



# МАТЕМАТИКА

УДК 517.95, 517.984

## ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ В СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов\*

Воронежский государственный университет,  
кафедра математического анализа

\*Саратовский государственный университет,  
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики  
E-mail: bms2001@mail.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

В работе исследуется смешанная задача для дифференциального уравнения первого порядка с инволюцией. Приводится обоснование применения метода Фурье на основе полученных уточненных асимптотических формул для собственных значений и собственных функций соответствующей спектральной задачи. Используются приемы, позволяющие преобразовать ряд, представляющий формальное решение по методу Фурье, и доказать возможность его почленного дифференцирования. При этом на начальные данные задачи накладываются минимальные требования.

**Ключевые слова:** смешанная задача, инволюция, метод Фурье, классическое решение, асимптотика собственных значений и собственных функций, система Дирака.

### Substantiation of Fourier Method in Mixed Problem with Involution

M. Sh. Burlutskaya, A. P. Khromov\*

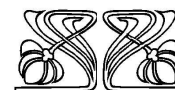
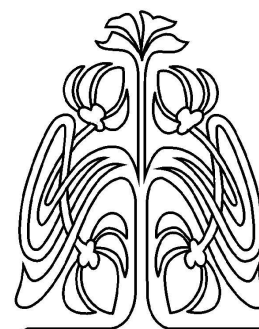
Voronezh State University,  
Chair of Mathematical Analysis

\*Saratov State University,  
Chair of Differential Equations and Applied Mathematics  
E-mail: bms2001@mail.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

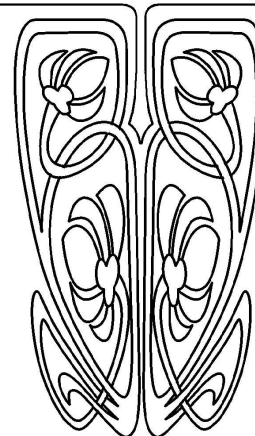
In this paper the mixed problem for the first order differential equation with involution is investigated. Using the received specified asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of the corresponding spectral problem, the application of the Fourier method is substantiated. We used techniques, which allow to transform a series representing the formal solution on Fourier method, and to prove the possibility of its term by term differentiation. At the same time on the initial problem data minimum requirements are imposed.

**Key words:** mixed problem, involution, Fourier method, classical solution, asymptotic of eigenvalues and eigenfunctions, Dirac system.

При решении смешанных задач для уравнений в частных производных методом Фурье при обосновании равномерной сходимости ряда, представляющего решение, и рядов, полученных из него почленным дифференцированием, приходится накладывать завышенные требования на начальные данные задачи. Избежать этой проблемы впервые удалось А. Н. Крылову [1], предложившему прием, который он назвал методом ускорения сходимости рядов Фурье и им подобных. Этот прием заключался в том, что из исследуемого ряда выделялся ряд простейшего вида с медленной сходимостью, но сумма которого явно вычислялась, следовательно, можно было непосредственно судить о ее гладкости. Оставшийся ряд уже имел достаточно большую скорость сходимости для того, чтобы его можно было продифференцировать почленно нужное число раз, и получающиеся ряды уже равномерно сходились. Развивая прием А. Н. Крылова, В. А. Чернятин [2] изучил ряд смешанных задач (для волнового



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





уравнения, уравнения теплопроводности, уравнения Шредингера), так что в результате требования гладкости начальных данных в методе Фурье не имеют никакого завышения и становятся естественными.

В данной работе, используя идеи А. Н. Крылова, В. А. Чернытина, приводится решение, полученное методом Фурье, следующей смешанной задачи:

$$\frac{1}{\beta i} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1-x} + q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

где  $\beta$  — вещественное число,  $q(x) \in C^1[0, 1]$  и вещественна,  $\varphi(x)$  удовлетворяет естественным условиям  $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$  и  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ . Решение ищется в классе функций непрерывно дифференцируемых по обоим переменным в полосе  $[0, 1] \times (-\infty, +\infty)$ .

Решение задачи (1)–(2) в случае симметричного потенциала ( $q(x) = q(1 - x)$ ) получено в [3]. В общем случае эта задача рассматривалась в работах М. Ш. Бурлуцкой и А. П. Хромова [4, 5]. В данной работе обосновывается применение схемы, изложенной в [4, 5], на базе полученных уточненных асимптотических формул для собственных значений и собственных функций соответствующей (1)–(2) спектральной задачи:

$$y'(1 - x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = 0. \quad (3)$$

Для удобства читателя в работе приводятся некоторые результаты из [5].

### 1. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ (3)

Обозначим через  $L$  оператор

$$Ly = y'(1 - x) + q(x)y(x), \quad y(0) = 0,$$

порождаемый задачей (3).

Приведем задачу (3) к задаче в пространстве вектор-функций размерности 2. Положим  $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ , где  $z_1(x) = y(x)$ ,  $z_2(x) = y(1 - x)$ . Тогда из уравнения (3) получим векторно-матричное уравнение:

$$Bz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x), \quad (4)$$

где  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $P(x) = \begin{pmatrix} q(x) & 0 \\ 0 & q(1 - x) \end{pmatrix}$ ,  $z_1(x) = z_2(1 - x)$ . Более того, справедливо следующее утверждение [5, лемма 12].

**Лемма 1.** Число  $\lambda$  является собственным значением, а  $y(x)$  — собственной функцией краевой задачи (3) тогда и только тогда, когда  $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T = (y(x), y(1 - x))^T$  является ненулевым решением системы (4) с краевыми условиями:

$$z_1(0) = 0, \quad z_1(1/2) = z_2(1/2). \quad (5)$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

**Лемма 2.** Пусть  $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ ,  $H(x) = \text{diag}(h_1(x), h_2(x))$ , где  $h_k(x) = e^{-\int_0^x p_k(t) dt}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $p_1(x) = -p_2(x) = -\frac{i}{2}[q(x) + q(1 - x)]$ . Замена  $z(x) = \Gamma H(x)u(x)$ , где  $u = (u_1, u_2)^T$ , приводит систему (4) к виду

$$u'(x) + Q(x)u(x) = \lambda Du(x), \quad (6)$$

где  $D = \text{diag}(-i, i)$ ,  $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix}$ ,  $q_1(x) = \frac{1}{2}[q(1 - x) - q(x)]e^{i[\int_0^x q(t) dt + \int_{1-x}^1 q(t) dt]}$ ,  $q_2(x) = \frac{1}{2}[q(1 - x) - q(x)]e^{-i[\int_0^x q(t) dt + \int_{1-x}^1 q(t) dt]}$ .



**Замечание.** Легко проверить, что функции  $h_k(x)$  удовлетворяют соотношению

$$h_1(x) = e^{i \int_0^x q(t) dt} h_2(1-x). \quad (7)$$

Для удобства обозначим  $\mu = -\lambda i$ . Тогда  $\lambda D = \mu \tilde{D}$ , где  $\tilde{D} = \text{diag}(1, -1)$  и уравнение (6) примет вид

$$u'(x) + Q(x)u(x) = \mu \tilde{D}u(x). \quad (8)$$

Уравнение (8) представляет собой двумерное уравнение Дирака. Для общего решения этого уравнения известна следующая асимптотическая формула:

$$u(x, \mu) = U(x, \mu)e^{\mu \tilde{D}x}c, \quad U(x, \mu) = E + O(\mu^{-1}), \quad (9)$$

где  $E$  — единичная матрица  $2 \times 2$ ,  $c = (c_1, c_2)^T$  — произвольный вектор, матрица-функция  $O(\mu^{-1})$  регулярна<sup>1</sup> в полуплоскостях  $\text{Re } \mu \geq 0$  и  $\text{Re } \mu \leq 0$  при  $|\mu|$  достаточно больших. В статье [6] приводится описание нового элементарного метода получения формулы (9). Этот метод позволяет достаточно просто найти уточненные асимптотические формулы для решения уравнения (8), а именно справедливо утверждение (см. [7]).

**Теорема 1.** Если  $\text{Re } \mu \geq 0$ ,  $q_j(x) \in C^1[0, 1]$ , то для общего решения уравнения (8) имеем следующую асимптотическую формулу:

$$u(x, \mu) = U(x, \mu)e^{\mu \tilde{D}x}c,$$

где  $U(x, \mu) = (u_{ij}(x, \mu))_{i,j=1,2}$ ,  $c = (c_1, c_2)^T$  — произвольный вектор и

$$\begin{aligned} u_{11}(x, \mu) &= 1 + \frac{1}{2\mu} \int_0^x q_1(t)q_2(t) dt + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right), \\ u_{12}(x, \mu) &= \frac{1}{2\mu} \left( q_2(x) - q_2(1)e^{-2\mu(1-x)} + \int_x^1 e^{2\mu(x-t)} q_2'(t) dt \right) + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right), \\ u_{21}(x, \mu) &= -\frac{1}{2\mu} \left( q_1(x) - q_1(0)e^{-2\mu x} - \int_0^x e^{-2\mu(x-t)} q_1'(t) dt \right) + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right), \\ u_{22}(x, \mu) &= 1 - \frac{1}{2\mu} \int_0^x q_1(t)q_2(t) dt + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right). \end{aligned}$$

Аналогичный результат может быть получен при  $\text{Re } \mu \leq 0$ .

Всюду, далее, для определенности будем считать, что  $\text{Re } \mu \geq 0$ , соответственно  $\text{Re } \lambda i \leq 0$  (противоположный случай рассматривается аналогично).

По лемме 2 имеем:

$$\begin{aligned} z_1(x) &= c_1 e^{\mu x} [h_1(x)u_{11}(x) - ih_2(x)u_{21}(x)] + c_2 e^{-\mu x} [h_1(x)u_{12}(x) - ih_2(x)u_{22}(x)], \\ z_2(x) &= c_1 e^{\mu x} [-ih_1(x)u_{11}(x) + h_2(x)u_{21}(x)] + c_2 e^{-\mu x} [-ih_1(x)u_{12}(x) + h_2(x)u_{22}(x)] \end{aligned} \quad (10)$$

(здесь для удобства аргументы  $\lambda$  и  $\mu$  у соответствующих функций опущены). Из краевых условий (5) получим следующее уравнение для собственных значений:

$$\begin{vmatrix} u_{11}(0) - iu_{21}(0) & u_{12}(0) - iu_{22}(0) \\ e^{\frac{\mu}{2}} [h_2(\frac{1}{2})u_{21}(\frac{1}{2}) - ih_1(\frac{1}{2})u_{11}(\frac{1}{2})] & e^{-\frac{\mu}{2}} [h_2(\frac{1}{2})u_{22}(\frac{1}{2}) - ih_1(\frac{1}{2})u_{12}(\frac{1}{2})] \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Для получения простейших асимптотических оценок собственных значений используем сначала  $u_{ij}$  из формулы (9). Обозначая  $[1] = 1 + O(1/\mu)$ , имеем

$$u_{kk}(x, \mu) = [1], \quad u_{kj}(x, \mu) = O\left(\frac{1}{\mu}\right), \quad k, j = 1, 2, \quad k \neq j. \quad (12)$$

<sup>1</sup>Под регулярностью понимается аналитичность функции внутри области и непрерывность на границе.



Поэтому уравнение (11) примет вид

$$\left| \begin{array}{cc} [1] & -i[1] + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \\ e^{\frac{\mu}{2}} \left[ -h_1\left(\frac{1}{2}\right) [1] + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right] & e^{-\frac{\mu}{2}} \left[ h_2\left(\frac{1}{2}\right) [1] + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right] \end{array} \right| = 0.$$

Отсюда, учитывая, что  $\frac{h_2(1/2)}{h_1(1/2)} = e^{-i \int_0^1 q(t) dt}$ , получим  $e^\mu = -ie^{-i \int_0^1 q(t) dt} [1]$ , откуда

$$\mu_n = - \left( \frac{\pi}{2} + \int_0^1 q(t) dt \right) i - 2\pi ni + O(1/\mu)$$

и  $O(1/\mu) = O(1/n)$ . Вычисляя теперь  $\lambda_n = i\mu_n$ , приходим к следующему утверждению.

**Теорема 2.** Для собственных значений  $\lambda_n$  задачи (4)–(5) имеют место асимптотические формулы:

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \dots, \quad (13)$$

где  $\lambda_n^0 = 2\pi n + a$ ,  $a = \frac{\pi}{2} + \int_0^1 q(t) dt$ ,  $n_0$  – некоторое достаточно большое натуральное число. При этом собственные значения, достаточно большие по модулю, простые.

Для того чтобы получить более тонкие оценки для собственных значений, воспользуемся в уравнении (11) значениями  $u_{ij}(1/2)$  и  $u_{ij}(0)$ , вычисленными по уточненным формулам из теоремы 1 при  $\mu = \mu_n$ . Всюду далее через  $\alpha$  будем обозначать различные константы, не зависящие от  $n$  (из конечного набора констант), через  $\alpha_n$  – такие константы, что  $\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$ .

**Лемма 3.** Для любого целого числа  $k$ , любой функции  $s(x) \in C[0, 1]$  и  $p = \pm 1$  имеем:

$$e^{k\mu_n} = \alpha + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (14)$$

$$\int_0^{1/2} e^{2p\mu_n t} s(t) dt = \alpha_n + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (15)$$

$$\int_0^1 e^{2p\mu_n t} s(t) dt = \alpha_n + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (16)$$

**Доказательство.** Учитывая, что  $e^{O(1/n)} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$ , получим

$$e^{k\mu_n} = e^{-2\pi k ni - kai + O(1/n)} = e^{-kai} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

откуда следует (14). Далее,

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} e^{2\mu_n t} s(t) dt &= \int_0^{1/2} e^{-4\pi nit} e^{-2ait} e^{O(1/n)} s(t) dt = \int_0^{1/2} e^{-4\pi nit} e^{-2ait} s(t) dt + \\ &+ \int_0^{1/2} O\left(\frac{1}{n}\right) e^{-4\pi nit} e^{-2ait} s(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2\pi nit} e^{-ait} s\left(\frac{t}{2}\right) dt + O\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha_n + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое, обозначенное  $\alpha_n$ , есть коэффициент Фурье непрерывной функции  $b(x) = \frac{1}{2} e^{-aix} s\left(\frac{x}{2}\right)$  по тригонометрической системе  $\{e^{2\pi nix}\}$  на отрезке  $[0, 1]$  (в силу неравенства Бесселя



$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$ ), а во втором интегральном слагаемом использовали ограниченность подынтегральных функций. Аналогично

$$\int_0^1 e^{2\mu_n t} s(t) dt = \int_0^1 e^{-4\pi n i t} e^{-2a i t} s(t) dt + O\left(\frac{1}{n}\right) = c_{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где  $\{c_{2n}\}$  — подпоследовательность коэффициентов Фурье непрерывной функции  $b(x) = e^{-2a i x} s(x)$ , и следовательно, выполняется (16).

Аналогично доказываются (15), (16) при  $p = -1$ .  $\square$

Далее, из леммы 3 и оценки

$$\frac{1}{\mu_n} = \frac{1}{2\pi n i} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{2\pi n i} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

следует

**Лемма 4.** Для значений функций  $u_{ij}(x, \mu_n)$  из теоремы 1 справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} u_{11}(0) &= 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), & u_{12}(0) &= \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), & u_{22}(0) &= 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), & u_{21}(0) &= O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ u_{11}\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), & u_{12}\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ u_{22}\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), & u_{21}\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

(для удобства аргумент  $\mu_n$  опускаем).

**Теорема 3.** Для собственных значений  $\lambda_n$  задачи (4)–(5) имеют место уточненные асимптотические формулы:

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \dots, \quad (17)$$

где  $\lambda_n^0$  определяется так же как и в теореме 2.

**Доказательство.** Используя в уравнении (11) оценки из леммы 4, получим

$$e^{-\frac{\mu}{2}} h_2\left(\frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = i e^{\frac{\mu}{2}} h_1\left(\frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

и, следовательно,

$$e^{\mu} = -i e^{-i \int_0^1 q(t) dt} \left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = e^{-\pi/2i - 2\pi n i - i \int_0^1 q(t) dt} e^{\frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

Поэтому для  $\mu_n$  имеем следующую уточненную асимптотическую формулу:

$$\mu_n = -\lambda_n^0 i + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

откуда следует (17).  $\square$

Перейдем к исследованию асимптотики собственных функций задачи (3). В силу леммы 1 собственная функция, отвечающая значению  $\lambda_n$ , есть  $y_n(x) = z_1(x, \lambda_n)$ , где  $z_1(x, \lambda_n)$  определена соотношением из (10), и, следовательно,

$$\begin{aligned} y_n(x) &= c_1 [h_1(x) e^{-\lambda_n i x} u_{11}(x, \mu_n) - i h_2(x) e^{-\lambda_n i x} u_{21}(x, \mu_n)] + \\ &+ c_2 [h_1(x) e^{\lambda_n i x} u_{12}(x, \mu_n) - i h_2(x) e^{\lambda_n i x} u_{22}(x, \mu_n)]. \end{aligned} \quad (18)$$

**Теорема 4.** Для собственных функций оператора  $L$  имеют место асимптотические формулы:

$$y_n(x) = y_n^0(x) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \dots,$$

где  $y_n^0(x) = e^{\lambda_n^0 i(1-x)} h_2(1-x) - i e^{\lambda_n^0 i x} h_2(x)$ , функция  $h_2(x)$  та же, что и в лемме 2.



**Доказательство.** Воспользуемся оценками (12) и полученной из них асимптотикой (13) для собственных значений.

Из (18) и краевого условия  $y_n(0) = 0$  имеем

$$c_1[u_{11}(0) - iu_{21}(0)] + c_2[u_{12}(0) - iu_{22}(0)] = c_1[1] - ic_2[1] = 0,$$

откуда  $c_1 = c_2 i[1]$ . Положим  $c_2 = 1$ , тогда  $c_1 = i[1]$ . Так как  $e^{-\lambda_n ix} = e^{-\lambda_n^0 ix}[1]$ ,  $e^{\lambda_n ix} = e^{\lambda_n^0 ix}[1]$ , то из (18) и (12) получим

$$\begin{aligned} y_n(x) &= i[1]e^{-\lambda_n ix} [h_1(x)[1] - ih_2(x)O\left(\frac{1}{n}\right)] + e^{\lambda_n ix} [h_1(x)O\left(\frac{1}{n}\right) - ih_2(x)[1]] = \\ &= ie^{-\lambda_n^0 ix}[1] \left[ h_1(x) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] + e^{\lambda_n^0 ix}[1] \left[ -ih_2(x) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] = \\ &= i \left( e^{-\lambda_n^0 ix} h_1(x) - e^{\lambda_n^0 ix} h_2(x) \right) + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Положим  $y_n^0(x) = i \left( e^{-\lambda_n^0 ix} h_1(x) - e^{\lambda_n^0 ix} h_2(x) \right)$ . Из (7) следует, что

$$h_1(x) = e^{-\pi/2i} e^{\pi/2i + i \int_0^1 q(t) dt} h_2(1-x) = -ie^{ai} h_2(1-x) = -ie^{\lambda_n^0 i} h_2(1-x).$$

Тогда

$$y_n^0(x) = e^{-\lambda_n^0 ix} e^{\lambda_n^0 i} h_2(1-x) - ie^{\lambda_n^0 ix} h_2(x) = e^{\lambda_n^0 i(1-x)} h_2(1-x) - ie^{\lambda_n^0 ix} h_2(x),$$

откуда следует утверждение теоремы. □

Чтобы получить более тонкие оценки для собственных функций, используем уточненные оценки (17) для собственных значений и асимптотики из теоремы 1.

**Теорема 5.** Для собственных функций оператора  $L$  имеют место уточненные асимптотические формулы:

$$y_n(x) = y_n^0(x) + \Omega_{1n}(x) + \Omega_{2n}(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \dots,$$

где  $y_n^0(x)$  определяется так же как в теореме 4, и

$$\begin{aligned} \Omega_{1n}(x) &= \frac{1}{n} [b(x)e^{-\lambda_n^0 ix} + b(x)e^{\lambda_n^0 ix} + b(x)\alpha_n e^{-\lambda_n^0 ix} + b(x)\alpha_n e^{\lambda_n^0 ix}], \\ \Omega_{2n}(x) &= \frac{1}{n} [b(x) \int_0^x e^{-\lambda_n^0 it} q'_1\left(\frac{x+t}{2}\right) dt + b(x) \int_0^x e^{\lambda_n^0 it} q'_1\left(\frac{x-t}{2}\right) dt + \\ &+ b(x) \int_0^x e^{\lambda_n^0 it} q'_2\left(\frac{x+t}{2}\right) dt + b(x) \int_0^x e^{-\lambda_n^0 it} q'_2\left(\frac{x-t}{2}\right) dt] \end{aligned}$$

(через  $b(x)$  обозначаем различные непрерывные функции из некоторого конечного набора).

**Доказательство.** Из (18) и краевого условия  $y_n(0) = 0$ , используя оценки из леммы 4, имеем

$$c_1 \left[ 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] + c_2 \left[ -i + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] = 0,$$

откуда

$$c_1 = ic_2 \left[ 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]. \tag{19}$$

Так как  $e^{\pm\lambda_n ix} = e^{\pm\lambda_n^0 ix} \left( 1 + \frac{\alpha}{n} x + \frac{\alpha_n}{n} x \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , то по теореме 1 получим

$$e^{-\lambda_n ix} u_{11}(x, \mu_n) = e^{-\lambda_n^0 ix} \left( 1 + \frac{\alpha}{n} x + \frac{\alpha_n}{n} x \right) \left( 1 + \frac{b(x)}{n} \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$



$$= e^{-\lambda_n^0 ix} \left( 1 + \frac{b(x)}{n} + \frac{\alpha_n}{n} b(x) \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} e^{\lambda_n ix} u_{22}(x, \mu) &= e^{\lambda_n^0 ix} \left( 1 + \frac{\alpha}{n} x + \frac{\alpha_n}{n} x \right) \left( 1 + \frac{b(x)}{n} \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \\ &= e^{\lambda_n^0 ix} \left( 1 + \frac{b(x)}{n} + \frac{\alpha_n}{n} b(x) \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_n ix} u_{21}(x, \mu) &= e^{-\lambda_n^0 ix} \left( 1 + \frac{\alpha}{n} x + \frac{\alpha_n}{n} x \right) \left( \frac{b(x)}{n} + \frac{\alpha}{n} e^{2\lambda_n^0 ix} + \frac{\alpha}{n} \int_0^x e^{2\lambda_n^0 i(x-t)} q_1'(t) dt \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \\ &= \frac{b(x)}{n} e^{-\lambda_n^0 ix} + \frac{\alpha}{n} e^{\lambda_n^0 ix} + \frac{\alpha}{n} \int_0^x e^{\lambda_n^0 i(x-2t)} q_1'(t) dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\lambda_n ix} u_{12}(x, \mu) &= e^{\lambda_n^0 ix} \left( 1 + \frac{\alpha}{n} x + \frac{\alpha_n}{n} x \right) \left( \frac{b(x)}{n} + \frac{\alpha}{n} e^{2\lambda_n^0 i(1-x)} + \frac{\alpha}{n} \int_x^1 e^{-2\lambda_n^0 i(x-t)} q_2'(t) dt \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \\ &= \frac{b(x)}{n} e^{\lambda_n^0 ix} + \frac{\alpha}{n} e^{-\lambda_n^0 ix} + \frac{\alpha}{n} \int_x^1 e^{-\lambda_n^0 i(x-2t)} q_2'(t) dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{\lambda_n^0 i(x-2t)} q_1'(t) dt &= \frac{1}{2} \int_{-x}^x e^{\lambda_n^0 i\tau} q_1'\left(\frac{x-\tau}{2}\right) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^x e^{-\lambda_n^0 it} q_1'\left(\frac{x+t}{2}\right) dt + \frac{1}{2} \int_0^x e^{\lambda_n^0 it} q_1'\left(\frac{x-t}{2}\right) dt, \\ \int_x^1 e^{-\lambda_n^0 i(x-2t)} q_2'(t) dt &= e^{-\lambda_n^0 ix} \int_0^1 e^{2\lambda_n^0 it} q_2'(t) dt - \int_0^x e^{-\lambda_n^0 i(x-2t)} q_2'(t) dt = \\ &= \alpha_n e^{-\lambda_n^0 ix} + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-\lambda_n^0 it} q_2'\left(\frac{x-t}{2}\right) dt + \frac{1}{2} \int_0^x e^{\lambda_n^0 it} q_2'\left(\frac{x+t}{2}\right) dt. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_n ix} u_{21}(x, \mu) &= \frac{b(x)}{n} e^{-\lambda_n^0 ix} + \frac{\alpha}{n} e^{\lambda_n^0 ix} + \frac{\alpha}{n} \int_0^x e^{-\lambda_n^0 it} q_1'\left(\frac{x+t}{2}\right) dt + \\ &+ \frac{\alpha}{n} \int_0^x e^{\lambda_n^0 it} q_1'\left(\frac{x-t}{2}\right) dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} e^{\lambda_n ix} u_{12}(x, \mu) &= \frac{b(x)}{n} e^{\lambda_n^0 ix} + \frac{\alpha}{n} e^{-\lambda_n^0 ix} + \frac{\alpha_n}{n} e^{-\lambda_n^0 ix} + \frac{\alpha}{n} \int_0^x e^{-\lambda_n^0 it} q_2'\left(\frac{x-t}{2}\right) dt + \\ &+ \frac{\alpha}{n} \int_0^x e^{\lambda_n^0 it} q_2'\left(\frac{x+t}{2}\right) dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Полагая  $c_2 = 1$  и подставляя (19)–(23) в (18), получим утверждение теоремы.  $\square$

## 2. ТЕОРЕМА О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

Обозначим через  $S_\delta$  область, полученную из  $\lambda$ -плоскости удалением всех чисел вида  $\pi n + a$ , ( $n \in \mathbb{Z}$ ),  $a = \frac{\pi}{2} + \int_0^1 q(t) dt$ , вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса  $\delta$ .

Так же как в [5] доказывается следующее утверждение.



**Теорема 6.** Если  $f(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $f(0) = 0$ , то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|f(x) - S_r(f, x)\|_\infty = 0,$$

где  $S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f d\lambda$  — частичная сумма ряда Фурье функции  $f$  по собственным и присоединенным функциям оператора  $L$ .

Так как  $L$  самосопряженный оператор, то по теореме 6 получим

**Лемма 5.** Система  $\{y_n(x)\}$  является ортогональной и полной в  $L_2[0, 1]$ , и  $\|y_n\|^2 = 2 + O(1/n)$ , где  $\|\cdot\|$  — норма в  $L_2[0, 1]$ .

### 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Идеи А. Н. Крылова и В. А. Чернытина мы реализуем следующим образом. Ряд  $\Sigma$ , представляющий формальное решение рассматриваемой задачи по методу Фурье, мы берем в виде

$$\Sigma = S_0 + (\Sigma - \Sigma_0), \tag{24}$$

где  $\Sigma_0$  — ряд, являющийся решением некоторой специальной эталонной задачи, а  $S_0$  — сумма этого ряда, которая явно вычисляется. В свою очередь,  $\Sigma - \Sigma_0$  представляется в виде суммы двух составляющих, одна из которых — конечная сумма, а вторая — ряд, составленный из разностей соответствующих членов рядов  $\Sigma$  и  $\Sigma_0$ , причем этот ряд и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием, сходятся равномерно. Это последнее обстоятельство, а также то, что  $S_0$  есть решение эталонной задачи, позволяет весьма просто убедиться, что  $\Sigma = S_0 + (\Sigma - \Sigma_0)$  и есть классическое решение исходной задачи при минимальных требованиях гладкости начальных данных.

В качестве эталонной задачи мы берем задачу (1)–(2), где  $q(x)$  заменяется на  $q_0(x) = \frac{1}{2}(q(x) + q(1-x))$ . Функция  $q_0(x)$  является симметричной:  $q_0(x) = q_0(1-x)$ . Такая задача рассматривалась в статьях [3, 5], где ее решение дается явной формулой. Соответствующий оператор обозначим  $L_0$ :

$$L_0 y(x) = y'(1-x) + q_0(x)y(x), \quad y(0) = 0.$$

Собственными значениями и собственными функциями этого оператора являются  $\lambda_n^0$  и  $y_n^0(x)$  из теорем 2 и 4 (см. [3]).

### 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(2)

Согласно методу Фурье формальное решение задачи (1)–(2) имеет вид

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi(x)) e^{\lambda \beta i t} d\lambda + \sum_{|\lambda_n| > r} \frac{1}{\|y_n\|^2} (\varphi, y_n) y_n(x) e^{\lambda_n \beta i t}, \tag{25}$$

где  $r$  таково, что при  $|\lambda_n| > r$  все собственные значения простые.

Представим ряд (25) в виде (24), где

$$\Sigma_0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(\varphi, y_n^0)}{\|y_n^0\|^2} y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 \beta i t}.$$

Для суммы  $S_0$  ряда  $\Sigma_0$  справедливо утверждение (см. [3])

**Лемма 6.** Если  $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$ , то имеет место формула

$$S_0 = e^{a\beta i t} [p(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(x)f_0(x+\beta t)], \tag{26}$$

где  $f_0(x)$  — непрерывно дифференцируемая на всей оси функция, периодическая с периодом 1, и

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)} [i\varphi(x) + \varphi(1-x)] \text{ при } x \in [0, 1]; \quad p(x) = e^{iax - i \int_0^x q(t) dt}, \quad a = \frac{\pi}{2} + \int_0^1 q(t) dt.$$





Далее, положим

$$\Sigma - \Sigma_0 = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

где

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} ((R_\lambda - R_\lambda^0) \varphi(x)) e^{\lambda \beta i t} d\lambda, \quad (27)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{|\lambda_n|>r} \left[ \frac{(\varphi, y_n)}{\|y_n\|^2} y_n(x) e^{\lambda_n \beta i t} - \frac{(\varphi, y_n^0)}{\|y_n^0\|^2} y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 \beta i t} \right], \quad (28)$$

$R_\lambda^0$  — резольвента оператора  $L_0$ .

**Лемма 7.** *Имеет место формула*

$$u_2(x, t) = \sum_{|\lambda_n|>r} \left[ \frac{(g, y_n) y_n(x) e^{\lambda_n \beta i t}}{\|y_n\|^2 \lambda_n} - \frac{(g, y_n^0) y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 \beta i t}}{\|y_n^0\|^2 \lambda_n^0} \right] + \sum_{|\lambda_n|>r} \frac{(g_2, y_n^0) y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 \beta i t}}{\|y_n^0\|^2 (\lambda_n^0)^2}, \quad (29)$$

где  $g = L\varphi$ ,  $g_1 = g - L_0\varphi$ ,  $g_2 = L_0g_1$  (здесь  $g_1$  из области определения оператора  $L_0$ , так как  $q(x) \in C^1[0, 1]$ ).

**Доказательство.** Из тождества Гильберта имеем:

$$\begin{aligned} R_\lambda \varphi &= -\frac{\varphi}{\lambda} + \frac{R_\lambda g}{\lambda}, \\ R_\lambda^0 \varphi &= -\frac{\varphi}{\lambda} + \frac{R_\lambda^0(L_0\varphi)}{\lambda} = -\frac{\varphi}{\lambda} + \frac{R_\lambda^0(g - g_1)}{\lambda} = \\ &= -\frac{\varphi}{\lambda} + \frac{R_\lambda^0 g}{\lambda} - \frac{R_\lambda^0 g_1}{\lambda} = -\frac{\varphi}{\lambda} + \frac{R_\lambda^0 g}{\lambda} + \frac{g_1}{\lambda^2} - \frac{R_\lambda^0 g_2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$R_\lambda \varphi - R_\lambda^0 \varphi = \frac{(R_\lambda - R_\lambda^0)g}{\lambda} - \frac{g_1}{\lambda^2} + \frac{R_\lambda^0 g_2}{\lambda^2},$$

и (29) следует из представления слагаемых в (28) через интегралы от резольвенты по контурам достаточно малого радиуса с центрами в  $\lambda_n$ .  $\square$

**Лемма 8.** *Если  $g(x) \in C[0, 1]$ , то  $(g, \Omega_{jn}) = \frac{\alpha_n}{n}$  ( $j = 1, 2$ ).*

**Доказательство.** Утверждение леммы для  $j = 1$  очевидно. Далее,

$$\int_0^1 b(x) dx \int_0^x e^{\lambda_n^0 i t} \overline{q_1' \left( \frac{x+t}{2} \right)} dt = \int_0^1 e^{\lambda_n^0 i t} dt \int_t^1 b(x) q_1' \left( \frac{x+t}{2} \right) dx = \alpha_n,$$

и, аналогично рассмотрев остальные слагаемые в  $\Omega_{2n}$ , получим, что и  $(g, \Omega_{2n}) = \frac{\alpha_n}{n}$ .  $\square$

**Лемма 9.** *Ряды в (29) и ряды, полученные из них почленным дифференцированием по  $x$  и  $t$ , равномерно сходятся по  $x \in [0, 1]$  и  $t \in [-A, A]$ , где  $A > 0$  и любое.*

**Доказательство.** Согласно неравенствам Коши – Буняковского и Бесселя ряды  $\sum \frac{|(g, y_n)|}{\|y_n\| \cdot |\lambda_n|}$  и  $\sum \frac{|(g, y_n^0)|}{\|y_n^0\| \cdot |\lambda_n^0|}$  сходятся, откуда следует равномерная сходимость рядов в (29). Рассмотрим ряд

$$\sum_{|\lambda_n|>r} \left[ \frac{(g, y_n) y_n(x) e^{\lambda_n \beta i t}}{\|y_n\|^2 \lambda_n} - \frac{(g, y_n^0) y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 \beta i t}}{\|y_n^0\|^2 \lambda_n^0} \right]. \quad (30)$$

Используя асимптотические формулы для  $\lambda_n$ ,  $y_n(x)$ , имеем:

$$\frac{(g, y_n) y_n'(x) e^{\lambda_n \beta i t}}{\|y_n\|^2 \lambda_n} = \frac{(g, y_n) (y_n^0(x))' e^{\lambda_n^0 \beta i t}}{\|y_n^0\|^2 \lambda_n^0} + (g, y_n) O\left(\frac{1}{n}\right).$$



Поэтому ряд, полученный почленным дифференцированием по  $x$  ряда (30), имеет следующее представление:

$$\sum_{|\lambda_n| > r} \left[ \frac{(g, y_n - y_n^0) (y_n^0(x))' e^{\lambda_n \beta i t}}{\|y_n^0\|^2 \lambda_n^0} + (g, y_n) O\left(\frac{1}{n}\right) \right]. \quad (31)$$

В силу леммы 8  $(g, y_n - y_n^0) = \alpha_n/n$ , где  $\sum \alpha_n^2 < \infty$ . Отсюда следует равномерная сходимость первого ряда в (31). Для второго слагаемого в (31) она очевидна. Аналогично доказывается равномерная сходимость ряда, полученного из (30) почленным дифференцированием по  $t$ . Для второго слагаемого в (29) утверждение леммы очевидно.  $\square$

Основным результатом работы является следующее утверждение

**Теорема 7.** Если  $q(x)$  вещественна,  $q(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ , то классическое решение задачи (1)–(2) существует и имеет вид

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + S_0(x, t),$$

где  $u_1(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$  определены по формулам (27), (28), а  $S_0(x, t)$  — по формуле (26).

**Доказательство.** В силу лемм 6 и 9  $u(x, t)$  дифференцируема по обоим переменным. Легко проверяется, что  $u(x, t)$  удовлетворяет условиям (2). Докажем, что  $u(x, t)$  удовлетворяет (1). Обозначим составляющие в (27), (28) через  $u_{kj}$ , т.е.  $u_1 = u_{11} - u_{12}$ ,  $u_2 = u_{21} - u_{22}$ . Тогда очевидно, что

$$u_{11} + u_{21} = u, \quad u_{12} + u_{22} = \Sigma_0. \quad (32)$$

Обозначим через  $Du$  следующее дифференциальное выражение:

$$Du = \frac{1}{\beta i} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1-x}.$$

Тогда имеем

$$Du = Du_1 + Du_2 + DS_0 = Du_{11} - Du_{12} + Du_{21} - Du_{22} + DS_0. \quad (33)$$

Но  $Du_{j1} = q(x)u_{j1}$ ,  $Du_{j2} = q_0(x)u_{j2}$  ( $j = 1, 2$ ),  $DS_0 = q_0(x)S_0$ . Поэтому из (32) и (33) получаем

$$\begin{aligned} Du &= q(x)u_{11} - q_0(x)u_{12} + q(x)u_{21} - q_0(x)u_{22} + q_0(x)S_0 = \\ &= q(x)[u_{11} + u_{21}] - q_0(x)[u_{12} + u_{22} - S_0] = q(x)u(x, t) - q_0(x) \cdot 0 = q(x)u(x, t). \end{aligned}$$

Теорема доказана.  $\square$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).*

### Библиографический список

1. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. Л., 1950. 368 с.
2. Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М., 1991. 112 с.
3. Хромов А. П. Смешанная задача для дифференциального уравнения с инволюцией и потенциалом специального вида // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2010. Т. 10. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 4. С. 17–22.
4. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. О классическом решении смешанной задачи для уравнения первого порядка с инволюцией // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2010. № 2. С. 26–33.
5. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией // Докл. РАН. 2010. Т. 435, № 2. С. 151–154.
6. Хромов А. П. Об асимптотике решений уравнения Дирака // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронеж. зимней мат. шк. Воронеж, 2011. С. 346–347.
7. Бурлуцкая М. Ш. Уточненные асимптотические формулы решений системы Дирака // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронеж. зимней мат. шк. Воронеж, 2011. С. 53–54.



УДК 517

## О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛОМ СТИЛТЬЕСА

М. Б. Давыдова, С. А. Шабров

Воронежский государственный университет,  
кафедра математического анализа  
E-mail: mbd@vsu.ru, shaspoteha@mail.ru

В работе получены достаточные условия существования нескольких решений у нелинейной краевой задачи с интегралом Стильтеса.

**Ключевые слова:** краевая задача, интеграл Стильтеса, нелинейная задача.

### ВВЕДЕНИЕ

В последнее время интенсивно изучаются дифференциальные уравнения с производными по мере. Так, для линейных уравнений второго порядка построена точная параллель классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, вплоть до осцилляционных теорем [1–4].

Эффективность использования производных по мере (или в интегродифференциальной форме) объясняется следующим обстоятельством: для применения качественных методов анализа (теорем типа Ролля) решений дифференциальных уравнений необходимо знать значения функции и её производных в каждой точке, что с позиций теории обобщённых функций затруднительно. Здесь можно отметить работу А. Д. Мышкиса [5] — доказательство аналога теоремы Штурма о перемежаемости нулей для уравнения  $u'' + qu = 0$  с обобщённым коэффициентом  $q$ .

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Требуется получить достаточные условия существования нескольких различных решений задачи

$$\begin{cases} Lu \equiv -(pu'_x)(x) + (pu'_x)(0) + \int_0^x u dQ = \int_0^x f(s, u(s)) d\sigma(s), \\ (pu'_x)(0) - \gamma_1 u(0) = 0, \\ (pu'_x)(l) + \gamma_2 u(l) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\sigma(x)$  — строго возрастающая функция, порождающая на  $[0; l]$  меру, причем  $p(x)$  и  $Q(x)$  —  $\sigma$ -абсолютно непрерывны на  $[0; l]$ ;  $\gamma_1 \gamma_2 \geq 0$ ,  $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$ ; функция  $f(x, u)$  порождает оператор суперпозиции

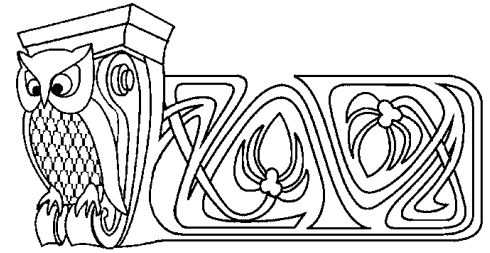
$$[Fu](x) = f(x, u(x)),$$

который непрерывно действует из  $C[0; l]$  в  $L_{p, \sigma}[0; l]$  — пространство измеримых на  $[0; l]$  функций, суммируемых с  $p$  степенью ( $1 \leq p < \infty$ ). Нормой в  $L_{p, \sigma}[0; l]$  служит величина  $\|f\|_{p, \sigma} =$

$\left( \int_0^l |f(x)|^p d\sigma(x) \right)^{1/p}$ . Для того чтобы  $F$  непрерывно действовал из  $C[0; l]$  в  $L_{1, \sigma}[0; l]$ , достаточно,

чтобы  $f(x, u)$  была совокупно равномерно  $[\sigma \times u]$ -непрерывна: для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для всяких точек  $(x_1, u_1)$  и  $(x_2, u_2)$ , удовлетворяющих неравенствам  $|\sigma(x_1) - \sigma(x_2)| < \delta$  и  $|u_1 - u_2| < \delta$ , справедливо неравенство  $|f(x_1, u_1) - f(x_2, u_2)| < \varepsilon$ . Интегралы в (1) понимаются по Лебегу – Стильтесу.

В уравнении из (1)  $x$  принадлежит множеству  $\overline{[0; l]}_S$ , которое строится следующим образом. Через  $S(\sigma)$  обозначим множество точек разрыва функции  $\sigma(x)$ . На множестве  $J_S = [0; l] \setminus S(\sigma)$  введем



**On the Number of Solutions of Nonlinearity Boundary Value Problems with a Stieltjes Integral**

M. B. Davidova, S. A. Shabrov

Voronezh State University,  
Chair of Mathematical Analysis  
E-mail: mbd@vsu.ru, shaspoteha@mail.ru

In this paper we obtain sufficient conditions for the existence of multiple solutions for nonlinear boundary value problem with a Stieltjes integral.

**Key words:** boundary value problem, Stieltjes integral, nonlinear problem.



метрику  $\rho(x, y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$ . Если  $S(\sigma) \neq \emptyset$ , то метрическое пространство  $(J_S, \rho)$ , очевидно, не является полным. Стандартное пополнение  $(J_S, \rho)$ , при котором каждая точка  $\xi \in S(\sigma)$  заменяется парой собственных элементов  $\{\xi - 0, \xi + 0\}$ , и приводит нас к  $\overline{[0; l]}_S$ . В каждой точке  $\xi \in S(\sigma)$  уравнение в (1) принимает вид

$$-\Delta(pu'_x)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = f(\xi, u(\xi)),$$

где  $\Delta\psi(\xi) = \psi(\xi + 0) - \psi(\xi - 0)$  — скачок функции  $\psi(x)$  в точке  $\xi$ .

Будем говорить, что однородное уравнение  $Lu = 0$  не осциллирует на  $[0; l]$ , если всякое нетривиальное решение имеет на  $[0; l]$  не более одного нуля.

Более подробно с теорией неосцилляции этого уравнения можно ознакомиться в работах [2, 3].

Введем обозначение

$$K = \{u(x) \in C[0; l] : u(x) \geq 0 \forall x \in [0; l]\}.$$

Множество  $K$  является телесным, нормальным конусом в  $C[0; l]$ . В дальнейшем нам понадобится  $u_0$ -норма:

$$\|u\|_{u_0} = \sup_{0 < x < l} \left| \frac{u(x)}{u_0(x)} \right|,$$

где

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\max_{(x,s)} g(x,s)}, & \text{если } \gamma_1 < \infty \text{ и } \gamma_2 < \infty, \\ x/(2l), & \text{если } \gamma_1 = \infty \text{ и } \gamma_2 < \infty, \\ (l-x)/(2l), & \text{если } \gamma_1 < \infty \text{ и } \gamma_2 = \infty, \\ x(l-x)/l, & \text{если } \gamma_1 = \infty \text{ и } \gamma_2 = \infty. \end{cases}$$

Запись  $\gamma_1 = \infty$  мы понимаем следующим образом: краевое условие  $(pu'_x)(0) - \gamma_1 u(0) = 0$  заменяется условием  $u(0) = 0$ . Аналогично понимается запись  $\gamma_2 = \infty$ . Как нетрудно видеть,  $\|\cdot\|_{u_0}$  является нормой в пространстве  $E_{u_0}$  функций  $u(x)$  из  $C[0; l]$ , для каждой из которых  $\|u\|_{u_0}$  конечна, более того,  $E_{u_0}$  является полным пространством по этой норме. Множество  $K_{u_0} = K \cap E_{u_0}$  является телесным конусом. Кроме того, отношение  $u \leq v$  эквивалентно по определению включению  $v - u \in K_{u_0}$ .

## ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

**Теорема.** Пусть выполнены следующие условия:

- 1) однородное уравнение  $Lu = 0$  не осциллирует на  $[0; l]$ ;
- 2)  $f(x, u)$  — равномерно  $[\sigma \times u]$ -непрерывна на  $[0; l] \times R^1$ ;
- 3) функция  $f(x, u)$  не убывает по  $u$  при каждом  $x \in [0; l]$  и

$$f(x, 0) \geq 0; \tag{2}$$

- 4) существует  $N$  пар чисел  $\alpha_i, \beta_i$ , удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_n < \beta_n, \tag{3}$$

$$f(x, \beta_k u_0(x)) < \frac{\beta_k}{\int_0^l h_2(s) d\sigma(s)} \quad (x \in [0; l]). \tag{4}$$

- 5) для каждого  $k$  существует множество  $w_k \subset [0; l]$  положительной  $\sigma$ -меры такое, что

$$f(x, \alpha_k u_0(x)) > \frac{1}{\int_{w_k} h_1(s) d\sigma(s)} \quad (x \in [0; l], k = 1, \dots, N). \tag{5}$$

Тогда задача (1) имеет  $2N - 1$  нетривиальных решений  $\{u_i(x)\}_{i=1}^{i=2N-1}$ , удовлетворяющих неравенствам

$$u_i(x) \geq 0 \quad (i = 1, 3, \dots, 2N - 1) \tag{6}$$

и

$$u_{2i-1}(x) \leq u_{2i+1}(x) \quad (i = 1, 2, \dots, N - 1).$$



Неравенства (6) связывают лишь решения  $u_i(x)$  с нечетными номерами. По отношению к этим решениям остальные расположены «между» ними в следующем смысле: при каждом  $k = 1, 2, \dots, N-1$  существуют точки  $x'_k$  и  $x''_k$  такие, что

$$u_{2k-1}(x'_k) < u_{2k}(x'_k) \quad \text{и} \quad u_{2k}(x''_k) \leq u_{2k+1}(x''_k).$$

**Доказательство.** Вопрос о разрешимости краевой задачи (1) можно заменить вопросом о разрешимости нелинейного интегрального уравнения

$$u(x) = \int_0^l G(x, s) f(s, u(s)) d\sigma(s), \quad (7)$$

где  $G(x, s)$  — функция Грина краевой задачи

$$\begin{cases} -(pu'_x)(x) + (pu'_x)(0) + \int_0^x u dQ = -pu'_x(0) + F^*(x) - F^*(0), \\ (pu'_x)(0) - \gamma_1 u(0) = 0, \\ (pu'_x)(l) + \gamma_2 u(l) = 0, \end{cases}$$

здесь  $F^*(x)$  —  $\sigma$ -абсолютно непрерывна на  $[0; l]$ .

Уравнение (7) можно записать в виде

$$u = GFu, \quad (8)$$

где  $G$  — интегральный оператор с ядром  $G(x, s)$ :  $(GF^*)(x) = \int_0^l G(x, s) \frac{d}{d\sigma} F^*(s) d\sigma$  и  $F$  — оператор суперпозиции:  $(Fu)(x) = f(x, u(x))$ .

Уравнение (8) эквивалентно уравнению

$$\frac{u(x)}{u_0(x)} = \int_0^l \frac{G(x, s)}{u_0(x)} f\left(s, \frac{u(s)}{u_0(s)} \cdot u_0(s)\right) d\sigma(s),$$

или

$$\hat{u}(x) = (\hat{G}\hat{F}\hat{u})(x),$$

где  $\hat{G}$  — интегральный оператор с ядром  $\frac{G(x, s)}{u_0(x)}$ ,  $\hat{F}$  — оператор суперпозиции  $(\hat{F}u)(x) = f(x, u(x)) \times u_0(x)$  и  $\hat{u}(x) = \frac{u(x)}{u_0(x)}$ .

По условию теоремы  $\hat{F}$  непрерывно действует из  $E_{u_0}$  в  $L_{1,\sigma}[0; l]$ ;  $\hat{G}$  — действует и вполне непрерывен из  $L_{1,\sigma}[0; l]$  в  $E_{u_0}$ . Поэтому  $\hat{G}\hat{F}$  действует и вполне непрерывен из  $E_{u_0}$  в  $E_{u_0}$ .

Покажем, что  $\hat{G}\hat{F}$  удовлетворяет всем условиям теоремы из [6, § 45, с. 373] (при соответствующем выборе  $E$  и  $K$ ). Для удобства читателя приведем формулировку этой теоремы.

**Теорема.** Пусть  $K$  — нормальный телесный конус в банаховом пространстве  $E$ ,  $A$  — действующий в  $E$  монотонный вполне непрерывный оператор. Пусть существует  $N$  пар элементов

$$u_1 \leq v_1 \leq u_2 \leq v_2 \leq \dots \leq u_N \leq v_N \quad (9)$$

таких, что

$$u_i \ll Au_i, \quad Av_i \ll v_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (10)$$

Тогда существует  $2N-1$  неподвижных точек  $x_1, x_2, \dots, x_{2N+1}$  оператора  $A$ , удовлетворяющих неравенствам

$$u_i \leq x_{2i-1} \leq v_i, \quad u_i \leq x_{2i} \leq v_{i+1}, \quad u_{i+1} \not\leq x_{2i}, \quad x_{2i} \not\leq v_i$$

при всех  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Положим  $E = E_{u_0}$  и в качестве конуса  $K$  возьмем множество  $K_{u_0}$ . Телесность и нормальность этого конуса очевидны, причем  $u \gg 0$  эквивалентно  $u(x) > 0$  при всех  $x \in [0; l]$ . По условию теоремы



$f(x, u)$  монотонна по  $u$ . Отсюда и из неотрицательности  $\frac{G(x, s)}{u_0(x)}$  следует монотонность оператора  $\hat{G}\hat{F}$ . Компактность установлена ранее.

Введем в рассмотрение функции

$$u_i(x) \equiv \alpha_i \quad \text{и} \quad v_i(x) \equiv \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Из (3) вытекает, что функции  $u_i(x)$  и  $v_i(x)$  удовлетворяют неравенствам (9). Докажем выполнимость (10).

Интегральный оператор  $\hat{G}$  с ядром  $\hat{G}(x, s)$  обладает свойством сильной положительности: для любой неотрицательной нетривиальной функции  $f(x)$  ее образ  $(\hat{G}f)(x)$  есть функция строго положительная. По условию теоремы функция

$$w(x) = \beta_i - \int_0^l h_2(s) d\sigma(s) \cdot f(x, \beta_i u_0(x))$$

неотрицательна и отлична от тождественного нуля. Поэтому  $(\hat{G}\hat{F}w)(x) \gg 0$ , что означает

$$\beta_i \int_0^l \frac{G(x, s)}{u_0(x)} d\sigma(s) > \int_0^l h_2(s) d\sigma(s) \cdot (\hat{G}\hat{F})v_i(x). \tag{11}$$

Так как  $\frac{G(x, s)}{u_0(x)} \leq h_2(s)$  и  $\int_0^l h_2(s) d\sigma(s) > 0$ , то из (11) вытекает  $\beta_i > (\hat{G}\hat{F}v_i)(x)$  для  $x \in [0; l]$ .

Последнее и означает что  $(\hat{G}\hat{F}v_i) \ll v_i$ .

Докажем теперь неравенство  $\hat{G}\hat{F}u_k \geq u_k$ . При фиксированном  $k$  рассмотрим функцию

$$u(x) = \begin{cases} f(x, \alpha_k u_0(x)) - \frac{\alpha_k}{\int_{w_k} h_1(s) d\sigma(s)}, & x \in w_k, \\ 0, & x \notin w_k. \end{cases}$$

По условию  $u(x) \geq 0$  и положительна на множестве положительной меры. Сильно положительным оператором  $\hat{G}\hat{F}$  эта функция переводится в строго положительную функцию  $(\hat{G}\hat{F}u) > 0$  на  $[0; l]$ , т.е.  $\hat{G}\hat{F}u \gg 0$ . Так как  $G(x, s) \geq u_0(x)h_1(s)$ , то

$$\int_{w_k} \frac{G(x, s)}{u_0(x)} f(s, \alpha_k u_0(s)) d\sigma(s) \geq \frac{\alpha_k \int_{w_k} \frac{G(x, s)}{u_0(x)} d\sigma(s)}{\int_{w_k} h_1(s) d\sigma(s)} \geq \alpha_k = u_k(x). \tag{12}$$

С другой стороны, из (2) и монотонности по  $u$  функции  $f(x, u)$  вытекает неотрицательность функции  $f(x; \alpha)$  при любом  $\alpha \geq 0$ . Поэтому

$$(\hat{G}\hat{F}u_k)(x) \geq \int_{w_k} \frac{G(x, s)}{u_0(x)} f(s, \alpha_k u_0(s)) d\sigma(s).$$

Отсюда и из (12) следует  $\hat{G}\hat{F}u_k \gg u_k$ .

Итак, для оператора  $\hat{G}\hat{F}$  выполнены все условия теоремы 45.3 из [6]. Теорема доказана.  $\square$

### Библиографический список

<p>1. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Боровских А. В., Прядиев В. Л., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М., 2004. 272 с.</p> <p>2. Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А. Осцилляционная теория Штурма – Лиувилля для им-</p>	<p>пульсных задач // Успехи математических наук. 2008. Т. 63, вып. 1 (379). С. 98–141</p> <p>3. Pokornyi Yu. V., Shabrov S. A. Toward a Sturm – Liouville theory for an equation with generalized coefficients // J. of Math. Sciences. 2004. Vol. 119, № 6. P. 769–787.</p> <p>4. Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б.,</p>
---	--

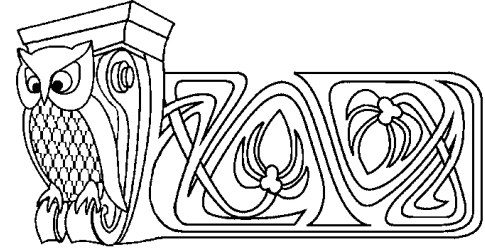


Шабров С. А. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах. М., 2009. 192 с.  
 5. Мышкис А. Д. О решениях линейного однородного двучленного дифференциального неравенства второго

порядка с обобщенным коэффициентом // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 5. С. 615–619.  
 6. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. М., 1975. 512 с.

УДК 539.3

## РАЗРЕШИМОСТЬ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБОБЩЕННЫХ ЗАДАЧАХ ТРАНСМИССИИ ДЛЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК



В. Ф. Кириченко

Саратовский государственный технический университет,  
 кафедра математики и моделирования  
 E-mail: saratuni@list.ru

С помощью метода компактности и нового способа получения априорных оценок доказана разрешимость обобщенной задачи трансмиссии в неклассической теории пологих оболочек.

**Ключевые слова:** задачи трансмиссии, нелинейные системы уравнений с частными производными, обобщенные решения краевых задач, неклассическая теория оболочек.

### Solvability of Evolutionary Equations in Generalized Transmission Problems for Shallow Shells

V. F. Kirichenko

Saratov State Technical University,  
 Chair of Mathematics and Modelling  
 E-mail: saratuni@list.ru

We prove the solvability of the generalized transmission problem in the non-classical theory of shallow shells using the method of compactness and a new way of obtaining a priori estimates.

**Key words:** transmission problems, nonlinear systems of partial differential equations, generalized solutions of boundary value problems, non-classical theory of shells.

В настоящей работе исследуется новый класс обобщенных задач трансмиссии для нелинейной системы уравнений с частными производными, характеризуемой структурной неоднородностью входящих в нее дифференциальных уравнений различного типа. Доказательство корректности такой системы имеет в своей основе метод компактности [1, 2] и новый «трехмерный» способ получения априорных оценок. Заметим, что классические задачи трансмиссии (или дифракции) исследуются, например, в работах [3–5].

Объектом исследования является пологая однородная и изотропная оболочка, занимающая в начальный момент времени наблюдения  $t_0$  трехмерную область  $D = D_1 \cup D_2$  из пространства  $R^3$ , при этом:

$$D_1 \cap D_2 = \emptyset, \quad D_i = \Omega_i \times \left(-\frac{h_i}{2}; \frac{h_i}{2}\right) \quad (i = 1, 2),$$

$$\bar{\Omega}_i = \Omega_i \cup \partial\Omega_i \cup \gamma, \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \bar{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega, \quad \partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2.$$

Здесь  $\Omega$  — план оболочки;  $\partial\Omega$  — граничный контур плана;  $\gamma$  — достаточно гладкая кривая, разбивающая область  $\Omega$  на две измеримые подобласти  $\Omega_i$ ;  $h_i$  — постоянная толщина части оболочки, занимающей измеримую подобласть  $D_i$ ;  $h_1 \geq h_2 > 0$ . Как обычно, отождествляем элементы  $(x_1, x_2, x_3) \in R^3$  с координатами точек в геометрическом пространстве, параметризованном декартовой системой координат таким образом, что уравнение  $x_3 = 0$  является определяющим для срединной поверхности рассматриваемой оболочки, а ось  $Ox_3$  направлена к центру кривизны оболочки.

Полагаем, что в области  $D_1$  эволюция оболочки описывается на базе обобщенных гипотез Тимошенко, а в области  $D_2$  — гипотез Кирхгофа – Лява. Математическая модель такой оболочки определяется следующим вариационным уравнением Гамильтона – Остроградского:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \left( -\rho\mu_i h_i \frac{\partial u_{30}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\delta u_{30}) - \rho\mu_i \frac{h_i^3}{12} \cdot \text{grad} \frac{\partial u_{30}}{\partial t} \cdot \text{grad} \frac{\partial}{\partial t} (\delta u_{30}) + h_i \mu_i \tilde{\varepsilon}_i \frac{\partial u_{30}}{\partial t} \delta u_{30} + \right. \right.$$

$$\left. + \mu_i \tilde{\varepsilon}_i \frac{h_i^3}{12} \cdot \text{grad} \frac{\partial u_{30}}{\partial t} \cdot \text{grad} \delta u_{30} + \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} (\sigma_{ii} \delta \varepsilon_{ii} + \sigma_{i3-i} \delta \varepsilon_{i3-i} + 2\sigma_{i3} \delta \varepsilon_{i3}) dx_3 + \right.$$



$$+ \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} (s_{ii} \delta f_{ii} + s_{i3-i} \delta f_{i3-i}) dx_3 \Big) dx_1 dx_2 \Big\} dt = \int_{t_0}^{t_1} \iint_{\Omega} g(x_1, x_2, t) \delta u_{30} dx_1 dx_2 dt \quad (1)$$

и начальными условиями для функции  $u_{30}(x_1, x_2, t)$ :

$$u_{30}(x_1, x_2, t_0) = \varphi_{30}(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u_{30}(x_1, x_2, t_0)}{\partial t} = \psi_{30}(x_1, x_2). \quad (2)$$

В (1) и (2) используются следующие условные обозначения:  $\mu_i = \mu_i(x_1, x_2)$  ( $i = 1, 2$ ) — характеристические функции, при этом  $\mu_i(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in \Omega_i, \\ 0, & (x_1, x_2) \in \Omega_{3-i}, \end{cases}$   $\sigma_{ii}, \sigma_{i3-i}, \sigma_{i3}$  ( $i = 1, 2$ ) — компоненты тензора напряжений для части оболочки  $D_1$ , а  $s_{ii}, s_{i3-i}, s_{i3}$  ( $i = 1, 2$ ) — для части оболочки  $D_2$ , при этом

$$\sigma_{ii} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{ii} + \nu \varepsilon_{3-i3-i}), \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{12}, \quad \sigma_{i3} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{i3}, \quad (3)$$

$$s_{ii} = \frac{E}{1-\nu^2} (f_{ii} + \nu f_{3-i3-i}), \quad s_{12} = s_{21} = \frac{E}{1+\nu} f_{12}, \quad (4)$$

$\varepsilon_{ii}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{i3}$  ( $i = 1, 2$ ) — компоненты тензора деформаций для части оболочки  $D_1$ , а  $f_{ii}, f_{12}$  ( $i = 1, 2$ ) — для части оболочки  $D_2$ , при этом

$$\varepsilon_{ii} = e_{ii} + \left( x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2} \right) \frac{\partial u_{i1}}{\partial x_i} - x_3 \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_i^2}, \quad \varepsilon_{i3} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{4x_3^2}{h_1^2} \right) u_{i1},$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = e_{12} + \frac{1}{2} \left( \left( x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2} \right) \left( \frac{\partial u_{11}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{21}}{\partial x_1} \right) - x_3 \left( 2 \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right), \quad (5)$$

$$f_{ii} = e_{ii} - x_3 \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_i^2}, \quad f_{12} = f_{21} = e_{12} + \frac{1}{2} \left( -x_3 \left( 2 \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right), \quad (6)$$

$$e_{ii} = \frac{\partial u_{i0}}{\partial x_i} - k_i u_{30} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{30}}{\partial x_i} \right)^2, \quad e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u_{10}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{20}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial u_{30}}{\partial x_1} \frac{\partial u_{30}}{\partial x_2} \right), \quad (7)$$

$u_j(x_1, x_2, x_3, t)$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) — компоненты вектора перемещений, определяемые по правилам:

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{cases} u_{i0} + \left( x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2} \right) u_{i1} - x_3 \frac{\partial u_{30}}{\partial x_i}, & (x_1, x_2, x_3, t) \in \overline{D}_1 \times [t_0, t_1], \\ u_{i0} - x_3 \frac{\partial u_{30}}{\partial x_i}, & (x_1, x_2, x_3, t) \in \overline{D}_2 \times [t_0, t_1] \end{cases} \quad (i = 1, 2),$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3, t) = u_{30}(x_1, x_2, t), \quad (x_1, x_2, t) \in \overline{\Omega} \times [t_0, t_1],$$

где  $u_{30} = u_{30}(x_1, x_2, t)$  — функция прогиба; функции  $u_{i0} = u_{i0}(x_1, x_2, t)$ ,  $u_{i0} : \overline{\Omega} \times [t_0, t_1] \rightarrow R$ , определяют перемещения точек срединной поверхности; функции  $u_{i1} = u_{i1}(x_1, x_2, t)$ ,  $u_{i1} : \overline{\Omega}_1 \times [t_0, t_1] \rightarrow R$ , определяют дополнительные углы поворота нормали к срединной поверхности только в области  $\overline{\Omega}_1$ ;  $[t_0, t_1]$  — отрезок времени наблюдения за эволюцией оболочки;  $\rho, E, \nu$  — положительные постоянные, определяющие соответственно плотность материала, модуль Юнга и коэффициент Пуассона для оболочки; функция  $g(x_1, x_2, t)$ ,  $g : \Omega \times [t_0, t_1] \rightarrow R$ , определяет интенсивность поперечной нагрузки;  $k_1, k_2$  — постоянные кривизны срединной поверхности оболочки в момент времени  $t_0$ ; переменная  $t$  (время) имеет своей областью значений отрезок  $[t_0, t_1]$ ;  $\tilde{\varepsilon}_i$  ( $i = 1, 2$ ) — постоянные и положительные коэффициенты демпфирования (диссипации);  $\varphi_{30}(x_1, x_2), \psi_{30}(x_1, x_2)$  — известные функции, заданные на области  $\overline{\Omega}$  и определяющие начальные условия (2); функции  $\delta u_{30} = \delta u_{30}(x_1, x_2, t)$ ,  $\delta u_{i0} = \delta u_{i0}(x_1, x_2, t)$  (определенные на области  $\overline{\Omega} \times [t_0, t_1]$ ) и функция  $\delta u_{i1} = \delta u_{i1}(x_1, x_2, t)$  (определенная на области  $\overline{\Omega}_1 \times [t_0, t_1]$ ) ( $i = 1, 2$ ), являются изохронными вариациями соответственно функций  $u_{30}, u_{i0}, u_{i1}$ , при этом функции  $\delta \varepsilon_{ii}, \delta \varepsilon_{12}, \delta \varepsilon_{i3}, \delta f_{ii}, \delta f_{12}$  получаются из (5)–(7), если в правые части этих равенств вместо функций  $u_{i0}, u_{i1}, u_{30}$  подставить вариации  $\delta u_{i0}, \delta u_{i1}, \delta u_{30}$ , кроме того,

$$\delta u_{i0}(x_1, x_2, t_0) = \delta u_{i0}(x_1, x_2, t_1) = 0, \quad \delta u_{i1}(x_1, x_2, t_0) = \delta u_{i1}(x_1, x_2, t_1) = 0,$$





$$\delta u_{30}(x_1, x_2, t_0) = \delta u_{30}(x_1, x_2, t_1) = 0.$$

Вариационному уравнению (1) символически можно поставить в соответствие различные краевые задачи, в частности, первая краевая задача для нелинейной системы уравнений движения рассматриваемой оболочки представляет собой систему дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами, определенными на различных подобластях области  $\Omega$  и в совокупности с граничными и начальными условиями имеет такой вид:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{ii} dx_3 + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{ii} dx_3 \right) - \frac{\partial}{\partial x_{3-i}} \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{12} dx_3 + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{12} dx_3 \right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (8)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left( x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2} \right) \sigma_{ii} dx_3 \right) - \frac{\partial}{\partial x_{3-i}} \left( \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left( x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2} \right) \sigma_{12} dx_3 \right) + \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left( 1 - \frac{4x_3^2}{h_1^2} \right) \sigma_{i3} dx_3 = 0, \quad i = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_1; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \rho(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2) \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial t^2} + (\mu_1 h_1 \tilde{\varepsilon}_1 + \mu_2 h_2 \tilde{\varepsilon}_2) \frac{\partial u_{30}}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \left( -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho \left( \mu_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial t^2} \right) \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left( \mu_1 \tilde{\varepsilon}_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \tilde{\varepsilon}_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_{30}}{\partial t} \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} (-x_3) \sigma_{ii} dx_3 + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} (-x_3) s_{ii} dx_3 \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu_1 \frac{\partial u_{30}}{\partial x_i} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{ii} dx_3 + \mu_2 \frac{\partial u_{30}}{\partial x_i} \int_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{ii} dx_3 \right) - k_i \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{ii} dx_3 + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{ii} dx_3 \right) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_{3-i}} \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} (-x_3) \sigma_{12} dx_3 + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} (-x_3) s_{12} dx_3 \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu_1 \frac{\partial u_{30}}{\partial x_{3-i}} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{12} dx_3 + \mu_2 \frac{\partial u_{30}}{\partial x_{3-i}} \int_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{12} dx_3 \right) = g(x_1, x_2, t), \quad i = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in \Omega; \quad (10) \end{aligned}$$

$$u_{30}|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial u_{30}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad u_{i1}|_{\Gamma_1} = 0, \quad u_{i0}|_{\Gamma} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

$$u_{30}|_{t=t_0} = \varphi_{30}(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u_{30}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = \psi_{30}(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}, \quad (12)$$

где  $\Gamma = \partial\Omega \times [t_0, t_1]$ ,  $\Gamma_1 = (\partial\Omega_1 \cup \gamma) \times [t_0, t_1]$ ,  $n$  — внешняя нормаль к  $\partial\Omega$ , условия (11) — граничные условия, а (12) — начальные условия.

**Замечание.** Если вариационное уравнение (1) записать без использования характеристических функций  $\mu_i$ ,  $i = 1, 2$ , то в качестве уравнений Эйлера – Лагранжа для такого уравнения легко получить уравнения движения оболочки по отдельным областям  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , а также условия сопряжения решений таких уравнений на кривой  $\gamma$ . Так как далее условия сопряжения в явной форме не используются, то в данной работе они не приводятся.

Обозначения используемых далее функциональных пространств соответствуют [2], при этом символами  $|\cdot|_A$ ,  $(\cdot, \cdot)_A$  обозначаем норму и скалярное произведение в пространстве  $L^2(A)$ .

Следующая теорема доказывает корректность первой краевой задачи (7)–(12) в определенных функциональных пространствах.



**Теорема.** Пусть кривые  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ ,  $\gamma$ ,  $\partial\Omega_1 \cup \gamma$  имеют гладкость, достаточную для используемых теорем вложения, и выполняются такие условия:

$$g(x_1, x_2, t) \in L^2(Q), \quad Q = \Omega \times (t_0, t_1), \quad \varphi_{30}(x_1, x_2) \in H_0^2(\Omega), \quad \psi_{30}(x_1, x_2) \in H_0^1(\Omega). \quad (13)$$

Тогда: 1) существует хотя бы одно обобщенное решение  $\{\tilde{u}_{30}, \tilde{u}_{i0}, \tilde{u}_{i1}\}$ ,  $i = 1, 2$ , первой краевой задачи (7)–(12), принадлежащее следующим функциональным пространствам:

$$\tilde{u}_{30} \in L^\infty(t_0, t_1; H_0^2(\Omega)), \quad \tilde{u}_{i0}, \frac{\partial \tilde{u}_{30}}{\partial t} \in L^\infty(t_0, t_1; H_0^1(\Omega)), \quad \tilde{u}_{i1} \in L^\infty(t_0, t_1; H_0^1(\Omega_1)) \quad (14)$$

и удовлетворяющее интегральным тождествам

$$\int_{t_0}^{t_1} \iint_{\Omega} \left( \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \tilde{\sigma}_{ii} dx_3 + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \tilde{s}_{ii} dx_3 \right) \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_i} + \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \tilde{\sigma}_{12} dx_3 + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \tilde{s}_{12} dx_3 \right) \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_{3-i}} \right) dx_1 dx_2 dt = 0, \quad \forall v_{1i} \in L^2(t_0, t_1; H_0^1(\Omega)), \quad i = 1, 2; \quad (15)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \iint_{\Omega_1} \left( \left( \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left( x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2} \right) \tilde{\sigma}_{ii} dx_3 \right) \frac{\partial v_{2i}}{\partial x_i} + \left( \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left( x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2} \right) \tilde{\sigma}_{12} dx_3 \right) \frac{\partial v_{2i}}{\partial x_{3-i}} + \left( \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left( 1 - \frac{4x_3^2}{h_1^2} \right) \sigma_{i3} dx_3 \right) v_{2i} \right) dx_1 dx_2 dt = 0, \quad \forall v_{2i} \in L^2(t_0, t_1; H_0^1(\Omega_1)), \quad i = 1, 2; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \iint_{\Omega} \left( -\rho(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2) \frac{\partial \tilde{u}_{30}}{\partial t} \frac{\partial v_3}{\partial t} + (\mu_1 h_1 \tilde{\varepsilon}_1 + \mu_2 h_2 \tilde{\varepsilon}_2) \frac{\partial \tilde{u}_{30}}{\partial t} v_3 + \right. \\ & + \sum_{i=1}^2 \left( -\rho \left( \mu_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \frac{\partial^2 \tilde{u}_{30}}{\partial x_i \partial t} \cdot \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_i \partial t} + \left( \mu_1 \tilde{\varepsilon}_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \tilde{\varepsilon}_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \frac{\partial^2 \tilde{u}_{30}}{\partial x_i \partial t} \cdot \frac{\partial v_3}{\partial x_i} + \right. \\ & + \left. \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} (-x_3) \tilde{\sigma}_{ii} dx_3 + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} (-x_3) \tilde{s}_{ii} dx_3 \right) \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_i^2} + \right. \\ & + \left. \left( \mu_1 \frac{\partial \tilde{u}_{30}}{\partial x_i} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \tilde{\sigma}_{ii} dx_3 + \mu_2 \frac{\partial \tilde{u}_{30}}{\partial x_i} \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \tilde{s}_{ii} dx_3 \right) \frac{\partial v_3}{\partial x_i} - k_i \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \tilde{\sigma}_{ii} dx_3 + \right. \right. \\ & + \left. \left. \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \tilde{s}_{ii} dx_3 \right) v_3 + \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} (-x_3) \tilde{\sigma}_{12} dx_3 + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} (-x_3) \tilde{s}_{12} dx_3 \right) \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_i \partial x_{3-i}} + \right. \\ & + \left. \left( \mu_1 \frac{\partial \tilde{u}_{30}}{\partial x_{3-i}} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \tilde{\sigma}_{12} dx_3 + \mu_2 \frac{\partial \tilde{u}_{30}}{\partial x_{3-i}} \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \tilde{s}_{12} dx_3 \right) \frac{\partial v_3}{\partial x_i} \right) dx_1 dx_2 dt - \\ & - \iint_{\Omega} \rho(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2) \psi_{30} v_3(x_1, x_2, t_0) dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \left( \rho \left( \mu_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \frac{\partial \psi_{30}}{\partial x_i} \times \right. \\ & \left. \times \frac{\partial v_3(x_1, x_2, t_0)}{\partial x_i} \right) dx_1 dx_2 = \int_{t_0}^{t_1} \iint_{\Omega} g(x_1, x_2, t) v_3 dx_1 dx_2 dt, \quad (17) \end{aligned}$$



для любых функций  $v_3 \in L^2(t_0, t_1; H_0^2(\Omega))$  таких, что  $\partial v_3 / \partial t \in L^2(t_0, t_1; H_0^1(\Omega))$  и  $v_3(x_1, x_2, t_1) = 0$ , при этом второе начальное условие из (12) удовлетворяется в смысле интегрального тождества (17), а первое начальное условие из (12) – в смысле предельного равенства

$$\lim_{t \rightarrow t_0 + 0} \iint_{\Omega} (u_{30}(x_1, x_2, t) - \varphi_{30})^2 dx_1 dx_2 = 0; \quad (18)$$

2) приближенное решение задачи (7)–(12), удовлетворяющее условиям (14)–(18), может быть получено с помощью метода Бубнова – Галеркина, при этом получаемое множество приближенных решений является слабо компактным в пространствах, соответствующих условиям (14), а всякая предельная точка этого множества определяет обобщенное решение задачи (7)–(12).

**Доказательство. 1. Построение приближенного решения.** Обобщенное решение задачи (7)–(12) определяем с помощью метода Бубнова – Галеркина. Следуя алгоритму этого метода, выбираем последовательность функций  $\{\chi_{k3}\}$ , образующих базис в пространстве  $H_0^2(\Omega)$  (для определенности полагаем, что базис образован функциями из класса  $C^\infty(\Omega)$ ) с компактным носителем в  $\Omega$ , ортонормированными по следующей норме пространства  $H_0^1(\Omega)$ :

$$|\chi_{k3}|_{H_0^1}^2 = \iint_{\Omega} \left( \rho(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2)(\chi_{k3})^2 + \sum_{i=1}^2 \left( \rho \left( \mu_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \left( \frac{\partial \chi_{k3}}{\partial x_i} \right)^2 \right) \right) dx_1 dx_2,$$

далее определяем функцию  $u_{30}^n = u_{30}^n(x_1, x_2, t)$ , удовлетворяющую следующим условиям:

1) имеет место равенство

$$u_{30}^n = \sum_{k3=1}^n g_{k3}(t) \chi_{k3}(x_1, x_2); \quad (19)$$

2) коэффициенты  $g_{k3}(t)$  в разложении (19) определяем как решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \left( \rho(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2) \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial t^2}, \chi_{p3} \right)_{\Omega} + \left( (\mu_1 h_1 \tilde{\varepsilon}_1 + \mu_2 h_2 \tilde{\varepsilon}_2) \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}, \chi_{p3} \right)_{\Omega} + \\ & + \sum_{i=1}^2 \left( \left( \rho \left( \mu_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \frac{\partial^3 u_{30}^n}{\partial x_i \partial t^2}, \frac{\partial \chi_{p3}}{\partial x_i} \right)_{\Omega} + \left( \left( \mu_1 \tilde{\varepsilon}_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \tilde{\varepsilon}_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i \partial t}, \frac{\partial \chi_{p3}}{\partial x_i} \right)_{\Omega} + \right. \\ & + \left( \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} (-x_3) \sigma_{ii}^n dx_3 + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} (-x_3) s_{ii}^n dx_3 \right), \frac{\partial^2 \chi_{p3}}{\partial x_i^2} \right)_{\Omega} + \\ & + \left( \left( \mu_1 \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{ii}^n dx_3 + \mu_2 \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i} \int_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{ii}^n dx_3 \right), \frac{\partial \chi_{p3}}{\partial x_i} \right)_{\Omega} - \\ & - \left( k_i \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{ii}^n dx_3 + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{ii}^n dx_3 \right), \chi_{p3} \right)_{\Omega} + \\ & + \left( \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} (-x_3) \sigma_{12}^n dx_3 + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} (-x_3) s_{12}^n dx_3 \right), \frac{\partial^2 \chi_{p3}}{\partial x_i \partial x_{3-i}} \right)_{\Omega} + \\ & + \left( \left( \mu_1 \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_{3-i}} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{12}^n dx_3 + \mu_2 \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_{3-i}} \int_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{12}^n dx_3 \right), \frac{\partial \chi_{p3}}{\partial x_i} \right)_{\Omega} \right) = (g, \chi_{p3})_{\Omega}, \quad p3 = \overline{1, n}. \quad (20) \end{aligned}$$



с начальными условиями

$$\begin{aligned}
 u_{30}^n(x_1, x_2, t_0) &= \varphi_{30}^n, & \varphi_{30}^n &= \sum_{k_3=1}^n a_{k_3} \chi_{k_3}, & \varphi_{30}^n &\rightarrow \varphi_{30} \text{ в } H_0^2(\Omega), \\
 \frac{\partial u_{30}^n(x_1, x_2, t_0)}{\partial t} &= \psi_{30}^n, & \psi_{30}^n &= \sum_{k_3=1}^n b_{k_3} \chi_{k_3}, & \psi_{30}^n &\rightarrow \psi_{30} \text{ в } H_0^1(\Omega),
 \end{aligned} \tag{21}$$

«стрелки» в (21) указывают на сходимость по норме указанных пространств, при этом функции  $\sigma_{ii}^n$ ,  $\sigma_{12}^n$ ,  $s_{ii}^n$ ,  $s_{12}^n$  в (20) получаются из (3)–(7), если вместо функций  $u_{30}$ ,  $u_{i0}$ ,  $u_{i1}$  в эти соотношения подставить функции  $u_{30}^n$ ,  $u_{i0}^n$ ,  $u_{i1}^n$ , в свою очередь, функции  $u_{i0}^n = u_{i0}^n(x_1, x_2, t)$ ,  $u_{i1}^n = u_{i1}^n(x_1, x_2, t)$  определяются из решения систем уравнений (8), (9) эллиптического типа с граничными условиями из (11) при условии, что в эти уравнения вместо функции  $u_{30}$  подставлена функция  $u_{30}^n$ .

Заметим, что указанным задачам Дирихле для систем (8), (9), определяющим две вектор-функции с компонентами  $(u_{10}^n, u_{20}^n)$  и  $(u_{11}^n, u_{21}^n)$ , соответствуют положительно определенные операторы в пространствах  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  и  $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_1)$  соответственно. Этот факт следует из доказательства положительной определенности оператора, соответствующего задаче Дирихле для уравнений равновесия в линейной теории упругости [6, с. 186–187], приводимого далее «энергетического» неравенства и неравенства Фридрихса [7, с. 129].

Таким образом, существует единственное обобщенное решение  $(u_{10}^n, u_{20}^n, u_{11}^n, u_{21}^n)$  задач Дирихле для систем (8), (9) (существование обобщенного решения задачи Дирихле только для системы (8) доказано в лемме 1.2 из работы [1]), при этом  $u_{i0}^n \in H_0^1(\Omega)$ ,  $u_{i1}^n \in H_0^1(\Omega_1)$ .

Разрешимость задачи Коши (20), (21) на некотором отрезке  $[t_0, t_n]$  следует из теоремы Шаудера и доказывается подобно лемме 5.1 из [1].

2. *Априорные оценки.* Умножим каждое уравнение из системы (20) на соответствующую функцию  $dg_{p_3}/dt$  и просуммируем по  $p_3$ . Получаем равенство

$$\begin{aligned}
 &\left( \rho(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2) \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial t^2}, \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right)_{\Omega} + \left( (\mu_1 h_1 \tilde{\varepsilon}_1 + \mu_2 h_2 \tilde{\varepsilon}_2) \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}, \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right)_{\Omega} + \\
 &+ \sum_{i=1}^2 \left( \left( \rho \left( \mu_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \frac{\partial^3 u_{30}^n}{\partial x_i \partial t^2}, \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i \partial t} \right)_{\Omega} + \left( \left( \mu_1 \tilde{\varepsilon}_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \tilde{\varepsilon}_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i \partial t}, \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i \partial t} \right)_{\Omega} + \right. \\
 &+ \left( \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} (-x_3) \sigma_{ii}^n dx_3 + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} (-x_3) s_{ii}^n dx_3 \right), \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i^2} \right) \right)_{\Omega} + \\
 &+ \left( \left( \mu_1 \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{ii}^n dx_3 + \mu_2 \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i} \int_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{ii}^n dx_3 \right), \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i} \right) \right)_{\Omega} - \\
 &- \left( k_i \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{ii}^n dx_3 + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{ii}^n dx_3 \right), \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right)_{\Omega} + \\
 &+ \left( \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} (-x_3) \sigma_{12}^n dx_3 + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} (-x_3) s_{12}^n dx_3 \right), \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i \partial x_{3-i}} \right) \right)_{\Omega} + \\
 &+ \left( \left( \mu_1 \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_{3-i}} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{12}^n dx_3 + \mu_2 \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_{3-i}} \int_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{12}^n dx_3 \right), \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i} \right) \right)_{\Omega} \Bigg) = \left( g, \frac{\partial u_{30}}{\partial t} \right)_{\Omega}. \tag{22}
 \end{aligned}$$

Так как положительно определенному оператору соответствует линейный, ограниченный и положительный обратный оператор [7, с. 94–95], то, определяя с помощью таких операторов обобщенные



решения  $(u_{10}^n, u_{20}^n)$ ,  $(u_{11}^n, u_{21}^n)$  для задач Дирихле (8), (9), (11) и дифференцируя равенства с обратными операторами по переменной  $t$  (это возможно в силу существования при любом фиксированном  $t \in [t_0, t_n]$  производных  $\frac{\partial u_{30}}{\partial t} = \sum_{k3=1}^n \frac{dg_{k3}(t)}{dt} \chi_{k3}$  из класса  $C^\infty(\Omega)$  с компактным носителем в  $\Omega$ ), заключаем, что  $\frac{\partial u_{i0}^n}{\partial t} \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\frac{\partial u_{i1}^n}{\partial t} \in H_0^1(\Omega_1)$ . Поэтому для обобщенных решений  $u_{i0}^n$ ,  $u_{i1}^n$  справедливы интегральные равенства:

$$\begin{aligned} & \left( \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{ii}^n dx_3 + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{ii}^n dx_3 \right), \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_{i0}^n}{\partial x_i} \right) \right)_{\Omega} + \\ & + \left( \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{12}^n dx_3 + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{12}^n dx_3 \right), \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_{i0}^n}{\partial x_{3-i}} \right) \right)_{\Omega} = 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \left( \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left( x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2} \right) \sigma_{ii}^n dx_3 \right), \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_i} \right) \right)_{\Omega} + \\ & + \left( \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left( x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2} \right) \sigma_{12}^n dx_3 \right), \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_{3-i}} \right) \right)_{\Omega} + \\ & + \left( \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left( 1 - \frac{4x_3^2}{h_1^2} \right) \sigma_{i3}^n dx_3 \right), \frac{\partial u_{i1}^n}{\partial t} \right)_{\Omega} = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (24)$$

Равенства (23) и (24) просуммируем с равенством (22) и получим следующее «энергетическое» равенство:

$$\begin{aligned} & \left( \rho (\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2) \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial t^2}, \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right)_{\Omega} + \left( (\mu_1 h_1 \tilde{\varepsilon}_1 + \mu_2 h_2 \tilde{\varepsilon}_2) \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t}, \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right)_{\Omega} + \\ & + \sum_{i=1}^2 \left( \left( \rho \left( \mu_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i \partial t} \right), \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i \partial t} \right)_{\Omega} + \left( \left( \mu_1 \tilde{\varepsilon}_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \tilde{\varepsilon}_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i \partial t}, \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i \partial t} \right)_{\Omega} + \right. \\ & + \left( \sigma_{ii}^n, \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{ii}^n \right)_{D_1} + \left( s_{ii}^n, \frac{\partial}{\partial t} f_{ii}^n \right)_{D_2} + \left( \sigma_{12}^n, \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_{i0}^n}{\partial x_{3-i}} + \left( x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2} \right) \frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_{3-i}} - x_3 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i \partial x_{3-i}} \right) + \right. \\ & + \left. \left. \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_{3-i}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i} \right) \right) \right)_{D_1} + \left( s_{12}^n, \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_{i0}^n}{\partial x_{3-i}} - x_3 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i \partial x_{3-i}} \right) + \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_{3-i}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i} \right) \right) \right)_{D_2} + \\ & + \left( \sigma_{i3}^n, \frac{\partial}{\partial t} \left( \left( 1 - \frac{4x_3^2}{h_1^2} \right) u_{i1}^n \right) \right)_{D_1} \Big) = \left( g, \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right)_{\Omega}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii}^n &= e_{ii}^n + \left( x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2} \right) \frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_i} - x_3 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i^2}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_1, \\ f_{ii}^n &= e_{ii}^n - x_3 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i^2}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_2, \quad e_{ii}^n = \frac{\partial u_{i0}^n}{\partial x_i} - k_i u_{30}^n + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i} \right)^2. \end{aligned}$$

Для краткости последующего изложения введем обозначения:

$$\begin{aligned} A_{ii}^{1n} &= \left( x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2} \right) \frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_i} - x_3 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i^2}, \quad A_{12}^{1n} = \frac{1}{2} \left( \left( x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2} \right) \left( \frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{21}^n}{\partial x_1} \right) - x_3 \left( 2 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right), \\ A_{ii}^{2n} &= -x_3 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_i^2}, \quad A_{12}^{2n} = \frac{1}{2} \left( -2x_3 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (26)$$



С учетом (26) равенство (25) принимает в явной форме следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| (\rho(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2))^{1/2} \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right|_{\Omega}^2 + \left| (\mu_1 h_1 \tilde{\varepsilon}_1 + \mu_2 h_2 \tilde{\varepsilon}_2)^{1/2} \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right|_{\Omega}^2 + \\ & + \left( \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| \left( \rho \left( \mu_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right) \right|_{\Omega}^2 + \left| \left( \mu_1 \tilde{\varepsilon}_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \tilde{\varepsilon}_2 \frac{h_2^3}{12} \right)^{1/2} \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \times \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right) \right|_{\Omega}^2 \right) \right) + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( h_1 |e_{11}^n|^2_{\Omega_1} + h_1 |e_{22}^n|^2_{\Omega_1} + 2\nu h_1 (e_{11}^n, e_{22}^n)_{\Omega_1} + \right. \\ & + |A_{11}^{1n}|^2_{D_1} + |A_{22}^{1n}|^2_{D_1} + 2\nu (A_{11}^{1n}, A_{22}^{1n})_{\Omega_1} + h_2 |e_{11}^n|^2_{\Omega_2} + h_2 |e_{22}^n|^2_{\Omega_2} + 2\nu h_2 (e_{11}^n, e_{22}^n)_{\Omega_2} + |A_{11}^{2n}|^2_{D_2} + \\ & + |A_{22}^{2n}|^2_{D_2} + 2\nu (A_{11}^{2n}, A_{22}^{2n})_{D_2} \left. \right) + \frac{2E}{1+\nu} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( |e_{12}^n + A_{12}^{1n}|^2_{D_1} + |e_{12}^n + A_{12}^{2n}|^2_{D_2} \right) + \\ & + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \left| \left( 1 - \frac{4x_3^2}{h_1^2} \right) u_{11}^n \right|_{D_1}^2 + \left| \left( 1 - \frac{4x_3^2}{h_1^2} \right) u_{21}^n \right|_{D_1}^2 \right) = \left( g, \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right)_{\Omega}. \end{aligned} \quad (27)$$

Проинтегрируем равенство (27) по отрезку  $[t_0, t]$ ,  $t \in [t_0, t_n]$ , и получим

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2} \left| (\rho(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2))^{1/2} \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right|_{\Omega}^2 + \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{2} \left| \left( \rho \left( \mu_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right) \right|_{\Omega}^2 + \right. \right. \\ & + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{1}{2} \left| \left( 1 - \frac{4x_3^2}{h_1^2} \right) u_{i1}^n \right|_{D_1}^2 \left. \right) + \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left( h_1 |e_{11}^n|^2_{\Omega_1} + h_1 |e_{22}^n|^2_{\Omega_1} + 2\nu h_1 (e_{11}^n, e_{22}^n)_{\Omega_1} + |A_{11}^{1n}|^2_{D_1} + \right. \\ & + |A_{22}^{1n}|^2_{D_1} + 2\nu (A_{11}^{1n}, A_{22}^{1n})_{\Omega_1} + h_2 |e_{11}^n|^2_{\Omega_2} + h_2 |e_{22}^n|^2_{\Omega_2} + 2\nu h_2 (e_{11}^n, e_{22}^n)_{\Omega_2} + |A_{11}^{2n}|^2_{D_2} + |A_{22}^{2n}|^2_{D_2} + \\ & + 2\nu (A_{11}^{2n}, A_{22}^{2n})_{D_2} \left. \right) + \frac{2E}{1+\nu} \frac{1}{2} \left( |e_{12}^n + A_{12}^{1n}|^2_{D_1} + |e_{12}^n + A_{12}^{2n}|^2_{D_2} \right) \left. \right\} + \int_{t_0}^t \left| (\mu_1 h_1 \tilde{\varepsilon}_1 + \mu_2 h_2 \tilde{\varepsilon}_2)^{1/2} \times \right. \\ & \left. \times \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right|_{\Omega}^2 dt + \sum_{i=1}^2 \int_{t_0}^t \left| \left( \mu_1 \tilde{\varepsilon}_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \tilde{\varepsilon}_2 \frac{h_2^3}{12} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right) \right|_{\Omega}^2 dt = C + \int_{t_0}^t \left( g, \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right)_{\Omega} dt. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь постоянная  $C$  — это выражение в фигурных скобках из левой части равенства (28) в точке  $t = t_0$ , при этом функции  $u_{i0}^n(x_1, x_2, t_0)$  и  $u_{i1}^n(x_1, x_2, t_0)$  определяются как обобщенные решения задач Дирихле (8), (9), (11), если в системы (8), (9) подставить вместо функций  $u_{30}^n$  функции  $\varphi_{30}^n(x_1, x_2)$ .

Используя неравенство  $|ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ ,  $\forall a, b \in R$  и условие  $0 < \nu < \frac{1}{2}$ , из равенства (28) получаем следующее «энергетическое» неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left| (\rho(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2))^{1/2} \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right|_{\Omega}^2 + \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{2} \left| \left( \rho \left( \mu_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right) \right|_{\Omega}^2 + \right. \\ & + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{1}{2} \left| \left( 1 - \frac{4x_3^2}{h_1^2} \right) u_{i1}^n \right|_{D_1}^2 + \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left( h_i (1-\nu) \left( |e_{11}^n|^2_{\Omega_i} + |e_{22}^n|^2_{\Omega_i} \right) + (1-\nu) \left( |A_{11}^{in}|^2_{D_i} + \right. \right. \\ & \left. \left. + |A_{22}^{in}|^2_{D_i} \right) \right) \left. \right) + \frac{E}{1+\nu} \left( |e_{12}^n + A_{12}^{1n}|^2_{D_1} + |e_{12}^n + A_{12}^{2n}|^2_{D_2} \right) \leq \left( C + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} |g|_{\Omega}^2 dt \right) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left| \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right|_{\Omega}^2 dt, \end{aligned} \quad (29)$$

при этом из левой части равенства (28) отброшены слагаемые, стоящие вне фигурных скобок.

Из неравенства (29) на основании леммы Гронуолла [3, с. 152–153] заключаем, что каждое слагаемое из левой части неравенства (29) ограничено некоторой постоянной, не зависящей от номера  $n$



(учитываем, что последовательности  $\{\varphi_{30}^n\}$  и  $\{\psi_{30}^n\}$  сходятся по норме пространств  $H_0^2(\Omega)$  и  $H_0^1(\Omega)$  соответственно и, следовательно, ограничены в этих нормах) и зависящей от значения  $t_1$ .

Наибольший интерес вызывает последующая оценка слагаемых  $|A_{11}^{1n}|_{D_i}^2$  и  $|A_{22}^{1n}|_{D_i}^2$ , покажем на примере, как такие оценки реализуются. Итак,

$$\begin{aligned}
 C &\geq |A_{11}^{1n}|_{D_1}^2 = \iint_{\Omega_1} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left( \left( x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2} \right) \frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \\
 &= \iint_{\Omega_1} \left\{ \left( \frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_1} \right)^2 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left( x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2} \right)^2 dx_3 - 2 \frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1^2} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} x_3 \left( x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_1^2} \right) dx_3 + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1^2} \right)^2 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} x_3^2 dx_3 \right\} dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega_1} h_1^3 \left\{ \frac{17}{315} \left( \frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{2}{15} \frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1^2} \right)^2 \right\} dx_1 dx_2 \geq \left\{ \iint_{\Omega_1} h_1^3 \left( \frac{17}{315} - \frac{\varepsilon}{15} \right) \left( \frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{15\varepsilon} \right) \left( \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1^2} \right)^2 \right\} dx_1 dx_2, \quad (30)
 \end{aligned}$$

в (30) использовалось неравенство  $|ab| \leq \frac{\varepsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon}$  для любых  $a, b \in R$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Для получения из (30) априорных оценок норм  $\left| \frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_1} \right|_{\Omega_1}^2$  и  $\left| \frac{\partial^2 u_{30}^n}{\partial x_1^2} \right|_{\Omega_1}^2$  выбираем число  $\varepsilon$  из условий

$$\begin{cases} \frac{17}{315} - \frac{\varepsilon}{15} > 0, \\ \frac{1}{12} - \frac{1}{15\varepsilon} > 0, \end{cases} \quad (31)$$

или

$$\begin{cases} \varepsilon < \frac{17}{21}, \\ \varepsilon > \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Так как  $17/21 - 4/5 = 1/105 > 0$ , то всегда можно подобрать  $\varepsilon$ , удовлетворяющее условиям (31) и тем самым устанавливается ограниченность указанных норм.

Аналогично, в том числе используя неравенство Корна [6, с. 185] и результаты из работы [1], устанавливается ограниченность норм  $\left| \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right|_{\Omega}^2$ ,  $\left| \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right) \right|_{\Omega}^2$ ,  $\left| \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right) \right|_{\Omega}^2$ ,  $|u_{i1}^2|_{H_0^1(\Omega_1)}^2$ ,  $|u_{i0}^2|_{H_0^1(\Omega)}^2$ ,  $|u_{30}^2|_{H_0^2(\Omega)}^2$ .

Согласно лемме 5.1 из работы [1] решение задачи Коши (20), (21) можно продолжить на весь отрезок  $[t_0, t_1]$ .

Таким образом, множество  $\{u_{30}^n\}$  ограничено в  $L^\infty(t_0, t_1; H_0^2(\Omega))$ , множества  $\left\{ \frac{\partial u_{30}^n}{\partial t} \right\}$  и  $\{u_{i0}^n\}$  ограничены в  $L^\infty(t_0, t_1; H_0^1(\Omega))$ , множество  $\{u_{i1}^n\}$  ограничено в  $L^\infty(t_0, t_1; H_0^2(\Omega_1))$ .

Из установленной ограниченности множеств в (31) следует слабая компактность указанных множеств в пространствах, соответствующих (14), и возможность выделения в них слабо сходящихся последовательностей, т. е.

$$\begin{aligned}
 u_{30}^m &\rightharpoonup \tilde{u}_{30} \quad \text{*}-слабо в } L^\infty(t_0, t_1; H_0^2(\Omega)), & u_{i0}^m &\rightharpoonup \tilde{u}_{i0} \quad \text{*}-слабо в } L^\infty(t_0, t_1; H_0^1(\Omega)), \\
 u_{i1}^m &\rightharpoonup \tilde{u}_{i1} \quad \text{*}-слабо в } L^\infty(t_0, t_1; H_0^1(\Omega_1)), & & \\
 \frac{\partial u_{30}^m}{\partial t} &\rightharpoonup \frac{\partial \tilde{u}_{30}}{\partial t} \quad \text{*}-слабо в } L^\infty(t_0, t_1; H_0^1(\Omega)), & i &= 1, 2,
 \end{aligned} \quad (32)$$

при этом использованы обозначения из [2].



3. *Предельный переход.* Пусть функции  $g_j(t)$ ,  $1 \leq j \leq j_0$ , принадлежат пространству  $C^1([t_0, t_1])$ ,  $g_j(t_1) = 0$  и

$$\tilde{v}_3(x_1, x_2, t) = \sum_{j=1}^{j_0} g_j(t) \otimes \chi_j(x_1, x_2), \quad (33)$$

где  $\chi_j(x_1, x_2)$  — функции из базиса  $\{\chi_{k3}\}$ . Тогда из (20) следует, что при  $n = m > j_0$  выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \iint_{\Omega} \left( -\rho(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2) \frac{\partial u_{30}^m}{\partial t} \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial t} + (\mu_1 h_1 \tilde{\varepsilon}_1 + \mu_2 h_2 \tilde{\varepsilon}_2) \frac{\partial u_{30}^m}{\partial t} \tilde{v}_3 + \right. \\ & + \sum_{i=1}^2 \left( -\rho \left( \mu_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \frac{\partial^2 u_{30}^m}{\partial x_i \partial t} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x_i \partial t} + \left( \mu_1 \tilde{\varepsilon}_1 \frac{h_1^3}{12} + \mu_2 \tilde{\varepsilon}_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \frac{\partial^2 u_{30}^m}{\partial x_i \partial t} \cdot \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x_i} + \right. \\ & + \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} (-x_3) \sigma_{ii}^m dx_3 + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} (-x_3) s_{ii}^m dx_3 \right) \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x_i^2} + \left( \mu_1 \frac{\partial u_{30}^m}{\partial x_i} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{ii}^m dx_3 + \right. \\ & + \mu_2 \frac{\partial u_{30}^m}{\partial x_i} \int_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{ii}^m dx_3 \left. \right) \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x_i} - k_i \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{ii}^m dx_3 + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{ii}^m dx_3 \right) \tilde{v}_3 + \left( \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} (-x_3) \sigma_{12}^m dx_3 + \right. \\ & + \mu_2 \int_{-h_2/2}^{h_2/2} (-x_3) s_{12}^m dx_3 \left. \right) \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x_i \partial x_{3-i}} + \left( \mu_1 \frac{\partial u_{30}^m}{\partial x_{3-i}} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_{12}^m dx_3 + \mu_2 \frac{\partial u_{30}^m}{\partial x_{3-i}} \int_{-h_2/2}^{h_2/2} s_{12}^m dx_3 \right) \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x_i} \left. \right) dx_1 dx_2 dt - \\ & - \iint_{\Omega} \rho(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2) \psi_{30}^m \tilde{v}_3(x_1, x_2, t_0) dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \left( \rho \left( \mu_1 \frac{h_1^3}{12} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \mu_2 \frac{h_2^3}{12} \right) \frac{\partial \psi_{30}^m}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \tilde{v}_3(x_1, x_2, t_0)}{\partial x_i} \right) dx_1 dx_2 = \int_{t_0}^{t_1} \iint_{\Omega} g(x_1, x_2, t) \tilde{v}_3 dx_1 dx_2 dt. \quad (34) \end{aligned}$$

Предельным переходом в (34), дословно повторяя рассуждения из работы [1], заключаем, что выполняется тождество (17) и сопутствующие ему тождества (15) и (16).

Теорема доказана. □

**Замечание.** Полученный в теореме результат остается справедливым и в том случае, когда кривая  $\gamma$  является простым и достаточно гладким замкнутым контуром, целиком принадлежащим области  $\Omega$ .

### Библиографический список

1. *Ворович И. И.* О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебаний пологих оболочек // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1957. Т. 21, № 6. С. 747–784.
2. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972. 587 с.
3. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973. 408 с.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцев* *ва Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 736 с.
5. *Обэн Ж. П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. М., 1977. 383 с.
6. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.; Л., 1952. 216 с.
7. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., 1970. 512 с.





УДК 519.65, 517.17, 512.56

## ОБ ИДЕМПОТЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ПОЛУГРУППЫ УВЕЛИЧИВАЮЩИХ МОНОТОННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. Л. Крюкова

Вологодский государственный педагогический университет,  
кафедра алгебры, геометрии и теории обучения математике  
E-mail: kryukovanastya@yahoo.com

В некоторых специальных классах упорядоченных топологических пространств получена характеристика округлений как крайних точек множества неувеличивающих изотонных отображений, доказана их устойчивость по Хайерсу – Уламу.

**Ключевые слова:** округление, топологические частично упорядоченные пространства, крайние точки, устойчивость по Хайерсу – Уламу.

### ВВЕДЕНИЕ

В практике компьютерных вычислений одна из наиболее часто встречающихся операций — это округление (промежуточных) результатов. Истоки аксиоматической теории округлений содержатся в работе U. Kulisch [1], который определил их как отображения линейно упорядоченного множества в его подмножество, удовлетворяющие некоторым естественным требованиям (аксиомам). Понятие интервального округления было сформулировано и представлено в работах [2, 3]. В данной работе округления изучаются в рамках общей теории топологических частично упорядоченных пространств.

Будем рассматривать в частично упорядоченном пространстве  $(X, \leq)$  совокупность  $IE(X)$  всех отображений  $\varphi$  пространства  $X$  в себя, для которых выполнены следующие два условия:

- 1)  $x \leq \varphi(x)$ ,
- 2)  $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$ , если  $x_1 \leq x_2$ .

Таким образом,  $IE(X)$  — это множество всех увеличивающих возрастающих отображений  $X$  в себя.

Отображение  $\varphi \in IE(X)$  называется *замыканием* [4] (или *округлением*), если оно идемпотентно, т. е. удовлетворяет условию

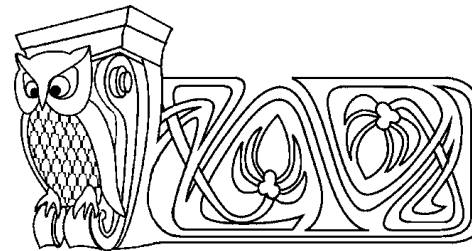
- 3)  $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$ .

Мы покажем, что если  $X$  — подмножество линейного пространства, и упорядоченность задается выделением «положительного» конуса, то всякое замыкание — крайняя точка выпуклого множества  $IE(X)$ . Для случая, когда  $X$  — прямая с естественным порядком, будет доказано и обратное утверждение. Поскольку крайние точки множества, при выполнении некоторых дополнительных топологических условий, порождают это множество (в смысле теорем Крейна – Мильмана, или Шоке), это указывает на важную роль замыканий в структуре пространства увеличивающих возрастающих отображений.

В последнем разделе работы рассматривается устойчивость множества замыканий по Хайерсу – Уламу.

Напомним, что общее (неформальное) определение устойчивости по Хайерсу – Уламу класса отображений, выделяемого некоторым условием, звучит следующим образом [5, с. 77]: «отображения, почти удовлетворяющие данному условию, близки к отображениям, в точности ему удовлетворяющим». В применении к замыканиям, которые выделяются из  $IE(X)$  свойством идемпотентности, это означает следующее.

Пусть упорядоченное пространство  $(X, \leq)$  наделено метрикой  $\rho$ , согласованной с порядком. Будем



### On Idempotent Elements of Semigroup of Increasing Monotonous Mappings

A. L. Kryukova

Vologda State Pedagogical University,  
Chair of Algebra, Geometry and Theory  
of Learning Mathematics  
E-mail: kryukovanastya@yahoo.com

In some special classes of ordered topological spaces we characterize roundings as extreme points of set of non increasing isotonic mappings, and establish their stability in Hyers – Ulam sense.

**Key words:** rounding, ordered topological spaces, extreme points, stability in Hyers – Ulam sense.



говорить, что класс всех замыканий на  $(X, \leq)$  устойчив по Хайерсу – Уламу в классе  $\mathcal{F} \subset IE(X)$  [5], если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что если  $f \in \mathcal{F}$  и  $\rho(f(f(x)), f(x)) < \delta$  для всех  $x$ , то  $\rho(f(x), \varphi(x)) < \varepsilon$  для всех  $x$ , где  $\varphi$  – некоторое замыкание.

Мы докажем, что для случая  $X = \mathbb{R}$  множество замыканий устойчиво в классе всех непрерывных слева отображений из  $IE(X)$ .

## 1. ЗАМКНАНИЯ И КРАЙНИЕ ТОЧКИ

Пусть  $X$  – выпуклое подмножество линейного вещественного пространства  $\mathcal{X}$ , а упорядочение задается выпуклым конусом  $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ :  $x \leq y$ , если  $y - x \in \mathcal{K}$ . В этих условиях  $IE(X)$  обладает выпуклой структурой, т. е. является выпуклым подмножеством линейного пространства всех отображений из  $X$  в  $\mathcal{X}$ .

**Теорема 1.** *Всякое замыкание в  $(X, \leq_{\mathcal{K}})$  является крайней точкой в  $IE(X)$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\varphi$  – произвольное замыкание. Если оно не является крайней точкой, то найдутся отображения  $f_1, f_2 \in IE(X)$  такие, что  $\varphi = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ .

Докажем, прежде всего, что неподвижные точки отображения  $\varphi$  являются неподвижными для функций  $f_1$  и  $f_2$ . В самом деле, если  $\varphi(x) = x$ , то  $f_1(x) - x = x - f_2(x)$ . Но левая часть этого равенства принадлежит  $\mathcal{K}$ , а правая принадлежит  $-\mathcal{K}$ . Так как пересечение  $\mathcal{K}$  и  $-\mathcal{K}$  равно  $\{\theta\}$ , то обе части равны нулю, т. е.  $f_i(x) = x$ , где  $i = 1, 2$ .

Поскольку точка  $\varphi(x)$  всегда неподвижна для замыкания  $\varphi$ , то для произвольного  $x \in X$  имеем:  $f_i(\varphi(x)) = \varphi(x)$ . Так как  $x \leq \varphi(x)$ , то  $f_i(x) \leq f_i(\varphi(x)) = \varphi(x)$ . Таким образом, оба отображения  $f_i$  мажорируются отображением  $\varphi$ . Значит, в равенстве  $f_1(x) - \varphi(x) = \varphi(x) - f_2(x)$  правая часть принадлежит  $\mathcal{K}$ , а левая принадлежит  $-\mathcal{K}$ . Снова, применяя свойство  $\mathcal{K} \cap (-\mathcal{K}) = \{\theta\}$ , заключаем, что обе части равны нулю. Таким образом,  $f_i = \varphi$  и  $\varphi$  является крайней точкой.  $\square$

Рассмотрим теперь в качестве исходного пространства  $(X, \leq)$  вещественную прямую  $\mathbb{R}$  с обычным порядком и топологией. В этом случае полугруппа  $IE(\mathbb{R})$  состоит из всех неубывающих функций на  $\mathbb{R}$ , удовлетворяющих условию  $f(x) \geq x$ .

Заметим, что теорема 1 уже в этой ситуации не допускает обращения. В самом деле, рассмотрим функцию  $\gamma(x)$ , определенную равенствами:  $\gamma(x) = 0$  при  $x < 0$ ,  $\gamma(x) = 1$  при  $x \in [0; 1]$ ,  $\gamma(x) = x$  при  $x > 1$ . Так как  $\gamma(\gamma(-1)) = \gamma(0) = 1 \neq 0 = \gamma(-1)$ , то  $\gamma$  не является идемпотентной. С другой стороны,  $\gamma$  – крайняя точка множества  $IE(\mathbb{R})$ . В самом деле, пусть  $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ , где  $\alpha, \beta \in IE(\mathbb{R})$ . В частности,  $\alpha(x) + \beta(x) = 0$  при  $x < 0$ . Если  $\alpha(x) > 0$  при каком-нибудь  $x < 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow 0-} \alpha(x) > 0$ , откуда  $\lim_{x \rightarrow 0-} \beta(x) < 0$ . Следовательно, найдется  $x < 0$  такой, что  $\beta(x) < x$ , а это невозможно. Мы доказали, что  $\alpha(x) \leq 0$  при  $x < 0$ . Разумеется, то же верно и для  $\beta(x)$ , поэтому условие  $\alpha(x) + \beta(x) = 0$  влечет  $\alpha(x) = \beta(x) = 0$ , т. е. обе функции совпадают с  $\gamma(x)$  на  $(-\infty, 0)$ . Далее, на отрезке  $[0, 1]$  выполнено условие  $\alpha(x) + \beta(x) = 2$ , поэтому если  $\alpha(1) > 1$ , то  $\beta(1) < 1$ , что невозможно. Итак,  $\alpha(1) = 1$  откуда  $\alpha(x) \leq 1$  и аналогично  $\beta(x) \leq 1$  для всех  $x \in [0, 1]$ . Следовательно  $\alpha(x) = \beta(x) = 1$ , т. е. обе функции совпадают с  $\gamma(x)$  на  $[0, 1]$ . Наконец, так как  $\alpha(x) \geq x$ ,  $\beta(x) \geq x$  и  $\alpha(x) + \beta(x) = 2x$  на  $[1, \infty)$ , то  $\alpha(x) = \beta(x) = x = \gamma(x)$  и на этом интервале.

Функцию  $\gamma(x)$  можно, однако, «несущественно» изменить таким образом, что она станет идемпотентной. Для этого достаточно положить  $\gamma(0) = 0$ . Мы покажем, что это общий факт: если функция является крайней точкой в  $IE(\mathbb{R})$ , то, изменяя ее значения на некотором (не более чем счетном) множестве точек разрыва, можно получить идемпотентную функцию. Алгоритм изменения весьма прост: функцию достаточно сделать непрерывной слева.

Заметим, что крайняя функция в любой точке непрерывна хотя бы с одной стороны. В самом деле, если  $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) < f(x_0) < \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ , то  $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ , где каждая из функций  $f_i$  совпадает с  $f$  везде, кроме точки  $x_0$ , а в этой точке отличается от  $f(x_0)$  на  $\pm\varepsilon$ , причем  $\varepsilon$  достаточно мало. Обозначим для краткости через  $IE_1(\mathbb{R})$  множество всех функций из  $IE(\mathbb{R})$ , которые в каждой точке разрыва непрерывны либо слева, либо справа.

Для любой монотонной функции  $f(x)$  обозначим через  $Vf(x)$  функцию, непрерывную слева и совпадающую с  $f(x)$  во всех ее точках непрерывности. Нетрудно видеть, что отображение  $V : f \mapsto Vf$  сохраняет  $IE(\mathbb{R})$  и является аффинным. Будем называть две функции  $f_1, f_2$  эквивалентными, если



$Vf_1 = Vf_2$ . Мы покажем, что крайние точки множества  $IE(\mathbb{R})$  — это те и только те функции из  $IE_1(\mathbb{R})$ , которые эквивалентны идемпотентным.

**Лемма 1.** Функция  $f(x) \in IE_1(\mathbb{R})$  является крайней точкой множества  $IE(\mathbb{R})$  тогда и только тогда, когда таковой является  $Vf(x)$ .

**Доказательство.** Пусть  $f$  не является крайней, тогда найдутся функции  $f_1 \neq f_2$  из  $IE(\mathbb{R})$  такие, что  $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ . Так как оператор  $V$  аффинный, то  $Vf = \frac{1}{2}(Vf_1 + Vf_2)$ . Если  $Vf_1 \neq Vf_2$ , то  $Vf$  не является крайней, что и требуется.

Предположим, что  $Vf_1 = Vf_2$ , тогда обе функции  $f_i$  совпадают с  $f$  в общих точках непрерывности (а также в точках непрерывности слева). Пусть  $x_0$  — произвольная точка. Так как сколь угодно близко слева от нее находятся общие точки непрерывности (множество точек разрыва монотонной функции счетно), то  $f_i(x_0) \geq \lim_{x \rightarrow x_0-} f_i(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$ . Так как  $f(x_0) = \frac{1}{2}(f_1(x_0) + f_2(x_0))$ , то  $f_i(x_0) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f_i(x)$ . Мы доказали, что функции  $f_i$  непрерывны слева —  $f_i = Vf_i$ ,  $f_1 = f_2$  — противоречие.

Обратно, пусть функция  $Vf(x)$  не крайняя, тогда  $Vf = \frac{1}{2}(g_1 + g_2)$ ,  $g_1 \neq g_2$ . Проведенное рассуждение показывает, что функции  $g_i$  не могут совпадать с  $f$  во всех точках непрерывности. Следовательно, изменив их произвольным образом на множестве точек разрыва, мы получим несовпадающие функции. Но если положить их в этих точках равными  $f(x)$ , получим равенство  $f = \frac{1}{2}(g_1 + g_2)$ , показывающее, что  $f$  — не крайняя точка.  $\square$

Доказанный результат позволяет ограничить наши рассмотрения функциями из  $IE(\mathbb{R})$ , являющимися непрерывными слева. Обозначим множество всех таких функций через  $LIE(\mathbb{R})$ .

Напомним, что подмножество  $M$  выпуклого множества  $N$  называется его *гранью*, если из условий  $x \in M$ ,  $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$ ,  $y, z \in N$ ,  $\alpha \in (0; 1)$ , следует, что  $y, z \in M$ .

**Лемма 2.**  $LIE(\mathbb{R})$  является а) выпуклой гранью множества  $IE(\mathbb{R})$ ; б) подполугруппой в  $IE(\mathbb{R})$ .

**Доказательство.** а) пусть  $f(x)$  — непрерывная слева функция, а  $y$  и  $z$  из  $IE(\mathbb{R})$  таковы, что  $f = \alpha y + (1 - \alpha)z$ , где  $\alpha \in (0; 1)$ . Докажем, что и  $y, z \in LIE(\mathbb{R})$ . Допустим противное: хотя бы одно из неравенств  $\lim_{x \rightarrow x_0-} y(x) \leq y(x_0)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0-} z(x) \leq z(x_0)$  является строгим. Домножив первое из неравенств на  $\alpha$ , второе на  $(1 - \alpha)$  и сложив результаты, мы получим

$$\alpha \lim_{x \rightarrow x_0-} y(x) + (1 - \alpha) \lim_{x \rightarrow x_0-} z(x) < \alpha y(x_0) + (1 - \alpha)z(x_0),$$

а это значит, что  $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) \neq f(x_0)$ , что противоречит непрерывности слева функции  $f$ . Аналогично доказывается выпуклость множества  $LIE(\mathbb{R})$ .

б) достаточно показать, что композиция двух возрастающих непрерывных слева отображений также непрерывна слева. Пусть  $f, \varphi$  из  $LIE(\mathbb{R})$ . Фиксируя  $x_0 \in \mathbb{R}$  и  $\varepsilon > 0$ , положим  $y_0 = f(x_0)$  и для него найдем такое  $\sigma > 0$ , что неравенство  $y_0 - \sigma < y < y_0$  влечет  $\varphi(y_0) - \varepsilon < \varphi(y) < \varphi(y_0)$ . С другой стороны, ввиду непрерывности слева функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что неравенство  $x_0 - \delta < x < x_0$  влечет неравенство  $y_0 - \sigma < f(x) < y_0$ . Отсюда следует, что для таких значений  $x$  выполнено неравенство  $\varphi(f(x_0)) - \varepsilon < \varphi(f(x)) < \varphi(f(x_0)) < \varepsilon$ .  $\square$

Известно, что грань грани — грань. В частности, крайние точки (= одноточечные грани) множества  $LIE(\mathbb{R})$  являются крайними точками и для  $IE(\mathbb{R})$ .

Приведем конструкцию идемпотентного отображения из  $LIE(\mathbb{R})$ . Пусть  $K$  — замкнутое подмножество в  $\mathbb{R}$ . Определим функцию  $f_K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , полагая  $f_K(x) = \inf\{y \in K : x \leq y\}$ .

**Теорема 2.** Отображение  $K \mapsto f_K$  устанавливает биекцию между множеством идемпотентных элементов полугруппы  $LIE(\mathbb{R})$  и множеством всех неограниченных сверху замкнутых подмножеств прямой.

**Доказательство.** Так как множество  $K$  предполагается неограниченным, отображение  $f_K$  определено корректно. Из замкнутости  $K$  следует, что  $f_K(x) \in K$  для любого  $x$ . Очевидно, что  $f_K(x) = x$ , если и только если  $x \in K$ . Отсюда следует, что отображение  $f_K$  идемпотентно. Проверим, что оно непрерывно слева в произвольной точке  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Если  $x_0 \notin K$ , тогда ввиду замкнутости  $K$  найдется интервал, содержащий  $x_0$ , для всех точек  $x$  которого  $\{y \in K : y \geq x\} = \{y \in K : y \geq x_0\}$  и, значит,  $f(x) = f(x_0)$ , т.е.  $f$  постоянна на некотором интервале, содержащем  $x_0$ . Пусть  $x_0 \in K$ ,



тогда  $f(x_0) = x_0$ ,  $f(x) \geq x = x_0 - (x_0 - x) = f(x_0) - (x_0 - x)$  при  $x < x_0$ , и потому  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0^-} (f(x_0) - (x_0 - x)) = f(x_0)$ . Обратное неравенство очевидно.

Так как  $K$  является множеством неподвижных точек для  $f_K$ , то отображение  $K \rightarrow f_K$  инъективно. Докажем его сюръективность.

Пусть  $f \in LIE(\mathbb{R})$  — идемпотентное отображение; обозначим через  $K$  множество его неподвижных точек. Так как  $f(x) \geq x$  для любого  $x$ , то множество  $K$  неограничено сверху. Покажем, что оно замкнуто. Пусть  $x_n \rightarrow x$ ,  $x_n \in K$ . Если среди  $x_n$  есть бесконечно много чисел, больших  $x$ , то можно считать (заменяя последовательность подпоследовательностью), что  $x < x_n$  для всех  $n$ . В этом случае неравенство  $x \leq f(x) \leq f(x_n) = x_n$  влечет  $f(x) = x$ , т. е.  $x \in K$ . Если же  $x_n < x$  для всех, кроме конечного числа номеров, то по непрерывности слева получим, что  $f(x) = \lim f(x_n) = \lim x_n = x$ , и снова  $x \in K$ . Замкнутость доказана.

Остается показать, что  $f = f_K$ . Для любого  $x$  точка  $f(x)$  принадлежит множеству  $M_x = \{y \in K : x \leq y\}$ . Если в этом множестве есть элемент  $y < f(x)$ , то неравенства  $x < y < f(x)$  дают  $f(x) \leq f(y) = y < f(x)$  — противоречие. Следовательно,  $f(x)$  — наименьший элемент множества  $M_x$ , т. е.  $f(x) = \inf\{y \in K : x \leq y\} = f_K(x)$ .  $\square$

Пусть  $G$  — некоторое семейство функций на некотором множестве  $A$  и пусть  $A_0$  — выделенное подмножество в  $A$  (например, граница, если ситуация топологическая). Функция  $f \in G$  называется  $A_0$ -крайней, если из того что  $f = \alpha f_1 + (1 - \alpha)f_2$ , где  $\alpha \in [0; 1]$ , а функции  $f_i \in G$  совпадают с  $f$  на  $A_0$ , следует, что  $f_1 = f_2 = f$ .

**Лемма 3.** Пусть  $G$  — множество всех неубывающих непрерывных слева функций на интервале  $A = [a, b]$ . Обозначим через  $A_0$  границу интервала, т. е. двухточечное множество  $\{a, b\}$ .

Функция  $f(x)$  является  $A_0$ -крайней в  $G$  тогда и только тогда, когда она принимает не более двух значений.

**Доказательство.** Если  $f(x)$  постоянна на  $[a, b]$ , то она является  $A_0$ -крайней. В самом деле, пусть  $f = \alpha f_1 + (1 - \alpha)f_2$ , тогда у функции  $f_1(x)$  на концах значения совпадают с  $f(a) = f(b)$ , а она монотонна — значит она постоянна и совпадает с  $f(x)$ . Аналогично,  $f_2(x)$  также совпадает с  $f(x)$ .

Пусть  $f(x)$  принимает два значения  $p, q$ :  $f(a) = p < q = f(b)$ , тогда существует  $x_0 \in [a, b]$  такая, что  $f(x) = f(a)$  при  $x \in [a, x_0]$ ,  $f(x) = f(b)$  при  $x \in (x_0, b]$ .

Так как на отрезке  $[a, x_0]$  функция  $f_1(x)$  не убывает, то функция  $f_2(x) = 2f(x) - f_1(x) = 2f(a) - f_1(x)$  не возрастает. Но она и не убывает — значит постоянна. Поскольку  $f_2(a) = f(a)$ , заключаем, что  $f_2(x)$  совпадает с  $f(x)$  на  $[a, x_0]$ . То же верно для  $f_1(x)$ . Аналогично для полуинтервала  $(x_0, b]$ .

Мы доказали, что если множество значений функции содержит не более двух элементов, то она является  $A_0$ -крайней. Докажем обратное.

Зафиксируем числа  $p < q$  и обозначим через  $G_{p,q}$  множество тех функций из  $G$ , для которых  $f(a) = p$ ,  $f(b) = q$ . Разумеется, это выпуклое подмножество в  $G$ .

Для функции  $f \in G_{p,q}$  определим меру  $\mu$  на отрезке  $[a, b]$ , ставя каждому полуинтервалу  $[u, v)$  в соответствие  $\mu([u, v)) = f(v) - f(u)$  и продолжая стандартным образом на все борелевские множества. Функция  $f$  однозначно определяется мерой  $\mu$ , поскольку  $f(x) = p + \mu([a, x))$ . Тем самым мы получаем аффинную биекцию множества  $G_{p,q}$  на множество  $\mathcal{M}$  всех счетно-аддитивных мер на отрезке  $[a, b]$  таких, что  $\mu([a, b]) = q - p$ . Разумеется, крайние точки переходят в крайние точки. Но крайними точками множества  $\mathcal{M}$  являются меры с одноточечным носителем, поскольку оно аффинно изоморфно множеству всех вероятностных мер.

Если носитель меры  $\mu$  равен  $\{x_0\}$ , то  $\mu([a, x)) = 0$  при  $x \leq x_0$ ,  $\mu([a, x)) = q - p$  при  $x > x_0$ . Значит, соответствующая функция  $f(x) = p + \mu([a, x))$  принимает два значения:  $p$  и  $q$ .

Мы доказали, что для любых  $p, q$  крайними точками множества  $G_{p,q}$  являются функции с двухэлементными множествами значений. Пусть теперь  $f$  — произвольная  $A_0$ -крайняя точка множества  $G$ . Положим  $p = f(a)$ ,  $q = f(b)$ , тогда  $f$  по определению является крайней точкой множества  $G_{p,q}$ . Следовательно, множество значений функции  $f$  содержит не более двух элементов.  $\square$

Теперь мы можем доказать, что крайние точки множества  $LIE(\mathbb{R})$  — это, в точности, ее идемпотентные элементы.



**Теорема 3.** *Функция  $f \in LIE(\mathbb{R})$  является крайней точкой выпуклого множества  $LIE(\mathbb{R})$  тогда и только тогда, когда  $f(f(x)) = f(x)$ .*

**Доказательство.** Так как  $LIE(\mathbb{R}) \subset IE(\mathbb{R})$ , то к  $f(x) \in LIE(\mathbb{R})$  применима теорема 1: если  $f(x)$  — идемпотентна, то она является крайней в  $IE(\mathbb{R})$ , а потому и в  $LIE(\mathbb{R})$ .

Пусть теперь  $f(x)$  не идемпотентна, докажем, что она не является крайней точкой. По условию (неидемпотентности) найдутся такие  $u, v$ , что  $f(u) = v$  и  $v < f(v)$ . Рассмотрим два случая.

1. Если на отрезке  $[u, v]$  функция принимает более двух значений, тогда, согласно лемме 3, найдутся отличные от  $f$  непрерывные слева неубывающие функции  $f_i(x)$  на этом отрезке такие, что  $f(x) = \frac{1}{2}(f_1(x) + f_2(x))$ ,  $f_i(u) = f(u)$ ,  $f_i(v) = f(v)$ . Продолжим их на все  $\mathbb{R}$ , считая, что вне  $[u, v]$  они совпадают с  $f$ .

Проверим выполнение условия  $f_i(t) \geq t$ . Для тех значений  $t$ , которые лежат вне отрезка  $[u, v]$ , условие выполнено просто потому, что  $f_i(t) = f(t)$ . При  $t \in [u, v]$  из неубывания  $f_i$  следует, что  $f_i(t) \geq f_i(u) = v \geq t$ . Таким образом,  $f_i \in LIE(\mathbb{R})$ , и так как  $f$  равна их полусумме на  $\mathbb{R}$ , то  $f$  не является крайней.

2. Предположим, что  $f(x)$  принимает только два значения на  $[u, v]$ . Это значит, что  $f(x) = v$  для всех  $x \in [u; x_0]$  и  $f(x) = f(v)$  для всех  $x \in (x_0; v]$ , где  $x_0$  — некоторая точка интервала  $(u, v)$ .

Если  $f(x) = v$  для всех  $x < u$ , то определим функции  $f_i(x)$ , полагая  $f_1(x) = v - \varepsilon$ ,  $f_2(x) = v + \varepsilon$  при  $x \leq x_0$  и считая, что  $f_i(x) = f(x)$  при  $x > x_0$ . Ясно, что  $f(x) = \frac{1}{2}(f_1(x) + f_2(x))$  и функции  $f_i$  непрерывны слева. Они являются неубывающими при  $\varepsilon < f(v) - v$  и удовлетворяют условию  $f_i(x) \geq x$  при  $\varepsilon < v - x_0$ .

Если же  $f(x)$  принимает значения, меньшие  $v$ , то  $\inf\{x : f(x) = v\} = u_1 > -\infty$ . Рассмотрим два случая:

1)  $f(u_1) < v$ . В этом случае строим  $f_i(x)$  аналогично предыдущему: на полуинтервале  $(u_1, x_0]$  полагаем  $f_1(x) = v - \varepsilon$ ,  $f_2(x) = v + \varepsilon$ , а в остальных точках  $f_i(x) = f(x)$ . Они являются неубывающими при  $\varepsilon < \min\{v - f(u_1), f(v) - v\}$ , и удовлетворяют условию  $f_i(x) \geq x$  при  $\varepsilon \leq v - x_0$ .

2)  $f(u_1) = v$ . Для любого  $\varepsilon > 0$  найдется в силу непрерывности  $f(x)$  слева такая точка  $u_2$ , что  $f(u_2) > v - \varepsilon$ . Взяв  $\varepsilon < v - x_0$ , получим  $f(u_2) > x_0$ . Следовательно,  $f(f(u_2)) \geq f(v) > f(u_2)$ . Заменяем точки  $u, v$  точками  $u_2, f(u_2)$ . На отрезке  $(u_2, f(u_2))$  функция принимает больше двух значений (на самом деле, бесконечно много, так как этот участок содержит интервал  $(u_2, u_1)$ , на котором  $f(x) < v$  и  $\lim_{x \rightarrow u_1} f(x) = v$ ). Применяя уже доказанное, получим, что  $f(x)$  не является крайней точкой.  $\square$

Теперь мы можем получить полное описание множества крайних точек  $IE(\mathbb{R})$ .

**Теорема 4.** *Функция  $f \in IE(\mathbb{R})$  является крайней точкой выпуклого множества  $IE(\mathbb{R})$  тогда и только тогда, когда она не имеет двусторонних разрывов и эквивалентна идемпотентному элементу из  $IE(\mathbb{R})$ .*

**Доказательство.** Пусть функция  $f \in IE(\mathbb{R})$  является крайней точкой выпуклого множества  $IE(\mathbb{R})$ . Тогда, как отмечалось ранее, она в каждой точке непрерывна хотя бы с одной стороны. Согласно лемме 1 функция  $Vf(x)$  также является крайней. Но  $Vf$  из  $LIE(\mathbb{R})$  и, следовательно, является крайней точкой этого множества, поэтому она идемпотентна в силу теоремы 3. Таким образом,  $f$  эквивалентна идемпотентному элементу множества  $IE(\mathbb{R})$ .

Обратно, пусть функция  $f$  не имеет двусторонних разрывов и эквивалентна идемпотентному элементу  $g$  из  $IE(\mathbb{R})$ . По теореме 1  $g$  — крайняя точка множества  $IE(\mathbb{R})$ . В частности,  $g$  не имеет двусторонних разрывов, так что по лемме 1  $Vg$  — крайняя точка множества  $IE(\mathbb{R})$ . Далее, из определения эквивалентности  $Vf = Vg$  — крайняя точка множества  $IE(\mathbb{R})$ . Снова, применяя лемму 1, заключаем, что  $f$  — крайняя точка множества  $IE(\mathbb{R})$ .  $\square$

Таким образом, чтобы построить произвольный экстремальный элемент  $f(x)$  множества  $IE(\mathbb{R})$ , нужно выбрать замкнутое неограниченное справа множество  $K \subset \mathbb{R}$  и рассмотреть функции  $f_K(x) = \inf\{y \in K : x \leq y\}$ ,  $g_K(x) = \inf\{y \in K : x < y\}$  (они отличаются лишь в счетном множестве  $K_r$  «изолированных справа» точек множества  $K$ ). Функция  $f$  должна совпадать с каждой из функций  $f_K$  и  $g_K$  на  $\mathbb{R} \setminus K_r$ , а в точках  $x \in K_r$  ее значения произвольным образом выбираются из пары  $\{f_K(x), g_K(x)\}$ .

Рассмотрим теперь выпуклое множество  $CIE(\mathbb{R})$  всех непрерывных функций из  $IE(\mathbb{R})$ . Так как множество неподвижных точек отображения  $f_K$  совпадает с  $K$ , то  $K$  является и множеством значе-



ний функции  $f_K$ . Следовательно,  $f_K$  может быть непрерывным лишь в том случае, если  $K$  связно, т. е. представляет собой замкнутый луч  $[c, \infty)$ , где  $c \in \mathbb{R}$  (либо всю прямую — тогда отображение тождественно). Другими словами, непрерывные идемпотентные элементы полугруппы  $CIE(\mathbb{R})$  — это функции  $f_c$ , определенные следующим образом:

$$f_c(x) = c, \quad \text{если } x \leq c, \quad \text{и} \quad f_c(x) = x, \quad \text{если } x \geq c. \quad (1)$$

**Следствие.** Пусть  $CIE(a, b)$  множество неубывающих непрерывных функций  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , удовлетворяющих условию  $f(x) \geq x$  при всех  $x \in [a, b]$ . Его единственными крайними точками являются сужения на  $[a, b]$  функций  $f_c(x) = x$  из (1), где  $c \in [a, b]$ .

**Доказательство.** Каждую функцию  $f \in CIE(a, b)$  продолжим на  $\mathbb{R}$ , полагая  $\tilde{f}(x) = f(a)$  при  $x < a$ ,  $\tilde{f}(x) = f(b)$  при  $b < x \leq f(b)$ ,  $\tilde{f}(x) = x$  при  $x > f(b)$ . Тогда  $f \mapsto \tilde{f}$  является аффинным и инъективным отображением  $CIE(a, b)$  в  $LIE(\mathbb{R})$ .

Докажем, что если  $f$  — крайняя точка в  $CIE(a, b)$ , то  $\tilde{f}$  — крайняя точка в  $LIE(\mathbb{R})$ . Действительно, пусть  $\tilde{f} = \frac{1}{2}(g_1 + g_2)$ , где  $g_i \in LIE(\mathbb{R})$ . Обозначая через  $f_i$  сужение функции  $g_i$  на интервал  $[a, b]$ , получим, что  $f(x) = \frac{1}{2}(f_1(x) + f_2(x))$ .

Ясно, что функции  $f_i(x)$  являются неубывающими, и  $f_i(x) \geq x$ . Докажем, что они непрерывны. В самом деле, если  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_1(x) = m < M = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f_1(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \frac{1}{2}(m + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f_2(x)) < \frac{1}{2}(M + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ . Это противоречит непрерывности  $f(x)$ . Таким образом, функции  $f_i(x)$  принадлежат  $CIE(a, b)$ . Так как  $f(x)$  — крайняя точка в  $CIE(a, b)$ , то  $f_1 = f_2 = f$ .

Мы доказали, что  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$  совпадают с  $\tilde{f}(x)$  на  $[a, b]$ . Докажем теперь совпадение в остальных точках прямой.

При  $x < a$  имеем  $g_i(x) \leq g_i(a)$  и в то же время  $g_1(x) + g_2(x) = 2\tilde{f}(x) = 2f(a)$ , откуда следует, что  $g_i(x) = f(a) = \tilde{f}(x)$ .

При  $b < x \leq f(b)$  из монотонности следует, что  $g_i(x) \geq f(b)$  и так как  $g_1(x) + g_2(x) = 2\tilde{f}(x) = 2f(b)$ , то  $g_i(x) = f(b) = \tilde{f}(x)$ .

При  $x > f(b)$  мы имеем по условию, что  $g_i(x) \geq x$ , и в то же время  $g_1(x) + g_2(x) = 2\tilde{f}(x) = 2x$ , поэтому  $g_i(x) = x = \tilde{f}(x)$ .

Итак,  $g_1(x) = g_2(x) = \tilde{f}(x)$ , т. е.  $\tilde{f}(x)$  — крайняя точка в  $LIE(\mathbb{R})$ . По теореме 4,  $\tilde{f}(x)$  — идемпотентная функция. Но  $\tilde{f}(x)$  непрерывна, поэтому  $\tilde{f}(x) = f_c$  при некотором  $c \in \mathbb{R}$ .  $\square$

## 2. УСТОЙЧИВОСТЬ

Определение устойчивости по Хайерсу – Уламу дано во введении. Мы рассматриваем вещественную прямую  $\mathbb{R}$  как упорядоченное метрическое пространство со стандартным порядком и обычной метрикой  $\rho(x, y) = |x - y|$ .

**Теорема 5.** Класс всех замыканий на прямой устойчив по Хайерсу – Уламу в классе непрерывных слева отображений из  $IE(\mathbb{R})$ .

**Доказательство.** Пусть  $\varepsilon > 0$  и пусть непрерывное слева отображение  $f \in IE(\mathbb{R})$  удовлетворяет условию

$$|f(f(x)) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Обозначим через  $E$  множество неподвижных точек отображения  $f: E = \{x : f(x) = x\}$ . Докажем, что  $E$  замкнуто. В самом деле, пусть  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \in E$  для всех  $n$ . Так как  $f$  непрерывно слева, то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что  $f(x_n) > f(x_0) - \varepsilon$  при  $x_0 - \delta < x_n < x_0$ . Из монотонности то же справедливо при  $x_n > x_0$ . Таким образом,  $x_n = f(x_n) > f(x_0) - \varepsilon$ , когда  $x_0 - \delta < x_n$ , т. е. для всех достаточно больших номеров. Переходя к пределу, получим  $x_0 \geq f(x_0) - \varepsilon$ , и значит  $x_0 \geq f(x_0)$ , ввиду произвольности  $\varepsilon$ .

Дополнение  $U$  к  $E$  открыто и потому является объединением непересекающихся интервалов (интервалов смежности):  $U = \cup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$ . Покажем, что на произвольном интервале смежности  $I_i = (a_i, b_i)$  можно определить монотонно возрастающее отображение  $\varphi_i : I_i \rightarrow I_i$ , обладающее свойствами: (а)  $\varphi_i(x) \geq x$  для любого  $x \in I_i$ ; (б)  $\varphi_i(\varphi_i(x)) = \varphi_i(x)$ ; (с)  $\varphi_i(a_i) = a_i$ ,  $\varphi_i(b_i) = b_i$ ; (д)  $|\varphi_i(x) - f(x)| \leq \varepsilon$  для любого  $x \in I_i$ .



Положим  $c = \inf\{f(x) : a_i \leq x\}$  и допустим вначале, что  $c > a_i$ . Возьмём  $d = c$ , покажем, что

$$f(d) - d \leq \varepsilon. \quad (2)$$

В самом деле, выбрав  $x \in (a_i, c)$ , имеем:  $d < f(x)$ ,  $f(d) < f(f(x)) < f(x) + \varepsilon$ . Взяв нижнюю грань по  $x$ , получим  $f(d) \leq d + \varepsilon$ . Из определения следует также, что

$$d < f(x) + \varepsilon \quad \text{для любого } x > a_i. \quad (3)$$

Если же  $c = a_i$ , то в качестве  $d$  можно взять любую точку из  $I_i$  такую, что  $|f(d) - a_i| < \varepsilon$ , тогда условия (2) и (3) будут также выполнены.

Определим возрастающую последовательность  $d_n$ , полагая  $d_0 = a$ ,  $d_1 = d$ ,  $d_{n+1} = f(d_n)$ . Пусть  $d' = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ , тогда по условию непрерывности слева  $f(d') = \lim f(d_n) = \lim d_{n+1} = d'$ . Так как между  $a_i$  и  $b_i$  нет неподвижных точек отображения  $f$ , то  $d' = b_i$ .

Отображение  $\varphi_i$  мы зададим условиями:

$$\varphi_i(a_i) = a_i, \quad \varphi_i(b_i) = b_i$$

и

$$\varphi_i(x) = d_{n+1} \quad \text{при } x \in (d_n, d_{n+1}] \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Тогда монотонность и выполнение условий (a),(b),(c) очевидны.

Проверим (d). При  $x \in (a_i, d)$  имеем  $f(x) \leq f(d) \leq d + \varepsilon$ ; с другой стороны,  $\varphi_i(x) = d \leq f(x) + \varepsilon$ , в силу (3), т. е.  $|f(x) - \varphi_i(x)| \leq \varepsilon$ .

Пусть теперь  $x \in (d_n, d_{n+1}]$ ,  $n > 1$ , тогда

$$f(x) \geq f(d_n) = d_{n+1} = \varphi_i(x)$$

и

$$f(x) \leq f(d_{n+1}) = f(f(d_n)) \leq f(d_n) + \varepsilon = d_{n+1} + \varepsilon = \varphi_i(x) + \varepsilon.$$

Таким образом, и в этом случае  $|f(x) - \varphi_i(x)| \leq \varepsilon$ . Условие (d) доказано.

Из определения сразу следует, что  $\varphi_i$  непрерывно слева во всех точках интервала  $I_i$ , отличных от его левого конца  $a_i$ .

Построенные на каждом интервале отображения  $\varphi_i$  мы объединим в одно отображение  $\varphi$ , полагая  $\varphi(x) = x$  при  $x \in E$  и  $\varphi(x) = \varphi_i(x)$  при  $x \in I_i$ . То, что  $\varphi$  является замыканием, непосредственно вытекает из нашей конструкции. Неравенство  $|\varphi(x) - f(x)| \leq \varepsilon$  доказано при  $x \notin E$  и очевидно при  $x \in E$ .

Проверим непрерывность слева отображения  $\varphi$ . Пусть  $x_0$  – произвольная точка. Если  $x_0 \notin E$ , то  $x_0$  – внутренняя точка одного из интервалов смежности  $I_i$  и непрерывность слева следует из непрерывности слева  $\varphi_i$ . Если  $x_0 \in E$ , то либо  $x_0$  является правым концом одного из интервалов смежности  $I_i$ , либо существует последовательность точек  $x_n < x_0$ , сходящаяся к  $x_0$ . В первом случае непрерывность слева следует из непрерывности слева  $\varphi_i$  в правом конце. Во втором случае – сразу по определению –  $\varphi(x_n) = x_n \rightarrow x = \varphi(x)$ . Таким образом, скачок слева у монотонной функции  $\varphi$  отсутствует, т. е. она непрерывна слева.  $\square$

### Библиографический список

1. Kulisch U. An axiomatic Approach to Rounded Computations // Numer. Math. 1971. № 18. P. 1–17. // Исследования по математическому анализу и методике преподавания математики : сб. науч. тр. Вологда, 2000. С. 23–36.
2. Kaminsky T. E., Kreinovich V. Natural requirements for natural roundings lead to a hardware-independent characterization of standard rounding procedures // Notes on intuitionistic fuzzy sets. 1998. Vol. II, № 3. P. 57–64.
3. Каминский Т. Э. К теории интервальных округлений
4. Биркгоф Г. Теория решеток. М., 1984. 567 с.
5. Улам С. Нерешенные математические задачи. М., 1964. 168 с.



УДК 517.5

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ АКЦЕССОРНЫХ ПАРАМЕТРОВ В СМЕШАННОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ПОЛИГОНАЛЬНОЙ ИЗВЕСТНОЙ ЧАСТЬЮ ГРАНИЦЫ

С. Р. Насыров, Л. Ю. Низамиева\*

Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
кафедра математического анализа

\*Казанский национальный исследовательский технический  
университет,

кафедра вычислительной математики

E-mail: snasyrov@ksu.ru, NizamievaLU@yandex.ru

Рассматривается смешанная обратная краевая задача по параметру  $x$  в случае, когда известная часть границы  $L_z^1$  является полигоном. Интегральное представление решения зависит от вещественных параметров, которые являются прообразами вершин при конформном отображении. По аналогии с интегралами Кристоффеля – Шварца эти параметры названы акцессорными. Предлагается новый метод определения акцессорных параметров, основанный на рассмотрении однопараметрического семейства решений задачи, соответствующих случаю, когда известная часть границы является объединением двух лучей и удлиняющегося разреза, конец которого движется вдоль первоначальной ломаной  $L_z^1$ .

**Ключевые слова:** краевые задачи со свободной границей, краевая задача Гильберта, акцессорные параметры.

## ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $D_z$  – жорданова область на плоскости, ограниченная кривой  $L_z$ , которая состоит из двух дуг  $L_z^1$  и  $L_z^2$ , причем  $L_z^1$  известна, а  $L_z^2$  является искомой. Обозначим через  $z^* = x^* + iy^*$  и  $z^{**} = x^{**} + iy^{**}$  точки стыка дуг  $L_z^1$  и  $L_z^2$ . Смешанная обратная краевая задача по параметру  $x$  состоит в определении области  $D_z$  и аналитической в ней функции  $w = w(z)$ , которая конформно отображает  $D_z$  на жорданову область  $D_w$ , по следующим краевым условиям.

1) граница  $D_w$  состоит из двух ляпуновских дуг, пересекающихся под ненулевыми углами, причем при отображении  $w = w(z)$  дуге  $L_z^1$  соответствует дуга  $L_w^1$ , а  $L_z^2$  – дуга  $L_w^2$ .

2) дуга  $L_z^2$  является графиком непрерывной функции  $y = g(x)$ ,  $x^* \leq x \leq x^{**}$ , при этом точкам вида  $x + ig(x) \in L_z^2$  соответствуют точки  $\varphi(x) + i\psi(x) \in L_w^2$ ,  $x^* \leq x \leq x^{**}$ , где  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  – непрерывно дифференцируемые функции (рис. 1).

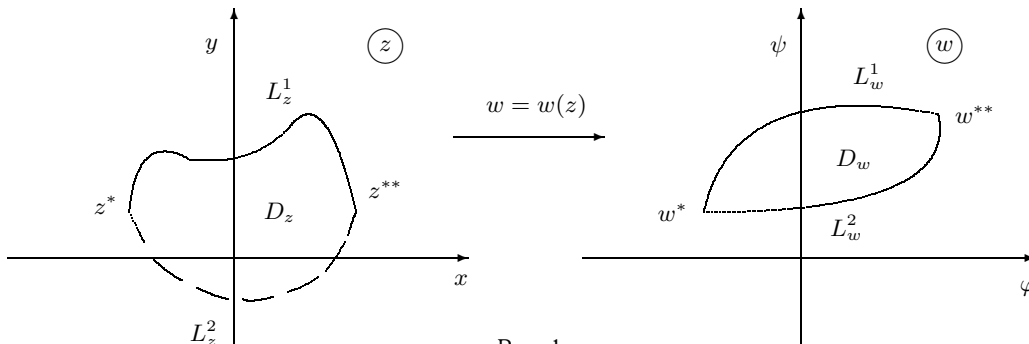
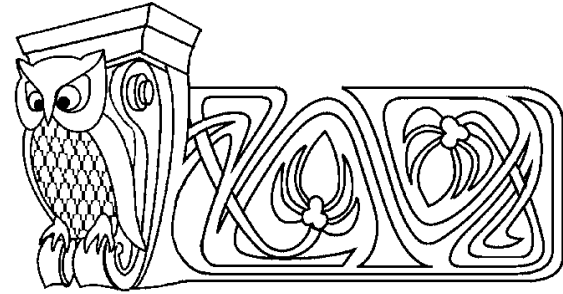


Рис. 1



## Finding of Accessory Parameters for Mixed Inverse Boundary Value Problem with Polygonal Known Part of Boundary

S.R. Nasyrov, L.Yu. Nizamieva\*

Kazan (Volga Region) Federal University,

Chair of Mathematical Analysis

\*Kazan National Research Technical University,

Chair of Computing Mathematics

E-mail: snasyrov@ksu.ru, NizamievaLU@yandex.ru

We consider a mixed inverse boundary value problem with respect to parameter  $x$  for the case when the known part of the boundary  $L_z^1$  is a polygonal line. Integral representation of solution to the problem depends on real parameters being the pre-images of the vertices of  $L_z^1$  under conformal mapping. By analogy with Schwartz – Christoffel integrals, we name them accessory parameters. It is suggested a new method of determining the accessory parameters. It is based on consideration of one-parametric family of solutions to the problem corresponding to the case when the known part of the boundary is the union of two rays and the stretching slit the endpoint of which goes along the given polygonal line  $L_z^1$ .

**Key words:** boundary value problems with free boundary, Hilbert boundary value problem, accessory parameters.





Впервые эту задачу поставил и исследовал В. Н. Монахов [1]. Основная его идея заключалась в замене кривой  $L_z^1$ , близкой ломаной с вершинами в точках  $z_1, z_2, \dots, z_n$  ( $z_1 = z^{**}, z_n = z^*$ ). В. Н. Монахов установил, что разрешимость задачи в случае, когда известная часть границы является ломаной, существенно зависит от величины углов  $\alpha_1\pi, \alpha_n\pi$ , которые образует эта ломаная с лучами, исходящими вниз из ее концов. В [1] детально исследован случай, когда величины этих углов меньше  $\pi$ .

В [2] было замечено, что с использованием результатов В. Н. Монахова можно доказать разрешимость задачи на полигональных римановых поверхностях, если  $\alpha_1, \alpha_n < 1$ . В [3] рассмотрен случай, когда  $\alpha_1 > 1$  или  $\alpha_n > 1$ , а также доказана разрешимость задачи для достаточно произвольных границ. Кроме того, в [2, 3] были исправлены некоторые неточности в исследовании задачи В. Н. Монаховым, отмеченные в [4].

Заметим, что смешанная обратная краевая задача по параметру  $x$  исследовалась в работах [5–13]. В статьях [14–16] была рассмотрена внешняя смешанная обратная краевая задача по параметру  $x$ , получены аналоги уравнения Ф. Д. Гахова и доказана его разрешимость.

Опишем кратко метод В. Н. Монахова исследования задачи. Он предложил конформно отобразить область  $D_w$  на верхнюю полуплоскость  $D_\zeta$  функцией  $\zeta = \zeta(w)$  и искать функцию  $z = z(\zeta)$ , обратную к функции  $\zeta = \zeta(w(z))$ . Поскольку по функции  $z = z(\zeta)$  область  $D_z$  и функция  $w = w(z)$  сразу определяются, то в дальнейшем для удобства будем называть функцию  $z = z(\zeta)$  решением задачи.

Функция  $z(\zeta)$  является решением нелинейной задачи Гильберта. Как уже отмечалось, В. Н. Монахов [1] предложил линеаризовать эту задачу, заменяя кривую  $L_z^1$  достаточно близкой ломаной с вершинами в точках  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , где  $z_1 = z^{**}, z_n = z^*$  (рис. 2).

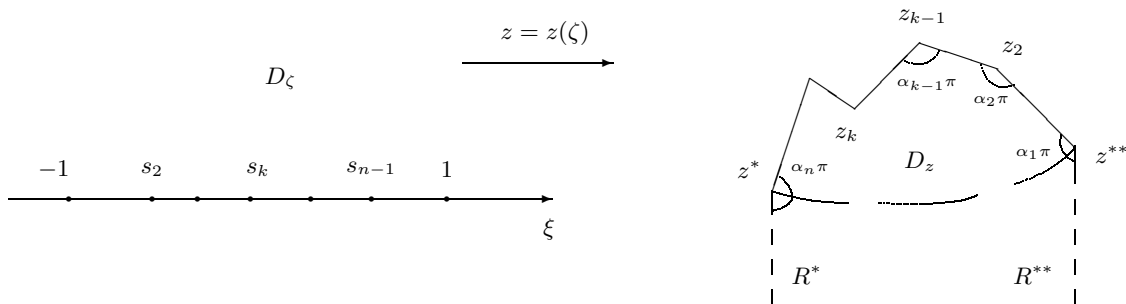


Рис. 2

В дальнейшем будем рассматривать только эту линеаризованную задачу и считать, что  $L_z^1$  — полигон. Пусть ломаной  $L_z^1$  в плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$  соответствует отрезок  $[-1, 1]$ , вершинам  $z_k$  ломаной соответствуют точки  $s_k$ , а  $L_z^2$  переходит в участок  $\{\xi \in \mathbb{R} \mid |\xi| \geq 1\}$ . Пусть уравнение прямой, на которой лежит  $j$ -е звено ломаной  $L_z^1$ , имеет вид  $a_jx + b_jy = c_j$ . Тогда для функции  $z = z(\zeta) = x(\zeta) + iy(\zeta)$  имеем следующую краевую задачу Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами:

$$a_jx(\xi) + b_jy(\xi) = c_j, \quad \xi \in (s_j, s_{j+1}), \quad 1 \leq j \leq n - 1,$$

$$x(\xi) = H(\xi), \quad |\xi| > 1.$$

Здесь функция  $H(\xi)$  однозначно определяется из краевых условий задачи, она непрерывно дифференцируема при  $|\xi| > 1$ , ее производная  $h(\xi) = H'(\xi)$  имеет в точках  $\xi = \pm 1$  интегрируемые особенности, кроме того,  $h(\xi) \sim c\xi^{-2}, \xi \rightarrow \infty$ .

Тогда для производной  $dz/d\zeta$  получаем следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} a_jx'(\xi) + b_jy'(\xi) &= 0, \quad \xi \in (s_j, s_{j+1}), \quad 1 \leq j \leq n - 1, \\ x'(\xi) &= h(\xi), \quad |\xi| > 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Отметим, что поведение производной  $dz/d\zeta$  искомого отображения в точках  $s_j$  и на бесконечности нетрудно исследовать с использованием теории граничного поведения конформных отображений и



свойств интегралов типа Коши (см. подробнее [1–3]). Будем искать решение краевой задачи в классе функций с нужным поведением в точках разрыва коэффициентов в граничных условиях.

Как показано в [2, 3], необходимым и достаточным условием разрешимости задачи является тот факт, что ломаная  $L_z^1$ , дополненная вертикальными лучами  $R^*$  и  $R^{**}$ , идущими из ее концов вниз, является границей многоугольной римановой поверхности (однолистной или двулистной, если лучи трансверсально пересекают ломаную в неконцевых точках). Будем считать, что это условие выполнено. Обозначим через  $\alpha_j\pi$  углы этой многоугольной римановой поверхности в точках  $z_j$ .

В случае, когда  $\alpha_1 < 1$ ,  $\alpha_n < 1$ , решение краевой задачи (1) в описанном выше классе решений единственно (см. [1–3]). Решая эту задачу, получаем интегральное представление для функции  $z(\zeta)$ :

$$z(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_{t_1}^{\zeta} \Omega(\xi) \Psi(\xi) d\xi, \tag{2}$$

$$\Psi(\xi) = \int_{|\omega| \geq 1} \frac{h(\omega) d\omega}{\Omega(\omega)(\omega - \xi)}, \quad \Omega(\xi) = \prod_{j=1}^n (\xi - s_j)^{\alpha_j - 1},$$

которое зависит от параметров  $s_j$ , причем  $s_1 = -1$ ,  $s_n = 1$ , а  $s_k$ ,  $2 \leq k \leq n - 1$ , — неизвестны.

Отметим, что ситуация здесь похожа на ту, которая имеет место для интегралов Кристоффеля – Шварца: при фиксации параметров  $-1 < s_2 < s_3 < \dots < s_{n-1} < 1$  произвольным образом получается решение задачи, но не для ломаной  $L_z^1$ , а для некоторой другой ломаной  $\tilde{L}_z^1$ , стороны которой параллельны сторонам  $L_z^1$ , а длины сторон, вообще говоря, другие. Назовем параметры  $s_k$ ,  $2 \leq k \leq n - 1$ , по аналогии с интегралами Кристоффеля – Шварца, аксессуарными. Различные способы нахождения аксессуарных параметров для интегрального представления (2) были рассмотрены в работах [12, 17].

В этой статье мы предлагаем новый приближенный метод нахождения аксессуарных параметров в (2) — так называемый метод движущегося разреза. Для простоты считаем, что заданная ломаная  $L_z^1$  располагается в вертикальной полосе, ограниченной прямыми, проходящими через ее концы (это условие не является очень ограничительным, результаты статьи могут быть легко распространены на общий случай). Наш метод основан на рассмотрении однопараметрических семейств решений задачи для ломаных, которые состоят из двух вертикальных лучей и удлиняющегося разреза, конец которого движется по заданной ломаной  $L_z^1$ . Подобный метод ранее был предложен в работе [18] для интегралов Кристоффеля – Шварца и идейно близок к методу П.П. Куфарева (см., напр., [19]) нахождения аксессуарных параметров в таких интегралах. Отметим, что в отличие от метода П.П. Куфарева, в [18] используется аппарат краевых задач Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами и вариации решений таких задач, эта же идея применяется и в настоящей статье.

### 1. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АКЦЕССОРНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрим семейство решений смешанной обратной краевой задачи по параметру  $x$  в случае, когда известная часть границы состоит из двух лучей:  $L^* = \{x = x^*, y \geq y^*\}$ ,  $L^{**} = \{x = x^{**}, y \geq y^{**}\}$  и удлиняющегося разреза, конец которого пробегает ломаную  $L_z^1$  от точки  $z_1$  до точки  $z_n$ . В случае, когда конец разреза располагается на  $(k - 1)$ -м звене, получаем разрез вдоль ломаной с вершинами в точках  $z_1 = x^{**} + iy^{**}$ ,  $z_2 \dots, z_{k-1}$  и точке  $\tilde{z}_k$ , которая является подвижным концом ломаной (рис. 3). Обозначим через  $\alpha_j\pi$ ,  $2 \leq j \leq k - 1$ , углы ломаной  $L_z^1$  в точках  $z_j$ ; пусть  $\alpha_1\pi$  — угол между звеном  $z_1z_2$  и лучом  $R^{**}$ .

Интегральное представление решения в этом случае имеет вид

$$z = z(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_{t_1}^{\zeta} \Pi(\xi, \vec{t}) \Phi(\xi, \vec{t}) d\xi, \tag{3}$$

где

$$\Phi(\xi, \vec{t}) = \int_{|\omega| \geq 1} \frac{h(\omega) d\omega}{\Pi(\omega, \vec{t})(\omega - \xi)},$$



$$\Pi(\xi, \vec{t}) = (\xi - t_1)^{\alpha_1 - 1} (\xi - t_k) (\xi - t_{2k-1})^{-\alpha_1} (\xi - t_{2k})^{-1} \prod_{j=2}^{k-1} \left( \frac{\xi - t_j}{\xi - t_{2k-j}} \right)^{\alpha_j - 1},$$

$-1 = t_1 < t_2 < \dots < t_{2k} < t_{2k+1} = 1$ , вектор  $\vec{t} = (t_2, \dots, t_{2k})$ . Точки  $t_j$ ,  $2 \leq j \leq 2k$ , назовем акцессорными параметрами. Отметим, что точка  $t_k$  соответствует концу разреза, точкам  $t_j$  и  $t_{2k-j}$  соответствуют простые концы области  $D_z$  с носителем в точке  $z_j$ ,  $1 \leq j \leq k-1$ , а точке  $t_{2k}$  — простой конец с носителем в  $\infty$ .

**Теорема.** Акцессорные параметры удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dt_j}{d\tau} &= \frac{1 - t_j^2}{(t_j - t_k)\Phi(t_j, \vec{t})}, \quad 2 \leq j \leq 2k, \quad j \neq k, \\ \frac{dt_k}{d\tau} &= \frac{1 - t_k^2}{\Phi(t_k, \vec{t})} \left\{ \frac{\alpha_1}{t_k + 1} - \frac{\alpha_1}{t_k - t_{2k-1}} + \frac{1}{t_k - 1} + \sum_{j=2}^{k-1} \left( \frac{\alpha_j - 1}{t_k - t_j} - \frac{\alpha_j - 1}{t_k - t_{2k-j}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

При этом возрастание параметра  $\tau$  соответствует увеличению длины разреза.

**Доказательство.** Рассмотрим вариацию  $\delta z$  функции  $z$  и ее производной в случае, когда варьируется длина звена  $z_{k-1}\tilde{z}_k$  (рис. 3).

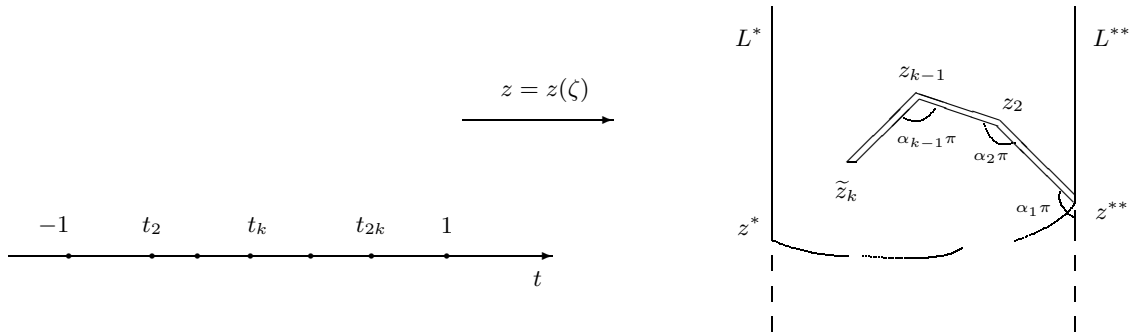


Рис. 3

В силу (3) имеем

$$\frac{dz(\zeta)}{d\zeta} = \frac{1}{\pi i} \Pi(\zeta, \vec{t}) \Phi(\zeta, \vec{t}).$$

Используя формулу логарифмического дифференцирования, получаем

$$\delta \frac{dz(\zeta)}{d\zeta} = \frac{1}{\pi i} \Pi(\zeta, \vec{t}) \left[ \Phi(\zeta, \vec{t}) \delta \ln \Pi(\zeta, \vec{t}) - \int_{|\omega| \geq 1} \frac{h(\omega) \delta \ln \Pi(\omega, \vec{t}) d\omega}{\Pi(\omega, \vec{t})(\omega - \zeta)} \right], \quad (5)$$

где

$$\delta \ln \Pi(\zeta, \vec{t}) = -\frac{\delta t_k}{\zeta - t_k} + \frac{\alpha_1 \delta t_{2k-1}}{\zeta - t_{2k-1}} + \frac{\delta t_{2k}}{\zeta - t_{2k}} - \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\alpha_j - 1}{\zeta - t_j} \delta t_j + \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\alpha_j - 1}{\zeta - t_{2k-j}} \delta t_{2k-j}.$$

Исследуем поведение функции  $\delta z$  в окрестности точек  $t_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 2n$ ). Используя равенство  $\delta(dz(\zeta)/d\zeta) = d(\delta z(\zeta))/d\zeta$  и известные свойства интеграла типа Коши со степенной особенностью плотности на концах кривой, из (3) получаем, что

$$\begin{aligned} \delta z(\zeta) &= O(1), & \zeta \rightarrow t_1, & \quad \delta z(\zeta) = O(1), & \zeta \rightarrow t_k, \\ \delta z(\zeta) &= O((\zeta - t_{2k-1})^{-\alpha_1}), & \zeta \rightarrow t_{2k-1}, & \quad \delta z(\zeta) = O((\zeta - t_{2k})^{-1}), & \zeta \rightarrow t_{2k}, \end{aligned}$$

а при  $2 \leq j \leq k-1$  —

$$\begin{aligned} \delta z(\zeta) &= O(1) \quad \text{при } \alpha_j > 1, & \delta z(\zeta) &= O((\xi - t_j)^{\alpha_j - 1}) \quad \text{при } \alpha_j < 1, & \zeta \rightarrow t_j, \\ \delta z(\zeta) &= O(1), \quad \text{при } \alpha_j < 1, & \delta z(\zeta) &= O((\xi - t_{2k-j})^{1 - \alpha_j}) \quad \text{при } \alpha_j > 1, & \zeta \rightarrow t_{2k-j}. \end{aligned}$$



Пусть уравнение прямой, на которой лежит  $j$ -е звено ломаной, имеет вид  $a_j x + b_j y = c_j$ . Тогда функция  $z(\zeta)$  удовлетворяет краевым условиям:

$$\begin{aligned} a_j x(\xi) + b_j y(\xi) &= c_j, & \xi \in (t_j, t_{j+1}) \cup (t_{2k-j-1}, t_{2k-j}), \\ x(\xi) &= x^{**}, & \xi \in (t_{2k-1}, t_{2k}), \\ x(\xi) &= x^*, & \xi \in (t_{2k}, t_{2k+1}), \\ x(\xi) &= H(\xi), & |\xi| > 1. \end{aligned}$$

При варьировании длины разреза ломаная остается неизменной (за исключением величины последнего звена), поэтому  $\delta a_j = \delta b_j = \delta c_j = 0$  и вариация  $\delta z(\zeta)$  удовлетворяет краевым условиям:

$$\begin{aligned} a_j \delta x(\xi) + b_j \delta y(\xi) &= c_j, & \xi \in (t_j, t_{j+1}) \cup (t_{2k-j-1}, t_{2k-j}), \\ \delta x(\xi) &= 0, & \xi \in (t_{2k-1}, t_{2k}) \cup (t_{2k}, t_{2k+1}), \\ \delta x(\xi) &= 0, & |\xi| > 1. \end{aligned}$$

Учитывая, что функция  $\delta z(\zeta)$  ограничена на бесконечности и что  $\delta z(t_{2k+1}) = 0$ , с учетом поведения этой функции в точках  $t_j$ ,  $1 \leq j \leq 2k$ , получаем

$$\delta z(\zeta) = Ai \prod_{j=2}^{k-1} \left( \frac{\zeta - t_j}{\zeta - t_{2k-j}} \right)^{\alpha_j - 1} (\zeta + 1)^{\alpha_1} (\zeta - t_{2k-1})^{-\alpha_1} (\zeta - t_{2k})^{-1} (\zeta - 1),$$

или

$$\delta z(\zeta) = Ai \Pi(\zeta, \vec{t}) (\zeta^2 - 1) (\zeta - t_k)^{-1},$$

где  $A$  — вещественное число, не зависящее от  $\zeta$ .

Подсчитаем производную функции  $\delta z(\zeta)$ :

$$\frac{d(\delta z(\zeta))}{d\zeta} = Ai \frac{\Pi(\zeta, \vec{t}) (\zeta^2 - 1)}{\zeta - t_k} \left[ \frac{d \ln \Pi(\zeta, \vec{t})}{d\zeta} + \frac{1}{\zeta - 1} + \frac{1}{\zeta + 1} - \frac{1}{\zeta - t_k} \right], \quad (6)$$

где

$$\frac{d \ln \Pi(\zeta, \vec{t})}{d\zeta} = \frac{\alpha_1 - 1}{\zeta + 1} - \frac{\alpha_1}{\zeta - t_{2k-1}} + \frac{1}{\zeta - t_k} - \frac{1}{\zeta - t_{2k}} + \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\alpha_j - 1}{\zeta - t_j} - \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\alpha_j - 1}{\zeta - t_{2k-j}}.$$

Приравнявая  $\delta(dz(\zeta)/d\zeta)$  и  $d(\delta z(\zeta))/d\zeta$ , из (5) и (6) получаем

$$\frac{1}{\pi i} \left[ \Phi(\zeta, \vec{t}) \delta \ln \Pi(\zeta, \vec{t}) - \int_{|\omega| \geq 1} \frac{h(\omega) \delta \ln \Pi(\omega, \vec{t}) d\omega}{\Pi(\omega, \vec{t}) (\omega - \zeta)} \right] = Ai \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta - t_k} \left[ \frac{d \ln \Pi(\zeta, \vec{t})}{d\zeta} + \frac{1}{\zeta - 1} + \frac{1}{\zeta + 1} - \frac{1}{\zeta - t_k} \right].$$

Сравнивая вычеты функций, стоящих в обеих частях полученного соотношения, в точках  $t_j$ , получаем

$$\begin{aligned} \delta t_j &= \frac{A\pi(t_j^2 - 1)}{(t_j - t_k)\Phi(t_k, \vec{t})}, & 2 \leq j \leq 2k, \quad j \neq k, \\ \delta t_k &= \frac{A\pi(t_k^2 - 1)}{\Phi(t_k, \vec{t})} \left\{ \frac{\alpha_1}{t_k + 1} - \frac{\alpha_1}{t_k - t_{2k-1}} - \frac{1}{t_k - t_{2k}} + \frac{1}{t_k - 1} + \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\alpha_j - 1}{t_k - t_j} - \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\alpha_j - 1}{t_k - t_{2k-j}} \right\}. \end{aligned}$$

Введем обозначение:  $A\pi = -\delta\tau$ . Окончательно будем иметь

$$\frac{\delta t_j}{\delta\tau} = \frac{1 - t_j^2}{(t_j - t_k)\Phi(t_k, \vec{t})}, \quad 2 \leq j \leq 2k, \quad j \neq k,$$



$$\frac{\delta t_k}{\delta \tau} = \frac{1 - t_k^2}{\Phi(t_k, \vec{t})} \left\{ \frac{\alpha_1}{t_k + 1} - \frac{\alpha_1}{t_k - t_{2k-1}} - \frac{1}{t_k - t_{2k}} + \frac{1}{t_k - 1} + \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\alpha_j - 1}{t_k - t_j} - \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\alpha_j - 1}{t_k - t_{2k-j}} \right\}.$$

Считая  $\tau$  вещественным параметром, от которого зависит решение, можем рассматривать полученную систему как систему дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют акцессорные параметры.

Выясним знак константы  $A$ . Докажем, что  $A < 0$ , когда длина разреза возрастает. Рассмотрим для определенности случай  $\alpha_{k-1} > 1$  (случай  $\alpha_{k-1} < 1$  рассматривается аналогично). Поскольку  $\arg \Pi(\xi, \vec{t}) = \beta_k$  является постоянной на интервале  $(t_{k-1}, t_k)$ , длина  $k$ -й стороны ломаной, соответствующей отрезку  $[t_{k-1}, t_k]$ , равна

$$l_k = \frac{1}{\pi} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\Pi(\xi, \vec{t})| \Phi(\xi, \vec{t}) dt = \frac{e^{-i\beta}}{\pi} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Pi(\xi, \vec{t}) \Phi(\xi, \vec{t}) dt.$$

Тогда с учетом того что подинтегральное выражение обращается в нуль в точках  $t_{k-1}$  и  $t_k$ , получаем

$$\begin{aligned} \delta l_k &= ie^{-i\beta} \delta \left( \frac{1}{\pi i} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Pi(\xi, \vec{t}) \Phi(\xi, \vec{t}) dt \right) = ie^{-i\beta} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \delta \left( \frac{1}{\pi i} \Pi(\xi, \vec{t}) \Phi(\xi, \vec{t}) dt \right) = \\ &= ie^{-i\beta} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \delta \left( \frac{dz(\xi, \vec{t})}{d\xi} \right) d\xi = ie^{-i\beta} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left( \frac{d \delta z(\xi, \vec{t})}{d\xi} \right) d\xi = ie^{-i\beta} \delta z(t_k, \vec{t}) = \\ &= ie^{-i\beta} Ai \lim_{t \rightarrow t_k^-} \Pi(t, \vec{t})(t^2 - 1)(t - t_k)^{-1} = -A \lim_{t \rightarrow t_k^-} |\Pi(t, \vec{t})(t^2 - 1)(t - t_k)^{-1}| > 0, \end{aligned}$$

если  $A < 0$ . Таким образом, возрастание параметра  $\tau$  соответствует увеличению длины разреза.

Тем самым теорема доказана.  $\square$

### 3. ОПИСАНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО МЕТОДА

Теперь опишем процедуру нахождения акцессорных параметров  $t_2, \dots, t_{n-1}$  в интегральном представлении (3). Она состоит из  $(n - 1)$  этапа. На первом этапе рассматривается однопараметрическое семейство решений, соответствующих случаю, когда известная часть границы является объединением лучей  $L^*$ ,  $L^{**}$  и разреза вдоль отрезка  $z_1 \tilde{z}_2$ , причем конец разреза  $\tilde{z}_2$  движется по стороне  $z_1 z_2$  ломаной  $L_z^1$ . Для нахождения акцессорных параметров  $t_2^{(1)}, t_3^{(1)}, t_4^{(1)}$  (индекс сверху означает номер этапа) имеем систему (4) при  $k = 1$ . В качестве начального условия имеем  $t_2^{(1)}(0) = t_3^{(1)}(0) = -1$ ,  $t_4^{(1)} = t_{40}$ . Здесь  $t_{40}$  находится из условия: краевая задача Гильберта для функции  $z(\zeta)$  в верхней полуплоскости  $D_\zeta$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z(\xi) &= H(\xi), & |\xi| > 1, \\ \operatorname{Re} z(\xi) &= x^{**}, & -1 < \xi < t_{40}, \\ \operatorname{Re} z(\xi) &= x^*, & t_{40} < \xi < 1, \end{aligned}$$

имеет решение в классе функций, непрерывных во всех точках вещественной оси, за исключением точки  $t_{40}$ , в которой имеется логарифмическая особенность, причем  $\operatorname{Im} z(-1) = y^{**}$ ,  $\operatorname{Im} z(1) = y^*$ . В результате решения системы (4) находим значения параметров  $t_{2*}^{(1)}, t_{3*}^{(1)}, t_{4*}^{(1)}$ , при которых длина разреза равна длине первой стороны ломаной  $L_z^1$ .

На втором этапе решаем систему (4) при  $k = 2$ , при этом в качестве начальных условий используем значения параметров, полученных на первом этапе:

$$t_2^{(2)}(0) = t_3^{(2)}(0) = t_4^{(2)}(0) = t_{2*}^{(1)}, \quad t_5^{(2)}(0) = t_{3*}^{(1)}, \quad t_6^{(2)}(0) = t_{4*}^{(1)}.$$

Как и на первом этапе, решаем систему (4) на таком отрезке, чтобы в конечный момент длина второй стороны разреза была равна заданной длине второй стороны ломаной  $L_z^1$ . Соответствующие значения параметров обозначим через  $t_{j*}^{(2)}$ ,  $2 \leq j \leq 6$ . Эти значения используются в качестве начальных на третьем этапе и т. д.



Наконец, на  $(n-1)$ -м этапе получим значения параметров  $t_{j*}^{(n-1)}$ ,  $2 \leq j \leq 2n$ , при этом  $t_{j*}^{(n-1)} = 1$ ,  $n \leq j \leq 2n$ , а значения параметров  $t_{j*}^{(n-1)}$  при  $2 \leq j \leq n-1$  дают искомые значения параметров  $s_j$  в интегральном представлении (3) решения исходной задачи.

В качестве примера применения метода нами было получено приближенное решение задачи в случае, когда известная часть границы области  $D_z$  — это заданная четырехзвенная ломаная с вершинами в точках  $A(1; 0)$ ,  $B(1/2; 1/2)$ ,  $C(-1/2; 1/2)$ ,  $D(-1, 0)$ ,  $H(\xi) = \operatorname{Re} z = -1/\xi$ ,  $|\xi| \geq 1$ . В результате достаточно быстро и с хорошей точностью были получены значения аксессуарных параметров  $s_2 = -0.5164\dots$ ,  $s_3 = 0.5164\dots$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-97008-р\_поволжье и 11-01-00762).

### Библиографический список

1. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск, 1977. 424 с.
2. Насыров С. Р. О методе полигональной аппроксимации в смешанных обратных краевых задачах по параметру  $x$ . Казань, 1982. Деп. в ВИНТИ 17.05.1982, № 2459-82 ДЕП.
3. Насыров С. Р. Смешанная обратная краевая задача на римановых поверхностях // Изв. вузов. Математика. 1990. № 10. С. 25–36.
4. Аксентьев Л. А., Ильинский Н. Б., Салимов Р. Б. О книге В. Н. Монахова «Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений» // Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1978. Вып. 15. С. 202–212.
5. Салимов Р. Б., Стрежнева Е. В. К решению обратной смешанной краевой задачи. Казань, 1989. Деп. в ВИНТИ 29.06.89, № 4312–В89.
6. Салимов Р. Б., Стрежнева Е. В. Решение обратной смешанной краевой задачи для двусвязной области в видоизмененной постановке. Казань, 1990. Деп. в ВИНТИ 29.12.90. № 0487–В90.
7. Стрежнева Е. В. Решение обратной краевой задачи для двусвязной области в одном случае. Казань, 1990. Деп. в ВИНТИ 29.12.90, № 2736–В91.
8. Глюстен С. Р. Смешанная краевая задача со свободной границей в неоднородных областях // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1986. № 76. С. 148–156.
9. Глюстен С. Р. Неоднородные отображения со свободной границей // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1988. № 86. С. 141–148.
10. Глюстен С. Р. Априорные оценки решений смешанной краевой задачи со свободной границей для аналитических функций // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1989. № 92. С. 108–121.
11. Глюстен С. Р. Геометрические свойства решений смешанной обратной краевой задачи со свободной границей // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1990. № 97. С. 114–123.
12. Монахов В. Н. Об одном вариационном методе решения задач по гидродинамике со свободной границей // Сиб. матем. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1106–1121.
13. Насыров С. Р., Фаизов И. З. Локальная единственность решения смешанной обратной краевой задачи на полигональных римановых поверхностях с простыми точками ветвления // Учен. записки Казанск. гос. ун-та. 2006. Т. 48, кн. 2. С. 97–108.
14. Насыров С. Р., Галиуллина Г. Р. Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру  $x$  // Изв. вузов. Математика. 2002. № 10. С. 25–30.
15. Насыров С. Р., Низамиева Л. Ю. Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру  $x$  на полигональной римановой поверхности с простой точкой ветвления на бесконечности // Учен. записки Казанск. гос. ун-та. 2008. Т. 150. Сер. физ.-мат., кн. 1. С. 91–101.
16. Насыров С. Р., Низамиева Л. Ю. Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи на римановой поверхности с точкой ветвления на бесконечности произвольного порядка // Вестн. Самарск. гос. ун-та. Сер. естественнаучн. 2009. № 4. С. 28–42.
17. Лаврентьев Г. В. Численные расчеты задач гидродинамики со свободными границами на основе аналитического представления решений // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1970. Вып. VI. С. 208–212.
18. Низамиева Л. Ю. Использование краевых задач при нахождении аксессуарных параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца. Казань, 2010. Деп. в ВИНТИ 06.07.10, № 421–В2010.
19. Александров И. А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М., 1976. 344 с.



УДК 517.98

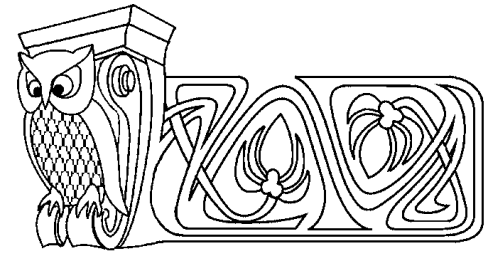
# ОЦЕНИВАНИЕ НОРМ ОПЕРАТОРА В ЗАДАЧАХ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Д. К. Потапов

Санкт-Петербургский государственный университет,  
кафедра высшей математики  
E-mail: potapov@apmath.spbu.ru

Рассматривается проблема существования решений задач со спектральным параметром для уравнений с разрывными операторами. Получены оценки норм оператора для исследуемых задач. В качестве приложения рассмотрена задача Дирихле для уравнения эллиптического типа высокого порядка с разрывной нелинейностью.

**Ключевые слова:** спектральный параметр, разрывный оператор, оценки норм оператора.



## Estimation of Operator Norms in Eigenvalue Problems for Equations with Discontinuous Operators

D. K. Potapov

Saint-Petersburg State University,  
Chair of Higher Mathematics  
E-mail: potapov@apmath.spbu.ru

Existence of solutions of problems with a spectral parameter for the equations with discontinuous operators is considered. The estimations of the operator norms for these problems are received. Dirichlet problem for the higher-order elliptic equation with discontinuous nonlinearity is considered as an appendix.

**Key words:** spectral parameter, discontinuous operator, estimations of operator norms.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОБЩИЙ РЕЗУЛЬТАТ

В вещественном рефлексивном банаховом пространстве  $E$  рассматривается вопрос существования ненулевых решений уравнения

$$Au = \lambda Tu \quad (1)$$

в зависимости от параметра  $\lambda$ . Здесь  $A$  – линейный самосопряженный оператор из  $E$  в  $E^*$  ( $E^*$  – сопряженное с  $E$  пространство),  $T : E \rightarrow E^*$  – разрывное, компактное или антимонотонное отображение, ограниченное на  $E$ . Через  $(z, x)$  будем обозначать значение функционала  $z \in E^*$  на элементе  $x \in E$ .

**Определение 1.** Линейный оператор  $A : E \rightarrow E^*$  называется *самосопряженным*, если  $(Ax, h) = (Ah, x)$  для любых  $x, h \in E$ .

**Определение 2.** Отображение  $T : E \rightarrow E^*$  называется *ограниченным* на  $E$ , если существует постоянная  $M > 0$  такая, что  $\|Tx\| \leq M$  для всех  $x \in E$ .

**Определение 3.** Отображение  $T : E \rightarrow E^*$  называется *компактным* на  $E$ , если ограниченные множества из  $E$  переводит в предкомпактные в  $E^*$ , т. е. множество  $TG$  предкомпактно в  $E^*$  для любого ограниченного подмножества  $G$  множества  $E$ .

**Определение 4.** Отображение  $T : E \rightarrow E^*$  называется *монотонным* на  $E$ , если  $(Tx - Ty, x - y) \geq 0$  для всех  $x, y \in E$ . Отображение  $T : E \rightarrow E^*$  называют *антимонотонным*, если отображение  $-T$  монотонно.

Как и ранее [1–3], уравнение (1) изучается вариационным методом. Для реализации вариационного подхода к исследованию уравнения (1) дополнительно потребуем квазипотенциальность оператора  $T$ .

**Определение 5.** Отображение  $T : E \rightarrow E^*$  называется *квазипотенциальным*, если существует функционал  $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ , для которого верно равенство

$$f(x + h) - f(x) = \int_0^1 (T(x + th), h) dt, \quad \forall x, h \in E$$

(интеграл понимается в смысле Лебега). При этом  $f$  называют *квазипотенциалом* оператора  $T$ .

Так как в уравнении (1) оператор  $A$  линейный и самосопряженный, то он потенциален, и его потенциал  $\phi(u) = \frac{1}{2}(Au, u)$  [4]. Свяжем с уравнением (1) функционал  $f^\lambda(u) = \phi(u) - \lambda f(u)$ , где  $f$  – квазипотенциал оператора  $T$ . Не теряя общности, будем считать, что  $f(0) = 0$ .

Основным результатом работы является теорема 1, в которой используются следующие понятия.



**Определение 6.** Элемент  $x \in E$  называется *точкой разрыва* оператора  $T : E \rightarrow E^*$ , если найдется  $h \in E$ , для которого либо  $\lim_{t \rightarrow 0} (T(x + th), h)$  не существует, либо  $\lim_{t \rightarrow 0} (T(x + th), h) \neq (Tx, h)$ .

**Определение 7.** Элемент  $x \in E$  называется *регулярной точкой* для оператора  $T : E \rightarrow E^*$ , если для некоторого  $h \in E$   $\overline{\lim}_{t \rightarrow +0} (T(x + th), h) < 0$ .

**Определение 8.** Отображение  $T : E \rightarrow E^*$  называется *радиально непрерывным в точке*  $x \in E$ , если для любого  $h \in E$   $\lim_{t \rightarrow 0} (T(x + th), h) = (Tx, h)$ .

**Теорема 1.** *Предположим, что*

1)  $A$  — линейный самосопряженный оператор, действующий из вещественного рефлексивного банахова пространства  $E$  в сопряженное пространство  $E^*$ . Пространство  $E$  представляется в виде прямой суммы замкнутых подпространств  $E_1$  и  $E_2$ ,  $E_1 = \ker A$ , причем существует постоянная  $\alpha > 0$  такая, что  $(Au, u) \geq \alpha \|u\|^2$  для любого  $u \in E_2$ ;

2) отображение  $T$  компактное или антимонотонное, квазипотенциальное (с квазипотенциалом  $f$ ) и ограниченное на  $E$  (с константой  $M$ ),  $f(0) = 0$  и для некоторого  $u_0 \in E$  значение  $f(u_0) > 0$ ; если  $E_1 \neq \{0\}$ , то дополнительно предполагается, что  $\lim_{u \in E_1, \|u\| \rightarrow +\infty} f(u) = -\infty$ ;

3) если отображение  $T$  компактное, то дополнительно предполагается, что  $\lim_{t \rightarrow +0} (T(u + th) - Tu, h) \geq 0$  для всех  $u, h \in E$ ;

4) если отображение  $T$  антимонотонное, то дополнительно предполагается, что любая точка разрыва оператора  $T$  при  $\lambda > \lambda_0 > 0$  регулярная для  $F_\lambda u = Au - \lambda Tu$  ( $\lambda_0$  — величина, начиная с которой задача на собственные значения разрешима).

Тогда для ненулевого решения  $u$  уравнения (1) справедливы следующие оценки норм оператора  $A$ :

$$0 \leq \frac{\frac{1}{2}(Au_0, u_0)}{\int_0^1 (T(tu_0), u_0) dt} \|Tu\| < \|Au\| \leq C,$$

где  $C$  — некоторая положительная константа.

**Доказательство.** В работах [1, 2] доказано, что при сделанных предположениях найдется  $\lambda_0 > 0$  такое, что для любого  $\lambda > \lambda_0$  существует  $u \in E, u \neq 0$ , для которого  $f^\lambda(u) = \inf_{v \in E} f^\lambda(v)$ , и любое такое  $u$  является решением уравнения (1) и точкой радиальной непрерывности оператора  $T$ . Отсюда следует, что  $f^\lambda(u) < 0$ . Имеем  $\lambda f(u) > \frac{1}{2}(Au, u)$ . В силу условия 2) данной теоремы для некоторого  $u_0 \in E$  значение  $f(u_0) > 0$ . Получаем, что

$$\lambda > \frac{\frac{1}{2}(Au_0, u_0)}{f(u_0)}.$$

Положим  $U = \{u_0 \in E : f(u_0) > 0\}$  (в силу условия 2) данной теоремы множество  $U$  непусто). Тогда для величины  $\lambda_0$  справедлива следующая оценка сверху:

$$\lambda_0 \leq \inf_{u_0 \in U} \frac{\frac{1}{2}(Au_0, u_0)}{f(u_0)}.$$

Из определения квазипотенциальности имеем:

$$f(u_0) = \int_0^1 (T(tu_0), u_0) dt.$$

Таким образом, справедлива следующая оценка сверху для величины  $\lambda_0$  в спектральных задачах для уравнений с разрывными операторами:

$$\lambda_0 \leq \inf_{u_0 \in U} \frac{\frac{1}{2}(Au_0, u_0)}{\int_0^1 (T(tu_0), u_0) dt},$$

где  $U = \{u_0 \in E : \int_0^1 (T(tu_0), u_0) dt > 0\}$ .





Итак, уравнение (1) разрешимо при  $\lambda > \lambda_0 > 0$  ( $\lambda_0 \leq \inf_{u_0 \in U} \frac{\frac{1}{2}(Au_0, u_0)}{\int_0^1 (T(tu_0), u_0) dt}$ ). Зафиксируем  $\lambda$

больше этого  $\lambda_0$ ,  $\lambda$  – достаточно большое положительное число. Тогда из уравнения (1) и в силу ограниченности отображения  $T$  (условие 2) теоремы 1) имеем

$$\|Au\| = \lambda \|Tu\| \leq \lambda M.$$

Положив  $C = \lambda M > 0$ , получим правую часть искомого неравенства, что подтверждает ограниченность оператора  $A$ . Выше было получено неравенство  $\lambda > \frac{\frac{1}{2}(Au_0, u_0)}{f(u_0)}$ . Поэтому имеем

$$\|Au\| = \lambda \|Tu\| > \frac{\frac{1}{2}(Au_0, u_0)}{f(u_0)} \|Tu\| \geq 0,$$

что дает левую часть искомого неравенства, поскольку  $f(u_0) = \int_0^1 (T(tu_0), u_0) dt$ .

Таким образом, получены оценки норм оператора в задачах на собственные значения для уравнений с разрывными операторами. Теорема доказана.  $\square$

## 2. ПРИЛОЖЕНИЕ

В качестве приложения рассмотрим задачу Дирихле для уравнения эллиптического типа высокого порядка с разрывной нелинейностью. А именно в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  с достаточно гладкой границей  $\Gamma$  рассмотрим проблему существования ненулевых решений задачи:

$$\tau u(x) = \lambda g(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$\partial_\nu^r(\Gamma)u(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad 0 \leq r \leq p-1, \quad (3)$$

в зависимости от параметра  $\lambda$ . Здесь  $\tau = \sum_{1 \leq |\alpha| = |\beta| \leq p} (-1)^{|\beta|} D^\beta a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha$  – формальный дифференциальный оператор четного порядка  $2p$  в дивергентной форме, удовлетворяющий неравенству

$$\sum_{|\alpha| = |\beta| = p} a_{\alpha\beta} \xi^{\alpha+\beta} \geq \chi |\xi|^{2p}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n,$$

в котором постоянная  $\chi$  положительна и не зависит от  $x$  и  $\xi$ , функции  $a_{\alpha\beta}$  вещественнозначны и имеют непрерывные в  $\bar{\Omega}$  частные производные до порядка  $|\beta|$  включительно, причем,  $a_{\alpha\beta}(x) = a_{\beta\alpha}(x)$  в  $\bar{\Omega}$ ,  $1 \leq |\alpha| = |\beta| \leq p$ ; функция  $g : \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  суперпозиционно измерима [5], т. е. для любой измеримой по Лебегу функции  $u(x)$  на  $\Omega$  функция  $g(x, u(x))$  измерима по Лебегу на  $\Omega$  и для почти всех  $x \in \Omega$  сечение  $g(x, \cdot)$  имеет на  $\mathbf{R}$  разрывы только первого рода,  $g(x, u) \in [g_-(x, u), g_+(x, u)]$  для любой  $u \in \mathbf{R}$ ,  $g_-(x, u) = \varliminf_{\eta \rightarrow u} g(x, \eta)$ ,  $g_+(x, u) = \varlimsup_{\eta \rightarrow u} g(x, \eta)$  и  $|g(x, u)| \leq a(x)$  для любой  $u \in \mathbf{R}$ , где  $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$ ,  $q \geq \max \left\{ \frac{2n}{n+2p}, \frac{n}{2p} \right\}$ , фиксирована;  $\partial_\nu^r(\Gamma)$  – производные в направлении внутренней нормали  $\nu$  к границе  $\Gamma$  порядка  $r$ .

Задаче (2)–(3) сопоставим функционал  $J^\lambda(u)$ , заданный на пространстве  $\mathbf{H}_0^p(\Omega)$ , следующим образом:

$$J^\lambda(u) = J_1(u) - \lambda J_2(u),$$

где

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq |\alpha| = |\beta| \leq p} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u(x) D^\beta u(x) dx, \quad J_2(u) = \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g(x, s) ds.$$

Положим  $U = \{u_0 \in \mathbf{H}_0^p(\Omega) : J_2(u_0) > 0\}$ .



**Определение 9.** Прыгающим разрывом функции  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  называется такое  $u \in \mathbf{R}$ , что  $f(u-) < f(u+)$ , где  $f(u\pm) = \lim_{s \rightarrow u\pm} f(s)$ .

Имеют место следующие теоремы.

**Теорема 2.** Пусть выполнены следующие условия:

1)  $J_1(u) \geq 0$  для любого  $u \in \mathbf{H}_0^p(\Omega)$ ;

2) для почти всех  $x \in \Omega$  функция  $g(x, \cdot)$  имеет только прыгающие разрывы,  $g(x, 0) = 0$  и  $|g(x, u)| \leq a(x)$  для любой  $u \in \mathbf{R}$ , где  $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$ ,  $q > \max \left\{ \frac{2n}{n+2p}, \frac{n}{2p} \right\}$ , фиксирована;

3) найдется  $u_0 \in \mathbf{H}_0^p(\Omega)$ , для которого  $J_2(u_0) > 0$ ;

4) если пространство  $N(\tau)$  решений задачи  $\begin{cases} \tau u = 0, \\ \partial_\nu^r(\Gamma)u(x) = 0 \end{cases}$  ненулевое (резонансный случай),

то дополнительно предполагается, что

$$\lim_{u \in N(\tau), \|u\| \rightarrow +\infty} J_2(u) = -\infty.$$

Тогда для почти всех  $x \in \Omega$  имеют место следующие оценки дифференциального оператора  $\tau$ :

$$0 \leq \frac{J_1(u_0)}{J_2(u_0)} |g(x, u(x))| < |\tau u(x)| \leq b(x),$$

где  $b(x)$  — некоторая функция из  $\mathbf{L}_q(\Omega)$ ,  $q > \max \left\{ \frac{2n}{n+2p}, \frac{n}{2p} \right\}$ .

**Теорема 3.** Предположим, что выполнены условия 1), 3), 4) теоремы 2 и дополнительно условия

1') для почти всех  $x \in \Omega$  функция  $g(x, \cdot)$  невозрастающая на  $\mathbf{R}$  и для некоторой  $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$ ,  $q = \max \left\{ \frac{2n}{n+2p}, \frac{n}{2p} \right\}$  справедливо неравенство  $|g(x, u)| \leq a(x)$  для любой  $u \in \mathbf{R}$ ;

2') для почти всех  $x \in \Omega$  точки разрыва функции  $g(x, \cdot)$  лежат на плоскостях  $u = u_i$ ,  $i \in I$  ( $I$  — не более чем счетно), и если  $g(x, u_i-) > g(x, u_i+)$ , то  $g(x, u_i-)g(x, u_i+) > 0$  для любого  $i \in I$ .

Тогда утверждение теоремы 2 остается верным с  $q = \max \left\{ \frac{2n}{n+2p}, \frac{n}{2p} \right\}$ .

**Доказательство теорем 2, 3.** Согласно теоремам 1, 2 из работы [6] задача (2)–(3) разрешима при  $\lambda > \lambda_0 > 0$  ( $\lambda_0 \leq \inf_{u_0 \in U} J_1(u_0)/J_2(u_0)$ ). Зафиксируем  $\lambda$  больше этого  $\lambda_0$ . Тогда из уравнения (2) и в силу условия 2) теоремы 2, условия 1') теоремы 3 соответственно имеем:

$$|\tau u(x)| = |\lambda| \cdot |g(x, u(x))| \leq \lambda a(x)$$

для почти всех  $x \in \Omega$ . Положив  $b(x) = \lambda a(x)$ , получим правую часть искомого неравенства. При сделанных предположениях из работы [6] следует неравенство  $\lambda > J_1(u_0)/J_2(u_0)$ . Поэтому имеем:

$$|\tau u(x)| = \lambda |g(x, u(x))| > \frac{J_1(u_0)}{J_2(u_0)} |g(x, u(x))| \geq 0,$$

так как в силу условий 1) и 3) теоремы 2  $J_1(u_0) \geq 0$  и  $J_2(u_0) > 0$ , что дает левую часть искомого неравенства. Таким образом, получены оценки дифференциального оператора в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями. Теоремы 2, 3 доказаны.  $\square$

**Замечание 1.** Условия теоремы 1 данной работы для задачи (2)–(3) проверяются аналогично тому, как это сделано в работах [1–3] к исследованию основных краевых задач для полулинейных уравнений эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной по фазовой переменной нелинейностью. Поэтому теоремы 2, 3 можно рассматривать и как приложение теоремы 1, сведя их доказательство к проверке выполнения условий теоремы 1 данной работы.

**Замечание 2.** В работе [7] получены аналогичные оценки дифференциального оператора основных краевых задач для уравнений эллиптического типа второго порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью.



## Библиографический список

1. Павленко В. Н., Потапов Д. К. О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 4. С. 911–919.
2. Потапов Д. К. О существовании луча собственных значений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями в критическом случае // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2004. Вып. 4. С. 125–132.
3. Потапов Д. К. Задачи со спектральным параметром и разрывной нелинейностью. СПб., 2008. 99 с.
4. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод моно-
- тонных операторов в теории нелинейных уравнений. М., 1972. 416 с.
5. Красносельский М. А., Покровский А. В. Системы с гистерезисом. М., 1983. 272 с.
6. Потапов Д. К. О структуре множества собственных значений для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 1. С. 150–152.
7. Потапов Д. К. Оценки дифференциального оператора в задачах со спектральным параметром для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2010. № 5(21). С. 268–271.

УДК 517.927.25

## О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. С. Рыжлов, О. В. Парфилова\*

Саратовский государственный университет,  
кафедра дифференциальных уравнений  
и прикладной математики

\*Саратовская государственная академия права,  
кафедра информатики  
E-mail: RykhlovVS@info.sgu.ru

Рассматривается класс пучков обыкновенных дифференциальных операторов  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Предполагается, что корни характеристического уравнения пучков этого класса лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, таким образом, что один корень лежит по одну сторону от начала координат, а остальные по другую сторону. Описываются случаи, когда система корневых функций  $m$ -кратно ( $3 \leq m \leq n - 1$ ) полна в пространстве суммируемых с квадратом функций на основном отрезке.

**Ключевые слова:** пучок обыкновенных дифференциальных операторов, кратная полнота, корневые функции.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

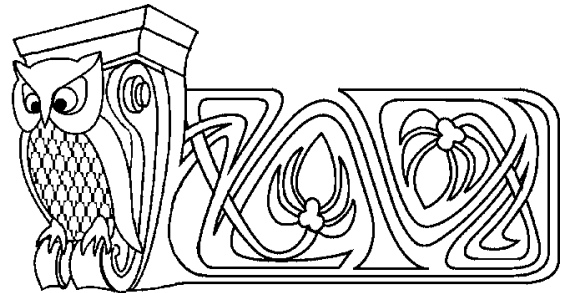
В пространстве  $L_2[0, 1]$  рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов  $L(\lambda)$ , порожденный на конечном отрезке  $[0, 1]$  дифференциальным выражением (д. в.):

$$\ell(y, \lambda) := p_0(x, \lambda)y^{(n)} + p_1(x, \lambda)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x, \lambda)y \quad (1)$$

и линейно независимыми краевыми условиями:

$$U_j(y, \lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}(\lambda)y^{(k)}(0) + b_{jk}(\lambda)y^{(k)}(1) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где  $\lambda \in \mathbb{C}$  — спектральный параметр,  $p_{n-k}(x, \lambda) = \sum_{s=0}^{n-k} p_{sk}(x)\lambda^s$ ,  $p_{sk}(x) \in L_1[0, 1]$ , а  $a_{jk}(\lambda)$ ,  $b_{jk}(\lambda)$  — произвольные полиномы по  $\lambda$ .



On Multiple Completeness of the Root Functions of the Pencils of Differential Operators with Constant Coefficients

V. S. Rykhlov, O. V. Parfilova\*

Saratov State University,  
Chair of Differential Equations and Applied Mathematics

\*Saratov State Academy of Law,  
Chair of Informatics  
E-mail: RykhlovVS@info.sgu.ru

A class of the pencils of ordinary differential operators of  $n$ -th order with constant coefficients is considered. The roots of the characteristic equation of the pencils from this class are supposed to lie on a straight line containing the origin, provided that one of the roots lies on one part from the origin, the rest lie on another part. The cases when the system of root functions is  $m$ -fold ( $3 \leq m \leq n - 1$ ) complete in the space of square summable functions on main interval are described.

**Key words:** pencil of ordinary differential operators, multiple completeness, root functions.



Наряду с краевыми условиями (2) будут рассматриваться краевые условия

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}y^{(k)}(0) + b_{jk}y^{(k)}(1) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3)$$

не содержащие параметра  $\lambda$ .

Далее будем использовать, не повторяя их в данной статье, известные определения собственных значений (с.з.), корневых (собственных и присоединенных) функций, производных (по Келдышу) цепочек из [1–2]. Пусть  $\Lambda := \{\lambda_k\}$  есть множество всех с.з. пучка  $L(\lambda)$ . Предполагаем, что множество  $\Lambda$  счетно. Пусть  $Y := \{y_k\}$  есть множество всех корневых функций пучка  $L(\lambda)$ , соответствующих множеству  $\Lambda$ .

**Определение 1.** Система  $Y$  корневых функций пучка  $L(\lambda)$  называется  $m$ -кратно полной в пространстве  $L_2[0, 1]$  ( $0 < m \leq n$ ), если из условия ортогональности вектор-функции  $h \in L_2^m[0, 1] := \underbrace{L_2[0, 1] \oplus \dots \oplus L_2[0, 1]}_{m \text{ раз}}$  всем производным  $m$ -цепочкам, соответствующим системе  $Y$ , следует равенство  $h = 0$ .  $\square$

При изучении спектральных свойств несамосопряженного пучка  $L(\lambda)$  одной из основных является задача исследования свойств его корневых функций. Весьма важными являются вопросы о разложениях функций в биортогональные ряды Фурье по корневым функциям, в частности, вопросы полноты корневых функций в  $L_2[0, 1]$ .

В данной статье решается задача нахождения условий на коэффициенты пучка  $L(\lambda)$ , при которых имеет место или отсутствует  $n$ -кратная полнота. В последнем случае возникает вопрос об  $m$ -кратной полноте при  $1 \leq m \leq n - 1$ .

Основопологающей по этой задаче является работа [1] (см. также [3, 4]), в которой была сформулирована теорема об  $n$ -кратной полноте корневых функций пучка  $L(\lambda)$ , порожденного дифференциальным выражением с переменными коэффициентами со специальной главной частью

$$l(y, \lambda) := y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\}$$

и распадающимися краевыми условиями вида (3) (когда часть краевых условий берется только в конце 0 отрезка  $[0, 1]$ , а остальные в 1). Эта теорема была доказана в [5] в случае аналитических и в [6, 7] в случае суммируемых коэффициентов.

Но для некоторых классов пучков  $L(\lambda)$ , даже с постоянными коэффициентами, вопрос о кратной полноте корневых функций еще не исследовался. Рассмотрим в пространстве  $L_2[0, 1]$  пучок обыкновенных дифференциальных операторов, порожденный однородным д.в.  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\ell_0(y, \lambda) := \sum_{s+k=n} p_{sk} \lambda^s y^{(k)}, \quad p_{sk} \in \mathbb{C}, \quad p_{0n} \neq 0 \quad (4)$$

и линейно независимыми нормированными краевыми условиями специального вида:

$$U_i^0(y, \lambda) := \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0) = 0, \quad i = \overline{1, l},$$

$$U_i^1(y, \lambda) := \sum_{s+k \leq \varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0) + \sum_{s+k \leq \varkappa_{i1}} \lambda^s \beta_{isk} y^{(k)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1, n}, \quad (5)$$

где  $\lambda, \alpha_{isk}, \beta_{isk} \in \mathbb{C}, \varkappa_{i0}, \varkappa_{i1} \in \{0, 1, \dots, n-1\}, 1 \leq l \leq n-1$ . Не нарушая общности можно считать (иначе перенумеруем краевые условия), что

$$\varkappa_{n1} - \varkappa_{n0} = \max_{l+1 \leq i \leq n} \{\varkappa_{i1} - \varkappa_{i0}\}. \quad (6)$$

Пусть всюду далее выполняется основное предположение относительно дифференциального выражения  $\ell_0(y, \lambda)$ , а именно, что корни  $\omega_j, j = \overline{1, n}$ , характеристического уравнения  $\sum_{s+k=n} p_{sk} \omega^k = 0$  различны, отличны от нуля и лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, причем так,



что один корень  $\omega_n$  лежит по одну сторону от начала координат, а остальные корни  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$  — по другую сторону. Не нарушая общности, можно считать, что

$$\omega_n < 0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{n-1}. \quad (7)$$

Пучок вида (4)–(5) в случае, когда краевые условия не зависят от  $\lambda$  и а)  $2l > n$ , т. е. краевые условия полураспадающиеся; б) существует прямая  $d$ , проходящая через начало координат и делящая комплексную плоскость на две полуплоскости, внутри каждой из которых число этих корней не меньше, чем  $n - l$ , детально рассмотрен в [8, 9]. В этих работах получены условия  $n$ -кратной и  $m$ -кратной полноты при  $1 \leq m \leq n - 1$  в пространстве  $L_2[0, 1]$  и показана точность этого результата. Некоторые другие классы пучков вида (4)–(5) в случае  $1 \leq l \leq n - 1$  подробно исследованы в [10–12].

Для рассматриваемого пучка (4)–(5) не выполняется предположение а), а при условиях (7) и  $1 \leq l \leq n - 2$  не выполняется и предположение б). При этом, в отличие от [8–9], рассматриваемые краевые условия (5) могут зависеть от  $\lambda$ .

Однократная полнота корневых функций для частного случая пучка (4)–(5) при  $n = 2$  в предположении (7) исследована в [13]. Полнота для случая  $l = n - 1$ , когда краевые условия (5) не зависят от  $\lambda$  и выполняются условия (7), установлена в [8–9].

Для формулировки основного результата введем обозначения

$$a_{ij} = \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \alpha_{isk} \omega_j^k \quad (i, j = \overline{1, n}); \quad b_{ij} = \sum_{s+k=\varkappa_{i1}} \beta_{isk} \omega_j^k \quad (i = \overline{l+1, n}; j = \overline{1, n});$$

$$\varkappa_i = \min\{\varkappa_{i0} + \varkappa_{n1} - \varkappa_{n0} - \max\{0, \varkappa_{n1} - \varkappa_{n0}\}, \varkappa_{i1}\} \quad (i = \overline{l+1, n}); \quad [n]_+ = \begin{cases} n, & \text{если } n \geq 0, \\ 0, & \text{если } n < 0. \end{cases}$$

**Теорема 1.** Если справедливы неравенства (7), выполняются условия (6) и

$$\det(a_{ij})_{\substack{j \in \{1, \dots, l-1, n\} \\ i \in \{1, \dots, l\}}} \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{\substack{j \in \{l, \dots, n-1\} \\ i \in \{l+1, \dots, n\}}} \neq 0, \quad b_{nn} \neq 0, \quad \det(a_{ij})_{\substack{j \in \{1, \dots, n-1\} \\ i \in \{1, \dots, n-1\}}} \neq 0,$$

то при  $m \leq n - l + 1$  система корневых функций пучка (4)–(5)  $m$ -кратно полна в  $L_2[0, 1]$  с возможным конечным дефектом, не превышающим числа  $\sum_{i=l+1}^n [m - 1 - \varkappa_i]_+$ .

Теорема точна в следующем смысле. При  $l = n - 1$  и  $m = n - l + 2 (= 3)$  в [14] получены достаточные условия на корни  $\omega_j$ , при которых система корневых функций пучков вида (4)–(5)  $m$ -кратно не полна в  $L_2[0, 1]$  и имеет бесконечный дефект. В [8, с. 72–77] (см. также [9, с. 58–62]) сформулирована теорема об  $(n - l + 2)$ -кратной неполноте частного случая пучка (4)–(5), краевые условия которого являются полураспадающимися и не зависят от параметра  $\lambda$ . Но доказательство этого факта проведено очень схематично и конец доказательства ошибочен.

Далее докажем теорему 1. Схема доказательства соответствует схеме доказательства теорем 2.1–2.3 из [8–9], а изложение следует тексту статьи [12]. Центральную роль в доказательстве играет лемма 1, которая приводится в следующем параграфе.

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ И ОСНОВНАЯ ЛЕММА

Функции  $y_j(x, \lambda) = \exp(\lambda \omega_j x)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , образуют фундаментальную систему решений уравнения  $\ell_0(y, \lambda) = 0$  при  $\lambda \neq 0$ .

Ненулевые собственные значения  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , пучка (4)–(5) являются нулями целой функции  $\Delta(\lambda) := \det(U_i^0(y_j(x, \lambda), \lambda))_{i,j=1}^n$ . Несмотря на то что  $\Delta(0) = 0$ , число  $\lambda_0 = 0$  может быть с. з., а может и не быть.

Обозначим через  $\Phi_i(x, \lambda)$  функцию, полученную из  $\Delta(\lambda)$  заменой  $i$ -й строки в случае  $l+1 \leq i \leq n$  строкой  $y_1(x, \lambda), \dots, y_n(x, \lambda)$ . Непосредственно можно убедиться в том, что столбцы

$$\left( \frac{\partial^k \Phi_i(x, \lambda)}{\partial \lambda^k}, \dots, \frac{\partial^k (\lambda^{m-1} \Phi_i(x, \lambda))}{\partial \lambda^k} \right)^T \Big|_{\lambda=\lambda_\nu},$$



где  $i = \overline{l+1, n}$ ,  $k = \overline{0, s}$ ,  $m \in \{1, \dots, n\}$ , являются производными по Келдышу  $m$ -цепочками для корневых функций, соответствующих с.з.  $\lambda_\nu$ , которое является нулем  $\Delta(\lambda)$  кратности  $s+1$ . Введем в рассмотрение функции

$$\Theta_i(\lambda) = \int_0^1 \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^{j-1} \Phi_i(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)} h_j(x) dx, \quad i = \overline{l+1, n}, \quad (8)$$

где  $h(x) = ((h_1(x), \dots, h_m(x)))^T \in L_2^m[0, 1]$ .

Перепишем (8) в виде

$$\Theta_i(\lambda) = \Delta_i(\lambda) / \Delta(\lambda), \quad i = \overline{l+1, n}, \quad (9)$$

где определитель  $\Delta_i(\lambda)$  получается из  $\Delta(\lambda)$  заменой  $i$ -й строки строкой  $u_{n+1,1}(\lambda), u_{n+1,2}(\lambda), \dots, u_{n+1,n}(\lambda)$ , где  $u_{n+1,k}(\lambda) = \int_0^1 \sum_{j=1}^m h_j(x) \lambda^{j-1} y_k(x, \lambda) dx$ .

Следующие утверждения потребуются нам в дальнейшем. Их доказательство можно найти, например, в [9, с. 48–49].

**Утверждение 1.** Функции  $\Phi_{l+1}(x, \lambda), \dots, \Phi_n(x, \lambda)$  являются линейно независимыми решениями уравнения  $\ell_0(y, \lambda) = 0$ , удовлетворяющими первым  $l$  условиям (5) в точке 0.

**Утверждение 2.** Функции  $\Theta_i(\lambda)$  не зависят от выбора фундаментальной системы решений уравнения  $\ell_0(y, \lambda) = 0$ .

Введем в рассмотрение следующие множества:

$$\Pi_\varepsilon^+ = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \arg \lambda \in \left[0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2} + \varepsilon, 2\pi\right) \right\}, \quad \Pi_\varepsilon^- = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \arg \lambda \in \left[\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right] \right\},$$

где  $\varepsilon > 0$  и достаточно мало.

**Лемма 1.** Если выполняются условия (6)–(7) и

$$\det(a_{ij})_{\substack{j \in \{1, \dots, l-1, n\} \\ i \in \{1, \dots, l\}}} \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{\substack{j \in \{l, \dots, n-1\} \\ i \in \{l+1, \dots, n\}}} \neq 0, \quad (10)$$

то при  $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$  и  $|\lambda| \gg 1$  справедливы оценки

$$|\Theta_i(\lambda)| \leq C |\lambda|^{m - \frac{3}{2} - \varkappa_{i1}}, \quad i = \overline{l+1, n},$$

а если

$$\det(a_{ij})_{\substack{j \in \{1, \dots, n-1\} \\ i \in \{1, \dots, n-1\}}} \neq 0, \quad b_{nn} \neq 0, \quad (11)$$

то при  $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$  и  $|\lambda| \gg 1$  справедливы оценки

$$|\Theta_i(\lambda)| \leq C |\lambda|^{m - \frac{3}{2} - \varkappa_{i0} - \varkappa_{n1} + \varkappa_{n0} + \max\{0, \varkappa_{n1} - \varkappa_{n0}\}}, \quad i = \overline{l+1, n}.$$

**Доказательство.** Пусть  $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$ . Исходя из вида функций  $y_j(x, \lambda)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , в этом случае будем иметь:

$$\begin{aligned} U_i(y_j, \lambda) &= \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \alpha_{isk} \omega_j^k \lambda^{s+k} = \lambda^{\varkappa_{i0}} \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \alpha_{isk} \omega_j^k = \lambda^{\varkappa_{i0}} a_{ij}, \quad i = \overline{1, l}, \quad j = \overline{1, n}; \\ U_i(y_j, \lambda) &= \sum_{s+k \leq \varkappa_{i0}} \alpha_{isk} \omega_j^k \lambda^{s+k} + \sum_{s+k \leq \varkappa_{i1}} \beta_{isk} \omega_j^k \lambda^{s+k} e^{\lambda \omega_j} = \\ &= \lambda^{\varkappa_{i1}} e^{\lambda \omega_j} \left( \sum_{s+k=\varkappa_{i1}} \beta_{isk} \omega_j^k + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + O(\lambda^{\varkappa_{i0} - \varkappa_{i1}} e^{-\lambda \omega_j}) \right) = \\ &= \lambda^{\varkappa_{i1}} e^{\lambda \omega_j} [b_{ij}], \quad i = \overline{l+1, n}, \quad j = \overline{1, n-1}, \\ U_i(y_n, \lambda) &= \sum_{s+k \leq \varkappa_{i0}} \alpha_{isk} \omega_n^k \lambda^{s+k} + \sum_{s+k \leq \varkappa_{i1}} \beta_{isk} \omega_n^k \lambda^{s+k} e^{\lambda \omega_n} = \end{aligned}$$



$$= \lambda^{\varkappa_{i0}} \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \alpha_{isk} \omega_n^k + O(\lambda^{\varkappa_{i0}-1}) = \lambda^{\varkappa_{i0}} \left( a_{in} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) = \lambda^{\varkappa_{i0}} [a_{in}], \quad i = \overline{l+1, n},$$

где использовано обозначение  $[c] = c + O(\frac{1}{\lambda})$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Подставим эти выражения в определитель  $\Delta(\lambda)$  и разложим его по теореме Лапласа. Раскладываем по минорам первых  $l$  строк, располагаем слагаемые по убыванию вещественных частей показателей экспонент и записываем только главные члены. Получим с учетом (10)

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda^{\varkappa_{10}} a_{11} & \dots & \lambda^{\varkappa_{10}} a_{1l} & \dots & \lambda^{\varkappa_{10}} a_{1n-1} & \dots & \lambda^{\varkappa_{10}} a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\varkappa_{l0}} a_{l1} & \dots & \lambda^{\varkappa_{l0}} a_{ll} & \dots & \lambda^{\varkappa_{l0}} a_{ln-1} & \dots & \lambda^{\varkappa_{l0}} a_{ln} \\ \lambda^{\varkappa_{l+10}} e^{\lambda \omega_1} [b_{l+11}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{l+10}} e^{\lambda \omega_1} [b_{l+1l}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{l+10}} e^{\lambda \omega_{n-1}} [b_{l+1n-1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{l+10}} [a_{l+1n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\varkappa_{n0}} e^{\lambda \omega_1} [b_{n1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{n0}} e^{\lambda \omega_1} [b_{nl}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{n0}} e^{\lambda \omega_{n-1}} [b_{nn-1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{n0}} [a_{nn}] \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^{\sum_{i=1}^l \varkappa_{i0}} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n-1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{ll} & \dots & a_{ln-1} & \dots & a_{ln} \\ \lambda^{\varkappa_{l+10}} e^{\lambda \omega_1} [b_{l+11}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{l+10}} e^{\lambda \omega_1} [b_{l+1l}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{l+10}} e^{\lambda \omega_{n-1}} [b_{l+1n-1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{l+10}} [a_{l+1n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\varkappa_{n0}} e^{\lambda \omega_1} [b_{n1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{n0}} e^{\lambda \omega_1} [b_{nl}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{n0}} e^{\lambda \omega_{n-1}} [b_{nn-1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{n0}} [a_{nn}] \end{vmatrix} = \\ &= \pm \lambda^{\sum_{i=1}^l \varkappa_{i0} + \sum_{i=l+1}^n \varkappa_{i1}} \left\{ e^{\lambda \sum_{k=l}^{n-1} \omega_k} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{ll-1} & a_{ln} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} [b_{l+1l}] & \dots & [b_{l+1n-1}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [b_{nl}] & \dots & [b_{nn-1}] \end{vmatrix} + \dots \right\} = \\ &= \pm \lambda^{\sum_{i=1}^l \varkappa_{i0} + \sum_{i=l+1}^n \varkappa_{i1}} e^{\lambda \sum_{k=l}^{n-1} \omega_k} \left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{ll-1} & a_{ln} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} [b_{l+1l}] & \dots & [b_{l+1n-1}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [b_{nl}] & \dots & [b_{nn-1}] \end{vmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\} = \\ &= \pm \lambda^{\sum_{i=1}^l \varkappa_{i0} + \sum_{i=l+1}^n \varkappa_{i1}} e^{\lambda \sum_{k=l}^{n-1} \omega_k} \det(a_{ik})_{i \in \{1, \dots, l-1, n\}}^{k \in \{1, \dots, l-1, n\}} \det(b_{ik})_{i \in \{l+1, \dots, n\}}^{k \in \{l+1, \dots, n-1\}} [1]. \end{aligned} \quad (12)$$

Дальнейшие рассуждения проведем только для случая  $1 < l \leq n - 2$ , чтобы не слишком увеличивать объем статьи. Рассуждения в случае  $l = n - 1$  являются более простыми, и мы их опускаем.

При всех ненулевых  $\lambda \in \mathbb{C}$  справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} u_{n+1,j}(\lambda) &= \int_0^1 \sum_{k=1}^m h_k(\xi) \lambda^{k-1} y_j(\xi, \lambda) d\xi = \\ &= \lambda^{m-1} \int_0^1 \sum_{k=1}^m \lambda^{k-m} h_k(\xi) e^{\lambda \omega_j \xi} d\xi = \lambda^{m-1} \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda \omega_j \xi} d\xi, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $h_m(\xi, \lambda) := \sum_{k=1}^m \lambda^{k-m} h_k(\xi)$ .

Используя эти соотношения, найдем

$$\Delta_{l+1}(\lambda) = \lambda^{m-1} \begin{vmatrix} \lambda^{\varkappa_{10}} a_{11} & \dots & \lambda^{\varkappa_{10}} a_{1n-1} & \dots & \lambda^{\varkappa_{10}} a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\varkappa_{l0}} a_{l1} & \dots & \lambda^{\varkappa_{l0}} a_{ln-1} & \dots & \lambda^{\varkappa_{l0}} a_{ln} \\ \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda \omega_1 \xi} d\xi & \dots & \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda \omega_{n-1} \xi} d\xi & \dots & \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda \omega_n \xi} d\xi \\ \lambda^{\varkappa_{l+20}} e^{\lambda \omega_1} [b_{l+21}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{l+20}} e^{\lambda \omega_{n-1}} [b_{l+2n-1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{l+20}} [a_{l+2n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\varkappa_{n0}} e^{\lambda \omega_1} [b_{n1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{n0}} e^{\lambda \omega_{n-1}} [b_{nn-1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{n0}} [a_{nn}] \end{vmatrix} =$$



$$\begin{aligned}
 &= \lambda^{m-1+\sum_{i=1}^l \varkappa_{i0}} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln-1} & a_{ln} \\ \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda \omega_1 \xi} d\xi & \dots & \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda \omega_{n-1} \xi} d\xi & \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda \omega_n \xi} d\xi \\ \lambda^{\varkappa_{l+21}} e^{\lambda \omega_1} [b_{l+21}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{l+21}} e^{\lambda \omega_{n-1}} [b_{l+2n-1}] & \lambda^{\varkappa_{l+20}} [a_{l+2n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\varkappa_{n1}} e^{\lambda \omega_1} [b_{n1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{n1}} e^{\lambda \omega_{n-1}} [b_{nn-1}] & \lambda^{\varkappa_{n0}} [a_{nn}] \end{vmatrix} = \\
 &= \lambda^{m-1+\sum_{i=1}^l \varkappa_{i0}} \sum_{j=1}^n (-1)^{l+j+1} \Delta_{l+1,j}(\lambda) \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda \omega_j \xi} d\xi, \tag{14}
 \end{aligned}$$

разложив определитель по элементам  $(l+1)$ -й строки, где  $\Delta_{l+1,j}(\lambda)$  есть минор элемента  $(l+1, j)$ , т. е.

$$\Delta_{l+1,j}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{lj-1} & a_{lj+1} & \dots & a_{ln} \\ \lambda^{\varkappa_{l+21}} e^{\lambda \omega_1} [b_{l+21}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{l+21}} e^{\lambda \omega_{j-1}} [b_{l+2j-1}] & \lambda^{\varkappa_{l+21}} e^{\lambda \omega_{j+1}} [b_{l+2j+1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{l+20}} [a_{l+2n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\varkappa_{n1}} e^{\lambda \omega_1} [b_{n1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{n1}} e^{\lambda \omega_{j-1}} [b_{nj-1}] & \lambda^{\varkappa_{n1}} e^{\lambda \omega_{j+1}} [b_{nj+1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{n0}} [a_{nn}] \end{vmatrix}.$$

Раскладываем этот определитель по минорам первых  $l$  строк и располагаем слагаемые по убыванию вещественных частей показателей экспонент. Получим при  $j = \overline{1, l}$ , выписывая только главные члены,

$$\begin{aligned}
 \Delta_{l+1,j}(\lambda) &= \pm \left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1l} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{lj-1} & a_{lj+1} & \dots & a_{ll} & a_{ln} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda^{\varkappa_{l+21}} e^{\lambda \omega_{l+1}} [b_{l+2l+1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{l+21}} e^{\lambda \omega_{n-1}} [b_{l+2n-1}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\varkappa_{n1}} e^{\lambda \omega_{l+1}} [b_{nl+1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{n1}} e^{\lambda \omega_{n-1}} [b_{nn-1}] \end{vmatrix} + \dots \right\} = \\
 &= \pm \lambda^{\sum_{i=l+2}^n \varkappa_{i1}} e^{\lambda \sum_{k=l+1}^{n-1} \omega_k} \left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1l} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{lj-1} & a_{lj+1} & \dots & a_{ll} & a_{ln} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} [b_{l+2l+1}] & \dots & [b_{l+2n-1}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [b_{nl+1}] & \dots & [b_{nn-1}] \end{vmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\} = \\
 &= \pm \lambda^{\sum_{i=l+2}^n \varkappa_{i1}} e^{\lambda \sum_{k=l+1}^{n-1} \omega_k} \left[ \det(a_{ik})_{i \in \{1, \dots, l\}}^{k \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, l, n\}} \det(b_{ik})_{i \in \{l+2, \dots, n\}}^{k \in \{l+1, \dots, n-1\}} \right]. \tag{15}
 \end{aligned}$$

Аналогично можно получить

$$\Delta_{l+1,n} = \pm \lambda^{\sum_{i=l+2}^n \varkappa_{i1}} e^{\lambda \sum_{k=l+1}^{n-1} \omega_k} \left[ \det(a_{ik})_{i \in \{1, \dots, l\}}^{k \in \{1, l\}} \det(b_{ik})_{i \in \{l+2, \dots, n\}}^{k \in \{l+1, \dots, n-1\}} \right]. \tag{16}$$

При  $j = \overline{l+1, n-1}$  будем иметь

$$\begin{aligned}
 \Delta_{l+1,j}(\lambda) &= \pm \left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{ll-1} & a_{ln} \end{vmatrix} \times \right. \\
 &\times \left. \begin{vmatrix} \lambda^{\varkappa_{l+21}} e^{\lambda \omega_l} [b_{l+2l}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{l+21}} e^{\lambda \omega_{j-1}} [b_{l+2j-1}] & \lambda^{\varkappa_{l+21}} e^{\lambda \omega_{j+1}} [b_{l+2j+1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{l+21}} e^{\lambda \omega_{n-1}} [b_{l+2n-1}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\varkappa_{n1}} e^{\lambda \omega_l} [b_{nl}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{n1}} e^{\lambda \omega_{j-1}} [b_{nj-1}] & \lambda^{\varkappa_{n1}} e^{\lambda \omega_{j+1}} [b_{nj+1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{n1}} e^{\lambda \omega_{n-1}} [b_{nn-1}] \end{vmatrix} + \dots \right\} = \\
 &= \pm \lambda^{\sum_{i=l+2}^n \varkappa_{i1}} e^{\lambda \left( \sum_{k=l}^{n-1} \omega_k - \omega_j \right)} \left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{ll-1} & a_{ln} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} [b_{l+2l}] & \dots & [b_{l+2j-1}] & [b_{l+2j+1}] & \dots & [b_{l+2n-1}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [b_{nl}] & \dots & [b_{nj-1}] & [b_{nj+1}] & \dots & [b_{nn-1}] \end{vmatrix} + \dots \right\}
 \end{aligned}$$





$$+ \dots \left. \vphantom{\int} \right\} = \pm \lambda^{\sum_{i=l+2}^n \varkappa_{i1}} e^{\lambda \left( \sum_{k=l}^{n-1} \omega_k - \omega_j \right)} \left[ \det(a_{ik})_{i \in \{1, \dots, l-1, n\}}^{k \in \{1, \dots, l-1, n\}} \det(b_{ik})_{i \in \{l+2, \dots, n\}}^{k \in \{l, \dots, j-1, j+1, \dots, n-1\}} \right]. \quad (17)$$

Таким образом, из (14)–(17) получим

$$\begin{aligned} \Delta_{l+1}(\lambda) &= \lambda^{m-1 + \sum_{i=1}^l \varkappa_{i0} + \sum_{i=l+2}^n \varkappa_{i1}} e^{\lambda \sum_{k=l}^{n-1} \omega_k} \times \\ &\times \left( \sum_{j=1}^l \left[ \pm \det(a_{ik})_{i \in \{1, \dots, l\}}^{k \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, l, n\}} \det(b_{ik})_{i \in \{l+2, \dots, n\}}^{k \in \{l+1, \dots, n-1\}} \right] \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda(\omega_j \xi - \omega_l)} d\xi + \right. \\ &+ \sum_{j=l+1}^{n-1} \left[ \pm \det(a_{ik})_{i \in \{1, \dots, l\}}^{k \in \{1, \dots, l-1, n\}} \det(b_{ik})_{i \in \{l+2, \dots, n\}}^{k \in \{l, \dots, j-1, j+1, \dots, n-1\}} \right] \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda \omega_j (\xi-1)} d\xi + \\ &\left. + \left[ \pm \det(a_{ik})_{i \in \{1, \dots, l\}}^{k \in \{1, \dots, l\}} \det(b_{ik})_{i \in \{l+2, \dots, n\}}^{k \in \{l+1, \dots, n-1\}} \right] \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda(\omega_n \xi - \omega_l)} d\xi \right). \quad (18) \end{aligned}$$

Положим  $\lambda = r e^{i\varphi}$  и рассмотрим для определенности  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon]$ . В случае  $\varphi \in [\frac{3\pi}{2} + \varepsilon, 2\pi]$  проводим аналогичные рассуждения. Используя неравенство Коши – Буняковского, получим при  $j = \overline{1, n-1}$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda \omega_j (\xi-1)} d\xi \right| &\leq \int_0^1 |h_m(\xi, \lambda)| e^{r \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega_1 (\xi-1)} d\xi \leq \left( \int_0^1 |h_m(\xi, \lambda)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left( \int_0^1 e^{2r \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega_1 (\xi-1)} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{|\lambda|^{m-k}} \|h_k\|_{L_2[0,1]} \frac{1}{\sqrt{2r \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega_1}} \left( 1 - e^{-2r \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega_1} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\sqrt{|\lambda|}}. \quad (19) \end{aligned}$$

Следовательно, при  $j = \overline{1, l}$  справедливы оценки

$$\left| \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda(\omega_j \xi - \omega_l)} d\xi \right| = |e^{\lambda(\omega_j - \omega_l)}| \left| \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda \omega_j (\xi-1)} d\xi \right| \leq \frac{C}{\sqrt{|\lambda|}}. \quad (20)$$

Аналогично (19) можно получить и оценку

$$\left| \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda(\omega_n \xi - \omega_l)} d\xi \right| = |e^{-\lambda \omega_l}| \left| \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda \omega_n \xi} d\xi \right| \leq \frac{C}{\sqrt{|\lambda|}}. \quad (21)$$

Из (18)–(21) окончательно найдем

$$|\Delta_{l+1}(\lambda)| \leq C |\lambda|^{m - \frac{3}{2} + \sum_{i=1}^l \varkappa_{i0} + \sum_{i=l+1}^n \varkappa_{i1} - \varkappa_{l+1}} \left| e^{\lambda \sum_{k=l}^{n-1} \omega_k} \right|.$$

Рассуждая аналогично (14)–(18), получим при  $i = \overline{l+2, n}$

$$|\Delta_i(\lambda)| \leq C |\lambda|^{m - \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^l \varkappa_{k0} + \sum_{k=l+1}^n \varkappa_{k1} - \varkappa_{i1}} \left| e^{\lambda \sum_{k=l}^{n-1} \omega_k} \right|.$$

На основании этих оценок, формул (9), (12) и предположений (10) в случае  $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$  будем иметь

$$|\Theta_i(\lambda)| = \left| \Delta_i(\lambda) / \Delta(\lambda) \right| \leq C |\lambda|^{m - \frac{3}{2} - \varkappa_{i1}}, \quad i = \overline{l+1, n},$$

т. е. утверждение леммы в этом случае доказано.



Пусть теперь  $\lambda \in \Pi_{\varepsilon}^{-}$ . В этом случае будем иметь:

$$U_i(y_j, \lambda) = \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \alpha_{isk} \omega_j^k \lambda^{s+k} = \lambda^{\varkappa_{i0}} \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \alpha_{isk} \omega_j^k = \lambda^{\varkappa_{i0}} a_{ij}, \quad i = \overline{1, l}, \quad j = \overline{1, n}; \quad (22)$$

$$U_i(y_j, \lambda) = \sum_{s+k \leq \varkappa_{i0}} \alpha_{isk} \omega_j^k \lambda^{s+k} + \sum_{s+k \leq \varkappa_{i1}} \beta_{isk} \omega_j^k \lambda^{s+k} e^{\lambda \omega_j} = \lambda^{\varkappa_{i0}} \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \alpha_{isk} \omega_j^k + O(\lambda^{\varkappa_{i0}-1}) +$$

$$+ e^{\lambda \omega_j} \sum_{s+k \leq \varkappa_{i1}} \beta_{isk} \omega_j^k \lambda^{s+k} = \lambda^{\varkappa_{i0}} \left( \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \alpha_{isk} \omega_j^k + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) = \lambda^{\varkappa_{i0}} [a_{ij}],$$

$$i = \overline{l+1, n}, \quad j = \overline{1, n-1}; \quad (23)$$

$$U_i(y_n, \lambda) = \sum_{s+k \leq \varkappa_{i0}} \alpha_{isk} \omega_n^k \lambda^{s+k} + \sum_{s+k \leq \varkappa_{i1}} \beta_{isk} \omega_n^k \lambda^{s+k} e^{\lambda \omega_n} = \sum_{s+k \leq \varkappa_{i0}} \alpha_{isk} \omega_n^k \lambda^{s+k} +$$

$$+ \lambda^{\varkappa_{i1}} e^{\lambda \omega_n} \sum_{s+k=\varkappa_{i1}} \beta_{isk} \omega_n^k + O(\lambda^{\varkappa_{i1}-1} e^{\lambda \omega_n}) = \lambda^{\varkappa_{i1}} e^{\lambda \omega_n} \left( \sum_{s+k=\varkappa_{i1}} \beta_{isk} \omega_n^k + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) =$$

$$= \lambda^{\varkappa_{i1}} e^{\lambda \omega_n} [b_{in}], \quad i = \overline{l+1, n}. \quad (24)$$

Подставим эти асимптотические формулы в  $\Delta(\lambda)$  и воспользуемся предположением (6). Получим

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^{\varkappa_{10}} a_{11} & \dots & \lambda^{\varkappa_{10}} a_{1n-1} & \lambda^{\varkappa_{10}} a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\varkappa_{l0}} a_{l1} & \dots & \lambda^{\varkappa_{l0}} a_{ln-1} & \lambda^{\varkappa_{l0}} a_{ln} \\ \lambda^{\varkappa_{l+10}} [a_{l+11}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{l+10}} [a_{l+1n-1}] & \lambda^{\varkappa_{l+11}} e^{\lambda \omega_n} [b_{l+1n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\varkappa_{n0}} [a_{n1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{n0}} [a_{nn-1}] & \lambda^{\varkappa_{n1}} e^{\lambda \omega_n} [b_{nn}] \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^{\sum_{k=1}^n \varkappa_{k0}} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln-1} & a_{ln} \\ [a_{l+11}] & \dots & [a_{l+1n-1}] & [b_{l+1n}] e^{\lambda \omega_n} \lambda^{\varkappa_{l+11} - \varkappa_{l+10}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [a_{n1}] & \dots & [a_{nn-1}] & [b_{nn}] e^{\lambda \omega_n} \lambda^{\varkappa_{n1} - \varkappa_{n0}} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^{\sum_{k=1}^n \varkappa_{k0} + \varkappa_{n1} - \varkappa_{n0}} e^{\lambda \omega_n} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & \frac{a_{1n}}{\lambda^{\varkappa_{n1} - \varkappa_{n0}}} e^{-\lambda \omega_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln-1} & \frac{a_{ln}}{\lambda^{\varkappa_{n1} - \varkappa_{n0}}} e^{-\lambda \omega_n} \\ [a_{l+11}] & \dots & [a_{l+1n-1}] & [b_{l+1n}] \lambda^{\varkappa_{l+11} - \varkappa_{l+10} - \varkappa_{n1} + \varkappa_{n0}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [a_{n1}] & \dots & [a_{nn-1}] & [b_{nn}] \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по последнему столбцу и воспользуемся предположением (11). Получим

$$\Delta(\lambda) = \pm \lambda^{\sum_{k=1}^n \varkappa_{k0} + \varkappa_{n1} - \varkappa_{n0}} e^{\lambda \omega_n} \left\{ \frac{a_{1n}}{\lambda^{\varkappa_{n1} - \varkappa_{n0}}} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ [a_{l+11}] & \dots & [a_{l+1n-1}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [a_{n1}] & \dots & [a_{nn-1}] \end{vmatrix} e^{-\lambda \omega_n} + \dots + \frac{a_{ln}}{\lambda^{\varkappa_{n1} - \varkappa_{n0}}} \times \right.$$



$$\begin{aligned}
 & \times \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{l-11} & \dots & a_{l-1n-1} \\ [a_{l+11}] & \dots & [a_{l+1n-1}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [a_{n1}] & \dots & [a_{nn-1}] \end{vmatrix} e^{-\lambda\omega_n} + [b_{l+1n}] \lambda^{\varkappa_{l+11} - \varkappa_{l+10} - \varkappa_{n1} + \varkappa_{n0}} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ [a_{n1}] & \dots & [a_{nn-1}] \end{vmatrix} + \dots + \\
 & + [b_{nn}] \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ [a_{n-11}] & \dots & [a_{n-1n-1}] \end{vmatrix} \Bigg\} = \pm \lambda^{\sum_{k=1}^n \varkappa_{k0} + \varkappa_{n1} - \varkappa_{n0}} e^{\lambda\omega_n} \left\{ [b_{nn}] \det(a_{ij})_{i \in \{1, \dots, n-1\}}^{j \in \{1, \dots, n-1\}} + \right. \\
 & \left. + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\} = \pm \lambda^{\sum_{k=1}^n \varkappa_{k0} + \varkappa_{n1} - \varkappa_{n0}} e^{\lambda\omega_n} b_{nn} \det(a_{ij})_{i \in \{1, \dots, n-1\}}^{j \in \{1, \dots, n-1\}} [1]. \tag{25}
 \end{aligned}$$

Далее, подставляя (13), (22)–(24) в  $\Delta_i(\lambda)$  при  $i = \overline{l+1, n}$ , вынося из каждой строки  $\lambda$  в соответствующей степени и экспоненту из последнего столбца, а затем раскладывая полученный определитель по последнему столбцу и применяя оценки, аналогичные (19)–(21), получим

$$\begin{aligned}
 \Delta_i(\lambda) &= \lambda^{\sum_{k=1}^n \varkappa_{k0} - \varkappa_{i0} + m - 1} e^{\lambda\omega_n} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} e^{-\lambda\omega_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln-1} & a_{ln} e^{-\lambda\omega_n} \\ [a_{l+11}] & \dots & [a_{l+1n-1}] & [b_{l+1n}] \lambda^{\varkappa_{l+11} - \varkappa_{l+10}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [a_{i-11}] & \dots & [a_{i-1n-1}] & [b_{i-1n}] \lambda^{\varkappa_{i-11} - \varkappa_{i-10}} \\ \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda\omega_1 \xi} d\xi & \dots & \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda\omega_{n-1} \xi} d\xi & \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda(\omega_n \xi - 1)} d\xi \\ [a_{i+11}] & \dots & [a_{i+1n-1}] & [b_{i+1n}] \lambda^{\varkappa_{i+11} - \varkappa_{i+10}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [a_{n1}] & \dots & [a_{nn-1}] & [b_{nn}] \lambda^{\varkappa_{n1} - \varkappa_{n0}} \end{vmatrix} = \\
 &= \pm \lambda^{\sum_{k=1}^n \varkappa_{k0} - \varkappa_{i0} + m - 1} e^{\lambda\omega_n} \left\{ a_{1n} e^{-\lambda\omega_n} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln-1} \\ [a_{l+11}] & \dots & [a_{l+1n-1}] \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda\omega_1 \xi} d\xi & \dots & \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda\omega_{n-1} \xi} d\xi \\ \dots & \dots & \dots \\ [a_{n1}] & \dots & [a_{nn-1}] \end{vmatrix} + \dots + \right. \\
 & \left. + [b_{l+1n}] \lambda^{\varkappa_{l+11} - \varkappa_{l+10}} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln-1} \\ [a_{l+21}] & \dots & [a_{l+2n-1}] \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda\omega_1 \xi} d\xi & \dots & \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda\omega_{n-1} \xi} d\xi \\ \dots & \dots & \dots \\ [a_{n1}] & \dots & [a_{nn-1}] \end{vmatrix} + \dots + \right.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda(\omega_n \xi - 1)} d\xi \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln-1} \\ [a_{l+11}] & \dots & [a_{l+1n-1}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [a_{n1}] & \dots & [a_{nn-1}] \end{vmatrix} + \dots + \\
 & + [b_{nn}] \lambda^{\varkappa_{n1} - \varkappa_{n0}} \left. \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln-1} \\ [a_{l+11}] & \dots & [a_{l+1n-1}] \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda \omega_1 \xi} d\xi \dots \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda \omega_{n-1} \xi} d\xi \\ \dots & \dots & \dots \\ [a_{n-11}] & \dots & [a_{n-1n-1}] \end{vmatrix} \right\} = \\
 & = O \left( |\lambda|^{\sum_{k=1}^n \varkappa_{k0} - \varkappa_{i0} + m - \frac{3}{2} + \max\{0, \varkappa_{n1} - \varkappa_{n0}\}} |e^{\lambda \omega_n}| \right).
 \end{aligned}$$

На основании этих оценок, формул (9), (25) и предположений (11) в случае  $\lambda \in \Pi_{\varepsilon}^{-}$  будем иметь:

$$|\Theta_i(\lambda)| = |\Delta_i(\lambda)/\Delta(\lambda)| \leq C |\lambda|^{m - \frac{3}{2} - \varkappa_{i0} - \varkappa_{n1} + \varkappa_{n0} + \max\{0, \varkappa_{n1} - \varkappa_{n0}\}}, \quad i = \overline{l+1, n},$$

т. е. утверждение леммы и в этом случае доказано.

Таким образом, лемма полностью доказана.  $\square$

**Следствие 1.** Если выполняются условия (6)–(7), (10)–(11) и  $\lambda \in \Pi_{\varepsilon}^{\pm}$ , то при  $|\lambda| \gg 1$  справедливы оценки

$$|\Theta_i(\lambda)| \leq C |\lambda|^{m - \frac{3}{2} - \varkappa_i}, \quad i = \overline{l+1, n}, \quad (26)$$

где  $\varkappa_i$  определены перед формулировкой теоремы 1.

### 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ КРАТНОЙ ПОЛНОТЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть  $\bar{h} := (\bar{h}_1(x), \dots, \bar{h}_m(x))^T \in L_2^m[0, 1]$  и ортогональна всем производным  $m$ -цепочкам. Тогда на основании утверждения 2 и того факта, что столбцы

$$\left( \frac{\partial^k \Phi_i(x, \lambda)}{\partial \lambda^k}, \dots, \frac{\partial^k (\lambda^{m-1} \Phi_i(x, \lambda))}{\partial \lambda^k} \right)^T \Big|_{\lambda=\lambda_\nu},$$

где  $i = \overline{l+1, n}$ ,  $k = \overline{0, s}$ ,  $m \in \{1, \dots, n\}$ , являются производными  $m$ -цепочками для корневых функций, соответствующих с. з.  $\lambda_\nu$ , которые являются нулями  $\Delta(\lambda)$  кратности  $s+1$ , из (8)–(9) следует, что все особенности  $\Theta_i(\lambda)$  устранимы. Согласно оценкам (26) и теореме Лиувилля,  $\Theta_i(\lambda)$  есть полиномы степени  $m-2-\varkappa_i$  при  $m-2-\varkappa_i \geq 0$ , которые можно записать в виде

$$\Theta_i(\lambda) \equiv \lambda^{m-2-\varkappa_i} (\bar{h}, \zeta_{0i}) + \lambda^{m-3-\varkappa_i} (\bar{h}, \zeta_{1i}) + \dots + (\bar{h}, \zeta_{m-2-\varkappa_i i}),$$

где  $\zeta_{ji} \in L_2[0, 1]$  есть вполне определенные функции, а при  $m-2-\varkappa_i < 0$  справедливы тождества

$$\Theta_i(\lambda) \equiv 0.$$

В случае  $m-2-\varkappa_i \geq 0$  в дефектном подпространстве производных  $m$ -цепочек выберем подпространство  $H$ , ортогональное вектор-функциям  $\zeta_{ki}(x)$ ,  $k = \overline{0, m-2-\varkappa_i}$ ,  $i = \overline{l+1, n}$ . Пусть теперь  $\bar{h} \in H$ . Тогда  $\Theta_i(\lambda) \equiv 0$  и, значит,

$$\Delta_i(\lambda) = \int_0^1 \sum_{j=1}^m \lambda^{j-1} \Phi_i(x, \lambda) h_j(x) dx \equiv 0, \quad i = \overline{l+1, n}. \quad (27)$$



Так как в силу утверждения 1 система функций  $\Phi_{l+1}, \dots, \Phi_n$  является системой линейно-независимых решений уравнения  $\ell_0(y, \lambda) = 0$ , удовлетворяющих первым  $l$  краевым условиям (5), то из (27) следует тождество

$$\int_0^1 y(x, \lambda) \sum_{j=1}^m \lambda^{j-1} h_j(x) dx \equiv 0 \quad (28)$$

для любого решения  $y(x, \lambda)$  уравнения  $\ell_0(y, \lambda) = 0$ , удовлетворяющего первым  $l$  краевым условиям (5). Но эти решения находятся в виде

$$y(x, \lambda) = \gamma_1 e^{\lambda \omega_1 x} + \gamma_2 e^{\lambda \omega_2 x} + \dots + \gamma_n e^{\lambda \omega_n x}, \quad (29)$$

если удовлетворить первые  $l$  условий (5). Следовательно, приходим к следующей линейной однородной системе  $l$  уравнений для нахождения  $\gamma_j$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \gamma_j = 0, \quad i = \overline{1, l}. \quad (30)$$

Эту систему можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{l-1} a_{ij} \gamma_j + a_{in} \gamma_n = - \sum_{j=l}^{n-1} a_{ij} \gamma_j, \quad i = \overline{1, l}.$$

Если в правой части последней системы взять любые  $\gamma_l, \dots, \gamma_{n-1}$ , то в силу того что по условию теоремы  $\det(a_{ij})_{\substack{j \in \{1, \dots, l-1, n\} \\ i \in \{1, \dots, l\}}} \neq 0$ , можно однозначно определить  $\gamma_1, \dots, \gamma_{l-1}, \gamma_n$ .

Следовательно, для любого  $m \leq n - l + 1$  существует такая фундаментальная система решений  $(\gamma_1^i, \gamma_2^i, \dots, \gamma_n^i)^T$ ,  $i = \overline{1, n-l}$ , системы (30), что

$$\Gamma_{m-1} = \begin{vmatrix} \gamma_{n-m+1}^1 & \dots & \gamma_{n-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n-m+1}^{m-1} & \dots & \gamma_{n-m+1}^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (31)$$

и хотя бы одно из чисел  $\gamma_n^i$ ,  $i = \overline{1, n-l}$ , отлично от нуля.

На основании (28)–(29) для такой фундаментальной системы решений системы (30) справедливы тождества

$$\sum_{j=1}^n \int_0^1 \gamma_j^i e^{\lambda \omega_j x} \sum_{k=1}^m \lambda^{k-1} h_k(x) dx \equiv 0, \quad i = \overline{1, n-l}. \quad (32)$$

Покажем, что из этих  $n-l$  тождеств следует, что  $h_k = 0$  при  $k = \overline{1, m}$ . Будем следовать схеме рассуждений [8, с. 77–80] (см. также [9, с. 63–64]).

В силу предположений (7), согласно теории роста целых функций и того факта, что есть отличные от нуля  $\gamma_n^i$  из (32), следуют тождества

$$\sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j^i \int_0^1 e^{\lambda \omega_j x} \sum_{k=1}^m \lambda^{k-1} h_k(x) dx \equiv 0, \quad i = \overline{1, n-l}, \quad (33)$$

$$\int_0^1 e^{\lambda \omega_j x} \sum_{k=1}^m \lambda^{k-1} h_k(x) dx \equiv 0. \quad (34)$$

Разложим  $e^{\lambda \omega_j x}$  в ряд по степеням  $\lambda$

$$e^{\lambda \omega_j x} = 1 + \lambda \omega_j x + \frac{(\lambda \omega_j x)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda \omega_j x)^N}{N!} + \dots,$$



подставим в (33)–(34), представим левые части (33)–(34) в виде рядов по степеням  $\lambda$  и приравняем к нулю коэффициенты. Тогда при  $N \geq N_0$ , где  $N_0$  – достаточно большое число, получим

$$\begin{cases} \frac{\omega_n^N}{N!} \int_0^1 x^N h_1(x) dx + \dots + \frac{\omega_n^{N-m+1}}{(N-m+1)!} \int_0^1 x^{N-m+1} h_m(x) dx = 0, \\ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\gamma_j^i \omega_j^N}{N!} \int_0^1 x^N h_1(x) dx + \dots + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\gamma_j^i \omega_j^{N-m+1}}{(N-m+1)!} \int_0^1 x^{N-m+1} h_m(x) dx = 0, \quad i = \overline{1, n-1}. \end{cases} \quad (35)$$

Это линейная алгебраическая система относительно  $m$  неизвестных  $\int_0^1 x^N h_1(x) dx, \dots, \int_0^1 x^{N-m+1} h_m(x) dx$ .

Возьмем первые  $m$  уравнений в (35) и рассмотрим соответствующую систему с квадратной матрицей:

$$D_N^m = \begin{vmatrix} \frac{\omega_n^N}{N!} & \frac{\omega_n^{N-1}}{(N-1)!} & \dots & \frac{\omega_n^{N-m+1}}{(N-m+1)!} \\ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\gamma_j^1 \omega_j^N}{N!} & \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\gamma_j^1 \omega_j^{N-1}}{(N-1)!} & \dots & \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\gamma_j^1 \omega_j^{N-m+1}}{(N-m+1)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\gamma_j^{m-1} \omega_j^N}{N!} & \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\gamma_j^{m-1} \omega_j^{N-1}}{(N-1)!} & \dots & \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\gamma_j^{m-1} \omega_j^{N-m+1}}{(N-m+1)!} \end{vmatrix}.$$

Преобразуем этот определитель следующим образом:

$$\begin{aligned} D_N^m &= \pm \frac{\omega_n^{N-m+1}}{N!(N-1)! \dots (N-m+1)!} \times \\ &\times \begin{vmatrix} 1 & \omega_n & \dots & \omega_n^{m-2} & \omega_n^{m-1} \\ \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j^1 \omega_j^{N-m+1} & \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j^1 \omega_j^{N-m+2} & \dots & \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j^1 \omega_j^{N-1} & \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j^1 \omega_j^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j^{m-1} \omega_j^{N-m+1} & \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j^{m-1} \omega_j^{N-m+2} & \dots & \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j^{m-1} \omega_j^{N-1} & \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j^{m-1} \omega_j^N \end{vmatrix} = \\ &= \pm \frac{\omega_n^{N-m+1}}{N!(N-1)! \dots (N-m+1)!} \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \omega_n^{k-1} \times \\ &\times \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j^1 \omega_j^{N-m+1} & \dots & \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j^1 \omega_j^{N-m+k-1} & \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j^1 \omega_j^{N-m+k+1} & \dots & \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j^1 \omega_j^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j^{m-1} \omega_j^{N-m+1} & \dots & \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j^{m-1} \omega_j^{N-m+k-1} & \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j^{m-1} \omega_j^{N-m+k+1} & \dots & \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j^{m-1} \omega_j^N \end{vmatrix} = \\ &= \pm \frac{\omega_n^{N-m+1}}{N!(N-1)! \dots (N-m+1)!} \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \omega_n^{k-1} \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_m \leq n-1} \omega_{j_1}^{N-m+1} \omega_{j_2}^{N-m+2} \dots \times \\ &\times \omega_{j_{k-1}}^{N-m+k-1} \omega_{j_{k+1}}^{N-m+k+1} \dots \omega_{j_m}^N \begin{vmatrix} \gamma_{j_1}^1 & \dots & \gamma_{j_{k-1}}^1 & \gamma_{j_{k+1}}^1 & \dots & \gamma_{j_m}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{j_1}^{m-1} & \dots & \gamma_{j_{k-1}}^{m-1} & \gamma_{j_{k+1}}^{m-1} & \dots & \gamma_{j_m}^{m-1} \end{vmatrix} = \\ &= \pm \frac{\omega_n^{N-m+1}}{N!(N-1)! \dots (N-m+1)!} \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \omega_n^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{m-1} \leq n-1} \begin{vmatrix} \gamma_{i_1}^1 & \dots & \gamma_{i_{m-1}}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{i_1}^{m-1} & \dots & \gamma_{i_{m-1}}^{m-1} \end{vmatrix} \times \\ &\times \sum_{\{j_1, j_2, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_m\} = \{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}\}} (-1)^{I(j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_m)} \omega_{j_1}^{N-m+1} \omega_{j_2}^{N-m+2} \dots \omega_{j_{k-1}}^{N-m+k-1} \times \\ &\times \omega_{j_{k+1}}^{N-m+k+1} \dots \omega_{j_m}^N = \pm \frac{\omega_n^{N-m+1}}{N!(N-1)! \dots (N-m+1)!} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{m-1} \leq n-1} \begin{vmatrix} \gamma_{i_1}^1 & \dots & \gamma_{i_{m-1}}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{i_1}^{m-1} & \dots & \gamma_{i_{m-1}}^{m-1} \end{vmatrix} \times \\ &\times \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \omega_n^{k-1} \sum_{\{j_1, j_2, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_m\} = \{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}\}} (-1)^{I(j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_m)} \omega_{j_1}^{N-m+1} \omega_{j_2}^{N-m+2} \dots \times \\ &\times \omega_{j_{k-1}}^{N-m+k-1} \omega_{j_{k+1}}^{N-m+k+1} \dots \omega_{j_m}^N = \pm \frac{\omega_n^{N-m+1}}{N!(N-1)! \dots (N-m+1)!} \times \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \times \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{m-1} \leq n-1} \begin{vmatrix} \gamma_{i_1}^1 & \dots & \gamma_{i_{m-1}}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{i_1}^{m-1} & \dots & \gamma_{i_{m-1}}^{m-1} \end{vmatrix} \omega_{i_1}^{N-m+1} \omega_{i_2}^{N-m+1} \dots \omega_{i_{m-1}}^{N-m+1} \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \omega_n^{k-1} \times \\
 & \times \sum_{\{j_1, j_2, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_m\} = \{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}\}} (-1)^{I(j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_m)} \omega_{j_1}^0 \omega_{j_2}^1 \dots \omega_{j_{k-1}}^{k-2} \omega_{j_{k+1}}^k \dots \omega_{j_m}^{m-1} = \\
 & = \pm \frac{\omega_n^{N-m+1}}{N!(N-1)! \dots (N-m+1)!} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{m-1} \leq n-1} \begin{vmatrix} \gamma_{i_1}^1 & \dots & \gamma_{i_{m-1}}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{i_1}^{m-1} & \dots & \gamma_{i_{m-1}}^{m-1} \end{vmatrix} \omega_{i_1}^{N-m+1} \omega_{i_2}^{N-m+1} \dots \times \\
 & \times \omega_{i_{m-1}}^{N-m+1} \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \omega_n^{k-1} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{i_1}^{k-2} & \dots & \omega_{i_{k-1}}^{k-2} & \omega_{i_{k+1}}^{k-2} & \dots & \omega_{i_{m-1}}^{k-2} \\ \omega_{i_1}^k & \dots & \omega_{i_{k-1}}^k & \omega_{i_{k+1}}^k & \dots & \omega_{i_{m-1}}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{i_1}^{m-1} & \dots & \omega_{i_{k-1}}^{m-1} & \omega_{i_k}^{m-1} & \dots & \omega_{i_{m-1}}^{m-1} \end{vmatrix} = \\
 & = \pm \frac{\omega_n^{N-m+1}}{N!(N-1)! \dots (N-m+1)!} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{m-1} \leq n-1} \begin{vmatrix} \gamma_{i_1}^1 & \dots & \gamma_{i_{m-1}}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{i_1}^{m-1} & \dots & \gamma_{i_{m-1}}^{m-1} \end{vmatrix} \omega_{i_1}^{N-m+1} \omega_{i_2}^{N-m+1} \dots \times \\
 & \times \omega_{i_{m-1}}^{N-m+1} W(\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_{m-1}}, \omega_n) (-1)^{m-1},
 \end{aligned}$$

где  $I(j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_m)$  обозначает число инверсий перестановки индексов  $(i_1, i_2, \dots, i_{m-1})$  таких, что  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{m-1} \leq n-1$ .

Отсюда, из (7) и из (31) можно заключить, что слагаемое, соответствующее  $i_{m-1} = n-1$ ,  $i_{m-2} = n-2, \dots, i_1 = n-m+1$ , при  $N$  достаточно большом мажорирует сумму всех других слагаемых, т. е. имеет место равенство

$$D_N^m = \pm \frac{\omega_n^{N-m+1} \omega_{n-1}^{N-m+1} \omega_{n-2}^{N-m+1} \dots \omega_{n-m+1}^{N-m+1}}{N!(N-1)! \dots (N-m+1)!} \Gamma_{m-1} W(\omega_{n-m+1}, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n) (1 + o(1)),$$

где  $o(1) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Следовательно, при  $N \geq N_0$  получим  $D_N^m \neq 0$ . Тогда из системы (35) будем иметь при  $N \geq N_0$

$$\int_0^1 x^N h_1(x) dx = \int_0^1 x^{N-1} h_2(x) dx = \dots = \int_0^1 h_m(x) x^{N-m+1} dx = 0.$$

А отсюда следует, что  $h_k = 0$  при  $k = \overline{1, m}$  и, тем самым, теорема доказана.  $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

### Библиографический список

1. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // ДАН СССР. 1951. Т. 77, № 1. С. 11–14.
2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
3. Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. 1971. Т. 26, № 4. С. 15–41.
4. Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. М., 1983. № 9. С. 190–229.
5. Хромов А. П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1973. 242 с.
6. Шкаликов А. А. О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями // Функциональный анализ. 1976. Т. 10, № 4. С. 69–80.
7. Хромов А. П. О порождающих функциях вольтерровых операторов // Мат. сборник. 1977. Т. 102 (144), № 3. С. 457–472.
8. Вагабов А. И. Разложения в ряды Фурье по главным функциям дифференциальных операторов и их применения: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1988. 201 с.
9. Вагабов А. И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д, 1994. 160 с.
10. Рыжлов В. С. О кратной неполноте собственных функций пучков дифференциальных операторов, корни характеристического уравнения которых лежат на одном луче // Докл. Российской академии естественных наук. 2004. № 4. С. 72–79.

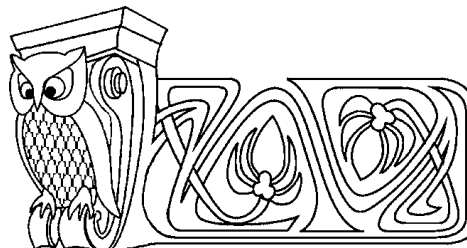


11. Рыхлов В. С. О полноте собственных функций одного класса пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 2009. № 6. С. 42–53.
12. Рыхлов В. С. О кратной полноте корневых функций одного класса пучков дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2010. Т. 10. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 24–34.
13. Рыхлов В. С. О свойствах собственных функций

- одного квадратичного пучка дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 31–44.
14. Шигаева О. В. Кратная неполнота системы собственных функций одного класса пучков дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 50–59.

УДК 517.946

## О КЛАССИЧЕСКОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ БИПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА



К. И. Худавердиев, М. Н. Гейдарова

Бакинский государственный университет,  
кафедра математики  
E-mail: karlenkhudaverdiyev@yahoo.com

Изучены вопросы существования и единственности классического решения одномерной смешанной задачи с однородными граничными условиями типа Рикье для одного класса полулинейных бипараболических уравнений четвёртого порядка. Методом априорных оценок доказана теорема существования в целом классического решения изучаемой смешанной задачи.

**Ключевые слова:** бипараболическое уравнение, классическое решение, существование в малом, существование в целом, априорная оценка.

On Classical Solvability of One-Dimensional Mixed Problem for Fourth Order Semilinear Biparabolic Equations

K. I. Khudaverdiyev, M. N. Heydarova

Baku State University,  
Chair of Mathematics  
E-mail: karlenkhudaverdiyev@yahoo.com

Existence and uniqueness of classical solution of one-dimensional mixed problem with Riquier type homogenous boundary conditions for one class of fourth order semilinear biparabolic equations are studied. A priori estimates method is used to prove the existence in large theorem for classical solution of mixed problem under consideration.

**Key words:** biparabolic equation, classical solution, existence in small, existence in large, a priori estimate.

### ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена изучению вопросов существования (как в малом, так и в целом) и единственности классического решения следующей одномерной смешанной задачи:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u(t, x) = F(t, x, u(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x), u_{xxx}(t, x), u_t(t, x), u_{tx}(t, x)) \quad (1)$$

$$(0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \pi),$$

$$u(0, x) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq \pi), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq \pi), \quad (2)$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, \pi) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (3)$$

где  $0 < T < +\infty$ ,  $F$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  — заданные функции, а  $u(t, x)$  — искомая функция, причём под классическим решением задачи (1)–(3) понимаем функцию  $u(t, x)$ , непрерывную в замкнутой области  $[0, T] \times [0, \pi]$  вместе с производными, входящими в уравнение (1), и удовлетворяющую всем условиям (1)–(3) в обычном смысле.

Отметим некоторые работы, в определённом смысле связанные с задачей (1)–(3).

В 1969 году в работе [1] Ю. И. Ковача рассмотрена задача (1)–(3) в случае, когда  $F = F(t, x, u(t, x))$  и специальным методом последовательных приближений доказана теорема существования и единственности ее классического решения.

В том же году в работе [2] Ю. И. Ковача рассмотрена задача (1)–(3) в случае, когда  $F = F(t, x, u(t - \tau(t, x), x))$ , где  $\tau(t, x) \geq 0$ ; принципом сжатых отображений доказано существование в малом ее классического решения.





В 2001 году рассмотрено модифицированное уравнение Буссинеска высокого порядка с затухающим членом вида [3]

$$u_{tt} + \alpha u_{txx} + \beta u_{xxxx} + \gamma(u^n)_{xx} = 0, \quad n \geq 3,$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — константы. Найдены решения в виде уединённых волн.

В работе [4] (2007) изучены вопросы существования и единственности обобщённого (в определённом смысле) решения задачи (1)–(3).

Вопросы существования и единственности решения почти всюду задачи (1)–(3) представлены в [5, 6] (2008).

## 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

В этом разделе приведём некоторые известные и установим ряд новых вспомогательных фактов.

**1.** Так как система  $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$  образует базис в пространстве  $L_2(0, \pi)$ , то очевидно, что каждое классическое решение задачи (1)–(3) имеет вид

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx, \quad (4)$$

$$u_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots; t \in [0, T]). \quad (5)$$

Тогда после применения метода Фурье нахождение функций  $u_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегродифференциальных уравнений:

$$u_n(t) = (1 + n^2 t) e^{-n^2 t} \varphi_n + t e^{-n^2 t} \psi_n + \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^{\pi} \mathcal{F}(u(\tau, x)) \sin nx (t - \tau) e^{-n^2(t-\tau)} \, dx d\tau \quad (6)$$

$$(n = 1, 2, \dots; t \in [0, T]),$$

$$\varphi_n \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx, \quad \psi_n \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (7)$$

$$\mathcal{F}(u(t, x)) \equiv F(t, x, u(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x), u_{xxx}(t, x), u_t(t, x), u_{tx}(t, x)), \quad (8)$$

причём нужно иметь в виду обозначения из (4) и (5).

**2.** Исходя из определения классического решения задачи (1)–(3), доказана

**Лемма.** Если  $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx$  — любое классическое решение задачи (1)–(3), то функции  $u_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) удовлетворяют системе (6).

**3.** С целью изучения вопроса существования классического решения задачи (1)–(3) систему (6) при предположениях

$$\mathcal{F}(u(t, x)), \frac{\partial}{\partial x} \{\mathcal{F}(u(t, x))\} \in C([0, T] \times [0, \pi]), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{\mathcal{F}(u(t, x))\} \in C([0, T]; L_2(0, \pi)), \quad (9)$$

$$\mathcal{F}(u(t, x))|_{x=0} = \mathcal{F}(u(t, x))|_{x=\pi} = 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad (10)$$

интегрируя по частям по  $x$  два раза в правой части (6), преобразуем к виду

$$u_n(t) = (1 + n^2 t) e^{-n^2 t} \varphi_n + t e^{-n^2 t} \psi_n - \frac{2}{\pi n^2} \int_0^t \int_0^{\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{\mathcal{F}(u(\tau, x))\} \sin nx (t - \tau) e^{-n^2(t-\tau)} \, dx d\tau \quad (n = 1, 2, \dots; t \in [0, T]). \quad (11)$$

**4.** Обозначим через  $B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$  совокупность всех функций  $u(t, x)$  вида (4), рассматриваемых на  $[0, T] \times [0, \pi]$ , для которых все функции  $u_n(t) \in C^{(l)}([0, T])$  и

$$J_T(u) \equiv \sum_{i=0}^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left( n^{\alpha_i} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(i)}(t)| \right)^{\beta_i} \right\}^{1/\beta_i} < +\infty,$$



где  $l \geq 0$  — целое число,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $1 \leq \beta_i \leq 2$  ( $i = \overline{0, l}$ ). Норму в этом множестве определим так:  $\|u\| = J_T(u)$ . Все эти пространства банаховы [7].

5. Очевидно, что если  $u(t, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B_{2,T}^k$ , то для всех  $t \in [0, T]$ :

$$\|u\|_{B_{1,t}^{k-1}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \max_{0 \leq \tau \leq t} |u_n(\tau)| \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left( n^k \max_{0 \leq \tau \leq t} |u_n(\tau)| \right)^2 \right\}^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|u\|_{B_{2,t}^k}; \quad (12)$$

аналогично

$$\forall u \in B_{2,2,T}^{i,j} \quad \|u\|_{B_{1,1,t}^{i-1,j-1}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|u\|_{B_{2,2,t}^{i,j}} \quad (0 \leq t \leq T), \quad (13)$$

где  $k, i, j$  — любые натуральные числа.

6. Пусть  $u(t, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B_{2,2,T}^{5,3}$ . Тогда, пользуясь оценкой (12) для  $k = 5$  и  $k = 3$ , для всех  $t \in [0, T]$  и  $x \in [0, \pi]$  имеем:

$$\begin{aligned} |\partial^i u(t, x) / \partial x^i| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^i |u_n(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^i \max_{0 \leq \tau \leq t} |u_n(\tau)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \max_{0 \leq \tau \leq t} |u_n(\tau)| \equiv \\ &\equiv \|u\|_{B_{1,t}^4} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|u\|_{B_{2,t}^5} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|u\|_{B_{2,2,t}^{5,3}} \quad (i = \overline{0, 4}), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} |\partial^{1+j} u(t, x) / \partial t \partial x^j| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^j |u'_n(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \max_{0 \leq \tau \leq t} |u'_n(\tau)| \equiv \\ &\equiv \|u_t\|_{B_{1,t}^2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|u_t\|_{B_{2,t}^3} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|u\|_{B_{2,2,t}^{5,3}} \quad (j = \overline{0, 2}). \end{aligned} \quad (15)$$

Из оценок (14), (15) и структуры пространства  $B_{2,2,T}^{5,3}$  следует, что

$$u(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x), u_{xxx}(t, x), u_{xxxx}(t, x), u_t(t, x), u_{tx}(t, x), u_{txx}(t, x) \in C([0, T] \times [0, \pi]). \quad (16)$$

Кроме того, очевидно, что для всех  $t \in [0, T]$ :

$$\int_0^{\pi} u_{xxxxx}^2(t, x) dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n^5 u_n(t))^2 \leq \frac{\pi}{2} \|u\|_{B_{2,t}^5}^2 \leq \frac{\pi}{2} \|u\|_{B_{2,2,t}^{5,3}}^2, \quad (17)$$

$$\int_0^{\pi} u_{txx}^2(t, x) dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n^3 |u'_n(t)|)^2 \leq \frac{\pi}{2} \|u_t\|_{B_{2,t}^3}^2 \leq \frac{\pi}{2} \|u\|_{B_{2,2,t}^{5,3}}^2. \quad (18)$$

Из (17) и (18) следует, что

$$u_{xxxxx}(t, x), u_{txx}(t, x) \in C([0, T]; L_2[0, \pi]). \quad (19)$$

7. Пусть для натурального числа  $k$ :

$$\varphi(x) \in C^{(k-1)}([0, \pi]), \quad \varphi^{(k)}(x) \in L_2(0, \pi), \quad \varphi^{(2s)}(0) = \varphi^{(2s)}(\pi) = 0 \quad \left( s = \overline{0, \left[ \frac{k-1}{2} \right]} \right).$$

Тогда с помощью интегрирования по частям, пользуясь неравенством Бесселя, легко получить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^k \varphi_n)^2 \leq \frac{2}{\pi} \left\| \varphi^{(k)}(x) \right\|_{L_2(0, \pi)}^2, \quad (20)$$

где числа  $\varphi_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) определены соотношением (7), причём очевидно, что оценка (20) верна и при  $k = 0$ , если  $\varphi(x) \in L_2(0, \pi)$ .

8. Условимся всюду здесь считать все величины вещественными, все функции действительными, а интегралы всюду понимать в смысле Лебега.



## 2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)–(3)

**Теорема 1.** Пусть

1.  $F(t, x, u_1, \dots, u_6) \in C([0, T] \times [0, \pi] \times (-\infty, \infty)^6)$ .
2. При любом  $R > 0$  в  $[0, T] \times [0, \pi] \times [-R, R]^6$

$$|F(t, x, u_1, \dots, u_6) - F(t, x, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_6)| \leq C_R \sum_{i=1}^6 |u_i - \tilde{u}_i|, \quad C_R = \text{const} > 0.$$

Тогда задача (1)–(3) не может иметь более одного классического решения.

Так как каждое классическое решение задачи (1)–(3) является и её решением почти всюду, то справедливость теоремы 1 следует из теоремы о единственности решения почти всюду задачи (1)–(3), доказанной в работе [6], причём под решением почти всюду задачи (1)–(3) понимаем функцию  $u(t, x)$ , обладающую свойствами:

- а)  $u(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x), u_{xxx}(t, x), u_t(t, x), u_{tx}(t, x) \in C([0, T] \times [0, \pi]); u_{xxxx}(t, x), u_{txx}(t, x), u_{tt}(t, x) \in C([0, T], L_2(0, \pi));$
- б) все условия (2) и (3) удовлетворяются в обычном смысле;
- в) уравнение (1) удовлетворяется почти всюду в  $(0, T) \times (0, \pi)$ .

## 3. СУЩЕСТВОВАНИЕ В МАЛОМ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)–(3)

В этом разделе с помощью принципа сжатых отображений доказывается следующая теорема существования в малом (т. е. справедливая при достаточно малых значениях  $T$ ) классического решения задачи (1)–(3)

**Теорема 2.** Пусть

1.  $\varphi(x) \in C^{(4)}([0, \pi]), \varphi^{(5)}(x) \in L_2(0, \pi)$  и  $\varphi^{(2s)}(0) = \varphi^{(2s)}(\pi) = 0$  ( $s = \overline{0, 2}$ );  $\psi(x) \in C^{(2)}([0, \pi]), \psi'''(x) \in L_2(0, \pi)$  и  $\psi(0) = \psi(\pi) = \psi''(0) = \psi''(\pi) = 0$ .
2.  $F(t, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_6), F_{\xi_i}(t, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_6)$  ( $i = \overline{0, 6}$ ),  $F_{\xi_i \xi_j}(t, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_6)$  ( $i, j = \overline{0, 6}$ )  $\in C([0, T] \times [0, \pi] \times (-\infty, \infty)^6)$ .
3.  $F(t, 0, 0, \xi_2, 0, \xi_4, 0, \xi_6) = F(t, \pi, 0, \xi_2, 0, \xi_4, 0, \xi_6) = 0$  для всех  $t \in [0, T], \xi_2, \xi_4, \xi_6 \in (-\infty, \infty)$ .
4. При любом  $R > 0$  в  $[0, T] \times [0, \pi] \times [-R, R]^6$

$$\left| F_{\xi_i \xi_j}(t, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_6) - F_{\xi_i \xi_j}(t, \xi_0, \tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_6) \right| \leq C_R \sum_{i=1}^6 |\xi_i - \tilde{\xi}_i|,$$

где  $i, j = \overline{0, 6}$ , а  $C_R > 0$  – постоянная.

Тогда существует в малом классическое решение задачи (1)–(3).

**Доказательство.** В пространстве  $B_{2,2,T}^{5,3}$  определим оператор  $H$ :

$$H(u(t, x)) = \tilde{u}(t, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(t) \sin nx,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(t) = & (1 + n^2 t) e^{-n^2 t} \varphi_n + t e^{-n^2 t} \psi_n - \frac{2}{\pi n^2} \int_0^t \int_0^\pi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \mathcal{F}(u(\tau, x)) \} \sin nx \times \\ & \times (t - \tau) e^{-n^2(t-\tau)} dx d\tau \quad (n = 1, 2, \dots, \quad t \in [0, T]), \end{aligned} \quad (21)$$

а числа  $\varphi_n, \psi_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и оператор  $\mathcal{F}$  определены соотношениями (7) и (8).

Тогда из (21) получаем, что для всех  $u, V \in B_{2,2,T}^{5,3}$ :

$$\|H(u)\|_{B_{2,2,T}^{5,3}}^2 = \|\tilde{u}\|_{B_{2,2,T}^{5,3}}^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(t) \sin nx \right\|_{B_{2,2,T}^{5,3}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left( n^5 \max_{0 \leq t \leq T} |\tilde{u}_n(t)| \right)^2 \leq$$



$$\begin{aligned}
 &\leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} (n^5 \varphi_n)^2 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} (n^3 \psi_n)^2 + \frac{9}{2\pi} \int_0^T \int_0^{\pi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\mathcal{F}(u(\tau, x))] \right\}^2 dx d\tau, \\
 \| (H(u))_t \|_{B_{2,2,T}^3}^2 &= \| \tilde{u}_t \|_{B_{2,2,T}^3}^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}'_n(t) \sin nx \right\|_{B_{2,2,T}^3}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left( n^3 \max_{0 \leq t \leq T} |\tilde{u}'_n(t)| \right)^2 \leq \\
 &\leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} (n^5 \varphi_n)^2 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} (n^3 \psi_n)^2 + \frac{15}{\pi} \int_0^T \int_0^{\pi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\mathcal{F}(u(\tau, x))] \right\}^2 dx d\tau, \\
 \| H(u) \|_{B_{2,2,T}^{5,3}}^2 &= \| \tilde{u} \|_{B_{2,2,T}^{5,3}}^2 = \left( \| \tilde{u} \|_{B_{2,2,T}^5} + \| \tilde{u}_t \|_{B_{2,2,T}^3} \right)^2 \leq 2 \| \tilde{u} \|_{B_{2,2,T}^5}^2 + 2 \| \tilde{u}_t \|_{B_{2,2,T}^3}^2 \leq \\
 &\leq a_0 + \frac{39}{\pi} \int_0^T \int_0^{\pi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\mathcal{F}(u(\tau, x))] \right\}^2 dx d\tau, \tag{22}
 \end{aligned}$$

где

$$a_0 \equiv 12 \sum_{n=1}^{\infty} (n^5 \varphi_n)^2 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (n^3 \psi_n)^2,$$

причём конечность  $a_0$  следует из (20) для  $k = 5$  и  $k = 3$ ; аналогично

$$\| H(u) - H(V) \|_{B_{2,2,T}^{5,3}}^2 \leq \frac{13}{\pi} \int_0^T \int_0^{\pi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\mathcal{F}(u(\tau, x))] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\mathcal{F}(V(\tau, x))] \right\}^2 dx d\tau. \tag{23}$$

Пусть  $K_R$  — любой фиксированный замкнутый шар пространства  $B_{2,2,T}^{5,3}$  радиуса  $R$  и с центром в нуле. Тогда в силу оценок (14), (15) и (17), (18), очевидно, что при любых  $u, V \in K_R$ :

$$\left\| \frac{\partial^i u(t, x)}{\partial x^i} \right\|_{C(Q_T)} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} R \quad (i = \overline{0, 4}), \quad \left\| \frac{\partial^{1+j} u(t, x)}{\partial t \partial x^j} \right\|_{C(Q_T)} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} R \quad (j = \overline{0, 2}), \tag{24}$$

$$\int_0^{\pi} u_{xxxxx}^2(t, x) dx \leq \frac{\pi}{2} R, \quad \int_0^{\pi} u_{txxx}^2(t, x) dx \leq \frac{\pi}{2} R \quad \forall t \in [0, T]; \tag{25}$$

$$\| \partial^i u(t, x) / \partial x^i - \partial^i V(t, x) / \partial x^i \|_{C(Q_T)} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \| u - V \|_{B_{2,2,T}^{5,3}} \quad (i = \overline{0, 4}), \tag{26}$$

$$\| \partial^{1+j} u(t, x) / \partial t \partial x^j - \partial^{1+j} V(t, x) / \partial t \partial x^j \|_{C(Q_T)} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \| u - V \|_{B_{2,2,T}^{5,3}} \quad (j = \overline{0, 2}), \tag{27}$$

$$\int_0^{\pi} \{ u_{xxxxx}(t, x) - V_{xxxxx}(t, x) \}^2 dx \leq \frac{\pi}{2} \| u - V \|_{B_{2,2,T}^{5,3}}^2 \quad \forall t \in [0, T], \tag{28}$$

$$\int_0^{\pi} \{ u_{txxx}(t, x) - V_{txxx}(t, x) \}^2 dx \leq \frac{\pi}{2} \| u - V \|_{B_{2,2,T}^{5,3}}^2 \quad \forall t \in [0, T], Q_T \equiv [0, T] \times [0, \pi]. \tag{29}$$

Пользуясь условиями 2, 4 теоремы, оценками (24)–(29) и развёрнутым выражением  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \mathcal{F}(u(\tau, x)) \}$ , получаем, что при любом  $u, V \in K_R$  для всех  $\tau \in [0, T]$ :

$$\int_0^{\pi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\mathcal{F}(u(\tau, x))] \right\}^2 dx \leq A_R^2, \tag{30}$$

$$\int_0^{\pi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\mathcal{F}(u(\tau, x))] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\mathcal{F}(V(\tau, x))] \right\}^2 dx \leq B_R^2 \| u - V \|_{B_{2,2,T}^{5,3}}^2, \tag{31}$$

где  $A_R > 0$  и  $B_R > 0$  — некоторые постоянные, зависящие от  $R$ .



Теперь, пользуясь оценками (30) и (31), из (22) и (23) получаем, что при любом  $u, V \in K_R$ :

$$\|H(u)\|_{B_{2,2,T}^{5,3}}^2 \leq a_0 + \frac{39}{\pi} A_R^2 T, \quad \|H(u) - H(V)\|_{B_{2,2,T}^{5,3}}^2 \leq \frac{13}{\pi} B_R^2 T \|u - V\|_{B_{2,2,T}^{5,3}}^2.$$

Пусть число  $R$  фиксировано и удовлетворяет условию

$$R > \sqrt{a_0} = \left\{ 12 \sum_{n=1}^{\infty} (n^5 \varphi_n)^2 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (n^3 \psi_n)^2 \right\}^{1/2}. \quad (32)$$

Тогда очевидно, что при достаточно малых значениях  $T$ :

$$a_0 + \frac{39}{\pi} A_R^2 T \leq R^2, \quad \frac{13}{\pi} B_R^2 T < 1.$$

Следовательно, для любого фиксированного  $R$ , удовлетворяющего условию (32), при достаточно малых значениях  $T$  оператор  $H$  преобразует шар  $K_R$  в себя и удовлетворяет в нём условию Липшица с коэффициентом меньше единицы, т.е. оператор  $H$  является в  $K$  сжатым. Тогда в силу принципа сжатых отображений при достаточно малых значениях  $T$  оператор  $H$  имеет в  $K_R$  единственную неподвижную точку:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B_{2,2,T}^{5,3},$$

причём функции  $u_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) удовлетворяют системе (11).

Легко показывается, что

$$\|u_{tt}(t, x)\|_{B_{2,T}^1}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left( n \max_{0 \leq t \leq T} |u_n''(t)| \right)^2 < +\infty,$$

т.е.  $u_{tt}(t, x) \in B_{2,T}^1$ . Отсюда следует, что

$$u_{tt}(t, x) \in C([0, T] \times [0, \pi]), \quad u_{ttx}(t, x) \in C([0, T]; L_2(0, \pi)). \quad (33)$$

Таким образом, функция  $u(t, x) \in B_{2,2,2,T}^{5,3,1}$  обладает свойствами (16), (19) и (33). Тогда, в силу условий 2 и 3 данной теоремы и свойств (16) и (19) функции  $u(t, x)$ , очевидно, что функция  $\mathcal{F}(u(t, x))$ , определённая соотношением (8), обладает свойствами (9) и (10). Поэтому функции  $u_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), удовлетворяющие системе (11), удовлетворяют и системе (6). Далее, пользуясь этим, легко показывается, что функция  $u(t, x)$  является классическим решением задачи (1)–(3). Теорема доказана.  $\square$

**Замечание 1.** Так как из условия 2 теоремы 2 следует выполнение всех условий теоремы 1, то при условиях теоремы 2 классическое решение задачи (1)–(3) не только существует в малом, но и оно единственное в целом.

**Замечание 2.** Как видно из процесса доказательства теоремы 2 (см. соотношение (32)), при условиях теоремы 2 о существовании в малом классического решения задачи (1)–(3) для доказательства существования и в целом классического решения задачи (1)–(3) достаточно показать, что всевозможные классические решения задачи (1)–(3), принадлежащие пространству  $B_{2,2,T}^{5,3}$ , априори ограничены в  $B_{2,2,T}^{5,3}$ .

#### 4. СУЩЕСТВОВАНИЕ В ЦЕЛОМ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)–(3)

В этом разделе с целью доказательства теоремы о существовании в целом (т.е. для любого конечного значения  $T$ ) классического решения задачи (1)–(3) и для полноты изложения приведём следующие три теоремы об априорной ограниченности (в определённых смыслах) решений почти всюду задачи (1)–(3), доказанные в работе [6], которые остаются в силе и для классических решений задачи (1)–(3).



**Теорема 3.** Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид

$$F(t, x, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_t, u_x) = f(t, x, u, u_x, u_{xx}, u_t, u_x) + f_0(x, u) + f_1(t, u_t)u_{tx} + (f_2(x, u_x))_x, \quad (34)$$

причём

а)  $f_0(x, u) \in C([0, \pi] \times (-\infty, \infty))$  и при любых  $x \in [0, \pi]$ ,  $u \in (-\infty, \infty)$  имеет место оценка

$$\int_0^u f_0(x, \xi) d\xi \equiv g_0(x, u) \leq C(1 + u^2),$$

б)  $f_1(t, V) \in C([0, T] \times (-\infty, \infty))$ , (35)

в)  $f_2(x, V) \in C^{(1)}([0, \pi] \times (-\infty, \infty))$  и при любых  $x \in [0, \pi]$ ,  $V \in (-\infty, \infty)$

$$-\int_0^V f_2(x, \xi) d\xi \equiv g_2(x, V) \leq C + \delta V^2, \quad 0 < \delta < \frac{1}{2\pi^2},$$

г)  $f(t, x, u_1, \dots, u_6) \in C([0, T] \times [0, \pi] \times (-\infty, \infty)^6)$  и в  $[0, T] \times [0, \pi] \times (-\infty, \infty)^6$

$$f(t, x, u_1, \dots, u_6)u_5 \leq C(1 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_5^2) + \delta_0 u_6^2, \quad 0 \leq \delta_0 < 2, \quad C > 0.$$

Тогда для всевозможных решений почти всюду  $u(t, x)$  задачи (1)–(3) справедливы априорные оценки:

$$\int_0^\pi u_t^2(t, x) dx \leq C_0, \quad \int_0^\pi u_{xx}^2(t, x) dx \leq C_0 \quad \forall t \in [0, T]; \quad \int_0^T \int_0^\pi u_{tx}^2(t, x) dx dt \leq C_0. \quad (36)$$

**Следствие 1.** Так как  $u(t, 0) = u(t, \pi)$  для любого  $t \in [0, T]$ , то существует такое число  $\xi = \xi_t \in (0, \pi)$ , что  $u_x(t, \xi_t) = 0$ . Тогда очевидно, что для всех  $t \in [0, T]$  и  $x \in [0, \pi]$ :

$$u_x(t, x) = \int_{\xi_t}^x u_{\xi\xi}(t, \xi) d\xi,$$

$$u_x^2(t, x) \leq \left\{ \int_0^\pi |u_{\xi\xi}(t, \xi)| d\xi \right\}^2 \leq \pi \int_0^\pi u_{\xi\xi}^2(t, \xi) d\xi = \pi \int_0^\pi u_{xx}^2(t, x) dx, \quad (37)$$

$$\int_0^\pi u_x^2(t, x) dx \leq \pi \int_0^\pi u_{xx}^2(t, x) dx = \pi^2 \int_0^\pi u_{xx}^2(t, x) dx. \quad (38)$$

Тогда, пользуясь соотношениям  $u(t, 0) = 0$  ( $0 \leq t \leq T$ ) и оценкой (38), получаем, что  $t \in [0, T]$  и  $x \in [0, \pi]$ :

$$u(t, x) = \int_0^x u_\xi(t, \xi) d\xi, \quad u^2(t, x) \leq \pi \int_0^\pi u_\xi^2(t, \xi) d\xi \leq \pi^3 \int_0^\pi u_{xx}^2(t, x) dx. \quad (39)$$

Таким образом, из второй априорной оценки (36), в силу оценок (39) и (37), следует справедливость априорных оценок:

$$\|u(t, x)\|_{C(Q_T)} \leq R_0, \quad \|u_x(t, x)\|_{C(Q_T)} \leq R_0. \quad (40)$$

**Замечание 3.** Как видно из (35), от функции  $f_1(t, V)$ , фигурирующей в (34), при  $|V| \rightarrow +\infty$  ничего не требуется, т. е. на порядок её роста при  $|V| \rightarrow +\infty$  никакого ограничения нет. Кроме того, как видно из формулировки теоремы 3, объединение всех функций, фигурирующих в правой части (34), в одну функцию  $f$  или же  $F$  нецелесообразно.

Далее, пользуясь априорными оценками (36) и, в частности, априорными оценками (40), в работе [6] доказана следующая теорема о более сильной, чем (36), априорной оценке для решений почти всюду задачи (1)–(3).



**Теорема 4.** Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 3.
2. При любом  $R > 0$  в  $[0, T] \times [0, \pi] \times [-R, R]^2 \times (-\infty, \infty)^4$

$$|F(t, x, u_1, \dots, u_6)| \leq C_6 \{1 + |u_3| (|u_3| + |u_3| |u_5| + u_5^2 + |u_6|) + |u_4| (1 + |u_5|) + |u_5|^3 + |u_5| |u_6| + |u_6|\}, \quad C_R > 0.$$

Тогда для всевозможных решений почти всюду  $u(t, x)$  задачи (1)–(3) справедлива априорная оценка:

$$\|u(t, x)\|_{B_{2,2,T}^{3,1}} \leq C_0. \quad (41)$$

**Следствие 2.** Из априорной оценки (41) в силу оценки (13) для  $i = 3, j = 1$  и структуры пространства  $B_{2,2,T}^{3,1}$  следует справедливость априорных оценок:

$$\|u(t, x)\|_{C(Q_T)}, \|u_x(t, x)\|_{C(Q_T)}, \|u_{xx}(t, x)\|_{C(Q_T)}, \|u_t(t, x)\|_{C(Q_T)} \leq R_0; \quad (42)$$

$$\int_0^\pi u_{xxx}^2(t, x) dx \leq R_0, \quad \int_0^\pi u_{tx}^2(t, x) dx \leq R_0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (43)$$

Кроме того, пользуясь теоремой 4, а по существу, априорными оценками (42) и (43), в работе [6] доказана следующая теорема о более сильной, чем (41), априорной оценке для решений почти всюду задачи (1)–(3).

**Теорема 5.** Пусть

1. Выполнены условия 2 и 3 теоремы 2.
2. Выполнены все условия теоремы 4.
3. Для любого  $R > 0$  в  $[0, T] \times [0, \pi] \times [-R, R]^3 \times (-\infty, \infty) \times [-R, R] \times (-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned} |F_{\xi_i}(t, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_6)| &\leq C_R (1 + \xi_4^2 + \xi_6^2) \quad (i = 0, 1, 2), \\ |F_{\xi_i}(t, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_6)| &\leq C_R (1 + |\xi_4| + |\xi_6|) \quad (i = 3, 5), \\ |F_{\xi_i}(t, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_6)| &\leq C_R \quad (i = 4, 6), \quad C_R > 0 \text{ — постоянная.} \end{aligned}$$

Тогда для всевозможных решений почти всюду  $u(t, x)$  задачи (1)–(3) справедлива априорная оценка:

$$\|u(t, x)\|_{B_{2,2,T}^{4,2}} \leq C_0. \quad (44)$$

**Следствие 3.** Из априорной оценки (44) в силу оценки (13) для  $i = 4, j = 2$  и структуры пространства  $B_{2,2,T}^{4,2}$  следует справедливость априорных оценок:

$$\left\| \frac{\partial^i u(t, x)}{\partial x^i} \right\|_{C(Q_T)} \leq R_0 \quad (i = \overline{0, 3}), \quad \left\| \frac{\partial^{1+j} u(t, x)}{\partial t \partial x^j} \right\|_{C(Q_T)} \leq R_0 \quad (j = 0, 1); \quad (45)$$

$$\int_0^\pi u_{xxxx}^2(t, x) dx \leq R_0, \quad \int_0^\pi u_{txx}^2(t, x) dx \leq R_0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (46)$$

**Замечание 5.** Так как каждое классическое решение задачи (1)–(3) является и её решением почти всюду, то все теоремы 3–5 и из них вытекающие следствия 1–3 остаются в силе и для классических решений задачи (1)–(3).

Наконец, пользуясь теоремой 2 о существовании в малом классического решения задачи (1)–(3) и теоремой 5 об априорной ограниченности в  $B_{2,2,T}^{4,2}$  всевозможных решений почти всюду (и, тем более, классических решений) задачи (1)–(3), докажем следующую теорему о существовании в целом классического решения задачи (1)–(3).

**Теорема 6.** Пусть выполнены все условия теорем 2, 3, условие 2 теоремы 4 и условие 3 теоремы 5. Тогда задача (1)–(3) имеет единственное классическое решение.

**Доказательство.** По теореме 2 классическое решение задачи (1)–(3) существует, по крайней мере, в малом, причём в силу замечания 1 оно единственное в целом.



Кроме того, как отмечено в замечании 2, при условиях теоремы 2 для доказательства существования и в целом классического решения задачи (1)–(3) достаточно показать априорную ограниченность в  $B_{2,2,T}^{5,3}$  всевозможных классических решений задачи (1)–(3), принадлежащих пространству  $B_{2,2,T}^{5,3}$ . Итак, пусть  $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx$  — любое классическое решение задачи (1)–(3), принадлежащее пространству  $B_{2,2,T}^{5,3}$ . Тогда в силу леммы из разд. 1 функции  $u_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) удовлетворяют системе (6).

Далее, так как из условий данной теоремы следует выполнение всех условий теоремы 5, то по этой же теореме 5 для всевозможных решений почти всюду задачи (1)–(3) и, тем более, для всевозможных классических решений  $u(t, x)$  задачи (1)–(3), принадлежащих пространству  $B_{2,2,T}^{5,3}$ , справедлива априорная оценка (44), из которой, как объяснено в следствии 3, следует справедливость априорных оценок (45) и (46).

Кроме того, очевидно, что при условиях данной теоремы для классического решения  $u(t, x) \in B_{2,2,T}^{5,3}$  задачи (1)–(3) функция  $\mathcal{F}(u(t, x))$ , определённая соотношением (8), удовлетворяет всем условиям (9) и (10). Тогда очевидно, что функции  $u_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), удовлетворяющие системе (6), удовлетворяют и системе (11). Пользуясь этим, совершенно аналогично (22) получаем, что

$$\|u\|_{B_{2,2,T}^{5,3}}^2 \leq a_0 + \frac{39}{\pi} \int_0^T \int_0^\pi \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\mathcal{F}(u(\tau, x))] \right\}^2 dx d\tau. \quad (47)$$

В силу априорных оценок (45) и (46), очевидно, что для всех  $\tau \in [0, T]$  и  $x \in [0, \pi]$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\mathcal{F}(u(\tau, x))] \right| &\leq C_1 + C_2 \{ u_{xxxx}^2(\tau, x) + u_{\tau xx}^2(\tau, x) + |u_{xxxxx}(\tau, x)| + |u_{\tau xxx}(\tau, x)| \}, \\ \int_0^\pi \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\mathcal{F}(u(\tau, x))] \right\}^2 dx &\leq 5C_1^2 \pi + 5C_2^2 \left\{ \int_0^\pi u_{xxxx}^4(\tau, x) dx + \right. \\ &\left. + \int_0^\pi u_{\tau xx}^4(\tau, x) dx + \int_0^\pi u_{xxxxx}^2(\tau, x) dx + \int_0^\pi u_{\tau xxx}^2(\tau, x) dx \right\}, \quad C_i > 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Далее, учитывая оценки (14) (для  $i = 4$ ), (15) (для  $j = 2$ ), (13) (для  $i = 5, j = 3$ ), (17), (18) и априорные оценки (46), для всех  $\tau \in [0, T]$  имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u_{xxxx}^4(\tau, x) dx &\leq \|u_{xxxx}(\tau, x)\|_{C([0,\pi])}^2 \int_0^\pi u_{xxxx}^2(\tau, x) dx \leq \|u\|_{B_{1,1,\tau}^{4,2}}^2 R_0 \leq \\ &\leq \frac{\pi^2}{6} \|u\|_{B_{2,2,\tau}^{5,3}}^2 R_0 = \frac{\pi^2}{6} R_0 \|u\|_{B_{2,2,\tau}^{5,3}}^2, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u_{\tau xx}^4(\tau, x) dx &\leq \|u_{\tau xx}(\tau, x)\|_{C([0,\pi])}^2 \int_0^\pi u_{\tau xx}^2(\tau, x) dx \leq \|u\|_{B_{1,1,\tau}^{4,2}}^2 R_0 \leq \\ &\leq \frac{\pi^2}{6} \|u\|_{B_{2,2,\tau}^{5,3}}^2 R_0 = \frac{\pi^2}{6} R_0 \|u\|_{B_{2,2,\tau}^{5,3}}^2, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\int_0^\pi u_{xxxxx}^2(\tau, x) dx \leq \frac{\pi}{2} \|u\|_{B_{2,2,\tau}^{5,3}}^2, \quad \int_0^\pi u_{\tau xxx}^2(\tau, x) dx \leq \frac{\pi}{2} \|u\|_{B_{2,2,\tau}^{5,3}}^2. \quad (51)$$

Теперь в силу оценок (49)–(51) из (48) для всех  $\tau \in [0, T]$  имеем:

$$\int_0^\pi \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\mathcal{F}(u(\tau, x))] \right\}^2 dx \leq 5\pi C_1^2 + 5C_2^2 \left( \frac{\pi^2}{3} R_0 + \pi \right) \|u\|_{B_{2,2,\tau}^{5,3}}^2. \quad (52)$$





Таким образом, в силу оценки (52), из (47) получаем, что для всех  $t \in [0, T]$ :

$$\|u\|_{B_{2,2,t}^{5,3}}^2 \leq a_0 + \frac{39}{\pi} 5\pi C_1^2 T + \frac{39}{\pi} 5C_2^2 \left( \frac{\pi^2}{3} R_0 + \pi \right) \int_0^t \|u\|_{B_{2,2,\tau}^{5,3}}^2 d\tau. \quad (53)$$

Из (53), применив неравенство Гронуолла – Беллмана, получаем

$$\|u\|_{B_{2,2,T}^{5,3}}^2 \leq (a_0 + 195TC_1^2) \exp \left\{ 195 \left( \frac{\pi}{3} R_0 + 1 \right) C_2^2 T \right\} \equiv C_3^2.$$

Таким образом, всевозможные классические решения  $u(t, x)$  задачи (1)–(3), принадлежащие пространству  $B_{2,2,T}^{5,3}$ , априори ограничены в  $B_{2,2,T}^{5,3}$ . Теорема доказана.  $\square$

### Библиографический список

1. Ковач Ю.И. О краевой задаче для оператора  $m_i$ -го порядка параболического или гиперболического вида // Украинский мат. журн. 1969. Т. 21, № 5. С. 579–593.
2. Ковач Ю.И. Об оценке решения нелинейной системы с запаздыванием, содержащей оператор  $m_i$ -го порядка параболического или гиперболического вида // Численный анализ. Киев, 1969. Вып. 2. С. 20–38.
3. Yan Zhen-Ya, Xie Fu-Ding, Zhang Hong-Qing. Symmetry reductions, integrability and solitary wave solutions to high-order modified Boussinesq equations with damping term // Commun Theor. Phys. 2001. Vol. 36, № 1. P. 1–6.
4. Худавердиев К.И., Гейдарова М.Н. Исследование обобщённого решения одномерной смешанной задачи для полулинейного бипараболического уравнения четвёртого порядка // Вестн. Бакин. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. 2007. № 1. С. 5–14.
5. Худавердиев К.И., Гейдарова М.Н. Исследование решения почти всюду одномерной смешанной задачи для нелинейного бипараболического уравнения четвёртого порядка // Вестн. Бакин. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. 2008. № 2. С. 5–15.
6. Khudaverdiyev K. I., Heydarova M. N. On existence in large for almost everywhere solution of one-dimensional mixed problem for fourth order semilinear bipolarabolic equation // Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of Nat. Acad. Sci. Azerb. 2008. Vol. XXIX. P. 79–96.
7. Худавердиев К.И. Исследование классического решения многомерной смешанной задачи для одного класса квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка // Учен. записки Азерб. гос. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. 1972. № 1. С. 3–27.



## МЕХАНИКА

УДК 534.2

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЛОСКОМ АКУСТИЧЕСКОМ СЛОЕ С КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНЫМИ ГИБКИМИ СТЕНКАМИ

**А. И. Вельмисова, М. В. Вильде, И. В. Кириллова**

Саратовский государственный университет,  
кафедра математической теории упругости и биомеханики  
E-mail: mv\_wilde@mail.ru

Рассматривается плоский акустический слой, одна из стенок которого содержит вставку конечной длины с другими свойствами материала. Изучаются распространение и отражение гармонических волн в таком слое. Источником колебаний является однородная волна, падающая из бесконечности. Решение задачи в трех областях (до вставки, в пределах вставки и после вставки) ищется в виде суммы однородных волн. Приведены результаты численного исследования зависимости коэффициента отражения по энергии от частоты.

**Ключевые слова:** мембрана, акустические волны, моды, отраженные волны, прошедшие волны.

#### **Propagation and Reflection of Harmonic Waves in a Plane Acoustic Layer with Non-Homogeneous Flexible Walls**

**A. I. Velmisova, M. V. Wilde, I. V. Kirillova**

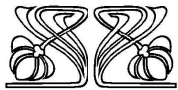
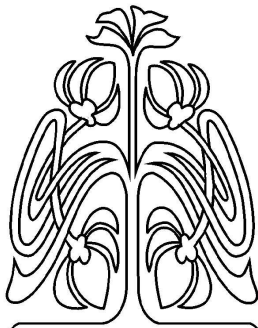
Saratov State University,  
Chair of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics  
E-mail: mv\_wilde@mail.ru

A plane acoustic layer bounded by elastic membranes, one of which has an insert with different material properties, is considered. The propagation and reflection of harmonic waves in such a layer is studied. The source of vibrations is an incident mode, coming from infinity. The solution in three regions (before the insert, under the insert, after the insert) is sought as modal expansion. The numerical results for the reflected power coefficient are presented.

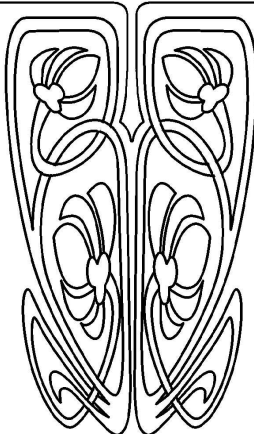
**Key words:** membrane, acoustic waves, modes, reflected waves, transmitted waves.

Изучение процессов распространения волн в продольно-неоднородных волноводах позволяет решить ряд актуальных задач, возникающих при проектировании различных инженерных конструкций и устройств неразрушающего контроля. В случае упругого твердого волновода простейшей задачей данного типа является задача о распространении гармонических волн в продольно-неоднородном упругом слое (см., например, работы [1–3]). В результате решения этой задачи были получены фундаментальные результаты, позволившие описать качественную картину прохождения и отражения волн в волноводах данного типа.

При моделировании ряда инженерных и биологических гидроупругих систем (например, кровеносных сосудов) возникает задача изучения распространения волн в продольно-неоднородных гидроупругих волноводах. Простейшим волноводом такого типа является плоский акустический слой с гибкими упругими стенками. Диспер-



**НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ**





сионные свойства такого волновода были изучены в работах [4–6]. В работе [7] рассмотрен продольно-неоднородный волновод с одной границей раздела свойств материала стенок. В данной работе рассматривается случай двух границ раздела свойств материала.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о распространении гармонических волн в плоском акустическом слое шириной  $2h$ , одна из стенок которого содержит вставку конечной длины с другими свойствами материала (рис. 1).

В безразмерных переменных уравнения движения мембран и акустической среды можно представить в виде



Рис. 1. Плоский акустический слой с кусочно-неоднородной стенкой

$$\begin{cases} \varepsilon_i^2 \frac{\partial w_i^{(j)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 w_i^{(j)}}{\partial \tau^2} + \kappa_i q_i^{(j)} = 0, \\ \frac{\partial^2 p^{(j)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 p^{(j)}}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 p^{(j)}}{\partial \tau^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial \tau^2} = -\frac{\partial p^{(j)}}{\partial \zeta}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = I, II, III$ . Безразмерные переменные в (1) введены по формулам

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \zeta = \frac{y}{h}, \quad \tau = \frac{c_0 t}{h}, \quad w_i^{(j)} = h w_i^{*(j)}, \quad v^{(j)} = h v^{*(j)}, \quad p^{(j)} = c_0^2 \rho_0 p^{*(j)}, \quad (2)$$

звездочки в (1) и далее опущены. В системе (1) индексом  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) обозначены величины, принадлежащие соответственно первой, второй и третьей мембране, индексом  $j$  ( $j = I, II, III$ ) — области акустической среды;  $w_i^{(j)}$  — поперечное смещение  $i$ -й мембраны в  $j$ -й области,  $c_i$  — скорость распространения упругой волны в  $i$ -й мембране,  $c_i = \sqrt{F_i/\tilde{\rho}_i}$ , где  $F_i$  — сила натяжения  $i$ -й мембраны,  $\tilde{\rho}_i = \rho_i h_i$ ,  $h_i$  — толщина  $i$ -й мембраны,  $\rho_i$  — плотность материала  $i$ -й мембраны;  $q_i^{(j)}$  — давление, оказываемое  $j$ -й акустической средой на  $i$ -тую мембрану,  $c_0$  — скорость распространения звука в акустической среде,  $\rho_0$  — плотность акустической среды,  $x$  и  $y$  — продольная и поперечная координаты,  $v^{(j)}$  — поперечное смещение  $j$ -й среды,  $p^{(j)}$  — акустическое давление в области  $j$ ,  $\varepsilon_i = c_i/c_0$ ,  $\varepsilon_i \ll 1$ ,  $\kappa_i = h\rho_0/h_i\rho_i$ .

На верхней и нижней мембранах должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} y = h : \quad & q_1^{(I)} = p^{(I)}, \quad q_3^{(II)} = p^{(II)}, \quad q_1^{(III)} = p^{(III)}, \quad w_1^{(I)} = v^{(I)}, \\ & w_3^{(II)} = v^{(II)}, \quad w_1^{(III)} = v^{(III)}; \\ y = -h : \quad & q_2^{(I)} = -p^{(I)}, \quad q_2^{(II)} = -p^{(II)}, \quad q_2^{(III)} = -p^{(III)}, \quad w_2^{(I)} = v^{(I)}, \\ & w_2^{(II)} = v^{(II)}, \quad w_2^{(III)} = v^{(III)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Граничные условия на стыках  $\xi = 0$  и  $\xi = L_0$  ( $L_0 = L/h$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} \xi = 0 : \quad & v^{(I)} = v^{(II)}, \quad \frac{\partial v^{(I)}}{\partial \xi} = \frac{\partial v^{(II)}}{\partial \xi}, \\ & w_1^{(I)} = w_3^{(II)}, \quad w_2^{(I)} = w_2^{(II)}, \quad \frac{\partial w_1^{(I)}}{\partial \xi} = \frac{\partial w_3^{(II)}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial w_2^{(I)}}{\partial \xi} = \frac{\partial w_2^{(II)}}{\partial \xi}; \\ \xi = L_0 : \quad & v^{(II)} = v^{(III)}, \quad \frac{\partial v^{(II)}}{\partial \xi} = \frac{\partial v^{(III)}}{\partial \xi}, \\ & w_3^{(II)} = w_1^{(III)}, \quad w_2^{(II)} = w_2^{(III)}, \quad \frac{\partial w_3^{(II)}}{\partial \xi} = \frac{\partial w_1^{(III)}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial w_2^{(II)}}{\partial \xi} = \frac{\partial w_2^{(III)}}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (4)$$



## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ И ОТРАЖЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим распространение гармонических волн с заданной частотой  $\omega$  и волновым числом  $\chi_n^{(j)}$ ,  $n = 1, 2, \dots, j = \text{I, II, III}$ , связанным с частотой дисперсионным уравнением, полученным в работе [5]. В этом случае граничные условия (4) эквивалентны следующим условиям для функции давления:

$$\begin{aligned} \xi = 0: \quad p^{(\text{I})} &= p^{(\text{II})}, & \frac{\partial p^{(\text{I})}}{\partial \xi} &= \frac{\partial p^{(\text{II})}}{\partial \xi}; \\ \xi = L_0: \quad p^{(\text{II})} &= p^{(\text{III})}, & \frac{\partial p^{(\text{II})}}{\partial \xi} &= \frac{\partial p^{(\text{III})}}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (5)$$

Функция давления в моде с номером  $n$ , распространяющейся в положительном направлении оси  $x$ , задается соотношением

$$p_r^{(j)} = C P_n^{(j)}(\zeta) e^{i(\omega\tau - \chi_n^{(j)}\xi)}, \quad (6)$$

где  $C$  — некоторая постоянная,  $P_n^{(j)}(\zeta)$  — собственная функция в области  $j$ , имеющая вид

$$P_n^{(j)}(\zeta) = \text{ch}(\beta_n^{(j)}\zeta) + \frac{\beta_n^{(j)}(\alpha_{2n}^{(j)})^2 \text{sh} \beta_n^{(j)} - \kappa_2 \omega^2 \text{ch} \beta_n^{(j)}}{\beta_n^{(j)}(\alpha_{2n}^{(j)})^2 \text{ch} \beta_n^{(j)} - \kappa_2 \omega^2 \text{sh} \beta_n^{(j)}} \text{sh}(\beta_n^{(j)}\zeta). \quad (7)$$

В (7) приняты следующие обозначения:

$$\beta_n^{(j)} = \sqrt{(\chi_n^{(j)})^2 - \omega^2}, \quad \alpha_{2n}^{(j)} = \sqrt{\varepsilon_2^2 (\chi_n^{(j)})^2 - \omega^2}. \quad (8)$$

Пусть на стык  $\xi = 0$  падает мода с номером  $l_0$ . Выражение для падающей волны имеет вид

$$p_r^{(\text{I})} = q_0 P_{l_0}^{(\text{I})}(\zeta) e^{i(\omega\tau - \chi_{l_0}^{(\text{I})}\xi)}. \quad (9)$$

Решения для отраженной волны в области I и прошедшей волны в области III представим в виде следующих линейных комбинаций:

$$p_l^{(\text{I})} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m P_m^{(\text{I})}(\zeta) e^{i(\omega\tau + \chi_m^{(\text{I})}\xi)}, \quad (10)$$

$$p^{(\text{III})} = \sum_{m=1}^{\infty} B_m P_m^{(\text{III})}(\zeta) e^{i(\omega\tau - \chi_m^{(\text{III})}(\xi - L_0))}. \quad (11)$$

Решение в области II будем искать в виде

$$p^{(\text{II})} = \sum_{m=1}^{\infty} \left( C_m e^{-i\chi_m^{(\text{II})}\xi} + D_m e^{-i\chi_m^{(\text{II})}(L_0 - \xi)} \right) P_m^{(\text{II})}(\zeta) e^{i\omega\tau}. \quad (12)$$

В (10)–(12)  $A_m, B_m, C_m, D_m$  — постоянные, требующие определения.

Введем скалярное произведение:

$$\langle f_1(\zeta), f_2(\zeta) \rangle_{\text{I,II}} = \int_{-1}^1 f_1 \overline{f_2} d\zeta + f_1'(1) \overline{f_2'(1)} \frac{\varepsilon_{1,3}^2}{\kappa_{1,3} \omega^2} + f_1'(-1) \overline{f_2'(-1)} \frac{\varepsilon_2^2}{\kappa_2 \omega^2}. \quad (13)$$

Подставим решения (10)–(12) в граничные условия (5), учитывая, что  $p^{(\text{I})} = p_r^{(\text{I})} + p_l^{(\text{I})}$ . Используя соотношение ортогональности из [6] (подобного рода соотношения ортогональности изучались также в работах [8–10]), получим систему для определения постоянных  $A_m$  и  $B_m$ :

$$\begin{aligned} - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \gamma_{mn} (\chi_n^{(\text{II})} + \chi_m^{(\text{I})}) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \gamma_{mn} (\chi_n^{(\text{II})} - \chi_m^{(\text{I})}) e^{-i\chi_n^{(\text{II})} L_0} &= q_0 \gamma_{l_0 n} (\chi_n^{(\text{II})} - \chi_{l_0}^{(\text{I})}), \\ \sum_{m=1}^{\infty} A_m \gamma_{mn} (\chi_n^{(\text{II})} - \chi_m^{(\text{I})}) e^{-i\chi_n^{(\text{II})} L_0} - \sum_{m=1}^{\infty} B_m \gamma_{mn} (\chi_n^{(\text{II})} + \chi_m^{(\text{I})}) &= -q_0 \gamma_{l_0 n} (\chi_n^{(\text{II})} + \chi_{l_0}^{(\text{I})}) \end{aligned} \quad (14)$$



и формулы для определения коэффициентов  $C_m$  и  $D_m$ :

$$C_n = \frac{q_0 \gamma_{l_0 n} (\chi_n^{(II)} + \chi_{l_0}^{(I)})}{2\chi_n^{(II)} \delta_{nn}} + \frac{1}{2\chi_n^{(II)} \delta_{nn}} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \gamma_{mn} (\chi_n^{(II)} - \chi_m^{(I)}),$$

$$D_n = \frac{1}{2\chi_n^{(II)} \delta_{nn}} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \gamma_{mn} (\chi_n^{(II)} - \chi_m^{(I)}),$$
(15)

где  $\gamma_{mn} = \langle P_m^{(I)}, P_n^{(II)} \rangle_{II}$ ,  $\delta_{nn} = \langle P_n^{(II)}, P_n^{(II)} \rangle_{II}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

После определения коэффициентов  $A_m$  и  $B_m$  можно сосчитать величины среднего за период потока энергии, проходящей через поперечное сечение волновода. Для падающей, отраженной и прошедшей волн величины потока энергии вычисляются по формулам

$$R_{\text{пад}} = \frac{h\rho_0 c_0^3 \chi_{l_0}^{(I)}}{2\omega} \langle P_{l_0}^{(I)}(\zeta), P_{l_0}^{(I)}(\zeta) \rangle_I, \quad R_{\text{отраж}} = \frac{h\rho_0 c_0^3}{2\omega} \sum_{n=1}^{M_0^{(I)}} \chi_n^{(I)} |A_n|^2 \langle P_n^{(I)}(\zeta), P_n^{(I)}(\zeta) \rangle_I,$$

$$R_{\text{прош}} = \frac{h\rho_0 c_0^3}{2\omega} \sum_{n=1}^{M_0^{(III)}} \chi_n^{(I)} |B_n|^2 \langle P_n^{(I)}(\zeta), P_n^{(I)}(\zeta) \rangle_I,$$
(16)

где  $M_0^{(j)}$  — число распространяющихся волн в  $j$ -й области на заданной частоте.

Из закона сохранения энергии имеем:

$$R_{\text{пад}} = R_{\text{отраж}} + R_{\text{прош}}.$$
(17)

При усечении бесконечной системы (14) контролировалась точность выполнения граничных условий (5) и соотношения (17).

### 3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Введем коэффициент отражения

$$K_R = \frac{R_{\text{отраж}}}{R_{\text{пад}}}.$$
(18)

Графики зависимости коэффициента  $K_R$  от частоты представлены на рис. 2–5. В расчетах принималось  $L_0 = 1$  и следующие параметры задачи:

задача А:  $\kappa_1 = 2$ ,  $\kappa_2 = 4$ ,  $\kappa_3 = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 0.1$ ,  $\varepsilon_2 = 0.2$ ,  $\varepsilon_3 = 0.1/\sqrt{2}$  (жирная линия);

задача В:  $\kappa_1 = 2$ ,  $\kappa_2 = 4$ ,  $\kappa_3 = 0.1$ ,  $\varepsilon_1 = 0.1$ ,  $\varepsilon_2 = 0.2$ ,  $\varepsilon_3 = 0.1/\sqrt{20}$  (тонкая линия);

задача С:  $\kappa_1 = 2$ ,  $\kappa_2 = 4$ ,  $\kappa_3 = 20$ ,  $\varepsilon_1 = 0.1$ ,  $\varepsilon_2 = 0.2$ ,  $\varepsilon_3 = \sqrt{0.1}$  (штриховая линия).

Случай А соответствует близким значениям поверхностных плотностей мембран 1 и 3 ( $\tilde{\rho}_3 = 2\tilde{\rho}_1$ ), в случае В поверхностная плотность мембраны 3 значительно превосходит поверхностную плотность мембраны 1 ( $\tilde{\rho}_3 = 20\tilde{\rho}_1$ ), в случае С мембрана 3 значительно легче, чем мембрана 1 ( $\tilde{\rho}_3 = 0.1\tilde{\rho}_1$ ). На рис. 2 и рис. 3 представлен коэффициент отражения в случае падения первой и второй фундаментальных мод, на рис. 4 и рис. 5 — в случае падения третьей и четвертой мод высшего порядка, соответственно. Острые пики на рис. 3–5 соответствуют частотам запирания мод высшего порядка. Как видно из рис. 3–5, наиболее чувствительной к наличию вставки является вторая фундаментальная мода (рис. 3). Это объясняется тем, что на высоких частотах вторая фундаментальная мода вырождается в поверхностную волну, распространяющуюся вдоль верхней стенки ( $y = h$ ) со скоростью, приблизительно равной скорости распространения волн в мембране.

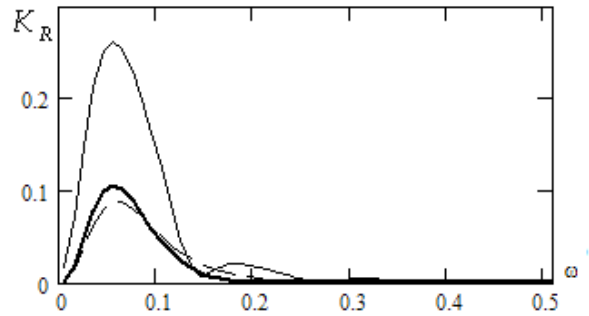


Рис. 2. Коэффициент отражения в случае падения первой моды

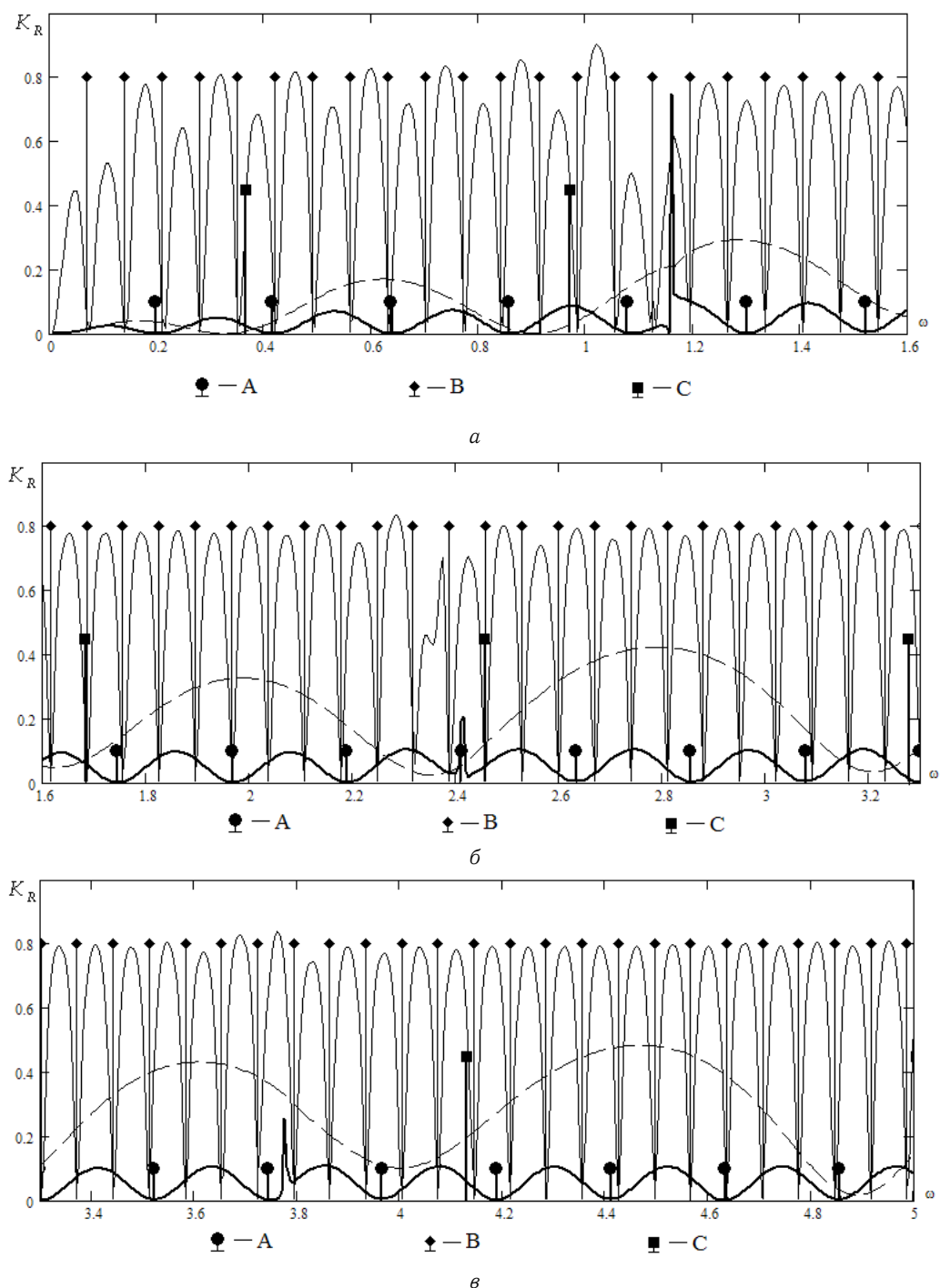


Рис. 3. Коэффициент отражения в случае падения второй моды в диапазоне частот: *a* — от 0 до 1.6, *б* — от 1.6 до 3.3, *в* — от 3.3 до 5

Минимумы коэффициента отражения  $K_R$  соответствуют так называемым «частотам пропускания», то есть частотам, на которых отражение практически отсутствует и основная доля энергии переходит в область III. Эти частоты приблизительно совпадают с резонансными частотами «вставки», которые определяются из уравнения

$$\chi_2^{(II)}(\omega) = \frac{n\pi}{L_0}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Корни уравнения (19) также представлены на рис. 3. В случаях А и В они достаточно точно определяют положение частот пропускания. В случае С (тонкая мембрана 3) частоты пропускания определяются уравнением (19) лишь приближенно. Это связано с тем, что в этом случае резонанс «вставки» сильно демпфируется неограниченной акустической средой.

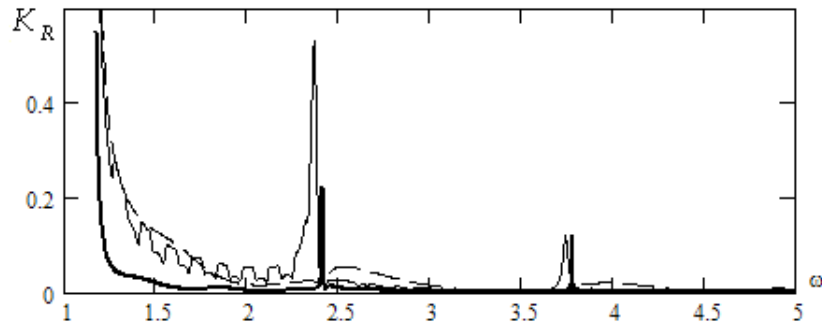


Рис. 4. Коэффициент отражения в случае падения третьей моды

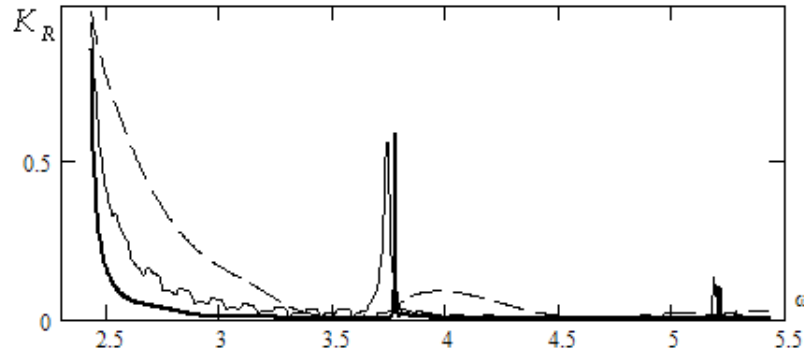


Рис. 5. Коэффициент отражения в случае падения четвертой моды

В заключение отметим, что, как видно из рис. 3 и формулы (19), положение частот пропускания и максимальное значение коэффициента отражения определяются поверхностной плотностью материала «вставки» и её длиной. Таким образом, данные о коэффициенте отражения второй фундаментальной моды можно использовать для диагностики наличия включений в стенке волновода.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-00804а, 11-01-00545а).*

#### Библиографический список

1. Гетман И. П., Лисицкий О. Н. Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуплос // ПММ. 1988. Т. 52, № 6. С. 1044–1048.
2. Гетман И. П., Устинов Ю. А. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. Ростов н/Д, 1993. 144 с.
3. Гринченко В. Т., Городецкая Н. С. Отражение волн Лэмба от границы раздела в составном волноводе // Прикладная механика. 1985. Т. 21, № 5. С. 121–125.
4. Каплунов Ю. Д., Кириллова И. В., Постнова Ю. А. Дисперсия волн в плоском акустическом слое с гибкими упругими стенками // Акустический журн. 2004. Т. 50, № 6. С. 802–807.
5. Постнова Ю. А. Дисперсия волн в плоском акустическом слое с упругими стенками с различными геометрическими и материальными свойствами // Механика деформируемых сред. Саратов, 2004. Вып. 15. С. 95–101.
6. Кириллова И. В., Постнова Ю. А. Волны в плоском акустическом слое с кусочно-неоднородными упругими свойствами // Смешанные задачи механики деформируемого тела : материалы V Рос. конф. с междунар. участием / под ред. акад. Н.Ф. Морозова. Саратов, 2005. С. 179–182.
7. Вельмисова А. И. Распространение и отражение гармонических волн в плоском акустическом слое с гибкими стенками в случае разрыва упругих свойств на одной из стенок // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов, 2010. Вып. 12. С. 136–140.
8. Warren D. P., Lawrie J. B., Mohamed I. M. Acoustic scattering in waveguides that are discontinuous in geometry and material property // Wave Motion. 2002. Vol. 36. P. 119–142.
9. Lawrie J. B. On eigenfunction expansions associated with wave propagation along ducts with wave-bearing boundaries // IMA J. Appl. Math. 2007. Vol. 72. P. 376–394.
10. Lawrie J. B. Comments on a class of orthogonality relation relevant to fluid-structure interaction // Meccanica. DOI 10.1007/s11012-011-9471-8. (Forthcoming).



УДК 539.3

## АСИМПТОТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДАЛЬНОГО ПОЛЯ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ В МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ

М. В. Вильде, Л. Ю. Коссович

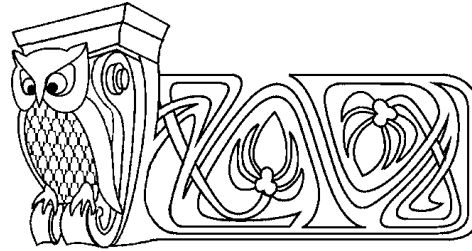
Саратовский государственный университет,  
кафедра математической теории упругости и биомеханики  
E-mail: mv\_wilde@mail.ru

Предложена асимптотическая модель, направленная на описание дальнего поля волны Рэлея в бесконечной многослойной пластине при действии нестационарной поверхностной нагрузки. При выводе уравнений модели используются общие асимптотические принципы. В результате получена система двух одномерных интегро-дифференциальных уравнений (головная система), описывающая распространение волн Рэлея вдоль поверхностей пластины, и ряд краевых задач для уравнений эллиптического типа, описывающих затухающее волновое поле в каждом из слоев. Головная система является замкнутой и может быть решена отдельно, так что задача по сути сводится к одномерной. При построении модели предполагается, что упругие свойства слоев удовлетворяют следующему условию: скорость той волны Рэлея, на которую ориентирована модель, меньше скоростей волн сдвига во всех слоях.

**Ключевые слова:** нестационарные упругие волны, поверхностные волны, волна Рэлея, асимптотические методы.

### ВВЕДЕНИЕ

Существование нестационарной волны Рэлея, возникающей при силовом воздействии на свободную поверхность упругого полупространства, было впервые установлено в классической работе Н. Лэмба [1]. В случае локализованного воздействия типа сосредоточенной силы данная волна выглядит как существенный всплеск НДС, быстро затухающий с глубиной и распространяющийся вдоль поверхности тела со скоростью стационарной волны Рэлея [2]. Исследование поля волны Рэлея имеет важное значение как для практических приложений (в таких областях, как сейсмология и дефектоскопия), так и с теоретической точки зрения, например для завершения построения асимптотической схемы расчленения нестационарного НДС пластин и оболочек в случае воздействия нормального типа [3]. Несмотря на то что за работой Лэмба последовало множество публикаций, посвященных различным обобщениям так называемой «задачи Лэмба» (см., например, обзоры в [4, 5]), исследования в этом направлении еще ведутся. В частности, продолжает оставаться актуальной проблема построения упрощенных прикладных теорий. Характер решений нестационарных задач (разрывы на фронтах, высокочастотная осцилляция), как правило, таков, что «непосредственная» численная реализация оказывается неэффективной или попросту невозможной, а анализ аналитического решения неупрощенных уравнений, если оно вообще существует, требует изощренного математического аппарата и громоздких выкладок. Так, например, анализ поля Рэлея до последнего времени был осложнен тем, что в традиционных формулировках динамических задач теории упругости волна Рэлея не присутствует в явном виде, и для ее выявления требовалось осуществить некоторые дополнительные преобразования. В работе [6] (для случая полупространства, находящегося в условиях плоской деформации) впервые была предложена асимптотическая модель, направленная непосредственно на описание поля волны Рэлея. Эта модель включает в себя одномерное волновое уравнение, содержащее в явном виде скорость волны Рэлея и описывающее распространение волны вдоль поверхности, и краевые задачи Неймана для потенциалов Ламе, описывающие затухание волнового поля вглубь полупространства. Приближенная теория [6] существенно облегчает количественный и качественный



**An Asymptotic Model for the Far-Field of Rayleigh Wave in Multilayered Plate**

M. V. Wilde, L. Yu. Kossovich

Saratov State University,  
Chair of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics  
E-mail: mv\_wilde@mail.ru

An asymptotic model is proposed, which allows to calculate far-field of Rayleigh wave in an infinite multilayered plate subjected to non-stationary surface load. The model is derived by using of the standard asymptotic techniques. As a result, a system of two one-dimensional integro-differential equations (head system) is obtained, which describes the propagation of Rayleigh waves along the plate surfaces. For the decaying wave fields in layers the boundary problems for elliptic equations are obtained. Head system is closed and can be solved separately, thus the problem is reduced to one-dimensional one. By deriving of the model it is assumed that the elastic properties of the layers satisfy the following condition: the speed of Rayleigh wave, for which the model is derived, is less than the shear wave speeds in all the layers.

**Key words:** non-stationary elastic waves, surface waves, Rayleigh wave, asymptotic methods.





анализ поля нестационарной волны Рэлея. Решения приближенных уравнений, представляющих собой классические уравнения математической физики, легко записываются в замкнутой форме. Кроме того, сама структура приближенной модели соответствует интуитивным представлениям о волне Рэлея, отражая её основные свойства: распространение вдоль поверхности с определенной скоростью и затухание с глубиной. Результаты, которые представлены в статье [6], распространены в работе [7] на случай дальнего поля Рэлея в бесконечном упругом слое при нормальном воздействии на его поверхности, в работе [8] — на случай полуполосы при действии торцевой нагрузки, в работах [9, 10] — на аналогичные задачи для цилиндрической оболочки.

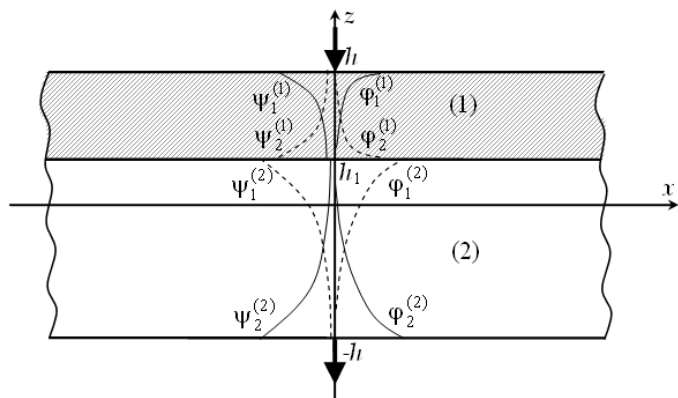
Данная работа посвящена построению асимптотической модели для описания дальнего поля волны Рэлея в бесконечной многослойной пластине при действии поверхностной нормальной нагрузки, не зависящей от одной из координат (плоская деформация). Исследование является развитием работ [6–10]. В первой части работы рассматривается двухслойная пластина, во второй части полученные результаты обобщаются на случай произвольного числа слоев. Методика вывода приближенных уравнений совпадает с использованной в [6–10], с тем отличием, что вместо техники символического интегрирования применяется эквивалентная ей итерационная техника. В результате получена система двух одномерных уравнений, описывающих распространение волны вдоль поверхностей пластины, и ряд краевых задач для уравнений эллиптического типа, описывающих затухающее волновое поле в каждом из слоев. «Головная система» является замкнутой и может быть решена отдельно (двумерные краевые задачи решаются на следующем шаге, когда решение «головной системы» уже известно), так что исходная задача, по сути, сводится к одномерной. При построении модели предполагается, что упругие свойства слоев удовлетворяют следующему условию: скорость той волны Рэлея, на которую ориентирована модель, меньше скоростей волн сдвига во всех слоях. В противном случае волновое поле в некоторых слоях не имеет затухающего характера, что делает невозможным непосредственное обобщение результатов работ [6–10]. Построение приближенной модели для таких случаев требует дополнительного исследования.

## 1. ДВУХСЛОЙНАЯ ПЛАСТИНА

### 1.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу определения нестационарного НДС бесконечной двухслойной пластины, занимающей в декартовых координатах  $(x, y, z)$  область  $(-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, |z| \leq h)$ , при этом положение поверхности раздела слоев характеризуется координатой  $z = h_1$  (рисунок).

Будем считать, что приложенная нагрузка не зависит от переменной  $y$ , тогда искомое НДС будет определяться как решение динамических уравнений плоской задачи теории упругости. Все характеристики, относящиеся  $k$ -му слою ( $k = \overline{1, n}$ , в первой части во всех формулах  $n = 2$ ), будем отмечать верхним (для искомых функций) или нижним (для постоянных параметров, в случае двух индексов — второй) индексом  $k$ . В частности, упругие константы Ламе и плотность материала обозначаются символами  $\lambda_k, \mu_k$  и  $\rho_k$  соответственно. В безразмерных переменных уравнения движения для каждого из слоев могут быть представлены в виде



Двухслойная бесконечная пластина

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \zeta^2} - \theta_k^2 \kappa_k^2 \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \tau^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \zeta^2} - \theta_k^2 \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \tau^2} = 0, \quad (1)$$

где  $\varphi^{(k)}, \psi^{(k)}$  — объемный и сдвиговой потенциалы Ламе,  $\theta_k = c_{2,1}/c_{2,k}$ ,  $\kappa_k = c_{2,k}/c_{1,k}$ ,  $\xi = x/h$ ,  $\zeta = z/h$ ,  $\tau = tc_{2,1}/h$ ,  $c_{1,k}$  и  $c_{2,k}$  — скорости волн расширения и сдвига соответственно,  $t$  — время.



Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{13}^{(k)}$  и вектора перемещений  $v_1^{(k)}, v_3^{(k)}$  выражаются через потенциалы  $\varphi^{(k)}, \psi^{(k)}$  по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k)} &= \mu_1 h^{-2} \frac{\gamma_k}{\kappa_k^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \xi^2} + (1 - 2\kappa_k^2) \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \zeta^2} + 2\kappa_k^2 \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} \right), \\ \sigma_{33}^{(k)} &= \mu_1 h^{-2} \frac{\gamma_k}{\kappa_k^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \zeta^2} + (1 - 2\kappa_k^2) \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \xi^2} - 2\kappa_k^2 \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} \right), \\ \sigma_{13}^{(k)} &= \mu_1 h^{-2} \gamma_k \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \zeta^2} \right), \\ v_1^{(k)} &= \frac{1}{h} \left( \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \zeta} \right), \quad v_3^{(k)} = \frac{1}{h} \left( \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \xi} \right), \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\gamma_k = \mu_k / \mu_1$ .

Запишем граничные условия на лицевых поверхностях и поверхности контакта:

$$\begin{aligned} \zeta = 1: \quad & \sigma_{13}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(1)} = P_1(\xi, \tau); \\ \zeta = r_1: \quad & \sigma_{13}^{(1)} = \sigma_{13}^{(2)}, \quad \sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)}, \quad v_1^{(1)} = v_1^{(2)}, \quad v_3^{(1)} = v_3^{(2)}; \\ \zeta = -1: \quad & \sigma_{13}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(2)} = P_2(\xi, \tau). \end{aligned} \tag{3}$$

В (3)  $P_1(\xi, \tau), P_2(\xi, \tau)$  – заданные напряжения,  $r_1 = h_1/h$ . Введем также обозначения  $r_0 = 1, r_n = -1$ . При  $\tau = 0$  ставятся нулевые начальные условия.

Безразмерная скорость волны Рэлея определяется из известного трансцендентного уравнения [2] в обозначениях данной работы принимающего вид

$$\left( 1 - \frac{1}{2} \theta_k^2 k_{R,k}^2 \right)^2 - \sqrt{1 - \theta_k^2 \kappa_k^2 k_{R,k}^2} \sqrt{1 - \theta_k^2 k_{R,k}^2} = 0. \tag{4}$$

Без ограничения общности можно принять  $k_{R,1} \leq k_{R,2}$ .

## 1.2. Вывод приближенных уравнений

Построим асимптотическую модель для описания дальнего поля волны Рэлея, распространяющейся вдоль поверхности  $\zeta = 1$  со скоростью, характеризуемой безразмерным параметром  $k_{R,1} = k_R$ . Следуя [6], введем малый параметр  $\varepsilon$  как отношение характерного размера  $h$  к расстоянию, пройденному волной Рэлея за достаточно большой промежуток времени:

$$\varepsilon = \frac{h}{k_R c_{2,1} T} \ll 1. \tag{5}$$

Примем также, что заданная нагрузка локализована (либо быстро изменяется) в области, размеры которой сравнимы с толщиной пластины. Тогда можно предположить, что для больших времен, когда фронты всех волн «расходятся» достаточно далеко, решение в окрестности условного фронта волны Рэлея будет иметь вид волнового профиля, медленно изменяющегося со временем и распространяющегося с постоянной скоростью  $k_R c_{2,1}$ . Следовательно, в подвижной системе координат, связанной со скоростью волны Рэлея, изменимость решения по времени должна быть мала по сравнению с изменением по пространственным координатам. Исходя из этих соображений, введем новые переменные

$$y = \xi - k_R \tau, \quad \tau_* = \varepsilon \tau, \tag{6}$$

где переменная  $\tau_*$  является масштабированной [11], и примем, что дифференцирование по переменным  $y, \zeta, \tau_*$  не меняет порядка искомых величин. Предположение об одинаковой изменчивости по переменным  $y$  и  $\zeta$  подсказано тем, что аналогичным свойством обладает решение для стационарной волны Рэлея. Анализ этого решения позволяет сформулировать ещё одно предположение, касающееся асимптотических свойств искомых функций. Рассмотрим, например, решение уравнения (1)



для потенциала  $\varphi^{(k)}$ , имеющее вид гармонической волны с безразмерной фазовой скоростью  $k_R$  и экспоненциально затухающее при  $\zeta \rightarrow \infty$  (знак «+») или при  $\zeta \rightarrow -\infty$  (знак «-»):

$$\varphi_0^{(k)} = C e^{-\chi \sqrt{1 - \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R^2} (\pm \zeta)} e^{i\chi(\xi - k_R \tau)} = C e^{-\chi \sqrt{1 - \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R^2} (\pm \zeta)} e^{i\chi y}, \quad (7)$$

где  $\chi$  — волновое число. Нетрудно убедиться, что производные от функции  $\varphi_0^{(k)}$  по пространственным переменным связаны соотношением

$$\frac{\partial \varphi_0^{(k)}}{\partial \zeta} = \pm i \sqrt{1 - \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R^2} \frac{\partial \varphi_0^{(k)}}{\partial y} = \pm i \sqrt{1 - \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R^2} \frac{\partial \varphi_0^{(k)}}{\partial \xi}. \quad (8)$$

Поскольку нестационарная волна Рэлея может быть представлена как суперпозиция гармонических волн, среди которых преобладают волны Рэлея, то естественно предположить, что и в нестационарной задаче потенциал  $\varphi^{(k)}$  в первом приближении будет удовлетворять соотношению вида (8):

$$\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial \zeta} = \pm i \sqrt{1 - \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R^2} \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial y} + O(\varepsilon). \quad (9)$$

Для потенциала  $\psi^{(k)}$  имеем аналогично

$$\frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \zeta} = \pm i \sqrt{1 - \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R^2} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial y} + O(\varepsilon). \quad (10)$$

В (9), (10) и далее считается, что искомые функции являются комплекснозначными функциями переменных  $y, \zeta$  (или  $\xi, \zeta$ ), действительная часть которых дает решение поставленной задачи.

Введем следующие обозначения:

$$k_{1,k} = \sqrt{1 - \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R^2}, \quad k_{2,k} = \sqrt{1 - \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R^2}, \quad k_{3,k}^2 = 1 - \frac{\theta_k^2 \kappa_k^2 k_R^2}{2}. \quad (11)$$

Из условия  $k_{R,1} \leq k_{R,2}$  следует, что все параметры (11) являются действительными для любых  $\lambda_k, \mu_k, \rho_k$ . Переходя в (1) к новым переменным (6), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} k_{1,k}^2 \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \zeta^2} + 2\varepsilon \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial y \partial \tau_*} + O(\varepsilon^2) &= 0, \\ k_{2,k}^2 \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \zeta^2} + 2\varepsilon \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial y \partial \tau_*} + O(\varepsilon^2) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В дальнейшем нам понадобятся уточненные соотношения (9), (10). Запишем их в виде

$$\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial \zeta} = \pm i k_{1,k} \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial y} + \varepsilon \varphi_\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \zeta} = \pm i k_{2,k} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial y} + \varepsilon \psi_\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (13)$$

где  $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$  — пока неизвестные функции. Предположим, что эти функции также удовлетворяют соотношениям (9), (10), и определим их методом итераций. Подставим (13) в (12) и выразим функции  $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$  через функции  $\varphi, \psi$ , требуя удовлетворения уравнений (12) с погрешностью  $O(\varepsilon^2)$ . В результате соотношения (13) запишутся в виде

$$\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial \zeta} = \pm i k_{1,k} \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial y} \pm i \varepsilon \frac{\theta_k^2 \kappa_k^2 k_R}{k_{1,k}} \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial \tau_*} + O(\varepsilon^2), \quad \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \zeta} = \pm i k_{2,k} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial y} \pm i \varepsilon \frac{\theta_k^2 \kappa_k^2 k_R}{k_{2,k}} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \tau_*} + O(\varepsilon^2). \quad (14)$$

Преобразуем выражения для напряжений  $\sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{13}^{(k)}$  из (2), переходя в них к новым переменным (6) и заменяя вторые производные по  $\zeta$  их выражениями, полученными из уравнений (12):

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(k)} &= 2\mu_1 h^{-2} \gamma_k \left( -k_{3,k}^2 \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial y \partial \zeta} - \varepsilon \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial y \partial \tau_*} + O(\varepsilon^2) \right), \\ \sigma_{13}^{(k)} &= 2\mu_1 h^{-2} \gamma_k \left( \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial y \partial \zeta} - k_{3,k}^2 \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial y^2} - \varepsilon \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial y \partial \tau_*} + O(\varepsilon^2) \right), \end{aligned} \quad (15)$$



Представим искомые функции в виде суммы

$$\varphi^{(k)} = \varphi_1^{(k)} + \varphi_2^{(k)}, \quad \psi^{(k)} = \psi_1^{(k)} + \psi_2^{(k)}, \quad (16)$$

где функции с нижним индексом 1 затухают при  $\zeta \rightarrow -\infty$ , а функции с нижним индексом 2 — при  $\zeta \rightarrow \infty$  (направления затухания схематически представлены на рисунке). Уравнения эллиптического типа для определения функций  $\varphi_1^{(k)}$ ,  $\varphi_2^{(k)}$ ,  $\psi_1^{(k)}$ ,  $\psi_2^{(k)}$  в первом приближении легко получаются из уравнений (12), если отбросить в них малые члены. В соотношениях (9), (10) и (14) функциям  $\varphi_1^{(k)}$ ,  $\psi_1^{(k)}$  соответствует знак «-», а функциям  $\varphi_2^{(k)}$ ,  $\psi_2^{(k)}$  — знак «+».

Рассмотрим граничные условия (3). Из выражений для  $k_{1,k}$ ,  $k_{2,k}$  (11) следует, что потенциалы  $\varphi_1^{(k)}$ ,  $\varphi_2^{(k)}$  затухают гораздо быстрее, чем потенциалы  $\psi_1^{(k)}$ ,  $\psi_2^{(k)}$  (так как  $\kappa_k^2 \leq 0.5$ ), поэтому при удовлетворении граничным условиям мы будем пренебрегать тем из потенциалов  $\varphi_1^{(k)}$ ,  $\varphi_2^{(k)}$ , который затухает при удалении от противоположной границы (см. рисунок) (например, при удовлетворении граничным условиям при  $\zeta = 1$  мы отбрасываем слагаемые с  $\varphi_2^{(1)}$ ), а также аналогичным ему потенциалом  $\psi_1^{(k)}$  или  $\psi_2^{(k)}$ , если он умножается на малый параметр  $\varepsilon$ .

Подставим представление (16) в выражение для напряжения  $\sigma_{13}^{(1)}$  и удовлетворим граничному условию для этого напряжения при  $\zeta = 1$ . Используя (14) и пренебрегая слагаемыми, малыми вследствие затухания соответствующих функций, приходим к выражениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial y^2} &= i \frac{k_{3,1}^2}{k_{1,1}} \left( \frac{\partial^2 \psi_1^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_2^{(1)}}{\partial y^2} \right) - \varepsilon \frac{\theta_1^2 \kappa_1^2 k_R}{k_{1,1}^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial y \partial \tau_*} + i \varepsilon \frac{\theta_1^2 k_R}{k_{1,1}} \frac{\partial^2 \psi_1^{(1)}}{\partial y \partial \tau_*} + O(\varepsilon^2), \\ \frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial y \partial \tau_*} &= i \frac{k_{3,1}^2}{k_{1,1}} \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial y \partial \tau_*} + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (17)$$

Теперь удовлетворим граничному условию при  $\zeta = 1$  для напряжения  $\sigma_{33}^{(1)}$ , подставляя в первое соотношение (15) представления (16), (17) и преобразуя смешанные производные от функций  $\psi_1^{(1)}$ ,  $\psi_2^{(1)}$  во вторые производные по  $y$  с помощью (14). Асимптотически главные члены в полученном выражении сократятся в силу уравнения (4), а оставшиеся малые члены дадут уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi_1^{(1)}}{\partial \zeta \partial \tau_*} + \varepsilon^{-1} B_1 \frac{\partial^2 \psi_2^{(1)}}{\partial y \partial \zeta} + O(\varepsilon) = -\varepsilon^{-1} \frac{B_1 P_1 h^2}{4\mu_1 \gamma_1}, \quad (18)$$

где

$$B_1 = \left[ \frac{\theta_1^2 k_R}{2} \left( \frac{\kappa_1^2}{k_{1,1}^2} + \frac{1}{k_{2,1}^2} - \frac{2}{k_{3,1}^2} \right) \right]^{-1}. \quad (19)$$

Следует отметить, что в уравнении (18) неявно присутствует одномерный волновой оператор, содержащий скорость волны Рэлея. Это нетрудно показать, дифференцируя (18) по  $y$  и возвращаясь к исходным переменным  $\xi$ ,  $\tau$ .

Выполняя аналогичные действия с граничными условиями при  $\zeta = -1$ , приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{\partial y^2} &= -i \frac{k_{3,2}^2}{k_{1,2}} \left( \frac{\partial^2 \psi_2^{(2)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1^{(2)}}{\partial y^2} \right) - \varepsilon \frac{\theta_2^2 \kappa_2^2 k_R}{k_{1,2}^2} \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{\partial y \partial \tau_*} - i \varepsilon \frac{\theta_2^2 k_R}{k_{1,2}} \frac{\partial^2 \psi_2^{(2)}}{\partial y \partial \tau_*} + O(\varepsilon^2), \\ \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{\partial y \partial \tau_*} &= -i \frac{k_{3,2}^2}{k_{1,2}} \frac{\partial^2 \psi_2^{(2)}}{\partial y \partial \tau_*} + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (20)$$

и

$$-\frac{B_2 D_2}{2} \frac{\partial^2 \psi_2^{(2)}}{\partial y \partial \zeta} - \varepsilon \frac{\partial^2 \psi_2^{(2)}}{\partial \zeta \partial \tau_*} - \frac{B_2'}{2} \frac{\partial^2 \psi_1^{(2)}}{\partial y \partial \zeta} + O(\varepsilon^2) = \frac{B_2 P_2 h^2}{4\mu_1 \gamma_2}, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} B_2 &= \left[ \frac{\theta_n^2 k_R}{2} \left( \frac{k_{3,n}^4 \kappa_n^2}{k_{1,n}^3 k_{2,n}} + \frac{k_{3,n}^4}{k_{1,n} k_{2,n}^3} - \frac{2k_{3,n}^2}{k_{1,n} k_{2,n}} \right) \right]^{-1}, \\ D_2 &= 1 - \frac{k_{3,n}^4}{k_{1,n} k_{2,n}}, \quad B_2' = B_2 \left( \frac{k_{3,n}^4}{k_{1,n} k_{2,n}} + 1 \right). \end{aligned} \quad (22)$$



Второе слагаемое в (21), вообще говоря, мало по сравнению с первым. Оно оставлено для того чтобы полученная модель была применима в случае  $k_{R,1} = k_{R,2}$ .

Уравнения (18) и (21) представляют собой уравнения для граничных значений функций  $\partial\psi_k^{(k)}/\partial\zeta$ . Из (17) и (20) следуют граничные условия для  $\varphi_k^{(k)}$ .

Рассмотрим теперь контактные условия при  $\zeta = r_1$ . Подставим в них, с учетом (16), выражения для перемещений (см. (2)) и напряжений (15), сохраняя в последних только асимптотически главные члены. Интегрируя условия для напряжений по  $y$  и преобразуя  $\partial\varphi_i^{(k)}/\partial\zeta$  в  $\partial\varphi_i^{(k)}/\partial y$  и  $\partial\psi_i^{(k)}/\partial y$  в  $\partial\psi_i^{(k)}/\partial\zeta$  с помощью соотношений (9) и (10), приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \left( k_{1,1} \frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial y} + \frac{k_{3,1}^2}{k_{2,1}} \frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial\zeta} + O(\varepsilon) \right) + \gamma_2 \left( k_{1,2} \frac{\partial\varphi_1^{(2)}}{\partial y} + \frac{k_{3,2}^2}{k_{2,2}} \frac{\partial\psi_1^{(2)}}{\partial\zeta} + O(\varepsilon) \right) = \\ & = \gamma_1 \frac{k_{3,1}^2}{k_{2,1}} \frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial\zeta} + \gamma_2 \frac{k_{3,2}^2}{k_{2,2}} \frac{\partial\psi_2^{(2)}}{\partial\zeta}, \\ & \gamma_1 \left( k_{3,1}^2 \frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial\zeta} + O(\varepsilon) \right) - \gamma_2 \left( k_{3,2}^2 \frac{\partial\varphi_1^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial\psi_1^{(2)}}{\partial\zeta} + O(\varepsilon) \right) = -\gamma_1 \frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial\zeta} + \gamma_2 \frac{\partial\psi_2^{(2)}}{\partial\zeta}, \quad (23) \\ & k_{1,1} \frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial y} + \frac{1}{k_{2,1}} \frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial\zeta} + k_{1,2} \frac{\partial\varphi_1^{(2)}}{\partial y} + \frac{1}{k_{2,2}} \frac{\partial\psi_1^{(2)}}{\partial\zeta} = \frac{1}{k_{2,1}} \frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial\zeta} + \frac{1}{k_{2,2}} \frac{\partial\psi_2^{(2)}}{\partial\zeta}, \\ & \frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial\zeta} - \frac{\partial\varphi_1^{(2)}}{\partial y} - \frac{\partial\psi_1^{(2)}}{\partial\zeta} = -\frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\psi_2^{(2)}}{\partial\zeta}, \end{aligned}$$

которую можно рассматривать как систему линейных функциональных уравнений относительно неизвестных

$$\frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial y}, \quad \frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial\zeta}, \quad \frac{\partial\varphi_1^{(2)}}{\partial y}, \quad \frac{\partial\psi_1^{(2)}}{\partial\zeta}.$$

Условие равенства нулю определителя системы (23) совпадает с уравнением для определения скорости волны Стоунли (см., например, [12]), в которое на место искомого параметра подставлено значение скорости волны Рэлея. Даже если волна Стоунли существует, её скорость не совпадает со скоростью волны Рэлея  $k_R$ . Следовательно, определитель системы (23) отличен от нуля, и её можно однозначно разрешить относительно упомянутых неизвестных. Полученные выражения дадут граничные условия для потенциалов  $\varphi_2^{(1)}$ ,  $\varphi_1^{(2)}$ ,  $\psi_2^{(1)}$ ,  $\psi_1^{(2)}$  при  $\zeta = r_1$ .

Отбрасывая в соотношениях (12), (15), (17)–(21) малые члены и возвращаясь к исходным переменным, получим приближенную модель, которая включает в себя:

А) Одномерные уравнения для функций

$$\Psi_1^{(1)}(\xi, \tau) = \frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial\zeta} \Big|_{\zeta=1}, \quad \Psi_2^{(n)}(\xi, \tau) = \frac{\partial\psi_2^{(n)}}{\partial\zeta} \Big|_{\zeta=-1}, \quad (24)$$

описывающие распространение волнового процесса вдоль наружных поверхностей:

$$\frac{\partial^2\Psi_1^{(1)}}{\partial\tau^2} - k_R^2 \frac{\partial^2\Psi_1^{(1)}}{\partial\xi^2} - 2k_R B_1 \frac{\partial^2\Psi_{2,h}^{(1)}}{\partial\xi^2} = \frac{k_R B_1 h^2}{2\mu_1 \gamma_1} \frac{\partial P_1}{\partial\xi}, \quad (25)$$

$$-k_R B_2 D_2 \frac{\partial^2\Psi_2^{(n)}}{\partial\xi^2} + \left( \frac{\partial^2\Psi_2^{(n)}}{\partial\tau^2} - k_R^2 \frac{\partial^2\Psi_2^{(n)}}{\partial\xi^2} \right) - k_R B_2' \frac{\partial^2\Psi_{1,h}^{(n)}}{\partial\xi^2} = \frac{k_R B_2 h^2}{2\mu_1 \gamma_n} \frac{\partial P_2}{\partial\xi}, \quad (26)$$

где

$$\Psi_{2,h}^{(1)}(\xi, \tau) = \frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial\zeta} \Big|_{\zeta=1}, \quad \Psi_{1,h}^{(n)}(\xi, \tau) = \frac{\partial\psi_1^{(n)}}{\partial\zeta} \Big|_{\zeta=-1}, \quad (27)$$

постоянные  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_2'$  и  $D_2$  определяются формулами (19) и (22).

В) Краевые задачи Неймана для функций  $\psi_i^{(k)}$  ( $i = 1, 2$ ): найти решение уравнения

$$k_{2,k}^2 \frac{\partial^2\psi_i^{(k)}}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\psi_i^{(k)}}{\partial\zeta^2} = 0 \quad (28)$$



в области  $D_i^{(k)}$ , удовлетворяющее граничному условию

$$\left. \frac{\partial \psi_i^{(k)}}{\partial \zeta} \right|_{L_i^{(k)}} = \Psi_i^{(k)} \quad (29)$$

при  $k = 1, i = 1$  и  $k = n, i = 2$ , или одному из условий

$$\left. \frac{\partial \psi_2^{(p)}}{\partial \zeta} \right|_{L_2^{(p)}} = S_{11}^{(p)} \left. \frac{\partial \psi_1^{(p)}}{\partial \zeta} \right|_{L_2^{(p)}} + S_{12}^{(p)} \left. \frac{\partial \psi_2^{(p+1)}}{\partial \zeta} \right|_{L_2^{(p)}}, \quad (30)$$

$$\left. \frac{\partial \psi_1^{(p+1)}}{\partial \zeta} \right|_{L_1^{(p+1)}} = S_{21}^{(p)} \left. \frac{\partial \psi_1^{(p)}}{\partial \zeta} \right|_{L_1^{(p+1)}} + S_{22}^{(p)} \left. \frac{\partial \psi_2^{(p+1)}}{\partial \zeta} \right|_{L_1^{(p+1)}}, \quad (31)$$

где  $p = 1$  ( $p$  — номер контактной поверхности).

С) Краевые задачи Дирихле для функций  $\varphi_i^{(p)}$  ( $i = 1, 2$ ): найти решение уравнения

$$k_{1,k}^2 \frac{\partial^2 \varphi_i^{(k)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i^{(k)}}{\partial \zeta^2} = 0 \quad (32)$$

в области  $D_i^{(k)}$ , удовлетворяющее граничному условию

$$\left. \frac{\partial \varphi_i^{(k)}}{\partial \xi} \right|_{L_i^{(k)}} = -\frac{k_{3,k}^2}{k_{1,k} k_{2,k}} \Psi_i^{(k)} \quad (33)$$

при  $k = 1, i = 1$  и  $k = n, i = 2$ , или одному из условий

$$\left. \frac{\partial \varphi_2^{(p)}}{\partial \xi} \right|_{L_2^{(p)}} = P_{11}^{(p)} \left. \frac{\partial \varphi_1^{(p)}}{\partial \xi} \right|_{L_2^{(p)}} + P_{12}^{(p)} \left. \frac{\partial \varphi_2^{(p+1)}}{\partial \xi} \right|_{L_2^{(p)}}, \quad (34)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_1^{(p+1)}}{\partial \xi} \right|_{L_1^{(p+1)}} = P_{21}^{(p)} \left. \frac{\partial \varphi_1^{(p)}}{\partial \xi} \right|_{L_1^{(p+1)}} + P_{22}^{(p)} \left. \frac{\partial \varphi_2^{(p+1)}}{\partial \xi} \right|_{L_1^{(p+1)}}, \quad (35)$$

где  $p = 1$ . В краевые задачи (28)–(31) и (32)–(35) переменная  $\tau$  входит как параметр.

Д) Выражения для напряжений и перемещений:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(k)} &= -2\mu_1 h^{-2} \gamma_k \left( k_{3,k}^2 \frac{\partial^2 \varphi_1^{(k)}}{\partial \xi^2} + k_{3,k}^2 \frac{\partial^2 \varphi_2^{(k)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_1^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 \psi_2^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} \right), \\ \sigma_{13}^{(k)} &= 2\mu_1 h^{-2} \gamma_k \left( \frac{\partial^2 \varphi_1^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 \varphi_2^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} - k_{3,k}^2 \frac{\partial^2 \psi_1^{(k)}}{\partial \xi^2} - k_{3,k}^2 \frac{\partial^2 \psi_2^{(k)}}{\partial \xi^2} \right), \\ \sigma_{11}^{(k)} &= 2\mu_1 h^{-2} \frac{\gamma_k}{k_{1,k}^2} \left[ (1 - k_{1,k}^2 - k_{3,k}^2) \left( \frac{\partial^2 \varphi_1^{(k)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2^{(k)}}{\partial \zeta^2} \right) + k_{1,k}^2 \left( \frac{\partial^2 \psi_1^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 \psi_2^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} \right) \right], \\ v_1^{(k)} &= \frac{1}{h} \left( \frac{\partial \varphi_1^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_2^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_1^{(k)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi_2^{(k)}}{\partial \zeta} \right), \quad v_3^{(k)} = \frac{1}{h} \left( \frac{\partial \varphi_1^{(k)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \varphi_2^{(k)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \psi_1^{(k)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi_2^{(k)}}{\partial \xi} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Области  $D_i^{(k)}$  определены следующим образом:

$$D_1^{(k)} : (\zeta < r_{k-1}, -\infty < \xi < \infty); \quad D_2^{(k)} : (\zeta > r_k, -\infty < \xi < \infty), \quad (37)$$

а линии  $L_i^{(k)}$  представляют собой границы полуплоскостей  $D_i^{(k)}$ :

$$L_1^{(k)} : (\zeta = r_{k-1}, -\infty < \xi < \infty); \quad L_2^{(k)} : (\zeta = r_k, -\infty < \xi < \infty), \quad (38)$$



причем  $L_1^{(k+1)} = L_2^{(k)}$ . Коэффициенты в (30), (31), (34), (35) определяются при решении системы (23) и имеют вид

$$\begin{aligned} S_{i_0 i_0}^{(p)} &= \frac{1}{\Delta_0^{(p)}} [(k_{3,i}^4 + k_{1,i} k_{2,i}) (k_{1,l} k_{2,l} - 1) \gamma_i^2 + s_{il} \gamma_i \gamma_l + (k_{1,l} k_{2,l} - k_{3,l}^4) (k_{1,i} k_{2,i} + 1) \gamma_i^2], \\ s_{il} &= (2 + k_{1,i} k_{2,l} - k_{1,l} k_{2,i}) k_{3,i}^2 k_{3,l}^2 - (2k_{1,l} k_{2,l} + k_{1,i} k_{2,i} - k_{1,l} k_{2,i}) k_{3,i}^2 + \\ &\quad + (2k_{1,i} k_{2,i} + k_{1,l} k_{2,l} - k_{1,i} k_{2,l}) k_{3,l}^2 - 2k_{1,i} k_{2,i} k_{1,l} k_{2,l} - k_{1,l} k_{2,i} + k_{1,i} k_{2,l}, \\ S_{i_0 l_0}^{(p)} &= \frac{2k_{2,i}}{\Delta_0^{(p)}} (k_{3,l}^2 - 1) [(k_{3,l}^2 k_{1,i} - k_{1,l}) \gamma_1^2 + (k_{3,i}^2 k_{1,l} - k_{1,i}) \gamma_l \gamma_i], \\ P_{i_0 i_0}^{(p)} &= \frac{2}{\Delta_0^{(p)}} [k_{3,i}^2 (1 - k_{1,l} k_{2,l}) \gamma_i^2 - (k_{3,i}^2 + 1) (k_{3,l}^2 - k_{1,l} k_{2,l}) \gamma_i \gamma_l + (k_{3,l}^4 - k_{1,l} k_{2,l}) \gamma_l^2], \\ P_{i_0 l_0}^{(p)} &= \frac{2}{\Delta_0^{(p)}} (k_{3,l}^2 - 1) [-(k_{3,l}^2 - k_{1,l} k_{2,i}) \gamma_l^2 + (k_{3,i}^2 - k_{1,l} k_{2,i}) \gamma_l \gamma_i], \end{aligned} \quad (39)$$

где  $l, i = p, p+1, l \neq i, i_0 = i - p + 1, l_0 = l - p + 1$ , и

$$\Delta_0^{(p)} = \begin{vmatrix} \gamma_p k_{1,p} & \gamma_p k_{3,p}^2 & \gamma_{1,p+1} k_{1,p+1} & \gamma_{p+1} k_{3,p+1}^2 \\ \gamma_p k_{3,p}^2 & \gamma_p k_{2,p} & -\gamma_{p+1} k_{3,p+1}^2 & -\gamma_{p+1} k_{2,p+1} \\ k_{1,p} & 1 & k_{1,p+1} & 1 \\ 1 & k_{2,p} & -1 & -k_{2,p+1} \end{vmatrix}$$

(в первой части в (39)  $p = 1$ ).

Уравнения (25), (26) неудобны тем, что они не отделяются от двумерных задач из-за наличия величин  $\Psi_{2,h}^{(1)}, \Psi_{1,h}^{(n)}$ . Выразим эти величины через  $\Psi_1^{(1)}, \Psi_2^{(n)}$ , последовательно решая краевые задачи для функций  $\psi_i^{(k)}$  (28)–(31). Поскольку нам требуются не сами функции  $\psi_i^{(k)}$ , а их производные по  $\zeta$ , то задачи (28)–(31) сводятся к задачам Дирихле. Решение последних записывается в виде интеграла Пуассона для полуплоскости (см., например, [13]), позволяющего восстановить значения функции, гармонической в полуплоскости  $z > 0$ , по её значениям на границе  $z = 0$ .

Подставляя записанные с помощью интеграла Пуассона выражения для  $\Psi_{2,h}^{(1)}, \Psi_{1,h}^{(2)}$  в (25), (26), приходим к системе двух одномерных интегродифференциальных уравнений относительно функций  $\Psi_1^{(1)}, \Psi_2^{(n)}$ . Эту систему можно записать как систему для составляющих перерезывающего усилия. Используя (28), представим выражение для напряжения  $\sigma_{13}^{(k)}$  из (36) в виде

$$\sigma_{13}^{(k)} = 2\mu_1 h^{-2} \gamma_k \left( \frac{\partial^2 \varphi_1^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 \varphi_2^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{k_{3,k}^2}{k_{2,k}^2} \frac{\partial^2 \psi_1^{(k)}}{\partial \zeta^2} + \frac{k_{3,k}^2}{k_{2,k}^2} \frac{\partial^2 \psi_2^{(k)}}{\partial \zeta^2} \right), \quad (40)$$

позволяющем вычислить в явном виде интегралы в выражении для перерезывающего усилия. Пренебрегая членами, малыми вследствие затухания потенциалов при удалении от соответствующих границ, приходим, учитывая граничные условия (33), к следующему выражению:

$$N_1 = h \left[ \int_{-1}^{r_1} \sigma_{13}^{(2)} d\zeta + \int_{r_1}^1 \sigma_{13}^{(1)} d\zeta \right] \approx 2\mu_1 h^{-1} (K_{N,1} \Psi_1^{(1)} - K_{N,2} \Psi_2^{(n)}) = N_1^{(1)} - N_1^{(2)}, \quad (41)$$

где

$$K_{N,1} = \gamma_1 \frac{\theta_1^4 k_R^4}{4k_{2,1}^2 k_{3,1}^2}, \quad K_{N,2} = \gamma_n k_{3,n}^2 \frac{k_{1,n} - k_{2,n}}{k_{1,n} k_{2,n}^2}. \quad (42)$$

Выражая величины  $\Psi_1^{(1)}, \Psi_2^{(n)}$  через  $N_1^{(1)}, N_1^{(2)}$ , получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N_1^{(1)}}{\partial \tau^2} - k_R^2 \frac{\partial^2 N_1^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{2k_R B_1 S_{11}^{(1)}}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_1^{(1)} (q_1 x_1 + q_1 x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 - \\ - \frac{2k_R B_1 S_{12}^{(1)} K_{N,1}}{\pi^2 K_{N,2}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_1^{(2)} (q_2 x_1 + q_1 x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 = \frac{hk_R B_1 K_{N,1}}{\gamma_1} \frac{\partial P_1}{\partial \xi}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & -k_R B_2 D_2 \frac{\partial^2 N_1^{(2)}}{\partial \xi^2} + \left( \frac{\partial^2 N_1^{(2)}}{\partial \tau^2} - k_R^2 \frac{\partial^2 N_1^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) - \\
 & - \frac{k_R B_2' S_{22}^{(1)}}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_1^{(2)}(q_2 x_1 + q_2 x_2 + \xi, \tau)}{(x_2^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 - \\
 & - \frac{k_R B_2' S_{21}^{(1)} K_{N,2}}{\pi^2 K_{N,1}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_1^{(1)}(q_1 x_1 + q_2 x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 = \frac{h k_R B_2 K_{N,2}}{\gamma_2} \frac{\partial P_2}{\partial \xi},
 \end{aligned} \tag{43}$$

где  $q_k = 2\eta_k k_{2,k}$ ,  $\eta_k = (r_{k-1} - r_k) / 2$ ,  $\eta_k$  — относительные полутолщины слоев.

Система (43) является замкнутой. Таким образом, задача, по сути, сводится к одномерной, подобно тому, как при построении длинноволновых приближений трехмерные динамические уравнения для пластины или оболочки сводятся к двумерным уравнениям для величин, не зависящих от толщины координаты (см. [14]). После нахождения решения системы (43) можно восстановить затухающее поле во всей области пластины, решая стандартные краевые задачи для уравнений эллиптического типа (28)–(31) и (32)–(35).

Вид уравнений (43) позволяет проанализировать характер особенностей решения в зависимости от приложенной нагрузки. В частности, если нагрузка имеет вид

$$P_k = \pm I_k \delta(\xi) H(\tau),$$

где  $\delta(\xi)$  — дельта-функция Дирака,  $H(\tau)$  — функция Хевисайда, то перерезывающая сила на фронте волны Рэлея имеет разрыв первого рода. Появление этого разрыва связано с бесконечным разрывом напряжений на границе. Внутри тела, в том числе и в точках, сколь угодно близких к границе, все напряжения и перемещения являются непрерывными, что соответствует условному характеру фронта волны Рэлея и тому факту, что внутри упругого тела разрывы не могут распространяться со скоростями, отличными от скоростей волн расширения и сдвига.

При применении построенной модели следует иметь в виду, что она не предназначена для описания длинноволновых колебаний, поэтому частные решения подобного рода должны быть отброшены. Также следует отметить, что волновой оператор во втором уравнении системы (43) необходим, строго говоря, только в случае  $k_{R,1} = k_{R,2}$  (равные скорости волны Рэлея), когда постоянная  $D_2$  обращается в нуль. Если же скорости волн Рэлея различны, то с течением времени их фронты расходятся достаточно далеко и перестают влиять друг на друга. Однако в случае очень близких значений скоростей возможны ситуации, когда даже в дальнем поле фронт второй волны попадает в окрестность фронта первой волны. В этом случае построенная модель при сохранении волнового оператора во втором уравнении описывает оба фронта, однако скорость движения второго фронта определяется приближенно — чем ближе значения скоростей, тем точнее. В случае существенного различия скоростей учет волнового оператора во втором уравнении становится неэффективным. Отбрасывая его и следующее слагаемое, малое по сравнению с первым, получим упрощенную систему:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 N_1^{(1)}}{\partial \tau^2} - k_R^2 \frac{\partial^2 N_1^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{2k_R B_1 S_{11}^{(1)}}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_1^{(1)}(q_1 x_1 + q_1 x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 - \\
 & - \frac{2k_R B_1 S_{12}^{(1)} K_{N,1}}{\pi^2 K_{N,2}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_1^{(2)}(q_2 x_1 + q_1 x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 = \frac{h k_R B_1 K_{N,1}}{\gamma_1} \frac{\partial P_1}{\partial \xi}, \\
 & -k_R B_2 D_2 \frac{\partial^2 N_1^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{k_R B_2' S_{21}^{(1)} K_{N,2}}{\pi^2 K_{N,1}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_1^{(1)}(q_1 x_1 + q_2 x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 = \frac{h k_R B_2 K_{N,2}}{\gamma_2} \frac{\partial P_2}{\partial \xi}.
 \end{aligned} \tag{44}$$

Критерием выбора между системами (43) и (44) является погрешность аппроксимации величины  $k_{R,2}$  выражением  $\sqrt{k_R^2 + k_R B_2 D_2}$ . Если она мала (порядка десятых долей процента), то следует пользоваться системой (43), в противном случае — системой (44).





Заметим также, что построенная модель без каких-либо изменений применима и для описания поля в окрестности фронта большей скорости волны Рэлея (для этого следует выбрать нумерацию из условия  $k_{R,1} > k_{R,2}$ ), если при этом выполняется неравенство  $k_{R,1} < \theta_2^{-1}$  (скорость волны Рэлея в первом слое больше скорости волны Рэлея во втором слое, но меньше скорости волны сдвига в нем).

## 2. ПЛАСТИНА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ СЛОЕВ

### 2.1. Формулировка асимптотической модели

Будем считать теперь, что рассматриваемая пластина имеет  $n$  слоев, положение плоскостей раздела которых характеризуется координатами  $z = h_p$ ,  $p = \overline{1, n-1}$ ,  $h > h_1 > \dots > h_{n-1} > -h$ . Постановка задачи из п.1.1 не изменится, за исключением граничных условий (3), которые примут вид

$$\begin{aligned} \zeta = 1 : \quad \sigma_{13}^{(1)} &= 0, & \sigma_{33}^{(1)} &= P_1(\xi, \tau); \\ \zeta = r_p : \quad \sigma_{13}^{(p)} &= \sigma_{13}^{(p+1)}, & \sigma_{33}^{(p)} &= \sigma_{33}^{(p+1)}, & v_1^{(p)} &= v_1^{(p+1)}, & v_3^{(p)} &= v_3^{(p+1)}; \\ \zeta = -1 : \quad \sigma_{13}^{(n)} &= 0, & \sigma_{33}^{(n)} &= P_2(\xi, \tau). \end{aligned} \quad (45)$$

где  $r_p = h_p/h$ ,  $p = \overline{1, n-1}$ . В уравнениях п.1.1 теперь следует полагать  $k = \overline{1, n}$ . Все безразмерные переменные и безразмерные параметры вводятся так же, как и в п.1.1.

Примем, что упругие параметры материалов слоев таковы, что выполняется условие  $k_{R,1} \leq k_{R,n}$ , и при этом  $k_{R,1} < \theta_k^{-1}$  для всех  $k = \overline{1, n}$  (скорость волны Рэлея в первом слое меньше всех скоростей волн сдвига в остальных слоях). Тогда параметры (11) будут действительными для любого  $k$ .

Из хода рассуждений при выводе приближенных уравнений в п.1.2 ясно, что для обобщения асимптотической модели (24)–(39) на случай многослойной пластины достаточно заменить слой (2) слоем ( $n$ ) и записать систему (23) для каждой поверхности контакта. Таким образом, уравнения (24)–(39) остаются в силе и для многослойной пластины, если полагать в них  $k = \overline{1, n}$ ,  $p = \overline{1, n-1}$ .

### 2.2. Вывод разрешающей системы

В случае многослойной пластины также можно получить замкнутую систему двух одномерных уравнений, описывающую распространение волнового процесса вдоль наружных поверхностей. Для этого следует выразить величины  $\Psi_{2,h}^{(1)}$ ,  $\Psi_{1,h}^{(n)}$  через  $\Psi_1^{(1)}$ ,  $\Psi_2^{(n)}$ , последовательно решая краевые задачи для функций  $\psi_i^{(k)}$  (28)–(31) с помощью интеграла Дирихле. Запишем, например, решение для  $\psi_1^{(1)}$ :

$$\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial \zeta} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_1^{(1)}((r_0 - \zeta)k_{2,1}x_1 + \xi, \tau)}{x_1^2 + 1} dx_1. \quad (46)$$

Для сокращения записи будем опускать параметр  $\tau$ . Введем обозначение

$$I_i f(a_1 x_i + \xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(a_1 x_i + \xi)}{x_i^2 + 1} dx_i, \quad (47)$$

где  $i$  — некоторое целое число,  $a_1$  — величина, не зависящая от  $x_i$  и  $\xi$ . Результат повторного применения оператора (47) с другим множителем при переменной интегрирования записывается в виде

$$I_j I_i f(a_1 x_i + a_2 x_j + \xi) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(a_1 x_i + a_2 x_j + \xi)}{(x_i^2 + 1)(x_j^2 + 1)} dx_i dx_j. \quad (48)$$

Если мы переименуем переменные  $x_i \leftrightarrow x_j$  и изменим порядок интегрирования, то придем к соотношению

$$I_j I_i f(a_1 x_i + a_2 x_j + \xi) = I_j I_i f(a_1 x_j + a_2 x_i + \xi). \quad (49)$$

Введем также обозначения

$$\Psi_{i,r_p}^{(k)} = \left. \frac{\partial \psi_i^{(k)}}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=r_p}. \quad (50)$$



С учетом введенных обозначений и формулы (46) имеем:

$$\Psi_{1,r_1}^{(1)} = I_1 \Psi_1^{(1)} (q_1 x_1 + \xi). \quad (51)$$

Аналогично получим

$$\Psi_{2,r_{n-1}}^{(n)} = I_1 \Psi_2^{(n)} (q_n x_1 + \xi). \quad (52)$$

Здесь и далее величины  $q_k$  определяются как в системе (43) при  $k = \overline{1, n}$ . Запишем решение задачи (28), (30)

$$\frac{\partial \psi_2^{(p)}}{\partial \zeta} = \frac{S_{11}^{(p)} I_l \Psi_{1,r_p}^{(p)} ((\zeta - r_p) k_{2,p} x_l + \xi) + S_{12}^{(p)} I_l \Psi_{2,r_p}^{(p+1)} ((\zeta - r_p) k_{2,p} x_l + \xi)}{\partial \zeta} \quad (53)$$

и решение задачи (28), (31)

$$\frac{\partial \psi_1^{(p,1)}}{\partial \zeta} = \frac{S_{21}^{(p)} I_l \Psi_{1,r_p}^{(p)} ((r_p - \zeta) k_{2,p+1} x_l + \xi) + S_{22}^{(p)} I_l \Psi_{2,r_p}^{(p+1)} ((r_p - \zeta) k_{2,p+1} x_l + \xi)}{\partial \zeta}. \quad (54)$$

В дальнейших выкладках будем пренебрегать «переотражением» во внутренних слоях, то есть при выводе выражения для  $\Psi_{2,h}^{(1)}$  будем отбрасывать второе слагаемое в формуле (54), а при выводе выражения для  $\Psi_{1,h}^{(n)}$  — первое слагаемое в формуле (53) (в (53), (54) подчеркнуты те слагаемые, которые нужно отбросить). В силу затухания волнового поля влияние отброшенных слагаемых должно быть мало. Последовательное применение формул (53) и (54) позволяет свести выражения для  $\Psi_{2,h}^{(1)}$  и  $\Psi_{1,h}^{(n)}$  к соотношениям, содержащим величины, определяемые формулами (51) и (52). Пользуясь методом математической индукции, нетрудно установить общие формулы:

$$\begin{aligned} \Psi_{2,h}^{(1)} &= S_{11}^{(1)} I_1 I_2 \Psi_1^{(1)} (q_1 x_1 + q_1 x_2 + \xi) + \\ &+ \sum_{k=2}^{n-1} S_{11}^{(k)} \left( \prod_{l=1}^{k-1} S_{12}^{(l)} S_{21}^{(l)} \right) I_1 \dots I_{2k} \Psi_1^{(1)} \left( \sum_{j=1}^k (q_j x_{2j-1} + q_j x_{2j}) + \xi \right) + \\ &+ \left( \prod_{l=1}^{n-1} S_{12}^{(l)} \right) I_1 \dots I_n \Psi_2^{(n)} \left( \sum_{j=1}^n q_j x_j + \xi \right), \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{1,h}^{(n)} &= S_{22}^{(n-1)} I_1 I_2 \Psi_2^{(n)} (q_n x_1 + q_n x_2 + \xi) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-2} S_{22}^{(k)} \left( \prod_{l=k+1}^{n-1} S_{12}^{(l)} S_{21}^{(l)} \right) I_1 \dots I_{2(n-k)} \Psi_n^{(n)} \left( \sum_{j=1}^{n-k} q_{n+1-j} (x_{2j-1} + x_{2j}) + \xi \right) + \\ &+ \left( \prod_{l=1}^{n-1} S_{21}^{(l)} \right) I_1 \dots I_n \Psi_1^{(1)} \left( \sum_{j=1}^n q_j x_j + \xi \right). \end{aligned} \quad (56)$$

Подставляя полученные выражения в уравнения (25), (26), приходим к замкнутой системе уравнений для функций  $\Psi_1^{(1)}$  и  $\Psi_2^{(n)}$ :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \Psi_1^{(1)}}{\partial \tau^2} - k_R^2 \frac{\partial^2 \Psi_1^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{2k_R B_1 S_{11}^{(1)}}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_1^{(1)} (q_1 x_1 + q_1 x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 - \\ &- 2k_R B_1 \sum_{k=2}^{n-1} \frac{S_{11}^{(k)}}{\pi^{2k}} \left( \prod_{l=1}^{k-1} S_{12}^{(l)} S_{21}^{(l)} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{2k} \frac{\Psi_1^{(1)} \left( \sum_{j=1}^k q_j (x_{2j-1} + x_{2j}) + \xi, \tau \right)}{\prod_{j=1}^{2k} (x_j^2 + 1)} dx_1 \dots dx_{2k} - \\ &- \frac{2k_R B_1}{\pi^n} \left( \prod_{l=1}^{n-1} S_{12}^{(l)} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n \frac{\Psi_2^{(n)} \left( \sum_{j=1}^n q_j x_j + \xi, \tau \right)}{\prod_{j=1}^n (x_j^2 + 1)} dx_1 \dots dx_n = \frac{h^2 k_R B_1}{2\mu_1 \gamma_1} \frac{\partial P_1}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (57)$$



$$\begin{aligned}
 & -k_R B_2 D_2 \frac{\partial^2 \Psi_2^{(n)}}{\partial \xi^2} + \left( \frac{\partial^2 \Psi_2^{(n)}}{\partial \tau^2} - k_R^2 \frac{\partial^2 \Psi_2^{(n)}}{\partial \xi^2} \right) - \\
 & - \frac{k_R B_2' S_{22}^{(n-1)}}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_2^{(n)}(q_n x_1 + q_n x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 - k_R B_2' \sum_{k=1}^{n-2} \frac{S_{22}^{(k)}}{\pi^{2(n-k)}} \left( \prod_{l=k+1}^{n-1} S_{12}^{(l)} S_{21}^{(l)} \right) \times \\
 & \times \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{2(n-k)} \frac{\Psi_2^{(n)} \left( \sum_{j=1}^{n-k} q_{n+1-j} (x_{2j-1} + x_{2j}) + \xi, \tau \right)}{\prod_{j=1}^{2(n-k)} (x_j^2 + 1)} dx_1 \dots dx_{2(n-k)} - \\
 & - \frac{k_R B_2'}{\pi^n} \left( \prod_{l=1}^{n-1} S_{21}^{(l)} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_n \frac{\Psi_1^{(1)} \left( \sum_{j=1}^n q_j x_j + \xi, \tau \right)}{\prod_{j=1}^n (x_j^2 + 1)} dx_1 \dots dx_n = \frac{h^2 k_R B_2}{2\mu_1 \gamma_n} \frac{\partial P_2}{\partial \xi}.
 \end{aligned}$$

Формулы перехода от  $\Psi_1^{(1)}$  и  $\Psi_2^{(n)}$  к составляющим перерезывающего усилия (см. (41)) не изменяются, так как в них участвуют только величины, относящиеся к внешним поверхностям пластины. Полагая в (57)

$$\Psi_1^{(1)} = \frac{h N_1^{(1)}}{2\mu_1 K_{N,1}}, \quad \Psi_2^{(n)} = \frac{h N_1^{(2)}}{2\mu_1 K_{N,2}}, \quad (58)$$

где величины  $K_{N,1}$ ,  $K_{N,2}$  определяются формулами (42), получим систему двух уравнений для величин  $N_1^{(1)}$  и  $N_1^{(2)}$ . Все замечания о порядке применения построенной модели, приведенные в конце п.1.2, относятся и к многослойным пластинам. В частности, если скорости волн Рэлея на верхней и нижней поверхностях существенно различны, следует использовать упрощенную систему, первое уравнение которой совпадает с первым уравнением (57), а второе имеет вид

$$- \frac{k_R B_2'}{\pi^n} \left( \prod_{l=1}^{n-1} S_{21}^{(l)} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_n \frac{\Psi_1^{(1)} \left( \sum_{j=1}^n q_j x_j + \xi, \tau \right)}{\prod_{j=1}^n (x_j^2 + 1)} dx_1 \dots dx_n - k_R B_2 D_2 \frac{\partial^2 \Psi_2^{(n)}}{\partial \xi^2} = \frac{k_R B_2 h^2}{2\mu_1 \gamma_n} \frac{\partial P_2}{\partial \xi}.$$

Критерием выбора между полной и упрощенной системами по-прежнему является погрешность аппроксимации величины  $k_{R,n}$  выражением  $\sqrt{k_R^2 + k_R B_2 D_2}$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Асимптотическая модель, представленная в данной работе, значительно упрощает анализ дальнего поля волны Рэлея в многослойных пластинах. Задача описания распространения волны сводится к решению замкнутой системы двух одномерных интегродифференциальных уравнений, в которой присутствует скорость волны Рэлея в явном виде. Результаты работы могут быть применены при формулировке асимптотической схемы расчленения НДС слоистых пластин и оболочек при ударных воздействиях нормального типа.

Кроме волн Рэлея в двухслойной пластине при определенных соотношениях параметров существует поверхностная волна Стоунли. Данная модель не описывает условного фронта этой волны.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00545-а).*

## Библиографический список

1. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid // Phil. Trans. R. Soc. A203. 1904. P. 1–42 .
2. Rayleigh J. W. S. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid // Proc. Lond. Math. Soc. 1885. Vol. 17, № 253. P. 4–11.



3. Коссович Л. Ю., Кушеккалиев А. Н. Анализ приближений в задаче Лэмба для бесконечного упругого слоя // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2003. № 5. С. 10–22.
4. Ewing W. M., Jardetzky W. S., Press F. Elastic waves in layered media. N.Y., 1957.
5. Miklowitz J. Elastic wave propagation // In Applied mechanics surveys (Ed. H. N. Abramson, H. Liebowitz, J. M. Crowley, S. Juhasz). Washington D.C., 1966.
6. Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю. Асимптотическая модель для вычисления дальнего поля волны Рэлея в случае упругой полуплоскости // Докл. АН. 2004. Т. 395, № 4. С. 482–484.
7. Коссович Л. Ю., Кушеккалиев А. Н. Поле Рэлея в бесконечном упругом слое // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов, 2003. Вып. 5. С. 159–161.
8. Ковалев В. А., Коссович Л. Ю., Таранов О. Г. Дальнее поле волны Рэлея для упругой полуплоскости при действии торцевой нагрузки // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 5. С. 89–96.
9. Коссович Л. Ю., Ковалев В. А., Таранов О. Г. Поле Рэлея в задаче Лэмба для цилиндрической оболочки // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. 2004. С. 52–54.
10. Ковалев В. А., Таранов О. Г. Расчленение нестационарного НДС цилиндрических оболочек при ударных торцевых воздействиях нормального типа // Смешанные задачи механики деформируемого твердого тела : материалы V Рос. конф. с междунар. участием / под ред. акад. Н.Ф. Морозова. Саратов, 2005. С. 78–82.
11. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., 1974. 274 с.
12. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев, 1981. 284 с.
13. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1987. 688 с.
14. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. San Diego, 1998. 226 p.

УДК 539.374

## СВЯЗАННЫЕ ТЕРМОУПРУГИЕ ВОЛНЫ ТРЕТЬЕГО ТИПА ЗАДАННОГО АЗИМУТАЛЬНОГО ПОРЯДКА В ВОЛНОВОДЕ С ПРОНИЦАЕМОЙ ДЛЯ ТЕПЛА СТЕНКОЙ

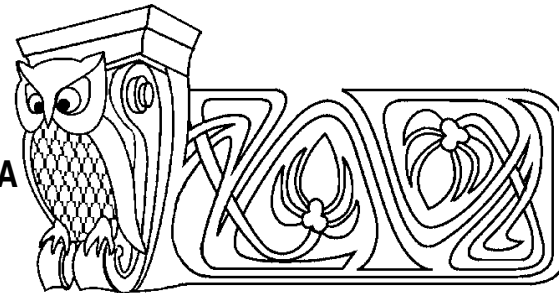
В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев\*

Московский городской университет управления  
Правительства Москвы,  
кафедра прикладной математики;

\* Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва  
E-mail: vlad\_koval@mail.ru, y.radayev@gmail.com

Работа посвящена изучению распространения обобщенных связанных термоупругих волн заданного азимутального порядка в длинном цилиндрическом волноводе кругового поперечного сечения. При этом предполагается, что стенка волновода свободна от нагрузок и является проницаемой для тепла. Исследование проводится в рамках теории связанной обобщенной термоупругости третьего типа (GNIII), согласующейся с основными принципами термомеханики.

Данная теория сочетает оба известных типа распространения тепла в твердых деформируемых телах: термодиффузионный и волновой. Предельными случаями обобщенной термоупругости типа III являются классическая термоупругость (GNI/CTE) и гиперболическая термоупругость (GNII), которые могут быть сформулированы в терминах классической теории поля. Дифференциальные уравнения поля в этом случае принадлежат гиперболическому аналитическому типу. Методом разделения переменных в связанных уравнениях линейной термоупругости третьего типа получено их замкнутое аналитическое решение, которое удовлетворяет необходимым краевым условиям на боковой стенке волновода, в том числе условию конвективного теплообмена с окружающей средой. Установлено, что краевые условия на поверхности волновода выполняются отдельно для



### Cross-Coupled Type-III Thermoelastic Waves of a Given Azimuthal Number in a Waveguide under Sidewall Heat Interchanging

V. A. Kovalev, Yu. N. Radayev\*

Moscow City Government University of Management,  
Chair of Applied Mathematics

\* Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow  
E-mail: vlad\_koval@mail.ru, y.radayev@gmail.com

The paper is devoted to a study of cross-coupled type-III generalized thermoelastic waves of a given azimuthal order propagating via a long cylindrical waveguide with circular cross-section. Sidewall of the waveguide is assumed free from tractions and permeable to heat. The study is carried out in the framework of coupled generalized theory of type-III thermoelasticity (GNIII) consistent with the fundamental principles of continuum thermomechanics.

The type-III theory combines the both possible mechanisms of heat transfer: thermodiffusion and wave. Type-III generalized thermoelasticity includes classical thermoelasticity (GNI/CTE) and the theory of hyperbolic thermoelasticity (GNII) as limiting cases.



каждой из волн фиксированного азимутального порядка, поэтому волны различного азимутального порядка распространяются в волноводе независимо друг от друга. Для термоупругой волны заданного азимута построен частотный детерминант. Выполнен численный анализ частотного уравнения на предмет поиска его комплексных корней. При этом в частотном уравнении произведено выделение всех возможных однозначных ветвей квадратных радикалов. Детально описана схема локализации корней частотного уравнения и определены волновые числа связанных термоупругих волн, в частности, первого и седьмого азимутального порядков. Приведены результаты численного анализа в случае связанной волны азимутального порядка 70. Обсуждаются различные аспекты численной реализации предлагаемого подхода.

**Ключевые слова:** термомеханика, термоупругость, GNIII, частотное уравнение, волновод, волновое число, форма волны, азимутальный порядок, теплообмен.

The GNII-theory can be formulated as a field theory and differential field equations are of hyperbolic analytical type. Closed solution of the coupled linear GNIII-thermoelasticity partial differential equations satisfying the required boundary conditions on the surface of waveguide including convective heat interchanging condition is obtained by the separation of variables technique. For a given azimuthal number the frequency equation is derived. A numerical analysis of frequency equation is carried out by Mathematica. A scheme of frequency equation roots localization is proposed and wavenumbers of the coupled type-III thermoelastic waves of the first and seventh azimuthal numbers are computed. A numerical study of the coupled thermoelastic waves of the 70th azimuthal number is also presented. Some aspects of numerical realization of the proposed approach are discussed.

**Key words:** thermomechanics, thermoelasticity, type-III thermoelasticity, frequency equation, waveguide, wavenumber, wave mode, azimuthal number, heat interchanging.

## 1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В настоящее время термин «термоупругость» охватывает достаточно широкий спектр таких явлений, как теплопроводность, термические напряжения, связанные термоупругие деформации, затухание тепловых и упругих импульсов в твердых телах и, конечно же, тепловые волны «второго звука» в деформируемых твердых телах. С чисто теоретической точки зрения термоупругость следует рассматривать как одну из важнейших составляющих термомеханики и теории поля. В частности, термоупругость второго типа GNII допускает формулировку в терминах классической теории поля [1–3].

Первые исследования температурных напряжений и деформаций в деформируемых твердых телах в линейном приближении восходят к J.M.C. Duhamel (1837) и F. Neumann (1885) [4]. Одна из первых работ на русском языке, посвященная температурным напряжениям и содержащая все известные к тому времени достаточно законченные формы решений прикладных задач термоупругости, — монография Н. Н. Лебедева [5].

Классическая теория термоупругости (СТЕ, conventional thermoelasticity) основывается на законе теплопроводности Фурье, содержание которого, как известно, сводится к следующему: как только в заданном месте пространства возникает градиент температуры  $\nabla\theta$ , мгновенно (т. е. без всякой задержки по времени) устанавливается противоположно направленный поток тепла:

$$\mathbf{h} = -\Lambda_* \nabla\theta,$$

где  $\mathbf{h}$  — вектор потока тепла (heat flux),  $\Lambda_*$  — коэффициент теплопроводности (thermal conductivity),  $\theta$  — температура,  $\nabla$  — пространственный оператор Гамильтона. Таким образом, закон теплопроводности Фурье устанавливает коллинеарность вектора потока тепла и пространственного антиградиента температуры. Известно, что соответствующее закону Фурье уравнение теплопроводности принадлежит параболическому аналитическому типу; уравнения такого типа допускают бесконечные скорости распространения возмущений, а в том случае, когда решение имеет «волновой» характер, тепловые волны будут иметь затухающие амплитуды. Совершенно ясно, что возможность распространения теплового сигнала с бесконечно большой скоростью явно не соответствует реальным физическим наблюдениям и нарушает принцип причинности.

По существу, парадокс бесконечной скорости распространения температурных возмущений впервые обсуждался J.C. Maxwell [6]. М. А. Biot [7] впервые методами термодинамики необратимых процессов корректно построил теорию *связанной* термоупругости; связанные соотношения этой теории, классифицируемые в настоящее время как СТЕ, включают векторное уравнение движения, принадлежащее гиперболическому типу, и параболическое уравнение теплопроводности. Очевидно, что теория Biot в полной мере обладает указанным выше недостатком, поскольку предсказывает конечную скорость распространения упругой волны и — бесконечную для теплового импульса. «Полевые»



уравнения СТЕ для связанных (сопряженных) перемещений и температуры в линейном приближении состоят из одного векторного и сопряженного ему скалярного связанных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \Lambda_* \Delta \theta - \kappa \dot{\theta} - \alpha \theta_0 \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

В этих уравнениях  $\mu$ ,  $\lambda$  — упругие постоянные Ламе (для изотермической деформации);  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  — оператор Лапласа;  $\mathbf{u}$  — вектор перемещения;  $\alpha$  — термомеханическая постоянная ( $\alpha = 1/3(3\lambda + 2\mu)\beta^*$ );  $\beta^*$  — коэффициент объемного теплового расширения;  $\theta$  — абсолютная температура, точнее, ее превышение (инкремент) над отсчетной (референциальной) температурой  $\theta_0$ ;  $\theta_0$  — отсчетная (равновесная) температура (при температуре, равной  $\theta_0$ , отсутствуют деформации и напряжения);  $\kappa$  — теплоемкость (на единицу объема) при нулевой постоянной деформации. Связанность уравнений СТЕ-теории обусловливается взаимным влиянием нагрева (охлаждения) и объемной деформации тела, проявляется через определяющую постоянную  $\alpha$  и является следствием основных принципов термодинамики (см. [7]).

Второе из уравнений системы (1), сформулированное для недеформируемого проводника тепла, представляет собой одно из наиболее важных линейных параболических дифференциальных уравнений математической физики — уравнение диффузии:

$$\Delta \theta - \frac{\kappa}{\Lambda_*} \dot{\theta} = 0. \quad (2)$$

За последние десятилетия было предложено достаточно много различных обобщений теории связанной термоупругости Biot с тем, чтобы устранить парадокс бесконечной скорости распространения тепла и допустить возможность волнового характера транспорта тепла в форме *незатухающих* волн (undamped heat waves). Последнее из указанных явлений называется «вторым звуком». Обзор работ по проблеме «второго звука», включая весьма интересный исторический аспект, дан в статьях [8]. Отметим, что волны и волновые процессы очень широко распространены в природе, однако дать точное и ясное определение того, что же считать волной, не совсем просто, поскольку грань между волновым и неволновым поведением часто оказывается размытой. Традиционный отличительный критерий волнового процесса — перенос энергии в пространстве, не сопровождающийся переносом массы.

Эксперименты, проведенные в разные годы различными исследователями, подтверждают вывод о том, что тепло при определенных условиях может распространяться как незатухающая волна. Первоначально (1946 г.) термические волны «второго звука» были экспериментально обнаружены в жидком гелии и позднее (1966 г.) — в твердом гелии. Феномен второго звука наблюдается при весьма низких температурах в кристаллах высокой чистоты. Например, в работе [9] указывается на обнаружение «второго звука» в кристалле NaF. «Второй звук» в NaF наблюдается при температуре около 15K [10]. В работах [11] и [12] также подтверждается существование волн второго звука в NaF; согласно [13] скорость волн «второго звука» составляет 1953.1 м/с. В публикации [14] приводятся результаты измерений волн «второго звука» в висмуте (Bi) при температуре около 3K. Скорость волн «второго звука» в висмуте оказывается равной  $78 \pm 5$  м/с.

Остановимся на нескольких наиболее часто встречающихся в прикладных задачах термомеханики обобщениях основополагающих уравнений СТЕ. Одно из них было дано Н. Lord и Y. Shulman (LS-theory) [15]. Ими было получено гиперболическое уравнение распространения тепла, основанное на новом законе теплопроводности, заменившем классический закон теплопроводности Фурье. В законе LS-теплопроводности введена дополнительная определяющая постоянная — время релаксации  $\tau_{rel}$  в соответствии с уравнением С. Cattaneo:

$$\mathbf{h} + \tau_{rel} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = -\Lambda_* \nabla \theta. \quad (3)$$

Время релаксации представляет собой (всегда весьма малое) время запаздывания после возникновения температурного градиента, необходимое для того, чтобы в элементе тела сформировался установившийся поток тепла. Для металлов величина  $\tau_{rel}$  заключена в пределах от  $10^{-12}$  с до  $10^{-9}$  с.



Независимо от С. Cattaneo аналогичное уравнение было получено в работе [17]. Уравнение (3) часто выводится на основании уравнения «запаздывания» (the lag equation)

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t + \tau_{\text{rel}}) = -\Lambda_* \nabla \theta(\mathbf{x}, t), \quad (4)$$

которое формулируется для заданного места в пространстве  $\mathbf{x}$  и, как уже отмечалось, устанавливает, что поток тепла запаздывает по отношению к пространственному градиенту температуры. Принимая во внимание, что

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t + \tau_{\text{rel}}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) + \tau_{\text{rel}} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \dots,$$

где частное дифференцирование по времени выполняется при фиксированном положении  $\mathbf{x}$ , и ограничиваясь лишь первыми двумя слагаемыми в приведенном разложении, приходим к уравнению (3).

«Уравнения поля» LS-теории для связанных перемещений и температуры в линейном приближении состоят из одного векторного (совпадающего с соответствующим уравнением СТЕ-теории) и сопряженного ему скалярного гиперболического связанных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \Lambda_* \Delta \theta - \kappa (\dot{\theta} + \tau_{\text{rel}} \ddot{\theta}) - \alpha \theta_0 (\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + \tau_{\text{rel}} \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}}) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Второе из этих уравнений, сформулированное для недеформируемого тела, оказывается одним из важнейших гиперболических дифференциальных уравнений математической физики — телеграфным уравнением (telegraphist's equation):

$$\Delta \theta - \frac{\kappa \tau_{\text{rel}}}{\Lambda_*} \ddot{\theta} - \frac{\kappa}{\Lambda_*} \dot{\theta} = 0. \quad (6)$$

Тем самым, в LS-теории как уравнение движения, так и уравнение транспорта тепла, принадлежат гиперболическому типу, что и обеспечивает конечную скорость распространения и тепловых, и упругих волн деформации. В отечественной научной литературе первое упоминание о времени релаксации теплового потока и конечной скорости распространения теплового возмущения было сделано А. В. Лыковым в 1967 г. [18].

Вторым хорошо известным обобщением связанной теории термоупругости Biot, допускающим «второй звук», является теория, предложенная А. Е. Green, К. А. Lindsay (GL-theory) [19]. GL-теория характеризуется тем, что вектор потока тепла в термоупругом теле  $\mathbf{h}$  зависит от скорости изменения абсолютной температуры  $\theta$  и градиента температуры; закон GL-теплопроводности имеет форму

$$\mathbf{h} = -\mathbf{b} \dot{\theta} - \Lambda_* \cdot \nabla \theta,$$

где  $\mathbf{b}$  — антисимметричный вектор,  $\Lambda_*$  — тензор теплопроводности. Тензор второго ранга  $\Lambda_*$  в GL-теории симметричен:  $\Lambda_* = \Lambda_*^T$ . Заметим, что в случае центральной материальной симметрии выполняется равенство  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ . Уравнение транспорта тепла оказывается гиперболическим. GL-теория в случае  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  допускает «второй звук», не нарушая при этом классического закона теплопроводности Фурье.

Определяющее уравнение GL-теории связанной термоупругости имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \alpha \left( 1 + \tau^* \frac{\partial}{\partial t} \right) (\theta - \theta_0) \mathbf{I}, \quad (7)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор напряжений,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — тензор малых деформаций,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор.

Замкнутая система дифференциальных уравнений GL-теории состоит из уравнения движения

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \left( 1 + \tau^* \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (8)$$

и уравнения распространения тепла

$$\Lambda_* \Delta \theta - \alpha \theta_0 \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} - \kappa \left( 1 + \tau_* \frac{\partial}{\partial t} \right) \dot{\theta} = 0. \quad (9)$$



Определяющие постоянные GL-теории  $\tau^*$  и  $\tau_*$ , имеющие смысл времен релаксации, подчиняются неравенствам  $\tau^* \geq \tau_* \geq 0$ , гарантирующим неотрицательность внутреннего производства энтропии при распространении волн деформаций и температуры. Если  $\tau^* = \tau_* = 0$ , то GL-теория сводится к СТЕ.

Заметим, что теории LS и GL принципиально отличаются друг от друга и не получаются одна из другой как частные случаи.

Уравнение (9), сформулированное для недеформируемого теплопроводящего тела, представляет собой телеграфное уравнение вида

$$\Delta\theta - \frac{\kappa\tau_*}{\Lambda_*}\ddot{\theta} - \frac{\kappa}{\Lambda_*}\dot{\theta} = 0. \quad (10)$$

В начале 90-х гг. XX в. А.Е. Green и Р.М. Naghdi [20, 21] была развита теория обобщенной термоупругости (GN-theory). Предложенная теория сочетает в себе как свойства классической термоупругости СТЕ, выстроенной согласно закону теплопроводности Фурье, так и свойства недиссипативной термоупругости, предполагающей отсутствие производства энтропии и волновой характер распространения теплового сигнала. GN-теория была сформулирована в трех различных термодинамически корректных вариантах: GNI, GNII и GNIII. В линейном приближении первый вариант (GNI) приводит к закону теплопроводности Фурье и параболическому уравнению теплопроводности; второй (GNII) — предлагает считать распространение тепла как волновой недиссипативный процесс (dissipationless thermoelasticity), не сопровождающийся внутренним производством энтропии, и приводит к *гиперболическому* уравнению транспорта тепла; третий (GNIII) — наиболее общий из рассматриваемых — включает GNI и GNII в качестве предельных случаев. Именно по этой причине GN-теория в состоянии моделировать значительно более широкий круг явлений, связанных с переносом тепла, по сравнению с теорией Фурье.

Классическая *связанная* теория термоупругости (СТЕ) широко применяется в различных прикладных задачах термомеханики в тех ситуациях, когда речь идет о быстропротекающих переходных процессах или когда происходит интенсивный нагрев тела (например, с помощью импульсного лазерного излучения). В таких ситуациях температурное поле *связано* с упругим полем и *связанная* форма уравнений термоупругости должна выглядеть наиболее адекватной. Систематическое изложение динамической теории связанной (сопряженной) СТЕ-термоупругости дано в известной монографии В. Новацкого [22].

Отличительной чертой теории GNII гиперболической термоупругости является то, что она полностью согласуется с основными принципами термодинамики (и в этом смысле она термодинамически корректна) и предсказывает нулевое внутреннее производство энтропии, т.е. отсутствие рассеяния энергии, при распространении термической волны «второго звука». Отсутствие диссипации энергии в GNII-термоупругом теле позволяет дать вариационную (а следовательно, и полевую) формулировку теории с целью дальнейшего поиска вариационных симметрий связанной системы дифференциальных уравнений в частных производных термоупругости. Лагранжева и гамильтонова полевые формы нелинейной теории термоупругости типа GNII рассматривались в работах G. A. Maugin, V. K. Kalpakides [23–26].

Анализ литературных источников показывает, что к настоящему времени опубликовано сравнительно немного работ, выполненных с привлечением связанных уравнений GNIII-теории. Например, распространение плоских гармонических связанных термоупругих волн в рамках GNIII-теории изучалось лишь сравнительно недавно в работах [27] и [28], и нельзя сказать, что эта проблема полностью разрешена в плане определения *нормальных* волновых чисел указанного типа волн. В статье [29] в рамках теории обобщенной термоупругости GNIII исследуются термоупругие волны в неограниченном однородном изотропном теле, вызванные линейным источником тепла. Полученные в указанной работе результаты показывают, что теория GNIII в целом прогнозирует диффузионный механизм распространения тепла и только в отдельных случаях допускает волновой механизм теплопроводности. В [1, 30] получено решение задачи о распространении связанной GNIII-термоупругой волны вдоль теплоизолированного цилиндрического волновода. В работе [31] исследуется частотное уравнение указанных волн в случае достаточно высоких азимутальных чисел.

Целью настоящей работы является изучение распространения обобщенных связанных GNIII-тер-





моупругих волн вдоль цилиндрического волновода со свободной теплопроницаемой стенкой. Одной из задач исследования является определение влияния теплообмена через стенку цилиндрического волновода на величину волновых чисел распространяющихся в волноводе нормальных волн и форму волн деформаций и температуры.

## 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТИПА III И УРАВНЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ

Для представления деформации термоупругого тела воспользуемся классическим лагранжевым отсчетным описанием:  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ ,  $\mathbf{x}$  — пространственное положение точки, которая занимала место  $\mathbf{X}$  в отсчетном положении. В дальнейшем изложении систематически будет использоваться отсчетный оператор Гамильтона  $\nabla_{\mathbf{R}}$ , ассоциированный с лагранжевой переменной  $\mathbf{X}$ .

Система основных нелинейных дифференциальных уравнений связанной термоупругости типа GNIII состоит из:

— уравнения баланса массы

$$\left. \frac{\partial \rho_{\mathbf{R}}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = 0; \quad (11)$$

— уравнения баланса импульса

$$\rho_{\mathbf{R}} \ddot{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{S}, \quad (12)$$

где  $\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{T}$  — первый тензор напряжений Пиола—Кирхгофа,  $\mathbf{T}$  — тензор напряжений Коши,  $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{x}$  — градиент деформации,  $J = \det \mathbf{F}$  — якобиан деформации;

— уравнения баланса внутренней энергии

$$\dot{e} = -\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{h}_{\mathbf{R}} + \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T) + \varepsilon, \quad (13)$$

где  $e$  — плотность (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии) внутренней энергии,  $\mathbf{h}_{\mathbf{R}}$  — вектор потока тепла (в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии),  $\varepsilon$  — плотность объемных источников тепла (лучистое тепло);

— уравнения баланса энтропии

$$\dot{s} = -\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{j}_{\mathbf{R}} + \sigma + \xi, \quad (14)$$

где  $s$  — плотность энтропии (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии),  $\mathbf{j}_{\mathbf{R}}$  — вектор потока энтропии (в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии),  $\sigma$  — внешнее производство энтропии,  $\xi \geq 0$  — внутреннее производство энтропии.

В качестве термодинамических переменных состояния в термоупругости GNIII выбираются переменные ( $\vartheta$  — температурное смещение (thermal displacement))

$$\vartheta, \quad \dot{\vartheta}, \quad \nabla_{\mathbf{R}} \vartheta, \quad \nabla_{\mathbf{R}} \dot{\vartheta}, \quad \mathbf{F}. \quad (15)$$

Далее полагается, что допустимы лишь такие процессы, когда выполняется уравнение баланса энтропии (14) при ограничениях (11)–(13). Возможная двойственная формулировка: выполняется уравнение баланса энергии (13) при ограничениях (11), (12), (14). Исходная и двойственная формулировка выступают как проявление принципа непротиворечивости: баланс энтропии (энергии) не должен нарушать баланса массы, импульса, энергии (энтропии).

Ограничения в форме дифференциальных уравнений (11)–(13) учитываются с помощью множителей Лагранжа. В результате можно получить соотношения ( $\theta$  — абсолютная температура, обратное значение которой («холодность») выступает в качестве множителя Лагранжа)

$$\theta \mathbf{j}_{\mathbf{R}} = \mathbf{h}_{\mathbf{R}}, \quad \theta \sigma = \varepsilon. \quad (16)$$

На основании уравнений (11)–(14) и соотношений (16) выводится уравнение

$$-(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) + \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T) - \mathbf{j}_{\mathbf{R}} \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \theta = \theta \xi, \quad (17)$$

где  $\psi = e - s\theta$  — плотность (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии) свободной энергии Гельмгольца.



Дифференциальные уравнения термоупругости должны быть дополнены определяющими уравнениями. Определяющие уравнения связанного термоупругого поля обязаны иметь форму

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_{\mathbf{R}}\vartheta, \nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}, \mathbf{F}), \\ \mathbf{h}_{\mathbf{R}} &= \mathbf{h}_{\mathbf{R}}(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_{\mathbf{R}}\vartheta, \nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}, \mathbf{F}), \\ \mathbf{S} &= \mathbf{S}(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_{\mathbf{R}}\vartheta, \nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}, \mathbf{F}), \\ s &= s(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_{\mathbf{R}}\vartheta, \nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}, \mathbf{F}), \\ \xi &= \xi(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_{\mathbf{R}}\vartheta, \nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}, \mathbf{F}), \\ \theta &= \theta(\dot{\vartheta}). \end{aligned} \tag{18}$$

Дальнейшие ограничения на форму определяющих уравнений (18) могут быть получены следующим образом. Выполнив подстановку определяющих зависимостей (18) в уравнение (17) и замечая, что коэффициенты при  $\dot{\vartheta}$ ,  $\nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}$ ,  $\dot{\mathbf{F}}$  должны обращаться в нуль, заключаем, что свободная энергия в действительности не может зависеть от переменной состояния  $\nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}$ :

$$\psi = \psi(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_{\mathbf{R}}\vartheta, \mathbf{F});$$

кроме того, должны выполняться следующие равенства:

$$s = -\frac{1}{\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\vartheta}}, \tag{19}$$

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}}. \tag{20}$$

Для внутреннего производства энтропии, следовательно, остается выражение

$$\theta \xi = -\left(\mathbf{j}_{\mathbf{R}} + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_{\mathbf{R}}\vartheta}\right) \cdot \nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta} - \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\vartheta}} \dot{\vartheta}. \tag{21}$$

Предполагая, что определяющие уравнения (18) не содержат *явных* вхождений температурного смещения  $\vartheta$ , находим

$$\theta \xi = -\left(\mathbf{j}_{\mathbf{R}} + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_{\mathbf{R}}\vartheta}\right) \cdot \nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}. \tag{22}$$

Вводя затем потенциал рассеяния (точнее говоря, сопряженный потенциал рассеяния) согласно  $\theta \xi = \mathcal{D} = \mathcal{D}(\dot{\vartheta}, \nabla_{\mathbf{R}}\vartheta, \mathbf{F}; \nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta})$  и рассматривая его как функцию от термодинамической силы  $-\nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}$ , приходим к определяющему уравнению в форме соотношения термодинамической ортогональности<sup>1</sup> в пространстве термодинамических сил термодинамического потока  $\mathbf{j}_{\mathbf{R}} + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_{\mathbf{R}}\vartheta}$  поверхности уровня потенциала рассеяния  $\mathcal{D}(\dot{\vartheta}, \nabla_{\mathbf{R}}\vartheta, \mathbf{F}; \nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}) = \text{const}$ . В гладких точках поверхности уровня имеем следующее уравнение градиентальности:

$$\mathbf{j}_{\mathbf{R}} + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_{\mathbf{R}}\vartheta} = -\lambda^* \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}}, \tag{23}$$

или

$$\mathbf{j}_{\mathbf{R}} = -\frac{\partial \psi}{\partial \nabla_{\mathbf{R}}\vartheta} - \lambda^* \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}}. \tag{24}$$

Множитель  $\lambda^*$  в уравнении (23) вычисляется на основании определяющего потенциала рассеяния  $\mathcal{D}$  равенства

$$\theta \xi = \mathcal{D} = \lambda^* (\nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}) \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}},$$

<sup>1</sup>Оригинальный подход был развит H. Ziegler в ряде публикаций начиная с 1958 г. как обобщение линейной теории L. Onsager, восходящей к 1931 г. См.: Циглер Г. Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. М., 1966. 134 с.; Ziegler H. Proof of an orthogonality principle in irreversible thermodynamics // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). 1970. Vol. 21, № 6. P. 853–863; Ziegler H. Discussion of some objections to thermomechanical orthogonality // Archive of Applied Mechanics. 1981. Vol. 50, № 3. P. 149–164.



откуда сразу же следует, что

$$\lambda^* = \frac{1}{(\nabla_R \dot{\vartheta}) \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}} \mathcal{D}. \quad (25)$$

Таким образом, подставляя (25) в уравнение (24), закон теплопроводности в теории термоупругости типа GNIII с учетом принципа термодинамической ортогональности будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{j}_R = -\frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}} - \frac{\mathcal{D}}{(\nabla_R \dot{\vartheta}) \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}. \quad (26)$$

Выполнение неравенства  $\xi \geq 0$  обеспечивается выпуклостью поверхностей уровня  $\mathcal{D}(\dot{\vartheta}, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}; \nabla_R \dot{\vartheta}) = \text{const}$  в пространстве термодинамических сил.

Полученное выше уравнение (26) устанавливает определяющий закон теплопроводности в GNIII теории, основанный на принципе ортогональности термодинамических потоков и сил. Очевидно, что термодинамически корректен и такой вариант, когда процесс термоупругого деформирования не сопровождается внутренним производством энтропии. В этом случае  $\mathcal{D} = 0$ , и закон теплопроводности приобретает форму

$$\mathbf{j}_R = -\frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}, \quad (27)$$

характерную для теории GNII. Это определяющее уравнение для вектора потока энтропии — одно из самых замечательных в термомеханике континуума, поскольку поток энтропии, а следовательно, и поток тепла определяются согласно (27) заданием свободной энергии.

Теория связанной термоупругости GNI/СТЕ основывается на допущении о независимости свободной энергии  $\psi$  от температурного смещения  $\vartheta$  и градиента температурного смещения  $\nabla \vartheta$ . Поэтому следует полагать, что

$$\psi = \psi(\dot{\vartheta}, \mathbf{F}).$$

В результате внутреннее производство энтропии вычисляется как

$$\theta \xi = -\mathbf{j}_R \cdot \nabla_R \dot{\vartheta}.$$

Уравнение термодинамической ортогональности, обобщающее закон теплопроводности Фурье, имеет форму

$$\mathbf{j}_R = -\frac{\mathcal{D}}{(\nabla_R \dot{\vartheta}) \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}. \quad (28)$$

Итак, в теории GNIII, дополненной принципом термодинамической ортогональности, вектор потока энтропии определяется, как следует из уравнения (26), через два потенциала: свободную энергию  $\psi$  и потенциал рассеяния  $\mathcal{D}$ . Он естественным образом распадается на две составляющие: обратимую

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}$$

и необратимую

$$-\frac{\mathcal{D}}{(\nabla_R \dot{\vartheta}) \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}.$$

### 3. ЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТИПА III

На практике обычно применяются линеаризованные уравнения термоупругости. Не вдаваясь в подробности, приведем замкнутую систему уравнений линейной теории термоупругости третьего типа (GNIII).

В линейном приближении GNIII термоупругое поведение тела подчиняется определяющему закону Дюгамеля – Неймана:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + (\lambda \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \alpha(\theta - \theta_0)) \mathbf{I}, \quad (29)$$



где  $\sigma$  — тензор напряжений,  $\varepsilon$  — тензор малых деформаций,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор. Мы по-прежнему используем следующие обозначения:  $\lambda, \mu$  — упругие постоянные Ламе;  $\alpha$  — термомеханическая постоянная ( $\alpha = 1/3(3\lambda + 2\mu)\beta^*$ );  $\beta^*$  — коэффициент объемного теплового расширения (coefficient of thermal expansion);  $\theta$  — абсолютная температура;  $\theta_0$  — отсчетная (равновесная) температура. Отметим, что при температуре, равной  $\theta_0$ , отсутствуют деформации и напряжения.

Линейная теория GNIII-термоупругости характеризуется тем, что вектор потока тепла  $\mathbf{h}$  линейно зависит как от градиента температуры, так и от градиента температурного смещения:

$$\mathbf{h} = -\Lambda_* \nabla \theta - \Lambda \nabla \vartheta, \quad (30)$$

где  $\Lambda$  — характерная скорость теплопроводности (thermal conductivity rate),  $\nabla$  — трехмерный оператор Гамильтона,  $\vartheta$  ( $\dot{\vartheta} = \theta$ ) — температурное смещение.

В рамках линейной теории следует предполагать линейную зависимость между термодинамическим потоком:

$$-\left(\mathbf{j} + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla \vartheta}\right)$$

и термодинамической силой

$$\nabla \dot{\vartheta},$$

равно как и квадратичную зависимость свободной энергии  $\psi$  от градиента температурного смещения  $\nabla \vartheta$ . В результате определяющее уравнение для теплового потока будет иметь вид (30).

Таким образом, уравнение (30) получается, как следствие (26), при условии, что свободная энергия квадратично зависит от градиента температурного смещения  $\nabla \vartheta$ , а потенциал рассеяния — от градиента температуры  $\nabla \dot{\vartheta}$  и, следовательно, не противоречит принципу термодинамической ортогональности.

Заметим, что внутреннее производство энтропии в модели GNII-термоупругости исчезает  $\xi = 0$  в силу

$$\mathbf{j} = -\frac{\partial \psi}{\partial \nabla \vartheta}.$$

Классическая связанная термоупругость GNI/СТЕ основывается на допущении о независимости свободной энергии  $\psi$  от температурного смещения  $\vartheta$  и градиента температурного смещения  $\nabla \vartheta$ , в силу чего внутреннее производство энтропии вычисляется как

$$\theta \xi = -\mathbf{j} \cdot \nabla \theta.$$

Кроме того, полная система соотношений GNIII-теории включает уравнения движения:

$$\operatorname{div} \sigma - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad (31)$$

где  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений; уравнение баланса энтропии:

$$\dot{s} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \sigma + \xi, \quad (32)$$

где  $s$  — плотность (на единицу объема) энтропии,  $\mathbf{j}$  — вектор потока энтропии,  $\sigma$  — внешнее производство энтропии,  $\xi \geq 0$  — внутреннее производство энтропии, или

$$\theta \dot{s} + \nabla \cdot (\theta \mathbf{j}) = \mathbf{j} \cdot \nabla \theta + \theta(\sigma + \xi); \quad (33)$$

и уравнение баланса энергии, которое мы примем в форме

$$-\left(\dot{\psi} + s\dot{\theta}\right) + \operatorname{tr}(\sigma \cdot \dot{\varepsilon}) - \mathbf{h} \cdot \frac{\nabla \theta}{\theta} = \theta \xi, \quad (34)$$

где  $\psi$  — плотность (на единицу объема) свободной энергии Гельмгольца. Здесь необходимо учесть, что вектор потока тепла и вектор потока энтропии связаны уравнением

$$\mathbf{h} = \theta \mathbf{j}, \quad (35)$$



а для внутреннего производства энтропии справедливо соотношение

$$\theta \dot{\xi} = - \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla \vartheta} \right) \cdot \nabla \dot{\vartheta}. \quad (36)$$

Приведем также соотношения Коши, связывающие тензор малых деформаций  $\varepsilon$  и градиент вектора перемещения  $\nabla \otimes \mathbf{u}$ :

$$2\varepsilon = \nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T. \quad (37)$$

Условие конвективного теплообмена с окружающей средой через поверхность с единичной нормалью  $\mathbf{n}$  в линейном приближении имеет вид

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{h} = \sigma (\theta - \theta_{\text{env}}), \quad (38)$$

где  $\sigma$  — коэффициент теплообмена,  $\theta_{\text{env}}$  — температура окружающей среды. В дальнейшем будем полагать, что температура окружающей среды совпадает с отсчетной  $\theta_{\text{env}} = \theta_0$ .

Для сокращения записи уравнений в дальнейшем через  $\theta$  будем обозначать превышение температуры над отсчетной (равновесной) температурой  $\theta_0$ , т. е. символ  $\theta$  в последующем изложении следует понимать как разность  $\theta - \theta_0$ .

Приведем линейные связанные уравнения движения и теплопроводности GNIII-термоупругости [1, 2] в той форме, в которой они используются в настоящей работе:

$$\begin{cases} \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \Lambda \Delta \theta + \Lambda_* \Delta \dot{\theta} - \kappa \ddot{\theta} - \alpha \theta_0 \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases} \quad (39)$$

Здесь  $\Delta$  — трехмерный оператор Лапласа,  $\kappa$  — (specific heat of the unit volume) теплоемкость (на единицу объема) при отсутствии деформации<sup>2</sup>.

Если теплопроводящая среда недеформируема и определяющий параметр  $\Lambda_* \rightarrow 0$ , то термическое поле согласно уравнениям GNIII удовлетворяет классическому волновому уравнению:

$$\Delta \theta - \frac{\kappa}{\Lambda} \ddot{\theta} = 0. \quad (40)$$

Разделим второе уравнение системы (39) на  $\Lambda$  и  $\theta_0$ . В дальнейшем постоянные  $\Lambda$ ,  $\Lambda_*$  и  $\kappa$  будут считаться отнесенными к отсчетной температуре  $\theta_0$ . Таким образом, можно минимизировать число постоянных, необходимых для формулировки связанных уравнений GNIII-теории. В итоге приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \Delta \theta + \frac{\Lambda_*}{\Lambda} \Delta \dot{\theta} - \frac{\kappa}{\Lambda} \ddot{\theta} - \frac{\alpha}{\Lambda} \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases} \quad (41)$$

Как упоминалось ранее, классическая связанная термоупругость (GNI/СТЕ) и гиперболическая термоупругость (GNII) являются предельными случаями GNIII-теории. Заметим, что система (41) исключительно удобна при переходе к уравнениям гиперболической GNII-теории: для этого необходимо положить  $\Lambda_* = 0$ . Ясно также, что переход  $\Lambda \rightarrow 0$  к классической термоупругости (GNI/СТЕ) в уравнениях (41) требует соблюдения ряда мер предосторожности.

Заключая этот раздел работы, заметим, что из приведенных выше прямых тензорных соотношений (29), (37) находятся физические компоненты тензора напряжений и деформаций в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \varepsilon + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} - \alpha \theta, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda \varepsilon + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) - \alpha \theta, \\ \sigma_{zz} &= \lambda \varepsilon + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} - \alpha \theta, & \sigma_{r\varphi} &= \mu \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right), \\ \sigma_{rz} &= \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), & \sigma_{\varphi z} &= \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right); \end{aligned} \quad (42)$$

<sup>2</sup>Поскольку рассматривается линейная теория,  $\kappa$  не зависит от температуры для ее значений в окрестности референциальной температуры.



$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}; \\ \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ 2\varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (43)$$

#### 4. РАЗДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В УРАВНЕНИЯХ ГНИИ-ТЕОРИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Будем рассматривать гармоническую зависимость перемещений и температуры от времени:  $\mathbf{u} = \mathbf{U}e^{-i\omega t}$ ,  $\theta = \Theta e^{-i\omega t}$ , где  $\omega$  — циклическая частота;  $\mathbf{U}$ ,  $\Theta$  — комплексные амплитуды.

Представим вектор комплексной амплитуды  $\mathbf{U}$  в виде разложения Гельмгольца:

$$\mathbf{U} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi, \quad (44)$$

где  $\Phi$  — скалярный потенциал,  $\Psi$  — векторный потенциал. При этом необходимо учесть условие калибровки векторного потенциала

$$\nabla \cdot \Psi = 0. \quad (45)$$

Исходная система уравнений (41) будет удовлетворяться, если потенциалы  $\Phi$ ,  $\Psi$  и амплитуда  $\Theta$  будут удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \omega^2 \rho \Psi + \mu \Delta \Psi = 0, \\ (\lambda + 2\mu) \Delta \Phi - \alpha \Theta + \omega^2 \rho \Phi = 0, \\ \Delta \Theta - i\omega \frac{\Lambda_*}{\Lambda} \Delta \Theta + \frac{\kappa \omega^2}{\Lambda} \Theta + \frac{\alpha \omega^2}{\Lambda} \Delta \Phi = 0. \end{cases} \quad (46)$$

Потенциал  $\Psi$  удовлетворяет независимому уравнению, векторному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \Psi + k_{\perp}^2 \Psi = 0, \quad (47)$$

где  $k_{\perp}^2$  — квадрат волнового числа чисто упругой поперечной волны.

В цилиндрической системе координат в векторном уравнении (47) удастся разделить пространственные переменные. Для определения векторного поля  $\Psi$  будем искать его компоненты в виде

$$\begin{aligned} \Psi_r(r, \varphi, z) &= A_r(r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \quad \Psi_\varphi(r, \varphi, z) = A_\varphi(r) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ \Psi_z(r, \varphi, z) &= A_z(r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \end{aligned}$$

где  $n$  — азимутальный порядок волны,  $k$  — волновое число распространяющейся в волноводе обобщенной термоупругой волны заданного азимутального порядка  $n$ . Физические компоненты  $A_r(r)$ ,  $A_\varphi(r)$ ,  $A_z(r)$  находятся в форме линейных комбинаций модифицированных функций Бесселя (см. [1]). Окончательно, компоненты  $\Psi_r$ ,  $\Psi_\varphi$ ,  $\Psi_z$  принимают вид

$$\begin{aligned} \Psi_r(r, \varphi, z) &= (C_3 I_{n-1}(q_2 r) + C_4 I_{n+1}(q_2 r)) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ \Psi_\varphi(r, \varphi, z) &= (C_3 I_{n-1}(q_2 r) - C_4 I_{n+1}(q_2 r)) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ \Psi_z(r, \varphi, z) &= C_5 I_n(q_2 r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \end{aligned} \quad (48)$$

где  $I_n(\xi)$  — модифицированная функция Бесселя целого порядка  $n$ ;  $q_2^2 = k^2 - k_{\perp}^2$ ;  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$  — произвольные постоянные.



Два последних уравнения в системе (46) связывают скалярный потенциал  $\Phi$  и комплексную амплитуду  $\Theta$ . Следуя работе [1], определим  $\Phi$  и  $\Theta$  через новый скалярный потенциал  $\Omega$  согласно

$$\Phi = a\Omega, \quad \Theta = b\Omega; \quad (49)$$

при этом постоянные  $a$  и  $b$  могут принимать в точности два различных значения

$$a_j = p_j^2 - g^2, \quad b_j = h \frac{\omega \alpha}{\Lambda_*} \gamma_j^2 \quad (j = 1, 2). \quad (50)$$

Здесь мы вводим следующие обозначения:

$$p_j^2 = k^2 - \gamma_j^2, \quad g^2 = k^2 - h h_2^2 h_3^{-2} k_{\parallel}^2, \quad h = h_3^2 \frac{1 + i h_3^2}{1 + h_3^4}, \quad h_2^2 = \frac{c_1^2}{l^2}, \quad h_3^2 = \frac{\Lambda_* \omega}{\Lambda}, \quad l^{-2} = \frac{\kappa}{\Lambda},$$

где постоянные  $\gamma_j$  ( $j = 1, 2$ ) имеют смысл волновых чисел и определяются ниже,  $k_{\parallel}^2$  — квадрат волнового числа чисто упругой продольной волны. Потенциал  $\Omega$  удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \Omega + \gamma^2 \Omega = 0 \quad (\gamma = \gamma_1, \gamma_2). \quad (51)$$

Остановимся на определении постоянной  $\gamma$ . Подставляя равенства (49) во второе и третье уравнения (46), приходим к линейной алгебраической системе уравнений относительно  $a$  и  $b$  (см. [1, 28])

$$\begin{cases} (\gamma^2 (\lambda + 2\mu) - \rho \omega^2) a + \alpha b = 0, \\ \gamma^2 \omega^2 \frac{\alpha}{\Lambda} a + \left( \gamma^2 - i \frac{\Lambda_* \omega}{\Lambda} \gamma^2 - \frac{\kappa \omega^2}{\Lambda} \right) b = 0. \end{cases} \quad (52)$$

Для того чтобы существовало нетривиальное решение относительно  $a$  и  $b$  этой системы линейных алгебраических уравнений, необходимо, чтобы определитель системы обращался в нуль. Вычисляя определитель системы, приходим к биквадратному уравнению, из которого находятся волновые числа  $\gamma$ :

$$\frac{\gamma^4}{k_{\parallel}^4} (i h_3^2 - 1) + \frac{\gamma^2}{k_{\parallel}^2} (h_1^2 - i h_3^2) - h_2^2 = 0, \quad h_1^2 = 1 + h_2^2 + \frac{\alpha^2}{\rho \Lambda}. \quad (53)$$

Квадраты волновых чисел, следовательно, вычисляются в виде (см. [1, 21])

$$\frac{2\gamma^2}{k_{\parallel}^2} = \frac{i h_3^2 - h_1^2 + \sqrt{(h_1^2 - i h_3^2)^2 + 4 h_2^2 (i h_3^2 - 1)}}{i h_3^2 - 1}.$$

Извлекая квадратный корень, приходим к выражению

$$2 \frac{\gamma^2}{k_{\parallel}^2} = \frac{i h_3^2 - h_1^2 + a_{1,2} + i b_{1,2}}{i h_3^2 - 1}, \quad (54)$$

где  $a_{1,2}$  и  $b_{1,2}$  вычисляются согласно

$$a_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{h_1^4 - h_3^4 - 4 h_2^2 + \sqrt{(h_1^4 - h_3^4 - 4 h_2^2)^2 + 4 h_3^4 (2 h_2^2 - h_1^2)^2}}{2}}, \quad b_{1,2} = \frac{h_3^2 (2 h_2^2 - h_1^2)}{a_{1,2}}. \quad (55)$$

Выражения для самих волновых чисел  $\gamma$  будут следующими:

$$\sqrt{2 (h_3^4 + 1)} \frac{\gamma}{k_{\parallel}} = a'_{1,2;3,4} + i b'_{1,2;3,4}, \quad (56)$$

где введены обозначения [1]

$$\begin{aligned} a'_{1,2;3,4} &= \pm \sqrt{\frac{S^2 + b_{1,2} h_3^2 - a_{1,2} + \sqrt{(S^2 + b_{1,2} h_3^2 - a_{1,2})^2 + (T^2 - a_{1,2} h_3^2 - b_{1,2})^2}}{2}}, \\ b'_{1,2;3,4} &= \frac{T^2 - a_{1,2} h_3^2 - b_{1,2}}{2 a_{1,2;3,4}}, \end{aligned} \quad (57)$$



при этом  $S^2$  и  $T^2$  выражаются в соответствии с формулами

$$S^2 = h_3^4 + h_1^2, \quad T^2 = h_3^2(h_1^2 - 1). \quad (58)$$

Следует отметить, что  $\gamma_{1,2}^2$  есть квадраты волновых чисел плоской связанной термоупругой волны третьего типа (GNIII) [28].

Вернемся к определению потенциала  $\Omega$ . В цилиндрической системе координат дифференциальное уравнение в частных производных (51) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \gamma_j^2 \Omega = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (59)$$

а соответствующие решения для  $\Omega$  находятся в виде

$$\Omega|_{\gamma=\gamma_j} = I_n(p_j r) \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz} \quad (j = 1, 2). \quad (60)$$

Окончательно скалярный потенциал  $\Phi$  и комплексная амплитуда  $\Theta$  определяются в форме

$$\begin{aligned} \Phi &= (C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r)) \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz}, \\ \Theta &= h \frac{\omega \alpha}{\Lambda_*} (C_1 \gamma_1^2 I_n(p_1 r) + C_2 \gamma_2^2 I_n(p_2 r)) \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz}, \end{aligned} \quad (61)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

### 5. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВОЛНОВОДА И ЧАСТОТНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕРМОУПРУГОЙ ВОЛНЫ ЗАДАННОГО АЗИМУТА

В рассматриваемой задаче предполагается, что боковая поверхность волновода свободна от нагрузок, т. е. должны удовлетворяться граничные условия

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{r=R} = 0, \quad (62)$$

где  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\varphi}$ ,  $\sigma_{rz}$  — физические компоненты тензора напряжений.

С окружающей средой через боковую стенку волновода происходит конвективный теплообмен по линейному закону (38). Положив  $\theta_{env} = \theta_0$ , разделим уравнение (38) на  $\theta_0$ , затем разность  $\theta - \theta_0$  обозначим, как было оговорено ранее, через  $\theta$  и продифференцируем обе части полученного уравнения по времени. В результате, приходим к условию

$$\left( \Lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} + \Lambda_* \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial r} + \sigma \dot{\theta} \right) \Big|_{r=R} = 0, \quad (63)$$

$\sigma$  — коэффициент теплообмена, отнесенный к отсчетной температуре  $\theta_0$ .

На основании (44) физические компоненты перемещений в цилиндрической системе координат выражаются (с точностью до гармонической экспоненты  $e^{-i\omega t}$ ) через потенциалы  $\Phi$  и  $\Psi$

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial z}, \quad u_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial r}, \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\Psi_\varphi}{r} + \frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_r}{\partial \varphi}. \quad (64)$$

Принимая во внимание соотношения (48), (61), с помощью (64) получаем представления для перемещений и температуры в гармонической связанной GNIII-термоупругой волне:

$$\begin{aligned} u_r &= \left[ C_1 (p_1^2 - g^2) \left( \frac{n}{r} I_n(p_1 r) + p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right) + C_2 (p_2^2 - g^2) \left( \frac{n}{r} I_n(p_2 r) + p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right) + \right. \\ &\left. + \frac{n}{r} C_3 I_n(q_2 r) + (\mp ik) \left( C_3 \frac{2n}{q_2 r} I_n(q_2 r) + C_3 I_{n+1}(q_2 r) - C_4 I_{n+1}(q_2 r) \right) \right] \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz - i\omega t}, \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
 u_\varphi &= \left[ (\pm ik) \left( C_3 \frac{2n}{q_2 r} I_n(q_2 r) + C_3 I_{n+1}(q_2 r) + C_4 I_{n+1}(q_2 r) \right) - C_5 \left( \frac{n}{r} I_n(q_2 r) + q_2 I_{n+1}(q_2 r) \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{n}{r} \{ C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \} \right] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz - i\omega t}, \\
 u_z &= \left[ (\pm ik) \{ C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \} + \right. \\
 &\quad \left. + (C_3 - C_4) q_2 I_n(q_2 r) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz - i\omega t}, \\
 \theta &= h \frac{\omega \alpha}{\Lambda_*} (C_1 (k^2 - p_1^2) I_n(p_1 r) + C_2 (k^2 - p_2^2) I_n(p_2 r)) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz - i\omega t}.
 \end{aligned}$$

Далее, удовлетворяя граничным условиям (62), условию конвективного теплообмена (63), а также калибровочному условию (45), приходим к линейной однородной алгебраической системе уравнений относительно пяти постоянных  $C_j$ :

$$D_{ij} C_j = 0 \quad (i, j = \overline{1, 5}). \quad (65)$$

Приравнявая нулю определитель системы (65), который мы в дальнейшем будем обозначать через  $D$ , получаем частотное уравнение  $D = 0$ . В случае теплоизолированного цилиндрического волновода элементы частотного определителя приведены в [1, 30]. В рассматриваемой задаче с конвективным теплообменом через боковую поверхность волновода элементы частотного определителя  $D_{41}$  и  $D_{42}$  будут отличаться от приведенных в указанных работах. Для удобства ниже выписываются все элементы частотного определителя  $D$  ( $n = 1, 2, \dots$ ):

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= \frac{1}{k^2 - q_1^2} (p_1^2 - g^2) ((n^2 - n + p_1^2) I_n(p_1) - p_1 I_{n+1}(p_1)) + \\
 &+ \frac{(2q_1^2 - q_2^2 - k^2)(p_1^2 - g^2)}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} ((n - n^2 - k^2) I_n(p_1) + p_1 I_{n+1}(p_1)) - h s_*^2 (k^2 - p_1^2) I_n(p_1), \\
 D_{12} &= \frac{1}{k^2 - q_1^2} (p_2^2 - g^2) ((n^2 - n + p_2^2) I_n(p_2) - p_2 I_{n+1}(p_2)) + \\
 &+ \frac{(2q_1^2 - q_2^2 - k^2)(p_2^2 - g^2)}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} ((n - n^2 - k^2) I_n(p_2) + p_2 I_{n+1}(p_2)) - h s_*^2 (k^2 - p_2^2) I_n(p_2), \\
 D_{13} &= \mp (ik) \frac{2}{k^2 - q_2^2} \left( \frac{2n^2 - 2n + q_2^2}{2n} (I_{n-1}(q_2) - I_{n+1}(q_2)) + (n-1) I_{n+1}(q_2) \right), \\
 D_{14} &= \mp (ik) \frac{2}{k^2 - q_2^2} (-q_2 I_n(q_2) + (n+1) I_{n+1}(q_2)), \quad D_{15} = \frac{2}{k^2 - q_2^2} ((n^2 - n) I_n(q_2) + q_2 n I_{n+1}(q_2)), \\
 D_{21} &= 2(p_1^2 - g^2) ((n - n^2) I_n(p_1) - n p_1 I_{n+1}(p_1)), \quad D_{22} = 2(p_2^2 - g^2) ((n - n^2) I_n(p_2) - n p_2 I_{n+1}(p_2)), \\
 D_{23} &= \pm (ik) \left( \frac{4n^2 - 4n + q_2^2}{2n} (I_{n-1}(q_2) - I_{n+1}(q_2)) + (2n - 2) I_{n+1}(q_2) \right), \\
 D_{24} &= \pm (ik) (q_2 I_n(q_2) - (2n + 2) I_{n+1}(q_2)), \quad D_{25} = (2n - 2n^2 - q_2^2) I_n(q_2) + 2q_2 I_{n+1}(q_2), \\
 D_{31} &= \pm (2ik) (p_1^2 - g^2) (n I_n(p_1) + p_1 I_{n+1}(p_1)), \quad D_{32} = \pm (2ik) (p_2^2 - g^2) (n I_n(p_2) + p_2 I_{n+1}(p_2)), \\
 D_{33} &= \frac{2k^2 + q_2^2}{2} (I_{n-1}(q_2) - I_{n+1}(q_2)) + (q_2^2 + k^2) I_{n+1}(q_2), \\
 D_{34} &= -q_2 n I_n(q_2) - (q_2^2 + k^2) I_{n+1}(q_2), \quad D_{35} = \pm (ik) n I_n(q_2), \\
 D_{41} &= (k^2 - p_1^2) (n I_n(p_1) + p_1 I_{n+1}(p_1)) + h_7 (k^2 - p_1^2) I_n(p_1), \\
 D_{42} &= (k^2 - p_2^2) (n I_n(p_2) + p_2 I_{n+1}(p_2)) + h_7 (k^2 - p_2^2) I_n(p_2), \\
 D_{43} &= 0, \quad D_{44} = 0, \quad D_{45} = 0, \quad D_{51} = 0, \quad D_{52} = 0, \quad D_{53} = q_2, \quad D_{54} = q_2, \quad D_{55} = \pm (ik),
 \end{aligned}$$



где принято обозначение  $q_1^2 = k^2 - k_{\parallel}^2$ ,  $s_*^2 = \frac{\alpha^2}{\rho\Lambda_*}$  и введены следующие безразмерные величины:  
 $h_5^2 = h_6^2 \tilde{k}_{\parallel}$ ,  $h_6^2 = \frac{\sigma c_l}{\Lambda}$ ,  $h_7 = \frac{i h_5^2}{1 + i h_3^2}$ ,  $\tilde{s}_* = \frac{s_*}{\sqrt{\omega}}$ ,  $\tilde{k} = kR$ ,  $\tilde{k}_{\parallel} = k_{\parallel}R$ ,  $\tilde{p}_j = p_j R$ ,  $\tilde{q}_j = q_j R$ , и символ волны, указывающий на отсутствие физической размерности, для краткости опущен. Заметим, что  $\tilde{s}_* = \frac{h_4}{\sqrt{\tilde{k}_{\parallel}}}$ ,  $h_4^2 = \frac{\alpha^2 R}{\rho\Lambda_* c_l}$ . В дальнейшем будет использоваться еще одна определяющая постоянная  $h_0^2 = \frac{\Lambda_* c_l}{\Lambda R}$ .

### 6. ВИЗУАЛЬНАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ КОРНЕЙ ЧАСТОТНОГО УРАВНЕНИЯ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ ( $\text{Re } \tilde{k}$ , $\text{Im } \tilde{k}$ )

Переходя к анализу частотного уравнения, отметим, что в рассматриваемой задаче всего имеется пять независимых безразмерных материальных постоянных, не зависящих от частоты:  $h_0$ ,  $h_2$ ,  $h_4$ ,  $h_6$ ,  $\tilde{k}_{\perp}/\tilde{k}_{\parallel} = c_l/c_t$ . Изменение частоты будет определяться варьированием еще одного (шестого) безразмерного параметра  $\tilde{k}_{\parallel}$ .

Для отыскания решений частотного уравнения и анализа полученных данных применялась система символьных вычислений Mathematica 6.0. С ее помощью численно исследовалось уравнение  $D = 0$  в случае различных азимутальных чисел  $n$  и осуществлялся поиск безразмерных волновых чисел  $\tilde{k} = kR$  при заданных значениях пяти независимых безразмерных определяющих постоянных и различных значениях волнового числа чисто упругой продольной волны  $\tilde{k}_{\parallel}$ ; проводилась визуальная локализация на комплексной плоскости ( $\text{Re } \tilde{k}$ ,  $\text{Im } \tilde{k}$ ) корней частотного уравнения  $D = 0$  и были построены соответствующие графические образы, иллюстрирующие процесс локализации волновых чисел.

Предваряя описание процедуры визуальной локализации корней частотного уравнения, заметим, что используемые в формулах для элементов частотного детерминанта величины  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $g$  в силу своего определения *многозначны*. Последнее обстоятельство существенно осложняет вычисление частотного детерминанта в системах типа Mathematica 6.0. В частности, для получения полного набора линий нулевого уровня значений  $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$  и  $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$  требуется исследование всех  $2^5$  вариантов выбора значений двузначных величин  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $g$ . С целью контроля их значений произведем явное вычисление соответствующих квадратных корней. Для этого воспользуемся тем, что извлечение квадратного корня в выражении

$$q = \sqrt{k^2 - \xi^2} \tag{66}$$

приводит к двум следующим значениям:

$$\text{Re } q = \pm \sqrt{\frac{P + \sqrt{P^2 + 4Q^2}}{2}}, \quad \text{Im } q = \frac{Q}{\text{Re } q}, \tag{67}$$

где введены обозначения  $P = (\text{Re } k)^2 - (\text{Im } k)^2 - (\text{Re } \xi)^2 + (\text{Im } \xi)^2$ ,  $Q = (\text{Re } k)(\text{Im } k) - (\text{Re } \xi)(\text{Im } \xi)$ .

Ясно, что приведенные только что формулы вычисления значений  $\sqrt{k^2 - \xi^2}$  пригодны только в том случае, когда  $\text{Re } \sqrt{k^2 - \xi^2} \neq 0$ . Это условие не выполняется только тогда, когда разность  $k^2 - \xi^2$  есть отрицательное вещественное число. Поэтому в том случае, когда разность  $\xi^2 - k^2$  вещественна и положительна, получаем  $q = \sqrt{k^2 - \xi^2} = \pm i \sqrt{\xi^2 - k^2}$ .

На основании (1), (67) для величин

$$q_1 = \sqrt{k^2 - k_{\parallel}^2}, \quad k_{\parallel}^2 = \frac{\omega^2}{c_l^2}, \quad q_2 = \sqrt{k^2 - k_{\perp}^2}, \quad k_{\perp}^2 = \frac{\omega^2}{c_t^2}$$

получим

$$\text{Re } q_1 = \pm \sqrt{\frac{P_{\parallel} + \sqrt{P_{\parallel}^2 + 4Q_{\parallel}^2}}{2}}, \quad \text{Im } q_1 = \frac{Q_{\parallel}}{\text{Re } q_1},$$



$$\begin{aligned}
 P_{\parallel} &= (\operatorname{Re} k)^2 - (\operatorname{Im} k)^2 - k_{\parallel}^2, & Q_{\parallel} &= (\operatorname{Re} k)(\operatorname{Im} k); \\
 \operatorname{Re} q_2 &= \pm \sqrt{\frac{P_{\perp} + \sqrt{P_{\perp}^2 + 4Q_{\perp}^2}}{2}}, & \operatorname{Im} q_2 &= \frac{Q_{\perp}}{\operatorname{Re} q_2}, \\
 P_{\perp} &= (\operatorname{Re} k)^2 - (\operatorname{Im} k)^2 - k_{\perp}^2, & Q_{\perp} &= (\operatorname{Re} k)(\operatorname{Im} k).
 \end{aligned}$$

Квадратный корень в выражении

$$g = \sqrt{k^2 - \xi^2}, \quad \xi^2 = k_{\parallel}^2 h_2^2 \frac{1 + ih_3^2}{1 + h_3^4},$$

поскольку

$$\operatorname{Re} \xi = \pm h_2 k_{\parallel} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + h_3^4}}{2(1 + h_3^4)}}, \quad \operatorname{Im} \xi = \frac{k_{\parallel}^2 h_2^2 h_3^2}{2(1 + h_3^4) \operatorname{Re} \xi}, \quad (68)$$

извлекается в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} g &= \pm \sqrt{\frac{P + \sqrt{P^2 + 4Q^2}}{2}}, & \operatorname{Im} g &= \frac{Q}{\operatorname{Re} g}, \\
 P &= (\operatorname{Re} k)^2 - (\operatorname{Im} k)^2 - (\operatorname{Re} \xi)^2 + (\operatorname{Im} \xi)^2, & Q &= (\operatorname{Re} k)(\operatorname{Im} k) - (\operatorname{Re} \xi)(\operatorname{Im} \xi).
 \end{aligned}$$

В формуле (68) необходимо выбрать один из знаков (все равно какой, так как дальнейшие вычисления не зависят от конкретизации знака). По смыслу величина  $\xi$  есть комплексное волновое число плоской чисто термической (т. е. не сопровождающейся деформацией) волны. Поскольку термические волны в чистом виде (т. е. *отдельно* от волн деформации) в термоупругой среде не существуют, то значение  $\xi$  имеет указанный выше смысл только с этой поправкой.

Остается рассмотреть квадратные корни в

$$p_1 = \sqrt{k^2 - \gamma_1^2}, \quad p_2 = \sqrt{k^2 - \gamma_2^2},$$

где

$$\begin{aligned}
 \frac{2\gamma_{1,2}^2}{k_{\parallel}^2} &= \frac{ih_3^2 - h_1^2 + a_{1,2} + ib_{1,2}}{ih_3^2 - 1}, \\
 a_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2 + \sqrt{(h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2)^2 + 4h_3^4(2h_2^2 - h_1^2)^2}}{2}}, & b_{1,2} &= \frac{h_3^2(2h_2^2 - h_1^2)}{a_{1,2}}.
 \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
 &\frac{\sqrt{2}}{k_{\parallel}} \sqrt{1 + h_3^4} \operatorname{Re} \gamma_{1,2} = \\
 &= \pm \sqrt{\frac{h_3^4 + h_3^2 b_{1,2} + h_1^2 - a_{1,2} + \sqrt{(h_3^4 + h_3^2 b_{1,2} + h_1^2 - a_{1,2})^2 + (h_1^2 h_3^2 - a_{1,2} h_3^2 - h_3^2 - b_{1,2})^2}}{2}}, & (69) \\
 &\frac{\sqrt{2}}{k_{\parallel}} \sqrt{1 + h_3^4} \operatorname{Im} \gamma_{1,2} = \frac{h_1^2 h_3^2 - a_{1,2} h_3^2 - h_3^2 - b_{1,2}}{2 \frac{\sqrt{2}}{k_{\parallel}} \sqrt{1 + h_3^4} \operatorname{Re} \gamma_{1,2}},
 \end{aligned}$$

значения  $p_1, p_2$  вычисляются как

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} p_1 &= \pm \sqrt{\frac{P_1 + \sqrt{P_1^2 + 4Q_1^2}}{2}}, & \operatorname{Im} p_1 &= \frac{Q_1}{\operatorname{Re} p_1}, \\
 P_1 &= (\operatorname{Re} k)^2 - (\operatorname{Im} k)^2 - (\operatorname{Re} \gamma_1)^2 + (\operatorname{Im} \gamma_1)^2, & Q_1 &= (\operatorname{Re} k)(\operatorname{Im} k) - (\operatorname{Re} \gamma_1)(\operatorname{Im} \gamma_1); \\
 \operatorname{Re} p_2 &= \pm \sqrt{\frac{P_2 + \sqrt{P_2^2 + 4Q_2^2}}{2}}, & \operatorname{Im} p_2 &= \frac{Q_2}{\operatorname{Re} p_2}, \\
 P_2 &= (\operatorname{Re} k)^2 - (\operatorname{Im} k)^2 - (\operatorname{Re} \gamma_2)^2 + (\operatorname{Im} \gamma_2)^2, & Q_2 &= (\operatorname{Re} k)(\operatorname{Im} k) - (\operatorname{Re} \gamma_2)(\operatorname{Im} \gamma_2).
 \end{aligned}$$



В формуле (69) также необходимо указать один из знаков (все равно какой, так как интересующие нас вычисления не зависят от того, какой именно знак выбран). Заметим, что постоянные  $\gamma_1, \gamma_2$  — скорости распространения плоских связанных GNIII-термоупругих волн.

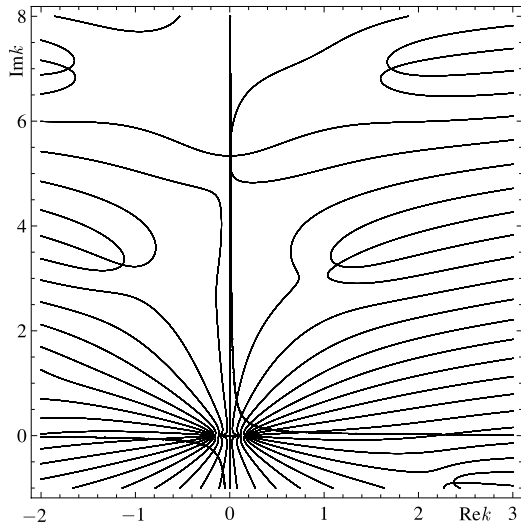


Рис. 1

Учитывая изложенное, все программы в кодах Mathematica 6.0 были написаны так, чтобы обеспечить различные варианты выбора знаков перед знаками радикалов в данных выше формулах для вещественных и мнимых частей величин  $q_1, q_2, p_1, p_2, g$ . В качестве примера на рис. 1 для связанной GNIII-термоупругой волны азимутального порядка  $n = 3$  приводится картина линий нулевого уровня значений  $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$  и  $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$ , полученная в результате объединения всех  $2^5$  вариантов возможного выбора значений двузначных величин  $q_1, q_2, p_1, p_2, g$ . Значения безразмерных определяющих постоянных приняты равными  $h_0 = 0.1, h_2 = 100.0, h_4 = 0.01, h_6 = 21, c_l/c_t = 1.9; \tilde{k}_{||} = 0.1$ . Построение выполнено с помощью процедуры ContourPlot, PlotPoints = 450. Осуществлен учет  $2^5 = 32$  возможных вариантов выбора однозначных ветвей квадратных радикалов в выражении для  $D$ .

В табл. 1 сгруппированы некоторые наиболее близкие к нулю безразмерные волновые числа  $\tilde{k}$  термоупругой волны первого азимутального порядка, найденные с помощью процедуры FindRoot при следующих значениях безразмерных определяющих постоянных:  $h_0 = \sqrt{\Lambda_* c_l / (\Lambda R)} = 0.1, h_2 = c_l / l = 100.0, h_4 = \alpha \sqrt{R / (\rho \Lambda_* c_l)} = 0.01, h_6 = \sqrt{\sigma c_l / \Lambda} = 1.1, c_l / c_t = 1.9$ . В выражении для параметра  $h_4$  следует учитывать, что  $\Lambda_*$  относится к отсчетной температуре  $\theta_0$ .

Таблица 1

$\tilde{k}_{  }$	Волновые числа $\tilde{k} = kR$	$\tilde{k}_{  }$	Волновые числа $\tilde{k} = kR$
0.1	$-0.011814 + 6.085313i$	0.2	$-0.2 + 4.98733 \times 10^{-18}i$
	$-0.19 - 3.39887 \times 10^{-18}i$		$0.38 - 1.3892 \times 10^{-22}i$
	$1.98107 \times 10^{-13} + 2.81428i$		$1.33648 \times 10^{-13} + 2.79345i$
	$1.71312 \times 10^{-14} + 0.456983i$		$6.96231 \times 10^{-15} + 0.605541i$
0.3	$0.57 - 1.90096 \times 10^{-18}i$	0.4	$0.4 - 1.5378 \times 10^{-17}i$
	$0.3 - 1.0262 \times 10^{-17}i$		$0.76 + 4.57084 \times 10^{-18}i$
	$2.20287 \times 10^{-15} + 0.689327i$		$2.35725 \times 10^{-15} + 0.731949i$
	$1.74377 \times 10^{-15} + 6.6713i$		$-4.41931 \times 10^{-18} + 2.70864i$
0.5	$2.967 \times 10^{-15} + 0.741351i$	0.6	$2.12995 \times 10^{-15} + 0.719426i$
	$-3.51351 \times 10^{-15} - 0.741351i$		$2.67966 \times 10^{-15} + 0.719426i$
	$0.95 - 4.0535 \times 10^{-19}i$		$1.14 - 3.57361 \times 10^{-18}i$
	$0.5 - 3.07992 \times 10^{-17}i$		$0.6 - 4.43641 \times 10^{-17}i$
0.7	$1.69503 \times 10^{-15} + 0.663357i$	0.8	$1.21172 \times 10^{-16} + 0.562791i$
	$-1.60072 \times 10^{-15} + 0.663357i$		$1.44482 \times 10^{-15} + 0.562791i$
	$1.33 + 7.8288 \times 10^{-20}i$		$0.8 - 7.91034 \times 10^{-17}i$
	$0.7 - 6.05126 \times 10^{-17}i$		$1.52 + 1.94567 \times 10^{-24}i$

Далее остановимся на процедуре визуальной локализации корней частотного уравнения. Для определенности выберем первый из корней частотного уравнения, включенных в табл. 1:  $\tilde{k} = -0.011814314799580788 + 6.085313119171459i$ . Сначала построим кривые нулевого уровня значений  $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$  и  $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$ . Линии уровня  $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$  и  $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$  выстраиваются совместно на одном и том же рисунке с помощью стандартной процедуры Mathematica 6.0 ContourPlot с заданным значением PlotPoints = 450.



На рис. 2–4 с различной степенью детализации совместно построены нулевые линии уровня  $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$  и  $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$  в окрестности волнового числа  $\tilde{k}' = -0.011814314799580788 + 6.085313119171459i$ . По-прежнему рассматривается термоупругая волна первого азимутального порядка при следующих значениях безразмерных определяющих постоянных:  $h_0 = \sqrt{\Lambda_* c_l / (\Lambda R)} = 0.1$ ,  $h_2 = c_l / l = 100.0$ ,  $h_4 = \alpha \sqrt{R / (\rho \Lambda_* c_l)} = 0.01$ ,  $h_6 = \sqrt{\sigma c_l / \Lambda} = 1.1$ ,  $c_l / c_t = 1.9$ . Для безразмерной постоянной  $\tilde{k}_{||}$  принято значение 0.1. В выражениях для вещественных частей  $q_1$ ,  $q_2$  выбраны отрицательные знаки.

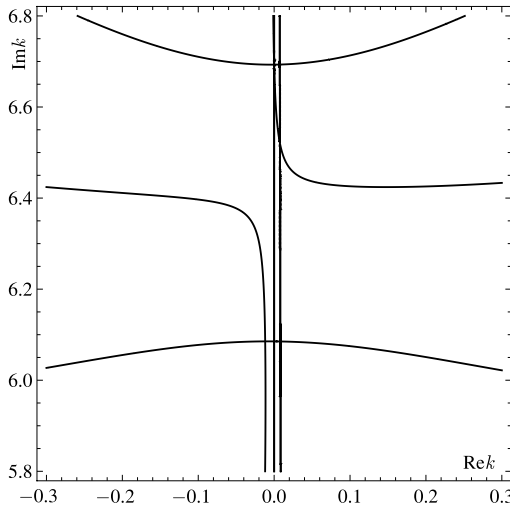


Рис. 2

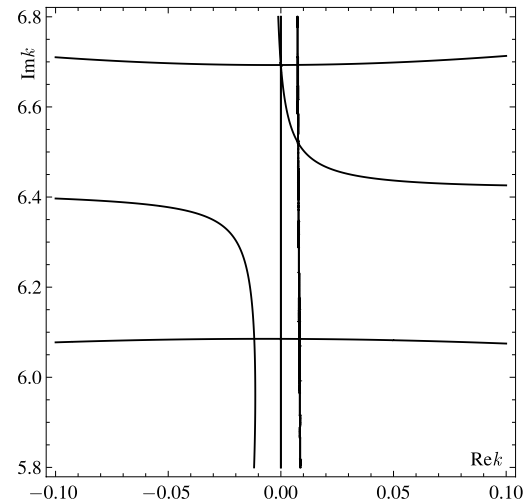


Рис. 3

Рис. 4 дает наиболее детальную картину. Точки, в которых пересекаются указанные линии уровня, и являются корнями частотного уравнения  $D = 0$ . После чего, собственно говоря, процесс визуальной локализации волнового числа  $\tilde{k} = \tilde{k}'$  можно считать завершенным.

Подставляя найденное волновое число  $\tilde{k} = \tilde{k}'$  в частотный определитель  $D$ , получаем значение  $D = 5.4090618305084216 \cdot 10^{-11} - 1.1823313693210316 \times 10^{-10}i$ , весьма близкое к нулю, что свидетельствует о достаточно точном нахождении корня частотного уравнения  $D = 0$ .

Остановимся также на локализации волновых чисел связанной термоупругой волны седьмого азимутального порядка. Численно можно определить следующие два корня частотного уравнения:

$$\tilde{k} = 0.35813631327764267 + 0.13995345934802972i, \quad \tilde{k} = -0.3300000112936643 + 0.14999999521083596i.$$

По-прежнему задаются следующие значения безразмерных определяющих постоянных:  $h_0 = \sqrt{\Lambda_* c_l / (\Lambda R)} = 0.1$ ,  $h_2 = c_l / l = 100.0$ ,  $h_4 = \alpha \sqrt{R / (\rho \Lambda_* c_l)} = 0.01$ ,  $h_6 = \sqrt{\sigma c_l / \Lambda} = 1.1$ ,  $c_l / c_t = 1.9$ . Для безразмерной постоянной  $\tilde{k}_{||}$  принято значение 0.1. В выражениях для вещественных частей  $q_1$ ,  $q_2$  выбраны отрицательные знаки. Совместное изображение нулевых линий уровня вещественной и мнимой части частотного определителя  $D$  в зоне локализации указанных выше корней частотного уравнения представлено на рис. 5, а. На рис. 5, б приводится более детальное изображение этой же зоны. Построения выполнены с заданным значением `PlotPoints = 450`.

Для контроля точности нахождения волновых чисел необходимо вычислить значения частотного детерминанта  $D$  для определенных численно корней частотного уравнения. Для безразмерного

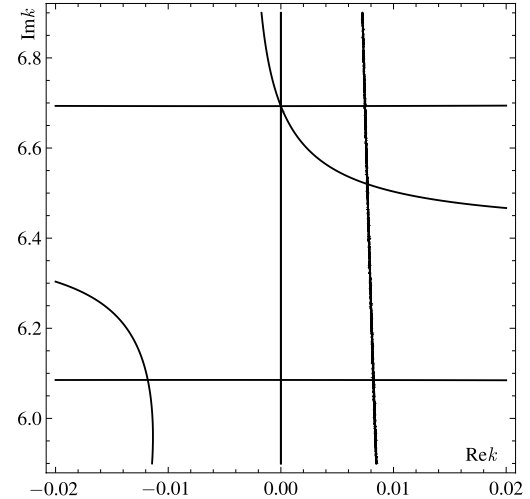


Рис. 4



волнового числа  $\tilde{k} = 0.35813631327764267 + 0.13995345934802972i$  имеем весьма малое значение

$$D = 3.6385463758821164 * 10^{-23} + 8.860204458854764 * 10^{-22}i;$$

для  $\tilde{k} = -0.3300000112936643 + 0.14999999521083596i$  также получается чрезвычайно малое значение

$$D = 2.7335966455513133 * 10^{-22} - 2.6113561644592067 * 10^{-23}i.$$

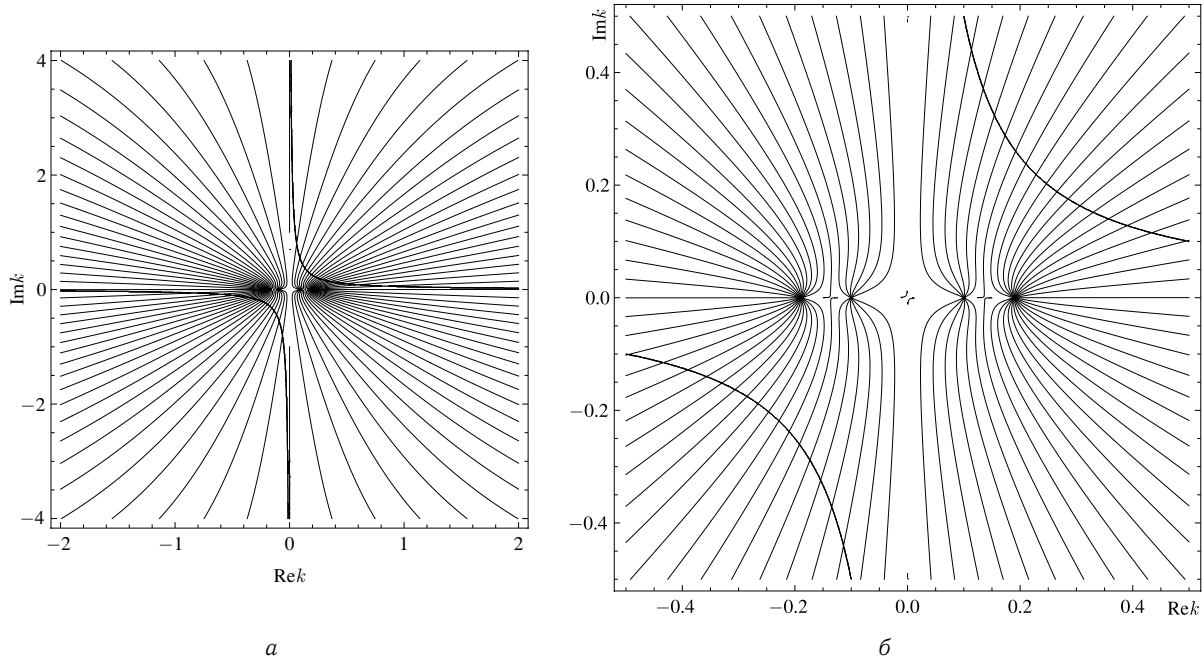


Рис. 5

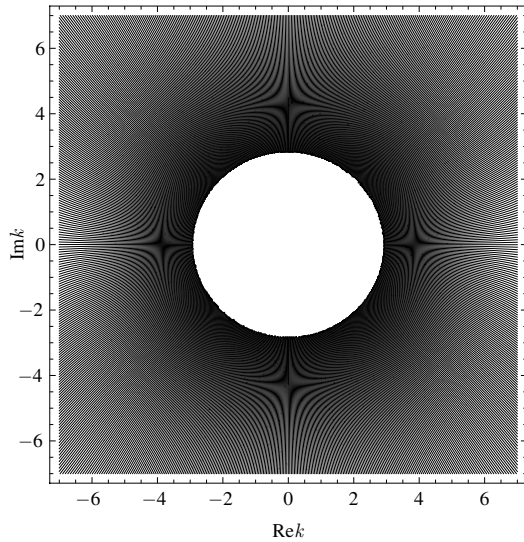


Рис. 6

С ростом азимутального числа  $n$  связанной термоупругой волны процесс локализации волновых чисел существенно усложняется. Это обстоятельство прекрасно иллюстрируется картиной (рис. 6) совместно построенных изолиний  $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$  и  $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$  для волны достаточно высокого азимутального порядка  $n = 70$ . Указанные изолинии в выбранном масштабе представления графических данных практически сплошь заполняют комплексную плоскость  $(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$ , не проникая, однако, внутрь четко обозначенной на рис. 6 «окружности». Графические построения проводились при следующих значениях безразмерных определяющих постоянных:  $h_0 = \sqrt{\Lambda_* c_l / (\Lambda R)} = 0.1$ ,  $h_2 = c_l / l = 100.0$ ,  $h_4 = \alpha \sqrt{R / (\rho \Lambda_* c_l)} = 0.01$ ,  $h_6 = \sqrt{\sigma c_l / \Lambda} = 2.0$ ,  $c_l / c_t = 1.9$ ; для безразмерной постоянной  $\tilde{k}_{||}$  принято значение 0.1; задано значение  $\text{PlotPoints} = 450$ . В выражениях для вещественных частей  $p_1$ ,  $q_1$ ,  $g$  были выбраны отрицательные знаки.

Полученные численные и графические данные позволяют также заключить, что при фиксированной частоте в волноводе, по-видимому, не могут распространяться термоупругие волны третьего типа, которым соответствуют волновые числа, имеющие модуль, меньший некоторого порогового значения  $\lambda^*$ :  $|\tilde{k}| \leq \lambda^*$ . Это значение  $\lambda^* = 2.934$ , оцениваемое численно, представляет собой характерный



радиус «окружности» (см. рис. 6), внутри которой не отображаются линии нулевого уровня вещественной и мнимой части частотного определителя. Геометрия самой «окружности», как показывают более точные вычисления, оказывается достаточно сложной (рис. 7–9).

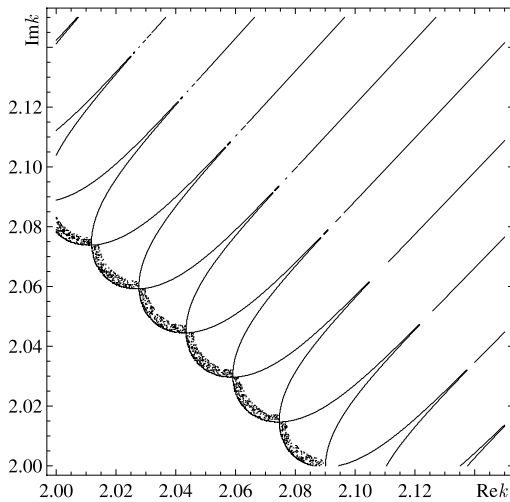


Рис. 7

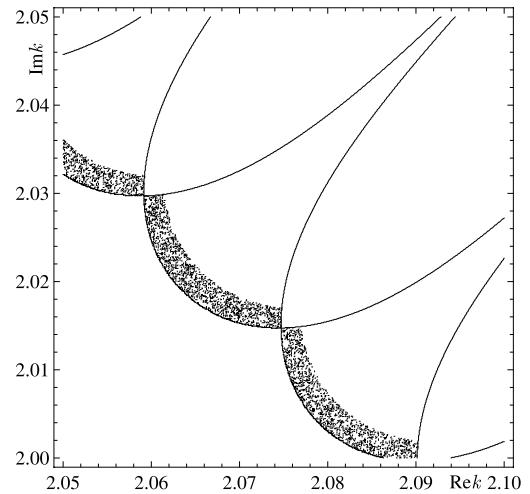


Рис. 8

На рис. 7 изображена структура границы «окружности», внутрь которой не проникают регулярные линии уровня  $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$  и  $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$ . Графические данные построены с заданным значением  $\text{PlotPoints} = 750$ . На рис. 8 более детально изображен участок границы «окружности», приведенной на рис. 7. Наряду с регулярными линиями уровня присутствуют также линии с хаотичной геометрией. Графические данные построены с заданным значением  $\text{PlotPoints} = 650$ . Дальнейшее исследование осложняется тем, что в окрестности границы «окружности» линии уровня характеризуются достаточно хаотичной геометрией, детализация которой, как показывает рис. 9 (значение  $\text{PlotPoints} = 750$ ), из-за сопутствующего «серого фона» практически невозможна.

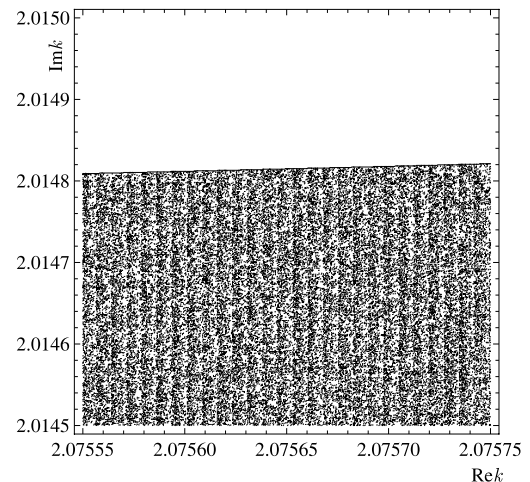


Рис. 9

В табл. 2 приводятся результаты численного анализа влияния безразмерной определяющей постоянной  $h_6$  (волна азимутального порядка  $n = 70$ ) на характерный радиальный размер «окружности».

Таблица 2

Значения постоянной $h_6$	Характерный линейный размер $\lambda^*$	Значения постоянной $h_6$	Характерный линейный размер $\lambda^*$	Значения постоянной $h_6$	Характерный линейный размер $\lambda^*$
2	2.9342	16000	2.738	120000	2.695
2000	2.817	32000	2.737	240000	2.679
4000	2.793	48000	2.7265	480000	2.659
6000	2.782	60000	2.718	960000	2.643
8000	2.775	96000	2.708	1920000	2.631

Следует заметить, что значения частотного определителя внутри указанной «окружности» весьма малы. Так, при  $h_6 = 2.0$  ( $n = 70$ ) согласно данным вычислений имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= 0.0950440 + 0.000084i \text{ значение } D = -2.044685 \times 10^{-620} + 1.340236 \times 10^{-620}i; \\ \tilde{k} &= 1.783787 + 1.782571i \text{ значение } D = 0.0 + 0.0i; \\ \tilde{k} &= 0.792573 + 0.693172i \text{ значение } D = 0.0 + 0.0i. \end{aligned}$$



По этой причине локализация корней частотного уравнения на фоне чрезвычайно малых значений самого частотного детерминанта оказывается невозможной. Вопрос о построении нулевых изолиний  $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$  и  $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$  внутри «окружности» будет рассматриваться отдельно.

Картина изолиний, подобная рис. 6, характерна лишь для сравнительно больших азимутальных чисел  $n$ , поскольку, например, при  $n = 20$ , как свидетельствуют проведенные вычисления, она не наблюдается (рис. 10). На рис. 10 изображены изолинии GNIII-термоупругой волны азимутально-

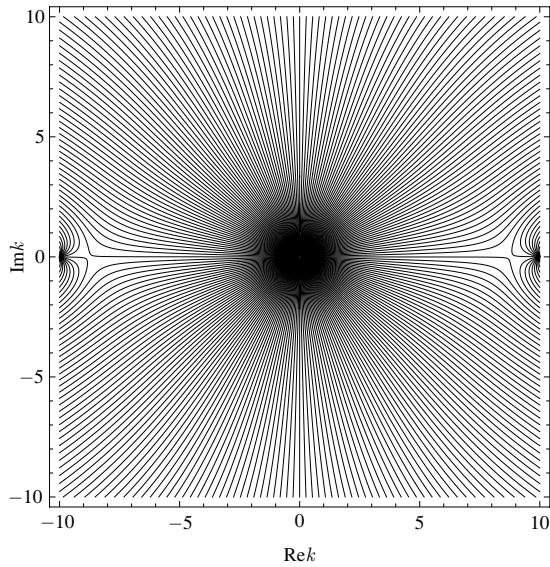


Рис. 10

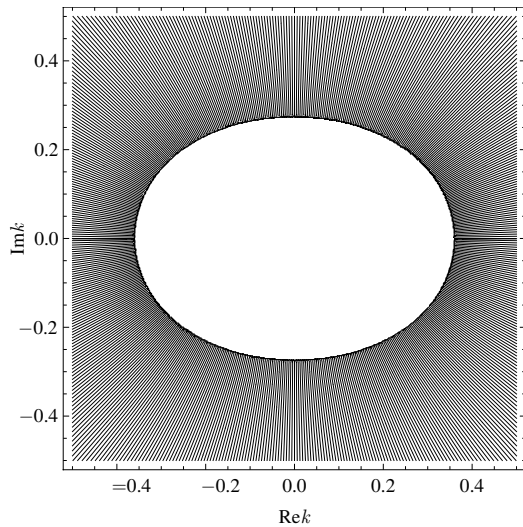


Рис. 11

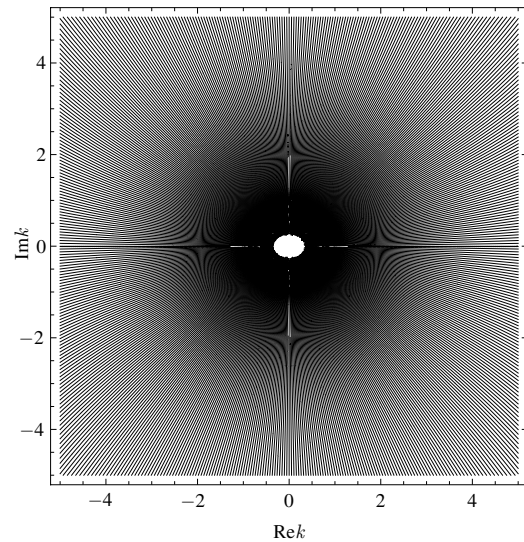


Рис. 12

го порядка  $n = 20$ . Значения безразмерных определяющих постоянных приняты равными  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $h_6 = 2.0$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ;  $\tilde{k}_{||} = 0.1$  (значение `PlotPoints` = 450). При переходе к гиперболической GNII-термоупругой волне<sup>3</sup> и малых значениях безразмерной постоянной  $h_6$  «окружность» вытягивается вдоль оси  $\text{Re } \tilde{k}$  так, как показано на рис. 11, 12 (значение `PlotPoints` = 450). На рис. 12 изображены изолинии гиперболической GNII-термоупругой волны азимутального порядка  $n = 47$ ; значения безразмерных определяющих постоянных приняты равными  $h_0 = 0$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $s = 0.01$ ,  $h_6 = 0.001$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ;  $\tilde{k}_{||} = 0.1$ . Менее детальное по сравнению с рис. 11 изображение приводится на рис. 12.

## 7. ПОСТРОЕНИЕ НУЛЕВЫХ ИЗОЛИНИЙ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ $(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$ В ОБЛАСТИ МАЛЫХ $|D|$

Как было отмечено, локализация корней частотного уравнения на фоне чрезвычайно малых значений самого частотного детерминанта сопряжена с дополнительными трудностями. На рис. 13–15 на комплексной плоскости представлены нулевые линии уровня вещественной и мнимой частей частотного детерминанта  $D$  в случае достаточно больших азимутальных чисел  $n$ , а именно  $n = 70$ , построенные при заданных значениях определяющих постоянных  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,

<sup>3</sup>Соотношения гиперболической термоупругости GNII получаются из соотношений GNIII-теории по следующей схеме:  $h_0 \rightarrow 0$ ,  $h_3 \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$ ,  $h_4 \rightarrow \infty$ ,  $h_0 h_4 = s$ ,  $h_1^2 = 1 + h_2^2 + s^2$ . Безразмерная постоянная  $\tilde{s}_* = h_4 / \sqrt{\tilde{k}_{||}}$  сама по себе в соотношения GNII-теории не входит;  $h(\tilde{s}_*)^2 \rightarrow s^2$ .





$h_6 = 2$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ;  $\tilde{k}_{\parallel} = 0.1$ . Использовано значение  $\text{PlotPoints} = 150$ . В выражениях для вещественных частей квадратных радикалов  $p_1$ ,  $q_1$ ,  $g$  выбраны отрицательные знаки.

Из рис. 13 видно, что при больших значениях азимутального числа  $n$ , нулевые линии уровня вещественной и мнимой части величины  $D$  в области, близкой к началу координат на комплексной плоскости ( $\text{Re } \tilde{k}$ ,  $\text{Im } \tilde{k}$ ), не отображаются. Это обстоятельство обусловлено тем, что в указанной области, ограниченной «окружностью», величина  $D$  принимает очень малые значения порядка  $10^{-295}$ .

На рис. 14 представлены нулевые линии уровня вещественной и мнимой части величины  $D$ , построенные в той же области, что и на рис. 13. Заданы значения  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $h_6 = 2$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ;  $\tilde{k}_{\parallel} = 0.1$ . Вычисления с нормированным значением  $D$ ,  $\text{PlotPoints} = 150$ . При построении изолиний значения  $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$  и  $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$  нормировались множителем  $10^{300}$ . Тем самым показано, что внутри «окружности» нулевые линии уровня на самом деле существуют и даже могут быть до определенной степени выстроены численно.

Нулевые линии уровня вещественной и мнимой части частотного детерминанта  $D$  внутри «окружности» в заданном квадрате наиболее детально изображены на рис. 15. Видно, что указанные линии достаточно плотно заполняют рассматриваемую область и характеризуются хаотической геометрией.

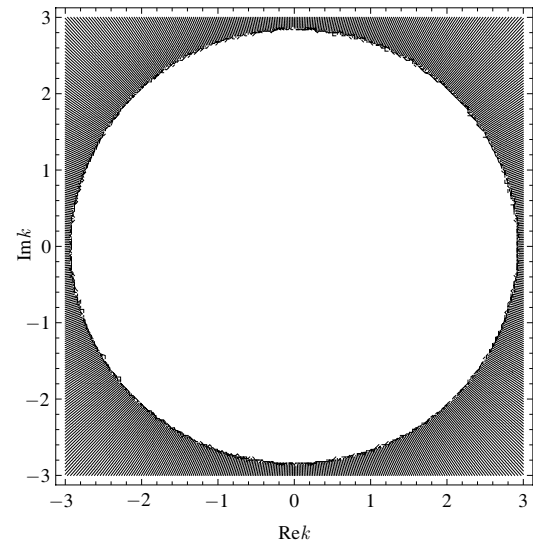


Рис. 13

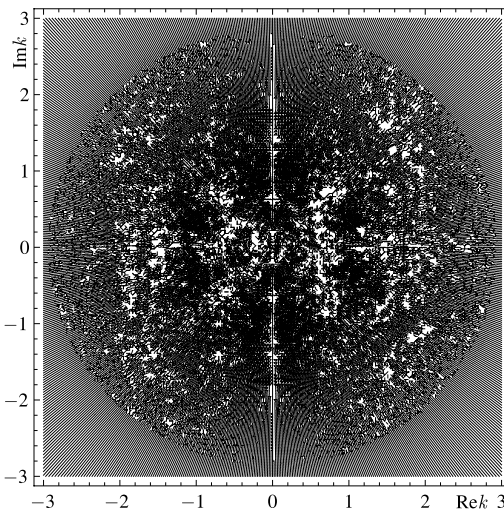


Рис. 14

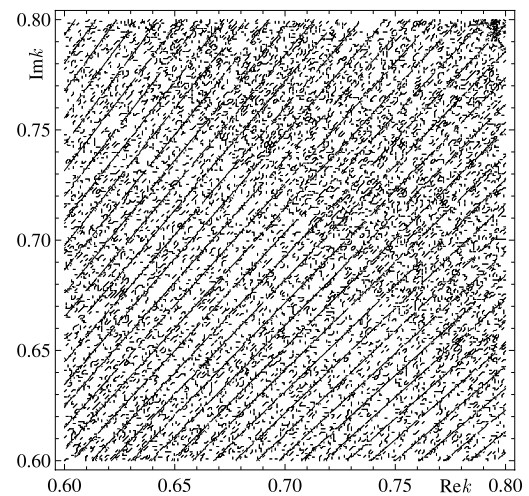


Рис. 15

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00184-а).

### Библиографический список

1. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов, 2010. 328 с.
2. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля : вариационные симметрии и геометрические инварианты. М., 2009. 156 с.
3. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика // Математическая физика и ее приложения : материалы второй междунар. конф. (под ред. чл.-корр. РАН И. В. Воловича и проф. Ю. Н. Радаева). Самара, 2010. С. 165–166.
4. Duhamel J. Second Mémoire sur les Phenomenes Thermo-Mécanique // J. de L'Ecole Polytech. 1837. Vol. 15. P. 1–57; Duhamel J. Mémoire sur le Calcul des Actions Moléculaires Développées par les Changements de Température dans les Corps Solides // Mémoires

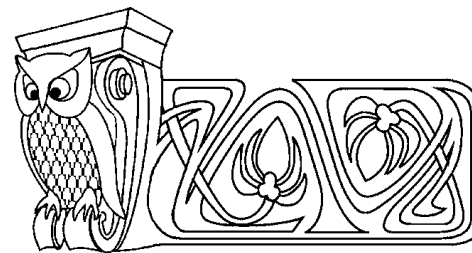


- par Divers Savants. A l'Acad. Roy. des Sci. de l'Inst. de France. 1838. Vol. 5. P. 440–498; *Neumann F.* Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers. Breslau, 1885.
5. *Лебедев Н. Н.* Температурные напряжения в теории упругости. М.; Л., 1937. 110 с.
6. *Maxwell J. C.* On the Dynamical Theory of Gases // *Phil. Trans. Royal Soc. Lond.* 1867. Vol. 157. P. 49–88.
7. *Biot M. A.* Thermoelasticity and irreversible thermodynamics // *J. Appl. Phys.* 1956. Vol. 27(3). P. 240–253.
8. *Joseph D. D., Preziosi L.* Heat waves // *Rev. Modern Physics.* 1989. Vol. 61, № 1. P. 41–73; *Joseph D. D., Preziosi L.* Addendum to the paper «Heat waves» // *Rev. Modern Physics.* 1990. Vol. 62, № 2. P. 375–391.
9. *McNelly T. F., Rogers S. J., Channin D. J., Rollefson R. J., Goubau W. M., Schmidt G. E., Krumhansl J. A., Pohl R. O.* Heat pulses in NaF: Onset of second sound // *Phys. Rev.* 1970. Vol. 24(3). P. 100–102.
10. *Jackson H. E., Walker C. T., McNelly T. F.* Second sound in NaF // *Phys. Rev. Letters.* 1970. Vol. 25(1). P. 26–28.
11. *Rogers S. J.* Transport of heat and approach to second sound in some isotopically pure Alkali-Halide crystals // *Phys. Rev. B.* 1971. Vol. 3(4). P. 1440–1457.
12. *Pohl D. W., Irrniger V.* Observation of second sound in NaF by means of light scattering // *Phys. Rev. Letters.* 1976. Vol. 36(9). P. 480–483.
13. *Hardy R. J., Jaswal S. S.* Velocity of second sound in NaF // *Phys. Rev. B.* 1971. Vol. 3(12). P. 4385–4387.
14. *Narayanamurti V., Dynes R. C.* Observation of second sound in Bismuth // *Phys. Rev. Letters.* 1972. Vol. 28. P. 1461–1464.
15. *Lord H., Shulman Y.* A generalized dynamical theory of thermoelasticity // *J. Mech. Phys. Solid.* 1967. Vol. 15. P. 299–309.
16. *Cattaneo C.* Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée // *J. of Comptes-Rendus Hebdomadaires des Seances de l'Académie des Sciences.* 1958. Vol. 247. P. 431–433.
17. *Vernotte P.* Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur // *J. of Comptes-Rendus Hebdomadaires des Seances de l'Académie des Sciences.* 1958. Vol. 246. P. 3154–3155.
18. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М., 1967. 600 с.
19. *Green A. E., Lindsay K. A.* Thermoelasticity // *J. Elasticity.* 1972. Vol. 2. P. 1–7.
20. *Green A. E., Naghdi P. M.* On undamped heat waves in an elastic solid // *J. Thermal Stresses.* 1992. Vol. 15. P. 253–264.
21. *Green A. E., Naghdi P. M.* Thermoelasticity without energy dissipation // *J. Elasticity.* 1993. Vol. 31. P. 189–208.
22. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М., 1970. 256 с.
23. *Maugin G. A.* Towards an analytical mechanics of dissipative materials // *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino.* 2000. Vol. 58, № 2. *Geom., Cont. and Micros., II.* P. 171–180.
24. *Maugin G. A., Kalpakides V. K.* The slow march towards an analytical mechanics of dissipative materials // *Technische Mechanik.* 2002. B. 22, H. 2. S. 98–103.
25. *Maugin G. A., Kalpakides V. K.* A Hamiltonian formulation for elasticity and thermoelasticity // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2002. Vol. 35. P. 10775–10788.
26. *Kalpakides V. K., Maugin G. A.* Canonical formulation and conservation laws of thermoelasticity // *Reports in Mathematical Physics.* 2004. Vol. 53. P. 371–391.
27. *Puri P., Jordan P. M.* On the propagation of plane waves in type-III thermoelastic media // *Proc. Royal Soc. Lond. A.* 2004. Vol. 460. P. 3203–3221.
28. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Волновые числа плоских GNIII-термоупругих волн и неравенства, обеспечивающие их нормальность // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер.* 2010. Т. 10. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 46–53.
29. *Dhaliwal R. S., Majumdar S. R., Wang J.* Thermoelastic waves in an infinite solid caused by a line heat source // *Intern. J. Math. & Math. Sci.* 1997. Vol. 20, № 2. P. 323–334.
30. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Распространение связанных гармонических GNIII-термоупругих волн в длинном цилиндрическом волноводе // *Вестн. Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния.* 2010. № 2(8), ч. 2. С. 207–255.
31. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н., Романов А. Е.* Прохождение теплового GNIII-волнового сигнала с высокой окружной гармоникой через цилиндрический волновод // *Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. тр. междунар. конф., посвящ. 80-летию д-ра физ.-мат. наук, проф. Д. Д. Ивлева.* Воронеж, 2010. С. 173–180.



УДК 519.642.2: 621.3.011.713

## РАЗРАБОТКА СХЕМНЫХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ



С. М. Тиховод

Запорожский национальный технический университет,  
кафедра теоретической и общей электротехники  
E-mail: stikhovod@gmail.com

Разработаны схемные модели метода численного расчета интегродифференциальных уравнений, описывающих переходные процессы в электрических цепях. Показано, что в некоторых случаях предложенная методика моделирования имеет лучшее быстродействие, чем известные методы.

**Ключевые слова:** схемные модели, интегродифференциальные уравнения, численные методы.

**Scheme Models Development of Integro-Differential Equations  
Numerical Calculation of Processes Dynamics in Electric Circuits**

**S. M. Tykhovod**

Zaporizhzhya National Technical University,  
Chair of Theoretical and Over-All Electrical Engineering  
E-mail: stikhovod@gmail.com

Scheme models of numeral calculation of integral-differential equations, describing transients in electric circuits are developed. It is shown that offered modeling has the best fast-acting concerning to the known calculations.

**Key words:** circuit diagram models, integro-differential equations, numerical methods.

### ВВЕДЕНИЕ

Моделирование переходных процессов в электрических цепях является неотъемлемой частью работы по проектированию электротехнических устройств. Уравнения состояния, которые составляются по законам Кирхгофа в мгновенной форме, являются интегродифференциальными уравнениями. Обычно интегродифференциальные уравнения преобразуют в системы дифференциальных уравнений первого порядка, но при этом порядок системы уравнений возрастает. Реальные исследуемые цепи могут содержать несколько сотен элементов, что приводит к большим системам дифференциальных уравнений при моделировании. Для решения таких систем в настоящее время широко применяются многошаговые методы численного интегрирования дифференциальных уравнений с использованием полиномиальной аппроксимации решения. В результате получены разностные схемы [1, гл. 11], позволяющие вычислить значение искомой функции в некоторой временной точке по известным значениям функции (или ее производных) в нескольких предыдущих точках. Однако увеличение порядка систем дифференциальных уравнений приводит к увеличению времени и снижению точности моделирования. Поэтому модификация методов численного решения интегродифференциальных уравнений, приводящая к сокращению времени моделирования, является актуальной задачей.

Для инженеров-электриков, которым важен физический смысл математических действий, представляется более наглядным, если какая-либо математическая операция заменяется схемной моделью. Например, расчет переходных процессов операторным методом [2, гл. 10] сопровождается операторной схемой замещения или дифференциальный анализ электрических цепей [3] сопровождается соответствующими схемами замещения. При этом в схеме замещения соответствующий процесс должен быть такой, чтобы он полностью описывался алгебраическими уравнениями. Схемная модель позволяет от электрической цепи, в которой процессы описываются интегродифференциальными уравнениями, перейти к цепи с изображениями токов, для которых справедливы законы Кирхгофа, приводящие к алгебраическим уравнениям. Это открывает возможность использования всего многообразного аппарата теории цепей для работы с изображениями токов. Поэтому модификация численного метода, сопровождающаяся созданием адекватной схемной модели «дружественной» для инженеров-электриков, является ценной.

**Цель данной работы** — модификация метода численного решения интегродифференциальных уравнений, использующего полиномиальную аппроксимацию решения, приводящая к получению отмеченных выше положительных качеств.



**МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ**

Рассмотрим одноконтурную цепь переменного тока, содержащую резистивный ( $R$ ), индуктивный ( $L$ ) и емкостный ( $C$ ) элементы, включенные последовательно. Пусть до коммутации конденсатор был заряжен до напряжения  $u_c(0)$ . При подключении при  $t = 0$  источника переменной ЭДС  $e(t)$  в цепи происходит переходный процесс, который описывается линейным интегродифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(t)dt + u_c(0) = e(t). \tag{1}$$

Будем искать решение во временной области, состоящей из  $N$  одинаковых шагов  $h$ . Узловые точки, являющиеся границами шагов, обозначим  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$ .

Решение для тока как функцию от времени в интервале времени  $[t_0, t_N]$  аппроксимируем полиномом  $N$ -й степени:

$$i(t) \simeq p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_Nt^N. \tag{2}$$

Для аппроксимирующего полинома (2) зададим условие, что в точках  $t_k$  деления интервала изменения аргумента

$$i(t_k) = p(t_k) \tag{3}$$

для  $k = 0, 1, 2, \dots, N$ . Если условие (3) записать для каждой точки  $t_k$ , то получим систему линейных алгебраических уравнений, если принять, что  $t_0 = 0$ :

$$\begin{cases} a_0 = i(t_0) = i_0, \\ a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots + a_Nh^N = i(t_1), \\ a_0 + a_1(2h) + a_2(2h)^2 + \dots + a_N(2h)^N = i(t_2), \\ \dots \\ a_0 + a_1(Nh) + a_2(Nh)^2 + \dots + a_N(Nh)^N = i(t_N). \end{cases} \tag{4}$$

Вычтем из уравнений системы (4) первое уравнение и получим сокращенную систему:

$$\begin{cases} a_1h + a_2h^2 + \dots + a_Nh^N = i_1(t_1) - i_0, \\ a_1(2h) + a_2(2h)^2 + \dots + a_N(2h)^N = i_1(t_2) - i_0, \\ \dots \\ a_1(Nh) + a_2(Nh)^2 + \dots + a_N(Nh)^N = i_N(t_N) - i_0. \end{cases} \tag{5}$$

В матричной форме система (5) имеет вид

$$\begin{bmatrix} h & h^2 & \dots & h^N \\ 2h & (2h)^2 & \dots & (2h)^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Nh & (Nh)^2 & \dots & (Nh)^N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1(t_1) - i_0 \\ i_1(t_2) - i_0 \\ \dots \\ i_N(t_N) - i_0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

или

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} - i_0, \tag{7}$$

где  $\mathbf{V}$  — матрица Вандермонда без первой строки и первого столбца;  $\mathbf{A} = [a_1, a_2, \dots, a_N]^T$  — вектор коэффициентов аппроксимирующего полинома;  $\mathbf{I} = [i_1(t_1), i_1(t_2), \dots, i_N(t_N)]^T$  — вектор значений тока в опорных точках  $1, 2, \dots, N$ . Будем считать, что номер  $k$  отрезка, на которые разделен интервал изменения аргумента, совпадает с номером точки деления  $t_k$ , расположенной справа отрезка.

Продифференцируем выражение (2):

$$\frac{di}{dt} = a_1 + 2a_2t + \dots + Na_Nt^{(N-1)}. \tag{8}$$



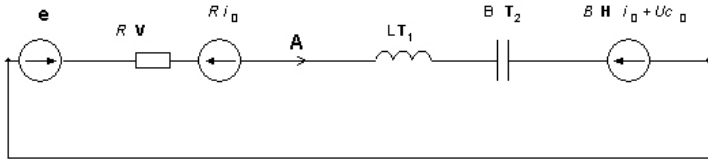


Рис. 1. Схема замещения контура R-L-C-e

элемент имеет операторное сопротивление  $R\mathbf{V}$  и последовательно с ним навстречу току включается источник ЭДС  $Ri_0$  (рис. 1).

Индуктивный элемент имеет операторное сопротивление  $L\mathbf{T}_1$ , а емкостный элемент имеет операторное сопротивление  $B\mathbf{T}_2$  и по-

следовательно с ним навстречу току включается источник ЭДС  $B\mathbf{H}i_0 + u_{c0}$ . Источнику ЭДС  $e(t)$  в оригинальной цепи соответствует изображающий вектор  $\mathbf{e}$  в цепи замещения.

Докажем, что в узлах схемы замещения для изображений  $\mathbf{A}$  соблюдается закон токов Кирхгофа. Для этого воспользуемся уравнением (7). В любом узле электрической цепи для токов ветвей, принадлежащих узлу, в любой момент времени, а следовательно, токов в начале интервала  $i_0$  и для векторов токов  $\mathbf{I}$ , выполняется закон токов Кирхгофа:

$$\sum_{k=1}^b (\mathbf{I}_k - i_{0k}) = \sum_{k=1}^b \mathbf{V}\mathbf{A}_k = 0, \tag{18}$$

где  $b$  — количество ветвей, сходящихся к узлу,  $k$  — текущий номер ветви, сходящейся к узлу. Если уравнение (18) умножить на матрицу, обратную матрице  $\mathbf{V}$ , то получим:

$$\sum_{k=1}^b (\mathbf{A}_k) = 0. \tag{19}$$

Что и требовалось доказать.

Из изложенного материала сделаем *выводы*.

Реальному току  $i(t)$  соответствует векторное изображение  $\mathbf{A}$  в схеме замещения, показанной на рис. 1. Все изображения тока  $\mathbf{A}$  в схеме замещения удовлетворяют законам Кирхгофа, если схема замещения составляется по следующему правилу:

- источник ЭДС заменяется векторным источником  $\mathbf{e}$ , содержащим значения ЭДС в  $N$  опорных точках;
- резистивный элемент имеет операторное сопротивление  $R\mathbf{V}$  и последовательно с ним навстречу току включается дополнительный источник ЭДС  $Ri_0$ ;
- индуктивный элемент имеет операторное сопротивление  $L\mathbf{T}_1$ ;
- емкостный элемент имеет операторное сопротивление  $B\mathbf{T}_2$  и последовательно с ним навстречу току включается дополнительный источник ЭДС  $B\mathbf{H}i_0 + u_{c0}$ .

Таким образом, в схеме замещения электрической цепи изображения  $\mathbf{A}_k$  оригиналов токов  $i_k(t)$  удовлетворяют законам Кирхгофа. Следовательно, при известных значениях токов ветвей  $i_{0k}$  и напряжений на конденсаторах  $u_{c0k}$  в начале интервала  $[t_0, t_N]$  система уравнений, составленная по законам Кирхгофа, для всех узлов без одного и для всех главных контуров имеет единственное решение. В результате решения системы линейных алгебраических уравнений получаем векторы полиномиальных коэффициентов  $\mathbf{A}_k$  для всех ветвей. Зная для любой ветви коэффициенты полинома и значение  $i_0$  в начальной точке  $t_0$ , мы можем получить значение тока и напряжения на конденсаторе во всех произвольных точках любого из  $N$  отрезков в интервале времени  $[t_0, t_N]$ .

Рассмотрим, как ведет себя полиномиальная аппроксимация, если изменять число опорных точек  $N$ . Как показано в работе [4, сар. 3] максимальная погрешность  $R$  аппроксимации полиномом  $p(x)$  степени  $N + 1$  некоторой функции  $f(x)$ , имеющей ограниченные непрерывные производные до степени  $N + 1$  на участке  $[a, b]$ , при условии, что в  $N + 1$  различной точке полином совпадает с функцией  $f(x)$ , определяется выражением

$$R = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)| \leq \frac{(b - a)^{N+1} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f^{(N+1)}(x)|}{(N + 1)!}. \tag{20}$$



Чтобы практически воспользоваться условием (20) представим, что при разложении в ряд Фурье функция  $f(x)$  реально содержит  $S$  гармоник. Тогда согласно теореме С. Берштейна [5, гл. 3] значение производной  $f^{(N+1)}(x)$  по модулю имеет ограничение:

$$|f^{(N+1)}(x)| \leq S^{N+1}M, \quad (21)$$

где  $M = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ .

С учетом выражения (21) погрешность (20) при равномерном расположении опорных точек преобразуем к относительной форме:

$$\delta = \frac{R}{M} \leq \frac{N^{N+1}h^{N+1}}{(N+1)!} S^{N+1}. \quad (22)$$

Расчеты по (22) показывают, что при фиксированных значениях  $S$  относительная погрешность уменьшается с ростом количества опорных точек и степени полинома. Однако трудно заранее предсказать, сколько реальных гармоник содержит искомое решение. В работе [6, гл. 4] авторы предостерегают, что для некоторых функций значения производных порядка  $N$  растут быстрее, чем  $N!$ . Поэтому рекомендуют практически пользоваться интерполянтами степени не больше пятой. Однако это касается некоторых искусственных функций, которые на практике встречаются редко. На участке  $[a, b]$  погрешность ведет себя неравномерно. Зависимость погрешности от номера точки  $k$  на  $[a, b]$  при равномерном расположении опорных точек определяется следующим выражением [7, гл. 2]:

$$R \leq \frac{k!(N-1-k!) \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f^{(N+1)}(x)|}{(N+1)!} h^{N+1}. \quad (23)$$

Если в выражении (23) учесть ограничение (21), то получим относительную погрешность в зависимости от номера шага  $k$  на  $[a, b]$ :

$$R \leq \frac{k!(N-1-k!) \cdot S^{N+1}}{(N+1)!} h^{N+1}. \quad (24)$$

Оценка (24) показывает, что на краю участка  $[a, b]$  погрешность интерполяции максимальна. Поэтому, к примеру, для снижения погрешности можно применить полином степени 10, но использовать интерполяцию в девяти точках.

Однако увеличивать степень полинома бесконечно нельзя. С ростом числа  $N$  матрицы становятся плохо обусловленными. Матрица  $\mathbf{T}_2$  в выражении (14) содержит шаг интегрирования в степени  $N+1$ . Чтобы при малом шаге  $h$  матрицы  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{T}_1$  и особенно  $\mathbf{T}_2$  не стали плохо обусловленными необходимо шаг интегрирования умножить на нормирующий коэффициент такой, чтобы нормированный шаг был близок к единице. Тогда на нормирующий коэффициент нужно умножить значения всех индуктивностей и емкостей, входящих в схему, а значение частоты нужно разделить на нормирующий коэффициент. Это улучшит обусловленность матриц, но увеличение степени полинома больше десяти может в некоторых случаях привести к неадекватному решению.

На больших интервалах изменения независимой переменной  $t \gg Nh$  уравнение (17) можно решать методом циклической прогонки, увеличивая каждый раз текущее время на  $N$  шагов. В результате определим коэффициенты аппроксимирующего полинома для всего интересующего интервала времени. В каждом цикле необходимо вычислять новые значения  $i_0$  и  $u_{C0}$ , которые будут использованы в следующем цикле. Можно эти значения вычислить в конце текущего участка, но для улучшения точности интерполяции можно часть последних шагов не использовать:

$$i_0 = i_{0\text{пред}} + a_1((N-N_h)h) + a_2((N-N_h)h)^2 + \dots + a_N((N-N_h)h)^N. \quad (25)$$

$$u_{C0} = u_{C0\text{пред}} + B[(N-N_h)h] + \frac{a_1}{2}((N-N_h)h)^2 + \dots + \frac{a_N}{N+1}((N-N_h)h)^{N+1}, \quad (26)$$

где  $i_{0\text{пред}}$  и  $u_{C0\text{пред}}$  равны значениям  $i_0$  и  $u_{C0}$ , вычисленным в предыдущем цикле.

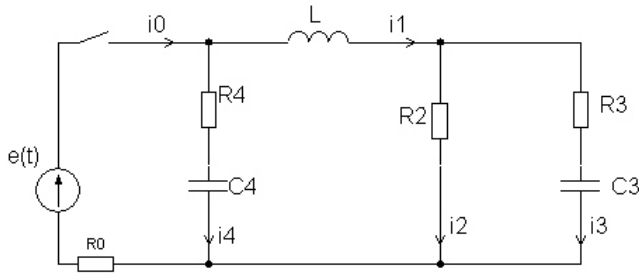


Рис. 2. Схема модельной цепи

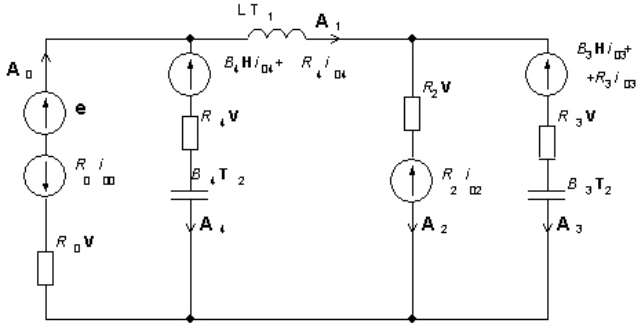


Рис. 3. Схема замещения модельной цепи

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_4 = 0, \\ \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_3 = 0, \\ R_0 \mathbf{V} \mathbf{A}_0 + R_4 \mathbf{V} \mathbf{A}_4 + B_4 \mathbf{T}_2 \mathbf{A}_4 = \mathbf{e} - R_0 i_{00} - B_4 \mathbf{H} i_{04} - u_{c04}, \\ R_1 \mathbf{V} \mathbf{A}_1 + L T_1 \mathbf{A}_1 + R_2 \mathbf{V} \mathbf{A}_2 - B_4 \mathbf{T}_2 \mathbf{A}_4 - R_4 \mathbf{V} \mathbf{A}_4 = B_4 \mathbf{H} i_{04} - R_1 i_{01} - R_2 i_{02} + u_{c04} + R_4 i_{04}, \\ -R_2 \mathbf{V} \mathbf{A}_2 + R_3 \mathbf{V} \mathbf{A}_3 + B_3 \mathbf{T}_2 \mathbf{A}_3 = R_2 i_{02} - R_3 i_{03} - B_3 \mathbf{H} i_{03}, \end{cases} \quad (27)$$

где  $i_{00}, i_{01}, i_{02}, i_{03}, i_{04}, u_{c03}, u_{c04}$  — обозначения токов ветвей 0–4 и напряжений на конденсаторах 3, 4 в начале текущего цикла,  $\mathbf{H}$  — вектор шагов (см. выражение (6)).

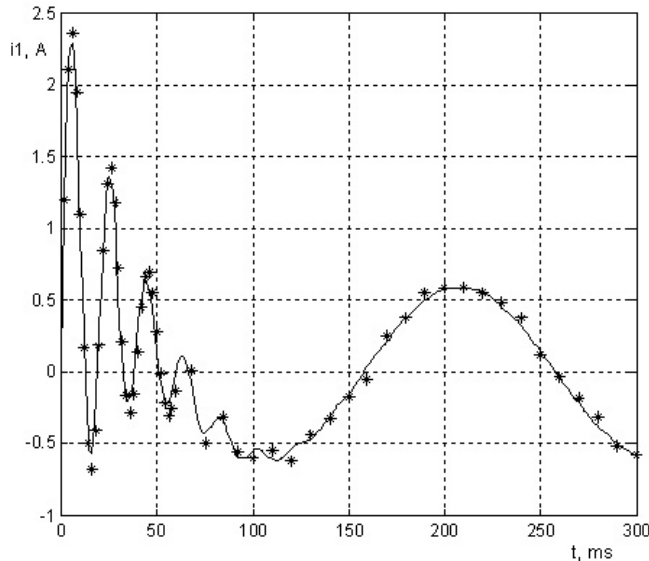


Рис. 4. Зависимость от времени тока, полученная в результате моделирования (звездочками показаны точки, полученные точным расчетом)

Для испытания разработанной методики в системе Matlab составлено несколько компьютерных программ для расчета переходных процессов в электрических цепях. Рассмотрим расчет переходного процесса некоторой модельной цепи (рис. 2). Требуется рассчитать переходный процесс изменения токов после замыкания ключа.

Согласно правилу преобразования, показанному на рис. 1, составим схему замещения для изображений токов, показанных на исходной схеме (рис. 2). Схема замещения для изображений показана на рис. 3.

На схеме замещения дополнительные источники ЭДС имеют следующие обозначения индексами: первый индекс «0» означает, что берется значение тока в точке  $k = 0$  текущего временного интервала; второй индекс обозначает номер ветви в цепи. Для схемы замещения, показанной на рис. 3, система уравнений, составленная по законам Кирхгофа для изображений токов, имеет следующий вид:

Система уравнений (27) для изображений токов и напряжений является системой алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами, и имеет единственное решение — векторы  $\mathbf{A}_b$ , где номер ветви  $b = 0 \dots 4$ .

По программе, составленной согласно предложенному алгоритму, выполнен расчет переходного процесса при следующих значениях исходных данных:  $e(t) = 100 \sin(2\pi f t + \pi/4)$ ,  $f = 50$  Гц,  $R_1 = 1$  Ом,  $R_2 = 200$  Ом,  $R_3 = 1$  Ом,  $R_4 = 3$  Ом,  $C_3 = 10$  мкФ,  $C_4 = 50$  мкФ. График тока  $i_1(t)$ , полученный в результате расчета, представлен на рис. 4.

Для оценки точности вычислений по предложенному методу выполнен также точный аналитический расчет переходного процесса при тех же значениях исходных данных. Полученное аналитическое выражение для тока  $i_1(t)$  имеет вид





$$i_1(t) = D_1 e^{p_1 t} + D_2 e^{p_2 t} + D_3 e^{p_3 t} + I_{1m} \sin(\omega t + \psi), \quad (28)$$

где  $D_1 = -0.355 - 1.01j$ ,  $D_2 = -0.355 + 1.013j$ ,  $D_3 = 0.137$ ,  $p_1 = (-348.51 + 3143j) \cdot 10^3$ ,  $p_2 = (-348.51 - 3143j) \cdot 10^3$ ,  $p_3 = -5.548 \cdot 10^3$ ,  $I_{1m} = 0.592A$ ,  $\psi = 1.315$ .

Шаг интегрирования при расчете предложенным методом выбран таким, чтобы относительное отклонение значения тока от соответствующего точного значения в точках локальных максимумов не превышало  $\pm 10\%$  (при уменьшении шага интегрирования погрешность уменьшается). Выполнен также расчет модельной задачи при использовании метода Гира с максимальным постоянным шагом интегрирования таким, чтобы относительное отклонение значения тока от соответствующего точного значения в точках локальных максимумов также не превышало  $\pm 10\%$ . С помощью операторов tic/toc оценивалось время расчета. Сравнение процессорного времени расчета модельной задачи по предложенному методу и по методу Гира показало, что рассматриваемый метод имеет быстроедействие более чем в четыре раза лучшее, чем многошаговый метод Гира. Это можно объяснить следующими соображениями:

- в предложенном методе уже известна форма решения (полиномиальная), поэтому достаточно найти решение только в редких опорных точках, а в промежуточных точках оно определяется по коэффициентам полинома;
- за каждый цикл выполнялся расчет не одного, а  $N = 8$  шагов интегрирования;
- во многих программных комплексах, специализированных для расчета переходных процессов в электрических цепях, каждый элемент электрической цепи рассматривается как отдельная ветвь. Предложенная методика интерпретирует как одну ветвь включенные последовательно резистивный, индуктивный и емкостный элементы, а также источник ЭДС;
- сокращение системы уравнений достигается и за счет того, что в предложенной методике уравнения численного метода отдельно составлять не нужно, так как они заложены в схему замещения для изображений.

### Выводы

1. Предложенная методика построения схем замещения электрической цепи позволяет непосредственно вычислять коэффициенты полиномиальной аппроксимации искомых токов в переходных режимах.
2. Векторы полиномиальных коэффициентов удовлетворяют законам токов и напряжений Кирхгофа для схемы замещения и являются решениями системы алгебраических уравнений, составленных по законам Кирхгофа.
3. Представленная схема замещения описывает не только саму электрическую цепь, но и численный метод расчета интегродифференциальных уравнений переходного процесса.
4. Для модельной задачи отмечено лучшее быстроедействие расчета по сравнению с известными численными методами.

### Библиографический список

1. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / под ред. Дж. Холл, Дж. Уатт. М., 1979. 312 с.
2. Демирчян К. С., Нейман Л. Р., Коровкин Н. В., Че-чурин В. Л. Теоретические основы электротехники : в 2 т. СПб., 2003. Т. 2. 567 с.
3. Пухов Г. Е. Дифференциальный анализ электрических цепей. Киев, 1982. 496 с.
4. Shampine L. F., Allen R. C., Pruess S. Fundamentals of numerical computing. N.Y.; Chichester; Brisbane; Toronto; Singapore, 1997. 268 с.
5. Зигмунд А. Тригонометрические ряды : в 2 т. М., 1965. Т. 2. 538 с.
6. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение : пер. с англ. М., 1998. 575 с.
7. Буслов В. А., Яковлев С. Л. Численные методы. Исследование функций : курс лекций. СПб., 2001. 59 с.

# ИНФОРМАТИКА

УДК 519.1

## НЕДОСТИЖИМЫЕ СОСТОЯНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ЦЕПЯМИ И ЦИКЛАМИ

**А. В. Жаркова**

Саратовский государственный университет,  
кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии  
E-mail: VAnastasiyaV@gmail.com

Приводятся формулы для подсчета количества недостижимых состояний в динамических системах, образованных двоичными векторами, кодирующими ориентации цепей и циклов.

**Ключевые слова:** динамическая система, эволюционная функция, недостижимое состояние, ветвление.

**Inaccessible States in Dynamic Systems Associated with Paths and Cycles**

**A. V. Zharkova**

Saratov State University,  
Chair of the Theoretical Foundations of Computer Security and Cryptography  
E-mail: VAnastasiyaV@gmail.com

Formulas are derived for calculation of the number of inaccessible states in dynamic systems formed by binary vectors encoding orientations of paths and cycles.

**Key words:** dynamic system, evolutionary function, inaccessible state, branching.

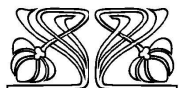
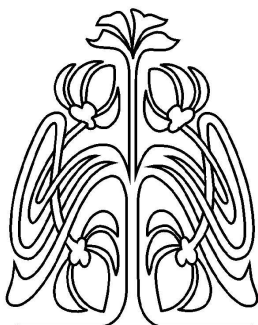
### ВВЕДЕНИЕ

Под *конечной динамической системой* понимается пара  $(S, \delta)$ , где  $S$  – конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями системы*,  $\delta: S \rightarrow S$  – отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы*.

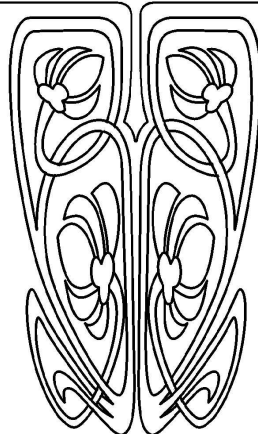
Конечной динамической системе сопоставляется *карта* – граф с множеством вершин  $S$  и дугами, проведенными из каждой вершины  $s \in S$  в вершину  $\delta(s)$ . Этот граф является функциональным, т.е. из каждой вершины выходит точно одна дуга. Компоненты связности графа, задающего динамическую систему, называются её *бассейнами*. Каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контур называется *предельным циклом*, или *аттрактором*.

В работе [1] рассматривается SER-динамика бесконтурных графов, где каждое следующее состояние получается из предыдущего путем переориентации всех дуг, входящих в стоки (вершины, имеющие нулевую степень исхода). Эта динамика используется в задачах об отказоустойчивости компьютерных сетей, моделируемых бесконтурными графами. При изучении модельных графов можно использовать идеи и методы теории динамических систем двоичных векторов (см., например, [2, 3]), когда имеется естественная двоичная кодировка графов рассматриваемого класса.

Одними из основных характеристик состояний динамической системы являются *ветвление* – количество непосредственных пред-



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





шественников данного состояния, и *недостижимость* – свойство состояний, имеющих нулевое ветвление (они называются также начальными состояниями системы). Программа [4] предназначена для исследования эволюционных параметров состояний в динамических системах, состояниями которых являются двоичные векторы, представляющие некоторые типы графов.

В настоящей работе предлагаются формулы для подсчёта количества недостижимых состояний в динамических системах двоичных векторов, связанных с такими графами, как цепи и циклы.

## 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

*Источником* в графе называется вершина, имеющая нулевую степень захода. Множество источников бесконтурного ориентированного графа будем называть *допустимым*, если из него в каждый сток этого графа есть дуга.

В работе [1] вводится SER-динамика бесконтурных ориентаций заданного графа, где каждое следующее состояние (бесконтурный граф) получается из предыдущего путем переориентации всех дуг, входящих в стоки.

В работах автора [5, 6] доказывается следующая теорема о ветвлении состояний в таких динамических системах.

**Теорема 1.** *Ветвление данного состояния  $s$  динамической системы, ассоциированной с графом, равно количеству допустимых множеств источников в графе, представляющем состояние  $s$ .*

Из данной теоремы можно заключить, какие же состояния являются недостижимыми.

**Следствие 1.** *Состояние  $s$  динамической системы, ассоциированной с графом, недостижимо тогда и только тогда, когда нет ни одного допустимого множества источников в графе, представляющем состояние  $s$ , или, другими словами, когда существует хотя бы один сток, не соседствующий с источниками.*

Напомним формулу включений и исключений из комбинаторики, которая нам понадобится. Пусть даны непустые множества  $A_1, A_2, \dots, A_m$ . Обозначим через  $k(A)$  количество элементов, принадлежащих множеству  $A$ . Тогда количество различных элементов в объединении множеств  $A_1, A_2, \dots, A_m$  подсчитывается по формуле

$$\begin{aligned}
 k(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) = & k(A_1) + k(A_2) + \dots + k(A_m) - k(A_1 \cap A_2) - \\
 & - k(A_1 \cap A_3) - \dots - k(A_1 \cap A_m) - k(A_2 \cap A_3) - \dots - k(A_2 \cap A_m) - \dots - \\
 & - k(A_{m-1} \cap A_m) + k(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \dots,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

если число пересекающихся множеств нечетно, то слагаемое входит со знаком «+», если четно – со знаком «-».

## 2. КОЛИЧЕСТВО НЕДОСТИЖИМЫХ СОСТОЯНИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ЦЕПЯМИ

Через  $B^n$ ,  $n > 0$ , обозначим множество всех двоичных векторов размерности  $n$ . Эволюционная функция  $\delta$  задается на  $B^n$  следующим образом. Пусть состоянием динамической системы в данный момент времени является вектор  $v \in B^n$ . Тогда в следующий момент времени она окажется в состоянии  $\delta(v)$ , полученном путем одновременного применения правил:

I) если первой компонентой в  $v$  является 0, то первой компонентой в  $\delta(v)$  будет 1;

II) если в составе  $v$  имеются диграммы (две соседние компоненты) вида 10, то в  $\delta(v)$  каждая из них заменяется на 01;

III) если последней компонентой в  $v$  является 1, то последней компонентой в  $\delta(v)$  будет 0;

IV) других отличий между  $v$  и  $\delta(v)$  нет.

Данная динамика для системы  $(B^n, \delta)$ ,  $n > 0$ , введена в [2].

Динамическая система  $(B^n, \delta)$  изоморфна динамической системе  $(P_n, \delta)$ , состояниями которой являются всевозможные ориентации цепи длины  $n$ , и каждое следующее состояние получается из предыдущего путем переориентации всех дуг, входящих в стоки. Изоморфизм устанавливается сле-

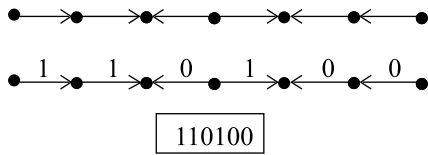


Рис. 1. Состояние системы на языках цепей и двоичных векторов

дующим образом: в ориентации цепи дуга получает метку «0», если она направлена к началу цепи, и метку «1» — в противном случае; кодирующий эту ориентацию двоичный вектор получается последовательным выписыванием меток дуг. Пример представлен на рис. 1.

На рис. 2 показана карта динамической системы  $(B^6, \delta)$ .

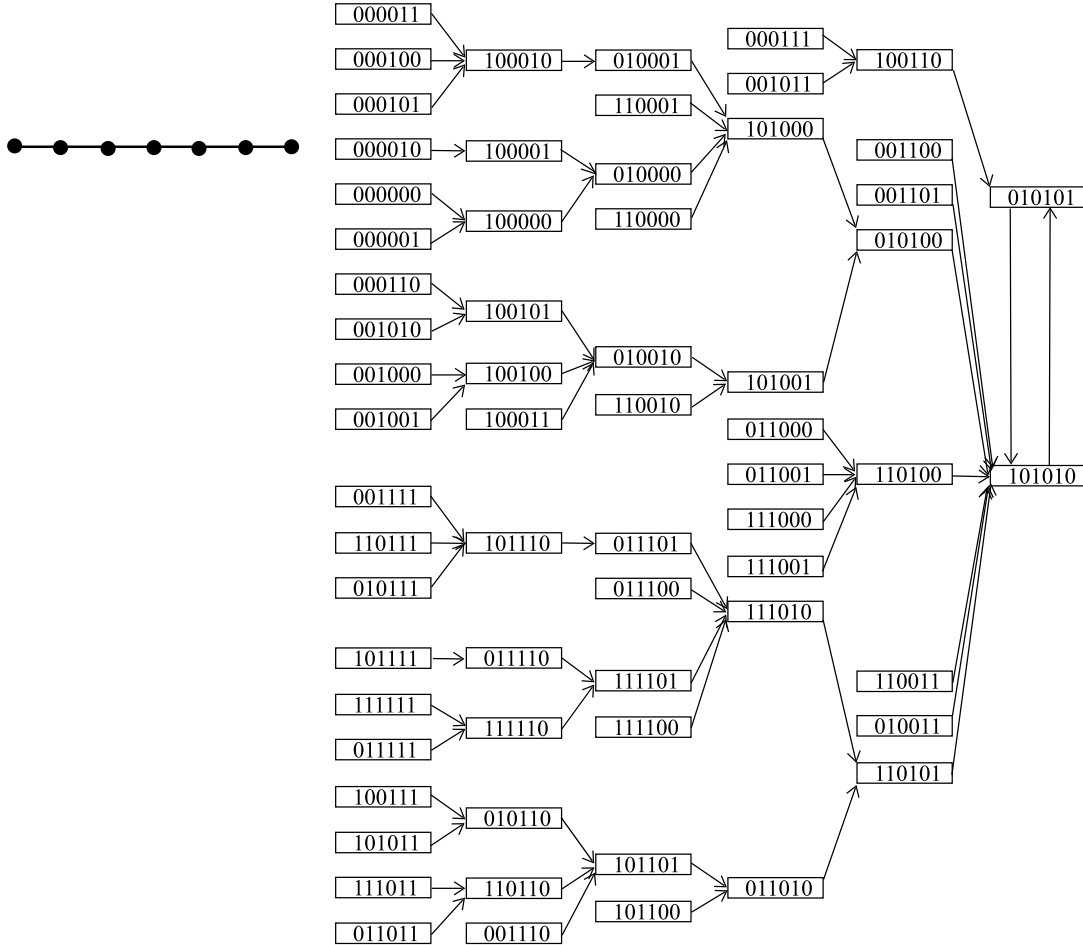


Рис. 2. Карта динамической системы  $(B^6, \delta)$

В работе [2] показывается, что состояние (вектор)  $v$  динамической системы  $(B^n, \delta)$  недостижимо из других состояний тогда и только тогда, когда в составе  $v$  имеется хотя бы один из следующих фрагментов: 1) начальная диграмма 00, 2) тетраграмма 1100, 3) финальная диграмма 11.

Очевидно, что эти три условия на языке векторов выражают факт существования стока, требуемого следствием 1.

С помощью программы [4] были получены данные по количеству недостижимых состояний в динамической системе  $(B^n, \delta)$ , представленные для  $1 \leq n \leq 10$  в табл. 1.

Выведем формулу для вычисления количества недостижимых состояний в динамической системе  $(B^n, \delta)$ .

Таблица 1

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$KHC_{(n,\delta)}$	0	2	4	8	18	38	80	168	350	726

**Теорема 2 (Количество недостижимых состояний в динамической системе  $(B^n, \delta)$ ).** Количество недостижимых состояний в динамической системе  $(B^n, \delta)$ , ассоциированной с цепью длины  $n > 0$ , равно

$$KHC_{(n,\delta)} = 2 \cdot 2^{n-2} - 2^{n-4} + \Omega(0) - 2 \cdot \Omega(2) + \Omega(4),$$



где

$$\Omega(x) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-x}{4} \rfloor} (-1)^{i+1} \cdot 2^{n-x-4i} \cdot C_{n-x-3i}^i, \quad (2)$$

причём если коэффициенты или степени принимают отрицательные значения, то соответствующие выражения принимают значение 0.

**Доказательство.** В соответствии с видом недостижимых состояний, обозначим множество недостижимых состояний, имеющих начальную диграмму 00, через  $A_{00}$ , имеющих финальную диграмму 11 — через  $B_{11}$ , имеющих в своём составе тетраграмму 1100 — через  $C_{1100}$ . Нужно подсчитать общее количество недостижимых состояний в системе, для чего применим формулу включений и исключений (1). Получим, что

$$\begin{aligned} \text{КНС}_{(n,\delta)} = k(A_{00} \cup B_{11} \cup C_{1100}) &= k(A_{00}) + k(B_{11}) + k(C_{1100}) - k(A_{00} \cap B_{11}) - \\ &- k(A_{00} \cap C_{1100}) - k(B_{11} \cap C_{1100}) + k(A_{00} \cap B_{11} \cap C_{1100}). \end{aligned} \quad (3)$$

1. Подсчитаем  $k(A_{00})$ . Для состояний, имеющих начальную диграмму 00, получается, что две начальные компоненты зарезервированы, а остальные компоненты занимают  $n-2$  позиции и принимают значения 0 или 1. Таким образом,  $k(A_{00}) = 2^{n-2}$ .

2. Аналогично пункту 1,  $k(B_{11}) = 2^{n-2}$ .

3. Подсчитаем  $k(C_{1100})$ . В таких состояниях может присутствовать от одной до  $\lfloor n/4 \rfloor$  тетраграмм 1100 включительно. Обозначим количество этих тетраграмм через  $l$ . Компоненты, занимаемые тетраграммами, получаются зарезервированными, а остальные компоненты занимают  $n-4l$  позиций и принимают значения 0 или 1. При этом эти  $l$  тетраграмм могут занимать различные позиции в состоянии, и их количество определяется при помощи формулы подсчета количества числа сочетаний:  $C_{n-4l+l}^l = C_{n-3l}^l$ . Но при рассмотрении состояний, содержащих  $l+1$  тетраграмм, некоторые тетраграммы уже были учтены, поэтому, применив формулу включений и исключений (1), получим

$$k(C_{1100}) = k(C_{1100(1)}) - k(C_{1100(2)}) + k(C_{1100(3)}) - \dots$$

и так далее до  $\lfloor n/4 \rfloor$  слагаемого включительно, где  $C_{1100(x)}$  — множество недостижимых состояний, имеющих в своем составе  $x$  тетраграмм 1100. Тогда

$$k(C_{1100}) = 2^{n-4} \cdot C_{n-3}^1 - 2^{n-8} \cdot C_{n-6}^2 + 2^{n-12} \cdot C_{n-9}^3 - \dots$$

и так далее до  $\lfloor n/4 \rfloor$  слагаемого включительно. В итоге получается, что

$$k(C_{1100}) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} (-1)^{i+1} \cdot 2^{n-4i} \cdot C_{n-3i}^i.$$

4. Подсчитаем  $k(A_{00} \cap B_{11})$ . Для состояний, имеющих в своем составе одновременно начальную диграмму 00 и финальную диграмму 11, получается, что четыре компоненты зарезервированы, а остальные компоненты занимают  $n-4$  позиции и принимают значения 0 или 1. Таким образом,  $k(A_{00} \cap B_{11}) = 2^{n-4}$ .

5. Подсчитаем  $k(A_{00} \cap C_{1100})$ . Для состояний, имеющих в своем составе одновременно начальную диграмму 00 и тетраграмму 1100, получаем ситуацию, аналогичную рассмотренной в пункте 3, только здесь постоянно зарезервированы первые две компоненты. Таким образом,

$$k(A_{00} \cap C_{1100}) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor} (-1)^{i+1} \cdot 2^{n-2-4i} \cdot C_{n-2-3i}^i.$$

6. Подсчет  $k(B_{11} \cap C_{1100})$  идет аналогично пункту 5.

7. Подсчитаем  $k(A_{00} \cap B_{11} \cap C_{1100})$ . Для состояний, имеющих в своем составе одновременно начальную диграмму 00, тетраграмму 1100 и финальную диграмму 11, получаем ситуацию, аналогич-



ную рассмотренной в пункте 3, только здесь постоянно зарезервированы четыре компоненты. Таким образом,

$$k(A_{00} \cap B_{11} \cap C_{1100}) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor} (-1)^{i+1} \cdot 2^{n-4-4i} \cdot C_{n-4-3i}^i.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (3), имеем

$$\begin{aligned} \text{КНС}_{(n,\delta)} &= 2 \cdot 2^{n-2} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} (-1)^{i+1} \cdot 2^{n-4i} \cdot C_{n-3i}^i - 2^{n-4} - 2 \cdot \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor} (-1)^{i+1} \cdot 2^{n-2-4i} \cdot C_{n-2-3i}^i + \\ &+ \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor} (-1)^{i+1} \cdot 2^{n-4-4i} \cdot C_{n-4-3i}^i. \end{aligned}$$

Введем функцию  $\Omega(x)$  следующим образом:

$$\Omega(x) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-x}{4} \rfloor} (-1)^{i+1} \cdot 2^{n-x-4i} \cdot C_{n-x-3i}^i.$$

Тогда в итоге имеем, что количество недостижимых состояний в динамической системе  $(B^n, \delta)$ , ассоциированной с цепью длины  $n > 0$ , равно

$$\text{КНС}_{(n,\delta)} = 2 \cdot 2^{n-2} - 2^{n-4} + \Omega(0) - 2 \cdot \Omega(2) + \Omega(4),$$

причём если коэффициенты или степени принимают отрицательные значения, то это значит, что при таких размерностях  $n$  просто не возникает подобных ситуаций, и эти выражения принимают значения 0. □

### 3. КОЛИЧЕСТВО НЕДОСТИЖИМЫХ СОСТОЯНИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ЦИКЛАМИ

На множестве  $B^n$ ,  $n > 2$ , рассмотрим следующую динамическую систему  $(B^n, \theta)$  (см. [6]). Пусть состоянием динамической системы  $(B^n, \theta)$  в данный момент времени является вектор  $v \in B^n$ . Тогда в следующий момент времени она окажется в состоянии  $\theta(v)$ , полученном путем одновременного применения правил:

- I) если первой компонентой в  $v$  является 0 и последней компонентой является 1, то первой компонентой в  $\theta(v)$  будет 1, а последней компонентой — 0;
- II) если в составе  $v$  имеются диграммы вида 10, то в  $\theta(v)$  каждая из них заменяется на 01;
- III) других отличий между  $v$  и  $\theta(v)$  нет.

По определению будем считать, что векторы  $0^n, 1^n$  динамической системы  $(B^n, \theta)$  при динамике переходят в себя, образуя аттракторы единичной длины.

Динамическая система  $(B^n, \theta)$  изоморфна динамической системе  $(C_n, \theta)$ , состояниями которой являются всевозможные ориентации цикла длины  $n$ , и каждое следующее состояние получается из предыдущего путем переориентации всех дуг, входящих в стоки. Изоморфизм устанавливается следующим образом: в цикле фиксируем начальную вершину, в ориентации цикла дуга получает метку «0», если она направлена против часовой стрелки, и метку «1» в противном случае; кодирующий эту ориентацию двоичный вектор получается последовательным выписыванием меток дуг при прохождении цикла по часовой стрелке от начальной вершины. Пример представлен на рис. 3 и 4.

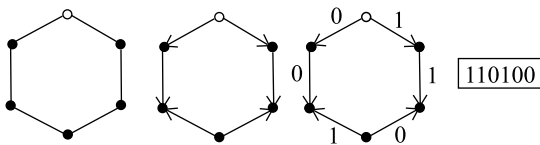


Рис. 3. Состояние системы на языках циклов и двоичных векторов

Из следствия 1 можно выразить свойство недостижимости состояний динамической системы  $(B^n, \theta)$  на языке векторов. Состояние динамической системы  $(B^n, \theta)$  недостижимо из других состояний тогда и только тогда, когда в его составе, возможно, при циклическом сдвиге имеется тетраграмма 1100.

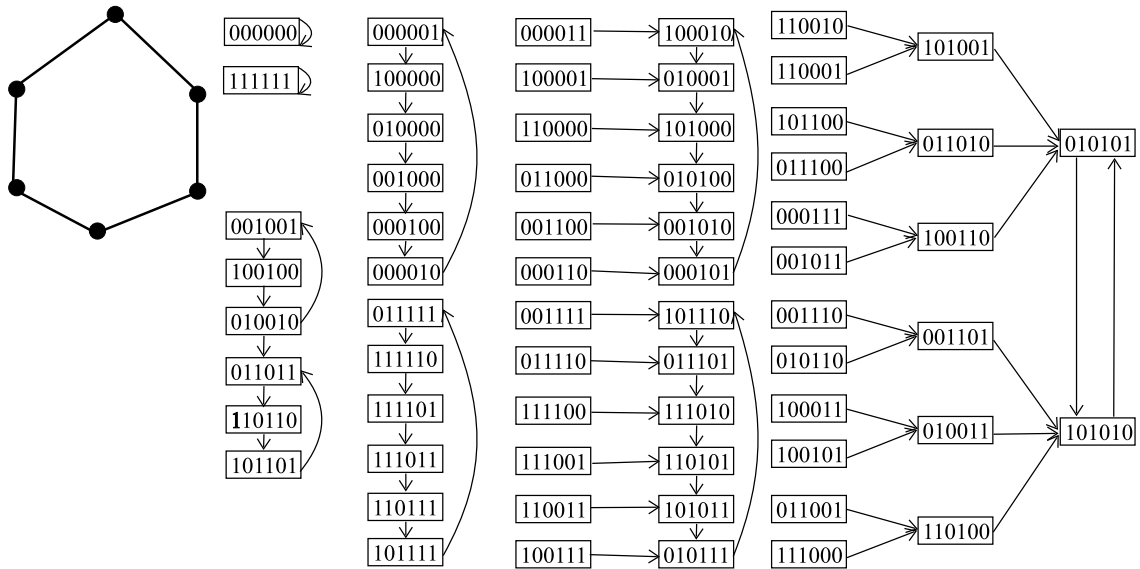


Рис. 4. Карта динамической системы  $(B^6, \theta)$

С помощью программы [4] были получены данные по количеству недостижимых состояний в динамической системе  $(B^n, \theta)$ , представленные для  $3 \leq n \leq 12$  в табл. 2.

Таблица 2

$n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$KHC_{(n,\theta)}$	0	4	10	24	56	124	270	580	1232	2596

Выведем формулу для вычисления количества недостижимых состояний в динамической системе  $(B^n, \theta)$ .

**Теорема 3. (Количество недостижимых состояний в динамической системе  $(B^n, \theta)$ ).** *Количество недостижимых состояний в динамической системе  $(B^n, \theta)$ , ассоциированной с циклом длины  $n > 2$ , равно*

$$KHC_{(n,\theta)} = 3 \cdot 2^{n-4} + \Omega(0) - 3 \cdot \Omega(4),$$

где  $\Omega(x)$  задается формулой (2), причём если коэффициенты или степени принимают отрицательные значения, то соответствующие выражения принимают значение 0.

**Доказательство.** В соответствии с видом недостижимых состояний обозначим множество недостижимых состояний, имеющих в своем составе тетраграмму 1100, через  $A_{1100}$ , начальную компоненту 0 и финальную триграмму 110 через  $B_{0_110}$ , начальную диграммму 00 и финальную диграммму 11 через  $C_{00_11}$ , начальную триграмму 100 и финальную компоненту 1 через  $D_{100_1}$ . Нужно подсчитать общее количество недостижимых состояний в системе, для чего применим формулу включений и исключений (1). Получим, что количество недостижимых состояний в системе  $(B^n, \theta)$  высчитывается по формуле

$$\begin{aligned} KHC_{(n,\theta)} = & k(A_{1100} \cup B_{0_110} \cup C_{00_11} \cup D_{100_1}) = k(A_{1100}) + k(B_{0_110}) + k(C_{00_11}) + \\ & + k(D_{100_1}) - k(A_{1100} \cap B_{0_110}) - k(A_{1100} \cap C_{00_11}) - k(A_{1100} \cap D_{100_1}) - \\ & - k(B_{0_110} \cap C_{00_11}) - k(B_{0_110} \cap D_{100_1}) - k(C_{00_11} \cap D_{100_1}) + \\ & + k(A_{1100} \cap B_{0_110} \cap C_{00_11}) + k(A_{1100} \cap B_{0_110} \cap D_{100_1}) + k(A_{1100} \cap C_{00_11} \cap D_{100_1}) + \\ & + k(B_{0_110} \cap C_{00_11} \cap D_{100_1}) - k(A_{1100} \cap B_{0_110} \cap C_{00_11} \cap D_{100_1}). \end{aligned} \quad (4)$$

1. Подсчитаем  $k(A_{1100})$ . Количество векторов, содержащих в себе тетраграмму 1100, было подсчитано в п. 3 доказательства теоремы 1. Таким образом,

$$k(A_{1100}) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} (-1)^{i+1} \cdot 2^{n-4i} \cdot C_{n-3i}^i.$$



2. Подсчитаем  $k(B_{0_{110}})$ . Для состояний, имеющих начальную компоненту 0 и финальную триграмму 110, получается, что четыре компоненты зарезервированы, а остальные компоненты занимают  $n - 4$  позиции и принимают значения 0 или 1. Таким образом,  $k(B_{0_{110}}) = 2^{n-4}$ .

3. Аналогично пункту 2,  $k(C_{00_{11}}) = 2^{n-4}$ .

4. Аналогично пункту 2,  $k(D_{100_{1}}) = 2^{n-4}$ .

5. Подсчитаем  $k(A_{1100} \cap B_{0_{110}})$ . Для состояний, имеющих в своем составе одновременно начальную компоненту 0, финальную триграмму 110 и тетраграмму 1100, получаем ситуацию, аналогичную рассмотренной в п. 1 доказательства, только здесь постоянно зарезервированы четыре компоненты. Таким образом,

$$k(A_{1100} \cap B_{0_{110}}) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor} (-1)^{i+1} \cdot 2^{n-4-4i} \cdot C_{n-4-3i}^i.$$

6. Подсчет  $k(A_{1100} \cap C_{00_{11}})$ ,  $k(A_{1100} \cap D_{100_{1}})$  идет аналогично пункту 5.

7. Значения  $k(B_{0_{110}} \cap C_{00_{11}})$ ,  $k(B_{0_{110}} \cap D_{100_{1}})$ ,  $k(C_{00_{11}} \cap D_{100_{1}})$ ,  $k(A_{1100} \cap B_{0_{110}} \cap C_{00_{11}})$ ,  $k(A_{1100} \cap B_{0_{110}} \cap D_{100_{1}})$ ,  $k(A_{1100} \cap C_{00_{11}} \cap D_{100_{1}})$ ,  $k(B_{0_{110}} \cap C_{00_{11}} \cap D_{100_{1}})$ ,  $k(A_{1100} \cap B_{0_{110}} \cap C_{00_{11}} \cap D_{100_{1}})$  равны 0, так как соответствующие множества имеют пустое пересечение.

Подставляя полученные выражения в формулу (4), имеем:

$$\text{КНС}_{(n,\theta)} = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} (-1)^{i+1} \cdot 2^{n-4i} \cdot C_{n-3i}^i + 3 \cdot 2^{n-4} - 3 \cdot \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor} (-1)^{i+1} \cdot 2^{n-4-4i} \cdot C_{n-4-3i}^i.$$

Используя функцию  $\Omega(x)$  (2), имеем, что количество недостижимых состояний в динамической системе  $(B^n, \theta)$ , ассоциированной с циклом длины  $n > 2$ , равно

$$\text{КНС}_{(n,\theta)} = 3 \cdot 2^{n-4} + \Omega(0) - 3 \cdot \Omega(4),$$

причём если коэффициенты или степени принимают отрицательные значения, то это значит, что при таких размерностях  $n$  просто не возникает подобных ситуаций, и эти выражения принимают значения 0. □

#### 4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Последовательности, задаваемые табл. 1 и 2, в онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей [7] не встречаются. Построим таблицу для количества достижимых состояний в динамической системе  $(B^n, \delta)$  для  $1 \leq n \leq 10$  (табл. 3).

Таблица 3

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2^n - \text{КНС}_{(n,\delta)}$	2	2	4	8	14	26	48	88	162	298

Обратившись к указанной энциклопедии, находим в ней последовательность A135491: «2, 4, 8, 14, 26, 48, 88, 162, 298, 548, ...» [8], элементы которой получаются по формуле  $a(n) = a(n - 1) + a(n - 2) + a(n - 3)$  при  $a(1) = 2$ ,  $a(2) = 4$ ,  $a(3) = 8$ . Данная последовательность связана с задачей о бросании монеты [9] и подсчитывает количество способов подбросить монету  $n$  раз так, чтобы в результате в последовательности исходов не было четырех подряд стоящих одинаковых исходов.

Последовательность A135491 совпадает с последовательностью достижимых состояний в  $(B^n, \delta)$  со второго по 33 элемент (столько элементов приведены в энциклопедии). Если обе последовательности на самом деле совпадают, то данные наблюдения можно применить к рекуррентному поиску количества недостижимых состояний в динамической системе  $(B^n, \delta)$ , полагая

$$\beta(n) = \sum_{i=1}^3 \beta(n - i) \quad \text{при} \quad \beta(1) = 2, \quad \beta(2) = 2, \quad \beta(3) = 4$$





как функцию, задающую последовательность для количества достижимых состояний в динамической системе  $(B^n, \delta)$ ; тогда количество недостижимых состояний динамической системы  $(B^n, \delta)$  можно будет подсчитать по формуле

$$\text{КНС}_{(n,\delta)} = 2^n - \beta(n).$$

Также, проанализировав последовательность табл. 1, можно заметить, что

$$\text{КНС}_{(n,\delta)} = 2^{n-3} + \sum_{i=1}^3 \text{КНС}_{(n-i,\delta)}, \quad \text{при } \text{КНС}_{(1,\delta)} = 0, \quad \text{КНС}_{(2,\delta)} = 2, \quad \text{КНС}_{(3,\delta)} = 4.$$

Теперь построим таблицу для количества достижимых состояний в динамической системе  $(B^n, \theta)$  для  $3 \leq n \leq 12$  (табл. 4).

Таблица 4

$n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$2^n - \text{КНС}_{(n,\theta)}$	8	12	22	40	72	132	242	444	816	1500

Данная последовательность также не встречается в энциклопедии [7]. По аналогии с рекуррентными подсчетами количества недостижимых состояний динамической системы  $(B^n, \delta)$  проанализируем последовательности табл. 2 и 4 для возможного рекуррентного подсчета количества недостижимых состояний в динамической системе  $(B^n, \theta)$ .

Рассмотрим последовательность для количества достижимых состояний в динамической системе  $(B^n, \theta)$  при  $3 \leq n \leq 33$ . Введем функцию

$$\gamma(n) = \sum_{i=1}^3 \gamma(n-i) - 2, \quad \text{при } \gamma(3) = 8, \quad \gamma(4) = 12, \quad \gamma(5) = 22.$$

Все 33 элемента рассматриваемой последовательности вычисляются с помощью функции  $\gamma(n)$ . Если эта закономерность распространяется на всю последовательность, то количество недостижимых состояний динамической системы  $(B^n, \theta)$ ,  $n > 2$ , можно будет подсчитать по формуле

$$\text{КНС}_{(n,\theta)} = 2^n - \gamma(n).$$

Также, проанализировав последовательность табл. 2, можно заметить, что

$$\text{КНС}_{(n,\theta)} = 2 + 2^{n-3} + \sum_{i=1}^3 \text{КНС}_{(n-i,\theta)}, \quad \text{при } \text{КНС}_{(3,\theta)} = 0, \quad \text{КНС}_{(4,\theta)} = 4, \quad \text{КНС}_{(5,\theta)} = 10.$$

### Библиографический список

1. *Barbosa V.C.* An atlas of edge-reversal dynamics. L., 2001. 372 с.
2. *Салий В.Н.* Об одном классе конечных динамических систем // Вестн. Томск. гос. ун-та. 2005. № 14. Приложение. С. 23–26.
3. *Colon-Reyes O., Laubenbacher R., Pareigis B.* Boolean monomial dynamical systems // Ann. Comb. 2004. Vol. 8. P. 425–439.
4. *Власова А.В.* Исследование эволюционных параметров в динамических системах двоичных векторов // Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2009614409, выданное Роспатентом. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 20.08.2009.
5. Об одной динамической системе / А. В. Власова; Саратов. гос. ун-т. Саратов, 2007. 17 с. Деп. в ВИНТИ 17.12.07, № 1181–В2007.
6. *Власова А.В.* Ветвления в конечной динамической системе  $(B^n, \theta)$  // Научные исследования студентов Саратовского государственного университета: материалы итоговой студ. науч. конф. Саратов, 2008. С. 57–58.
7. Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей. URL: <http://oeis.org/?language=russian> (дата обращения: 30.05.2011).
8. *FitzSimons J.R.* Sequence A135491 // Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей. URL: <http://oeis.org/A135491> (дата обращения: 30.05.2011).
9. Coin tossing // Wolfram MathWorld: the web's most extensive mathematical resource. URL: <http://mathworld.wolfram.com/CoinTossing.html> (дата обращения: 30.05.2011).