

ISSN 1816-9791 (Print)  
ISSN 2541-9005 (Online)

# ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия: Математика. Механика. Информатика

2024

Том 24

Выпуск 3



IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY  
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS





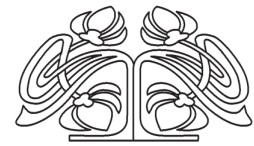
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

# ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 3

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,  
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал  
2024 Том 24

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издается с 2005 года

## СОДЕРЖАНИЕ

### Научный отдел

#### Математика

**Bredikhin D. A.** On semigroups of relations with the operation of the rectangular product [Бредихин Д. А. О полугруппах отношений с операцией прямоугольного произведения] 320

**Рацеев С. М.** Конструкции некоторых схем разделения секрета на основе линейных кодов 330

**Ступин Д. Л.** Новое доказательство гипотезы Кшижа при  $n = 3$  342

**Хромов А. П.** Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения 351

#### Механика

**Бессонов Л. В., Кириллова И. В., Фалькович А. С., Иванов Д. В., Доль А. В., Коссович Л. Ю.** Методология «Планирование – Моделирование – Прогнозирование» для предоперационного планирования в травматологии-ортопедии 359

**Дударев В. В., Дядечко В. Н.** Об идентификации двумерного закона изменения плотности упругого неоднородного цилиндра 381

**Кириллова И. В.** Гиперболический погранслой в окрестности фронта волны сдвига в оболочках вращения 394

**Микишанина Е. А.** Управление качеством динамически симметричного шара по наклонной вращающейся плоскости 402

**Панкратов И. А.** О перенормировке приближенного решения уравнений ориентации орбитальной системы координат 415

#### Информатика

**Егорчев А. А., Чикрин Д. Е., Фахрутдинов А. Ф., Шарипов М. Р., Бурнашев Р. А.** Методы получения информации биомедицинского мониторинга уровня оксигенации и артериального давления с использованием встроенных сенсоров смартфонной техники 423

**Клячин А. А.** Выделение признаков на изображениях на основе интегральных преобразований при решении задач классификации фрагментов фотоснимков 432

**Ковалева О. А., Самохвалов А. В., Ляшков М. А., Пчелинцев С. Ю.** Метод повышения качества обнаружения атак на веб-приложения с применением предобученных моделей естественного языка 442

**Sagatov E. S., Sukhov A. M., Azhmyakov V. V.** Detection of sources of network attacks based on the data sampling [Сагатов Е. С., Сухов А. М., Ажмяков В. В. Обнаружение источников сетевых атак на основе выборки данных] 452

### Приложения

#### Personalia

**Молоденков А. В., Челноков Ю. Н.** Памяти Якова Григорьевича Сапункова 463

Журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика»» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Запись о регистрации СМИ ПИ № ФС77-76640 от 26 августа 2019 г. Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (категория К1, специальности: 1.1.1; 1.1.2; 1.1.5; 1.1.6; 1.1.7; 1.1.8; 1.1.9; 1.1.10; 1.2.2; 2.3.1). Журнал индексируется RSCI, Web of Science (ESCI), Scopus, MathSciNet, zbMATH, DOAJ

Подписной индекс издания 36017. Подписку на печатные издания можно оформить в интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru). Журнал выходит 4 раза в год. Цена свободная. Электронная версия находится в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

#### Директор издательства

Бучко Ирина Юрьевна

#### Редактор

Каргин Игорь Анатольевич

#### Редактор-стилист

Агафонов Андрей Петрович

#### Верстка

Халова Виктория Анатольевна

#### Технический редактор

Каргин Игорь Анатольевич

#### Корректор

Агафонов Андрей Петрович

В оформлении издания использованы работы художника Соколова Дмитрия Валерьевича (13.11.1940–20.11.2023)

#### Адрес учредителя, издателя

и издательства (редакции):

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83

Тел.: +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49,

52-26-89

E-mail: publ@sgu.ru, izdat@sgu.ru

Подписано в печать 22.08.2024.

Подписано в свет 30.08.2024.

Формат 60 × 84 1/8.

Усл. печ. л. 18,13 (19,5).

Тираж 100 экз. Заказ 99-Т.

Отпечатано в типографии Саратовского университета.

#### Адрес типографии:

410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2024

**ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ**

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <https://mmi.sgu.ru/dlya-avtorov>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования. В случае положительного решения статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <https://mmi.sgu.ru>

**Адрес редколлегии серии:**

410012, Саратов, Астраханская, 83,  
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,  
механико-математический факультет

**Тел./факс:** +7(845-2) 26-15-54

**E-mail:** [mmi@sgu.ru](mailto:mmi@sgu.ru)

**Website:** <https://mmi.sgu.ru>

**Ответственный секретарь серии:**

Шевцова Юлия Владиславовна

**CONTENTS****Scientific Part****Mathematics**

**Bredikhin D. A.** On semigroups of relations with the operation of the rectangular product 320

**Ratseev S. M.** Constructions of some secret sharing schemes based on linear codes 330

**Stupin D. L.** A new proof of the Krzyz conjecture for  $n = 3$  342

**Khromov A. P.** Divergent series and generalized mixed problem for wave equation 351

**Mechanics**

**Bessonov L. V., Kirillova I. V., Falkovich A. S., Ivanov D. V., Dol A. V., Kossovich L. Yu.** The "Planning – Modelling – Prediction" methodology for preoperative planning in trauma orthopaedics 359

**Dudarev V. V., Dyadechko V. N.** On identification of two-dimensional density of an elastic inhomogeneous cylinder 381

**Kirillova I. V.** Hyperbolic boundary layer in the vicinity of the shear wave front in shells of revolution 394

**Mikishanina E. A.** Control of the rolling of a dynamically symmetrical sphere on an inclined rotating plane 402

**Pankratov I. A.** On renormalization of the approximate solution of the orbital coordinate system equations of orientation 415

**Computer Sciences**

**Egorchev A. A., Chickrin D. E., Fakhrutdinov A. F., Sharipov M. R., Burnashev R. A.** Methods for obtaining information for biomedical monitoring of the level of oxygenation and blood pressure using built-in sensors of smartphone technology 423

**Klyachin A. A.** Extraction of features in images based on integral transformations in solving problems of classification of fragments of photographs 432

**Kovaleva O. A., Samokhvalov A. V., Liashkov M. A., Pchelintsev S. Yu.** The quality improvement method for detecting attacks on web applications using pre-trained natural language models 442

**Sagatov E. S., Sukhov A. M., Azhmyakov V. V.** Detection of sources of network attacks based on the data sampling 452

**Appendices****Personalia**

**Molodenkov A. V., Chelnokov Yu. N.**  
In memory of Yakov G. Sapunkov 463



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА  
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.  
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

**Главный редактор**

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Заместитель главного редактора**

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Ответственный секретарь**

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

**Члены редакционной коллегии:**

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Бауэр Светлана Михайловна, доктор физ.-мат. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

dell'Isola Francesco, доктор наук, профессор (Рим, Италия)

Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Омск, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)

Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Беларусь)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Матвеенко Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, профессор, акад. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Долгопрудный,

Московская обл., Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук (Ульяновск, Россия)

Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, профессор, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D. (Киль, Великобритания)

Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Беларусь)

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Цатурян Андрей Кимович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чунань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL  
"IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY.  
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS"**

**Editor-in-Chief** – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

**Deputy Editor-in-Chief** – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

**Executive Secretary** – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

**Members of the Editorial Board:**

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Svetlana M. Bauer (St. Petersburg, Russia)

Francesco dell'Isola (Rome, Italy)

Shoji Imatani (Kyoto, Japan)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

Avgust P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Nikita F. Morozov (St. Petersburg, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan, Russia)

Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny,

Moscow region, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)

Alexander F. Rezhnikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Alexander I. Shashkin (Voronezh, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

Igor' E. Tananko (Saratov, Russia)

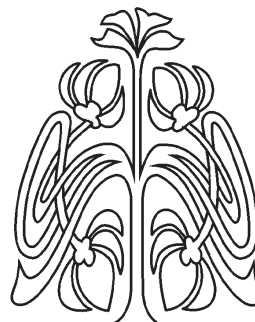
Andrey K. Tsaturyan (Moscow, Russia)

Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

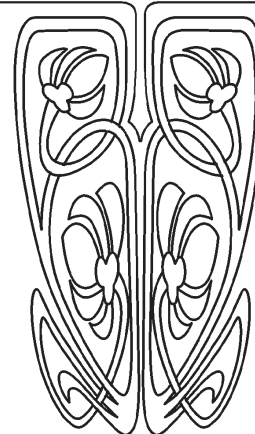
Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)

Vjacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ  
КОЛЛЕГИЯ**





## МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 320–329

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 320–329

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-320-329>

EDN: DGQYFY

Article

### On semigroups of relations with the operation of the rectangular product

D. A. Bredikhin

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

**Dmitry A. Bredikhin**, i.a.bredikhin@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5155-8499>, AuthorID: 2925

**Abstract.** A set of binary relations closed with respect to some collection of operations on relations forms an algebra called an algebra of relations. The theory of algebras of relations is an essential part of modern algebraic logic and has numerous applications in semigroup theory. The following problems naturally arise when classes of algebras of relation are considered: find a system of axioms for these classes, and find a basis of identities (quasi-identities) for the varieties (quasi-varieties) generated by these classes. In the paper, these problems are solved for the class of semigroups of relation with the binary associative operation of the rectangular product, the result of which is the Cartesian product of the first projection of the first relation on the second projection of the second one.

**Keywords:** algebra of relations, primitive positive operation, variety, quasi-variety, semigroup, partially ordered semigroup

**For citation:** Bredikhin D. A. On semigroups of relations with the operation of the rectangular product. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 320–329. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-320-329>, EDN: DGQYFY

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

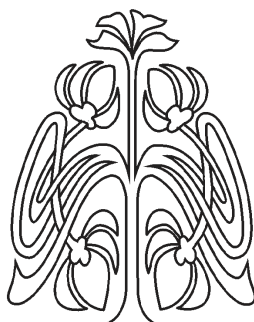
Научная статья

УДК 501.1

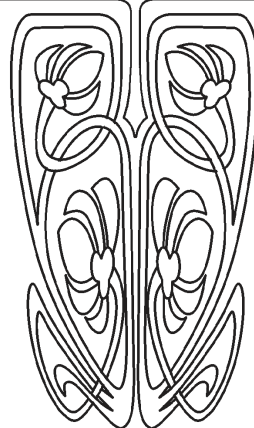
### О полугруппах отношений с операцией прямоугольного произведения

Д. А. Бредихин

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83



Научный  
отдел





**Бредихин Дмитрий Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрии, i.a.bredikhin@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5155-8499>, AuthorID: 2925

**Аннотация.** Множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности операций над отношениями, образует алгебру, называемую алгеброй отношений. Теория алгебры отношений является существенной частью современной алгебраической логики и имеет многочисленные приложения в теории полугрупп. При рассмотрении классов алгебры отношений естественно возникают следующие проблемы: найти систему аксиом для этих классов, найти базис тождеств (квазитождеств) для многообразий (квазимногообразий), порожденных этими классами. В статье обозначенные проблемы решаются для класса полугрупп отношений с бинарной ассоциативной операцией прямого произведения, результатом которой является декартово произведение первой проекции первого отношения на вторую проекцию второго.

**Ключевые слова:** алгебра отношений, примитивно-позитивная операция, многообразие, квазимногообразие, полугруппа, частично упорядоченная полугруппа

**Для цитирования:** Bredikhin D. A. On semigroups of relations with the operation of the rectangular product [Бредихин Д. А. О полугруппах отношений с операцией прямого произведения] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 320–329. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-320-329>, EDN: DGQYFY  
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

## Introduction

Let  $\text{Rel}(U)$  be the set of all binary relations on a base set  $U$ . A set of binary relations  $\Phi \subseteq \text{Rel}(U)$  closed with respect to some collection  $\Omega$  of operations on relations forms an algebra  $(\Phi, \Omega)$  called an *algebra of relations*. The theory of algebras of relations is an essential part of modern algebraic logic and has numerous applications in the theory of semigroups (see the remarkable survey [1]).

Denote by  $R\{\Omega\}$  the class of all algebras isomorphic to the ones whose elements are binary relations and whose operations are members of  $\Omega$ . Let  $V\{\Omega\}$  be the variety and let  $Q\{\Omega\}$  be the quasi-variety generated by  $R\{\Omega\}$ .

The following problems naturally arise when the class  $R\{\Omega\}$  is considered.

1. Find a system of axioms for the class  $R\{\Omega\}$ .
2. Is the class  $R\{\Omega\}$  finitely axiomatizable?
3. Find a basis of quasi-identities for the quasi-variety  $Q\{\Omega\}$ .
4. Is the quasi-variety  $Q\{\Omega\}$  finitely based?
4. Find a basis of identities for the variety  $V\{\Omega\}$ .
6. Is the variety  $V\{\Omega\}$  finitely based?
7. Does the class  $R\{\Omega\}$  form a quasi-variety?
8. Does the quasi-variety  $Q\{\Omega\}$  form a variety?

Numerous studies have been devoted to solving these problems for various classes of algebras of relations. The first mathematician who treated algebras of relations from the point of view of universal algebra was A. Tarski [2]. He considered algebras of relations (Tarski's algebras of relations) with the following operations: Boolean operations  $\cup, \cap, -$ ; operations of relational product  $\circ$  and relational inverse  $^{-1}$ ; constant operations  $\Delta$  (diagonal relation),  $\emptyset$  (empty relation),  $\nabla = U \times U$  (universal relation). He showed that the class  $R\{\circ, ^{-1}, \cup, \cap, -, \Delta, \emptyset, \nabla\}$  is not a quasi-variety and the quasi-variety generated by this class forms a variety [3]. R. Lyndon [4] found the infinite base of this variety and D. Monk [5] showed that it is not finitely based.

A little later, B. Jónsson considered the class  $R\{\circ, ^{-1}, \cap, \Delta\}$ , proved that it forms a quasi-variety, found its infinite base of quasi-identities, and posed problems 4 and 8 for this class [6]. The negative solutions to these problems were obtained in [7] and [8] respectively.

Operations on relations are usually determined using first-order predicate calculus formulas.





Such operations are called *logical*. It is known that classes of algebras of relations with logical operations are axiomatizable [1]. One of the most important classes of logical operations on relations is the class of *primitive-positive* operations [9] (in other terminology — Diophantine operations [10]). An operation on relations is called primitive-positive if it can be defined by a formula of the first-order predicate calculus containing in its prenex normal form only existential quantifiers and conjunctions. Note that the set-theoretical inclusion  $\subseteq$  is compatible with all primitive-positive operations. Thus, any algebra of relations with primitive-positive operations  $(\Phi, \Omega)$  can be considered as partially ordered  $(\Phi, \Omega, \subseteq)$ . The corresponding abstract class of partially ordered algebras will be denoted by  $R\{\Omega, \subseteq\}$ . The variety and the quasi-variety generated by the class  $R\{\Omega, \subseteq\}$  will be denoted by  $V\{\Omega, \subseteq\}$  and  $Q\{\Omega, \subseteq\}$  respectively. Problems 1–8 for the class  $R\{\Omega, \subseteq\}$  are formulated in the same way.

One of the most important associative primitive-positive operations is the operation of relational product  $\circ$  that is defined as follows:

$$\rho \circ \sigma = \{(u, v) : (\exists t)(u, t) \in \rho \wedge (t, v) \in \sigma\}.$$

It is well known that the class  $R\{\circ\}$  coincides with the class of all semigroups and the class  $R\{\circ, \subseteq\}$  coincides with the class of all partially ordered semigroups. There are many other binary primitive-positive operations on relations (see, for example [11]). It is interesting to consider problems 1–8 for algebras of relations with these operations. The paper provides a solution to these problems for the class of semigroups of relations with the operation of the rectangular product.

### 1. Main results

We concentrate our attention on the following primitive-positive operation:

$$\rho * \sigma = \{(u, v) : (\exists t, w)(u, t) \in \rho \wedge (w, v) \in \sigma\}.$$

It is easy to see that this operation is associative. Note also that  $\rho * \sigma = pr_1\rho \times pr_2\sigma$ , where  $pr_1\sigma = \{u : (\exists t)(u, t) \in \rho\}$  is the first projection of  $\rho$  and  $pr_2\sigma = \{v : (\exists w)(w, v) \in \sigma\}$  is the second projection of  $\sigma$ . Since  $pr_1\rho \times pr_2\sigma$  is a rectangular relation, we will treat this operation as the operation of the *rectangular product*.

A *partially ordered semigroup* is an algebraic system  $(A, \cdot, \leq)$ , where  $(A, \cdot)$  is a semigroup and  $\leq$  is a partial order relation on  $A$  that is compatible with multiplication, i.e.,  $x \leq y$  implies  $xz \leq yz$  and  $zx \leq zy$  for all  $x, y, z \in A$ .

The main results are formulated in the following theorem and corollaries. Their proofs are based on the description of quasi-equational theories of algebras of relations with primitive-positive operations [10].

**Theorem.** *The quasi-variety  $Q\{*, \subseteq\}$  forms a variety in the class of all partially ordered semigroups. A partially ordered semigroup  $(A, \cdot, \leq)$  belongs to the quasi-variety  $Q\{*, \subseteq\}$  if and only if it satisfies the identities:*

$$x \leq x^2, \tag{1}$$

$$xyz \leq xz. \tag{2}$$

**Corollary 1.** *The quasi-variety  $Q\{*\}$  forms a variety. A semigroup  $(A, \cdot)$  belongs to the quasi-variety  $Q\{*\}$  if and only if it satisfies the identities:*

$$(xy)^2 = xy, \tag{3}$$

$$xyz = yxz, \tag{4}$$

$$xyzx = xzyx. \tag{5}$$



**Corollary 2.** *The class  $R\{*, \subseteq\}$  does not form a quasi-variety. For a partially ordered semigroup  $(A, \cdot, \leq)$ , the following three conditions are equivalent.*

1.  $(A, \cdot, \leq)$  belongs to the class  $R\{*, \subseteq\}$ .
2. One of the following conditions holds:
  - a)  $(A, \cdot, \leq)$  satisfies identity (1) and the identity

$$xyz = xz; \tag{6}$$

- b)  $(A, \cdot, \leq)$  contains the zero element  $o$ , satisfies identity (1) and the axioms:

$$y \neq o \Rightarrow xyz = xz, \tag{7}$$

$$o \leq x. \tag{8}$$

3.  $(A, \cdot, \leq)$  satisfies identity (1) and the axioms:

$$xyz = xy \vee yw = wy = y, \tag{9}$$

$$xy = yx = x \Rightarrow x \leq z. \tag{10}$$

**Corollary 3.** *The class  $R\{*\}$  does not form a quasi-variety. For a semigroup  $(A, \cdot)$  the following three conditions are equivalent.*

1.  $(A, \cdot)$  belongs to the class  $R\{*\}$ .
2. One of the following conditions holds:
  - a)  $(A, \cdot)$  satisfies identity (6);
  - b)  $(A, \cdot)$  contains the zero element  $o$  and satisfies axiom (7).
3.  $(A, \cdot)$  satisfies axiom (9).

Note also that if the semigroup  $(\Phi, \circ)$  of rectangular relations does not contain a zero element, then the operations  $\circ$  and  $*$  coincide. It follows that the equivalence conditions 1 and 2a of Corollary 3 can be obtained from the results of [12].

Note that the next problem is still open.

**Problem.** *Let  $(A, \cdot, \leq)$  [respectively,  $(A, \cdot)$ ] be a partially ordered semigroup [respectively, a semigroup] such that the conditions of Corollary 2 [respectively, Corollary 3] hold, and the set  $A$  is finite. Is it possible to isomorphically represent  $(A, \cdot, \leq)$  [respectively,  $(A, \cdot)$ ] as a partially ordered semigroup  $(\Phi, *, \subseteq)$  [respectively, as a semigroup  $(\Phi, *)$ ] of relations on an appropriate finite set  $U$ .*

## 2. Proofs of results

**Step 1.** Let us consider the relationship between considered identities and axioms.

**Lemma 1.** *Identities (1), (2) imply identities (3)–(5). Identity (6) implies identities (2)–(5). Identities (3)–(5) imply the following three identities:*

$$xyzt = xzyt, \tag{11}$$

$$xy = xy^2, \tag{12}$$

$$xy = x^2y. \tag{13}$$

**Proof.** First of all, we show that identities (1), (2) imply identities (3)–(5). Indeed,  $xy \stackrel{(1)}{\leq} q(xy)^2$  and  $(xy)^2 = xyxy \stackrel{(2)}{\leq} xy$ , i.e.,  $(xy)^2 = xy$  (3). Further,  $xyxz \stackrel{(2)}{\leq} xyz$  and  $xyz \stackrel{(1)}{\leq} (xyz)^2 = xyzxyz \stackrel{(2)}{\leq} xyzx$ , i.e.,  $xyz = xyzx$  (4). Since  $xyzx \stackrel{(1)}{\leq} (xyzx)^2 = xyzxxyzx \stackrel{(2)}{\leq} xzyx$  and  $xzyx \stackrel{(1)}{\leq} (xzyx)^2 = xzyxxyzx \stackrel{(2)}{\leq} xyzx$ , we have  $xyzx = xzyx$  (5). It is clear that identity (6) implies identities (2)–(5). Let us show that identities (3)–(5) imply identities (11)–(13). Indeed,  $xyzt \stackrel{(4)}{=} xyzxt \stackrel{(5)}{=} xzyxt \stackrel{(4)}{=} xzyt$  (11);  $xy \stackrel{(3)}{=} (xy)^2 = xyxy \stackrel{(4)}{=} xyy = xy^2$  (12);  $xy \stackrel{(3)}{=} (xy)^2 = xyxy \stackrel{(11)}{=} xxyy = x^2y^2 \stackrel{(12)}{=} x^2y$  (13).  $\square$





**Lemma 2.** *Conditions 2 and 3 of Corollaries 2 and 3 are equivalent.*

**Proof.** Note that we can represent axiom (6) as  $(\neg(\forall w) yw = wy = y) \Rightarrow xyz = xz$ . It follows that this axiom is equivalent to identity (6), if  $A$  does not contain a zero element, and it is equivalent to axiom (7) otherwise. Axiom (10) just expresses axiom (8) as a universal formula of the first order language.  $\square$

Let us consider the set  $\Lambda = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$  of individual variables that are interpreted as elements of a semigroup. A semigroup term  $p$  is a word in the alphabet  $\Lambda$ , i.e., an expression of the form  $x_{j_1}x_{j_2} \dots x_{j_{m-1}}x_{j_m}$ . For convenience, we will also use other letters of the Latin alphabet as variables.

Suppose that  $p = x_{j_1}x_{j_2} \dots x_{j_{m-1}}x_{j_m}$  be the term of a semigroup that satisfies identities (11)–(13). Then without loss of generality, we can assume that all variables  $x_{j_2}, \dots, x_{j_{m-1}}$  are different and different from variables  $x_{j_1}, x_{j_m}$ . Moreover, we can also presume that variables  $x_{j_2}, \dots, x_{j_{m-1}}$  can be arbitrarily permuted. In what follows, we will use these properties without special mentions.

**Step 2.** Let  $(\Phi, *, \subseteq)$  be the partially ordered semigroup of relations with the operation of the rectangular product. Since  $\rho * \sigma = pr_1\rho \times pr_2\sigma$ , we have  $\rho \subseteq pr_1\rho \times pr_2\rho = \rho * \rho$ , i.e., identity (1) holds. Note that  $\rho * \pi * \sigma = pr_1\rho \times pr_2\sigma = \rho * \sigma$ , if  $\pi \neq \emptyset$ , and  $\rho * \pi * \sigma = \emptyset$  otherwise. It follows that identity (2) holds. It also follows that if  $\emptyset \notin \Phi$ , then  $(\Phi, *)$  satisfies identity (6). If  $\emptyset \in \Phi$ , then  $\emptyset$  is a zero element and axioms (7) and (8) hold. Thus, according to Lemmas 1 and 2, we obtain that all conditions of Theorem and Corollaries 1–3 are necessary.

Further, it is easy to see that for  $U \neq \emptyset$ , the Cartesian square of the semigroup  $(\text{Rel}(U), *)$  of relations contains the zero element  $(\emptyset, \emptyset)$  and does not satisfy axiom (7). It follows that the classes  $\text{R}\{*\}$  and  $\text{R}\{*, \subseteq\}$  do not form quasi-varieties.

**Step 3.** The proof of the sufficiency of conditions of the Theorem is based on the result of [10]. Let us give some definitions and notations to formulate this result. For any formula  $\varphi(z_0, z_1, r_1, \dots, r_m)$  of the first-order predicate calculus having  $m$  binary predicate symbols  $r_1, \dots, r_m$  and two free individual variables  $z_0, z_1$ , we can associate an  $m$ -ary operation  $F_\varphi$  on  $\text{Rel}(U)$  defined in the following way:

$$F_\varphi(\rho_1, \dots, \rho_m) = \{(u, v) \in U \times U : \varphi(u, v, \rho_1, \dots, \rho_m)\},$$

where  $\varphi(u, v, \rho_1, \dots, \rho_m)$  means that the formula  $\varphi$  holds whenever  $z_0, z_1$  are interpreted as  $u, v$ , and  $r_1, \dots, r_m$  are interpreted as relations  $\rho_1, \dots, \rho_m$  from  $\text{Rel}(U)$ . Recall that an operation on relations is called primitive-positive if it can be defined by a first-order formula containing in its prenex normal form only existential quantifiers and conjunctions. Let us describe primitive-positive operations by using graphs [9].

Let  $\mathbb{N}$  be the set of all natural numbers and  $\mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ . A *labeled graph* is a pair  $G = (V(G), E(G))$ , where  $V(G)$  is a finite set, called a vertex set, and  $E(G) \subseteq V(G) \times \mathbb{N} \times V(G)$  is a ternary relation. A triple  $(u, k, v) \in E(G)$  is called an edge from  $u$  to  $v$  labeled by  $k$ , and it will be graphically represented by  $u \xrightarrow{k} v$ . An *input-output-pointed labeled graph* is a structure  $G = (V(G), E(G), \text{in}(G), \text{out}(G))$ , where  $(V(G), E(G))$  is a labeled graph,  $\text{in}(G)$  and  $\text{out}(G)$  are two distinguished vertices (not necessarily different) called input and output vertices respectively. The input-output-pointed labeled graph  $G$  with  $\text{in}(G) = i$  and  $\text{out}(G) = o$  is also denoted by  $G^{i,o}$ . In what follows, we shall usually speak simply of graphs if it does not lead to confusion. The concept of graph isomorphism is defined in a natural way. All graphs will be considered up to isomorphism.

For given  $u \in V(G)$ , the number of edges of the form  $(u, k, v)$  [respectively,  $(v, k, u)$ ] we denote by  $\text{deg}^+(u)$  [respectively,  $\text{deg}^-(u)$ ].

Given two input-output-pointed labeled graphs  $G_1 = (V_1, E_1, \text{in}_1, \text{out}_1)$  and  $G_2 = (V_2, E_2, \text{in}_2, \text{out}_2)$ , a mapping  $f: V_2 \rightarrow V_1$  is called a homomorphism from  $G_2$  to  $G_1$  if  $f(\text{in}_2) = \text{in}_1$ ,  $f(\text{out}_2) = \text{out}_1$ , and  $(f(u), k, f(v)) \in E_1$  whenever  $(u, k, v) \in E_2$ . We write  $G_1 \prec G_2$  if there exists a homomorphism from  $G_2$  to  $G_1$ .



Let  $F = F_\varphi$  be a primitive positive operation determined by a formula  $\varphi$ . Then the input-output-pointed labeled graph  $G = G_F = G_\varphi$  associated with  $F$  is defined as follows (see [5]). Let  $\{0, 1, \dots, n\}$  be the set of all subscripts of individual variables of  $\varphi$ . Put  $G = (V, E, \text{in}, \text{out})$ , where  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ ;  $\text{in} = v_0$ ,  $\text{out} = v_1$ ;  $(i, k, j) \in E$  if and only if the atomic formula  $r_k(z_i, z_j)$  occurs in  $\varphi$ .

Note that the graph  $G_* = (V, E, \text{in}, \text{out})$  corresponding to the considered operation  $*$  of the rectangular product can be described in the following way:

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}, \quad E = \{(v_0, 1, v_3), (v_2, 2, v_1)\}, \quad \text{in} = v_0, \quad \text{out} = v_1, \\ \text{in} = v_0 \cdot \xrightarrow{(1)} \cdot v_3 \quad v_2 \cdot \xrightarrow{2} \cdot v_1 = \text{out}.$$

Let  $G = (V, E, \text{in}, \text{out})$  and  $G_k = (V_k, E_k, \text{in}_k, \text{out}_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) be graphs with pairwise disjoint vertex sets. The composition  $G(G_1, G_2, \dots, G_n)$  is the graph constructed as follows [5]: take  $G$  and substitute every edge  $(u, k, v) \in E$  by the graph  $G_k$  identifying the input vertex  $\text{in}_k$  with  $u$  and the output vertex  $\text{out}_k$  with  $v$ .

For any semigroup term  $p$  define the graph  $G(p) = (V(p), E(p), \text{in}(p), \text{out}(p))$  in the following inductive way:

- 1) if  $p = x_k$ , then  $G(p)$  is the following graph:  $\text{in} \cdot \xrightarrow{k} \cdot \text{out}$ ;
- 2) if  $p = p_1 p_2$ , then  $G(p) = G_*(G(p_1), G(p_2))$ .

According to the construction, for any term  $p = x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_{m-1}} x_{j_m}$  the graph  $G(p)$  has the following form:

$$\text{in} = v_0 \cdot \xrightarrow{j_1} \cdot \quad \cdot \xrightarrow{j_2} \cdot \quad \dots \quad \cdot \xrightarrow{j_{m-1}} \cdot \quad \cdot \xrightarrow{j_m} \cdot v_1 = \text{out}.$$

Let  $G$  be a labeled graph,  $u, v \in V(G) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ , and  $Q$  be an input-output-pointed labeled graph. Without loss of generality, we can suppose that  $V(Q) = \{w_0, w_1, \dots, w_m\}$ ,  $\text{in}(Q) = w_0 = u$ ,  $\text{out}(Q) = w_1 = v$ , and  $V(G) \cap V(Q) = \{u, v\}$ . The labeled graph  $(V(G) \cup V(Q), E(G) \cup E(Q))$  denote by  $G[u, v, Q]$ . Note that the edges set of  $G[u, v, Q]$  can be represented as  $\{v_0, v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{n+m-1}\}$ , where  $v_{n+1} = w_2, \dots, v_{n+m-1} = w_m$ . Factually, the graph  $G[u, v, Q]$  is obtained from the graph  $G$  by “gluing” the graph  $Q$  to the vertices  $u$  and  $v$ .

Define an  $n$ -system to be a pair  $\omega = (\alpha, \beta)$ , where  $\alpha, \beta : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{N}^0$  are mappings,  $\alpha(k), \beta(k) < 2 + (k - 1)(m - 2)$  for all  $k = 1, \dots, n$ , and  $m$  is the number of vertices of the graph that determines the considered operation on relations (for the operation  $*$  we have  $m = 4$  and  $\alpha(k), \beta(k) < 2k$ ).

Given an  $n$ -system  $\omega = (\alpha, \beta)$ , construct by induction the sequence of graphs  $G_0 \subseteq \dots \subseteq G_n = G_\omega$ . Put  $G_0: v_0 \cdot \xrightarrow{(1)} \cdot v_1$ , and for  $k = 1, \dots, n$  put:  $G_k = G_{k-1}[v_{\alpha(k)}, v_{\beta(k)}, G(x_{2k} x_{2k+1})]$ .

The following proposition presents the result of [11] formulated for the class  $R\{*, \subseteq\}$ . This result gives an infinite basis of quasi-identities for the quasi-variety  $Q\{*, \subseteq\}$ .

**Proposition.** *A partially ordered semigroup  $(A, \cdot, \leq)$  belongs to the quasi-variety  $Q\{*, \subseteq\}$  if and only if it satisfies the quasi-identity*

$$\left( \bigwedge_{k=1}^n p_k \leq x_{2k} x_{2k+1} \right) \Rightarrow x_1 \leq p_0 \tag{14}$$

for every  $n$ -system  $\omega = (\alpha, \beta)$  and arbitrary terms  $p_0, \dots, p_n$  such that  $G_\omega^{v_0, v_1} \prec G(p_0)$  and  $G_{k-1}^{v_{\alpha(k)}, v_{\beta(k)}} \prec G(p_k)$ .

**Step 4.** We are ready to prove the sufficiency of the conditions of the Theorem. Let  $\omega = (\alpha, \beta)$  be the  $n$ -system and  $p_0, p_1, \dots, p_n$  be the terms such that  $G_\omega^{v_0, v_1} \prec G(p_0)$  and  $G_{k-1}^{v_{\alpha(k)}, v_{\beta(k)}} \prec G(p_k)$  for  $k = 1, \dots, n$ . This system corresponds to the sequence graphs  $G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_n = G_\omega$ , where  $G_k = (V_k, E_k)$  for  $k = 0, \dots, n$ . According to the construction, for any  $k \leq n$  we have that  $V_k = \{v_0, v_1, \dots, v_{2k}, v_{2k+1}\}$  and

$$E_k = \{(v_0, 1, v_1)\} \cup \{(v_{\alpha(i)}, 2i, v_{2i+1}), (v_{2i}, 2i + 1, v_{\beta(i)}) : i = 1, \dots, k\}.$$





Let us Proof by induction on  $k$  that  $\alpha(k)$  is even,  $\beta(k)$  is odd, and  $\deg^-v_{2i} = 0$ ,  $\deg^+v_{2i} > 0$ ,  $\deg^-v_{2i+1} > 0$ ,  $\deg^+v_{2i+1} = 0$  for any  $i = 0, \dots, k$ .

Let  $k = 1$ . Since  $G_0^{v_{\alpha(1)}, v_{\beta(1)}} \prec G(p_1)$ , we have that  $p_1 = x_1$  or  $p_1 = x_1^2$ , and  $\alpha(1) = 0$ ,  $\beta(1) = 1$ ,  $\deg^-v_0 = 0$ ,  $\deg^+v_0 = 2$ ,  $\deg^-v_1 = 2$ ,  $\deg^+v_1 = 0$ ,  $\deg^-v_2 = 0$ ,  $\deg^+v_2 = 1$ ,  $\deg^-v_3 = 1$ ,  $\deg^+v_3 = 0$ .

Suppose now that it holds for  $k - 1$ , and let us show that this is true for  $k$ . Since  $G_{k-1}^{v_{\alpha(k)}, v_{\beta(k)}} \prec G(p_k)$ , according to the definition of a graph homomorphism, we get that  $\deg^+v_{\alpha(k)} > 0$ ,  $\deg^-v_{\beta(k)} > 0$ . Then according to the induction assumption we get  $\alpha(k)$  is even,  $\beta(k)$  is odd, and  $\deg^-v_{2i} = 0$ ,  $\deg^+v_{2i} > 0$ ,  $\deg^-v_{2i+1} > 0$ ,  $\deg^+v_{2i+1} = 0$  for any  $i = 0, \dots, k$ .

Let  $(A, \cdot, \leq)$  be a partially ordered semigroup satisfying identities (1) and (2). Suppose that the premise of quasi-identity (14) holds for some values of the variables  $x_1 = a_1$ ,  $x_2 = a_2$ ,  $x_3 = a_3$ ,  $\dots$ ,  $x_{2n} = a_{2n}$ ,  $x_{2n+1} = a_{2n+1}$ , i.e.,  $p_k(\vec{a}) \leq a_{2k}a_{2k+1}$  for all  $k = 1, \dots, n$ , where  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{2n+1})$ . Let  $p_0 = x_{j_1}x_{j_2} \dots x_{j_{m-1}}x_{j_m}$ . Note that  $G_k^{v_0, v_1} \prec G(p_0)$  if and only if  $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{m-1}}, x_{j_m}\} \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_{2k}, x_{2k+1}\}$ ,  $x_{j_m} = x_{2j+1}$  for some  $j \leq k$  such that  $\beta(j) = 1$ , and  $x_{j_1} = x_1$  or  $x_{j_1} = x_{2i}$  for some  $i \leq k$  such that  $\alpha(i) = 0$ . It follows that the equality  $x_{j_1} = x_{j_m}$  is possible only if  $x_{j_1} = x_{j_m} = x_1$ , otherwise we can assume that all variables of  $p_0$  are different.

Let  $\max(p_0)$  be the greatest  $k$  such that at least one of the variables  $x_{2k}$  or  $x_{2k+1}$  is included in the term  $p_0$ . Let us prove by induction on  $\max(p_0)$  that  $a_1 \leq p_0(\vec{a})$ . If  $\max(p_0) = 0$  then  $p = x_1$  or  $p_0 = x_1^2$ . Thus, using identity (1) we obtain  $a_1 \leq p_0(\vec{a})$ . Suppose now that  $a_1 \leq p_0(\vec{a})$  holds for  $\max(p_0) = k - 1$ , and let us show that this is true for  $\max(p_0) = k$ .

If both variables  $x_{2k}, x_{2k+1}$  are included in  $p_0$ , then the following cases are possible:

1)  $p_0 = x_{2k}x_{2k+1}x_{j_3} \dots x_{j_{m-1}}x_{j_m}$ , then using the induction assumption we get

$$a_0 \leq p_k(\vec{a})a_{j_3} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} \leq a_{2k}a_{2k+1}a_{j_3} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} = p_0(\vec{a});$$

2)  $p_0 = x_{j_1}x_{2k}x_{2k+1}x_{j_4} \dots x_{j_{m-1}}x_{j_m}$ , then using the induction assumption we get

$$a_0 \leq a_{j_1}p_k(\vec{a})a_{j_4} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} \leq a_{j_1}a_{2k}a_{2k+1}a_{j_4} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} = p_0(\vec{a});$$

3)  $p_0 = x_{j_1}x_{j_2} \dots x_{j_{m-3}}x_{2k}x_{2k+1}$ , then using the induction assumption we get

$$a_0 \leq a_{j_1}a_{j_2} \dots a_{j_{m-3}}p_k(\vec{a}) \leq a_{j_1}a_{j_2} \dots a_{j_{m-3}}a_{2k}a_{2k+1} = p_0(\vec{a});$$

4)  $p_0 = x_{2k}x_{j_2} \dots x_{j_{m-1}}x_{2k+1}$ , then  $\alpha(k) = 0$  and  $\beta(k) = 1$ . It follows that

$$G_k^{v_0, v_1} \prec G(p_kx_{j_2} \dots x_{j_{m-1}}p_k),$$

and by the induction assumption we get

$$\begin{aligned} a_0 \leq p_k(\vec{a})a_{j_2} \dots a_{j_{m-1}}p_k(\vec{a}) &\stackrel{(2)}{\leq} a_{2k}a_{2k+1}a_{j_2} \dots a_{j_{m-1}}a_{2k}a_{2k+1} \leq \\ &\leq a_{2k}a_{j_2} \dots a_{j_{m-1}}a_{2k+1} = p_0(\vec{a}). \end{aligned}$$

If only one of the variables  $x_{2k}$  or  $x_{2k+1}$  is included in  $p_0$ , then the following cases are possible:

5)  $p_0 = x_{2k}x_{j_2} \dots x_{j_{m-1}}x_{j_m}$ , then using the induction assumption we get

$$a_0 \leq p_k(\vec{a})a_{j_3} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} \leq a_{2k}a_{2k+1}a_{j_3} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} \stackrel{(2)}{\leq} a_{2k}a_{j_3} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} = p_0(\vec{a});$$

6)  $p_0 = x_{j_1}x_{2k}x_{j_3} \dots x_{j_{m-1}}x_{j_m}$ , then using the induction assumption we get

$$a_0 \leq a_{j_1}p_k(\vec{a})a_{j_3} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} \leq a_{j_1}a_{2k}a_{2k+1}a_{j_3} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} \stackrel{(2)}{\leq} a_{j_1}a_{2k}a_{j_3} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} = p_0(\vec{a});$$



7)  $p_0 = x_{j_1}x_{2k+1}x_{j_3} \dots x_{j_{m-1}}x_{j_m}$ , then using the induction assumption we get

$$\begin{aligned} a_0 &\leq a_{j_1}p_k(\vec{a})a_{j_4} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} \leq a_{j_1}a_{2k}a_{2k+1}a_{j_4} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} \stackrel{(2)}{\leq} \\ &\leq a_{j_1}a_{2k+1}a_{j_4} \dots a_{j_{m-1}}a_{j_m} = p_0(\vec{a}); \end{aligned}$$

8)  $p_0 = x_{j_1}x_{j_2} \dots x_{j_{m-1}}x_{2k+1}$ , then using the induction assumption we get

$$a_0 \leq a_{j_1}a_{j_2} \dots a_{j_{m-1}}p_k(\vec{a}) \leq a_{j_1}a_{j_2} \dots a_{j_{m-1}}a_{2k}a_{2k+1} \stackrel{(2)}{\leq} a_{j_1}a_{j_2} \dots a_{j_{m-1}}a_{2k+1} = p_0(\vec{a}).$$

Thus, we have proved that the partially ordered semigroup  $(A, \cdot, \leq)$  satisfies quasi-identities (14). Therefore, according to the Proposition we have  $(A, \cdot, \leq) \in \mathbf{Q}\{*, \subseteq\}$ . This completes the proof of the Theorem.

**Step 4.** Let us prove the sufficiency of the conditions of Corollary 1. Suppose that a semigroup  $(A, \cdot)$  satisfies identities (3)–(5) and  $A^2 = \{a^2 : a \in A\}$ . We define the relation  $\leq$  on the set  $A$  by setting

$$\leq = \{(x, y) \in A \times A^2 : x^2 = yxy\} \cup \{(x, x) \in A \times A : x \in A\}.$$

Let us show that  $(A, \cdot, \leq)$  is the partially ordered semigroup satisfying identities (1) and (2). The reflexivity of the relation  $\leq$  follows directly from the definition.

To prove the transitivity assume that  $x \leq y$  and  $y \leq z$ . Without loss of generality, we can suppose that  $x \neq y$  and  $y \neq z$ . Then  $x^2 = yxy$ ,  $y^2 = zyz$  and  $y^2 = y$ ,  $z^2 = z$ , hence  $x^2 = yxy = zyzxzyz \stackrel{(11)}{=} zzyxyzz = zyxyz = zx^2z \stackrel{(12)}{=} zxz$ , i.e.,  $x \leq z$ . Thus,  $\leq$  is transitive.

Assume that  $x \leq y$ ,  $y \leq x$  and  $x \neq y$ . Then  $x^2 = yxy$ ,  $y^2 = xyx$  and  $x^2 = x$ ,  $y^2 = y$ , hence  $x = x^2 = yxy = y^2xy^2 = xyxxxxyx \stackrel{(11)}{=} xyx = y^2 = y$ . This contradicts the assumption  $x \neq y$ . Thus,  $\leq$  is a partially order relation.

Let us show that the relation  $\leq$  is compatible with multiplication. Suppose that  $x \leq y$  and  $x \neq y$ . Then  $x^2 = yxy$  and  $y^2 = y$ , hence  $(xz)^2 \stackrel{(3)}{=} xz \stackrel{(13)}{=} x^2z = yxyz \stackrel{(12)}{=} yxyz^3 \stackrel{(11)}{=} yzxxzyz$  and  $(yz)^2 \stackrel{(3)}{=} yz$ . Thus,  $xz \leq yz$ . Further,  $(zx)^2 \stackrel{(3)}{=} zx \stackrel{(12)}{=} zx^2 = zyxy \stackrel{(13)}{=} z^3yxy \stackrel{(11)}{=} zyxzxy$  and  $(zy)^2 \stackrel{(3)}{=} zy$ . Thus,  $zx \leq zy$ .

Since  $x^2 \stackrel{(12)}{=} x^2xx^2$  and  $(x^2)^2 \stackrel{(3)}{=} x^2$ , we have  $x \leq x^2$ . Since  $(xyz)^2 \stackrel{(3)}{=} xyz \stackrel{(12)}{=} xyz^3 \stackrel{(13)}{=} x^3yz^3 \stackrel{(11)}{=} xzxzyzxxz$  and  $(xz)^2 \stackrel{(3)}{=} xz$ , we have  $xyz \leq xz$ . Therefore,  $(A, \cdot, \leq)$  satisfies identities (1) and (2), hence  $(A, \cdot, \leq) \in \mathbf{Q}\{*, \subseteq\}$  and  $(A, \cdot) \in \mathbf{Q}\{*\}$ . This completes the proof of Corollary 1.

**Step 5.** Let us prove the sufficiency of the conditions of Corollary 2 and 3.

**Lemma 3.** Let  $\{U_j : j \in J\}$  be a family of pairwise non-intersecting sets and  $U = \bigcup\{U_j : j \in J\}$ . If a partially ordered semigroup  $(A, \cdot, \leq)$  is a subdirect product of a family  $\{(\Phi_j, *, \subseteq) : j \in J\}$  of partially ordered semigroups of relations on  $U_j$ , and satisfies identity (6), then  $(A, \cdot, \leq)$  is isomorphically embedded in  $(\text{Rel}(U), *, \subseteq)$ .

**Proof.** Let  $\varphi_j : A \rightarrow \Phi_j$  be the corresponding surjective homomorphisms from  $A$  on the components of the direct product  $\prod\{\Phi_j : j \in J\}$ . According to the properties of homomorphic images, we see that all components  $(\Phi_j, *, \subseteq)$  satisfy identity (6). Hence, for all  $j \in J$  we have  $\emptyset \notin \Phi_j$  or  $\Phi_j = \{\emptyset\}$ . It follows that  $(A, \cdot, \leq)$  is subdirect product of the family  $\{(\Phi_j, *, \subseteq) : j \in J_0\}$ , where  $J_0 = \{j \in J : \emptyset \notin \Phi_j\}$ .

For given  $a \in A$ , put  $\rho_j^a = \varphi_j(a)$ . We define a mapping  $\varphi : A \rightarrow \text{Rel}(U)$  in the following way. Put  $\varphi(a) = \bigcup\{pr_1\rho_j^a : j \in J_0\} \times \bigcup\{pr_2\rho_j^a : j \in J_0\}$ , if  $a^2 = a$ , and  $\varphi(a) = \bigcup\{\rho_j^a : j \in J_0\} \cup \{\varphi(b) : b^2 = b \leq a\}$  otherwise. Let us show that  $\varphi$  is an isomorphic embedding  $(A, \cdot, \leq)$  in  $(\text{Rel}(U), *, \subseteq)$ .

Note that  $\varphi(a) \cap U_j \times U_j = \rho_j^a$  for all  $a \in A$ . It follows that  $\varphi(a) \subseteq \varphi(a)$  if and only if  $a \leq b$ . Forver, since  $(ab)^2 = ab$ , we have

$$\varphi(ab) = \bigcup\{pr_1\rho_j^{ab} : j \in J_0\} \times \bigcup\{pr_2\rho_j^{ab} : j \in J_0\} =$$



$$\begin{aligned}
&= \bigcup \{pr_1(pr_1\rho_j^a \times pr_2\rho_j^b) : j \in J_0\} \times \bigcup \{pr_2(pr_1\rho_j^a \times pr_2\rho_j^b) : j \in J_0\} = \\
&= (\bigcup \{pr_1\rho_j^a : j \in J_0\} \times \bigcup \{pr_2\rho_j^b : j \in J_0\}) = pr_1\varphi(a) \times pr_2\varphi(b) = \varphi(a) * \varphi(b).
\end{aligned}$$

□

**Lemma 4.** Suppose that  $(A, \cdot, \leq)$  satisfies identities (1) and (6). Then  $(A, \cdot, \leq)$  belongs to  $R\{*, \subseteq\}$ .

**Proof.** If  $(A, \cdot, \leq)$  satisfies identities (1) and (6), then according to the Theorem we have  $(A, \cdot, \leq) \in Q\{*, \subseteq\}$ . In respect that the class  $R\{*, \subseteq\}$  is axiomatizable [34], we obtain that  $(A, \cdot, \leq)$  is a subdirect product of a family of partially ordered semigroups from  $R\{*, \subseteq\}$ . Hence, according to Lemma 3, we obtain that  $(A, \cdot, \leq)$  belongs to  $R\{*, \subseteq\}$ . □

**Lemma 5.** Suppose that  $(A, \cdot)$  satisfies identity (6). Then  $(A, \cdot)$  belongs to  $R\{*\}$ .

**Proof.** If  $(A, \cdot)$  satisfies identity (6), then according to Lemma 1 it also satisfies identities (3)–(5). Let  $\leq$  be the partial order relation constructed in the proof of Corollary 1. Then by Lemma 4, we have  $(A, \cdot, \leq) \in R\{*, \subseteq\}$ . Therefore,  $(A, \cdot) \in R\{*\}$ . □

**Lemma 6.** Suppose that  $(A, \cdot)$  contains the zero element  $o$  and satisfies axiom (7). Then  $(A, \cdot)$  satisfies identities (6) or  $ab \neq o$  for all  $a, b \neq o$ .

**Proof.** If there exist elements  $a \neq o$  and  $b \neq o$  such that  $ab = o$ , then for all  $x, y \neq o$  we have  $xay \stackrel{(7)}{=} xy$ ,  $xbx \stackrel{(7)}{=} xy$ , and  $xaby = o$ , hence  $xy \stackrel{(7)}{=} xyxy = xayxby \stackrel{(7)}{=} xaby = xoy = o$ . It follows that  $xyz = xz$  for all  $x, y, z \in A$ , i.e.,  $(A, \cdot)$  satisfies identities (6). □

Suppose that  $(A, \cdot, \leq)$  contains the zero element  $o$  and satisfies identity (1) and axioms (7) and (8). Put  $B = A \setminus \{o\}$ . According to Lemmas 4 and 6, we can suppose that  $xy \in B$  for all  $x, y \in B$ , and  $(B, \cdot, \leq)$  satisfies identities (1) and (6), hence  $(B, \cdot, \leq)$  belongs to  $R\{*, \subseteq\}$ . It means that there exists an isomorphism  $F$  from the partially ordered semigroup  $(B, \cdot, \leq)$  to some partially ordered semigroup of relations  $(\Phi, *, \subseteq)$  and  $\emptyset \notin \Phi$ . Putting  $F(o) = \emptyset$ , we get the isomorphism from  $(A, \cdot, \leq)$  to  $(\Phi \cup \{\emptyset\}, *, \subseteq)$ . Therefore,  $(A, \cdot, \leq)$  belongs to  $R\{*, \subseteq\}$ . This completes the proof of Corollary 2.

Suppose that  $(A, \cdot)$  contains the zero element  $o$  and satisfies axiom (7),  $B = A \setminus \{o\}$ , and let  $\leq$  be the partial order relation on  $B$  constructed in the proof of Corollary 1. Extend the relation  $\leq$  on  $A$  by putting  $o \leq a$  for all  $a \in A$ . Then  $(A, \cdot, \leq)$  satisfies the condition 3 of the Theorem, hence  $(A, \cdot, \leq) \in R\{*, \subseteq\}$ . Therefore,  $(A, \cdot)$  belongs to  $R\{*\}$ . This completes the proof of Corollary 3.

## References

1. Schein B. M. Relation algebras and function semigroups. *Semigroup Forum*, 1970, vol. 1, iss. 4, pp. 1–62. <https://doi.org/10.1007/BF02573019>
2. Tarski A. On the calculus of relations. *The Journal of Symbolic Logic*, 1941, vol. 6, iss. 3, pp. 73–89. <https://doi.org/10.2307/2268577>
3. Tarski A. Contributions to the theory of models, III. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, 1955, vol. 58, pp. 56–64. [https://doi.org/10.1016/S1385-7258\(55\)50009-6](https://doi.org/10.1016/S1385-7258(55)50009-6)
4. Lyndon R. C. The representation of relation algebras, II. *Annals of Mathematics*, 1956, vol. 63, iss. 2, pp. 294–307. <https://doi.org/10.2307/1969611>
5. Monk D. On representable relation algebras. *Michigan Mathematical Journal*, 1964, vol. 11, iss. 3, pp. 207–210. <https://doi.org/10.1307/mmj/1028999131>
6. Jónsson B. Representation of modular lattices and of relation algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1959, vol. 92, pp. 449–464. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1959-0108459-5>
7. Haiman M. Arguesian lattices which are not type-1. *Algebra Universalis*, 1991, vol. 28, pp. 128–137. <https://doi.org/10.1007/BF01190416>
8. Andréka H., Bredikhin D. A. The equational theory of union-free algebras of relations. *Algebra Universalis*, 1995, vol. 33, pp. 516–532. <https://doi.org/10.1007/BF01225472>





9. Bonnet P., Poschel F. R. Clones of operations on binary relations. *Contributions to General Algebra*, 1991, vol. 7, pp. 50–70.
10. Bredikhin D. A. On quasi-identities of relation algebras with diophantine operations. *Siberian Mathematical Journal*, 1997, vol. 38, pp. 23–33. <https://doi.org/10.1007/BF02674896>
11. Bredikhin D. A. On groupoids of relations with one conjunctive operation of rank 2. *Studia Logica*, 2022, vol. 110, pp. 1137–1153. <https://doi.org/10.1007/s11225-022-09993-2>
12. Schein B. M. Semigroups of rectangular binary relations. *Soviet Mathematics. Doklady*, 1965, vol. 6, iss. 6, pp. 1563–1566.

Поступила в редакцию / Received 09.03.2023

Принята к публикации / Accepted 26.04.2023

Опубликована / Published 30.08.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 330–341  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 330–341  
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-330-341>, EDN: FDXFXL

Научная статья

УДК 519.725

## Конструкции некоторых схем разделения секрета на основе линейных кодов

С. М. Рацев

Ульяновский государственный университет, Россия, 432017, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42

**Рацев Сергей Михайлович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационной безопасности и теории управления, [ratseevsm@mail.ru](mailto:ratseevsm@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-4995-9418>, AuthorID: 662208

**Аннотация.** Среди пороговых схем разделения секрета существуют совершенные схемы со свойством идеальности (например, схема Шамира). Для случая схем разделения секрета с произвольной структурой доступа можно построить совершенную схему для любой структуры доступа (например, схему Ито – Сайто – Нишизеки, схему Бенало – Лейхтера), но в общем случае такая схема свойством идеальности обладать уже не будет. В работе для некоторых классов структур доступа приводится конструкция совершенных схем разделения секрета со свойством идеальности на основе линейных кодов. Также приводится конструкция совершенных проверяемых схем разделения секрета для любой структуры доступа, для которой существует линейный код, реализующий эту структуру.

**Ключевые слова:** криптография, линейный код, схема разделения секрета, структура доступа

**Для цитирования:** Рацев С. М. Конструкции некоторых схем разделения секрета на основе линейных кодов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 330–341. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-330-341>, EDN: FDXFXL

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Constructions of some secret sharing schemes based on linear codes

S. M. Ratseev

Ulyanovsk State University, 42 Leo Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia

**Sergey M. Ratseev**, [ratseevsm@mail.ru](mailto:ratseevsm@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-4995-9418>, AuthorID: 662208

**Abstract.** There are perfect and ideal threshold secret sharing schemes, for example, Shamir's secret sharing scheme. For the case of general secret sharing schemes with an arbitrary access structure, it is possible to construct a perfect scheme for any access structure (for example, the Ito – Saito – Nishizeki scheme, the Benaloh – Leichter scheme), but in general, such a scheme will not be an ideal secret sharing scheme. In the paper, for some classes of access structures, the construction of perfect and ideal secret sharing schemes based on linear codes is given. We also give a construction of perfect verifiable secret sharing schemes for any access structure for which there is a line code that implements this structure.

**Keywords:** cryptography, linear code, secret sharing scheme, access structure



**For citation:** Ratseev S. M. Constructions of some secret sharing schemes based on linear codes. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 330–341 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-330-341>, EDN: FDXFXL

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Одним из направлений исследований схем разделения секрета являются схемы, построенные на основе линейных кодов. Это связано с тем, что схемы разделения секрета на основе линейных кодов очень часто помимо свойства совершенности обладают также свойством идеальности, что является важной характеристикой при практической реализации этих схем. Схему разделения секрета назовем совершенной, если любая правомочная коалиция может восстановить секрет, при этом доли секрета любой неправомочной коалиции не дают никакой информации о секрете (в теоретико-информационном смысле). Схема разделения секрета обладает свойством идеальности, если размер секрета и размеры долей секрета совпадают.

Взаимосвязь между схемами разделения секрета и корректирующими кодами первыми заметили Мак-Элис и Сарвате [1]. Они показали обобщение схемы разделения секрета Шамира с помощью кодов Рида – Соломона. Секретом является одна из компонент информационного вектора, а долями секрета — компоненты кодового вектора. В этом обобщении восстановление секрета можно интерпретировать как декодирование вектора, содержащего стирания (отсутствующие доли некоторых участников). Также в этом обобщении может быть рассмотрена ситуация, когда некоторые участники в процессе восстановления секрета предоставляют заведомо некорректные доли. В этом случае можно применить алгоритм декодирования для случая стираний и ошибок. Ренвалл и Динг обобщили эту конструкцию для любого линейного кода [2]. В этом случае кодирование информационного вектора, содержащего компоненту, равную значению секрета, происходит на основе порождающей матрицы кода, а компоненты кода являются долями секрета. Если линейный код является кодом МДР, то полученная конструкция является пороговой схемой разделения секрета со свойствами идеальности и совершенности. Похожая конструкция приводится в работе Динга с соавт. [3]. Здесь исследуются схемы разделения мультисекретов на основе линейных кодов. В этом случае весь информационный вектор (или его часть) является набором секретов, который при кодировании с помощью порождающей матрицы переходит в (кодový) вектор, компоненты которого являются долями секрета.

Карнин с соавт. [4] привели конструкцию схем разделения секрета на основе линейных кодов, в которой секрет является частью не информационного вектора, а кодового. В этой конструкции компонента  $u_0 = s$  кодового вектора  $u$  линейного  $[n + 1, k]$ -кода является секретом, а все остальные компоненты  $u_1, \dots, u_n$  — долями секрета. Если линейный код является кодом МДР, то получается совершенная и идеальная пороговая схема разделения секрета. В работе [5] приводятся конструкции пороговых схем разделения секрета на основе кодов МДР, которые обобщают конструкцию Карнина и др. В этих конструкциях при восстановлении секрета возможно наличие участников с заведомо некорректными долями. В этом случае число собравшихся участников должно быть не менее  $2t + k$ , где  $k$  — порог,  $t$  — число участников с некорректными долями.

В работах [6, 7] Месси показал взаимосвязь между монотонной структурой доступа и минимальными векторами дуального кода, у которых первая компонента равна 1. В работе [8] Танг с соавт. привели критерий существования линейного кода, реализующего монотонную структуру доступа для идеальной схемы разделения секрета на основе минимальных векторов дуального кода. В работе [9] приводятся схемы на основе линейных кодов с использованием линейных хэш-функций. Тенту с соавт. в работе [10] построили совершенную и идеальную иерархическую схему разделения секрета на основе кодов МДР.

Более подробную информацию о корректирующих кодах можно найти, например, в [11].





О криптосистемах со свойством совершенности, в частности о схемах разделения секрета, можно найти информацию, например, в [12].

Пусть  $P = \{1, 2, \dots, n\}$  — конечное множество участников разделения секрета (для удобства изложения дальнейшего материала сопоставим участников с их номерами),  $\tilde{P}$  — множество, состоящее из всех возможных непустых подмножеств множества  $P$ ,  $R$  — множество, состоящее из подмножеств участников, которым разрешено восстановление секрета (правомочные коалиции),  $Z$  — множество, состоящее из подмножеств участников, которые не могут восстановить секрет (неправомочные коалиции). Структура доступа — разбиение  $\tilde{P} = R \cup Z$ . Структура доступа называется монотонной, если все надмножества правомочных коалиций также входят в  $R$ , т. е. если  $X \in R$ ,  $X \subseteq Y \in \tilde{P}$ , то  $Y \in R$ . Коалицию  $X \in R$  называют минимальной правомочной коалицией, если  $Y \notin R$  всегда, когда выполнено строгое включение  $Y \subset X$ . Множество минимальных правомочных коалиций из  $R$  обозначается как  $R_{\min}$  и называется базисом  $R$ .  $X \in Z$  называют максимальной неправомочной коалицией, если  $Y \in R$  всегда, когда выполнено строгое включение  $X \subset Y$ . Множество максимальных неправомочных коалиций из  $Z$  обозначается как  $Z_{\max}$ . Заметим, что множество  $R_{\min}$  однозначно задает структуру доступа. Аналогично множество  $Z_{\max}$  однозначно задает структуру доступа. Если структура доступа задается на основе  $R$  или  $R_{\min}$ , то такую структуру доступа будем обозначать через  $\Gamma$ . Любая  $(n, t)$ -пороговая схема разделения секрета — схема разделения секрета с  $n$  участниками для структуры доступа, в которой правомочными являются все коалиции, содержащие не менее  $t$  участников, а все коалиции с меньшим числом участников — неправомочны.

## 1. Структуры доступа на основе линейных кодов

В [6, 7] предложен метод построения структур доступа на основе минимальных векторов дуального кода к коду  $A$ . Если на основе дуального кода к заданному линейному коду  $A$  строится структура доступа, то будем ее обозначать через  $\Gamma(A)$ . Пусть  $A$  — некоторый  $[n+1, k, d]$ -линейный код над конечным полем  $F = GF(q)$  с порождающей матрицей  $G$  и проверочной матрицей  $H$ ,  $s \in F$  — секрет. Пусть номера  $i_1 = 0, i_2, \dots, i_k$ , где  $0 = i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ , образуют информационную совокупность. Это значит, что в матрице  $G$  столбцы с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_k$  линейно независимы, поэтому компоненты  $u_0, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}$  определяют все компоненты кодового вектора  $u$ . Определим  $u_0 = s$ , а компоненты  $u_{i_2}, \dots, u_{i_k} \in F$  сгенерируем случайным (равновероятным) образом. На основе компонент  $u_0, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}$  вычислим кодовый вектор  $u \in A$ . Компоненты  $u_1, u_2, \dots, u_n$  вектора  $u$  будут являться долями секрета.

Пусть  $A^\perp$  — дуальный  $[n+1, n+1-k, d^\perp]$ -код к коду  $A$ . Для кода  $A^\perp$  матрица  $H$  является порождающей матрицей. Будем говорить, что вектор  $x$  покрывает вектор  $y$ , если для любого индекса  $i = 0, 1, \dots, n$  из  $y_i \neq 0$  следует  $x_i \neq 0$ . Определим понятие минимального кодового вектора кода  $A^\perp$ . Ненулевой вектор  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in A^\perp$  называется минимальным кодовым вектором, если:

- 1) первая ненулевая компонента (считая слева направо) равна единице;
- 2) для любого ненулевого  $y \in A^\perp$ ,  $x \neq y$ , у которого первая ненулевая компонента равна 1, вектор  $x$  не покрывает вектор  $y$ .

**Замечание 1.** Заметим, что не существует двух различных минимальных кодовых векторов, у которых ненулевые компоненты имеют те же самые индексы. Действительно, пусть  $x, y$  — два таких вектора. Тогда ненулевой кодовый вектор  $x - y$  имеет меньший вес, нежели вес векторов  $x$  и  $y$ , причем векторы  $x$  и  $y$  покрывают вектор  $x - y$ . Пусть  $c \in F$  — значение первой ненулевой компоненты вектора  $x - y$ . Тогда вектор  $z = c^{-1}(x - y)$  является кодовым вектором, у которого первая ненулевая компонента равна 1. Причем  $x \neq z$ ,  $y \neq z$ ,  $x$  и  $y$  покрывают вектор  $z$ . Это противоречит минимальности векторов  $x$  и  $y$ .

Линейная оболочка, натянутая на множество всех минимальных кодовых векторов, совпадает с кодом  $A^\perp$ . На самом деле имеет место более сильное утверждение.



**Предложение 1** ([6]). Любой неминимальный кодовый вектор  $y$  является линейной комбинацией минимальных кодовых векторов, каждый из которых покрывается вектором  $y$ . При этом для любого ненулевого кодового вектора  $y$  найдется минимальный кодовый вектор  $x$ , у которого номер первой ненулевой компоненты (на которой стоит 1) совпадает с номером первой ненулевой компоненты вектора  $y$ , причем вектор  $y$  покрывает вектор  $x$ .

Для вектора  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  обозначим

$$\text{supp}(x) = \{i \mid 0 \leq i \leq n, x_i \neq 0\}.$$

Обозначим через  $V_0$  множество всех минимальных кодовых векторов  $u$  кода  $A^\perp$ , у которых  $u_0 = 1$ :

$$V_0 = \{(1, a_{11}, \dots, a_{1n}), (1, a_{21}, \dots, a_{2n}), \dots\}.$$

Множество  $V_0$  не держится в секрете. Определим множество минимальных правомочных коалиций  $R_{\min}$  следующим образом.  $X \in R_{\min}$  тогда и только тогда, когда для некоторого  $x \in V_0$  выполнено  $X = \text{supp}(x) \setminus \{0\}$ .

Множество всех правомочных коалиций  $R$  определяется как множество всех надмножеств коалиций из  $R_{\min}$ , причем эти правомочные коалиции являются подмножествами в  $\{1, 2, \dots, n\}$ :

$$R = \{X \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \mid \exists \tilde{X} \in R_{\min}, \tilde{X} \subseteq X\}.$$

Пусть  $X$  — некоторая правомочная коалиция. Для восстановления секрета сначала отыскивается минимальная правомочная коалиция, являющаяся подмножеством в  $X$ , а уже по долям секрета минимальной правомочной коалиции восстанавливается секрет  $s$ , используя множество  $V_0$ . Если минимальная правомочная коалиция соответствует  $i$ -му вектору множества  $V_0$ , то секрет определяется из равенства  $s + a_{i1}u_{i1} + \dots + a_{in}u_{in} = 0$ , где  $u_{ij}$  — доли участников минимальной правомочной коалиции. Тем самым показано, что любая правомочная коалиция однозначно восстановит секрет.

Любая неправомочная коалиция восстановить секрет не сможет. Действительно, пусть  $u_{i_1}, \dots, u_{i_m}$  — доли некоторых участников, по которым секрет  $s$  можно восстановить. Тогда найдутся такие скаляры  $a_{i_1}, \dots, a_{i_m} \in F$ , для которых  $s = u_0 = a_{i_1}u_{i_1} + \dots + a_{i_m}u_{i_m}$ . Поэтому из равенства

$$1 \cdot u_0 - a_{i_1} \cdot u_{i_1} - \dots - a_{i_m} \cdot u_{i_m} = 0$$

следует, что вектор  $a = (1, \dots, -a_{i_1}, \dots, -a_{i_m}, \dots)$  принадлежит пространству  $A^\perp$ , где скаляры  $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$  стоят на позициях соответственно  $i_1, \dots, i_m$ . Из сказанного выше следует, что вектор  $a$  покрывает некоторый вектор из множества  $V_0$ . Это значит, что коалиция участников  $\{i_1, \dots, i_m\}$  является правомочной.

Заметим, что, помимо свойства совершенности, данная схема обладает свойством идеальности [6].

## 2. Структура доступа, связанная с разбиением множества участников

В данном разделе рассмотрим вопрос построения линейных кодов, которые определяют множество минимальных правомочных коалиций в виде декартова произведения подмножеств множества участников, т. е. простой случай, когда  $R_{\min} = X_1 \times \dots \times X_k$ . Следующий критерий отражает взаимосвязь множества  $V_0$  с проверочной матрицей  $G$ . Через  $[G]_i$  будем обозначать  $i$ -й столбец матрицы  $G$ .

**Предложение 2** ([8]). Пусть  $(u_0, u_1, \dots, u_n) \in A$ , где  $u_0 = s$ ,  $G$  — порождающая матрица  $[n+1, k]$ -линейного кода  $A$  над полем  $F$ . Коалиция участников  $X \subseteq \{1, \dots, n\}$  может восстановить секрет тогда и только тогда, когда столбец  $[G]_0$  является линейной комбинацией столбцов  $[G]_i$ ,  $i \in X$ .

Пусть  $\{1, \dots, n\} = X_1 \cup \dots \cup X_k$  — некоторое разбиение множества  $\{1, \dots, n\}$ . Построим совершенную идеальную схему разделения секрета на основе кодов, для которой коалиция  $X \subseteq \{1, \dots, n\}$  является правомочной тогда и только тогда, когда  $X \cap X_i \neq \emptyset$  для любого  $i = 1, \dots, k$ , т. е. коалиция  $X$  содержит хотя бы по одному участнику из каждого множества  $X_i, i = 1, \dots, k$ . Для этого построим матрицу  $G$  размером  $k \times (n + 1)$  над множеством  $\{0, 1\}$  следующим образом. Столбец  $[G]_0$  состоит из единиц. Элементы первой строки матрицы  $G$  с номерами  $i, i \in X_1$ , равны единице, а остальные элементы (кроме элемента столбца  $[G]_0$ ) равны нулю. Аналогичным образом расставлены элементы в остальных строках. Например, если для любых  $i < j$  любой элемент множества  $X_i$  строго меньше любого элемента множества  $X_j$ , то схематично матрица  $G$  примет такой вид:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & & \dots & \\ 1 & & & & 1 & \dots & 1 & \dots \\ \vdots & & & & & & & \ddots \\ 1 & & & & & & \dots & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

**Предложение 3.** Пусть  $G$  — порождающая матрица указанного выше вида для  $[n+1, k]$ -линейного кода  $A$  над полем  $F$ . Коалиция  $X \subseteq \{1, \dots, n\}$  является правомочной (т. е. может восстановить секрет) тогда и только тогда, когда  $X \cap X_i \neq \emptyset$  для любого  $i = 1, \dots, k$ . Более того, множество минимальных правомочных коалиций является декартовым произведением множеств  $X_1, \dots, X_k: R_{\min} = X_1 \times \dots \times X_k$ .

**Доказательство.** Применим критерий из предложения 2. Из вида (1) матрицы  $G$  понятно, что если столбец  $[G]_0$  является линейной комбинацией некоторых других столбцов матрицы  $G$ , то в этой линейной комбинации для любого  $i = 1, \dots, k$  должен участвовать хотя бы один столбец  $[G]_j, j \in X_i$ .

Обратно, возьмем по одному элементу  $j_i \in X_i$  из каждого множества  $X_i, i = 1, \dots, k$ . Тогда  $[G]_0 = [G]_{j_1} + \dots + [G]_{j_k}$ .  $\square$

Пусть матрица  $G$  имеет вид (1). Обозначим  $n_i = |X_i|, i = 1, \dots, k$ . В этом случае индексы  $0, 1, n_1 + 1, n_2 + 1, \dots, n_{k-2} + 1$  образуют информационную совокупность линейного кода, порожденного матрицей  $G$ , так как столбцы матрицы  $G$  с данными номерами линейно независимы. Это значит, что компоненты  $u_0, u_1, u_{n_1+1}, \dots, u_{n_{k-2}+1}$  однозначно определяют весь кодовый вектор  $u$ . Для этого сначала находится решение системы уравнений

$$(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})([G]_0, [G]_1, [G]_{n_1+1}, \dots, [G]_{n_{k-2}+1}) = (u_0, u_1, u_{n_1+1}, \dots, u_{n_{k-2}+1})$$

относительно неизвестных  $x_i$ . Таким решением будет

$$x_0 = u_1, \quad x_1 = u_{n_1+1}, \dots, x_{k-2} = u_{n_{k-2}+1}, \quad x_{k-1} = u_0 - (u_1 + u_{n_1+1} + \dots + u_{n_{k-2}+1}).$$

Теперь весь кодовый вектор определяется следующим образом:

$$u = xG = (u_0, \underbrace{u_1, \dots, u_1}_{n_1}, \underbrace{u_{n_1+1}, \dots, u_{n_1+1}}_{n_2}, \dots, \underbrace{u_{n_{k-2}+1}, \dots, u_{n_{k-2}+1}}_{n_{k-1}}, \underbrace{u_0 - (u_1 + u_{n_1+1} + \dots + u_{n_{k-2}+1}), \dots, u_0 - (u_1 + u_{n_1+1} + \dots + u_{n_{k-2}+1})}_{n_k}).$$

Пусть некоторая правомочная коалиция  $X$  хочет восстановить секрет  $s$ . Пусть  $X_0$  — некоторая минимальная правомочная коалиция, причем  $X_0 \subseteq X$ . Если  $u_{i_1}, \dots, u_{i_k}$  — доли участников коалиции  $X_0$ , то  $s = u_{i_1} + \dots + u_{i_k}$ . При этом доли любой неправомочной коалиции не дадут никакой информации о секрете, так как если в коалиции нет ни одного представителя из некоторого множества  $X_i$ , то, варьируя неизвестную долю, можно получить любое значение секрета  $s$  из  $F$ . Поэтому схема является совершенной. Идеальность схемы очевидна.





### 3. Построение линейного кода, реализующего структуру доступа

Рассмотрим вопрос о возможности построения линейного кода по заданной структуре доступа. Для этого на основе работы [8] определим матрицы  $\mathbb{G}$  и  $\mathbb{H}$ .

Пусть  $A$  — линейный  $[n+1, k]$ -код над полем  $F$ ,  $X \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ . Напомним, что  $X$  является правомочной коалицией тогда и только тогда, когда найдется вектор  $v \in A^\perp$ ,  $v_0 = 1$ , для которого  $\text{supp}(v) \subseteq X \cup \{0\}$ . Это равносильно существованию такого минимального вектора  $u \in V_0$ , для которого  $\text{supp}(u) \subseteq X \cup \{0\}$ . Обозначим через  $\Gamma(A)$  множество всех минимальных правомочных коалиций, определяемых на основе кода  $A$ . Получаем, что  $X$  — правомочная коалиция тогда и только тогда, когда  $X$  является надмножеством некоторой коалиции из  $\Gamma(A)$ .

Пусть  $\Gamma = \{X_1, \dots, X_m\}$  — некоторая совокупность непустых подмножеств в  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Будем считать, что ни одно множество из  $\Gamma$  не содержит другое множество из  $\Gamma$ , т. е.  $\Gamma = R_{\min}$ . Также будем считать, что каждый участник  $1, 2, \dots, n$  входит хотя бы в одно множество (коалицию)  $X_j$ . В этом случае  $\Gamma$  определяет структуру доступа следующим образом: подмножество  $X \subseteq \{1, \dots, n\}$  является правомочной коалицией тогда и только тогда, когда  $X$  является надмножеством некоторого множества из  $\Gamma$ . При этом  $Y \subseteq \{1, \dots, n\}$  является неправомочной коалицией тогда и только тогда, когда  $Y$  не является надмножеством ни для одного множества из  $\Gamma$ .

Пусть  $\Gamma = \{X_1, \dots, X_m\}$  — некоторая структура доступа (более точно —  $\Gamma$  определяет структуру доступа, но иногда будем использовать такую терминологию), где  $X_i \subset \{1, \dots, n\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ .  $\Gamma$  можно представить в виде матрицы

$$\Gamma = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mn} \end{pmatrix},$$

где  $h_{ij} \neq 0$  при  $j \in X_i$ ,  $h_{ij} = 0$  при  $j \notin X_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ . В этом случае каждая строка матрицы  $\Gamma$  характеризует соответствующее множество  $X_i$ . На основе матрицы  $\Gamma$  построим матрицу  $\mathbb{H}$ :

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 1 & h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ 1 & h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

т. е. к матрице  $\Gamma$  добавили столбец из единиц, который будет являться столбцом с нулевым номером. У остальных столбцов будут номера  $1, 2, \dots, n$ , которые соответствуют участникам разделения секрета. Через  $(\mathbb{H})_i$  и  $(\mathbb{H})_j$  будем обозначать соответственно  $i$ -ю строку и  $j$ -й столбец матрицы  $\mathbb{H}$ . Заметим, что в матрице  $\mathbb{H}$  нет нулевых столбцов.

**Теорема 1.** Пусть  $\Gamma = \{X_1, \dots, X_m\} = R_{\min}$  — некоторая структура доступа,  $F$  — некоторое конечное поле. Составим на основе  $\Gamma$  матрицу  $H$  вида (2), в которой всем ненулевым элементам  $h_{ij}$  придадим некоторые конкретные значения из  $F^*$ . Пусть  $A^\perp$  — линейная оболочка над  $F$ , натянутая на векторы-строки матрицы  $H$ . Пусть  $V_0$  — множество минимальных кодовых векторов и кода  $A^\perp$ , у которых  $u_0 = 1$ . Равенство  $\Gamma = \Gamma(A)$  выполнено тогда и только тогда, когда множество  $V_0$  и множество строк матрицы  $H$  равны.

**Доказательство.** Пусть на основе  $\Gamma = \{X_1, \dots, X_m\} = R_{\min}$  получены матрица  $H$ , код  $A^\perp$ , множество  $V_0$ .

Если множество  $V_0$  и множество строк матрицы  $H$  равны, то  $R_{\min} = R_{\min}(A)$ . Так как множество минимальных правомочных коалиций полностью определяет структуру доступа, то исходная структура доступа  $\Gamma$  и структура доступа, задаваемая кодом  $A$ , равны.

Обратно, пусть  $\Gamma = \Gamma(A)$ . Из построения кода  $A^\perp$  понятно, что множество строк матрицы  $H$  является подмножеством в  $V_0$ . Если бы в  $V_0$  был вектор, которого нет среди строк матрицы  $H$ , то, учитывая замечание 1, было бы выполнено строгое включение  $\Gamma \subset \Gamma(A)$ , что противоречит условию.  $\square$

В следующем утверждении приводится критерий неправомочной коалиции.

**Предложение 4 ([8]).** Пусть  $A$  — линейный  $[n+1, k]$ -код над конечным полем  $F$ . Множество  $T \subset \{1, \dots, n\}$  является неправомочной коалицией тогда и только тогда, когда найдется кодовый вектор  $u = (u_0, u_1, \dots, u_n) \in A$ , для которого  $u_0 = 1$  и  $u_i = 0$  для любого  $i \in T$ .

Матрица (2) несет информацию о минимальных правомочных коалициях. На основе предложения 4 определим еще одну матрицу. Пусть  $\Gamma = \{X_1, \dots, X_m\}$ . На основе  $\Gamma$  определим  $Z_{\max} = \{Y_1, \dots, Y_l\}$  — множество всех максимальных неправомочных коалиций. Учитывая критерий неправомочной коалиции из предложения 4, определим матрицу

$$\mathbb{G} = \begin{pmatrix} 1 & g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ 1 & g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & g_{l1} & g_{l2} & \dots & g_{ln} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где  $g_{ij} = 0$  при  $j \in Y_i$ ,  $g_{ij} \neq 0$  при  $j \notin Y_i$ .

**Теорема 2 ([8]).** Для заданной структуры доступа  $\Gamma = \{X_1, \dots, X_m\}$  существует линейный код  $A$  над конечным полем  $F$ , определяющий структуру доступа  $\Gamma = \Gamma(A)$ , тогда и только тогда, когда система квадратных уравнений

$$\mathbb{G}\mathbb{H}^T = O \tag{4}$$

имеет решение над полем  $F$  для  $g_{ij}$ ,  $j \notin Y_i$ ,  $h_{ij}$ ,  $j \in X_i$ .

**Пример 1.** Пусть  $\Gamma = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}\} = R_{\min}$ . В этом случае  $Z_{\max} = \{\{1, 2\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$ . Найдем линейный код (если он существует), реализующий  $\Gamma$ . Составим матрицы  $\mathbb{G}$  и  $\mathbb{H}$ :

$$\mathbb{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & g_{13} & g_{14} & g_{15} \\ 1 & 0 & g_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & g_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{H} = \begin{pmatrix} 1 & h_{11} & h_{12} & h_{13} & 0 & 0 \\ 1 & h_{21} & h_{22} & 0 & h_{24} & 0 \\ 1 & h_{31} & h_{32} & 0 & 0 & h_{35} \end{pmatrix},$$

где все элементы  $g_{ij}$ ,  $h_{st}$ , кроме явно выписанных нулей, не равны нулю. Учитывая теорему 2, получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 + g_{13}h_{13} = 0, \\ 1 + g_{14}h_{24} = 0, \\ 1 + g_{15}h_{35} = 0, \\ 1 + g_{22}h_{12} = 0, \\ 1 + g_{22}h_{22} = 0, \\ 1 + g_{22}h_{32} = 0, \\ 1 + g_{31}h_{11} = 0, \\ 1 + g_{31}h_{21} = 0, \\ 1 + g_{31}h_{31} = 0. \end{cases}$$

Вычитая из 4-го уравнения по очереди 5-е и 6-е уравнения, получаем, что  $h_{12} = h_{22} = h_{32} = -g_{22}^{-1}$ . Аналогичным образом из первых трех уравнений системы получаем  $h_{13} = -g_{13}^{-1}$ ,



$h_{24} = -g_{14}^{-1}$ ,  $h_{35} = -g_{15}^{-1}$ , а из последних трех —  $h_{11} = h_{21} = h_{31} = -g_{31}^{-1}$ . Поэтому данная система имеет решение над любым полем  $F$ .

Возьмем, например, поле  $F = GF(2^m)$  для некоторого фиксированного  $m$ . Тогда в качестве матриц  $G$  и  $H$  можно определить

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $A$  — линейная оболочка над полем  $F$ , натянутая на векторы, являющиеся строками матрицы  $G$ . Получим  $[6, 3]$ -линейный код  $A$ , причем  $\Gamma = \Gamma(A)$ .

#### 4. Построение линейных кодов на основе некоторых структур доступа

Пусть  $X_0 \subset \{1, 2, \dots, n\}$  — некоторое подмножество, причем  $X_0$  может быть пустым. Определим на множестве  $\{1, 2, \dots, n\} \setminus X_0$  разбиение вида

$$\{1, 2, \dots, n\} \setminus X_0 = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m.$$

Рассмотрим структуру доступа  $\Gamma = \{X_0 \cup X_1, X_0 \cup X_2, \dots, X_0 \cup X_m\}$ . Пусть каждый элемент множества  $X_i$  строго меньше каждого элемента множества  $X_j$  при  $i < j$ . Пусть  $F$  — некоторое конечное поле. На основе  $\Gamma$  составим матрицу  $H$  вида (2), в которой ненулевым элементам придадим значение 1. Тогда схематично матрица  $H$  примет такой вид:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & & & 1 & \dots & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & & \ddots & \\ 1 & 1 & \dots & 1 & & & & & \dots & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Столбец с номером 0 матрицы  $H$  состоит из единиц. Далее следуют  $|X_0|$  столбцов, тоже состоящих из единиц. Напомним, что множество  $X_0$  может быть пустым (в отличие от множеств  $X_1, \dots, X_m$ ). Серия единиц в  $i$ -й строке (за исключением первых  $|X_0| + 1$  столбцов из единиц) матрицы  $H$  соответствует множеству  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Например, матрица  $H$  из примера 1 соответствует случаю  $X_0 = \{1, 2\}$ ,  $X_1 = \{3\}$ ,  $X_2 = \{4\}$ ,  $X_3 = \{5\}$ .

Из (5) видно, что если для некоторого вектора  $u$ , являющегося линейной комбинацией строк матрицы  $H$ , выполнено  $u_0 = 1$ , то вектор  $u$  покрывает некоторую строку матрицы  $H$ . Поэтому по теореме 1 выполнено  $\Gamma = \Gamma(A)$ , где  $A^\perp$  — линейная оболочка над  $F$ , натянутая на векторы-строки матрицы  $H$ .

Пусть  $f(X_i)$  — значение максимального элемента множества  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Индексы  $I = \{0, 1, \dots, n\} \setminus \{f(X_1), f(X_2), \dots, f(X_m)\}$  образуют информационную совокупность кода  $A$ . Поэтому компонентам  $u_i$ ,  $i \in I$ , можно придавать произвольные значения поля  $F$ , где  $u_0 = s$  — значение секрета. А все остальные компоненты кодового вектора  $u$  вычисляются на основе компонент  $u_i$ ,  $i \in I$ , по следующим формулам:

$$u_{f(X_i)} = -(S_0 + S_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

где

$$S_0 = u_0 + \sum_{j \in X_0} u_j, \quad S_i = \sum_{j \in X_i \setminus \{f(X_i)\}} u_j, \quad i = 1, \dots, m.$$

Пусть  $u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$  — доли собравшихся участников некоторой минимальной правомочной коалиции. Тогда секрет  $s = u_0$  восстанавливается исходя из равенства  $u_0 + u_{i_1} + \dots + u_{i_r} = 0$ .



**Замечание 2.** Если структура доступа задается с помощью множества минимальных правомочных коалиций, состоящих из двух коалиций, то этот случай подпадает под рассматриваемый в этом разделе случай, поскольку

$$\{X_1, X_2\} = \{(X_1 \cap X_2) \cup (X_1 \setminus X_2), (X_1 \cap X_2) \cup (X_2 \setminus X_1)\}.$$

Это значит, что для любой структуры доступа, которая задается на основе двух минимальных правомочных коалиций, существует совершенная схема разделения секрета со свойством идеальности.

**Пример 2.** Пусть  $X_0 = \{1, 2, 3\}$ ,  $X_1 = \{4, 5\}$ ,  $X_2 = \{6, 7, 8\}$ ,  $X_3 = \{9, 10\}$ ,

$$\Gamma = \{X_0 \cup X_1, X_0 \cup X_2, X_0 \cup X_3\}.$$

В данном случае матрицы  $H$  и  $G$  примут вид

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & & & & & & \\ -1 & & 1 & & & & & & & & \\ -1 & & & 1 & & & & & & & \\ 0 & & & & -1 & 1 & & & & & \\ 0 & & & & 0 & & -1 & 1 & & & \\ 0 & & & & 0 & & -1 & & 1 & & \\ -1 & & & & 1 & & 1 & & & 1 & \\ -1 & & & & 1 & & 1 & & & & 1 \end{pmatrix},$$

где вне выписанных чисел стоят нули. Пусть  $A$  — линейный  $[11, 8]$ -код над некоторым полем  $F$ , порожденный матрицей  $G$ . В коде  $A$  выберем индексы  $0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9$  в качестве информационной совокупности. Тогда кодовый вектор  $u$  на основе компонент  $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_6, u_7, u_9$  вычисляется следующим образом:

$$u = \left( u_0 = s, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 = -(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4), u_6, u_7, \right.$$

$$\left. u_8 = -(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_6 + u_7), u_9, u_{10} = -(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_9) \right).$$

Компонента  $u_i$  передается участнику с номером  $i$ ,  $i = 1, \dots, 10$ .

Предположим, что собрались вместе участники коалиции  $X_0 \cup X_3 = \{1, 2, 3, 9, 10\}$ . В этом случае секрет  $s = u_0$  восстанавливается исходя из равенства  $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_9 + u_{10} = 0$ .

Заметим, что приведенную выше структуру доступа можно обобщить. Пусть  $Z_0, Y_1, \dots, Y_p$  — некоторые попарно пересекающиеся по пустому множеству подмножества в  $\{1, \dots, n\}$ . Некоторые из данных множеств могут быть пустыми. Будем считать, что  $Z_0$  является корнем дерева,  $Y_1, \dots, Y_p$  — его непосредственные потомки. Пусть  $X_{11}, \dots, X_{1n_1}$  — непосредственные потомки вершины  $Y_1$ . И так далее,  $X_{p1}, \dots, X_{pn_p}$  — непосредственные потомки вершины  $Y_p$ . При этом

$$\{1, \dots, n\} \setminus (Z_0 \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_p) = X_{11} \cup \dots \cup X_{1n_1} \cup \dots \cup X_{p1} \cup \dots \cup X_{pn_p}$$

— разбиение множества (которое стоит в левой части равенства). Рассмотрим структуру доступа

$$\Gamma = \{Z_0 \cup Y_1 \cup X_{11}, \dots, Z_0 \cup Y_1 \cup X_{1n_1}, \dots, Z_0 \cup Y_p \cup X_{p1}, \dots, Z_0 \cup Y_p \cup X_{pn_p}\}.$$



В данном случае секрет  $s \in F$  можно разделить следующим образом. Случайно равномерно генерируются элементы  $u_i, i \in I$ , кроме  $u_0 = s$ , где  $I = \{0, 1, \dots, n\} \setminus \{f(X_{11}), \dots, f(X_{1n_1}), \dots, f(X_{p1}), \dots, f(X_{pn_p})\}$ . Пусть

$$S_0 = u_0 + \sum_{j \in Z_0} u_j, \quad S_i = \sum_{j \in Y_i} u_j, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$S_{ij} = \sum_{k \in X_{ij} \setminus \{f(X_{ij})\}} u_k, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, n_i.$$

Тогда

$$u_{f(X_{ij})} = -(S_0 + S_i + S_{ij}), \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, n_i.$$

Пусть собрались вместе участники правомочной коалиции  $Z_0 \cup Y_i \cup X_{ij}$ . Тогда значение секрета  $u_0 = s$  восстанавливается исходя из равенства

$$u_0 + \sum_{j \in Z_0} u_j + \sum_{j \in Y_i} u_j + \sum_{k \in X_{ij} \setminus \{f(X_{ij})\}} u_k + u_{f(X_{ij})} = 0. \quad (6)$$

Пусть  $T$  — некоторая неправомочная коалиция. Тогда  $(Z_0 \cup Y_i \cup X_{ij}) \not\subseteq T$  для любых  $i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n_i$ . Зафиксируем  $i$  и  $j$ . Тогда либо  $Z_0 \not\subseteq T$  при  $Z_0 \neq \emptyset$ , либо  $Y_i \not\subseteq T$  при  $Y_i \neq \emptyset$ , либо  $X_{ij} \not\subseteq T$ . Это значит, что в сумме (6) для нахождения  $u_0$  не хватает некоторой компоненты  $u_s$ . Если в качестве значения  $u_s$  подставлять все значения поля  $F$ , то  $u_0$  будет принимать все значения поля  $F$ . В силу произвольности индексов  $i$  и  $j$  получаем, что доли секрета любой неправомочной коалиции не дают никакой информации о секрете. Поэтому полученная схема является совершенной. Свойство идеальности схемы очевидно.

Приведенная структура доступа также легко может быть еще более обобщена.

## 5. Совершенные проверяемые схемы разделения секрета на основе линейных кодов

Рассмотрим ситуацию, когда участники разделения секрета, включая дилера  $D$ , не доверяют друг другу. Пусть  $p, q$  — большие простые числа, причем  $q$  — делитель числа  $p - 1$ ,  $g$  — некоторый элемент мультипликативной группы поля  $GF(p)^*$ , имеющий порядок  $q$ . Теперь линейные коды будут рассматриваться над полем  $GF(q)$ . Пусть  $d \in GF(q)$  — некоторый секретный случайный параметр,  $h = g^d \pmod{p}$ . Значения  $p, q, g, h$  являются открытыми параметрами.

Пусть  $\Gamma$  — некоторая структура доступа, причем для некоторого линейного  $[n + 1, k]$ -кода над полем  $GF(q)$  выполнено  $\Gamma = \Gamma(A)$ . Для разделения секрета  $s \in GF(q)$  дилер находит вектор  $x = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ , для которого  $u = xG = (u_0, u_1, \dots, u_n)$  (например, на основе компонент  $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}$ , где  $i_1 = 0, i_2, \dots, i_k$  — некоторая информационная совокупность кода  $A$ ), где  $s = u_0, G$  — порождающая матрица кода  $A$ , генерирует случайным равновероятным образом вектор  $y = (y_0, y_1, \dots, y_{k-1})$  и вычисляет вектор  $v = yG = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ . В данной схеме  $i$ -й участник разделения секрета получит пару значений  $u_i, v_i, i = 1, \dots, n$ . Для проверки корректности долей секрета дилер  $D$  вычисляет значения

$$r_i = g^{x_i} h^{y_i} \pmod{p}, \quad i = 0, 1, \dots, k - 1.$$

Эти значения являются открытыми и не хранятся в секрете.

Заметим, что  $r_i = g^{x_i + dy_i} \pmod{p}$ . Предположим, что злоумышленник умеет вычислять дискретные логарифмы. Тогда ему известны значения  $d, x_i + dy_i, i = 0, 1, \dots, k - 1$ . Так как все  $y_i$  вычислялись случайным равновероятным образом, то известные значения не дадут никакой информации о  $x_i$  (в теоретико-информационном смысле),  $i = 0, 1, \dots, k - 1$ .



Каждый участник может произвести проверку корректности своей доли секрета. Если  $i$ -я доля корректна,  $i = 1, \dots, n$ , то должно выполняться следующее сравнение:

$$r_0^{g_{1i}} \cdot r_1^{g_{2i}} \cdot \dots \cdot r_{k-1}^{g_{ki}} \equiv g^{u_i} h^{v_i} \pmod{p},$$

где  $g_{1i}, \dots, g_{ki}$  — элементы  $i$ -го столбца матрицы  $G$ , которая не держится в секрете.

**Модификация проверяемой СРС на эллиптических кривых.** Пусть, как и ранее,  $q$  — некоторый достаточно большой простой делитель числа  $|E_p(a, b)|$ , где  $E_p(a, b)$  — эллиптическая кривая над полем  $GF(p)$  вида  $y^2 = x^3 + ax + b \pmod{p}$ . Пусть некоторая точка  $P \in E_p(a, b)$  имеет порядок  $q$ ,  $d \in GF(q)$  — некоторый секретный параметр,  $Q = [d]P$  — открытый параметр (точка эллиптической кривой).

Пусть  $u = xG$ ,  $v = yG$ , где  $s = u_0$  — секрет. В данном случае дилер  $D$  вычисляет значения  $R_i = [x_i]P + [y_i]Q \in E_p(a, b)$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ . Эти значения являются открытыми и не хранятся в секрете. Теперь  $i$ -й участник разделения секрета может сделать проверку корректности доли. В этом случае должно выполняться равенство

$$[g_{1i}]R_0 + [g_{2i}]R_1 + \dots + [g_{ki}]R_{k-1} = [u_i]P + [v_i]Q.$$

### Список литературы

1. McEliece R. J., Sarwate D. V. On sharing secrets and Reed–Solomon codes // *Communications of the ACM*. 1981. Vol. 24, iss. 9. P. 583–584. <https://doi.org/10.1145/358746.358762>
2. Renvall A., Ding C. The access structure of some secret-sharing schemes // *Information Security and Privacy. ACISP 1996* / ed. by J. Pieprzyk, J. Seberry. Berlin, Heidelberg : Springer, 1996. P. 67–78. (Lecture Notes in Computer Science, vol. 1172). <https://doi.org/10.1007/BFb0023288>
3. Ding C., Laihonen T., Renvall A. Linear multisecret-sharing schemes and error-correcting codes // *Journal of Universal Computer Science*. 1997. Vol. 3, iss. 9. P. 1023–1036.
4. Karnin E. D., Greene J. W., Hellman M. E. On secret sharing systems // *IEEE Transactions on Information Theory*. 1983. Vol. 29, iss. 1. P. 35–41. <https://doi.org/10.1109/TIT.1983.1056621>
5. Pieprzyk J., Zhang X. M. Ideal threshold schemes from MDS codes // *Information Security and Cryptology – ICISC 2002* / ed. by P. J. Lee, C. H. Lim. Berlin, Heidelberg : Springer, 2003. P. 253–263. (Lecture Notes in Computer Science, vol. 2587). [https://doi.org/10.1007/3-540-36552-4\\_18](https://doi.org/10.1007/3-540-36552-4_18)
6. Massey J. L. Minimal codewords and secret sharing // *Proceedings of the 6th Joint Swedish-Russian Workshop on Information Theory*. Molle, Sweden, 1993. P. 276–279.
7. Massey J. L. Some applications of coding theory in cryptography // *Codes and Ciphers: Cryptography and Coding IV* / ed. by P. G. Farrell. Essex, England : Formara Ltd., 1995. P. 33–47.
8. Tang C., Gao S., Zhang C. The optimal linear secret sharing scheme for any given access structure // *Journal of Systems Science and Complexity*. 2013. Vol. 26, № 4. P. 634–649. <https://doi.org/10.1007/s11424-013-2131-4>
9. Cramer R., Damgård I. B., Döttling N., Fehr S., Spini G. Linear secret sharing schemes from error correcting codes and universal hash functions // *Advances in Cryptology – EUROCRYPT 2015* / ed. by E. Oswald, M. Fischlin. Berlin, Heidelberg : Springer, 2015. P. 313–336. (Lecture Notes in Computer Science, vol. 9057). [https://doi.org/10.1007/978-3-662-46803-6\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-662-46803-6_11)
10. Tentu A. N., Paul P., Venkaiah V. Ch. Ideal and perfect hierarchical secret sharing schemes based on MDS codes // *Proceeding of International Conference on Applied and Computational Mathematics*. Ankara, Turkey, 2012. P. 256–272.
11. Рацев С. М. Элементы высшей алгебры и теории кодирования : учеб. пособие для вузов. Санкт-Петербург : Лань, 2022. 656 с. EDN: [EPVGNW](https://www.edn.ru/EPVGNW)
12. Рацев С. М. Математические методы защиты информации : учеб. пособие для вузов. Санкт-Петербург : Лань, 2022. 544 с. EDN: [QZANSJ](https://www.edn.ru/QZANSJ)

### References

1. McEliece R. J., Sarwate D. V. On sharing secrets and Reed–Solomon codes. *Communications of the ACM*, 1981, vol. 24, iss. 9, pp. 583–584. <https://doi.org/10.1145/358746.358762>
2. Renvall A., Ding C. The access structure of some secret-sharing schemes. In: Pieprzyk J., Seberry J. (eds.) *Information Security and Privacy. ACISP 1996*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 1172. Berlin, Heidelberg, Springer, 1996, pp. 67–78. <https://doi.org/10.1007/BFb0023288>



3. Ding C., Laihonen T., Renvall A. Linear multisecret-sharing schemes and error-correcting codes. *Journal of Universal Computer Science*, 1997, vol. 3, iss. 9, pp. 1023–1036.
4. Karnin E. D., Greene J. W., Hellman M. E. On secret sharing systems. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1983, vol. 29, iss. 1, pp. 35–41. <https://doi.org/10.1109/TIT.1983.1056621>
5. Pieprzyk J., Zhang X. M. Ideal threshold schemes from MDS codes. In: Lee P. J., Lim C. H. (eds.) *Information Security and Cryptology – ICISC 2002*. ICISC 2002. Lecture Notes in Computer Science, vol. 2587. Berlin, Heidelberg, Springer, 2003, pp. 253–263. [https://doi.org/10.1007/3-540-36552-4\\_18](https://doi.org/10.1007/3-540-36552-4_18)
6. Massey J. L. Minimal codewords and secret sharing. *Proceedings of the 6th Joint Swedish-Russian Workshop on Information Theory*. Molle, Sweden, 1993, pp. 276–279.
7. Massey J. L. Some applications of coding theory in cryptography. In: Farrell P. G. (ed.) *Codes and Ciphers: Cryptography and Coding IV*. Essex, England, Formara Ltd., 1995, pp. 33–47.
8. Tang C., Gao S., Zhang C. The optimal linear secret sharing scheme for any given access structure. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2013, vol. 26, iss. 4, pp. 634–649. <https://doi.org/10.1007/s11424-013-2131-4>
9. Cramer R., Damgård I. B., Döttling N., Fehr S., Spini G. Linear secret sharing schemes from error correcting codes and universal hash functions. In: Oswald E., Fischlin M. (eds.) *Advances in Cryptology – EUROCRYPT 2015*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 9057. Berlin, Heidelberg, Springer, 2015, pp. 313–336. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-46803-6\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-662-46803-6_11)
10. Tentu A. N., Paul P., Venkaiah V. Ch. Ideal and perfect hierarchical secret sharing schemes based on MDS codes. *Proceeding of International Conference on Applied and Computational Mathematics*. Ankara, Turkey, 2012, pp. 256–272.
11. Ratseev S. M. *Elementy vysshey algebrы i teorii kodirovaniya* [Elements of Higher Algebra and Coding Theory]. St. Petersburg, Lan', 2022. 656 p. (in Russian). EDN: [EPVGNW](https://www.edn.ru/EPVGNW)
12. Ratseev S. M. *Matematicheskie metody zashchity informatsii* [Mathematical Methods of Information Security]. St. Petersburg, Lan', 2022. 544 p. (in Russian). EDN: [QZANSJ](https://www.edn.ru/QZANSJ)

Поступила в редакцию / Received 24.02.2023

Принята к публикации / Accepted 25.04.2023

Опубликована / Published 30.08.2024





Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 342–350  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 342–350  
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-342-350>, EDN: FNMHYW

Научная статья  
УДК 517.53:517.54

## Новое доказательство гипотезы Кшижа при $n = 3$

Д. Л. Ступин

Тверской государственной университет, Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33

Ступин Денис Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, dstupin@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9183-9543>, AuthorID: 151820

**Аннотация.** Цель статьи — решение задачи о точной оценке модуля третьего тейлоровского коэффициента на классе голоморфных ограниченных не обращающихся в нуль в единичном круге функций (далее класс ограниченных не обращающихся в нуль функций). Задачу о точной оценке модулей всех тейлоровских коэффициентов в зависимости от номера коэффициента на этом классе обычно называют проблемой Кшижа. Рассмотрим класс нормированных голоморфных ограниченных в единичном круге функций (далее класс ограниченных функций). Проблема коэффициентов на этом классе ставится так: найти необходимые и достаточные условия, которые нужно наложить на последовательность комплексных чисел для того, чтобы степенной ряд с коэффициентами из этой последовательности был рядом Тейлора некоторой функции из класса ограниченных функций. В данной работе на основе решения проблемы коэффициентов для класса ограниченных функций решается задача получения точных оценок модулей первых трех тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных функций. Указано на возможность визуализации первых трех тел коэффициентов подкласса класса ограниченных функций, состоящего из функций с действительными коэффициентами. Далее решается задача получения точной верхней оценки модуля третьего тейлоровского коэффициента на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций путем перехода к функционалу над классом ограниченных функций. На основе упомянутых выше оценок на классе ограниченных функций удалось получить функционал, мажорирующий исходный. После чего задача сведена к поиску условного максимума функции трех действительных переменных с ограничениями типа неравенств, что позволило применить стандартные методы дифференциального исчисления для получения этого основного результата.

**Ключевые слова:** гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченные не обращающиеся в нуль функции, тело коэффициентов, ограниченные функции, оценки модулей тейлоровских коэффициентов

**Для цитирования:** Ступин Д. Л. Новое доказательство гипотезы Кшижа при  $n = 3$  // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 342–350. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-342-350>, EDN: FNMHYW

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## A new proof of the Krzyz conjecture for $n = 3$

D. L. Stupin

Tver State University, 33 Zhelyabova St., Tver 170100, Russia

Denis L. Stupin, dstupin@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9183-9543>, AuthorID: 151820



**Abstract.** The purpose of this paper is to solve the problem of the sharp estimation of the modulus of the third Taylor coefficient on the class of holomorphic bounded nonvanishing in the unit disk functions (hereafter referred to as the class of bounded nonvanishing functions). The problem of sharp estimation of the moduli of all Taylor coefficients depending on the coefficient number on this class is usually called the Krzyz problem. Consider the class of normalized holomorphic bounded functions in the unit disk (hereafter referred to as the class of bounded functions). The coefficient problem on this class is posed as follows: find the necessary and sufficient conditions to impose on a sequence of complex numbers so that the power series with coefficients from this sequence is the Taylor series of some function from the class of bounded functions. In this paper, by means of the solution of the coefficient problem for the class of bounded functions, we solve the problem of obtaining the sharp estimates of moduli of the first three Taylor coefficients on the class of bounded functions. It is pointed out that it is possible to visualize the first three coefficient bodies of the subclass of the class of bounded functions, consisting of functions with real coefficients. Next, we solve the problem of obtaining the sharp upper estimation of the modulus of the third Taylor coefficient on the class of bounded nonvanishing functions, by reducing it to the functional over the class of bounded functions. On the basis of the above-mentioned estimates on the class of bounded functions, it was possible to obtain a functional that majorizes the original one. The problem is then reduced to the problem of finding the conditional maximum of the function of three real variables with inequality-type constraints, which made it possible to apply standard methods of differential calculus to obtain this main result.

**Keywords:** Krzyz hypothesis, Krzyz problem, bounded nonvanishing functions, body of coefficients, bounded functions, Taylor coefficient modulus estimates

**For citation:** Stupin D. L. A new proof of the Krzyz conjecture for  $n = 3$ . *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 342–350 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-342-350>, EDN: FNMHYW

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Тейлоровские коэффициенты функции  $f(z)$  будем обозначать  $\{f\}_n$ ,  $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ .

Класс  $B$  состоит из голоморфных в единичном круге  $\Delta$  функций  $f$  таких, что  $0 < |f(z)| \leq 1$ ,  $z \in \Delta$ .

В 1968 г. Ян Кшиж предположил [1], что если  $f \in B$ , то

$$|\{f\}_n| \leq 2/e, \quad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается только на функциях вида  $e^{i\psi} F(e^{i\varphi} z^n, 1)$ , где

$$F(z, t) := e^{-t \frac{1-z}{1+z}}, \quad \varphi, \psi \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Это предположение мы будем называть *гипотезой Кшижа*, а задачу об оценке  $|\{f\}_n|$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , на классе  $B$  — *проблемой Кшижа*.

Гипотеза Кшижа привлекает внимание ряда математиков. В настоящее время она доказана до пятого тейлоровского коэффициента включительно [2]. Существование экстремалей в этой задаче очевидно, поскольку после присоединения к классу  $B$  функции  $f(z) \equiv 0$  получается компактное в топологии локально равномерной сходимости семейство функций.

Поскольку класс  $B$  инвариантен относительно вращений в плоскости переменной  $w$  ( $w = f(z)$ ), то можно ограничиться изучением функций, для которых  $f(0) > 0$ . Так как  $0 < \{f\}_0 \leq 1$ , то можно положить  $\{f\}_0 = e^{-t}$ , где параметр  $t \in [0, +\infty)$ . Эти подклассы обозначим через  $B_t$ . Как известно из теории подчиненных функций [3], каждую функцию класса  $B_t$  можно представить в виде

$$f(z) = e^{-t \frac{1-\omega(z)}{1+\omega(z)}}, \quad \omega \in \Omega_0, \tag{1}$$



где  $\Omega_0$  — класс, состоящий из голоморфных в  $\Delta$  функций  $\omega$  таких, что

$$|\omega(z)| < 1, \quad \omega(0) = 0, \quad z \in \Delta.$$

Отметим, что при каждом  $t > 0$  эта формула устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами  $\Omega_0$  и  $B_t$ .

## 1. Тела коэффициентов класса $\Omega_0$

Рассмотрим пространство  $\mathbb{C}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , точками которого являются наборы из  $n$  комплексных чисел  $\omega^{(n)} := (\{\omega\}_1, \dots, \{\omega\}_n)$ .

Множество, состоящее из точек  $\omega^{(n)} \in \mathbb{C}^n$  таких, что числа  $\{\omega\}_1, \dots, \{\omega\}_n$  являются первыми  $n$  коэффициентами некоторой функции класса  $\Omega_0$ , будем обозначать через  $\Omega_0^{(n)}$  и называть  $n$ -ым телом коэффициентов класса  $\Omega_0$ .

Проблема коэффициентов на классе  $\Omega_0$  ставится так: найти необходимые и достаточные условия, которые нужно наложить на комплексные числа  $\{\omega\}_1, \{\omega\}_2, \dots$  для того, чтобы ряд  $\{\omega\}_1 z + \{\omega\}_1 z^2 + \dots$  был рядом Тейлора некоторой функции класса  $\Omega_0$ .

Таким образом, задача о получении точных оценок модулей этих коэффициентов на классе  $\Omega_0$  есть частный случай проблемы коэффициентов. Подробное изложение решения проблемы коэффициентов для класса ограниченных функций имеется в работе [4]. В упомянутой статье также есть краткий исторический обзор.

## 2. Третье тело коэффициентов класса $\Omega_0$

Имеет место точное неравенство [5]

$$\left| \{\omega\}_3 + \frac{\overline{\{\omega\}_1} \{\omega\}_2^2}{1 - |\{\omega\}_1|^2} \right| \leq \frac{(1 - |\{\omega\}_1|^2)^2 - |\{\omega\}_2|^2}{1 - |\{\omega\}_1|^2}. \quad (2)$$

Третье тело коэффициентов на  $\Omega_0$  полностью характеризуется неравенством (2). Заметим, что из неравенства (2) сразу следует неравенство [5]

$$|\{\omega\}_2| \leq 1 - |\{\omega\}_1|^2, \quad (3)$$

определяющее второе тело коэффициентов, а из неравенства (3) сразу следует неравенство Шварца [6, с. 29]

$$|\{\omega\}_1| \leq 1, \quad (4)$$

определяющее первое тело коэффициентов. Чтобы убедиться в этом, достаточно преобразовать неравенства  $r_3 \geq 0$  и  $r_2 \geq 0$ , где  $r_3$  и  $r_2$  — правые части неравенств (2) и (3) соответственно.

Один из методов получения бесконечной последовательности коэффициентных неравенств типа (2), характеризующих класс  $\Omega_0$ , описан в работе [5]. С ростом  $n$  эти вычисления становятся все более громоздкими.

Неравенство (4) описывает круг с центром  $c_1$ , находящимся в начале координат, и радиусом  $r_1 := 1$ , неравенство (3) при фиксированном  $\{\omega\}_1$  описывает круг с центром  $c_2$ , находящимся в начале координат, и радиусом  $r_2(\{\omega\}_1) := 1 - |\{\omega\}_1|^2$ , а неравенство (2) при фиксированных  $\{\omega\}_1$  и  $\{\omega\}_2$  описывает круг с центром в

$$c_3(\{\omega\}_1, \{\omega\}_2) := -\frac{\overline{\{\omega\}_1} \{\omega\}_2^2}{1 - |\{\omega\}_1|^2}$$

и радиусом

$$r_3(\{\omega\}_1, \{\omega\}_2) := \frac{(1 - |\{\omega\}_1|^2)^2 - |\{\omega\}_2|^2}{1 - |\{\omega\}_1|^2}.$$

Учитывая тот факт, что разность модулей не превосходит модуля разности, из формулы (2) получаем



**Утверждение 1.** Если  $\omega \in \Omega_0$ , то имеют место точные неравенства

$$\frac{|\{\omega\}_2|^2}{1 - |\{\omega\}_1|} - (1 - |\{\omega\}_1|^2) \leq |\{\omega\}_3| \leq 1 - |\{\omega\}_1|^2 - \frac{|\{\omega\}_2|^2}{1 + |\{\omega\}_1|}. \quad (5)$$

Равенства в неравенствах (5) достигаются на границе  $\partial\Omega_0^{(3)}$  третьего тела коэффициентов  $\Omega_0^{(3)}$ : в первом неравенстве (с оговоркой  $|c_3| \geq r_3$ ) при  $\{\omega\}_3 = c_3 - r_3 e^{i \arg c_3}$ , а во втором неравенстве при  $\{\omega\}_3 = c_3 + r_3 e^{i \arg c_3}$ .

**Доказательство.** Неравенство (2) влечет  $||\{\omega\}_3| - |c_3|| \leq r_3$ , что эквивалентно двум неравенствам  $-(|\{\omega\}_3| - |c_3|) \leq r_3$  и  $|\{\omega\}_3| - |c_3| \leq r_3$ , преобразовав которые, мы получим требуемое. Случаи достижения равенства ясны из геометрических соображений о кругах на комплексной плоскости.  $\square$

Из неравенств (5) сразу следует, что при фиксированных  $|\{\omega\}_1|$  и  $|\{\omega\}_2|$  таких, что  $|c_3(\{\omega\}_1, \{\omega\}_2)| > r_3(\{\omega\}_1, \{\omega\}_2)$ , коэффициент  $\{\omega\}_3$  замечает кольцо с центром в начале координат и радиусами  $|c_3| - r_3$  и  $|c_3| + r_3$ .

Из неравенств (3), (4) и (5) немедленно следует, что  $|\{\omega\}_n| \leq 1$ , причем равенства здесь достигаются только на вращениях функций  $\omega(z) = z^n$ ,  $n = 1, 2, 3$ . Пользуясь неравенством (2), мы доказали, что  $|\{\omega\}_n| \leq 1$ ,  $n = 1, 2, 3$ .

Итак, мы описали границу третьего тела коэффициентов и пришли к закономерному выводу о том, что своего максимума  $|\{\omega\}_3|$  достигает на  $\partial\Omega_0^{(3)}$ .

Множество  $A$  называется абсолютно выпуклым, если оно выпуклое и сбалансированное, т. е.  $aA \subset A$ ,  $|a| \leq 1$ .

Отметим, что класс  $\Omega_0$  есть абсолютно выпуклое множество. Кроме того, все тела  $\Omega_0^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , есть абсолютно выпуклые компакты.

### 3. О визуализации тел коэффициентов класса $\Omega_0$

Первое тело коэффициентов — это просто единичный круг на комплексной плоскости или отрезок  $[-1, 1]$  оси  $x$ , если коэффициенты действительные.

Второе тело коэффициентов уже лежит в четырехмерном действительном пространстве, однако его можно изобразить на плоскости  $xy$ , если ограничиться функциями с действительными коэффициентами. Второе тело коэффициентов определяется неравенством (3) и в случае действительных коэффициентов является абсолютно выпуклым компактом, заключенным между параболой  $y = -1 + x^2$  и  $1 - x^2$ . Проекция второго тела на ось  $x$  есть первое тело.

Третье тело коэффициентов определяется неравенством (2) и в общем случае лежит в  $\mathbb{C}^3$  или в  $\mathbb{R}^6$  и т. д.

**Утверждение 2.** В случае действительных коэффициентов третье тело есть абсолютно выпуклый компакт, ограниченный поверхностями

$$z = \frac{y^2}{1+x} - (1-x^2) \quad \text{и} \quad z = 1-x^2 - \frac{y^2}{1-x}, \quad -1 \leq x \leq 1 - (1-x^2) \leq y \leq 1-x^2.$$

Проекция третьего тела на плоскость  $xy$  есть второе тело.

**Доказательство.** Обозначим  $x := \{\omega\}_1$ ,  $y := \{\omega\}_2$ ,  $z := \{\omega\}_3$ . Неравенство (2) упростим, избавившись от лишних в данном случае сопряжений и модулей. Раскрыв последний оставшийся модуль, в левой части упрощенного неравенства, получим два неравенства:  $-(z - c_3(x, y)) \leq r_3(x, y)$  и  $z - c_3(x, y) \leq r_3(x, y)$ .  $\square$

Проецирование обсуждалось при получении неравенств (3) и (4) из неравенства (2). Абсолютная выпуклость наследуется телами коэффициентов от  $\Omega_0$ .





#### 4. Оценка $|\{f\}_3|$ на классах $f \in B_t, t \geq 0$

##### 4.1. Предварительный анализ задачи

Пользуясь связью (1), из неравенства (2) можно получить неравенство, связывающее  $\{f\}_1, \{f\}_2, \{f\}_3$  и характеризующее третье тело коэффициентов на классе  $B_t$ . В этом случае задача сводится к оценке простого функционала  $|\{f\}_3|$  на сложно устроенном множестве  $B_t^{(3)}$ .

Второй вариант — выразить  $\{f\}_3$  через  $\{\omega\}_1, \{\omega\}_2, \{\omega\}_3$ , используя связь (1), и оценивать более сложный функционал, но на достаточно простом множестве.

Здесь мы будем использовать второй подход. Имеем

$$F(z, t) = \{F\}_0 + \{F\}_1 z + \{F\}_2 z^2 + \{F\}_3 z^3 + \dots = \frac{1}{e^t} + \frac{2t}{e^t} (z + \alpha z^2 + \beta z^3 + \dots),$$

где  $\alpha := (t - 1), \beta := \frac{1}{3}(2t^2 - 6t + 3)$ . Легко показать, что

$$\{f\}_3 = \{F\}_1 \{\omega\}_3 + \{F\}_2 2\{\omega\}_1 \{\omega\}_2 + \{F\}_3 \{\omega\}_1^3 = 2te^{-t} (\{\omega\}_3 + 2\alpha \{\omega\}_1 \{\omega\}_2 + \beta \{\omega\}_1^3).$$

##### 4.2. Сведение к задаче о максимизации функции

Здесь будет показан один из способов сведения задачи на экстремум функционала к задаче на экстремум действительнзначной функции трех действительных переменных.

Из второго из неравенств (5) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{|\{f\}_3|}{2te^{-t}} &= |\{\omega\}_3 + 2\alpha \{\omega\}_1 \{\omega\}_2 + \beta \{\omega\}_1^3| \leq |\{\omega\}_3| + |2\alpha \{\omega\}_1 \{\omega\}_2 + \beta \{\omega\}_1^3| \leq \\ &\leq 1 - |\{\omega\}_1|^2 - \frac{|\{\omega\}_2|^2}{1 + |\{\omega\}_1|} + |2\alpha \{\omega\}_1 \{\omega\}_2 + \beta \{\omega\}_1^3|. \end{aligned} \quad (6)$$

Без потери общности можно считать, что  $\{\omega\}_1 > 0$ . Принимая во внимание неравенства (4) и (3), введем обозначения  $x := \{\omega\}_1, y := |\{\omega\}_2|, \varphi := \arg \{\omega\}_2$ . Итак, наша задача свелась к поиску условного максимума функции трех действительных аргументов

$$h(x, y, \varphi) := 1 - x^2 - \frac{y^2}{1 + x} + x|2\alpha y e^{i\varphi} + \beta x^2|$$

при ограничениях  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2, 0 \leq \varphi < 2\pi$ .

##### 4.3. Исследование $h(x, y, \varphi)$ на максимум по $\varphi$

Исследуем  $h(x, y, \varphi)$  на максимум по  $\varphi$ . Так как неравенство (3) никак не ограничивает  $\varphi$ , то  $|2\alpha y e^{i\varphi} + \beta x^2|$  принимает максимальное значение при  $e^{i\varphi} = \pm 1$  в зависимости от того, совпадают знаки  $\alpha$  и  $\beta$  или нет. Окончательно

$$\max_{\varphi} |2\alpha y e^{i\varphi} + \beta x^2| = \begin{cases} -2\alpha y + \beta x^2, & t \in [0, t_1^\beta), \\ -2\alpha y - \beta x^2, & t \in [t_1^\beta, 1), \\ 2\alpha y - \beta x^2, & t \in [1, t_2^\beta), \\ 2\alpha y + \beta x^2, & t \geq t_2^\beta, \end{cases}$$

т. е.  $\max_{\varphi} |2\alpha y e^{i\varphi} + \beta x^2| = 2|\alpha|y + |\beta|x^2$ , и

$$h(x, y) := \max_{\varphi} h(x, y, \varphi) = 1 - x^2 - \frac{y^2}{1 + x} + 2|\alpha|xy + |\beta|x^3, \quad (7)$$

где  $t_1^\beta := (3 - \sqrt{3})/2 \approx 0.63$  и  $t_2^\beta := (3 + \sqrt{3})/2 \approx 2.37$  — корни уравнения  $\beta(t) = 0$ .



#### 4.4. Исследование $h(x, y)$ на максимум по $y$ и $x$

Исследуем  $h(x, y)$  на максимум по  $y$ . Имеем

$$(h(x, y))'_y = 2 \left( -\frac{y}{1+x} + |\alpha|x \right), \quad (h(x, y))''_{yy} = -\frac{2}{1+x} < 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Таким образом,

$$y = y_1 := |\alpha|x(1+x)$$

есть точка максимума. Точка  $y = y_1$  всегда находится в области определения, так как  $y_1 \leq 1 - x^2 =: y_4$  равносильно  $x \leq (1 + |\alpha|)^{-1} =: x_1$ , причем  $x_1 \in (0, 1]$  при  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

#### 4.5. Исследование $h(x, 0)$ на максимум по $x$

Рассмотрим граничную точку  $y = 0$ . Имеем

$$h(x, 0) = 1 - x^2 + |\beta|x^3, \quad (h(x, 0))'_x = -2x + 3|\beta|x^2, \quad (h(x, 0))''_{xx} = -2 + 6|\beta|x.$$

Стационарная точка  $x = 0$ , очевидно, есть точка максимума и

$$h(0, 0) = 1, \quad t \geq 0.$$

Стационарная же точка  $x = x_2 := 2/(3|\beta|)$  является точкой минимума, так как

$$(h(x, 0))''_{xx} \Big|_{x=x_2} = 2.$$

В граничной точке  $x = 1$  имеем

$$h(1, 0) = |\beta|, \quad t \geq 0.$$

#### 4.6. Исследование $h(x, y_1)$ на максимум по $x$

Далее рассмотрим точку максимума  $y = y_1$ . Имеем

$$\begin{aligned} h(x, y_1) &= 1 - (1 - \alpha^2)x^2 + (\alpha^2 + |\beta|)x^3, \\ (h(x, y_1))'_x &= -2(1 - \alpha^2)x + 3(\alpha^2 + |\beta|)x^2, \\ (h(x, y_1))''_{xx} &= -2(1 - \alpha^2) + 6(\alpha^2 + |\beta|)x. \end{aligned}$$

Стационарная точка  $x = 0$  является точкой максимума при  $t \in (0, 2)$  и точкой минимума при  $t > 2$ , так как  $(h(x, y_1))''_{xx} \Big|_{x=0} = -2(1 - \alpha^2) = 2t(t - 2)$ . Значение в точке максимума

$$h(0, y_1(0)) = 1, \quad t \in (0, 2).$$

Наоборот, стационарная точка

$$x = x_3 := \frac{2}{3} \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2 + |\beta|}$$

является точкой минимума при  $t \in (0, 2)$  и точкой максимума при  $t > 2$ , так как

$$(h(x, y_1))''_{xx} \Big|_{x=x_3} = -(h(x, y_1))''_{xx} \Big|_{x=0}.$$

Однако  $x_3 < 0$  при  $t > 2$ , поэтому исключаем эту точку из рассмотрения.

В граничной точке  $x = 1$  имеем, что  $h(1, y_1(1)) = 2\alpha^2 + |\beta| = |\beta|$ . Действительно,  $y_1 \leq y_4$  равносильно  $x \leq x_1$ , но  $x_1 = 1$  только при  $t = 1$ , когда  $\alpha = 0$ .

#### 4.7. Исследование $h(x, y_4)$ на максимум по $x$

Наконец рассмотрим граничную точку  $y = y_4$ . Имеем

$$\begin{aligned} h(x, y_4) &= (2|\alpha| + 1)x - (2|\alpha| + 1 - |\beta|)x^3, \\ (h(x, y_4))'_x &= (2|\alpha| + 1) - 3(2|\alpha| + 1 - |\beta|)x^2, \\ (h(x, y_4))''_{xx} &= -6(2|\alpha| + 1 - |\beta|)x. \end{aligned}$$

В граничной точке  $x = 0$  имеем  $h(0, y_4(0)) = 0$ .

Стационарная точка

$$x = x_4 := \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{2|\alpha| + 1}{2|\alpha| + 1 - |\beta|}}$$

является точкой максимума при  $t \in [0, 3 + \sqrt{6})$ , так как

$$(h(x, y_4))''_{xx}|_{x=x_4} = -2\sqrt{3}\sqrt{2|\alpha| + 1 - |\beta|}\sqrt{2|\alpha| + 1} < 0,$$

а  $2|\alpha| + 1 - |\beta| < 0$  при  $t > 3 + \sqrt{6} \approx 5.45$ . При этом  $0 \leq x_4 \leq 1$  только при  $t \in [0, t_3]$ , где  $t_3 := (5 + \sqrt{15})/2 \approx 4.44$ . Значение в точке максимума

$$h(x_4, y_4(x_4)) = 2\frac{\sqrt{3}}{9} \sqrt{\frac{(2|\alpha| + 1)^3}{2|\alpha| + 1 - |\beta|}}, \quad t \in [0, t_3].$$

В граничной точке  $x = 1$  имеем  $h(1, y_4(1)) = |\beta|, t \geq 0$ .

#### 4.8. Анализ результатов

Итак, при каждом  $t \geq 0$  нам нужно найти максимум среди  $h(0, 0)$ ,  $h(1, 0)$  и  $h(x_4, y_4(x_4))$ . Обозначим  $M(t) := \max\{h_t(0, 0), h_t(1, 0), h_t(x_4, y_4(x_4))\}$ . Уравнение  $h(x_4, y_4(x_4)) = h(0, 0)$  имеет два решения:  $t_1 := (33 - 3\sqrt{57})/32 \approx 0.32$  и

$$t_2 := \frac{1}{2} \left( 1 + \left( \frac{\sqrt[3]{26\sqrt{2} + 8\sqrt{21}}}{4} + \frac{1}{2\sqrt[3]{26\sqrt{2} + 8\sqrt{21}}} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 \right) \approx 1.65.$$

Уравнение  $h(x_4, y_4(x_4)) = h(1, 0)$  имеет одно решение — число  $t = t_3 \approx 4.44$ , уже встречавшееся нам чуть выше. Выше мы ввели число  $t_2^\beta := (3 + \sqrt{3})/2 \approx 2.37$  — наибольший корень уравнения  $\beta(t) = 0$ .

Таким образом, справедлива

**Теорема 1.** Если  $f \in B_t$ , то имеет место оценка

$$|\{f\}_3| \leq 2te^{-t}M(t) = 2te^{-t} \begin{cases} g(t), & t \in [0, t_1), \\ 1, & t \in [t_1, t_2), \\ g(t), & t \in [t_2, t_3), \\ \beta(t), & t \geq t_3, \end{cases}$$

где  $g(t) := 2\frac{\sqrt{3}}{9} \sqrt{\frac{(2|t-1|+1)^3}{2|t-1|+1-|2t^2-6t+3|/3}}$ , точная при  $t \notin (0, t_1) \cup (t_2^\beta, t_3)$ .

Ясно, что при некоторых  $t$  первое из неравенств (6) может быть строгим, вследствие чего полученная оценка будет грубой. В нашем случае это так при  $t \in (0, t_1) \cup (t_2^\beta, t_3)$ . Тем не менее, и этого результата достаточно для доказательства гипотезы Кшижа при  $n = 3$ , так как

$$\max_{t \geq 0} \left( \frac{2t}{e^t} M(t) \right) = \frac{2}{e} \quad \text{и} \quad \frac{2t}{e^t} M(t) = \frac{2}{e} \iff t = 1.$$

Для доказательства нужно решить неравенство  $2t/e^t M(t) < 2/e$  при  $t \geq 0$ .



**Следствие 1.** Гипотеза Кшижа справедлива при  $n = 3$ , т.е. если  $f \in B$ , то  $|\{f\}_3| \leq 2/e$ . Причем равенство достигается только на вращениях функции  $F(z^3, t)$  в плоскостях переменных  $z$  и  $w$ .

#### 4.9. Краткий обзор результатов по начальным коэффициентам

По геометрическим соображениям очевидно, что  $|\{f\}_0| \leq 1$ . Точная оценка  $|\{f\}_1|$  впервые появилась в 1934 г. [7–9]. Я. Кшиж, располагая точными оценками  $|\{f\}_1|$  и  $|\{f\}_2|$ , высказал свою гипотезу в 1968 г. [1].

В статье [10] при помощи вариационного метода была получена формула (7) и на ее основе впервые получен результат, изложенный в настоящей работе. В [5] приведена формула (7), исследование на максимум отсутствует, но указано, что результат совпадает с аналогичным результатом из [10].

Сравним только что полученную оценку и оценку, точную для всех  $t \geq 0$ , полученную Д. В. Прохоровым и Я. Шиналем в работе [11].

**Теорема 2** (Прохоров, Шиналь). Если  $f \in B_t$ , то

$$\Psi(t) := \sup_{f \in B_t} |\{f\}_3|(t) = 2e^{-t} \begin{cases} t, & t \in [0, 1.65\dots), \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(2t-1)^3}, & t \in [1.65\dots, 3.22\dots), \\ \frac{\sqrt{2}}{3} (2t^2 - 6t + 3) \sqrt{\frac{(t-2)^3}{t-3}}, & t \in [3.22\dots, 3.47\dots), \\ \frac{\sqrt{2}}{3} t \sqrt{\frac{(2t-3)^3}{-t^2+6t-6}}, & t \in [3.47\dots, 3.82\dots), \\ \frac{1}{3} t (2t^2 - 6t + 3), & t \geq 3.82\dots \end{cases}$$

Графики функций  $2te^{-t}M(t)$  и  $\Psi(t)$  совпадают при  $t \in [t_1, t_2^\beta]$  и при  $t \geq t_3$ . В остальных точках первый график лежит над вторым.

Как отмечается в обзоре [12], наиболее убедительным доказательством того, что  $|\{f\}_4| \leq 2/e$ , стало доказательство В. Шапеля [13]. Оценка пятого коэффициента методом В. Шапеля появилась в работе Н. Самариса [2].

#### Список литературы

1. Krzyz J. G. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions // *Annales Polonici Mathematici*. 1968. Vol. 20. P. 314.
2. Samaris N. A proof of Krzyz's conjecture for the fifth coefficient // *Complex Variables, Theory and Application: An International Journal*. 2003. Vol. 48, iss. 9. P. 753–766. <https://doi.org/10.1080/0278107031000152616>
3. Rogosinski W. On the coefficients of subordinate functions // *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1945. Vol. s2-48, iss. 1. P. 48–82. <https://doi.org/10.1112/plms/s2-48.1.48>
4. Ступин Д. Л. Проблема коэффициентов для функций, отображающих круг в обобщенный круг и задача Каратеодори – Фейера // *Применение функционального анализа в теории приближений*. 2012. № 33. С. 45–74. EDN: QZHWUT
5. Brown J. E. Iterations of functions subordinate to schlicht functions // *Complex Variables, Theory and Application: An International Journal*. 1987. Vol. 9, iss. 2–3. P. 143–152. <https://doi.org/10.1080/17476938708814258>
6. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Москва : Наука, 1966. 628 с.
7. Levin V. I. Lösung der Aufgabe 163 // *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. 1934. Vol. 44. P. 80–81.
8. Fenchel W. Lösung der Aufgabe 163 // *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. 1934. Vol. 44. P. 81–82.
9. Reissner E. Lösung der Aufgabe 163 // *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. 1934. Vol. 44. P. 83.
10. Hummel J. A., Scheinberg S., Zalzman L. A. A coefficient problem for bounded nonvanishing functions // *Journal d'Analyse Mathématique*. 1977. Vol. 31. P. 169–190. <https://doi.org/10.1007/BF02813302>





11. Prokhorov D. V., Szynal J. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions // Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sciences Mathématiques. 1981. Vol. 29, iss. 5–6. P. 223–230.
12. Prokhorov D. V. Coefficients of holomorphic functions // Journal of Mathematical Sciences. 2001. Vol. 106, iss. 6. P. 3518–3544. <https://doi.org/10.1023/A:1011975914158>
13. Szapiel W. A new approach to the Krzyz conjecture // Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska, Sectio A. 1994. Vol. 48. P. 169–192.

### References

1. Krzyz J. G. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions. *Annales Polonici Mathematici*, 1968, vol. 20, pp. 314.
2. Samaris N. A proof of Krzyz's conjecture for the fifth coefficient. *Complex Variables, Theory and Application: An International Journal*, 2003, vol. 48, iss. 9, pp. 753–766. <https://doi.org/10.1080/0278107031000152616>
3. Rogosinski W. On the coefficients of subordinate functions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1945, vol. s2-48, iss. 1, pp. 48–82. <https://doi.org/10.1112/plms/s2-48.1.48>
4. Stupin D. L. The problem of coefficients for functions mapping a circle into a generalized circle and the Carateodori – Feyer problem. *Primenenie funktsional'nogo analiza v teorii priblizheniy* [Application of Functional Analysis in Approximation Theory], 2012, iss. 33, pp. 45–74 (in Russian). EDN: QZHWUT
5. Brown J. E. Iterations of functions subordinate to schlicht functions. *Complex Variables, Theory and Application: An International Journal*, 1987, vol. 9, iss. 2–3, pp. 143–152. <https://doi.org/10.1080/17476938708814258>
6. Goluzin G. M. *Geometricheskaya teoriya funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Geometric Theory of Functions of a Complex Variable]. Moscow, Nauka, 1966. 628 p. (in Russian).
7. Levin V. I. Lösung der Aufgabe 163. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1934, vol. 44, pp. 80–81.
8. Fenchel W. Lösung der Aufgabe 163. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1934, vol. 44, pp. 81–82.
9. Reissner E. Lösung der Aufgabe 163. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1934, vol. 44, pp. 83.
10. Hummel J. A., Scheinberg S., Zalcman L. A. A coefficient problem for bounded nonvanishing functions. *Journal d'Analyse Mathématique*, 1977, vol. 31, pp. 169–190. <https://doi.org/10.1007/BF02813302>
11. Prokhorov D. V., Szynal J. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions. *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sciences Mathématiques*, 1981, vol. 29, iss. 5–6, pp. 223–230.
12. Prokhorov D. V. Coefficients of holomorphic functions. *Journal of Mathematical Sciences*, 2001, vol. 106, iss. 6, pp. 3518–3544. <https://doi.org/10.1023/A:1011975914158>
13. Szapiel W. A new approach to the Krzyz conjecture. *Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska, Sectio A*, 1994, vol. 48, pp. 169–192.

Поступила в редакцию / Received 23.03.2023

Принята к публикации / Accepted 04.04.2023

Опубликована / Published 30.08.2024



Научная статья

УДК 517.927.96+517.984

## Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения

А. П. Хромов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

**Хромов Август Петрович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и математической экономики, [KhromovAP@sgu.ru](mailto:KhromovAP@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-2454-8009>, AuthorID: 3428

**Аннотация.** На основе законности перестановки операций суммирования и интегрирования тригонометрического ряда Фурье дается решение обобщенной смешанной задачи по методу Фурье для однородного волнового уравнения с нулевой начальной скоростью и условиями закрепления на концах. Решение дается в виде ряда, сходящегося с экспоненциальной скоростью. В случае классического решения этот ряд является таким решением. Результаты статьи усиливают полученные ранее.

**Ключевые слова:** расходящиеся ряды, волновое уравнение, смешанная задача

**Для цитирования:** Хромов А. П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 351–358. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-351-358>, EDN: HWFUYG

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Divergent series and generalized mixed problem for wave equation

A. P. Khromov

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

**August P. Khromov**, [KhromovAP@sgu.ru](mailto:KhromovAP@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-2454-8009>, AuthorID: 3428

**Abstract.** Allowing the inversion of the operations of summation and integration for trigonometric Fourier series we present the solution by Fourier method of the generalized mixed problem for the homogeneous wave equation with zero initial velocity and fixed ends boundary conditions. The solution has the form of a series converging at an exponential rate. This series converges the classical solution if the latter equists. The results of the article reinforce the previously obtained results.

**Keywords:** divergent series, wave equation, mixed problem

**For citation:** Khromov A. P. Divergent series and generalized mixed problem for wave equation. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 351–358 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-351-358>, EDN: HWFUYG

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



## Введение

Обоснование метода Фурье в задачах математической физики традиционно опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, получающихся из него почленным дифференцированием нужное число раз. В. А. Стеклов, впервые давший строгое обоснование метода Фурье, придерживался этой точки зрения [1, с. 224], которая сделала метод Фурье очень популярным. Было проведено большое количество исследований и достигнуты значительные успехи. Недостатком такого подхода является то, что он требует завышения гладкости начальных данных.

Выход из этого положения намечен А. Н. Крыловым [2] в его исследованиях по ускорению сходимости рядов Фурье и им подобных. Суть его приема состоит в том, что изучаемый вопрос о дифференцировании ряда решается путем разбиения его на два ряда, один из которых точно суммируется (и тем самым здесь не нужно прибегать к почленному дифференцированию), а второй ряд сходится настолько быстро, что его можно дифференцировать. Им были успешно преодолены трудности, связанные с невозможностью почленного дифференцирования, на ряде конкретных задач.

В. А. Чернятин [3] приемом А. Н. Крылова с применением уточненных асимптотик для собственных значений и собственных функций успешно исследовал ряд задач методом Фурье и значительно ослабил условия гладкости исходных данных, а в ряде случаев эти условия стали минимально возможными.

Это направление получило развитие в работах [4, 5]. Там, в смешанной задаче для волнового уравнения, был предложен резольвентный подход, состоящий в привлечении метода Коши – Пуанкаре контурного интегрирования по спектральному параметру резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей метода Фурье. В результате удалось получить решения смешанных задач при минимальных условиях гладкости начальных данных, не используя при этом уточненных асимптотик для собственных значений и никакой информации о собственных функциях. Кроме того, важно то, что резольвентный подход позволил привлечь ряды Фурье по тригонометрической системе вместо рядов по собственным функциям.

Обобщенная смешанная задача для волнового уравнения является одним из наиболее сильных обобщений смешанной задачи. Она впервые появилась в [6]. Внешний вид ее такой же, как и у исходной смешанной задачи, и характеризуется тем, что в формальном решении ее по методу Фурье потенциал и начальные данные считаются произвольными суммируемыми функциями, а возмущение в случае неоднородной задачи — произвольной локально суммируемой функцией.

Ряд формального решения может быть и расходящимся. Следуя рекомендациям Л. Эйлера [7, с. 101], для нахождения его суммы привлекаем еще аксиому о перестановке в ряде операций интегрирования и суммирования.

В настоящей работе дается решение следующей обобщенной смешанной задачи:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t), \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty), \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = 0, \quad (3)$$

где  $\varphi(x)$ ,  $q(x)$  из  $L[0, 1]$ .

## 1. Обобщенная смешанная задача и ее формальное решение

Рассмотрим здесь более общую следующую обобщенную смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty), \quad (4)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (5)$$



$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = \psi(x). \tag{6}$$

Считаем, что все функции, входящие в (4)–(6), комплекснозначные, причем  $q(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x) \in L[0, 1]$  и  $f(x, t)$  класса  $Q$ , т. е.  $f(x, t) \in L[Q_T]$  при любом  $T > 0$  и  $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$ .

Задача (4)–(6) при таких исходных данных чисто формальная, т. е. имеет лишь внешний вид. Несмотря на это, можно дать (см. [6]) формальное решение по методу Фурье в следующем виде:

$$u(x, t) = (\cdot) \left[ (R_\lambda \varphi) \cos \varrho t + (R_\lambda \psi) \frac{\sin \varrho t}{\varrho} + \int_0^t R_\lambda(f(\cdot, \tau)) \frac{\sin \varrho(t - \tau)}{\varrho} d\tau \right] d\lambda, \tag{7}$$

где

$$(\cdot) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right),$$

$R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$  — резольвента оператора  $L: Ly = -y''(x) + q(x)y(x)$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ ,  $\lambda$  — спектральный параметр,  $E$  — единичный оператор,  $R_\lambda(f(\cdot, \tau))$  означает, что  $R_\lambda$  применяется к  $f(x, t)$  по переменной  $x$  ( $\tau$  — параметр),  $\lambda = \varrho^2$ ,  $\text{Re } \varrho \geq 0$ ,  $\gamma_n$  — образ в  $\lambda$ -плоскости окружности  $\tilde{\gamma}_n = \{\varrho \mid |\varrho - \pi n| = \delta\}$ ,  $\delta > 0$  и достаточно мало,  $r > 0$  достаточно велико и фиксированно,  $n_0$  — такой номер, что при  $n \geq n_0$  внутри  $\gamma_n$  находится по одному собственному значению оператора  $L$  и все  $\gamma_n$  при  $n \geq n_0$  находятся вне  $|\lambda| = r$ , а остальные собственные значения — внутри.

Считаем, что задача (4)–(6) и ее формальное решение тесно связаны. Это навеяно тем, что в случае классического решения задачи (4)–(6) оно представляется формальным решением, которое в этом случае является сходящимся рядом.

В нашем же случае ряд (7) может быть и расходящимся. Таким образом, в нашей обобщенной смешанной задаче сама задача имеет чисто формальный вид, а формальное решение является конкретным рядом, который может быть и расходящимся. И все это создает трудности при решении обобщенной смешанной задачи.

## 2. Преобразование формального решения

При действиях с расходящимися рядами будем пользоваться следующей аксиомой:

$$\int \sum = \sum \int, \tag{8}$$

где  $\int$  — определенный интеграл.

С помощью (8) формальное решение (7) приведем к виду

$$u(x, t) = Z(x, t; \varphi) + \int_0^t Z(x, \tau; \psi) d\tau + \int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} Z(x, \eta; f(\cdot, \tau)) d\eta, \tag{9}$$

где  $Z(x, t; \varphi)$  есть формальное решение задачи (1)–(3). Значение формулы (9) в том, что хорошо объясняется роль смешанной задачи (1)–(3), и поэтому мы ограничимся в дальнейшем лишь задачей (1)–(3).

## 3. Об интегрировании тригонометрического ряда Фурье

При решении обобщенной смешанной задачи (1)–(3) потребуются следующие факты, относящиеся к тригонометрическим рядам Фурье [8].



Рассмотрим на отрезке  $[-1, 1]$  тригонометрический ряд Фурье функции  $f(x) \in L[-1, 1]$ :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\pi x + b_k \sin k\pi x), \tag{10}$$

где  $a_k = \int_{-1}^1 f(t) \cos k\pi t dt$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,  $b_k = \int_{-1}^1 f(t) \sin k\pi t dt$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Рассматриваем ряд (10) как расходящийся. К нахождению его суммы привлечем аксиому (8), где  $\int = \int_{-1}^x$ .

**Теорема 1.** Сумма расходящегося ряда (10) почти всюду равна  $f(x)$ .

**Доказательство.** Пусть сумма ряда (10), рассматриваемого как расходящийся, есть некоторая функция  $g(x) \in L[-1, 1]$ . Тогда в силу (8) имеем

$$\int_{-1}^x g(t) dt = \int_{-1}^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_{-1}^x \cos k\pi t dt + b_k \int_{-1}^x \sin k\pi t dt \right). \tag{11}$$

По теореме 3 из [9, с. 320] ряд (11) сходится в каждой точке  $x \in [-1, 1]$  и его сумма есть  $\int_{-1}^x f(t) dt$ . Поэтому из (11) получаем

$$\int_{-1}^x g(t) dt = \int_{-1}^x f(t) dt.$$

Отсюда  $g(x) = f(x)$  почти всюду. Теорема доказана. □

Приведем теперь теорему Фейера – Лебега о сходимости средних Фейера ряда (10).

**Теорема 2** (Фейер – Лебег [9, с. 312]). Если  $\sigma_n(x)$  средние Фейера ряда (10) функции  $f(x) \in L[-1, 1]$ , то почти всюду на  $[-1, 1]$  будет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = f(x).$$

Это соотношение выполняется во всех точках Лебега и тем более во всех точках непрерывности функции  $f(x)$ , лежащих внутри  $[-1, 1]$ .

Таким образом, за исключением последней фразы теоремы 2, теоремы 1 и 2 приводят к одному и тому же результату: сумма ряда (10), рассматриваемого как расходящийся, с применением аксиомы (8) совпадает почти всюду с пределом частичных сумм Фейера.

Для случая тригонометрических рядов по синусам данный результат содержится в [10].

#### 4. Решение обобщенной смешанной задачи (1)–(3)

Опираясь на тесную связь обобщенной смешанной задачи с рядом ее формального решения [6, с. 217], получим решение обобщенной смешанной задачи (1)–(3) в виде ряда, сходящегося с экспоненциальной скоростью.

Приступаем к процедуре нахождения этого решения. Представим формальное решение  $u(x, t) = Z(x, t; \varphi)$  задачи (1)–(3) в виде

$$u(x, t) = u_{01}(x, t) + u_1(x, t), \tag{12}$$

где  $u_{01}(x, t)$  есть ряд  $Z(x, t; \varphi)$  при  $q(x) = 0$ . Обозначим  $u_{01}(x, t) = Z_0(x, t; \varphi)$ . Тогда из (12) получаем  $u_1(x, t) = Z(x, t; \varphi) - Z_0(x, t; \varphi)$ .



**Лемма 1.** Сумма ряда  $u_{01}(x, t)$  есть

$$a_0(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)],$$

где  $\tilde{\varphi}(x)$  нечетна и 2-периодична при  $x \in (-\infty, \infty)$  и  $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$  при  $x \in [0, 1]$ .

В [11] эта лемма фигурирует как теорема 2.

Функция  $a_0(x, t)$  будет первым членом ряда, представляющего решение задачи (1)–(3).

Приступим к исследованию ряда  $u_1(x, t)$ .

Так как  $u_{01}(x, t)$  есть ряд формального решения задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{01}(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u_{01}(x, t)}{\partial x^2}, \\ u_{01}(0, t) &= u_{01}(1, t) = 0, \\ u_{01}(x, 0) &= \varphi(x), \quad u'_{01,t}(x, 0) = 0, \end{aligned}$$

то ряду  $u_1(x, t)$  соответствует смешанная задача

$$\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u_1(x, t) + f_0(x, t), \tag{13}$$

$$u_1(0, t) = u_1(1, t) = 0, \tag{14}$$

$$u_1(x, 0) = u'_{1t}(x, 0) = 0, \tag{15}$$

где  $f_0(x, t) = -q(x)a_0(x, t)$ .

Но ряд  $u_1(x, t)$  не является рядом формального решения по методу Фурье этой задачи. Поэтому мы, следуя нашей установке о связи смешанной задачи с рядом ее формального решения, ряд  $u_1(x, t)$  заменим на ряд формального решения задачи (13)–(15). Теперь ряд  $u_1(x, t)$  есть ряд

$$u_1(x, t) = (\cdot) \left[ \int_0^t R_\lambda(f_0(\cdot, \tau)) \frac{\sin \varrho(t-\tau)}{\varrho} d\tau \right] d\lambda. \tag{16}$$

Этот переход является основным моментом нашей процедуры.

Отметим, что в случае классического решения этот переход законен [12].

Повторяем вышеприведенную процедуру с рядом  $u(x, t)$  теперь с рядом  $u_1(x, t)$  из (16), т.е. представим ряд  $u_1(x, t)$  в виде

$$u_1(x, t) = u_{02}(x, t) + u_2(x, t), \tag{17}$$

где  $u_{02}(x, t)$  есть ряд формального решения обобщенной смешанной задачи

$$\frac{\partial^2 u_{02}(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_{02}(x, t)}{\partial x^2} + f_0(x, t),$$

$$u_{02}(0, t) = u_{02}(1, t) = 0,$$

$$u_{02}(x, 0) = u'_{02,t}(x, 0) = 0.$$

**Лемма 2.** Сумма ряда  $u_{02}(x, t)$  есть

$$u_{02}(x, t) = a_1(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_0(\eta, \tau) d\eta,$$

где  $\tilde{f}_0(\eta, \tau)$  нечетна, 2-периодична по  $\eta$  и  $\tilde{f}_0(\eta, \tau) = f_0(\eta, \tau)$  при  $\eta \in [0, 1]$ .

Доказательство содержится в [6, с. 219].

Функция  $a_1(x, t)$  будет вторым членом ряда, представляющего решение обобщенной смешанной задачи (1)–(3).

Как и выше, получаем, что ряд  $u_2(x, t)$  в силу (17) соответствует задаче (13)–(15), где вместо  $f_0(x, t)$  берется теперь функция  $f_1(x, t) = -q(x)a_1(x, t)$ , и мы от ряда  $u_2(x, t)$  приходим к ряду

$$u_2(x, t) = (\cdot) \left[ \int_0^t R_\lambda(f_1(\cdot, \tau)) \frac{\sin \varrho(t - \tau)}{\varrho} d\tau \right] d\lambda.$$

Продолжаем указанный процесс. Придем на  $m$ -ом шаге к формуле

$$u(x, t) = A_m(x, t) + \Omega_m(x, t),$$

где

$$A_m(x, t) = \sum_{k=0}^m a_k(x, t), \quad a_k(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{k-1}(\eta, \tau) d\eta, \quad k \geq 1,$$

$$f_k(\eta, \tau) = -q(\eta)a_k(\eta, \tau), \quad a_0(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)],$$

$$\Omega_m(x, t) = (\cdot) \left[ \int_0^t (R_\lambda - R_\lambda^0)(f_{m-1}(\cdot, \tau)) \frac{\sin \varrho(t - \tau)}{\varrho} d\tau \right] d\lambda.$$

**Лемма 3** ([6, лемма 1]). Пусть  $T$  – произвольное положительное число,  $s$  – наименьшее натуральное число такое, что  $T \leq s$ . Тогда справедлива оценка

$$\|a_n(x, t)\|_{C[Q_T]} \leq M_1 \left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n \geq 1,$$

где  $M_1 = \|a_1(x, t)\|_{C[Q_T]}$ ,  $M_2 = (2s+1)\|q\|_1$  ( $\|\cdot\|_1$  – норма в  $L[0, 1]$ ). Кроме того,  $M_1 \leq c_T \|\varphi\|_1$  и постоянная  $c_T$  не зависит от  $\varphi(x)$ ,  $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$ .

**Лемма 4** ([6, лемма 12, теорема 15]). Имеет место оценка

$$\Omega_m(x, t) = O \left( \iint_{Q_T} |f_{m-1}(x, t)| dx dt \right), \quad m \geq 1,$$

равномерная по  $x$  и  $t$  из  $Q_T$ .

На основании лемм 3 и 4 получаем следующую теорему.

**Теорема 3.** Если  $\varphi(x) \in L[0, 1]$ , то ряд  $A(x, t) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x, t)$  сходится абсолютно и равномерно в  $Q_T$  при любом  $T > 0$  с экспоненциальной скоростью и его сумма представляет собой решение обобщенной смешанной задачи (1)–(3).

Отметим также [12, теорема 6]:

**Теорема 4.** Если  $\varphi(x)$ ,  $\varphi'(x)$  абсолютно непрерывны на  $[0, 1]$  и  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ , то сумма ряда  $A(x, t)$  представляет собой классическое решение смешанной задачи (1)–(3) (уравнение (1) удовлетворяется почти всюду).

**Замечание.** Условия на  $\varphi(x)$  в теореме 4 являются необходимыми и достаточными для классического решения задачи (1)–(3).



Теорема 4 с замечанием служит основанием считать сумму ряда  $A(x, t)$  при  $\varphi(x) \in L[0, 1]$  решением обобщенной смешанной задачи (1)–(3).

Таким образом, аксиома о перестановочности операций интегрирования и суммирования функциональных рядов приводит в случае тригонометрического ряда Фурье к методу суммирования с таким же результатом, что и метод Фейера. В случае обобщенной смешанной задачи эта аксиома приводит к построению ряда  $A(x, t)$  явного вида, сходящегося с экспоненциальной скоростью. Этот ряд следует считать новым методом суммирования ряда формального решения. Теорема 4 говорит о регулярности предлагаемого метода.

### Список литературы

1. Стеклов В. А. Основные задачи математической физики. Москва : Наука, 1983. 432 с.
2. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1950. 368 с.
3. Чернытин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. Москва : Изд-во Московского ун-та, 1991. 112 с.
4. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход в методе Фурье // Доклады Академии наук. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140. <https://doi.org/10.7868/S0869565214260041>, EDN: SJQEEN
5. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход для волнового уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 2. С. 51–63. <https://doi.org/10.7868/S0044466915020052>, EDN: TNHQB
6. Хромов А. П., Корнев В. В. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. С. 215–238. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238>, EDN: YJLRTL
7. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. Москва ; Ленинград : ГИТТЛ. 1949. 580 с.
8. Хромов А. П. О почленном интегрировании тригонометрического ряда Фурье и теореме Фейера – Лебега // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 66: Материалы XVI Международной Казанской школы-конференции (Казань, 22–27 августа 2023 г.). Казань : Казанский (Приволжский) федеральный ун-т, 2023. С. 261–262.
9. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1957. 522 с.
10. Хромов А. П. О почленном интегрировании функциональных рядов // Современные методы теории краевых задач. Понtryгинские чтения – XXXIV : материалы международной Воронежской весенней математической школы, посвящённой 115-летию со дня рождения академика Л. С. Понtryгина (Воронеж, 3–9 мая 2023 г.). Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2023. С. 424–425. EDN: JJXOCG
11. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 3. С. 322–331. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-322-331>, EDN: PTNPTE
12. Хромов А. П. Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 5. С. 717–731. <https://doi.org/10.1134/S0374064119050121>, EDN: ZFWIBF

### References

1. Steklov V. A. *Osnovnye zadachi matematicheskoy fiziki* [The bases problems of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1983. 432 p. (in Russian).
2. Krylov A. N. *O nekotorykh differentsial'nykh uravneniyakh matematicheskoy fiziki, imeyushchikh prilozheniya v tekhnicheskikh voprosakh* [On some differential equations of mathematical physics that have applications in technical matters]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1950. 368 p. (in Russian).
3. Chernyatin V. A. *Obosnovanie metoda Fur'e v smeshannoy zadache dlya uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [Substantiation of the Fourier method in a mixed problem for partial differential equations]. Moscow, Moscow University Press, 1991. 112 p. (in Russian).
4. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Resolvent approach in the Fourier method. *Doklady Mathematics*,



- 2014, vol. 90, iss. 2, pp. 545–548. <https://doi.org/10.1134/S1064562414060076>, EDN: UFVTOF
5. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. The resolvent approach for the wave equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, iss. 2, pp. 227–239. <https://doi.org/10.1134/S0965542515020050>, EDN: UFLLVV
  6. Khromov A. P., Kornev V. V. Divergent series in the Fourier method for the wave equation. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 2021, vol. 27, iss.4, pp. 215–238 (in Russian). <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238>, EDN: YJLRTL
  7. Euler L. *Differentsial'noe ischislenie* [Differential calculus]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1949. 580 p. (in Russian).
  8. Khromov A. P. On the slow integration of the trigonometric Fourier series and Fejer – Lebesgue theorem. *Trudy Matematicheskogo tsentra imeni N. I. Lobachevskogo*. Vol. 66: Proceedings of the XVI International Kazan School-conference “Theory of Functions, Its Applications and Related Issues” (Kazan, August 22–27, 2023). Kazan, Kazan (Volga region) Federal University Publ., 2023, pp. 261–262 (in Russian).
  9. Natanson I. P. *Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy* [Theory of Functions of a Real Variable]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1957. 522 p. (in Russian).
  10. Khromov A. P. On the slow integration of functional series. *Sovremennye metody teorii kraevykh zadach* [Modern Methods of the Theory of Boundary Value Problems: Proceedings of the International Conference “Pontryaginsky Readings–XXXIV” (Voronezh, May 3–9, 2023)]. Voronezh, Voronezh State University Publ., 2023, pp. 424–425 (in Russian). EDN: JJXOCG
  11. Khromov A. P. Divergent series and generalized mixed problem for a wave equation of the simplest type. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 3, pp. 322–331 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-322-331>, EDN: PTNPTE
  12. Khromov A. P. Necessary and sufficient conditions for the existence of a classical solution of the mixed problem for the homogeneous wave equation with an integrable potential. *Differential Equations*, 2019, vol. 55, iss. 5, pp. 703–717. <https://doi.org/10.1134/S0012266119050112>, EDN: IMUUIG

Поступила в редакцию / Received 22.02.2024

Принята к публикации / Accepted 17.05.2024

Опубликована / Published 30.08.2024



## МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 359–380

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 359–380

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-359-380>

EDN: IQBZWJ

Научная статья

УДК 531/534:[57+61]

### Методология «Планирование – Моделирование – Прогнозирование» для предоперационного планирования в травматологии-ортопедии

Л. В. Бессонов<sup>✉</sup>, И. В. Кириллова, А. С. Фалькович,  
Д. В. Иванов, А. В. Доль, Л. Ю. Коссович

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

**Бессонов Леонид Валентинович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, [bessonov@sgu.ru](mailto:bessonov@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-5636-1644>, AuthorID: 774968

**Кириллова Ирина Васильевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, [iv@sgu.ru](mailto:iv@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0001-8053-3680>, AuthorID: 179980

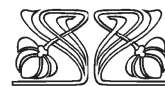
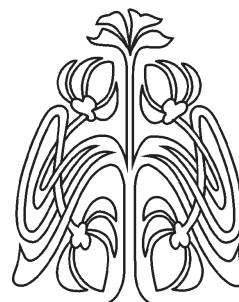
**Фалькович Александр Савельевич**, доктор технических наук, заведующий кафедрой медицинской кибернетики, [falkovichas@yandex.ru](mailto:falkovichas@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0001-9079-3064>, AuthorID: 459455

**Иванов Дмитрий Валерьевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, [ivanovdv.84@ya.ru](mailto:ivanovdv.84@ya.ru), <https://orcid.org/0000-0003-1640-6091>, AuthorID: 201794

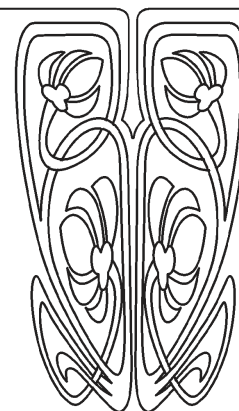
**Доль Александр Викторович**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник учебной лаборатории цифровых медицинских технологий, [dolav86@ya.ru](mailto:dolav86@ya.ru), <https://orcid.org/0000-0001-5842-1615>, AuthorID: 601135

**Коссович Леонид Юрьевич**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической теории упругости и биомеханики, [KossovichLY@sgu.ru](mailto:KossovichLY@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-4775-7348>, AuthorID: 2935

**Аннотация.** Предоперационное планирование хирургического лечения является важным этапом подготовки к хирургическому лечению в травматологии-ортопедии, позволяющим акцентировать внимание на особенностях клинического случая, предупредить возможные проблемы во время проведения операции и снизить риски послеоперационных осложнений. Ведущим способом диагностики для дальнейшего планирования хирургического лечения на сегодняшний день является



Научный  
отдел





ся проведение лучевых исследований, прежде всего рентгенографии и компьютерной томографии. Результаты лучевых исследований позволяют достаточно качественно оценить зону интереса, спланировать требуемую степень коррекции и размещение фиксирующих металлоконструкций и эндопротезов. В то же время при планировании врач по большей части опирается на знания норм анатомических соотношений и структур. А в случае множества возможных вариантов лечения для выбора врач опирается на собственный врачебный опыт. В настоящей статье представлена разработанная обобщающая методология предоперационного планирования в травматологии-ортопедии, включающая биомеханический анализ и методы накопления и обработки количественных данных клинических случаев наряду с привычными для врачей методами предоперационного планирования. Методология сводит в единую систему критерии оценки успешности лечения, применяя три класса критериев: геометрические (анатомические), биомеханические и клинические. Методология позволяет врачу провести биомеханическое моделирование предполагаемых вариантов лечения и количественно оценить их на основе сравнения напряженно-деформированных состояний, возникающих в системе «кость – имплантат» в результате каждого из запланированных вариантов. Методология позволяет определять успешные варианты лечения, а также прогнозировать изменения качества жизни пациента после лечения. Представленная методология включает механизм накопления количественных данных о клинических случаях и контроля качества используемых биомеханических моделей.

**Ключевые слова:** предоперационное планирование, биомеханическое моделирование, послеоперационный прогноз

**Благодарности:** Работа выполнена в рамках Государственного задания FSRR-2023-0009.

**Для цитирования:** Бессонов Л. В., Кириллова И. В., Фалькович А. С., Иванов Д. В., Доль А. В., Коссович Л. Ю. Методология «Планирование – Моделирование – Прогнозирование» для предоперационного планирования в травматологии-ортопедии // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 359–380. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-359-380>, EDN: IQBZWJ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## The “Planning – Modelling – Prediction” methodology for preoperative planning in trauma orthopaedics

L. V. Bessonov<sup>✉</sup>, I. V. Kirillova, A. S. Falkovich,  
D. V. Ivanov, A. V. Dol, L. Yu. Kossovich

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

**Leonid V. Bessonov**, [bessonov@sgu.ru](mailto:bessonov@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-5636-1644>, AuthorID: 774968

**Irina V. Kirillova**, [iv@sgu.ru](mailto:iv@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0001-8053-3680>, AuthorID: 179980

**Alexander S. Falkovich**, [falkovichas@yandex.ru](mailto:falkovichas@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0001-9079-3064>, AuthorID: 459455

**Dmitry V. Ivanov**, [ivanovdv@gmail.com](mailto:ivanovdv@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0003-1640-6091>, AuthorID: 201794

**Alexander V. Dol**, [dolav86@ya.ru](mailto:dolav86@ya.ru), <https://orcid.org/0000-0001-5842-1615>, AuthorID: 601135

**Leonid Yu. Kossovich**, [KossovichLY@sgu.ru](mailto:KossovichLY@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-4775-7348>, AuthorID: 2935

**Abstract.** Preoperative planning of surgical treatment is an important stage of preparation for surgical treatment in traumatology and orthopaedics, which makes it possible to emphasise the peculiarities of the clinical case, prevent possible problems during surgery and reduce the risks of postoperative complications. The leading method of diagnostics for further planning of surgical treatment nowadays is radiological studies, primarily radiography and computed tomography. The results of radiological studies allow a sufficiently qualitative assessment of the zone of interest, planning of the required degree of correction and placement of fixing metal structures and endoprostheses. At the same time, when planning, the doctor relies mostly on the knowledge of the norms of anatomical relations and structures. And in the



case of a multitude of possible treatment options, the doctor relies on his or her own medical experience to make a choice. This article presents a developed generalising methodology of preoperative planning in traumatology-orthopaedics, which includes biomechanical analysis and methods of accumulation and processing of quantitative data of clinical cases along with the usual methods of preoperative planning for doctors. The methodology brings together into a single system the criteria for evaluating the success of treatment by applying three classes of criteria: geometric (anatomical), biomechanical and clinical. The methodology allows the physician to perform biomechanical modelling of the proposed treatment options and quantitatively evaluate them on the basis of comparison of stress-strain states arising in the «bone-implant» system as a result of each of the planned options. The methodology allows to determine successful treatment options and to predict changes in the patient's quality of life after treatment. The presented methodology includes a mechanism for accumulation of quantitative data on clinical cases and quality control of the used biomechanical models.

**Keywords:** preoperative planning, biomechanical modelling, postoperative prognosis

**Acknowledgements:** The work was carried out within the framework of the State Assignment FSRR-2023-0009.

**For citation:** Bessonov L. V., Kirillova I. V., Falkovich A. S., Ivanov D. V., Dol A. V., Kossovich L. Yu. The “Planning – Modelling – Prediction” methodology for preoperative planning in trauma orthopaedics. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 359–380 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-359-380>, EDN: IQBZWJ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Предоперационное планирование является неотъемлемой частью всех ортопедических операций. В медицине известны различные способы предоперационного планирования [1] на основании данных лучевых исследования (компьютерных томограмм и рентгенограмм), выполняемого при помощи программ предоперационного планирования. К таким программам относятся MediCAD, TraumaCAD, Surgimap, OrthoView и др. Эти программные системы и их менее известные аналоги позволяют проводить геометрическое предоперационное планирование. Их основным функционалом является выполнение рентгенометрических измерений, манипулирование с медицинским изображением (разрезы, повороты, перемещения частей, совмещение с графическими шаблонами имплантатов). Наиболее передовые из этих систем (например, Surgimap, MediCAD) позволяют вычислять прогнозные значения параметров сагиттального и фронтального балансов и учитывать их при планировании хирургической коррекции [2]. Недостатком таких систем является отсутствие функции моделирования напряженно-деформированного состояния (далее – НДС) костных структур пациента с установленными системами фиксации и/или эндопротезами после проведения хирургического лечения. В результате, делая выбор между более надежными и менее инвазивными вариантами хирургического лечения, врач должен полагаться на собственный опыт. Биомеханическое моделирование же с использованием индивидуальных параметров пациента (геометрия элементов позвоночно-тазового комплекса и их расположение, механические свойства костной ткани, рост, масса тела и др.) дает количественную оценку возникающих напряжений, деформаций и перемещений в системе «кость – имплантат». Такая количественная оценка позволит дать ответ на вопросы о надежности установки системы фиксации (в том числе прогноз разрушения конструкции, износа ее отдельных элементов, изменения свойств зон контакта кости с имплантированной конструкцией).

Биомеханическое моделирование позволяет на основе количественных методов оценить предполагаемые врачом хирургические варианты лечения. Строго говоря, биомеханическое моделирование позволяет сформулировать биомеханические критерии успешности, которые в совокупности с геометрическими (анатомическими) и клиническими критериями успешности позволяют врачу выбирать один из нескольких вариантов лечения, опираясь на количествен-



ные оценки этих вариантов и их упорядоченность по тому или иному критерию. Наиболее полно совокупность геометрических, биомеханических и клинических критериев успешности описана в работе [3]. Способ биомеханического моделирования вариантов хирургического лечения описан, например, в [4].

Цель данной работы заключается в формализации подхода «Планирование – Моделирование – Прогнозирование» в виде алгоритма действий и демонстрации его применения при предоперационном планировании с выбором успешного варианта лечения на примере хирургического лечения пациента со спондилолистезом поясничного отдела позвоночника.

## 1. Материалы и методы

Разработанная методология представляет собой «рамочный алгоритм», применимый в различных областях хирургического лечения в травматологии-ортопедии. Без ограничения общности будем рассматривать сужение этой методологии на хирургию опорно-двигательного аппарата. В ходе изложения будет представлен клинический пример хирургического лечения, спланированного с использованием разработанной методологии. Здесь под словами «рамочный алгоритм» подразумевается универсальность подхода, позволяющая при необходимости заменять содержание одного или нескольких этапов, сохраняя суть этапа и условия на входные и выходные данные.

Методология предназначена для оценки вариантов хирургического лечения пациентов с патологиями травматолого-ортопедического профиля на основе моделирования и количественных методов исследования моделей рассматриваемого участка опорно-двигательного аппарата. Результатом применения методологии является количественная оценка исследуемого варианта лечения посредством биомеханических критериев успешности. Техническим результатом применения методологии является количественная оценка – поля напряжений, деформаций и перемещений, найденных для конкретных биологических объектов с установленной системой фиксации и/или имплантатами.

Методология основывается на обработке исходных данных рентгенограммы и/или компьютерной томограммы конкретного пациента и последовательном выполнении предоперационного геометрического планирования варианта лечения, его биомеханическом моделировании, оценке качества жизни пациента после операции и контроле качества применяемой биомеханической модели путем сопоставления прогнозируемой успешности до выполнения операции с фактической, оцениваемой после операции на основании рентгенологических (геометрических) и клинических критериев успешности.

Основные этапы реализации методологии заключаются в следующем.

1. *Планирование* — этап классического для хирургической практики предоперационного планирования на основе рентгенограммы и/или среза компьютерной томограммы, задачей которого является оценка нарушений анатомических соотношений и требуемой степени коррекции (геометрическое планирование).
2. *Моделирование* — этап биомеханического моделирования, позволяющего смоделировать результат хирургического лечения (виртуальная операция) и провести количественный анализ результатов операции на основе биомеханического анализа.
3. *Прогнозирование* — этап оценки ожидаемого изменения качества жизни пациента в результате планируемой операции.

Здесь термином «виртуальная операция» определяется система «кость – имплантат», состоящая из:

- моделей биологических объектов и структур пациента (костей, межпозвоночных дисков и др.), восстановленных на основе данных компьютерной томографии, с выполненной по задумке хирурга коррекцией анатомических соотношений (виртуальная репозиция) с заданными механическими свойствами этих объектов и структур;
- моделей имплантатов и фиксирующих конструкций с заданными механическими свойствами, совмещенных с биологическими объектами.



Введение этого термина обоснованно, поскольку классический вариант предоперационного планирования подразумевал лишь восстановление анатомических соотношений до значений нормальной анатомии или близких к ним. В то время как применение методологии делает такое планирование лишь промежуточным этапом, определяющим конструкцию, возникающую в организме пациента в результате хирургического лечения. Исследование свойств этой конструкции на предмет анализа напряженно-деформированного состояния, возникающего при воздействии физиологических нагрузок, является самостоятельной задачей.

Далее применение методологии как подхода к предоперационному планированию в травматологии-ортопедии будет конкретизировано.

### 1.1. Предоперационное планирование в хирургии

Планирование хирургического лечения опорно-двигательного аппарата является обязательным этапом в травматологии-ортопедии. На этапе предоперационного планирования определяются особенности клинического случая, предупреждаются возможные проблемы в ходе проведения операции и послеоперационные осложнения [5].

В ходе предоперационного планирования в хирургии опорно-двигательного аппарата проводятся оценка патологических изменений объекта интереса, подбор имплантатов, выбор техник доступа и установки имплантатов, определение требуемой степени коррекции анатомических структур для восстановления нормальной анатомии.

При проведении предоперационного планирования [6] выполняются рентгенометрические и иные измерения, характеризующие состояние объекта интереса, оцениваются уровень и степень необходимой коррекции и фиксации, а также производится планирование позиционирования имплантатов.

Все проводимые хирургом измерения основываются на известных анатомических ориентирах и знаниях нормальной анатомии. Накопленный медицинской наукой опыт формализован и обобщен в различные виды зависимостей угловых и линейных величин, отражающих взаимоотношения нормальной анатомии.

### 1.2. Алгоритмы и расчеты для оценки успешности варианта лечения

Методология предоперационного планирования «Планирование – Моделирование – Прогнозирование» определяет, что для каждого варианта лечения выполняются три этапа планирования.

#### 1. Геометрическое планирование:

- выполнение измерений актуальных геометрических параметров позвоночно-тазового комплекса и расчет их теоретических значений, например параметры сагиттального баланса [7];
- виртуальное восстановление нормальной анатомии посредством виртуальных разрезов медицинского изображения и перемещения и/или поворота его частей;
- размещение на медицинском изображении шаблонов имплантатов<sup>1</sup> [7].

#### 2. Моделирование (численное биомеханическое моделирование варианта лечения, т. е. численный расчет методом конечных элементов напряженно-деформированного состояния биомеханической модели варианта лечения с целью оценки его параметров и сравнения с их критическими (допускаемыми) значениями)<sup>2</sup>.

#### 3. Прогнозирование [8] (расчет прогнозной успешности варианта лечения, т. е. прогнозный расчет качества жизни пациента после лечения, оцениваемый с помощью шкалы опросника Освестри (анг. Oswestry Disability Index), далее — ODI или индекс Освестри [9]).

<sup>1</sup>mediCAD Premium Orthopaedic Software Solutions. URL: <https://medicad.eu/?lang=en> (дата обращения: 12.10.2023).

<sup>2</sup>Руководство пользователя системы предоперационного планирования с биомеханической поддержкой SmartPlan Ortho 2D. URL: <https://smartplan2d.ru/Desktop.pdf> (дата обращения: 12.10.2023).





Методологией подразумевается, что лечащий врач предложил несколько вариантов хирургического лечения пациента. Под вариантом лечения понимается выбранная врачом конкретная степень коррекции анатомии и фиксирующая конструкция. Для каждого из вариантов должны быть выполнены в полном объеме описанные ниже действия.

1. *Алгоритм и расчет возможного варианта лечения.*

- (a) Создание биомеханической модели варианта лечения — набора трехмерных модельных тел, соответствующих по своей пространственной геометрии биологическим объектам тела пациента (костям, межпозвоночным дискам или иным), и применяемой при лечении фиксирующей конструкции, например каталоги фирм<sup>3</sup>, с указанием соответствующих механических свойств для каждого из элементов (плотность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона).
- (b) Создание вычислительной сетки для модели этого варианта лечения. Численный расчет методом конечных элементов [10] задачи биомеханики для этой модели варианта лечения. Количество элементов первоначального разбиения модели определяют, ориентируясь на сеточную сходимость.
- (c) Оценка наибольших эквивалентных напряжений в имплантатах или костной ткани.
- (d) Измельчение (за счет уменьшения размеров элементов сетки и увеличения их количества) вычислительной сетки для модели этого варианта лечения. Повторный численный расчет задачи биомеханики для этой модели варианта лечения. Повторная оценка наибольших эквивалентных напряжений в имплантатах или костной ткани.
- (e) Сравнение значений наибольших эквивалентных напряжений в имплантатах или костной ткани, полученных для разных (исходной и измельченной) вычислительных сеток. Если значения отличаются не более чем на заданную величину (например, 6% [7]), то задача считается решенной, а биомеханическая модель считается качественной. В противном случае снова измельчают вычислительную сетку и повторяют пункты 1d и 1e.

2. *Алгоритм оценки качества выбранной для лечения биомеханической модели и результата проведенного лечения.*

- (a) Провести предоперационный опрос пациента о качестве его жизни с помощью опросника ODI. Результат опроса записывается в баллах как величина ODI.
- (b) Провести геометрическое планирование, биомеханическое моделирование и прогнозирование результатов лечения для каждого из запланированных врачом варианта лечения. Результат записывается как прогнозное значение ODI, полученное на этапе предоперационного прогнозирования.
- (c) На основании выполненного геометрического планирования, биомеханического моделирования и прогнозирования результатов лечения врач выбирает один из вариантов лечения и реализует его пациенту.
- (d) Провести опрос пациента о качестве его жизни после выполнения лечения с помощью опросника ODI. Результат записывается как послеоперационное значение ODI.
- (e) Провести сравнение послеоперационного значения ODI и его прогнозного значения, полученного на этапе предоперационного прогнозирования. Если значения индекса близки, то биомеханическую модель следует считать качественной.

В итоге в методологии для оценки успешности варианта хирургического лечения последовательно используются следующие алгоритмы, методы и действия.

1. Алгоритмы и регрессионные зависимости для измерения актуальных и расчета теор-

<sup>3</sup>Ознакомительная брошюра, техника операции. ADONIS® UniLIF transforaminal lumbar interbody fusion. URL: <http://www.mst.ru/products/spine/rigid/peek/unilif/unilif.pdf> (дата обращения: 12.10.2023); Межтеловые кейджи Stryker. URL: <https://www.medicalexpo.ru/produkt-proizvoditel/meztelovoj-kejdz-stryker-4072-20.html> (дата обращения: 12.10.2023).



ретических (оптимальных) значений параметров сагиттального баланса позвоночника, геометрических параметров тазобедренного сустава [11, 12].

2. Метод конечных элементов [10] (или другой метод решения задачи биомеханики) для расчета напряженно-деформированного состояния системы «кость – имплантат» для биомеханической модели варианта лечения с целью оценки его параметров и сравнения с их критическими (допускаемыми) значениями (ГОСТ Р 34233.1-2017 Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность. Общие требования. Москва : Стандартинформ, 2019. 30 с.).
3. Выбор атрибутов клинических случаев из базы данных для формирования выборки клинических случаев, сходных с данным клиническим случаем; анализ выборки посредством методов описательной статистики, непараметрических тестов, корреляционного и регрессионного анализа с целью оценки успешности лечения и рисков осложнений в послеоперационном периоде могут быть применены следующие методы [13]:
  - расчет описательных статистик (среднее, выборочная дисперсия, стандартное отклонение, стандартная ошибка, медиана);
  - проведение непараметрического теста (с помощью U-критерия Манна – Уитни для оценки различий между двумя независимыми выборками по уровню количественно измеренного признака);
  - проведение корреляционного анализа (метод Пирсона, метод Спирмена, критерий  $\chi^2$ );
  - выполнение регрессионного анализа (построение статистических взаимосвязей одной зависимой количественной характеристики от одной или нескольких независимых количественных характеристик).

### 1.3. Критерии оценки успешности лечения

В соответствии с методологией предоперационного планирования «Планирование – Моделирование – Прогнозирование» на каждом из его трех этапов для оценки успешности вариантов хирургического лечения предлагается использовать три класса критериев оценки успешности:

- 1) геометрические (анатомические);
- 2) биомеханические;
- 3) клинические.

При планировании лечения повреждений позвоночника, как сегмента позвоночно-тазового комплекса (ПТК), должен быть соблюден сагиттальный баланс (СБ) или, другими словами, параметры СБ должны быть оптимальными. Поэтому необходима разработка совокупности числовых параметров, с помощью которых можно было бы отличить успешную с точки зрения анатомии (или геометрии) сегмента ПТК операцию от неуспешной и обеспечить адекватное геометрическое предоперационное планирование. СБ может быть описан с помощью угловых позвоночно-тазовых параметров: тазовый индекс (PI), поясничный лордоз (LL), наклон таза (PT) и наклон крестца (SS). PI — угол между линией, перпендикулярной к середине замыкательной пластинки S1, и линией, соединяющей ту же точку с центром головки бедренной кости. PT — угол между линией, проведенной через центр головки бедренной кости и середину замыкательной пластинки S1, и вертикальной линией. SS — угол между горизонтальной линией и линией, проведенной через замыкательную пластинку S1. LL (поясничный лордоз) — угол, между линиями, проведенными через верхнюю замыкательную пластинку L1 и замыкательную пластинку S1. Параметр PI является индивидуальным для каждого человека и остается неизменным в течение жизни. Связь между PI и другими основными угловыми параметрами СБ получена элементарными преобразованиями из руководства пользователя мобильного приложения СпиноМетр (<https://smartplan2d.ru/Spinometr.pdf>), значения которых могут меняться при развитии дегенеративно-дистрофических заболеваний и травмах ПТК [2]:



$$SS = 0.5 \cdot PI + 15, \quad LL = 0.5 \cdot PI + 40, \quad PT = 0.5 \cdot PI - 15. \quad (1)$$

К геометрическим критериям оценки успешности отнесены оптимальные параметры (интервалы параметров) СБ, которые можно рассчитать индивидуально по рентгенограмме, выполненной в положении стоя.

Формулы (1) позволяют рассчитать для конкретного пациента оптимальные угловые параметры СБ через параметр PI. Естественно, достичь точных значений того или иного параметра при операции крайне сложно, поэтому авторы дают диапазон изменения этих параметров. По данным J. V. Lee [14], считается приемлемым для каждого из этих параметров диапазон  $\pm 7^\circ$ . Отклонение угловых параметров СБ после лечения от нормальных в указанных пределах считаем геометрическим критерием успешности лечения.

Биомеханические критерии оценки успешности лечения позволяют оценить стабильность фиксации, прочность имплантируемых конструкций, риск повреждения кости и мягких тканей, а также прочность системы «кость – имплантат» в целом.

Прочность системы «кость – имплантат» в целом и ее отдельных элементов определяется механическими напряжениями (например, эквивалентными напряжениями, возникающими в ней при типовых (предельных) нагрузках, имитирующих состояние покоя и движения человека). Внутренние напряжения в имплантатах сравниваются с их прочностными характеристиками (характеристиками материала, из которых они изготовлены): пределом выносливости (при циклических нагрузках), пределами текучести и прочности с некоторым коэффициентом запаса прочности. Другими словами, напряжения в имплантатах и костных тканях не должны превышать допускаемые напряжения (табл. 1).

Таблица 1 / Table 1

Прочностные характеристики костных тканей и имплантатов  
Strength characteristics of bone tissues and implants

Материал	Предел прочности, МПа
Титановый сплав Ti6Al4V ELI Titanium Alloy*	до 1300
Кортикальная костная ткань [15]	до 161
Губчатая (трабекулярная) костная ткань [16]	до 15

\*Titanium Alloys in Medical Applications. URL: <https://www.azom.com/article.aspx?ArticleID=1794>; Material Data Sheet. SLM solution. Ti-Alloy Ti6Al4V ELI (Grade 23). URL: [https://www.slm-solutions.com/fileadmin/Content/Powder/MDS/MDS\\_Ti-Alloy\\_Ti6Al4V\\_ELI\\_0719\\_EN.pdf](https://www.slm-solutions.com/fileadmin/Content/Powder/MDS/MDS_Ti-Alloy_Ti6Al4V_ELI_0719_EN.pdf) (дата обращения: 12.10.2023).

Это является первым биомеханическим критерием оценки успешности, с помощью которого оценивается достаточная прочность системы «кость – имплантат», в целом допускаемые напряжения для металлов могут быть рассчитаны в соответствии с ГОСТ Р 34233.1-2017.

Как правило, для сталей в качестве допускаемого напряжения берется предел текучести с коэффициентом запаса, равным 1.5. Для титановых сплавов вместо предела текучести берут предел прочности с коэффициентом запаса 3.

Таким образом, с точки зрения прочности конструкции успешным будет считаться тот вариант операции, для которого выполняются условия прочности по допускаемым напряжениям и для имплантатов, и для костных тканей (кортикальная и губчатая). Если два и более варианта операции удовлетворяют условиям прочности по допускаемым напряжениям, то наиболее успешным среди них будет тот, для которого напряжения в имплантатах и костных тканях окажутся ниже, чем для других вариантов лечения.

При оценке стабильности фиксации позвоночника оценивается амплитуда движения (анг. range of motion, далее – ROM) [17] в позвоночно-двигательных сегментах (ПДС). При изгибающих нагрузках (наклоны туловища вперед и назад) параметр ROM вычисляется следующим образом. В сагиттальной плоскости в модели позвоночника до приложения нагрузки измеряется угол между верхними замыкательными пластинками соседних позвонков.



После приложения нагрузки и изменения положения позвонков относительно друг друга снова производится измерение данного угла. *ROM* представляет собой разницу абсолютных значений двух измеренных углов (до и после деформации). При критических значениях *ROM* наступает повреждение межпозвонкового диска. При значениях *ROM* в  $6^{\circ}$ ... $8^{\circ}$  в сагиттальной или фронтальной плоскостях повреждений диска не происходит. Критическим значением [18] для наклона вперед является  $ROM = 15^{\circ}$ . В случае ротационной нагрузки на основе исследования ПДС со здоровыми дисками и ПДС с дисками, подверженными дегенеративным изменениям [19, 20], было показано, что  $ROM$  в  $16^{\circ}$  для здоровых и в  $14.5^{\circ}$  для больных дисков является критическим, приводящим к повреждению (указаны осредненные значения по выборке из эксперимента). В качестве второго биомеханического критерия оценки успешности хирургического лечения предлагается использовать параметр *ROM*, критические значения которого [21] для разных типов нагрузок сведены в табл. 2.

Таблица 2 / Table 2

Критериальные (пороговые) значения *ROM* (в градусах)  
Criteria (threshold) *ROM* values (in degrees)

Элемент ПДС	Нагрузки		
	Наклоны		Повороты корпуса (скручивание)
	вперед/назад	в стороны	
Здоровый диск	15	15	16 (20)
Дегенеративный диск	15	15	14.5 (20)

Клиническая оценка успешности (или эффективности) хирургического реконструктивного лечения заболеваний и повреждений ПТК в долгосрочном периоде (более 12 месяцев после операции) должна быть выполнена на основе клинического критерия успешности и большинством исследователей осуществляется при помощи различных опросников качества жизни пациентов [22]. Среди них опросник Освестри считается сегодня «золотым стандартом» [9] оценки функциональных результатов операций на нижней части спины («low back pain»). Успешность операций на позвоночнике может быть проведена на основе до- и послеоперационной оценки ODI. Выявлено критическое (пороговое) изменение ODI – 20 баллов, которое можно считать показателем существенного улучшения качества жизни [23].

## 2. Апробация методологии

В рамках апробации реализовано предоперационное планирование по методологии «Планирование – Моделирование – Прогнозирование», выполненное на базе геометрического планирования, биомеханического моделирования и прогнозирования. Показано применение геометрических, биомеханических и клинических критериев оценки успешности лечения при выборе успешного варианта хирургического реконструктивного лечения пациента с дегенеративно-дистрофическим заболеванием позвоночника.

Далее приведем результаты предоперационного планирования, выполненного для пациента А., 1950 г.р., мужского пола, с диагнозом спондилолистез L4 позвонка. Для планирования в рамках договора о сотрудничестве между Саратовским университетом и НИИТОН СГМУ были предоставлены следующие исходные данные в формате DICOM: компьютерная томография и функциональная рентгенограмма.

Лечащим врачом запланированы следующие варианты хирургического лечения:

- 1) транспедикулярная фиксация позвоночника на уровне L4–L5 позвонков без коррективы лордоза;
- 2) транспедикулярная фиксация позвоночника на уровне L4–L5 позвонков с корректировкой лордоза.

На основе данных компьютерной томографии и рентгенограммы в положении стоя построены 3D-модели исследуемого сегмента позвоночника – L1–Sacrum (поясничные позвонки L1, L2, L3, L4, L5 и крестец Sacrum). Для данной модели измерены основные параметры сагит-



тального баланса (СБ) (табл. 3). Далее проведена процедура геометрического планирования хирургического лечения в соответствии с запланированными лечащим врачом вариантами хирургического лечения. В результате получены модели:

1) сегмента позвоночника L1–Sacrum со спондилолистезом L4 позвонка без корректировки лордоза (угол между верхними замыкательными пластинками позвонка L1 и Sacrum) с транспедикулярной фиксацией на уровне L4–L5 позвонков;

2) сегмента позвоночника L1–Sacrum со спондилолистезом L4 позвонка с корректировкой лордоза с транспедикулярной фиксацией на уровне L4–L5 позвонков.

Корректировка лордоза, которую можно наблюдать на рис. 1, б в сравнении с рис. 1, а, позволила добиться оптимальных параметров СБ, рассчитанных по формулам (1), что отражено в табл. 3.

Таблица 3 / Table 3

Значения геометрических параметров сагиттального баланса  
Values of geometric parameters of sagittal balance

Параметры	3D-модель сегмента позвоночника L1–Sacrum со спондилолистезом L4 позвонка (в градусах)		
	до геометрического планирования хирургического лечения	после геометрического планирования хирургического лечения	
		без корректировки лордоза	с корректировкой лордоза
PI	57	57	57
PT	8	8	11
SS	59	59	45
GLL	71	50	62
Lordosis L4-S1	22	35	43

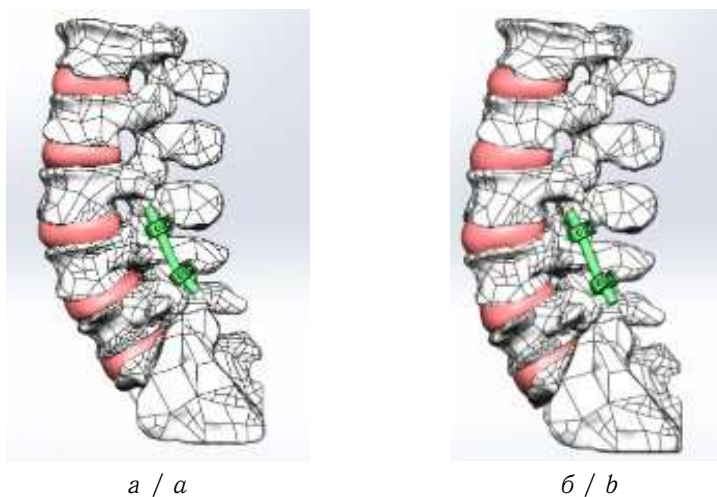


Рис. 1. 3D-модели сегмента позвоночника L1–Sacrum со спондилолистезом L4 позвонка: а — без корректировки лордоза с транспедикулярной фиксацией позвоночника на уровне L4–L5 позвонков; б — с корректировкой лордоза с транспедикулярной фиксацией позвоночника на уровне L4–L5 позвонков сегмента позвоночника с установленными имплантатами (цвет онлайн)

Fig. 1. 3D-models of the L1–Sacrum spine segment with L4 spondylolisthesis: a is without lordosis correction with transpedicular fixation of the spine at the level of L4–L5 vertebrae; b is with lordosis correction with transpedicular fixation of the spine at the level of L4–L5 vertebrae of the spine segment with implants installed (color online)





При геометрическом планировании использован геометрический критерий успешности, с помощью которого успешность варианта лечения оценивается соответствием значений основных параметров СБ в этом варианте их значениям, рассчитанным по формулам (1) (с допустимой погрешностью  $\pm 7^\circ$ ). С учетом этого геометрического критерия оценки успешности вариант лечения с корректировкой лордоза является успешным. На основе результатов выполненного геометрического планирования осуществлено биомеханическое моделирование каждого из запланированных вариантов лечения.

Были смоделированы различные виды физиологических (стационарных) нагрузок на исследуемый сегмент позвоночника: сгибание, разгибание, боковые наклоны вправо/влево, осевое вращение, статическая нагрузка (собственный вес пациента). Для этого исследуемый сегмент позвоночника нагружался [24] следящей нагрузкой 600 Н, изгибающими моментами 7.5 Н·м и крутящим моментом 7.5 Н·м. Следящая нагрузка моделировалась путем прикладывания вектора силы 100 Н по нормали к верхней замыкательной пластине каждого здорового позвонка в каудальном направлении, т. е. в направлении нижней замыкательной пластины.

С точки зрения механики для каждой модели численно с помощью метода конечных элементов решалась статическая задача теории упругости [25] о напряженно-деформированном состоянии сегмента позвоночника вместе с установленными имплантатами под действием внешних нагрузок (силы и моменты).

Биомеханическое моделирование позволило оценить поля эквивалентных напряжений, а также ROM (рис. 2–4), максимальные значения которых для каждого запланированного варианта хирургического лечения представлены в табл. 4, 5.

На рис. 2, 3 демонстрируются типичные поля эквивалентных напряжений в имплантатах и костных тканях позвонков. Следует отметить, что в модели без корректировки лордоза нагрузки (эквивалентные напряжения) в имплантатах и позвонках всегда были выше по сравнению с аналогичными значениями для модели с корректировкой лордоза.

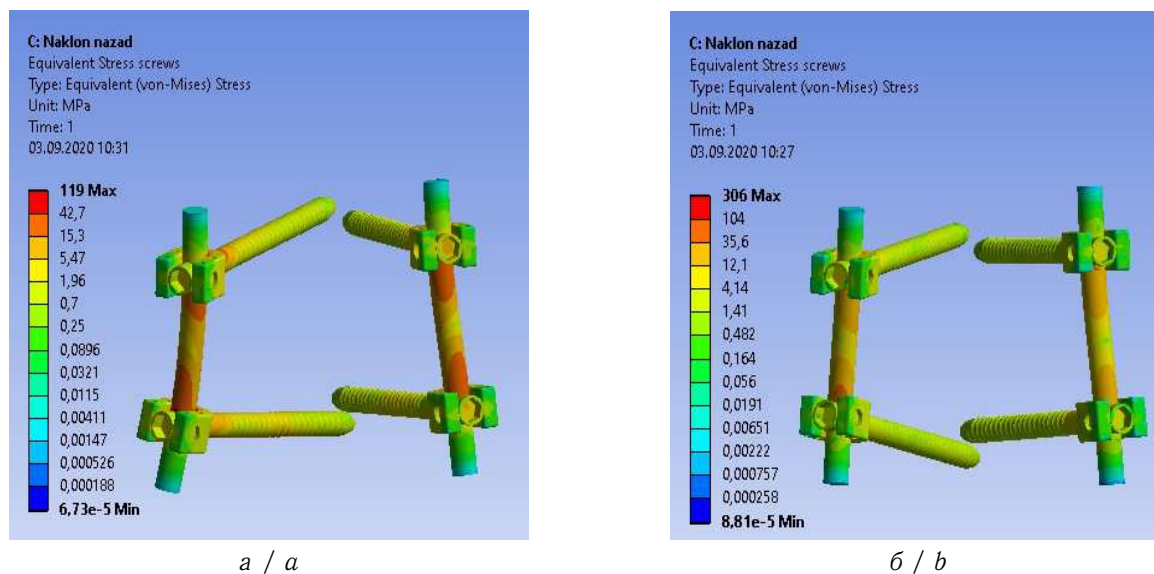


Рис. 2. Поля эквивалентных напряжений для транспедикулярной фиксации в случае наклона назад: *a* — с корректировкой лордоза; *b* — без корректировки лордоза (цвет онлайн)

Fig. 2. Equivalent stress fields for transpedicular fixation in the case of backward tilt: *a* is with lordosis correction; *b* is without lordosis correction (color online)

Анализ эквивалентных напряжений в имплантатах проводится для определения их наибольших значений и сравнения с пределом прочности (с коэффициентом запаса прочности, равным трем, см. ГОСТ Р 34233.1-2017). Металлофиксаторы изготовлены из титанового сплава, предел прочности которого составляет 970 МПа. Таким образом, допускаемое напряжение составляет не более 323 МПа. Анализ значений эквивалентных напряжений из табл. 4 показывает, что модель без корректировки лордоза не удовлетворяет критерию прочности.

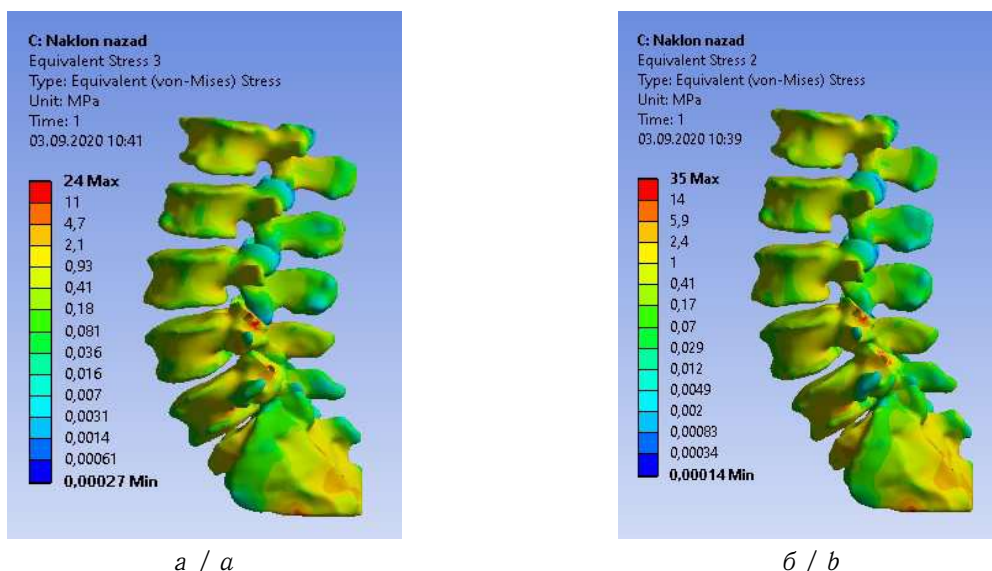


Рис. 3. Поля напряжений для костных тканей в случае наклона назад: *a* — с корректировкой лордоза; *b* — без корректировки лордоза (цвет онлайн)

Fig. 3. Stress fields for bone tissues in case of backward tilt: *a* is with lordosis correction; *b* is without lordosis correction (color online)

Таблица 4 / Table 4

Максимальные эквивалентные напряжения в имплантатах, МПа  
Maximum equivalent stresses in implants, MPa

Вариант лечения	Статическая нагрузка	Наклон				Осевое вращение
		вперед	назад	вправо	влево	
Без корректировки лордоза	426	464	306	564	495	550
С корректировкой лордоза	298	270	119	315	288	319

Таблица 5 / Table 5

Максимальные эквивалентные напряжения в костных тканях, МПа  
Maximum equivalent stresses in bone tissues, MPa

Вариант лечения	Статическая нагрузка	Наклон				Осевое вращение
		вперед	назад	вправо	влево	
Без корректировки лордоза	66	98	35	77	68	81
С корректировкой лордоза	49	92	24	56	63	67

В то же время модель с корректировкой лордоза этому критерию удовлетворяет при всех рассмотренных нагрузках.

Максимальные значения эквивалентных напряжений в костных тканях позвонков для обоих вариантов лечения не превышают критические значения [15], которые могут привести к разрушению материала. Следует отметить, что корректировка лордоза и достижение оптимальных параметров баланса позволили добиться более низких эквивалентных напряжений в имплантатах и костных тканях при всех рассмотренных вариантах нагружения. С учетом первого биомеханического критерия оценки успешности вариант лечения с корректировкой лордоза является успешным.

Анализ амплитуды движения (*ROM*) в сагиттальной плоскости для рассматриваемых вариантов лечения выявил следующее. Для модели сегмента позвоночника без корректировки лордоза разница значений *ROM* до и после приложения статической нагрузки оказалась существенной. Для модели сегмента позвоночника с корректировкой лордоза изменения *ROM* незначительны (рис. 4).

Этот вывод справедлив для всех рассмотренных в данной работе нагрузок. Таким образом, можно резюмировать, что вариант лечения с транспедикулярной фиксацией позвоночника на



уровне L4–L5 позвонков с коррективкой лордоза обеспечивает более высокую стабильность, особенно на участках L4–L5 и L5–Sacrum.

С учетом второго критерия успешности оба варианта лечения являются успешными, что подтверждается рис. 4, 5.

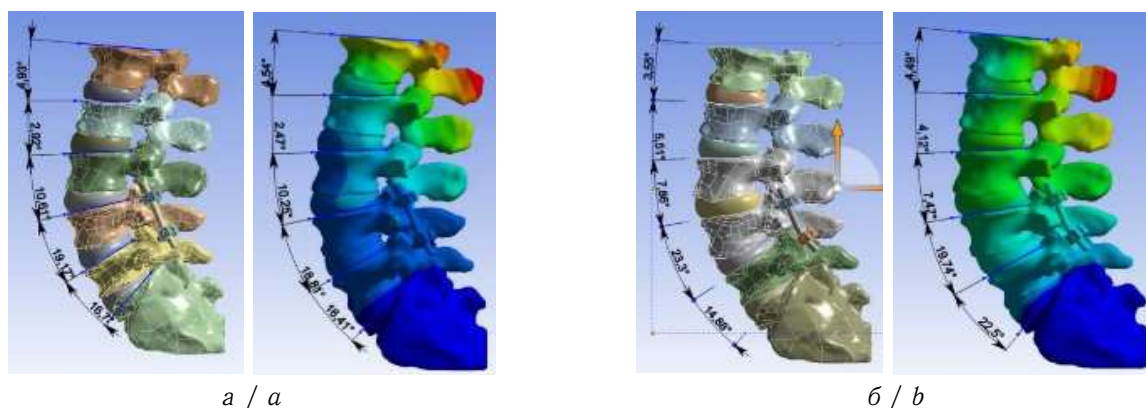


Рис. 4. Распределение значений амплитуды движения для двух моделей в случае статической нагрузки: *a* — с коррективкой лордоза; *б* — без коррективки лордоза (цвет онлайн)

Fig. 4. Distribution of motion amplitude values for two models in case of static loading: *a* is with lordosis correction; *b* is without lordosis correction (color online)

Выполненное геометрическое планирование и биомеханическое моделирование с учетом применения геометрических и биомеханических критериев оценки успешности лечения позволило определить, что успешный вариант лечения — транспедикулярная фиксация позвоночника на уровне L4–L5 позвонков с коррективкой лордоза.

Далее в соответствии с предлагаемым способом использовался клинический критерий успешности результатов лечения. Из базы данных были выбраны аналогичные клинические случаи, когда применялось хирургическое лечение как без коррективки лордоза, так и с коррективкой лордоза (табл. 6 и 7).

В данном примере на основе накопленных данных по аналогичным случаям (спондилолиз тазового отдела позвоночника) для каждого варианта лечения были рассчитаны прогнозные значения индекса ODI (качества жизни пациента после операции), которые представлены в табл. 8.

Из приведенных в табл. 8 данных следует, что разность между прогнозными значениями ODI составляет 24 балла, ошибка разности — 1.55 балла, отношение разности к ошибке разности — 15.3. Эта величина значительно превосходит табличное значение критерия, равное 1.99, из чего следует, что транспедикулярная фиксация 4 винтами на уровне L4–L5 позвонков с коррекцией лордоза (тип операции б) приводит к существенно лучшим результатам, чем тип операции а.

Баллы по шкале Освестри (ODI) в интервале от 0 до 20 соответствуют функциональному послеоперационному результату с минимальным нарушением (полное или почти полное возвращение к прежнему уровню социальной и физической активности, ограниченно возможны большие физические нагрузки), в интервале от 20 до 40 — функциональному послеопера-

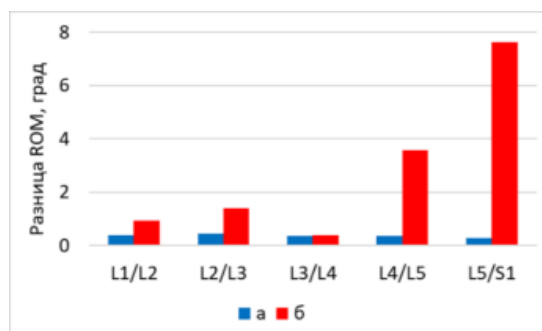


Рис. 5. Диаграмма разницы значений амплитуды движения для двух моделей в случае статической нагрузки: синий (*a*) — с коррективкой лордоза; красный (*б*) — без коррективки лордоза (цвет онлайн)

Fig. 5. Diagram of the difference of movement amplitude values for two models in case of static loading: blue (*a*) is with lordosis correction; red (*б*) is without lordosis correction (color online)



ционному результату с умеренными нарушениями (неполное восстановление социальной и физической активности, возможны только небольшие физические нагрузки, имеют место рецидивы заболевания, купируемые консервативной терапией).

Таблица 6 / Table 6

Результаты хирургического лечения спондилолистеза поясничного отдела позвоночника без коррективки лордоза  
Results of surgical treatment of lumbar spondylolisthesis without lordosis correction

ID	Пол	Возраст	ODI до операции	ODI после операции	Ранг
39	жен.	37	57	40	77
34	муж.	60	58	40	78
35	муж.	33	63	40	79
18	муж.	37	58	39	76
37	жен.	26	64	37	74
16	муж.	23	55	37	75
31	жен.	20	67	35	72
33	жен.	29	64	35	73
30	жен.	57	62	34	71
40	жен.	42	64	33	70
19	жен.	41	50	30	69
32	муж.	59	61	27	67
38	муж.	45	56	27	68

Таблица 7 / Table 7

Результаты хирургического лечения спондилолистеза поясничного отдела позвоночника с коррективкой лордоза  
Results of surgical treatment of lumbar spondylolisthesis with lordosis correction

ID	Пол	Возраст	ODI до операции	ODI после операции	Ранг
27	жен.	36	49	42	72
69	жен.	26	65	25	66
68	жен.	34	68	24	64
76	жен.	34	72	24	65
80	муж.	26	62	23	63
64	жен.	37	66	20	61
78	муж.	41	67	20	62
71	жен.	25	50	19	60
72	муж.	29	55	18	59
44	жен.	43	52	17	57
28	муж.	22	53	17	58
79	муж.	20	62	16	51
65	муж.	40	57	16	52
66	муж.	61	53	16	53
36	жен.	31	47	16	54
70	жен.	62	47	16	55
41	муж.	44	40	16	56
22	жен.	28	58	15	48
29	муж.	24	47	15	49
42	муж.	27	45	15	50
75	жен.	51	61	14	43
49	жен.	47	47	14	44
17	жен.	50	46	14	45
46	жен.	55	51	14	46
77	жен.	25	53	14	47
52	муж.	49	58	13	42
25	муж.	29	45	12	39
54	муж.	25	39	12	40



Окончание табл. 7 / Continuation of Table 7

ID	Пол	Возраст	ODI до операции	ODI после операции	Ранг
48	муж.	33	35	12	41
10	жен.	43	46	10	33
74	муж.	56	45	10	34
15	муж.	28	48	10	35
24	муж.	36	52	10	36
61	муж.	36	48	10	37
56	муж.	38	47	10	38
73	жен.	22	54	9	32
26	муж.	43	42	8	27
43	жен.	66	36	8	28
47	жен.	38	42	8	29
55	муж.	58	41	8	30
50	муж.	39	35	8	31
59	муж.	58	48	7	21
8	муж.	45	37	7	22
20	жен.	45	48	7	23
45	муж.	41	34	7	24
51	жен.	45	40	7	25
60	жен.	38	34	7	26
23	муж.	48	46	6	16
21	жен.	19	49	6	17
57	муж.	36	42	6	18
62	муж.	50	36	6	19
67	жен.	20	48	6	20
58	муж.	57	37	5	11
63	жен.	28	42	5	12
2	муж.	35	41	5	13
5	жен.	25	44	5	14
53	жен.	30	34	5	15
4	муж.	42	34	4	8
9	муж.	27	39	4	9
12	муж.	51	33	4	10
1	муж.	23	35	3	2
6	муж.	44	36	3	3
11	муж.	39	37	3	4
14	жен.	46	36	3	5
3	муж.	54	44	3	6
13	муж.	65	34	3	7
7	муж.	44	33	2	1

Таблица 8 / Table 8

## Результаты прогнозирования / Forecasting results

Тип операции	Прогнозируемые результаты ODI, баллы		
	среднее	стандартное отклонение	ошибка среднего
Транспедикулярная фиксация 4 винтами на уровне L4–L5 позвонков без коррекции лордоза (тип операции а)	35	5	1.28
Транспедикулярная фиксация 4 винтами на уровне L4–L5 позвонков с коррекцией лордоза (тип операции б)	11	7	0.86

Результаты первого варианта хирургического реконструктивного лечения согласно прогнозу могут приводить к оценке по шкале ODI от 30 до 40 (среднее значение 35) баллов. Таким





образом, они могут соответствовать функциональному послеоперационному результату как с минимальным нарушением, так и с умеренными нарушениями.

Прогноз результатов второго варианта хирургического реконструктивного лечения по шкале ODI ( $11 \pm 7$ ) во всем диапазоне соответствует функциональному послеоперационному результату с минимальным нарушением. Поскольку шкалу ODI нельзя считать пропорциональной в полном смысле слова, для оценки различия по этой шкале между двумя выборками был применен также критерий Манна – Уитни. Значение статистики Манна – Уитни (количество инверсий рангов) равно 13, что значительно меньше критериальных значений (которые для выборок с объемами 67 и 13 равны 257 при уровне достоверности 0.01 и 309 при уровне достоверности 0.05), из чего следует высокая степень достоверности различий между двумя выборками.

Таким образом, прогнозирование позволило выявить, что наиболее оптимальный вариант лечения — второй (транспедикулярная фиксация 4 винтами на уровне L4–L5 позвонков с коррекцией лордоза). Далее эта информация заносится в базу данных результатов лечения с аналогичными клиническими случаями для дальнейшего использования, в том числе для статистической обработки данных.

### 3. Результаты и их обсуждение

Разработанная методология представляет собой «рамочный алгоритм» применения различных методов, целью которого является оценка вариантов хирургического лечения заболеваний и повреждений элементов позвоночно-тазового комплекса на основе моделирования и количественных методов исследования моделей планируемого для хирургического лечения участка опорно-двигательного аппарата. Здесь под «рамочным алгоритмом» подразумевается тот факт, что методология задает наиболее общую последовательность обработки данных, направленную на предоперационное планирование с применением количественных методов оценки статуса пациента, моделирования и прогнозирования. При этом сами методы могут быть заменены на эквивалентные при условии сохранения смысла этапа алгоритма.

Результатом применения методологии является количественная оценка исследуемого варианта лечения посредством геометрических, биомеханических и клинических критериев успешности. Техническим результатом применения методологии является количественная оценка: поля напряжений, деформаций и перемещений, найденные для конкретных биологических объектов с установленной системой фиксации и/или имплантатами. Методология позволяет учитывать индивидуальные параметры геометрии биологических объектов (позвонков, таза и др.) пациента, а также индивидуальные механические параметры костной ткани пациента. Если исследуется более одного варианта лечения, то методология позволяет выбрать среди них один наиболее успешный, ориентируясь на количественные характеристики каждого из планируемых вариантов лечения. Методология включает механизм контроля качества используемой модели посредством анализа результатов ранее проводившегося лечения для аналогичных клинических случаев.

Методология основывается на обработке исходных данных рентгенограммы и компьютерной томограммы конкретного пациента и последовательном выполнении предоперационного геометрического планирования варианта лечения, его биомеханическом моделировании, оценке качества жизни пациента после операции и контроле качества применяемой биомеханической модели путем сопоставления прогнозируемой успешности до выполнения операции с фактической, оцениваемой после операции на основании рентгенологических (геометрических) и клинических критериев успешности. При геометрическом планировании используется рентгенограмма, а при биомеханическом моделировании — компьютерная томограмма пациента. На основе накопленных данных по аналогичным клиническим случаям проводится оценка прогнозируемой успешности лечения, выражающаяся в оценке возможного изменения качества жизни пациента. Прогнозируемая успешность лечения сравнивается с фактической, которая оценивается после выполнения лечения, что позволяет провести контроль биомеханической модели, применяемой на этапе биомеханического моделирования.



По данным КТ и/или рентгенографии производится расчет параметров баланса (в сагиттальной и/или фронтальной плоскости) и выбирается предпочтительный способ хирургической коррекции (лечения). На основании данных КТ и/или рентгенографии с учетом выбранного способа хирургической коррекции (лечения) выполняется построение твердотельной модели элементов позвоночно-тазового комплекса вместе с установленной системой фиксации и/или эндопротезами при наличии таковых. Для построенных твердотельных моделей ставится задача биомеханики в линейной постановке, учитывающая полученные по данным КТ индивидуальные механические параметры костных тканей (модуль Юнга, коэффициент Пуассона) и справочные механические параметры эндопротезов/элементов фиксации. С математической точки зрения в каждой из локально однородных подобластей неоднородного сегмента позвоночно-тазового комплекса решается статическая задача теории упругости. Основная система уравнений включает: уравнения равновесия; уравнения закона Гука, связывающие компоненты тензора напряжений и деформаций; соотношения Коши, связывающие тензор деформаций и вектор перемещения. Далее, исходя из роста и массы тела пациента, для модели задаются граничные условия в виде сил, моментов и жестких заделок, соответствующие физиологическим нагрузкам. Результатом решения поставленной задачи биомеханики являются поля напряжений, перемещений и деформаций, возникающие в исследуемой модели. На основании анализа распределения значений и локализации высоких напряжений и перемещений делается вывод о рациональности варианта хирургического лечения (в сравнении с другим вариантом либо по абсолютным значениям на основании количественного критерия). Далее на основе статистического анализа описанных в базе данных (или регистре) аналогичных по симптоматике клинических случаев определяется диапазон ожидаемого улучшения качества жизни (измеряемого в баллах, например, по опроснику Освестри). После операции проводится сравнение ожидаемого и фактического изменения качества жизни пациента. На основе этого сравнения осуществляется обратная связь с моделью (корректность проведенного моделирования). В ходе реализации способа производится накопление данных об исходной симптоматике, примененном лечении и фактическом изменении качества жизни пациента. При накоплении достаточно большой (не менее 200 клинических случаев) выборки по конкретным типам вариантов хирургического лечения к критерию выбора каждого такого варианта лечения добавляется сравнение ожидаемых изменений качества жизни, полученное на основе статистического анализа выборок аналогичных по симптоматике клинических случаев, суженных на конкретные типы хирургического лечения.

Методология заключается в последовательном осуществлении следующих действий.

1. Геометрическое предоперационное планирование вариантов лечения на основе рентгенометрических измерений и вычисления позвоночно-тазовых соотношений (показателей баланса во фронтальной и сагиттальной плоскостях), посредством которых врач определяет необходимую пациенту анатомическую коррекцию и/или фиксацию элементов позвоночно-тазового комплекса.
2. Построение индивидуальных биомеханических моделей элементов опорно-двигательного аппарата (по данным компьютерной томографии) с установленными металлоконструкциями (согласно запланированным в п.1 вариантам лечения) и их численное исследование, результатом которого являются поля напряжений, деформаций и перемещений в системе «кость – имплантат» для каждого из исследуемых вариантов хирургического лечения.
3. Оценка прогнозируемой успешности операционного лечения (количественный показатель, характеризующий изменение качества жизни пациента после лечения) на основе накопленных данных по аналогичным клиническим случаям.
4. Контроль качества применяемой модели посредством сопоставления прогнозируемой успешности (до операции, на основании биомеханического моделирования) с фактической (после операции, определяемой на основании рентгенологических и клинических критериев успешности).

Формализацией методологии является блок-схема, представленная на рис. 6.

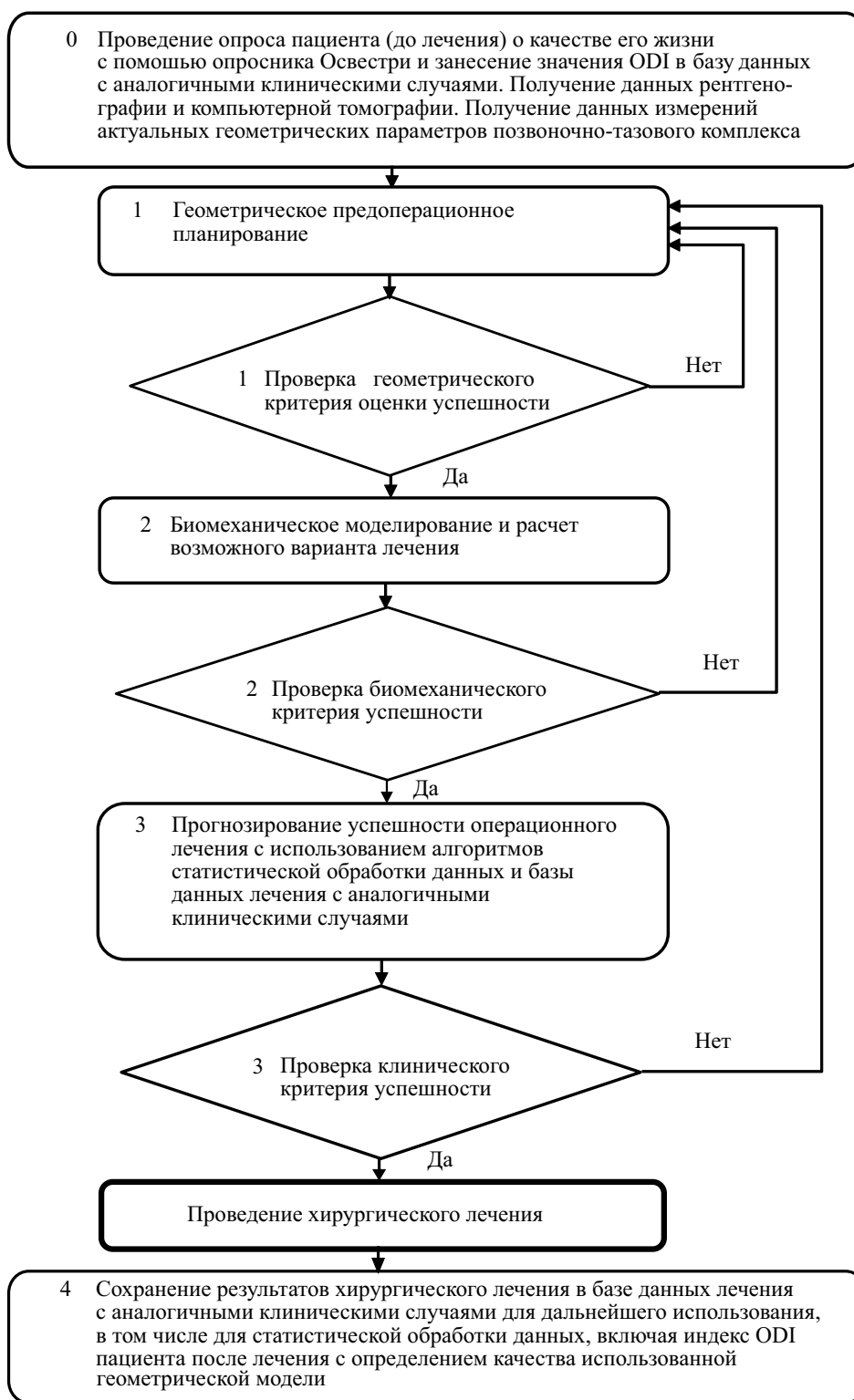


Рис. 6. Блок-схема алгоритма действий согласно методологии «Планирование – Моделирование – Прогнозирование»

Fig. 6. Block diagram of the algorithm of actions according to the «Planning – Modeling – Forecasting» methodology



Разработанная методология также формализована в виде способа предоперационного планирования с соответствующей программной системой<sup>4</sup>.

Применение разработанной методологии позволяет на стадии предоперационного планирования предусмотреть и предупредить осложнения, которые могут возникнуть по причине разрушения установленной металлоконструкции и/или нарушения консолидации закрепленных элементов позвоночно-тазового комплекса.

Применяемые методы моделирования и анализа позволяют сделать оценку допустимых нагрузок на систему «кость – имплантат», благодаря чему можно рассчитать допустимый режим нагрузок пациента после операции при его индивидуальных физиологических характеристиках, прежде всего роста и веса. Кроме того, такой подход позволит оценить изменение напряженно-деформированного состояния костных тканей и системы фиксации в случаях, если пациент набирает массу тела после операции.

Систематическое применение разработанной методологии (с накоплением данных и их регулярным ретроспективным анализом в совокупности) позволит в итоге снизить число операций. Применение разработанной методологии на регулярной основе открывает для врачей поле виртуальных экспериментов (без фактической установки пациенту металлоконструкции), которое позволит разрабатывать и изготавливать индивидуальные имплантаты для пациентов со сложными случаями заболеваний и повреждений.

## Выводы

Разработанная методология объединяет в единую схему применения известный врачам метод предоперационного планирования, основанный на знаниях анатомической нормы строения опорно-двигательного аппарата, количественные методы биомеханического моделирования и анализа, а также методы статистической обработки и анализа данных. Кроме того, методология содержит механизм контроля качества используемых биомеханических моделей. Таким образом, разработанная методология представляет собой подход к предоперационному планированию с использованием количественных методов с позиции биомеханики и анализа данных.

Важной особенностью разработанной методологии является ее строгая и естественная формализация, позволяющая разрабатывать на ее основе программные системы, решающие задачи в различных областях хирургии. При этом в зависимости от глубины реализации и выбранных методов такие системы могут быть как банальными системами-планировщиками, так и сложными системами из классов CAD, CAE и систем поддержки принятия решений.

## Список литературы

1. *Langella F., Villaña J., Damilano M., Cecchinato R., Pejrona M., Ismael M., Berjano P.* Predictive accuracy of surgical planning for sagittal imbalance: A cohort study // *SPINE*. 2017. Vol. 42, iss. 22. P. 1297–1304. <https://doi.org/10.1097/BRS.0000000000002230>
2. *Иванов Д. В., Фалькович А. С., Донник А. М., Полиенко А. В., Оленко Е. С., Крутько А. В.* Обобщение зависимостей между геометрическими параметрами сагиттального баланса // *Российский журнал биомеханики*. 2022. Т. 26, № 1. С. 8–24. <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2022.1.01>, EDN: **VCPUCK**
3. *Иванов Д. В.* Биомеханическая поддержка решения врача при выборе варианта лечения на основе количественных критериев оценки успешности // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 62–89. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-62-89>, EDN: **ZYXHTD**
4. *Доль А. В., Доль Е. С., Иванов Д. В.* Биомеханическое моделирование вариантов хирургического реконструктивного лечения спондилолистеза позвоночника на уровне L4–L5 // *Российский*

<sup>4</sup>Патент № 2802670 С2 Российская Федерация, МПК А61В 34/10. Система осуществления планирования и моделирования вариантов установки и прогнозирования успешности установки систем фиксации и эндопротезов элементов позвоночно-тазового комплекса : № 2021136955 : заявл. 14.12.2021 : опубл. 30.08.2023 / Л. Ю. Коссович, И. В. Кириллова, А. С. Фалькович [и др.] ; заявитель Российская Федерация, от имени которой выступает ФОНД ПЕРСПЕКТИВНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ. EDN: **BXXJTB**



- журнал биомеханики. 2018. Т. 22, № 1. С. 31–44. <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2018.1.03>, EDN: YMCSSL
5. Шишкин В. Б., Голубев В. Г. Предоперационное планирование в травматологии и ортопедии с использованием технологии трехмерной компьютерной реконструкции и моделирования // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 5. С. 47. EDN: YTHYUQ
  6. Волокитина Е. А., Антониади Ю. В., Гилев М. В. Предоперационное планирование имплантации эндопротеза тазобедренного сустава при диспластическом коксартрозе : учеб. пособие для врачей травматологов-ортопедов. Екатеринбург : Изд-во УГМУ, 2015. 12 с.
  7. Sotto-Maior B. S., Rocha E. P., de Almeida E. O., Freitas-Junior A. C., Anchieta R. B., Del Bel Cury A. A. Influence of high insertion torque on implant placement: An anisotropic bone stress analysis // Brazilian Dental Journal. 2010. Vol. 21, iss. 6. P. 508–514. <https://doi.org/10.1590/S0103-64402010000600005>
  8. Гланц С. Медико-биологическая статистика. Москва : Практика, 1998. 459 с.
  9. Fairbank J. C., Pynsent P. B. The Oswestry disability index // SPINE. 2000. Vol. 25, iss. 22. P. 2940–2952. <https://doi.org/10.1097/00007632-200011150-00017>
  10. Каплун А. Б., Морозов Е. М., Шамраева М. А. ANSYS в руках инженера: практическое руководство. Москва : Едиториал УРСС, 2003. 272 с.
  11. Pan C., Wang G., Sun J. Correlation between the apex of lumbar lordosis and pelvic incidence in asymptomatic adult // European Spine Journal. 2020. Vol. 29, iss. 3. P. 420–427. <https://doi.org/10.1007/s00586-019-06183-y>
  12. Legaye J., Duval-Beaupere G. Sagittal plane alignment of the spine and gravity: A radiological and clinical evaluation // Acta Orthopaedica Belgica. 2005. Vol. 71, iss. 2. P. 213–220.
  13. Pitkänen M. T., Manninen H. I., Lindgren K. A., Sihvonen T. A., Airaksinen O., Soimakallio S. Segmental lumbar spine instability at flexion-extension radiography can be predicted by conventional radiography // Clinical Radiology. 2002. Vol. 57, iss. 7. P. 632–639. <https://doi.org/10.1053/crad.2001.0899>
  14. Lee J. B., Kim I. S., Lee J. J., Park J. H., Cho C. B., Yang S. H., Sung J. H., Hong J. T. Validity of a smartphone application (Sagittalmeter Pro) for the measurement of sagittal balance parameters // World Neurosurg. 2019. Vol. 126. P. e1–e8. <https://doi.org/10.1016/j.wneu.2018.11.242>
  15. Havaladar R., Pilli S. C., Putti B. B. Insights into the effects of tensile and compressive loadings on human femur bone // Advanced Biomedical Research. 2014. Vol. 3, iss. 1. P. 101. <https://doi.org/10.4103/2277-9175.129375>
  16. Goldstein S. A. The mechanical properties of trabecular bone: Dependence on anatomic location and function // Journal of Biomechanics. 1987. Vol. 20, iss. 11–12. P. 1055–1061. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(87\)90023-6](https://doi.org/10.1016/0021-9290(87)90023-6)
  17. Smit T. H., van Tunen M. S., van der Veen A. J., Kingma I., van Dieën J. H. Quantifying intervertebral disc mechanics: A new definition of the neutral zone // BMC Musculoskeletal Disorders. 2011. Vol. 7, iss. 12. P. 38. <https://doi.org/10.1186/1471-2474-12-38>
  18. Brown T., Hansen R. J., Yorra A. J. Some mechanical tests on the lumbosacral spine with particular reference to the intervertebral discs: A preliminary report // The Journal of Bone & Joint Surgery. 1957. Vol. 39, iss. 5. P. 1135–1164. <https://doi.org/10.2106/00004623-195739050-00014>
  19. Gary K. W., Cao Y., Burns S. P., McDonald S. D., Krause J. S. Employment, health outcomes, and life satisfaction after spinal cord injury: Comparison of veterans and nonveterans // Spinal Cord. 2020. Vol. 58, iss. 1. P. 3–10. <https://doi.org/10.1038/s41393-019-0334-9>
  20. Hansson T. H., Keller T. S., Panjabi M. M. A study of the compressive properties of lumbar vertebral trabeculae: Effects of tissue characteristics // SPINE. 1987. Vol. 12, iss. 1. P. 56–62. <https://doi.org/10.1097/00007632-198701000-00011>
  21. Farfan H. F. Mechanical Disorders of the Low Back. Philadelphia : Lea & Febiger, 1973. 247 p.
  22. Гуца А. О., Юсупов А. Р. Оценка исходов хирургического лечения дегенеративно-дистрофических заболеваний позвоночника // Хирургия позвоночника. 2017. Т. 14, № 4. С. 85–94. <https://doi.org/10.14531/ss2017.4.85-94>
  23. Solberg T., Johnsen L. G., Nygaard Ø. P., Grotle M. Can we define success criteria for lumbar disc surgery? // Acta Orthopaedica. 2013. Vol. 84, iss. 2. P. 196–201. <https://doi.org/10.3109/17453674.2013.786634>
  24. Dreischarf M., Zander T., Shirazi-Adl A., Puttlitz C. M., Adam C. J., Chen C. S., Goel V. K., Kiapour A., Kim Y. H., Labus K. M., Little J. P., Park W. M., Wang Y. H., Wilke H. J., Rohlmann A., Schmidt H. Comparison of eight published static finite element models of the intact lumbar spine:





- Predictive power of models improves when combined together // *Journal of Biomechanics*. 2014. Vol. 47, iss. 8. P. 1757–1766. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2014.04.002>
25. Полюенко А. В., Иванов Д. В., Куреев С. И., Бессонов Л. В., Мулдашева А. М., Оленко Е. С. Численный анализ напряженно-деформированного состояния остеотомий первой плюсневой кости // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 496–511. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-496-511>, EDN: OZSOKF

### References

1. Langella F., Villafañe J., Damilano M., Cecchinato R., Pejrona M., Ismael M., Berjano P. Predictive accuracy of surgimap surgical planning for sagittal imbalance: A cohort study. *SPINE*, 2017, vol. 42, iss. 22, pp. 1297–1304. <https://doi.org/10.1097/BRS.0000000000002230>
2. Ivanov D. V., Falkovich A. S., Donnik A. M., Polienko A. V., Olenko E. S., Krutko A. V. Generalization of the relationships between sagittal balance geometric parameters. *Russian Journal of Biomechanics*, 2022, vol. 26, iss. 1, pp. 5–20. <https://doi.org/10.15593/RJBiomech/2022.1.01>, EDN: MXLJER
3. Ivanov D. V. Biomechanical support for the physician's decision when choosing a treatment option based on quantitative success criteria. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 62–89 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-62-89>, EDN: ZYXHTD
4. Dol A. V., Dol E. S., Ivanov D. V. Biomechanical modelling of surgical reconstructive treatment of spinal spondylolisthesis at L4–L5 level. *Russian Journal of Biomechanics*, 2018, vol. 22, iss. 1, pp. 31–44 (in Russian). <https://doi.org/10.15593/RZhBiomech/2018.1.03>, EDN: YMCSSL
5. Shishkin V. B., Golubev V. G. Preoperative planning in traumatology and orthopedics with the using of three-dimensional computer reconstruction and modeling technology. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya* [Modern Problems of Science and Education], 2015, iss. 5, pp. 47 (in Russian). EDN: YTHYUQ
6. Volokitina E. A., Antoniadi Yu. V., Gilev M. V. *Predoperatsionnoe planirovanie implantatsii endoproteza tazobedrennogo sustava pri displasticheskom koksartroze* [Preoperative Planning of Hip Replacement Implantation in Dysplastic Coxarthrosis]. Ekaterinburg, Ural State Medical University Publ., 2015. 12 p. (in Russian).
7. Sotto-Maior B. S., Rocha E. P., de Almeida E. O., Freitas-Junior A. C., Anchieta R. B., Del Bel Cury A. A. Influence of high insertion torque on implant placement: An anisotropic bone stress analysis. *Brazilian Dental Journal*, 2010, vol. 21, iss. 6, pp. 508–514. <https://doi.org/10.1590/S0103-64402010000600005>
8. Glantz S. *Mediko-biologicheskaya statistika* [Biomedical Statistics]. Moscow, Praktika, 1998. 459 p. (in Russian).
9. Fairbank J. C., Pynsent P. B. The oswestry disability index. *SPINE*, 2000, vol. 25, iss. 22, pp. 2940–2952. <https://doi.org/10.1097/00007632-200011150-00017>
10. Kaplun A. B., Morozov E. M., Shamraeva M. A. *ANSYS v rukakh inzhenera: Prakticheskoye rukovodstvo* [ANSYS in the Hands of an Engineer: A Practical Guide]. Moscow, Editorial URSS, 2003. 272 p. (in Russian).
11. Pan C., Wang G., Sun J. Correlation between the apex of lumbar lordosis and pelvic incidence in asymptomatic adult. *European Spine Journal*, 2020, vol. 29, iss. 3, pp. 420–427. <https://doi.org/10.1007/s00586-019-06183-y>
12. Legaye J., Duval-Beaupere G. Sagittal plane alignment of the spine and gravity: A radiological and clinical evaluation. *Acta Orthopaedica Belgica*, 2005, vol. 71, iss. 2, pp. 213–220.
13. Pitkänen M. T., Manninen H. I., Lindgren K. A., Sihvonen T. A., Airaksinen O., Soimakallio S. Segmental lumbar spine instability at flexion-extension radiography can be predicted by conventional radiography. *Clinical Radiology*, 2002, vol. 57, iss. 7, pp. 632–639. <https://doi.org/10.1053/crad.2001.0899>
14. Lee J. B., Kim I. S., Lee J. J., Park J. H., Cho C. B., Yang S. H., Sung J. H., Hong J. T. Validity of a smartphone application (Sagittalmeter Pro) for the measurement of sagittal balance parameters. *World Neurosurg*, 2019, vol. 126, pp. e1–e8. <https://doi.org/10.1016/j.wneu.2018.11.242>
15. Havaldar R., Pilli S. C., Putti B. B. Insights into the effects of tensile and compressive loadings on human femur bone. *Advanced Biomedical Research*, 2014, vol. 3, iss. 1, pp. 101. <https://doi.org/10.4103/2277-9175.129375>
16. Goldstein S. A. The mechanical properties of trabecular bone: Dependence on anatomic location and



- function. *Journal of Biomechanics*, 1987, vol. 20, iss. 11–12, pp. 1055–1061. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(87\)90023-6](https://doi.org/10.1016/0021-9290(87)90023-6)
17. Smit T. H., van Tunen M. S., van der Veen A. J., Kingma I., van Dieën J. H. Quantifying intervertebral disc mechanics: A new definition of the neutral zone. *BMC Musculoskeletal Disorders*, 2011, vol. 7, iss. 12, pp. 38. <https://doi.org/10.1186/1471-2474-12-38>
  18. Brown T., Hansen R. J., Yorra A. J. Some mechanical tests on the lumbosacral spine with particular reference to the intervertebral discs: A preliminary report. *The Journal of Bone & Joint Surgery*, 1957, vol. 39, iss. 5. P. 1135–1164. <https://doi.org/10.2106/00004623-195739050-00014>
  19. Gary K. W., Cao Y., Burns S. P., McDonald S. D., Krause J. S. Employment, health outcomes, and life satisfaction after spinal cord injury: Comparison of veterans and nonveterans. *Spinal Cord*, 2020, vol. 58, iss. 1, pp. 3–10. <https://doi.org/10.1038/s41393-019-0334-9>
  20. Hansson T. H., Keller T. S., Panjabi M. M. A study of the compressive properties of lumbar vertebral trabeculae: Effects of tissue characteristics. *SPINE*, 1987, vol. 12, iss. 1, pp. 56–62. <https://doi.org/10.1097/00007632-198701000-00011>
  21. Farfan H. F. *Mechanical Disorders of the Low Back*. Philadelphia, Lea & Febiger, 1973. 247 p.
  22. Gushcha A. O., Yusupova A. R. Evaluation of outcomes of surgical treatment for degenerative diseases of the spine. *Russian Journal of Spine Surgery (Khirurgiya Pozvonochnika)*, 2017, vol. 14, iss. 4, pp. 85–94 (in Russian). <https://doi.org/10.14531/ss2017.4.85-94>
  23. Solberg T., Johnsen L. G., Nygaard Ø. P., Grotle M. Can we define success criteria for lumbar disc surgery? *Acta Orthopaedica*, 2013, vol. 84, iss. 2, pp. 196–201. <https://doi.org/10.3109/17453674.2013.786634>
  24. Dreischarf M., Zander T., Shirazi-Adl A., Puttlitz C. M., Adam C. J., Chen C. S., Goel V. K., Kiapour A., Kim Y. H., Labus K. M., Little J. P., Park W. M., Wang Y. H., Wilke H. J., Rohlmann A., Schmidt H. Comparison of eight published static finite element models of the intact lumbar spine: Predictive power of models improves when combined together. *Journal of Biomechanics*, 2014, vol. 47, iss. 8, pp. 1757–1766. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2014.04.002>
  25. Polienko A. V., Ivanov D. V., Kireev S. I., Bessonov L. V., Muldasheva A. M., Olenko E. S. Numerical analysis of the stress-strain state of osteotomies of the first metatarsal bone. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 496–511 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-496-511>, EDN: OZSOKF

Поступила в редакцию / Received 23.03.2024

Принята к публикации / Accepted 17.05.2024

Опубликована / Published 30.08.2024



Научная статья  
УДК 539.3

## Об идентификации двумерного закона изменения плотности упругого неоднородного цилиндра

В. В. Дударев<sup>✉</sup>, В. Н. Дядечко

Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

**Дударев Владимир Владимирович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории упругости, dudarev\_vv@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2378-7574>, AuthorID: 561179

**Дядечко Вячеслав Николаевич**, студент кафедры теории упругости, vndyadchko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-1081-3008>

**Аннотация.** В рамках линейной теории упругости с использованием модели изотропного тела сформулирована задача об установившихся колебаниях неоднородного полого цилиндра. Колебания цилиндра вызываются нагрузкой, приложенной к боковой поверхности, на торцах реализованы условия скользящей заделки. Переменные свойства материала описываются параметрами Ламе и плотностью, которые изменяются по радиальной и продольной координатам. Решение прямой задачи расчета колебаний цилиндра построено с помощью метода конечных элементов, реализованного в пакете FlexPDE, отмечены его основные преимущества. Для исследования влияния переменных свойств на значения резонансных частот колебаний и компонент поля перемещений рассмотрены законы изменения этих свойств в общем виде, используемом в современных работах для моделирования функционально-градиентных материалов. На основе проведенных численных расчетов исследована степень влияния амплитудных значений каждого из параметров Ламе и плотности на первую резонансную частоту и поле смещений. Также представлены графики, демонстрирующие влияние вида закона изменения плотности на значения компонент поля перемещений. Сформулирована новая коэффициентная обратная задача об определении функции распределения плотности в стенке цилиндра по данным о поле перемещений, измеренном в конечном наборе точек внутри области рассмотрения при фиксированной частоте. Отмечены основные трудности при реализации процедуры реконструкции на практике. Для увеличения точности вычисления первых и вторых производных от рассчитанных в конечно-элементном пакете двумерных функций, которые используются при решении обратной задачи, предложен подход, основанный на алгоритме локально взвешенной регрессии. Представлены результаты вычислительных экспериментов по решению обратной задачи, которые демонстрируют возможность использования предложенного метода для восстановления различных видов двумерных законов изменения плотности. Даны практические рекомендации по реализации наиболее эффективной процедуры реконструкции.

**Ключевые слова:** цилиндр, неоднородный материал, метод конечных элементов, обратная задача, идентификация, плотность

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-71-10045, <https://rscf.ru/project/18-71-10045/>) в Южном федеральном университете. Авторы благодарят профессора А. О. Ватульяна за внимание к работе.

**Для цитирования:** Дударев В. В., Дядечко В. Н. Об идентификации двумерного закона изменения плотности упругого неоднородного цилиндра // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 381–393. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-381-393>, EDN: JATOPJ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

## On identification of two-dimensional density of an elastic inhomogeneous cylinder

V. V. Dudarev<sup>✉</sup>, V. N. Dyadechko

Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

Vladimir V. Dudarev, dudarev\_vv@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2378-7574>, AuthorID: 561179

Vyacheslav N. Dyadechko, vndyadechko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-1081-3008>

**Abstract.** Within the framework of the linear theory of elasticity, using the model of an isotropic body, the problem of steady-state vibrations of an inhomogeneous hollow cylinder is formulated. The vibrations of the cylinder are caused by a load applied to the side surface, and the conditions of sliding embedding are implemented at the ends. The variable material properties are described by the Lamé parameters and density, which change along the radial and longitudinal coordinates. The direct problem solution of the cylinder vibrations is constructed using the finite element method implemented in the FlexPDE package, its main advantages are noted. To study the influence of variable properties on the values of resonant frequencies and components of the displacement field, the laws of these properties are considered in the general form used in modern works for modeling functionally graded materials. On the basis of the performed numerical calculations, the degree of influence of the amplitude values of each of the Lamé parameters and density on the first resonant frequency and the displacement field are studied. Graphs are also presented that demonstrate the influence of the type of the law of density change on the values of the displacement field components. A new inverse coefficient problem is formulated to determine the density distribution function in the cylinder wall from the displacement field data measured at a finite set of points inside the considered area for a fixed frequency. The main difficulties in the implementation of the reconstruction procedure in practice are noted. To increase the accuracy of calculating the first and second derivatives of the two-dimensional functions calculated in the finite element package, which are used in solving the inverse problem, an approach based on the locally weighted regression algorithm is proposed. The results of computational experiments on solving the inverse problem are presented, which demonstrate the possibility of using the proposed method to restore various types of two-dimensional laws of density. Practical recommendations are given for the implementation of the most accurate reconstruction procedure.

**Keywords:** cylinder, inhomogeneous material, finite element method, inverse problem, identification, density

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 18-71-10045, <https://rscf.ru/project/18-71-10045/>) in the Southern Federal University. The authors thank Professor Vatulyan A. O. for the attention to the manuscript.

**For citation:** Dudarev V. V., Dyadechko V. N. On identification of two-dimensional density of an elastic inhomogeneous cylinder. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 381–393 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-381-393>, EDN: JATOPJ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

### Введение

При конструировании многих современных сооружений и объектов использование традиционных материалов в настоящее время уступает место внедрению новых неоднородных материалов со сложными механическими свойствами. Их применение позволяет улучшить



прочностные и другие эксплуатационные свойства изделий, повысить их функциональность, надежность и продлить срок эксплуатации. К таким материалам относятся различные функционально-градиентные материалы (ФГМ), свойства которых изменяются по пространственным координатам [1–3]. ФГМ особо востребованы в аэрокосмической промышленности, при производстве деталей и узлов космических аппаратов и самолетов. Неоднородные материалы, имеющие улучшенное свойство термоустойчивости, могут выдерживать длительные термические нагрузки, которые испытывают космические аппараты при прохождении воздушных слоев, а также значительно повышают сопротивляемость коррозии [3–5]. Высокая прочность таких материалов делает их пригодными для применения в сложных условиях. Использование ФГМ позволяет существенно оптимизировать ряд важнейших характеристик объектов, например сопротивляемость к температурным и химическим воздействиям.

В процессе производства ФГМ достигается возможность непрерывно изменять процентное соотношение количества фракций всех составляющих по объему материала, что в свою очередь обеспечивает неоднородную микроструктуру, физические свойства которой могут изменяться в достаточно широких диапазонах [3, 4, 6]. Сама процедура изготовления таких материалов — сложный процесс, в ходе которого используются различные методы обработки материалов, как традиционные, такие как сплавка, термическая обработка, прокатка, нагартовка, спаивание и т. д., так и разработанные в последнее время, например метод энергетического воздействия. Сочетание различных способов обработки позволяет сформировать надежную градиентную структуру материалов, обеспечивающую высокий уровень качества изделий из ФГМ, которые в дальнейшем используются для работы в сложных эксплуатационных условиях. Некоторые технические вопросы изготовления ФГМ описаны в работах [6, 7]. В обзорной статье [8] по теме ФГМ проанализированы 299 источников, опубликованных с 2000 по 2015 г. В качестве одного из важных аспектов исследований ФГМ в них отмечается важность создания методик определения законов изменения свойств материала.

Следует отметить, что любое технологически сложное изделие должно быть подвергнуто проверкам и исследованиям для оценки соответствия реальных и проектных характеристик. Наиболее востребованным методом неразрушающей диагностики свойств материала является акустический подход. Он обладает важными преимуществами по сравнению с остальными: высокая точность, экономичность и оперативность проведения экспериментов [9–11]. На его основе удастся построить эффективные схемы идентификации механических характеристик тел и конструкций по данным акустического зондирования. Акустический подход для цилиндра применялся в статье [12], где была рассмотрена задача о восстановлении одномерных законов изменения параметров Ламе в упругом полом ФГ-цилиндре по данным о функциях смещения, измеренных в конечном наборе точек внутри цилиндра.

В настоящее время одним из самых распространенных способов численного моделирования поведения ФГМ с пространственным изменением свойств является использование метода конечных элементов (МКЭ) [13] при проведении расчетов. Этот метод позволяет исследовать достаточно широкий класс объектов конечных размеров, задавая свойства материалов, из которых изготовлен объект, как численно, так и в виде функциональных зависимостей. Одно из ключевых преимуществ использованного программного пакета FlexPDE состоит в том, что он дает возможность явно задавать уравнения движения, а также определяющие соотношения, что существенно упрощает реализацию решения задачи.

В настоящей работе рассмотрена задача об установившихся колебаниях полого цилиндра, изготовленного из ФГМ, свойства которого изменяются одновременно по продольной и радиальной координатам. Проведен анализ влияния переменных свойств на основные акустические характеристики. Рассмотрена обратная задача о восстановлении двумерной функции плотности по данным о поле смещения, измеренном в конечном наборе точек.

## 1. Постановка прямой задачи

Общую постановку задачи об установившихся колебаниях изотропного тела, изготовленного из ФГМ, в рамках линейной теории упругости после отделения временного множителя



можно записать в виде [1, 2, 14]:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{\sigma} + \rho \omega^2 \underline{u} = 0, \\ \underline{\sigma} = \lambda \underline{E} \text{tr} \underline{\varepsilon} + 2\mu \underline{\varepsilon}, \\ \underline{\varepsilon} = 0.5(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T), \\ \underline{u}|_{S_u} = 0, \quad \underline{n} \cdot \underline{\sigma}|_{S_\sigma} = \underline{P}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\underline{\sigma}$  — тензор напряжений Коши,  $\omega$  — частота колебаний,  $\underline{u}$  — вектор перемещений,  $\underline{\varepsilon}$  — линейный тензор деформации,  $\underline{E}$  — единичный тензор,  $\underline{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности тела  $S = S_u \cup S_\sigma$ ,  $\underline{P}$  — вектор внешней нагрузки, приложенной на части поверхности  $S_\sigma$ . Параметры Ламе  $\lambda$ ,  $\mu$  и плотность  $\rho$  в общем случае являются функциями трех пространственных координат.

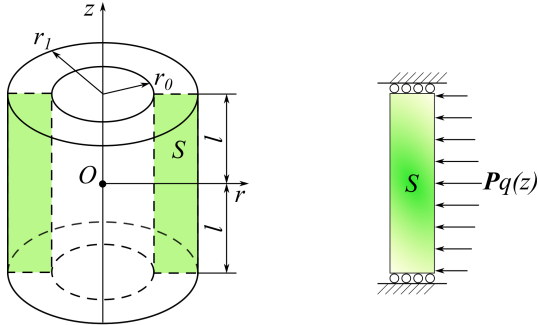


Рис. 1. Полый ФГ-цилиндр с нагрузкой на внешней боковой поверхности

Fig. 1. Hollow FG-cylinder with load on the outer side surface

Основываясь на постановке (1), рассмотрим осесимметричные колебания полого ФГ-цилиндра в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  (рис. 1). Свойства материала изменяются по радиальной и продольной координатам. Длина цилиндра равна  $2l = 1$  м, внутренний и внешний радиусы соответственно равны  $r_0 = 0.8$  м и  $r_1 = 1$  м. На верхней и нижней торцевых поверхностях заданы условия скользящей заделки. Колебания вызываются радиальной нагрузкой, которая приложена к внешней боковой границе цилиндра, имеет амплитуду  $P$  и изменяется по продольной координате по закону  $q(z)$ . Внутренняя поверхность не нагружена.

Постановку задачи для рассматриваемого цилиндра можно записать в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_r = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_z = 0, \\ u_z = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad r \in [r_0, r_1], \quad z = \pm l, \\ \sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0, \quad r = r_0, \quad z \in [-l, l], \\ \sigma_{rr} = -Pq(z), \quad \sigma_{rz} = 0, \quad r = r_1, \quad z \in [-l, l], \end{cases} \quad (2)$$

где  $\sigma_{rr} = 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda\theta$ ,  $\sigma_{zr} = \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi} = 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda\theta$ ,  $\sigma_{zz} = 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda\theta$  — компоненты тензора напряжений;  $\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}$ ,  $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$ ,  $\varepsilon_{rz} = 0.5 \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)$  — компоненты тензора деформаций;  $\theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}$ ;  $u_r = u_r(r, z)$  — компонента вектора смещения  $\underline{u}$  в радиальном направлении;  $u_z = u_z(r, z)$  — в продольном;  $S = \{(r, z) \in R^2 | r \in [r_0, r_1], z \in [-l, l]\}$  — область, на которой строится решение.

Для общности рассуждений запишем постановку задачи в безразмерном виде путем введения безразмерных параметров и функций:

$$\begin{cases} S_{\xi\xi,\xi} + S_{x\xi,x} + \frac{S_{\xi\xi} - S_{\varphi\varphi}}{\xi} + \kappa^2 \tilde{\rho} u_\xi = 0, \\ S_{\xi x,\xi} + S_{xx,x} + \frac{S_{\xi x}}{\xi} + \kappa^2 \tilde{\rho} u_x = 0, \\ u_x = 0, S_{\xi x} = 0, \xi \in [\xi_0, 1], x = \pm l_0, \\ S_{\xi\xi} = S_{\xi x} = 0, \xi = \xi_0, x \in [-l_0, l_0], \\ S_{\xi\xi} = -pq(x), S_{\xi x} = 0, \xi = 1, x \in [-l_0, l_0], \end{cases} \quad (3)$$



где  $r = \xi r_1$ ,  $\xi_0 = r_0/r_1 = 0.8$ ,  $z = x r_1$ ,  $l_0 = l/r_1 = 0.5$ ,  $c^* = \mu^*/\lambda^*$ ,  $p = P/\lambda^*$ ,  $\sigma_{rr} = \lambda^* S_{\xi\xi}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda^* S_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{zr} = \lambda^* S_{x\xi}$ ,  $\sigma_{zz} = \lambda^* S_{xx}$ ,  $u_r = r_1 u_\xi$ ,  $u_z = r_1 u_x$ ;  $\kappa^2 = \rho^* \omega^2 r_1^2 / \lambda^*$  – безразмерный параметр, пропорциональный частоте колебаний;  $\lambda = \lambda^* \tilde{\lambda}(\xi, x)$ ,  $\mu = \mu^* \tilde{\mu}(\xi, x)$ ,  $\rho = \rho^* \tilde{\rho}(\xi, x)$ , где  $\lambda^*$ ,  $\mu^*$ ,  $\rho^*$  – характерные значения соответствующих характеристик; функции  $\tilde{\mu}(\xi, x)$ ,  $\tilde{\lambda}(\xi, x)$ ,  $\tilde{\rho}(\xi, x)$  определяют законы изменения переменных свойств материала. Здесь и далее для краткости записи принято обозначение частных производных  $S_{\xi\xi, \xi} = \partial S_{\xi\xi} / \partial \xi$ . Определяющие соотношения для безразмерных величин имеют вид

$$\begin{cases} S_{\xi\xi} = 2c^* \tilde{\mu} \varepsilon_{\xi\xi} + \tilde{\lambda} \theta, & S_{\varphi\varphi} = 2c^* \tilde{\mu} \varepsilon_{\varphi\varphi} + \tilde{\lambda} \theta, \\ S_{xx} = 2c^* \tilde{\mu} \varepsilon_{xx} + \tilde{\lambda} \theta, & S_{x\xi} = S_{\xi x} = 2c^* \tilde{\mu} \varepsilon_{x\xi}, \\ \varepsilon_{\xi\xi} = u_{\xi, \xi}, & \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_\xi}{\xi}, & \varepsilon_{xx} = u_{x, x}, \\ \varepsilon_{\xi x} = 0.5 (u_{x, \xi} + u_{\xi, x}). \end{cases} \quad (4)$$

В рассматриваемом случае неоднородного материала решение задачи (3)–(4) можно получить только численно. Одним из широко используемых для таких целей методов является МКЭ. В настоящей работе использован пакет FlexPDE, в котором реализован этот метод. Следует отметить, что основным преимуществом этого пакета является возможность задания в явном виде определяющих соотношений, уравнений колебаний, граничных условий и законов изменения переменных характеристик.

## 2. Анализ чувствительности

Ранее в статье [15] был проведен анализ влияния переменных по радиальной координате свойств материала цилиндра на основные акустические характеристики и дана оценка точности решения, полученного в пакете FlexPDE. Для исследования влияния свойств ФГМ, изготовленного из смеси четырех составляющих, на поле перемещений рассмотрим один из наиболее часто используемых видов законов, описывающих их одновременное непрерывное изменение по продольной и радиальной координатам [16]:

$$\begin{aligned} f_\lambda(\xi, x) &= \lambda_1 V_1(\xi, x) + \lambda_2 V_2(\xi, x) + \lambda_3 V_3(\xi, x) + \lambda_4 V_4(\xi, x), \\ f_\mu(\xi, x) &= \mu_1 V_1(\xi, x) + \mu_2 V_2(\xi, x) + \mu_3 V_3(\xi, x) + \mu_4 V_4(\xi, x), \\ f_\rho(\xi, x) &= \rho_1 V_1(\xi, x) + \rho_2 V_2(\xi, x) + \rho_3 V_3(\xi, x) + \rho_4 V_4(\xi, x), \end{aligned} \quad (5)$$

где на области  $S^* = \{(\xi, x) \in R^2 | \xi \in [\xi_0, 1], x \in [-l_0, l_0]\}$  введены функции

$$\begin{aligned} V_1(\xi, x) &= \left(1 - \left(\frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0}\right)^n\right) \left(1 - \left(\frac{x + l_0}{2l_0}\right)^m\right), \\ V_2(\xi, x) &= \left(1 - \left(\frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0}\right)^n\right) \left(\frac{x + l_0}{2l_0}\right)^m, \\ V_3(\xi, x) &= \left(\frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0}\right)^n \left(1 - \left(\frac{x + l_0}{2l_0}\right)^m\right), \\ V_4(\xi, x) &= \left(\frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0}\right)^n \left(\frac{x + l_0}{2l_0}\right)^m. \end{aligned} \quad (6)$$

Положительные параметры  $n$  и  $m$  характеризуют степень градиентности свойств по координатам  $\xi$  и  $x$  соответственно,  $\lambda_i, \mu_i, \rho_i, i = \overline{1, 4}$  – безразмерные значения параметров Ламе и плотности соответствующего  $i$ -го вещества.

В качестве конкретного примера рассмотрим ФГМ, состоящий из керамик SiC (вещество 1), Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (вещество 2), которые достигают 100% своей концентрации соответственно в точках  $(\xi_0, -l_0)$  и  $(\xi_0, l_0)$  на внутренней поверхности цилиндра, и металлов Ti6Al4V (вещество 3), Al 1100 (вещество 4), которые достигают 100% своей концентрации соответственно в



точках  $(1, -l_0)$  и  $(1, l_0)$  на внешней боковой поверхности. Значения модуля Юнга  $E$ , коэффициента Пуассона  $\nu$ , модуля сдвига  $\mu$  и плотности  $\rho$  были взяты из данных, представленных в открытом доступе на сайте [www.matweb.com](http://www.matweb.com), соответствующие значения параметра  $\lambda$  определены по известной формуле  $\lambda = \nu E / ((1 + \nu)(1 - 2\nu))$ . Значения безразмерных параметров Ламе  $\lambda_i, \mu_i$  и плотности  $\rho_i, i = \overline{1, 4}$ , вычислялись с точностью до второго знака после запятой согласно введенными правилам, при этом были выбраны  $\lambda^* = 50$  ГПа,  $\mu^* = 25$  ГПа,  $\rho^* = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Все данные представлены в табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Значение размерных и безразмерных параметров четырех веществ ФГМ  
The value of the dimensional and dimensionless parameters of the four FGM substances

№ п/п	Вещество	$E$ , ГПа	$\nu$	$\mu$ , ГПа	$\lambda$ , ГПа	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\lambda_i$	$\mu_i$	$\rho_i$
1	SiC	410	0.140	180	69.93	3210	1.4	7.2	3.21
2	Al2O3	370	0.220	140	119.1	3900	2.38	5.6	3.9
3	Ti6Al4V	113.8	0.342	44	91.8	4430	1.84	1.76	4.43
4	Al 1100	69	0.330	26	50.4	2710	1.01	1.04	2.71

Проведем анализ влияния амплитудных значений параметров Ламе и плотности на изменение компонент поля перемещений. Для этого по аналогии с одномерным случаем [17] введем в рассмотрение функции

$$\tilde{\lambda}_d(\xi, x) = (1 + d) \cdot f_\lambda(\xi, x), \quad \tilde{\mu}_d(\xi, x) = (1 + d) \cdot f_\mu(\xi, x), \quad \tilde{\rho}_d(\xi, x) = (1 + d) \cdot f_\rho(\xi, x), \quad (7)$$

где  $d = 0.001, 0.01, 0.1$  — формальный параметр, величина которого характеризует амплитудные значения исследуемых свойств. Для анализа влияния конкретной характеристики соответствующий закон ее изменения выбирался из (7) при  $n = m = 1$ , а два других фиксировались при значении  $d = 0$ . Для удобства оценки относительного изменения компонент поля перемещений  $(u_\xi, u_x)$  введем в рассмотрение функции

$$\delta_\xi = \frac{|u_\xi - u_\xi^0|}{\max_S |u_\xi^0|} \cdot 100\%, \quad \delta_x = \frac{|u_x - u_x^0|}{\max_S |u_x^0|} \cdot 100\%, \quad (8)$$

где  $u_\xi^0, u_x^0$  — компоненты поля перемещений, соответствующего законам (7) при  $d = 0, n = m = 1$ . Проведенные расчеты показали, что для всех рассмотренных значений  $d$  наибольшее влияние на поле перемещений имело изменение амплитудных значений модуля сдвига  $\mu$ , а наименьшее — параметра  $\lambda$ . В качестве примера на рис. 2–3 представлены графики  $\delta_\xi, \delta_x$  при  $d = 0.1$ .

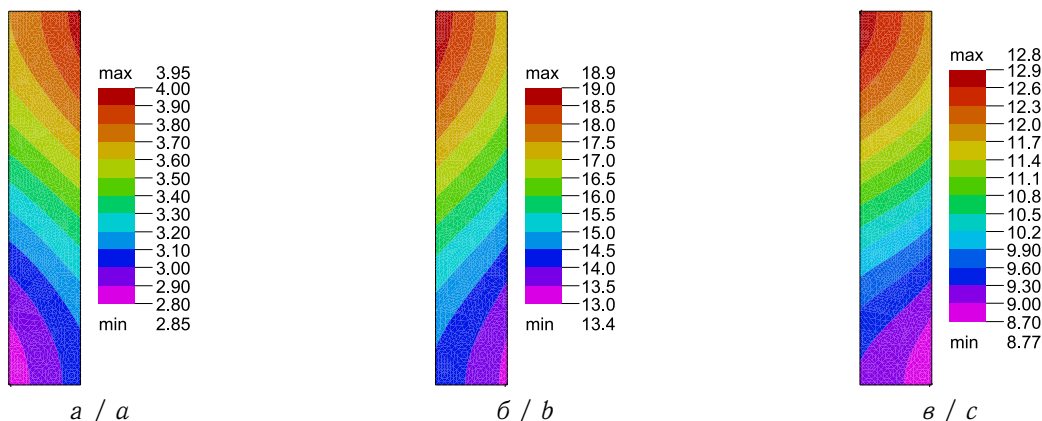


Рис. 2. Графики функции  $\delta_\xi$  для  $d = 0.1, n = m = 1$ , соответствующие амплитудному изменению только одной функции: а —  $\tilde{\lambda}_d(\xi, x)$ ; б —  $\tilde{\mu}_d(\xi, x)$ ; в —  $\tilde{\rho}_d(\xi, x)$  (цвет онлайн)  
Fig. 2. Graphs of the function  $\delta_\xi$  for  $d = 0.1, n = m = 1$  corresponding to the amplitude change of only one function: а —  $\tilde{\lambda}_d(\xi, x)$ ; б —  $\tilde{\mu}_d(\xi, x)$ ; в —  $\tilde{\rho}_d(\xi, x)$  (color online)

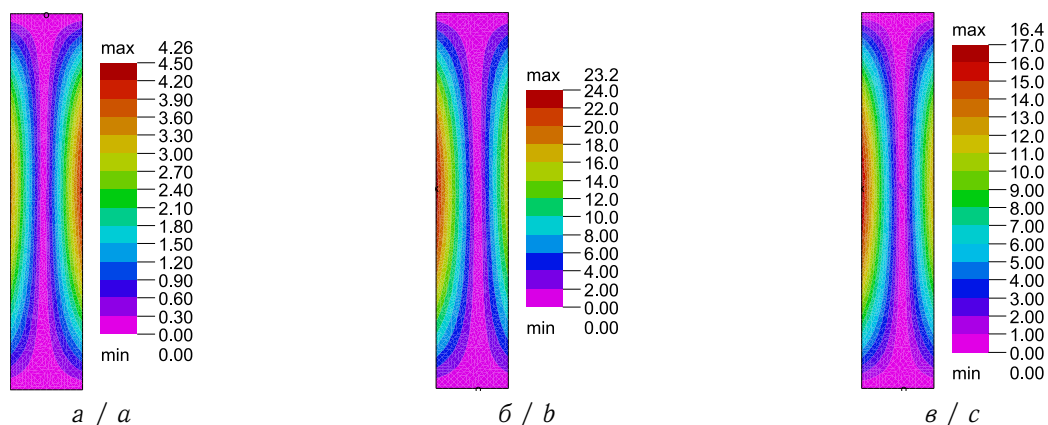


Рис. 3. Графики функции  $\delta_x$  для  $d = 0.1$ ,  $n = m = 1$ , соответствующие амплитудному изменению только одной функции:  $a - \tilde{\lambda}_d(\xi, x)$ ;  $б - \tilde{\mu}_d(\xi, x)$ ;  $в - \tilde{\rho}_d(\xi, x)$  (цвет онлайн)

Fig. 3. Graphs of the  $\delta_x$  function for  $d = 0.1$ ,  $n = m = 1$  corresponding to the amplitude change of only one function:  $a - \tilde{\lambda}_d(\xi, x)$ ;  $б - \tilde{\mu}_d(\xi, x)$ ;  $с - \tilde{\rho}_d(\xi, x)$  (color online)

Здесь для всех случаев значение безразмерной частоты выбиралось равным  $\kappa = 1.0$  (до первого резонанса), в качестве закона изменения нагрузки принималась константная функция  $q(x) = 1$ . В табл. 2 представлены значения первой резонансной частоты колебаний  $\kappa$  с точностью до пятого знака после запятой. При  $d = 0$  для всех функций  $\lambda_d$ ,  $\mu_d$ ,  $\rho_d$  и  $n = m = 1$  первый резонанс наблюдается при  $\kappa \approx 1.3448$ . При проведении расчетов контроль точности осуществлялся путем задания в пакете FlexPDE значения служебного параметра  $\text{errlim} = 10^{-6}$ , который характеризует относительную погрешность.

Из полученных данных видно, что, как и в рассмотренном в работе [17] случае, только радиальной неоднородности материала амплитудные значения модуля сдвига  $\mu$  и плотности  $\rho$  оказывают более существенное влияние на поля перемещений и резонансные значения параметра  $\kappa$ , чем соответствующие значения параметра  $\lambda$ .

Для анализа влияния вида функции изменения плотности на значения компонент поля перемещений проведены вычислительные эксперименты. Законы изменения параметров Ламе фиксировались в виде линейных функций (5)  $\tilde{\lambda}(\xi, x) = f_\lambda(\xi, x)$ ,  $\tilde{\mu}(\xi, x) = f_\mu(\xi, x)$  при  $n = m = 1$ , а закон изменения плотности выбирался как  $\tilde{\rho}(\xi, x) = f_\rho(\xi, x)$  при значениях  $n = m = 2, 3$ . Соответствующие графики функций  $\delta_\xi$ ,  $\delta_x$  представлены на рис. 4. Из этих данных видно, что вид закона изменения функции плотности (степень его градиентности) также существенно влияет на значения компонент поля перемещений.

Таблица 2 / Table 2

Значения первой безразмерной резонансной частоты  $\kappa$  при различных значениях параметра  $d$  и одной из изменяемых функций  $\tilde{\lambda}_d(\xi, x)$ ,  $\tilde{\mu}_d(\xi, x)$ ,  $\tilde{\rho}_d(\xi, x)$  при  $n = m = 1$

Values of the first dimensionless resonant frequency  $\kappa$  for different values of the parameter  $d$  and one of the variable functions  $\tilde{\lambda}_d(\xi, x)$ ,  $\tilde{\mu}_d(\xi, x)$ ,  $\tilde{\rho}_d(\xi, x)$  for  $n = m = 1$

$d$	$\lambda_d$	$\mu_d$	$\rho_d$
0.001	1.34494	1.34539	1.34416
0.010	1.34595	1.35042	1.33816
0.100	1.35566	1.39946	1.28225

### 3. Обратная задача

Рассмотрим модельную обратную задачу о восстановлении двумерной функции плотности по заданному полю перемещений в конечном наборе точек при фиксированной частоте. Предполагается, что законы изменения параметров Ламе известны, например, они могут быть заранее определены по данным о поле перемещения из экспериментов при воздействии статическими нагрузками [18]. Задачи такого вида также называют коэффициентными

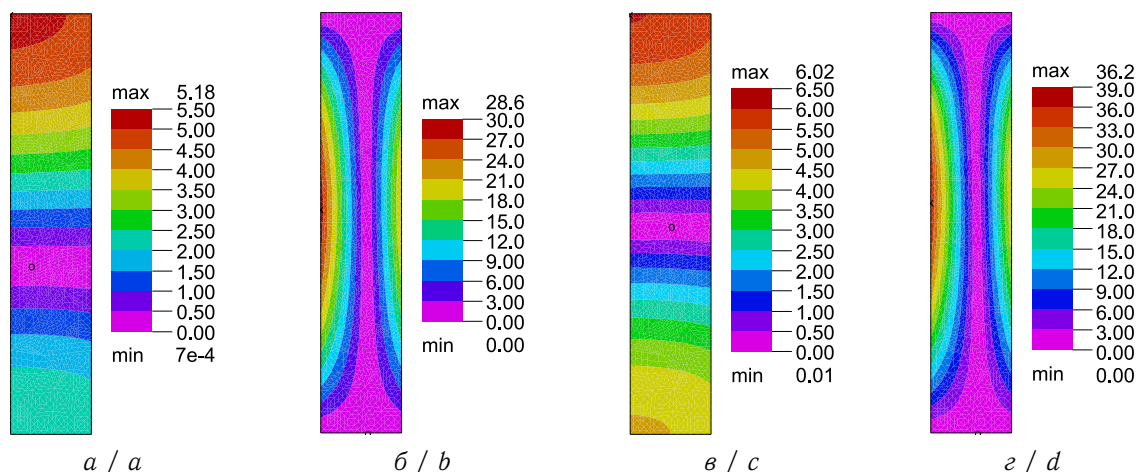


Рис. 4. Графики функций  $\delta_\xi, \delta_x$  при различных законах  $f_\rho(\xi, x)$ : а –  $\delta_\xi, n = m = 2$ ; б –  $\delta_x, n = m = 2$ ; в –  $\delta_\xi, n = m = 3$ ; г –  $\delta_x, n = m = 3$  (цвет онлайн)  
 Fig. 4. Graphs of functions  $\delta_\xi, \delta_x$  for different laws  $f_\rho(\xi, x)$ : а –  $\delta_\xi, n = m = 2$ ; б –  $\delta_x, n = m = 2$ ; в –  $\delta_\xi, n = m = 3$ ; д –  $\delta_x, n = m = 3$  (color online)

обратными задачами первого типа [10, 11]. Формально решение достаточно просто получить из первого уравнения колебаний:

$$\tilde{\rho}_{rec} = - \frac{S_{\xi\xi,\xi} + S_{x\xi,x} + \frac{S_{\xi\xi} - S_{\varphi\varphi}}{\xi}}{\kappa^2 u_\xi}. \tag{9}$$

Следует сразу отметить, что при заданных граничных условиях (скользящей заделки) из второго уравнения невозможно получить решение этой задачи во всей области, так как на торцах цилиндра (верхней и нижней гранях области  $S$ )  $u_x = 0$ .

С практической точки зрения основной сложностью при рассматриваемом подходе является измерение поля перемещений внутри цилиндра в конечном наборе точек при фиксированной частоте. Также при реализации решения согласно (9) вызывает трудности вычисление первых и вторых производных от функций  $u_\xi, u_x$ , заданных в конечном числе точек. Для преодоления этой проблемы предложен алгоритм моделирования вычислительного эксперимента для реализации решения обратной задачи, включающий следующие шаги:

- 1) построение численного решения прямой задачи при точно заданной восстанавливаемой функции  $\tilde{\rho}_{ex}$  с помощью МКЭ в пакете FlexPDE;
- 2) получение входной информации для обратной задачи – значений компонент поля перемещений  $u_\xi, u_x$  в конечном наборе точек  $(\xi_i, x_j)$ ,  $\xi_i = \xi_0 + (i - 1)h_\xi, h_\xi = (\xi_0 - 1)/(n_\xi - 1), i = 1..n_\xi, x_j = -l_0 + (j - 1)h_x, h_x = 2l_0/(m_x - 1), j = 1..m_x$ ;
- 3) интерполяция значений функций  $u_\xi(\xi_i, x_j), u_x(\xi_i, x_j)$  радиальной базисной функцией  $u_\xi^s, u_x^s$ ;
- 4) вычисление значений функций напряжений согласно определяющим соотношениям (4) в точках  $(\xi_i, x_j)$ ;
- 5) осуществление «сглаживания» полученных наборов данных, соответствующих для каждой функции напряжений, с помощью алгоритма локально взвешенной регрессии LOWESS (Locally Weighted Scatterplot Smoothing) [19] в пакете Maple;
- 6) по «сглаженным» узловым значениям в точках  $(\xi_i, x_j)$  строятся соответствующие сплайны для функций напряжений  $S_{\xi\xi}^s, S_{x\xi}^s, S_{\varphi\varphi}^s$  и вычисляются первые производные  $S_{\xi\xi,\xi}^s, S_{x\xi,x}^s$ ;
- 7) искомая функция  $\tilde{\rho}_{rec}$  определяется из соотношения (9) с помощью подстановки в него полученных функций радиального смещения, компонент тензора напряжений и их производных.





При проведении модельных вычислительных экспериментов для определенности примем безразмерные параметры Ламе постоянными  $\tilde{\lambda} = 1.66$ ,  $\tilde{\mu} = 3.9$ ; выбранные значения получены путем осреднения соответствующих линейных законов (5) по площади области. Выберем одинаковыми шаги разбиения сетки входных данных  $h_\xi = h_x$ , тогда с учетом конкретных значений  $\xi_0$  и  $l_0$  для рассматриваемого цилиндра число узловых значений входных данных по радиальной и продольной координатам будут связаны соотношением  $m_x = 5n_\xi$ . Значение параметра  $\kappa = 1.1$  выбрано вблизи первого резонанса, где наиболее существенно проявляется влияние переменных свойств на поле перемещений и амплитудно-частотные характеристики. Количество узлов выбрано равным  $n_\xi = 20$ ,  $m_x = 100$ .

В настоящее время используются ФГМ с различными видами законов изменения свойств [20]. При проведении вычислительных экспериментов по решению обратной задачи реконструкции функции плотности рассмотрим наиболее характерные из них.

1. В качестве первого примера рассмотрим эксперимент по восстановлению квадратичной функции  $\tilde{\rho}_{ex}(\xi, x) = f_\rho(\xi, x)$  из (5) при  $n = m = 2$ . На рис. 5 представлены графики компонент тензора напряжений  $S_{\xi\xi}(\xi, x)$  и  $S_{x\xi}(\xi, x)$ , полученные на 6-ом шаге описанного алгоритма. Из графиков видно, что вблизи границы области у функций имеются особенности, связанные с граничными условиями. С учетом этого результаты реконструкции будут представлены на подобласти  $S^* = \{(\xi, x) \in R^2 | \xi \in [0.82, 0.98], x \in [-0.4, 0.4]\}$ , как наиболее значимой для применения метода на практике.

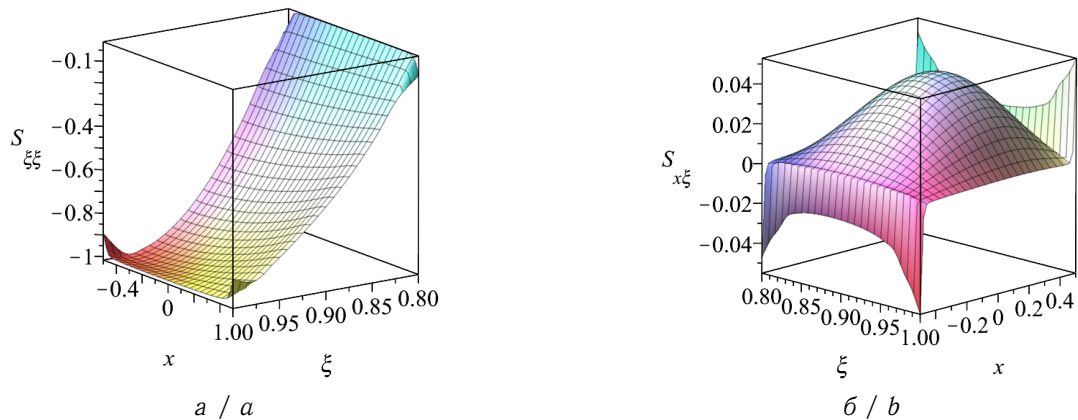


Рис. 5. Графики компонент тензора напряжений: а —  $S_{\xi\xi}(\xi, x)$ ; б —  $S_{x\xi}(\xi, x)$  (цвет онлайн)

Fig. 5. Graphs of stress tensor components: a —  $S_{\xi\xi}(\xi, x)$ ; b —  $S_{x\xi}(\xi, x)$  (color online)

Здесь и далее для демонстрации результатов восстановления в каждом примере на одном изображении будут представлены графики: точной функции  $\tilde{\rho}_{ex}(\xi, x)$  в виде сплошной цветной поверхности, восстановленной функции  $\tilde{\rho}_{rec}(\xi, x)$  в виде сетки черного цвета. Отдельно в каждом примере будет представлен график распределения функции относительной погрешности реконструкции  $\delta_\rho$  вида

$$\delta_\rho = \frac{|\tilde{\rho}_{ex} - \tilde{\rho}_{rec}|}{\max_S |\tilde{\rho}_{ex}|} \cdot 100\%. \quad (10)$$

На рис. 6 для рассматриваемого примера квадратичной функции  $\tilde{\rho}_{ex}(\xi, x) = f_\rho(\xi, x)$  представлены результаты восстановления. Видно, что погрешность не превосходит 1.2%.

2. Во втором примере рассмотрена реконструкция экспоненциального закона изменения плотности  $\tilde{\rho}_{ex}(\xi, x) = e^\xi + e^{-1.2x}$ , результаты представлены на рис. 7. Относительная погрешность не превосходит 1.12%.

3. В третьем эксперименте представлена реконструкция тригонометрического закона изменения плотности  $\tilde{\rho}_{ex}(\xi, x) = 3.5 - 0.5 \cos(1.2\pi(\xi + 2x))$ , результаты представлены на рис. 8. Относительная погрешность не превосходит 1.1%.

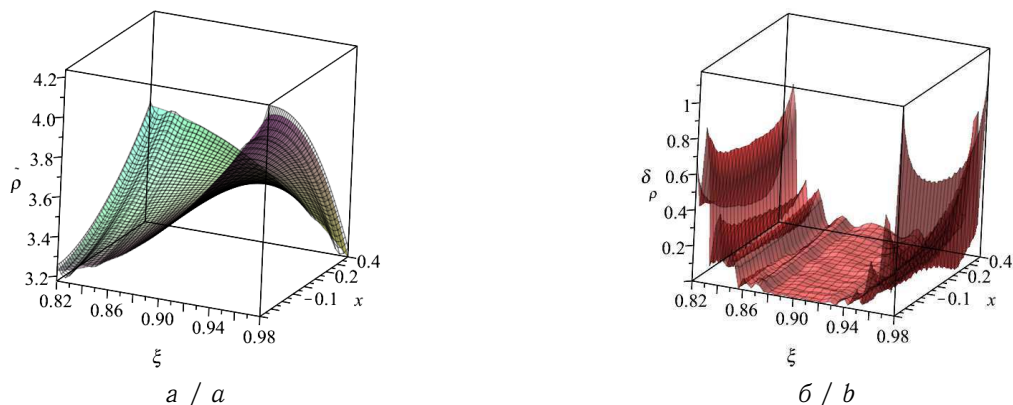


Рис. 6. Графики: *a* — точной квадратичной функции  $\tilde{\rho}_{ex}(\xi, x) = f_\rho(\xi, x)$  (5) при  $n = m = 2$  (сплошная поверхность) и восстановленной функции  $\tilde{\rho}_{rec}(\xi, x)$  (сетка); *б* — функции  $\delta_\rho$  (цвет онлайн)

Fig. 6. Graphs: *a* is plots of the exact quadratic function  $\tilde{\rho}_{ex}(\xi, x) = f_\rho(\xi, x)$  (5) for  $n = m = 2$  (solid surface) and the reconstructed functions  $\tilde{\rho}_{rec}(\xi, x)$  (grid); *b* is graph of the function  $\delta_\rho$  (color online)

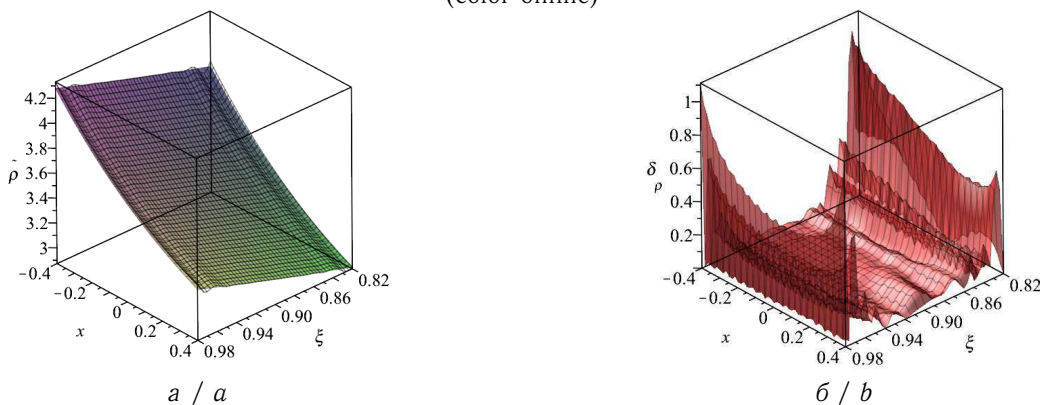


Рис. 7. Графики: *a* — точной функции  $\tilde{\rho}_{ex}(\xi, x) = e^\xi + e^{-1.2x}$  (сплошная поверхность) и восстановленной функции  $\tilde{\rho}_{rec}(\xi, x)$  (сетка); *б* — функции  $\delta_\rho(\xi, x)$  (цвет онлайн)

Fig. 7. Graphs: *a* is graphs of the exact function  $\tilde{\rho}_{ex}(\xi, x) = e^\xi + e^{-1.2x}$  (solid surface) and the restored function  $\tilde{\rho}_{rec}(\xi, x)$  (grid); *b* is graph of the function  $\delta_\rho(\xi, x)$  (color online)

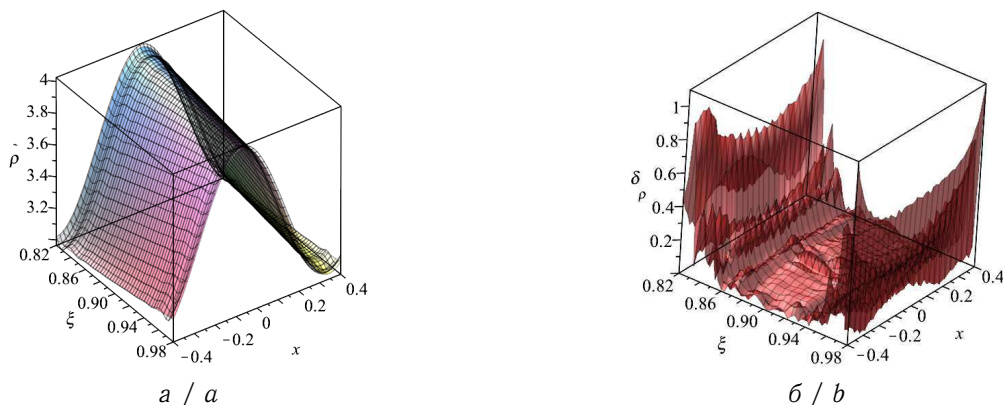


Рис. 8. *a* — графики точной функции  $\tilde{\rho}_{ex}(\xi, x) = 3.5 - 0.5 \cos(1.2\pi(\xi + 2x))$  (сплошная поверхность) и восстановленной функции  $\tilde{\rho}_{rec}(\xi, x)$  (сетка); *б* — график функции  $\delta_\rho(\xi, x)$  (цвет онлайн)

Fig. 8. Graphs: *a* is graphs of the exact function  $\tilde{\rho}_{ex}(\xi, x) = 3.5 - 0.5 \cos(1.2\pi(\xi + 2x))$  (solid surface) and the reconstructed function  $\tilde{\rho}_{rec}(\xi, x)$  (grid); *b* is graph of the function  $\delta_\rho(\xi, x)$  (color online)



Результаты вычислительных экспериментов показывают, что предлагаемый метод решения обратной задачи об определении двумерного закона изменения плотности по данным о значениях поля перемещений, измеренных в конечном наборе точек, может быть использован для идентификации функций различного типа с высокой степенью точности.

## Заключение

В рамках линейной теории упругости для неоднородного упругого цилиндра рассмотрена двумерная задача об установившихся колебаниях. Изменяющиеся по продольной и радиальной координате, свойства цилиндра моделировались переменными параметрами Ламе и плотностью. Решение прямой задачи построено с помощью МКЭ, который был ранее апробирован для решения задачи для неоднородного по радиальной координате цилиндра. Показано влияние переменных свойств на поле перемещений. Сформулирована обратная коэффициентная задача об определении двумерного закона изменения плотности по данным о смещениях, измеренных в конечном наборе точек при фиксированной частоте. Отмечены основные сложности реализации ее численного исследования. Для решения обратной задачи предложен алгоритм, на основе которого удалось существенно улучшить точность вычисления первых и вторых производных от функций, рассчитываемых численно с помощью МКЭ, необходимых для определения искомой двумерной функции плотности. Приведенные примеры показывают эффективность использования предложенного подхода для восстановления различных видов двумерных законов изменения плотности материала.

## Список литературы

1. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. Москва : Ленанд, 2014. 367 с.
2. Калинин В. В., Белянкова Т. И. Динамика поверхности неоднородных сред. Москва : Физматлит, 2009. 312 с.
3. Miyamoto Y., Kaysser W. A., Rabin B. H., Kawasaki A., Ford R. G. Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications. New York : Springer, 1999. 330 p. (Materials Technology Series, vol. 5). <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5301-4>
4. El-Galy I. M., Saleh B. I., Ahmed M. H. Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view // SN Applied Sciences. 2019. Vol. 1. Art. 1378. <https://doi.org/10.1007/s42452-019-1413-4>
5. Chandrasekaran S. Design of Marine Risers with Functionally Graded Materials. Cambridge : Woodhead Publ., 2021. 143 p. <https://doi.org/10.1016/C2020-0-00360-9>
6. Majid M., Masoud R., Majid G. Functionally graded materials (FGMs): A review of classifications, fabrication methods and their applications // Processing and Application of Ceramics. 2021. Vol. 15, iss. 4. P. 319–343. <https://doi.org/10.2298/PAC2104319M>
7. Das Sh., Das S., Nampi T., Roy K., Brabazon D. Functionally grade composite material production // Encyclopedia of Materials: Composites. Oxford : Elsevier, 2021. P. 798–803. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-803581-8.11880-6>
8. Dai H. L., Rao Y. N., Dai T. A review of recent researches on FGM cylindrical structures under coupled physical interactions, 2000–2015 // Composite Structures. 2016. Vol. 152. P. 199–225. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.05.042>
9. Handbook of Advanced Nondestructive Evaluation / ed. by N. Ida, N. Meyendorf. Cham : Springer, 2019. 1626 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-26553-7>
10. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. Москва : Физматлит, 2007. 224 с.
11. Ватульян А. О. Коэффициентные обратные задачи механики. Москва : Физматлит, 2019. 272 с.
12. Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Mnukhin R. M., Nedin R. D. Identification of the Lamé parameters of an inhomogeneous pipe based on the displacement field data // European Journal of Mechanics – A/ Solids. 2020. Vol. 81. Art. 103939. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103939>
13. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. Москва : Мир, 1984. 430 с.
14. Лурье А. И. Теория упругости. Москва : Наука, 1970. 939 с.
15. Dudarev V. V., Mnukhin R. M., Nedin R. D., Vatulyan A. O. Effect of material inhomogeneity on characteristics of a functionally graded hollow cylinder // Applied Mathematics and Computation. 2020. Vol. 382. Art. 125333. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125333>
16. Asgari M., Akhlaghi M. Natural frequency analysis of 2D-FGM thick hollow cylinder based on



- three-dimensional elasticity equation // *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2011. Vol. 30, iss. 2. P. 72–81. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2010.10.002>
17. Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Mnukhin R. M. Identification of characteristics of a functionally graded isotropic cylinder // *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. 2021. Vol. 17. P. 321–332. <https://doi.org/10.1007/s10999-020-09527-5>
  18. Koohbor B., Mallon S., Kidane A., Anand A., Parameswaran V. Through thickness elastic profile determination of functionally graded materials // *Experimental Mechanics*. 2015. Vol. 55, iss. 8. P. 1427–1440. <https://doi.org/10.1007/s11340-015-0043-z>
  19. Cleveland W. S. Robust locally weighted regression and smoothing Scatterplots // *Journal of the American Statistical Association*. 1979. Vol. 74, iss. 368. P. 829–836. <https://doi.org/10.1080/01621459.1979.10481038>
  20. Marzavan S., Nastasescu V. Displacement calculus of the functionally graded plates by finite element method // *Alexandria Engineering Journal*. 2022. Vol. 61, iss. 12. P. 12075–12090. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2022.06.004>

### References

1. Lomakin V. A. *Teoriya uprugosti neodnorodnykh tel* [Theory of Elasticity of Inhomogeneous Bodies]. Moscow, Lenand, 2014. 367 p. (in Russian).
2. Kalinchuk V. V., Belyankova T. I. *Dinamika poverkhnosti neodnorodnykh sred* [Surface Dynamics of Inhomogeneous Media]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 312 p. (in Russian).
3. Miyamoto Y., Kaysser W. A., Rabin B. H., Kawasaki A., Ford R. G. *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*. Materials Technology Series, vol. 5. New York, Springer, 1999. 330 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5301-4>
4. El-Galy I. M., Saleh B. I., Ahmed M. H. Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view. *SN Applied Sciences*, 2019, vol. 1, art. 1378. <https://doi.org/10.1007/s42452-019-1413-4>
5. Chandrasekaran S. *Design of Marine Risers with Functionally Graded Materials*. Cambridge, Woodhead Publ., 2021. 143 p. <https://doi.org/10.1016/C2020-0-00360-9>
6. Majid M., Masoud R., Majid G. Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view. *Processing and Application of Ceramics*, 2021, vol. 15, iss. 4, pp. 319–343. <https://doi.org/10.2298/PAC2104319M>
7. Das Sh., Das S., Nampi T., Roy K., Brabazon D. Functionally grade composite material production. In: *Encyclopedia of Materials: Composites*. Oxford, Elsevier, 2021, pp. 798–803. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-803581-8.11880-6>
8. Dai H. L., Rao Y. N., Dai T. A review of recent researches on FGM cylindrical structures under coupled physical interactions, 2000–2015. *Composite Structures*, 2016, vol. 152, pp. 199–225. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.05.042>
9. Ida N., Meyendorf N. (eds.) *Handbook of Advanced Nondestructive Evaluation*. Cham, Springer, 2019. 1626 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-26553-7>
10. Vatulyan A. O. *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela* [Inverse Problems in Solid Mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2007. 224 p. (in Russian).
11. Vatulyan A. O. *Koeffitsientnye obratnye zadachi mekhaniki* [Coefficient Inverse Problems of Mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2019. 272 p. (in Russian).
12. Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Mnukhin R. M., Nedin R. D. Identification of the Lamé parameters of an inhomogeneous pipe based on the displacement field data. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2020, vol. 81, art. 103939. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103939>
13. Gallagher R. *Metod konechnykh elementov. Osnovy* [Finite Element Method. Basics]. Moscow, Mir, 1984. 430 p. (in Russian).
14. Lur'e A. I. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka, 1970. 939 p. (in Russian).
15. Dudarev V. V., Mnukhin R. M., Nedin R. D., Vatulyan A. O. Effect of material inhomogeneity on characteristics of a functionally graded hollow cylinder. *Applied Mathematics and Computation*, 2020, vol. 382, art. 125333. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125333>
16. Asgari M., Akhlaghi M. Natural frequency analysis of 2D-FGM thick hollow cylinder based on three-dimensional elasticity equation. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2011, vol. 30, iss. 2, pp. 72–81. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2010.10.002>
17. Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Mnukhin R. M. Identification of characteristics of a functionally graded isotropic cylinder. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2021, vol. 17, pp. 321–332. <https://doi.org/10.1007/s10999-020-09527-5>



18. Koohbor B., Mallon S., Kidane A., Anand A., Parameswaran V. Through thickness elastic profile determination of functionally graded materials. *Experimental Mechanics*, 2015, vol. 55, iss. 8, pp. 1427–1440. <https://doi.org/10.1007/s11340-015-0043-z>
19. Cleveland W. S. Robust locally weighted regression and smoothing Scatterplots. *Journal of the American Statistical Association*, 1979, vol. 74, iss. 368, pp. 829–836. <https://doi.org/10.1080/01621459.1979.10481038>
20. Marzavan S., Nastasescu V. Displacement calculus of the functionally graded plates by finite element method. *Alexandria Engineering Journal*, 2022, vol. 61, iss. 12, pp. 12075–12090. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2022.06.004>

Поступила в редакцию / Received 16.12.2022

Принята к публикации / Accepted 27.01.2023

Опубликована / Published 30.08.2024





Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 394–401  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 394–401  
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-394-401>, EDN: JMEGQP

Научная статья  
УДК 539.3

## Гиперболический погрансло́й в окрестности фронта волны сдвига в оболочках вращения

И. В. Кириллова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

**Кириллова Ирина Васильевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, [iv@sgu.ru](mailto:iv@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0001-8053-3680>, AuthorID: 179980

**Аннотация.** В работе строятся асимптотическим методом уравнения гиперболического погранслоя в тонких оболочках вращения в малой окрестности фронта волны сдвига (с учетом его геометрии) при ударных торцевых воздействиях нормального типа. Используется специальная система координат, явно выделяющая узкую зону действия погранслоя. В этой системе координатные линии, определяемые нормальными к срединной поверхности, заменяются линиями, образующими поверхность переднего фронта волны сдвига. Асимптотическая модель геометрии переднего фронта волны предполагает, что эти образующие формируются повернутыми нормальными к срединной поверхности. Определены главные компоненты рассматриваемого типа напряженно-деформированного состояния: нормальное перемещение и касательное напряжение. Разрешающее уравнение рассматриваемого погранслоя является гиперболическим уравнением второго порядка с переменными коэффициентами относительно нормального перемещения.

**Ключевые слова:** асимптотическая теория, гиперболический погрансло́й, торцевые ударные воздействия нормального вида, волна сдвига, оболочка вращения, фронт волны

**Для цитирования:** Кириллова И. В. Гиперболический погрансло́й в окрестности фронта волны сдвига в оболочках вращения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 394–401. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-394-401>, EDN: JMEGQP

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Hyperbolic boundary layer in the vicinity of the shear wave front in shells of revolution

I. V. Kirillova

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

**Irina V. Kirillova**, [iv@sgu.ru](mailto:iv@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0001-8053-3680>, AuthorID: 179980

**Abstract.** Hyperbolic boundary layer equations in thin shells of revolution are constructed in small vicinities of the shear wave fronts (taking into account its geometry) at edge shock loading of the normal type. Special coordinate system is used for defining the small boundary layer region. In this system, the coordinate lines defined by the normal to the middle surface are replaced by lines forming the surface of the shear wave front. The asymptotic model of the geometry of such a wave front suggests that these



lines are formed by rotated normal to the middle surface. Asymptotically main components of considered stress strain state are defined: the normal displacement and the shear stress. The governing equation of this boundary layer is the hyperbolic equation of the second order with the variable coefficients for the normal displacement.

**Keywords:** asymptotical theory, hyperbolic boundary layer, edge shock loading of the normal type, shear wave, shell of revolution, wave front

**For citation:** Kirillova I. V. Hyperbolic boundary layer in the vicinity of the shear wave front in shells of revolution. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 394–401 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-394-401>, EDN: JMEGQP

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

В работе строится асимптотически оптимальная теория гиперболического погранслоя в тонких оболочках вращения при действии ударных торцевых воздействий нормального типа, характеризующихся на торце нулевыми значениями тангенциального усилия и изгибающего момента. Такие воздействия, названные по классификации У. К. Нигула [1] нормальными воздействиями вида NW, отличаются от продольных воздействий тангенциального типа LT и изгибающего вида LM [1] особенностями решений, в частности, в окрестности фронта волны сдвига: передний фронт именно этой волны, а не волны расширения, переносит характер ударного воздействия на торец.

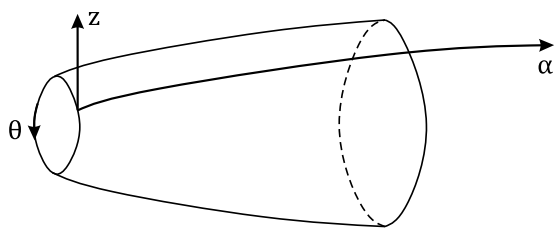
В предшествующей работе автора [2] отмечено, что для оболочек вращения произвольной формы, в отличие от оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны, передние фронты волн поворачиваются и искривляются по сравнению с нормальными в зависимости от кривизны срединной поверхности. Опыт введения специальной системы координат в [2], позволяющий привязаться к асимптотической модели волнового фронта и выделить тем самым явно узкую зону действия погранслоя, также используется в представленной статье. Асимптотическое представление волнового фронта здесь заключается в формировании его повернутыми нормальными к срединной поверхности.

Проведено асимптотическое интегрирование точных трехмерных уравнений теории упругости для оболочек вращения в новых специальных координатах. Оно выполнено при показателе изменчивости напряженно-деформированного состояния (НДС) по продольной координате, задающей отклонение от волнового фронта, равном в конечном итоге двум. Асимптотически оптимальные уравнения получены при этом для асимптотически главных компонент НДС — касательного напряжения и нормального перемещения. Отметим, что разрешающее уравнение для нормального перемещения является гиперболическим уравнением второго порядка, асимптотически главные составляющие которого при переходе к обычным координатам оболочек вращения определяют гиперболический погранслои для тонких пластин. В обычных координатах асимптотически оптимальные уравнения искомого погранслоя впервые были выведены в работах [3, 4].

Как и в случае гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения, в нашем случае при переходе в разрешающем уравнении к обычным криволинейным координатам получается упрощенная система уравнений, непосредственно выводимая методом асимптотического интегрирования из исходной трехмерной системы. Но такая упрощенная система не позволяет в явном виде построить простые решения для узкой прифронтной области.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим нестационарные осесимметричные волны в полубесконечной оболочке вращения, возбуждаемые в начальный момент времени торцевой ударной нагрузкой вида NW [1]. Общая схема расчленения нестационарного НДС при этом виде нагрузки на составляющие с различными показателями изменчивости описана в работе [5].



Криволинейные координаты оболочки вращения  
Figure. Curvilinear coordinates of the shell of revolution

Целью настоящей работы является построение асимптотически оптимальных уравнений искомого гиперболического погранслоя в координатах, связанных непосредственно с поверхностью переднего фронта волны сдвига.

Рассмотрим оболочку вращения, изображенную на рисунке, отнесенную к криволинейным координатам:  $\alpha$  — длина дуги вдоль образующей;  $\theta$  — угол в окружном направлении;  $z$  — координата внешней нормали к срединной поверхности.

Выпишем, как и в [2], трехмерные уравнения для осесимметричного НДС. Разрешающие уравнения движения в перемещениях имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z} + \frac{z}{R_1} \left( -\varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \right) + \\ & + \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial v_1}{\partial z} + \left( \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} = 0, \\ & \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \frac{z}{R_1} \left( -\frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \right) - \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{1}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} + \varkappa^{-2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

а уравнения закона Гука записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ k_2 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \frac{\partial v_3}{\partial z} - k_2 \frac{z}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \frac{B'}{B} v_1 + \left( \frac{k_2}{R_1} + \frac{k_1}{R_2} \right) v_3 \right], \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \frac{\partial v_3}{\partial z} - k_1 \frac{z}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_2 \frac{B'}{B} v_1 + \left( \frac{k_1}{R_1} + \frac{k_2}{R_2} \right) v_3 \right], \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_2 \frac{\partial v_3}{\partial z} - k_1 \frac{z}{R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \frac{B'}{B} v_1 + k_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_3 \right], \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} - \frac{z}{R_1} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} + \frac{1}{R_1} v_3 \right). \end{aligned} \tag{2}$$

Уравнения систем (1) и (2) выписаны с асимптотической погрешностью  $O(\varepsilon^2)$ , где  $\varepsilon$  — относительная тонкостенность:  $\varepsilon = h/R$ ,  $h$  — полутолщина,  $R$  — характерное значение радиусов кривизны,  $\sigma_{ij}$  — напряжения,  $v_i$  — перемещения,  $t$  — время,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\rho$  — плотность материала оболочки,  $R_i$  — радиусы кривизны срединной поверхности,  $k_1 = \nu/(1-2\nu)$ ,  $k_2 = (1-\nu)/(1-2\nu)$ ,  $\varkappa^2 = (1-2\nu)/(2-2\nu)$ ,  $B$  — расстояние от срединной поверхности до оси вращения,  $c_1$  и  $c_2$  — скорости распространения волн расширения и сдвига.

В соответствии с классификацией У. К. Нигула [1] имеем на торце ненулевое значение перерезывающей силы. В качестве примера рассмотрим следующий вид граничного условия:

$$\sigma_{13} = IH(t), \quad v_1 = 0, \quad \alpha = 0, \tag{3}$$

где  $I$  — амплитуда нагрузки,  $H(t)$  — функция Хевисайда. Рассматриваем случай свободных от напряжений лицевых поверхностей оболочки

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0, \quad z = \pm h, \tag{4}$$

и однородных начальных условий

$$v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \quad t = 0. \tag{5}$$



## 2. Уравнения гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны сдвига

Перейдем от исходной системы координат  $(\alpha, \theta, z)$  к специальной системе координат  $(\alpha, \theta, z_F)$ , где

$$z_F = z\sqrt{1 + F^2(\alpha)}, \quad F(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{R_1}. \quad (6)$$

Эта система координат была введена в [2] для построения асимптотически оптимальных уравнений гиперболического погранслоя в малой окрестности фронта волны расширения. Здесь координатные линии  $z_F$  определяются нормальными  $z$ , повернутыми согласно формуле (6), а при  $\alpha = \alpha_0 = c_2 t$  такая координатная линия совпадает с асимптотическим представлением переднего фронта волны.

Введенная специальная система координат определяет новую форму разрешающих уравнений (1):

$$\begin{aligned} & \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z_F} + \\ & + \frac{z_F}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \left[ \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \right] + \\ & + \frac{z_F F}{R_1} \left[ 2\varkappa^{-2} \frac{1}{\sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} \right] + \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \\ & + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_1}{\partial z_F} + \left[ \frac{3 - 4\nu}{(1 - 2\nu)R_1} + \frac{1}{(1 - 2\nu)R_2} \right] \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha} = 0, \\ & \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \\ & + \frac{z_F}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \left[ -\frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \right] + \\ & + \frac{z_F F}{R_1} \left[ \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} + \frac{2}{\sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z_F} \right] - \frac{3 - 4\nu}{(1 - 2\nu)R_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \\ & + \frac{B' \sqrt{1 + F^2}}{(1 - 2\nu)B} \frac{\partial v_1}{\partial z_F} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} + \varkappa^{-2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_3}{\partial z_F} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В разрешающей системе уравнений (7) аналогично случаю системы (1) можно выделить, следуя [2], свойства четности и нечетности напряжений и перемещений по введенной координате  $z_F$  с асимптотической погрешностью  $O(\varepsilon)$ . В результате получаем упрощенную систему вида

$$\begin{aligned} & \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z_F} + \\ & + \frac{z_F F}{R_1} \left[ \frac{2\varkappa^{-2}}{\sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} \right] + \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} = 0, \\ & \frac{\sqrt{1 + F^2}}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \\ & + \frac{z_F}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \left[ \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} + \frac{2}{\sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z_F} \right] + \frac{B' \sqrt{1 + F^2}}{(1 - 2\nu)B} \frac{\partial v_1}{\partial z_F} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu} \left( k_2 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \sqrt{1+F^2} \frac{\partial v_3}{\partial z_F} \right), \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1+\nu} \left( k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \sqrt{1+F^2} \frac{\partial v_3}{\partial z_F} \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1+\nu} \left( k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_2 \sqrt{1+F^2} \frac{\partial v_3}{\partial z_F} \right), \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \sqrt{1+F^2} \frac{\partial v_1}{\partial z_F} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \tag{9}$$

Перейдем в разрешающих уравнениях (8), (9) к безразмерным прифронтным координатам, характеризующим НДС гиперболического погранслоя в малой, порядка  $O(\varepsilon^2)$ , окрестности фронта волны сдвига:

$$x = \frac{1}{\varepsilon^2}(\tau_0 - \xi_0), \quad \tau_0 = \frac{c_2}{R}t, \quad \zeta_F = \frac{1}{R}z_F, \quad \xi_0 = \frac{1}{R}\alpha. \tag{10}$$

Примем, что дифференцирование по введенным координатам не изменяет порядок искомым неизвестных функций.

Предположим, что асимптотику компонент НДС рассматриваемого гиперболического погранслоя можно задать следующим образом:

$$v_1 = R\varepsilon^2 v_1^*, \quad v_3 = R\varepsilon v_3^*, \quad \sigma_{11} = E\sigma_{11}^*, \quad \sigma_{33} = E\sigma_{33}^*, \quad \sigma_{13} = E\varepsilon^{-1}\sigma_{13}^*, \tag{11}$$

где величины со звездочками обладают одинаковым асимптотическим порядком (звездочки в дальнейшем будем опускать). Тогда разрешающая система уравнений в новых переменных (10) с учетом асимптотики компонент (11) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \sqrt{1+F^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial \zeta_F} &= 0, \\ -\frac{\sqrt{1+F^2}}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \zeta_F} + \varepsilon^{-2}(1+F^2) \frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta_F^2} + 2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial \xi_0} - \frac{2}{\sqrt{1+F^2}R_1} \zeta_F \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial \zeta_F} - \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\sigma_{13} = \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial v_3}{\partial x}. \tag{13}$$

Разрешающие уравнения (12), (13) являются уравнениями с медленно изменяющимися коэффициентами, определяемыми медленно изменяющимися функциями  $B$  и  $F$ .

В рассматриваемом случае гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны сдвига асимптотически главной компонентой вектора перемещений является нормальное перемещение  $v_3$ . В системе разрешающих уравнений (12) главным уравнением, определяющим гиперболический погранслой, является второе уравнение, а первое уравнение, вследствие малой изменчивости коэффициента, позволяет выразить перемещение  $v_1$  через  $v_3$  с асимптотической погрешностью  $O(\varepsilon)$ :

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \sqrt{1+F^2} \frac{\partial v_3}{\partial \zeta}, \tag{14}$$

и получить одно разрешающее уравнение относительно асимптотически главной составляющей:

$$\begin{aligned} (1+F^2) \frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta_F^2} + 2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial \xi_0} - \frac{2\zeta_F}{R_1 \sqrt{1+F^2}} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial \zeta_F} - \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial x} &= 0, \\ \sigma_{13} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial v_3}{\partial x}. \end{aligned} \tag{15}$$





Выпишем полученную систему (15) в исходных безразмерных координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta_F^2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{2\zeta_F}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi \partial \zeta_F} + \varepsilon \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \xi} = 0, \\ \sigma_{13} = \frac{1}{2(1 + \nu)} \frac{\partial v_3}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (16)$$

В исходной размерной форме разрешающие уравнения искомого погранслоя примут следующий окончательный вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \frac{2z_F}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} = 0, \\ \sigma_{13} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \frac{\partial v_3}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, разрешающие уравнения движения свелись к одному гиперболическому дифференциальному уравнению второго порядка. Следовательно, требуется удовлетворить только по одному граничному условию на лицевых поверхностях и на торце:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = 0, \quad z_F = \pm h \sqrt{1 + F^2(\alpha)}; \\ \sigma_{13} = IH(t), \quad \alpha = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

### 3. Уравнения гиперболического погранслоя в исходной криволинейной системе координат

Устремим главный радиус кривизны  $R_1$  к бесконечности. Тогда передний фронт волны переходит в положение нормали к срединной поверхности и искомые уравнения полностью совпадают с соответствующими уравнениями, подробно изученными в [3, 4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} = 0, \\ \sigma_{13} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \frac{\partial v_3}{\partial z}. \end{aligned} \quad (19)$$

При этом граничные условия на лицевых поверхностях и на торце записываются аналогично (18):

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = 0, \quad z = \pm h, \\ \sigma_{13} = IH(t), \quad \alpha = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Приведенные рассуждения имели место для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны. Однако при переходе в уравнениях (17) к исходным координатам  $(\alpha, z)$  эти уравнения также точно совпадают с уравнениями (19). Таким образом, прифронтальная зона размером порядка  $O(\varepsilon)$  в окрестности нормали к оболочке  $\alpha = c_2 t$  содержит узкую прифронтальную зону размером порядка  $O(\varepsilon^2)$  в окрестности повернутой нормали  $z_F = c_2 t$ , в которой и работают асимптотически оптимальные уравнения гиперболического погранслоя (17). В этом смысле и можно рассматривать в исходных координатах  $(\alpha, z)$  окрестность нормали  $\alpha = c_2 t$  размером порядка  $O(\varepsilon)$  как область действия искомого погранслоя.

### Выводы

Аналогично случаю гиперболического погранслоя в окрестности фронта волны расширения, исследованному в предшествующей работе автора [2], построена в специальных координатах асимптотическая модель нестационарного НДС оболочек вращения произвольной формы в окрестности фронта волны сдвига. Эта модель включает асимптотику геометрии искомого



фронта волны, разрешающее уравнение второго порядка относительно нормального перемещения и по одному граничному условию на лицевых поверхностях и торце. Установлена связь между полученной асимптотической моделью и моделью искомого погранслоя в стандартной криволинейной системе координат.

Данная работа является завершающей в цикле работ по построению асимптотической теории гиперболического погранслоя. Ссылки на ряд работ этого цикла приведены в статье ранее. У этого цикла есть физические и математические основы.

Механический смысл гиперболических погранслоев полностью соответствует выводам работ [6, 7] о действии принципа Сен-Венана в динамике стержней, пластин и оболочек: способ приложения нагрузки на торец не только влияет на НДС в его малой окрестности (как в статике), но и переносится фронтами волн расширения и сдвига в их малых окрестностях. Общие же свойства нестационарных волн в тонких телах впервые системно описаны в работе [1] на основании классификации ударных торцевых воздействий.

Математически построение рассматриваемой теории основывается на использовании принципа масштабирования переменных [8] и концепции показателей изменчивости НДС по переменным, введенной в [9], что позволило разработать асимптотически оптимальные уравнения составляющих НДС в различных областях фазовой плоскости. Построенная теория гиперболического погранслоя является составной частью общей схемы расчленения нестационарного НДС тонких оболочек на составляющие с различными значениями показателей изменчивости НДС по пространственным координатам и показателя динамичности по времени.

### Список литературы

1. Nigul U. K. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // *International Journal of Solids and Structures*. 1969. Vol. 5, iss. 6. P. 607–627. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90031-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90031-6)
2. Кириллова И. В. Асимптотическая теория гиперболического погранслоя в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях тангенциального типа // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 222–230. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-222-230>, EDN: SFYW BV
3. Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Dynamic boundary layer at nonstationary elastic wave propagation in thin shells of revolution // *AiM'96: Proceedings of the Second International conference «Asymptotics in mechanics»*. Saint Petersburg State Marine Technical University, Saint Petersburg, Russia, October 13–16, 1996. St. Petersburg, 1997. P. 121–128.
4. Кириллова И. В. Асимптотический вывод двух типов приближения динамических уравнений теории упругости для тонких оболочек : дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1998. 122 с.
5. Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Асимптотическая теория волновых процессов в оболочках вращения при ударных поверхностных и торцевых нормальных воздействиях // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2022. № 2. С. 35–49. <https://doi.org/10.31857/S057232992202012X>, EDN: HHWAXC
6. Новожилов В. В., Слепян Л. И. О принципе Сен-Венана в динамике стержней // *Прикладная математика и механика*. 1965. Т. 29, № 2. С. 261–281.
7. Слепян Л. И. *Нестационарные упругие волны*. Ленинград : Судостроение, 1972. 374 с.
8. Коул Дж. *Методы возмущений в прикладной математике* / пер. с англ. А. И. Державиной, В. Н. Диесперова ; под ред. О. С. Рыжова. Москва : Мир, 1972. 274 с.
9. Гольденвейзер А. Л. *Теория упругих тонких оболочек*. Москва : Наука, 1976. 512 с.

### References

1. Nigul U. K. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates. *International Journal of Solids and Structures*, 1969, vol. 5, iss. 6, pp. 607–627. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90031-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90031-6)
2. Kirillova I. V. Asymptotic theory of the hyperbolic boundary layer in shells of revolution at shock edge loading of the tangential type. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 222–230 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-222-230>, EDN: SFYW BV
3. Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Dynamic boundary layer at nonstationary elastic wave propagation in



- thin shells of revolution. *AiM'96: Proceedings of the Second International Conference "Asymptotics in mechanics". Saint Petersburg State Marine Technical University, Saint Petersburg, Russia, October 13–16, 1996.* St. Petersburg, 1997, pp. 121–128.
4. Kirillova I. V. *Asymptotic derivation of two types of approximation of dynamic equations of the theory of elasticity for thin shells.* Diss. Cand. Sci. (Phys.-Math.). Saratov, 1998. 122 p. (in Russian).
  5. Kirillova I. V., Kossovich L. Y. Asymptotic theory of wave processes in shells of revolution under surface impact and normal end actions. *Mechanics of Solids*, 2022, vol. 57, iss. 2, pp. 232–243. <https://doi.org/10.3103/S0025654422020078>, EDN: WCTBUQ
  6. Novozhilov V. V., Slepian L. I. On Saint-Venant's principle in the dynamics of beams. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1965, vol. 29, iss. 2, pp. 293–315. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(65\)90032-8](https://doi.org/10.1016/0021-8928(65)90032-8)
  7. Slepian L. I. *Nestatsionarnye uprugie volny* [Unsteady Elastic Waves]. Leningrad, Sudostroenie, 1972. 374 p. (in Russian).
  8. Cole J. D. *Perturbation Methods in Applied Mathematics.* Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, 1968. 260 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1972. 274 p.).
  9. Goldenveizer A. L. *Theory of Elastic Thin Shells.* Oxford, Pergamon Press, 1961. 658 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1976. 512 p.).

Поступила в редакцию / Received 23.03.2024

Принята к публикации / Accepted 17.05.2024

Опубликована / Published 30.08.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 402–414  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 402–414  
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-402-414>, EDN: HAUNCU

Научная статья

УДК 531.38

## Управление качением динамически симметричного шара по наклонной вращающейся плоскости

Е. А. Микишанина

<sup>1</sup>Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук, Россия, 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

<sup>2</sup>Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, Россия, 428015, г. Чебоксары, Московский пр-т, д. 15

**Микишанина Евгения Арифжановна**, кандидат физико-математических наук, <sup>1</sup>научный сотрудник отдела механики, <sup>2</sup>доцент кафедры актуарной и финансовой математики, [evaeva\\_84@mail.ru](mailto:evaeva_84@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-4408-1888>, AuthorID: 733691

**Аннотация.** В работе исследуется динамика качения динамически симметричного тяжелого шара (или тяжелой сферической оболочки) по наклонной шероховатой плоскости (платформе), вращающейся с постоянной или периодической скоростью вокруг перпендикулярной к плоскости оси, проходящей через некоторую фиксированную точку этой плоскости. В точке контакта шара с опорной плоскостью наложены кинематические (неголономные и голономные) ограничения. Построены уравнения движения шара и доказана ограниченность квадрата вектора скорости геометрического центра шара в случае постоянной скорости вращения плоскости при любом угле наклона и в случае периодической скорости вращения плоскости, расположенной горизонтально. Причем в случае постоянной скорости вращения плоскости решения найдены аналитически. На основе численного интегрирования показано, что для периодической скорости вращения плоскости и угле наклона, отличном от нуля, квадрат вектора скорости геометрического центра шара неограниченно возрастает. Предложены два управления углом наклона вращающейся плоскости пропорционально проекциям вектора скорости геометрического центра шара на координатные оси, лежащие в опорной плоскости. Для случая постоянной скорости вращения плоскости проведено качественное исследование уравнений движения, аналитически найдены параметры управления, при которых квадрат скорости геометрического центра шара будет ограничен и при которых будет неограниченно возрастать. Приведены результаты численного интегрирования для случая периодической скорости вращения плоскости и показана эффективность этого управления в контексте достижения ограниченности квадрата скорости геометрического центра шара. Полученные результаты проиллюстрированы, построены траектории точки контакта и графики искомых механических параметров.

**Ключевые слова:** динамика, управление, шар, вращающаяся плоскость, наклон, неголономная система

**Благодарности:** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-30012).

**Для цитирования:** Микишанина Е. А. Управление качением динамически симметричного шара по наклонной вращающейся плоскости // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 402–414. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-402-414>, EDN: HAUNCU

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

## Control of the rolling of a dynamically symmetrical sphere on an inclined rotating plane

E. A. Mikishanina

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, 8 Gubkina St., Moscow 119991, Russia

I. N. Ulianov Chuvash State University, 15 Moskovskiy Ave., Cheboksary 428015, Russia

**Evgeniya A. Mikishanina**, [evaeva\\_84@mail.ru](mailto:evaeva_84@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-4408-1888>, AuthorID: 733691

**Abstract.** The work investigates the rolling dynamics of a dynamically symmetrical heavy sphere (or a heavy spherical shell) along an inclined rough plane (platform) rotating with constant or periodic angular velocity around an axis, which is perpendicular to the plane and passing through some fixed point of this plane. Nonholonomic and holonomic constraints are imposed at the point of contact of the sphere with the reference plane. The equations of motion of the sphere are constructed. In the case of the constant angular velocity of the plane at any slope and in the case of the periodic angular velocity of the plane located horizontally the boundedness of the velocities of the geometric center of the sphere is proved. Moreover, in the case of the constant angular velocity of the plane, solutions are found analytically. Based on numerical integration, it is shown that for the periodic angular velocity of the plane and for the nonzero slope the square of the velocity vector of the geometric center of the sphere increases indefinitely. Two controls for the slope of the plane proportional to the projections of the velocity vector of the sphere on the coordinate axes lying in the reference plane are introduced. In the case of the constant angular velocity of the plane, a qualitative analysis of the equations of motion has been carried out, the control parameters at which the square of the velocity vector of the geometric center of the sphere will be bounded and at which it will be unbounded have been analytically found. The results of this control are presented for the case of periodic angular velocity of the plane. It is shown that by controlling the slope of the plane, it is possible to achieve the boundedness of the square of the velocity vector of the geometric center of the sphere. The obtained results are illustrated, the trajectories of the contact point and graphs of the desired mechanical parameters are constructed.

**Keywords:** dynamics, control, sphere, rotating plane, slope, nonholonomic system

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-71-30012).

**For citation:** Mikishanina E. A. Control of the rolling of a dynamically symmetrical sphere on an inclined rotating plane. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 402–414 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-402-414>, EDN: HAUNCU This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

### Введение

Модель качения шара Чаплыгина по горизонтальной плоскости — одна из наиболее изученных неголономных моделей [1–4]. У истоков стоит исследование С. А. Чаплыгина [1]. В современном исследовании [3] автором проведено наиболее полное изучение динамики качения динамически несимметричного шара. Также в современной научной литературе можно встретить различные вариации классической модели шара Чаплыгина, например [5–7]. В [1] Чаплыгиным было показано, что большинство траекторий точки контакта динамически несимметричного шара на горизонтальной плоскости являются неограниченными, а в случае дополнительного неголономного ограничения, наложенного на качение шара в [5], делающим невозможным вращение шара в некотором направлении, большинство траекторий являются ограниченными, т. е. расположены на участке опорной плоскости конечной площади. В [7] исследуется так называемая модель «резинового качения», т. е. модель качения без



проскальзывания и верчения. В работах [8, 9] изучалась динамика динамически несимметричного уравновешенного шара на наклонной плоскости в поле силы тяжести. А в работе [10] исследуется качение шара на вращающейся плоскости.

Укажем ряд работ, посвященных вопросу управления шаром на горизонтальной плоскости. В работе [11] исследуется управление при помощи трех гиристов движением динамически несимметричного уравновешенного шара на плоскости, в [12] — также оптимальное управление шаром при помощи трех гиристов, только уравнения оптимальных траекторий сводятся к принципам вакономной механики [13].

Настоящая работа посвящена управлению качением уравновешенного динамически симметричного шара по наклонной вращающейся с постоянной или периодической угловой скоростью плоскости (платформе) посредством регулирования ее угла наклона. Достаточно вспомнить детскую игру, когда ребенок пытается управлять качением шарика от пинг-понга на какой-нибудь дощечке или ракетке, изменяя ее угол наклона. Рассматриваются два вида управления наклоном плоскости (платформы) пропорционально проекциям вектора скорости центра шара на координатные оси. Считаем, что угол наклона плоскости достаточно мал (этого можно добиться за счет выбора числового параметра в управлении), и качение шара происходит без отрыва от нее. В случае постоянной скорости вращения платформы на основе качественного анализа дифференциальных уравнений движения находятся параметры управления, при которых скорость геометрического центра шара ограничена и при которых неограничена. В случае неограниченного возрастания квадрата вектора скорости геометрического центра шара будем считать, что в системе присутствует ускорение. Показана эффективность данного управления для стабилизации движения в случае периодической угловой скорости.

### 1. Математическая модель

Рассмотрим неподвижную плоскость  $\Pi$ , находящуюся под некоторым заданным углом  $\delta$  к горизонту,  $\delta \in [0, \pi/2)$ . Введем неподвижную систему координат на этой плоскости с центром в некоторой фиксированной точке  $O$ . Ось  $Oz$  с координатным вектором  $\gamma = (0, 0, 1)^T$  направим перпендикулярно плоскости, ось  $Ox$  — вдоль наибольшего наклона плоскости, ось  $Oy$  — параллельно линии горизонта. Тяжелый динамически симметричный шар (или тяжелая сферическая оболочка) массой  $m$  и радиусом  $R$  катится по шероховатой платформе, которая

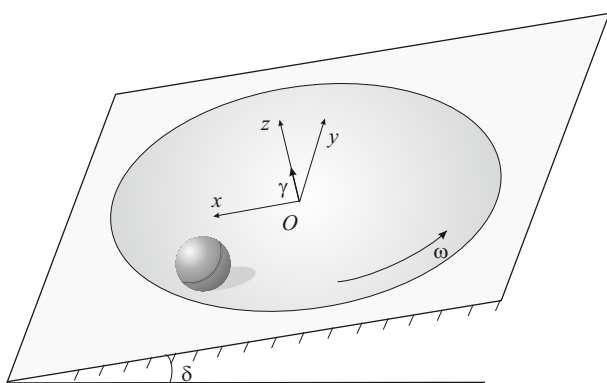


Рис. 1. Механическая конструкция  
Fig. 1. Mechanical design

лежит в плоскости  $Oxy$  и вращается вокруг оси  $Oz$  с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 1). Угловая скорость в общем случае является заданной функцией времени  $\omega = \omega(t)$ .

Введем обозначения и будем работать в неподвижной системе координат  $Oxyz$ :

- $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$  — радиус-вектор геометрического центра шара;
- $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}} = (V_x, V_y, V_z)^T$  — вектор скорости геометрического центра шара;
- $\mathbf{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T$  — вектор угловой скорости шара;
- $\mathbf{I} = I\mathbf{E}$  — центральный тензор инерции шара,  $\mathbf{E}$  — единичная матрица третьего порядка.

Кинематические условия качения без проскальзывания шара принимают вид

$$\mathbf{V} = R\mathbf{\Omega} \times \gamma - \omega \mathbf{r} \times \gamma. \tag{1}$$

Эти уравнения являются комбинацией голономных и неголономных ограничений.



Для шара с кинетической энергией  $T = \frac{1}{2}m\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}I\boldsymbol{\Omega}^2$  уравнения движения в общем виде с неопределенными множителями принимают вид [14]

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{V}} &= \lambda + m\mathbf{g}, \\ I\dot{\boldsymbol{\Omega}} &= R\lambda \times \boldsymbol{\gamma}, \end{aligned}$$

где  $\lambda$  — вектор реакций связей (1),  $\mathbf{g} = (g \sin \delta, 0, -g \cos \delta)$ ,  $g$  — ускорение свободного падения. Исключая вектор реакций связей, получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{V}, \\ \dot{\mathbf{V}} &= -\frac{I}{J}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}) \times \boldsymbol{\gamma} + \frac{mR^2}{J}\boldsymbol{\gamma} \times (\mathbf{g} \times \boldsymbol{\gamma}), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $J = I + mR^2$ . Система (2) автономна при  $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$ , неавтономна при  $\boldsymbol{\omega} \neq \text{const}$  и обладает четырьмя первыми интегралами:

$$\begin{aligned} V_z &= 0, \quad z = R, \\ V_x + \frac{I}{J}\omega y - t\frac{mR^2}{J}g \sin \delta &= H_1, \quad V_y - \frac{I}{J}\omega x = H_2, \end{aligned}$$

где  $H_1 = V_{x,0} + \frac{I}{J}\omega_0 y_0$ ,  $H_2 = V_{y,0} - \frac{I}{J}\omega_0 x_0$ .

**Замечание.** Здесь и далее индексом 0 будем обозначать начальное значение функции или вектора, например,  $f(0) = f_0$ .

Таким образом, на фиксированных уровнях указанных интегралов решение сводится к интегрированию двух уравнений:

$$\dot{x} = -\frac{I}{J}\omega y + t\frac{mR^2}{J}g \sin \delta + H_1, \quad \dot{y} = \frac{I}{J}\omega x + H_2. \quad (3)$$

## 2. Динамика системы

*Постоянная скорость вращения платформы.* Пусть  $\boldsymbol{\omega} = \text{const} \neq 0$ . Траектория точки контакта шара на плоскости  $Oxy$  находится аналитически:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(g \sin \delta mR^2 - I\omega V_{y,0})J}{(I\omega)^2} \left(1 - \cos \frac{I\omega t}{J}\right) + \frac{JV_{x,0}}{I\omega} \sin \frac{I\omega t}{J} + x_0, \\ y(t) &= -\frac{(g \sin \delta mR^2 - I\omega V_{y,0})J}{(I\omega)^2} \sin \frac{I\omega t}{J} + \frac{JV_{x,0}}{I\omega} \left(1 - \cos \frac{I\omega t}{J}\right) + \frac{g \sin \delta mR^2}{I\omega} t + y_0. \end{aligned}$$

На горизонтальной плоскости  $\Pi$  ( $\delta = 0$ ) при нулевой начальной скорости геометрического центра шара  $\mathbf{V}_0^2 = 0$  траекторией точки контакта на неподвижной плоскости  $Oxy$  будет точка, иначе при  $\mathbf{V}_0^2 \neq 0$  качение шара в неподвижной системе координат  $Oxyz$  будет происходить равномерно по окружности с центром в точке  $\left(-\frac{JV_{y,0}}{I\omega} + x_0, \frac{JV_{x,0}}{I\omega} + y_0\right)$ .

На наклонной плоскости  $\Pi$  ( $\delta \neq 0$ ) траектория точки контакта представляет собой трохоиду, описываемую при качении окружности параллельно оси  $Oy$ . Компоненты вектора скорости в случае  $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$  являются периодическими функциями времени и ограничены.

*Периодическая скорость вращения платформы.* Иной раз обеспечить постоянную скорость вращения платформы представляется сложным. Поэтому исследуем динамику системы, когда скорость вращения платформы является переменной.

Пусть платформа вращается вокруг оси  $Oz$  с периодической угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega} = \sin^2 t$ .

Тогда в случае  $\delta = 0$  на нулевом уровне интегралов  $H_1 = H_2 = 0$  (движение из состояния покоя  $\mathbf{V}_0^2 = 0$ ) движение будет происходить неравномерно по окружности с центром в точке  $(0, 0)$ , так как  $(x^2 + y^2)' = 0$ , причем сама точка  $(0, 0)$  является неподвижной точкой типа центр системы (3).

На рис. 2 представлены траектория точки контакта на плоскости  $Oxy$  и проекция типовой фазовой кривой системы (2) на плоскость  $(V_x, V_y)$  для случая  $H_1^2 + H_2^2 \neq 0$ , что эквивалентно  $\mathbf{V}_0^2 \neq 0$ .

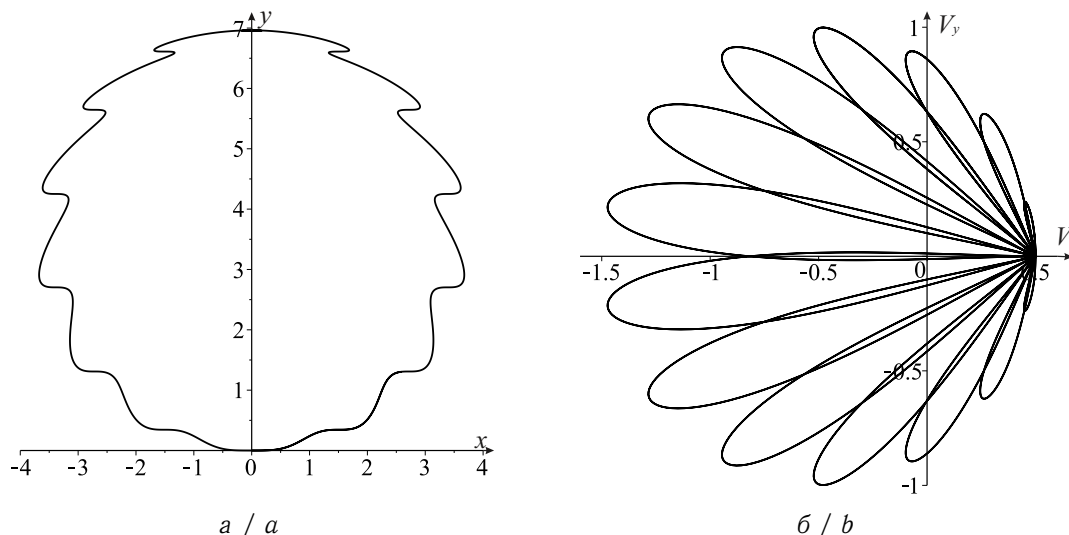


Рис. 2. Типовая траектория точки контакта (а) и проекция фазовой кривой на плоскость  $(V_x, V_y)$  (б) при начальных условиях  $V_{x,0} = 0.5$  м/с,  $V_{y,0} = 0$  м/с,  $x_0 = 0$  м,  $y_0 = 0$  м

Fig. 2. The typical trajectory of the contact point (a) and the projection of the phase curve on the plane  $(V_x, V_y)$  (b) at the initial conditions  $V_{x,0} = 0.5$  m/s,  $V_{y,0} = 0$  m/s,  $x_0 = 0$  m,  $y_0 = 0$  m

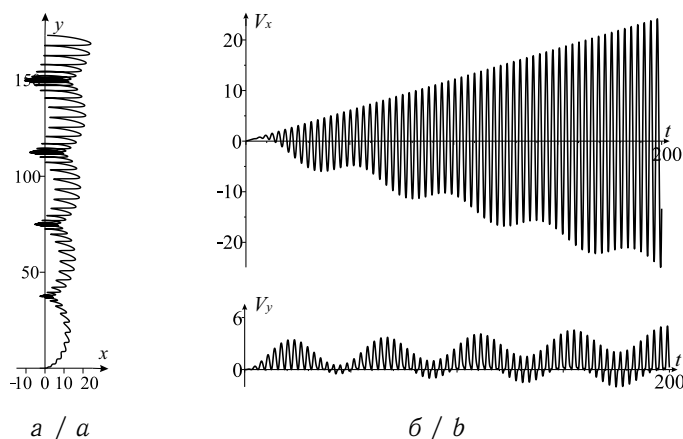


Рис. 3. Типовая траектория точки контакта (а) и графики скоростей  $V_x, V_y$  (б) при начальных условиях  $V_{x,0} = 0$  м/с,  $V_{y,0} = 0$  м/с,  $x_0 = 0$  м,  $y_0 = 0$  м и наклоне плоскости  $\delta = \pi/180$

Fig. 3. The typical trajectory of the contact point (a) and graphs of  $V_x, V_y$  (b) at the initial conditions  $V_{x,0} = 0$  m/s,  $V_{y,0} = 0$  m/s,  $x_0 = 0$  m,  $y_0 = 0$  m and the slope of the plane  $\delta = \pi/180$

**Замечание.** Здесь и далее в численных экспериментах считаем, что для полнотелого шара  $I/J = 2/7$ ,  $mR^2/J = 5/7$ .

Компоненты вектора скорости являются периодическими функциями времени, следовательно, ограничены.

В случае  $\delta \neq 0$  на рис. 3 построены типовая траектория точки контакта на плоскости  $Oxy$  и графики скоростей  $V_x, V_y$ .

Квадрат вектора скорости геометрического центра шара неограниченно возрастает, т. е. имеет место ускорение, а также можно наблюдать вековой уход траектории точки контакта.

Рассмотрим возможность управления углом наклона опорной плоскости с целью стабилизации движения шара или, наоборот, с целью разгона.



### 3. Управление наклоном вращающейся с постоянной угловой скоростью платформы

Пусть теперь плоскость  $\Pi$  зафиксирована вдоль оси  $Oy$  цилиндрическим шарниром на вертикальной опоре. И пусть некоторое устройство автоматически регулирует угол наклона  $\delta$  плоскости  $\Pi$ , причем  $\delta \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Ось  $Oz$  направлена перпендикулярно плоскости  $\Pi$ , ось  $Ox$  проведена в плоскости  $\Pi$  перпендикулярно оси  $Oy$ . Для удобства будем считать, что угловая скорость платформы, вращающейся в плоскости  $Oxy$ , постоянна и  $0 < \omega < g$ . Для  $-g < \omega < 0$  рассуждения аналогичны.

Работаем по-прежнему в системе координат  $Oxyz$ . Рассмотрим два способа управления углом наклона платформы:

- пропорционально проекции вектора скорости на ось  $Ox$ :

$$\sin \delta = \frac{aV_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + 1}}, \quad a = \text{const} \in [-1, 1], \quad (4)$$

причем при  $a > 0$  проекция вектора скорости на ось  $Ox$  всегда направлена по ходу спуска, при  $a < 0$  – в направлении подъема, при  $a = 0$  плоскость всегда горизонтальна (этот случай уже был рассмотрен выше);

- пропорционально проекции вектора скорости на ось  $Oy$ :

$$\sin \delta = \frac{aV_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + 1}}, \quad a = \text{const} \in [-1, 1]. \quad (5)$$

**Замечание.** Слагаемое «1» в знаменателях выражений (4) и (5) добавлено исключительно для того, чтобы не допустить обращения знаменателя в нуль, например, при движении системы из состояния покоя.

Таким образом, управление шаром на наклонной вращающейся плоскости происходит за счет меняющейся вследствие изменения наклона плоскости силы тяжести, действующей на шар.

#### 3.1. Управление углом наклона платформы пропорционально проекции вектора скорости на ось $Ox$

Система уравнений движения (2) в случае переменного угла наклона платформы, для которого имеет место (4), преобразуется к виду [14]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V_x, \quad \dot{y} = V_y, \\ \dot{V}_x &= -\frac{I}{J}\omega V_y + \frac{mR^2g}{J} \frac{aV_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + 1}}, \\ \dot{V}_y &= \frac{I}{J}\omega V_x \end{aligned} \quad (6)$$

и обладает первым интегралом

$$V_y = \frac{I}{J}\omega x + H.$$

Два последних уравнения системы (6) представляют замкнутую нелинейную автономную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= -\frac{I}{J}\omega V_y + \frac{mR^2g}{J} \frac{aV_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + 1}}, \\ \dot{V}_y &= \frac{I}{J}\omega V_x, \end{aligned} \quad (7)$$

которая задает двумерный поток в фазовом пространстве

$$\mathcal{M}^2 = \{(V_x, V_y) | V_x, V_y \in \mathbb{R}\}$$

и обладает неподвижной точкой  $V_x = 0, V_y = 0$ . Установим характер этой неподвижной точки.

Матрица линеаризованной системы в окрестности неподвижной точки имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2ga}{J} & -\frac{I\omega}{J} \\ \frac{I\omega}{J} & 0 \end{bmatrix},$$

ее собственные значения являются корнями квадратного уравнения

$$k^2 - \frac{mR^2ga}{J}k + \left(\frac{I\omega}{J}\right)^2 = 0.$$

В зависимости от параметра  $a$  неподвижная точка  $V_x = 0, V_y = 0$  является:

- устойчивым узлом при  $-1 \leq a \leq -\frac{2I\omega}{mR^2g}$ ;
- устойчивым фокусом при  $-\frac{2I\omega}{mR^2g} < a < 0$ ;
- центром при  $a = 0$  (случай горизонтально расположенной плоскости);
- неустойчивым фокусом при  $0 < a < \frac{2I\omega}{mR^2g}$ ;
- неустойчивым узлом при  $\frac{2I\omega}{mR^2g} \leq a \leq 1$ .

Таким образом, поведение фазовых траекторий вблизи неподвижных точек очевидно. С другой стороны, из системы (7) следует

$$(V_x^2 + V_y^2)' = 2\frac{mR^2g}{J} \frac{aV_x^2}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + 1}}.$$

Откуда имеет место следующее

**Предложение 1.** При управлении (4) углом наклона вращающейся с постоянной угловой скоростью платформы квадрат вектора скорости геометрического центра шара:

- монотонно возрастает  $\mathbf{V}^2 \rightarrow +\infty$  при  $a > 0$  и  $\mathbf{V}_0^2 \neq 0$  - имеет место ускорение;
- монотонно убывает  $\mathbf{V}^2 \rightarrow 0$  при  $a < 0$  и  $\mathbf{V}_0^2 \neq 0$ , значит,  $x \rightarrow \tilde{x}, y \rightarrow \tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{y}$  - некоторые постоянные;
- остается постоянным  $\mathbf{V}^2 = const$  при  $a = 0$  и  $\mathbf{V}_0^2 \neq 0$ ;
- тождественно равен нулю при  $\mathbf{V}_0^2 = 0$ .

Таким образом, управляя углом наклона платформы с параметром  $a \leq 0$ , можно стабилизировать движение шара.

На рис. 4 приведены траектории точки контакта, графики функции  $\mathbf{V}^2$  и угла

$$\delta = \arcsin \left( \frac{aV_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + 1}} \right) \tag{8}$$

для  $\omega = 2$  рад/с, начальных условий  $V_{x,0} = 0$  м/с,  $V_{y,0} = 2$  м/с,  $x_0 = 1$  м,  $y_0 = 0$  м и различных значений параметра  $a$ :

$$a = -\frac{4I\omega}{mR^2g}, \quad a = -\frac{0.5I\omega}{mR^2g}, \quad a = \frac{0.5I\omega}{mR^2g}, \quad a = \frac{4I\omega}{mR^2g}.$$



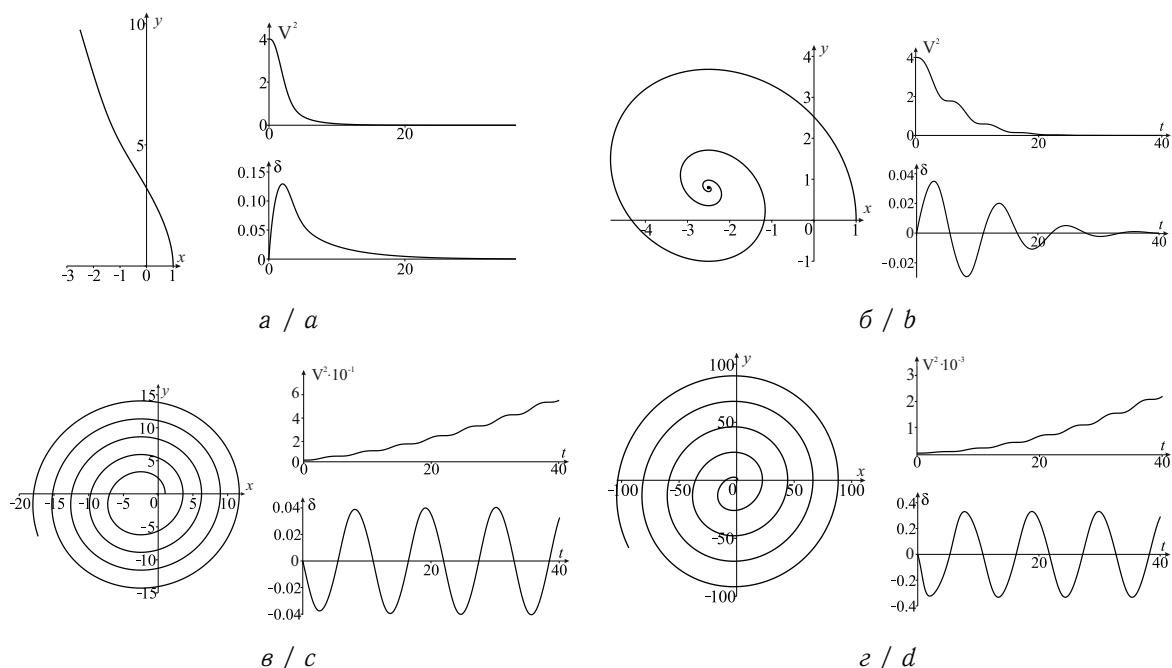


Рис. 4. Типовые траектории точки контакта, графики квадрата вектора скорости  $\mathbf{V}^2$  и угла наклона  $\delta$  для угловой скорости платформы  $\omega = 2$  рад/с, начальных условий  $V_{x,0} = 0$  м/с,  $V_{y,0} = 2$  м/с,  $x_0 = 1$  м,  $y_0 = 0$  м и значений параметра  $a$ :  $a - a = \frac{-4I\omega}{mR^2g}$ ;  $b - a = -\frac{0.5I\omega}{mR^2g}$ ;  $c - a = \frac{0.5I\omega}{mR^2g}$ ;  $d - a = \frac{4I\omega}{mR^2g}$

Fig. 4. The typical trajectories of the contact point, graphs of the square of the velocity vector  $\mathbf{V}^2$  and of the slope  $\delta$  at the angular velocity of the platform  $\omega = 2$  rad/s, the initial conditions  $V_{x,0} = 0$  m/s,  $V_{y,0} = 2$  m/s,  $x_0 = 1$  m,  $y_0 = 0$  m and the values:  $a - a = \frac{-4I\omega}{mR^2g}$ ;  $b - a = -\frac{0.5I\omega}{mR^2g}$ ;  $c - a = \frac{0.5I\omega}{mR^2g}$ ;  $d - a = \frac{4I\omega}{mR^2g}$

### 3.2. Управление углом наклона платформы пропорционально проекции вектора скорости на ось $Oy$

Система уравнений движения принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V_x, \quad \dot{y} = V_y, \\ \dot{V}_x &= -\frac{I}{J}\omega V_y + \frac{mR^2g}{J} \frac{aV_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + 1}}, \\ \dot{V}_y &= \frac{I}{J}\omega V_x \end{aligned} \tag{9}$$

и обладает первыми интегралами

$$\begin{aligned} V_y &= \frac{I}{J}\omega x + H, \\ 2I\omega (V_x^2 + V_y^2 + 1)^{3/2} - 3mR^2gaV_y^2 &= E. \end{aligned} \tag{10}$$

Два последних уравнения системы (9) представляют замкнутую нелинейную автономную систему уравнений, задающую двумерный поток в фазовом пространстве

$$\mathcal{M}^2 = \{(V_x, V_y) | V_x, V_y \in \mathbb{R}\}$$

и обладающую неподвижной точкой  $V_x = 0, V_y = 0$ . Установим характер этой неподвижной точки.

Матрица линеаризованной системы в окрестности неподвижной точки имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{mR^2ga}{J} - \frac{I\omega}{J} \\ \frac{I\omega}{J} & 0 \end{bmatrix},$$

собственные значения которой являются корнями квадратного уравнения

$$k^2 - \frac{I\omega}{J} \left( \frac{mR^2ga}{J} - \frac{I\omega}{J} \right) = 0.$$

В зависимости от параметра  $a$  неподвижная точка  $V_x = 0, V_y = 0$  является:

- седлом при  $\frac{I\omega}{mR^2g} < a \leq 1$ ;
- центром при  $-1 \leq a < \frac{I\omega}{mR^2g}$ ;
- характеризует вырожденное состояние равновесия при  $a = \frac{I\omega}{mR^2g}$ .

Очевидно, что из второго интеграла (10) следует ограниченность квадрата скорости  $\mathbf{V}^2$ . Иначе, если при  $t \rightarrow +\infty \mathbf{V}^2 \rightarrow +\infty$ , то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2I\omega (V_x^2 + V_y^2 + 1)^{3/2} - 3mR^2gaV_y^2}{(V_x^2 + V_y^2)^{3/2}} = 2I\omega \neq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E}{(V_x^2 + V_y^2)^{3/2}} = 0,$$

и второй интеграл не сохраняется.

**Предложение 2.** При управлении (5) углом наклона вращающейся с постоянной угловой скоростью платформы квадрат вектора скорости геометрического центра шара является ограниченной функцией при любом значении параметра  $a$ .

На рис. 5 приведены траектории точки контакта, графики квадрата вектора скорости  $\mathbf{V}^2$  и угла

$$\delta = \arcsin \left( \frac{aV_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + 1}} \right) \quad (11)$$

для угловой скорости вращения платформы  $\omega = 2$  рад/с, начальных условий  $V_{x,0} = 2$  м/с,  $V_{y,0} = 2$  м/с,  $x_0 = 0$  м,  $y_0 = -1$  м и значений параметра  $a$ :

$$a = -\frac{4I\omega}{mR^2g}, \quad a = \frac{4I\omega}{mR^2g}.$$

#### 4. Управление углом наклона платформы, вращающейся с периодической угловой скоростью

Применим управления (4) и (5) для случая периодической скорости вращения платформы

$$\omega(t) = \sin^2 t.$$

Ранее было показано, что в случае постоянного угла наклона платформы  $\delta \neq 0$  в системе присутствует ускорение. Управляя наклоном платформы, можно стабилизировать движение шара, в результате чего квадрат вектора скорости будет ограниченной функцией.

На основе численного интегрирования на рис. 6 построены траектория движения точки контакта, графики квадрата вектора скорости геометрического центра и угла наклона (8) для

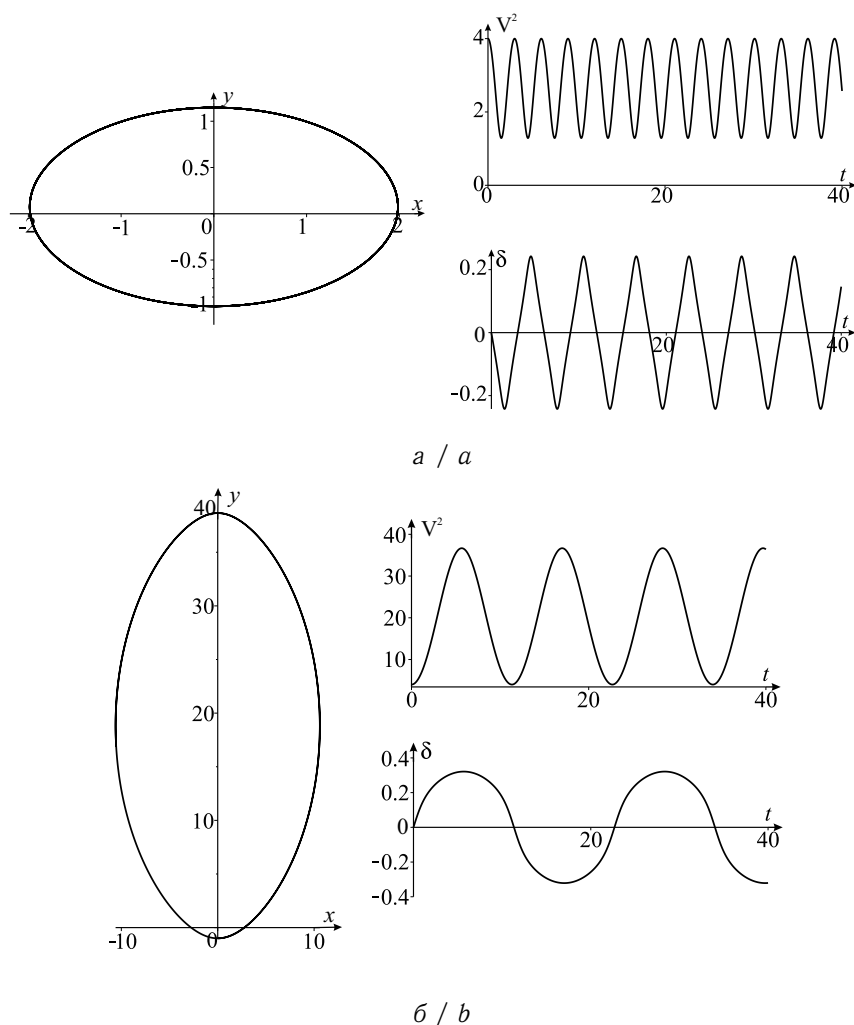


Рис. 5. Типовые траектории точки контакта, графики квадрата вектора скорости  $\mathbf{V}^2$  и угла наклона  $\delta$  для угловой скорости платформы  $\omega = 2$  рад/с, начальных условий  $V_{x,0} = 2$  м/с,  $V_{y,0} = 2$  м/с,  $x_0 = 0$  м,  $y_0 = -1$  м и значений параметра  $a$ :

$$a - a = -\frac{4I\omega}{mR^2g}; \quad б - a = \frac{4I\omega}{mR^2g}$$

Fig. 5. The typical trajectories of the contact point, graphs of the square of the velocity vector  $\mathbf{V}^2$  and of the slope  $\delta$  at the angular velocity of the platform  $\omega = 2$  rad/s, the initial conditions  $V_{x,0} = 2$  m/s,  $V_{y,0} = 2$  m/s,  $x_0 = 0$  m,  $y_0 = -1$  m and the values of  $a$ :

$$a - a = -\frac{4I\omega}{mR^2g}; \quad б - a = \frac{4I\omega}{mR^2g}$$

начальных условий  $V_{x,0} = 1$  м/с,  $V_{y,0} = -1$  м/с,  $x_0 = 0$  м,  $y_0 = 0$  м при управлении (4) с параметром  $a = \frac{-4I}{mR^2g}$ .

На основе численного интегрирования на рис. 7 построены траектория движения точки контакта, графики квадрата вектора скорости геометрического центра и угла наклона (11) для начальных условий  $V_{x,0} = 0$  м/с,  $V_{y,0} = -1$  м/с,  $x_0 = 0$  м,  $y_0 = 0$  м при управлении (5) с параметром  $a = \frac{-4I}{mR^2g}$ .

Стоит отметить, что в случае управления углом наклона  $\delta$  отсутствует вековой уход траектории точки контакта, который присутствовал при постоянном наклоне.

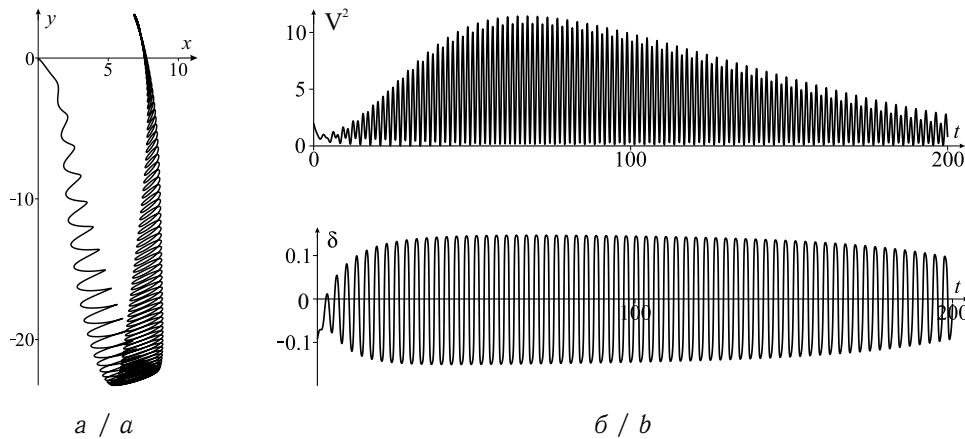


Рис. 6. Траектория точки контакта (а), графики квадрата вектора скорости  $\mathbf{V}^2$  и угла наклона  $\delta$  (б) для начальных условий  $V_{x,0} = 1$  м/с,  $V_{y,0} = -1$  м/с,  $x_0 = 0$  м,  $y_0 = 0$  м в случае периодической угловой скорости платформы  $\omega = \sin^2 t$  при управлении (4) с параметром  $a = \frac{-4I}{mR^2g}$

Fig. 6. The trajectory of the contact point (a), graphs of the square of the velocity  $\mathbf{V}^2$  and the slope  $\delta$  (b) at the initial conditions  $V_{x,0} = 1$  m/s,  $V_{y,0} = -1$  m/s,  $x_0 = 0$  m,  $y_0 = 0$  m, at the periodic angular velocity of the platform  $\omega = \sin^2 t$  for control (4) with the parameter  $a = \frac{-4I}{mR^2g}$

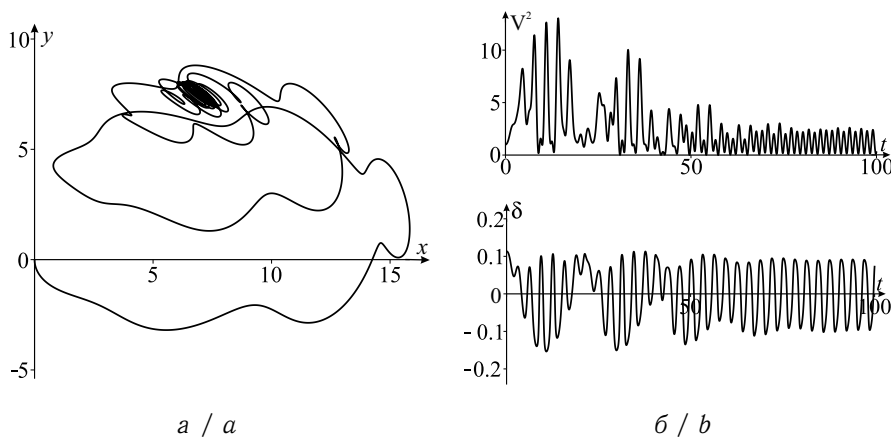


Рис. 7. Траектория точки контакта (а), графики квадрата скорости  $\mathbf{V}^2$  и угла наклона  $\delta$  (б) для начальных условий  $V_{x,0} = 0$  м/с,  $V_{y,0} = -1$  м/с,  $x_0 = 0$  м,  $y_0 = 0$  м в случае периодической угловой скорости платформы  $\omega = \sin^2 t$  при управлении (5) с параметром  $a = \frac{-4I}{mR^2g}$

Fig. 7. The trajectory of the contact point (a), graphs of the square of the velocity  $\mathbf{V}^2$  and the slope  $\delta$  (b) at the initial conditions  $V_{x,0} = 0$  m/s,  $V_{y,0} = -1$  m/s,  $x_0 = 0$  m,  $y_0 = 0$  m, at the periodic angular velocity of the platform  $\omega = \sin^2 t$  for control (5) with the parameter  $a = \frac{-4I}{mR^2g}$

## Заключение

В работе было исследовано качение динамически симметричного шара по наклонной вращающейся шероховатой плоскости (платформе). В случае постоянной скорости вращения платформы и постоянном наклоне скорость геометрического центра шара является ограниченной функцией. Предложены два способа управления углом наклона платформы,



найлены значения числового параметра управления, при которых квадрат вектора скорости геометрического центра может быть постоянной функцией, ограниченной и неограниченной.

Показана эффективность введенного управления на примере качения шара по наклонной платформе, вращающейся с периодической угловой скоростью. В случае постоянного угла наклона, отличного от нуля, показано наличие в системе ускорения и векового ухода траектории точки контакта. Выбором подходящего числового параметра в управлении углом наклона платформы можно добиться качения шара с ограниченной скоростью. В этом случае траектория точки контакта ограничена, т. е. вековой уход траектории отсутствует.

**Конфликт интересов.** Автор заявляет, что у нее нет конфликта интересов.

### Список литературы

1. Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Математический сборник. 1903. Т. 24, № 1. С. 139–168.
2. Мощук Н. К. О движении шара Чаплыгина на горизонтальной плоскости // Прикладная математика и механика. 1983. Т. 47, вып. 6. С. 916–921.
3. Kilin A. A. The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2002. Vol. 6, iss. 3. P. 291–306. <https://doi.org/10.1070/RD2001v006n03ABEH000178>, EDN: LGXBPX
4. Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Проблема дрейфа и возвращаемости при качении шара Чаплыгина // *Нелинейная динамика*. 2013. Т. 9, № 4. С. 721–754. EDN: SAHBBR
5. Mikishanina E. A. Dynamics of the Chaplygin sphere with additional constraint // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2023. Vol. 117. Art. 106920. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106920>
6. Borisov A. V., Mikishanina E. A. Dynamics of the Chaplygin ball with variable parameters // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 16, iss. 3. P. 453–462. <https://doi.org/10.20537/nd200304>, EDN: DTQQDK
7. Борисов А. В., Мамаев И. С., Бизяев И. А. Иерархия динамики при качении твердого тела без проскальзывания и верчения по плоскости и сфере // *Нелинейная динамика*. 2013. Т. 9, № 2. С. 141–202. EDN: SAHAOF
8. Борисов А. В., Мамаев И. С. О движении шара Чаплыгина по наклонной плоскости // *Доклады Академии наук*. 2006. Т. 406, № 5. С. 620–623. EDN: HSYLNV
9. Харламова Е. И. Качение шара по наклонной плоскости // *Прикладная математика и механика*. 1958. Т. 22, вып. 4. С. 504–509.
10. Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. Dynamics of the Chaplygin ball on a rotating plane // *Russian Journal of Mathematical Physics*. 2018. Vol. 25. P. 423–433. <https://doi.org/10.1134/S1061920818040027>, EDN: KKREPJ
11. Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов // *Нелинейная динамика*. 2012. Т. 8, № 2. С. 289–307. EDN: OYPUBZ
12. Bolotin S. The problem of optimal control of a Chaplygin ball by internal rotors // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2012. Vol. 17, iss. 6. P. 559–570. <https://doi.org/10.1134/S156035471206007X>, EDN: RGBYKL
13. Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Динамические системы с неинтегрируемыми связями: вакономная механика, субриманова геометрия и неголономная механика // *Успехи математических наук*. 2017. Т. 72, вып. 5 (437). С. 3–62. <https://doi.org/10.4213/rm9783>, EDN: ZRSFRR
14. Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А., Бизяев И. А. Избранные задачи неголономной механики. Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2016. 883 с. EDN: YSHXAH

### References

1. Chaplygin S. A. On a ball's rolling on a horizontal plane. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2002, vol. 7, iss. 2, pp. 131–148. <https://doi.org/10.1070/RD2002v007n02ABEH000200>
2. Moshchuk N. K. On the motion of Chaplygin ball on a horizontal plane. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1983, vol. 47, iss. 6, pp. 916–921 (in Russian).
3. Kilin A. A. The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2002, vol. 6, iss. 3, pp. 291–306. <https://doi.org/10.1070/RD2001v006n03ABEH000178>, EDN: LGXBPX
4. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. The problem of drift and recurrence for the rolling





- Chaplygin ball. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2013, vol. 18, iss. 6, pp. 832–859. <https://doi.org/10.1134/S1560354713060166>, EDN: SLIUOD
5. Mikishanina E. A. Dynamics of the Chaplygin sphere with additional constraint. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2023, vol. 117, art. 106920. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106920>
  6. Borisov A. V., Mikishanina E. A. Dynamics of the Chaplygin ball with variable parameters. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 16, iss. 3, pp. 453–462. <https://doi.org/10.20537/nd200304>, EDN: DTQQDK
  7. Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2013, vol. 18, iss. 3, pp. 277–328. <https://doi.org/10.1134/S1560354713030064>, EDN: RFHCDF
  8. Borisov A. V., Mamaev I. S. Motion of Chaplygin ball on an inclined plan. *Doklady Physics*, 2006, vol. 51, iss. 2, pp. 73–76. <https://doi.org/10.1134/S1028335806020078>, EDN: KGAVCU
  9. Kharlamova E. I. Rolling of the ball on an inclined plane. *Prikladnaya matematika i mekhanika*[Applied Mathematics and Mechanics], 1958, vol. 22, iss. 4, pp. 504–509 (in Russian).
  10. Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. Dynamics of the Chaplygin ball on a rotating plane. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2018, vol. 25, pp. 423–433. <https://doi.org/10.1134/S1061920818040027>, EDN: KKREPJ
  11. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2012, vol. 17, iss. 3–4, pp. 258–272. <https://doi.org/10.1134/S1560354712030045>, EDN: RFZXPJ
  12. Bolotin S. The problem of optimal control of a Chaplygin ball by internal rotors. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2012, vol. 17, iss. 6, pp. 559–570. <https://doi.org/10.1134/S156035471206007X>, EDN: RGBYKL
  13. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Dynamical systems with non-integrable constraints, vakonomic mechanics, sub-Riemannian geometry, and non-holonomic mechanics. *Russian Mathematical Surveys*, 2017, vol. 72, iss. 5, pp. 783–840. <https://doi.org/10.1070/RM9783>, EDN: QCNJWS
  14. Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A., Bizyaev I. A. *Izbrannye zadachi negolonomnoy mekhaniki* [Selected Problems of Nonholonomic Mechanics]. Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2016. 883 p. (in Russian) EDN: YSHXAH

Поступила в редакцию / Received 18.05.2023

Принята к публикации / Accepted 18.07.2023

Опубликована / Published 30.08.2024



Научная статья  
УДК 629.78:519.6

## О перенормировке приближённого решения уравнений ориентации орбитальной системы координат

И. А. Панкратов

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

<sup>2</sup>Институт проблем точной механики и управления РАН (ИПТМУ РАН), Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24

**Панкратов Илья Алексеевич**, кандидат технических наук, <sup>1</sup>доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, <sup>2</sup>научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением, [pankratovia@sgu.ru](mailto:pankratovia@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-5325-9310>, AuthorID: 608692

**Аннотация.** В кватернионной постановке рассмотрена задача математического моделирования движения космического аппарата (КА) по эллиптической орбите. Управлением является ограниченный по модулю вектор ускорения от реактивной тяги, направленный ортогонально плоскости орбиты КА. Движение центра масс КА описано с помощью кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбитальной системы координат. Построено приближённое аналитическое решение кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбитальной системы координат в виде равномерно пригодного асимптотического разложения по степеням эксцентриситета орбиты КА (малого параметра). Для устранения вековых слагаемых в этом разложении был применён метод перенормировки. Учёт известного решения уравнения ориентации орбитальной системы координат для случая, когда орбита КА является круговой, позволил упростить вид вышеуказанного разложения. Найдены нелинейные частоты колебаний каждой из компонент искомого кватерниона. Аналитические преобразования были выполнены с помощью пакета символьной алгебры SymPy. Для проведения численного моделирования движения КА была составлена программа на языке Python. Проведено сравнение расчётов по аналитическим формулам, полученным в работе (при отсутствии вековых слагаемых), и ранее полученных результатов при наличии вековых слагаемых. Приведён пример моделирования управляемого движения КА для случая, когда начальная ориентация орбитальной системы координат соответствует ориентации орбиты одного из спутников орбитальной группировки ГЛОНАСС. Построены графики изменения погрешности определения модуля и компонент кватерниона ориентации орбитальной системы координат. Показано, что устранение вековых слагаемых с помощью метода перенормировки позволило уменьшить ошибку определения указанного модуля при увеличении количества оборотов КА вокруг Земли. Проведён анализ полученного приближённого аналитического решения. Установлены особенности и закономерности процесса движения КА по эллиптической орбите.

**Ключевые слова:** космический аппарат, орбита, оптимальное управление, кватернион, аппроксимация

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00218).

**Для цитирования:** Панкратов И. А. О перенормировке приближённого решения уравнений ориентации орбитальной системы координат // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 415–422. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-415-422>, EDN: LUJIJZ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

## On renormalization of the approximate solution of the orbital coordinate system equations of orientation

I. A. Pankratov

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences (IPTMU RAS), 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia

Ilia A. Pankratov, pankratovia@sgu.ru, <https://orcid.org/00000-0002-5325-9310>, AuthorID: 608692

**Abstract.** In the quaternion formulation, the problem of mathematical modeling of the spacecraft motion in an elliptical orbit is considered. The control is a modulo-limited acceleration vector from the jet thrust, directed orthogonally to the plane of the spacecraft orbit. The motion of the spacecraft center of mass is described using the quaternion differential equation of the orientation of the orbital coordinate system. An approximate analytical solution of the quaternion differential equation of the orientation of the orbital coordinate system is constructed in the form of a uniformly suitable asymptotic expansion by degrees of eccentricity of the spacecraft orbit (small parameter). To eliminate the secular terms in this expansion, the renormalization method was applied. Taking into account the known solution of the equation of orientation of the orbital coordinate system for the case when the spacecraft orbit is circular, allowed to simplify the form of the above expansion. The nonlinear oscillation frequencies of each component of the desired quaternion were found. Analytical transformations were performed using the SymPy symbolic algebra package. To carry out numerical simulation of the spacecraft motion, a program was written in Python. Calculations based on analytical formulas obtained in the paper (in the absence of secular terms) and previously obtained results in the presence of secular terms are compared. An example of modeling the controlled motion of a spacecraft is given for the case when the initial orientation of the orbital coordinate system corresponds to the orientation of the orbit of one of the satellites of the GLONASS orbital grouping. Graphs were built to show error in the module (and components) of the quaternion describing the orientation of the orbital coordinate system. It is shown that the elimination of secular terms using the renormalization method made it possible to reduce the error in determining this module with an increase in the number of spacecraft revolutions around the Earth. The analysis of the obtained approximate analytical solution is carried out. The features and regularities of the spacecraft motion in an elliptical orbit are established.

**Keywords:** spacecraft, orbit, optimal control, quaternion, approximation

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-21-00218).

**For citation:** Pankratov I. A. On renormalization of the approximate solution of the orbital coordinate system equations of orientation. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 415–422 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-415-422>, EDN: LUJIJZ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

### Введение

Задачам управления движением центра масс космического аппарата (КА) посвящено достаточно большое количество публикаций в нашей стране и за рубежом. В этих работах для описания движения КА чаще всего используются уравнения движения в традиционных угловых элементах орбиты [1–3]. Аналитическое исследование дифференциальных уравнений ориентации орбиты в классических угловых элементах (и получающихся краевых задач) — достаточно сложная задача. Отметим работы С. А. Ишкова, В. В. Салмина и др. [4, 5].



Повышение эффективности численного решения задач в этой области, по-видимому, может быть получено при использовании кватернионных моделей орбитального движения КА.

В настоящей работе рассмотрена задача уточнения приближённого решения кватернионных уравнений, описывающих ориентацию вращающейся системы координат, связанной с КА, относительно инерциальной системы координат.

Указанная задача есть известная задача Дарбу. Решение этой задачи в замкнутой форме найдено лишь для некоторых частных случаев (см., например, работы [6–10]). Поэтому поиск её приближённого решения продолжает оставаться актуальным.

## 1. Постановка задачи

Пусть вектор ускорения  $\mathbf{u}$  от тяги реактивного двигателя во всё время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости его орбиты. В этом случае орбита КА в процессе управления движением центра масс КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления как неизменяемая (недеформируемая) фигура.

Рассмотрим орбитальную систему координат  $\eta$  [11]. Начало этой системы координат находится в центре масс КА, ось  $\eta_1$  направлена вдоль радиуса-вектора центра масс КА, ось  $\eta_3$  перпендикулярна плоскости орбиты и имеет направление постоянного по модулю вектора  $\mathbf{c}$  момента скорости центра масс КА, а ось  $\eta_2$  образует правую тройку с осями  $\eta_1$  и  $\eta_3$ .

Безразмерные уравнения ориентации орбитальной системы координат  $\eta$  в параметрах Эйлера  $\lambda_j$  имеют вид [12]

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\varphi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda} \circ [Nr^3u\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3], \quad r = \frac{1}{1 + e \cos \varphi}. \quad (1)$$

Здесь  $\boldsymbol{\lambda}$  — нормированный кватернион ориентации орбитальной системы координат  $\eta$ ,  $\mathbf{i}_k$  — векторные мнимые единицы Гамильтона,  $\circ$  — символ кватернионного умножения;  $\varphi$  — истинная аномалия, характеризующая положение КА на орбите;  $r$  — модуль безразмерного радиуса-вектора центра масс КА;  $e$  — эксцентриситет орбиты,  $u$  — управление, безразмерная проекция вектора реактивного ускорения  $\mathbf{u}$  на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного мгновенной плоскости орбиты КА);  $N = u_{\max}R^3/c^2$  — характерный безразмерный параметр задачи,  $u_{\max}$  — максимальное (по модулю) значение размерного управления,  $R$  — характерное расстояние (величина, близкая к длине большой полуоси орбиты управляемого КА),  $c$  — постоянная площадей (модуль вектора момента скорости центра масс КА).

Пусть КА движется под действием постоянного по модулю управления. Известно, что при решении задачи быстрогодействия и задачи о минимизации затрат характеристической скорости оптимальное по Понтрягину [13] управление имеет именно такой вид на смежных участках активного движения КА [14]. Ранее в работе [15] автором было построено следующее приближённое решение уравнений (1) для постоянного управления в виде разложения по степеням эксцентриситета орбиты  $e$  (малого параметра):

$$\boldsymbol{\lambda}(\varphi) = \boldsymbol{\lambda}^{(0)}(\varphi) + e\boldsymbol{\lambda}^{(1)}(\varphi) + e^2\boldsymbol{\lambda}^{(2)}(\varphi) + O(e^3), \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = \mathbf{C} \cos(\omega\varphi/2) + \mathbf{D} \sin(\omega\varphi/2)$  — общее решение уравнений (1) для случая круговой орбиты,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  — кватернионные постоянные интегрирования, а  $\omega = \sqrt{(N \cdot u)^2 + 1} = \text{const}$ . При этом поправки  $\boldsymbol{\lambda}^{(1)}$  и  $\boldsymbol{\lambda}^{(2)}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}^{(1)} &= \mathbf{A}^+ \cos\left[\left(\frac{\omega}{2} + 1\right)\varphi\right] + \mathbf{B}^+ \sin\left[\left(\frac{\omega}{2} + 1\right)\varphi\right] + \mathbf{A}^- \cos\left[\left(\frac{\omega}{2} - 1\right)\varphi\right] + \mathbf{B}^- \sin\left[\left(\frac{\omega}{2} - 1\right)\varphi\right], \\ \boldsymbol{\lambda}^{(2)} &= \mathbf{E}^+ \cos\left[\left(\frac{\omega}{2} + 2\right)\varphi\right] + \mathbf{F}^+ \sin\left[\left(\frac{\omega}{2} + 2\right)\varphi\right] + \mathbf{E}^- \cos\left[\left(\frac{\omega}{2} - 2\right)\varphi\right] + \\ &+ \mathbf{F}^- \sin\left[\left(\frac{\omega}{2} - 2\right)\varphi\right] + \mathbf{G}\varphi \cos \frac{\omega\varphi}{2} + \mathbf{H}\varphi \sin \frac{\omega\varphi}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что постоянные кватернионы  $A^+, \dots, B^-, E^+, \dots, F^-, G, H$  выражаются через кватернионы  $C$  и  $D$  по известным формулам [15]. Для нахождения восьми произвольных постоянных (компоненты кватернионов  $C$  и  $D$ ) нужно решить следующую систему двух линейных кватернионных алгебраических уравнений (начальное значение кватерниона ориентации  $\lambda^H$  считается заданным):

$$\lambda(0) = \lambda^H, \quad \left. \frac{d\lambda}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = \frac{1}{2} \lambda^H \circ [Nr(0)^3 u i_1 + i_3].$$

Построенное прямое разложение (2) становится непригодным при больших значениях  $\varphi$  из-за присутствия в нём вековых слагаемых  $\varphi \cos(\omega\varphi/2)$  и  $\varphi \sin(\omega\varphi/2)$ . Для того чтобы исключить из решения указанные слагаемые, был применён метод перенормировки [16], изложенный в следующем разделе.

## 2. Метод перенормировки

Нарушение пригодности прямого разложения (2) связано с тем, что с его помощью невозможно описать зависимость частоты колебаний системы от степени её нелинейности. Обычно в таких случаях частоту колебаний вводят непосредственно в уравнения движения (применяя методику Линдштедта – Пуанкаре [17]). В дальнейшем частоту колебаний нужно так же, как и искомую переменную, разложить в ряд по степеням малого параметра. В нашем случае каждая компонента искомого кватерниона имеет свою собственную частоту колебаний, поэтому нужно записать прямое разложение в скалярном виде. Рассмотрим сначала слагаемые

$$C \cos \frac{\omega\varphi}{2} + e^2 \cdot H \varphi \sin \frac{\omega\varphi}{2}$$

или в скалярном виде

$$C_j \cos \frac{\omega\varphi}{2} + e^2 \cdot H_j \varphi \sin \frac{\omega\varphi}{2}, \quad j = \overline{0, 3}. \tag{4}$$

В каждом из скалярных соотношений (4) перейдём к новой независимой переменной  $\tau_j$  по формуле

$$\tau_j = \left( \frac{\omega}{2} + \omega_{2j} \cdot e^2 + \dots \right) \cdot \varphi, \quad j = \overline{0, 3}.$$

Здесь сумма в круглых скобках — это разложение для нелинейной частоты колебаний. Первое слагаемое в нём соответствует частоте колебаний при движении по круговой орбите. Слагаемое с эксцентриситетом орбиты КА в первой степени отсутствует, так как вековые слагаемые содержат малый параметр в квадрате.

Возвращаясь к истинной аномалии, после разложения обратной величины в ряд Тейлора получим ( $j = \overline{0, 3}$ ):

$$\varphi = \left( \frac{\omega}{2} + \omega_{2j} \cdot e^2 + \dots \right)^{-1} \cdot \tau_j = \left( \frac{2}{\omega} - \frac{4 \cdot \omega_{2j} \cdot e^2}{\omega} + O(e^3) \right) \cdot \tau_j.$$

Тогда выражения (4) примут вид ( $j = \overline{0, 3}$ ):

$$C_j \cos \left[ \frac{\omega}{2} \cdot \left( \frac{2}{\omega} - \frac{4 \cdot \omega_{2j} \cdot e^2}{\omega} \right) \cdot \tau_j \right] + e^2 \cdot H_j \cdot \left( \frac{2}{\omega} - \frac{4 \cdot \omega_{2j} \cdot e^2}{\omega} \right) \cdot \tau_j \cdot \sin \left[ \frac{\omega}{2} \cdot \left( \frac{2}{\omega} - \frac{4 \cdot \omega_{2j} \cdot e^2}{\omega} \right) \cdot \tau_j \right].$$

Теперь необходимо выбрать параметры  $\omega_{2j}$  так, чтобы избавиться от вековых слагаемых. Для этого разложим синус и косинус в ряд Тейлора по переменной  $\tau_j$  с точностью до величин второго порядка малости, получим

$$C_j \cos \tau_j + e^2 \cdot (C_j \cdot \omega_{2j} + H_j) \cdot \frac{2}{\omega} \cdot \tau_j \sin \tau_j.$$



Следовательно, достаточно положить  $\omega_{2j} = -H_j/C_j$ . При этом (4) примет вид

$$C_j \cos \left[ \left( \frac{\omega}{2} - \frac{H_j}{C_j} \cdot e^2 \right) \cdot \varphi \right], \quad (5)$$

и вековых слагаемых здесь больше не будет.

Аналогично можно показать, что

$$D_j \sin \frac{\omega\varphi}{2} + e^2 \cdot G_j \varphi \cos \frac{\omega\varphi}{2} \approx D_j \sin \left[ \left( \frac{\omega}{2} + \frac{G_j}{D_j} \cdot e^2 \right) \cdot \varphi \right] \quad (6)$$

с точностью до величин второго порядка малости.

Обозначим кватернион,  $j$ -й компонентой которого является сумма выражения (5) и правой части (6) через  $\lambda_{no\_sec}^{(0)}$ . Пусть также кватернион

$$\lambda_{no\_sec}^{(2)} = \lambda^{(2)} - \mathbf{G}\varphi \cos \frac{\omega\varphi}{2} - \mathbf{H}\varphi \sin \frac{\omega\varphi}{2}$$

есть вторая поправка без вековых слагаемых.

Тогда равномерно пригодное разложение для решения кватернионного уравнения (1) с точностью до величин второго порядка малости примет вид

$$\lambda(\varphi, e) = \lambda_{no\_sec}^{(0)}(\varphi) + e\lambda^{(1)}(\varphi) + e^2\lambda_{no\_sec}^{(2)}(\varphi) + O(e^3). \quad (7)$$

Заметим, что все аналитические выкладки в данном разделе были проведены с помощью пакета символьной алгебры SymPy<sup>1</sup> [18, 19] на языке Python3.

### 3. Пример численного решения задачи

Пусть начальное значение кватерниона  $\lambda = \lambda^H$  соответствует ориентации орбиты одного из спутников группировки ГЛОНАСС (при условии, что начальное значение истинной аномалии  $\varphi$  — ноль радиан), т. е. долгота восходящего узла  $\Omega_u$ , наклонение орбиты  $I$  и угловое расстояние до перигея  $\omega_\pi$  равны соответственно ( $u = 1$ ):

$$\begin{aligned} \Omega_u^0 = \Omega_u(0) = 215.25^\circ, \quad I^0 = I(0) = 64.8^\circ, \quad \omega_\pi^0 = \omega_\pi(0) = 0^\circ, \\ \varphi_0 = 0 \text{ рад.}, \quad u_{\max} = 0.101907 \text{ м/с}^2, \quad N = 0.35. \end{aligned}$$

Тогда компоненты начального кватерниона ориентации орбитальной системы координат примут вид

$$\lambda_0^H = -0.255650, \quad \lambda_1^H = -0.162241, \quad \lambda_2^H = 0.510674, \quad \lambda_3^H = 0.804694.$$

Известно [14], что уравнения (1) имеют первый интеграл

$$|\lambda| = \sqrt{|\lambda|} = \sqrt{\sum_{j=0}^3 \lambda_j^2} = |\lambda(0)| = 1 = \text{const.} \quad (8)$$

Тогда погрешность определения модуля кватерниона  $\lambda$  на отрезке  $\varphi \in [0; 40\pi]$  (КА при этом совершает двадцать оборотов вокруг Земли) с учётом (8) запишется так:

$$\text{err}_{|\lambda|}(e) = \max_{\varphi \in [0; 40\pi]} \text{abs} \left( |\lambda^{\text{прибл}}(\varphi, e)| - 1 \right), \quad (9)$$

где компоненты кватерниона ориентации орбитальной системы координат  $\lambda^{\text{прибл}}(\varphi, e)$  вычисляются или по формулам (2), (3) (при наличии вековых слагаемых), или по формуле (7) (при отсутствии вековых слагаемых).

<sup>1</sup>SymPy. URL: <https://www.sympy.org/en/index.html> (дата обращения: 10.01.2023).



Введём в рассмотрение кватернион погрешности определения ориентации орбитальной системы координат  $err(e)$ . Его компоненты могут быть найдены по формуле

$$err_j(e) = \max_{\varphi \in [0; 40\pi]} |\lambda_j^{прибл}(\varphi, e) - \lambda_j^{PK}(\varphi, e)|, \quad j = \overline{0, 3}. \tag{10}$$

Здесь приближённое решение  $\lambda^{прибл}(\varphi, e)$  рассчитано по формуле (7) (при отсутствии вековых слагаемых); а  $\lambda^{PK}(\varphi, e)$  — результат интегрирования уравнения (1) методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности с шагом  $h = 0.001$  рад.

Результаты расчётов по формуле (9) приведены на рис. 1.

На рис. 2 показаны законы изменения компонент кватерниона погрешности (10) без вековых слагаемых. Заметим, что устранение вековых слагаемых позволило уменьшить погрешность определения компонент кватерниона ориентации орбитальной системы координат лишь на доли процента в случае, когда КА совершает двадцать оборотов вокруг Земли.

Из анализа построенных графиков следует, что предложенное в работе преобразование позволяет уменьшить погрешность определения модуля кватерниона ориентации орбитальной системы координат на больших промежутках времени. При этом увеличение эксцентриситета орбиты КА приводит к заметному увеличению погрешности за счёт наличия в (2), (3) вековых слагаемых. Также построенное разложение обеспечивает приемлемую точность определения компонент кватерниона ориентации орбитальной системы координат.

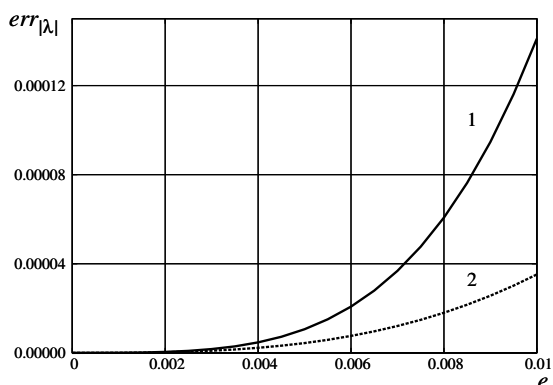


Рис. 1. Погрешность определения модуля кватерниона ориентации: 1 — при наличии вековых слагаемых; 2 — без вековых слагаемых

Fig. 1. Error in determining the modulo of the orientation quaternion: 1 is with secular terms; 2 is without secular terms

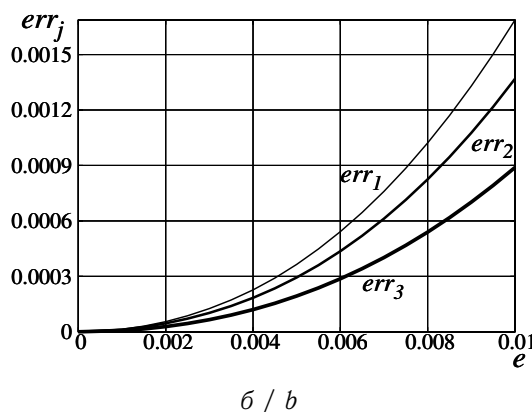
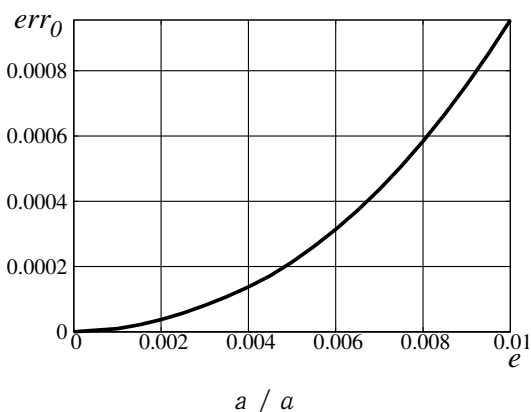


Рис. 2. Компоненты кватерниона погрешности:  $a$  — скалярная часть;  $b$  — векторная часть

Fig. 2. Components of the error quaternion:  $a$  is scalar part;  $b$  is vector part

### Заключение

В настоящей работе с помощью метода перенормировки удалось уменьшить погрешность определения модуля кватерниона, описывающего ориентацию орбитальной системы координат, при моделировании движения КА под действием постоянного управления с помощью разложения в асимптотический ряд. В дальнейшем предложенное преобразование



поможет упростить получение равномерно пригодного разложения более высокого порядка относительно эксцентриситета орбиты КА.

### Список литературы

1. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Москва : Наука, 1976. 864 с.
2. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. Москва : Наука, 1968. 799 с.
3. Orbital Mechanics / ed. by V. A. Chobotov. Reston : AIAA, 2002, 455 p. (AIAA Education Series). <https://doi.org/10.2514/4.862250>
4. Ишков С. А., Романенко В. А. Формирование и коррекция высокоэллиптической орбиты спутника Земли с двигателем малой тяги // Космические исследования. 1997. Т. 35, вып. 3. С. 287–296.
5. Салмин В. В., Соколов В. О. Приближенный расчет маневров формирования орбиты спутника Земли с двигателем малой тяги // Космические исследования. 1991. Т. 29, вып. 6. С. 872–888. EDN: YUHCZG
6. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. Москва : Наука, 1973. 320 с.
7. Зубов В. И. Аналитическая динамика гироскопических систем. Ленинград : Судостроение, 1970. 317 с.
8. Молоденков А. В. К решению задачи Дарбу // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2007. № 2. С. 3–13.
9. Панкратов И. А. Аппроксимация уравнений ориентации орбитальной системы координат методом взвешенных невязок // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 194–201. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-194-201>
10. Панкратов И. А. Об одном подходе к определению ориентации орбиты космического аппарата // International Journal of Open Information Technologies. 2021. Vol. 9, № 10. P. 47–51. EDN: FJQZGV
11. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. I // Космические исследования. 1992. Т. 30, вып. 6. С. 759–770.
12. Pankratov I. A. Genetic algorithm of energy consumption optimization for reorientation of the spacecraft orbital plane // Mechatronics, Automation, Control. 2022. Vol. 23, iss. 5. P. 256–262. <https://doi.org/10.17587/mau.23.256-262>
13. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Москва : Наука, 1983. 393 с.
14. Челноков Ю. Н. Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 6. С. 895–912.
15. Панкратов И. А. Аналитическое решение уравнений ориентации околокруговой орбиты космического аппарата // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 97–105. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-97-105>
16. Найфэ А. Введение в методы возмущений. Москва : Мир, 1984. 535 с.
17. Найфэ А. Методы возмущений. Москва : Мир, 1976. 456 с.
18. Führer C., Solem J. E., Verdier O. Scientific Computing with Python 3. Birmingham – Mumbai : Packt Publishing, 2016. 332 p.
19. Meurer A., Smith C. P., Paprocki M. [et al]. SymPy: Symbolic computing in Python // PeerJ Computer Science. URL: <https://peerj.com/articles/cs-103.pdf> (дата обращения: 10.01.2023). <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.103>

### References

1. Abalakin V. K., Aksenov E. P., Grebennikov E. A., Demin V. G., Riabov Iu. A. *Spravochnoe rukovodstvo po nebesnoy mekhanike i astroydinamike* [Reference Guide on Celestial Mechanics and Astrodynamics]. Moscow, Nauka, 1976. 864 p. (in Russian).
2. Duboshin G. N. *Nebesnaia mekhanika. Osnovnyye zadachi i metody* [Celestial Mechanics. Main Tasks and Methods]. Moscow, Nauka, 1968. 799 p. (in Russian).
3. Chobotov V. A. (ed.) *Orbital Mechanics*. AIAA Education Series. Reston, AIAA, 2002. 455 p. <https://doi.org/10.2514/4.862250>



4. Ishkov S. A., Romanenko V. A. Forming and correction of a high-elliptical orbit of an earth satellite with low-thrust engine. *Cosmic Research*, 1997, vol. 35, iss. 3, pp. 268–277.
5. Salmin V. V., Sokolov V. O. An approximate calculation of the orbit insertion maneuvers of a satellite of the Earth with low thrust propulsion system. *Kosmicheskie issledovaniya* [Cosmic Research], 1991, vol. 29, iss. 6, pp. 872–888 (in Russian). EDN: YUHCZG
6. Branets V. N., Shmyglevskii I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* [Use of Quaternions in the Problems of Orientation of Solid Bodies]. Moscow, Nauka, 1973. 320 p. (in Russian).
7. Zubov V. I. *Analiticheskaya dinamika giroskopicheskikh sistem* [Analytical Dynamics of Gyroscopic Systems]. Leningrad, Sudostroenie, 1970. 317 p. (in Russian).
8. Molodenkov A. V. On the solution of the Darboux problem. *Mechanics of Solids*, 2007, vol. 42, iss. 2, pp. 167–176. <https://doi.org/10.3103/S002565440702001X>
9. Pankratov I. A. Approximation of the orientation equations of the orbital coordinate system by the weighted residuals method. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 194–201 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-194-201>
10. Pankratov I. A. On an approach to determining the orientation of the spacecraft orbit. *International Journal of Open Information Technologies*, 2021, vol. 9, iss. 10, pp. 47–51 (in Russian). EDN: FJQZGV
11. Chelnokov Yu. N. Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. I. *Cosmic Research*, 1992, vol. 30, iss. 6, pp. 612–621.
12. Pankratov I. A. Genetic algorithm of energy consumption optimization for reorientation of the spacecraft orbital plane. *Mechatronics, Automation, Control*, 2022, vol. 23, iss. 5, pp. 256–262. <https://doi.org/10.17587/mau.23.256-262>
13. Pontriagin L. S., Boltianskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [The Mathematical Theory of Optimal Processes]. Moscow, Nauka, 1983. 393 p. (in Russian).
14. Chelnokov Yu. N. Optimal reorientation of a spacecraft's orbit using a jet thrust orthogonal to the orbital plane. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, iss. 6, pp. 646–657. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.02.002>
15. Pankratov I. A. Analytical solution of equations of near-circular spacecraft's orbit orientation. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, iss. 1, pp. 97–105 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-97-105>
16. Nayfeh A. *Introduction to Perturbation Techniques*. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, John Wiley and Sons, 1981. 520 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1984. 535 p.).
17. Nayfeh A. *Perturbation Techniques*. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, John Wiley and Sons, 1973. 425 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1976. 456 p.).
18. Führer C., Solem J. E., Verdier O. *Scientific Computing with Python 3*. Birmingham – Mumbai, Packt Publ., 2016. 332 p.
19. Meurer A., Smith C. P., Paprocki M. [et al]. SymPy: Symbolic computing in Python. *PeerJ Computer Science*. Available at: <https://peerj.com/articles/cs-103.pdf> (accessed January 10, 2023). <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.103>

Поступила в редакцию / Received 17.01.2023

Принята к публикации / Accepted 24.03.2023

Опубликована / Published 30.08.2024

## ИНФОРМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 423–431

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 423–431

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-423-431>

EDN: SWTABZ

Обзорная статья

УДК 004.42

### Методы получения информации биомедицинского мониторинга уровня оксигенации и артериального давления с использованием встроенных сенсоров смартфонной техники

А. А. Егорчев, Д. Е. Чикрин, А. Ф. Фахрутдинов,  
М. Р. Шарипов, Р. А. Бурнашев✉

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Россия, 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18

**Егорчев Антон Александрович**, кандидат технических наук, директор Института вычислительной математики и информационных технологий, eanton090@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-8561-8616>, AuthorID: 797481

**Чикрин Дмитрий Евгеньевич**, доктор технических наук, директор Института искусственного интеллекта, робототехники и системной инженерии, dmitry.kfu@ya.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1358-8184>, AuthorID: 797533

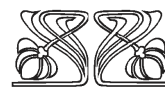
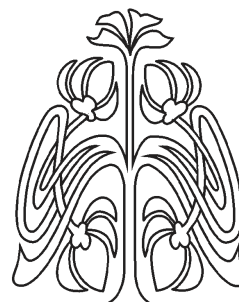
**Фахрутдинов Адель Фердинандович**, ведущий инженер-программист Института вычислительной математики и информационных технологий, AdFFahrutdinov@kpfu.ru, AuthorID: 1191691

**Шарипов Марсель Ривкатович**, ведущий инженер-программист Института вычислительной математики и информационных технологий, MaRSharipov@kpfu.ru, AuthorID: 1190064

**Бурнашев Рустам Арифович**, кандидат технических наук, доцент кафедры анализа данных и технологий программирования Института вычислительной математики и информационных технологий, r.burnashev@inbox.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1057-0328>, AuthorID: 955990

**Аннотация.** Статья посвящена актуальной проблеме неинвазивного самостоятельного мониторинга показателей оксигенации и артериального давления пациентами. Представлен обзор имеющихся перспективных подходов по мониторингу рассматриваемых биомаркеров, а также продемонстрированы основные проблемы, как связанные с применением рассматриваемых подходов, так и обусловленные самой выборкой для испытаний.

**Ключевые слова:** артериальное давление, оксигенация, биомониторинг, смартфон, неинвазивный мониторинг



Научный  
отдел





**Благодарности:** Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («Приоритет-2030»).

**Для цитирования:** Егорчев А. А., Чикрин Д. Е., Фахрутдинов А. Ф., Шарипов М. Р., Бурнашев Р. А. Методы получения информации биомедицинского мониторинга уровня оксигенации и артериального давления с использованием встроенных сенсоров смартфонной техники // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 423–431. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-423-431>, EDN: SWTABZ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Review

## Methods for obtaining information for biomedical monitoring of the level of oxygenation and blood pressure using built-in sensors of smartphone technology

A. A. Egorchev, D. E. Chickrin, A. F. Fakhrutdinov, M. R. Sharipov, R. A. Burnashev<sup>✉</sup>

Kazan (Volga region) Federal University, 18 Kremlevskaya St., Kazan 420008, Russia

Anton A. Egorchev, eanton090@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-8561-8616>, AuthorID: 797481

Dmitry E. Chickrin, dmitry.kfu@ya.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1358-8184>, AuthorID: 797533

Adel F. Fakhrutdinov, AdFFakhrutdinov@kpfu.ru, AuthorID: 1191691

Marcel R. Sharipov, MaRSharipov@kpfu.ru, AuthorID: 1190064

Rustam A. Burnashev, r.burnashev@inbox.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1057-0328>, AuthorID: 955990

**Abstract.** The article is devoted to the actual problem of non-invasive self-monitoring of oxygenation and blood pressure indicators by patients. The article provides an overview of the available promising approaches for monitoring the biomarkers under consideration. Also, it demonstrates the main problems associated with applying the approaches under consideration and those caused by the test sample itself.

**Keywords:** blood pressure, oxygenation, biomonitring, smartphone, non-invasive monitoring

**Acknowledgements:** This paper has been supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (“Priority-2030”).

**For citation:** Egorchev A. A., Chickrin D. E., Fakhrutdinov A. F., Sharipov M. R., Burnashev R. A. Methods for obtaining information for biomedical monitoring of the level of oxygenation and blood pressure using built-in sensors of smartphone technology. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 423–431 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-423-431>, EDN: SWTABZ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Высокая плотность населения нашей планеты требует применения более современных подходов в здравоохранении. Недавняя пандемия оказала очень высокое давление на медицинских работников из-за заразности вируса и привела к снижению взаимодействий между людьми. В связи с этим необходимо расширение методов диагностики с большим охватом пациентов, которые позволят людям самостоятельно проводить измерение базовых биометрических показателей.

Цифровизация поспособствовала высокой популярности проведения исследований в области неинвазивного мониторинга биомаркеров за последние 10 лет.

В области определения стрессового состояния было проведено множество исследований. В [1] был предложен подход, основанный на использовании дискретной скрытой марковской модели для анализа времени использования смартфона пациентом, однако данный подход в





полной мере дает высокую точность на дистанции. В работе [2] авторы применяют алгоритм случайного дерева, где в качестве признаков выступают функции плотности вероятности оцененных наклонов спектра на амплитудно-частотной характеристике (АЧХ).

Для определения частоты дыхания авторы в работе [3] используют подход, основанный на анализе эллипсоида вращения показаний вектора магнитометра. Данный подход требует соблюдения строгих условий: человек должен лежать, а измерительное устройство располагаться на его животе, что является существенным недостатком.

В целом существует ряд серьезных проблем, которые хорошо описаны в работе [4]. Первая проблема связана с тем, что в повседневности человек постоянно находится в движении, и эти движения существенно влияют на качество измерений. Ко второй относится обеспечение питания компактного устройства. Третья проблема обусловлена габаритами и комплектностью системы.

С точки зрения биомедицинского мониторинга наиболее важны базовые биомаркеры. Поэтому в рамках данной обзорной статьи будут рассмотрены исследования, посвященные измерению таких жизненно важных медицинских показателей, которые являются потенциально реализуемыми на смартфонах, а именно: уровень оксигенации и артериальное давление.

Обзор основных исследований по методам фиксирования показателей уровня оксигенации и артериального давления приводится в разделе 1 и 2 соответственно. В разделе 3 обсуждаются проведенные исследования и открытые проблемы. В заключении приводится потенциал для дальнейших исследований и разработок.

## 1. Уровень оксигенации

Насыщение кислородом (сатурация, оксигенация) — процент насыщенного кислородом гемоглобина в крови пациента относительно общего гемоглобина в крови. Нормальным показателем оксигенации взрослого человека являются значения в диапазоне 95–100%. Значения ниже свидетельствуют о различных степенях дыхательной недостаточности, вплоть до гипоксической комы. Своевременное выявление снижения значения данного биомаркера позволяет оказать своевременную медицинскую помощь и спасти жизнь человека.

В работе Т. У. Абай и П. А. Курьякоу [5] описывается возможность использования фотоплетизмографии для оценки уровня оксигенации. Для оценки уровня оксигенации используют палец человека, а также излучатель с фотодетектором красного и синего цвета. При расчете уровня оксигенации используется формула

$$\Delta[tHb] = \Delta[HbO_2] + \Delta[HHb],$$

где  $\Delta[HbO_2]$  вычисляется по формуле

$$\Delta[HbO_2] = \frac{\Delta A_R * \alpha_{IR_{HHb}} - \Delta A_{IR} * \alpha_{R_{HHb}}}{\alpha_{R_{HbO_2}} * \alpha_{IR_{HHb}} - \alpha_{IR_{HbO_2}} * \alpha_{R_{HHb}}},$$

$\Delta[HHb]$  — по формуле

$$\Delta[HHb] = \frac{\Delta A_{IR} * \alpha_{R_{HbO_2}} - \Delta A_R * \alpha_{IR_{HbO_2}}}{\alpha_{R_{HbO_2}} * \alpha_{IR_{HHb}} - \alpha_{IR_{HbO_2}} * \alpha_{R_{HHb}}}.$$

В работах [6, 7] предлагается применять метод анализа фотоплетизмограмм на базе смартфонной техники. Авторы используют для анализа фотоплетизмограмм красный и синий полосы оптического сигнала. Вычисление уровня оксигенации происходит по следующей формуле:

$$SpO_2 = A - B \frac{AC_{RED}/DC_{RED}}{AC_{BLUE}/DC_{BLUE}}, \quad (1)$$

где  $A$  и  $B$  — параметры, полученные при сопоставлении данных фотоплетизмограмм с показателями пульсоксиметра.





В [6] авторы работают с 20-секундным видео, в котором запечатлен приложенный палец к камере с включенной вспышкой. При обработке видеоданных для каждого кадра вычисляются следующие параметры:

- математическое ожидание красной компоненты изображения, что соответствует  $DC_{RED}$ ;
- математическое ожидание синей компоненты изображения, что соответствует  $DC_{BLUE}$ ;
- стандартное отклонение для красной компоненты изображения, что соответствует  $AC_{RED}$ ;
- стандартное отклонение для синей компоненты изображения, что соответствует  $AC_{BLUE}$ .

Затем по формуле (1) вычисляется  $SpO_2$ . Авторы работы провели испытания своего приложения на пользователях различных возрастных групп: начиная с 10–20-летних, заканчивая группой 70–80 лет. Максимальная разница показателей по сравнению со стандартными пульсоксиметрами составила не более 2%.

Похожее решение, представленное Д. Л. Карни, Ф. Ламонака, В. Спрагноло [8], призвано улучшить методику расчета уровня оксигенации, компенсируя внешнее освещение. Авторы используют красный и зеленый спектры изображения, обосновывая это тем, что влияние внешнего ИК шума компенсируется путем правильного расчета масштабных коэффициентов для каждой цветовой полосы. В своей работе они представили алгоритм, состоящий из следующих этапов:

- запись видео;
- извлечение красной и зеленой компонент;
- валидационный тест, заключающийся в анализе 1 и 2 гармоник сигналов;
- фильтрация данных при помощи полосового фильтра в соответствии со значением 1 гармоники;
- расчет частоты сердечных сокращений, используя 1 гармонику и локальные экстремумы;
- расчет компенсированного сигнала.

Коэффициент  $D$  рассчитывается как разница максимумов между значениями красной и зеленой компоненты, а коэффициент  $B$  — как ширина полосы, в которую попадают и красный, и зеленый сигнал.

По таблице коэффициентов, предлагаемой авторами (которая была получена экспериментальным путем), представлены значения коэффициентов  $C'_{Red}$  и  $C'_{Green}$  для рассчитанных значений  $D$  и  $B$ .

Расчет компенсированного сигнала проводится по формуле

$$\begin{cases} (C'_{Red}, C'_{Green}) = L(D', B'), \\ PPG'_{Red} = C'_{Red} * PPG_{Red}, \\ PPG'_{Green} = C'_{Green} * PPG_{Green}, \end{cases}$$

где  $L(D', B')$  — значения из таблицы коэффициентов.

Расчет  $SpO_2$  (%) производится по следующей формуле:

$$SpO_2 = \frac{\varepsilon_{Hb, Red} * \sqrt{m_{Green} * \ln(PPG'_{Green})} - \varepsilon_{Hb, Green} * \sqrt{m_{Red} * \ln(PPG'_{Red})}}{\sqrt{m_{Green} * \ln(PPG'_{Green})} * (\varepsilon_{Hb, Red} - \varepsilon_{HbO, Red}) - \sqrt{m_{Red} * \ln(PPG'_{Red})} * (\varepsilon_{Hb, Green} - \varepsilon_{HbO, Green})}$$

Решение было протестировано на людях в возрастном диапазоне от 43 до 83 лет, максимальная ошибка составила 1%.

Нестандартный подход показали К. Ченг, Дж. Джуен, Б. Шац в работе [9]. Авторы предложили использовать показания акселерометра телефона для машинного обучения. В качестве обучающих данных используются показания трехосевого акселерометра мобильного телефона, полученные в процессе прохождения человеком теста 6-минутной ходьбы с частотой измерения показания 60 Гц. Исследовались 15 пациентов. В качестве признаков использовались следующие 15 параметров:

- математическое ожидание показаний акселерометра;



- дисперсия показаний акселерометра;
- частота пересечения математического ожидания;
- коэффициент вариации;
- коэффициент автокорреляции;
- среднее квадратическое;
- частота пиков;
- энтропия по Шеннону;
- энергия полос ( $B1 - (0 - 1]$  Гц,  $B2 - (1 - 4]$  Гц,  $B3 - (4 - 10]$  Гц,  $B4 - (10 - 30]$  Гц);
- отношение энергий ( $B1/B2, B3/B4, (B1\&B2/B3\&B4)$ ).

Валидация модели проводилась методом кросс-валидации. В результате обученная модель показала значение средней ошибки 0.0113, т.е. 1.13% (табл. 1).

Таблица 1 / Table 1

Сравнительная таблица решений по измерению уровня оксигенации  
Comparative table of solutions for measuring the level of oxygenation

Решение	Вид решения	Точность
[5]	Аппаратное решение	Абсолютная ошибка до 20%
[6]	ПО для мобильного устройства	Абсолютная ошибка до 2%
[8]	ПО для мобильного устройства	Абсолютная ошибка до 1%
[9]	ПО для мобильного устройства	Средняя абсолютная ошибка 1.13%

## 2. Артериальное давление

Артериальное давление является одним из самых важных биомаркеров для человека, показывает давление крови на стенки кровеносных сосудов. Оно определяется объемом крови, перекачиваемым сердцем в единицу времени, и сопротивлением сосудистого русла, поскольку кровь движется под влиянием градиента давления в сосудах, которое создает сердце. Данный биомаркер состоит из двух значений: систолического и диастолического давления.

В. Чандрасекаран с соавт. [10] представили решение для измерения кровяного давления двумя способами: используя два смартфона или один смартфон и внешний микрофон. Основа их методики измерения давления заключается в измерении двух параметров:

- пульс — камерой смартфона;
- биение сердца — микрофоном смартфона или внешним микрофоном, подключенным к смартфону.

Для измерения биений сердца авторы записывают звук биения, располагая микрофон максимально близко к сердцу человека, с частотой дискретизации 8 кГц. Сердечный цикл, рассматриваемый авторами, состоит из двух компонент:

- сигнал S1, который сочетает в себе работу митрального и трехстворчатого клапанов;
- сигнал S2, который сочетает в себе работу аортального клапана и клапана легочной артерии.

Пульс авторы в своей работе измеряют на основе метода, предложенного в [11], при частоте 24 кадр/с. Общее временное окно сбора данных составляет 20 секунд после установки синхронизации по времени. Аудиоданные сначала обрабатываются полосовым фильтром, настроенным на полосу 10–250 Гц, так как там располагаются основные звуки сердца, и производится ресемплирование на частоту 1 кГц. Далее алгоритм определяет пики сигналов с микрофона и видеоданных, где максимальное значение пульса является систолой, что соответствует сигналу S2. Для расчета систолического давления используется формула

$$\Delta P_S = -0.425 * \Delta VTT.$$

Для определения диастолического давления сначала производится расчет ударного объема по формуле

$$SV(mL) = -6.6 + 0.25 * (ET - 35) - 0.62 * HR + 40.4 * BSA - 0.51 * Age,$$



где  $BSA$  — параметр, определяемый по формуле

$$BSA = 0.007184 * Weight^{0.425} * Height^{0.725}.$$

Далее определяется пульсовое давление по формуле

$$P_p = \frac{SV}{(0.013 * Wt - 0.007 * Age - 0.004 * HR) + 1.307}.$$

Расчет диастолического давления в результате вышеописанных вычислений определяется по формуле

$$P_d = P_s - P_p.$$

Для оценки точности предлагаемой системы авторами были проведены обширные испытания на пациентах в возрастном диапазоне от 22 до 28 лет. В результате точность определения кровяного давления составила 95–100%.

Другой подход предлагают И. Морси, А. Гавад в [12], а именно использовать аппаратное решение для измерения артериального давления. На базе микроконтроллера ATMEGA авторы разработали электрические схемы обвязки, которые содержат в себе ИК-сенсор, фоторезистор, а также датчик деформации и пьезоэлектрический сенсор и манжету.

В рамках работы авторы определяют только частоту сердечных сокращений, используя метод анализа фотоплетизмограмм, определяя объем крови, проходящий через артерии на пальце, по данным фоторезистора и ИК-сенсора. Для определения диастолического давления они используют датчики деформации (и пьезоэлектрические датчики), подключенные к мостовой схеме Уитстона. Определения показания основаны на детектировании так называемых тонов Короткова, которые используют для аускультативного измерения артериального давления. Разработанный российским ученым Коротковым, данный метод является единственным методом определения артериального давления, принятым Всемирной организацией здравоохранения.

В результате проведенных испытаний ошибка определения пульса составила 0.9% для ИК-датчика, 1.5% — для фоторезистора, 0.9% — для датчиков деформации и 0.1% — для пьезоэлектрических сенсоров. Сравнение проходило с дорогостоящим тонометром NEM-907XL.

Ц. Цзин и М. Сан предложили метод определения артериального давления с помощью только данных фотоплетизмограмм с использованием нейросетевых алгоритмов [13]. Они довольно хорошо обосновали корреляцию между фотоплетизмограммой и артериальным давлением, применяя формулу взаимосвязи модуля Юнга и давления

$$E = E_0 * e^{\gamma P}$$

и формулу определения объема крови в сосудах

$$V = C * \pi * r^2 + V_0,$$

а также приводя формулу нормированного значения фотоплетизмограммы

$$PPG_{norm} = \frac{V - V_{min}}{V_{min}} = \frac{2 * (e^{-\gamma P_{min}} - e^{-\gamma P})}{b - 2 * e^{-\gamma P_{min}}}.$$

Для лучшей визуализации авторы приводят масштабированный вариант определения фотоплетизмограммы по формуле

$$PPG_{scaled} = k_s * PPG_{norm} + V_{off} \approx k * (e^{-\gamma P_{min}} - e^{-\gamma P}) + V_{off},$$

где  $k$  — коэффициент масштабирования,  $V_{off}$  — коэффициент компенсации.



Для обучения нейронной сети они использовали признаки из частотной области сигнала фотоплетизмограмм, а именно амплитуды и фазы гармоник, извлекаемые с помощью быстрого преобразования Фурье. В качестве верхней частоты используется 10.8 Гц. Архитектура нейронной сети имеет вид многослойной нейронной сети прямого распространения с обратным распространением ошибки. Для обучения использовался алгоритм Левенберга – Марквардта, обучающими данными являлись показания 69 пациентов из базы данных MIMIC II. В результате проведения испытаний среднеквадратическая ошибка составила 0.06 мм рт.ст. для систолического и 0.01 мм рт.ст. для диастолического давления.

Г. Слапникер, Н. Млакар и М. Лустрек использовали другую конфигурацию нейронной сети [14]. Они наиболее разборчиво подошли к обучающей выборке из базы данных MIMIC III. В рамках их работы были использованы данные 510 пациентов. Признаками для обучения являются:

- время цикла;
- время от начала цикла до систолического пика;
- время от систолического пика до конца цикла;
- время от начала цикла до первого максимума первой производной;
- время от начала цикла до второго максимума первой производной;
- время от систолического пика до второго максимума первой производной;
- время от второго максимума первой производной до конца цикла;
- отношение между систолической и диастолической амплитудой;
- три самые большие значения амплитуд гармоник спектра;
- энергия;
- энтропия;
- нормализованная гистограмма амплитуд по 10 интервалам;
- асимметрия и эксцесс.

В качестве архитектуры использовалась спектро-темпоральная остаточная нейронная сеть. В результаты проведенных испытаний средняя абсолютная ошибка составила 9.43 мм рт.ст для систолического и 6.88 мм рт.ст для диастолического давления (табл. 2).

Таблица 2 / Table 2

Сравнительная таблица решений по измерению артериального давления  
Comparative table of solutions for measuring blood pressure

Решение	Вид решения	Точность
[10]	ПО для мобильного устройства + дополнительная аппаратура	Абсолютная ошибка до 5%
[12]	Аппаратное решение	Среднеквадратическая ошибка до 0.9111% для датчиков деформации и 0.1% для пьезоэлектрических сенсоров
[13]	ПО для мобильного устройства	Среднеквадратическая ошибка 0.06 мм рт.ст. для систолического давления и 0.01 мм рт.ст. для диастолического давления
[14]	ПО для мобильного устройства	Средняя абсолютная ошибка 9.43 мм рт.ст. для систолического давления и 6.88 мм рт.ст. для диастолического давления

### 3. Обсуждение и открытые проблемы

В большинстве работ подходы измерений для определения уровня оксигенации и показателя артериального давления опираются на использование фотоплетизмограмм. К сожалению, испытания показанных решений не являются всеобъемлющими, ввиду того что возрастной диапазон пациентов не является достаточно обширным. Существует необходимость проведения испытаний на более пожилых испытуемых, ввиду того что продолжительность жизни людей увеличилось далеко за 60 лет. В большинстве решений для расчетов представлены



формулы, имеющие эмпирически полученные константы. К сожалению, авторами таких работ не было представлено параметров, которые влияют на значения констант. Можно предположить, что аппаратная реализация сенсорики смартфонной техники может потенциально влиять на данные показатели.

В целом решения по определению уровня насыщенности кислородом и артериального давления показали, что в большей степени представлены решения с использованием смартфонной техники, и это позволяет реализовать доступное для большого количества людей комплексное решение по определению рассматриваемых биометрических показателей. Однако такие решения могут быть неприемлемыми для организации системы мониторинга состояния здоровья сотрудников предприятий, особенно на режимных объектах, где их деятельность сопряжена с высокими рисками для здоровья. На режимных объектах зачастую вводится ограничение на использование смартфонной техники в связи с политикой обеспечения информационной безопасности сведений, относящихся к государственной тайне.

## Заключение

В результате проведенного обзора можно заключить, что основной платформой, на которой реализуются решения по мониторингу основных биомаркеров, таких как уровень оксигенации и артериальное давление, являются смартфоны. К основным проблемам показанных решений относятся недостаточная выборка испытуемых, их малый возрастной диапазон, а также отсутствие калибровочных алгоритмов для оптимизация решения под конкретное устройство. Данные проблемы решаемы путем дополнительных испытаний с использованием расширенного спектра испытуемых, а также разработки процедуры калибровки алгоритмов на устройствах с различной аппаратной реализацией сенсорики.

## Список литературы / References

1. Vildjiounaite E., Kallio J., Kyllönen V., Nieminen M., Määttänen I., Lindholm M., Mäntyjärvi J., Gimel'farb G. Unobtrusive stress detection on the basis of smartphone usage data. *Personal and Ubiquitous Computing*, 2018, vol. 22, pp. 671–688. <https://doi.org/10.1007/s00779-017-1108-z>
2. Simantiraki O., Giannakakis G., Pampouchidou A., Tsiknakis M. Stress detection from speech using spectral slope measurements. In: Oliver N., Serino S., Matic A., Cipresso P., Filipovic N., Gavrilovska L. (eds) *Pervasive Computing Paradigms for Mental Health* (FABULOUS 2016, MindCare 2016, IIOT 2015). Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering, vol. 207. Cham, Springer, 2018, pp. 41–50. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-74935-8\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-74935-8_5)
3. Pili U. Measurement of breathing rate with a smartphone magnetometer: An engaging classroom activity in physics and biology. *Physics Education*, 2019, vol. 54, iss. 6, art. 063001. <https://doi.org/10.1088/1361-6552/ab393f>
4. Xu C., Yang Y., Gao W. Skin-interfaced sensors in digital medicine: From materials to applications. *Matter*, 2020, vol. 2, iss. 6, pp. 1414–1445. <https://doi.org/10.1016/j.matt.2020.03.020>
5. Abay T., Kyriacou P. Photoplethysmography for blood volumes and oxygenation changes during intermittent vascular occlusions. *Journal of Clinical Monitoring and Computing*, 2018, vol. 32, pp. 447–455. <https://doi.org/10.1007/s10877-017-0030-2>
6. Kanva A., Sharma C., Deb S. Determination of SpO<sub>2</sub> and heart-rate using smartphone camera. *Proceedings of the 2014 International Conference on Control, Instrumentation, Energy and Communication (CIEC)*. Calcutta, India, 2014, pp. 237–241. <https://doi.org/10.1109/CIEC.2014.6959086>
7. Scully C., Lee J., Meyer J., Gorbach A., Granquist-Fraser D., Mendelson Y., Chon K. Physiological parameter monitoring from optical recordings with a mobile phone. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2012, vol. 59, iss. 2, pp. 303–306. <https://doi.org/10.1109/TBME.2011.2163157>
8. Carni D. L., Grimaldi D., Sciammarella P. F., Lamonaca F., Spagnuolo V. Setting-up of PPG scaling factors for SpO<sub>2</sub>% evaluation by smartphone. *2016 IEEE International Symposium on Medical Measurements and Applications (MeMeA)*. Benevento, Italy, 2016, pp. 1–5. <https://doi.org/10.1109/MeMeA.2016.7533775>
9. Cheng Q., Juen J., Schatz B. Using mobile phones to simulate pulse oximeters: Gait analysis predicts oxygen saturation. *Proceedings of the 5th ACM Conference on Bioinformatics, Computational*



- Biologiy and Health Informatics*, 2014, iss. 1, pp. 331–340. <https://doi.org/10.1145/2649387.2649403>
10. Chandrasekaran V., Dantu R., Jonnada S., Thiyagaraja S., Subbu K. Cuffless differential blood pressure estimation using smart phones. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2013, vol. 60, iss. 4, pp. 1080–1089. <https://doi.org/10.1109/TBME.2012.2211078>
  11. Pelegris P., Banitsas K., Orbach T., Marias K. A novel method to detect Heart Beat Rate using a mobile phone. *2010 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology*. Buenos Aires, Argentina, 2010, pp. 5488–5491. <https://doi.org/10.1109/IEMBS.2010.5626580>
  12. Morsi I., Gawad Y. Z. A. E. Measurement of blood pressure and heart beat based on sensors and microcontrollers. *Applied Mechanics and Materials*, 2012, vol. 249–250, pp. 193–201. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.249-250.193>
  13. Xing X., Sun M. Optical blood pressure estimation with photoplethysmography and FFT-based neural networks. *Biomedical Optics Express*, 2016, vol. 7, iss. 8, pp. 3007–3020. <https://doi.org/10.1364/BOE.7.003007>
  14. Slapničar G., Mlakar N., Luštrek M. Blood pressure estimation from photoplethysmogram using a spectro-temporal deep neural network. *Sensors*, 2019, vol. 19, iss. 15, art. 3420. <https://doi.org/10.3390/s19153420>

Поступила в редакцию / Received 04.03.2023

Принята к публикации / Accepted 17.07.2023

Опубликована / Published 30.08.2024





Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 432–441  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 432–441  
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-432-441>, EDN: NIUIGP

Научная статья  
УДК 004.932.2

## Выделение признаков на изображениях на основе интегральных преобразований при решении задач классификации фрагментов фотоснимков

А. А. Клячин

Волгоградский государственный университет, Россия, 400062, г. Волгоград, Университетский пр-т, д. 100

**Клячин Алексей Александрович**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа и теории функций, [aleksey.klyachin@volsu.ru](mailto:aleksey.klyachin@volsu.ru), <https://orcid.org/0000-0003-3293-9066>, AuthorID: 9530

**Аннотация.** В статье предложен способ вычисления признаков на изображении для формирования обучающего набора данных при решении различных задач классификации видеоснимков. Данный метод предполагает использование известных интегральных преобразований — преобразование Радона и функции Стеклова. Приводится сравнение предложенного способа со сверточными нейронными сетями как по проценту правильного предсказания, так и по времени его выполнения. В качестве тестовой задачи рассмотрена задача определения наличия изображения автомобиля на фотоснимке.

**Ключевые слова:** преобразование Радона, функции Стеклова, сверточная нейронная сеть, методы машинного обучения

**Для цитирования:** Клячин А. А. Выделение признаков на изображениях на основе интегральных преобразований при решении задач классификации фрагментов фотоснимков // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 432–441. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-432-441>, EDN: NIUIGP

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Extraction of features in images based on integral transformations in solving problems of classification of fragments of photographs

A. A. Klyachin

Volgograd State University, 100 Prosp. Universitetsky, 400062 Volgograd, Russia

**Alexey A. Klyachin**, [aleksey.klyachin@volsu.ru](mailto:aleksey.klyachin@volsu.ru), <https://orcid.org/0000-0003-3293-9066>, AuthorID: 9530

**Abstract.** The article proposes a method for calculating features in an image to form a training data set for solving various problems of video image classification. This method involves the use of well-known integral transformations — the Radon transform and the Steklov function. The proposed method is compared with convolutional neural networks both in terms of the percentage of correct prediction and in terms of its execution time. As a test task, the problem of finding a fragment of a photograph containing an image of a car is considered.

**Keywords:** Radon transform, Steklov functions, convolutional neural network, machine learning methods

**For citation:** Klyachin A. A. Extraction of features in images based on integral transformations in solving problems of classification of fragments of photographs. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics.*



*Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 432–441 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-432-441>, EDN: NIUIGP

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

В современном мире происходит стремительное возрастание использования видеoinформации как в повседневной жизни людей, так и в различных системах мониторинга, технического зрения, регистрации и передачи больших объемов видеоданных. В частности, методы цифровой обработки изображений применяются для предварительного анализа изображений с последующим решением задач компьютерного зрения (поиск и распознавание объектов на изображении, 3D реконструкция объектов и т. д.). Компьютерное зрение — область науки, которая занимается задачами, связанными с анализом изображений и видео. К таким задачам относятся: распознавание текста; биометрия (для распознавания людей используются изображения лица, радужной оболочки глаз, отпечатки пальцев); видеоаналитика (видеорегистрация движения автомобилей или отслеживания потоков людей, детектирования различных нестандартных ситуаций); анализ спутниковых снимков; 3D-анализ (реконструкция объемных моделей); анализ информации, получаемой с датчиков, для систем предотвращения ДТП и все более сложных автопилотов и т. п. Методы компьютерного зрения используются для решения задач, которые условно можно разделить на низкоуровневые и высокоуровневые. Высокоуровневые задачи отвечают на вопросы, какой объект изображен на картинке, к какому классу он относится. Для решения этих задач чаще всего используются методы машинного обучения. При решении низкоуровневых задач производятся различные манипуляции непосредственно с уровнями яркости точек (пикселей). Чаще всего низкоуровневые задачи используются как составная часть более сложных задач распознавания. Например, предобработка картинки позволяет алгоритмам машинного обучения лучше понять, что на ней изображено.

В настоящей работе предложен способ выделения признаков на изображении, основанный на применении интегральных преобразований. Некоторые свойства таких преобразований позволяют представить входное изображение некоторым набором числовых значений, по которым можно вести их классификацию. Для разработки кода и тестирования предложенного нами метода мы воспользовались соответствующим программным обеспечением. На сегодняшний день, пожалуй, самая популярная библиотека для решения задач низкоуровневого компьютерного зрения — это OpenCV. В ней содержится огромное количество алгоритмов, есть интерфейсы для многих языков программирования, в том числе C++ и Python. Помимо этого, мы использовали уже готовые реализации алгоритмов машинного обучения в виде соответствующих модулей языка Python:

1) Scikit-learn — это один из наиболее широко используемых пакетов Python для Data Science и Machine Learning;

2) Keras — это библиотека глубокого обучения, представляющая собой высокоуровневый API, написанный на Python и способный работать поверх TensorFlow, Theano или CNTK.

## 1. Общая идея метода

При решении задач компьютерного зрения, как правило, используют два подхода. Первый основан на заранее известной информации об объектах, которые изображены на снимках: это может быть их форма (используется контурный анализ), цветовой тон (используются различные методы цветовой фильтрации) и т. д. В этом случае для выделения и распознавания объектов применяются базовые алгоритмы обработки изображений [1]. Вторым подходом основан на применении методов машинного обучения, что предполагает выделение некоторых признаков, характеризующих изображенные объекты (см., например, [2–10]). Одним из универсальных способов получить такие признаки является использование сверточной нейронной сети. Обусловлено это тем, что сверточная нейронная сеть содержит слои, которые применяют



фильтры для выделения нужных признаков на изображении. Процесс обучения на достаточно большом наборе входных изображений позволяет определить наиболее характерные признаки, присутствующие в данном наборе. В следующих работах можно познакомиться как с задачами, решаемыми при помощи сверточных нейронных сетей, так и с их архитектурой [11–18]. В настоящей работе представлен иной подход вычисления признаков, основанный на различных интегральных преобразованиях. В частности, применяются идеи, опирающиеся на два интегральных преобразования: преобразование Радона [19] и функции Стеклова [20].

Преобразование Радона — интегральное преобразование функции многих переменных, родственное преобразованию Фурье. Впервые введено в 1917 г. австрийским математиком Иоганном Радонам. Отметим, что преобразование Радона обладает свойством обратимости, т. е. возможностью восстанавливать исходную функцию по ее преобразованию Радона.

Для произвольной функции  $z = f(x, y)$ , определенной на плоскости  $(x, y)$ , полагаем

$$R(r, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r \cos \varphi + t \sin \varphi, r \sin \varphi - t \cos \varphi) dt,$$

где  $r > 0$  и  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Полученная функция  $R(r, \varphi)$  есть интеграл по всем прямым плоскости, которые описываются уравнениями

$$x = r \cos \varphi + t \sin \varphi, \quad y = r \sin \varphi - t \cos \varphi, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Данная функция  $R(r, \varphi)$  называется *преобразованием Радона функции*  $f(x, y)$ .

Если  $f(x, y)$  задает яркость точки  $(x, y)$  на изображении, то вместо интегралов по всем прямым будем рассматривать среднюю яркость по всем вертикальным, горизонтальным и диагональным линиям, т. е. вычислять среднюю яркость по строкам, столбцам и диагоналям изображения. Понятно, что в этом случае мы теряем часть информации. Однако это вполне допустимо, так как при решении задач классификации изображений нет необходимости в их полном восстановлении.

Функции Стеклова введены русским математиком В. А. Стекловым (1907 г.) для решения задач, связанных с представлением функций в виде рядов по системам собственных функций. Для заданной функции  $z = f(x, y)$  и  $h > 0$  полагают

$$f_h(x, y) = \frac{1}{h^2} \int_{x-h/2}^{x+h/2} \int_{y-h/2}^{y+h/2} f(u, v) dv du.$$

Таким образом,  $f_h(x, y)$  есть среднее значение функции  $f(x, y)$  в квадрате  $[x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}] \times [y - \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}]$ . Известно, что для непрерывной функции  $f(x, y)$  семейство функций  $f_h(x, y)$  равномерно сходится к исходной функции на компактных множествах при  $h \rightarrow 0$ .

Для случая изображений мы заменим интегралы на суммы, и результат такого преобразования будем рассматривать в отдельных точках. В итоге получим следующую конструкцию. Разбиваем входное изображение на блоки пикселей и в каждом блоке вычисляем среднее значение яркости. Полученный набор значений записываем в отдельный массив. Здесь также происходит потеря информации, и восстановить по этим данным изображение невозможно. Однако эти потери несущественны при решении задач распознавания объектов на изображении, что будет показано далее.

## 2. Выделение признаков с применением интегральных преобразований

Любое изображение размера  $n \times m$  в оттенках серого цвета можно считать функцией двух переменных  $f(x, y)$  как функцию яркости точки  $(x, y)$ , где  $x$  — номер столбца,  $y$  — номер



строки. Введем обозначения

$$M_y^f(x) = \frac{1}{m} \cdot \sum_{y=0}^{m-1} f(x, y), \quad M_x^f(y) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{x=0}^{n-1} f(x, y). \quad (1)$$

Другими словами,  $M_y^f(x)$  — средняя яркость пикселей изображения  $f$ , расположенных в столбце  $x$ ,  $M_x^f(y)$  — средняя яркость пикселей изображения  $f$ , расположенных в строке  $y$ .

Помимо этого, рассмотрим средние яркости, вычисленные по диагональным направлениям. Предположим, что  $m = n$  (в алгоритме мы все изображения приводим к квадратному виду). Пусть

$$D_1^f(y) = \frac{1}{y+1} \cdot \sum_{x=0}^y f(y-x, x), \quad D_2^f(y) = \frac{1}{m-y} \cdot \sum_{x=y}^{m-1} f(m-1+y-x, x), \quad (2)$$

где  $y = 0, 1, 2, \dots, m-1$ . Функции  $D_1^f(y)$  и  $D_2^f(y)$  представляют собой средние значения яркостей точек, расположенных по диагоналям.

Для вычисления средних значений яркости точек, расположенных на диагоналях другого направления, достаточно транспонировать матрицу изображения и воспользоваться формулами (2).

С определенной точностью введенные величины  $M_y^f(x)$ ,  $M_x^f(y)$ ,  $D_1^f(y)$  и  $D_2^f(y)$  аппроксимируют (суммирование ведется только по вертикальным, горизонтальным и диагональным прямым) преобразование Радона изображения  $f$ . Поэтому можно попытаться использовать их в задачах классификации изображений. Эти величины дают нам  $4n$  признаков изображения, которые достаточно легко вычисляются.

Дадим следующее пояснение к тому, что по формулам (1) и (2) будут вычисляться величины, указывающие на наличие определенного фрагмента рисунка. Для простоты предположим, что входное изображение на черном фоне ( $f(x, y) = 0$ ) содержит отрезок белого цвета ( $f(x, y) = 255, x = x_0, y_0 \leq y \leq y_1$ ). Тогда

$$M_y^f(x_0) = 255 \cdot \frac{y_1 - y_0 + 1}{m},$$

а при  $x \neq x_0$  значения  $M_y^f(x) = 0$ . Это указывает на то, что на линии  $x = x_0$  есть точки с высокой яркостью.

С другой стороны,  $M_x^f(y) = 255/n$  при  $y_0 \leq y \leq y_1$ , и  $M_x^f(y) = 0$  для остальных  $y$ . Следовательно, точки на этой линии с высокой яркостью сосредоточены на отрезке  $y_0 \leq y \leq y_1$ . Тем самым строение функций  $M_y^f(x)$  и  $M_x^f(y)$  указывает на наличие отрезка белого цвета.

Как уже было сказано, помимо преобразования Радона, мы используем функции Стиклера. Для случая изображений определим их так. Зададим натуральное число  $q = 2k + 1$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , и для каждой точки  $(x, y)$ ,  $x = k, k+q, \dots, k+[n/q]q-q$ ,  $y = k, k+q, \dots, k+[m/q]q-q$ , положим

$$S_q(x, y) = \frac{1}{q^2} \sum_{u=-k}^k \sum_{v=-k}^k f(x+u, y+v).$$

Данная величина определяет осредненное изображение. При этом  $S_q(x, y) = f(x, y)$ , когда  $q = 1$  ( $k = 0$ ). На рис. 1 можно видеть результат такого преобразования. Заметим, что общие очертания изображенного автомобиля легко угадываются, что дает возможность использования полученных признаков в задачах классификации.

Рис. 1. Изображение признаков  $S_q(x, y)$ Fig. 1. Image of  $S_q(x, y)$  features

### 3. Описание алгоритма и результатов его работы

Мы будем рассматривать задачу определения наличия на фотоснимке изображения автомобиля (бинарная классификация). Для этого был сформирован обучающий набор изображений автомобилей, снятых с разных ракурсов, в том числе взятый с ресурса <https://www.kaggle.com/>. Помимо этого, на основе различных фотографий городских улиц, зданий, парков и т. д. были сгенерированы фрагменты этих снимков для обучающего набора снимков, не содержащих изображение автомобиля. В итоге мы получили 1776 снимков, содержащих изображение автомобиля, и 1800 снимков, не содержащих изображения автомобиля. Далее для каждого изображения были выполнены следующие вычисления.

- Изображение `img` приводится к размеру  $200 \times 200$  точек  
`res = cv2.resize(img, (200,200), interpolation=cv2.INTER_CUBIC)`.
- Изображение `res` переводится в оттенки серого цвета  
`gray = cv2.cvtColor(res, cv2.COLOR_BGR2GRAY)`.
- Изображение `gray` разбивается на 4 блока размера  $100 \times 100$  точек: `frame00`, `frame01`, `frame10` и `frame11`. Для каждого из них по формулам (1), (2) вычисляется массив значений, после чего эти данные записываются в текстовый файл `dataset.csv`.

Для построения модели классификации входного изображения мы воспользовались методами машинного обучения, а также их программными реализациями в библиотеке `Scikit-learn` [21]. Для каждого отдельного метода обучение производилось на основе сформированного файла `dataset.csv`. Вся выборка случайным образом делилась в соотношении 7:3 на обучающую часть и тестовую. Результат проверки можно увидеть в табл. 1 (количество признаков 800).

Таблица 1 / Table 1

Результат использования величин (1) и (2)

The result of using values (1) and (2)

Метод	Процент правильного определения класса на тестовой выборке
KNeighborsClassifier	95.34
Naive_bayes.GaussianNB	59.83
DecisionTreeClassifier	88.63
LinearDiscriminantAnalysis	86.30
LinearSVC	86.57
RandomForestClassifier	95.71

Для улучшения результата мы добавили к признакам, вычисляемым по формулам (1) и (2), новые параметры, которые рассчитываются следующим образом. Сначала выполняется фильтрация изображения `gray` с целью выделения границ перепадов уровня яркости



`edges = cv2.Canny(gray, 50, 150, apertureSize = 3).`

На рис. 2 видим результат этих преобразований.

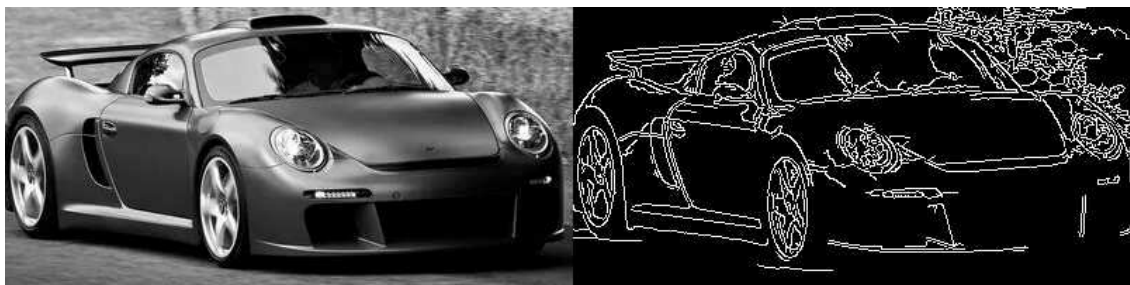


Рис. 2. Выполнение преобразования `cv2.Canny()`  
 Fig. 2. Performing the `cv2.Canny()` conversion

После этого изображение разбивается на блоки размером  $q \times q$ . В каждом таком блоке формируется набор светлых точек в виде массива, содержащего пару  $[x_i, y_i]$ , где  $y_i$  — номер строки и  $x_i$  — номер столбца  $i$ -й светлой точки. Затем этот набор точек аппроксимируется прямолинейным отрезком, который описывается уравнением  $y = a \cdot x + b$ . Параметры  $a, b$  вычисляются методом наименьших квадратов

$$a = \frac{r \sum_{i=1}^r x_i y_i - \sum_{i=1}^r x_i \cdot \sum_{i=1}^r y_i}{r \sum_{i=1}^r x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^r x_i\right)^2}, \quad b = \frac{1}{r} \left( \sum_{i=1}^r y_i - a \cdot \sum_{i=1}^r x_i \right),$$

где  $r$  — количество светлых точек в блоке.

Данные величины могут служить признаком на изображении, так как эти отрезки приближают набор белых точек в блоке (рис. 3).

Введение новых параметров несколько улучшило результаты распознавания, при этом количество признаков возросло до 1600 (нами было взято  $q = 10$ ). Помимо доли правильных ответов, нас интересовало и время, которое необходимо той или иной модели для классификации изображения. Поэтому в третьем столбце табл. 2 мы поместили соответствующие значения. Время измерялось на компьютере с процессором AMD® A8-4555m apu with radeon(tm) hd graphics x 4.



Рис. 3. Аппроксимация набора светлых точек прямолинейным отрезком  
 Fig. 3. Approximation of a set of light points by a straight line segment

Таблица 2 / Table 2

Результаты использования дополнительных признаков  
 Results of using additional features

Метод	Процент правильного определения класса на тестовой выборке	Время выполнения предсказания на одном изображении, с
KNeighborsClassifier	96.64	0.0476
Naive_bayes.GaussianNB	63.00	0.0201
DecisionTreeClassifier	88.25	0.0197
LinearDiscriminantAnalysis	84.43	0.0199
LinearSVC	93.38	0.0200
RandomForestClassifier	95.61	0.0313





Для сравнения нами была сконструирована сверточная нейронная сеть на базе библиотеки Keras со следующей структурой:

Layer (type)	Output Shape	Param #
conv2d_9 (Conv2D)	(None, 198, 198, 18)	180
max_pooling2d_9 (MaxPooling2D)	(None, 99, 99, 18)	0
conv2d_10 (Conv2D)	(None, 97, 97, 12)	1956
max_pooling2d_10 (MaxPooling2D)	(None, 48, 48, 12)	0
conv2d_11 (Conv2D)	(None, 44, 44, 9)	2709
max_pooling2d_11 (MaxPooling2D)	(None, 22, 22, 9)	0
flatten_3 (Flatten)	(None, 4356)	0
dense_3 (Dense)	(None, 2)	8714

```
=====  
Total params: 13,559  
Trainable params: 13,559  
Non-trainable params: 0
```

Как видим, в ней общее количество параметров равно 13 599. Обучение сети проходило по тому же набору изображений, что и вычисление признаков и формирование файла `dataset.csv`. В итоге построенная сеть дала 97.69% правильного определения класса изображения на тестовой выборке. Заметим, что мы рассматривали разные варианты строения сети. Вышеприведенная структура сети показала лучший результат. При этом процент правильной классификации изображений из тестовой выборки лежал в диапазоне от 93.7% до 97.69%. Время выполнения предсказания для одного изображения размера  $720 \times 1280$  точек равнялось 0.0722 с.

Другим подходом к решению различных задач компьютерного зрения является использование предварительно обученной сети. Для нашего случая мы за основу взяли сверточную нейронную сеть, обученную на наборе ImageNet (1.4 млн изображений, разбитых на 1000 разных классов). Мы воспользовались архитектурой VGG16, которая входит в состав фреймворка Keras. Ее можно импортировать из модуля `keras.applications` [22]. Так как набор классов содержит в себе виды различных автомобилей, то мы не стали добавлять плотные слои в нейронную сеть VGG16 и доучивать ее на нашем наборе снимков. Определив выход нейронной сети с помощью метода `predict()` на нашем наборе изображений автомобилей, мы вычислили процент правильно угаданных снимков. Он оказался равным 98.42%. Время выполнения предсказания для одного изображения в среднем составило 0.652 с.

В качестве примера применения разработанного алгоритма рассмотрим задачу нахождения на входном фотоснимке фрагмента, содержащего изображение автомобиля. Для решения данной задачи воспользуемся следующим способом. Пусть снимок имеет размеры  $W$  точек в ширину и  $H$  точек в высоту. Будем перебирать все фрагменты, имеющие размеры соответственно  $[\alpha \cdot W]$  и  $[\beta \cdot H]$ , где  $[x]$  — целая часть числа  $x$ ,  $\alpha < 1$  — некоторое положительное число. Перебор будем осуществлять сверху вниз и слева направо с некоторым шагом  $q$ . Для каждого такого фрагмента с помощью построенной модели определяем наличие в нем



изображения автомобиля и обводим этот фрагмент прямоугольником определенного цвета, если автомобиль найден (рис. 4).



Рис. 4. Результат поиска фрагментов с автомобилем  
Fig. 4. The result of the search for fragments with a car

## Заключение

В работе был описан метод выделения признаков на изображениях, основанный на применении интегральных преобразований. На нескольких иллюстрирующих примерах было показано, что эти признаки вполне подходят для их использования в задачах классификации. Сравнение разработанного подхода со сверточными нейронными сетями позволяет сказать, что он им не сильно уступает по такому показателю, как процент правильных предсказаний. При этом по времени выполнения предсказания представленный в статье метод работает от 2.5 до 140 раз быстрее в зависимости от используемой модели.

## Список литературы

1. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. Москва : Техносфера, 2005. 1072 с.
2. Борзов С. М., Потатуркин А. О., Потатуркин О. И., Федотов А. М. Исследование эффективности классификации гиперспектральных спутниковых изображений природных и антропогенных территорий // Автометрия. 2016. Т. 52, № 1. С. 3–14. <https://doi.org/10.15372/AUT20160101>, EDN: VSSHQT
3. Дорогов А. Ю., Курбанов Р. Г., Разин В. В. Быстрая классификация JPEG-изображений // Интернет-математика 2005. Автоматическая обработка веб-данных. Москва, 2005. С. 147–172.
4. Осокин В. В., Аипов Т. Д., Ниязова З. А. О классификации изображений и музыкальных файлов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2015. Т. 19, № 1. С. 49–70. EDN: UWLELY
5. Купенова Э. М., Кашницкий А. В. Метод случайных лесов в задачах классификации спутниковых снимков // Вестник Тверского государственного университета. Серия: География и геоэкология. 2018. № 3. С. 99–107. EDN: VRYRGY
6. Гончарова Е. Ф., Гайдель А. В. Методы отбора признаков для задач классификации изображений земной поверхности // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2017) : сб. тр. III международной конференции и молодежной школы. Самара : Новая техника, 2017. С. 535–540. EDN: YQLPDZ
7. Туркова М. А., Гайдель А. В. Корреляционные признаки для классификации текстурных изображений // Информационные технологии и нанотехнологии : сб. тр. IV международной конференции и молодежной школы. Самара : Новая техника, 2018. С. 595–599. EDN: XMWXVZ
8. Чуличков А. И., Морозова И. В. Классификация размытых изображений и оценка параметров системы регистрации методами морфологического анализа // Интеллектуальные системы. 2005. Т. 9, № 1–4. С. 321–344. EDN: LZDWRV
9. Борзов С. М., Потатуркин О. И. Классификация типов растительного покрова по гиперспектральным данным дистанционного зондирования земли // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2014. Т. 12, вып. 4. С. 13–22. EDN: TMFZOJ



10. Пестунов И. А., Рылов С. А., Мельников П. В. Классификация гиперспектральных изображений высокого пространственного разрешения // Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies. 2018. Т. 11, вып. 1. С. 69–76. <https://doi.org/10.17516/1999-494X-0010>, EDN: [YPSWQC](#)
11. Китаев Д. Н. Сравнение сверточной нейронной сети и метода главных компонент в задаче классификации текстурных изображений // LXVIII Молодежная научная конференция, посвященная 20-летию со дня начала эксплуатации Международной космической станции : тез. докл. / отв. ред. А. Б. Прокофьев. Самара : Изд-во Самарского ун-та, 2018. С. 88–89. EDN: [FNYNOI](#)
12. Голубков А. М. Бинарная классификация изображений на примере задачи распознавания лиц // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2018. № 7. С. 26–30. EDN: [VJYUBZ](#)
13. Нежевенко Е. С., Феоктистов А. С., Дашевский О. Ю. Нейросетевая классификация гиперспектральных изображений на основе преобразования Гильберта – Хуанга // Автометрия. 2017. Т. 53, № 2. С. 79–84. <https://doi.org/10.15372/AUT20170209>, EDN: [YKFYYR](#)
14. Васкан В. Д. Обзор архитектур сверточных нейронных сетей для задачи классификации изображений // ИТ-Стандарт. 2021. № 3 (28). С. 34–39. EDN: [WQQUFN](#)
15. Солдатова О. П., Гаршин А. А. Применение сверточной нейронной сети для распознавания рукописных цифр // Компьютерная оптика. 2010. Т. 34, № 2. С. 252–260. EDN: [MOTHJX](#)
16. Ле Мань Ха. Сверточная нейронная сеть для решения задачи классификации // Труды Московского физико-технического института (НИУ). 2016. Т. 8, № 3. С. 91–97. EDN: [WWMDBT](#)
17. Азаров И. С., Проконеня А. С. Сверточные нейронные сети для распознавания изображений // Big Data and Advanced Analytics. 2020. № 6–1. С. 271–280. EDN: [HBCXHL](#)
18. Сикорский О. С. Обзор сверточных нейронных сетей для задачи классификации изображений // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. 2017. № 20. С. 37–42. EDN: [YNADUJ](#)
19. Deans S. R., Roderick S. The Radon Transform and Some of its Applications. New York : John Wiley & Sons, 1983. 289 p.
20. Жук В. В., Кузютин В. Ф. Аппроксимация функций и численное интегрирование. Санкт-Петербург : Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 1995. 352 с.
21. Воронина В. В., Михеев А. В., Ярушкина Н. Г., Святов К. В. Теория и практика машинного обучения : учеб. пособие. Ульяновск : УлГТУ, 2017. 290 с. EDN: [QNQXJP](#)
22. Шолле Ф. Глубокое обучение на Python. Санкт-Петербург : Питер, 2018. 400 с. (Библиотека программиста).

### References

1. Gonzalez R., Woods R. Digital Image Processing. Pearson/Prentice Hall, 2008. 954 p. (Russ. ed.: Moscow, Tekhnosfera, 2005. 1072 p.).
2. Borzov S. M., Potaturkin A. O., Potaturkin O. I., Fedotov A. M. Analysis of the efficiency of classification of hyperspectral satellite images of natural and man-made areas. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2016, vol. 52, iss. 1, pp. 1–10. <https://doi.org/10.3103/S8756699016010015>, EDN: [WWFRIF](#)
3. Dorogov A. Yu., Kurbanov R. G., Razin V. V. Quick classification of JPEG images. *Internet Mathematics 2005. Automatic Processing of Web Data*. Moscow, 2005, pp. 147–172 (in Russian).
4. Osokin V. V., Aipov T. D., Niyazova Z. A. About the classification of images and music files. *Intelligent Systems. Theory and Applications*, 2015, vol. 19, iss. 1, pp. 49–70 (in Russian). EDN: [UWLELY](#)
5. Kупенова Е. М., Кашнитский А. В. The method of random forests in the classification tasks of satellite images. *Herald of Tver State University. Series: Geography and Geoecology*, 2018, iss. 3, pp. 99–107 (in Russian). EDN: [VRYRGY](#)
6. Goncharova E. F., Gaidel A. V. Methods of feature selection for problems of classification of images of the Earth's surface. *Informatsionnye tekhnologii i nanotekhnologii (ITBT-2017)* [Information Technologies and Nanotechnology (ITNT-2017): Proceedings of the III International Conference and Youth school]. Samara, Novaya Tekhnika, 2017, pp. 535–540 (in Russian). EDN: [YQLPDZ](#)
7. Turkova M. A., Gaidel A. V. Correlation features for classification of texture images. *Informatsionnye tekhnologii i nanotekhnologii* [Information Technologies and Nanotechnology: Proceedings of the IV International Conference and Youth School]. Samara, Novaya Tekhnika, 2018, pp. 595–599 (in Russian). EDN: [XMWXVZ](#)
8. Chulichkov A. I., Morozova I. V. Classification of blurred images and estimation of registration system parameters by morphological analysis methods. *Intelligent Systems*, 2005, vol. 9, iss. 1–4, pp. 321–344 (in Russian). EDN: [LZDWRV](#)



9. Borzov S. M., Potaturkin O. I. Vegetative cover type classification using hyperspectral remote sensing. *Vestnik NSU. Series: Information Technology*, 2014, vol. 12, iss. 4, pp. 13–22 (in Russian). EDN: [TMFZOJ](#)
10. Pestunov I. A., Rylov S. A., Melnikov P. V. Classification of hyperspectral images with high spatial resolution. *Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies*, 2018, vol. 11, iss. 1, pp. 69–76 (in Russian). <https://doi.org/10.17516/1999-494X-0010>, EDN: [YPSWQC](#)
11. Kitaev D. N. Comparison of a convolutional neural network and the principal component method in the problem of classification of texture images. In: Prokofiev A. B. (ed.) *Abstracts of LXVIII Youth Scientific Conference Dedicated to the 20th Anniversary of the Start of Operation of the International Space Station*. Samara, Samara State University Publ., 2018, pp. 88–89 (in Russian). EDN: [FNYNOI](#)
12. Golubkov A. M. Binary classification of images using the example of the face recognition problem. *Izvestiya SPbGETU "LETI"*, 2018, iss. 7, pp. 26–30 (in Russian). EDN: [VJYUBZ](#)
13. Nezhevenko E. S., Feoktistov A. S., Dashevsky O. Yu. Neural network classification of hyperspectral images of the basis of the Hilbert – Huang transform. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2017, vol. 53, iss. 2, pp. 165–170. <https://doi.org/10.3103/S8756699017020091>, EDN: [XNIJBJ](#)
14. Vaskan V. D. Overview of convolutional neural network architectures for the image classification problem. *IT Standard*, 2021, iss. 3 (28), pp. 34–39 (in Russian). EDN: [WQQUFN](#)
15. Soldatova O. P., Garshin A. A. The use of a convolutional neural network for recognizing handwritten numbers. *Computer Optics*, 2010, vol. 34, iss. 2, pp. 252–260 (in Russian). EDN: [MOTHJX](#)
16. Le Man Ha. Convolutional neural network for solving the classification problem. *Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology*, 2016, vol. 8, iss. 3, pp. 91–97 (in Russian). EDN: [WWMDBT](#)
17. Azarov I. S., Prokopenya A. S. Overview of convolutional neural networks for image recognition. *Big Data and Advanced Analytics*, 2020, iss. 6–1, pp. 271–280 (in Russian). EDN: [HBCHXL](#)
18. Sikorsky O. S. Overview of convolutional neural networks for the problem of image classification. *New Information Technologies in Automated Systems*, 2017, iss. 20, pp. 37–42 (in Russian). EDN: [YNADUJ](#)
19. Deans S. R., Roderick S. *The Radon Transform and Some of its Applications*. New York, John Wiley & Sons, 1983. 289 p.
20. Zhuk V. V., Kuzyutin V. F. *Approksimatsiya funktsiy i chislennoye integrirvaniye* [Approximation of Functions and Numerical Integration]. St. Petersburg, St. Petersburg University Publ., 1995. 352 p. (in Russian).
21. Voronina V. V., Mikheev A. V., Yarushkina N. G., Svyatov K. V. *Teoriya i praktika mashinnogo obucheniya* [Theory and Practice of Machine Learning]. Ulyanovsk, Ulyanovsk State Technical University Publ., 2017. 290 p. (in Russian). EDN: [QNQXJP](#)
22. Chollet F. *Deep Learning with Python*. New York, Manning Publications Co., 2018. 374 p. (Russ. ed.: St. Petersburg, Piter, 2018. 400 p.).

Поступила в редакцию / Received 27.02.2023

Принята к публикации / Accepted 08.04.2023

Опубликована / Published 30.08.2024





Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 442–451  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 442–451  
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-442-451>, EDN: OJWHMC

Научная статья  
УДК 004.032.2

## Метод повышения качества обнаружения атак на веб-приложения с применением предобученных моделей естественного языка

О. А. Ковалева<sup>✉</sup>, А. В. Самохвалов, М. А. Ляшков, С. Ю. Пчелинцев

Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, Россия, 392036, г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

**Ковалева Ольга Александровна**, доктор технических наук, профессор кафедры математического моделирования и информационных технологий, [solomina-oa@yandex.ru](mailto:solomina-oa@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0003-0735-6205>, AuthorID: 829259

**Самохвалов Алексей Владимирович**, кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой математического моделирования и информационных технологий, [samohvalov@gmail.com](mailto:samohvalov@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-3151-3250>, AuthorID: 178141

**Ляшков Михаил Андреевич**, аспирант кафедры математического моделирования и информационных технологий, [iwishcoolwork@gmail.com](mailto:iwishcoolwork@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-7793-7024>

**Пчелинцев Сергей Юрьевич**, аспирант кафедры математического моделирования и информационных технологий, [veselyrojer@mail.ru](mailto:veselyrojer@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0001-9195-8318>

**Аннотация.** Исследуется использование методов глубокого обучения для повышения производительности защитных экранов веб-приложений (WAF). Описывается конкретный метод повышения качества функционирования защитных экранов и приводятся результаты его тестирования на публично доступных данных CSIC 2010. Большинство защитных экранов веб-приложений работают на основе правил, которые были составлены экспертами. При работе сетевые экраны проверяют HTTP-запросы, которыми обмениваются клиент и сервер для обнаружения атак и блокирования потенциальных угроз. Ручное составление правил требует времени экспертов, а распространяемые готовые наборы правил не учитывают специфику конкретных пользовательских приложений, поэтому допускают много ложноположительных срабатываний и пропускают много сетевых атак. В последние годы использование предварительно обученных языковых моделей привело к значительным улучшениям в разнообразном наборе задач обработки естественного языка, поскольку они способны выполнять перенос знаний. В статье описывается адаптация этих подходов на сферу информационной безопасности, т. е. использование предварительно обученной языковой модели в качестве средства извлечения признаков для сопоставления HTTP-запроса с вектором признаков. Эти векторы используются для обучения классификатора. Предложено решение, которое состоит из двух этапов. На первом этапе создается глубокая предобученная языковая модель на основе нормальных HTTP-запросов к веб-приложению. На втором этапе эта модель используется в качестве средства извлечения признаков и обучается с помощью одноклассового классификатора. Оба этапа совершаются для каждого приложения. Экспериментальные результаты показывают, что предлагаемый подход значительно превосходит подходы классического Mod-Security, основанного на правилах, настроенных с помощью OWASP CRS, и не требует участия эксперта по безопасности для определения правил срабатывания.

**Ключевые слова:** сетевые экраны, анализ HTTP-запросов, предварительно обученные языковые модели

**Для цитирования:** Ковалева О. А., Самохвалов А. В., Ляшков М. А., Пчелинцев С. Ю. Метод повышения качества обнаружения атак на веб-приложения с применением предобученных моделей естественного языка // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика.



Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 442–451. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-442-451>, EDN: OJWHMC

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## The quality improvement method for detecting attacks on web applications using pre-trained natural language models

O. A. Kovaleva<sup>✉</sup>, A. V. Samokhvalov, M. A. Liashkov, S. Yu. Pchelintsev

Derzhavin Tambov State University, 33 Internationalnaya St., Tambov 392036, Russia

**Olga A. Kovaleva**, [solomina-oa@yandex.ru](mailto:solomina-oa@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0003-0735-6205>, AuthorID: 829259

**Alexey V. Samokhvalov**, [samokhvalov@gmail.com](mailto:samokhvalov@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-3151-3250>, AuthorID: 178141

**Mikhail A. Liashkov**, [iwishcoolwork@gmail.com](mailto:iwishcoolwork@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-7793-7024>

**Sergey Yu. Pchelintsev**, [veselyrojer@mail.ru](mailto:veselyrojer@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0001-9195-8318>

**Abstract.** This paper explores the use of deep learning techniques to improve the performance of web application firewalls (WAFs), describes a specific method for improving the performance of web application firewalls, and presents the results of its testing on publicly available CSIC 2010 data. Most web application firewalls work on the basis of rules that have been compiled by experts. When running, firewalls inspect HTTP requests exchanged between client and server to detect attacks and block potential threats. Manual drafting of rules requires experts' time, and distributed ready-made rule sets do not take into account the specifics of particular user applications, therefore they allow many false positives and miss many network attacks. In recent years, the use of pretrained language models has led to significant improvements in a diverse set of natural language processing tasks as they are able to perform knowledge transfer. The article describes the adaptation of these approaches to the field of information security, i.e. the use of a pretrained language model as a feature extractor to match an HTTP request with a feature vector. These vectors are then used to train the classifier. We offer a solution that consists of two stages. In the first step, we create a deep pre-trained language model based on normal HTTP requests to the web application. In the second step, we use this model as a feature extractor and train a one-class classifier. Both steps are performed for each application. The experimental results show that the proposed approach significantly outperforms the classical Mod-Security approaches based on rules configured using OWASP CRS and does not require the involvement of a security expert to define trigger rules.

**Keywords:** firewalls, HTTP request analysis, pre-trained language models

**For citation:** Kovaleva O. A., Samokhvalov A. V., Liashkov M. A., Pchelintsev S. Yu. The quality improvement method for detecting attacks on web applications using pre-trained natural language models. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 442–451 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-442-451>, EDN: OJWHMC

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

### Введение

Стандартной практикой безопасности стало развертывание брандмауэра веб-приложений (WAF) [1] для выявления атак, использующих уязвимости веб-приложений. WAF — это программа, которая перехватывает и проверяет весь трафик между веб-сервером и его клиентами, пытаясь найти атаки внутри содержимого HTTP-пакета. Реализация WAF с открытым исходным кодом, ставшая стандартом де-факто, — это ModSecurity<sup>1</sup>. Действия, предпринимаемые этим WAF, управляются правилами, которые определяют с помощью регулярных выражений содержимое HTTP-пакетов. ModSecurity поставляется с набором

<sup>1</sup>Trustwave. URL: <https://www.trustwave.com/en-us/> (дата обращения: 18.02.2022).





правил по умолчанию, известным как основной набор правил OWASP<sup>2</sup> (OWASP CRS), для обработки наиболее распространенных уязвимостей, включенных в первую десятку уязвимостей рейтинга OWASP<sup>3</sup>.

Рассмотрим примеры таких правил. Правила являются директивами в файле настроек, описывающими, что делать с данными, полученными на основании других директив. Важной директивой для создания правил является директива SecRule, синтаксис которой представлен ниже.

SecRule ПЕРЕМЕННЫЕ ОПЕРАТОР [ДЕЙСТВИЯ]. Ниже приведен пример правила:  
`SecRule ARGS|REQUEST_HEADERS "@rx <script" id:101, msg: 'XSS Attack', severity:ERROR, deny, status:404`

В данном случае:

- ARGV и REQUEST\_HEADERS являются переменными (параметры и заголовки запросов соответственно);
- @rx является оператором, используемым для поиска шаблона в значениях переменных (в данном случае шаблоном является строка <script);
- id, msg, severity, deny и status являются действиями, выполняемыми при обнаружении соответствия строк шаблону.

Это правило используется для отражения XSS-атак с помощью проверки наличия строки <script в параметрах запроса и заголовке и для генерации сообщения 'XSS Attack'. В данном правиле используется действие id:101; с помощью него любой запрос, предназначенный для проведения атаки, будет отклонен со статусом 404.

Однако этот подход, основанный на правилах, имеет некоторые недостатки. Правила статичны и негибки по своей природе, поэтому OWASP CRS обычно дает довольно высокий уровень ложных срабатываний, который в некоторых случаях может приближаться к 40%<sup>4</sup>, что потенциально приводит к отказу в обслуживании приложения. В систематическом обзоре, представленном в [2], анализируется доступная научная литература, посвященная обнаружению веб-атак с использованием методов машинного обучения.

В [3–5] были представлены решения, в которых подход ModSecurity к обнаружению веб-атак на основе правил дополняется моделями на основе машинного обучения, чтобы смягчить недостатки подхода на основе правил. Вместе с тем проблема высокого процента ложноположительных срабатываний (*FPR*) все еще остается нерешенной и требует дальнейшего исследования.

Основной целью нашего исследования является повышение качества функционирования защитных экранов. Для достижения поставленной цели необходимо получить решение следующих задач:

- повышение процента выявленных атак (*TPR*);
- обеспечение низкого процента ложноположительных срабатываний (*FPR*).

*TPR* и *FPR* показывают соотношение запросов, соответственно правильно и неправильно классифицированных как атаки. Частота ложноположительных срабатываний *FPR* рассчитывается как  $FP/(FP + TN)$ , где *FP* — количество ложноположительных результатов, а *TN* — количество истинно отрицательных результатов ( $FP + TN$  — общее количество отрицательных результатов). Это вероятность ложной тревоги: будет дан положительный результат, когда истинное значение окажется отрицательным.

Процент корректно классифицированных атак (*TPR*, также называемый чувствительностью) рассчитывается как  $TP/(TP + FN)$ , где *TP* — количество истинно положительных результатов, а *FN* — количество ложноотрицательных результатов ( $TP + FN$  — общее количество положительных результатов). *TPR* — это вероятность того, что фактический положительный результат будет положительным.

<sup>2</sup>OWASP. Owasp modsecurity core rule set project. URL: <https://coreruleset.org/> (дата обращения: 18.02.2022).

<sup>3</sup>OWASP. Owasp top ten project. URL: <https://owasp.org/www-project-top-ten/> (дата обращения: 18.02.2022).

<sup>4</sup>Handling false positives with the owasp modsecurity core rule set. URL: <https://www.netnea.com/cms/nginx-tutorial-8-handling-false-positives-modsecurity-core-rule-set/> (дата обращения: 18.02.2022).



В работе предложен подход, использующий методы глубокого обучения для повышения производительности ModSecurity. Он состоит из двухэтапной структуры обучения: сначала создается экстрактор признаков, используя методы глубокого обучения; затем обучается с учителем модель. HTTP-запросы рассматриваются как необработанный текст, а для его предварительной обработки обучается модель глубокого языка с архитектурой, предложенной в [6].

## 1. Обзор релевантных исследований

Методы обработки естественных языков (NLP) были значительно улучшены благодаря достижениям глубокого обучения [6–9]. Эти методы основаны на двухэтапном подходе. Во-первых, модель изучает глубокое контекстуальное представление слов из необработанного текста под самоконтролем (разновидность обучения с учителем, где в качестве меток используются прогнозы самой модели). Этот этап также называется предварительным обучением. Затем эту предварительно обученную языковую модель можно использовать в последующих задачах NLP.

Традиционные техники NLP представляют слова как атомарные единицы, а текст преобразуется в числовой вектор с использованием однократного кодирования. При таком подходе есть две основные проблемы. Во-первых, нет понятия сходства между словами, так как они представлены в словаре индексами [10]. Кроме того, размер вектора равен размеру словаря, вследствие чего у методов машинного обучения возникают проблемы, связанные с многомерными пространствами признаков, такими как проклятие размерности. С развитием методов машинного обучения стало возможным обучать более сложные модели.

Согласно исследованиям [11–14] одной из самых успешных концепций является использование векторных представлений слов, также известное как встраивание слов. В этом подходе слова представляются в непрерывном векторном пространстве гораздо меньшей размерности, чем предыдущий линейный вариант. Кроме того, было показано, что слова с семантическим сходством имеют тенденцию быть рядом в векторном пространстве [11]. В последнее десятилетие встраивание слов зарекомендовало себя как основной элемент многих NLP-систем. Однако, поскольку методы встраивания слов статичны, упускается важный элемент для полного захвата местного контекста, т. е. семантическое и синтаксическое значение слов. С помощью этих методов на самом деле учатся фиксировать общий (наиболее распространенный) контекст слов в своих представлениях, но они не помогают справиться с полисемией. Замена статических вложений глубокими контекстуальными представлениями привела к значительным улучшениям в разнообразном наборе задач NLP. Идея проста: слову присваивается представление, являющееся функцией всей входной последовательности (всей текстовой последовательности). Успех глубоких контекстуализированных представлений слов предполагает, что, несмотря на то что NLP-системы обучаются только с целью моделирования языка, они изучают легко переносимые и не зависящие от задачи свойства языка [15].

Авторами предлагается использовать глубокое контекстуализированное представление HTTP-запросов для извлечения векторов признаков, которые затем будут использоваться для обучения классификатора обнаружению атак на веб-приложения. На первом этапе предлагается создать с нуля глубокую предварительно обученную языковую модель, используя набор HTTP-запросов от веб-приложения, которое необходимо защитить. На втором этапе применяется стратегия, основанная на функциях, для преобразования каждого HTTP-запроса в вектор функций. Иными словами, как только будет получена предварительно обученная модель, каждый HTTP-запрос преобразовывается в числовое представление, используя веса последнего слоя сети, также известного как извлечение признаков. Используя эти представления в качестве входных данных, строится модель бинарной классификации на принадлежность к каждому классу.

В релевантной работе [16] Крюгеля и Вигны предлагается подход к обнаружению аномалий, при котором моделируются определенные характеристики параметров URL, такие как длина



параметра и порядок ввода, для создания вероятностной грамматики каждого параметра. В предложенном авторами статьи [16] методе используется весь запрос, а не только параметры URL, фиксируя нормальное поведение путем моделирования возникновения определенного набора токенов — специально сформированных идентификаторов, выделенных из HTTP-запроса, содержащих его характерные признаки. Это позволяет фиксировать поведение отправляемых данных при обычной работе приложения и использовать атаки, присутствующие в теле и заголовке запросов (не только в URL).

Некоторые авторы предлагают методы обнаружения аномалий, которые работают над упрощением значений параметров приложения. В [17] числа и буквенно-цифровые последовательности абстрагируются, представляя каждую категорию одним символом. В [18] Торрано-Хименес с соавт. представили метод обнаружения аномалий, в котором вместо самих токенов используется упрощение, учитывающее только частоты трех наборов элементов: символов, чисел и специального символа. В представленном в данной статье подходе весь запрос анализируется без дальнейшего упрощения.

В работе [19] используется метод встраивания слов для представления URL-адресов, который состоит из трех основных шагов:

- для отделения аномалий от нормальных выборок применяется ансамблевая модель кластеризации;
- авторы используют word2vec для получения семантических представлений аномалий;
- мультикластерный подход группирует аномалии в определенные типы.

Подход word2vec, основанный на методологии статических вложений слов (word embeddings), исходит из гипотезы локальности — «слова, которые встречаются в одинаковых окружениях, имеют близкие значения». Близость в данном случае понимается широко, как то, что рядом могут стоять только сочетающиеся слова. Отметим основные недостатки такого подхода [10]: отсутствие информации о контексте, в котором используется слово; в модели не учитывается то, что слово может иметь различное значение в зависимости от контекста использования; не очень хорошо обрабатываются неизвестные и редкие слова.

В связи с этим в разработанной модели, которая представлена в данной статье, статические вложения (word2vec) были заменены глубокими контекстуальными представлениями, которые использовались для получения семантических представлений обычных данных и применялись в качестве входных данных для построения одноклассовой модели.

В [20] Ю с соавт. предлагают метод, использующий двунаправленную долговременную кратковременную память (Bi-LSTM) с механизмом внимания для моделирования HTTP-трафика. Это подход обучения с учителем, поскольку сеть Bi-LSTM обучают предсказывать, является ли запрос аномальным или нет. В [21] Цинь с соавт. предлагают модель, которая изучает семантику вредоносных сегментов в полезной нагрузке, используя рекуррентную нейронную сеть (RNN) с механизмом внимания. Полезная нагрузка преобразуется в последовательность скрытых состояний с помощью RNN, а затем используется механизм внимания для взвешивания скрытых состояний в качестве вектора признаков для дальнейшего обнаружения. Таким образом, они также могут использовать скрытое состояние сети в качестве признаков для второго классификатора. Авторы работы [21] изучают веса RNN, модели извлечения признаков, используя нормальные и ненормальные экземпляры.

В отличие от [21], был предложен метод обучения, который состоит в построении предварительно обученной модели с самоконтролем, используя только обычные данные. Основным недостатком метода, предложенного в статье [21], является высокий процент ложноположительных срабатываний (*FPR*). Снижение процента ложноположительных срабатываний при использовании указанных выше методов возможно, но при этом существенно снижается и процент детектирования нежелательного контента (*TPR*).

В работе [22] рассматривается модель, использующая многоуровневый автокодировщик (*SAE*) и сеть глубокого доверия в качестве методов обучения признаков, в которых на этапе обучения выбираются только обычные данные. Впоследствии в качестве классификаторов



применяются OCSVM, Isolation Forest и Elliptic Envelope. В этой работе функции HTTP извлекаются с использованием  $n$ -грамм, а затем применяются модели глубокого обучения для уменьшения размерности, генерируемой векторами  $n$ -грамм.

Разработанный метод позволяет напрямую работать с HTTP-запросом и избегать построения  $n$ -грамм, требующих больших объемов данных для правильного сбора статистики каждой модели.

Таким образом, основными задачами нашего исследования являются повышение процента выявленных атак ( $TPR$ ), а также обеспечение низкого процента ложноположительных срабатываний ( $FPR$ ).

## 2. Предлагаемое решение

Предлагаемое решение состоит из двух этапов. На первом этапе создается глубокая предобученная языковая модель, используя только обычные HTTP-запросы к веб-приложению. На втором этапе эта модель выступает в качестве средства извлечения признаков и обучается одноклассовый классификатор. Таким образом, каждое веб-приложение имеет свою собственную связку (как предварительно обученную языковую модель, так и одноклассовый классификатор).

В работе используются представления двунаправленного кодировщика с надежной оптимизацией из архитектуры Transformers (RoBERTa) [6]. На рис. 1 и 2 представлены компоненты предлагаемой архитектуры обучения.

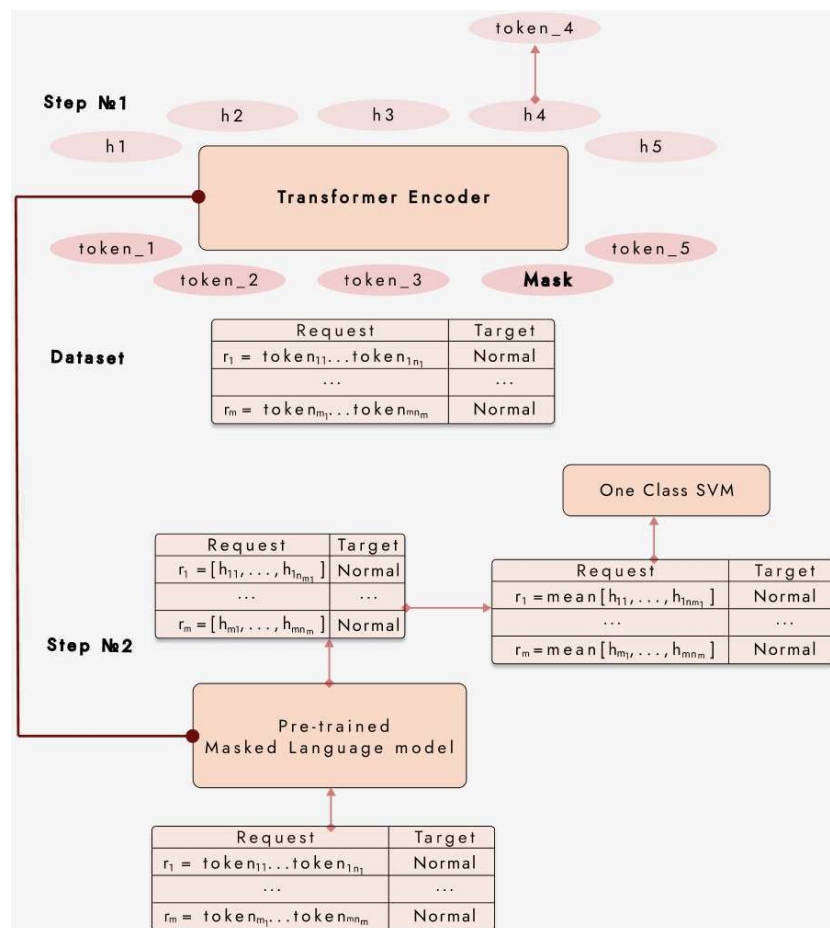


Рис. 1. Архитектура разработанной модели (цвет онлайн)

Fig. 1. The architecture of the developed model (color online)

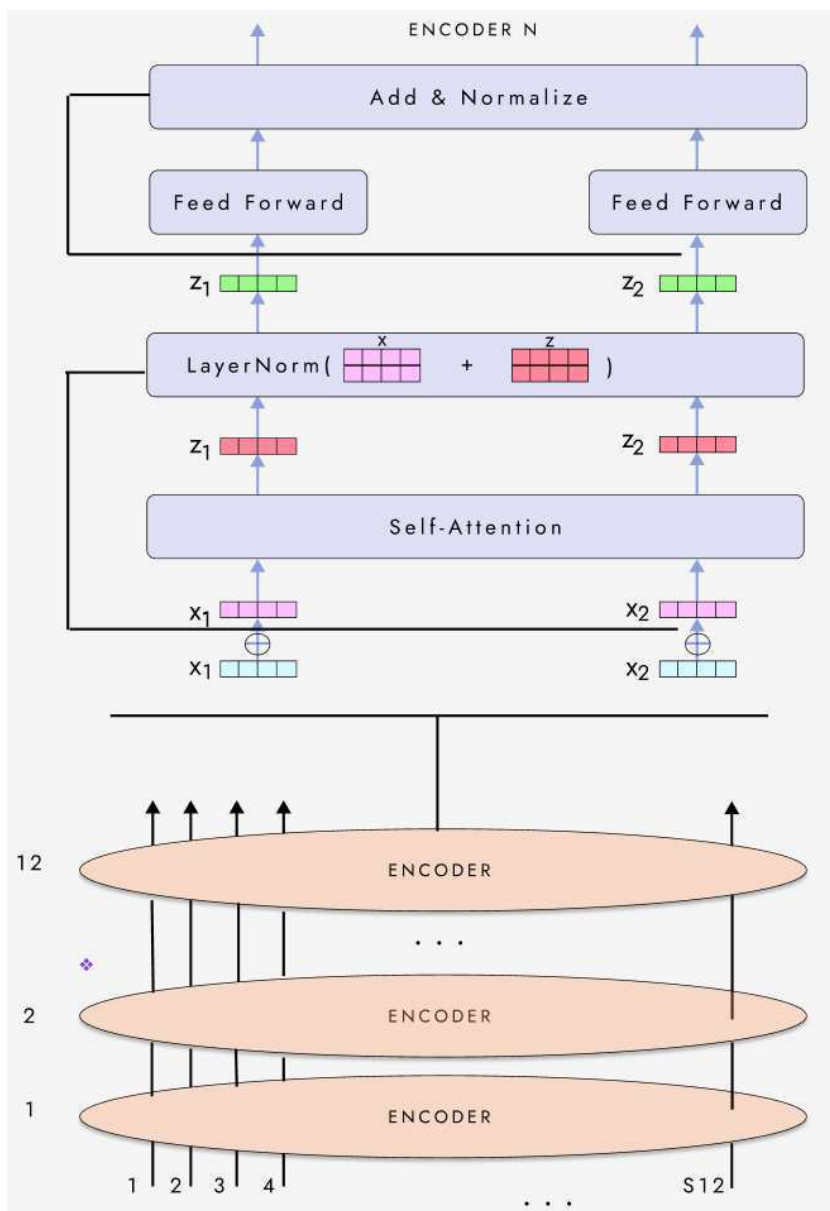


Рис. 2. Архитектура энкодера (цвет онлайн)

Fig. 2. Encoder architecture (color online)

На вход модели подается токенизированная версия HTTP-запроса, токенизация происходит ВРЕ-токенайзером [23]. Архитектура сети, используемая для построения языковой модели, представляет собой многоуровневый двунаправленный Transformer Encoder [24]. Это основанная на внимании архитектура для моделирования последовательных данных, которая является альтернативой рекуррентным нейронным сетям (RNN) и способна фиксировать долгосрочные зависимости в последовательных данных. Этот токенизатор имеет словарь подслов из 50 000 единиц, который по-прежнему может кодировать любую входную строку без введения каких-либо неизвестных токенов.

Предлагаемая модель состоит из  $N$  уровней идентичных трансформеров, как показано в нижней части рис. 1. Каждый энкодер состоит из двух подслоев, первый слой содержит Multi-Head Attention механизм [24], а второй слой – нейронную сеть с прямой связью. Используются количество трансформеров  $N = 12$ , количество скрытых слоев  $H$  (они обозначаются  $h_1, \dots, h_n$ ) и количество self-attention-heads  $S = 12$ . Обучение  $BERT$ -модели выполнялось с параметрами, предложенными в  $BERT_{BASE}$  ( $N = 12, H = 768, S = 12$ ).





Учитывая архитектуру модели, следующим шагом является определение стратегии обучения, т. е. цели обучения и механизмов обучения. В данном случае, чтобы изучить глубокое контекстуальное представление токенов, применяется подход к обучению с учителем. Случайным образом маскируются некоторые токены из ввода, а затем цель состоит в том, чтобы предсказать исходный замаскированный токен, основываясь только на его контексте. В [7] эту процедуру называют моделью маскированного языка (MLM). В отличие от шумоподавляющих автокодировщиков, эти модели предсказывают только замаскированные слова, а не восстанавливают весь ввод [7]. В попытке предсказать замаскированные токены модель должна иметь возможность извлекать некоторую информацию из языка, не только структурную информацию, но и некоторую семантическую информацию. Эта информация кодируется в весах слоев кодирования. Когда есть вектор признаков, упомянутый выше, то применяется хорошо известный классификатор OCSVM (One-Class Support Vector Machine), представленный в [25] с ядром радиальной базисной функции (RBF).

### 3. Эксперименты

Производительность предлагаемого метода анализируется с точки зрения True Positive Rate (*TPR*) и False Positive Rate (*FPR*). В проведенном эксперименте *TPR* и *FPR* показывают соотношение запросов, соответственно правильно и неправильно классифицированных как атаки. Для оценки предлагаемого метода использовались те же наборы данных, что и в работах [4, 5]. Набор данных CSIC 2010 представляет собой набор обычных и аномальных HTTP-запросов для веб-приложения, которое предоставляет функции для совершения покупок в Интернете. Набор данных содержит 36 000 действительных запросов на обучение, еще 36 000 — на тестирование и 25 000 запросов аномального трафика. Результаты представлены в таблице.

Полученный *TPR* и *FPR* для каждого датасета, %  
Table. *TPR* and *FPR* received for each dataset, %

Параметр	ModSecurity OWASP CRS v3-PL 1	ModSecurity OWASP CRS v3-PL 2	ModSecurity OWASP CRS v3-PL 3	Одноклассовый классификатор из работы [5]	Разработанная модель на базе RoBERTa + OCSVM
Процент корректно классифицированных атак <i>TPR</i>	26.6	29.5	52.6	39.6	47.1
Процент ложноположительных срабатываний <i>FPR</i>	0	0	13.9	5.3	7.5

Оценка выполнялась для каждого из наборов данных с использованием 70% действительных запросов для обучения и остальной части набора данных (30% действительных и 100% атак) для тестирования.

Результаты работы авторской модели представлены в таблице столбцом RoBERTa + OCSVM. Тестирование осуществлялось на базе датасета CISC 2010, содержащего HTTP/1.1 запросы для обнаружения уязвимостей веб-приложений на базе аномалий, а также примеры нормального HTTP-трафика для обнаружения ложных срабатываний систем защиты.

Оценка выполнялась с разными уровнями паранойи (PL). В PL 1 используются правила, которые почти никогда не вызывают ложноположительных срабатываний (в идеале никогда, но мы должны признать, что это может произойти в зависимости от локальной настройки). На уровне PL 2 добавляются дополнительные правила, которые обнаруживают больше атак, но есть вероятность, что дополнительные правила также вызовут ложную тревогу по вполне легитимному HTTP-запросу.

На уровне паранойи PL 3 добавляется больше правил для определенных специализированных видов атак, такие правила подходят для тестирования уязвимостей довольно серьезных





систем, например онлайн-банкинга<sup>5</sup>. Это приводит к еще большему количеству ложноположительных срабатываний, для минимизации которых требуется детальный анализ работы системы экспертом по безопасности и последующая точная настройка системы.

ModSecurity с уровнями паранойи 1 и 2 не дает ложноположительных срабатываний за счет крайне низкого *TPR*. При более строгом уровне паранойи (PL 3) *FPR* составляет 13.9%, а *TPR* — 52.6%. Метод с использованием одноклассового идентификатора, предложенный в работе [5], позволяет детектировать менее 40% атак. Разработанный авторами метод дает низкий процент ложноположительных срабатываний *FPR* (7.5%) при высоком проценте детектирования атак — *TPR* 47.1% на используемом наборе данных.

## Заключение

Разработанный метод позволяет использовать языковое представление HTTP-запросов на основе глубокого преобразования для решения проблемы обнаружения атак веб-приложений.

Использовался датасет CSIC 2010 для предварительной подготовки модели глубокого языка для HTTP-запросов. Был предложен и проанализирован двухэтапный подход к обучению, состоящий в том, чтобы сначала преобразовать HTTP-запрос в непрерывное пространство с помощью кодировщика-преобразователя, а затем применить OCSVM для отделения обычного трафика от атак.

Представленные результаты экспериментов превосходят ModSecurity с уровнем паранойи 1 и 2, а также результаты, представленные в [4], позже улучшенные в [5], по проценту успешно детектированных атак (*TPR*). Также следует отметить снижение в 1.8 раза процента ложноположительных срабатываний (*FPR*) по сравнению с ModSecurity с уровнем паранойи 3 при сопоставимом *TPR*.

## Список литературы / References

1. Hacker A. J. Importance of web application firewall technology for protecting web-based resources. *ICSA Labs an Independent Verizon Business*, 2008, pp. 7. Available at: [https://img2.helpnetsecurity.com/dl/articles/ICSA\\_Whitepaper.pdf](https://img2.helpnetsecurity.com/dl/articles/ICSA_Whitepaper.pdf) (accessed December 28, 2022).
2. Sureda Riera T., Bermejo Higuera J. R., Bermejo Higuera J., Martinez Herraiz J. J., Sicilia Montalvo J. A. Prevention and fighting against web attacks through anomaly detection technology. A systematic review. *Sustainability*, 2020, vol. 12, iss. 12, art. 4945. <https://doi.org/10.3390/su12124945>
3. Betarte G., Martinez R., Pardo A. Web application attacks detection using machine learning techniques. *17th IEEE International Conference on Machine Learning and Applications (ICMLA)*. Orlando, 2018, pp. 1065–1072. <https://doi.org/10.1109/ICMLA.2018.00174>
4. Betarte G., Gimenez E., Martinez R., Pardo A. Improving web application rewalls through anomaly detection. *17th IEEE International Conference on Machine Learning and Applications (ICMLA)*. Orlando, 2018, pp. 779–784. <https://doi.org/10.1109/ICMLA.2018.00124>
5. Martinez R. *Enhancing web application attack detection using machine learning*. Montevideo, UdelaR – Area Informatica del Pedeciba, 2019. 82 p.
6. Liu Y., Ott M., Goyal N., Du J., Joshi M., Chen D., Levy O., Lewis M., Zettlemoyer L., Stoyanov V. RoBERTa: A robustly optimized BERT pretraining approach. *ICLR 2020 Conference Blind Submission*. Addis Ababa, 2020. Available at: <https://openreview.net/forum?id=SyxS0T4tvS> (accessed January 15, 2023).
7. Devlin J., Chang M. W., Lee K., Toutanova K. BERT: Pre-training of deep bidirectional transformers for language understanding. *NAACL-HLT 2019*. Minneapolis, 2019, pp. 4171–4186.
8. Radford A., Wu J., Child R., Luan D., Amodei D., Sutskever I. Language models are unsupervised multitask learners. *OpenAI Blog*, 2019, vol. 1, iss. 8, pp. 9.
9. Peters M. E., Neumann M., Iyyer M., Gardner M., Clark C., Lee K., Zettlemoyer L. Deep contextualized word representations. *Proceedings of the 2018 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies*. New Orleans, 2018, pp. 2227–2237. <https://doi.org/10.18653/v1/N18-1202>

<sup>5</sup>Folini C. Working with Paranoia Levels. URL: <https://coreruleset.org/20211028/working-with-paranoia-levels/> (дата обращения: 15.01.2023).



10. Mikolov T., Chen K., Corrado G., Dean J. Efficient estimation of word representations in vector space. *Computer Science*, 2013. arXiv:1301.3781v3 [cs.CL]. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1301.3781>
11. Bengio Y., Ducharme R., Vincent P., Janvin C. A neural probabilistic language model. *Journal of Machine Learning Research*, 2003, vol. 3, pp. 1137–1155.
12. Olah C. Deep learning, NLP, and representations. *GitHub blog, posted on 2014*, July, 7. Available at: <https://colah.github.io/posts/2014-07-NLP-RNNs-Representations/> (accessed January 15, 2023).
13. Luong M. T., Socher R., Manning C. D. Better word representations with recursive neural networks for morphology. *Proceedings of the Seventeenth Conference on Computational Natural Language Learning*, 2013, pp. 104–113.
14. Zou W. Y., Socher R., Cer D., Manning C. D. Bilingual word embeddings for phrase-based machine translation. *Proceedings of the 2013 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing*, 2013, pp. 1393–1398.
15. Ethayarajh K. How Contextual are Contextualized Word Representations? Comparing the Geometry of BERT, ELMo, and GPT-2 Embeddings. *Proceedings of the 2019 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing and the 9th International Joint Conference on Natural Language Processing (EMNLP-IJCNLP)*. Hong Kong, 2019, pp. 55–65. <https://doi.org/10.18653/v1/D19-1006>
16. Kruegel C., Vigna G. Anomaly detection of web-based attacks. *Proceedings of CCS*, 2003, pp. 251–261. <https://doi.org/10.1145/948109.948144>
17. Corona I., Ariu D., Giacinto G. HMM-Web: A framework for the detection of attacks against web applications. *Proceedings of ICC*, 2009, pp. 1–6. <https://doi.org/10.1109/ICC.2009.5199054>
18. Torrano-Giménez C., Pérez-Villegas A., Marañón G. Á. An anomaly-based approach for intrusion detection in web traffic. *Journal of Information Assurance and Security*, 2010, vol. 5, pp. 446–454.
19. Yuan G., Li B., Yao Y., Zhang S. Deep learning enabled subspace spectral ensemble clustering approach for web anomaly detection. *2017 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)*. Anchorage, AK, USA, 2017, pp. 3896–3903. <https://doi.org/10.1109/IJCNN.2017.7966347>
20. Yu Y., Yan H., Guan H., Zhou H. DeepHTTP: Anomalous HTTP Traffic Detection and Malicious Pattern Mining Based on Deep Learning. *IET Information Security*. Singapore, 2020, vol. 1299. [https://doi.org/10.1007/978-981-33-4922-3\\_11](https://doi.org/10.1007/978-981-33-4922-3_11)
21. Qin Z. Q., Ma X. K., Wang Y. J. Attentional payload anomaly detector for web applications. *International Conference on Neural Information Processing*. Springer, 2018, pp. 588–599. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-04212-7\\_52](https://doi.org/10.1007/978-3-030-04212-7_52)
22. Vartouni A. M., Teshnehlab M., Kashi S. S. Leveraging deep neural networks for anomaly-based web application firewall. *IET Information Security*, 2019, iss. 13, pp. 352–361. <https://doi.org/10.1049/iet-ifs.2018.5404>
23. Sennrich R., Haddow B., Birch A. Neural machine translation of rare words with subword units. *Proceedings of the 54th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*. Berlin, 2015, pp. 1715–1725. <https://doi.org/10.18653/v1/P16-1162>
24. Vaswani A., Shazeer N., Parmar N., Uszkoreit J., Jones L., Gomez A. N., Kaiser L., Polosukhin I. Attention is all you need. *Advances in Neural Information Processing Systems 30*, 2017. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1706.03762>
25. Scholkopf B., Platt J. C., Shawe-Taylor J., Smola A. J., Williamson R. C. Estimating the support of a high-dimensional distribution. *Neural Computation*, 2001, iss. 13, pp. 1443–1471. <https://doi.org/10.1162/089976601750264965>

Поступила в редакцию / Received 28.01.2023

Принята к публикации / Accepted 02.02.2023

Опубликована / Published 30.08.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 452–462  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 452–462  
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-452-462>, EDN: OSEMWU

Article

## Detection of sources of network attacks based on the data sampling

E. S. Sagatov, A. M. Sukhov<sup>✉</sup>, V. V. Azhmyakov

Sevastopol State University, 33 Universitetskaya St., Sevastopol 299053, Russia

**Evgeny S. Sagatov**, [sagatov@ya.ru](mailto:sagatov@ya.ru), <https://orcid.org/0000-0001-9780-8302>, AuthorID: 819717

**Andrei M. Sukhov**, [AMSuhov@sevsu.ru](mailto:AMSuhov@sevsu.ru), <https://orcid.org/0000-0001-6948-4988>, AuthorID: 158417

**Vadim V. Azhmyakov**, [vvazhmyakov@mail.sevsu.ru](mailto:vvazhmyakov@mail.sevsu.ru), <https://orcid.org/0000-0003-3634-6786>

**Abstract.** This article defines the rules for finding the threshold values for the main network variables used to detect network intrusions under conditions of limited data sampling. The sFlow technology operates with a limited sample of packets, and one packet out of 50 can be analyzed, but this value can reach 5000. The main conclusion is that the product of the threshold value and sample resolution remains a constant value. The article defines the size of the maximum resolution, at which an attack with a given threshold can be detected. Based on the experimental data, this hypothesis was tested; considering the experimental error, it was verified.

**Keywords:** thresholds for detecting DDoS attacks, sFlow data sampling, rank distributions in network security

**Acknowledgements:** The authors acknowledge Sevastopol State University (SevSU) for the Research Grant 42-01-09/253/2022-1.

**For citation:** Sagatov E. S., Sukhov A. M., Azhmyakov V. V. Detection of sources of network attacks based on the data sampling. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 452–462. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-452-462>, EDN: OSEMWU

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 004.7

## Обнаружение источников сетевых атак на основе выборки данных

Е. С. Сагатов, А. М. Сухов<sup>✉</sup>, В. В. Ажмяков

Севастопольский государственный университет, Россия, 299053, г. Севастополь, ул. Университетская, д. 33

**Сагатов Евгений Собинович**, кандидат технических наук, доцент, научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории «Прикладная математика и суперкомпьютерные вычисления», [sagatov@ya.ru](mailto:sagatov@ya.ru), <https://orcid.org/0000-0001-9780-8302>, AuthorID: 819717

**Сухов Андрей Михайлович**, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории «Прикладная математика и суперкомпьютерные вычисления», [AMSuhov@sevsu.ru](mailto:AMSuhov@sevsu.ru), <https://orcid.org/0000-0001-6948-4988>, AuthorID: 158417

**Ажмяков Вадим Викторович**, Dr. rer. nat. habil., профессор, заведующий научно-исследовательской лабораторией «Прикладная математика и суперкомпьютерные вычисления», [vvazhmyakov@mail.sevsu.ru](mailto:vvazhmyakov@mail.sevsu.ru), <https://orcid.org/0000-0003-3634-6786>



**Аннотация.** В статье определены правила нахождения пороговых значений для основных сетевых переменных, используемых для обнаружения сетевых вторжений в условиях ограниченной выборки данных. Технология sFlow оперирует с ограниченной выборкой пакетов, причем анализироваться может один пакет из 50, но это значение может доходить и до 5000. Наш основной вывод состоит в том, что произведение порогового значения и разрешения выборки остается постоянной величиной. В работе определен размер максимального разрешения, при котором атака с заданным порогом может быть обнаружена. На основании собранных во время эксперимента данных было проведено тестирование данной гипотезы. С учетом ошибки эксперимента эта гипотеза подтверждается.

**Ключевые слова:** пороговые значения для распознавания DDoS атак, выборка данных sFlow, ранговые распределения в сетевой безопасности

**Благодарности:** Авторы выражают благодарность Севастопольскому государственному университету за поддержку в рамках проекта 42-01-09/253/2022-1.

**Для цитирования:** Sagatov E. S., Sukhov A. M., Azhmyakov V. V. Detection of sources of network attacks based on the data sampling [Сагатов Е. С., Сухов А. М., Ажмяков В. В. Обнаружение источников сетевых атак на основе выборки данных] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 452–462. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-452-462>, EDN: OSEMWU

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

## Introduction

Despite the efforts made by law enforcement authorities and government regulators, online incidents are still numerous, the losses that bring destructive actions are growing, and the situation is similar in highly developed countries all over the world. Reliable protection of the telecommunications structure and the data stored is the most important task for government agencies and businesses. The fight against cybercrime makes even ideological opponents (like Russia and the United States) enter into talks and agree on cooperation.

In the present work, an effort is made to study the threshold method for detecting the sources of network attacks based on the data sampling. When conducting network attacks, a number of network variables take values that are many times higher than their average ones [1]. The developed approach involves finding the threshold values for the main network variables. If these values are exceeded, it is possible to ascertain the beginning of a network attack.

The creation of a full-fledged network monitoring structure for intrusion prevention is rather complicated, let alone too expensive. This is primarily due to the fact that the monitoring system should ideally intercept and analyze every data packet, which greatly increases the requirements for the computing power of the equipment. Such technologies from the very beginning tried to reduce the amount of information processed; the first technology for collecting information about NetFlow traffic was offered by Cisco in 1996 [2]. This technology involves storing information about the flows, which greatly reduces the amount of information; all the packets are processed, but the information is stored only about the connections (flows). Such a technology is oft-used in intrusion protection systems.

Nevertheless, in the context of the exponential growth of traffic in the global network, the equipment with NetFlow technology support is becoming more expensive, therefore, not everyone can afford it. Thus, a new technology for monitoring sFlow traffic, whose distinguishing feature is a selective analysis of traffic at the packet level, appeared [3]. This technology can analyze one network packet out of tens, hundreds, and even thousands, which is set by the administrator when the monitoring system is configured.

However, this way of monitoring, based on limited data sampling, raises a number of questions about intrusion detection technologies, including the issue of finding the new threshold values for network variables. This study implies the adaptation of intrusion detection and prevention technologies for a new method of traffic monitoring, involving a selective packet analysis method.

The novelty of the research proposed is stipulated by the usage of a unified mathematical



approach. This approach uses rank distributions for the statistical analysis. A number of important network variables, generated by an external single IP address when accessing a given server or local network, are to be identified. These variables include the frequency of accessing the web server (on a given port), the number of active threads, the amount of incoming TCP, UDP, and ICMP traffic, etc.

The experimental infrastructure allows measuring the values for the above network variables. The rank distributions are built based on sFlow data; the rank distribution curves are expected to lie lower (compared to when NetFlow data), depending on the sample resolution. The found threshold values are to be experimentally tested while conducting network attacks using the most common utilities widely applicable by attackers.

The article further includes an overview of attack detection techniques and the thresholding method (Section 1); consideration of rank distributions and recognition of attacks and their sources (Section 2); experiment to test the hypothesis about the threshold value (Section 3); discussion of the results obtained (Section 4); conclusions.

## 1. Related works

It has been more than 20 years since Cisco NetFlow was patented; extensive research has been conducted, and many applications have been developed. In the review [4], the authors considered the current development in the research in this area, highlighting the main perspectives and methodologies. The analysis showed that network security is a big part of such studies.

One of the first works that proposed a threshold approach to recognizing DDoS attacks was the work presented at the Defense Advanced Research Projects Agency (DARPA) conference [5]. Since 2015, there has been a surge of interest in network attack detection models using threshold-based algorithms. As stated in work [6], denial of service attacks (DoS) and distributed denial of service attacks (DDoS) are becoming more and more frequent violations of the global Internet; so, the authors proposed to improve the detection of distributed denial of service attacks based on the fast entropy method using the streaming analysis.

The same authors continued their research in work [7]. This article proposes an efficient statistical approach for attack detection based on the traffic characteristics and dynamic thresholding algorithm (the latter is used because both network activity and user behavior can change over time).

The increased rate of legitimate traffic flow and its similarity to the traffic flow during the attack made the DDoS problem even more urgent. In work [8], it is proposed a distributed intrusion detection system T-CAD, which calculates the normalized router entropy and compares it with various thresholds to effectively distinguish between legitimate traffic, DDoS attacks, and flash events. In the work [9], there is a review of the best-known anomaly-based intrusion detection methods.

Most approaches, which are based on the training with the use of neural networks, have a number of significant drawbacks. The main disadvantage is that when a new attack method appears, it will take several hours or even days before the qualification signs of a new type of attack are found; this time will be spent on collecting statistics and training.

In the field of network security, researchers have implemented various models to protect networks; in particular, Snort, the foremost open-source intrusion detection and prevention system, is one of them. Currently, intrusion detection system (IDS) is a growing technology in the field of network security, and many researchers contribute to its development using rule-based and anomaly-based methods. In work [10], the authors proposed a rule-based IDS with the new efficient port scan detection rules (EPSDR). These rules are used to detect real-time network naive port scanning attacks using Snort and the Basic Analysis Security Engine (BASE). BASE is used to view Snort results on a font web page because Snort doesn't have a graphical user interface (GUI).

As is known, DDoS attacks are a common threat to network security, and traditional





mitigation approaches have significant limitations in dealing with them. The work [11] reviews the main traditional approaches to DDoS, identifies and discusses their limitations, and proposes a software-defined network (SDN) model as a more flexible, efficient, and automated mitigation solution. This study focuses on the networks belonging to Internet Service Providers (ISPs) by the example of the implementation of SDN security in Verizon's networks.

The work [12] presents an analysis of the most relevant types of attacks based on the reflection and amplification of traffic. The methods, recommended for preventing such attacks, as well as the existing methods of protection, are given. The advantages and disadvantages of these methods are revealed. Further goals for the development of new methods of protection are set.

The SDN architecture has the potential to be used to modernize security and implement more effective threat countermeasures inherent in traditional data network architecture. In work [13], an overview of the SDN architecture and the OpenFlow protocol is given, an analysis of threats and technologies for their neutralization for the SDN architecture and the OpenFlow protocol are presented, and critical threats for those OpenFlow networks that may soon appear in the Russian Federation are identified; in addition, the ways to counteract these threats are proposed. According to Gartner (Technology Evolution Curve), SDN security technologies are at the peak of inflated expectations.

## 2. Rank distributions and recognition of anomalous network states

The analysis of network processes on the Internet quite often relies on non-standard types of distributions. In particular, many processes can be described using rank distributions. This type of distribution was first applied in the field of network technologies by Steve Glassman [14] in 1994. He was able to describe the process of reserving Internet traffic on proxy servers. Since then, the scope of rank distributions has gradually expanded to include the field of network security.

Rank distributions involve ordering the values of the  $p$  value under study in descending order. The sequence number of the value in the ordered list is called the rank  $i$ . With the help of rank distributions, it has been explained the existence of threshold values for many network variables, such as:

- the total number of active flows on the router of the protected network segment;
- the number of active flows that the external IP address generates;
- the number of packets that the external IP address generates;
- the amount of incoming TCP, UDP, and ICMP traffic from the external IP address;
- the number of requests for a fixed internet service (DNS, NTP, SNMP, etc.).

Currently, the works [15, 16] that describe the use of rank distributions for practical applications (including the field of network security) have been published.

As a rule, rank distributions are described by the Zipf law:

$$p_i = \frac{p_1}{i^\alpha}, \quad (1)$$

where  $p_1$  is the largest value under study,  $i$  is the rank, and  $\alpha$  is the indicator of the degree of distribution.

To detect an attack and identify its sources, two rank distributions are compared. The first of these distributions is constructed at the time when the network is in its normal state. The second distribution is built at the time of the attack. Previously, it was proposed to analyze the rank distributions for the number of flows that a single IP address generates [1]. It was determined that at the moment of attack, this value increases by at least an order of magnitude.

A graphical illustration of this attack detection method is shown in the diagram in Fig. 1.

The  $p^{tr}$  value can be used as a threshold. All the values on the upper curve above the  $p^{tr}$  threshold should be considered to be those reflecting the attack status of the network. Based on these points, it is easy to identify the attack IP addresses, the traffic from which should be blocked for a short period of time.



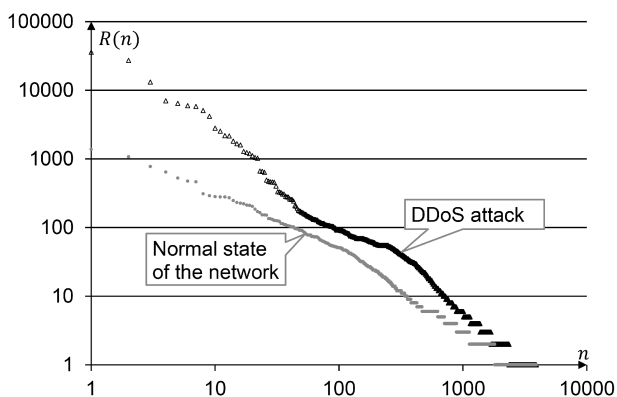


Fig. 1. Threshold finding

Note that the values along the axes in the diagram, shown in Fig. 1, are plotted in a logarithmic format. In this case, the Zipf distribution from (1) is a straight line

$$\lg p_i = \lg p_1 - \alpha \lg i. \tag{2}$$

The algorithm for finding the threshold value is described in detail in the work [1]. Since  $p^{tr}$  is calculated from NetFlow data, it can be assumed that the sampling resolution (for this value) is  $N = 1$ .

The present work intends to generalize the threshold value method for the case of

sampled traffic analysis. In the introduction (recalling the problem statement), it was said that a complete analysis of all traffic is difficult due to the computational complexity of the problem and the large amount of resources required. The novelty is that not the entire incoming traffic can be analyzed but the limited sample of incoming traffic packets. Modern technologies involve the analysis of a certain sample of packets, and the sampling rate  $N$  can vary and reach 1 packet out of 5000 transmitted. In this case, the values of variables that exceed the threshold can also be confidently fixed. Only small flows that do not affect the definition of attack IP addresses are to be discarded. However, it is necessary to establish new threshold values  $p_k^{tr}$ , as well as find ways to measure them using the data from a limited sample with the resolution of  $N_k$ .

The task is to find how the threshold value  $p_k^{tr}$  will change, depending on the sampling rate  $N_k$ . To do this, the threshold values  $p_k^{tr}$  should be replaced with  $p^{tr}/N$ , since only one of  $N$  packets can be intercepted. Note again that the threshold value  $p^{tr}$  is fixed for packet sampling with  $N_k = 1$ .

In logarithmic coordinates, the equation of the straight line, describing the rank distribution for the sampling frequency  $N$ , is

$$\lg p_i = \lg p_1 - \lg N - \alpha \lg i. \tag{3}$$

This graph is parallel to the old line, but below it by  $\lg N$ .

Of particular interest in the sampled traffic analysis is the problem of determining the limiting sampling frequency  $N_{lim}$ , at which the threshold value  $p^{tr}$  can still be detected.

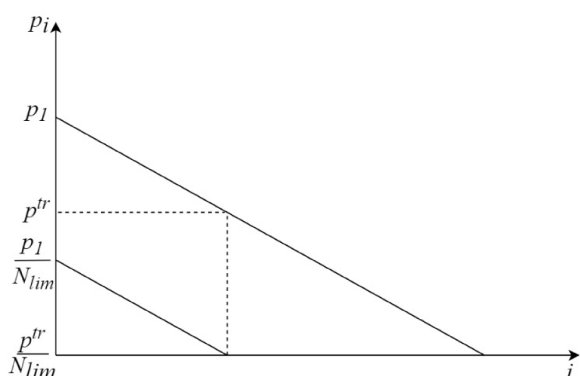


Fig. 2. Finding the limiting sampling frequency  $N_{lim}$

Figure 2 shows the graph illustrating how the new threshold is calculated under conditions of limited data sampling. As shown earlier, the new curve, describing the rank distribution with the limiting sampling frequency  $N_{lim}$ , will be parallel to the old straight line but  $\lg N_{lim}$  units lower.

In this case, the new threshold value  $p_{lim}^{tr}$ , determined experimentally, will also fall below. The limit value for the resolution will be determined by the formula

$$p_{lim}^{tr} = \frac{p^{tr}}{N_{lim}} = 1. \tag{4}$$

If this fraction is less than 1, then the threshold value is less than the resolution limit value, and such a threshold cannot be detected.



### 3. Experiment to test the hypothesis

Theoretical studies on the determination of thresholds are to be further verified using experimental tests. When testing, a secure local network, connected to the Internet, have to be attacked from the external IP addresses using the most common attack tools. During an attack, the values of the variables, used to detect the attacks, are to be recorded so that they can be compared with theoretically found thresholds.

Thus, there is the relation to be experimentally verified:

$$p_k^{tr} N_k = \text{const}, \quad (5)$$

where  $p_k^{tr}$  is the network value measured during the attack at the sampling frequency of  $N_k$ , which will change during the experiment. At the same time, the intensity of the attack, set during the experiment using the LOIC (Low Orbit Ion Cannon) utility, remains unchanged.

To conduct the experiment, a special experimental network complex, consisting of an Aruba 2930F switch, a honeypot as an attack target, and an sFlow agent, was created (Fig. 3). In this case, when the sampled traffic analysis technology (available on the Aruba switch) is enabled, only one of the  $N$  packets, passing through the switch, is transmitted to the device that aggregates the information (this is the sFlow agent, where the traffic is collected and analyzed).

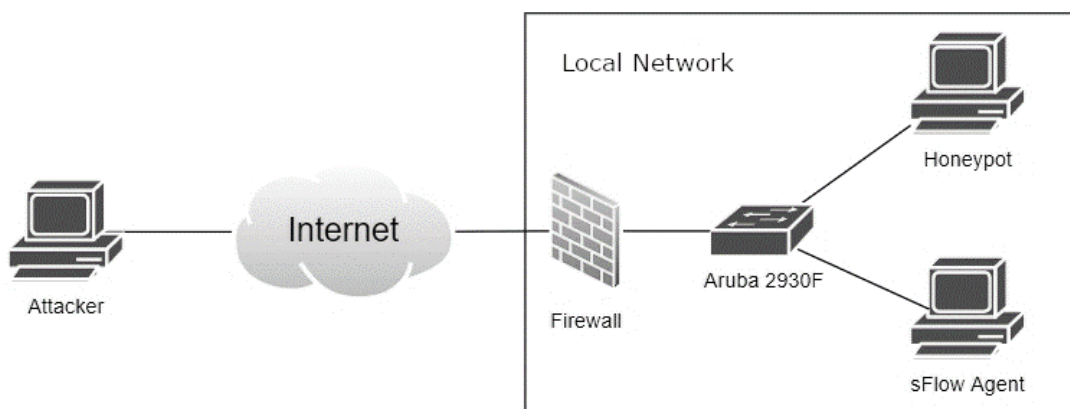


Fig. 3. Scheme of the network complex

This complex was installed in the global network, and all the devices received their public IP addresses. During the preparation of the network complex for the experiment, it was necessary to gain access to the local network in which the complex was located for control. To do this, the provider was requested to have a static public IP address added to the allowed list of incoming connections. Packet sampling on the switch was configured using the command

```
1 | sflow 1 sampling 24 100
```

This command uses the following options:

- 1 – the sFlow agent port;
- 24 – the port to analyze traffic from;
- 100 – the sampling parameter (1 packet out of 100).

Traffic aggregation on the sFlow agent was carried out using the sflowtool utility with the command

```
1 | sflowtool -p 6343 -J
```

In this command, 6343 is the port that receives traffic from the switch.

The training attack was carried out using the LOIC program, an open-source program designed to carry out DoS attacks<sup>1</sup>. This program is the de facto standard for conducting

<sup>1</sup>Batishchev A. M. LOIC (Low Orbit Ion Cannon). 2004. Available at: <http://sourceforge.net/projects/loic> (accessed February 18, 2023).



intrusion testing and allows the carrying out of most types of existing attacks; moreover, it is constantly improved, and new features are added.

To start the attack, configuration, which involves setting the target URL or IP address, attack speed, method, port, number of flows, and waiting timeout, is required. After setting all the necessary parameters, the attack can be launched with the “IMMA CHARGIN MAH LAZER” button (to stop the attack, the same button is used).

The attack was repeated several times for different samples, while all the attack parameters, entered in LOIC, were being saved. At the same time, the resolution for traffic on Aruba was changing. The samples “1 out of 50”, “1 out of 100”, “1 out of 200”, “1 out of 500”, and “1 out of 1000” were used; the traffic during the attack was recorded using the sFlow agent.

#### 4. Analysis of the obtained results

During the attack, the sFlow agent collects traffic data in a JSON file. The information from the file requires additional processing, structuring, and generalization for the analysis. To do this, a script, which allows visual interpreting of the data using graphs, was written (the Python programming language was used).

Figure 4 shows an example of the traffic data recorded by the sFlow agent and processed by the script.

Traffic processing allows for determining the various characteristics of the data flow, coming from a single external IP address, at any time during the experiment. For example, it is possible to determine the number of received packets per second or the bit rate for incoming TCP/UDP traffic, as well as build their dependence on time. The time dependence diagram for the downstream packet rate  $B_N(t)$  for the sample “1 out of 50” is shown in Fig. 5.

The abscissa shows the time elapsed since the beginning of the experiment, and the ordinate shows the rate of the downstream packet rate  $B_N(t)$  measured in the number of flows per second.

For comparison, the time dependence diagram for the downstream packet rate  $B_N(t)$  for the sample “1 out of 200” is shown in Fig. 6.

The traffic data collected allow finding average values and their variations for network parameters, as well as testing the hypothesis of a constant value for the ratio from (5). The data processed is presented in the Table.

Table. Incoming traffic data

Sl. No.	$N_k$	$B_k$ (packets per second)	$\sigma(B_k)$	$B_k \cdot N_k$	$\sigma(B_k) \cdot N_k$
1	50	44.50	6.02	2225	301
2	100	15.90	2.79	1590	279
3	200	9.77	2.33	1954	466
4	500	4.19	0.74	2095	370
5	1000	3.65	0.70	3650	700

The fifth column of the Table shows data the product of the downstream packet rate  $B_N(t)$  and the sample size  $N_k$ . Considering the measurement error from column 6, this ratio can be considered constant. For a more visual demonstration of the constant ratio, there is a graph in Fig. 7.

The abscissa is the sample size  $N_k$ , and the y-axis is the downstream packet rate  $B_N$  measured in flows per second. The graph in Fig. 7 clearly shows that there is a straight line within the two-fold mean-square error  $\sigma(B_k)$  that is, the hypothesis (Section 3) was experimentally verified.



```
{
  "datagramSourceIP": "192.168.1.2",
  "datagramSize": "1256",
  "unixSecondsUTC": "1634213701",
  "localtime": "2021-10-14T16:15:01+0400",
  "datagramVersion": "5",
  "agentSubId": "0",
  "agent": "91.222.129.200",
  "packetSequenceNo": "3609022",
  "sysUpTime": "3061563254",
  "samplesInPacket": "6",
  "samples": [{
    "sampleType_tag": "0:1",
    "sampleType": "FLOWSAMPLE",
    "sampleSequenceNo": "9689728",
    "sourceId": "0:2",
    "meanSkipCount": "50",
    "samplePool": "513989805",
    "dropEvents": "393004",
    "inputPort": "1",
    "outputPort": "2",
    "elements": [{
      "flowBlock_tag": "0:1",
      "flowSampleType": "HEADER",
      "headerProtocol": "1",
      "sampledPacketSize": "536",
      "strippedBytes": "4",
      "headerLen": "128",
      "headerBytes": "00-21-5E-F0-2A-A8-52-54-00-BA-F0-87-
08-00-45-00-02-06-AD-95-00-00-40-11-53-22-5B-DE-80-C8-
4A-D0-50-B9-13-C4-1B-14-01-F2-52-41-53-49-50-2F-32-2E-30
-20-34-30-33-20-46-6F-72-62-69-64-64-65-6E-0D-0A-56-69-
61-3A-20-53-49-50-2F-32-2E-30-2F-55-44-50-20-37-34-2E-32
-30-38-2E-38-30-2E-31-38-35-3A-36-39-33-32-3B-62-72-61-
6E-63-68-3D-7A-39-68-47-34-62-4B-2D-32-30-38-35-32-31-38
-37-35-30-3B-72",
      "dstMAC": "00215ef02aa8",
      "srcMAC": "525400baf087",
      "IPSize": "518",
      "ip.tot_len": "518",
      "srcIP": "91.222.128.200",
      "dstIP": "74.208.80.185",
      "IPProtocol": "17",
    }
  ]
}
```

Fig. 4. Sample data for the captured traffic

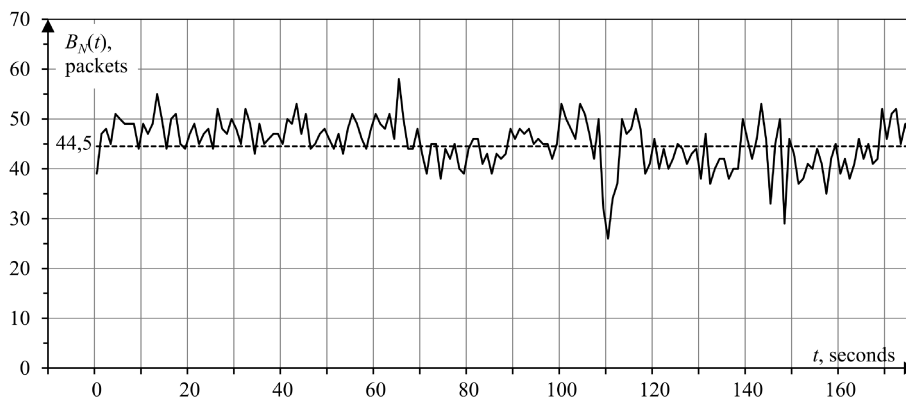


Fig. 5. Time dependence for the downstream packet rate  $B_N(t)$  “1 out of 50”

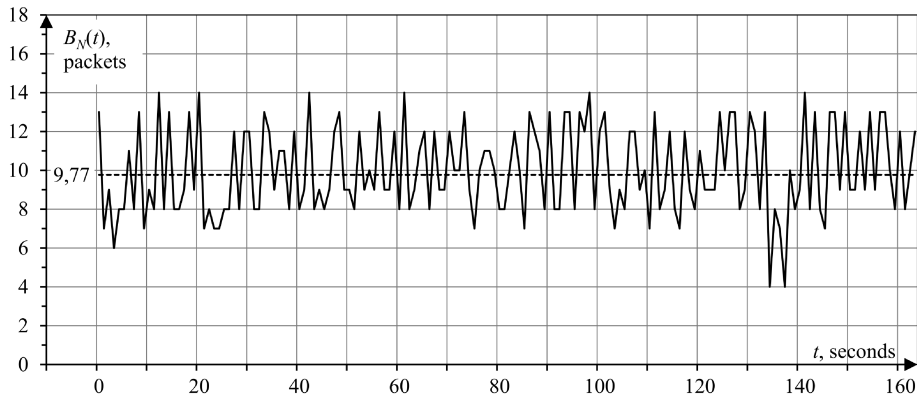


Fig. 6. Time dependence for the downstream packet rate  $B_N(t)$  "1 out of 200"

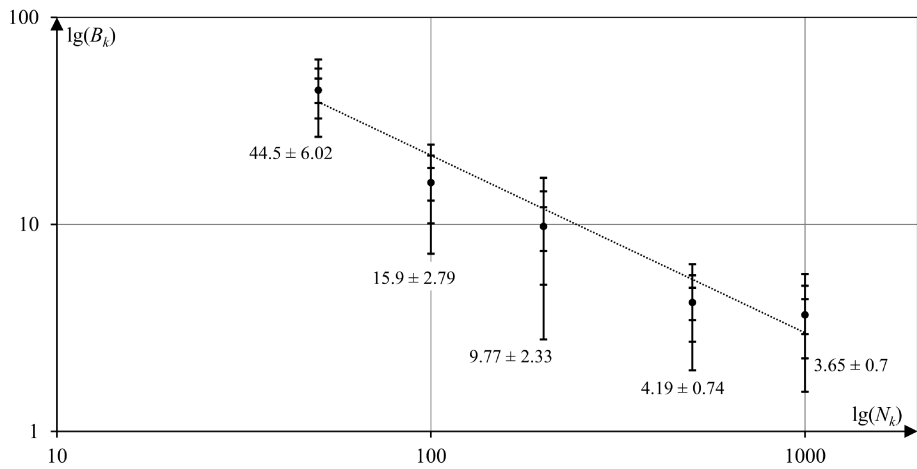


Fig. 7. Dependence of the downstream packet rate  $B_N(t)$  on the sample size  $N_k$  in the logarithmic axes

## Conclusions

This work defines the rules for finding threshold values for the main network variables used to detect network intrusions under conditions of limited data sampling. Such variables include the number of active flows and incoming TCP and UDP traffic generated by a single external IP address.

The peculiarity of this solution is that the traffic analysis is performed using the sFlow technology. This technology involves limited packet sampling, and its parameters can be changed (1 packet out of 50 can be analyzed, but this value can reach 1000).

When working with incomplete data, it is important to solve the problem of measuring the threshold values for variables, used for the network intrusion detection, and it was solved. Since a small number of traffic packets was initially analyzed, the measured values changed too. The main conclusion is that the product of threshold and sample resolution remains constant. Thus, it is possible to link not only the NetFlow and sFlow data but also threshold values obtained at different sample resolutions. In addition, this work defines the size of the maximum resolution, at which an attack with a given threshold can be detected.

The theoretical research, focusing on the determination of thresholds, was experimentally verified. Based on the obtained theoretical results, a security infrastructure, measuring the values of the variables used for intrusion detection and comparing them with threshold values, was developed.





While testing, a local network, connected to the Internet, was subjected to DDoS attacks from the external IP addresses using the most common attack tools. During the attack, the values of the variables, used to detect the attacks, were fixed at different sample resolutions from 50 to 1000 (using 100, 200, and 500 as intermediate values).

During the experiment, the traffic from the attack addresses was recorded, and its average value and standard deviation were found. Based on the data collected, the hypothesis of a constant value of the product of the observed threshold value and the sample size was tested. Considering the experimental error, this hypothesis was verified.

The novelty of this approach is that it is not the entire incoming traffic that is analyzed but the limited sample of incoming traffic packets. At the same time, the values of variables, that exceed the threshold, are also confidently fixed, and only small flows that do not affect the selection of attack IP addresses are discarded. The formulated hypothesis established the new threshold values, as well as the ways to measure them using the data from a limited sample of packets.

### References

1. Sukhov A. M., Sagatov E. S., Baskakov A. V. Rank distribution for determining the threshold values of network variables and the analysis of DDoS attacks. *Procedia Engineering*, 2017, vol. 201, pp. 417–427. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.09.666>
2. Claise B. *Cisco systems netflow services export version 9*. 2004. <https://doi.org/10.17487/rfc3954>
3. Giotis K., Argyropoulos C., Androulidakis G., Kalogeras D., Maglaris V. Combining OpenFlow and sFlow for an effective and scalable anomaly detection and mitigation mechanism on SDN environments. *Computer Networks*, 2014, vol. 62, pp. 122–136. <https://doi.org/10.1016/j.bjp.2013.10.014>
4. Li B., Springer J., Bebis G., Gunes M. H. A survey of network flow applications. *Journal of Network and Computer Applications*, 2013, vol. 36, iss. 2, pp. 567–581. <https://doi.org/10.1016/j.jnca.2012.12.020>
5. Feinstein L., Schnackenberg D., Balupari R., Kindred D. Statistical approaches to DDoS attack detection and response. In: *Proceedings DARPA Information Survivability Conference and Exposition*. Washington, DC, USA, 2003, vol. 1, pp. 303–314. <https://doi.org/10.1109/DISCEX.2003.1194894>
6. David J., Thomas C. DDoS attack detection using fast entropy approach on flow-based network traffic. *Procedia Computer Science*, 2015, vol. 50, pp. 30–36. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.04.007>
7. David J., Thomas C. Efficient DDoS flood attack detection using dynamic thresholding on flow-based network traffic. *Computers & Security*, 2019, vol. 82, pp. 284–295. <https://doi.org/10.1016/j.cose.2019.01.002>
8. Singh K., Dhindsa K. S., Nehra D. T-CAD: A threshold based collaborative DDoS attack detection in multiple autonomous systems. *Journal of Information Security and Applications*, 2020, vol. 51, art. 102457. <https://doi.org/10.1016/j.jisa.2020.102457>
9. Garcia-Teodoro P., Diaz-Verdejo J., Maciá-Fernández G., Vázquez E. Anomaly-based network intrusion detection: Techniques, systems and challenges. *Computers & Security*, 2009, vol. 28, iss. 1–2, pp. 18–28. <https://doi.org/10.1016/j.cose.2008.08.003>
10. Patel S. K., Sonker A. Rule-based network intrusion detection system for port scanning with efficient port scan detection rules using snort. *International Journal of Future Generation Communication and Networking*, 2016, vol. 9, iss. 6, pp. 339–350. <https://doi.org/10.14257/ijfgen.2016.9.6.32>
11. D’Cruze H., Wang P., Sbeit R. O., Ray A. A software-defined networking (SDN) approach to mitigating DDoS attacks. In: Latifi S. (ed.) *Information Technology – New Generations*, Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 558. Springer, Cham, 2018, pp. 141–145. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-54978-1\\_19](https://doi.org/10.1007/978-3-319-54978-1_19)
12. Bekeneva Ya. A. Analysis of DDoS-attacks topical types and protection methods against them. *Proceedings of Saint Petersburg Electrotechnical University Journal*, 2016, vol. 1, pp. 7–14 (in Russian). EDN: [TGYPJD](https://doi.org/10.1016/j.jisa.2020.102457)
13. Zakharov A. A., Popov E. F., Fuchko M. M. SDN architecture, cyber security aspects. *Vestnik SibGUTI*, 2016, iss. 1, pp. 83–92 (in Russian). EDN: [WLSRVP](https://doi.org/10.1016/j.cose.2008.08.003)



14. Glassman S. A caching relay for the world wide web. *Computer Networks and ISDN Systems*, 1994, vol. 27, iss. 2, pp. 165–173. [https://doi.org/10.1016/0169-7552\(94\)90130-9](https://doi.org/10.1016/0169-7552(94)90130-9)
15. Wang D., Cheng H., Wang P., Huang X., Jian G. Zipf's law in passwords. *IEEE Transactions on Information Forensics and Security*, 2017, vol. 12, iss. 11, pp. 2776–2791. <https://doi.org/10.1109/TIFS.2017.2721359>
16. Zhang S., Sun W., Liu J., Nei K. Physical layer security in large-scale probabilistic caching: Analysis and optimization. *IEEE Communications Letters*, 2019, vol. 23, iss. 9, pp. 1484–1487. <https://doi.org/10.1109/LCOMM.2019.2926967>

Поступила в редакцию / Received 21.03.2023

Принята к публикации / Accepted 29.05.2023

Опубликована / Published 30.08.2024

## Personalia

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 463–471

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 463–471

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-463-471>

EDN: TXUNZO

Персоналии

УДК 539.3

### Памяти Якова Григорьевича Сапункова

А. В. Молоденков<sup>✉</sup>, Ю. Н. Челноков

Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24

**Молоденков Алексей Владимирович**, доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением, molalexei@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4991-4220>, AuthorID: 7448

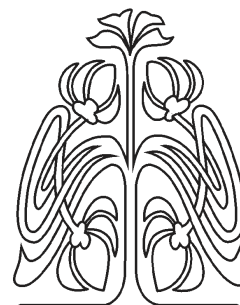
**Челноков Юрий Николаевич**, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением, ChelnokovYuN@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-4901-5767>, AuthorID: 8289

**Аннотация.** Статья посвящена выдающемуся ученому-механику и педагогу Якову Григорьевичу Сапункову (04.11.1938–23.10.2020), важные научные результаты которого простираются от гиперзвуковой аэродинамики, механики жидкости и методов вычислений до теории оптимального управления, механики космического полета и теории бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС). Дается обзор его научной деятельности и приведен список наиболее значимых работ.

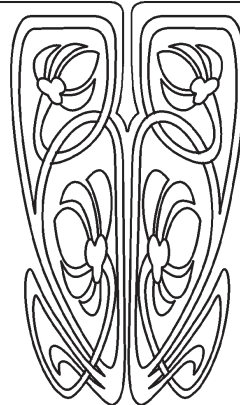
**Ключевые слова:** гиперзвуковые течения газа, механика жидкости, механика космического полета, теория оптимального управления, теория БИНС, Я. Г. Сапунков

**Для цитирования:** Молоденков А. В., Челноков Ю. Н. Памяти Якова Григорьевича Сапункова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 463–471. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-463-471>, EDN: TXUNZO

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Приложения





Personalia

## In memory of Yakov G. Sapunkov

A. V. Molodenkov<sup>✉</sup>, Yu. N. Chelnokov

Institute of Precision Mechanics and Control Russian Academy of Sciences, 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia

Alexei V. Molodenkov, molalexei@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4991-4220>, AuthorID: 7448

Yurii N. Chelnokov, ChelnokovYuN@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-4901-5767>, AuthorID: 8289

**Abstract.** The article is devoted to the outstanding mechanical scientist and pedagogue Yakov Grigoryevich Sapunkov (04.11.1938–23.10.2020), whose important scientific results range from hypersonic aerodynamics, fluid mechanics and computational methods to the theory of optimal control, mechanics of space flight and the theory of strapdown inertial navigation systems (SINS). An outline of his scientific activity and list of his most significant scientific works are given.

**Keywords:** hypersonic gas flows, fluid mechanics, mechanics of space flight, optimal control theory, theory of SINS, Ya. G. Sapunkov

**For citation:** Molodenkov A. V., Chelnokov Yu. N. In memory of Yakov G. Sapunkov. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 463–471 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-463-471>, EDN: TXUNZO

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

### 1. Гиперзвуковые течения газа и механика жидкости

Жизнь Я. Г. Сапункова неразрывно связана с Саратовским государственным университетом имени Н. Г. Чернышевского. Здесь Яков Григорьевич окончил механико-математический факультет и в 1961 г. поступил в аспирантуру при кафедре «Теоретическая механика и аэрогидромеханика». Его научным руководителем стал проф. Б. М. Булах — ученик проф. С. В. Фальковича.

С 1962 г. на кафедре начались исследования гиперзвуковых течений газа. В начале 1960-х гг. Б. М. Булах получил значительные результаты в исследовании сверхзвуковых конических течений газа, которые были опубликованы в его монографии «Нелинейные конические течения газа», подготовил курс лекций «Гиперзвуковые течения газа». После переезда профессора в г. Ленинград исследования по гиперзвуковым течениям газа продолжил Я. Г. Сапунков. Им были построены приближенные аналитические решения для задачи о гиперзвуковом обтекании конических тел с учетом вихревых энтропийных слоев, которые возникают вблизи поверхности тел. Для исследования таких течений использовался метод разложения по малым параметрам задачи и его модификации: метод Пуанкаре – Лайтхилла – Го (метод ПЛГ), метод внутренних и внешних разложений.

Прямое применение классического метода разложения по малым параметрам к решению задач о гиперзвуковом обтекании конических тел дает приближения, которые неравномерно аппроксимируют решение задачи во всей области течения из-за того, что зависимость параметров течения от малых параметров имеет некоторые особенности. Это обстоятельство вынуждает использовать модифицированные методы разложения по малым параметрам.

Надо отметить большую роль С. В. Фальковича в культивировании этих методов на кафедре. В частности, именно Савелий Владимирович посоветовал Якову Григорьевичу обратить внимание на статью о методе ПЛГ в сборнике переводов иностранных статей, в редактировании которого он принимал участие.

По окончании аспирантуры Я. Г. Сапунков защитил в Институте механики МГУ имени М. В. Ломоносова кандидатскую диссертацию на тему «Вихревые слои при обтекании конических тел сверх- и гиперзвуковыми потоками газа».



В 1964 г. за рубежом была опубликована книга М. Ван Дайка «Методы возмущений в механике жидкости»; С. В. Фалькович выписал эту книгу и организовал на руководимой им кафедре «Теоретическая механика и аэрогидромеханика» семинар по ее изучению. Сотрудники широко использовали новые методы возмущений для решения различных задач о движении жидкостей и газов. Позже ими разрабатывались аналитические и численные методы для исследования нестационарных гиперзвуковых течений при обтекании различных тел.

Долгое время не удавалось построить с помощью метода разложений по малому параметру решение задачи для гиперзвукового обтекания плоского крыла. Дело в том, что зависимость параметров течения и формы ударной волны от малого параметра задачи, в качестве которого выступает отношение плотностей газа при переходе через сильную ударную волну, имеет несколько особенностей различного характера и расположенных в разных областях течения. Эту задачу решали многие исследователи, но в итоге решение задачи было построено Я. Г. Сапунковым.

Также с помощью метода ПЛГ и метода внутренних и внешних разложений Яковом Григорьевичем исследовалась задача неустановившегося автомодельного течения во внешнем магнитном поле неньютоновской электропроводной жидкости под действием пластины, импульсно приведенной в равномерное движение. Решение задачи получено для слабых и сильных магнитных полей. Основные результаты Я. Г. Сапункова в области гиперзвуковой аэродинамики и механики жидкости опубликованы в [1–4]. Научную работу по этой тематике в СГУ Яков Григорьевич продолжал до начала 1990-х гг.

## **2. Механика космического полета (аэродинамика), теория оптимального управления и теория БИНС**

В 1994 г. Яков Григорьевич начинает сотрудничество с проф. Ю. Н. Челноковым и А. В. Молоденковым в области механики космического полета, теории оптимального управления движением и теории бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) в Институте проблем точной механики и управления РАН (ИПТМУ РАН). Он принимал участие в ряде фундаментальных и прикладных исследований, многие из которых были поддержаны РФФИ. Исследования выполнялись в лаборатории механики, навигации и управления движением ИПТМУ РАН.

Яковом Григорьевичем и в соавторстве с ним были получены новые научные результаты, которые носили приоритетный характер в области оптимального управления орбитальным (траекторным) движением космических аппаратов. Приведем некоторые из них.

Я. Г. Сапунковым рассматривалась задача об оптимальной встрече управляемого космического аппарата (КА) с неуправляемым аппаратом, движущимся по эллиптической кеплеровской орбите в поле тяготения Солнца. Управление КА осуществляется с помощью солнечного паруса и двигателя малой тяги. Для решения этой задачи использовались регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в переменных Ку-стаанхеймо – Штифеля (KS-переменных) и принцип максимума Л. С. Понтрягина. В качестве минимизируемого функционала использовался комбинированный интегральный функционал качества, характеризующий расход энергии на перевод управляемого КА из начального в конечное состояние и время, затраченное на этот перевод. Я. Г. Сапунковым были сформулированы дифференциальные краевые задачи оптимизации и найдены их первые интегралы.

С помощью принципа максимума и KS-переменных Яковом Григорьевичем была решена пространственная задача оптимального вывода на заданную орбиту космического аппарата, управляемого с помощью солнечного паруса и ограниченного или импульсного реактивного ускорения центра масс КА. При этом минимизируемый функционал представлял собой линейную комбинацию с весовыми множителями двух критериев: времени и интегральной суммы величин импульсов реактивного ускорения центра масс КА, затраченных на процесс управления. Для этой задачи Я. Г. Сапунковым были представлены следующие результаты:

- получены первые интегралы уравнений краевой задачи и формулы для определения





приращений фазовых и сопряженных переменных под действием сообщаемого импульса реактивного ускорения;

- получены численные решения задачи для ограниченного или импульсного ускорения при наличии солнечного паруса или при его отсутствии;
- дана оценка влияния наличия солнечного паруса на длительность процесса, на суммарный импульс величины реактивного ускорения и на величину минимизируемого функционала;
- рассмотрены случаи коррекции орбиты и случаи, когда элементы новой орбиты существенно отличаются от элементов начальной орбиты КА;
- установлена оптимальность реактивного ускорения, ортогонального к плоскости оскулирующей орбиты КА, для малых значений отклонений угловых элементов орбиты от их начальных значений, т.е. оптимальность такого ускорения в задачах коррекции угловых элементов орбиты КА.

С использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА и принципа максимума Понтрягина Я. Г. Сапунков изучал задачу оптимальной переориентации орбиты КА с помощью ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. Такая тяга изменяет ориентацию орбиты КА, сохраняя ее форму и размеры в процессе управления неизменными. Функционал, определяющий качество процесса управления, представлял собой свертку с весовыми множителями двух критериев: времени и суммарного импульса реактивной тяги, затраченных на процесс управления (частные случаи этого функционала — случай быстрогодействия и случай минимизации характеристической скорости). Была разработана теория решения задачи при помощи кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА в нелинейной непрерывной постановке с использованием ограниченной (малой) или импульсной (большой) реактивной тяги. Им получены алгоритмы решения краевых задач оптимальной двухимпульсной и многоимпульсной переориентации орбиты КА (для нефиксированного числа импульсов реактивной тяги) и примеры численного решения краевых задач оптимальной переориентации орбиты КА.

С использованием кватернионов и принципа максимума Яков Григорьевич решил в нелинейной постановке задачу об оптимальном переводе орбиты КА с переменной массой на заданную плоскость. Было показано, что управление движением аппарата производится с помощью ограниченной по модулю реактивной тяги, ортогональной к плоскости оскулирующей орбиты КА. Причем изменение массы аппарата учитывается за счет расхода рабочего тела на процесс управления, а функционал, определяющий качество процесса управления, представляет собой линейную свертку с весовыми множителями двух критериев: времени и суммарного импульса тяги, затраченных на процесс управления.

Совместно с Ю. Н. Челноковым Я. Г. Сапунков разработал теорию решения такой задачи. Полученные Яковом Григорьевичем численные решения задачи оптимального управления орбитальным движением КА содержат до 192 пассивных и активных этапов. Им также установлены закономерности оптимального управления поворотом плоскости орбиты КА. Основные результаты в области управляемого орбитального движения КА опубликованы в работах [5–17].

В рамках математической теории БИНС Яковом Григорьевичем был предложен новый вариант разделения процесса численного интегрирования дифференциальных уравнений функционирования БИНС в нормальной географической системе координат на быстрый и медленный циклы счета. С использованием метода Эйлера – Коши Я. Г. Сапунков построил численный метод типа «предиктор-корректор», решающий задачу определения ориентации и местоположения объекта с помощью БИНС на борту в реальном времени с высокой точностью [18].

В области задач оптимального управления угловым движением (переориентацией) КА Яковом Григорьевичем и в соавторстве с ним были получены следующие результаты.

- Аналитически и численно исследованы особые режимы управления в задачах оптимальной переориентации твердого тела (КА) различной динамической конфигурации.





Особым режимом управления принято называть ситуацию, когда структура оптимального управления из принципа максимума не определяется сразу, тогда переходят к дополнительному исследованию производных от функции Гамильтона – Понтрягина, фазовых и сопряженных переменных задачи.

- Получены условия возникновения особых режимов, явные выражения для оптимальных управлений и траекторий углового движения КА на особых участках управления, новые первые интегралы задач, справедливые для особых и не особых участков управления.
- Построены аналитические решения задач импульсных оптимальных разворотов сферически симметричного и осесимметричного КА (твердого тела) при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА, реализующие двухимпульсные схемы управления. Полученные аналитические решения доведены до записи в виде алгоритмов разворотов КА.
- Найден новый класс точных аналитических решений в задаче оптимального разворота сферически-симметричного твердого тела (результат вошел в Отчетный доклад Президиума РАН Президенту РФ и Правительству РФ за 2010 г.).
- В рамках классической концепции Пуансо, интерпретирующей произвольное угловое движение твердого тела в терминах конусов прецессии, или иначе обобщенного конического движения, с использованием принципа максимума Понтрягина получено квазиоптимальное аналитическое решение задачи оптимального разворота КА произвольной динамической конфигурации при произвольных граничных условиях по угловому положению в пространстве и угловой скорости КА. В целом ряде случаев квазиоптимальное решение задачи совпадает с оптимальным решением. Предложенное решение доведено до явных выражений, которые могут быть использованы как алгоритмы программной переориентации КА. Основные результаты в этой области опубликованы в работах [19–37]. Следует отметить, что по этой тематике Яков Григорьевич принял участие в подготовке одного кандидата и одного доктора наук.

Вклад Я. Г. Сапункова в развитие вышеперечисленных разделов механики, теории оптимального управления движением и теории БИНС сложно переоценить. Глубокий научный задел, созданный Яковом Григорьевичем, дает импульс к решению новых задач. Его работы хорошо знают не только в России, но и за рубежом. Коллеги помнят и ценят Якова Григорьевича как талантливого, творчески мыслящего исследователя и с теплотой его вспоминают.

#### Список литературы

1. Сапунков Я. Г. Гиперзвуковое обтекание круглого конуса под углом атаки // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27, № 1. С. 190–192.
2. Сапунков Я. Г. Гиперзвуковое обтекание конических тел // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1966. № 1. С. 137–139.
3. Сапунков Я. Г. Автомодельные решения пограничного слоя ньютоновской жидкости в магнитной гидродинамике // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 6. С. 77–82.
4. Сапунков Я. Г. Задача Релея для неньютоновской электропроводной жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1970. № 2. С. 50–55.
5. Челноков Ю. Н., Сапунков Я. Г. Построение оптимальных управлений и траекторий космического аппарата на основе регулярных кватернионных уравнений задачи двух тел // Космические исследования. 1996. Т. 34, № 2. С. 150–158. EDN: [XRRJNP](#)
6. Сапунков Я. Г. Применение KS-переменных к задаче оптимального управления космическим аппаратом // Космические исследования. 1996. Т. 34, № 4. С. 428–433.
7. Сапунков Я. Г. Решение задач оптимального управления космическим аппаратом с ограниченной и импульсной тягой в KS-переменных // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 3. С. 73–78. EDN: [LATGAN](#)
8. Сапунков Я. Г. Оптимальное управление космическим аппаратом с двигателем ограниченной или импульсной тяги и солнечным парусом // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 4. С. 55–61. EDN: [SAFSZX](#)
9. Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Построение оптимальных управлений и траекторий центра масс космического аппарата, снабженного солнечным парусом и двигателем малой тяги, с использова-



- нием кватернионов и переменных Кустаанхеймо – Штифеля // Космические исследования. 2014. Т. 52, № 6. С. 489–499. <https://doi.org/10.7868/S0023420614060053>, EDN: SXWXRL
10. Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Исследование задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата посредством ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Часть 1 // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 8. С. 567–575. <https://doi.org/10.17587/mau.17.567-575>, EDN: WHTPRJ
  11. Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Исследование задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата посредством ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Часть 2 // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 9. С. 633–643. <https://doi.org/10.17587/mau.17.633-643>, EDN: WMCIWX
  12. Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Импульсная оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. I // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 5. С. 70–89. <https://doi.org/10.31857/S057232990002467-3>, EDN: VNJSGN
  13. Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Импульсная оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. II // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 1. С. 3–23. <https://doi.org/10.1134/S0572329919010021>, EDN: VVVMFY
  14. Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Кватернионное решение задачи оптимального поворота плоскости орбиты космического аппарата переменной массы с помощью тяги, ортогональной плоскости орбиты // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 4. С. 109–128. <https://doi.org/10.1134/S057232991904007X>, EDN: GUOAXE
  15. Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Оптимальный поворот плоскости орбиты космического аппарата переменной массы в центральном гравитационном поле посредством ортогональной тяги // Автоматика и телемеханика. 2019. № 8. С. 87–108. <https://doi.org/10.1134/S0005231019080087>, EDN: KFYBEV
  16. Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Решение задачи оптимального вывода на орбиту космического аппарата с использованием реактивного ускорения и солнечного паруса в переменных Кустаанхеймо – Штифеля // Космические исследования. 2021. Т. 59, № 4. С. 327–338. <https://doi.org/10.31857/S0023420621040051>, EDN: AUBMPC
  17. Челноков Ю. Н., Сапунков Я. Г., Логинов М. Ю., Щекутьев А. Ф. Прогноз и коррекция орбитального движения космического аппарата с использованием регулярных кватернионных уравнений и их решений в переменных Кустаанхеймо – Штифеля и изохронных производных // Прикладная математика и механика. 2023. Т. 87, вып. 2. С. 124–156. <https://doi.org/10.31857/S0032823523020054>
  18. Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N., Molodenkov A. V. A new method of integrating the equations of autonomous strapdown INS // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19, № 10. С. 658–663. <https://doi.org/10.17587/mau.19.658-663>
  19. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата с ограниченным и импульсным управлением при произвольных граничных условиях // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2007. № 2. С. 152–165. EDN: HZRURD
  20. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Особый режим управления в задаче оптимального разворота сферически-симметричного космического аппарата // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 47–54. EDN: KYFYHT
  21. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Особый режим управления в задаче оптимального разворота осесимметричного космического аппарата // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2010. № 6. С. 61–69. EDN: NBSIPJ
  22. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Особый режим управления в задаче оптимального разворота произвольного твердого тела (космического аппарата) // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2012. № 2. С. 145–152. EDN: OWWXZD
  23. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Новый класс аналитических решений в задаче оптимального разворота сферически симметричного твердого тела // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2012. № 2. С. 16–27. EDN: OYCCRF
  24. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое решение задачи оптимального разворота сферически-симметричного космического аппарата в классе конических движений // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2013. № 3. С. 167–176. <https://doi.org/10.7868/S000233881302008X>, EDN: PZVJEP
  25. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое решение задачи оптимального по быстро-



- действию разворота сферически-симметричного космического аппарата в классе конических движений // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2014. № 2. С. 13–25. <https://doi.org/10.7868/S0002338814020139>, EDN: RWZRRB
26. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Решение задачи оптимального разворота сферически симметричного твердого тела при произвольных граничных условиях в классе обобщенных конических движений // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2014. № 5. С. 22–34. EDN: SUJOTT
27. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое приближенное решение задачи оптимального разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2015. № 3. С. 131–141. <https://doi.org/10.7868/S0002338815030142>, EDN: TQQRH
28. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое решение задачи оптимального в смысле комбинированного функционала разворота твердого тела в классе конических движений // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2016. № 2. С. 3–16. EDN: VWXDSH
29. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2016. № 6. С. 129–145. <https://doi.org/10.7868/S0002338816060093>, EDN: WYLTGR
30. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое решение задачи оптимального по быстродействию разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2018. № 2. С. 131–147. <https://doi.org/10.7868/S0002338818020117>, EDN: YWSMBI
31. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое квазиоптимальное решение задачи разворота произвольного твердого тела при произвольных граничных условиях // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 2. С. 140–154. <https://doi.org/10.1134/S0572329919020090>, EDN: ZDMBWX
32. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Оптимальное управление вращательным движением твердого тела с комбинированным критерием качества // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2019. № 3. С. 55–65. <https://doi.org/10.1134/S0002338819030120>, EDN: ZDEFDV
33. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое квазиоптимальное решение задачи поворота осесимметричного твердого тела с комбинированным функционалом // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2020. № 3. С. 39–49. <https://doi.org/10.31857/S0002338820030105>, EDN: OYYEJS
34. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое квазиоптимальное решение задачи минимального по времени поворота космического аппарата // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2021. Т. 4. С. 142–156. <https://doi.org/10.31857/S0002338821030124>, EDN: HILFVT
35. Сапунков Я. Г., Молоденков А. В. Аналитическое решение задачи оптимального в смысле комбинированного функционала разворота осесимметричного космического аппарата // Автоматика и телемеханика. 2021. № 7. С. 86–106. <https://doi.org/10.31857/S0005231021070059>, EDN: FJJYBV
36. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитический квазиоптимальный алгоритм программного управления угловым движением космического аппарата // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2023. № 4. С. 125–136. <https://doi.org/10.31857/S0002338823030101>, EDN: EUUEGE
37. Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V. Quasioptimal Spacecraft attitude control constructed according to the Poinot concept // Aerospace. 2023. Vol. 10, iss. 5. Art. 402. <https://doi.org/10.3390/aerospace10050402>

## References

1. Sapunkov Ia. G. Hypersonic flow past a circular cone at angle of attack. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1963, vol. 27, iss. 1, pp. 281–285. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(63\)90117-5](https://doi.org/10.1016/0021-8928(63)90117-5)
2. Sapunkov Ya. G. Hypersonic flow past conical bodies. *Fluid Dynamics*, 1967, vol. 1, iss. 1, pp. 98–99. <https://doi.org/10.1007/BF01016280>
3. Sapunkov Ya. G. Self-similar solutions of non-Newtonian fluid boundary layer in MHD. *Fluid Dynamics*, 1967, vol. 2, iss. 6, pp. 53–56. <https://doi.org/10.1007/BF01013712>



4. Sapunkov Ya. G. The rayleigh problem for a non-newtonian electrically conducting fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1970, vol. 11, iss. 2, pp. 241–245. <https://doi.org/10.1007/BF00908102>
5. Chelnokov Yu. N., Sapunkov Ya. G. Design of optimum control strategies and trajectories of a Spacecraft with the regular quaternion equations of the two-body problem. *Cosmic Research*, 1996, vol. 34, iss. 2, pp. 137–145. EDN: LDPBMR
6. Sapunkov Ya. G. The use of KS variables in the problem of spacecraft optimum control. *Cosmic Research*, 1996, vol. 34, iss. 4, pp. 395–400.
7. Sapunkov Ya. G. The solution of the spacecraft optimum control problems with limited and impulse force using KS-variables. *Mechatronics, Automation, Control*, 2010, iss. 3, pp. 73–78 (in Russian). EDN: LATGAN
8. Sapunkov Ya. G. Optimal control of a spacecraft with engine of limited or pulse thrust and solar sail. *Mechatronics, Automation, Control*, 2014, iss. 4, pp. 55–61 (in Russian). EDN: SAFSZX
9. Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Construction of optimum controls and trajectories of motion of the center of masses of a spacecraft equipped with the solar sail and low thrust engine, using quaternions and Kustaanheimo – Stiefel variables. *Cosmic Research*, 2014, vol. 52, iss. 6, pp. 450–460. <https://doi.org/10.1134/S0010952514060057>, EDN: UFIQYL
10. Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Investigation of the task of the optimal reorientation of a spacecraft orbit through a limited or impulse jet thrust, orthogonal to the plane of the orbit. Part 1. *Mechatronics, Automation, Control*, 2016, vol. 17, iss. 8, pp. 567–575 (in Russian). <https://doi.org/10.17587/mau.17.567-575>, EDN: WHTPRJ
11. Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Investigation of the task of the optimal reorientation of a spacecraft orbit through a limited or impulse jet thrust, orthogonal to the plane of the orbit. Part 2. *Mechatronics, Automation, Control*, 2016, vol. 17, iss. 9, pp. 633–643 (in Russian). <https://doi.org/10.17587/mau.17.633-643>
12. Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Pulsed optimal spacecraft orbit reorientation by means of reactive thrust orthogonal to the osculating orbit. I. *Mechanics of Solids*, 2018, vol. 53, iss. 5, pp. 535–551. <https://doi.org/10.3103/S0025654418080083>, EDN: SUAMTW
13. Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Pulsed optimal spacecraft orbit reorientation by means of reactive thrust orthogonal to the osculating orbit. II. *Mechanics of Solids*, 2019. vol. 54, iss. 1, pp. 1–18. <https://doi.org/10.3103/S0025654419010011>, EDN: DWLNJF
14. Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Quaternion solution of the problem of optimal rotation of the orbit plane of a variable-mass spacecraft using thrust orthogonal to the orbit plane. *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, iss. 6, pp. 941–957. <https://doi.org/10.3103/S0025654419060098>, EDN: TNAEOH
15. Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Optimal rotation of the orbit plane of a variable mass spacecraft in the central gravitational field by means of orthogonal thrust. *Automation and Remote Control*, 2019, vol. 80, iss. 8, pp. 1437–1454. <https://doi.org/10.1134/S000511791908006X>, EDN: MQGAKL
16. Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Solution of the problem of optimal spacecraft launching into orbit using reactive acceleration and solar sail in Kustaanheimo – Stiefel variables. *Cosmic Research*, 2021, vol. 59, iss. 4, pp. 280–290. <https://doi.org/10.1134/S0010952521040055>, EDN: MQGAKL
17. Chelnokov Yu. N., Sapunkov Ya. G., Loginov M. Yu., Schekutev A. F. Prediction and correction of the orbital motion of spacecraft using regular quaternion equations and their solutions in the Kustaanheimo – Stiefel variables and isochronic derivatives. *Mechanics of Solids*, 2023, vol. 58, iss. 7, pp. 2478–2503. <https://doi.org/10.3103/S0025654423070063>
18. Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N., Molodenkov A. V. A new method of integrating the equations of autonomous strapdown INS. *Mechatronics, Automation, Control*, 2018, vol. 19, iss. 10, pp. 658–663. <https://doi.org/10.17587/mau.19.658-663>
19. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. A solution of the optimal turn problem of an axially symmetric spacecraft with bounded and pulse control under arbitrary boundary conditions. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2007, vol. 46, iss. 2, pp. 310–323. <https://doi.org/10.1134/S1064230707020189>, EDN: LKEWCP
20. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Special control regime in optimal turn problem of spherically symmetric spacecraft. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2009, vol. 48, iss. 6, pp. 891–898. <https://doi.org/10.1134/S1064230709060057>, EDN: MWSYXZ
21. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Special control regime in the problem of optimal turn of an axially symmetric spacecraft. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2010, vol. 49, iss. 6, pp. 891–899. <https://doi.org/10.1134/S1064230710060079>
22. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Special control regime in the problem of optimal turn of an



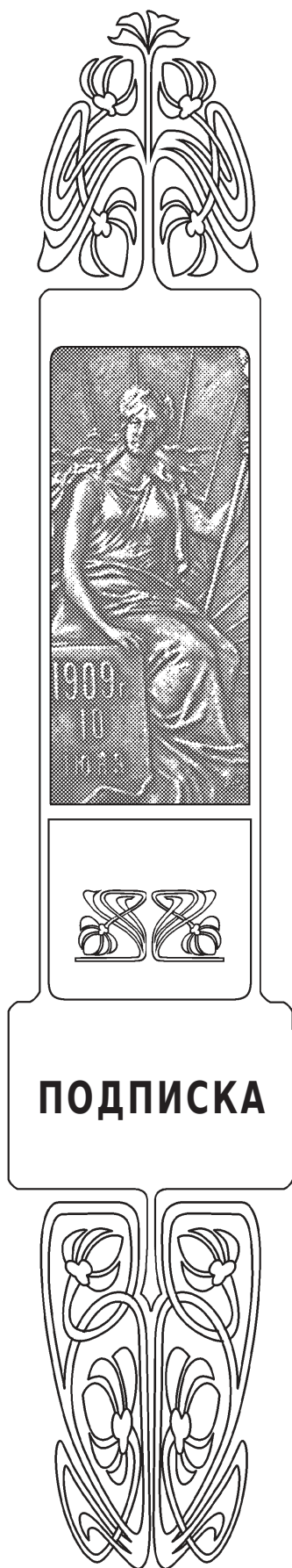


- arbitrary rigid body (Spacecraft). *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, iss. 2, pp. 306–314. <https://doi.org/10.1134/S1064230712010121>, EDN: PDSDUZ
23. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. A new class of analytic solutions in the optimal turn problem for a spherically symmetric body. *Mechanics of Solids*, 2012, vol. 47, iss. 2, pp. 167–177. <https://doi.org/10.3103/S0025654412020033>, EDN: PDOJBH
  24. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical solution of the optimal slew problem of a spherically symmetric spacecraft in the class of conical motion. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2013, vol. 52, iss. 3, pp. 491–501. <https://doi.org/10.1134/S1064230713020081>, EDN: RFIDCJ
  25. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical solution of the time-optimal slew problem of a spherically symmetric spacecraft in the class of conical motion. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2014, vol. 53, iss. 2, pp. 159–171. <https://doi.org/10.1134/S1064230714020130>, EDN: SKRKGD
  26. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Solution of the optimal turn problem for a spherically symmetric rigid body with arbitrary boundary conditions in the class of generalized conical motions. *Mechanics of Solids*, 2014, vol. 49, iss. 5, pp. 495–505. <https://doi.org/10.3103/S0025654414050021>, EDN: UGHREP
  27. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical approximate solution of the problem of a spacecraft's optimal turn with arbitrary boundary conditions. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2015, vol. 54, iss. 3, pp. 458–468. <https://doi.org/10.1134/S1064230715030144>, EDN: UFBJKT
  28. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical solution of the optimal attitude maneuver problem with a combined objective functional for a rigid body in the class of conical motions. *Mechanics of Solids*, 2016, vol. 51, iss. 2, pp. 135–147. <https://doi.org/10.3103/S0025654416020011>, EDN: WTQMSH
  29. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical solution of the optimal slew problem for an axisymmetric spacecraft in the class of conical motions. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2016, vol. 55, iss. 6, pp. 969–985. <https://doi.org/10.1134/S1064230716060095>, EDN: YUZEON
  30. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical solution of the minimum time slew maneuver problem for an axially symmetric spacecraft in the class of conical motions. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2018, vol. 57, iss. 2, pp. 302–318. <https://doi.org/10.1134/S1064230718020120>, EDN: XYGMYX
  31. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical quasi-optimal solution for the problem on turn maneuver of an arbitrary solid with arbitrary boundary conditions. *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, iss. 3, pp. 474–485. <https://doi.org/10.3103/S0025654419020110>, EDN: JZHUEV
  32. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Optimal control of rigid body's rotation movement with a combined quality criterion. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2019, vol. 58, iss. 3, pp. 382–392. <https://doi.org/10.1134/S1064230719030122>, EDN: BDLWQZ
  33. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical quasi-optimal solution of the slew problem for an axially symmetric rigid body with a combined performance index. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2020, vol. 59, iss. 3, pp. 347–357. <https://doi.org/10.1134/S1064230720030107>, EDN: VATIAO
  34. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical quasi-optimal solution of the problem of the time-optimal rotation of a spacecraft. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2021, vol. 60, iss. 4, pp. 639–653. <https://doi.org/10.1134/S1064230721030114>, EDN: YRZQQC
  35. Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V. Analytical solution of the problem on an axisymmetric spacecraft attitude maneuver optimal with respect to a combined functional. *Automation and Remote Control*, 2021, vol. 82, iss. 7, pp. 1183–1200. <https://doi.org/10.1134/S0005117921070043>, EDN: MOZLRQ
  36. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical quasi-optimal algorithm for the programmed control of the angular motion of a spacecraft. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2023, vol. 62, pp. 569–580. <https://doi.org/10.1134/S1064230723030103>
  37. Sapunkov Y. G., Molodenkov A. V. Quasioptimal spacecraft attitude control constructed according to the Poincaré concept. *Aerospace*, 2023, vol. 10, iss. 5, art. 402. <https://doi.org/10.3390/aerospace10050402>

Поступила в редакцию / Received 16.10.2023

Принята к публикации / Accepted 10.11.2023

Опубликована / Published 30.08.2024



**ПОДПИСКА**

### **Подписка на печатную версию**

Подписной индекс издания 36017.  
Оформить подписку на печатную версию  
можно в интернет-каталоге  
ГК «Урал-Пресс» ([ural-press.ru](http://ural-press.ru)).  
Журнал выходит 4 раза в год.  
Цена свободная

Электронная версия журнала находится  
в открытом доступе ([mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru))

### **Адрес издательства (редакции):**

410012, Саратов, Астраханская, 83  
**Тел.:** +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49, 52-26-89  
**Факс:** +7(845-2) 27-85-29  
**E-mail:** [publ@sgu.ru](mailto:publ@sgu.ru), [izdat@sgu.ru](mailto:izdat@sgu.ru)

### **Адрес редколлегии серии:**

410012, Саратов, Астраханская, 83,  
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,  
механико-математический факультет  
**Тел./факс:** +7(845-2) 26-15-54  
**E-mail:** [mmi@sgu.ru](mailto:mmi@sgu.ru)  
**Website:** <https://mmi.sgu.ru>





ISSN 1816-9791 (Print). ISSN 2541-9005 (Online)  
Известия Саратовского университета. Новая серия.  
Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024.  
Том 24, выпуск 3

## ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Новая серия

- Серия: Акмеология образования. Психология развития
- Серия: История. Международные отношения
- Серия: Математика. Механика. Информатика**
- Серия: Науки о Земле
- Серия: Социология. Политология
- Серия: Физика
- Серия: Филология. Журналистика
- Серия: Философия. Психология. Педагогика
- Серия: Химия. Биология. Экология
- Серия: Экономика. Управление. Право

