathbb{Q}_{ab} — поле, порожденное всеми $\mathbb{Q}_{ab}(\zeta)$, а \mathbb{Z}_{ab} — кольцо, порожденное всеми $\mathbb{Z}_{ab}(\zeta)$. Обозначение и терминология объясняются тем, что согласно теореме Кронекера – Вебера \mathbb{Q}_{ab} — максимальное абелево расширение поля \mathbb{Q} (см. [6]).

Если $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ — набор целых абелевых чисел, то можно рассмотреть соответствующий многочлен с корнями $\lambda_1, \dots, \lambda_s$,

$$f_\lambda(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_s) = x^s \pm \alpha_1 x^{s-1} \mp \dots \pm \alpha_s,$$

где $\alpha_1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_s$, \dots , $\alpha_s = \lambda_1 \dots \lambda_s$ — элементарные симметрические функции от λ_i .

Определение 6. Пусть B — произвольное натуральное число. *Полосой ширины* B назовем множество целых абелевых чисел вида

$$S(B) = \{\alpha \in \mathbb{Z}_{ab}(\zeta) \mid \omega(\alpha) \leq B\}.$$

В полосе $S(B)$ по понятным причинам конечное число элементов, количество которых может быть очень большим, и это множество может описать компьютер.

2. Действия с абелевыми числами

I. Сложение и умножение абелевых чисел стандартным образом выполняется на компьютере.

II. Деление (деление с остатком) будем выполнять следующим образом. Пусть

$$\begin{aligned} \alpha &= a_0 + a_1\zeta + \dots + a_{l-1}\zeta^{l-1}, \\ \beta &= b_0 + b_1\zeta + \dots + b_{l-1}\zeta^{l-1}, \\ \gamma &= \frac{\alpha}{\beta} = c_0 + c_1\zeta + \dots + c_{l-1}\zeta^{l-1}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{Z}, \quad c_i \in \mathbb{Q}, \\ a(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_{l-1}x^{l-1}, \quad \alpha = a(\zeta), \\ b(x) &= b_0 + b_1x + \dots + b_{l-1}x^{l-1}, \quad \beta = b(\zeta). \end{aligned}$$

Если $\beta \neq 0$, то $b(x)$ не делится на $\Phi_n(x)$. Следовательно, $(\Phi_n(x), b(x)) = 1$. Таким образом, существуют такие многочлены u и v , что $u\Phi_n(x) + vb(x) = 1$, $u(\zeta)\Phi_n(\zeta) + v(\zeta)b(\zeta) = 1$ и $v(\zeta)b(\zeta) = 1$, $v(\zeta)$ — обратный для $b(\zeta)$ и

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha(\zeta)}{\beta(\zeta)} = \alpha(\zeta)v(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \dots + c_{l-1}\zeta^{l-1}, \quad c_i \in \mathbb{Q}.$$

Пусть $\bar{c} = \bar{c}_0 + \bar{c}_1\zeta + \dots + \bar{c}_{l-1}\zeta^{l-1}$, $c \in \mathbb{Q}$, $\bar{c}_i \in \mathbb{Z}$, $\bar{c}_i = [c_i]$ — целая часть числа c_i . Тогда

$$a = bc, \quad a = bc - \bar{c}b + \bar{c}b, \quad a = b\bar{c} + bc - b\bar{c},$$

где a — делимое, b — делитель, \bar{c} — неполное частное, $bc - b\bar{c} = r$ — остаток.

Определение 7. Назовем b делителем a , если остаток r равен нулю, а γ_1 — собственным делителем числа γ_2 , если γ_1 делит γ_2 и $\omega(\gamma_1) \leq \omega(\gamma_2)$.

Псевдокод программы, осуществляющей поиск $v(\zeta)$ — обратного для $b(\zeta)$:

Вход: b_0, b_1, \dots, b_{l-1} и f_0, f_1, \dots, f_{l-1} — коэффициенты многочленов $b(x)$ и $\Phi_n(x)$

Выход: v_0, v_1, \dots, v_{l-1} — коэффициенты многочлена $v(\zeta)$

$b := \text{array}[b_i], i = 0, \dots, l-1$

$f := \text{array}[f_i], i = 0, \dots, l-1$

$u := \text{array}[0], i = 0, \dots, l-1$

$v := \text{array}[0], i = 0, \dots, l-1$

Function Euclidean Algorithm(array b , array f , array u , array v)

$q := \text{array}[0], i = 0, \dots, l-1$

WHILE: размер $b \geq$ размера f

$mul :=$ последний элемент b / последний элемент f

$q[\text{размер } b - \text{размер } f] := mul$

for i from 0 to размер b do

$b[i] := b[i] - mul * f[i]$

удаление лидирующих нулей в b

$u_0 := \text{array}[0], i = 0, \dots, l-1$

$v_0 := \text{array}[0], i = 0, \dots, l-1$

Euclidean Algorithm(f, b, u_0, v_0)

for i from 0 to размер u_0 do

for j from 0 to размер q do

$u[i+j] := v_0[i] - q[j] * u_0[i]$

$v[i] := u_0[i]$

Данная программа используется также для нахождения частного и остатка при делении абелевых чисел.

Пример 1. Абелевы числа ранга 7, деление без остатка:

$$1 + 2\zeta + 3\zeta^2 + 4\zeta^3 + 5\zeta^4 + 6\zeta^5 = (6 + 5\zeta + 4\zeta^2 + 3\zeta^3 + 2\zeta^4 + \zeta^5)(1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 + \zeta^5),$$

$$-2 - 5\zeta - 6\zeta^2 - \zeta^3 + 4\zeta^4 + 3\zeta^5 = (1 + 5\zeta + 10\zeta^2 + 10\zeta^3 + 5\zeta^4 + \zeta^5)(-1 + \zeta).$$

Пример 2. Абелевы числа ранга 8, деление с остатком:

$$8 + 13\zeta + 21\zeta^2 + 98\zeta^3 = (13 + 9\zeta + 6\zeta^2 + \zeta^3)(5 + 7\zeta^3) + 6 + 10\zeta - 2\zeta^2 + 2\zeta^3.$$

В качестве упражнения можно посмотреть деление с остатком в кольце целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$ и исследовать возможность обобщения на кольцо $\mathbb{Z}_{ab}(\zeta)$.

3. Нахождение целых абелевых корней многочленов над кольцом целых абелевых чисел

Будет предложен алгоритм нахождения целых абелевых корней многочленов $f(x)$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{ab}(\zeta)$. Возможны два случая:

1) идеальный случай $\deg f = s$, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — целые абелевы корни многочлена f ;

2) смешанный случай $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ — целые абелевы корни многочлена f , $1 \leq r < \deg f$, а $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_s$ — неабелевы алгебраические числа.

Случай, когда абелевых корней нет, не рассматривается.



Остановимся на идеальном случае. Пусть дан многочлен степени s вида

$$f(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_s) = x^s + \alpha_1 x^{s-1} + \dots + \alpha_s,$$

где α_i с точностью до знака — элементарные симметрические функции от корней многочлена f , λ_i — целые абелевы числа. Смешанный случай рассматривается аналогично.

Введем следующую систему ограничений L :

$$\omega(\lambda_i) \leq \omega(\Psi_1), \quad \omega(\lambda_i) \leq \omega(\Psi_2), \quad \dots, \quad \omega(\lambda_i) \leq \omega(\Psi_d),$$

где Ψ_1, \dots, Ψ_d — некоторые многочлены с коэффициентами из \mathbb{Q} от $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s$.

Определение 8. Скажем, что многочлен $f(x)$ является L -регулярным, если имеет место система ограничений L .

Нас будут интересовать в первую очередь следующие ограничения на λ_1 (здесь λ_1 — корень многочлена $f(x)$ наибольшего веса). Рассмотрим абелевы числа

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \lambda_1 + \dots + \lambda_s = -\alpha_1, & \Psi_2 &= \lambda_1^2 + \dots + \lambda_s^2 = \alpha_1^2 - 2\alpha_2, \\ \Psi_3 &= \lambda_1^4 + \dots + \lambda_s^4 = \alpha_1^4 - 4\alpha_1^2\alpha_2 + 2\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_3 - 4\alpha_4, \\ \Psi_4 &= \pm\lambda_1 \dots \lambda_s = \alpha_n, & \Psi_5 &= \max(\omega(\alpha_0), \dots, \omega(\alpha_s)), & \Psi_6 &= \alpha_1^4, \\ W &= \omega(\Psi_1) + \omega(\Psi_2) + \omega(\Psi_3) + \omega(\Psi_4) + \omega(\Psi_5) + \omega(\Psi_6) \end{aligned}$$

и систему ограничений

$$\begin{aligned} L_i &: \omega(\lambda_1) \leq \omega(\Psi_i), \quad i = 1, \dots, 6, \\ L_7 &: \omega(\lambda_1) \leq W. \end{aligned}$$

Пусть $S(B_i)$ — полоса ширины B_i , заданная условием L_i .

При $i = \overline{1, 6}$ бывают как L_i -регулярные, так и не L_i -регулярные многочлены. Например, $(x - 1 - 3\zeta)(x + 3 + 2\zeta)(x + 2 - \zeta)$ и $(x + 2 + 3\zeta)(x - 1 - \zeta)$ — соответственно не L_3 - и не L_5 -регулярные многочлены над кольцом целых абелевых чисел ранга 3. Отметим, что не L_7 -регулярных многочленов с помощью компьютерных вычислений найдено не было.

Возникает вопрос, как по коэффициентам α_i ограничить веса корней многочлена f , т. е. поместить их в некоторую полосу $S(B)$? Поскольку, как уже отмечалось, множество $S(B)$ конечно, то корни ищутся с помощью компьютера прямым перебором.

Другой возможный подход основан на ограничении модулей корней многочлена $f(x)$, помещении их в некоторый круг на комплексной плоскости и, пользуясь конечностью рассматриваемого множества в этом круге, на применении прямого перебора. Для этого полезно следующее

Предложение 1. Пусть $f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n$, тогда корни $f(x)$ не превосходят по модулю следующих чисел (см. [7]):

- I. $1 + \max \left| \frac{\alpha_k}{\alpha_0} \right|, \quad k = 1, 2, \dots, n;$
- II. $p + \max \left| \frac{\alpha_k}{\alpha_0^{k-1}} \right|, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad p$ — любое положительное число;
- III. $2 \max \sqrt[k]{\left| \frac{\alpha_k}{\alpha_0} \right|}, \quad k = 1, 2, \dots, n;$
- IV. $\left| \frac{\alpha_k}{\alpha_0} \right| = \max \sqrt[k-1]{\left| \frac{\alpha_k}{\alpha_1} \right|}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$

При этом нужно учесть, что, как показывают примеры, внутри круга может быть бесконечное множество целых абелевых чисел. Предложение 1 может быть использовано для отсеивания лишних чисел из полосы $S(B)$.



3.1. Алгоритм поиска ширины полосы

Мы будем использовать подход, основанный на ограничении веса корней многочлена $f(x)$. Пусть

$$W = \omega(\Psi_1) + \omega(\Psi_2) + \omega(\Psi_3) + \omega(\Psi_4) + \omega(\Psi_5) + \omega(\Psi_6).$$

Далее считаем $\omega(\lambda_1) \leq W$ — главная система ограничений, $S(W)$ — соответствующая полоса, имеющая очень большую ширину. Тогда с вероятностью, близкой к 1, корень λ_1 попадает в эту полосу. Можно считать, что с этой вероятностью имеет место

Предложение 2. *Справедливо следующее включение: $\lambda_1 \in S(W)$.*

Доказательство этого предложения основано на довольно сложной цепочке оценок главных частей целых абелевых чисел и здесь не приводится. Мы ограничимся здесь, так сказать, «статистическим доказательством»: предложение 2 имеет место с вероятностью, близкой к 1.

Замечание 1. Интересно, что для ограничения B просто суммы корней λ_i или суммы квадратов корней недостаточно. Эти суммы могут быть по весу меньше любого корня. Однако сумма квадратов намного точнее, чем просто сумма первых степеней. Например, над кольцом целых абелевых чисел третьего ранга 93.1% случайно выбранных многочленов с 20 корнями веса, не превосходящего 7, являются L_1 -регулярными и 100% — L_2 -регулярными.

Замечание 2. Как правило, проверить L -регулярность можно, только уже найдя корни многочленов, а действовать нужно, находя эти корни и проверяя их на соответствие определению.

Замечание 3. Предложение 2 показывает, что если L_7 — условие, представляющее собой $\omega(\lambda_1) \leq W$, то практически любой многочлен $f(x)$ является L_7 -регулярным.

Псевдокод программы поиска корней многочлена:

Вход: $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ — коэффициенты многочлена $f(x)$

Выход: x_0, x_1, \dots, x_m — корни многочлена $f(x)$

$W := \omega(\Psi_1) + \omega(\Psi_2) + \omega(\Psi_3) + \omega(\Psi_4) + \omega(\Psi_5) + \omega(\Psi_6)$

$F := \text{array}[\alpha_i] \ i = 0, \dots, n$

$root := \text{array}[-W] \ i = 0, \dots, l - 1$

WHILE: следующий по весу root

If $F(root) == 0$:

print root

4. Алгоритм вычисления вероятностей системы ограничений

Пусть A — множество целых абелевых чисел ранга n , веса ≤ 100 вида

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1\zeta + \dots + \alpha_{l-1}\zeta^{l-1},$$

где ζ — первообразный корень из единицы степени n , $\alpha_i \in \{0, \pm 1, \dots, \pm 100\}$. Рассмотрим сетку ранга n , веса 100 степени s , т. е. множество N неупорядоченных наборов $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$, $\lambda_i \in A$, причем $\omega(\lambda_1) \geq \omega(\lambda_2) \geq \dots \geq \omega(\lambda_s)$. В множестве A содержится $D = 201^l$ элементов, а в множестве N содержится $\binom{201^l + s - 1}{s}$ элементов.

Во время компьютерных вычислений случайным образом выбирались целые абелевы числа из фиксированной полосы, составлялся многочлен с корнями в этих целых абелевых числах и проверялись все 7 условий регулярности. Полученные вероятности для некоторых выборок отражены в таблице, где N_t — число тестов, а пропущенные вероятности $P(L_3)$ равны 1.



Вероятности L -регулярности многочленов с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{ab}(\zeta)$
 Table. Probabilities of L -regularity of polynomials with coefficients from $\mathbb{Z}_{ab}(\zeta)$

n	$\omega(\lambda_1)$	s	N_t	$P(L_1)$	$P(L_2)$	$P(L_4)$	$P(L_5)$	$P(L_6)$	$P(L_7)$
8	1 000 000	2	10 000	1	1	1	1	1	1
8	7	15	1000	0.996	1	1	1	1	1
8	7	20	1000	0.993	1	1	1	1	1
3	7	20	1000	0.931	1	0.972	1	0.997	1
3	3	2	100 000	0.746	0.980	0.940	0.995	0.894	1
97	10	5	100	1	1	1	1	1	1

Список литературы

1. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. Москва : Наука, 1985. 503 с.
2. Гришин А. В. О периодической части группы невырожденных 2×2 -матриц // Международная конференция, посвященная 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ. Москва, 2019. С. 26.
3. Гришин А. В., Цыбуля Л. М. О кручении в полной линейной группе и алгоритме диагонализации // Фундаментальная и прикладная математика. 2021. Т. 23, вып. 4. С. 55–71.
4. Murty M. R., Esmond J. Problems in Algebraic Number Theory. New York : Springer New York, 2004. 369 p. (Graduate Texts in Mathematics, vol. 190). <https://doi.org/10.1007/b138452>
5. Гришин А. В., Прокопцев А. А., Цыбуля Л. М. Алгебра и арифметика целых абелевых чисел и компьютерные вычисления // XIII Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф. (Минск, 22–25 ноября 2021 г.) : в 2 ч. Минск : Беларуская навука, 2021. Ч. 2. С. 38–39.
6. Greenberg M. J. An elementary proof of the Kronecker – Weber theorem // The American Mathematical Monthly. 1974. Vol. 81, iss. 6. P. 601–607. <https://doi.org/10.1080/00029890.1974.11993623>
7. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре : Для физ.-мат. фак. ун-тов и пед. ин-тов. 10-е изд. Москва : Наука. Физматлит, 1972. 304 с.

References

1. Borevich Z. I., Shafarevich I. R. *Teoriya chisel* [Number Theory]. Moscow, Nauka, 1985. 503 p. (in Russian).
2. Grishin A. V. On the periodic part of the group of non-degenerate 2×2 matrices. In: *Mezhdunarodnaya konferentsiya, posvyashchennaya 90-letiyu kafedry vysshey algebrы mekhaniko-matematicheskogo fakul'teta MGU* [International Conference Dedicated to the 90th Anniversary of the Department of Higher Algebra of the Faculty of Mechanics and Mathematics of Moscow State University]. Moscow, 2019, pp. 26 (in Russian).
3. Grishin A. V., Tsybulya L. M. On the torsion in the general linear group and the diagonalization algorithm. *Journal of Mathematical Sciences*, 2023, vol. 269, iss. 4, pp. 479–491. <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06294-4>. Translated from *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika*, 2021, vol. 23, iss. 4, pp. 55–71.
4. Murty M. R., Esmond J. *Problems in Algebraic Number Theory*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 190. New York, Springer New York, 2004. 369 p. <https://doi.org/10.1007/b138452>
5. Grishin A. V., Prokoptsev A. A., Tsybulya L. M. Algebra and arithmetic of Abelian integers and computer calculations. *XIII Belarusian Mathematical Conference: Proceedings of the International Scientific Conference*, Minsk, November 22–25, 2021. Minsk, Belaruskaya navuka, 2021, pt. 2, pp. 38–39 (in Russian).
6. Greenberg M. J. An elementary proof of the Kronecker – Weber theorem. *The American Mathematical Monthly*, 1974, vol. 81, iss. 6, pp. 601–607. <https://doi.org/10.1080/00029890.1974.11993623>
7. Faddeev D. K., Sominsky I. S. *Sbornik zadach po vysshey algebre* [Collection of Problems in Higher Algebra]. 10th ed. Moscow, Nauka. Fizmatlit, 1972. 304 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 31.10.2022

Принята к публикации / Accepted 13.01.2023

Опубликована / Published 31.05.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 200–208

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 200–208

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-200-208>, EDN: ZORJSE

Article

Global solvability of the inverse spectral problem for differential systems on a finite interval

V. A. Yurko

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Vjacheslav A. Yurko, yurkova@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4853-0102>, AuthorID: 2934

Abstract. The inverse spectral problem is studied for non-selfadjoint systems of ordinary differential equations on a finite interval. We provide necessary and sufficient conditions for the global solvability of the inverse problem, along with an algorithm for constructing its solution. For solving this nonlinear inverse problem, we develop ideas of the method of spectral mappings, which allows one to construct the potential matrix from the given spectral characteristics and establish conditions for the global solvability of the inverse problem considered.

Keywords: differential systems, spectral characteristics, inverse problems, method of spectral mappings, global solvability

For citation: Yurko V. A. Global solvability of the inverse spectral problem for differential systems on a finite interval. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 200–208. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-200-208>, EDN: ZORJSE

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья
УДК 539.374

Глобальная разрешимость обратной спектральной задачи для дифференциальных систем на конечном интервале

В. А. Юрко

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической физики и вычислительной математики, yurkova@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4853-0102>, AuthorID: 2934

Аннотация. Исследуется обратная спектральная задача для несамосопряженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений на конечном интервале. Получены необходимые и достаточные условия глобальной разрешимости обратной задачи, а также алгоритм построения ее решения. Для решения этой нелинейной обратной задачи используется развитие идей метода спектральных отображений, что позволяет построить потенциальную матрицу по заданным спектральным характеристикам и установить условия глобальной разрешимости рассматриваемой обратной задачи.

Ключевые слова: дифференциальные системы, спектральные характеристики, обратные задачи, метод спектральных отображений, глобальная разрешимость

Для цитирования: Yurko V. A. Global solvability of the inverse spectral problem for differential systems on a finite interval [Юрко В. А. Глобальная разрешимость обратной спектральной задачи для



дифференциальных систем на конечном интервале] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 200–208. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-200-208>, EDN: ZORJSE

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

We study the inverse spectral problem for the following system of differential equations on a finite interval

$$\ell Y(x) := Q_0 Y'(x) + Q(x)Y(x) = \rho Y(x), \quad 0 \leq x \leq T. \tag{1}$$

Here $Y = [y_k]_{k=\overline{1,n}}^t$ is a column-vector (t denotes the transposition), ρ is the spectral parameter, $Q_0 = \text{diag}[q_k]_{k=\overline{1,n}}$, where $q_k \neq 0$ are different complex numbers, and $Q(x) = [q_{kj}(x)]_{k,j=\overline{1,n}}$, where $q_{kj}(x) \in L(0, T)$ are complex-valued functions, and $q_{kk}(x) \equiv 0$. The matrix $Q(x)$ is called the potential.

Inverse problems for systems of the form (1) in different formulations were studied by many authors. Most of the works are devoted to inverse problems for Dirac and AKNS systems, i.e. to the case of $n = 2$ (see, for example, [1]). The main tool for these investigations was the transformation operator method, and the obtained results are similar to the results for the Sturm-Liouville operator (see [1, 2] and the references therein). These results can be easily generalized by the same method for $n > 2$ but only in the exceptional case when all q_k are real (see, for example, [3–5]). However, for system (1) of general form with arbitrary complex q_k and arbitrary integrable potentials the inverse problem is essentially more difficult to study. The method of spectral mappings [6] was created for solving the inverse problem in this general case. In particular, by this method the inverse problem for system (1) on the half-line has been solved in [7]. The inverse problem for system (1) on a finite interval in the general case has been solved in [8], where the uniqueness theorem was proved and a constructive procedure for the solution of the inverse problem was suggested.

In this paper, we study the inverse spectral problem for system (1) with arbitrary complex q_k on a finite interval. As the main spectral characteristic we introduce and investigate the so-called Weyl matrix which is an analog of the classical Weyl function for the Sturm – Liouville operator and the Weyl matrix introduced in [9, 10] for higher-order differential operators. The main method of the investigation is the method of spectral mappings. Developing the ideas of this method in connection with systems of the form (1) and using discovered properties of the Weyl matrix, we provide necessary and sufficient conditions for the solvability of the inverse problem considered. We will use some notations and facts from [8].

1. Properties of the spectral characteristics

Let the matrices $h = [h_{\xi\nu}]_{\xi,\nu=\overline{1,n}}$ and $H = [H_{\xi\nu}]_{\xi,\nu=\overline{1,n}}$ be given, where $h_{\xi\nu}, H_{\xi\nu}$ are complex numbers, and $\det h \neq 0, \det H \neq 0$. We introduce the linear forms $U(Y) = [U_\xi(Y)]_{\xi=\overline{1,n}}^t, V(Y) = [V_\xi(Y)]_{\xi=\overline{1,n}}^t$ by the formulae $U(Y) = hY(0), V(Y) = HY(T)$, i.e.

$$U_\xi(Y) = [h_{\xi 1}, \dots, h_{\xi n}]Y(0), \quad V_\xi(Y) = [H_{\xi 1}, \dots, H_{\xi n}]Y(T).$$

Let the vector-functions $\Phi_m(x, \rho) = [\Phi_{\nu m}(x, \rho)]_{\nu=\overline{1,n}}^t, m = \overline{1,n}$ be solutions of system (1) under the conditions $U_\xi(\Phi_m) = \delta_{\xi m}, \xi = \overline{1,m}, V_\eta(\Phi_m) = 0, \eta = \overline{1, n-m}$. Here and in the sequel, $\delta_{\xi m}$ is the Kronecker delta. Let $M_{m\xi}(\rho) = U_\xi(\Phi_m), M(\rho) = [M_{m\xi}(\rho)]_{m,\xi=\overline{1,n}}, \Phi(x, \rho) = [\Phi_1(x, \rho), \dots, \Phi_n(x, \rho)] = [\Phi_{\nu m}(x, \rho)]_{\nu,m=\overline{1,n}}$. The functions $M_{\xi m}(\rho)$ are called the *Weyl functions*. The matrix $M(\rho)$ is called the *Weyl matrix* for system (1).

Inverse problem 1. Fix Q_0, h, H , i.e. the numbers $q_k, h_{\xi\nu}, H_{\xi\nu}, k, \xi, \nu = \overline{1,n}$ are known and fixed. Given the Weyl matrix $M(\rho)$, construct the potential $Q(x), 0 < x < T$.



It is easy to see that in the general case, the specification of the Weyl matrix does not determine uniquely the matrices of the linear forms h and H . It is possible to point out particular cases (when the matrices h and H are normalized and have a special structure) for which the specification of the Weyl matrix uniquely determines not only the potential but also the matrices of the linear forms. For simplicity, we confine ourselves here to the most principal and difficult problem of recovering the potential $Q(x)$.

Let $C(x, \rho) = [C_{km}(x, \rho)]_{k,m=\overline{1,n}}$ be a matrix-solution of system (1) under the initial condition $U(C) = hC(0, \rho) = I$ (here and below I denotes the identity matrix of the corresponding dimension or the identity operator in the corresponding Banach space). In other words, the column-vectors $C_m(x, \rho) = [C_{km}(x, \rho)]_{k=\overline{1,n}}^t$, $m = \overline{1,n}$, are solutions of (1) under the initial conditions $U_\xi(C_m) = \delta_{\xi m}$, $\xi, m = \overline{1,n}$. The functions $C_{km}(x, \rho)$ are entire in ρ for each fixed x . Clearly, $\Phi(x, \rho) = C(x, \rho)\mathcal{N}(\rho)$, where $\mathcal{N}(\rho) := M^t(\rho)$. One has

$$M_{mk}(\rho) = (\Delta_{mm}(\rho))^{-1} \Delta_{mk}(\rho), \quad 1 \leq m < k \leq n, \quad (2)$$

where

$$\Delta_{mk}(\rho) := (-1)^{m+k} \det[V_\xi(C_\nu)]_{\xi=\overline{1,n-m}, \nu=\overline{m,n} \setminus k}, \quad 1 \leq m \leq k \leq n, \quad \Delta_{nn}(\rho) := 1.$$

It is known that the ρ -plane can be partitioned into sectors $S_j = \{\rho : \arg \rho \in (\theta_j, \theta_{j+1})\}$, $j = \overline{0, 2r-1}$, $0 \leq \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{2r-1} \leq 2\pi$ in which there exist permutations $i_k = i_k(S_j)$ of the numbers $1, \dots, n$, such that for the numbers $R_k = R_k(S_j)$ of the form $R_k = \beta_{i_k}$ one has

$$\operatorname{Re}(\rho R_1) < \dots < \operatorname{Re}(\rho R_n), \quad \rho \in S_j. \quad (3)$$

We put $\theta_{j+2kr} := \theta_j$, $S_{j+2kr} := S_j$, $k \in \mathbf{Z}$, and denote $\Gamma_j = \{\rho : \arg \rho = \theta_j\}$. Clearly, $\Gamma_{j+2kr} := \Gamma_j$, $k \in \mathbf{Z}$. We note that the number $2r$ of the sectors S_j depends on the location of the numbers $\{\beta_k\}_{k=\overline{1,n}}$ on the complex-plane, and $1 \leq r \leq n(n-1)/2$. For example, if all β_k lie on a line containing the origin, then $r = 1$. Denote

$$\begin{aligned} \Omega_{mk}^0(j_1, \dots, j_m) &:= \det[h_{\xi, j_\nu}]_{\xi=\overline{1, m-1}, k; \nu=\overline{1, m}}, \quad 1 \leq m \leq k \leq n, \\ \Omega_m^0(j_1, \dots, j_m) &:= \Omega_{mm}^0(j_1, \dots, j_m), \quad \Omega_0^0 := 1, \\ \Omega_m^1(j_{m+1}, \dots, j_n) &:= \det[H_{\xi, j_\nu}]_{\xi=\overline{1, n-m}, \nu=\overline{m+1, n}}. \end{aligned}$$

Let

$$\Omega_m^0(i_1, \dots, i_m) \neq 0, \quad \Omega_m^1(i_{m+1}, \dots, i_n) \neq 0, \quad m = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{0, 2r-1}, \quad (4)$$

where $i_k = i_k(S_j)$ is the above-mentioned perturbation for the sector S_j . Condition (4) is called the *regularity condition*. Systems, that do not satisfy the regularity condition, possess qualitatively different properties for investigating inverse problems and are not considered in this paper.

Fix $j = \overline{0, 2r-1}$. For $\rho \in \Gamma_j$, strict inequalities from (3) in some places become equalities. Let $m_i = m_i(j)$, $p_i = p_i(j)$, $i = \overline{1, s}$, be such that for $\rho \in \Gamma_j$,

$$\operatorname{Re}(\rho R_{m_i-1}) < \operatorname{Re}(\rho R_{m_i}) = \dots = \operatorname{Re}(\rho R_{m_i+p_i}) < \operatorname{Re}(\rho R_{m_i+p_i+1}), \quad i = \overline{1, s},$$

where $R_k = R_k(S_j)$.

Denote $N_j := \{m : m = \overline{m_1, m_1 + p_1 - 1}, \dots, \overline{m_s, m_s + p_s - 1}\}$, $J_m := \{j : m \in N_j\}$, $\gamma_m = \bigcup_{j \in J_m} \Gamma_j$, $\Sigma_m = \mathbf{C} \setminus \gamma_m$ is the ρ -plane without the cuts along the rays from γ_m . Clearly, the domain $\Sigma_m = \bigcup_{\nu} S_{m\nu}$ consists of sectors $S_{m\nu}$, each of which is a union of several sectors S_j with the same collection $\{R_\xi\}_{\xi=\overline{1, m}}$. Let $\Gamma_{j, \sigma} := \{\rho : \operatorname{dist}(\rho, \Gamma_j) \leq \sigma\}$, $\sigma > 0$, be a strip along the ray Γ_j , and let $\gamma_{m, \sigma} := \bigcup_{j \in J_m} \Gamma_{j, \sigma} = \{\rho : \operatorname{dist}(\rho, \gamma_m) \leq \sigma\}$. Denote $\Gamma_\sigma^1 := \bigcup_{j=0}^{2r-1} \Gamma_{j, \sigma}$, $\Gamma^1 := \bigcup_{j=0}^{2r-1} \Gamma_j$.



Denote by $\Lambda_m = \{\rho_{lm}\}_{l \geq 1}$, $m = \overline{1, n-1}$, the set of zeros (with multiplicities) of the entire function $\Delta_{mm}(\rho)$, and put $\Lambda := \bigcup_{m=1}^{n-1} \Lambda_m$. The numbers $\{\rho_{lm}\}_{l \geq 1}$ coincide with the eigenvalues of the boundary value problem L_m for system (1) under the conditions $U_\xi(Y) = V_\eta(y) = 0$, $\xi = \overline{1, m}$, $\eta = \overline{1, n-m}$. Denote $G_{\delta, m} = \{\rho : |\rho - \rho_{lm}| \geq \delta, l \geq 1\}$, $G_\delta = \bigcap_{m=1}^{n-1} G_{\delta, m}$. Let $\Lambda_m^0 = \{\rho_{lm}^0\}_{l \geq 1}$, $m = \overline{1, n-1}$, be the eigenvalues of the “simplest” boundary value problems L_m^0 for system (1) with $Q(x) \equiv 0$. The following properties of the Weyl matrix were established in [8].

Theorem 1. *1. The Weyl functions $M_{mk}(\rho)$, $k > m$ are meromorphic in ρ with the set $\Lambda_m = \{\rho_{lm}\}_{l \geq 1}$ of poles. For $|\rho| \rightarrow \infty$, $\arg \rho = \theta \in (\theta_j, \theta_{j+1})$,*

$$M_{mk}(\rho) = M_{mk}^0 + O(\rho^{-1}),$$

where $M_{mk}^0 = (\Omega_m^0(i_1, \dots, i_m))^{-1} \Omega_{mk}^0(i_1, \dots, i_m)$. Moreover,

$$|M_{mk}(\rho)| \leq C_\delta, \quad \rho \in G_{\delta, m}. \tag{5}$$

2. There exists $\sigma > 0$ such that $\Lambda_m \subset \gamma_{m, \sigma}$. Moreover, $\Lambda_m = \bigcup_{j \in J_m} \Lambda_{mj}$, where $\Lambda_{mj} \in \Gamma_{j, \sigma}$ is the subsequence of Λ_m located in the strip $\Gamma_{j, \sigma}$, $j \in J_m$.

3. The number n_{ma} of zeros of $\Delta_{mm}(\rho)$ in the domain $\gamma_{m, \sigma}^a := \{\rho : \rho \in \gamma_{m, \sigma}, |\rho| \in [a, a+1]\}$ is bounded with respect to a .

4. There exist positive numbers $r_N \rightarrow \infty$ such that for sufficiently small $\delta > 0$, the circles $|\rho| = r_N$ lie in G_δ for all N .

5. For $m = \overline{1, n-1}$, one has $\rho_{lm} = \rho_{lm}^0 + O(l^{-1})$ as $l \rightarrow \infty$.

We consider the differential system

$$\ell^* Z(x) := -Z'(x)Q_0 + Z(x)Q(x) = \rho Z(x),$$

where $Z = [z_k]_{k=\overline{1, n}}$ is a row-vector. Clearly,

$$Z(x)\ell Y(x) - \ell^* Z(x)Y(x) = \frac{d}{dx} \left(Z(x)Q_0 Y(x) \right). \tag{6}$$

It follows from (6) that if $\ell Y(x, \rho) = \rho Y(x, \rho)$ and $\ell^* Z(x, \mu) = \mu Z(x, \mu)$, then

$$(\rho - \mu)Z(x, \mu)Y(x, \rho) = \frac{d}{dx} \left(Z(x, \mu)Q_0 Y(x, \rho) \right). \tag{7}$$

Put $U^*(Z) = Z(0)h^*$, $V^*(Z) = Z(T)H^*$, where $h^* = [h_{k\xi}^*]_{k, \xi=\overline{1, n}} := Q_0 h^{-1}$, $H^* = [H_{k\xi}^*]_{k, \xi=\overline{1, n}} := Q_0 H^{-1}$. Then $U^*(Z) = [U_n^*(Z), \dots, U_1^*(Z)]$, $V^*(Z) = [V_n^*(Z), \dots, V_1^*(Z)]$, where $U_{n-\xi+1}^*(Z) = Z(0)[h_{k\xi}^*]_{k=\overline{1, n}}^t$, $V_{n-\xi+1}^*(Z) = Z(T)[H_{k\xi}^*]_{k=\overline{1, n}}^t$.

Denote $R_m^* := -R_{n-m+1}$. Let vector-functions $\Phi_m^*(x, \rho) = [\Phi_{km}^*(x, \rho)]_{k=\overline{1, n}}$, $m = \overline{1, n}$ be solutions of the equation $\ell^* Z = \rho Z$, satisfying the conditions $U_\xi^*(\Phi_m^*) = \delta_{\xi m}$, $\xi = \overline{1, m}$, $V_\eta^*(\Phi_m^*) = 0$, $\eta = \overline{1, n-m}$. We put $\Phi^*(x, \rho) = [\Phi_{n-m+1}^*(x, \rho)]_{m=\overline{1, n}}^t = [\Phi_{n-m+1, k}^*(x, \rho)]_{m, k=\overline{1, n}}$.

2. Solution of the inverse problem

It was proved in [8] that the specification of the Weyl matrix $M(\rho)$ uniquely determines the potential matrix $Q(x)$. In this section, we provide a constructive solution to the inverse problem of recovering the potential matrix $Q(x)$ from the given Weyl matrix $M(\rho)$. For this purpose, we reduce our nonlinear inverse problem to the solution of the so-called *main equation*, which is a linear equation in a corresponding Banach space of sequences. We give a derivation of



the main equation and prove its unique solvability. Using the solution of the main equation we provide an algorithm for the solution of the inverse problem along with necessary and sufficient conditions for its solvability. For simplicity, in the sequel we confine ourselves to the case when the functions $\Delta_{mm}(\rho)$, $m = \overline{1, n-1}$, have only simple zeros (the general case requires minor technical modifications).

For $\rho_0 \in \Lambda$ we define the matrix $F(\rho_0) = [F_{jk}(\rho_0)]_{j,k=\overline{1,n}}$ via

$$F(\rho_0) = -(N_{(0)}(\rho_0))^{-1}N_{(-1)}(\rho_0).$$

Here and below $f_{(k)}(\rho_0) = (f(\rho))_{|\rho=\rho_0}^{(k)}$ denotes the k -th Laurent's coefficient for the function $f(\rho)$ at the point $\rho = \rho_0$. In particular, $f_{(-1)}(\rho_0) = \text{Res}_{\rho=\rho_0} f(\rho)$.

Denote $A_s(\rho_0) = [F_{\nu j}(\rho_0)]_{j=\overline{1, n-s}, \nu=\overline{n-s, n}}$, $s = \overline{1, n-1}$, $\Lambda_0 = \Lambda_n = \emptyset$.

Property S_1 . If $\rho_0 \notin \Lambda_m$, then $F_{m+1,j}(\rho_0) = \dots = F_{nj}(\rho_0) = 0$, $j = \overline{1, m}$. If, moreover, $\nu < m-1$, $\rho_0 \notin \Lambda_\nu$, $\rho_0 \in \Lambda_{\nu+1} \cap \dots \cap \Lambda_{m-1}$, $\rho_0 \notin \Lambda_m$, $1 \leq \nu+1 < m \leq n$, then $F_{m,\nu+1}(\rho_0) \neq 0$.

Property S_2 . The following relation holds $\text{rank } A_s(\rho_0) \leq 1$, $s = \overline{1, n-1}$.

Fix $N \geq 1$. Denote by W_N the set of functions $f(x)$ such that $f^{(\nu)}(x)$, $\nu = \overline{0, N-1}$, are absolutely continuous on $[0, T]$. We will write $\ell \in V_N$ if $Q(x) \in W_N$. We will solve the inverse problem in the classes V_N .

Let $\ell \in V_N$ and let the Weyl matrix $M(\rho)$ for system (1) be given. We take an arbitrary off-diagonal potential $\tilde{Q}(x) \in W_N$. We agree that everywhere below if a symbol α denotes an object related to Q , then $\tilde{\alpha}$ will denote the analogous object related to \tilde{Q} , and $\hat{\alpha} := \alpha - \tilde{\alpha}$.

Choose $\sigma > 0$ such that $\Lambda^1 := \Lambda \cup \tilde{\Lambda} \subset \Gamma_\sigma^1$. Let ω be the contour (with a counterclockwise circuit) which is the boundary of Γ_σ^1 , i.e. $\omega := \{\rho : \text{dist}(\rho, \Gamma^1) = \sigma\}$.

Denote $J := \{\rho : \text{dist}(\rho, \Gamma^1) > \sigma\}$. Then the following relations hold

$$\tilde{\Phi}(x, \rho) = \Phi(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_\omega \Phi(x, \mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho) \frac{d\mu}{\mu - \rho}, \quad \rho \in J, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{\Phi}^*(x, \theta) Q_0 \Phi(x, \rho)}{\rho - \theta} - \frac{\tilde{\Phi}^*(x, \theta) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho)}{\rho - \theta} = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_\omega \tilde{\Phi}^*(x, \theta) Q_0 \Phi(x, \mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho) \frac{d\mu}{(\mu - \theta)(\rho - \mu)}, \quad \rho, \theta \in J. \end{aligned} \quad (9)$$

Denote

$$\xi_l := \sum_{k=2}^n \left(|\rho_{l,k-1} - \tilde{\rho}_{l,k-1}| + \sum_{s=1}^{k-1} |\gamma_{skl} - \tilde{\gamma}_{skl}| \right), \quad l \geq 1,$$

where $\gamma_{skl} := F_{ks}(\rho_{l,k-1})$, $\tilde{\gamma}_{skl} := \tilde{F}_{ks}(\tilde{\rho}_{l,k-1})$, $s = \overline{1, k-1}$, $k = \overline{2, n}$, $l \geq 1$. It is possible to choose $\tilde{Q}(x)$ such that $\xi_l = O(l^{-N-1})$ for $l \rightarrow \infty$.

For $\rho_0 \in \Lambda^1$ we introduce the matrix $\tilde{D}(x, \rho_0, \rho) = [\tilde{D}_{sm}(x, \rho_0, \rho)]_{s,m=\overline{1,n}}$ by the formula

$$\tilde{D}(x, \rho_0, \rho) := \left(\frac{\tilde{\Phi}^*(x, \mu) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho)}{\rho - \mu} \right)_{|\mu=\rho_0}^{(0)} = \left(\frac{\tilde{\Phi}_{(-1)}^*(x, \rho_0)}{(\rho - \rho_0)^2} + \frac{\tilde{\Phi}_{(0)}^*(x, \rho_0)}{\rho - \rho_0} \right) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho).$$

Denote $\rho_{lk0} = \rho_{lk}$, $\rho_{lk1} = \tilde{\rho}_{lk}$, $\gamma_{l0}^{sk} = \gamma_{skl}$, $\gamma_{l1}^{sk} = \tilde{\gamma}_{skl}$. We introduce the matrices

$$\begin{aligned} \varphi_{l\varepsilon}(x) &= [\varphi_{l\varepsilon}^{ik}(x)]_{i=\overline{1,n}, k=\overline{2,n}}, & \tilde{\varphi}_{l\varepsilon}(x) &= [\tilde{\varphi}_{l\varepsilon}^{ik}(x)]_{i=\overline{1,n}, k=\overline{2,n}}, \\ P_{l\varepsilon}(x, \rho) &= [P_{l\varepsilon}^{km}(x, \rho)]_{k=\overline{2,n}, m=\overline{1,n}}, & \tilde{P}_{l\varepsilon}(x, \rho) &= [\tilde{P}_{l\varepsilon}^{km}(x, \rho)]_{k=\overline{2,n}, m=\overline{1,n}}, \\ G_{(l\varepsilon)(l_0\varepsilon_0)}(x) &= [G_{(l\varepsilon)(l_0\varepsilon_0)}^{km}(x)]_{k,m=\overline{2,n}}, & \tilde{G}_{(l\varepsilon)(l_0\varepsilon_0)}(x) &= [\tilde{G}_{(l\varepsilon)(l_0\varepsilon_0)}^{km}(x)]_{k,m=\overline{2,n}}, \\ & & l, l_0 > 1, \quad \varepsilon, \varepsilon_0 &= 0, 1, \end{aligned}$$



by the formulae

$$\begin{aligned} \varphi_{l\varepsilon}^{ik}(x) &= \Phi_{ik,\langle 0 \rangle}(x, \rho_{l,k-1,\varepsilon}), & \tilde{\varphi}_{l\varepsilon}^{ik}(x) &= \tilde{\Phi}_{ik,\langle 0 \rangle}(x, \rho_{l,k-1,\varepsilon}), \\ P_{l\varepsilon}^{km}(x, \rho) &= \sum_{s=1}^{k-1} \gamma_{l\varepsilon}^{sk} D_{sm}(x, \rho_{l,k-1,\varepsilon}, \rho), & \tilde{P}_{l\varepsilon}^{km}(x, \rho) &= \sum_{s=1}^{k-1} \gamma_{l\varepsilon}^{sk} \tilde{D}_{sm}(x, \rho_{l,k-1,\varepsilon}, \rho), \\ G_{(l\varepsilon)(l_0\varepsilon_0)}^{km}(x) &= P_{l\varepsilon,\langle 0 \rangle}^{km}(x, \rho_{l_0,m-1,\varepsilon_0}), & \tilde{G}_{(l\varepsilon)(l_0\varepsilon_0)}^{km}(x) &= \tilde{P}_{l\varepsilon,\langle 0 \rangle}^{km}(x, \rho_{l_0,m-1,\varepsilon_0}). \end{aligned}$$

Denote $u_{lm}(x) := |\exp(\tilde{\rho}_{l,m-1} R_m x)|$, $l \in \tilde{\Lambda}_{m-1,j}$, $j \in J_{m-1}$, $R_m = R_m(S_j)$. Using (8) and taking our notations into account we obtain

$$\tilde{\Phi}(x, \rho) = \Phi(x, \rho) + \sum_{l \geq 1} \left(\varphi_{l0}(x) \tilde{P}_{l0}(x, \rho) - \varphi_{l1}(x) \tilde{P}_{l1}(x, \rho) \right). \tag{10}$$

It follows from (10) that

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{l_0\varepsilon_0}(x) &= \varphi_{l_0\varepsilon_0}(x) + \sum_{l \geq 1} \left(\varphi_{l0}(x) \tilde{G}_{(l0)(l_0\varepsilon_0)}(x) - \varphi_{l1}(x) \tilde{G}_{(l1)(l_0\varepsilon_0)}(x) \right), \\ l_0 &> 1, \quad \varepsilon_0 = 0, 1. \end{aligned} \tag{11}$$

For each fixed $x \in [0, T]$, relation (11) can be considered as a system of linear equations with respect to $\varphi_{l\varepsilon}(x)$, $l \geq 1$, $\varepsilon = 0, 1$. But the series in (11) converges only “with brackets”. Therefore, it is not convenient to use (11) as a main equation of the inverse problem. Below we will transfer (11) to a linear equation in a corresponding Banach space of sequences (see (15)).

For this purpose we introduce the matrices

$$\psi_{l\varepsilon}(x) = [\psi_{l\varepsilon}^{ik}(x)]_{i=\overline{1,n}, k=\overline{2,n}}, \quad H_{(l\varepsilon)(l_0\varepsilon_0)}^{km}(x) = [H_{(l\varepsilon)(l_0\varepsilon_0)}^{km}(x)]_{k,m=\overline{2,n}}, \quad l, l_0 > 1, \quad \varepsilon, \varepsilon_0 = 0, 1,$$

by the formulae

$$\begin{aligned} \psi_{l_0}^{ik}(x) &= (\xi_l u_{lk}(x))^{-1} (\varphi_{l_0}^{ik}(x) - \varphi_{l_1}^{ik}(x)), & \psi_{l_1}^{ik}(x) &= (u_{lk}(x))^{-1} \varphi_{l_1}^{ik}(x), \\ H_{(l_0)(l_0)}^{km}(x) &= \xi_l u_{lk}(x) (\xi_{l_0} u_{l_0m}(x))^{-1} \left(G_{(l_0)(l_0)}^{km}(x) - G_{(l_0)(l_0)}^{km}(x) \right), \\ H_{(l_0)(l_0)}^{km}(x) &= \xi_l u_{lk}(x) (u_{l_0m}(x))^{-1} G_{(l_0)(l_0)}^{km}(x), \\ H_{(l_1)(l_0)}^{km}(x) &= u_{lk}(x) (\xi_{l_0} u_{l_0m}(x))^{-1} \left(G_{(l_0)(l_0)}^{km}(x) - G_{(l_0)(l_0)}^{km}(x) - G_{(l_1)(l_0)}^{km}(x) + G_{(l_1)(l_0)}^{km}(x) \right), \\ H_{(l_1)(l_0)}^{km}(x) &= u_{lk}(x) (u_{l_0m}(x))^{-1} \left(G_{(l_0)(l_0)}^{km}(x) - G_{(l_1)(l_0)}^{km}(x) \right). \end{aligned} \tag{12}$$

Similarly, we define the matrices $\tilde{\psi}_{l\varepsilon}(x)$ and $\tilde{H}_{(l\varepsilon)(l_0\varepsilon_0)}(x)$. Then

$$|\psi_{l\varepsilon}^{ik}(x)| \leq C, \quad |\tilde{\psi}_{l\varepsilon}^{ik}(x)| \leq C, \tag{13}$$

$$|H_{(l\varepsilon)(l_0\varepsilon_0)}^{km}(x)|, |\tilde{H}_{(l\varepsilon)(l_0\varepsilon_0)}^{km}(x)| \leq \frac{C \xi_l}{|l - l_0| + 1}. \tag{14}$$

Let V be a set of indices $u = (l, \varepsilon)$, $l \geq 1$, $\varepsilon = 0, 1$. For each fixed $x \in [0, T]$, we define the vector

$$\psi(x) = [\psi_u(x)]_{u \in V} = [\psi_{l0}(x), \psi_{l1}(x)]_{l \geq 1} = [\psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{20}, \psi_{21}, \dots],$$

and the block matrix

$$H(x) = [H_{uv}(x)]_{u,v \in V} = \left[\begin{array}{cc} H_{(l_0)(l_0)}(x) & H_{(l_0)(l_0)}(x) \\ H_{(l_1)(l_0)}(x) & H_{(l_1)(l_0)}(x) \end{array} \right]_{l, l_0 \geq 1},$$



$$u = (l, \varepsilon), \quad v = (l_0, \varepsilon_0), \quad \varepsilon, \varepsilon_0 = 0, 1.$$

Analogously, we define the matrices $\tilde{\psi}(x)$ and $\tilde{H}(x)$. In view of our notations, relation (11) transforms to the form

$$\tilde{\psi}_{l_0\varepsilon_0}(x) = \psi_{l_0\varepsilon_0}(x) + \sum_{l,\varepsilon} \psi_{l\varepsilon}(x) \tilde{H}_{(l\varepsilon)(l_0\varepsilon_0)}(x), \quad l, l_0 \geq 1, \quad \varepsilon, \varepsilon_0 = 0, 1,$$

or, which is the same,

$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x)(I + \tilde{H}(x)). \tag{15}$$

According to (13) and (14), the series in (15) converges absolutely and uniformly in $x \in [0, T]$.

Starting from (8), we arrived at (15). By similar arguments, starting from (9) one can get the relation

$$(I + \tilde{H}(x))(I - H(x)) = I.$$

Interchanging places for Q and \tilde{Q} , we obtain

$$(I - H(x))(I + \tilde{H}(x)) = I.$$

Let us consider the Banach space m of bounded sequences $\alpha = [\alpha_u]_{u \in V}$ with the norm $\|\alpha\| = \sup_{u \in V} |\alpha_u|$. It follows from (14) that for each fixed $x \in [0, T]$, the operators $I + \tilde{H}(x)$ and $I - H(x)$, acting from m to m , are linear bounded operators, and

$$\|H(x)\|, \|\tilde{H}(x)\| \leq C \sup_{l \geq 1} \sum_{l_0 \geq 1} \frac{\xi_l}{|l - l_0| + 1} < \infty.$$

Thus, we have proved the following theorem

Theorem 2. For each fixed $x \in [0, T]$, the vector $\psi(x) \in m$ satisfies the equation (15) in the Banach space m . Moreover, the operator $I + \tilde{H}(x)$ has a bounded inverse operator, i.e. equation (15) is uniquely solvable.

Equation (15) is called the *main equation* of the inverse problem. Solving (15) we find the vector $\psi(x)$, and consequently, the functions $\varphi_{l\varepsilon}(x)$. Then, by (10) we calculate $\Phi(x, \rho)$. Denote

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \left(\Phi(x, \mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) Q_0 - Q_0 \Phi(x, \mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) \right). \tag{16}$$

Theorem 3. The following relation holds

$$Q(x) = \tilde{Q}(x) + \varepsilon(x). \tag{17}$$

Proof. Differentiating (8) and using (7), we calculate

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}'(x, \rho) &= \Phi'(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \Phi'(x, \mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho) \frac{d\mu}{\mu - \rho} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \Phi(x, \mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) \tilde{\Phi}(x, \rho) d\mu. \end{aligned}$$

Since $\Phi(x, \rho)$ is a solution of system (1) it follows that $\Phi'(x, \rho) = (\rho B_0 - B(x))\Phi(x, \rho)$, where $B_0 = Q_0^{-1}$, $B(x) = B_0 Q(x)$. Similarly, $\tilde{\Phi}'(x, \rho) = (\rho B_0 - \tilde{B}(x))\tilde{\Phi}(x, \rho)$. This yields

$$\begin{aligned} (\rho B_0 - \tilde{B}(x))\tilde{\Phi}(x, \rho) &= (\rho B_0 - B(x))\Phi(x, \rho) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} (\mu B_0 - B(x))\Phi(x, \mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho) \frac{d\mu}{\mu - \rho} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \Phi(x, \mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) \tilde{\Phi}(x, \rho) d\mu. \end{aligned}$$



Replacing here $\Phi(x, \rho)$ from (8), we calculate

$$\hat{B}(x)\tilde{\Phi}(x, \rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} B_0\Phi(x, \mu)\tilde{\Phi}^*(x, \mu)Q_0\tilde{\Phi}(x, \rho)d\mu - \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \Phi(x, \mu)\tilde{\Phi}^*(x, \mu)\tilde{\Phi}(x, \rho)d\mu.$$

Multiplying this relation from the left on Q_0 , we obtain $\hat{Q}(x)\tilde{\Phi}(x, \rho) = \varepsilon(x)\tilde{\Phi}(x, \rho)$, and consequently, (17) holds. \square

The solution of the inverse problem can be found by the following algorithm.

Algorithm. Given the Weyl matrix $M(\rho)$.

1. Choose $\tilde{Q}(x)$, and construct $\tilde{\psi}(x)$ and $\tilde{H}(x)$.
2. Find $\psi(x)$ by solving equation (15).
3. Calculate $\Phi(x, \rho)$ via (10), where $\varphi_{l\varepsilon}(x)$ is constructed from (12).
4. Construct $Q(x)$ by (17).

Let us now formulate the necessary and sufficient conditions for the solvability of the inverse problem. Denote by \mathbf{W} the set of meromorphic matrices $M(\rho) = [M_{mk}(\rho)]_{m,k=\overline{1,n}}$, $M_{mk}(\rho) \equiv \delta_{mk}$ for $m \geq k$, having only simple poles $\Lambda = \bigcup_m \Lambda_m$ (in general, the set Λ is different for each matrix $M(\rho)$) and such that (5) is valid and for each $\rho_0 \in \Lambda$ the properties S_1 and S_2 hold.

Clearly, if $\ell \in V_N$ and $M(\rho)$ is the Weyl matrix for ℓ , then $M(\rho) \in \mathbf{W}$.

Theorem 4. A matrix $M(\rho) \in \mathbf{W}$ is the Weyl matrix for some $\ell \in V_N$ if and only if the following conditions hold:

- 1) (asymptotics) there exists $\tilde{\ell} \in V_N$ such that $\sum_l \xi_l < \infty$;
- 2) (condition S) for each fixed $x \in [0, T]$ the linear bounded operator $I + \tilde{H}(x)$, acting from m to m , has a bounded inverse operator;
- 3) $\varepsilon(x) \in W_N$, where $\varepsilon(x)$ is defined by (16).

Under these conditions, the potential $Q(x)$ is constructed by Algorithm.

The necessity part is proved above. In the sufficiency part, we have a matrix $M(\rho) \in \mathbf{W}$ satisfying the conditions of Theorem 4. Using the Algorithm we construct the potential $Q(x)$, i.e. we construct $\ell \in V_N$. By similar arguments as in [8], one can check that the matrix $M(\rho)$ is the Weyl matrix for ℓ .

Remark. The inverse problem from a system of spectra.

The zeros $\Lambda_{mk} := \{\rho_{lmk}\}$ of the entire functions $\Delta_{mk}(\rho)$ coincide with the eigenvalues of the boundary value problems L_{mk} for system (1) with the boundary conditions

$$U_1(Y) = \dots = U_{m-1}(Y) = U_k(Y) = V_1(Y) = \dots = V_{n-m}(Y) = 0.$$

The inverse problem of recovering the potential from the system of spectra is formulated as follows: given the spectra Λ_m and Λ_{mk} of the boundary value problems L_m and L_{mk} ($m = \overline{1, n-1}$, $k > m$), construct the potential $Q(x)$. Since the functions $\Delta_{mk}(\rho)$ are uniquely determined by their zeros, it follows from (2) that this inverse problem can be reduced to the inverse problem from the Weyl matrix.

References

1. Levitan B. M., Sargsjan I. S. *Sturm – Liouville and Dirac Operators*. Mathematics and Applications, vol. 59. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1991. 350 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1988). <https://doi.org/10.1007/978-94-011-3748-5>
2. Freiling G., Yurko V. A. *Inverse Sturm – Liouville Problems and Their Applications*. New York, NOVA Science Publishers, 2001. 305 p.
3. Shabat A. B. An inverse scattering problem. *Differential Equations*, 1979, vol. 15, iss. 10, pp. 1299–1307.
4. Malamud M. M. Questions of uniqueness in inverse problems for systems of differential equations on a finite interval. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, 1999, vol. 60, pp. 173–224.



5. Sakhnovich L. A. *Spectral Theory of Canonical Differential Systems. Method of Operator Identities*. Operator Theory: Advances and Applications, vol. 107. Basel, Birkhauser Verlag, 1999. 202 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8713-7>
6. Yurko V. A. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*. Inverse and Ill-Posed Problems Series, vol. 31. Utrecht, VSP, 2002. 303 p. <https://doi.org/10.1515/9783110940961>
7. Yurko V. A. An inverse spectral problem for singular non-selfadjoint differential systems. *Sbornik: Mathematics*, 2004, vol. 195, iss. 12, pp. 1823–1854. <https://doi.org/10.1070/SM2004v195n12ABEH000869>
8. Yurko V. A. Inverse spectral problems for differential systems on a finite interval. *Results in Mathematics*, 2005, vol. 48, pp. 371–386. <https://doi.org/10.1007/BF03323374>
9. Yurko V. A. Recovery of nonselfadjoint differential operators on the half-line from the Weyl matrix. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1992, vol. 72, iss. 2, pp. 413–438. <https://doi.org/10.1070/SM1992v072n02ABEH002146>
10. Yurko V. A. *Inverse Spectral Problems for Differential Operators and their Applications*. Amsterdam, Gordon and Breach, 2000. 272 p. <https://doi.org/10.1201/9781482287431>

Поступила в редакцию / Received 29.11.2022

Принята к публикации / Accepted 24.05.2023

Опубликована / Published 31.05.2024

МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 209–221

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 209–221

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-209-221>

EDN: WILEKW

Научная статья

УДК 539.3

Об одном новом подходе к идентификации неоднородных механических свойств упругих тел

А. О. Ватульян¹, В. О. Юров²✉

¹Южный федеральный университет, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

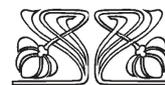
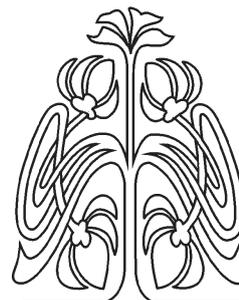
²Южный математический институт — филиал Владикавказского научного центра, Россия, 362025, г. Владикавказ, ул. Ватутина, д. 53

Ватульян Александр Ованесович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории упругости, aovatulyan@sfedu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, AuthorID: 3469

Юров Виктор Олегович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений, vuurov@sfedu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4689-4068>, AuthorID: 936484

Аннотация. Представлен новый подход к решению задачи об идентификации переменных характеристик неоднородного упругого изотропного тела. Приведены наиболее употребительные постановки задач об определении переменных механических характеристик (параметры Ламе и плотность — функции координат). Обратная задача идентификации свойств в силу своей существенной нелинейности обычно решается итерационным образом, причем каждая итерация требует решения прямой задачи для некоторого начального приближения и системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами для нахождения поправок. Такой подход, в свою очередь, требует задания поля перемещений в области, в которой осуществляется нагружение. Предложен подход, на базе которого возможно осуществлять реконструкцию при съеме дополнительной информации о поле смещений в области, отличной от области нагружения, в более узком пространстве поиска. Представлен пример такой реконструкции в задаче о продольных колебаниях неоднородного стержня, где амплитудно-частотная характеристика задана во внутренней точке стержня, а нагружение реализовано на торце. Приведены результаты вычислительных экспериментов по реконструкции модуля упругости и плотности в виде двух функций продольной координаты.

Ключевые слова: обратная задача, неоднородные свойства, колебания, амплитудно-частотные характеристики



Научный
отдел



Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>) в Южном федеральном университете.

Для цитирования: Ватulyян А. О., Юров В. О. Об одном новом подходе к идентификации неоднородных механических свойств упругих тел // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 209–221. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-209-221>, EDN: WILEKW

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

On a new approach to identifying inhomogeneous mechanical properties of elastic bodies

A. O. Vatulyan¹, V. O. Yurov²✉

¹Southern Federal University, 8a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

²Southern Mathematical Institute — the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Centre of Russian Academy of Sciences, 53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia

Alexander O. Vatulyan, aovatulyan@sfnu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, AuthorID: 3469

Victor O. Yurov, vyurov@sfnu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4689-4068>, AuthorID: 936484

Abstract. A new approach to solving the problem of identifying the variable characteristics of an inhomogeneous elastic isotropic body is presented. The most common formulations of problems on determining variable mechanical characteristics (the Lamé parameters and density are functions of coordinates) are presented. The inverse problem of identifying properties, due to its significant nonlinearity, is usually solved iteratively, with each iteration requiring the solution of a direct problem for some initial approximation and a system of the Fredholm integral equations of the first kind with smooth kernels to find corrections. This approach, in turn, requires specifying the displacement field in the area in which the loading occurs. An approach is proposed on the basis of which it is possible to carry out reconstruction by obtaining additional information about the displacement field in an area other than the loading area in a narrower search space. An example of such a reconstruction is presented in the problem of longitudinal vibrations of an inhomogeneous rod, where the amplitude-frequency response is specified at the internal point of the rod, and the loading is implemented at the end. The results of computational experiments on the reconstruction of the elasticity modulus and density in the form of two functions of the longitudinal coordinate are presented.

Keywords: inverse problem, inhomogeneous properties, oscillations, amplitude-frequency characteristics

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>) in Southern Federal University.

For citation: Vatulyan A. O., Yurov V. O. On a new approach to identifying inhomogeneous mechanical properties of elastic bodies. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 209–221 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-209-221>, EDN: WILEKW

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Аналитические и численные методы решения коэффициентных обратных задач механики (КОЗ) — интенсивно развивающаяся область, находящаяся на стыке классической механики сплошной среды с переменными свойствами, математической теории некорректных задач и вычислительной математики. В обратных задачах такого типа требуется восстановить (или оценить степень изменчивости) физические характеристики по дополнительной информации,



получаемой при зондировании объекта исследования некоторой нагрузкой, меняющейся во времени. Дополнительная информация для моделей теории упругости при стационарном воздействии обычно задается в виде значений резонансных частот и мод колебаний или информации о полях смещений. Искомые физические характеристики могут быть постоянными или зависящими от координат функциями, и задача их определения относится к некорректным задачам, для которых характерны возможная неединственность и сильная зависимость реконструкции от малых возмущений измеренных полей или частот [1]. Отметим, что теория обратных коэффициентных задач берет свое начало с обратной задачи рассеяния, в которой по бесконечному спектру восстанавливается потенциал. Этой проблеме и ее математическим аспектам посвящено достаточное количество исследований, продолжающихся и по сей день [2, 3]. В настоящее время имеется много научных работ и монографий, посвященных различным аспектам постановок, методам решения и их реализациям для КОЗ, возникающих в разных разделах математической физики. Среди множества исследований отечественных и зарубежных авторов в этом направлении отметим [4–12], посвященные математическим аспектам постановок и анализу задач, доказательству теорем существования и единственности, в первую очередь использующие принцип сжимающих отображений, и [13–15], в которых обсуждены различные аспекты численной реализации для широкого класса задач, возникающих в задачах теплофизики, теории упругости и в механике связанных полей [16].

В научной литературе существует разделение на конечномерные КОЗ (в них коэффициенты моделей постоянны) и бесконечномерные, в которых отыскивается решение КОЗ в некоторых положительных конусах, вложенных в достаточно хорошо изученные пространства функций (непрерывных, суммируемых). В большинстве публикаций для конечномерных КОЗ используется минимизация как функционала невязки, так и функционала Тихонова. Овражистый характер этих функционалов далеко не всегда позволяет использовать градиентные процедуры минимизации; в последнее время часто при реализации используются нейросети и эволюционные алгоритмы [17].

В случае зависимости искомых параметров-функций от координат операторные уравнения, связывающие заданные и искомые функции, в общем случае неоднородности в явном виде не могут быть построены; решения прямых задач в этом случае могут быть построены лишь с помощью каких-либо численных методов: конечных элементов, конечно-разностных или прямых типа Галеркина или Рунге. При этом на предварительном этапе исследований требуется определять функции, характеризующие свойства материала объекта, что невозможно без достаточно точного решения прямых задач. Таким образом, прямая и обратная задачи оказываются неразрывно связанными.

Отметим, что на современном этапе развития науки и технологий при исследовании ряда проблем деформирования и прочности твердых тел в новых областях (механика композитов и функционально-градиентных структур, геофизика и горная механика, биомеханика) [18–25] модель однородной среды далеко не всегда может быть использована для адекватного описания деформирования элементов природных и искусственных конструкций.

Для анализа колебаний и использования модели неоднородной теории упругости необходимо знать в самом простом случае непрерывно-неоднородного (или кусочно-однородного) изотропного тела три функции (модули Ламе и плотность среды). При этом физические характеристики задаются с помощью функциональных зависимостей, которые должны быть предварительно определены из некоторых экспериментов или наблюдений, как правило, связанных с измерением граничных или внутренних полей смещений при возбуждении колебаний некоторой нагрузкой. Чаще всего такие зависимости предполагаются одномерными (особенно при использовании моделей стержней, слоя, полупространства или слоистого полупространства), а наиболее распространенный способ их определения — анализ отклика исследуемого объекта при возможном варьировании способа нагружения. При этом задача определения нескольких функций [26–29] приводит к исследованию довольно сложных нели-



нейных обратных задач для эллиптических и гиперболических операторов (или операторов смешанного типа). Отметим, что довольно часто принимаемый кусочно-постоянный характер изменения искомых характеристик в ряде ситуаций оправдан, поскольку это предположение существенно сужает область поиска и значительно упрощает исследование обратных задач (сводя их к конечномерным), однако может привести к существенному искажению результатов идентификации и, как следствие, к ошибкам при анализе динамического отклика или при прогнозировании ресурса конструкции.

1. Общая постановка задач для модели неоднородной изотропной теории упругости

Определение переменных механических характеристик неоднородных трехмерных упругих тел, таких как параметры Ламе и плотность, является важной задачей, в рамках которой можно исследовать различные новые задачи. К числу наиболее важных отнесем задачи горной механики, биомеханики тканей и биомеханических конструкций, задачи мониторинга при производстве новых функционально-градиентных материалов, а также при осуществлении неразрушающего контроля для давно введенных в эксплуатацию конструкций.

Такие задачи обычно решаются путем зондирования (возбуждение установившихся колебаний и измерение амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) на части свободной поверхности). Методики решения существенно нелинейных обратных задач такого типа опираются на достаточно сложный математический алгоритм, основанный на операторном методе Ньютона, который требует реализации итеративных схем с контролем невязки, решением прямых задач и систем интегральных уравнений Фредгольма (ИУФ) первого рода с гладкими ядрами относительно поправок [15].

Важно развитие упрощенных алгоритмов реконструкции переменных свойств (возможно, с сужением пространства поиска и потерей точности), которые бы не требовали решения некорректных задач и также обеспечивали высокую скорость вычислений. Для случая, когда системы ИУФ для нахождения поправок не могут быть построены по классической схеме [15], предлагается алгоритм итерационного поиска поправок в классе полиномиальных функций. Опишем основные этапы этого подхода.

1.1. Прямая задача

Рассмотрим установившиеся колебания неоднородного упругого тела с частотой ω . Пусть тело занимает ограниченную область V с границей $S = S_u \cup S_f \cup S_\sigma$. Классическая постановка задачи содержит уравнения колебаний

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

определяющие соотношения для изотропной среды

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

и граничные условия:

$$u_i|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{S_f} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{S_\sigma} = p_i, \quad (3)$$

где u_i — компоненты вектора перемещений, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, n_j , p_i — соответственно компоненты единичного вектора внешней нормали к S и компоненты вектора внешней нагрузки. Будем рассматривать m различных вариантов нагружения, считая, что $p_i = p_i^{(m)}$ (далее соответствующий индекс m у смещений и напряжений опускаем). Область S_u — закреплена, S_f — свободна от нагружения, на S_σ задана внешняя нагрузка. Пусть λ , μ , ρ являются кусочно-непрерывными положительными функциями координат (λ , μ — параметры Ламе, ρ — плотность среды).

Решая задачу (1)–(3), определяем компоненты вектора перемещений как функции координат и частоты колебаний.



1.2. Обратная задача

В рамках представленной выше модели линейной теории упругости рассмотрим задачу о нахождении трех функций λ , μ , ρ по дополнительной информации о поле перемещений u_i , задаваемой в общем случае в виде функций координат и частоты колебаний. В зависимости от типа дополнительной информации будем выделять следующие три постановки обратной задачи:

- 1) компоненты u_i заданы внутри всей области V при некотором фиксированном значении частоты ω ;
- 2) компоненты u_i заданы в области S_σ (т. е. на части границы области V , где задается нагружение) как функции координат и частоты $\omega \in [\omega_-, \omega_+]$;
- 3) компоненты u_i заданы на части внешней границы, свободной от нагружения в области $S_{f0} \subset S_f$ в виде функций координат и частоты $\omega \in [\omega_-, \omega_+]$.

Отметим, что решено большое количество задач в первой и второй постановках [26–29]. Задача в первой постановке может быть реализована применительно к тонкостенным конструкциям или таким мягким тканям, в которых возможно измерение внутренних перемещений. Задача во второй постановке решается при помощи итерационного процесса ньютоновского типа. Суть метода заключается в определении начального приближения и последовательном его уточнении путем нахождения поправок. Для нахождения поправок используется условие разрешимости неоднородной задачи, возникающей в процессе линеаризации. Условие разрешимости приводит к системе интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами. Таким образом, решены обратные задачи для стержней и цилиндров [26–29].

Рассмотрим безразмерную постановку задачи (1)–(3), сформулированную в терминах безразмерных компонент вектора перемещений и тензора напряжений

$$\begin{aligned} t_{ij,j} + g_3 \kappa^2 U_i &= 0, & t_{ij} &= g_1 U_{k,k} \delta_{ij} + g_2 (U_{i,j} + U_{j,i}), & i &= 1, 2, 3; \\ U_i|_{S_u} &= 0, & t_{ij} n_j|_{S_f} &= 0, & t_{ij} n_j|_{S_\sigma} &= P_i, & i &= 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (4)$$

где $g_1 = \lambda \mu_0^{-1}$, $g_2 = \mu \mu_0^{-1}$, $g_3 = \rho \rho_0^{-1}$, $\kappa^2 = \rho_0 \omega^2 d^2 \mu_0^{-1}$, $P_i = p_i \mu_0^{-1}$, $t_{ij} = \sigma_{ij} \mu_0^{-1}$, $U_i = u_i d^{-1}$, μ_0 , ρ_0 – характерные значения модуля упругости и плотности, d – характерный размер области. Заметим, что для реконструкции трех функций нужно использовать дополнительную информацию, полученную как минимум из трех экспериментов по зондированию нагрузками различных типов.

При решении обратной задачи во второй и третьей постановках осуществляется линеаризация задачи в окрестности найденного начального приближения. Выполним разложение по формальному малому параметру ε :

$$U_i = U_i^{(0)} + \varepsilon U_i^{(1)} + O(\varepsilon^2), \quad g_i = g_i^{(0)} + \varepsilon g_i^{(1)} + O(\varepsilon^2). \quad (5)$$

Вводя обозначение $t_{ij}^{(m)} = \left(g_1^{(0)} U_{k,k}^{(m)} \delta_{ij} + g_2^{(0)} (U_{i,j}^{(m)} + U_{j,i}^{(m)}) \right)$, выпишем задачу при нулевой степени формального малого параметра:

$$\begin{aligned} t_{ij,j}^{(0)} + g_3^{(0)} \kappa^2 U_i^{(0)} &= 0, & i &= 1, 2, 3. \\ U_i^{(0)}|_{S_u} &= 0, & t_{ij}^{(0)} n_j|_{S_f} &= 0, & t_{ij}^{(0)} n_j|_{S_\sigma} &= P_i^{(m)}, & i &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (6)$$

Задача при первой степени ε примет вид

$$\begin{aligned} t_{ij,j}^{(1)} + g_3^{(0)} \kappa^2 U_i^{(1)} &= - \left[\left(g_1^{(1)} U_{k,k}^{(0)} \delta_{ij} + g_2^{(1)} (U_{i,j}^{(0)} + U_{j,i}^{(0)}) \right)_{,j} + g_3^{(1)} \kappa^2 U_i^{(0)} \right], \\ U_i^{(1)}|_{S_u} &= 0, & t_{ij}^{(1)} n_j|_{S_f \cup S_\sigma} &= - \left(g_1^{(1)} U_{k,k}^{(0)} \delta_{ij} + g_2^{(1)} (U_{i,j}^{(0)} + U_{j,i}^{(0)}) \right) n_j|_{S_f \cup S_\sigma}, & i &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (7)$$

Задача (6) может быть решена как при помощи метода пристрелки (для одномерных моделей), так и при помощи метода конечных элементов. Задача (7) содержит неизвестные поправки в правой части и поэтому прямым численным методом решена быть не может. При решении обратной задачи во второй постановке удастся избежать решения задачи (7) путем исключения смещений первого приближения и использования условия разрешимости. В этом случае для нахождения поправок используется система интегральных уравнений следующего вида [30]:

$$\int_V g_1^{(1)} (U_{k,k}^{(0)})^2 dV + \frac{1}{2} \int_V g_2^{(1)} (U_{i,j}^{(0)} + U_{j,i}^{(0)}) (U_{i,j}^{(0)} + U_{j,i}^{(0)}) dV - \kappa^2 \int_V g_3^{(1)} U_i^{(0)} U_i^{(0)} dV + \int_{S_\sigma} P_i^{(s)} (f_i - U_i^{(0)}) dS = 0, \quad \kappa \in [\kappa_-, \kappa_+], \quad s = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Решение систем ИУФ осуществляется численно при помощи метода регуляризации А. Н. Тихонова. Для задачи в третьей постановке не удастся записать подобные соотношения, так как для применения условия разрешимости требуется задание поля перемещений в области нагружения. Поэтому для нахождения поправок применяется другой подход. Используется сужение множества поиска поправок искомым функциям до линейной комбинации некоторых известных функций, например полиномов. При использовании такой аппроксимации поправок можно строить решение (7) в виде аналогичной линейной комбинации, что уже позволяет строить решение каждой из таких задач с помощью МКЭ.

Рассмотрим задачу третьего типа. Дополнительные условия имеют вид

$$U_i|_{S_{f_0}} = f_i(x, \kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]. \quad (9)$$

Неизвестные поправки в правой части (7) разложим по системе линейно независимых функций $\{\varphi_s\}$:

$$g_k^{(1)} = \sum_{s=0}^N c_{ks} \varphi_s, \quad k = 1, 2, 3. \quad (10)$$

В качестве $\{\varphi_s\}$ будем использовать систему полиномов невысокого порядка, например $\{1, x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_2^2, x_1x_2, \dots\}$. Заметим, что закон неоднородности в трехмерном теле может быть двумерным или, что чаще, одномерным. Информация о направлении, в котором происходит изменение свойств, может быть эффективно использована при выборе системы функций, что существенно снизит размерность получаемой алгебраической системы. Решение (7) будем искать в виде суммы

$$U_i^{(1)} = \sum_{k=1}^3 \sum_{s=0}^N c_{ks} U_i^{(ks)}, \quad (11)$$

где $U_i^{(ks)}$ — решение (7) при $g_m^{(1)} = \delta_{km} \varphi_s$, $m = 1, 2, 3$.

Система для нахождения коэффициентов c_{ks} строится на основе (9) и приближенного равенства $U_i \approx U_i^{(0)} + \varepsilon U_i^{(1)}$, которое получается при удержании только линейных членов в разложении (5).

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{s=0}^N c_{ks} U_i^{(ks)} \Big|_{S_{f_0}} = f_i(x, \kappa) - U_i^{(0)} \Big|_{S_{f_0}}, \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]. \quad (12)$$

Соотношение (12) должно приближенно (с точностью до $O(\varepsilon^2)$) выполняться для всех $\kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$. На отрезке $[\kappa_1, \kappa_2]$ можно выбрать произвольное число точек M и таким образом получить из (12) СЛАУ относительно коэффициентов c_{ks} , $k = 1, 2, 3$, $s = \overline{0, N}$. Выбирая $M = 3(N + 1)$, получаем СЛАУ с квадратной матрицей. Заметим, что СЛАУ может



получиться как переобусловленной $M > 3(N + 1)$, так и недообусловленной $M < 3(N + 1)$. В таком случае необходимо использовать процедуры построения регуляризованного решения, например, с помощью метода А. Н. Тихонова.

Решая систему (12), находим коэффициенты c_{ks} , $k = 1, 2, 3$, $s = \overline{0, N}$. На основе (10) находим поправки $g_1^{(1)}$, $g_2^{(1)}$, $g_3^{(1)}$, которые позволяют записать решение обратной задачи в виде $g_1 = g_1^{(0)} + \varepsilon g_1^{(1)}$, $g_2 = g_2^{(0)} + \varepsilon g_2^{(1)}$, $g_3 = g_3^{(0)} + \varepsilon g_3^{(1)}$. Однако решение обратной задачи не ограничивается однократным нахождением поправок, а применяется итерационная схема решения: найденное на первой итерации решение принимается в качестве нового начального приближения и повторяются все ранее сделанные шаги. Итерационный процесс завершается по достижении невязки в АЧХ заданного значения или когда очередная получаемая поправка становится пренебрежимо мала. Скорость сходимости можно контролировать при помощи параметра ε . Обычно выбираем $\varepsilon = 1$, а при необходимости можно уменьшить этот параметр с учетом нормы поправки и невязки в АЧХ.

Дальнейшую реализацию алгоритма рассмотрим на примере одномерной задачи о продольных колебаниях стержня.

2. Пример. Обратная задача для стержня

Рассмотрим краевую задачу об установившихся колебаниях неоднородного упругого стержня. Безразмерная форма уравнения установившихся колебаний и граничных условий имеет вид [29]:

$$(u'g_1)' + \kappa^2 g_2 u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(1)g_1(1) = 1, \quad (13)$$

где g_1 , g_2 , κ — безразмерные модуль упругости, плотность и частота колебаний.

В качестве дополнительной информации задается амплитуда колебаний в точке $\xi_0 \in (0, 1)$. Так как $\xi_0 \neq 1$, получаем обратную задачу третьего типа

$$u(x, \kappa)|_{x=\xi_0} = f(\kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]. \quad (14)$$

Выполним линеаризацию задачи (13) в соответствии с (5)–(7).

При ε^0 получаем задачу

$$(u'_0 g_1^{(0)})' + \kappa^2 g_2^{(0)} u_0 = 0, \quad u_0(0) = 0, \quad u'_0(1) g_1^{(0)}(1) = 1. \quad (15)$$

Задача при ε^1 будет иметь вид

$$\begin{aligned} (u'_1 g_1^{(0)})' + \kappa^2 g_2^{(0)} u_1 &= - (u'_0 g_1^{(1)})' - \kappa^2 g_2^{(1)} u_0, \\ u_1(0) = 0, \quad u'_1(1) g_1^{(0)}(1) &= -u'_0(1) g_1^{(1)}(1). \end{aligned} \quad (16)$$

Будем строить решение задачи (16), отыскивая поправки в виде следующих линейных комбинаций:

$$g_1^{(1)} = \sum_{s=0}^N a_s \varphi_s(x), \quad g_2^{(1)} = \sum_{s=0}^N b_s \varphi_s(x) \quad (17)$$

и получая простые краевые задачи для коэффициентов разложений.

Задачи типа (15) и (16)–(17) решим при помощи метода пристрелки, осуществляя сведение задач к каноническим системам. При решении (16) и необходимости находить производные от смещений начального приближения использована сплайн-аппроксимация численно найденной из (15) функции u_0 .

Задача (16) линейно зависит от правой части $F = - (u'_0 g_1^{(1)})' - \kappa^2 g_2^{(1)} u_0$, и ее решение будем искать в виде

$$u_1 = \sum_{s=0}^N a_s u_{1s} + \sum_{s=0}^N b_s u_{2s}, \quad (18)$$

где u_{1s} — решение (16) при $g_1^{(1)} = \varphi_s(x)$, $g_2^{(1)} = 0$, а u_{2s} — решение (16), где $g_1^{(1)} = 0$, $g_2^{(1)} = \varphi_s(x)$.

При проведении вычислительных экспериментов будем использовать следующую систему функций $\varphi_s(x)$:

$$\varphi_s(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq s}}^N (x_k - x) / \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq s}}^N (x_k - x_s), \tag{19}$$

где в качестве точек коллокаций выбраны точки $x_k = k/N$.

При выборе аппроксимации поправок интерес будут представлять наиболее простые случаи $N = 1$, $N = 2$, дающие линейную и квадратичную аппроксимации для поправок. Конструкция функций (19) такова, что $\varphi_s(x_k) = \delta_{sk}$ и, следовательно, коэффициенты a_s , b_s — узловые значения функций поправок $g_1^{(1)}$, $g_2^{(1)}$ в точках $x_s = s/N$.

На основе соотношения $u_1(\xi_0) \approx f - u_0(\xi_0)$ составляется алгебраическая система для нахождения неизвестных коэффициентов a_s , b_s , $s = 0..N$

$$\sum_{s=0}^N a_s u_{1s}(\xi_0, \kappa_j) + \sum_{s=0}^N b_s u_{2s}(\xi_0, \kappa_j) = f(\kappa_j) - u_0(\xi_0, \kappa_j), \quad j = \overline{1, M}. \tag{20}$$

Система (20) имеет M строк и $2(N + 1)$ столбцов, $\kappa_j \in [\kappa_1, \kappa_2]$.

3. Результаты вычислительных экспериментов

Проведен ряд вычислительных экспериментов для разных законов неоднородности. Представим результаты некоторых из них.

Пусть $\xi_0 = 0.79$, функция g_2 задана и не требует восстановления ($g_2^{(1)} = 0$). Реализован итерационный алгоритм реконструкции функции g в классе квадратичных функций. Дополнительная информация задана в точках $\kappa_0 = 0$, $\kappa_1 = 0.65$, $\kappa_2 = 1.05$, $\kappa_3 = 1.45$. Уравнение (15) интегрируется явно при $\kappa = 0$, позволяя выписать решение в виде $u(x) = \int_0^x g_1^{-1}(x) dx$. Исходя из этого, находим начальное приближение по формуле $g_1^{(0)}(x) = \xi_0/f(0)$. На следующем этапе осуществляется поиск поправки в классе линейных функций ($N = 1$). Используя дополнительную информацию, заданную в точках κ_1 , κ_2 , получаем алгебраическую систему вида (20), решая которую, находим значения коэффициентов разложения a_0 , a_1 . Найденная поправка добавляется к начальному приближению и позволяет найти новое начальное приближение; при этом процесс продолжается до тех пор, пока очередная линейная поправка не будет по норме меньше 0.01. Затем начинается итерационный поиск поправок в классе квадратичных функций (третий этап), который также заканчивается по достижению нормы очередной поправки заданной погрешности. Здесь при формировании СЛАУ используется дополнительная информация об АЧХ, задаваемая в точках κ_1 , κ_2 , κ_3 .

На рис. 1 приведены результаты реконструкции монотонных функций $g_1 = 0.6 + e^x$ (рис. 1, а) и $g_1 = 3.2 - e^{0.8x}$ (рис. 1, б). Здесь и всюду далее использованы единые обозначения для искомой функции, начального приближения и результатов реконструкции.

Рассмотрим функцию $r(x) = 1.4 - 0.4 \sin(\pi x/2)$. На рис. 2 приведены результаты реконструкции монотонных функций $g_1(x) = r(x)$ (рис. 2, а) и $g_1(x) = r(1 - x)$ (рис. 2, б). Погрешность реконструкции функций в классе квадратичных, приведенных на рис. 1, 2, не превышает 2%, что можно трактовать как очень хороший результат восстановления.

На рис. 3 приведены результаты реконструкции немонотонных функций $g_1 = 1 + 0.8 \sin(\pi x)$ (рис. 3, а) и $g_1 = 1.8 - 0.8 \sin(\pi x)$ (рис. 3, б). Погрешность реконструкции функций в классе квадратичных, приведенных на рис. 3, не превышает 6% на концах интервала. Определенный интерес вызывает тот факт, что обе функции являются симметричными относительно середины интервала ($x = 0.5$), а результаты восстановления в классе линейных функций представлены возрастающей (рис. 3, а) и убывающей (рис. 3, б) функциями.

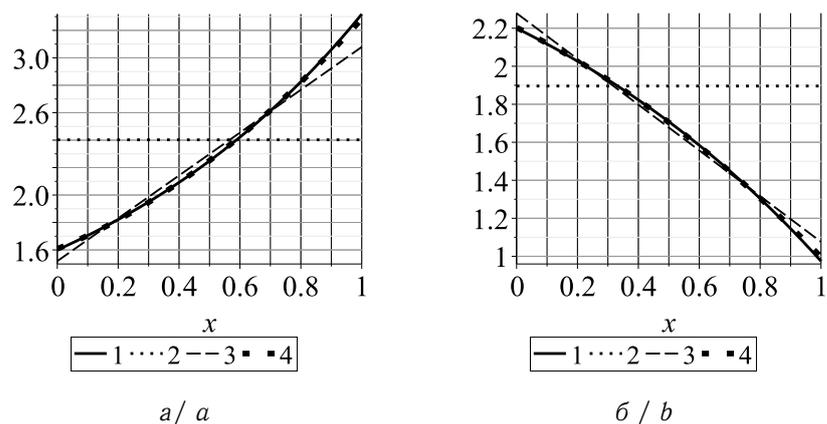


Рис. 1. Результаты реконструкции $g_1 = 0.6 + e^x$ (а) и $g_1 = 3.2 - e^{0.8x}$ (б): 1 – искомая функция; 2 – начальное приближение; 3, 4 – результаты реконструкции в классе линейных и квадратичных функций соответственно

Fig. 1. Reconstruction results $g_1 = 0.6 + e^x$ (a) and $g_1 = 3.2 - e^{0.8x}$ (b): 1 – required function; 2 – initial approximation; 3, 4 – reconstruction results in the class of linear and quadratic functions respectively

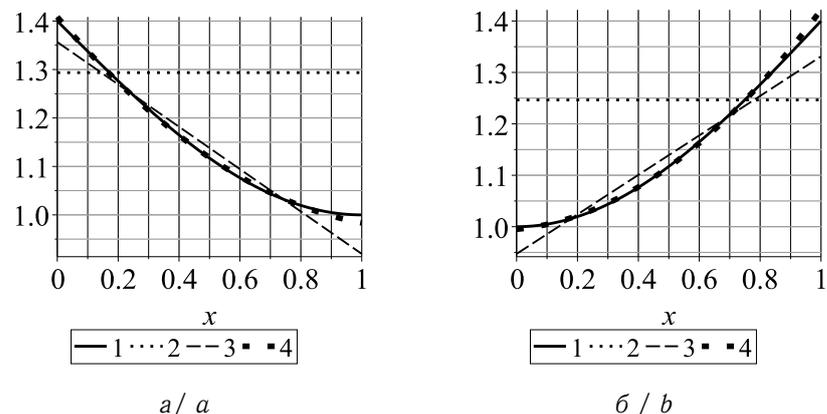


Рис. 2. Результаты реконструкции $g_1 = 1.4 - 0.4 \sin(\pi x/2)$ (а) и $g_1 = 1.4 - 0.4 \sin(\pi(1-x)/2)$ (б)

Fig. 2. Reconstruction results $g_1 = 1.4 - 0.4 \sin(\pi x/2)$ (a) and $g_1 = 1.4 - 0.4 \sin(\pi(1-x)/2)$ (b)

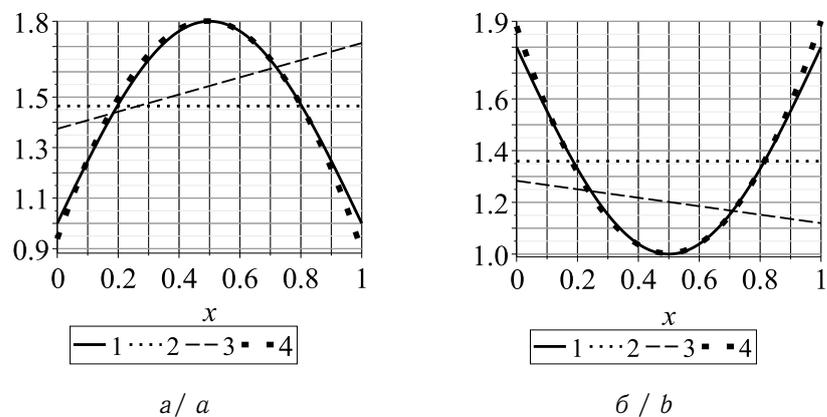


Рис. 3. Результаты реконструкции немонотонных функций $g_1 = 1 + 0.8 \sin(\pi x)$ (а) и $g_1 = 1.8 - 0.8 \sin(\pi x)$ (б)

Fig. 3. Results of reconstruction of non-monotonic functions $g_1 = 1 + 0.8 \sin(\pi x)$ (a) and $g_1 = 1.8 - 0.8 \sin(\pi x)$ (b)

Для завершения процесса реконструкции нужны дополнительные точки на АЧХ, чтобы можно было вычислить невязку на более широком частотном диапазоне. Так, для вышеприведенных случаев точное АЧХ и АЧХ, отвечающее решению обратной задачи в классе квадратичных функций, практически совпадают в промежутке от нуля до четвертого резонанса.

Аналогичным образом выполнена реконструкция функции $g_2(x)$ при заданной функции $g_1(x)$. Проведена серия вычислительных экспериментов по реконструкции возрастающих, убывающих и немонотонных функций. Принципиальных отличий в качестве реконструкции отмечено не было. Результаты вычислительного эксперимента приведены для случая двух немонотонных функций.

На рис. 4 приведены результаты реконструкции немонотонных функций $g_2 = 0.66 + 0.53 \sin(\pi x)$ (рис. 4, а) и $g_2 = 1.39 - 0.62 \sin(\pi x)$ (рис. 4, б). Дополнительная информация об АЧХ бралась в точках $\kappa_0 = 0, \kappa_1 = 0.65, \kappa_2 = 1.05, \kappa_3 = 1.45$ при $\xi = 0.89$. Результаты восстановления в классе линейных функций представлены убывающей (рис. 4, а) и возрастающей (рис. 4, б) функциями аналогично тому, как было при реконструкции функции $g_1(x)$ (см. рис. 3).

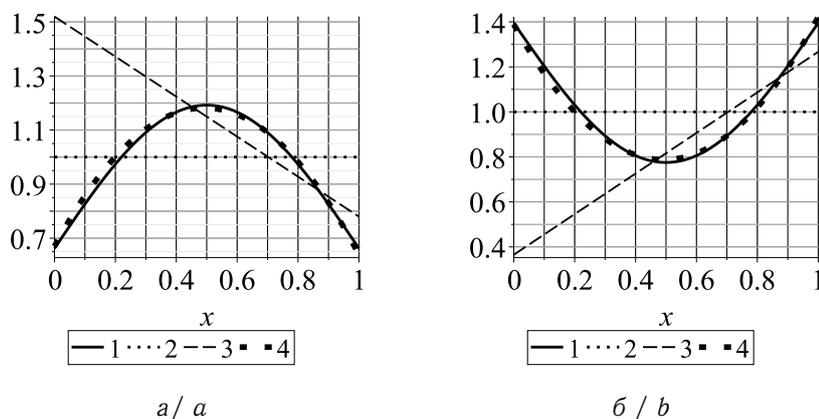


Рис. 4. Результаты реконструкции $g_2 = 0.66 + 0.53 \sin(\pi x)$ (а) и $g_2 = 1.39 - 0.62 \sin(\pi x)$ (б)

Fig. 4. Reconstruction results $g_2 = 0.66 + 0.53 \sin(\pi x)$ (a) and $g_2 = 1.39 - 0.62 \sin(\pi x)$ (b)

Результаты вычислительных экспериментов показали, что малая линейная поправка находится с высокой точностью за одну итерацию, точность реконструкции повышается при $\xi_0 \rightarrow 1$, а при $\xi_0 < 0.5$ схема практически перестает работать. По отношению к задачам о восстановлении одной функции выявлено, что, пропуская второй этап ($N = 1$) и сразу переходя к поиску поправки в классе квадратичных функций ($N = 2$), получаем систему, требующую регуляризации при решении. Причиной этой ситуации является недостаточно близкое к искомому решению начальное приближение.

Отметим, что применение регуляризации дает приемлемые результаты реконструкции в случае достаточной близости точки съема информации к точке нагружения.

Заключение

Представлен способ построения решения обратных задач в классе полиномиальных функций в случае, когда область задания дополнительной информации не совпадает с областью нагружения. Выполнена отдельная реконструкция двух функций в классе квадратичных функций.



Список литературы

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. Москва : Наука, 1986. 288 с.
2. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма – Лиувилля и их приложения. Москва : Наука, 1984. 240 с.
3. *Kravchenko V. V.* Direct and Inverse Sturm – Liouville Problems. A Method of Solution. Cham : Birkhäuser, 2020. 154 p. (Frontiers in Mathematics). <https://doi.org/10.1007/978-3-030-47849-0>
4. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. Москва : Наука, 1984. 262 с.
5. Яхно В. Г. Обратные коэффициентные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск : Наука, 1990. 304 с.
6. *Vui H. D.* Inverse Problems in the Mechanics of Materials: An Introduction. Boca Raton, FL : CRC Press, 1994. 224 p.
7. *Isakov V.* Inverse Problems for Partial Differential Equations. Cham : Springer, 2017. 406 p. (Applied Mathematical Sciences, vol. 127). <https://doi.org/10.1007/978-3-319-51658-5>
8. *Bonnet M., Constantinescu A.* Inverse problems in elasticity // Inverse Problem. 2005. Vol. 21. P. 1–50. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/21/2/R01>
9. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. Москва : Физматлит, 2007. 384 с.
10. *Bal G.* Introduction to Inverse Problems. New York : Columbia University, 2012. 205 p.
11. *Neto F. D. M., Neto A. J. S.* An Introduction to Inverse Problems with Applications. Berlin : Springer, 2013. 255 p.
12. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск : Изд-во Сибирского отд. РАН, 2018. 512 с.
13. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. Москва : Наука, 1990. 230 с.
14. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. Москва : Едиториал УРСС, 2004. 480 с.
15. Ватульян А. О. Коэффициентные обратные задачи механики. Москва : Физматлит, 2019. 272 с.
16. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Коэффициентные обратные задачи термомеханики. Ростов-на-Дону ; Таганрог : Изд-во Южного федерального ун-та, 2022. 176 с.
17. Бондаренко А. Н., Бугуева Т. В., Дедок В. А. Нейросетевой подход к решению обратных задач теории аномальной диффузии // Сибирский журнал индустриальной математики. 2016. Т. 19, № 3 (67). С. 3–14. <https://doi.org/10.17377/sibjim.2016.19.301>, EDN: WHKNXJ
18. Богачев И. В., Ватульян А. О., Дударев В. В. Об одном методе идентификации свойств многослойных мягких биологических тканей // Российский журнал биомеханики. 2013. Т. 17, № 3. С. 37–48. EDN: RDMLID
19. *Sinkus R., Lorenzen J., Schrader D., Lorenzen M., Dargatz M., Holz D.* High-resolution tensor MR elastography for breast tumour detection // Physics in Medicine & Biology. 2000. Vol. 45, iss. 6. P. 1649–1664. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/45/6/317>
20. *Manduca A., Oliphant T. E., Dresner M. A., Mahowald J. L., Kruse S. A., Amromin E., Felmlee J. P., Greenleaf J. F., Ehman R. L.* Magnetic resonance elastography: Non-invasive mapping of tissue elasticity // Medical Image Analysis. 2001. Vol. 5, iss. 4. P. 237–254. [https://doi.org/10.1016/S1361-8415\(00\)00039-6](https://doi.org/10.1016/S1361-8415(00)00039-6)
21. Сарвазян А. П. Низкочастотные акустические характеристики биологических тканей // Механика полимеров. 1975. № 4. С. 691–695.
22. *Sarvazyan A., Goukassian D., Maevsky G.* Elasticity imaging as a new modality of medical imaging for cancer detection // Proceedings of an International Workshop on Interaction of Ultrasound with Biological Media. Valenciennes, France, 1994. P. 69–81.
23. *Sarvazyan A. P., Rudenko O. V., Swanson S. D., Fowlkes J. B., Emelianov S. Y.* Shear wave elasticity imaging: A new ultrasonic technology of medical diagnostics // Ultrasound in Medicine & Biology. 1998. Vol. 24, iss. 9. P. 1419–1435. [https://doi.org/10.1016/S0301-5629\(98\)00110-0](https://doi.org/10.1016/S0301-5629(98)00110-0), EDN: LFDAJV
24. *Arani A., Manduca A., Ehman R. L., Huston III J.* Harnessing brain waves: A review of brain magnetic resonance elastography for clinicians and scientists entering the field // The British Journal of Radiology. 2021. Vol. 94. Art. 20200265. <https://doi.org/10.1259/bjr.20200265>
25. *Perkowski Z., Czabak M.* Description of behaviour of timber-concrete composite beams including interlayer slip, uplift, and long-term effects: Formulation of the model and coefficient inverse problem // Engineering Structures. 2019. Vol. 194. P. 230–250. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.05.058>
26. *Dudarev V. V., Vatulyan A. O., Mnukhin R. M., Nedin R. D.* Concerning an approach to identifying



- the Lamé parameters of an elastic functionally graded cylinder // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020. Vol. 43, iss. 11. P. 6861–6870. <https://doi.org/10.1002/mma.6428>
27. *Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Mnutkin R. M.* Identification of characteristics of a functionally graded isotropic cylinder // *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. 2021. Vol. 17, iss. 2. P. 321–332. <https://doi.org/10.1007/s10999-020-09527-5>
28. *Vatulyan A. O., Yurov V. O.* On the reconstruction of material properties of a radially inhomogeneous cylindrical waveguide // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2021. Vol. 44, iss. 6. P. 4756–4769. <https://doi.org/10.1002/mma.7067>
29. *Ватульян А. О., Юров В. О.* Об определении механических характеристик стержневых элементов из функционально-градиентных материалов // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2021. № 4. С. 52–63. <https://doi.org/10.31857/S0572329921040139>, EDN: BPXTHE
30. *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. Москва : Физматлит, 2007. 223 с. EDN: UGLKIJ

References

1. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for Solving Ill-posed Problems]. Moscow, Nauka, 1986. 288 p. (in Russian).
2. Levitan B. M. *Obratnye zadachi Shturma – Liuvillya i ikh prilozheniya* [Inverse Sturm – Liouville Problems and Their Applications]. Moscow, Nauka, 1984. 240 p. (in Russian).
3. Kravchenko V. V. *Direct and Inverse Sturm – Liouville Problems. A Method of Solution*. Frontiers in Mathematics. Cham, Birkhäuser, 2020. 154 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-47849-0>
4. Romanov V. G. *Obratnye zadachi matematicheskoy fiziki* [Inverse Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1984. 262 p. (in Russian).
5. Yakhno V. G. *Obratnye koeffitsientnye zadachi dlya differentsial'nykh uravneniy uprugosti* [Inverse Coefficient Problems for Differential Elasticity Equations]. Novosibirsk, Nauka, 1990. 304 p. (in Russian).
6. Bui H. D. *Inverse Problems in the Mechanics of Materials: An Introduction*. Boca Raton, FL, CRC Press, 1994, 224 p.
7. Isakov V. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences, vol. 127. Cham, Springer, 2017. 406 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-51658-5>
8. Bonnet M., Constantinescu A. Inverse problems in elasticity. *Inverse Problem*, 2005, vol. 21, pp. 1–50. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/21/2/R01>
9. Yurko V. A. *Vvedenie v teoriyu obratnykh spektral'nykh zadach* [Introduction to the Theory of Inverse Spectral Problems]. Moscow, Fizmatlit, 2007. 384 p. (in Russian).
10. Bal G. *Introduction to Inverse Problems*. New York, Columbia University, 2012. 205 p.
11. Neto F. D. M., Neto A. J. S. *An Introduction to Inverse Problems with Applications*. Berlin, Springer, 2013. 255 p.
12. Kabanikhin S. I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and Ill-posed Problems]. Novosibirsk, Publ. House SB RAS, 2018. 512 p. (in Russian).
13. Tikhonov A. N., Goncharskiy A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G. *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Numerical Methods for Solving Ill-posed Problems]. Moscow, Nauka, 1990. 230 p. (in Russian).
14. Samarskiy A. A., Vabishchevich P. N. *Chislennyye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki* [Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Editorial URSS, 2004. 480 p. (in Russian).
15. *Vatulyan A. O.* *Koeffitsientnye obratnye zadachi mekhaniki* [Coefficient Inverse Problems of Mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2019. 272 p. (in Russian).
16. *Vatulyan A. O., Nesterov S. A.* *Koeffitsientnye obratnye zadachi termomekhaniki* [Coefficient Inverse Problems of Thermomechanics]. Rostov-on-Don, Taganrog, Southern Federal University Publ., 2022. 176 p. (in Russian).
17. Bondarenko A. N., Bugueva T. V., Dedok V. A. Inverse problems of anomalous diffusion theory: An artificial neural network approach. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2016, vol. 10, iss. 3, pp. 311–321. <https://doi.org/10.1134/S1990478916030017>, EDN: WVWMLV
18. Bogachev I. V., *Vatulyan A. O., Dudarev V. V.* On the method of property identification of multilayer soft biological tissues. *Russian Journal of Biomechanics*, 2013, vol. 17, iss. 3. pp. 37–48 (in Russian). EDN: RDMLID
19. Sinkus R., Lorenzen J., Schrader D., Lorenzen M., Dargatz M., Holz D. High-resolution tensor



- MR elastography for breast tumour detection. *Physics in Medicine & Biology*, 2000, vol. 45, iss. 6, pp. 1649–1664. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/45/6/317>
20. Manduca A., Oliphant T. E., Dresner M. A., Mahowald J. L., Kruse S. A., Amromin E., Felmlee J. P., Greenleaf J. F., Ehman R. L. Magnetic resonance elastography: Non-invasive mapping of tissue elasticity. *Medical Image Analysis*, 2001, vol. 5, iss. 4, pp. 237–254. [https://doi.org/10.1016/S1361-8415\(00\)00039-6](https://doi.org/10.1016/S1361-8415(00)00039-6)
 21. Sarvazyan A. P. Low-frequency acoustic characteristics of biological tissues. *Mekhanika polimerov* [Polymer Mechanics], 1975, iss. 4, pp. 691–695. (in Russian).
 22. Sarvazyan A., Goukassian D., Maevsky G. Elasticity imaging as a new modality of medical imaging for cancer detection. In: *Proceedings of an International Workshop on Interaction of Ultrasound with Biological Media*. Valenciennes, France, 1994, pp. 69–81.
 23. Sarvazyan A. P., Rudenko O. V., Swanson S. D., Fowlkes J. B., Emelianov S. Y. Shear wave elasticity imaging: A new ultrasonic technology of medical diagnostics. *Ultrasound in Medicine & Biology*, 1998, vol. 24, iss. 9, pp. 1419–1435. [https://doi.org/10.1016/S0301-5629\(98\)00110-0](https://doi.org/10.1016/S0301-5629(98)00110-0), EDN: LFD AJV
 24. Arani A., Manduca A., Ehman R. L., Huston III J. Harnessing brain waves: A review of brain magnetic resonance elastography for clinicians and scientists entering the field. *The British Journal of Radiology*, 2021, vol. 94, art. 20200265. <https://doi.org/10.1259/bjr.20200265>
 25. Perkowski Z., Czabak M. Description of behaviour of timber-concrete composite beams including interlayer slip, uplift, and long-term effects: Formulation of the model and coefficient inverse problem. *Engineering Structures*, 2019, vol. 194, pp. 230–250. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.05.058>
 26. Dudarev V. V., Vatulyan A. O., Mnukhin R. M., Nedin R. D. Concerning an approach to identifying the Lamé parameters of an elastic functionally graded cylinder. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2020, vol. 43, iss. 11, pp. 6861–6870. <https://doi.org/10.1002/mma.6428>
 27. Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Mnukhin R. M. Identification of characteristics of a functionally graded isotropic cylinder. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2021, vol. 17, iss. 2, pp. 321–332. <https://doi.org/10.1007/s10999-020-09527-5>
 28. Vatulyan A. O., Yurov V. O. On the reconstruction of material properties of a radially inhomogeneous cylindrical waveguide. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2021, vol. 44, iss. 6, pp. 4756–4769. <https://doi.org/10.1002/mma.7067>
 29. Vatulyan A. O., Yurov V. O. On the determination of the mechanical characteristics of rod elements made of functionally graded materials. *Mechanics of Solids*, 2020, vol. 55, iss. 6, pp. 907–917. <https://doi.org/10.3103/S0025654420660036>, EDN: FRQJDG
 30. Vatulyan A. O. *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela* [Inverse Problems in the Mechanics of Deformable Solids]. Moscow, Fizmatlit, 2007. 223 p. (in Russian). EDN: UGLKIJ

Поступила в редакцию / Received 26.11.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

Опубликована / Published 31.05.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 222–230

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 222–230

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-222-230>, EDN: SFYWV

Научная статья
УДК 539.3

Асимптотическая теория гиперболического погранслоя в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях тангенциального типа

И. В. Кириллова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Кириллова Ирина Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, iv@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6745-4144>, AuthorID: 179980

Аннотация. Работа посвящена построению асимптотически оптимальных уравнений гиперболического погранслоя в тонких оболочках вращения в окрестности фронта волны расширения при ударных торцевых воздействиях тангенциального типа. Соотношения выводятся методом асимптотического интегрирования точных трехмерных уравнений теории упругости в пространстве специальной системы координат, явно выделяющей зону действия погранслоя. Для этого анализируется поведение переднего фронта волны расширения, имеющего сложную форму вследствие кривизны оболочки. Построенная асимптотическая модель геометрии переднего фронта дает его представление через повернутые нормали к срединной поверхности. Эти повернутые нормали и дают возможность определить геометрию узкой, порядка квадрата относительной толщины оболочки, области применимости рассматриваемого гиперболического погранслоя. Построенные асимптотически оптимальные уравнения сформированы для асимптотически главных компонент напряженно-деформированного состояния: продольного перемещения и нормальных напряжений. При этом разрешающее уравнение относительно продольного перемещения является гиперболическим уравнением второго порядка с переменными коэффициентами у слагаемых первого порядка малости по сравнению с его главной частью, определяющей гиперболический погранслой в пластине.

Ключевые слова: асимптотическая теория, гиперболический погранслой, ударные воздействия тангенциального типа, волна расширения, оболочка вращения, нестационарные волны

Для цитирования: Кириллова И. В. Асимптотическая теория гиперболического погранслоя в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях тангенциального типа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 222–230. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-222-230>, EDN: SFYWV

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Asymptotic theory of the hyperbolic boundary layer in shells of revolution at shock edge loading of the tangential type

I. V. Kirillova

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Irina V. Kirillova, iv@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6745-4144>, AuthorID: 179980

Abstract. The present work is devoted to the construction of asymptotically optimized equations of the hyperbolic boundary layer in thin shells of revolution in the vicinity of the dilation wave front at shock



edge loading of the tangential type. These equations are derived by asymptotically integrating of the exact three-dimensional theory elasticity equations in the special coordinate system. This system defines the boundary layer region. The wave front has a complicated form, dependent on the shell curvature and therefore its asymptotical model is constructed. This geometrical model of the front defines it via the turned normals to the middle surface. Also, these turned normals define the geometry of the hyperbolic boundary layer applicability region. Constructed asymptotically optimised equations are formulated for the asymptotically main components of the stress-strain state: the longitudinal displacement and the normal stresses. The governing equation for the longitudinal displacement is the hyperbolic equation of the second order with the variable coefficients. The asymptotically main part of this equation is defined as the hyperbolic boundary layer in plates.

Keywords: asymptotical theory, hyperbolic boundary layer, shock loading of the tangential type, dilatation wave, shell of revolution, transient waves

For citation: Kirillova I. V. Asymptotic theory of the hyperbolic boundary layer in shells of revolution at shock edge loading of the tangential type. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 222–230 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-222-230>, EDN: SFYW BV

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Работа посвящена построению асимптотически оптимальной теории гиперболического погранслоя в тонкостенных оболочках вращения произвольной формы с непрерывно изменяющейся срединной поверхностью при ударных торцевых воздействиях тангенциального типа, характеризующихся нулевыми значениями изгибающего момента и перерезывающей силы. Рассматриваемый в настоящей работе тип погранслоя соответствует одному из трех характерных видов ударных торцевых воздействий, которые, в соответствии с классификацией У. К. Нигула [1], приводят к принципиально разным типам нестационарного волнового напряженно-деформированного состояния (НДС), в частности, отличающихся принципиально разными свойствами в окрестностях передних фронтов волн расширения и сдвига. Отметим, что рассматриваемое продольное воздействие тангенциального типа, названное в [1] воздействием вида LT, приводит к особенностям решения в области переднего фронта волны расширения, соответствующим симметричному плоскому НДС для полуполосы.

В отличие от аналогичных НДС для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны, где передние фронты волн задаются нормальными к срединной поверхности оболочек, в нашем случае фронты волн искривляются и поворачиваются относительно нормали в зависимости от кривизны срединной поверхности. В данной статье показывается, что асимптотический анализ дает представление этих фронтовых поверхностей повернутыми нормальными к срединным поверхностям, что дает возможность определить геометрию узкой, порядка квадрата относительной толщины оболочки, области применимости рассматриваемого гиперболического погранслоя.

Асимптотическое представление искомым фронтовых поверхностей позволило ввести новую систему координат, позволяющую выделить явно зону действия гиперболического погранслоя и построить асимптотическое решение для этой составляющей. Выполнено асимптотическое интегрирование трехмерных уравнений динамической теории упругости в этих координатах при показателе изменчивости НДС по продольной координате (задающей в этом случае отклонение от волнового фронта), равной 2. Получены асимптотически оптимальные уравнения рассматриваемого погранслоя относительно асимптотически главных составляющих НДС (нормального напряжения и продольного перемещения). При этом нормальное напряжение выражается через продольное перемещение, а разрешающее уравнение относительно продольного перемещения является гиперболическим уравнением второго порядка и записывается с асимптотической точностью порядка относительной толщины оболочки.

Отметим также, что при переходе в полученном разрешающем уравнении искомого погранслоя к обычным криволинейным координатам, связанным со срединной поверхностью и нормалью к ней, получается упрощенная система уравнений, непосредственно выводимая методом асимптотического интегрирования из исходной трехмерной системы. Однако такая разрешающая система не позволяет в явном виде определить свойства погранслоя и построить в обычных координатах простое решение для узкой прифронтной области.

1. Постановка задачи

Рассмотрим распространение осесимметричных ударных волн в полубесконечной оболочке вращения, возбуждаемых в начальный момент времени торцевой ударной нагрузкой вида LT [1]. Общая схема расчленения такого нестационарного НДС на составляющие с различными показателями изменчивости и динамичности рассматривалась в монографиях [2, 3] и работах [4, 5].

Асимптотически оптимальные уравнения гиперболического погранслоя, имеющего место в окрестности фронта волны расширения, в оболочках вращения впервые были выведены в [6]. Там процесс асимптотического интегрирования проводился на базе уравнений теории упругости в координатах, связанных с областью порядка относительной толщины оболочки, соседней с нормалью, проходящей через точку срединной поверхности, определяемую передним фронтом волны расширения. Как показывают исследования, эта область содержит и фронт волны, и узкую, порядка квадрата относительной толщины, прифронтную область применимости уравнений погранслоя. Целью настоящей работы и является построение уравнений искомого погранслоя в координатах, связанных непосредственно с поверхностью переднего фронта. Сравнение этих двух типов уравнений позволит окончательно сделать выводы относительно возможности применения этих систем.

Выпишем трехмерные уравнения теории упругости для рассматриваемой оболочки вращения, изображенной на рис. 1, где (α, θ, z) — криволинейные координаты: α — длина дуги вдоль образующей, θ — угол в окружном направлении, z — координата внешней нормали к срединной поверхности:

$$\begin{aligned} & \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z} + \frac{z}{R_1} \left(-\varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \right) + \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial v_1}{\partial z} + \\ & \left. + \left(\frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} = 0, \right. \tag{1} \\ & \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \frac{z}{R_1} \left(-\frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \right. \\ & \left. + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \right) - \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{1}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial z} + \\ & \left. + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} + \varkappa^{-2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0, \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu} \left[k_2 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \frac{\partial v_3}{\partial z} - k_2 \frac{z}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \frac{B'}{B} v_1 + \left(\frac{k_2}{R_1} + \frac{k_1}{R_2} \right) v_3 \right], \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1+\nu} \left[k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \frac{\partial v_3}{\partial z} - k_1 \frac{z}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_2 \frac{B'}{B} v_1 + \left(\frac{k_1}{R_1} + \frac{k_2}{R_2} \right) v_3 \right], \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1+\nu} \left[k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_2 \frac{\partial v_3}{\partial z} - k_1 \frac{z}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \frac{B'}{B} v_1 + k_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_3 \right], \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} - \frac{z}{R_1} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} + \frac{1}{R_1} v_3 \right). \end{aligned} \tag{2}$$



Эти уравнения выписаны с асимптотической погрешностью $O(\varepsilon^2)$, необходимой для описания гиперболического погранслоя. Решающие уравнения движения в перемещениях и уравнения закона Гука имеют соответственно вид (1) и (2), где ε — малый параметр тонкостенности оболочки: $\varepsilon = h/R$, h — полутолщина, R — характерное значение радиусов кривизны, σ_{ij} — напряжения, v_i — перемещения, t — время, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала оболочки, R_i — радиусы кривизны срединной поверхности, $k_1 = \nu/(1 - 2\nu)$, $k_2 = (1 - \nu)/(1 - 2\nu)$, $\alpha^2 = (1 - 2\nu)/(2 - 2\nu)$, B — расстояние от срединной поверхности до оси вращения, c_1 и c_2 — скорости распространения волн расширения и сдвига.

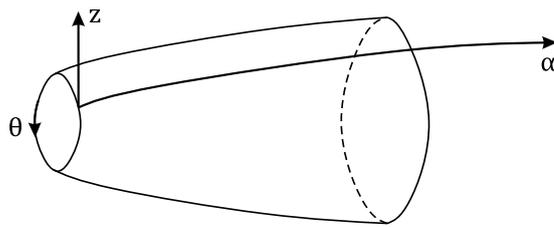


Рис. 1. Криволинейные координаты оболочки вращения

Fig. 1. Curvilinear coordinates of the shell of revolution

Рассмотрим следующий вид ударного ЛТ воздействия на торец оболочки вращения, когда ударная нагрузка зависит от времени как единичная функция Хевисайда $H(t)$:

$$\sigma_{11} = IH(t), \quad v_1 = 0, \quad \alpha = 0,$$

где I — амплитуда. Однородные начальные условия записываются в виде

$$v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2.$$

2. Асимптотическая геометрическая модель фронта волны расширения

Исследование решения для точных волновых уравнений в цилиндрической оболочке явилось базовым для анализа гиперболического погранслоя в оболочках вращения нулевой гауссовой кривизны [7]. В качестве базовой задачи для общего случая оболочек вращения выберем теперь задачу для сферической оболочки с радиусом срединной поверхности R .

Картина распространения возмущений для сферической оболочки в момент времени t_0 представлена на рис. 2. Здесь схематически изображено сечение рассматриваемой оболочки через центр O_3 . Считаем, что $\alpha_0 = c_1 t_0$; A_1 и B_2 — граничные точки распространения возмущений по верхней и нижней лицевым поверхностям; A_1A_2 , B_1B_2 , O_1O_2 — нормали к срединной поверхности, проходящие через точки A_1 , B_2 и α_0 . Поскольку мы рассматриваем сферическую оболочку, то эти нормали лежат на радиусах окружности срединной поверхности, проходящих через эти же точки.

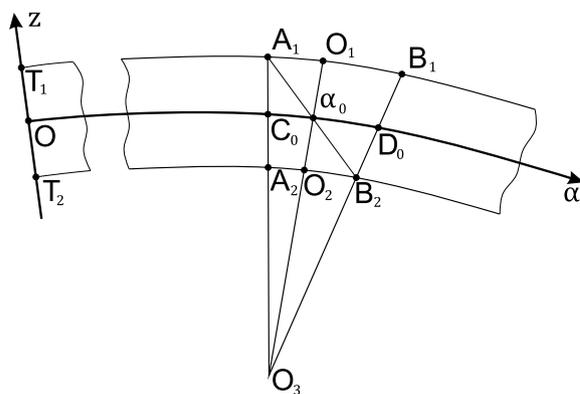


Рис. 2. Формирование фронта волны расширения в сферической оболочке

Fig. 2. Formation of an expansion wave front in a spherical shell

Соотношения между длинами дуг и радиусами концентрических окружностей позволяют определить координаты точек A_1 и B_2 :

$$\alpha = \alpha_0[1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2)], \quad \alpha = \alpha_0[1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2)], \quad (3)$$

которые являются точками фронта волны расширения на верхней и нижней лицевых поверхностях.

Аналогично (3) можно считать, что линии, проходящие через точки A_1, α_0 и B_2 , определяются следующим выражением:

$$\alpha = \alpha_0 \left[1 - \frac{z}{R} + O(\varepsilon^2) \right] = \alpha_0 \left[1 - \varepsilon \zeta + O(\varepsilon^2) \right]. \tag{4}$$

Будем теперь рассматривать поверхность, определяемую уравнением (4), как поверхность переднего фронта волны и α_0 как фронтовую точку на срединной линии. При этом с асимптотической погрешностью $O(\varepsilon^2)$ можно считать уравнение (4) уравнением прямой, а фронт волны можно считать поверхностью, образованной нормальными к срединной линии, повернутыми в точках $\alpha_0 = c_1 t_0$.

Перейдем к построению асимптотики фронта волны в оболочках вращения. Для определенности рассмотрим оболочку вращения положительной гауссовой кривизны, схематичное

изображение которой представлено на рис. 3. Обозначения на этой фигуре полностью соответствуют обозначениям на рис. 2. Так как первый коэффициент Ламе в рассматриваемой системе координат записывается в виде [8]

$$H_1 = 1 + \frac{z}{R_1},$$

где R_1 — главный радиус кривизны срединной поверхности, то искомые расстояния по лицевым поверхностям до волнового фронта определяются следующим образом:

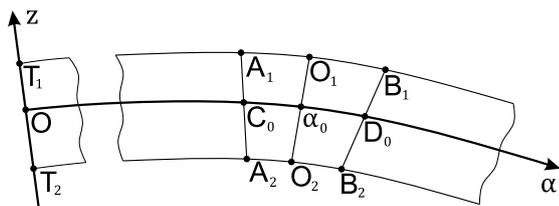


Рис. 3. Формирование фронта волны расширения в оболочке вращения

Fig. 3. Formation of an expansion wave front in a shell of revolution

$$T_1 O_1 = \alpha_0 + h \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{R_1}, \quad T_2 O_2 = \alpha_0 - h \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{R_1},$$

а отрезки кривых $A_1 O_1$ и $O_2 B_2$ определяются выражениями

$$A_1 O_1 = O_2 B_2 = h \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{R_1}. \tag{5}$$

Полученные результаты для сферической оболочки обобщим на случай оболочки вращения. Непосредственно из (5) следует, что поверхность, определяемую выражением

$$\alpha = \alpha_0 - zF(\alpha_0), \quad F(\alpha_0) = \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{R_1}, \tag{6}$$

будем рассматривать в качестве волнового фронта волны расширения, образованного повернутыми нормальными к срединной поверхности. Легко видеть, что при этом длина отрезка повернутой нормали z_F^0 задается следующим образом:

$$z_F^0 = z \sqrt{1 + F^2(\alpha_0)}. \tag{7}$$

3. Уравнения гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения

В соответствии с длиной отрезка повернутой нормали, задаваемой формулой (7), введем новую координату z_F : $z_F = z \sqrt{1 + F^2(\alpha)}$, которая при $\alpha = \alpha_0 = c_1 t$ отсчитывается вдоль координатной линии новой системы координат (α, z_F) , совпадающей с передним фронтом волны.

Для вывода асимптотически оптимальных уравнений рассматриваемого гиперболического погранслоя отметим, что в случае оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны он является



в асимптотическом смысле обобщением соответствующего погранслоя в полосе и отвечает плоскому типу НДС [6]. В рассматриваемом случае погранслоем имеет симметричный тип, когда с асимптотической погрешностью $O(\varepsilon)$ функции $v_1, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ по нормальной координате четны, а v_3, σ_{13} — нечетны.

В рассматриваемой новой системе координат (α, z_F) также можно выявить свойства четности и нечетности напряжений и перемещений по введенной координате z_F с асимптотической погрешностью $O(\varepsilon)$, что обусловлено одинаковой формой асимптотически главной части разрешающей системы как для простейшего случая цилиндрической оболочки, так и для общего случая оболочек вращения. С учетом этого свойства разрешающие уравнения (1), (2) записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 - 2\nu} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z_F} + \\ & + \frac{z_F F}{R_1} \left[\frac{2\varkappa^{-2}}{\sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} \right] + \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} = 0, \\ & \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \\ & + \frac{z_F}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \left[\frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} + \frac{2}{\sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z_F} \right] + \frac{B' \sqrt{1 + F^2}}{(1 - 2\nu) B} \frac{\partial v_1}{\partial z_F} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} = 0, \\ \sigma_{11} &= \frac{E}{1 + \nu} \left(k_2 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_3}{\partial z_F} \right), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1 + \nu} \left(k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_3}{\partial z_F} \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1 + \nu} \left(k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_2 \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_3}{\partial z_F} \right), \quad \sigma_{13} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left(\sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_1}{\partial z_F} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \tag{8}$$

Подобно случаю гиперболического погранслоя в оболочках вращения нулевой гауссовой кривизны введем безразмерные переменные, характеризующие НДС гиперболического погранслоя в малой, порядка $O(\varepsilon^2)$, окрестности фронта волны расширения (6):

$$x = \frac{1}{\varepsilon^2} (\tau_0 - \xi_0), \quad \tau_0 = c_1 t / R, \quad \xi_0 = \alpha / R, \quad \zeta_F = z_F / h, \tag{10}$$

где R — характерное значение радиусов кривизны. Примем, что дифференцирование по введенным переменным параметрам не изменяет порядка искомых функций. Эти переменные позволяют явно выделить области применимости искомого погранслоя, которые схематично представлены на рис. 4.

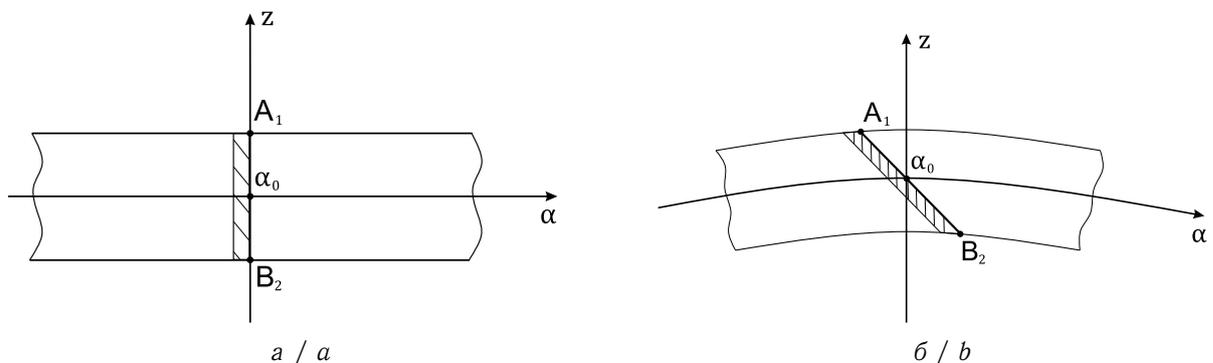


Рис. 4. Схемы областей применимости гиперболического погранслоя в цилиндрической оболочке (а) и оболочке вращения (б)

Fig. 4. Schemes of the domains of applicability of the hyperbolic boundary layer in a cylindrical shell (a) and a shell of revolution (b)

Здесь изображено расположение искоемых областей применимости для цилиндрической оболочки (рис. 4, а) и оболочки вращения (рис. 4, б) в момент времени t_0 с координатой фронта на срединной поверхности $\alpha_0 = c_1 t$; отрезки $A_1 B_2$ задают прямолинейные фронты, которые в случае оболочки вращения образуются путем поворота нормали вокруг точки α_0 .

Асимптотические величины компонент НДС зададим следующим образом:

$$v_1 = R\varepsilon v_1^*, \quad v_3 = R\varepsilon^2 v_3^*, \quad \sigma_{11} = E\varepsilon^{-1} \sigma_{11}^*, \quad \sigma_{33} = E\varepsilon^{-1} \sigma_{33}^*, \quad \sigma_{13} = E\sigma_{13}^*. \quad (11)$$

Считаем, что величины со звездочками имеют одинаковый асимптотический порядок; звездочки в дальнейшем опускаем. Перейдем в уравнениях (8), (9) к переменным (10) с учетом (11). Учитывая также зависимость производных по α от производных по x и ξ_0 , приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \varkappa^2(1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta_F^2} - \frac{2}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \zeta_F \frac{\partial v_1}{\partial x \partial \zeta} + 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \xi_0} - \frac{\sqrt{1 + F^2}}{2(1 - \nu)} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial \zeta_F} - \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \\ \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \zeta_F} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\sigma_{11} = -\frac{1}{2(1 + \nu)\varkappa^2} \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \sigma_{33} = -\frac{\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \sigma_{13} = \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 + \nu} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta_F}. \quad (13)$$

Полученные разрешающие уравнения (12), (13) являются уравнениями с медленно изменяющимися коэффициентами, зависящими от функции B и функции F , которая стремится к нулю при стремлении к бесконечности главного радиуса кривизны R_1 . При этом фронт волны переходит в положение нормали к срединной поверхности и оболочка становится оболочкой вращения нулевой гауссовой кривизны, а рассматриваемые уравнения переходят в уже полученные разрешающие уравнения для этих простейших оболочек.

Система уравнений (12) получена с погрешностью $O(\varepsilon)$, поэтому ее второе уравнение с медленно изменяющимся коэффициентом можно проинтегрировать по x , получая выражение для перемещения v_3 через v_1 :

$$\frac{\partial v_3}{\partial x} = -\sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta}. \quad (14)$$

Подставляя (14) в первое уравнение системы (12), приходим к одному разрешающему уравнению относительно асимптотически главной компоненты v_1 :

$$\begin{aligned} (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta_F^2} + 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \xi_0} - \frac{2}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \zeta_F \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \zeta_F} - \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \\ \sigma_{11} = -\frac{1}{2(1 + \nu)\varkappa^2} \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \sigma_{33} = -\frac{\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \sigma_{13} = \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 + \nu} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta_F}. \end{aligned}$$

В исходной размерной форме полученные разрешающие уравнения для асимптотически главных составляющих примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{2z_F}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} = 0, \\ \sigma_{11} = \frac{E}{2(1 + \nu)\varkappa^2} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}, \quad \sigma_{33} = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}, \quad \sigma_{13} = \frac{E}{1 + \nu} \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_1}{\partial z_F}. \end{aligned} \quad (15)$$

Полученные разрешающие уравнения (15) обобщают аналогичные уравнения погранслоя для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны, поскольку при стремлении R_1 к бесконечности функция $F(\alpha_0)$ стремится к нулю и полученные уравнения (15) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0, \\ \sigma_{11} = \frac{E}{2(1 + \nu)\varkappa^2} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}, \quad \sigma_{33} = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}, \quad \sigma_{13} = \frac{E}{1 + \nu} \frac{\partial v_1}{\partial z}, \end{aligned} \quad (16)$$



что является системой разрешающих уравнений гиперболического погранслоя, полученных в [6]. Отметим также, что при переходе в (15) к исходным координатам (α, z) также полностью приходим к уравнениям (16). Можно, таким образом, сделать вывод, что система (16) описывает гиперболический погранслой в рамках окрестности порядка $O(\varepsilon)$, внутри которой он и содержится с толщиной порядка $O(\varepsilon^2)$, а для его определения и требуются уравнения системы (15).

Построенные разрешающие уравнения движения свелись для асимптотически главных компонент НДС к одному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами, для удовлетворения которых требуется только по одному граничному условию как на торце, так и на лицевых поверхностях. Поэтому граничные условия на лицевых поверхностях запишутся в форме

$$\sigma_{33} = 0, \quad z_F = \pm h\sqrt{1 + F^2(\alpha)},$$

а для нагружений на торце — в следующей форме:

$$\sigma_{11} = IH(t), \quad \alpha = 0.$$

Вывод

Разработанная модель завершает построение асимптотической теории нестационарного НДС тонких оболочек вращения в плане вывода оптимальных уравнений, описывающих в простейшей форме его свойства в малой окрестности переднего фронта волны расширения. Также проведена привязка фронта к повороту нормали к срединной поверхности и выявление главных компонент НДС: продольного перемещения и нормальных напряжений. Полученное разрешающее гиперболическое уравнение второго порядка позволяет не только получить аналитическое решение, но и дать удобную форму для решения численного.

Список литературы

1. Nigul U. K. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // *International Journal of Solids and Structures*. 1969. Vol. 5, iss. 6. P. 607–627. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90031-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90031-6)
2. Коссович Л. Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1986. 176 с. EDN: VIOSWL
3. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. *Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies*. San Diego : Academic Press, 1998. 226 p. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-20923-8>, EDN: WNSAFB
4. Kossovich L. Yu., Kirillova I. V. Dynamics of shells under shock loading: An asymptotic approach // *Civil-Comp Proceedings*. 2008. Vol. 88. P. 1–20. EDN: QPMORG
5. Коссович Л. Ю., Кириллова И. В. Асимптотическая теория нестационарных процессов в тонких оболочках // *Актуальные проблемы механики сплошной среды : труды II междунар. конф. (Дилижан, 04–08 октября 2010 г.)*. Т. 1. Дилижан : ЕГУАС, 2010. С. 321–325.
6. Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Dynamic boundary layer at nonstationary elastic wave propagation in thin shells of revolution // *AiM'96: Proceedings of the Second International conference «Asymptotics in mechanics»*. Saint Petersburg State Marine Technical University, Saint Petersburg, Russia, October 13–16, 1996. Saint Petersburg, 1997. P. 121–128.
7. Кириллова И. В. Асимптотический вывод двух типов приближения динамических уравнений теории упругости для тонких оболочек : дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1998. 122 с.
8. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Москва : Наука, 1976. 512 с.

References

1. Nigul U. K. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates. *International Journal of Solids and Structures*, 1969, vol. 5, iss. 6, pp. 607–627. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90031-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90031-6)
2. Kossovich L. Yu. *Nestatsionarnye zadachi teorii uprugikh tonkikh obolochek* [Unsteady Problems in the Theory of Elastic Thin Shells]. Saratov, Saratov State University Publ., 1986. 176 p. (in Russian). EDN: VIOSWL
3. Kaplunov Y. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. *Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies*. San Diego, Academic Press, 1998. 226 p. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-20923-8>, EDN: WNSAFB



4. Kossovich L. Yu, Kirillova I. V. Dynamics of shells under shock loading: An asymptotic approach. *Civil-Comp Proceedings*, 2008, vol. 88, pp. 1–20. EDN: [QPMORG](#)
5. Kossovich L. Yu., Kirillova I. V. Asymptotic theory of nonstationary processes in thin shells. *Proceedings of the Second International Conference Topical Problems of Continuum Mechanics*. Dilijan, Armenia, 2010, vol. 1, pp. 321–325 (in Russian).
6. Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Dynamic boundary layer at nonstationary elastic wave propagation in thin shells of revolution. *AiM'96: Proceedings of the Second International Conference "Asymptotics in mechanics"*. Saint Petersburg State Marine Technical University, Saint Petersburg, Russia, October 13–16, 1996. Saint Petersburg, 1997, pp. 121–128.
7. Kirillova I. V. *Asymptotic derivation of two types of approximation of dynamic equations of the theory of elasticity for thin shells*. Diss. Cand. Sci. (Phys.-Math.). Saratov, 1998. 122 p. (in Russian).
8. Goldenweiser A. L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek* [Theory of Elastic Thin Shells]. Moscow, Nauka, 1976. 512 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 20.11.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

Опубликована / Published 31.05.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 231–244

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 231–244

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-231-244>, EDN: VLEBOS

Научная статья

УДК 539.3

Математическая модель колебаний ортотропных сетчатых микрополярных цилиндрических оболочек в условиях температурных воздействий

Е. Ю. Крылова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Крылова Екатерина Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, kat.krylova@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7593-0320>, AuthorID: 722982

Аннотация. В работе построена математическая модель колебаний микрополярных цилиндрических оболочек сетчатой структуры под действием вибрационных и температурных воздействий. Материал оболочки упругий, ортотропный, однородный, моделируемый псевдоконтинуумом Коссера, со стесненным вращением частиц. Принят закон Дюгамеля – Неймана. Сетчатая структура учтена по модели Г. И. Пшеничнова, геометрическая нелинейность — по теории Теодора фон Кармана. Уравнения движения, граничные и начальные условия получены из вариационного принципа Остроградского – Гамильтона на основе кинематической модели С. П. Тимошенко. Построенная математическая модель будет полезной, в том числе при исследовании поведения углеродных нанотрубок в различных условиях эксплуатации.

Ключевые слова: цилиндрические оболочки сетчатой структуры, математическое моделирование, термодинамика, углеродная нанотрубка

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00331).

Для цитирования: Крылова Е. Ю. Математическая модель колебаний ортотропных сетчатых микрополярных цилиндрических оболочек в условиях температурных воздействий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 231–244. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-231-244>, EDN: VLEBOS

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Mathematical model of orthotropic meshed micropolar cylindrical shells oscillations under temperature effects

E. Yu. Krylova

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Ekaterina Yu. Krylova, kat.krylova@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7593-0320>, AuthorID: 722982

Abstract. In the work the mathematical model of micropolar meshed cylindrical shells oscillations under the action of the vibrational and temperature effects is constructed. The shell material is an elastic orthotropic homogeneous Cosserat pseudocontinuum with constrained rotation of particles. The Duhamel – Neumann’s law was adopted. The mesh structure is taken into account according to the model of G. I. Pshenichnov, geometric nonlinearity according to Theodor von Karman theory. The equations of motion, boundary



and initial conditions are obtained from the Ostrogradsky – Hamilton variational principle based on the Timoshenko kinematic model. The constructed a mathematical model will be useful, among other things, in the study of the behavior of carbon nanotubes under various operating conditions.

Keywords: mesh structure cylindrical shells, mathematical modeling, thermodynamics, carbon nanotube

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-21-00331).

For citation: Krylova E. Yu. Mathematical model of orthotropic meshed micropolar cylindrical shells oscillations under temperature effects. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 231–244 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-231-244>, EDN: VLEBOS

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Научно-технический прогресс и развитие современных технологий неумолимо приводят к тому, что нано- и микроэлектромеханические системы (НЭМС и МЭМС) на углеродных нанотрубках (УНТ) начинают напрямую конкурировать и даже превосходить НЭМС и МЭМС, в которых используются традиционные материалы. Для использования УНТ в качестве конструктивных элементов НЭМС и МЭМС будущего необходимо хорошо разбираться в особенностях их поведения в зависимости от разного рода факторов (вибрационных, шумовых, тепловых, электростатических воздействий, влажности, диссипации внешней среды), что обуславливает необходимость создания максимально точных математических моделей и методов их расчета.

Анализ поведения УНТ лежит в плоскости научных интересов многих авторов и научных групп как в России, так и за рубежом. Для анализа поведения УНТ как механических объектов применялись балочные модели Эйлера – Бернулли [1], Тимошенко [2], Пелеха – Шереметьева [3], где учет размерно-зависимого поведения был связан с градиентной теорией упругости. Моментная теория упругости применялась к анализу УНТ в работе [4]. В [5] изучение динамики углеродных нанотрубок велось на основе градиентной теории упругости с учетом деформации сдвига. Модели поведения ортотропных микрополярных оболочек построены в работах [6, 7]. Большинство авторов для анализа статики и динамики УНТ используют линейные модели [8–11], в то время как экспериментальные данные указывают на необходимость учета нелинейности при моделировании поведения рассматриваемых объектов [12]. В работе [13] предложена континуальная модель сетчатой оболочки, образованной двумя семействами гибких нелинейно-упругих волокон, сохраняющих свою ортогональность в процессе деформирования. Анализ поведения размерно-зависимых геометрически нелинейных сетчатых оболочек модели Кирхгофа – Лява с различной геометрией сетки приводится в работе [14]. УНТ как элементы электроники, в частности полевых транзисторов, зачастую работают в широком диапазоне температур под действием вибрационных нагрузок. Модель балки Эйлера – Бернулли в сочетании с нелокальной теорией упругости Эрингена используется для анализа влияния температурных градиентов на поведение УНТ в работах [15, 16].

Теория колебаний УНТ как геометрически нелинейных ортотропных сетчатых цилиндрических оболочек с учетом сдвиговых деформаций, размерно-зависимого поведения, температурных и вибрационных нагрузок в известной автору литературе не встречалась. Математическая модель деформирования цилиндрической оболочки сетчатой структуры с учетом вышеописанных факторов построена в настоящей статье.

1. Обоснование методов и подходов

Следует отметить, что предложенная теория будет полезна при исследовании поведения любых конструктивных элементов в виде сетчатых цилиндрических оболочек в условиях температурных и вибрационных воздействий от макро- до наноразмера, в частности, таких как углеродная нанотрубка.



Углеродная нанотрубка является наноразмерным объектом, поэтому при исследовании ее поведения следует опираться на теории, учитывающие эффекты масштаба. В рамках данной работы используется моментная (микрополярная) теория со стесненным вращением частиц.

УНТ состоит из одной или нескольких свернутых в трубку графеновых плоскостей. Графен — кристаллический материал. В работе [17] экспериментально установлено, что в процессе деформации кристаллов важную роль играют сдвиги и повороты, а следовательно, обоснована необходимость использования при моделировании их поведения теорий типа С. П. Тимошенко.

Авторами работы [18] проведены квантово-химические исследования механических свойств графена и показано, что с уменьшением линейных размеров графенового листа разница между значениями модулей Юнга в двух взаимно перпендикулярных направлениях растет. Средствами молекулярной динамики в исследовании [19] получен аналогичный результат. Из этого следует необходимость построения общей теории колебаний УНТ с учетом анизотропии (ортотропии).

Углеродная нанотрубка как механический объект представляет собой замкнутую цилиндрическую оболочку сетчатой структуры. В рамках данной работы ее структуру предлагается учесть на основании теории Г. И. Пшеничного, которая предполагает, что регулярную систему густо расположенных ребер можно заменить сплошным слоем.

НЭМС и МЭМС, составными частями которых являются УНТ, приходится работать в условиях высоких температур, поэтому математическая модель строится с учетом стационарного уравнения теплопроводности.

Исследования особенностей нелинейной динамики конструкционных элементов НЭМС и МЭМС (сенсоров, транзисторов) в зависимости от условий их эксплуатации очень важны для понимания процессов, происходящих в приборах, для стабилизации режимов работы, нейтрализации пагубных внешних воздействий (тепловых, вибрационных и т. п.). Предложенная в данной работе теория позволяет проводить анализ нелинейной динамики сетчатых наноразмерных цилиндрических оболочек вследствие учета в ней геометрической нелинейности.

2. Математическая модель колебаний сплошной микрополярной оболочки в условиях температурных воздействий

Предположим, что замкнутая цилиндрическая оболочка занимает в пространстве \mathbf{R}^3 область $\Omega = \{0 \leq \alpha \leq b; 0 \leq \beta \leq 2\pi; -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}\}$. Введем в рассмотрение систему координат следующим образом:

- координата z отсчитывается от срединной поверхности оболочки вдоль ее наружной нормали;
- ось $O\alpha$ направлена вдоль образующей;
- ось $O\beta$ направлена вдоль окружности цилиндра, образованного срединной поверхностью оболочки (рис. 1).

Будем считать, что материал оболочки упругий, ортотропный, однородный, моделируемый псевдоконтинуумом Коссера (со стесненным вращением частиц). Определяющие соотношения для микрополярного ортотропного материала будут иметь вид [20]:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\alpha\alpha} &= a_{11}\sigma_{\alpha\alpha} + a_{12}\sigma_{\beta\beta} + a_{13}\sigma_{zz}; & \chi_{\alpha\alpha} &= b_{11}m_{\alpha\alpha} + b_{12}m_{\beta\beta} + b_{13}m_{zz}; \\
 \epsilon_{\beta\beta} &= a_{12}\sigma_{\alpha\alpha} + a_{22}\sigma_{\beta\beta} + a_{23}\sigma_{zz}; & \chi_{\beta\beta} &= b_{12}m_{\alpha\alpha} + b_{22}m_{\beta\beta} + b_{23}m_{zz}; \\
 \epsilon_{\alpha\alpha} &= a_{11}\sigma_{\alpha\alpha} + a_{12}\sigma_{\beta\beta} + a_{13}\sigma_{zz}; & \chi_{\alpha\alpha} &= b_{11}m_{\alpha\alpha} + b_{12}m_{\beta\beta} + b_{13}m_{zz}; \\
 \epsilon_{\beta\beta} &= a_{12}\sigma_{\alpha\alpha} + a_{22}\sigma_{\beta\beta} + a_{23}\sigma_{zz}; & \chi_{\beta\beta} &= b_{12}m_{\alpha\alpha} + b_{22}m_{\beta\beta} + b_{23}m_{zz}; \\
 \epsilon_{zz} &= a_{13}\sigma_{\alpha\alpha} + a_{23}\sigma_{\beta\beta} + a_{33}\sigma_{zz}; & \chi_{zz} &= b_{13}m_{\alpha\alpha} + b_{23}m_{\beta\beta} + b_{33}m_{zz};
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

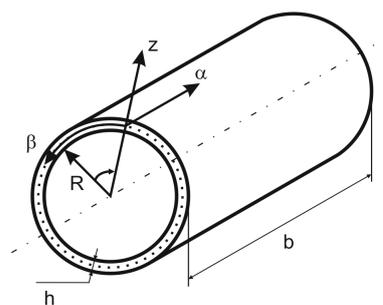


Рис. 1. Расчетная схема цилиндрической оболочки
 Fig. 1. Design diagram of a cylindrical shell

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\alpha\beta} &= a_{44}\sigma_{\alpha\beta} + a_{45}\sigma_{\beta\alpha}; & \epsilon_{\beta\alpha} &= a_{45}\sigma_{\alpha\beta} + a_{55}\sigma_{\beta\alpha}; & \epsilon_{\alpha z} &= a_{66}\sigma_{\alpha z} + a_{67}\sigma_{z\alpha}; \\
 \chi_{\alpha\beta} &= b_{44}m_{\alpha\beta} + b_{45}m_{\beta\alpha}; & \chi_{\beta\alpha} &= b_{45}m_{\alpha\beta} + b_{55}m_{\beta\alpha}; & \chi_{\alpha z} &= b_{66}m_{\alpha z} + b_{67}m_{z\alpha}; \\
 \epsilon_{z\alpha} &= a_{67}\sigma_{\alpha z} + a_{77}\sigma_{z\alpha}; & \epsilon_{z\beta} &= a_{89}\sigma_{\beta z} + a_{99}\sigma_{z\beta}; & \epsilon_{\beta z} &= a_{88}\sigma_{\beta z} + a_{89}\sigma_{z\beta}; \\
 \chi_{z\alpha} &= b_{67}m_{\alpha z} + b_{77}m_{z\alpha}; & \chi_{z\beta} &= b_{89}m_{\beta z} + b_{99}m_{z\beta}; & \chi_{\beta z} &= b_{88}m_{\beta z} + b_{89}m_{z\beta},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где a_{ij} и b_{ij} — упругие константы микрополярного ортотропного материала, σ_{ij} , m_{ij} — компоненты тензора силового и моментного напряжений соответственно, ϵ_{ij} и χ_{ij} — компоненты тензора деформации и тензора изгиба-кручения.

Приведенная ниже теория основана на кинематической модели С. П. Тимошенко. Компоненты вектора перемещений в таком случае примут вид [21]:

$$u_\alpha = u(\alpha, \beta, t) + z\gamma_\alpha(\alpha, \beta, t)u_\beta = v(\alpha, \beta, t) + z\gamma_\beta(\alpha, \beta, t)u_z = w(\alpha, \beta, t), \tag{3}$$

u, v, w — осевые смещения срединной поверхности оболочки в направлениях α, β, z соответственно, $\gamma_\alpha, \gamma_\beta$ — углы поворота поперечных сечений оболочки. Компоненты симметричного тензора деформаций цилиндрической оболочки с учетом принятых гипотез и геометрической нелинейности по теории Т. фон Кармана [22] примут вид

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + z \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha}, & \epsilon_{\beta\beta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{w}{R} + z \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \beta}, \\
 \epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{z}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \alpha} \right), \\
 \epsilon_{\beta z} &= \frac{1}{2} \left(\gamma_\beta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R} \right), & \epsilon_{\alpha z} &= \frac{1}{2} \left(\gamma_\alpha + \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right), & e_{zz} &= 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Компоненты вектора микроповоротов $\theta_\alpha, \theta_\beta, \theta_z$ в случае среды Коссера со стесненным вращением частиц (псевдоконтинуума Коссера) будут иметь вид

$$\theta_i = \frac{1}{2} (\text{rot} \mathbf{u})_i, \quad i = \{\alpha, \beta, z\}, \tag{5}$$

где \mathbf{u} — вектор перемещений. Компоненты симметричного тензора изгиба-кручения запишутся следующим образом [23]:

$$\begin{aligned}
 \chi_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \alpha} \right); & \chi_{\beta\beta} &= \frac{1}{2R} \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \beta} + z \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \alpha} \right); \\
 \chi_{zz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \alpha} \right); & \chi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \beta} \right); \\
 \chi_{\alpha z} &= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{v}{R^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{\gamma_\beta}{R} - \frac{z}{R} \frac{\partial^2 \gamma_\alpha}{\partial \alpha \partial \beta} + z \frac{\partial^2 \gamma_\beta}{\partial \alpha^2} \right); \\
 \chi_{\beta z} &= \frac{1}{2R} \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \beta^2} + \frac{\partial v}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \gamma_\alpha - \frac{z}{R} \frac{\partial^2 \gamma_\alpha}{\partial \beta^2} + z \frac{\partial^2 \gamma_\beta}{\partial \alpha \partial \beta} \right).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Следуя принятым гипотезам, пренебрегаем в законе Гука (1), (2) напряжениями σ_{zz} вследствие их малости по сравнению с другими напряжениями. Учитывая гипотезы Дюгамеля – Неймана, считаем, что тепловые деформации являются суперпозицией упругих деформаций и тепловых расширений. Принимая во внимание симметрию тензоров силовых и моментных напряжений ($a_{44} = a_{55}, a_{66} = a_{77}, a_{88} = a_{99}, b_{44} = b_{55}, b_{66} = b_{77}, b_{88} = b_{99}$), запишем определяющие соотношения для материала оболочки:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\alpha\alpha} &= \frac{a_{22}}{\Delta_0} \epsilon_{\alpha\alpha} - \frac{a_{12}}{\Delta_0} \epsilon_{\beta\beta} - \left[\frac{\alpha_\alpha a_{22} - \alpha_\beta a_{12}}{\Delta_0} \right] \Theta \sigma_{\beta\beta} = \\
 &= -\frac{a_{12}}{\Delta_0} \epsilon_{\alpha\alpha} - \frac{a_{12}}{\Delta_0} \epsilon_{\beta\beta} - \left[\frac{\alpha_\beta a_{11} - \alpha_\alpha a_{12}}{\Delta_0} \right] \Theta \sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{a_{45} + a_{44}} \epsilon_{\alpha\beta},
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \sigma_{\alpha\alpha} &= \frac{a_{22}}{\Delta_0} \epsilon_{\alpha\alpha} - \frac{a_{12}}{\Delta_0} \epsilon_{\beta\beta} - \left[\frac{\alpha_\alpha a_{22} - \alpha_\beta a_{12}}{\Delta_0} \right] \Theta \sigma_{\beta\beta} = \\
 &= -\frac{a_{12}}{\Delta_0} \epsilon_{\alpha\alpha} - \frac{a_{12}}{\Delta_0} \epsilon_{\beta\beta} - \left[\frac{\alpha_\beta a_{11} - \alpha_\alpha a_{12}}{\Delta_0} \right] \Theta \sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{a_{45} + a_{44}} \epsilon_{\alpha\beta}, \\
 \sigma_{\alpha z} &= \frac{1}{a_{67} + a_{66}} \epsilon_{\alpha z}, \quad \sigma_{\beta z} = \frac{1}{a_{89} + a_{99}} \epsilon_{\beta z}, \\
 m_{\alpha\alpha} &= \frac{b_{11} (b_{11} b_{33} - b_{23}^2)}{\Delta} \chi_{\alpha\alpha} - \frac{b_{12} (b_{12} b_{33} - b_{13} b_{23})}{\Delta} \chi_{\beta\beta} + \frac{b_{13} (b_{12} b_{23} - b_{13} b_{22})}{\Delta} \chi_{zz}, \\
 m_{\beta\beta} &= -\frac{b_{12} (b_{12} b_{33} - b_{23} b_{13})}{\Delta} \chi_{\alpha\alpha} + \frac{b_{22} (b_{11} b_{33} - b_{13}^2)}{\Delta} \chi_{\beta\beta} - \frac{b_{23} (b_{11} b_{22} - b_{13} b_{12})}{\Delta} \chi_{zz}, \\
 m_{zz} &= \frac{b_{13} (b_{12} b_{32} - b_{22} b_{13})}{\Delta} \chi_{\alpha\alpha} - \frac{b_{23} (b_{11} b_{23} - b_{12} b_{13})}{\Delta} \chi_{\beta\beta} - \frac{b_{33} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2)}{\Delta} \chi_{zz}, \\
 m_{\alpha\beta} &= \frac{1}{b_{45} + b_{44}} \chi_{\alpha\beta}, \quad m_{\alpha z} = \frac{1}{b_{67} + b_{66}} \chi_{\alpha z}, \quad m_{\beta z} = \frac{1}{b_{89} + b_{99}} \chi_{\beta z},
 \end{aligned} \tag{7}$$

где $\Delta_0 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$, $\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}$, $\Theta = \Theta(\alpha, \beta, z)$ — известная функция абсолютной температуры оболочки $\alpha_\alpha, \alpha_\beta$ — коэффициенты теплового расширения материала в соответствующих направлениях.

Введем обозначения силовых и моментных усилий и моментов:

$$\begin{aligned}
 \{N_{\alpha\alpha}, M_{\alpha\alpha}\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\alpha} z^{\{0,1\}} dz, \quad Q_{z\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{z\alpha} k_s dz, \quad \{Y_{\alpha\alpha}, J_{\alpha\alpha}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{\alpha\alpha} z^{\{0,1\}} dz, \\
 \{Y_{z\alpha}, J_{z\alpha}\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{z\alpha} k_s z^{\{0,1\}} dz, \quad \{T, H\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} z^{\{0,1\}} dz, \quad Y_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{\alpha\beta} dz, \\
 Y_{zz} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{zz} dz, \quad \alpha \rightleftharpoons \beta.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Коэффициент k_s характеризует распределение касательных напряжений по толщине оболочки (в настоящей работе принято $k_s = 8/9$ [24]).

Уравнения движения сплошной микрополярной ортотропной цилиндрической оболочки с учетом температурных воздействий, граничные и начальные условия получим из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского [25, 26]:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta U + \delta W_\epsilon + \delta W_q) dt = 0, \tag{9}$$

здесь K — кинетическая энергия, U — потенциальная энергия, W — работа внешних сил, связанная с распределенными силами (W_q) и диссипацией энергии (W_ϵ). С учетом моментной теории [27] потенциальная энергия U для бесконечно малых деформаций представима в виде

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \epsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) d\Omega.$$

Кинетическая энергия:

$$K = \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega,$$

вариация работы внешних сил:

$$\delta W_q = \int_0^{2\pi} \int_0^b q(\alpha, \beta, t) \delta w \, d\alpha \, d\beta, \quad \delta W_\epsilon = \int_\Omega \rho \epsilon \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \, d\Omega,$$

ϵ — коэффициент диссипации, ρ — плотность материала оболочки, $q(\alpha, \beta, t)$ — внешняя нормальная нагрузка.

Осуществляя варьирование, собирая коэффициенты при одинаковых вариациях, получим уравнения движения гладкой ортотропной микрополярной цилиндрической оболочки с учетом температурных воздействий:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial \beta} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial Y_{zz}}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 Y_{z\beta}}{\partial \beta^2} - \frac{\partial Y_{\beta\beta}}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 Y_{z\alpha}}{\partial \alpha \partial \beta} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ & \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\beta\beta}}{\partial \beta} + \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{Q_{z\beta}}{2R} - \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{\beta\beta}}{\partial \alpha} - \\ & - \frac{1}{2R^2} \frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - \frac{Y_{z\alpha}}{2R^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{z\alpha}}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 Y_{z\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(N_{\alpha\alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(T \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(T \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(N_{\beta\beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{R} N_{\beta\beta} + \\ & + \frac{\partial Q_{z\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{z\beta}}{\partial \beta} - \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 Y_{\beta\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\beta}}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{2R^2} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\beta}}{\partial \beta^2} - \\ & - \frac{1}{2R^2} \frac{\partial Y_{z\alpha}}{\partial \beta} + \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{z\beta}}{\partial \alpha} + q = \rho h \epsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ & \frac{\partial M_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial \beta} - Q_{z\alpha} + \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{\beta\beta}}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 J_{z\alpha}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{2R^2} \frac{\partial^2 J_{z\beta}}{\partial \beta^2} - \\ & - \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{zz}}{\partial \beta} + \frac{Y_{z\beta}}{2R} = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \gamma_\alpha}{\partial t^2}; \\ & \frac{\partial H}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\beta\beta}}{\partial \beta} - Q_{z\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{1}{2R} \frac{\partial J_{\beta\beta}}{\partial \alpha} - \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + \frac{Y_{z\alpha}}{2R} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{zz}}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J_{z\alpha}}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 J_{z\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \gamma_\beta}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

и граничные условия:

$$\begin{aligned} \delta u = 0 \quad \text{или} \quad & \left\{ N_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{z\alpha}}{\partial \beta} \right\}_{\Gamma_\alpha} = 0, \quad \left\{ -T + \frac{Y_{\beta\beta}}{2R} - \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{z\beta}}{\partial \beta} - \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{z\alpha}}{\partial \alpha} - \frac{Y_{zz}}{2} \right\}_{\Gamma_\beta} = 0; \\ \frac{\partial \delta u}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{или} \quad & \{ Y_{z\alpha} \}_{\Gamma_\beta} = 0; \quad \frac{\partial \delta u}{\partial \beta} = 0 \quad \text{или} \quad \{ Y_{z\alpha} \}_{\Gamma_\alpha} = 0, \{ Y_{z\beta} \}_{\Gamma_\beta} = 0; \\ \delta v = 0 \quad \text{или} \quad & \left\{ \frac{Y_{z\alpha}}{2R} - \frac{Y_{\beta\beta}}{2R} - T + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{z\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{z\beta}}{\partial \beta} \right\}_{\Gamma_\alpha} = 0, \quad \left\{ N_{\beta\beta} - \frac{Y_{\alpha\beta}}{2R} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{z\beta}}{\partial \alpha} \right\}_{\Gamma_\beta} = 0; \\ \frac{\partial \delta v}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{или} \quad & \left\{ Y_{z\alpha} + \frac{1}{2} Y_{z\beta} \right\}_{\Gamma_\alpha} = 0, \quad \{ Y_{z\beta} \}_{\Gamma_\beta} = 0; \\ \delta \gamma_\alpha = 0 \quad \text{или} \quad & \left\{ M_{\alpha\alpha} + Y_{\alpha\beta} + \frac{1}{2R} \frac{\partial J_{z\alpha}}{\partial \beta} \right\}_{\Gamma_\alpha} = 0, \quad \left\{ \frac{H}{R} - \frac{Y_{\beta\beta}}{2R} - \frac{1}{2R} \frac{\partial J_{z\alpha}}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial J_{z\beta}}{\partial \beta} + \frac{Y_{zz}}{2R} \right\}_{\Gamma_\beta} = 0; \\ \frac{\partial \delta \gamma_\alpha}{\partial \beta} = 0 \quad \text{или} \quad & \{ J_{z\alpha} \}_{\Gamma_\beta} = 0; \quad \frac{\partial \delta \gamma_\alpha}{\partial \beta} = 0 \quad \text{или} \quad \{ J_{z\alpha} \}_{\Gamma_\alpha} = 0, \{ J_{z\beta} \}_{\Gamma_\beta} = 0; \\ \delta \gamma_\beta = 0 \quad \text{или} \quad & \left\{ H - \frac{Y_{\beta\beta}}{2} - J_{\beta\beta} - \frac{Y_{zz}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{zz}}{\partial \alpha} - \frac{1}{2R} \frac{\partial J_{z\beta}}{\partial \beta} \right\}_{\Gamma_\alpha} = 0, \end{aligned}$$



$$\left\{ M_{\beta\beta} - Y_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial J_{z\beta}}{\partial \alpha} \right\}_{\Gamma_\beta} = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \delta \gamma_\beta}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{или} \quad \{J_{z\alpha}\}_{\Gamma_\alpha} = 0, \quad \{J_{z\beta}\}_{\Gamma_\beta} = 0; \quad \frac{\partial \delta \gamma_\beta}{\partial \beta} = 0 \quad \text{или} \quad \{J_{z\beta}\}_{\Gamma_\beta} = 0;$$

$$\delta w = 0 \quad \text{или} \quad \left\{ -N_{\alpha\alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{2T}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} - Q_{z\alpha} + \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{\alpha\alpha}}{\partial \beta} - \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{\beta\beta}}{\partial \beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - \frac{Y_{z\beta}}{2R} \right\}_{\Gamma_\alpha} = 0,$$

$$\left\{ -N_{\beta\beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - 2T \frac{\partial w}{\partial \alpha} - Q_{z\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{\beta\beta}}{\partial \alpha} - \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - \frac{Y_{z\alpha}}{2R} \right\}_{\Gamma_\beta} = 0;$$

$$\frac{\partial \delta w}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{или} \quad \{Y_{\alpha\beta}\}_{\Gamma_\alpha} = 0, \quad \{-Y_{\alpha\alpha} + Y_{\beta\beta}\}_{\Gamma_\beta} = 0;$$

$$\frac{\partial \delta w}{\partial \beta} = 0 \quad \text{или} \quad \{-Y_{\alpha\alpha} + Y_{\beta\beta}\}_{\Gamma_\alpha} = 0, \quad \{Y_{\alpha\beta}\}_{\Gamma_\beta} = 0.$$

Для построения математической модели колебаний ортотропных сетчатых микрополярных цилиндрических оболочек в условиях температурных воздействий к уравнениям движения присоединим стационарное трехмерное уравнение теплопроводности

$$\lambda_\alpha \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \alpha^2} \right) + \lambda_\beta \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \beta^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0,$$

где $\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_z$ — компоненты тензора коэффициентов теплопроводности.

К уравнению теплопроводности присоединим граничные условия первого рода

$$\Theta_\Pi(\alpha, \beta, z) = F_\Pi(\alpha, \beta, z).$$

3. Математическая модель колебаний сетчатой микрополярной оболочки в условиях температурных воздействий

Предположим, что рассматриваемая оболочка состоит из n семейств густо расположенных ребер δ_j , a_j, φ_j — расстояние между ребрами, ширина ребер, угол между осью α и осью ребер j -го семейства соответственно (рис. 2). Опираясь на континуальную модель Г. И. Пшеничного [28], заменим регулярную систему ребер сплошным слоем.

Деформация оси какого-либо ребра равна деформации линии, совпадающей с осью этого стержня в расчетной модели. Будем считать, что одна из главных центральных осей поперечных сечений ребер оболочки совпадает с направлением нормали к срединной поверхности оболочки. В таком случае напряжения, возникающие в эквивалентной гладкой оболочке, связанные с напряжениями в ребрах, составляющих углы φ_j с осью α , будут иметь вид (1), (2). Данные соотношения получаются из условий равенства сил, действующих на одинаковых площадках оболочки, состоящей из системы ребер, и эквивалентной ей гладкой оболочки:

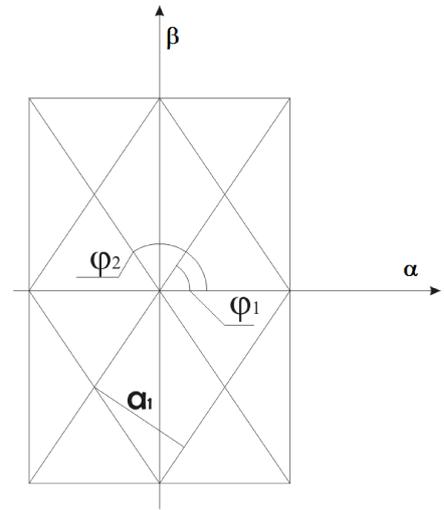


Рис. 2. Структура сетки цилиндрической оболочки

Fig. 2. Cylindrical shell mesh structure

$$\{\sigma_{\alpha\alpha}, m_{\alpha\alpha}\} = \sum_{j=1}^n \frac{\{\sigma^j, m^j\} \delta_j \cos^2 \varphi_j}{a_j}, \quad \{\sigma_{\beta\beta}, m_{\beta\beta}\} = \sum_{j=1}^n \frac{\{\sigma^j, m^j\} \delta_j \sin^2 \varphi_j}{a_j},$$

$$\begin{aligned} \{\sigma_{\alpha\beta}, m_{\alpha\beta}\} &= \sum_{j=1}^n \frac{\{\sigma^j, m^j\} \delta_j \cos \varphi_j \sin \varphi_j}{a_j}, \quad m_{zz} = \sum_{j=1}^n \frac{m_z^j \delta_j}{a_j}, \\ \{\sigma_{z\alpha}, m_{z\alpha}\} &= \sum_{j=1}^n \frac{\{\sigma_z^j, m_z^j\} \delta_j \cos \varphi_j}{a_j}, \quad \{\sigma_{z\beta}, m_{z\beta}\} = \sum_{j=1}^n \frac{\{\sigma_z^j, m_z^j\} \delta_j \sin \varphi_j}{a_j}. \end{aligned} \quad (11)$$

Дополнительные условия статической эквивалентности исходной сетчатой оболочки и эквивалентной ей сплошной:

$$\begin{aligned} \sigma^j &= \sigma_{\alpha\alpha} \cos^2 \varphi_j + \sigma_{\beta\beta} \sin^2 \varphi_j + \sigma_{\alpha\beta} \cos \varphi_j \sin \varphi_j, \quad \sigma_z^j = \sigma_{z\alpha} \cos \varphi_j + \sigma_{z\beta} \sin \varphi_j, \\ m^j &= m_{\alpha\alpha} \cos^2 \varphi_j + m_{\beta\beta} \sin^2 \varphi_j + m_{\alpha\beta} \cos \varphi_j \sin \varphi_j, \quad m_z^j = m_{z\alpha} \cos \varphi_j + m_{z\beta} \sin \varphi_j + m_{zz}, \end{aligned} \quad (12)$$

получим с помощью метода множителей Лагранжа из условия достижения функционалом стационарного значения. При построении функционала используется выражение для потенциальной энергии деформации, выраженной через напряжения и моменты высших порядков.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_{sk} &= \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j \cos^s \varphi_j \sin^k \varphi_j}{a_j} \quad s, k = 0, 4, \quad C_1 = \frac{a_{22}}{\Delta_0}, \quad C_2 = -\frac{a_{12}}{\Delta_0}, \\ C_3 &= -\frac{a_{12}}{\Delta_0}, \quad C_4 = \frac{1}{a_{45} + a_{44}}, \quad C_5 = \frac{1}{a_{67} + a_{66}}, \quad C_6 = \frac{1}{a_{89} + a_{99}}, \\ B_1 &= \frac{b_{11}(b_{11}b_{33} - b_{23}^2)}{\Delta}, \quad B_2 = -\frac{b_{12}(b_{12}b_{33} - b_{13}b_{23})}{\Delta}, \quad B_3 = \frac{b_{13}(b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22})}{\Delta}, \\ B_4 &= \frac{b_{22}(b_{11}b_{33} - b_{13}^2)}{\Delta}, \quad B_5 = -\frac{b_{23}(b_{11}b_{22} - b_{13}b_{12})}{\Delta}, \quad B_6 = -\frac{b_{33}(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)}{\Delta}, \\ B_7 &= \frac{1}{b_{45} + b_{44}}, \quad B_8 = \frac{1}{b_{67} + b_{66}}, \quad B_9 = \frac{1}{b_{89} + b_{99}}. \end{aligned}$$

Жесткость стержней на изгиб в плоскости, касательной к срединной поверхности оболочки, не учитывается, поэтому порядки систем дифференциальных уравнений, описывающих поведение сетчатых и сплошных оболочек, совпадают. При этом совпадают и формулировки граничных условий соответствующих краевых задач [28].

Учитывая обозначения и (3)–(9), (11), (12), можно записать выражения для классических усилий и моментов, а также усилий, вызванных моментными напряжениями, для цилиндрической гладкой оболочки, эквивалентной исходной сетчатой (отметим, что в свойствах гомогенизированной оболочки температурный фактор не учитывается):

$$\begin{aligned} N_{\alpha\alpha}^s &= \frac{h}{2} \left[\frac{2(A_{22}C_3 + A_{40}C_2)}{R} \left(-w + \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{2R} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \right) + A_{31}C_4 \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + (A_{40}C_1 + A_{22}C_2) \left(2 \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \right) \right]; \\ M_{\alpha\alpha}^s &= \frac{h^3}{24} \left[A_{31}C_4 \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \alpha} \right) + 2(A_{40}C_2 + A_{22}C_3) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \beta} - \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha} \right) \right]; \\ N_{\beta\beta}^s &= N_{\alpha\alpha}^s; \quad M_{\beta\beta}^s = M_{\alpha\alpha}^s \quad \text{с заменой } A_{40} \rightarrow A_{22}, \quad A_{22} \rightarrow A_{04}, \quad A_{31} \rightarrow A_{13}; \\ T^s &= N_{\alpha\alpha}^s; \quad H^s = M_{\alpha\alpha}^s \quad \text{с заменой } A_{40} \rightarrow A_{31}, \quad A_{22} \rightarrow A_{13}, \quad A_{31} \rightarrow A_{22}; \\ Q_{z\alpha}^s &= \frac{hk_s}{2} \left[A_{20}C_5 \left(\gamma_\alpha + \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + A_{11}C_6 \left(\gamma_\beta - \frac{v}{2R} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \right], \quad Q_{z\beta}^s = Q_{z\alpha}^s \\ &\quad \text{с заменой } A_{20} \rightarrow A_{11}, \quad A_{11} \rightarrow A_{02}; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 Y_{\alpha\alpha}^s &= \frac{h}{4} \left[\frac{2(A_{40}(B_2 - B_3) + A_{22}(B_4 - B_5))}{R} \frac{\partial\gamma_\alpha}{\partial\beta} + 2A_{40}(B_3 - B_1) \frac{\partial\gamma_\beta}{\partial\alpha} + \right. \\
 &+ 2A_{22}(B_5 - B_2) \frac{\partial\gamma_\beta}{\partial\alpha} + A_{31}B_7 \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial\gamma_\beta}{\partial\beta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{\partial\gamma_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} \right) - \\
 &- \frac{2(A_{40}(B_1 - B_2) + A_{22}(B_2 - B_4))}{R} \frac{\partial v}{\partial\alpha} + \frac{2(A_{40}(B_2 - B_3) + A_{22}(B_4 - B_5))}{R^2} \frac{\partial u}{\partial\beta} + \\
 &\left. + \frac{2(A_{40}(B_1 - B_2) + A_{22}(B_2 - B_4))}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial\beta\partial\alpha} \right]; \\
 Y_{\beta\beta}^s &= Y_{\alpha\alpha}^s, \quad \text{с заменой } A_{40} \rightarrow A_{22}, \quad A_{22} \rightarrow A_{04}, \quad A_{31} \rightarrow A_{13}; \\
 Y_{\alpha\beta}^s &= Y_{\alpha\alpha}^s, \quad \text{с заменой } A_{40} \rightarrow A_{31}, \quad A_{22} \rightarrow A_{13}, \quad A_{31} \rightarrow A_{22}; \\
 Y_{z\alpha}^s &= \frac{h}{4} \left[\frac{A_{11}B_9}{R} \left(-\gamma_\alpha - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\partial w}{\partial\alpha} \right) + \frac{2A_{10}(B_3) - B_5}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta} + \right. \\
 &+ \frac{2A_{10}(B_5 - B_6)}{R} \left(\frac{\partial\gamma_\alpha}{\partial\beta} - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial\beta} \right) + 2A_{10}(B_3 - B_6) \frac{\partial\gamma_\beta}{\partial\alpha} + \frac{2A_{10}(B_3) + B_5}{R} \frac{\partial v}{\partial\beta} + \\
 &\left. + A_{20}B_8 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial\beta} - \frac{\gamma_\beta}{R} + \frac{v}{R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} \right) \right]; \\
 Y_{z\beta}^s &= Y_{z\alpha}^s \quad \text{с заменой } A_{11} \rightarrow A_{02}, \quad A_{02} \rightarrow A_{11}, \quad A_{10} \rightarrow A_{01}; \\
 Y_{zz}^s &= Y_{z\alpha}^s \quad \text{с заменой } A_{11} \rightarrow A_{01}, \quad A_{02} \rightarrow A_{10}, \quad A_{10} \rightarrow A_{00}; \\
 J_{\beta\beta}^s &= \frac{h^3(A_{22}B_2 + A_{04}B_4)}{24R} \frac{\partial\gamma_\beta}{\partial\alpha}; \\
 J_{z\alpha}^s &= \frac{h^3}{48} \left[-\frac{A_{11}B_9}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2\gamma_\alpha}{\partial\beta^2} - \frac{\partial^2\gamma_\beta}{\partial\alpha\partial\beta} \right) - \frac{A_{20}B_8}{R} \left(\frac{\partial^2\gamma_\alpha}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{\partial^2\gamma_\beta}{\partial\alpha^2} \right) + \frac{2A_{10}B_5}{R} \frac{\partial\gamma_\beta}{\partial\alpha} \right]; \\
 J_{z\beta}^s &= J_{z\alpha}^s \quad \text{с заменой } A_{11} \rightarrow A_{02}, \quad A_{20} \rightarrow A_{11}, \quad A_{10} \rightarrow A_{01}.
 \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в уравнения движения элемента гладкой оболочки, получим разрешающую систему уравнений движения микрополярной ортотропной цилиндрической оболочки модели С. П. Тимошенко, эквивалентной исходной сетчатой оболочке, с учетом температурных воздействий в перемещениях.

4. Численный эксперимент

Методом установления [29] исследуется поведение цилиндрической микрополярной оболочки, состоящей из двух семейств взаимоперпендикулярных ребер под действием статической нормальной распределенной нагрузки в стационарном температурном поле. Торцы оболочки считаем шарнирно опертыми. Граничные условия на основании обобщенных граничных условий (10) в таком случае будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 N_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{z\alpha}}{\partial\beta} &= 0; \quad M_{\alpha\alpha} + Y_{\alpha\beta} + \frac{1}{2R} \frac{\partial J_{z\alpha}}{\partial\beta} = 0; \quad Y_{\alpha z} = Y_{\alpha\beta} = J_{\alpha z} = 0; \\
 \frac{\partial u(\alpha, \beta)}{\partial\alpha} &= \frac{\partial v(\alpha, \beta)}{\partial\beta} = \frac{\partial w(\alpha, \beta)}{\partial\beta} = \frac{\partial\gamma_\alpha(\alpha, \beta)}{\partial\alpha} = \frac{\partial\gamma_\beta(\alpha, \beta)}{\partial\beta} = 0; \\
 v(\alpha, \beta) &= w(\alpha, \beta) = \gamma_\beta(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{при } \alpha = 0, \alpha = b.
 \end{aligned}$$

Рассматриваются нулевые начальные условия.

Температурное поле находится из стационарного уравнения теплопроводности с граничными условиями первого рода. Далее находятся температурные усилия и моменты, которые подставляются в качестве нагрузки в систему уравнений движения элемента оболочки. Дифференциальная задача в частных производных, описывающая движение элемента оболочки, сводится к задаче Коши методом Бубнова – Галеркина в высших приближениях.

Для удовлетворения граничных условий компоненты вектора перемещений и углы поворота выбираются в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 u(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij} \cos\left(\frac{i\pi\alpha}{b}\right) \sin\left(\frac{j\beta}{2}\right), & v(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m B_{ij} \sin\left(\frac{i\pi\alpha}{b}\right) \cos\left(\frac{j\beta}{2}\right); \\
 w(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m C_{ij} \sin\left(\frac{i\pi\alpha}{b}\right) \sin\left(\frac{j\beta}{2}\right), & \gamma_\alpha(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m D_{ij} \cos\left(\frac{i\pi\alpha}{b}\right) \sin\left(\frac{j\beta}{2}\right); \\
 \gamma_\beta(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m K_{ij} \sin\left(\frac{i\pi\alpha}{b}\right) \cos\left(\frac{j\beta}{2}\right).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Следуя процедуре метода установления, было выбрано значение коэффициента диссипации $\epsilon = 0,5$. Далее для ряда значений параметра нормальной постоянной во времени нагрузки q_i была получена последовательность прогибов w_i для выбранной точки оболочки $(\frac{b}{2}, \pi)$ при соответствующих значениях температуры. На основе этих данных строились зависимости $w(q)$.

Параметры численного эксперимента: $h = 0.002$ мкм, $R = 0.02$ мкм, $b = 1$ мкм, $\delta_1 = \delta_2 = 0.002$ мкм, $a_1 = a_2 = 0.002$ мкм, $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$, $\nu = 0.36$, $E = 1$ ТПа (материал оболочки – графен).

Сходимость решения, полученного по методу Бубнова – Галеркина, приведена в таблице.

Сходимость решения ($l = 0.002$ мкм, $q = 0.2$ Па, без учета температуры в точке $(\frac{b}{2}, \pi)$)

Table. Convergence of the solution ($l = 0.002$ mkm, $q = 0.2$ Pa, excluding temperature at point $(\frac{b}{2}, \pi)$)

$n = m$	1	3	5	7
$w(\frac{b}{2}, \pi)$, мкм	0.001309800	0.000405923	0.000449531	0.000436341
$n = m$	9	11	13	15
$w(\frac{b}{2}, \pi)$, мкм	0.000437318	0.000435868	0.000436013	0.000435907

Для получения численных результатов в представлениях функций (13) брались $n = m = 11$.

Следует отметить, что результаты, полученные на основании гипотез Кирхгофа – Лява и С. П. Тимошенко, при $l = 0.002$ мкм и значениях нагрузки $q \in [2; 5]$ Па отличаются на 3%. В данном диапазоне нагрузок прогиб оболочки в точке $(\frac{b}{2}, \pi)$ равен примерно толщине оболочки.

Результаты численного эксперимента показывают, что учет моментных напряжений вносит существенный вклад в результаты расчета прогибов оболочки. С ростом дополнительного независимого параметра l , связанного с учетом в математической модели микрополярной теории, растет изгибная жесткость оболочки (рис. 3). Графики получены при температуре $\Theta = 293K$, параметр $l \in 0, 0.003, 0.005$ мкм, значение нагрузки менялось в диапазоне $q \in [0, 1]$ Па.

На рис. 4 приведены эпюры прогиба углеродной нанотрубки $w(\alpha, \pi)$ при $q = 1$ Па, $l = 0.002$ мкм, без учета тепловых расширений и с двумя вариантами равномерного нагрева $\Theta = 400 K$, $\Theta = 600 K$ ($\alpha_T = 0.000004 K^{-1}$). Коэффициент теплового расширения графена (α_T) в диапазоне температур $\Theta \in [400, 1300]$ имеет значение $\alpha_T = 0.000004 K^{-1}$ [30]. На графиках видно, что нагрев увеличивает прогиб оболочки. Так, при $\Theta = 600K$ прогиб превышает две толщины оболочки.

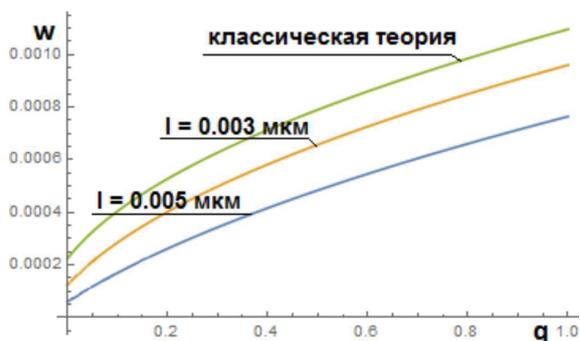


Рис. 3. График $w(q)$ в зависимости от значения l (цвет онлайн)

Fig. 3. Graph of $w(q)$ depending on the value of l (color online)

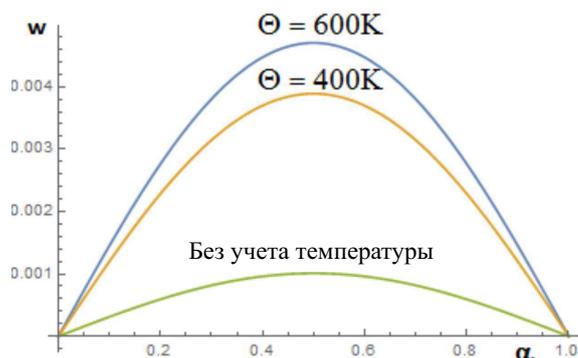


Рис. 4. График $w(\alpha, \pi)$ в зависимости от температуры (цвет онлайн)

Fig. 4. Graph of $w(\alpha, \pi)$ depending on temperature (color online)

Заключение

В работе построена математическая модель колебаний ортотропных сетчатых цилиндрических оболочек с учетом сдвига, под действием температурных, статических и вибрационных нагрузок. Модель дает возможность исследовать оболочки с различной геометрией сетки, что может быть полезным при проектировании конструктивных элементов НЭМС и МЭМС. На основании полученной модели проведен анализ статики изотропной углеродной нанотрубки вследствие температурных воздействий и стационарной нагрузки.

Список литературы

1. Peddieson J., Buchanan R., McNitt R. P. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology // International Journal of Engineering Science. 2003. Vol. 41. P. 595–609. [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(02\)00210-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(02)00210-0)
2. Bazehhour B. G., Mousavi S. M., Farshidianfar A. Free vibration of high-speed rotating Timoshenko shaft with various boundary conditions: effect of centrifugally induced axial force // Archive of Applied Mechanics. 2014. Vol. 84, iss. 12. P. 1691–1700. <https://doi.org/10.1007/s00419-013-0762-5>
3. Karlicic D., Kozic P., Pavlovic R. Flexural vibration and buckling analysis of single-walled carbon nanotubes using different gradient elasticity theories based on Reddy and Huu-Tai formulations // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 2015. Vol. 53, iss. 1. P. 217–233. <https://doi.org/10.15632/jtam-pl.53.1.217>
4. Иванова Е. А., Морозов Н. Ф., Семенов Б. Н., Фирсова А. Д. Об определении упругих модулей наноструктур: теоретические расчеты и методика экспериментов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2005. № 4. С. 75–85. EDN: OUYQR
5. Daneshmand F., Rafiei M., Mohebpour S. R., Heshmati M. Stress and strain-inertia gradient elasticity in free vibration analysis of single walled carbon nanotubes with first order shear deformation shell theory // Applied Mathematical Modelling. 2013. Vol. 37, iss. 16–17. P. 7983–8003. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.01.052>
6. Саркисян С. О., Фарманян А. Ж. Математическая модель микрополярных анизотропных (ортотропных) упругих тонких оболочек // Вестник Пермского государственного технического университета. Механика. 2011. № 3. С. 128–145. EDN: OFUQLD
7. Taliercio A., Veber D. Torsion of elastic anisotropic micropolar cylindrical bars // European Journal of Mechanics – A/Solids. 2016. Vol. 55. P. 45–56. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2015.08.006>
8. X. Zhou, L. Wang Vibration and stability of micro-scale cylindrical shells conveying fluid based on modified couple stress theory // Micro and Nano Letters. 2012. Vol. 7, iss. 7. P. 679–684. <https://doi.org/10.1049/mnl.2012.0184>
9. Safarpour H., Mohammadi K., Ghadiri M. Temperature-dependent vibration analysis of a FG viscoelastic cylindrical microshell under various thermal distribution via modified length scale parameter: A numerical solution // Journal of the Mechanical Behavior of Materials. 2017. Vol. 26, iss. 1–2. P. 9–24. <https://doi.org/10.1515/jmbm-2017-0010>
10. Sahmani S., Ansari R., Gholami R., Darvizeh A. Dynamic stability analysis of functionally graded



- higher-order shear deformable microshells based on the modified couple stress elasticity theory // Composites: Part B. 2013. Vol. 51. P. 44–53 <https://10.1016/j.compositesb.2013.02.037>
11. Krylova E. Yu., Papkova I. V., Sinichkina A. O., Yakovleva T. B., Krysko-yang V. A. Mathematical model of flexible dimension-dependent mesh plates // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1210. Art. 012073. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1210/1/012073>, EDN: VVUQIS
 12. Scheible D. V., Erbe A., Blick R. H. Evidence of a nanomechanical resonator being driven into chaotic response via the Ruelle–Takens route // Applied Physics Letters. 2002. Vol. 81. P. 1884–1886. <https://doi.org/10.1063/1.1506790>
 13. Еремеев В. А. Об одной нелинейной модели сетчатой оболочки // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 4. С. 127–133. <https://doi.org/10.31857/S057232990000704-4>, EDN: YOCSWL
 14. Крылова Е. Ю., Папкова И. В., Салтыкова О. А., Крысько В. А. Особенности сложных колебаний гибких микрополярных сетчатых панелей // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 48–59. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59>, EDN: MYYGLY
 15. Sedighi H. M., Malikan M., Valipour A., Zur K. K. Nonlocal vibration of carbon/boron-nitride nano-hetero-structure in thermal and magnetic fields by means of nonlinear finite element method // Journal of Computational Design and Engineering. 2020. Vol. 7, iss. 5. P. 591–602. <https://doi.org/10.1093/jcde/qwaa041>
 16. Sedighi H. M. Divergence and flutter instability of magneto-thermo-elastic C-BN hetero-nanotubes conveying fluid // Acta Mechanica Sinica/Lixue Xuebao. 2020. Vol. 36, iss. 2. P. 381–396. <https://doi.org/10.1007/s10409-019-00924-4>
 17. Панин В. Е. Основы физической мезомеханики // Физическая мезомеханика. 1998. Т. 1, № 1. С. 5–22. EDN: KWPHTL
 18. Глухова О. Е., Кириллова И. В., Коссович Е. Л., Фадеев А. А. Исследование механических свойств графеновых листов различных размеров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 4. С. 63–66. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-4-63-66>, EDN: STJIYV
 19. Имран М., Хуссейн Ф., Халил Р. М. А., Самтар М. А., Мехбооб Х., Явид М. А., Рана А. М., Ахмад С. А. Анизотропия тепловых и механических свойств графена: молекулярное моделирование // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2019. Т. 155, вып. 2. С. 295–305. <https://doi.org/10.1134/S0044451019020093>, EDN: YVYMEH
 20. Саркисян С. О., Фарманян А. Ж. Термоупругость микрополярных ортотропных тонких оболочек // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2013. № 3. С. 222–237. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2013.3.222-237>, EDN: RDKNJH
 21. Шереметьев М. П., Пелех Б. Л. К построению уточненной теории пластин // Инженерный журнал. 1964. Т. 3, вып. 3. С. 34–41.
 22. Kármán T. V. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau // Mechanik / ed. by : F. Klein, C. Müller. Wiesbaden : Vieweg+Teubner Verlag, 1907. P. 311–385. https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1_5
 23. Ерофеев В. И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. Москва : Изд-во Московского ун-та, 1999. 328 с.
 24. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. Москва : Наука, 1972. 432 с.
 25. Hamilton W. Report of the Fourth Meeting // British Association for the Advancement of Science. London, 1835. P. 513–518.
 26. Ostrogradsky M. Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg. St.-Pétersbourg : L'Impr. de l'Académie impériale des sciences, 1850, vol. 8, iss. 3. P. 33–48.
 27. Sun C. T., Zhang Y. Size-dependent elastic moduli of platelike nanomaterials // Journal of Applied Physics. 2003. Vol. 93, iss. 2. P. 1212–1218. <https://doi.org/10.1063/1.1530365>
 28. Пшеничников Г. И. Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. Москва : Наука, 1982. 352 с.
 29. Krysko V. A., Awrejcewicz J., Komarov S. A. Nonlinear deformations of spherical panels subjected to transversal load action // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2005. Vol. 194, iss. 27–29. P. 3108–3126. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.08.005>
 30. Schelling P. K., Keblinski P. Thermal expansion of carbon structures // Physical Review B. 2003. Vol. 68, iss. 3. Art. 035425. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.68.035425>



References

1. Peddieson J., Buchanan R., McNitt R. P. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *International Journal of Engineering Science*, 2003, vol. 41, pp. 595–609. [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(02\)00210-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(02)00210-0)
2. Bazehhour B. G., Mousavi S. M., Farshidianfar A. Free vibration of high-speed rotating Timoshenko shaft with various boundary conditions: effect of centrifugally induced axial force. *Archive of Applied Mechanics*, 2014, vol. 84, iss. 12, pp. 1691–1700. <https://doi.org/10.1007/s00419-013-0762-5>
3. Karlicic D., Kozic P., Pavlovic R. Flexural vibration and buckling analysis of single-walled carbon nanotubes using different gradient elasticity theories based on Reddy and Huu-Tai formulations. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, vol. 53, iss. 1, pp. 217–233. <https://doi.org/10.15632/jtam-pl.53.1.217>
4. Ivanova E. A., Morozov N. F., Semenov B. N., Firsova A. D. Determination of elastic moduli of nanostructures: Theoretical estimates and experimental techniques. *Mechanics of Solids*, 2005, vol. 40, iss. 4, pp. 60–68.
5. Daneshmand F., Rafiei M., Mohebbpour S. R., Heshmati M. Stress and strain-inertia gradient elasticity in free vibration analysis of single walled carbon nanotubes with first order shear deformation shell theory. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, vol. 37, iss. 16–17, pp. 7983–8003. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.01.052>
6. Sarkisjan S. O., Farmanyan A. Zh. Mathematical model of micropolar anisotropic (orthotropic) elastic thin shells. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2011, iss 3, pp. 128–145 (in Russian). EDN: OFUQLD
7. Taliercio A., Veber D. Torsion of elastic anisotropic micropolar cylindrical bars. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2016, vol. 55, pp. 45–56. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2015.08.006>
8. Zhou X., Wang L. Vibration and stability of micro-scale cylindrical shells conveying fluid based on modified couple stress theory. *Micro and Nano Letters*, 2012, vol. 7, iss. 7, pp. 679–684. <https://doi.org/10.1049/mnl.2012.0184>
9. Safarpour H., Mohammadi K., Ghadiri M. Temperature-dependent vibration analysis of a FG viscoelastic cylindrical microshell under various thermal distribution via modified length scale parameter: A numerical solution. *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, 2017, vol. 26, iss. 1–2, pp. 9–24. <https://doi.org/10.1515/jmbm-2017-0010>
10. Sahmani S., Ansari R., Gholami R., Darvizeh A. Dynamic stability analysis of functionally graded higher-order shear deformable microshells based on the modified couple stress elasticity theory. *Composites: Part B*, 2013, vol. 51, pp. 44–53. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.02.037>
11. Krylova E. Yu., Papkova I. V., Sinichkina A. O., Yakovleva T. B., Krysko-yang V. A. Mathematical model of flexible dimension-dependent mesh plates. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1210, art. 012073. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1210/1/012073>, EDN: VVUQIS
12. Scheible D. V., Erbe A., Blick R. H. Evidence of a nanomechanical resonator being driven into chaotic response via the Ruelle – Takens route. *Applied Physics Letters*, 2002, vol. 81, pp. 1884–1886. <https://doi.org/10.1063/1.1506790>
13. Eremeyev V. A. A nonlinear model of a mesh shell. *Mechanics of Solids*, 2018, vol. 53, iss. 4, pp. 464–469. <https://doi.org/10.3103/S002565441804012X>, EDN: LTJZSA
14. Krylova E. Yu., Papkova I. V., Saltykova O. A., Krysko V. A. Features of complex vibrations of flexible micropolar mesh panels. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 48–59 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59>, EDN: MYYGLY
15. Sedighi H. M., Malikan M., Valipour A., Zur K. K. Nonlocal vibration of carbon/boron-nitride nano-hetero-structure in thermal and magnetic fields by means of nonlinear finite element method. *Journal of Computational Design and Engineering*, 2020, vol. 7, iss. 5, pp. 591–602. <https://doi.org/10.1093/jcde/qwaa041>
16. Sedighi H. M. Divergence and flutter instability of magneto-thermo-elastic C-BN hetero-nanotubes conveying fluid. *Acta Mechanica Sinica/Lixue Xuebao*, 2020, vol. 36, iss. 2, pp. 381–396. <https://doi.org/10.1007/s10409-019-00924-4>
17. Panin V. E. Foundations of physical mesomechanics. *Physical Mesomechanics*, 1998, vol. 1, iss. 1, pp. 5–22 (in Russian). EDN: KWPHTL
18. Glukhova O. E., Kirillova I. V., Kossovich E. L., Fadeev A. A. Mechanical properties study for graphene sheets of various size. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2012, vol. 12, iss. 4, pp. 63–66 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-4-63-66>, EDN: STJIYV



19. Imran M., Hussain F., Khalil R. M. A., Sattar M. A., Mehboob H., Javid M. A., Rana A. M., Ahmad S. A. Anisotropic thermal and mechanical characteristics of graphene: A molecular dynamics study. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2019, vol. 128, iss. 2, pp. 259–267. <https://doi.org/10.1134/S1063776119020079>, EDN: DAUGJF
20. Sargsyan S. H., Farmanyan A. J. Thermoelasticity of micropolar orthotropic thin shells. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2013, iss. 3, pp. 222–237 (in Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2013.3.222-237>, EDN: RDKNJH
21. Sheremetiev M. P., Pelekh B. L. To the construction of a refined theory of plates. *Engineering Journal*, 1964, vol. 3, iss. 3, pp. 34–41 (in Russian).
22. Kármán T. V. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. In: Klein F., Müller C. (eds.) *Mechanik*. Wiesbaden, Vieweg+Teubner Verlag, 1907, pp. 311–385. https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1_5
23. Erofeev V. I. *Volnovye protsessy v tverdykh telakh s mikrostrukturoy* [Wave Processes in Solids with Microstructure]. Moscow, Moscow University Press, 1999. 328 p. (in Russian).
24. Volmir A. C. *Nelineynaya dinamika plastin i obolochek* [Nonlinear Dynamics of Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1972. 432 p. (in Russian).
25. Hamilton W. Report of the Fourth Meeting. In: *British Association for the Advancement of Science*, London, 1835, pp. 513–518.
26. Ostrogradsky M. Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg. *St.-Pétersbourg, L'Impr. de l'Académie impériale des sciences*, 1850, vol. 8, iss. 3, pp. 33–48.
27. Sun C. T., Zhang Y. Size-dependent elastic moduli of platelike nanomaterials. *Journal of Applied Physics*, 2003, vol. 93, iss. 2, pp. 1212–1218. <https://doi.org/10.1063/1.1530365>
28. Pshenichnov G. I. *Teoriya tonkikh uprugikh setchatykh obolochek i plastinok* [Theory of Thin Elastic Mesh Shells and Plates]. Moscow, Nauka, 1982. 352 p. (in Russian).
29. Krysko V. A., Awrejcewicz J., Komarov S. A. Nonlinear deformations of spherical panels subjected to transversal load action. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, vol. 194, iss. 27–29, pp. 3108–3126. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.08.005>
30. Schelling P. K., Keblinski P. Thermal expansion of carbon structures. *Physical Review B*, 2003, vol. 68, iss. 3, art. 035425. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.68.035425>

Поступила в редакцию / Received 12.10.2022

Принята к публикации / Accepted 19.09.2023

Опубликована / Published 31.05.2024



Научная статья

УДК 539.3

Анализ упругих и упругопластических моделей при интерпретации результатов наноиндентирования

И. А. Панфилов[✉], С. М. Айзикович, А. С. Васильев

Донской государственный технический университет, Россия, 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1

Панфилов Иван Александрович, кандидат физико-математических наук, исполняющий обязанности заведующего кафедрой «Теоретическая и прикладная механика», panfilov.i@gs.donstu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0955-0282>, AuthorID: 599599

Айзикович Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией функционально-градиентных и композиционных материалов НОЦ «Материалы», saizikovich@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-2756-5752>, AuthorID: 3105

Васильев Андрей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории функционально-градиентных и композиционных материалов НОЦ «Материалы», andre.vasiliev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-7844-1314>, AuthorID: 644756

Аннотация. Одним из актуальных и широко распространенных в настоящее время методов неразрушающих испытаний для контроля и определения упругих свойств материалов является наноиндентирование. При этом для интерпретации результатов испытаний возникает нетривиальная задача построения адекватной математической модели процесса индентирования. Как правило, во многих случаях используются аналитические формулы, полученные при упругой линейной постановке задач о внедрении недеформируемого штампа в однородное упругое полупространство. В настоящее время численная постановка задачи позволяет получить и использовать численное решение, полученное с учетом полного пластического нелинейного поведения материала. В данной работе проведено исследование контактных задач о внедрении сферического и конического инденторов в упругопластическое однородное полупространство. Для верификации численного решения также решена задача о внедрении сферического и конического инденторов в упругое однородное полупространство, проведено сравнение с известными аналитическими решениями. Исследуются вопросы сходимости и настройки численных методов, влияния пластичности и применимости аналитических решений. Численно задачи решаются методом конечных элементов в программном комплексе Ansys Mechanical.

Ключевые слова: непрерывный контакт, контактная механика, контактная задача, индентирование, конический индентор, сферический индентор, метод конечных элементов

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-19-00732).

Для цитирования: Панфилов И. А., Айзикович С. М., Васильев А. С. Анализ упругих и упругопластических моделей при интерпретации результатов наноиндентирования // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 245–253. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-245-253>, EDN: CUARKH

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Analysis of elastic and elastoplastic models when interpreting nanoindentation results

I. A. Panfilov[✉], S. M. Aizikovich, A. S. Vasiliev

Don State Technical University, 1 Gagarin Sq., Rostov-on-Don 344000, Russia

Ivan A. Panfilov, panfilov.i@gs.donstu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0955-0282>, AuthorID: 599599

Sergey M. Aizikovich, saizikovich@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-2756-5752>, AuthorID: 3105

Andrey S. Vasiliev, andre.vasiliev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-7844-1314>, AuthorID: 644756

Abstract. One of the current and widely used non-destructive testing methods for monitoring and determining the elastic properties of materials is nanoindentation. In this case, to interpret the test results, a non-trivial task arises of constructing an adequate mathematical model of the indentation process. As a rule, in many cases, analytical formulas are used that are obtained from an elastic linear formulation of problems about the introduction of a non-deformable stamp into a homogeneous elastic half-space. Currently, the numerical formulation of the problem makes it possible to obtain and use a numerical solution obtained taking into account the complete plastic nonlinear behavior of the material. In this work, a study of contact problems on the introduction of a spherical and conical indenter into an elastoplastic homogeneous half-space was carried out. To verify the numerical solution, the problem of introducing a spherical and conical indenter into an elastic homogeneous half-space was also solved and compared with known analytical solutions. Issues of convergence and tuning of numerical methods, the influence of plasticity and the applicability of analytical solutions are explored. Problems are solved numerically using the finite element method in the Ansys Mechanical software package.

Keywords: continuous contact, contact mechanics, contact problem, indentation, conical indenter, spherical indenter, finite element method

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-19-00732).

For citation: Panfilov I. A., Aizikovich S. M., Vasiliev A. S. Analysis of elastic and elastoplastic models when interpreting nanoindentation results. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 245–253 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-245-253>, EDN: CUARKH

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Наноиндентирование применяется для неразрушающего испытания материалов и получения механических характеристик [1, 2]: твердости, упругих свойств объемных материалов и покрытий и др. Суть метода заключается во вдавливании в поверхность испытуемого образца более жесткого штампа (как правило, алмаз либо твердые сплавы) и получения кривых зависимостей силы и отпечатка от глубины вдавливания в нанометровой шкале.

Упругие свойства объектных материалов и покрытий определяются из анализа кривой сила-осадка на стадии разгрузки. В основе методов Филда – Свейна (сферический индентор) [3] и Оливера – Фарра (индентор Берковича) [4] и лежат решения контактных задач теории упругости для сферического и параболического штампов [5, 6]. Фундаментальные основы контактного взаимодействия были заложены в работах [1, 6, 7], получены аналитические зависимости для вертикальной силы, смещения, радиуса контакта и давления в зоне контакта для конического и сферического инденторов. При этом в основу теории закладывались гипотезы о малых деформациях и упругом поведении материала.

В работах [6–10] рассмотрены задачи о вдавливании сферического и конического инденторов в упругое полупространство с покрытием, асимптотическим методом получены



аналитические прикладные решения. В [11–13] исследуются непрерывные и разрывные контактные задачи для функционально-градиентного материала.

В работах [14–20] построены приближенные аналитические решения осесимметричных контактных задач о вдавливании сферического, конического и цилиндрического штампов в упругое полупространство с функционально-градиентным покрытием. Изучена возможность применения разработанных моделей индентирования тел с покрытиями для интерпретации наноиндентирования тонких покрытий [21].

Используемая в представленных работах гипотеза о малых перемещениях индентора накладывает серьезные ограничения на применение аналитических прикладных формул, поскольку даже небольшое смещение индентора (менее 1%) вызывает развитие пластических деформаций. Сила вдавливания и область контакта при этом значительно отличаются от аналитических результатов [22].

1. Постановка задачи

В данной работе рассматриваются задачи о внедрении сферического и конического штампов в упругопластическое полупространство в статической осесимметричной постановке. Для реализации пластической деформации используется модель билинейного материала с модулем упругости (модулем Юнга) и касательным модулем упругости (табл. 1). Индентор выполнен из упругого алмаза. Полупространство выполнено из алюминия.

Таблица 1 / Table 1

Физические свойства материалов / Physical properties of materials

Материал	Модуль Юнга, ГПа	Предел текучести, ГПа	Касательный модуль, ГПа
Алмаз	1000	–	–
Алюминий	70	0.28	0.5

Задача решается численно в конечно-элементной постановке в программном комплексе Ansys. Для верификации численных расчетов и сравнения с аналитическими результатами дополнительно проведены расчеты о внедрении жестких штампов в упругое пространство из алюминия. Геометрические параметры задачи указаны в табл. 2.

Контактные задачи относятся к нелинейным задачам из-за изменяющегося статуса контакта и матрицы жесткости и требуют особого внимания к точности и сходимости решения. Ниже приведены настройки численных методов, используемых в пакете конечно-элементного анализа Ansys и примененных в данном расчете.

Для реализации контактной задачи используется контактный алгоритм

«расширенный метод Лагранжа» («Augmented Lagrange»). Это модифицированный контактный алгоритм распространенного метода «Pure Penalty» («метод штрафных функций»), отличающийся наличием добавочного члена λ в выражении контактной силы:

$$F_n = k_n \cdot x_p + \lambda,$$

где F_n — нормальная (контактная) сила, k_n — контактная жесткость, x_p — глубина проникновения. Контактная жесткость k_n , как правило, оказывает важнейшее влияние на точность и сходимость. Большое значение жесткости обеспечивает высокую точность, но ухудшает сходимость и наоборот. Использование же добавочного члена λ позволяет снизить чувствительность алгоритма к контактной жесткости k_n и получать приемлемые результаты при значении $k_n = 1$, но и требует большего количества итераций.

Таблица 2 / Table 2

Геометрические параметры задачи
Geometric parameters of the problem

Параметр	Значения
Линейный размер полупространства, мм	1.0
Радиус сферы, мм	0.1
Угол раствора конуса, °	120
Глубина внедрения индентора, мм	0.1



Для «распознавания» контактов используется «метод точек Гаусса» («Gauss point detection»), при котором на ребра элементов добавляются дополнительные точки. Для улучшения сходимости можно использовать распознавание «Normal from Contact» или «Normal to Target» с увеличением количества вычислений.

Отдельно нужно сказать о форме и размерности элементов конечно-элементной сетки. В данной задаче для построения конечно-элементной сетки используется 8-узловой элемент PLANE183 — элемент высокого порядка с промежуточными узлами. В области контактов проведено сгущение сеток. Размерности сеток для полупространства представлены в табл. 3, для инденторов применяется более крупная сетка. При этом отсчетными параметрами,

Таблица 3 / Table 3

Размерность конечно-элементной сетки, мм
Dimension of the finite element mesh, mm

Параметр	Значения
Размер сетки в зоне контакта	0.01
Размер сетки вне зоны контакта	0.02

относительно которых должны задаваться размерность сетки и линейные размеры полупространства, являются зона контакта (глубина внедрения) и толщина покрытия.

Так, используемое разбиение, например, в упругой задаче обеспечивает около 30 элементов в зоне контакта для сферического индентора, а для конуса — всего 10 элементов, что обусловлено следующим фактом.

Для задачи внедрения сферического штампа измельчение сетки, очевидно, будет вести к получению более точных результатов, задача будет сходиться. Для задачи внедрения конуса настройка сетки оказывается гораздо сложнее, поскольку в центре конуса образуется сингулярность. Другими словами, измельчение сетки в центре конуса будет приводить к прямому росту напряжения и расхождению задачи. Также для задачи с конусом достаточно важным является форма элементов в центре контакта — форма и размерность элементов должны обеспечить большую деформацию и не допускать «схлопывания» ячеек. Одним из способов борьбы с численной сингулярностью является создание закругления на острие конуса либо использование моделей пластичности.

Для контактных поверхностей используются элементы типа CONTA172 и TARGE169 с автоматическим распознаванием и ограничением зоны контакта. Причем, поскольку у нас жесткость индентора в несколько раз больше жесткостей покрытия и подложки, то элементы TARGE169 необходимо накладывать именно на индентор.

Ansys также позволяет учитывать геометрическую нелинейность при больших деформациях, включив в расчет нелинейный тензор деформации $\varepsilon(x, y, z)$ относительно производных перемещений $u'(x, y, z)$ («Large deflection»):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Таким образом, в отличие от аналитических теорий, где учитывается только контактная нелинейность при гипотезе малых деформаций, численно мы можем реализовать все три типа нелинейности: контактную, геометрическую (большие деформации) и физическую (пластику).

2. Численные результаты

К штампам прикладывалось вертикальное перемещение 0.1 мм, отыскивались сила, поля деформаций и напряжений. Точность итерационного алгоритма задавалась по силе $1 \cdot 10^{-4}$ Н, по деформациям $-1 \cdot 10^{-5}$ мм.



Аналитические результаты для сравнения брались из известных формул для внедрения жестких штампов [1, 5–7]:

$$a_s = (Rd)^{1/2}, \quad a_c = \frac{2d}{\pi \operatorname{tg}(\varphi)}, \quad F_s = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2}, \quad F_c = \frac{2}{\pi} E \frac{d^2}{\operatorname{tg}(\varphi)}, \quad E^* = \frac{E}{1 - \nu^2},$$

$$p_s = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2}, \quad p_0 = \frac{2}{\pi} E^* \left(\frac{d}{R}\right)^{1/2}, \quad p_c = \frac{Ed}{(1 - \nu^2)\pi a} \ln \left(\frac{a}{r} - \left(\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 1\right)^{1/2}\right).$$

Для учета жесткости алмазного сферического индентора в этих выражениях для эффективной жесткости E^* можно использовать формулу

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}.$$

Здесь a — радиус контакта, d — глубина внедрения штампа, φ — угол между горизонтальной и боковой плоскостью конуса, r — вертикальная координата, E_1 , E_2 и ν_1 , ν_2 — модули Юнга и коэффициенты Пуассона индентора и полупространства соответственно, F — вертикальная сила, p — давление в области контакта. Индексы s и c здесь, и ниже на графиках указывают на принадлежность к сфере и конусу соответственно.

На рис. 1–8 приведены результаты внедрения сферического и конического штампов в упругое полупространство из алюминия.

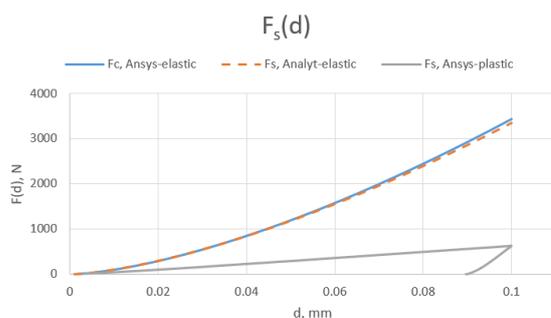


Рис. 1. Вертикальная сила от смещения для сферического индентора, мм (цвет онлайн)

Fig. 1. Vertical force from displacement for a spherical indenter, mm (color online)

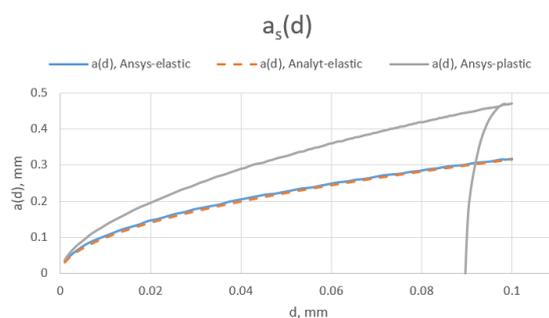


Рис. 2. Радиус контакта от смещения для сферического индентора, мм (цвет онлайн)

Fig. 2. Contact radius versus displacement for a spherical indenter, mm (color online)

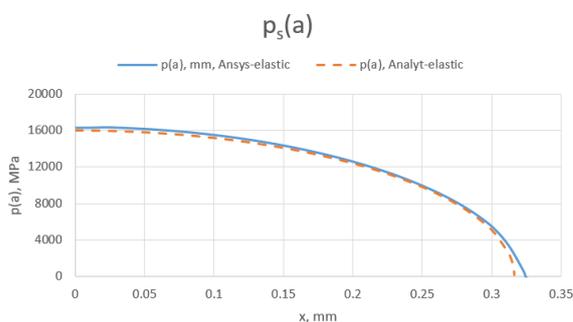


Рис. 3. Контактное давление в зоне контакта при смещении 0.1 мм для сферического индентора, мм (цвет онлайн)

Fig. 3. Contact pressure in the contact zone for a displacement of 0.1 mm for a spherical indenter, mm (color online)

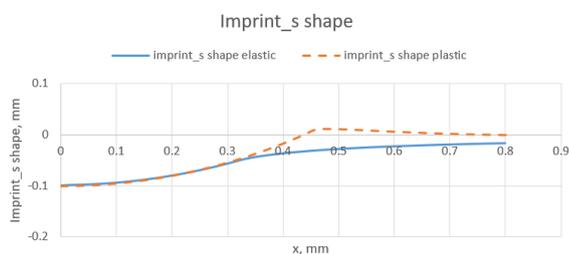


Рис. 4. Деформация в зоне контакта (отпечаток) для сферического индентора, мм (цвет онлайн)

Fig. 4. Deformation in the contact zone (imprint) for a spherical indenter, mm (color online)

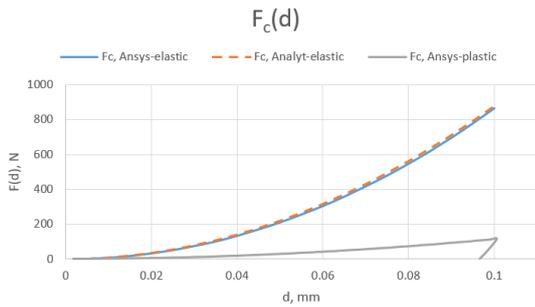


Рис. 5. Вертикальная сила от смещения для конического индентора, мм (цвет онлайн)

Fig. 5. Vertical force from displacement for a conical indenter, mm (color online)

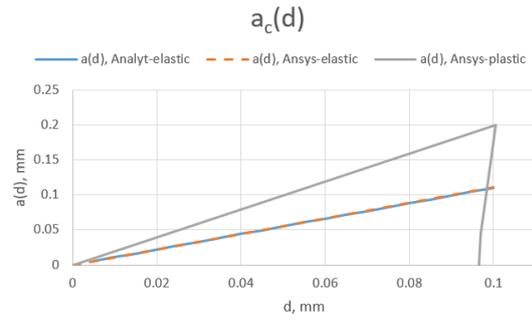


Рис. 6. Радиус контакта от смещения для конического индентора, мм (цвет онлайн)

Fig. 6. Contact radius versus offset for conical indenter, mm (color online)

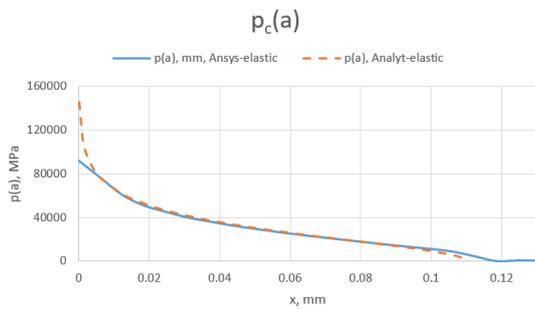


Рис. 7. Контактное давление в зоне контакта при смещении 0.1 мм для конического индентора, мм (цвет онлайн)

Fig. 7. Contact pressure in the contact zone for a displacement of 0.1 mm for a conical indenter, mm (color online)

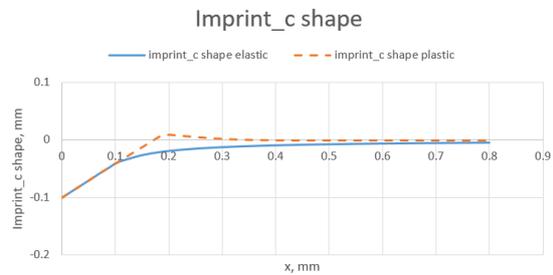


Рис. 8. Деформация в зоне контакта (отпечаток) для конического индентора, мм (цвет онлайн)

Fig. 8. Deformation in the contact zone (imprint) for a conical indenter, mm (color online)

На рис. 9, 10 приведены поля деформаций для сферического и конического инденторов для упругой и упругопластической моделей, рассчитанных в Ansys.

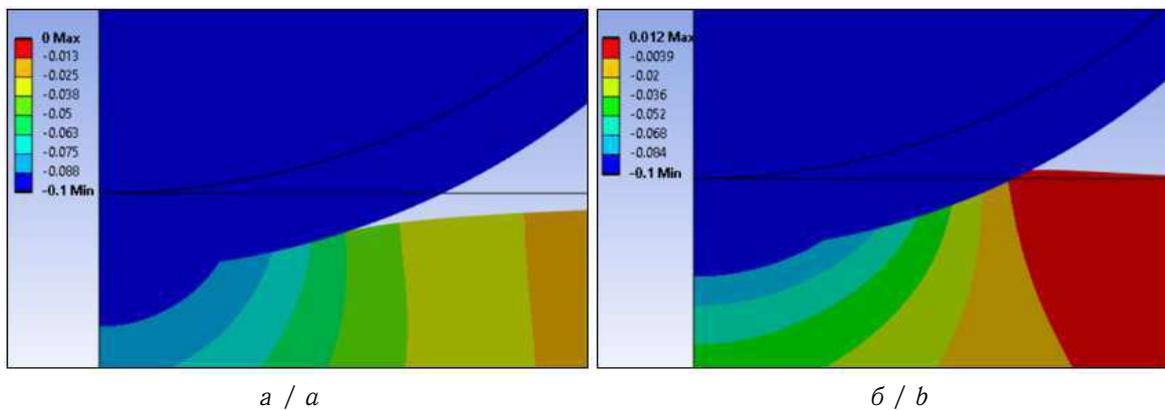


Рис. 9. Поле деформации в зоне контакта для сферического индентора, мм: *a* — упругая модель; *б* — упругопластическая модель (цвет онлайн)

Fig. 9. Deformation field in the contact zone for a spherical indenter, mm: *a* is elastic model; *b* is elastoplastic model (color online)

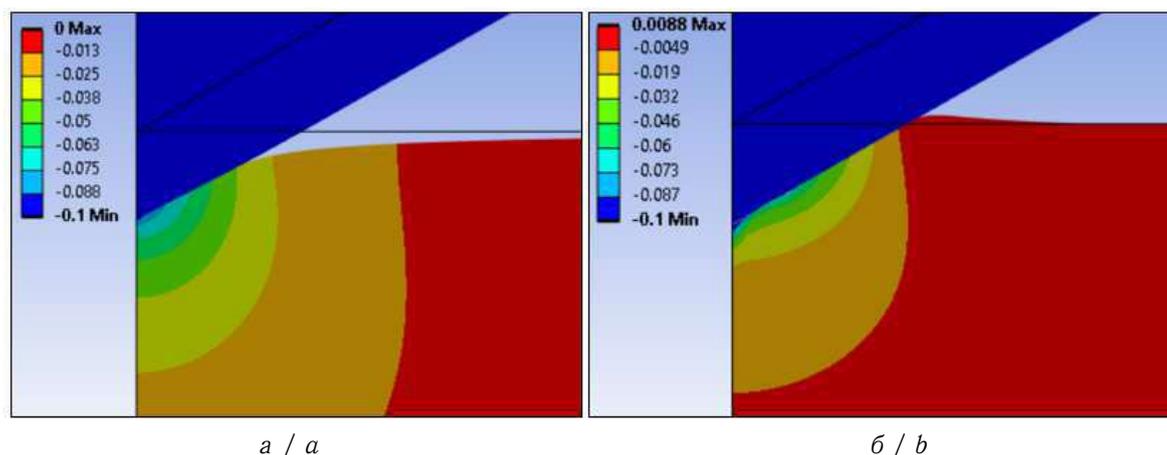


Рис. 10. Поле деформации в зоне контакта для конического индентора, мм: *a* — упругая модель; *б* — упругопластическая модель (цвет онлайн)
 Fig. 10. Deformation field in the contact zone for a conical indenter, mm: *a* is elastic model; *b* is elastoplastic model (color online)

Выводы

Для упругой задачи численный метод показал практически совпадение с аналитическими результатами. Погрешность возрастала с увеличением деформации и для максимальных значений составила около 2% для вертикальной силы.

Стоит отметить, что данные нагрузки для упругой задачи существенно превышают допустимые по пределу текучести и были рассмотрены как модельные задачи для сравнения моделей. В пределах упругих деформаций погрешность численных результатов составила менее 0.1%.

При решении упругопластической задачи численно мы видим линейную зону разгрузки, которая используется для нахождения модуля Юнга при методах неразрушающего контроля (наноиндентирования).

Зона контакта для упругой модели и упругопластической модели существенно отличается. При пластичности материал «выдавливается» из-под инденторов и существенно увеличивает зону контакта. Для сферического индентора при максимальном смещении отличие по радиусу контакта составило около 30%, для конического — 45%.

В целом использование упругой модели может служить модельной задачей для верификации и калибровки численных методов. Однако при больших деформациях рекомендуется применять упругопластическую модель деформирования, а также модель нелинейного тензора деформации (модель больших деформаций).

Данные исследования могут быть применены для оценки точности и анализа моделей, используемых при идентификации свойств градиентных, многослойных материалов и материалов с покрытиями.

Список литературы

1. Булычев С. И., Алехин В. П. Испытание материалов непрерывным вдавливанием индентора. Москва : Машиностроение, 1990. 224 с.
2. Головин Ю. И. Наноиндентирование и его возможности. Москва : Машиностроение, 2009. 312 с.
3. Field J. S., Swain M. V. A simple predictive model for spherical indentation // Journal of Materials Research. 1993. Vol. 8, iss. 2. P. 297–306. <https://doi.org/10.1557/JMR.1993.0297>
4. Oliver W. C., Pharr G. M. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments // Journal of Materials Research. 1992. Vol. 7, iss. 6. P. 1564–1583. <https://doi.org/10.1557/JMR.1992.1564>
5. Hertz H. Ueber die Berührung fester elastischer Körper // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1881. Bd. 92. S. 156–171. <https://doi.org/10.1515/9783112342404-004>
6. Джонсон К. Л. Механика контактного взаимодействия. Москва : Мир, 1989. 510 с.



7. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. Москва : ГИТТЛ, 1953. 264 с.
8. He L. H., Swain M. V. Nanoindentation derived stress-strain properties of dental materials // *Dental Materials*. 2007. Vol. 23, iss. 7. P. 814–821. <https://doi.org/10.1016/j.dental.2006.06.017>
9. Потележко В. П., Филлипов А. П. Контактная задача для плиты, лежащей на упругом основании // *Прикладная механика*. 1967. Т. 3, вып. 1. С. 87–91.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : в 10 т. Т. 7: Теория упругости : учеб. пособие. 4-е изд., исп. и доп. Москва : Наука, 1987. 248 с.
11. Kral E. R., Komvopoulos K., Bogy D. B. Elastic-plastic finite element analysis of repeated indentation of a half-space by a rigid sphere // *Journal of Applied Mechanics*. 1993. Vol. 60, iss. 4. P. 829–841. <https://doi.org/10.1115/1.2900991>
12. Механика контактных взаимодействий / под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. Москва : Физматлит, 2001. 672 с.
13. Dub S. N. Curves of elasto-plastic deformation of thin coatings obtained in depth-sensing indentation experiments // *MRS Symposium Proceedings*. 1998. Vol. 505. P. 223–228. <https://doi.org/10.1557/PROC-505-223>
14. El-Sherbiny M. G. D., Halling J. The Hertzian contact of surfaces covered with metallic films // *Wear*. 1996. Vol. 40, iss. 3. P. 325–337. [https://doi.org/10.1016/0043-1648\(76\)90124-1](https://doi.org/10.1016/0043-1648(76)90124-1)
15. Pharr G. M., Oliver W. C. Measurement of thin film mechanical properties using nanoindentation // *MRS Bulletin*. 1992. Vol. 17. P. 28–33. <https://doi.org/10.1557/S0883769400041634>
16. Айзикович С. М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред // *Прикладная математика и механика*. 1982. Т. 46, вып. 1. С. 148–158.
17. Васильев А. С., Волков С. С., Айзикович С. М. Приближенное аналитическое решение задачи о вдавливании проводящего штампа в электроупругое полупространство с неоднородным покрытием // *Доклады Академии наук*. 2018. Т. 478, № 1. С. 34–39. <https://doi.org/10.7868/S0869565218010073>, EDN: YNTRFR
18. Волков С. С., Васильев А. С., Айзикович С. М., Селезнев Н. М., Леонтьева А. В. Напряженно-деформированное состояние упругого мягкого функционально-градиентного покрытия при введении сферического индентора // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2016. № 4. С. 20–34. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.4.02>, EDN: XSESAL
19. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M., Litvinenko A. N. Indentation of an elastic half-space reinforced with a functionally graded interlayer by a conical punch // *Materials Physics and Mechanics*. 2018. Vol. 40, iss. 2. P. 254–260. https://doi.org/10.18720/MPM.4022018_14, EDN: VPDWVG
20. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Indentation of an axisymmetric punch into an elastic transversely-isotropic half-space with functionally graded transversely-isotropic coating // *Materials Physics and Mechanics*. 2016. Vol. 28, iss. 1–2. P. 11–15. EDN: XCQJUT
21. Sadyrin E., Vasiliev A., Volkov S. Mathematical modeling of experiment on Berkovich nanoindentation of ZrN coating on steel substrate // *Acta Polytechnica CTU Proceedings*. 2020. Vol. 27: Proceedings of the 14th International Conference on Local Mechanical Properties – LMP 2019. P. 18–21. <https://doi.org/10.14311/APP.2020.27.0018>
22. Ovcharenko A., Halperin G., Verberne G., Etsion I. In situ investigation of the contact area in elastic-plastic spherical contact during loading-unloading // *Tribology Letters*. 2007. Vol. 25. P. 153–160. <https://doi.org/10.1007/s11249-006-9164-y>

References

1. Bulychov S. I., Alekhin V. P. *Ispytanie materialov nepreryvnym vдавливaniem indentora* [Testing of Materials by Continuous Indentation of an Indenter]. Moscow, Mashinostroenie, 1990. 224 p. (in Russian).
2. Golovin Yu. I. *Nanoindentirovanie i ego vozможности* [Nanoindentation and its Capabilities]. Moscow, Mashinostroenie, 2009. 312 p. (in Russian).
3. Field J. S., Swain M. V. A simple predictive model for spherical indentation. *Journal of Materials Research*, 1993, vol. 8, iss. 2, pp. 297–306. <https://doi.org/10.1557/JMR.1993.0297>
4. Oliver W. C., Pharr G. M. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments. *Journal of Materials Research*, 1992, vol. 7, iss. 6, pp. 1564–1583. <https://doi.org/10.1557/JMR.1992.1564>
5. Hertz H. Ueber die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1881, vol. 92, pp. 156–171 (in German). <https://doi.org/10.1515/9783112342404-004>



6. Dzhonson K. L. *Mechanics of Contact*. Cambridge, Cambridge University Press, 1987. 452 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1989. 510 p.).
7. Galin L. A. *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti* [Contact Problems of the Theory of Elasticity]. Moscow, GITTL, 1953. 264 p. (in Russian).
8. He L. H., Swain M. V. Nanoindentation derived stress-strain properties of dental materials. *Dental Materials*, 2007, vol. 23, iss. 7, pp. 814–821. <https://doi.org/10.1016/j.dental.2006.06.017>
9. Potelezhko V. P., Fillipov A. P. Contact problem for a plate lying on an elastic foundation. *Soviet Applied Mechanics*, 1967, vol. 3, iss. 1, pp. 87–91. <https://doi.org/10.1007/BF00885463>
10. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoreticheskaya fizika. T. 7: Teoriya uprugosti* [Theoretical Physics. Vol. 7: Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka, 1987. 248 p. (in Russian).
11. Kral E. R., Komvopoulos K., Bogy D. B. Elastic-plastic finite element analysis of repeated indentation of a half-space by a rigid sphere. *Journal of Applied Mechanics*, 1993, vol. 60, iss. 4, pp. 829–841. <https://doi.org/10.1115/1.2900991>
12. *Mekhanika kontaktnykh vzaimodeystviy* [Vorovich I. I., Aleksandrov V. M. (eds.) Mechanics of Contact Interactions]. Moscow, Fizmatlit, 2001. 672 p. (in Russian).
13. Dub S. N. Curves of elasto-plastic deformation of thin coatings obtained in depth-sensing indentation experiments. *MRS Symposium Proceedings*, 1998, vol. 505, pp. 223–228. <https://doi.org/10.1557/PROC-505-223>
14. El-Sherbiny M. G. D., Halling J. The Hertzian contact of surfaces covered with metallic films. *Wear*, 1996, vol. 40, iss. 3, pp. 325–337. [https://doi.org/10.1016/0043-1648\(76\)90124-1](https://doi.org/10.1016/0043-1648(76)90124-1)
15. Pharr G. M., Oliver W. C. Measurement of thin film mechanical properties using nanoindentation. *MRS Bulletin*, 1992, vol. 17, pp. 28–33. <https://doi.org/10.1557/S0883769400041634>
16. Aizikovich S. M. Asymptotic solutions of contact problems of the theory of elasticity for media inhomogeneous in depth. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1982, vol. 46, iss. 1, pp. 116–124. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(82\)90091-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(82)90091-0), EDN: XUXFLE
17. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Approximated analytical solution of a problem on indentation of an electro-elastic half-space with inhomogeneous coating by a conductive punch. *Doklady Physics*, 2018, vol. 63, iss. 1, pp. 18–22. <https://doi.org/10.1134/S1028335818010020>, EDN: YVUVSK
18. Volkov S. S., Vasiliev A. S., Aizikovich S. M., Seleznev N. M., Leontieva A. V. Stress-strain state of an elastic soft functionally-graded coating subjected to indentation by a spherical punch. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, iss. 4, pp. 20–34 (in Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.4.02>, EDN: XSESAL
19. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M., Litvinenko A. N. Indentation of an elastic half-space reinforced with a functionally graded interlayer by a conical punch. *Materials Physics and Mechanics*, 2018, vol. 40, iss. 2, pp. 254–260. https://doi.org/10.18720/MPM.4022018_14, EDN: VPDWVG
20. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Indentation of an axisymmetric punch into an elastic transversely-isotropic half-space with functionally graded transversely-isotropic coating. *Materials Physics and Mechanics*, 2016, vol. 28, iss. 1–2, pp. 11–15. EDN: XCQJUT
21. Sadyrin E., Vasiliev A., Volkov S. Mathematical modeling of experiment on Berkovich nanoindentation of ZrN coating on steel substrate. *Acta Polytechnica CTU Proceedings*, 2020, vol. 27: Proceedings of the 14th International Conference on Local Mechanical Properties – LMP 2019, pp. 18–21. <https://doi.org/10.14311/APP.2020.27.0018>
22. Ovcharenko A., Halperin G., Verberne G., Etsion I. In situ investigation of the contact area in elastic-plastic spherical contact during loading-unloading. *Tribology Letters*, 2007, vol. 25, pp. 153–160. <https://doi.org/10.1007/s11249-006-9164-y>

Поступила в редакцию / Received 30.11.2023

Принята к публикации / Accepted 30.12.2023

Опубликована / Published 31.05.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 254–274

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 254–274

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-254-274>, EDN: INFKKR

Научная статья

УДК 517.98

Исследование влияния характеристик межсистемных шунтов на гемодинамические показатели и распределение кислорода

А. Р. Хайрулин¹, И. О. Ракишева¹, А. Г. Кучумов^{1,2✉}, М. В. Голуб²,
Р. М. Шехмамиев³, П. В. Лазарьков³

¹Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Россия, 614990, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29

²Кубанский государственный университет, Россия, 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, д. 149

³Федеральный центр сердечно-сосудистой хирургии им. С. Г. Суханова, Россия, 614013, г. Пермь, ул. Маршала Жукова, д. 35

Хайрулин Александр Рафаелович, аспирант лаборатории биожидкостей, s.xayrulin@mail.ru

Ракишева Ирина Олеговна, аспирант лаборатории биожидкостей, iolegovna@yandex.ru, AuthorID: 1176910

Кучумов Алексей Геннадьевич, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией биожидкостей, kuchumov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0466-175X>, AuthorID: 164889

Голуб Михаил Владимирович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории функций, m_golub@inbox.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4927-9623>, AuthorID: 144554

Шехмамиев Роман Маратович, заведующий кардиохирургическим отделением № 4, sidjin@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-0601-1486>

Лазарьков Петр Владимирович, врач, сосудистый хирург, <https://orcid.org/0000-0001-7165-9134>, AuthorID: 1109685

Аннотация. Различные межсистемные шунты широко применяются при лечении новорожденных с врожденными пороками сердца и сниженным кровообращением легких. Установка шунта сопровождается высоким риском развития послеоперационных осложнений и летальности. Развитие некоторых осложнений возможно предсказать, используя методы математического моделирования, и скорректировать лечение. В данной работе исследована система «аорта – шунт – легочная артерия». Были проанализированы три варианта расположения шунта с разными диаметрами у трех пациентов. При исследовании полученных 27 вариантов использовались распространенные гемодинамические показатели (касательные напряжения у стенки, осредненные за сердечный цикл касательные напряжения, индекс колебаний касательных напряжений, относительное время пребывания и др.). На основе численного решения показана зависимость распределения кровотока в легочной артерии от расположения шунта. Следует отметить, что для разных пациентов место установки шунта отличается. Также было показано, что потери энергии шунтов диаметром 4 мм почти в два раза больше, чем у шунтов диаметром 3 мм. Индивидуальный подход к лечению каждого новорожденного, основанный на объективных данных, может существенно уменьшить число случаев детской смертности и повысить эффективность процесса реабилитации.

Ключевые слова: межсистемный шунт, сатурация, врожденные пороки сердца, гемодинамика, моделирование

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-41-596005 р_НОЦ_Пермский край).

Для цитирования: Хайрулин А. Р., Ракишева И. О., Кучумов А. Г., Голуб М. В., Шехмамиев Р. М., Лазарьков П. В. Исследование влияния характеристик межсистемных шунтов на гемодинамические



показатели и распределение кислорода // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 254–274. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-254-274>, EDN: INFKKR

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Investigation of the influence of intersystem shunt characteristics on hemodynamic parameters and oxygen distribution

A. R. Khairulin¹, I. O. Rakisheva¹, A. G. Kuchumov^{1,2✉}, M. V. Golub²,
R. M. Shekhmametiev³, P. V. Lazarkov³

¹Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky Ave., Perm 614990, Russia

²Kuban State University, 149 Stavropolskaya St., Krasnodar 350040, Russia

³Federal Center of Cardiovascular Surgery named after S. G. Sukhanov, 35 Marshala Zhukova St., Perm 614013, Russia

Alexander R. Khairulin, s.xayrulin@mail.ru

Irina O. Rakisheva, riologovna@yandex.ru, AuthorID: 1176910

Alexei G. Kuchumov, kychymov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0466-175X>, AuthorID: 164889

Mikhail V. Golub, m_golub@inbox.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4927-9623>, AuthorID: 144554

Roman M. Shekhmametiev, sidjin@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-0601-1486>

Petr V. Lazarkov, <https://orcid.org/0000-0001-7165-9134>, AuthorID: 1109685

Abstract. Various intersystem shunts are widely used methods of treatment of newborns with congenital heart disease and reduced pulmonary blood flow. Shunt placement is associated with a high risk of postoperative complications and mortality. It is possible to predict the development of some complications using mathematical modeling methods and adjust the treatment. In this study we investigated the system “aorta – shunt – pulmonary artery”. Three kinds of shunt placement with three different diameters for three patients have been analyzed. To solve hemodynamic problems, 27 cases were investigated using the common hemodynamic indices (wall shear stress, time-averaged, oscillatory shear index, relative residence time, etc.). The dependence of pulmonary artery blood flow distribution on shunt location is shown; the preferred location differs for different patient geometries. The energy loss of 4 mm diameter shunts is almost 2 times larger than that of 3 mm shunts. A patient-specific approach to the treatment of each child based on objective data can significantly reduce the number of pediatric deaths and increase the effectiveness of the rehabilitation process.

Keywords: intersystem shunt, saturation, congenital heart disease, hemodynamics, simulation

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20-41-596005 p_NOTS_Perem Region).

For citation: Khairulin A. R., Rakisheva I. O., Kuchumov A. G., Golub M. V., Shekhmametiev R. M., Lazarkov P. V. Investigation of the influence of intersystem shunt characteristics on hemodynamic parameters and oxygen distribution. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 254–274 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-254-274>, EDN: INFKKR

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Врожденные пороки сердца — это аномалии строения сердца и (или) магистральных сосудов, при которых нарушена нормальная гемодинамика [1–3]. При некоторых из них нарушается процесс насыщения крови кислородом, вследствие чего страдает организм новорожденного в целом, во внутренних органах возникают патологические процессы.



От врожденных пороков сердца страдают около одного процента от числа новорожденных [4]. Критические пороки и пороки, требующие коррекции на первом году жизни, при своем естественном течении приводят к тяжелым проблемам со здоровьем и даже летальности.

Одним из методов паллиативного лечения младенцев с врожденными пороками сердца (в частности, при атрезии легочной артерии и в редких случаях при синдроме гипоплазии левого сердца) является межсистемный шунт [5]. Межсистемные шунты доказали свою эффективность в помощи новорожденным с цианотичным врожденным пороком сердца в некоторых случаях [6].

Однако необходимо отметить, что процедура установки межсистемных шунтов связана с высоким риском развития заболеваемости и смертности [1, 2]. Уровень смертности среди новорожденных все еще остается значительным, находясь в диапазоне от 3 до 14% [3]. Основными причинами заболеваемости и смертности у пациентов, подвергшихся данной процедуре, являются прогрессирующая сердечно-легочная недостаточность и синдром обкрадывания коронарных артерий [7]. Эти последствия возможно предупредить, если соблюсти баланс между достаточным насыщением крови кислородом и низким давлением в легочной артерии [8].

Применение методов биомедицинского инжиниринга и математического моделирования позволяет получить количественные оценки гемодинамических показателей и спрогнозировать последствия хирургического вмешательства [9, 10]. На сегодняшний день разработка объективизированных методик индивидуального подбора межсистемного шунта является актуальной проблемой, требующей новых подходов и методов [11].

В работах [6–9, 12–15] анализировались различные аспекты численного моделирования для анализа разных операций наложения межсистемных шунтов. Было показано, что расположение шунта играет важную роль в гемодинамике легочной артерии. Правильно подобранное расположение шунта может уравновесить потоки в правой и левой легочной артерии или, наоборот, внести дисбаланс [13, 14]. Центральный шунт приводит к низкому сопротивлению потока, что означает легкую наполняемость легочной артерии. А модифицированный Блалок – Тауссиг шунт подходит для случаев с высоким риском переполнения легочной артерии.

Также было показано, что шунты большего диаметра отводят большую часть сердечного выброса к легким, что ухудшает оксигенацию [15]. Было установлено, что системное сосудистое сопротивление оказывает большее влияние на гемодинамику, чем легочное сосудистое сопротивление. Изменения частоты сердечных сокращений оказывают минимальное влияние на системную артериальную оксигенацию [16].

В табл. 1 приведены основные характеристики, изучаемые исследователями.

В настоящее время клиницисты узнают процент сатурации и соотношение потоков крови в сосудах непосредственно при операции, но для качественного планирования необходима предоперативная оценка этих характеристик. В данной статье исследовано влияние различных вариантов установки межсистемного шунта на гемодинамику в системе «аорта – шунт – легочная артерия» у реальных пациентов.

Анализ гемодинамического воздействия на межсистемный шунт проведен с использованием методов вычислительной гидродинамики. Расчеты были выполнены для ряда характеристик, включая потерю энергии, напряжение сдвига стенки, соотношение потоков в левой и правой легочной артерии (LPA/RPA) и распределение кислорода.

1. Материалы и методы

1.1. Модели 3D геометрий шунтов

Для трех пациентов, получавших лечение в Федеральном центре сердечно-сосудистой хирургии им. С. Г. Суханова, была проведена мультиспиральная компьютерная томография грудной клетки. Использовался МСКТ-томограф Somatom Definition AS от Siemens, размерность 512×512, толщина слоя 0.6 мм. С помощью программы ITC-SNAP созданы трехмерные модели аорты и легочной артерии.

Обзор исследуемых гемодинамических показателей, определяемых с помощью численного моделирования
 Overview of investigated hemodynamic parameters determined by numerical modeling

Таблица 1 / Table 1

Автор	Учет податливости стенок	Модель турбулентности	0D-3D	Тип крови	Проанализированные характеристики						
					$\frac{Q_{LPA}}{Q_{RPA}}$	Потеря энергии	Оценка доставки кислорода	WSS	Скорость	Давление	Дополнительно
[12]	–	Shear Stress Transport, $k-\omega$	Нет	ННЖ	Да	Да	Нет	Нет	Нет	Нет	–
[17]	–	Нет информации	Нет	НЖ, кровотоки ламинарный и несжимаемый	Нет	Нет	Нет	Да	Нет	Да	Контуры скоростей, профили и линии скоростей
[18]	–	Нет информации	Да	–	Нет	Нет	Да	Нет	Нет	Да	–
[19]	–	Нет информации	Нет	НЖ, без скольжения	Нет	Нет	Нет	Да	Да	Да	Скорость сдвига
[14]	–	Нет информации	Нет	НЖ	Да	Да	Нет	Да	Да	Нет	Индекс шунта
[13]	–	Нет информации	Да	–	Да	Нет	Нет	Нет	Да	Да	–
[20]	–	Shear Stress Transport, $k-\omega$	Нет	НЖ	Да	Да	Да	Нет	Нет	Нет	Коэффициент стеноза легочной артерии
[21]	–	Shear Stress Transport, $k-\omega$	Да	ННЖ	Нет	Нет	Нет	Да	Да	Да	–
[22]	–	Нет информации	Да	ННЖ, течение стационарное	Да	Да	Нет	Да	Да	Нет	Поврежденность крови
[23]	–	Нет информации	Нет	ННЖ	Да	Да	Нет	Да	Да	Да	–
[24]	+	Нет информации	Нет	НЖ	Нет	Нет	Нет	Да	Да	Да	Объемный расход через шунт

Принятые сокращения: НЖ — ньютоновская жидкость; ННЖ — несжимаемая ньютоновская жидкость; Q_{LPA}/Q_{RPA} — соотношение объемных расходов в правой и левой легочных артериях; WSS — пристеночные касательные напряжения.



Далее в графическом пакете Spasclaim к сосудам добавлены различные варианты шунтов (по расположению: центральный, левый, правый, и по диаметру: 3, 3.5 и 4 мм). Часто восходящие сосуды имеют достаточно малый диаметр для того, чтобы установить шунт нужного диаметра без изменения естественной формы шунта. Поэтому в соединениях шунтов с сосудами шунты в сечении имеют форму эллипса, которая затем плавно становится окружностью (рис. 1).

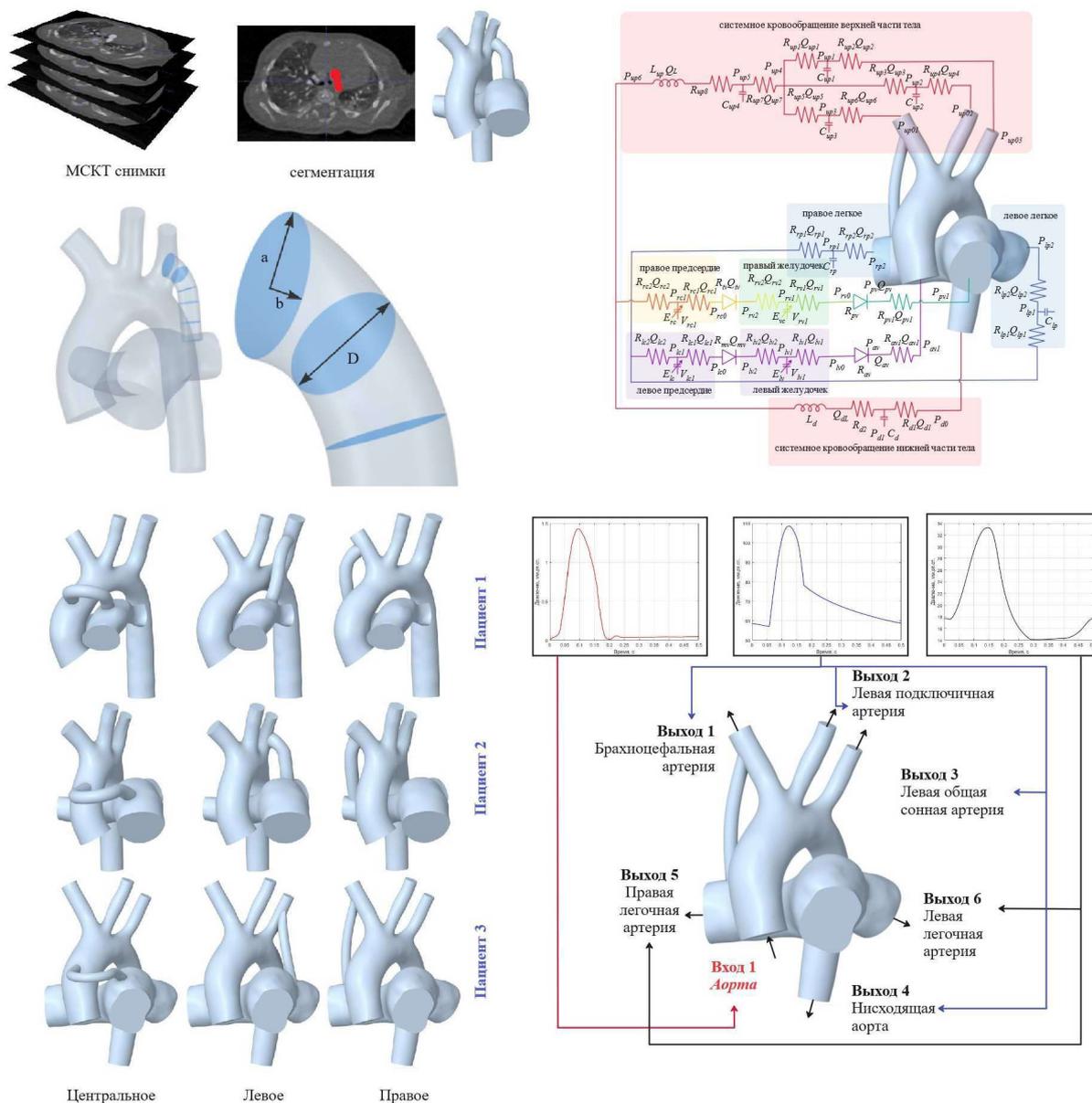


Рис. 1. Пациент-ориентированные геометрии, 0D-3D схема кровообращения и варианты расположения шунтов (цвет онлайн)

Fig. 1. Patient-specific geometries, 0D-3D blood flow scheme and shunt placement options (color online)

Таким способом были созданы шунты правого и левого расположения (параметры эллипсов указаны в табл. 2). Всего получилось 27 вариантов.



Таблица 2 / Table 2

Размеры шунтов / Shunt dimensions

D , мм	Периметр окружности, мм	a , мм	b , мм	Периметр эллипса, мм	Относительная разность периметров, %
3.0	9.4	1.0	1.9	9.47	0.53
3.5	11.0	1.2	2.2	10.93	0.56
4.0	12.6	1.5	2.4	12.52	0.35

1.2. Граничные условия

Для входа в аорту была использована зависимость скорости от времени в периоды систолической и диастолической фаз левого желудочка (см. рис. 1). Длительность систолического периода левого желудочка составляет 0.22 с, а диастолического — 0.28 с. Общая продолжительность сердечного цикла равна 0.5 с. Максимальная скорость составляет 1.4 м/с [25]. Для выходов из аорты и легочных артерий использовались зависимости давления от времени, рассчитанные с помощью модели Франка.

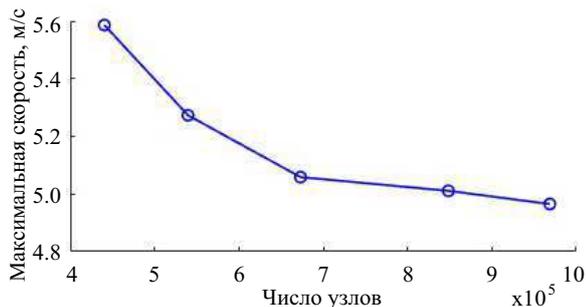
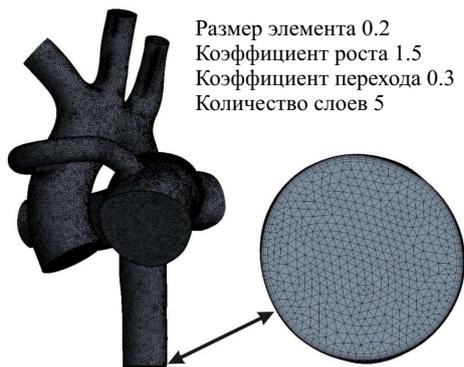
При прохождении крови через сосуды или систему сосудов возможно снижение давления P из-за сил трения, которые отображаются на схеме как элемент типа «сопротивление». В таком случае объем кровотока Q через участок определяется разностью давлений на входе и выходе и свойствами сосуда, описываемыми параметром R . Эластичные сосуды способны расширяться при увеличении кровотока, накапливая внутри себя кровь, и сжиматься при ослаблении кровотока, что поддерживает выходной кровоток. Это свойство описывается элементом типа «конденсатор», который имеет параметр емкости C , характеризующий скорость накопления крови. Изменение кровотока через сосуд при постоянной разности давлений описывается элементом типа «катушка», который обладает свойством индуктивности (L). Кровоток через клапан сердца (элемент типа «диод») возможен только при превышении критического уровня разности давлений P_{crit} . Элементы типа «эластичность» описывают работу камер сердца, связывая изменение объемов камер с давлением. Параметр эластичности E зависит от времени t , в отличие от других параметров модели.

Математическая модель, описывающая кровообращение, включает 13 дифференциальных уравнений и несколько десятков алгебраических соотношений. Путем преобразований можно выразить все переменные через неизвестные, что позволяет перейти к системе из 13 дифференциальных уравнений с 13 неизвестными. Для решения этой системы нужны начальные условия, параметры (R, C, L, P_{crit}) и функции, определяющие работу сердца $E(t)$. Константы и решение системы уравнений описаны в работе [26].

1.3. Исследование сходимости сеточной модели

Для создания расчетной сетки для области жидкости использовались инструменты Body Sizing и Inflation. С помощью Body Sizing можно задать тип и размер элемента сетки, а Inflation позволяет увеличить плотность сетки в пристеночных областях для выявления пристеночных эффектов (рис. 2).

Для оценки чувствительности к плотности сетки были выбраны пять различных размеров элементов (табл. 3), включая гексаэдрические и тетраэдрические типы элементов. Анализ проводился на основе достижения относительной разницы $\varepsilon_P^{\max} = 1.56\%$, $\varepsilon_V^{\min} = 0.91\%$ между максимальными значениями давления и скорости в системе «аорта – шунт – легочная артерия». На рис. 2 приведен график сходимости для скорости. Можно видеть, что значения максимальных скоростей существенно отличаются для грубой и сгущенной сеток. Поэтому для дальнейших расчетов была выбрана более плотная сетка с размером стороны треугольного конечного элемента $h = 0.2$ мм.



а / а

б / б

Рис. 2. Конечно-элементная сетка и сеточная сходимость

Fig. 2. Finite element mesh and mesh convergence

Таблица 3 / Table 3

Параметры сеток, использованных в исследовании / Mesh parameters

Размер элемента, мм	Коэффициент перехода	Количество слоев	Коэффициент роста	Число элементов	Число узлов	Максимальное давление, Па	ϵ_P^{\max}	Максимальная скорость, м/с	ϵ_P^{\min}
0.20	0.30	5	1.50	4 204 752	968 582	19 330.5	1.562541	4.96512	0.913411
0.21	0.33	5	1.47	3 617 334	848 329	19 033.1	1.587344	5.01089	0.940209
0.23	0.35	5	1.45	2 782 675	673 045	18 735.7	1.930265	5.05845	4.065203
0.25	0.40	5	1.40	2 155 081	539 698	18 380.9	1.894773	5.27280	5.604678
0.27	0.45	5	1.30	1 684 686	440 474	18 039.1	5.585870	–	–

1.4. Гемодинамические параметры

Для оценки взаимодействия и распределения потоков рассчитывались пристеночные касательные напряжения (Wall Shear Stress – WSS), осредненные за сердечный цикл пристеночные касательные напряжения (Time Averaged Wall Shear Stress – TAWSS), индекс колебаний касательных напряжений (Oscillatory Shear Index – OSI), скорость, давление, относительное время пребывания (Relative Residence Time – RRT), потеря энергии (Energy Loss – EL), оксигенация (Delivery oxygen – Do) и η (соотношение кровотоков между левой и правой легочными артериями).

Пристеночные касательные напряжения являются важным гемодинамическим параметром [27, 28]. Они возникают при трении крови о стенки сосудов и могут быть связаны с эндотелиальной дисфункцией и повышенным риском тромбоза артерий [29]. Пристеночные касательные напряжения вычисляются по формуле

$$WSS = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

где u – скорость жидкости вблизи стенки, r – расстояние до стенки, μ – динамическая вязкость.

Осредненные за сердечный цикл пристеночные касательные напряжения вычисляются по формуле

$$TAWSS = \frac{1}{T} \int_0^T |WSS| dt,$$

где T – время сердечного цикла, равное 0.5 с.



Индекс колебаний касательных напряжений позволяет оценить характеристики потока крови внутри сосудов и представляет собой безразмерную величину, которая изменяется от 0 до 0.5 и отражает степень осцилляции потока крови в течение сердечного цикла [30]. Значение $OSI = 0$ соответствует однонаправленному потоку крови, тогда как значение $OSI = 0.5$ указывает на полностью осциллирующий поток [31], что может привести к эндотелиальной дисфункции [32]. Индекс колебаний касательных напряжений вычисляется по формуле

$$OSI = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\left| \int_0^T WSS dt \right|}{\int_0^T |WSS| dt} \right).$$

Известно, что при сильно осциллирующих течениях индекс колебательного сдвига может быть таким же, как и при очень медленных потоках. Таким образом, индекс колебательного сдвига не позволяет выявить атеросклеротические области, т.е. области с низкими пристеночными касательными напряжениями и высоким индексом колебательного сдвига на одном и том же участке артериальной системы. Для преодоления вышеуказанных трудностей введено относительное время пребывания [33]. RRT — это время пролета растворенных веществ и форменных элементов крови в окрестности сосудистого эндотелия. Оно обратно пропорционально продольному расстоянию Δx , где частица крови перемещается на небольшом расстоянии от стенки [15], и определяется формулой

$$RRT \sim \frac{1}{\Delta x} \sim \frac{1}{TAWSS \cdot (1 - 2 \cdot OSI)}.$$

Потери энергии являются количественным показателем гемодинамической эффективности системно-легочного шунтирования и постнагрузки на один желудочек. Чем меньше потери энергии, тем выше эффективность преобразования энергии системно-легочных шунтов [12]:

$$\text{Energy Loss} = \sum W_{inlet} - \sum W_{outlet},$$

$$W = Q_V(P + 1/2\rho v^2).$$

Соотношение кровотоков между левой и правой легочными артериями η :

$$\eta = Q_{LPA}/Q_{RPA},$$

где Q_{LPA} и Q_{RPA} — объемные скорости потока в левой легочной артерии (LPA) и правой легочной артерии (RPA) соответственно [34].

Оценка доставки кислорода — показатель, имеющий большое значение и в значительной степени связанный с ранними повторными вмешательствами после операции [35, 36]. Пусть CV_{O_2} — потребление кислорода всем телом, CP_{VO_2} — концентрация кислорода в аорте, системной и легочной венах соответственно; Q_S и Q_P — системный и легочный потоки соответственно. Исходя из принципа сохранения кислорода [37, 38], получаем

$$DO_2 = Q_S CP_{VO_2} - Q_S/Q_P CV_{O_2}.$$

Насыщение легочных вен принималось равным 98%. По клиническим данным [16, 39] CP_{VO_2} и CV_{O_2} были установлены на уровне 0.22 мл₂/мл и 0.874 мл₂/с соответственно. Нормальные и патологические значения характеристик приведены в табл. 4.

Таблица 4 / Table 4

Нормальные и патологические значения гемодинамических параметров, Па
Values of hemodynamic parameters in the healthy state and pathology, Pa

Показатель	Значение		Источник
	Норма	Патология	
WSS	<40	>40.0	[28]
TAWSS	>1.5	от 15 до 45	[14, 29]
OSI	–	> 0.2	[30]
RRT	–	>8.0	[31]



2. Результаты

2.1. Пристеночные касательные напряжения, осредненные за сердечный цикл пристеночные касательные напряжения, индекс колебаний касательных напряжений, относительное время пребывания

Наибольшие значения пристеночных касательных напряжений наблюдаются в области шунта, что может представлять риск тромбоза (рис. 3) [22, 40]. Также высокие значения касательных напряжений концентрируются в области вихревого и застойного потоков крови в легочной артерии — непосредственно под шунтом, где кровь сталкивается со стенками артерии, а также на ответвлениях аорты, включая левую подключичную артерию, левую общую артерию и плечеголовный ствол. Наименьшие значения WSS наблюдаются в областях нисходящей части аорты и на легочной артерии — в областях равномерного течения крови [22].

Значения осредненных за сердечный цикл пристеночных касательных напряжений в пиковый момент систолы достигают максимальных значений в области шунта, что может способствовать тромбозу шунта [41, 42]. Кроме того, высокие значения касательных напряжений наблюдаются в области вихревого движения крови в нижней части легочной артерии [43].

Наибольшие значения TAWSS наблюдаются в областях стыка с аортой и легочной артерией, что указывает на повышенный риск тромбоза в данных областях (см. рис. 3). Высокие значения порядка 300 Па наблюдаются при всех расположениях шунтов и при всех диаметрах. Для пациентов 1 и 2 данные значения распределены неравномерно по всей длине шунта. Для пациента 3 максимальные значения локализованы в основном на стыках с аортой. Далее по длине шунта значения не превышают 150 Па за исключением центрального расположения шунта при всех диаметрах.

Наибольшие значения индекса колебаний касательных напряжений сконцентрированы в восходящей части аорты, а также в бифуркационных и вихревых областях легочной артерии (см. рис. 3). Это связано с интенсивным колебанием направления вектора WSS в этих областях во время сердечного цикла.

В то же время значения индекса в нисходящей части аорты наблюдаются ниже. Это связано с уменьшением интенсивности колебаний касательных напряжений по мере перемещения вниз по аорте. Распределение индекса колебаний касательных напряжений в области шунта имеет неравномерный характер. На шунте значительные колебания значений будут происходить в области стыка с аортой. Однако ближе к легочному стволу степень осцилляций снижается. Это можно объяснить особенностями гидродинамики в этой области. Данная закономерность распределения индекса характерна для всех моделей.

На рис. 4 показано распределение относительного времени пребывания. Высокие значения относительного времени пребывания в основном концентрируются в легочной артерии. Можно сделать вывод, что в легочной артерии наблюдаются значительно более длительные периоды задержки кровотока в сравнении с другими отделами системы, связанные с завихренностью кровотока. Особенно области высоких значений ярко выражены у пациента 3 для всех моделей. У пациентов 1 и 2 по мере увеличения диаметра шунта характерно уменьшение значений данного параметра для всех расположений шунта.

Для данных моделей характерно, что значения, описывающие риск тромбоза шунта, сосредоточены в области стыка с аортой, что подтверждается клиническими наблюдениями. Далее значения пристеночных касательных напряжений уменьшаются до оптимального уровня по мере продвижения вдоль длины шунта и приближения к области его стыка с легочной артерией (см. рис. 3).

2.2. Линии тока и давление

Изучение распределения скоростных характеристик течения крови имеет важное значение для понимания физиологии и патологии системного кровотока. Особенно важно учитывать возможные эффекты шунтов и других аномалий кровотока на гемодинамику.

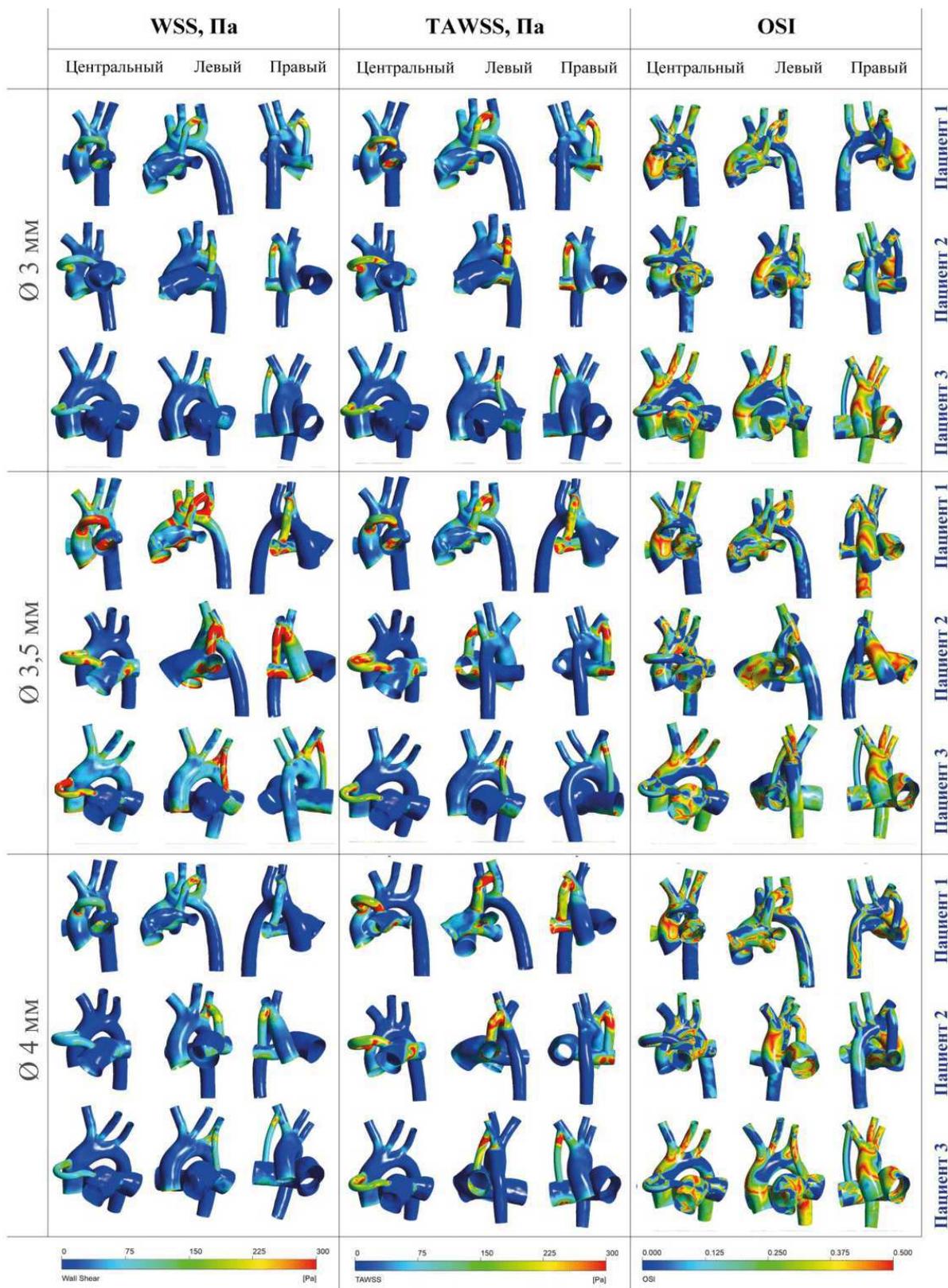


Рис. 3. Распределение пристеночных касательных напряжений, касательных напряжений осредненных за сердечный цикл и индекса колебаний пристеночных касательных напряжений в модели «аорта – шунт – легочная артерия» при разных диаметрах и местах установки межсистемного шунта (цвет онлайн)

Fig. 3. Distribution of wall shear stress, time-averaged wall shear stress and oscillatory shear index in model “aorta – shunt – pulmonary artery” at different diameters and locations of the Blalock – Taussig shunt (color online)

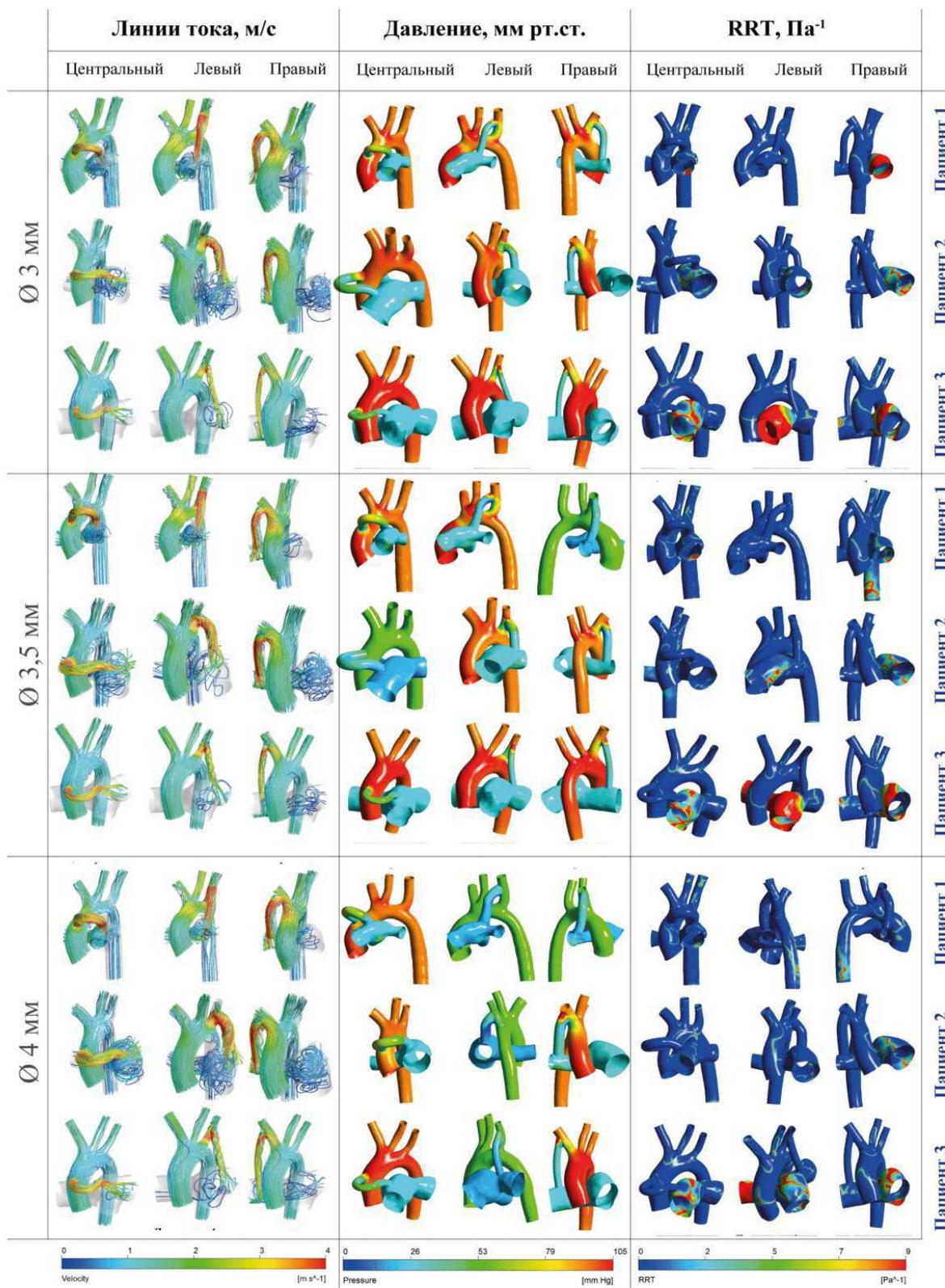


Рис. 4. Линии тока, давление и относительное время пребывания в модели «аорта – шунт – легочная артерия» при разных диаметрах и местах установки межсистемного шунта (цвет онлайн)

Fig. 4. Streamlines, pressure, and relative residence time in model “aorta – shunt – pulmonary artery” at different diameters and locations of the Blalock – Taussig shunt (color online)



Распределение скоростных характеристик течения крови в системном кровотоке является важным аспектом гемодинамических процессов. В аорте кровотоки распределены неравномерно, однако по мере приближения к нисходящей части аорты скорости кровотока выравниваются. Наоборот, в легочной артерии преобладает вихревое движение крови, вызванное вертикальным потоком, который сталкивается со стенкой артерии и вызывает завихрения (см. рис. 4).

Распределение давления по стенкам аорты и легочной артерии в пиковый момент систолы имеет неоднородный характер. Самые высокие значения наблюдаются на стенках восходящей части аорты, а самые низкие — на стенках легочной артерии. В области, где присутствует шунт, наибольшие значения давления сосредоточены на стыке с аортой. Затем давление равномерно распределяется по направлению к легочной артерии. Такой характер распределения давления характерен для всех расположений шунта и для всех диаметров (см. рис. 4).

2.3. Соотношение кровотоков между левой и правой легочными артериями

Исследования показали, что при системно-легочном шунтировании сбалансированная перфузия легочных артерий тесно связана с улучшением состояния в послеоперационный период [44, 45]. Одним из основных критериев выбора места локализации шунта является симметричное распределение кровотока в легочных артериях. Равномерная перфузия и развитие как правой, так и левой легочных артерий имеют важное значение [46]. Правильное распределение кровотока помогает обеспечить оптимальный рост и развитие в обеих артериях, а также предотвращает неравномерное перфузирование легочной ткани, что может быть нежелательным для пациента [47].

По графикам, показывающим соотношение LPA/RPA (η) и их среднее значение за сердечный цикл, можно сделать вывод, что все модели демонстрируют асимметричное распределение кровотока в легочные артерии (рис. 5). Особенно это выражено у пациента 2 при центральном расположении шунта и у пациента 3 при левом расположении шунта. Из графиков видно, что распределение соотношения LPA/RPA (η) в правой легочной артерии резко возрастает по сравнению с левой легочной артерией для этих моделей. Такая картина наблюдается для всех трех диаметров шунтов.

Также были определены наиболее благоприятные варианты шунтов с точки зрения их расположения и диаметра. Обнаруженные результаты совпадают с данными о распределении кислорода. Это закономерно, так как распределение кислорода в легочной артерии зависит в первую очередь от объема крови, поступающей в правую и левую легочные артерии [48].

Потери энергии являются количественным показателем гемодинамической эффективности системно-легочного шунтирования и постнагрузки на один желудочек. Чем меньше потери энергии, тем выше эффективность преобразования энергии системно-легочных шунтов [34].

Из диаграммы видно, что по мере увеличения диаметра шунта осредненные за сердечный цикл потери энергии возрастают (рис. 6). Исключением является центральное расположение шунта у пациента 3. Это свидетельствует об увеличении нагрузки на сердце при увеличении диаметра шунта.

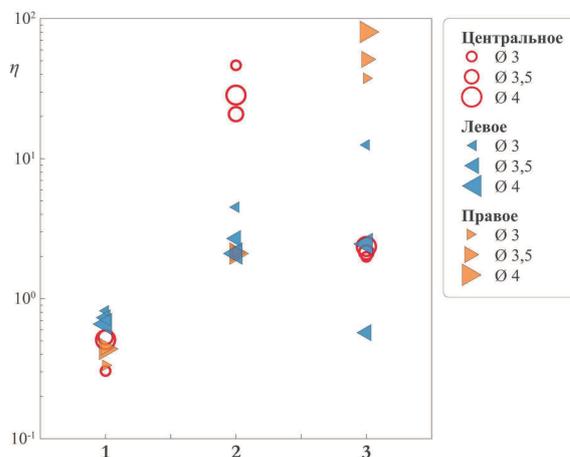


Рис. 5. Распределение соотношений LPA/RPA (η) для трех пациентов при различных диаметрах шунтов и вариантах их установки (цвет онлайн)

Fig. 5. LPA/RPA ratios (η) for three patients at different shunt diameters and various locations (color online)

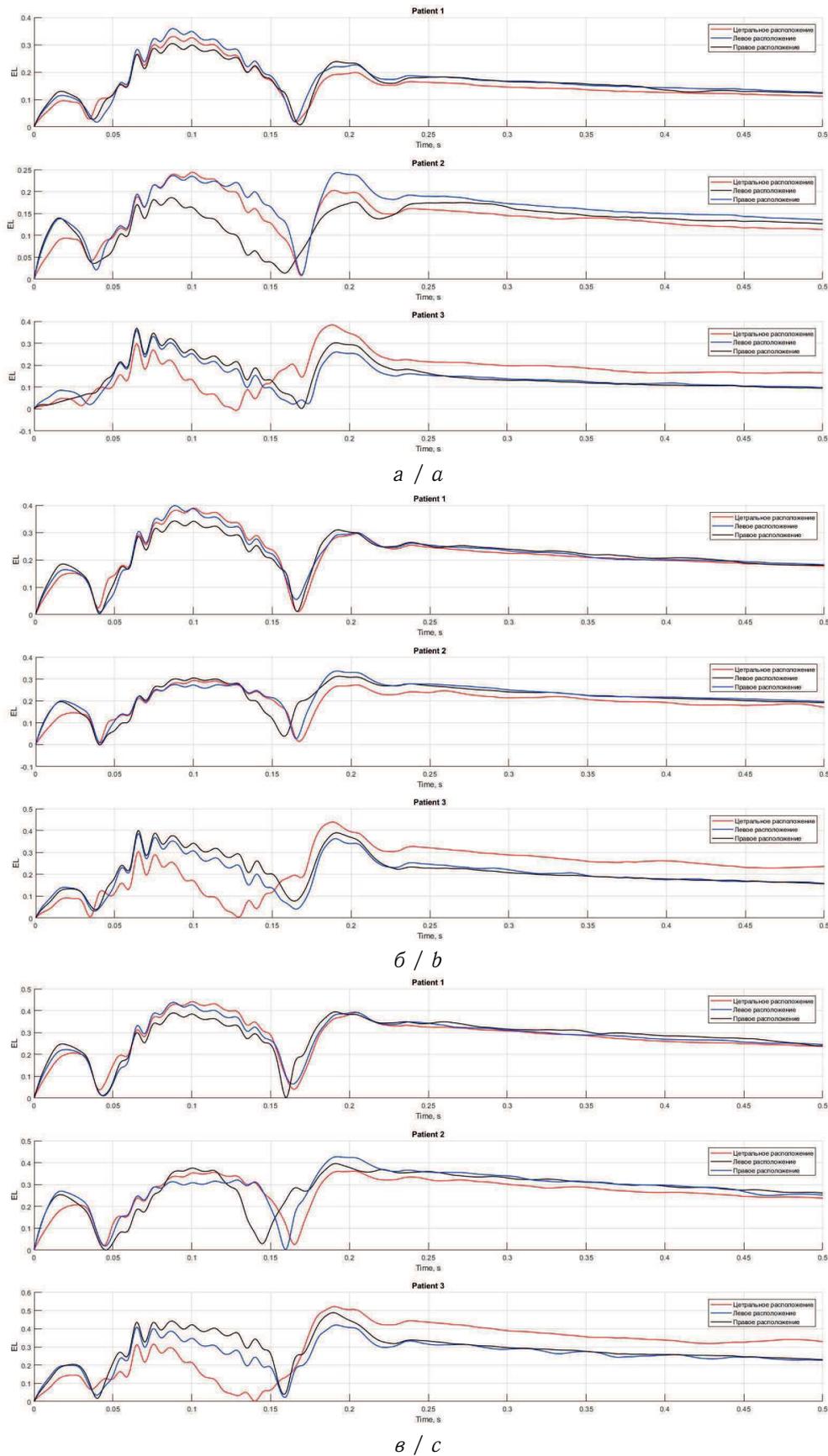


Рис. 6. Распределение потерь энергии: а – шунт диаметром 3 мм; б – шунт диаметром 3.5 мм; в – шунт диаметром 4 мм (цвет онлайн)
Fig. 6. Energy loss distribution: a is shunt of 3 mm diameter; b is shunt of 3.5 mm diameter; c is shunt of 4 mm diameter (color online)



Из графиков распределения кислорода и их осредненных значений за сердечный цикл видно, что все модели показывает асимметричное распределение кислорода в легочные артерии (рис. 7, 8).

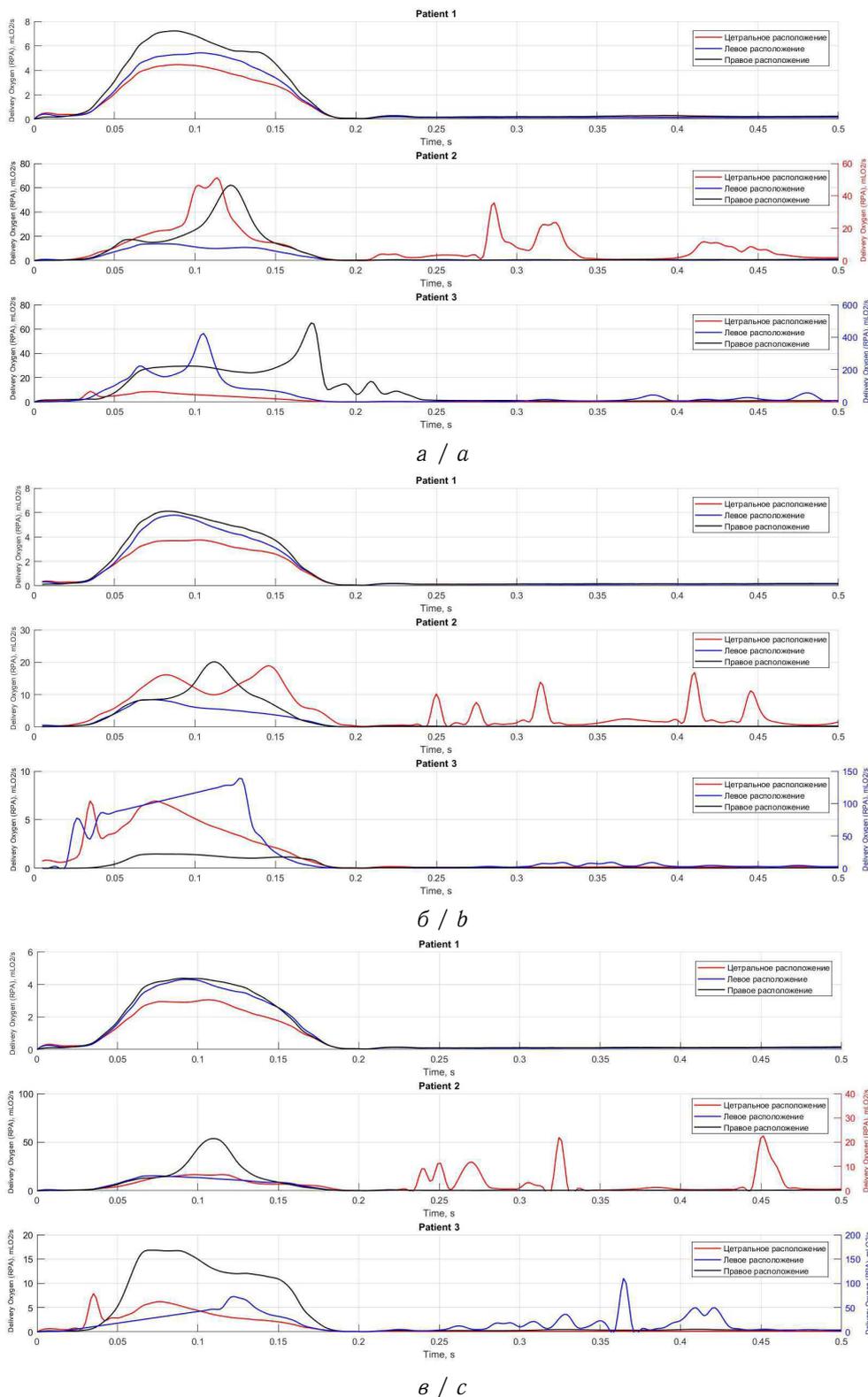
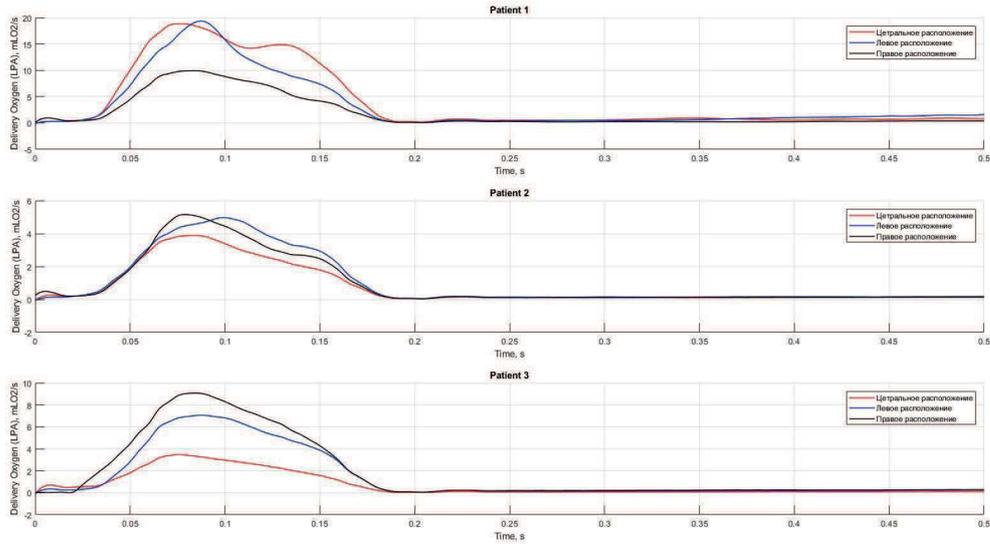
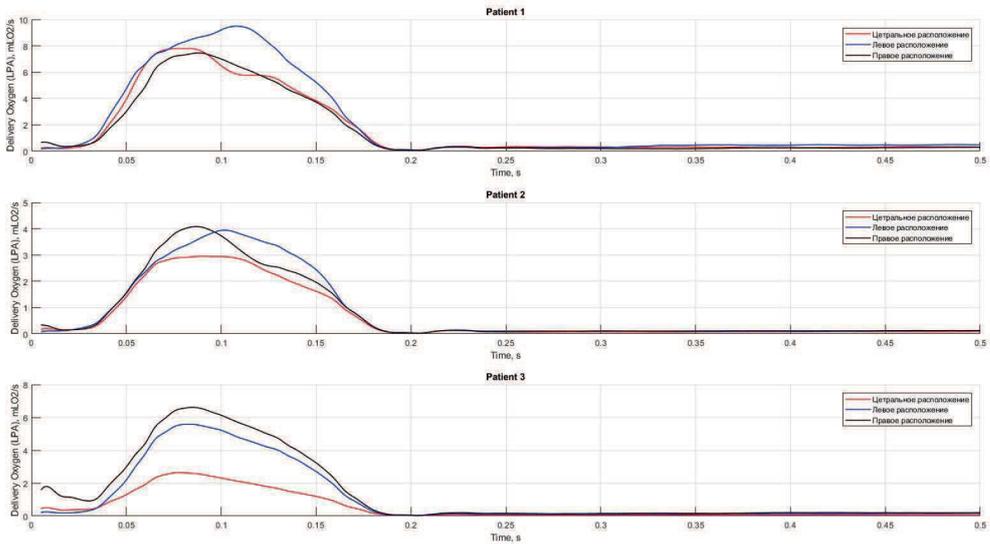


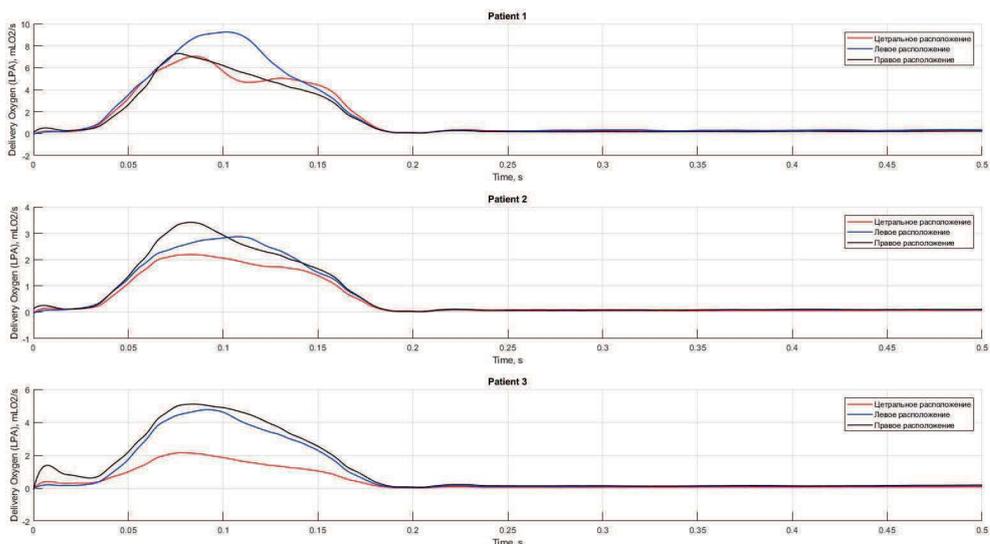
Рис. 7. Распределение кислорода в правой легочной артерии: а — шунт диаметром 3 мм; б — шунт диаметром 3.5 мм; в — шунт диаметром 4 мм (цвет онлайн)
 Fig. 7. Oxygen delivery distribution in the right pulmonary artery: a is shunt of 3 mm diameter; b is shunt of 3.5 mm diameter; c is shunt of 4 mm diameter (color online)



a / a



б / b



в / c

Рис. 8. Распределение кислорода в левой легочной артерии: *a* — шунт диаметром 3 мм; *б* — шунт диаметром 3.5 мм; *в* — шунт диаметром 4 мм (цвет онлайн)
Fig. 8. Oxygen delivery distribution in the left pulmonary artery: *a* is shunt of 3 mm diameter; *b* is shunt of 3.5 mm diameter; *c* is shunt of 4 mm diameter (color online)



Особенно это ярко выражено для пациента 2 при центральном расположении шунта и пациента 3 при левом расположении шунта. Из графиков видно резкое возрастание распределения кислорода в правой легочной артерии по сравнению с левой легочной артерией для этих моделей. Данная картина характерна для всех трех диаметров шунтов.

3. Анализ

Цель данного исследования состоит в оценке влияния межсистемного шунта на течение крови в сосудах конкретных пациентов. Полученные результаты подтвердили гипотезу о влиянии расположения и размера межсистемного шунта на его работу.

Результаты моделирования, основанные на анатомических и физиологических данных конкретного пациента, продемонстрировали влияние различных межсистемных шунтов на аорту и легочную артерию посредством перераспределения кровотока по ветвям сосудов, изменяя тем самым гемодинамические характеристики и нагрузку на сердце пациента. Это позволило получить количественные и качественные гемодинамические параметры, которые помогут при планировании операции и прогнозировании послеоперационного периода.

Улучшение состояния в послеоперационном периоде системно-легочного шунтирования тесно связано со сбалансированной перфузией легочных артерий. Все модели, рассмотренные в данном исследовании, имеют асимметричный кровоток. Этот феномен может быть обусловлен особенностями анатомии сосудов у пациентов, что представляет интерес для более глубокого понимания механизмов циркуляции крови после проведения операции. Особенно это выражено у пациента 2 при центральном расположении шунта и у пациента 3 при левом расположении шунта. В работах [12,43] исследователи пришли к схожим результатам, выявив асимметричное распределение кровотока в легочных артериях независимо от места установки межсистемного шунта.

На потери гемодинамической энергии влияют трение крови о стенки сосуда, вихри, турбулентность и просвет сосуда. Чем выше потери энергии, тем больше нагрузка на желудочки сердца, что может стать триггером к развитию сердечно-легочной недостаточности. По результатам исследования было выявлено, что чем больше диаметр шунта, тем больше потери энергии. Также была выявлена разница потерь энергии между шунтами 3 и 4 мм примерно в два раза. При этом, если оценивать влияние расположения шунта, то получается, что для пациента 1 сложно выделить однозначно хорошее расположение шунта. Для пациента 2 левое расположение шунта оказалось наиболее эффективным, при этом результат установки шунта 3 мм оказался неудовлетворительным. Для пациента 3 правое расположение приводит к меньшим потерям энергии по сравнению с шунтами того же размера, но другого расположения. Другие авторы в своих исследованиях тоже говорят о негативном влиянии больших значений EL на сердечно-сосудистую систему, в частности сердце и его миокард [43]. В работе [12] была проанализирована потеря энергии и получены результаты в диапазоне 0.065–0.15 Вт. Также стоит отметить различия в степени поражения легочной артерии, моделируемой в данной работе и в работах других авторов.

В результате анализа распределения кислорода в левое и правое легкое для каждого пациента были выявлены наиболее благоприятные варианты шунта (рис. 9).

Анализ показал следующее.

1. Для пациента 1 с минимальной разницей между распределением кислорода в легочные артерии подходит шунт с правым расположением и диаметром 3,5 мм. При данном расположении и диаметре шунта кислород поступает в левую легочную артерию на 17% больше, чем в правую.

2. Для пациента 2 с минимальной разницей между распределением кислорода в легочные артерии подходит шунт с левым расположением и диаметром 3.5 мм. При данном расположении и диаметре шунта кислород поступает в правую легочную артерию на 49% больше, чем в левую.

3. Для пациента 3 с минимальной разницей между распределением кислорода в легочные



артерии подходит шунт с центральным расположением и диаметром 3.5 мм. При данном расположении и диаметре шунта кислород поступает в левую легочную артерию на 12% больше, чем в правую.

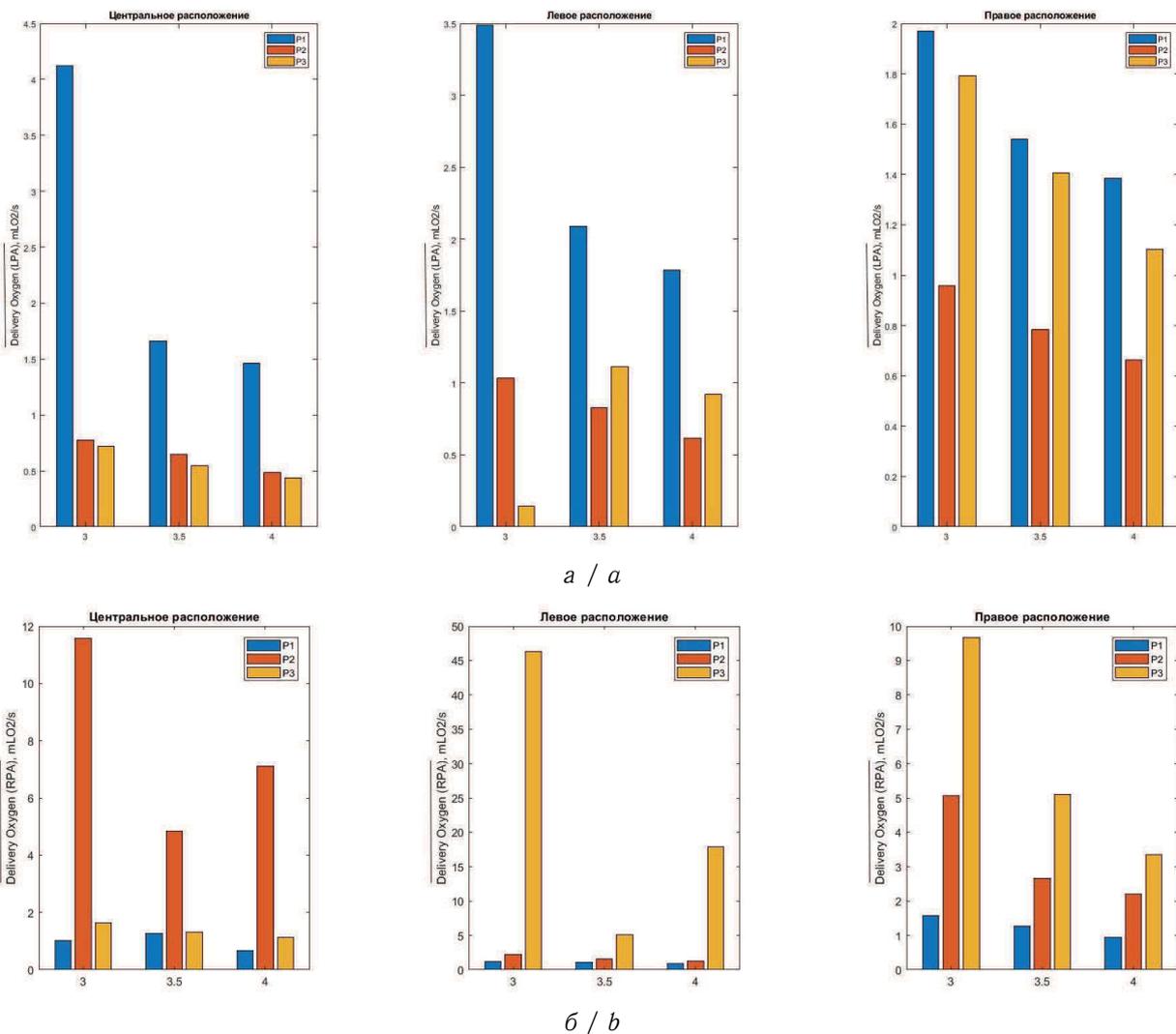


Рис. 9. Распределение кислорода, осредненное за сердечный цикл в левой (а) и правой (б) легочных артериях (центральное, левое и правое расположения соответственно); P1 — пациент 1 (синий); P2 — пациент 2 (оранжевый); P3 — пациент 3 (желтый) (цвет онлайн)

Fig. 9. Time-averaged oxygen delivery distribution in the left (a) and the right (b) pulmonary artery (central, left, and right locations); P1 — patient 1 (blue); P2 — patient 2 (orange); P3 — patient 3 (yellow) (color online)

Полученные в работе результаты по порядку величин согласуются с данными из работы [39].

Распределение касательных напряжений вблизи сосудистой стенки представляет собой важный аспект для понимания патологических процессов, связанных с системным кровотоком. Повышенные значения этих напряжений могут быть ассоциированы с разнообразными патологиями, включая тромбоз и повреждение эндотелия, в то время как их снижение может быть связано со стенозом. Особенно неблагоприятным считается диаметр шунта в 3.5 мм, где высокие касательные напряжения распределены вдоль всей его длины при различных расположениях шунта. В случае пациента 1 наиболее благоприятное расположение шунта обнаружено справа при диаметре 4 мм, где значения напряжений превышают норму лишь



локально в ограниченных точечных областях, не превышая 75 Па. Для пациентов 2 и 3 оптимальным считается центральное расположение при диаметрах 3 и 4 мм, где локальные значения напряжений не превышают 75 Па.

Во время пика систолы наивысшие значения кровотока концентрируются в области установки шунта. Увеличение диаметра шунта сопровождается увеличением скорости крови, проходящей через него, в среднем на 1–4%, а также наблюдается закручивание потока крови в самом шунте. В области шунта максимальные значения давления фокусируются в зоне соединения с аортой, после чего давление равномерно распределяется в направлении легочной артерии.

В данном исследовании имелось несколько ограничений. Во-первых, небольшое количество пациентов. Изучение большего числа дало бы возможность с большей уверенностью говорить о полученных паттернах и закономерностях. Во-вторых, имеет смысл провести данное исследование на пациентах, которые в реальности были прооперированы, и сравнить наши результаты с послеоперационным периодом.

Заключение

Врачи сталкиваются с проблемой объективизации операций при оценке воздействия параметров шунта и его места установки на кровотоки в легких у детей с врожденными патологиями сердца. В данном исследовании мы фокусировались на разработке модели кровотока «аорта – шунт – легочная артерия», используя модели трех пациентов с различными вариантами установки межсистемного шунта и тремя различными диаметрами. С применением программного решателя ANSYS CFX проанализированы гемодинамические параметры, включая касательные напряжения у стенки, осредненные за сердечный цикл касательные напряжения, индекс колебаний касательных напряжений, относительное время пребывания и др.

Полученные результаты подчеркивают важность индивидуализированного подхода к выбору оптимального варианта установки шунта и его диаметра в зависимости от конкретных характеристик каждого пациента. На основе анализа гемодинамических показателей было продемонстрировано, что требования к различным вариантам установки шунта и их диаметрам различаются в зависимости от индивидуальных особенностей пациентов. Особо стоит выделить выявленную асимметричность течения в легочных артериях при всех вариантах имплантации и различных диаметрах.

Эти результаты подчеркивают, что гемодинамические параметры являются критическими индикаторами эффективности межсистемных шунтов. Представленный в исследовании объективный и персонализированный подход к выбору оптимальных параметров операции имеет потенциал существенного снижения детской смертности и улучшения результатов реабилитации, обеспечивая более точное соответствие хирургических вмешательств индивидуальным особенностям каждого пациента.

Список литературы / References

1. O'Connor M. J., Ravishankar C., Ballweg J. A., Gillespie M. J., Gaynor J. W., Tabbutt S., Dominguez T. E. Early systemic-to-pulmonary artery shunt intervention in neonates with congenital heart disease // *Journal of Thoracic and Cardiovascular Surgery*. 2011. Vol. 142, iss. 1. P. 106–112. <https://doi.org/10.1016/j.jtcvs.2010.10.033>
2. Petrucci O., O'Brien S. M., Jacobs M. L., Jacobs J. P., Manning P. B., Eghtesady P. Risk factors for mortality and morbidity after the neonatal Blalock – Taussig shunt procedure // *Annals of Thoracic Surgery*. 2011. Vol. 92, iss. 2. P. 642–652. <https://doi.org/10.1016/j.athoracsur.2011.02.030>
3. Ahmad U., Fatimi S. H., Naqvi I., Atiq M., Moizuddin S. S., Sheikh Kh. B., Shahbuddin S., Naseem T. M., Javed M. A. Modified Blalock – Taussig shunt: Immediate and short-term follow-up results in neonates // *Heart Lung and Circulation*. 2008. Vol. 17, iss. 1. P. 54–58. <https://doi.org/10.1016/j.hlc.2007.06.003>
4. Van Der Linde D., Konings E. E. M., Slager M. A., Witsenburg M., Helbing W. A., Takkenberg J. J. M., Roos-Hesselink J. W. Birth prevalence of congenital heart disease worldwide:



- A systematic review and meta-analysis // *Journal of the American College of Cardiology*. 2011. Vol. 58, iss. 21. P. 2241–2247. <https://doi.org/10.1016/j.jacc.2011.08.025>
5. Yuan S. M., Jing H. Palliative procedures for congenital heart defects // *Archives of Cardiovascular Diseases*. 2009. Vol. 102, iss. 6–7. P. 549–557. <https://doi.org/10.1016/j.acvd.2009.04.011>
 6. Elella R. A., Umereta N., Alabari I., Al Ahmadi M., Al Wadai A. The short- and long-term effect of Blalock – Taussig shunt size on the outcome after first palliative surgery for cyanotic heart diseases // *Annals of Saudi Medicine*. 2014. Vol. 34, iss. 6. P. 494–498. <https://doi.org/10.5144/0256-4947.2014.494>
 7. Sasikumar N., Hermuzi A., Fan C. P. S., Lee K. J., Chaturvedi R., Hickey E., Honjo O., Van Arsdell G. S., Caldarone C. A., Agarwal A., Benson L. Outcomes of Blalock – Taussig shunts in current era: A single center experience // *Congenital Heart Disease*. 2017. Vol. 12, iss. 6. P. 808–814. <https://doi.org/10.1111/chd.12516>
 8. Sisli E., Tuncer O. N., Senkaya S., Dogan E., Sahin H., Ayik M. F., Atay Y. Blalock – Taussig shunt size: Should it be based on body weight or target branch pulmonary artery size? // *Pediatric Cardiology*. 2019. Vol. 40, iss. 1. P. 38–44. <https://doi.org/10.1007/s00246-018-1958-9>
 9. Zhong L., Zhang J.-M., Su B., Tan R. S., Allen J. C. Application of patient-specific computational fluid dynamics in coronary and intra-cardiac flow simulations: Challenges and opportunities // *Frontiers in Physiology*. 2018. Vol. 9. <http://dx.doi.org/10.3389/fphys.2018.00742>
 10. Kelm M., Goubergrits L., Bruening J., Yevtushenko P., Fernandes J. F. Model-based therapy planning allows prediction of haemodynamic outcome after aortic valve replacement // *Scientific Reports*. 2017. Vol. 7. Art. 9897. <https://doi.org/10.1038/s41598-017-03693-x>
 11. Lesage R., Van Oudheusden M., Schievano S., Van Hoyweghen I., Geris L., Capelli C. Mapping the use of computational modelling and simulation in clinics: A survey // *Frontiers in Medical Technology*. 2023. Vol. 5. P. 1–10. <https://doi.org/10.3389/fmedt.2023.1125524>
 12. Zhang N., Yuan H., Chen X., Liu J., Zhou C., Huang M., Jian Q., Zhuang J. Hemodynamic of the patent ductus arteriosus in neonates with modified Blalock – Taussig shunts // *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2020. Vol. 186. Art. 105223. <https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2019.105223>
 13. Laganá K., Balossino R., Migliavacca F., Pennati G., Bove E. L., De Leval M. R., Dubini G. Multiscale modeling of the cardiovascular system: Application to the study of pulmonary and coronary perfusions in the univentricular circulation // *Journal of Biomechanics*. 2005. Vol. 38, iss. 5. P. 1129–1141. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2004.05.027>
 14. Zhang N., Yuan H., Chen X., Liu J., Jian Q., Huang M., Zhang K. Computational fluid dynamics characterization of two patient-specific systemic-to-pulmonary shunts before and after operation // *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. 2019. Vol. 2019. Art. 1502318. <https://doi.org/10.1155/2019/1502318>
 15. Himgurg H. A., Grzybowski D. M., Hazel A. L., LaMack J. A., Li X. M., Friedman M. H. Spatial comparison between wall shear stress measures and porcine arterial endothelial permeability // *American Journal of Physiology – Heart and Circulatory Physiology*. 2004. Vol. 286, iss. 5. P. H1916–H1922. <https://doi.org/10.1152/ajpheart.00897.2003>
 16. Migliavacca F., Pennati G., Dubini G., Fumero R., Pietrabissa R., Urcelay G., Bove E. L., Hsia T. Y., De Leval M. R. Modeling of the Norwood circulation: Effects of shunt size, vascular resistances, and heart rate // *American Journal of Physiology – Heart and Circulatory Physiology*. 2001. Vol. 280, iss. 5. P. H2076–H2086. <https://doi.org/10.1152/ajpheart.2001.280.5.H2076>
 17. Boumpouli M., Danton M. H. D., Gourlay T., Kazakidi A. Blood flow simulations in the pulmonary bifurcation in relation to adult patients with repaired tetralogy of Fallot // *Medical Engineering & Physics*. 2020. Vol. 85. P. 123–138. <https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2020.09.014>
 18. Hsia T. Y., Cosentino D., Corsini C., Pennati G., Dubini G., Migliavacca F. Use of mathematical modeling to compare and predict hemodynamic effects between hybrid and surgical Norwood palliations for hypoplastic left heart syndrome // *Circulation*. 2011. Vol. 124, iss. 11, suppl. 1. P. 204–210. <https://doi.org/10.1161/CIRCULATIONAHA.110.010769>
 19. Waniewski J., Kurowska W., Mizerski J. K., Trykozko A., Nowiński K., Brzezińska-Rajszyś G., Kościeszka A. The effects of graft geometry on the patency of a systemic-to-pulmonary shunt: A computational fluid dynamics study // *Artificial Organs*. 2005. Vol. 29, iss. 8. P. 642–650. <https://doi.org/10.1111/j.1525-1594.2005.29102.x>
 20. Liu J., Yuan H., Zhang N., Chen X., Zhou C., Huang M., Jian Q., Zhuang J. 3D simulation analysis of central shunt in patient-specific hemodynamics: Effects of varying degree of pulmonary



- artery stenosis and shunt diameters // *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. 2020. Vol. 2020. Art. 4720908. <https://doi.org/10.1155/2020/4720908>
21. Corsini C., Migliavacca F., Hsia T. Y., Pennati G. The influence of systemic-to-pulmonary arterial shunts and peripheral vasculatures in univentricular circulations: Focus on coronary perfusion and aortic arch hemodynamics through computational multi-domain modeling // *Journal of Biomechanics*. 2018. Vol. 79. P. 97–104. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2018.07.042>
 22. Arnaz A., Piskin S., Oguz G. N., Yalçınbas Y., Pekkan K., Sarioglu T. Effect of modified Blalock – Taussig shunt anastomosis angle and pulmonary artery diameter on pulmonary flow // *Anatolian Journal of Cardiology*. 2018. Vol. 20, iss. 1. P. 2–8. <https://doi.org/10.14744/AnatolJCardiol.2018.54810>
 23. Piskin S., Altin H. F., Yildiz O., Bakir I., Pekkan K. Hemodynamics of patient-specific aorta-pulmonary shunt configurations // *Journal of Biomechanics*. 2017. Vol. 50. P. 166–171. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2016.11.014>
 24. Kuchumov A. G., Khairulin A., Shmurak M., Porodikov A., Merzlyakov A. The effects of the mechanical properties of vascular grafts and an anisotropic hyperelastic aortic model on local hemodynamics during modified Blalock – Taussig shunt operation, assessed using FSI simulation // *Materials*. 2022. Vol. 15, iss. 8. Art. 2719. <https://doi.org/10.3390/ma15082719>
 25. Madhavan S., Kemmerling E. M. C. The effect of inlet and outlet boundary conditions in image-based CFD modeling of aortic flow // *BioMedical Engineering Online*. 2018. Vol. 17. Art. 66. <https://doi.org/10.1186/s12938-018-0497-1>
 26. Kuchumov A. G., Kamaltdinov M. R., Khairulin A. R., Kochergin M. V., Shmurak M. I. Patient-specific 0D-3D modeling of blood flow in newborns to predict risks of complications after surgery // *Health Risk Analysis*. 2022. Vol. 2022, iss. 4. P. 159–167. <https://doi.org/10.21668/health.risk/2022.4.15.eng>
 27. Callaghan F. M., Grieve S. M. Translational physiology: Normal patterns of thoracic aortic wall shear stress measured using four-dimensional flow MRI in a large population // *American Journal of Physiology – Heart and Circulatory Physiology*. 2018. Vol. 315, iss. 5. P. H1174–H1181. <https://doi.org/10.1152/ajpheart.00017.2018>
 28. Hoogendoorn A., Kok A. M., Hartman E. M. J., De Nisco G., Casadonte L., Chiastra C., Coenen A., Korteland S. A., Van der Heiden K., Gijzen F. J. H., Duncker D. J., Van der Steen A. F. W., Wentzel J. J. Multidirectional wall shear stress promotes advanced coronary plaque development: Comparing five shear stress metrics // *Cardiovascular Research*. 2021. Vol. 116, iss. 6. P. 1136–1146. <https://doi.org/10.1093/cvr/cvz212>
 29. Soares A. A., Carvalho F. A., Leite A. Wall shear stress-based hemodynamic descriptors in the abdominal aorta bifurcation: Analysis of a case study // *Journal of Applied Fluid Mechanics*. 2021. Vol. 14, iss. 6. P. 1657–1668. <https://doi.org/10.47176/jafm.14.06.32319>
 30. Peiffer V., Sherwin S. J., Weinberg P. D. Computation in the rabbit aorta of a new metric – the transverse wall shear stress – to quantify the multidirectional character of disturbed blood flow // *Journal of Biomechanics*. 2013. Vol. 46, iss. 15. P. 2651–2658. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2013.08.003>
 31. Zhao Y., Wang H., Chen W., Sun W., Yu X., Sun C., Hua G. Time-resolved simulation of blood flow through left anterior descending coronary artery: Effect of varying extent of stenosis on hemodynamics // *BMC Cardiovascular Disorders*. 2023. Vol. 23, iss. 1. Art. 156. <https://doi.org/10.1186/s12872-023-03190-2>
 32. Carvalho V., Rodrigues N., Ribeiro R., Costa P. F., Teixeira J. C. F., Lima R. A., Teixeira S. F. C. F. Hemodynamic study in 3D printed stenotic coronary artery models: Experimental validation and transient simulation // *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. 2021. Vol. 24, iss. 6. P. 623–636. <https://doi.org/10.1080/10255842.2020.1842377>
 33. Renner J., Broch O., Duetschke P., Scheewe J., Höcker J., Moseby M., Jung O., Bein B. Prediction of fluid responsiveness in infants and neonates undergoing congenital heart surgery // *British Journal of Anaesthesia*. 2012. Vol. 108, iss. 1. P. 108–115. <https://doi.org/10.1093/bja/aer371>
 34. Santoro G., Capozzi G., Caianiello G., Palladino M. T., Marrone C., Farina G., Russo M. G., Calabró R. Pulmonary artery growth after palliation of congenital heart disease with duct-dependent pulmonary circulation: Arterial duct stenting versus surgical shunt // *Journal of the American College of Cardiology*. 2009. Vol. 54, iss. 23. P. 2180–2186. <https://doi.org/10.1016/j.jacc.2009.07.043>
 35. Zahorec M., Hrubsova Z., Skrak P., Poruban R., Nosal M., Kovacikova L. A comparison of Blalock – Taussig shunts with and without closure of the ductus arteriosus in neonates with



- pulmonary atresia // *The Annals of Thoracic Surgery*. 2011. Vol. 92, iss. 2. P. 653–658. <https://doi.org/10.1016/j.athoracsur.2011.04.008>
36. Barnea O., Austin E. H., Richman B., Santamore W. P. Balancing the circulation: Theoretic optimization of pulmonary/systemic flow ratio in hypoplastic left heart syndrome // *Journal of the American College of Cardiology*. 1994. Vol. 24, iss. 5. P. 1376–1381. [https://doi.org/10.1016/0735-1097\(94\)90123-6](https://doi.org/10.1016/0735-1097(94)90123-6)
 37. Moghadam M. E., Migliavacca F., Vignon-Clementel I. E., Hsia T. Y., Marsden A. L. Optimization of shunt placement for the Norwood surgery using multi-domain modeling // *Journal of Biomechanical Engineering*. 2012. Vol. 134, iss. 5. Art. 051002. <https://doi.org/10.1115/1.4006814>
 38. Barnea O., Santamore W. P., Rossi A., Salloum E., Chien S., Austin E. H. Estimation of oxygen delivery in newborns with a univentricular circulation // *Circulation*. 1998. Vol. 98, iss. 14. P. 1407–1413. <https://doi.org/10.1161/01.CIR.98.14.1407>
 39. Esmaily-Moghadam M., Murtuza B., Hsia T. Y., Marsden A. Simulations reveal adverse hemodynamics in patients with multiple systemic to pulmonary shunts // *Journal of Biomechanical Engineering*. 2015. Vol. 137, iss. 3. Art. 031001. <https://doi.org/10.1115/1.4029429>
 40. Singh D., Sernich S., Siwik E., Ross-Ascuitto N. T., Celestin C., Ascuitto R. J. Catheter-directed thrombolysis for occluded central (ascending aorta-to-pulmonary artery) shunts: Importance of shear stress-induced, platelet-mediated thrombosis // *Journal of Structural Heart Disease*. 2016. Vol. 2, iss. 3. P. 67–78. <https://doi.org/10.12945/j.jshd.2016.002.15>
 41. Xu L., Chen X., Cui M., Ren C., Yu H., Gao W., Li D., Zhao W. The improvement of the shear stress and oscillatory shear index of coronary arteries during Enhanced External Counterpulsation in patients with coronary heart disease // *PLoS ONE*. 2020. Vol. 15, iss. 3. Art. e0230144. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0230144>
 42. Dai W. F., Wu P., Liu G. M. A two-phase flow approach for modeling blood stasis and estimating the thrombosis potential of a ventricular assist device // *International Journal of Artificial Organs*. 2021. Vol. 44, iss. 7. P. 471–480. <https://doi.org/10.1177/0391398820975405>
 43. Xiong J., Sun Q., Qian Y., Hu L., Tong Z., Liu J., Liu J. Effects of patent ductus arteriosus on the hemodynamics of modified Blalock – Taussig shunt based on patient-specific simulation // *Frontiers in Physiology*. 2021. Vol. 12. P. 1–10. <https://doi.org/10.3389/fphys.2021.707128>
 44. Caspi J., Pettitt T. W., Mulder T., Stopa A. Development of the pulmonary arteries after the Norwood procedure: Comparison between Blalock – Taussig shunt and right ventricular-pulmonary artery conduit // *Annals of Thoracic Surgery*. 2008. Vol. 86, iss. 4. P. 1299–1304. <https://doi.org/10.1016/j.athoracsur.2008.06.016>
 45. Brandt B., Camacho J. A., Mahoney L. T., Heintz S. E. Growth of the pulmonary arteries following Blalock – Taussig shunt // *Annals of Thoracic Surgery*. 1986. Vol. 42, iss. 6. P. S1–S4. [https://doi.org/10.1016/S0003-4975\(10\)64631-0](https://doi.org/10.1016/S0003-4975(10)64631-0)
 46. Odim J., Portzky M., Zurakowski D., Wernovsky G., Burke R. P., Mayer J. E., Castaneda A. R., Jonas R. A. Sternotomy approach for the modified Blalock – Taussig shunt // *Circulation*. 1995. Vol. 92, iss. 9. P. 256–261. <https://doi.org/10.1161/01.CIR.92.9.256>
 47. Kiran U., Aggarwal S., Choudhary A., Uma B., Kapoor P. M. The Blalock and Taussig shunt revisited // *Annals of Cardiac Anaesthesia*. 2017. Vol. 20, iss. 3. P. 323–330. https://doi.org/10.4103/aca.aca_80_17
 48. Xu P., Yuan H., Zhuang J., Zhang N., Jia Q., Dong Y., Jian Q., Huang M. The hemodynamics of patent ductus arteriosus in patients after central shunt operation // *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. 2021. Vol. 2021. Art. 6675613. <https://doi.org/10.1155/2021/6675613>

Поступила в редакцию / Received 10.12.2023

Принята к публикации / Accepted 10.01.2024

Опубликована / Published 31.05.2024

ИНФОРМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 275–286

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 275–286

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-275-286>

EDN: ODMKXD

Article

Implementation of the identification and recognition system cognitive behavior of the observed

O. M. Demidenko✉, N. A. Aksionova, A. V. Varuyeu

Francisk Skorina Gomel State University, 104 Sovetskaya St., Gomel 246028, Belarus

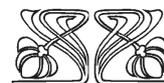
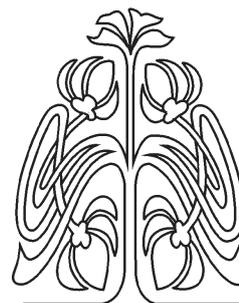
Oleg M. Demidenko, demidenko@gsu.by, <https://orcid.org/0000-0002-0601-0758>, AuthorID: 309622

Natalia A. Aksionova, nataliaksen@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-1558-3064>, AuthorID: 1173355

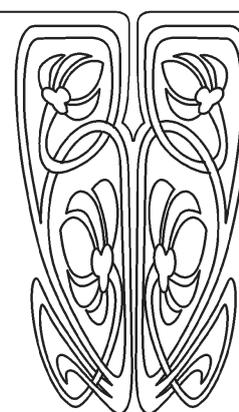
Andrei V. Varuyeu, varuyeu@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-0235-0875>, AuthorID: 973250

Abstract. This article describes and analyzes the development of a system for identifying and recognizing the cognitive behavior of students to determine interest in facial expressions. The purpose of the study is to find suitable technologies for the implementation of this system. The definition of emotions will allow organizing control over the quality of the educational process, conducting statistics on the cognitive behavior of students during classes, and showing the level of interest of students in the material presented. The identification system will automatically determine and register the time of arrival and departure of students in real time. Based on the joint application of the Viola – Jones method and the nearest neighbors method using histograms of centrally symmetric local binary images, a system for face recognition in a real-time video sequence has been developed. The structure of the project is described and the software is developed in the Python programming language using the Keras open-source library. The developed system consists of two subsystems: an identification system and a cognitive behavior recognition system. The scientific novelty lies in an integrated approach to the development and research of algorithms for real-time face recognition and identification for solving applied problems.

Keywords: face recognition, emotion detection, Viola – Jones method, computer vision, neural networks



Научный
отдел





For citation: Demidenko O. M., Aksionova N. A., Varuyeu A. V. Implementation of the identification and recognition system cognitive behavior of the observed. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 275–286. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-275-286>, EDN: ODMKXD

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 004.932

Реализация системы идентификации и распознавания когнитивного поведения наблюдаемого

О. М. Демиденко[✉], Н. А. Аксёнова, А. В. Воруев

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Беларусь, 246028, г. Гомель, ул. Советская, д. 104

Демиденко Олег Михайлович, доктор технических наук, проректор по научной работе, demidenko@gsu.by, <https://orcid.org/0000-0002-0601-0758>, AuthorID: 309622

Аксёнова Наталья Андреевна, старший преподаватель кафедры автоматизированных систем обработки информации, nataliaksen@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-1558-3064>, AuthorID: 1173355

Воруев Андрей Валерьевич, кандидат технических наук, заведующий кафедрой автоматизированных систем обработки информации, varuyeu@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-0235-0875>, AuthorID: 973250

Аннотация. В статье описывается и анализируется разработка системы идентификации и распознавания когнитивного поведения учащихся для определения заинтересованности по мимике лица. Цель исследования — найти подходящие технологии для реализации данной системы. Определение эмоций позволит организовать контроль за качеством учебного процесса, провести статистику когнитивного поведения студентов во время проведения занятий и показать уровень заинтересованности обучаемых в излагаемом материале. Система идентификации позволит автоматически определять и регистрировать время прихода и ухода студентов в режиме реального времени. На основе совместного применения метода Виолы – Джонса и метода ближайших соседей с использованием гистограмм центрально-симметричных локальных бинарных образов разработана система распознавания лиц в видеопоследовательности в реальном времени. Описана структура проекта и разработано программное обеспечение на языке программирования Python с использованием библиотеки с открытым исходным кодом Keras. Разработанная система состоит из двух подсистем: идентификации и распознавания когнитивного поведения. Научная новизна заключается в комплексном подходе к разработке и исследованию алгоритмов распознавания и идентификации лиц в режиме реального времени для решения прикладных задач.

Ключевые слова: распознавание лиц, определение эмоций, метод Виолы – Джонса, компьютерное зрение, нейронные сети

Для цитирования: Demidenko O. M., Aksionova N. A., Varuyeu A. V. Implementation of the identification and recognition system cognitive behavior of the observed [Демиденко О. М., Аксёнова Н. А., Воруев А. В. Реализация системы идентификации и распознавания когнитивного поведения наблюдаемого] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 275–286. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-275-286>, EDN: ODMKXD

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Introduction

Recognition is the identification of the transformation of input information, which is appropriately defined by some features of recognizable objects in the output information, representing the conclusion about which class the recognizable object is found [1].

Face recognition is a system designed to identify people in a static image or video. This technology has been around for decades. However, its use has become more visible in the last few years, as it is now used as part of innovative solutions, such as photo recognition of people and additional authentication on mobile devices.

By recognition, we will understand the identification of an image of an unknown person with one of the well-known persons. Thus, the concept of “recognition” can be defined as the assignment of the object under study (face image), given as a set of observations, to one of the mutually exclusive classes (persons), or the conclusion that this object does not belong to known classes. The task of face recognition is relevant both in the field of intelligent environments and in security systems [2].

Face recognition has a number of advantages over other methods of human identification:

- no special or expensive equipment is required;
- physical contact with devices is not needed: it is enough just to pass or linger in front of the camera for a short time.

The authors of the article developed two Python applications using the *TensorFlow*, *OpenCV*, *Numpy*, *TKinter*, *Keras*, *Matplotlib*, *PIL*, and *Threading* libraries. These applications process the video stream (or selected file) from the webcam in real time. The *Windows 10* operating system was used as a platform for work. *PyCharm* was used to work with the code.

The Viola – Jones method and convolutional neural network (CNN) are used for implementation. The Viola – Jones method is considered one of the best in terms of the ratio of its speed to the accuracy of the determination. Also, this method can successfully interact with other algorithms and can be adapted to specific needs and requirements. It works not only with static images but can also process data in real time.

In the process of work, the authors faced the problem of the lack of a training set for each defined emotion: anger, joy, neutrality, sadness, and surprise [3]. To solve this issue, lectures were recorded on the subject of “System analysis and operations research” for third-year students. A database of students with defined emotions was created for the subsequent training of the system being developed.

1. Project structure

The process of face recognition is usually called a set of different tasks that serve to identify a person by a digital image or video fragment. In general, this process looks like this: after the system has received an image from the camera, the face boundaries (detection stage) are determined using algorithms [2]. This is followed by the recognition stage, at which the face is transformed (its brightness changes, it is aligned, scaled, etc.) and brought to a certain specified form. After that, the features are calculated and directly compared with the standards embedded in the database. This final stage of comparison is called identification or verification, depending on the system.

The processing of video stream frames consists of two main stages. In the first stage, the detection of faces in the frame takes place, and in the second, the recognition of the detected faces itself [4].

When developing the identification subsystem, the Viola – Jones face detection method was used in this work, and the nearest neighbor method with the use of histograms of centrally symmetric local binary patterns was used for recognition.

As a result, the generalized algorithm for processing frames of the developed identification subsystem contains the following stages:

- 1) face detection;

- 2) processing of found faces using a Gauss filter;
 - 3) LBP transformation of the found faces with subsequent application of the mask of significant areas;
 - 4) calculation of histograms of found faces;
 - 5) Classification of persons by the nearest neighbor method by histograms [5].
- The general algorithm of the subsystem being developed is shown in Fig. 1.

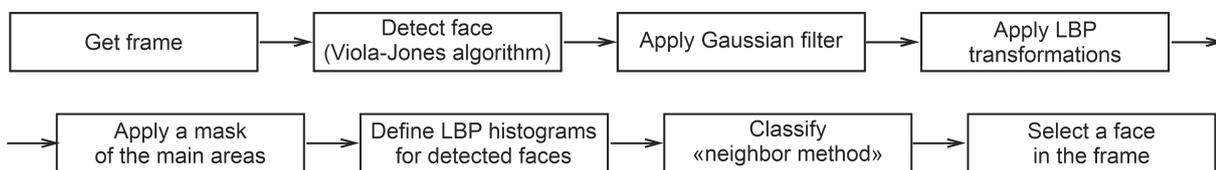


Fig. 1. Generalized algorithm for processing video stream frames

The Viola – Jones method is used to determine objects in real time. This algorithm was created to simplify the identification of faces in a photo or frame and is now widely used due to the processing speed because it allows you to recognize a face in a photo or frame in real time without using a large amount of computing power.

Convolutional neural network is used to determine emotions on a frame or photo because it has high accuracy, but it already requires large computing power, it is also processed longer.

The operation of a convolutional neural network can be interpreted as a transition from specific features of the image to more abstract, but numerous details, and then to more abstract, and even more numerous. Two main operations are defined in this neural network: the convolution operation and the subdiscretization operation.

The convolution operation is a passage of convolution kernels, or rather small matrices of weights of small size, through the layer, which eventually generates so-called prism maps. Each fragment from the feature map shows the presence of some feature that has been encoded into its convolution core.

The subsampling operation, also a subsampling operation, is used to reduce the dimension of the created feature maps. In this architecture, it is considered that the presence of a feature is more important than its location, so the maximum is usually selected from several neighboring neurons of the map. Due to this operation, the speed of the algorithm itself increases.

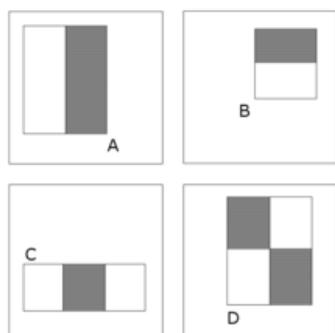


Fig. 2. Types of “features”

Viola – Jones algorithm was created in 2001 for real-time face recognition. It relies on the use of so-called “features”. The “features” used by the algorithm are based on the summation of pixels in rectangular areas (Fig. 2). The value of each “feature” is calculated as the difference between the sums from different parts of the “feature”. The use of these “features” is quite primitive, while they are sensitive to the vertical and horizontal features of the image and, as a result of all of the above, give a rather rough result.

Figure 3 shows a diagram of the use cases of the emotion recognition subsystem. This diagram shows a pattern of behavior and interaction between roles. The main block is the application itself. On the right is a user who has specific goals and behaviors regarding this application. The main role of the user is to launch the application and use the application. Launching the app involves checking for the presence of a camera. If there is a camera, then the application will work correctly. Otherwise, the application will not start. The application will also work correctly if the user’s face is in the field of view of the camera. Next, let’s take a closer look at the role of the developer.

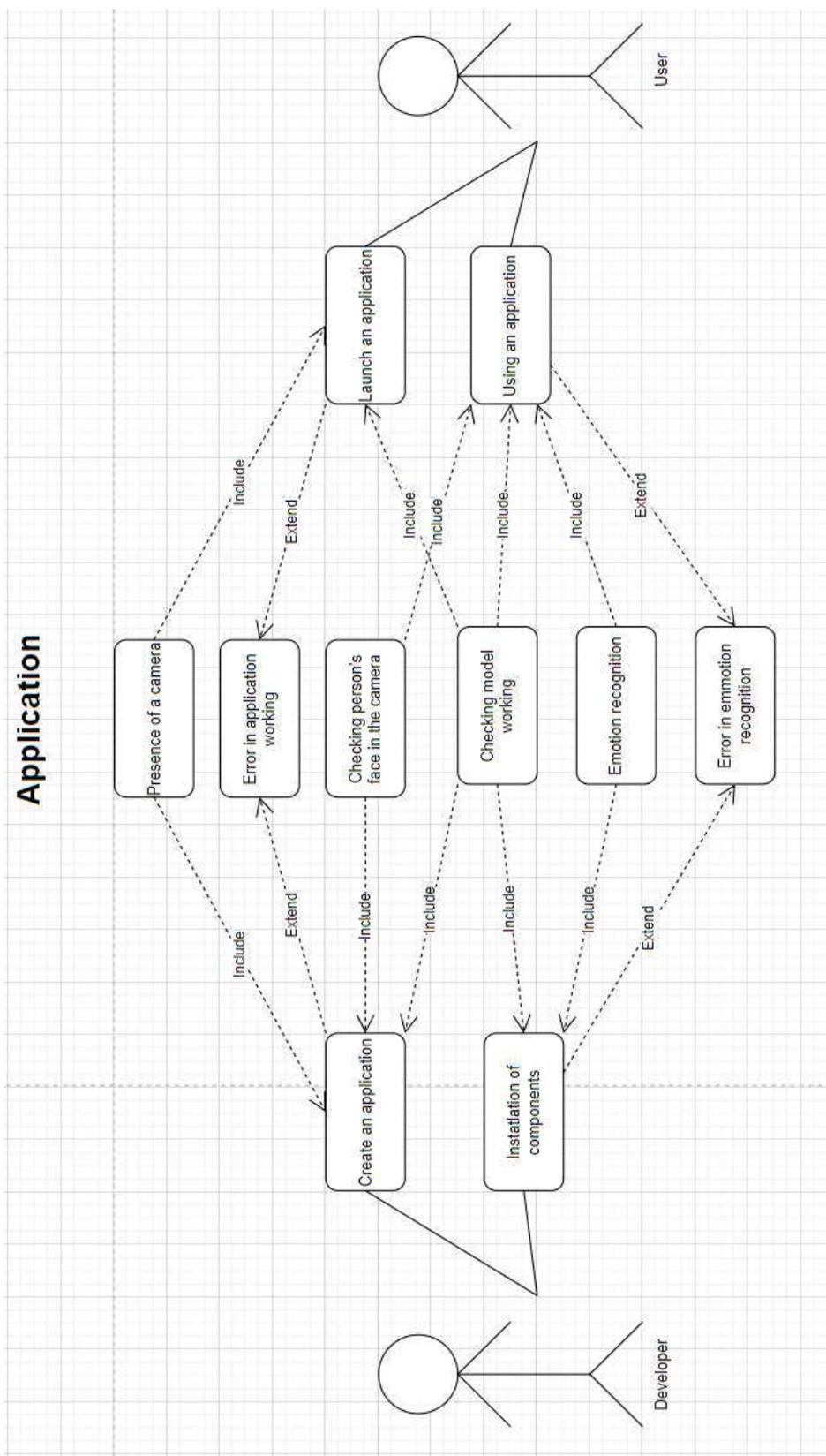


Fig. 3. A case diagram of the emotion recognition subsystem

The main task of the developer is to install all the necessary components and develop an application. The installation of components includes checking the operation of the model, if the model is installed and configured correctly and the necessary libraries are connected, then the application will recognize emotions without any problems. Otherwise, a recognition error will occur. Creating an app is an important process related to setting up a camera. Since all interaction with AR objects occurs through it, the camera must be connected and properly configured; otherwise, the application will not work and perform its original facial recognition function.

2. Creation of basic structures

Figure 4 shows the interaction of the components of the developed identification subsystem. When the application is launched, it is first loaded from *CascadeClassifier* files using *OpenCV* and a ready-made model by the *Keras* module, which is imported from the *TensorFlow* library. The *OpenCV* searches for the webcam and starts recording, and also creates an application window. After that, for every iteration of the inner loop, the frame is processed using *CascadeClassifier*, and a face search is performed. After that, a frame showing the face is applied to the image. Then, through the *NumPy* library, the image is converted into a binary array, which is already fed to the finished model, and the result is output as text, as well as the processed image itself on the screen.

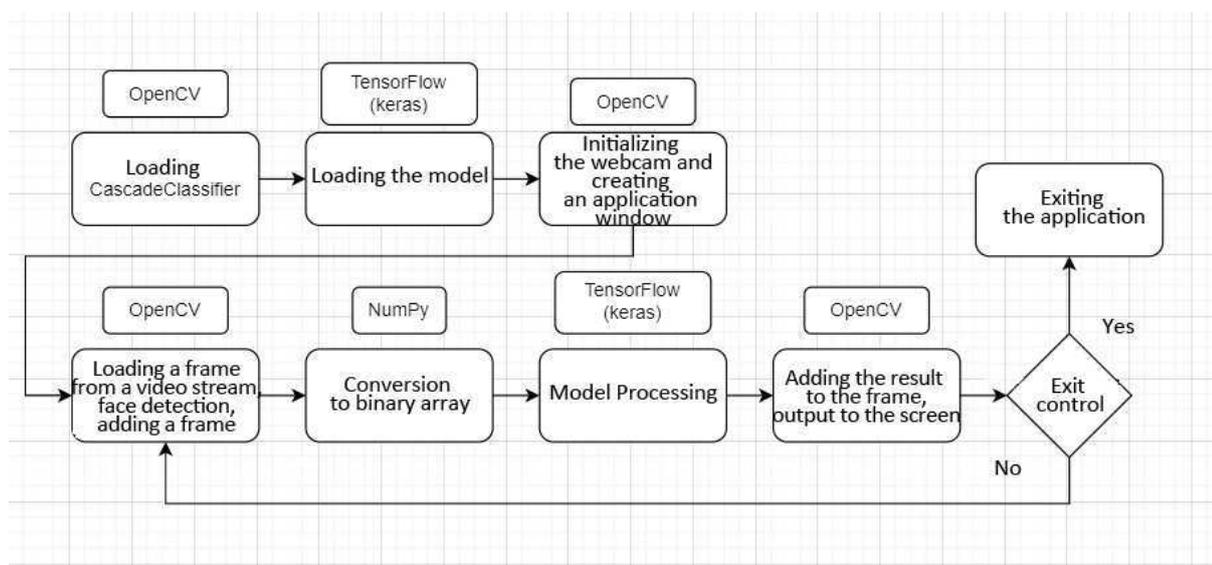


Fig. 4. Interactions of components of the identification subsystem

Figure 5 shows a diagram of the work of the emotion recognition subsystem presented. When calling the *update* method, first the active frame is taken through the *get_frame* method, then the Viola – Jones method determines the boundaries of the face on it, and the frame is transformed for processing and processed by a convolutional neural network. To pass this stage, libraries such as *cv2*, *karas*, *numpy*, and *tensorflow* are used. Next, there is a check for the presence of a frame and for the presence of a *tkinter* window, in the absence of the program, the program is closed, otherwise, the frames and instance variables are updated, *tkinter* widgets are updated, *matplotlib* graphs are saved and the results of the work are saved to a file using the *threading* library. A separate stream is created, to which the method for saving data to a file and its arguments are passed. At the very end, the *update* method is called with a delay.

When creating an instance of the *VideoCapture* class, a connection to the video stream is made via *cv2*. Also, when calling the *get_frame* method, the active frame is updated using *cv2*.

The project consists of two classes: the main *App* class and the auxiliary *VideoCapture* class. The *App* class is the main one; it initializes the GUI, widgets, main components and methods.

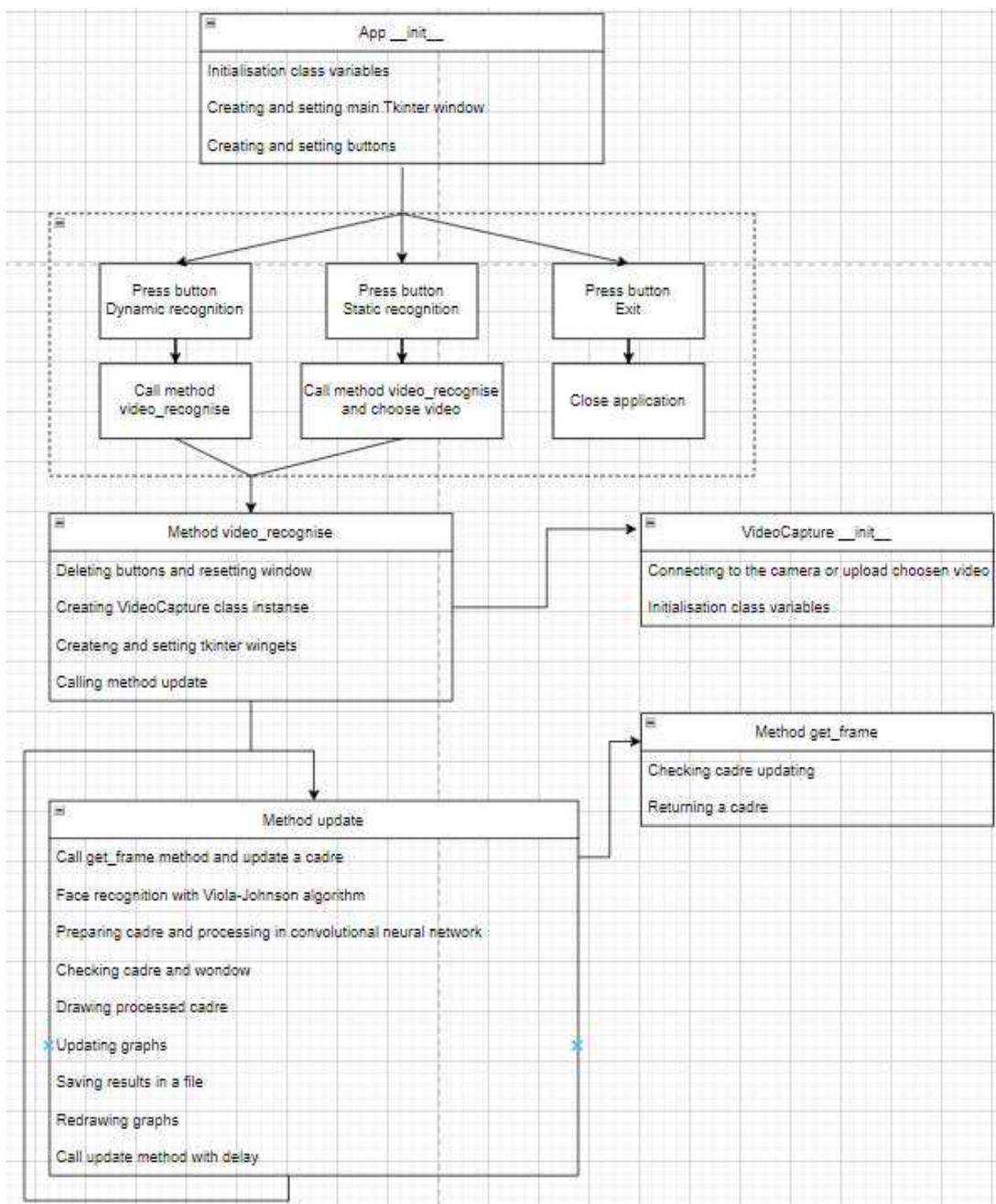


Fig. 5. Application at work

First, let's create and describe all class variables:

- the *class_labels* variable contains a tuple of all emotions that are defined in the program;
- the variable *preds* is a list that contains the values of the emotions in the active frame and is updated as the program runs, the value of this variable is used to plot the active frame (picture 36);
- the *count* variable contains the number of frames that will be displayed on the emotion graph for count frames (Fig. 6);

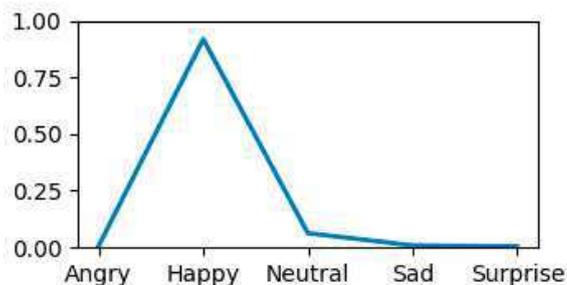


Fig. 6. Active cadre diagram

- the file variable *file* contains the path and name of the file in which the result of the program is saved;

- the *lines* variable is a list that contains data for count frames about each emotion, used to plot emotions for count frames (Fig. 7);

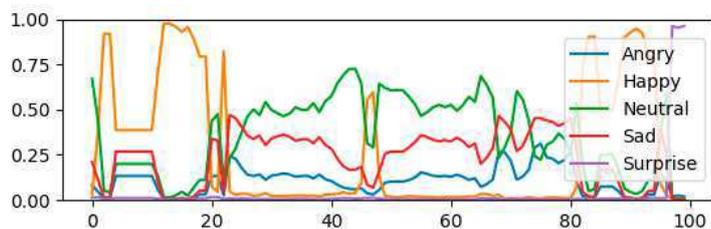


Fig. 7. Diagram for “count” cadres (color online)

- the *face_classifier* variable contains a model for determining faces on a frame using the Viola–Jones method;

- the *classifier* variable contains a ready-made convolutional neural network model for determining emotions.

Also in this class, we will create the necessary methods. The `__init__` constructor is used to initialize the main variables of the class instance, as well as to create a selection menu with three buttons: “*Dynamic recognition*”, “*Static recognition*”, and “*Exit*”.

When `__init__` calling, you must pass the following parameters:

- the “window” parameter is a *Tk* class from the *Tkinter* library that creates the main working window;

- the *window_name* parameter is a string variable to create a name in the window’s title bar;

- the “*window_logo_path*” parameter is a string variable that specifies the path to the logo in the program header;

- the *fps* parameter is a limiting parameter that indicates the desired number of frames per second, but due to the possible limitation of the device’s power, it only allows to reduce the load;

- the *video_source* parameter is a parameter with a default value that determines the program’s operation mode. If it is equal to zero, then the definition is based on the video stream from the webcam, and, if not, then get the path and load the video.

Next, the method creates and configures the window, its size, title, protocol, background, and logo. This is followed by the creation of three buttons and their configuration:

- the “*Exit*” button closes an application after pressing;

- the “*Dynanic recognition*” button calls *video_recognise* method in web camera mode after pressing;

- the “*Static recognition*” button calls *video_recognise* method in static video mode after pressing, the user should choose a video for recognizing emotions in the video;

The *video_recognise* method is used to initialize the main graphic widgets, as well as to call the update method. The input is one parameter *video_source*, in which the mode of the program is transmitted. Next, the buttons that were created in the constructor are deleted and the main window is reconfigured. After that, an instance of the *VideoCapture* class is created and the main widgets are created (Fig. 8).

3. Approbation of the system

To implement the project, the *Python* programming language and its libraries were used: *NumPy*, *TensorFlow*, and *OpenCV*. When you run the script, the interface is called, which displays the image from the webcam. When determining the face, an encircling square with an inscription identifying the person’s identity is displayed.

To test the identification subsystem, the trainees were entered into the “*KnownFaces*” database, as shown in Fig. 9.

The program successfully saves the results of the work in separate files for each run. Automatic search, use, and operation of the webcam are carried out (Fig. 10).

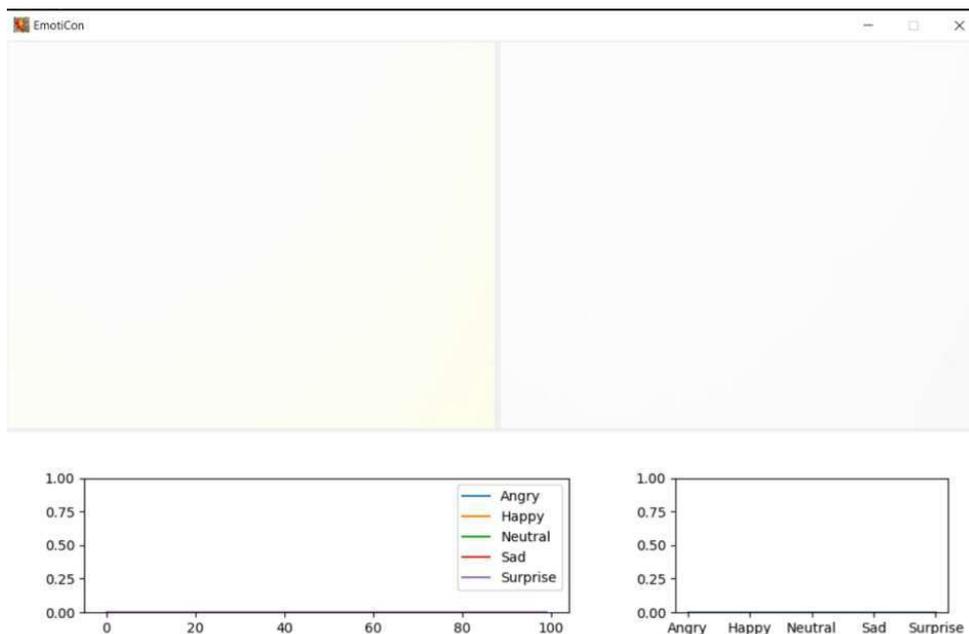


Fig. 8. Main widgets and frames

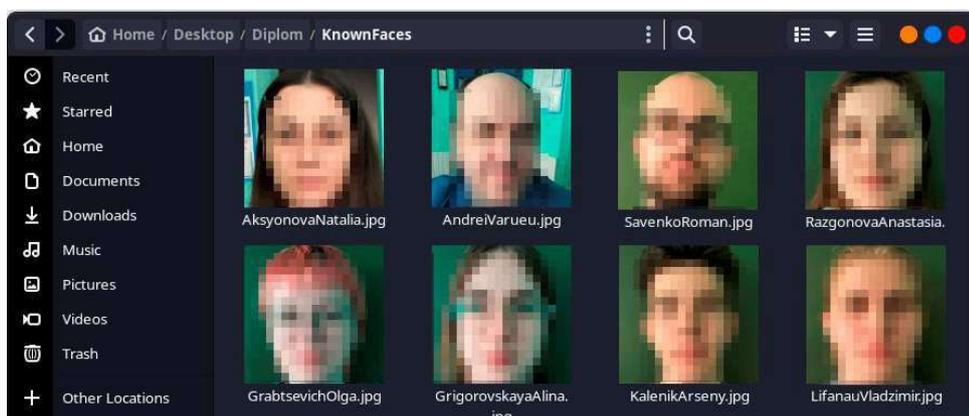


Fig. 9. Adding images to the database



Fig. 10. Testing of the identification subsystem

Testing of the accuracy of the model of the subsystem of recognition of the cognitive behavior of the observed was carried out to determine each emotion. In this test, the ability of the model after training to determine the emotions embedded in the algorithm in different light conditions and from different angles of the face location is tested (Fig. 11–15).

As a result of the conducted testing, it was determined that the emotions “Neutrality”, “Joy”, “Sad” and “Surprise” are determined by the system virtually unmistakably. However, there are difficulties with defining the emotion “Anger”. This problem is a consequence of the lack of training of the neural network for this emotion and requires further development.

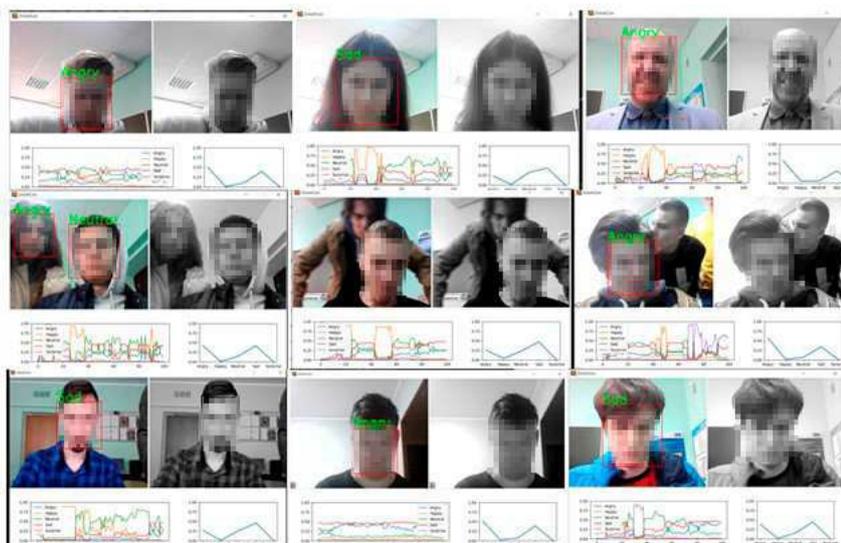


Fig. 11. Testing the emotion "Angry"



Fig. 12. Testing the emotion "Happy"



Fig. 13. Testing the emotion "Neutral"



Fig. 14. Testing the emotion “Sad”

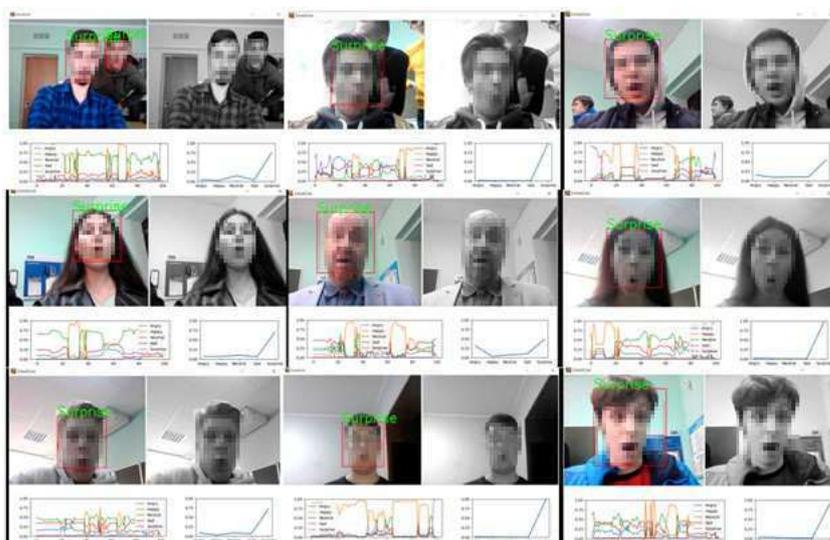


Fig. 15. Testing the emotion “Surprise”

For the subsequent approbation of the system, the authors identified the following main testing criteria:

- the accuracy of the model in identifying the observed;
- model accuracy at different distances from the camera;
- model accuracy in different lighting conditions;
- the accuracy of the model at different positions and turns of the head;
- the accuracy of the model in determining a certain emotion;
- the accuracy of the model in determining emotions for several people in the frame;
- the accuracy of the model in determining emotions in both sexes.

Conclusions

As a result of the conducted research, suitable technologies have been developed and created for the implementation of an emotion identification and recognition system. The conducted testing showed 82% accuracy in the identification of the observed. The accuracy of recognition of the five emotions obtained in this work is 65.56%. The results obtained show that the identification



subsystem can be used to automate the registration of student attendance and register the time of arrival and departure automatically. The subsystem for determining the cognitive behavior of the observed requires further refinement.

References

1. Demidenko O. M., Aksionova N. A. Development of a machine vision system for image recognition of design estimates. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2022, vol. 25, iss. 2, pp. 159–167. <https://doi.org/10.33581/1561-4085-2022-25-2-159-167>
2. Badrinarayanan V., Kendall A., Cipolla R. SegNet: A Deep Convolutional Encoder-Decoder Architecture for Image Segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2017, vol. 39, iss. 12, pp. 2481–2495. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2016.2644615>
3. Viola P., Jones M. Rapid object detection using a boosted cascade of simple features. *Proceedings of the 2001 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2001, vol. 1, pp. 511–518. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2001.990517>
4. Shapiro L., Stockman G. *Computer Vision*. London, Pearson, 2006. 752 p.
5. Aksionova N. A., Demidenko O. M., Voruev A. V. Implementation of a system for determining students' emotions by their facial expressions. *Proceedings of Francisk Skorina Gomel State University. Natural Sciences*, 2022, iss. 3 (132), pp. 82–87 (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 15.12.2022

Принята к публикации / Accepted 19.02.2023

Опубликована / Published 31.05.2024



Article

Queueing network model of a call center with customer retrials and impatient customers

T. V. Rusilko[✉], A. V. Pankov

Yanka Kupala State University of Grodno, 22 Ozheshko St., Grodno 230023, Belarus

Tatiana V. Rusilko, tatiana.rusilko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-4880-0619>, AuthorID: 1073719

Andrey V. Pankov, a.pankov@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0009-5708-4480>, AuthorID: 1045760

Abstract. The subject of mathematical study and modelling in this paper is an inbound call center that receives calls initiated by customers. A closed exponential queueing network with customer retrials and impatient customers is used as a stochastic model of call processing. A brief review of published results on the application of queueing models in the mathematical modeling of customer service processes in call centers is discussed. The network model is described. The possible customer states, customer routing, parameters, and customer service features are given. The allocation of customers by network nodes at a fixed time fully describes the situation in the call center at that time. The state of the network model under study is represented by a continuous-time Markov chain on finite state space. The model is studied in the asymptotic case under the critical assumption of a large number of customers in the queueing network. The mathematical approach used makes it possible to use the passage to the limit from a Markov chain to a continuous-state Markov process. It is proved that the probability density function of the model state process satisfies the Fokker – Planck – Kolmogorov equation. Using the drift coefficients of the Fokker – Planck – Kolmogorov equation, a system of ordinary differential equations for calculating the expected number of customers in each network node over time can be written. The solution of this system allows for predicting the dynamics of the expected number of customers at the model nodes and regulating the parameters of the call center operation. The asymptotic technique used is applicable both in transient and steady states. The areas of implementation of research results are the design of call centers and the analysis of their workload.

Keywords: queueing network, call center, mathematical modeling, asymptotic analysis, impatient customer, retrial customer

Acknowledgements: This work was supported by the state program of scientific research of the Republic of Belarus “Convergence-2025”.

For citation: Rusilko T. V., Pankov A. V. Queueing network model of a call center with customer retrials and impatient customers. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 287–297. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-287-297>, EDN: KOUTKP

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 519.872.5

Сеть массового обслуживания с повторными вызовами и нетерпеливыми клиентами как модель колл-центра

Т. В. Русилко[✉], А. В. Паньков

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Беларусь, 230023, г. Гродно, ул. Ожешко, д. 22

Русилко Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики, tatiana.rusilko@gmail.com, <https://orcid.org/000-0002-4880-0619>, AuthorID: 1073719



Паньков Андрей Витальевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики, a.pankov@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0009-5708-4480>, AuthorID: 1045760

Аннотация. Предметом математического исследования и моделирования в данной работе является колл-центр, который принимает входящие звонки, инициированные клиентами. В качестве стохастической модели процесса обслуживания звонков предлагается использовать замкнутую экспоненциальную сеть массового обслуживания с повторными вызовами и нетерпеливыми заявками. Приведен краткий обзор опубликованных работ по применению моделей массового обслуживания при математическом моделировании процессов обслуживания клиентов в колл-центрах. Описана сетевая модель, указаны возможные состояния, маршрутизация, параметры и особенности обслуживания заявок. Состояние модели полностью характеризуется распределением заявок по возможным системам массового обслуживания в заданный момент времени. Вектор, определяющий состояние сетевой модели, представляет собой цепь Маркова с непрерывным временем и конечным числом состояний. Модель исследуется в асимптотическом случае — при критическом предположении большого числа заявок в сети массового обслуживания. Используемый математический подход позволяет осуществить предельный переход от цепи Маркова к непрерывному марковскому процессу. Доказано, что плотность распределения вероятностей процесса состояния модели удовлетворяет уравнению Фоккера – Планка – Колмогорова. Используя коэффициенты сноса уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова, можно записать систему обыкновенных дифференциальных уравнений для расчета среднего числа заявок в каждом из узлов сетевой модели с течением времени. Решение этой системы позволяет прогнозировать динамику ожидаемого количества клиентов в узлах сети и регулировать параметры работы колл-центра. Преимуществом выбранного метода исследования является возможность расчета средних характеристик модели колл-центра как в переходном, так и в стационарном режиме. Результаты исследования могут быть использованы при проектировании колл-центров и анализе их загруженности.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, колл-центр, математическое моделирование, асимптотический анализ, нетерпеливая заявка, повторный вызов

Благодарности: Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция-2025».

Для цитирования: *Rusilko T. V., Pankov A. V. Queueing network model of a call center with customer retrials and impatient customers [Русилко Т. В., Паньков А. В. Сеть массового обслуживания с повторными вызовами и нетерпеливыми клиентами как модель колл-центра] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 287–297. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-287-297>, EDN: KOUTKP*

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

A call center is a centralized customer service department for many businesses that deals with incoming and outgoing phone calls via voice communication channels. It is referred to as a “call center” because traditionally, customer service is based on phone support as the main method of contact between customers and companies. The calls are handled by a team of advisors, otherwise known as agents. The article [1] focuses on reviewing the state of call centers research.

Telephone customer service organizations should track key performance indicators to measure the efficiency of call centers and agents. In particular, they strive to improve call handling time, call waiting time, and placing calls by agents. The quality and operational efficiency of these telephone services must be exceptional in order to meet the needs of the customers [2,3]. Agents of a large best practice call center have to cater to thousands of phone calls per hour. The waiting time for delayed calls must not exceed a few seconds. To achieve high levels of service quality and efficiency, it is necessary to accurately describe the reality of call center operation, and to mathematically model this reality.

Mathematical models of call centers are of great value, but at the same time, each of them is somewhat limited in its ability to characterize system performance. Traditionally, queueing



theory can be used to analyze call centers' efficiency and optimize their structure. Indeed, there is a natural fit between standard queueing models and telephone systems [4]. Queueing systems, particularly, Markovian ones, are widely used for call centers' modelling, analyzing their performance, planning, and managing [5–8]. Queueing systems with impatient customers [5, 8], retrial queueing systems [6, 7, 9], and many others have emerged from the need to mathematically model the behavior of telephone service customers, to find the optimal staffing for call centers in order to guarantee maximum profitability and a desired grade-of-service, measured in terms of acceptable waiting and blocking. A tandem queue is suitable for modeling call centers with interactive voice response machines [10]. Queues with general service are widely used to model call centers, e.g., a two-phase hyperexponential approximation can be applied for service time distribution [11]. In the article [12] a multi-server queueing system with a generalized phase-type service time distribution is used as a model of a call center with a call-back option.

The subject of mathematical study and modelling in this paper is an inbound call center that receives calls initiated by customers looking for information support, technical support, billing questions, reservation support, order-taking functions, and other customer service issues. First, an arriving call is routed towards the automatic call distribution switch, whose function is to distribute the inbound calls among the agents according to the customer's need. When the topic of the client's request goes beyond the scope of the current agent's specialization, the client is redirected to specialists who are competent in resolving the issue. Thus, calls are routed according to their specificity between agents of various specializations. Therefore, the organizational structure of a call center can be graphically represented by a network diagram showing the call routing between call center agents on different service issues according to their specifics.

Queueing networks are effective mathematical models for studying discrete probabilistic systems with a network-like structure. A queueing network is a collection of interdependent queuing nodes that provides processing and transfer of jobs or customers. Everyone knows that a telephone customer who receives a busy signal repeats the call until the required connection is made. As a result, the flow of calls circulating in a call center consists of two parts: the flow of primary calls and the flow of repeated calls. It is natural to take into account a flow of impatient customers who find that the residual waiting time is too long and leave the queue forever. These considerations emphasize the need to use the network of retrial queues with impatient customers as a proper modelling of customer behavior in a call center. So, the purpose of this paper is call center mathematical modeling and analysis of call processing efficiency using a closed exponential queueing network with retrial and impatient customers. An asymptotic analysis of the model is performed, which implies an approximation method of queueing network study under the critical assumption of a large but limited number of customers [13–15].

1. Model description

The focus of this paper is the queueing network model of a large call center. We set K as the total number of customers. The closed network consists of $n + 1$ exponential m_i -linear queueing nodes (systems) S_i , $i = \overline{1, n+1}$, and K -linear hypothetical node S_0 , which plays the role of a dependent source of arriving customers or an external environment. It should be noted that, unlike the others, the node S_{n+1} is the retrial queueing system without a waiting buffer. The node S_{n+1} has the orbit O_{n+2} which plays the role of a virtual waiting room for K customers. Each customer can be in one of the following nodes (states) at any given point in time:

- S_0 — no need to turn to the call center;
- S_{n+1} — a customer call is serviced by one of the m_{n+1} lines of the automatic call distribution switch;
- O_{n+2} — a customer call is waiting in the orbit;
- S_i — a customer call is handled by one of the m_i agents supporting the i th type service issue or is queued in the unlimited waiting buffer, $i = \overline{1, n}$.

The customer transition from the node S_0 to the node S_{n+1} with probability $p_{0(n+1)} = 1$ corresponds to a customer call to the call center. We assume that the arrival of customers from S_0 to S_{n+1} forms the Poisson process of rate $\lambda(t)k_0(t)$, the rate parameter is proportional to the number of customers in the source $k_0(t)$. Inbound call flow is non-stationary.

From the node S_{n+1} , the call is routed to the node S_i with probability $p_{(n+1)i}$, $i = \overline{1, n}$, or with probability $p_{(n+1)0}$ to the external environment S_0 in case of an erroneous customer request. After the end of call service in the node S_i , $i = \overline{1, n}$, the customer is transferred to S_0 with probability p_{i0} , in case his request is completely fulfilled or redirected to specialists on another service issue to the node S_j , $j = \overline{1, n}$, with probability p_{ij} , $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$. Customers are served according to the FIFO rule. The service facility of the node S_i consists of m_i identical servers and service times are exponentially distributed with rate parameter μ_i , i.e., μ_i^{-1} is the mean service time, $i = \overline{1, n+1}$.

Taking into account the peculiarities of telephone services, it is assumed that the customer waiting time in the queue of the node S_i is limited by an exponential random variable τ_i with an expected value of η_i^{-1} , $i = \overline{1, n}$. At the same time, customers who leave the queue are called impatient. If during time τ_i the call is not answered, then it is lost and transferred to the external environment S_0 with a probability $q_{i0} = 1$, $i = \overline{1, n}$.

It is worth noting some important features of the automatic call distribution switch which is modeled by the retrial queueing node S_{n+1} . If an incoming customer call finds some of m_{n+1} servers free, he instantly occupies one of them and leaves the node after service. On the other hand, any request that finds all servers busy upon arrival is required to leave the service area but it is not lost, it is transferred to the orbit O_{n+2} . The customer in the orbit repeats his call and retries reaching the free server again after an exponentially distributed time τ_{n+2}^r with parameter γ . Thus, we are assuming that the repeated attempts follow the classical retrial policy, where the repetition times of each customer are assumed to be independent and exponentially distributed with the rate parameter γ . In addition, we suppose that the customer's time in the orbit is limited by an exponential random variable τ_{n+2}^o with an expected value of η_{n+2}^{-1} . After this time τ_{n+2}^o , the customer leaves the orbit and is transferred to the external environment S_0 with probability $q_{(n+2)0} = 1$. We also assume that inter-arrival periods, service times, waiting times, and retrial times are mutually independent.

Probabilities p_{ij} are elements of a transition matrix $P = (p_{ij})_{(n+2) \times (n+2)}$ for serviced customers, $i, j = \overline{0, n+1}$. Non-zero elements of the matrix P are $p_{0(n+1)} = 1$ and p_{ij} , $i \neq j$, $i = \overline{1, n+1}$, $j = \overline{0, n}$. The matrix P is a stochastic matrix, so $\sum_{j=0}^{n+1} p_{ij} = 1$. Probabilities q_{ij} are elements of a transition matrix $Q = (q_{ij})_{(n+2) \times (n+2)}$ for impatient customers $i, j = \overline{0, n+1}$. Non-zero elements of the matrix Q are $q_{i0} = 1$, $i = \overline{1, n}$. Retrial customers are circulating between the system S_{n+1} and the orbit O_{n+2} . Impatient retrial customers transfer from O_{n+2} to S_0 . We have to keep in mind the non-zero elements of transition matrices. The routing of serviced customers (solid line), impatient customers (dashed line), and retrial customers (long dash) is shown in Fig. 1.

The allocation of customers by possible states at time t fully describes the situation in the call center at that time. Accordingly, the allocation of customers by queueing nodes completely determines the state of the queueing network. Taking into account the above-described, the state of the network model under study at time t is represented by a continuous-time Markov chain on finite state space:

$$k(t) = (k_1(t), k_2(t), \dots, k_{n+1}(t), k_{n+2}(t)),$$

where $k_i(t)$ is the number of customers in the node S_i , $i = \overline{1, n+1}$, $k_{n+2}(t)$ is the number of customers in the orbit, at time t , $t \in [0, +\infty)$. Obviously, the number of customers in the external environment S_0 is $k_0(t) = K - \sum_{i=1}^{n+2} k_i(t)$.

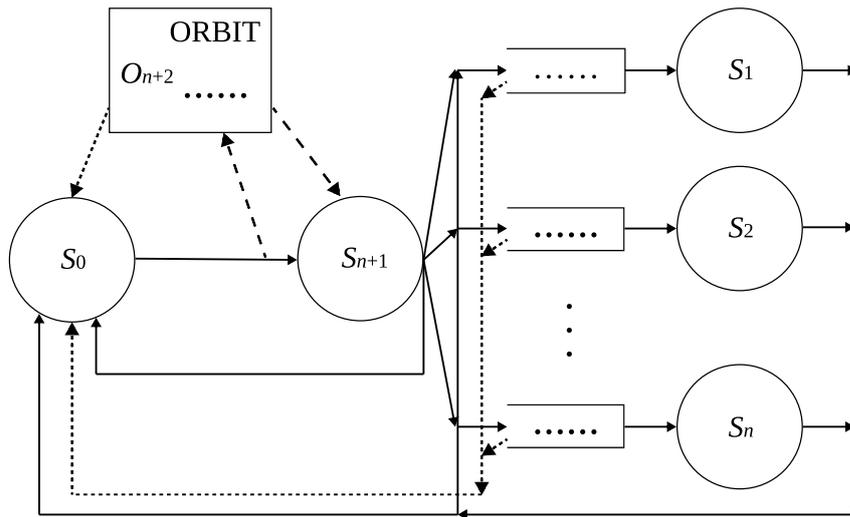


Fig. 1. The state-transition diagram

2. Asymptotic analysis of the network model

Asymptotic analysis implies an approximate method for studying a queueing network under the assumption of a large number of customers \$K\$ and is based on the theory of diffusion approximation of Markov processes [16]. In this paper, the passage to the limit from a Markov chain \$k(t)\$ to a continuous-state Markov process \$\xi(t)\$ is considered. Unlike discontinuous processes, continuous processes in any small-time interval \$\Delta t \to 0\$ have some small change in the state \$\Delta x \to 0\$.

Theorem 1. *In the asymptotic case of a large number of customers \$K\$ the probability density function \$p(x, t)\$ of the random process*

$$\xi(t) = \frac{k(t)}{K} = \left(\frac{k_1(t)}{K}, \frac{k_2(t)}{K}, \dots, \frac{k_{n+1}(t)}{K}, \frac{k_{n+2}(t)}{K} \right)$$

provided that it is differentiable with respect to \$t\$ and twice continuously differentiable with respect to \$x_i, i = \overline{1, n+2}\$, satisfies up to \$O(\varepsilon^2)\$, where \$\varepsilon = \frac{1}{K}\$, the multidimensional Fokker – Planck – Kolmogorov equation

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^{n+2} \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i(x, t)p(x, t)) + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j=1}^{n+2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (B_{ij}(x, t)p(x, t)), \quad (1)$$

with drifts

$$A_i(x, t) = \sum_{j=1}^{n+2} \mu_j (p_{ji} - \delta_{ji}) \min(l_j, x_j) - \eta_i (x_i - l_i) \theta(x_i - l_i), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$A_{n+1}(x, t) = -\mu_{n+1} \min(l_{n+1}, x_{n+1}) + \lambda(t) \left(1 - \sum_{i=1}^{n+2} x_i \right) \theta(l_{n+1} - x_{n+1}) + \gamma x_{n+2} \theta(l_{n+1} - x_{n+1}), \quad (3)$$

$$A_{n+2}(x, t) = \lambda(t) \left(1 - \sum_{i=1}^{n+2} x_i \right) (1 - \theta(l_{n+1} - x_{n+1})) - \gamma x_{n+2} \theta(l_{n+1} - x_{n+1}) - \eta_{n+2} x_{n+2}, \quad (4)$$

δ_{ij} is the Kronecker delta, \$l_i = \frac{m_i}{K}, i, j = \overline{1, n+2}, \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}\$ is the Heaviside function.



Diffusion coefficients $B_{ij}(x, t)$ are not given in this paper because of their cumbersome nature and also because they are not used for further calculations.

Proof. Let a vector $k = (k_1, k_2, \dots, k_{n+1}, k_{n+2})$ be formed by components $k_i(t) = k_i$, $i = \overline{1, n+2}$, at some time point t . In this case, we will say that the queueing network under study is in the state (k, t) . Let $P(k, t)$ denote the probability that the network is in the state (k, t) . Denote I_i as a $(n+2)$ -vector with zero components excluding i -th, which equals to 1. Consider all possible state changes of the Markov process $k(t)$ in the short time Δt :

- from the state $(k - I_{n+1}, t)$ the process transfers to $(k, \Delta t + t)$ with probability

$$\lambda(t) \left(K - \sum_{i=1}^{n+2} k_i + 1 \right) \theta(m_{n+1} - k_{n+1} + 1) \Delta t + o(\Delta t),$$

that corresponds to the customer call arrival from the node S_0 to the node S_{n+1} when there are free lines of the automatic call distribution switch;

- from the state $(k - I_{n+2}, t)$ the process transfers to $(k, \Delta t + t)$ with probability

$$\lambda(t) \left(K - \sum_{i=1}^{n+2} k_i + 1 \right) (1 - \theta(m_{n+1} - k_{n+1})) \Delta t + o(\Delta t),$$

that corresponds to the customer transition to the orbit due to the fact that all lines of the automatic switch are busy;

- from the state $(k + I_{n+2} - I_{n+1}, t)$ the process transfers to $(k, \Delta t + t)$ with probability

$$\gamma(k_{n+2} + 1) \theta(m_{n+1} - k_{n+1} + 1) \Delta t + o(\Delta t),$$

that is, the arrival of a retrial call from the orbit to a free line of the automatic switch;

- from the state $(k + I_{n+2}, t)$ the process transfers to $(k, \Delta t + t)$ with probability

$$\eta_{n+2}(k_{n+2} + 1) \Delta t + o(\Delta t),$$

in case the time spent by an impatient customer in the orbit while trying to reach a free server of the automatic switch has expired;

- from the state $(k + I_i, t)$ to the state $(k, \Delta t + t)$ with probability

$$(\mu_i p_{i0} \min(m_i, k_i + 1) + \eta_i q_{i0} (k_i + 1 - m_i) \theta(k_i + 1 - m_i)) \Delta t + o(\Delta t),$$

that is, the customer departure from the node S_i to the node S_0 , when his request is fully satisfied, $i = \overline{1, n+1}$, or the transition of an impatient customer from S_i to S_0 , $i = \overline{1, n}$;

- from the state $(k + I_i - I_j, t)$ the process transfers to $(k, \Delta t + t)$ with probability

$$\mu_i p_{ij} \min(m_i, k_i + 1) \Delta t + o(\Delta t),$$

that corresponds to the transition of the serviced customer from the node S_i to the node S_j , $i = \overline{1, n+1}$, $j = \overline{1, n}$;

- from the state (k, t) to $(k, \Delta t + t)$ with probability

$$1 - \left(\lambda(t) \left(K - \sum_{i=1}^{n+2} k_i \right) \theta(m_{n+1} - k_{n+1}) + \lambda(t) \left(K - \sum_{i=1}^{n+2} k_i \right) (1 - \theta(m_{n+1} - k_{n+1})) + \gamma k_{n+2} \theta(m_{n+1} - k_{n+1}) + \eta_{n+2} k_{n+2} + \sum_{i=1}^{n+1} (\mu_i p_{i0} \min(m_i, k_i) + \eta_i q_{i0} (k_i - m_i) \theta(k_i - m_i)) + \sum_{i,j=1}^{n+1} \mu_i p_{ij} \min(m_i, k_i) \right) \Delta t + o(\Delta t),$$

if the model state does not change;

- from other model states transfer to $(k, t + \Delta t)$ is possible with probability $o(t)$.



Taking into account state changes listed above and using the law of total probability, the following set of equations is valid for the probability $P(k, t) = P(k(t) = k)$:

$$\begin{aligned}
 P(k, t + \Delta t) = & \lambda(t) \left(K - \sum_{i=1}^{n+2} k_i + 1 \right) \theta(m_{n+1} - k_{n+1} + 1) P(k - I_{n+1}, t) \Delta t + \\
 & + \lambda(t) \left(K - \sum_{i=1}^{n+2} k_i + 1 \right) (1 - \theta(m_{n+1} - k_{n+1})) P(k - I_{n+2}, t) \Delta t + \\
 & + \gamma(k_{n+2} + 1) \theta(m_{n+1} - k_{n+1} + 1) P(k + I_{n+2} - I_{n+1}, t) \Delta t + \\
 & + \eta_{n+2}(k_{n+2} + 1) P(k + I_{n+2}, t) \Delta t + \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i p_{i0} \min(m_i, k_i + 1) P(k + I_i, t) \Delta t + \\
 & + \sum_{i=1}^{n+1} \eta_i q_{i0} (k_i + 1 - m_i) \theta(k_i + 1 - m_i) P(k + I_i, t) \Delta t + \\
 & + \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \mu_i p_{ij} \min(m_i, k_i + 1) P(k + I_i - I_j, t) \Delta t + \\
 & + \left[1 - \left(\lambda(t) \left(K - \sum_{i=1}^{n+2} k_i \right) \theta(m_{n+1} - k_{n+1}) + \right. \right. \\
 & + \lambda(t) \left(K - \sum_{i=1}^{n+2} k_i \right) (1 - \theta(m_{n+1} - k_{n+1})) + \gamma k_{n+2} \theta(m_{n+1} - k_{n+1}) + \\
 & + \eta_{n+2} k_{n+2} + \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i p_{i0} \min(m_i, k_i) + \sum_{i=1}^{n+1} \eta_i q_{i0} (k_i - m_i) \theta(k_i - m_i) + \\
 & \left. \left. + \sum_{i,j=1}^{n+1} \mu_i p_{ij} \min(m_i, k_i) \right) \Delta t \right] P(k, t) + o(\Delta t).
 \end{aligned}$$

Let us denote the following differences:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{0(n+1)} P(k, t) &= P(k - I_{n+1}, t) - P(k, t), \quad \Delta_{0(n+2)} P(k, t) = P(k - I_{n+2}, t) - P(k, t), \\
 \Delta_{i0} P(k, t) &= P(k + I_i, t) - P(k, t), \quad \Delta_{ij} P(k, t) = P(k + I_i - I_j, t) - P(k, t), \quad i, j = \overline{1, n+2}.
 \end{aligned}$$

Assuming that $\Delta t \rightarrow 0$, we obtain the set of Kolmogorov difference-differential equations for state probabilities:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P(k, t)}{\partial t} = & \lambda(t) \left(K - \sum_{i=1}^{n+2} k_i \right) \theta(m_{n+1} - k_{n+1}) \Delta_{0(n+1)} P(k, t) + \\
 & + \left(\lambda(t) \left(K - \sum_{i=1}^{n+2} k_i + 1 \right) \theta(m_{n+1} - k_{n+1} + 1) - \right. \\
 & \left. - \lambda(t) \left(K - \sum_{i=1}^{n+2} k_i \right) \theta(m_{n+1} - k_{n+1}) \right) P(k - I_{n+1}, t) + \\
 & + \lambda(t) \left(K - \sum_{i=1}^{n+2} k_i \right) (1 - \theta(m_{n+1} - k_{n+1})) \Delta_{0(n+2)} P(k, t) + \\
 & + \lambda(t) \left[\left(K - \sum_{i=1}^{n+2} k_i + 1 \right) (1 - \theta(m_{n+1} - k_{n+1})) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(K - \sum_{i=1}^{n+2} k_i \right) (1 - \theta(m_{n+1} - k_{n+1})) \Big] P(k - I_{n+2}, t) + \\
 & + \gamma k_{n+2} \theta(m_{n+1} - k_{n+1}) \Delta_{(n+2)(n+1)} P(k, t) + \\
 & + [\gamma(k_{n+2} + 1) \theta(m_{n+1} - k_{n+1} + 1) - \gamma k_{n+2} \theta(m_{n+1} - k_{n+1})] \times \\
 & \times P(k + I_{n+2} - I_{n+1}, t) + \Delta_{(n+2)0} P(k, t) \eta_{n+2} k_{n+2} + \eta_{n+2} P(k + I_{n+2}, t) + \\
 & + \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i p_{i0} \min(m_i, k_i) \Delta_{i0} P(k, t) + \sum_{i=1}^{n+1} (\mu_i p_{i0} \min(m_i, k_i + 1) - \mu_i p_{i0} \min(m_i, k_i)) P(k + I_i, t) + \\
 & + \sum_{i=1}^{n+1} \eta_i q_{i0} (k_i - m_i) \theta(k_i - m_i) \Delta_{i0} P(k, t) + \\
 & + \sum_{i=1}^{n+1} [\eta_i q_{i0} (k_i + 1 - m_i) \theta(k_i + 1 - m_i) - \eta_i q_{i0} (k_i - m_i) \theta(k_i - m_i)] \times \\
 & \times P(k + I_i, t) + \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \mu_i p_{ij} \min(m_i, k_i) \Delta_{ij} P(k, t) + \\
 & + \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} [\mu_i p_{ij} \min(m_i, k_i + 1) - \mu_i p_{ij} \min(m_i, k_i)] P(k + I_i - I_j, t). \tag{5}
 \end{aligned}$$

The resulting equation cannot be solved analytically for large n . Call centers undoubtedly handle a large number of customer calls. In this regard, we consider the important asymptotic case of a large number of customers in the model. Let us pose the problem of studying the probability distribution of the state vector $k(t)$ under the critical assumption of a large number of customers K in the queueing network.

Suppose we are interested in the properties of the relative process $\xi(t) = \frac{k(t)}{K}$ when K becomes very large. Vector $\xi(t)$ indicates the relative proportion of the company's customers who contacted the call center and how calls are distributed across model nodes at time t . In time $\Delta t \rightarrow 0$, the possible changes in process $\xi(t)$ are e_i , where $e_i = I_i \cdot \varepsilon = \frac{I_i}{K}$. Assuming that $K \rightarrow \infty$ we have $e_i \rightarrow 0$, and the vector $\xi(t)$ will be a continuous-time continuous-state Markov process. A probability density function of $\xi(t)$ is defined as

$$\begin{aligned}
 p(x, t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P(x_1 \leq \xi_1(t) < x_1 + \varepsilon, \dots, x_{n+2} \leq \xi_{n+2}(t) < x_{n+2} + \varepsilon)}{\varepsilon^{n+2}} = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P(Kx_1 \leq k_1(t) < Kx_1 + 1, \dots, Kx_{n+2} \leq k_{n+2}(t) < Kx_{n+2} + 1)}{\varepsilon^{n+2}},
 \end{aligned}$$

i.e.

$$K^{n+2} P(k, t) \rightarrow p(x, t), \quad \text{where } x \in X, \tag{6}$$

$$X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+2}) : x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n+2}, \quad \sum_{i=1}^{n+2} x_i \leq 1 \right\}.$$

Realizing the asymptotic transition (6) for the equation (5), we obtain the following partial differential equation

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} &= \lambda(t) K \left(1 - \sum_{i=1}^{n+2} x_i \right) \theta(l_{n+1} - x_{n+1}) \Delta_{0(n+1)} p(x, t) + \\
 &+ \lambda(t) \frac{\partial \left(\left(1 - \sum_{i=1}^{n+2} x_i \right) \theta(l_{n+1} - x_{n+1}) \right)}{\partial x_{n+1}} p(x - e_{n+1}, t) +
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & +\lambda(t)K \left(1 - \sum_{i=1}^{n+2} x_i\right) (1 - \theta(l_{n+1} - x_{n+1}))\Delta_{0(n+2)}p(x, t) + \\
 & +\lambda \frac{\partial \left(1 - \sum_{i=1}^{n+2} x_i\right)}{\partial x_{n+2}} (1 - \theta(l_{n+1} - x_{n+1}))p(x - e_{n+2}, t) + \\
 & +\gamma K x_{n+2}\theta(l_{n+1} - x_{n+1})\Delta_{(n+2)(n+1)}p(x, t) + \gamma\theta(l_{n+1} - x_{n+1})p(x + e_{n+2} - e_{n+1}, t) + \\
 & +\eta_{n+2}K x_{n+2}\Delta_{(n+2)0}p(x, t) + \eta_{n+2}p(x + e_{n+2}, t) + \\
 & +K \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i p_{i0} \min(l_i, x_i)\Delta_{i0}p(x, t) + \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i p_{i0} \frac{\partial \min(l_i, x_i)}{\partial x_i} p(x + e_i, t) + \\
 & +K \sum_{i=1}^{n+1} \eta_i q_{i0} (x_i - l_i)\theta(x_i - l_i)\Delta_{i0}p(x, t) + \sum_{i=1}^{n+1} \eta_i q_{i0} \frac{\partial ((x_i - l_i)\theta(x_i - l_i))}{\partial x_i} p(x + e_i, t) + \\
 & +K \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \mu_i p_{ij} \min(l_i, x_i)\Delta_{ij}p(x, t) + \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \mu_i p_{ij} \frac{\partial \min(l_i, x_i)}{\partial x_i} p(x + e_i - e_j, t). \quad (7)
 \end{aligned}$$

If $p(x, t)$ is twice continuously differentiable function with respect to x , then we can use the following Taylor series:

$$\begin{aligned}
 p(x \pm e_i, t) &= p(x, t) \pm \varepsilon \frac{\partial p(x, t)}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_i^2} + o(\varepsilon^2), \\
 p(x + e_i - e_j, t) &= p(x, t) + \varepsilon \left(\frac{\partial p(x, t)}{\partial x_i} - \frac{\partial p(x, t)}{\partial x_j} \right) + \\
 &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_i^2} - 2 \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_j^2} \right) + o(\varepsilon^2), \quad i, j = \overline{1, n+2}.
 \end{aligned}$$

Substituting the above-mentioned Taylor series into equation (7), having grouped the terms in the resulting equation, we conclude that the compact mathematical expression (1) is valid. The theorem is proved. \square

The probability distribution of the vector $\xi(t)$ given by the probability density $p(x, t)$ is a complete and exhaustive characteristic of the network model state at time t . However, such an exhaustive characteristic cannot be found, since equation (1) is not explicitly solvable. From a practical point of view, it is enough for us to know what the “average value” of $\xi(t)$ is. For this reason, we confine our study to finding expected values $E_{\xi_i}(t) = E(\xi_i(t))$, $i = \overline{1, n+2}$. It is known [15, 17] that the expected value $E_{\xi_i}(t)$ is determined with an accuracy of $O(\varepsilon^2)$ from a set of ordinary differential equations:

$$\frac{dE_{\xi_i}(t)}{dt} = A_i(E_{\xi_i}(t)), \quad i = \overline{1, n+2},$$

here $A_i(\cdot)$ are drifts given by formulas (2)–(4). Then the expected number of customers in each node of the network model $E_{k_i}(t) = E(k_i(t)) = E(K\xi_i(t))$ can be found from the set of equations:

$$\frac{dE_{k_i}(t)}{dt} = K A_i \left(\frac{1}{K} E_{k_i}(t) \right), \quad i = \overline{1, n+2}. \quad (8)$$

Taking into account (2)–(4), (8) and the transition matrices of the network model, the expected number of customers $E_{k_i}(t)$ in node S_i , $i = \overline{1, n+2}$, can be found by solving the following set of equations:

$$\frac{dE_{k_i}(t)}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \mu_j p_{ji} \min(m_j, E_{k_j}(t)) - \mu_i \min(m_i, E_{k_i}(t)) -$$

$$\begin{aligned}
 & -\eta_i(E_{k_i}(t) - m_i)\theta(E_{k_i}(t) - m_i), \quad i = \overline{1, n}; \\
 & \frac{dE_{k_{n+1}}(t)}{dt} = -\mu_{n+1} \min(m_{n+1}, E_{k_{n+1}}(t)) + \\
 & + \lambda(t) \left(K - \sum_{i=1}^{n+2} E_{k_i}(t) \right) \theta(m_{n+1} - E_{k_{n+1}}(t)) + \gamma E_{k_{n+2}}(t) \theta(m_{n+1} - E_{k_{n+1}}(t)); \quad (9) \\
 & \frac{dE_{k_{n+2}}(t)}{dt} = \lambda(t) \left(K - \sum_{i=1}^{n+2} E_{k_i}(t) \right) (1 - \theta(m_{n+1} - E_{k_{n+1}}(t))) - \\
 & - \gamma E_{k_{n+2}}(t) \theta(m_{n+1} - E_{k_{n+1}}(t)) - \eta_{n+2} E_{k_{n+2}}(t).
 \end{aligned}$$

3. Numerical example

Consider the queuing network model of a call center with $n = 4$. Let the number of customers be equal to $K = 50000$.

Let the operation of the call center be specified by the following parameters. The structure of the network is set by the following non-zero elements of the transition matrix: $p_{05} = 1, p_{10} = 0.7, p_{12} = p_{13} = p_{14} = 0.1, p_{20} = 0.8, p_{21} = p_{23} = 0.05, p_{24} = 0.1, p_{30} = 0.75, p_{31} = 0.07, p_{32} = 0.15, p_{34} = 0.03, p_{40} = 0.9, p_{41} = 0.03, p_{42} = 0.04, p_{43} = 0.03, p_{50} = 0.15, p_{51} = 0.1, p_{52} = 0.15, p_{53} = 0.2, p_{54} = 0.4$. The number of node servers is $m_1 = m_3 = 6, m_2 = 8, m_4 = 4, m_5 = 20$. The service rates are $\mu_1 = 70, \mu_2 = 40, \mu_3 = 22, \mu_4 = 60, \mu_5 = 270$. The waiting rates are $\eta_1 = \eta_2 = 5, \eta_3 = \eta_4 = 3, \eta_6 = 10$. The retrial rate is $\gamma = 50$. The initial placement of customers is $E_{k_0}(0) = 50000$.

Firstly, consider the case when the arrival rate is constant $\lambda = 0.0117$. The inbound call flow is stationary. Let us solve the set (9) by numerical methods using Maple software. Figure 2 shows a graphical solution of (9). It is possible to predict the mean number of customers at each network node with time. Figure 2 demonstrates that the process quickly reaches a steady state. The largest number of customers accumulates in the node S_4 . The servers in most nodes of the network are idle in the mean.

Secondly, consider the case when the arrival rate is not constant and it changes according to a wave-like law (seasonal process) $\lambda(t) = 0.002 \cos(\pi t/12) + 0.0095$. Figure 3 shows the dynamics of the expected number of customers in the network nodes. In this situation, the number of customers varies depending on the arrival rate. Obviously, the number of agents needs to be adjusted.

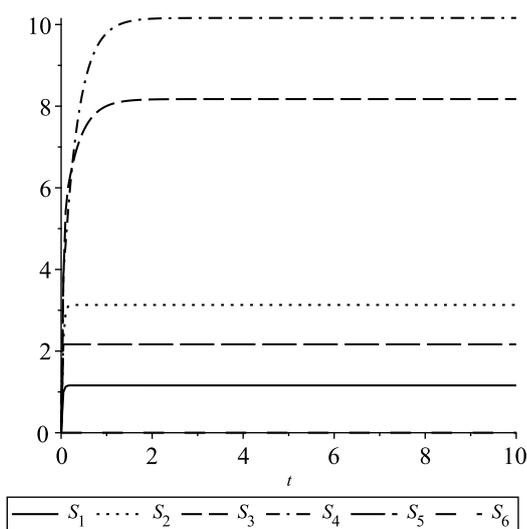


Fig. 2. Dynamics of $E_{k_i}(t)$ when the arrival rate is constant

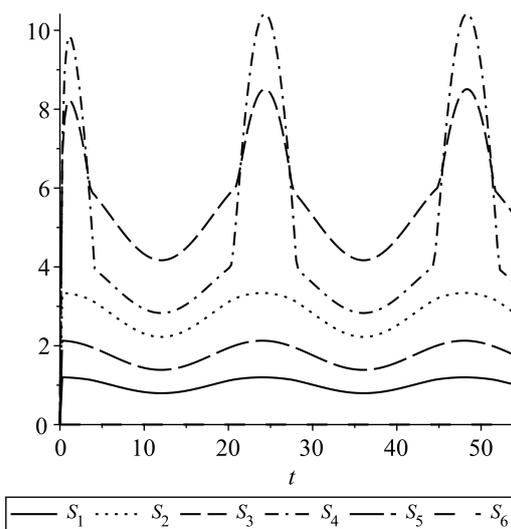


Fig. 3. Dynamics of $E_{k_i}(t)$ when the arrival rate is not constant



Conclusion

In this paper, the network stochastic model of a call center was presented as a queueing network with customer retrials and impatient customers. The model was investigated in the asymptotic case of a large number of customers. The results make it possible to predict the dynamics of the expected number of customers by model states, regulate the parameters of the call center operation, analyze the call center workload, and make decisions. They are applicable with a specified accuracy $O(\varepsilon^2)$ in both the transient and steady state, this is a fundamental advantage of the used asymptotic method.

References

1. Gans N., Koole G., Mandelbaum A. Telephone call centers: Tutorial, review, and research prospects. *Manufacturing and Service Operations Management*, 2003, vol. 5, iss. 2, pp. 79–141. <https://doi.org/10.1287/msom.5.2.79.16071>
2. Stolletz R. *Performance Analysis and Optimization of Inbound Call Centers*. Heidelberg, German, Springer-Verlag Berlin, 2003. 219 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-55506-0>
3. Srinivasan R., Talim J., Wang J. Performance analysis of a call center with interactive voice response units. *Top*, 2004, vol. 12, pp. 91–110. <https://doi.org/10.1007/BF02578926>
4. Koole G., Mandelbaum A. Queueing models of call centers: an introduction. *Annals of Operations Research*, 2002, vol. 113, pp. 41–59. <https://doi.org/10.1023/A:1020949626017>
5. Takagi H., Taguchi Yu. Analysis of a queueing model for a call center with impatient customers and after-call work. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2014, vol. 90, iss. 2, pp. 205–237. <https://dx.doi.org/10.12732/ijpam.v90i2.10>
6. Aguir S., Karaesmen F., Zeynep Aksin O., Chauvet F. The impact of retrials on call center performance. *OR Spectrum*, 2004, vol. 26, pp. 353–376. <https://doi.org/10.1007/s00291-004-0165-7>
7. Nazarov A. A., Paul S. V., Lizyura O. D. Two-way communication retrial queue with unreliable server and multiple types of outgoing calls. *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*, 2020, vol. 28, iss. 1, pp. 49–61. <https://doi.org/10.22363/2658-4670-2020-28-1-49-61>
8. Mandelbaum A., Zeltyn S. Data-stories about (im)patient customers in tele-queues. *Queueing Systems*, 2013, vol. 75, iss. 2, pp. 115–146. <https://doi.org/10.1007/s11134-013-9354-x>
9. Artalejo J. R., Gomez-Corral A. *Retrial Queueing Systems. A Computational Approach*. Heidelberg, German, Springer-Verlag Berlin, 2008. 318 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-78725-9>
10. Kim Ch., Klimenok V., Dudin A. Priority tandem queueing system with retrials and reservation of channels as a model of call center. *Computers and Industrial Engineering*, 2016, vol. 96, pp. 61–71. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2016.03.012>
11. Nazarov A., Moiseev A., Moiseeva S. Mathematical model of call center in the form of multi-server queueing system. *Mathematics*, 2021, vol. 9, iss. 22, art. 2877. <https://doi.org/10.3390/math9222877>
12. Dudin A., Kim C., Dudina O. Multi-server queueing system with a generalized phase-type service time distribution as a model of call center with a call-back option. *Annals of Operations Research*, 2016, vol. 239, pp. 401–428. <https://doi.org/10.1007/s10479-014-1626-2>
13. Rusilko T. Asymptotic analysis of a closed G-network of unreliable nodes. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 2022, vol. 21, iss. 2, pp. 91–102. <https://10.17512/jamcm.2022.2.08>
14. Medvedev G. A. Closed queueing systems and their optimization. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Engineering Cybernetics*, 1975, vol. 6, pp. 65–73 (in Russian).
15. Rusilko T. V. Application of queueing network models in insurance. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 3, pp. 315–321. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-315-321>, EDN: ONZHCB
16. Tikhonov V. R., Mironov M. A. *Markovskie protsessy* [Markov Processes]. Moscow, Sovetskoe radio, 1977. 488 p. (in Russian).
17. Paraev Yu. I. *Vvedenie v statisticheskuyu dinamiku protsessov upravleniya i fil'tratsii* [Introduction to Statistical Dynamics of Management and Filtering]. Moscow, Sovetskoe radio, 1976. 185 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 18.05.2023

Принята к публикации / Accepted 20.07.2023

Опубликована / Published 31.05.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 298–315
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 298–315
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-298-315>, EDN: LXBVIR

Научная статья
УДК 519.6

Использование параллельных вычислений для оценки процесса переноса загрязняющих веществ в мелководных водоемах

А. И. Сухинов¹, А. Е. Чистяков¹, В. В. Сидорякина^{1,2}✉,
И. Ю. Кузнецова^{1,3}, А. М. Атаян¹

¹Донской государственный технический университет, Россия, 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1

²Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (РИНХ), Россия, 347936, г. Таганрог, ул. Инициативная, д. 48

³Южный федеральный университет, Россия, 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, д. 105, корп. 42

Сухинов Александр Иванович, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой «Математика и информатика», sukhinov@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-5875-1523>, AuthorID: 143825

Чистяков Александр Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем», cheese_05@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8323-6005>, AuthorID: 474527

Сидорякина Валентина Владимировна, кандидат физико-математических наук, ¹доцент кафедры «Математика и информатика»; ²доцент кафедры «Математика», cvv9@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7744-015X>, AuthorID: 124086

Кузнецова Инна Юрьевна, ¹старший преподаватель кафедры «Математика и информатика»; ³старший преподаватель кафедры интеллектуальных и многопроцессорных систем, ikuznecova@sfedu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1996-1605>, AuthorID: 650783

Атаян Ася Михайловна, старший преподаватель кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем», atayan24@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4629-1002>, AuthorID: 919484

Аннотация. Во многих странах мира отмечается ухудшение геоэкологического состояния водных объектов, связанное со значительно возросшим антропогенным воздействием на природные воды. При этом гарантированное качество водных ресурсов и его надежность обеспечиваются сопоставлением реализуемого качества и гарантированного. В настоящей статье рассматриваются модели поступления и перемещения загрязняющих веществ, содержащихся в водной среде. На основе используемых в настоящее время подходов и критериев загрязнения вод разработан комплекс параллельных программ для высокопроизводительных вычислительных систем, позволяющий моделировать рассматриваемые процессы, а также оценивать риски и уязвимость по отношению к антропогенным воздействиям, проводить районирование акватории мелководного водоема в соответствии с уровнями антропогенных нагрузок, осуществлять экологическое проектирование с позиции устойчивого развития.

Ключевые слова: перенос загрязняющих веществ, модель гидродинамики, модели диффузии-конвекции взвеси, явно-неявная схема, параллельные алгоритмы

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00509).

Для цитирования: Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Сидорякина В. В., Кузнецова И. Ю., Атаян А. М. Использование параллельных вычислений для оценки процесса переноса загрязняющих веществ в мелководных водоемах // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 298–315. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-298-315>, EDN: LXBVIR

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Using parallel computing to evaluate the transport of pollutants in shallow waters

A. I. Sukhinov¹, A. E. Chistyakov¹, V. V. Sidoryakina^{1,2✉},
I. Yu. Kuznetsova^{1,3}, A. M. Atayan¹

¹Don State Technical University, 1 Gagarin Sq., Rostov-on-Don 344000, Russia

²Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) of the Rostov State University of Economics, 48 Initiativnaya St., Taganrog 347936, Russia

³Southern Federal University, 105/42 Bolshaya Sadovaya St., Rostov-on-Don 344006, Russia

Alexander I. Sukhinov, sukhinov@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-5875-1523>, AuthorID: 143825

Alexander E. Chistyakov, cheese_05@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8323-6005>, AuthorID: 474527

Valentina V. Sidoryakina, cvv9@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7744-015X>, AuthorID: 124086

Inna Yu. Kuznetsova, ikuznecova@sfedu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1996-1605>, AuthorID: 650783

Asya M. Atayan, atayan24@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4629-1002>, AuthorID: 919484

Abstract. In many countries of the world, there is a deterioration in the geocological state of water bodies, associated with a significantly increased anthropogenic impact on natural waters. At the same time, the guaranteed quality of water resources and its reliability are ensured by comparing the realized quality and the guaranteed one. This article discusses models for the entry and movement of pollutants contained in the aquatic environment. Based on the currently used approaches and water pollution criteria, a set of parallel programs for high-performance computing systems has been developed, which allows modeling of the processes under consideration, as well as assessing risks and vulnerabilities in relation to anthropogenic impacts, zoning the water area of a shallow water body in accordance with the levels of anthropogenic loads, environmental design from the standpoint of sustainable development.

Keywords: pollutant transport, hydrodynamics model, suspension-diffusion-convection models, explicit-implicit scheme, parallel algorithms

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00509).

For citation: Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Sidoryakina V. V., Kuznetsova I. Yu., Atayan A. M. Using parallel computing to evaluate the transport of pollutants in shallow waters. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 298–315 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-298-315>, EDN: LXBVIR

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Прогнозирование процессов распространения загрязняющих веществ в природных водах необходимо для успешного управления водными ресурсами [1]. Для решения этой задачи необходимы научно обоснованные математические модели, которые не теряют свою достоверность при широком варьировании пространственных и временных масштабов.

Математические модели переноса загрязняющих веществ претерпели длительный период разработки. Они усложнялись за счет перехода от одного фактора качества воды к множеству факторов, от стационарной модели к динамической модели, от модели точечного источника к модели сопряжения точечных и неточечных источников, от одномерных к двумерным и трехмерным моделям [2, 3].

Как правило, первые модели переноса загрязняющих веществ разрабатывались для речных систем, подверженных влиянию бытовых и промышленных точечных источников загрязнения. Они фокусировались на взаимодействии различных компонентов качества воды [4].



Одной из первых была разработана одномерная модель билинейной системы БПК-РК [5], которая продолжительное время успешно использовалась исследователями и позднее была неоднократно модифицирована. Так, например, появились модели Streeter and Phelps (модели S-P). Для усовершенствования стационарной модели S-P в разное время учеными были внесены корректировки: введен коэффициент флокуляции, разделен параметр БПК на карбонизированный БПК и нитрифицированный БПК, добавлены эффекты дисперсии на основе уравнения Dobbins – Camp [6, 7], добавлен коэффициент скорости изменения БПК и др. Быстрое развитие исследований в области математического моделирования переноса загрязняющих веществ связано с появлением двумерных моделей и адаптации их для различных видов водоемов [6, 7]. Ведется разработка моделей нелинейных систем [8]. Эти модели включали систему круговорота азота и фосфора, систему фитопланктона и зоопланктона. Данные модели преимущественно были сфокусированы на отношениях между биологической скоростью роста и питательными веществами, солнечным светом и температурой, а также фитопланктоном и скоростью роста зоопланктона [9, 10]. К концу прошлого столетия количество переменных в моделях увеличилось, стал учитываться гидродинамический режим водоема и влияние наносов, осуществлен переход к трехмерным моделям [11, 12]. К настоящему времени проведено множество исследований путем разработки программ моделирования для имитации пространственного и временного распределения загрязняющих веществ: QUAL, WASP, MIKE11, QUAL 2K, WASP 6, QUASAR, SWAT, MIKE 21 и MIKE 31, INCA, QUAL 2K, HEC-RAS, EFDC и др. [13].

К настоящему времени разработано более 100 моделей переноса загрязняющих веществ, в том числе сотни модельных программ для ЭВМ, используемых для различных водоемов, различных загрязняющих веществ, в различных пространственно-временных масштабах и др. Однако каждая из моделей имеет свои ограничения, прежде всего, связанные с особенностями водоема. Таким образом, модели переноса загрязняющих веществ все еще нуждаются в дальнейшем изучении.

Авторами разработан комплекс взаимосвязанных пространственно-трехмерных моделей переноса загрязняющих веществ, включающий модели гидродинамики, динамики переноса физической субстанции (взвешенных частиц и наносов), модель эвтрофикации вод, предназначенных для мелководных водоемов. В рамках данной статьи читателю предлагается ознакомиться с параллельными алгоритмами численного решения переноса взвешенных частиц на супервычислительной системе с распределенной памятью при относительно небольшом количестве ядер (до 2048). Также авторами исследованы вопросы распараллеливания процессов численного решения данных задач на массивно-параллельных системах, обеспечивающих высокую эффективность алгоритмов для систем, содержащих многие десятки тысяч ядер. Приведены результаты численных экспериментов.

1. Комплекс взаимосвязанных 3D моделей транспорта загрязняющих веществ

Будем использовать прямоугольную декартовую систему координат $Oxyz$, где оси Ox и Oy проходят по поверхности невозмущенной водной поверхности и направлены на север и восток соответственно, ось Oz направлена вниз.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ — область, где происходит процесс, представляет собой параллелепипед $G = \{0 < x < L_x, 0 < y < L_y, 0 < z \leq L_z\}$. Обозначим нижнее основание параллелепипеда — Σ_b , верхнее основание — Σ_f , боковую поверхность — Σ_l .

1.1. Модель гидродинамики

В основу разрабатываемой модели расчета трехмерных полей вектора скорости движения водной среды положена математическая модель гидродинамики мелководных водоемов [14–16].



Данная модель включает следующие уравнения:

– уравнения движения по трем координатным направлениям (система уравнений Навье – Стокса)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_h \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_v \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_h \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_h \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_v \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_h \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_h \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_v \frac{\partial w}{\partial z} \right) + g; \quad (3)$$

– уравнение неразрывности (закон сохранения массы)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0; \quad (4)$$

– уравнение транспорта тепла

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} + \frac{\partial(wT)}{\partial z} \right) = \\ = \mu_h \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_v \frac{\partial T}{\partial z} \right); \end{aligned} \quad (5)$$

– уравнение состояния для плотности

$$\rho_0 = \rho(T_0). \quad (6)$$

Здесь использованы следующие обозначения: u, v, w – компоненты вектора \vec{U} скорости движения жидкости; t – временная переменная; P – давление; g – ускорение свободного падения; ρ – плотность жидкости; μ_h, μ_v – коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии соответственно; T – температура в конкретной точке области; T_0 – температура, при которой плотность максимальна.

Система уравнений (1)–(6) рассматривается при начальном условии

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad w = w_0, \quad (7)$$

и при следующих граничных условиях:

$$\Sigma_l : u = u_0, \quad v = v_0, \quad \frac{\partial P}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (8)$$

$$\Sigma_f : \rho \mu_h \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = -\tau_x, \quad \rho \mu_h \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = -\tau_y, \quad \frac{\partial P}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (9)$$

$$\Sigma_b : \rho \mu_h \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = -\tau_x, \quad \rho \mu_h \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = -\tau_y, \quad w = -\omega - \frac{\partial P}{\partial t} \frac{1}{\rho g}, \quad \frac{\partial P}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (10)$$

где ω – интенсивность испарения жидкости, τ_x, τ_y – составляющие тангенциального напряжения.

1.2. Модель диффузии-конвекции-агрегирования взвесей

Для описания транспорта взвешенных частиц воспользуемся уравнением диффузии-конвекции, которое может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\partial c_r}{\partial t} + \frac{\partial(uc_r)}{\partial x} + \frac{\partial(vc_r)}{\partial y} + \frac{\partial((w + w_{gr})c_r)}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_h \frac{\partial c_r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_h \frac{\partial c_r}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_v \frac{\partial c_r}{\partial z} \right) + F_r, \quad (11)$$

где c_r — концентрация r -й фракции взвеси; w_{gr} — скорость осаждения r -й фракции взвеси; F_r — функция, описывающая интенсивность распределения источников r -й фракции взвеси.

Уравнения (11) дополняются начальным условием

$$c_r(x, y, z, 0) = c_{r0}(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{G}, \quad (12)$$

и следующими граничными условиями:

$$\Sigma_l: \quad c_r = c'_r, \quad c'_r = \text{const}, \quad \text{если } u_{\vec{n}} < 0; \quad \frac{\partial c_r}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \text{если } u_{\vec{n}} \geq 0, \quad (13)$$

где $u_{\vec{n}}$ — проекция вектора скорости на внешнюю нормаль \vec{n} к границе; c'_r — известные значения концентрации;

$$\Sigma_f: \quad \frac{\partial c_r}{\partial z} = 0; \quad (14)$$

$$\Sigma_b: \quad \frac{\partial c_r}{\partial z} = - \frac{w_{gr}}{\mu_{vr}} c_r. \quad (15)$$

Математические модели транспорта взвешенных частиц позволяют спрогнозировать распространение шлейфов взвеси в водной среде и изменение рельефа дна в связи с выпадением взвешенных частиц грунта в осадок. На основе модели (11)–(15) могут быть рассмотрены процессы движения и осаждения взвешенных частиц при проведении дноуглубительных работ, а также возможность оптимизации площадей существующих отвалов грунта. Оптимизация размеров областей отвалов грунта позволяет минимизировать ущерб, наносимый биотопам. Численное решение дифференциальных уравнений (11) совместно с уравнениями гидродинамики (1)–(10) позволяет моделировать разнообразные процессы стационарного и нестационарного загрязнений мелких водоемов.

1.3. Модель эвтрофикации вод

На основе уже рассмотренного выше уравнения диффузии-конвекции может быть построена модель эвтрофикации вод, т. е. описан процесс насыщения водоемов биогенными элементами, сопровождающийся ростом биологической продуктивности акватории. Эвтрофикация может быть результатом как естественных изменений в водоеме, так и антропогенных воздействий. Модель представляет собой совокупность уравнений для каждого s_i — значения концентрации i -й примеси:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial s_i}{\partial t} + \frac{\partial (us_i)}{\partial x} + \frac{\partial (vs_i)}{\partial y} + \frac{\partial ((w + w_{gi}) s_i)}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_h \frac{\partial s_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_h \frac{\partial s_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_v \frac{\partial s_i}{\partial z} \right) + \Psi_i, \end{aligned} \quad (16)$$

где w_{gi} — гравитационное осаждение i -й компоненты, если она находится во взвешенном состоянии; ψ_i — химико-биологический источник (сток) или член, описывающий агрегирование (слипание-разлипание), если соответствующая компонента является взвесью, индекс i указывает на вид субстанции, $i = \overline{1, 15}$: 1 — сероводород (H_2S); 2 — элементарная сера (S); 3 — сульфаты (SO_4); 4 — тиосульфаты (и сульфиты); 5 — общий органический азот (N); 6 — аммоний (NH_4) (аммонийный азот); 7 — нитриты (NO_2); 8 — нитраты (NO_3); 9 — фитопланктон; 10 — зоопланктон; 11 — растворенный кислород (O_2); 12 — силикаты (SiO_3 — метасиликат; SiO_4 — ортосиликат); 13 — фосфаты (PO_4); 14 — железо (Fe^{2+}); 15 — кремнекислота (H_2SiO_3 — метакремневая; H_2SiO_4 — ортокремневая).



Уравнения (16) дополняются начальным условием

$$s_i(x, y, z, 0) = s_{i0}(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{G}, \quad i = \overline{1, 15}, \quad (17)$$

и следующими граничными условиями

$$\Sigma_l : s_i = 0, \quad \text{если } u_{\vec{n}} < 0; \quad \frac{\partial s_i}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \text{если } u_{\vec{n}} \geq 0, \quad i = \overline{1, 15}, \quad (18)$$

где $u_{\vec{n}}$ — проекция вектора скорости на внешнюю нормаль \vec{n} к границе, c'_r — известные значения концентрации;

$$\Sigma_f : \frac{\partial s_i}{\partial z} = \varphi(s_i), \quad i = \overline{1, 15}; \quad (19)$$

$$\Sigma_b : \frac{\partial s_r}{\partial z} = -\varepsilon_{s_i} s_i, \quad (20)$$

где ε_{s_i} — коэффициент поглощения i -й примеси донными отложениями.

При штилях и близких к ним ветровых ситуациях возникают анаэробные условия в придонных слоях мелководных водоемов (например, Азовского моря). Восстановление поверхностного водонасыщенного ила влечет за собой высвобождение в раствор (кроме сероводорода) сульфатов, двухвалентного марганца и железа, органических соединений, аммония, силикатов и фосфатов. С помощью модели (16)–(20) могут быть описаны процессы аммонификации, нитрификации, нитратредукции (денитрификации), ассимиляции NH_4 , окисления H_2S , сульфатредукции, окисления и восстановления марганца, а также можно изучать механизм условий формирования заморозов в результате антропогенной эвтрофикации, прогнозировать изменения кислородного и биогенного режимов.

1.4. Оценка уязвимости мелководных водоемов по отношению к антропогенным воздействиям

Поскольку целью настоящей статьи является описание результатов использования программного комплекса и проведенных численных экспериментов по переносу загрязняющих веществ, то авторы в работе не будут сосредоточены на описании методик оценок риска. Остановимся лишь на порядке проведения оценки уязвимости по отношению к антропогенным воздействиям, которая может быть описана следующим образом:

- 1) изучение географических, топологических, климатических, геологических, гидрологических особенностей водного объекта;
- 2) определение возможных источников поступления загрязняющих веществ: стоки рек, сбросы загрязняющих веществ предприятиями, судоходство и т.д. Моделирование возможных сценариев распространения загрязняющих веществ на основе моделей, описываемых выражениями (1)–(10), (11)–(15) и (16)–(20);
- 3) оценка токсического эффекта загрязняющих веществ, которые могут поступать из определенных выше источников;
- 4) расчет фактора риска R на основе формулы

$$R = E f_S \cdot E_S,$$

где $E f_S$ — фактор эффективности воздействия загрязняющих веществ, E_S — фактор экспозиции, $E_S = P_S k_{BA} / Y$ (c — концентрация частиц, Y — способ использования химиката, P_S — характеристика скорости гидролиза, k_{BA} — фактор биоаккумуляции). Факторы экспозиции для воды могут принимать значения 0.4–25 c_r ;

- 5) нормализация фактора риска R :

$$c_y = \frac{c - c_{\min}}{c_{\max} - c_{\min}},$$

где c_y — нормализованный фактор риска, если риск возрастает с ростом концентрации c частиц. При этом нормализованный фактор риска $c_y \in [0, 1]$;

- 6) на основании полученной оценки риска делаются предварительные заключения: риск считается высоким при $c_y > 0.55$, потенциально значимым при $0.3 < c_y < 0.55$, отсутствующим при $c_y < 0.3$.

2. Численные методы решения задачи диффузии-конвекции-агрегирования взвесей

2.1. Построение явно-неявной схемы

Уравнение (11) запишем в виде

$$\frac{\partial c_r}{\partial t} = A c_r + F_r(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in G, \quad t \in [0, T], \quad (21)$$

где $A c_r$ — дифференциальный эллиптический оператор по пространственным переменным с младшими производными, для которого справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} A c_r &= \frac{\partial (u c_r)}{\partial x} + \frac{\partial (v c_r)}{\partial y} + \frac{\partial ((w + w_{gr}) c_r)}{\partial z} - \\ &- \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_h \frac{\partial c_r}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_h \frac{\partial c_r}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_v \frac{\partial c_r}{\partial z} \right) = (A_{12} + A_3) c_r, \\ A_{12} c_r &= \frac{\partial (u c_r)}{\partial x} + \frac{\partial (v c_r)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_h \frac{\partial c_r}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_h \frac{\partial c_r}{\partial y} \right), \\ A_3 c_r &= \frac{\partial ((w + w_{gr}) c_r)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_v \frac{\partial c_r}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

На временном отрезке $0 \leq t \leq T$ построим равномерную сетку ω_τ с шагом τ , т.е. множество точек

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad N\tau = T\}.$$

Если решение $c_r^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})$ в некоторый момент времени t_{n-1} известно, то решение в момент времени t_n можно выразить через это известное решение. На каждом шаге по времени решение задачи (21), (12)–(15) представим в виде

$$\frac{c_r^{n+1} - c_r^n}{\tau} + A_{12} c_r^n + A_3 c_r^{n+1/2} = F_r^n, \quad n = 1, \dots, N. \quad (23)$$

Для увеличения допустимого шага по времени при аппроксимации двумерной задачи (7), (22) явной разностной схемой добавим в левую часть уравнения (23) производную по времени второго порядка с малым множителем-регуляризатором [17, 18], не превосходящим характерное время распространения возмущений концентраций по горизонтальным направлениям:

$$\begin{aligned} \frac{\tau^*}{2} \frac{c_r^{n+1} - 2c_r^n + c_r^{n-1}}{\tau^2} + \frac{c_r^{n+1} - c_r^n}{\tau} + A_{12} c_r^n + A_3 c_r^{n+1/2} &= F_r^n, \quad n = 2, \dots, N, \\ \tau^* \frac{c_r^{n+1} - c_r^n}{\tau^2} + \frac{c_r^{n+1} - c_r^n}{\tau} + A_{12} c_r^n + A_3 c_r^{n+1/2} &= F_r^n, \quad n = 1, \end{aligned} \quad (24)$$

где коэффициент τ^* , $\tau^* \sim (\tau/\tilde{c})$, связан с характерным шагом пространственной сетки τ и характерной скоростью звука в водной среде. Было показано [19], что при $\tau^* \rightarrow 0$ решение задачи (24) стремится к решению задачи (23).

В области \bar{G} построим связную сетку $\bar{\omega}_h$. Множество узлов данной сетки состоит из внутренних и граничных узлов. Совокупность ω_h внутренних узлов задаем множеством точек:

$$\omega_h = \left\{ x_i = i h_x, \quad y_j = j h_y, \quad z_k = k h_z; \quad i = \overline{0..N_x}, \quad j = \overline{0..N_y}, \quad k = \overline{0..N_z}; \right. \\ \left. N_x h_x = L_x, \quad N_y h_y = L_y, \quad N_z h_z = L_z \right\},$$



где h_x, h_y, h_z — шаги по пространству, N_x, N_y, N_z — количество узлов по пространственным координатам.

Через $o_{i,j,k}$ обозначена «заполненность» ячейки (i, j, k) . Вводятся коэффициенты $q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$, описывающие заполненность областей, находящихся в окрестности ячейки [20].

На основе метода баланса с учетом коэффициентов заполненности контрольных областей $q_m, m = 0, \dots, 6$ можно аппроксимировать уравнения (24), при этом дискретный аналог регуляризованного уравнения для расчета транспорта взвеси примет вид

$$\begin{aligned}
 & q_0(i, j, k) \frac{\tau^* c_{r(i,j,k)}^{n+1} - 2c_{r(i,j,k)}^n + c_{r(i,j,k)}^{n-1}}{\tau^2} + q_0(i, j, k) \frac{c_{r(i,j,k)}^{n+1} - c_{r(i,j,k)}^n}{\tau} + \\
 & + q_1(i, j, k) u^{(i+1/2, j, k)} \frac{c_{r(i+1,j,k)}^n - c_{r(i,j,k)}^n}{2h_x} + q_2(i, j, k) u^{(i-1/2, j, k)} \frac{c_{r(i,j,k)}^n - c_{r(i-1,j,k)}^n}{2h_x} + \\
 & + q_3(i, j, k) v^{(i, j+1/2, k)} \frac{c_{r(i,j+1,k)}^n - c_{r(i,j,k)}^n}{2h_y} + q_4(i, j, k) v^{(i, j-1/2, k)} \frac{c_{r(i,j,k)}^n - c_{r(i,j-1,k)}^n}{2h_y} + \\
 & + q_5(i, j, k) (w_{(i, j, k+1/2)} + w_{gr}) \frac{c_{r(i,j,k+1)}^{n+1/2} - c_{r(i,j,k)}^{n+1/2}}{2h_z} + \\
 & + q_6(i, j, k) (w_{(i, j, k-1/2)} + w_{gr}) \frac{c_{r(i,j,k)}^{n+1/2} - c_{r(i,j,k-1)}^{n+1/2}}{2h_z} = \\
 = & q_1(i, j, k) \mu h \frac{c_{r(i+1,j,k)}^n - c_{r(i,j,k)}^n}{h_x^2} - q_2(i, j, k) \mu h \frac{c_{r(i,j,k)}^n - c_{r(i-1,j,k)}^n}{h_x^2} + q_3(i, j, k) \mu h \frac{c_{r(i,j+1,k)}^n - c_{r(i,j,k)}^n}{h_y^2} - \\
 & - q_4(i, j, k) \mu h \frac{c_{r(i,j,k)}^n - c_{r(i,j-1,k)}^n}{h_y^2} + q_5(i, j, k) \mu v_{(i, j, k+1/2)} \frac{c_{r(i,j,k+1)}^{n+1/2} - c_{r(i,j,k)}^{n+1/2}}{h_z^2} - \\
 & - q_6(i, j, k) \mu v_{(i, j, k-1/2)} \frac{c_{r(i,j,k)}^{n+1/2} - c_{r(i,j,k-1)}^{n+1/2}}{h_z^2} + F_{r(i,j,k)}^n. \tag{25}
 \end{aligned}$$

2.2. Сеточные уравнения

Запишем сеточные уравнения для задачи (25) в канонической форме [21]:

$$\begin{aligned}
 & A_{(i,j)} c_{r(i,j,k)}^{n+1} - B_1(i,j) c_{r(i,j,k+1)}^{n+1} - B_2(i,j) c_{r(i,j,k-1)}^{n+1} = F_{r(i,j,k)}^n, \\
 & B_1(i, j, k) = q_5(i, j, k) \left(-\frac{w_{(i, j, k+1/2)} + w_{gr}}{4h_z} + \frac{\mu v_{(i, j, k+1/2)}}{2h_z^2} \right), \\
 & B_2(i, j, k) = q_5(i, j, k) \left(-\frac{w_{(i, j, k+1/2)} + w_{gr}}{4h_z} + \frac{\mu v_{(i, j, k+1/2)}}{2h_z^2} \right), \\
 & A_{(i,j,k)} = q_0(i, j, k) \frac{\tau + \tau^*/2}{\tau^2} + B_1(i, j) + B_2(i, j), \tag{26} \\
 & F_{r(i,j,k)}^n = D_0(i, j, k) c_{r(i,j,k)}^n + D_1(i, j, k) c_{r(i+1,j,k)}^n + D_2(i, j, k) c_{r(i-1,j,k)}^n + \\
 & + D_3(i, j, k) c_{r(i,j+1,k)}^n + D_4(i, j, k) c_{r(i,j-1,k)}^n + B_1(i, j, k) c_{r(i,j+1,k)}^n + \\
 & + B_2(i, j, k) c_{r(i,j-1,k)}^n - E_{(i,j,k)} c_{r(i,j,k)}^{n-1} + F_{r(i,j,k)}^n, \\
 & D_1(i, j, k) = q_1(i, j, k) \left(-\frac{u_{(i+1/2, j, k)}}{2h_x} + \frac{\mu h}{h_x^2} \right), \quad D_2(i, j, k) = q_2(i, j, k) \left(\frac{u_{(i-1/2, j, k)}}{2h_x} + \frac{\mu h}{h_x^2} \right), \\
 & D_3(i, j, k) = q_3(i, j, k) \left(-\frac{\mu v_{(i, j+1/2, k)}}{2h_y} + \frac{\mu h}{h_y^2} \right), \quad D_4(i, j, k) = q_4(i, j, k) \left(\frac{\mu v_{(i, j-1/2, k)}}{2h_y} + \frac{\mu h}{h_y^2} \right), \\
 & D_0(i, j, k) = q_0(i, j, k) \frac{\tau + \tau^*}{\tau^2} - \sum_{p=1}^4 D_p(i, j, k), \quad E_{(i,j,k)} = q_0(i, j, k) \frac{\tau^*}{2\tau^2}.
 \end{aligned}$$

Для расчета правой части необходимо $16N$ арифметических операций. Для решения задачи (26) на первом временном слое необходимо $8N$, а для последующих слоев $5N$ арифметических операций. Таким образом, всего для перехода между слоями необходимо $21N$ операций. Расчет по явной схеме выглядит

$$c_{r(i,j,k)}^{n+1} = (B_{1(i,j)}/A_{(i,j)}) c_{r(i,j,k+1)}^{n+1} + (B_{2(i,j)}/A_{i,j}) c_{r(i,j,k-1)}^{n+1} + (F_{r(i,j,k)}^n/A_{(i,j)}), \quad (27)$$

что занимает $16N$ арифметических операций.

2.3. Построение параллельных алгоритмов для расчета двумерных задач

Рассмотрим построение параллельных алгоритмов для расчета двумерных задач. Расчетная область покрыта равномерной сеткой:

$$\omega_{i,j} = \{x(ih_x) = x_i, y(jh_y) = y_j; i \in \overline{0, N_x - 1}, j \in \overline{0, N_y - 1}; h_x N_x = L_x, h_y N_y = L_y\},$$

где i, j — индексы расчетной области, h_x, h_y — шаги по пространственным направлениям, N_x, N_y — количество шагов по пространственным направлениям, L_x, L_y — размеры расчетной области.

В узлах расчетной сетки вычисляются значения поля $u(x, y)$: $u_{i,j}$ при $i \in \overline{1, N_x - 2}, j \in \overline{1, N_y - 2}$, при этом по периметру ($i \in \overline{0, N_x - 1}, j \in \overline{0, N_y - 1}$) находятся фиктивные узлы. Выполним декомпозицию расчетной области вдоль пространственного направления Oy прямыми, параллельными оси Ox , при этом обозначим w^r — подобласть с номером r , $0 \leq r \leq p - 1$, где p — количество подобластей, на которые разбита исходная область. Расчетными узлами области w^r являются элементы $u_{i,j}^r$ при $i \in \overline{1, N_x - 2}, j \in \overline{1, N_y^r - 2}$. Разбиение исходной области выполнено таким образом, чтобы смежные области w^r и w^{r+1} пересекались в двух узлах вдоль направления, перпендикулярного линиям разбиения, и имели место равенства $u_{i, N_y^r - 2}^r = u_{i, 0}^{r+1}, u_{i, N_y^r - 1}^r = u_{i, 1}^{r+1}$. На рис. 1 представлена декомпозиция расчетной области, где белые круги обозначают фиктивные узлы расчетной сетки, синие — узлы, в которых осуществляется расчет первым вычислителем, красные — узлы, в которых осуществляется расчет вторым вычислителем.

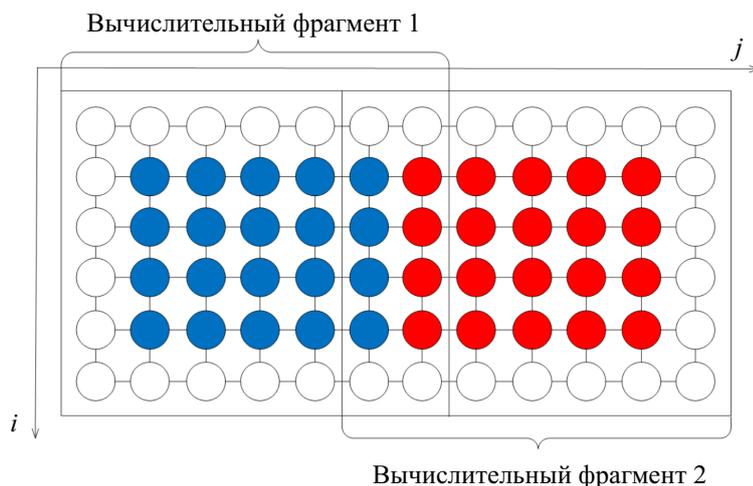


Рис. 1. Декомпозиция расчетной области (цвет онлайн)
 Fig. 1. Decomposition of the computational domain (color online)

Для представления значения поля $u(x, y)$ в векторной форме паре индексов i, j можно поставить в соответствие значение m , описывающее порядковый номер элемента вектора u : $m = i + jN_x, 0 \leq m \leq n - 1, n$ — длина вектора $u = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})^T$. Данное представление



удобно использовать при описании и исследовании алгоритмов решения сеточных уравнений итерационными методами.

Для фрагментов w^r , полученных в результате декомпозиции расчетной области по одному пространственному направлению, необходимо знать два параметра: начальный индекс $j = N_1^r$ в исходной расчетной области и ширину фрагмента N_2^r . Номер индекса N_1^r , с которого начинается соответствующий фрагмент расчетной области, можно рассчитать по формуле

$$N_1^r = \lfloor r \cdot (N_y - 2) / p \rfloor.$$

Здесь и далее $\lfloor x \rfloor$ — функция «пол» определяется как наибольшее целое, меньшее или равное x , $\lceil x \rceil$ — функция «потолок» определяется как наименьшее целое, большее или равное x .

Ширина подобласти w^r вдоль оси Oy рассчитывается по формуле

$$N_2^r = \lfloor (r + 1) \cdot (N_y - 2) / p \rfloor - N_1^r + 2.$$

Для теоретической оценки работы вычислительных систем используют следующие параметры:

- t_a — время выполнения одной арифметической операции;
- t_l — время организации передачи данных (латентность);
- t_x — время передачи одного данного.

На рис. 2 приведен график зависимости времени передачи от объема данных для разного количества обменов между узлами вычислительной системы. На графике видно, что функция зависимость времени передачи имеет скачок при объемах передаваемых данных, равных примерно 512 числам с плавающей точкой. Обозначим данное значение $N_{\max} = 512$.

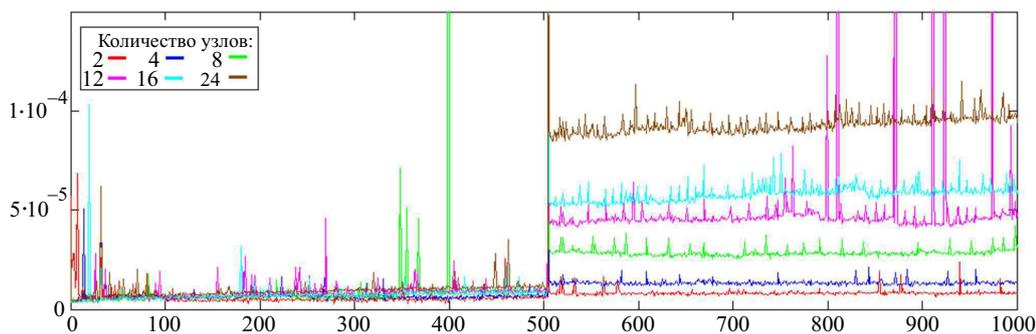


Рис. 2. Зависимость времени передачи данных от объема при работе с разным числом вычислительных узлов (цвет онлайн)

Fig. 2. Dependence of data transfer time on volume when working with different numbers of computing nodes (color online)

Расчет данных на многопроцессорной вычислительной системе позволяет в значительной мере сократить время вычислений. Однако эффективность времени работы вычислительной системы не всегда может быть ожидаемой. В этом случае корректно провести теоретический анализ расчета времени вычислений на основе регрессионного анализа.

Рассмотрим модель множественной регрессии. Вектор t_l — итоговое время работы вычислительной системы (секунды), векторы n, p — объясняющие факторы: объем передаваемых данных и количество используемых вычислительных узлов. Для времени латентности имеет место формула

$$t_l(p, n) = \begin{cases} 5.21 \cdot 10^{-6} + 1.53 \cdot 10^{-7}p, & \text{если } n \leq 512, \\ 6.733 \cdot 10^{-6}p, & \text{если } n > 512. \end{cases} \quad (28)$$

Время передачи одного данного $t_x = 3.3 \times 10^{-9}$.

Временные траты на одну итерацию в случае последовательного варианта алгоритма составят

$$t = 21t_a(N_x - 2)(N_y - 2). \tag{29}$$

При расчете параллельным алгоритмом на многопроцессорной вычислительной системе время расчета составит

$$t = t_a 21 (N_x - 2) \max_r (N_2^r - 2) + 2 (t_l (p, N_x - 2) + (N_x - 2) t_x),$$

$$\left\lfloor \frac{N_y - 2}{p} \right\rfloor \leq \max_r (N_2^r - 2) \leq \left\lceil \frac{N_y - 2}{p} \right\rceil, \quad \max_r N_2^r \approx \frac{N_y - 2}{p}.$$

В случае если объем передаваемых данных больше $N_x - 2 > N_{\max}$, то выполняется $k = \lceil (N_x - 2) / N_{\max} \rceil$ обменов, тогда временные траты параллельного алгоритма равны

$$t = 21t_a \frac{(N_x - 2)(N_y - 2)}{p} + 2 (t_l (p, \lceil (N_x - 2) / k \rceil) k + (N_x - 2) t_x). \tag{30}$$

Ускорение параллельной работы алгоритма равно

$$S_p = \frac{21pt_a (N_x - 2)(N_y - 2)}{21t_a (N_x - 2)(N_y - 2) + 2p (t_{lat} (p, \lceil \frac{N_x - 2}{k} \rceil) k + (N_x - 2) t_x)}. \tag{31}$$

На рис. 3 представлены результаты работы параллельного варианта алгоритма для различного числа процессоров при варьируемой декомпозиции расчетной области. Здесь изображены графики ускорения параллельной версии алгоритма схемы расщепления на двумерную явную и одномерную неявную на основе технологии MPI и линейного ускорения в зависимости от числа задействованных вычислителей (с учетом различных вариантов декомпозиции расчетной области). Максимальное число использованных вычислителей — 24, размер расчетной сетки составил $1000 \times 1000 \times 60$ узлов.

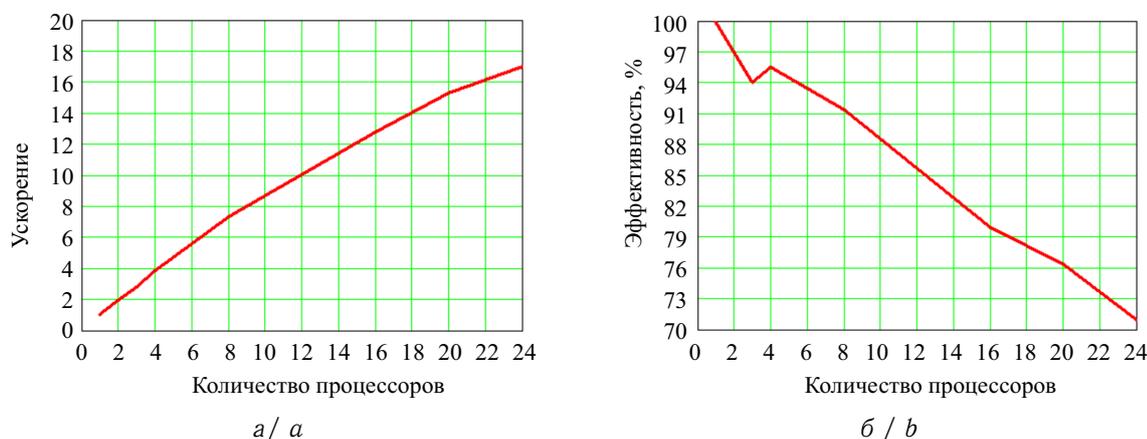


Рис. 3. Результаты работы параллельного варианта алгоритма для различного числа процессоров при варьируемой декомпозиции расчетной области: а — концентрация взвеси в воде; б — поле плотности водной среды

Fig. 3. Results of the parallel version of the algorithm for different numbers of processors with varying decomposition of the computational domain: a — concentration of suspended matter in water; b — density field of the aquatic environment

3. Численные эксперименты моделирования переноса загрязняющих веществ

Описанный выше подход к оценке качества вод является частью разрабатываемого в коллективе прогнозного комплекса «Azov3d». Данный комплекс использовался для расчета трехмерного вектора скорости течения водной среды в акватории Азовского моря, учитывает



такие физические параметры, как сила Кориолиса, турбулентный обмен, сложная геометрия дна и береговой линии, испарение, стоки рек, сгонно-нагонные явления, ветровые течения и трение о дно, и обеспечивает расчет гидростатического давления и трехмерного поля скорости. С помощью внедрения новых расчетных функций были встроены параллельные программные блоки, предназначенные для моделирования переноса загрязняющих веществ. Разработанный программный комплекс может применяться для расчета переноса как для тяжелых примесей так и для примесей, которые легче воды, таких как микропластик. Численная реализация предложенных математических моделей осуществлена на основе параллельных алгоритмов, ориентированных на многопроцессорную вычислительную систему.

3.1. Моделирование транспорта взвеси при дампинге грунта

В качестве модельного примера рассмотрим моделирование процесса осаждения взвеси при проведении дноуглубительных работ [22] на основе модели (11)–(15).

Входные данные по акватории и взвеси: длина водоема — 3 км; ширина водоема — 1.4 км; глубина водоема — 10 м; скорость течения — 0.2 м/с; объем загрузки — 741 м³; скорость осаждения взвеси (по Стоксу) — 2.042 мм/с; плотность грунта — 1600 кг/м³; процентное содержание пылеватых частиц ($d < 0.05$ мм) в песчаных грунтах — 26.83%.

Параметры расчетной области: шаг по горизонтальным пространственным координатам — 20 м; шаг по вертикальной пространственной координате — 1 м; расчетный интервал — 2 ч; шаг по времени — 1 мин.

На рис. 4 приведена динамика изменения концентрации взвешенных частиц (мг/л) с течением времени.

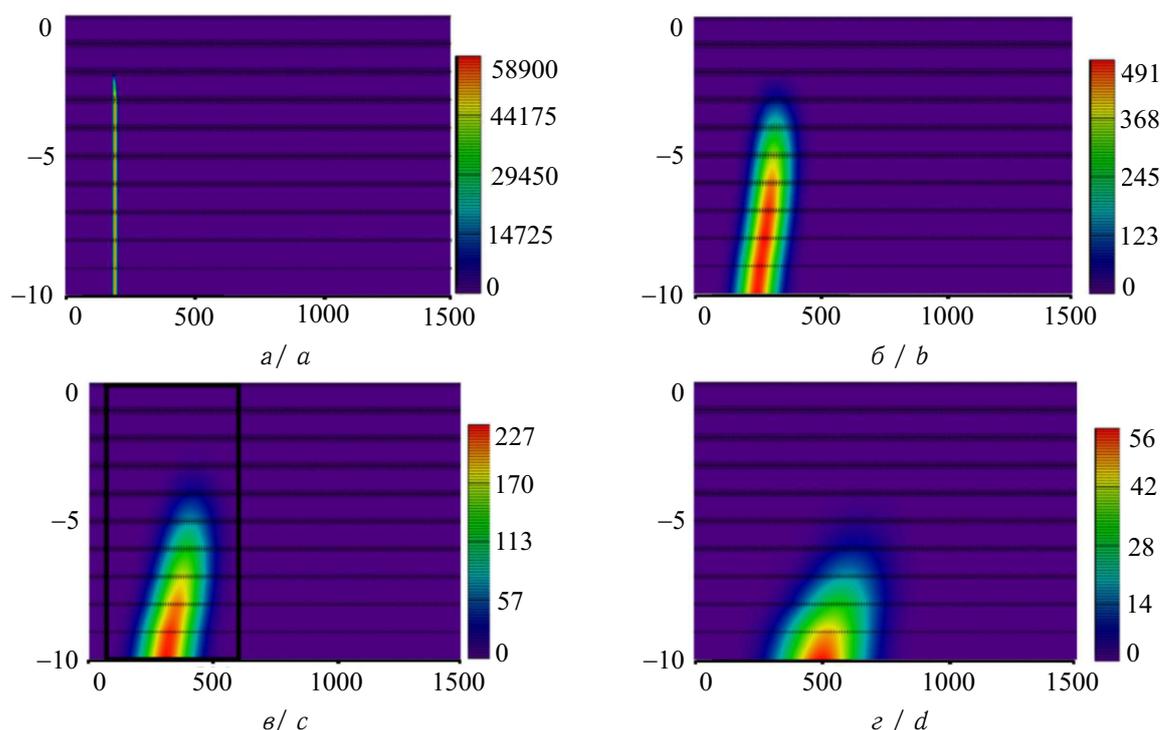


Рис. 4. Поле концентрации взвешенных частиц в разные моменты времени: *a* — начальный момент; *b* — через 15 мин.; *c* — через 30 мин.; *d* — через 45 мин. после момента выгрузки (цвет онлайн)

Fig. 4. Concentration field of suspended particles at different times: *a* — initial moment; *b* — after 15 min; *c* — 30 min; *d* — 45 min after the moment of unloading (color online)

Приведены значения поля концентрации взвеси в сечении расчетной области плоскостью, проходящей через точку выгрузки и образованной векторами, направленными вертикально



и вдоль течения. Течения направлены слева направо. Исходя из полученных материалов, рассчитываем общее количество загрязненной воды при отвалах грунта (таблица).

Объемы загрязненной воды при сбросе грунта
Table. Volumes of contaminated water during soil discharge

№ участка	Общий объем загрязненной воды при разовом сбросе, млн м ³	В том числе воды с концентрациями ЗВ, млн м ³			Кол-во сбросов	Общий объем воды с концентрациями ЗВ, млн м ³		
		>0.25 мг/л	>20 мг/л	>100 мг/л		>0.25 мг/л	>20 мг/л	>100 мг/л
1	1.285	0.890	0.245	0.150	124	110.360	30.38	18.6
2	1.120	0.813	0.202	0.105	50	4.650	10.10	5.25
3	1.279	0.889	0.240	0.150	45	40.005	10.80	6.75

На основе разработанного программного комплекса, включающего в себя модули расчета гидродинамических процессов, транспорта взвешенных частиц и биологической продуктивности фито- и зоопланктона, определен объем вод, загрязненных при отвалах грунта; рассчитаны площади областей, в которых наблюдается гибель донной растительности на отвалах и в районах дноуглубительных работ. Данный программный комплекс позволяет спрогнозировать как распространение шлейфов взвеси в водной среде, так и изменение рельефа дна в связи с выпадением взвешенных частиц грунта в осадок. На основе разработанного программного комплекса установлено, что уменьшение размеров областей отвалов грунта позволяет минимизировать ущерб, наносимый биотопам.

3.2. Моделирование транспорта взвешенных частиц в устьевом районе

Рассмотрим результаты работы программного комплекса на примере водного участка, расположенного в устьевом районе. Входные данные по акватории и взвеси: длина водоема — 50 м; ширина водоема — 50 м; глубина водоема — 2 м; скорость течения — 0.2 м/с; скорость осаждения взвеси (по Стоксу) — 2.042 мм/с; плотность пресной воды при нормальных условиях — 1000 кг/м³; плотность взвеси — 2700 кг/м³; объемная доля взвеси — 1/17. Параметры расчетной области: шаг по горизонтальным пространственным координатам — 0.5 м; шаг по вертикальной пространственной координате — 0.1 м; расчетный интервал — 5 мин, шаг по времени — 0.25 с. На рис. 5 представлена геометрия расчетной области в виде карты глубин.

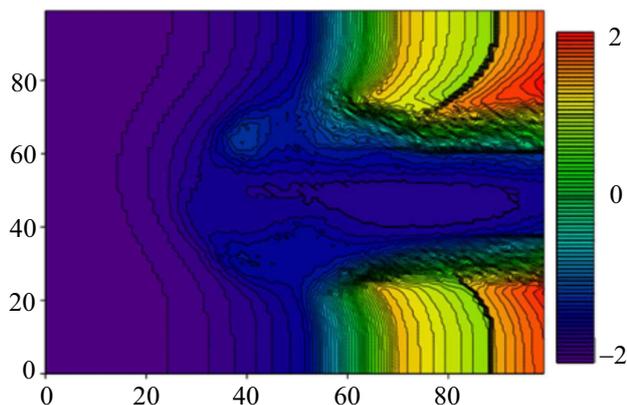


Рис. 5. Карта глубин расчетной области (цвет онлайн)
Fig. 5. Depth map of the computational domain (color online)

существенного градиента плотности водной среды (слева показана средняя концентрация по глубине, справа — плотность в сечении плоскостью Oxz , проходящей по центру расчетной области (при $y = 25$ м)). На вертикальных срезах справа можно наблюдать изменение концентрации взвеси в стратифицированных слоях водной среды при меняющейся плотности с течением времени.

На рис. 6, 7 представлены результаты моделирования процесса транспорта взвеси в результате смешения и движения вод в устьевом районе при наличии

результаты моделирования процесса транспорта взвеси в результате смешения и движения вод в устьевом районе при наличии

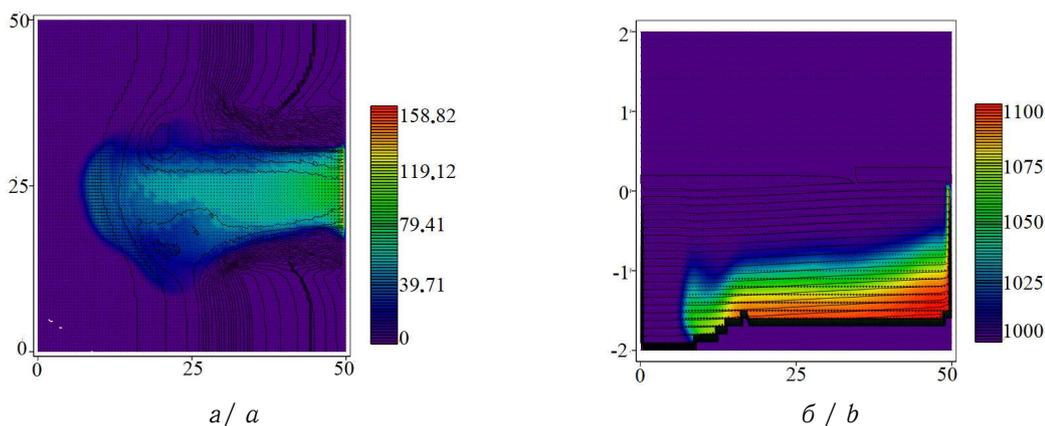


Рис. 6. Движение вод в устьевом районе при наличии существенного градиента плотности водной среды через 1 мин: *a* — концентрация взвеси в воде; *б* — поле плотности водной среды (цвет онлайн)

Fig. 6. Movement of water in the mouth area in the presence of a significant density gradient of the aquatic environment after 1 min: *a* — concentration of suspended matter in water; *b* — density field of the aquatic environment (color online)

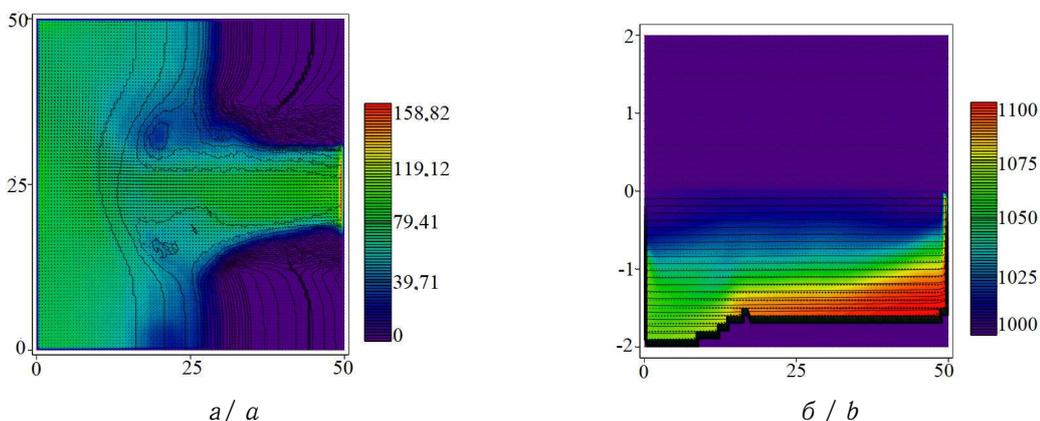


Рис. 7. Движение вод в устьевом районе при наличии существенного градиента плотности водной среды через 5 мин: *a* — концентрация взвеси в воде; *б* — поле плотности водной среды (цвет онлайн)

Fig. 7. Movement of water in the mouth area in the presence of a significant density gradient of the aquatic environment after 5 min: *a* — concentration of suspended matter in water; *b* — density field of the aquatic environment (color online)

Разработанный программный комплекс может применяться для расчета переноса как для тяжелых примесей, так и для примесей, которые легче воды. При выявлении зон экологического бедствия и риска использовались «Критерии оценки экологической обстановки территорий для выявления зон чрезвычайной экологической ситуации и зон экологического бедствия»¹, а также работы Г. Г. Винберга [23, 24]. Оценка экологического состояния проводилась по уровню антропогенной нагрузки в соответствии с Р 52.24.661-2004², оценивались доля и степень антропогенного воздействия по формулам

$$D = (N_1/N) \cdot 100\%, \quad C = (N_2/N_1) \cdot 100\%,$$

¹Руководящий документ РД 52.24.643-2002. Метод комплексной оценки степени загрязненности поверхностных вод по гидрохимическим показателям. Приложение Г. URL: <https://meganorm.ru/Data2/1/4293831/4293831806.htm#i238828> (дата обращения: 05.04.2023).

²Руководящий документ РД 52.24.661-2004. Оценка риска антропогенного воздействия приоритетных загрязняющих веществ на поверхностные воды суши. URL: <https://meganorm.ru/Data2/1/4293834/4293834036.pdf> (дата обращения: 05.04.2023).



где D , C — доля и степень антропогенного воздействия соответственно; N — общее число нормируемых приоритетных загрязняющих веществ; N_1 — число ингредиентов, превышающих предельно допустимую концентрацию; N_2 — число ингредиентов, превышающих 10 предельно допустимых концентраций. Оценка экологического состояния Азовского моря может проводиться также по системообразующим показателям на основе статистических характеристик вариационного ряда значений концентраций легкоокисляемых органических веществ (по биологическому потреблению кислорода БПК₅), соединений азота аммонийного и значений содержания растворенного в воде кислорода.

Для оценки качества морской воды использовались наиболее информативные комплексные показатели качества воды [25], включая удельный комбинаторный индекс загрязненности воды (УКИЗВ) и класс качества воды (ККВ).

Учет основных внешних факторов в моделях гидродинамики и биологической кинетики позволил воспроизвести положительный тренд солености в бассейне Азовского моря [26]. Выявлено, что на всей акватории отмечено формирование стратификации водных масс по содержанию кислорода во все сезоны года. В период роста солености и снижения среднегодового стока реки Дон в Таганрогском заливе отмечено снижение концентрации биогенных элементов, хотя при этом сохраняется высокая интенсивность продуктивности фитопланктона. Концентрации биогенных элементов в современный период осолонения в собственно море остаются на уровне среднемноголетних значений, однако увеличение солености, приводящее к смене таксономических групп фитопланктона, снижает уровень первичного продуцирования органического вещества. Увеличение доли органической формы азота и фосфора в период осолонения в Таганрогском заливе связано с развитием первичной продукции фитопланктона, а в собственно море — с поступлением аллохтонного органического вещества с материковым стоком. В целом экологическое состояние Азовского моря улучшается, но улучшается по индексу ИЗВ, морская вода в последние годы относится к классу умеренно загрязненной.

Заключение

Для мониторинга и оценки рисков антропогенного воздействия на водные объекты необходима оценка качественного и количественного состава сбрасываемых загрязняющих веществ, а также прогнозирование неблагоприятных явлений, вызванных антропогенным воздействием [27]. Известно, что вдали от стока рек в водоем из атмосферы поступает более 60% загрязняющих веществ, оказывающих существенное влияние на процессы развития и гибели биоты. Вследствие увеличения антропогенной нагрузки на прибрежные системы возникает острая необходимость анализа и прогноза распространения загрязняющих веществ в акватории водоема [28].

Разработанный программный комплекс учитывает такие немаловажные для моделирования ситуации в водоеме параметры, как характеристики загрязнения вод по доле и степени антропогенного воздействия, фактор риска и др. Разработанный алгоритм позволяет моделировать динамику процессов распространения загрязняющих веществ, поступающих в Азовское море со стоками рек и из приземного слоя атмосферы, с учетом метеорологических условий, процессов взаимодействия и оседания загрязняющих примесей.

Программный комплекс позволяет моделировать условия развития экологической обстановки мелководного водоема в ускоренном масштабе времени для дальнейшего предотвращения негативных последствий, связанных с материальным ущербом и угрозой здоровью и жизни людей.

Список литературы

1. *Moriasi D. N., Wilson B. N., Douglas-Mankin K. R., Arnold J. G., Gowda P. H.* Hydrologic and water quality models: Use, calibration, and validation // Transactions of the ASABE. 2012. Vol. 55, iss. 4. P. 1241–1247. <http://dx.doi.org/10.13031/2013.42265>
2. *Bristeau M. O., Perthame B.* Transport of pollutant in shallow water using kinetic schemes // ESAIM Proceedings. 2001. Vol. 10. P. 9–21. <http://dx.doi.org/10.1051/proc:2001002>



3. *Hang Z.* Commentary on study of surface water quality model // *Journal of Water Resources and Architectural Engineering*. 2006. Vol. 4, iss. 4. P. 18–21.
4. *Burn D. H., McBean E. A.* Optimization modeling of water quality in an uncertain environment // *Water Resources Research*. 1985. Vol. 21, iss. 7. P. 934–940. <https://doi.org/10.1029/WR021i007p00934>
5. *Rinaldi S., Soncini-Sessa R.* Sensitivity analysis of generalized Streeter – Phelps models // *Advances in Water Resources*. 1978. Vol. 1, iss. 3. P. 141–146. [https://doi.org/10.1016/0309-1708\(78\)90024-6](https://doi.org/10.1016/0309-1708(78)90024-6)
6. *Dobbins W. E.* BOD and oxygen relationships in streams // *Journal of Sanitary Engineering Division*. 1964. Vol. 90, iss. 3. P. 53–78. <https://doi.org/10.1061/JSEDAI.0000495>
7. *Camp T. R.* *Water and Its Impurities*. New York : Van Nostrand Reinhold Inc., 1963. 368 p.
8. *Mujumdar P. P., Subbarao Vemula V. R.* Fuzzy waste load allocation model: Simulation-optimization approach // *Journal of Computing in Civil Engineering*. 2004. Vol. 18, iss. 2. P. 120–131. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0887-3801\(2004\)18:2\(120\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0887-3801(2004)18:2(120))
9. *Yih S.-M., Davidson B.* Identification in nonlinear, distributed parameter water quality models // *Water Resources Research*. 1975. Vol. 11, iss. 5. P. 693–704. <https://doi.org/10.1029/WR011i005p00693>
10. *Jirka G. H.* Large scale flow structures and mixing processes in shallow flows // *Journal of Hydraulic Research*. 2001. Vol. 39, iss. 6. P. 567–573. <https://doi.org/10.1080/00221686.2001.9628285>
11. *Murillo J., Burguete J., Bruñau P., Garcia-Navarro P.* Coupling between shallow water and solute flow equations: Analysis and management of source terms in 2D // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2005. Vol. 49, iss. 3. P. 267–299. <https://doi.org/10.1002/fld.992>
12. *Vasilachi I. C., Asimnicesei D. M., Fertu D. I., Gavrilescu M.* Occurrence and fate of emerging pollutants in water environment and options for their removal // *Water*. 2021. Vol. 13. Art. 181. <https://doi.org/10.3390/w13020181>
13. *Wang Q., Li S., Jia P., Qi C., Ding F.* A review of surface water quality models // *The Scientific World Journal*. 2013. Vol. 2013. Art. 231768. <https://doi.org/10.1155/2013/231768>
14. *Сидорякина В. В., Сухинов А. И.* Исследование корректности и численная реализация линейризованной двумерной задачи транспорта наносов // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2017. Т. 57, № 6. С. 985–1002. <http://doi.org/10.7868/S0044466917060138>, EDN: YRWNQH
15. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А., Сидорякина В. В., Проценко С. В.* Комплекс объединенных моделей транспорта наносов и взвесей с учетом трехмерных гидродинамических процессов в прибрежной зоне // *Математическое моделирование*. 2020. Т. 32, № 2. С. 3–23. <https://doi.org/10.20948/mm-2020-02-01>
16. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А., Сидорякина В. В., Проценко С. В.* Параллельные алгоритмы решения задачи динамики изменения рельефа дна в прибрежных системах // *Вычислительные методы и программирование*. 2020. Т. 21, вып. 3. С. 196–206. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r318>, EDN: UHVOOQ
17. *Четверушкин Б. Н.* Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред // *Математическое моделирование*. 2012. Т. 24, № 11. С. 33–52. EDN: RXPNZB
18. *Д’Асцензо Н., Савельев В. И., Четверушкин Б. Н.* Об одном алгоритме решения параболических и эллиптических уравнений // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2015. Т. 55, № 8. С. 1320–1328. <https://doi.org/10.7868/S0044466915080037>, EDN: UDEXPJ
19. *Четверушкин Б. Н., Д’Асцензо Н., Савельев А. В., Савельев В. И.* Кинетическая модель для магнитной газовой динамики // *Математическое моделирование*. 2017. Т. 29, № 3, С. 3–15. EDN: YIXTTB
20. *Сухинов А. И., Проценко Е. А., Чистяков А. Е., Шретер С. А.* Сравнение вычислительных эффективностей явной и неявной схем для задачи транспорта наносов в прибрежных водных системах // *Вычислительные методы и программирование*. 2015. Т. 16, вып. 3. С. 328–338. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v16r332>, EDN: YTTYNN
21. *Sukhinov A., Chistyakov A., Sidoryakina V.* Investigation of nonlinear 2D bottom transportation dynamics in coastal zone on optimal curvilinear boundary adaptive grids // XIII International Scientific-Technical Conference “Dynamic of Technical Systems” (DTS-2017) (September 13–15, 2017). Rostov-on-Don : EDP Sciences, 2017. Art. 4003. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201713204003>, EDN: ZWFGPV
22. *Ковтун И. И., Проценко Е. А., Сухинов А. И., Чистяков А. Е.* Расчет воздействия на водные биоресурсы дноуглубительных работ в Белом море // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2016. Т. 9, № 2. С. 27–38. EDN: XENHWZ



23. Биологические процессы и самоочищение на загрязненном участке реки: (на примере верх. Днепра) / под ред. Г. Г. Винберга. Минск : Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1973. 192 с.
24. Винберг Г. Г., Алимов А. Ф., Балушкина Е. В., Никулина В. Н., Финогенова Н. П., Цалолыхин С. Я. Опыт применения разных систем биологической индикации загрязнения вод // Научные основы контроля качества поверхностных вод по гидробиологическим показателям. Ленинград : Гидрометеиздат, 1977. С. 124–132.
25. Данилов-Данильян В. И., Готовцев А. В., Никаноров А. М. Проблемы мониторинга БПК // Водные ресурсы. 2012. Т. 39, № 5. С. 510–520. EDN: [PBWDDP](#)
26. Джамалов Р. Г., Мяжкова К. Г., Никаноров А. М., Решетняк О. С., Сафронова Т. И., Трофимчук М. М. Гидрохимический сток рек бассейна Оки // Вода и экология: проблемы и решения. 2017. № 4 (72). С. 26–39. <https://doi.org/10.23968/2305-3488.2017.22.4.26-39>, EDN: [YPORLZ](#)
27. Никаноров А. М., Брызгалов В. А., Решетняк О. С. Изменчивость экологического состояния речных зон устьевых экосистем крупных рек России // Вода: химия и экология. 2013. № 12. С. 15–21. EDN: [RPYDUF](#)
28. Матишов Г. Г., Степаньян О. В., Григоренко К. С., Харьковский В. М., Поважный В. В., Сойер В. Г. Особенности гидролого-гидрохимического режима Азовского и Черного морей в 2013 г. // Вестник Южного научного центра. 2015. Т. 11, № 2. С. 36–44. EDN: [UCBKRJ](#)

References

1. Moriasi D. N., Wilson B. N., Douglas-Mankin K. R., Arnold J. G., Gowda P. H. Hydrologic and water quality models: Use, calibration, and validation. *Transactions of the ASABE*, 2012, vol. 55, iss. 4, pp. 1241–1247. <http://dx.doi.org/10.13031/2013.42265>
2. Bristeau M. O., Perthame B. Transport of pollutant in shallow water using kinetic schemes. *ESAIM Proceedings*, 2001, vol. 10, pp. 9–21. <http://dx.doi.org/10.1051/proc:2001002>
3. Hang Z. Commentary on study of surface water quality model. *Journal of Water Resources and Architectural Engineering*, 2006, vol. 4, iss. 4, pp. 18–21.
4. Burn D. H., McBean E. A. Optimization modeling of water quality in an uncertain environment. *Water Resources Research*, 1985, vol. 21, iss. 7, pp. 934–940. <https://doi.org/10.1029/WR021i007p00934>
5. Rinaldi S., Soncini-Sessa R. Sensitivity analysis of generalized Streeter – Phelps models. *Advances in Water Resources*, 1978, vol. 1, iss. 3, pp. 141–146. [https://doi.org/10.1016/0309-1708\(78\)90024-6](https://doi.org/10.1016/0309-1708(78)90024-6)
6. Dobbins W. E. BOD and oxygen relationships in streams. *Journal of the Sanitary Engineering Division*, 1964, vol. 90, iss. 3, pp. 53–78. <https://doi.org/10.1061/JSEDAI.0000495>
7. Camp T. R. *Water and Its Impurities*. New York, Van Nostrand Reinhold Inc., 1963. 368 p.
8. Mujumdar P. P., Subbarao Vemula V. R. Fuzzy waste load allocation model: Simulation-optimization approach. *Journal of Computing in Civil Engineering*, 2004, vol. 18, iss. 2, pp. 120–131. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0887-3801\(2004\)18:2\(120\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0887-3801(2004)18:2(120))
9. Yih S.-M., Davidson B. Identification in nonlinear, distributed parameter water quality models. *Water Resources Research*, 1975, vol. 11, iss. 5, pp. 693–704. <https://doi.org/10.1029/WR011i005p00693>
10. Jirka G. H. Large scale flow structures and mixing processes in shallow flows. *Journal of Hydraulic Research*, 2001, vol. 39, iss. 6, pp. 567–573. <https://doi.org/10.1080/00221686.2001.9628285>
11. Murillo J., Burguete J., Brufau P., Garcia-Navarro P. Coupling between shallow water and solute flow equations: Analysis and management of source terms in 2D. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2005, vol. 49, iss. 3, pp. 267–299. <https://doi.org/10.1002/fld.992>
12. Vasilachi I. C., Asiminicesei D. M., Fertu D. I., Gavrilesco M. Occurrence and fate of emerging pollutants in water environment and options for their removal. *Water*, 2021, vol. 13, art. 181. <https://doi.org/10.3390/w13020181>
13. Wang Q., Li S., Jia P., Qi C., Ding F. A review of surface water quality models. *The Scientific World Journal*, 2013, vol. 2013, art. 231768. <https://doi.org/10.1155/2013/231768>
14. Sidoryakina V. V., Sukhinov A. I. Well-posedness analysis and numerical implementation of a linearized two-dimensional bottom sediment transport problem. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, iss. 6, pp. 978–994. <https://doi.org/10.1134/S0965542517060124>, EDN: [ZBVIXB](#)
15. Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Protsenko E. A., Sidoryakina V. V., Protsenko S. V. Set of coupled transport models of suspended matter, taking into account three-dimensional hydrodynamic processes in the coastal zone. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2020, vol. 12, iss. 5, pp. 757–769. <https://doi.org/10.1134/S207004822005018X>

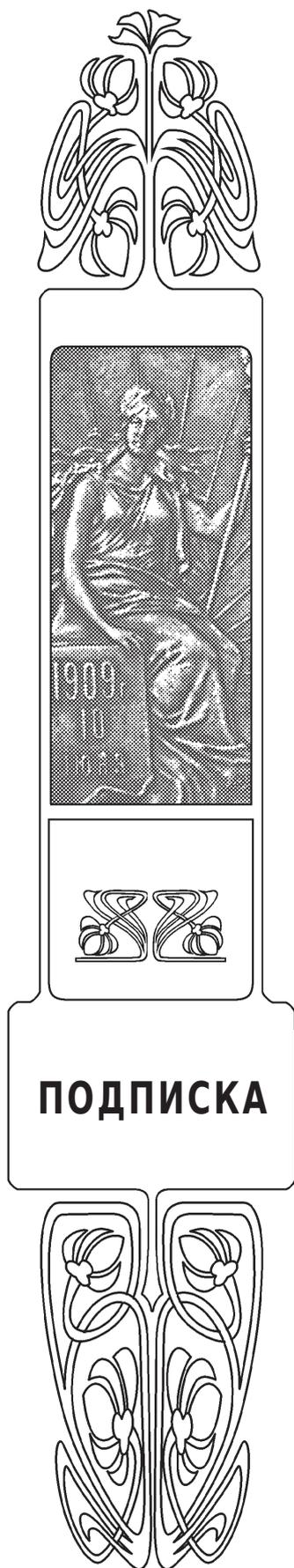


16. Sukhinov A. I., Chistyakov A. E., Protsenko E. A., Sidoryakina V. V., Protsenko S. V. Parallel algorithms for solving the problem of coastal bottom relief dynamics. *Numerical Methods and Programming*, 2020, vol. 21, iss. 3, pp. 196–206 (in Russian). <https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r318>, EDN: UHVOOQ
17. Chetverushkin B. N. Resolution limits of continuous media models and their mathematical formulations. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2013, vol. 5, iss. 3, pp. 266–279. <https://doi.org/10.1134/S2070048213030034>
18. D’Ascenzo N., Saveliev V. I., Chetverushkin B. N. On an algorithm for solving parabolic and elliptic equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, iss. 8, pp. 1290–1297. <https://doi.org/10.1134/S0965542515080035>
19. Chetverushkin B. N., D’Ascenzo N., Saveliev A. V., Saveliev V. I. A kinetic model for magnetogas-dynamics. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2017, vol. 9, iss. 5, pp. 544–553. <https://doi.org/10.1134/S2070048217050039>
20. Sukhinov A. I., Protsenko E. A., Chistyakov A. E., Shreter S. A. Comparison of computational efficiency of explicit and implicit schemes for the sediment transport problem in coastal zones. *Vychislitel’nye metody i programmirovaniye* [Numerical Methods and Programming], 2015, vol. 16, iss. 3, pp. 328–338 (in Russian). <https://doi.org/10.26089/NumMet.v16r332>, EDN: YTTYNN
21. Sukhinov A., Chistyakov A., Sidoryakina V. Investigation of nonlinear 2D bottom transportation dynamics in coastal zone on optimal curvilinear boundary adaptive grids. *XIII International Scientific-Technical Conference “Dynamic of Technical Systems” (DTS-2017) (September 13–15, 2017)*. Rostov-on-Don, EDP Sciences, 2017, art. 4003. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201713204003>, EDN: ZWFGPV
22. Kovtun I. I., Protsenko E. A., Sukhinov A. I., Chistyakov A. E. Calculating the impact on aquatic resources dredging in the White Sea. *Fundamentalnaya i prikladnaya gidrofizika* [Fundamental and Applied Hydrophysics], 2016, vol. 9, iss. 2, pp. 27–38 (in Russian). EDN: XENHWZ
23. *Biologicheskkiye protsessy i samoochishcheniye na zagryaznennom uchastke reki: (na primere verkh. Dnepra)* [Vinberg G. G. (ed.) Biological Processes and Self-purification in a Polluted River Section: The Example of the Upper Dnieper]. Minsk, Belarusian University Publ., 1973. 192 p. (in Russian).
24. Vinberg G. G., Alimov A. F., Balushkina E. V., Nikulina V. N., Finogenova N. P., Tsalolikhin S. Ya. Experience in using different systems for biological indication of water pollution. In: *Nauchnyye osnovy kontrolya kachestva poverkhnostnykh vod po gidrobiologicheskim pokazatelyam* [Scientific Basis for Monitoring the Quality of Surface Waters Based on Hydrobiological Indicators]. Leningrad, Gidrometeoizdat, 1977, pp. 124–132 (in Russian).
25. Danilov-Danilyan V. I., Gotovtsev A. V., Nikanorov A. M. BOD monitoring problems. *Water Resources*, 2012, vol. 39, iss. 5, pp. 546–555. <https://doi.org/10.1134/S0097807812040069>, EDN: RGHYKF
26. Dzhamaalov R. G., Myagkova K. G., Nikanorov A. M., Reshetnyak O. S., Safronova T. I., Trofimchuk M. M. Hydrochemical runoff of rivers in the Oka basin. *Voda i ekologiya: problemy i resheniya* [Water and Ecology: Problems and Solutions], 2017, iss. 4 (72), pp. 26–39 (in Russian). <https://doi.org/10.23968/2305-3488.2017.22.4.26-39>, EDN: YPORLZ
27. Nikanorov A. M., Bryzgalov V. A., Reshetnyak O. S. Variability of the ecological state of river zones of estuarine ecosystems of large Russian rivers. *Voda: khimiya i ekologiya* [Water: Chemistry and Ecology], 2013, iss. 12, pp. 15–21 (in Russian). EDN: RPYDUF
28. Matishov G. G., Stepanyan O. V., Grigorenko K. S., Kharkovsky V. M., Povazhny V. V., Soyev V. G. Specific features of hydrological and hydrochemical conditions of the Sea of Azov and the Black Sea in 2013. *Bulletin of the Southern Scientific Center*, 2015, vol. 11, iss. 2. P. 36–44 (in Russian). EDN: UCBKRJ

Поступила в редакцию / Received 11.05.2023

Принята к публикации / Accepted 11.07.2023

Опубликована / Published 31.05.2024



Подписка на печатную версию

Подписной индекс издания 36017.
Оформить подписку на печатную версию
можно в интернет-каталоге
ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru).
Журнал выходит 4 раза в год.
Цена свободная

Электронная версия журнала находится
в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

Адрес издательства (редакции):

410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49, 52-26-89
Факс: +7(845-2) 27-85-29
E-mail: publ@sgu.ru, izdat@sgu.ru

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет
Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54
E-mail: mmi@sgu.ru
Website: <https://mmi.sgu.ru>

ISSN 1816-9791

24002



9 771816 979101

ISSN 1816-9791 (Print). ISSN 2541-9005 (Online)
Известия Саратовского университета. Новая серия.
Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024.
Том 24, выпуск 2

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Новая серия

Серия: Акмеология образования. Психология развития
Серия: История. Международные отношения

Серия: Математика. Механика. Информатика

Серия: Науки о Земле
Серия: Социология. Политология

Серия: Физика
Серия: Филология. Журналистика

Серия: Философия. Психология. Педагогика

Серия: Химия. Биология. Экология
Серия: Экономика. Управление. Право

