



# МАТЕМАТИКА

УДК 517.946

## ГИЛЬБЕРТОВЫ ОБОБЩЕНИЯ $b$ -БЕССЕЛЕВЫХ СИСТЕМ

М. И. Исмаилов

Бакинский государственный университет,  
кафедра теории функций и функционального анализа  
E-mail: miqdadismailov1@rambler.ru

В работе дается определение  $b$ -бесселевых систем, которое обобщает известное классическое понятие бесселевых систем, а также установлены критерии  $b$ -бесселевости систем. Изучены некоторые свойства пространства коэффициентов, соответствующих  $b$ -базису, обобщающее классическое понятие базиса Шаудера.

**Ключевые слова:**  $b$ -базис,  $b$ -полнота,  $b$ -минимальность,  $b$ -бесселевы системы.

### Hilbert Generalizations $b$ -Bessel Systems

M. I. Ismailov

Baku State University,  
Chair of Theory of Function and Functional Analysis  
E-mail: miqdadismailov1@rambler.ru

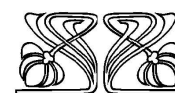
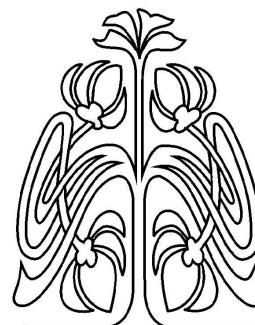
The notion of  $b$ -Bessel systems that generalizes the known classic notion of Bessel systems is introduced, the criteria of Bessel property of the systems are established. Some properties of the space of coefficients corresponding to the  $b$ -basis generalizing the classic notion of Schauder basis are studied.

**Key words:**  $b$ -basis,  $b$ -completeness,  $b$ -minimality,  $b$ -Bessel systems.

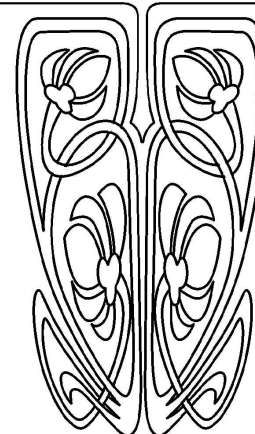
Отметим, что понятие бесселевых систем в гильбертовом пространстве было введено Н.К. Бари [1]. Пусть  $\{\psi_n(x)\} \subset L_2$  есть  $B$ -система, имеющая биортогональную систему  $\{g_n(x)\}$ . Система  $\{\psi_n(x)\}$  называется бесселевой, если для любой  $f \in L_2$  сходится ряд из квадратов коэффициентов ее биортогонального разложения по  $\{\psi_n(x)\}$ , т. е. если из  $f \in L_2$  следует  $\sum_{n=1}^{\infty} (f, g_n)^2 < +\infty$ . Существует другая терминология бесселевых систем в абстрактных гильбертовых пространствах, а именно система  $\{\varphi_k\}_{k \in N}$  элементов гильбертова пространства  $H$  называется бесселевой, если существует число  $B > 0$  такое, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 \leq B \|f\|^2, \quad f \in H.$$

По этой терминологии, в работе I. Schur [2], бесселевы системы в  $L_2$  изучаются посредством продолжимых систем. Доказано, что система  $\{\psi_n(x)\} \subset L_2$  бесселева тогда и только тогда, когда  $\{\psi_n(x)\}$  продолжима. Явная конструкция такого продолжения приводится в работе Е. М. Никишина [3]. В этом направлении известны результаты В. Я. Козлова [4], А. М. Олевского [5], Б. С. Кашина и А. А. Саакяна [6], W. Czaja [7], С. Я. Новикова [8] и др. В работах Б. Е. Вейца [9], Z. A. Canturija [10], A. Pelczynski, I. Singer [11], Б. Т. Билалова и З. Г. Гусейнова [12] и П. А. Терехина [13] изучаются бесселевы системы в произвольных банаховых пространствах. В работе [12] вве-



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





дено понятие  $K$ -бесселевых систем в банаховых пространствах, получены аналоги всех результатов [1] относительно бесселевых систем. В [13] рассматриваются системы сходимости, системы представления и построены связи этих понятий с бесселевыми системами, а также даются проекционные характеристики бесселевых систем.

В настоящей работе рассматривается  $KB$ -пространство, относительно которого введено понятие  $b$ -бесселевых систем в гильбертовых пространствах, обобщающее понятие бесселевых систем в смысле [1]. Получены аналоги ряда результатов [1].

## 1. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть  $Y$  — нормированное пространство,  $X$  и  $Z$  —  $H$ -пространства с соответствующими скалярными произведениями  $(\cdot, \cdot)_X$  и  $(\cdot, \cdot)_Z$ . Рассмотрим билинейное (т. е. линейное по каждому из аргументов) отображение  $b(x, y) : X \times Y \rightarrow Z$ , удовлетворяющее условию

$$\exists m, M > 0 : m\|x\|_X\|y\|_Y \leq \|b(x, y)\|_Z \leq M\|x\|_X\|y\|_Y.$$

В дальнейшем для краткости полагаем  $xy \equiv b(x, y)$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ .

Пусть  $M \subset Y$  — некоторое множество. Обозначим через  $L_b(M)$  — совокупность всевозможных конечных сумм  $\sum x_i m_i$ , где  $x_i \in X$ ,  $m_i \in M$ .

Систему  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$  назовем  $b$ -полной, если  $\overline{L_b(\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}})} = Z$ , где  $\overline{L_b(\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}})}$  — замыкание множества  $L_b(\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ .

Согласно теореме Рисса при фиксированных значениях  $z \in Z$ ,  $y \in Y$  и при произвольном  $x \in X$  линейно непрерывному функционалу  $f_{z,y}(x) = (xy, z)_Z$  соответствует единственный элемент  $\langle z, y \rangle \in X$  такой, что  $f_{z,y}(x) = (x, \langle z, y \rangle)_X$  и  $\|f_{z,y}\|_{X^*} = \|\langle z, y \rangle\|_X$ . Значит  $(z, xy)_Z = (\langle z, y \rangle, x)_X$ . Легко показать, что элемент  $\langle z, y \rangle$  линеен по аргументу  $z \in Z$ . Более того, из

$$\|\langle z, y \rangle\|_X = \sup_{\|x\|=1} |(\langle z, y \rangle, x)_X| = \sup_{\|x\|=1} |(z, xy)_Z| \leq M\|z\|_Z\|y\|_Y$$

следует непрерывность  $\langle z, y \rangle$  по обоим аргументам.

Фиксируя  $y \in Y$  в выражении  $\langle z, y \rangle$ , определим отображение  $\omega(y)$ ,  $\omega(y) : Z \rightarrow X$ , по формуле  $\omega(y)(z) = \langle z, y \rangle$ . Из линейности и непрерывности  $\langle z, y \rangle$  по  $z \in Z$  следует, что  $\omega(y) \in L(Z, X)$ .

Системы  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$  и  $\{y_n^*\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$  назовем  $b$ -биортогональными, если для всех  $k, n \in \mathbb{N}$  и  $x \in X$  справедливо равенство  $\langle xy_k, y_n^* \rangle = \delta_{kn}x$ , где  $\delta_{kn}$  — символ Кронекера, при этом систему  $\{y_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$  будем называть  $b$ -биортогональной к системе  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Систему  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$  назовем  $b$ -минимальной, если для всех  $x \in X$  ( $x \neq 0$ ) и  $k \in \mathbb{N}$  выполняется  $xy_k \notin \overline{L_b(\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}, n \neq k})}$ .

Систему  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$  назовем  $b$ -базисом в  $Z$ , если для всех  $z \in Z$  имеет место однозначное представление в виде  $z = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ ,  $x_n \in X$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Пространство  $\tilde{X}$  последовательностей  $\tilde{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $x_n \in X$ , для которых ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$  сходится в  $Z$ , назовем *пространством коэффициентов по  $b$ -базису  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$* .

Пусть  $Z$  и  $Z_1$  —  $B$ -пространства и  $T \in L(Z, Z_1)$ . Рассмотрим оператор  $T^{b^*} : L(Z_1, X) \rightarrow L(Z, X)$ , определенный выражением  $(T^{b^*} f)(z) = f(Tz)$ ,  $f \in L(Z_1, X)$ ,  $z \in Z$ . Очевидно, что  $T^{b^*} \in L(L(Z_1, X), L(Z, X))$ . Оператор  $T^{b^*}$  назовем  $b$ -сопряженным с оператором  $T$ .

## 2. ПРОСТРАНСТВО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Пусть  $\tilde{X}$  —  $B$ -пространство последовательностей  $\tilde{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $x_n \in X$ , в котором линейные операции определены по координатам и множество  $\tilde{E}_n = \{\tilde{x} = \{\delta_{in} x\}_{i \in \mathbb{N}}, x \in X\}$  является подпространством при любом  $n \in \mathbb{N}$ . Если из сходимости в  $\tilde{X}$  следует по координатной сходимости, а система  $\{\tilde{E}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  образует базис в  $\tilde{X}$  и порождает систему проекторов  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ :  $e_n(\tilde{x}) = \{\delta_{in} x_n\}_{i \in \mathbb{N}}$ , то пространство  $\tilde{X}$  назовем  $KB$ -пространством с каноническим базисом



$\{e_n\}_{n \in N}$ . В  $KB$ -пространстве  $\tilde{X}$  ясно, что для всех  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ,  $\tilde{x} = \{x_n\}_{n \in N}$ , справедливо:

$$\left\| \tilde{x} - \sum_{k=1}^n \{\delta_{ik} x_k\}_{i \in N} \right\|_{\tilde{X}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Пусть система  $\Phi = \{\varphi_n\}_{n \in N} \subset Y$  образует  $b$ -базис в  $Z$  с пространством коэффициентов  $\tilde{X}_\Phi$ .

Пространство  $\tilde{X}_\Phi$  является  $B$ -пространством, если нормой элемента  $\tilde{x} = \{x_n\}_{n \in N}$  является число

$$\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}_\Phi} = \sup_n \left\| \sum_{k=1}^n x_k \varphi_k \right\|_Z.$$

В самом деле, линейность  $\tilde{X}_\Phi$  очевидна.

Проверим справедливость аксиом нормы. Если  $\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}_\Phi} = 0$ , то  $\tilde{x} = \tilde{0}$ . Для всех  $\lambda \in C$  имеем

$$\|\lambda \tilde{x}\|_{\tilde{X}_\Phi} = \sup_n \left\| \sum_{k=1}^n (\lambda x_k) \varphi_k \right\|_Z = |\lambda| \sup_n \left\| \sum_{k=1}^n x_k \varphi_k \right\|_Z = |\lambda| \|\tilde{x}\|_{\tilde{X}_\Phi}.$$

Далее, для любых последовательностей  $\{x'_n\}_{n \in N}$  и  $\{x''_n\}_{n \in N} \in \tilde{X}_\Phi$  получаем:

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^n (x'_k + x''_k) \varphi_k \right\|_Z \leq \sup_n \left\| \sum_{k=1}^n x'_k \varphi_k \right\|_Z + \sup_n \left\| \sum_{k=1}^n x''_k \varphi_k \right\|_Z.$$

Покажем полноту пространства  $\tilde{X}_\Phi$ . Пусть  $\{\tilde{x}_n\}_{n \in N}$  ( $\tilde{x}_n = \{x_k^n\}_{k \in N}$ ) — некоторая фундаментальная последовательность из  $\tilde{X}_\Phi$ , т. е.

$$\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\|_{X_\Phi} = \sup_j \left\| \sum_{i=1}^j x_i^n \varphi_i - \sum_{i=1}^j x_i^m \varphi_i \right\|_Z \rightarrow 0 \quad \text{при } n, m \rightarrow \infty.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|x_i^n - x_i^m\|_X &\leq \frac{1}{m} \frac{\|(x_i^n - x_i^m) \varphi_i\|_Z}{\|\varphi_i\|_Y} = \frac{1}{m} \frac{\left\| \sum_{k=1}^i (x_k^n - x_k^m) \varphi_k - \sum_{k=1}^{i-1} (x_k^n - x_k^m) \varphi_k \right\|_Z}{\|\varphi_i\|_Y} \leq \\ &\leq \frac{2}{m} \frac{\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\|_{\tilde{X}_\Phi}}{\|\varphi_i\|_Y} \rightarrow 0 \quad \text{при } n, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поэтому последовательность  $\{x_i^n\}_{n \in N}$  фундаментальна в  $X$  для любого  $i \in N$ . В силу полноты  $X$  получаем  $x_i^n \rightarrow x_i \in X$ . Так как для любого  $k \in N$  выполняется  $\left\| \sum_{i=1}^k (x_i^n - x_i^m) \varphi_i \right\|_Z \rightarrow 0$  при

$n, m \rightarrow \infty$ , то  $\left\| \sum_{i=1}^k (x_i^n - x_i) \varphi_i \right\|_Z \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому  $\|\tilde{x}_n - \tilde{x}\|_{\tilde{X}_\Phi} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Так как

$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^n - x_i) \varphi_i \right\|_Z \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то из неравенства

$$\left\| \sum_{i=k+1}^{k+p} x_i \varphi_i \right\|_Z \leq \left\| \sum_{i=k+1}^{k+p} (x_i - x_i^n) \varphi_i \right\|_Z + \left\| \sum_{i=k+1}^{k+p} x_i^n \varphi_i \right\|_Z, \quad p \in N,$$

следует, что ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \varphi_i$  сходится и  $\tilde{x} = \{x_n\}_{n \in N} \in \tilde{X}_\Phi$ .

Определим оператор  $T : \tilde{X}_\Phi \rightarrow Z$  формулой  $T\tilde{x} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$ ,  $\tilde{x} = \{x_n\}_{n \in N} \in \tilde{X}_\Phi$ . Из линейности  $\tilde{X}_\Phi$

следует, что оператор  $T$  линеен. Покажем ограниченность  $T$ . Для всех  $\tilde{x} \in \tilde{X}_\Phi$  имеем  $\|T\tilde{x}\| \leq \|\tilde{x}\|$ . Кроме того, поскольку  $\text{Ker } T = \{0\}$ , то  $T$  осуществляет изоморфизм между  $\tilde{X}_\Phi$  и  $Z$ . Оператор  $T$  назовем *естественным изоморфизмом* между  $\tilde{X}_\Phi$  и  $Z$ .

**Утверждение 1.** Пусть  $Y$  — нормированное пространство,  $X$  и  $Z$  —  $H$ -пространства, система  $\{\varphi_n\}_{n \in N} \subset Y$  образует  $b$ -базис с пространством коэффициентов  $\tilde{X}_\Phi$  и  $T$ -естественный изоморфизм между  $\tilde{X}_\Phi$  и  $Z$ . Тогда:



1) для каждого  $\tilde{x} = \{x_n\}_{n \in N} \in \tilde{X}_\Phi$  имеет место неравенство

$$\|x_n\|_X \leq \frac{2\|T^{-1}\|_{L(Z, \tilde{X}_\Phi)}}{m\|\varphi_n\|_Y} \|z\|_Z, \quad n \in N,$$

где  $T\tilde{x} = z$ ;

2) существует последовательность  $\{f_n\}_{n \in N} \subset L(Z, X)$  такая, что  $f_n(x\varphi_k) = \delta_{nk}x$  при любых  $n, k \in N$  и  $x \in X$ ;

3) если  $\omega(Y) = L(Z, X)$ , то система  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$  имеет  $b$ -биортогональную систему  $\{\varphi_n^*\}_{n \in N}$  и существует  $a > 0$  такое, что  $a \leq \|\varphi_n^*\|_Y \|\varphi_n\|_Y$  для любого  $n \in N$ .

**Доказательство.** Возьмем произвольный  $\tilde{x} = \{x_n\}_{n \in N} \in \tilde{X}_\Phi$ . Если  $z = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$ , то для любого  $n \in N$

$$\|x_n\|_X \leq \frac{1}{m} \frac{\|x_n \varphi_n\|_Z}{\|\varphi_n\|_Y} = \frac{1}{m} \frac{\left\| \sum_{k=1}^n x_k \varphi_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_k \varphi_k \right\|_Z}{\|\varphi_n\|_Y} \leq \frac{2}{m} \frac{\|T^{-1}z\|_{\tilde{X}_\Phi}}{\|\varphi_n\|_Y} \leq \frac{2\|T^{-1}\|_{L(Z, \tilde{X}_\Phi)}}{m\|\varphi_n\|_Y} \|z\|_Z.$$

Рассмотрим последовательность операторов  $f_n : Z \rightarrow X$ , определенных выражением  $f_n(z) = x_n$ , где  $z = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$ . Линейность оператора  $f_n$  очевидна. В силу доказанного имеем

$$\|f_n(z)\|_X \leq \frac{2\|T^{-1}\|_{L(Z, \tilde{X}_\Phi)}}{m\|\varphi_n\|_Y} \|z\|_Z, \quad n \in N.$$

Поэтому  $f_n \in L(Z, X)$ . В то же время из  $b$ -базисности системы  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$  следует равенство  $f_n(x\varphi_k) = \delta_{nk}x$ ,  $x \in X$ .

Далее в силу условия  $\omega(Y) = L(Z, X)$  существует последовательность  $\{\varphi_n^*\}_{n \in N} \subset Y$  такая, что  $f_n(z) = \langle z, \varphi_n^* \rangle$ . Очевидно, что  $\{\varphi_n^*\}_{n \in N}$  является  $b$ -биортогональной системой к системе  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$ . Для произвольного  $x \in X$  имеем

$$\|x\|_X = \|\langle x\varphi_n, \varphi_n^* \rangle\|_X \leq M^2 \|\varphi_n^*\|_Y \|\varphi_n\|_Y \|x\|_X.$$

Отсюда  $a \leq \|\varphi_n^*\|_Y \|\varphi_n\|_Y$ , где  $a = 1/M^2$ .

Нам в дальнейшем понадобится следующий критерий  $b$ -базисности систем.

**Утверждение 2.** Пусть  $Y$  — нормированное пространство,  $X$  и  $Z$  —  $H$ -пространства, система  $\{\varphi_n\}_{n \in N} \subset Y$ . Для того чтобы  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$  была  $b$ -базисом в  $Z$ , достаточно, а в случае  $\omega(Y) = L(Z, X)$  и необходимо, выполнение условий:

- a) последовательность  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$   $b$ -полна;
- b) последовательность  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$  имеет  $b$ -биортогональную систему  $\{\varphi_n^*\}_{n \in N}$ ;
- c) для всех  $m \in N$  и  $z \in Z$  справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^m \langle z, \varphi_k^* \rangle \varphi_k \right\|_Z \leq \tilde{M} \|z\|_Z,$$

где  $\tilde{M}$  — некоторая постоянная.

**Доказательство. Достаточность.** Покажем, что при выполнении условий а)–с) система  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$  образует  $b$ -базис в  $Z$ . В силу  $b$ -полноты  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$  для произвольных  $\varepsilon > 0$  и  $z \in Z$  существует  $R \in L_b(\{\varphi_k\}_{k \in N})$  такое, что  $\|z - R\|_Z < \varepsilon$ . Тогда при достаточно больших  $n$ , используя условие с), получим

$$\left\| z - \sum_{k=1}^n \langle z, \varphi_k^* \rangle \varphi_k \right\|_Z \leq \|z - R\|_Z + \left\| \sum_{k=1}^n \langle z - R, \varphi_k^* \rangle \varphi_k \right\|_Z < \varepsilon + \tilde{M} \|z - R\|_Z < (1 + \tilde{M})\varepsilon.$$

Таким образом,  $z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \varphi_n^* \rangle \varphi_n$ . Единственность представления очевидна.



*Необходимость.* Пусть  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$  —  $b$ -базис в  $Z$ . Проверим справедливость условий а)–с). Условие а) следует из определения  $b$ -базиса  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$ . Существование  $b$ -биортогональной системы  $\{\varphi_n^*\}_{n \in N}$  к системе  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$  вытекает из утверждения 1.

Далее, рассмотрим последовательность операторов  $P_m$ :

$$P_m z = \sum_{k=1}^m \langle z, \varphi_k^* \rangle \varphi_k, \quad z \in Z.$$

Так как  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$  —  $b$ -базис, то последовательность  $\{P_m z\}$  сходится для всех  $z \in Z$ . По теореме о равномерной ограниченности  $\|P_m\| \leq \tilde{M}$ . Следовательно,  $\|P_m z\|_Z \leq \tilde{M} \|z\|_Z, z \in Z$ .

### 3. ПРОСТРАНСТВО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Пусть  $Y$  — нормированное пространство,  $X$  и  $Z$  —  $H$ -пространства, система  $\{y_n\} \subset Y$  имеет фиксированную  $b$ -биортогональную систему  $\{y_n^*\}_{n \in N}$ . Пусть  $\tilde{X}$  —  $KB$ -пространство последовательностей элементов  $X$  с каноническим базисом  $\{e_n\}_{n \in N}$ .

Пару  $\{y_n; y_n^*\}_{n \in N}$  назовем  $b_{\tilde{X}}$ -бесселевой в  $Z$ , если  $\{\langle z, y_n^* \rangle\}_{n \in N} \in \tilde{X}$  при любом  $z \in Z$ . В случае, когда система  $\{y_n\}_{n \in N}$  также и  $b$ -полна, назовем  $\{y_n\}_{n \in N} \subset Y$  просто  $b_{\tilde{X}}$ -бесселевой системой в  $Z$ .

Установим критерии  $b_{\tilde{X}}$ -бесселевости систем.

**Теорема 1.** Пусть  $Y$  — нормированное пространство,  $X$  и  $Z$  —  $H$ -пространства,  $\tilde{X}$  —  $KB$ -пространство последовательностей  $\tilde{x} = \{x_n\}_{n \in N}, x_n \in X$ , с каноническим базисом  $\{e_n\}_{n \in N}, \{y_n\}_{n \in N} \subset Y$  имеет  $b$ -биортогональную систему  $\{y_n^*\}_{n \in N}$ . Тогда, для того чтобы пара  $\{y_n; y_n^*\}_{n \in N}$  была  $b_{\tilde{X}}$ -бесселевой в  $Z$ , необходимо, а в случае  $b$ -полноты системы  $\{y_n\}_{n \in N}$  и достаточно, существование оператора  $T \in L(Z, \tilde{X}) : T(xy_n) = \{\delta_{in} x\}_{i \in N}$  для всех  $x \in X, n \in N$ .

**Доказательство.** *Необходимость.* Пусть  $\{y_n; y_n^*\}_{n \in N}$  —  $b_{\tilde{X}}$ -бесселева пара в  $Z$ . Рассмотрим последовательность операторов  $T_m \in L(Z, \tilde{X})$ :

$$T_m z = \sum_{k=1}^m e_k (\{\langle z, y_i^* \rangle\}_{i \in N}) \quad \text{для всех } m \in N.$$

Так как  $\{e_n\}_{n \in N}$  — канонический базис, то  $\lim_{m \rightarrow \infty} T_m z$  существует, и тем самым последовательность  $\{T_m z\}_{m \in N}$  ограничена для каждого  $z \in Z$ . Из принципа равномерной ограниченности следует, что последовательность  $\{\|T_m\|\}$  ограничена.

Пусть  $T$  — оператор, заданный формулой  $Tz = \lim_{m \rightarrow \infty} T_m z$ . Очевидно, что  $T \in L(Z, \tilde{X})$ , причем

$$T(xy_n) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k (\{\langle xy_n, y_i^* \rangle\}_{i \in N}) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k (\{\delta_{in} x\}_{i \in N}) = e_n (\{\delta_{in} x\}_{i \in N}) = \{\delta_{in} x\}_{i \in N}$$

для всех  $x \in X$  и  $n \in N$ .

*Достаточность.* Пусть система  $\{y_n\}_{n \in N}$   $b$ -полна и существует оператор  $T \in L(Z, \tilde{X}) : T(xy_n) = \{\delta_{in} x\}_{i \in N}$  для всех  $x \in X, n \in N$ . Для каждого  $n \in N$  рассмотрим оператор  $e_n^* : \tilde{X} \rightarrow X$ , заданный формулой  $e_n^*(\{x_k\}_{k \in N}) = x_n$ . Линейность оператора  $e_n^*$  очевидна, а ограниченность следует из покоординатной сходимости в пространстве  $\tilde{X}$ . Тогда для каждого  $x \in X$  имеем

$$\delta_{nk} x = e_n^*(\{\delta_{ik} x\}_{i \in N}) = e_n^*(T(xy_k)) = (T^{b^*} e_n^*)(xy_k), \quad k, n \in N,$$

где  $T^{b^*}$  —  $b$ -сопряженный оператор к  $T$ . В силу  $b$ -полноты системы  $\{y_n\}_{n \in N}$  получаем, что  $\omega(y_n^*) = T^{b^*} e_n^*$ . Тогда для всех  $z \in Z$  и  $n \in N$  имеет место

$$\langle z, y_n^* \rangle = \omega(y_n^*)(z) = (T^{b^*} e_n^*)(z) = e_n^*(Tz) \in X.$$

Так как  $Tz \in \tilde{X}$ , то  $\{\langle z, y_n^* \rangle\}_{n \in N} \in \tilde{X}$ . Теорема доказана.  $\square$

**Следствие 1.** Пусть  $Y$  — нормированное пространство,  $X$  и  $Z$  —  $H$ -пространства,  $\tilde{X}$  —  $KB$ -пространство последовательностей  $\tilde{x} = \{x_n\}_{n \in N}, x_n \in X$ , с каноническим базисом  $\{e_n\}_{n \in N}$ , система  $\{y_n\}_{n \in N}$   $b$ -полна и имеет  $b$ -биортогональную систему. Система  $\{y_n\}_{n \in N}$  является



$b_{\tilde{X}}$ -бесселевой в  $Z$  тогда и только тогда, когда для любой конечной последовательности  $\{x_n\}$  из  $\tilde{X}$  имеет место соотношение

$$\|\{x_n\}\|_{\tilde{X}} \leq \tilde{M} \left\| \sum x_n y_n \right\|_Z,$$

где  $\tilde{M}$  — некоторая постоянная.

Пусть  $Y_1$  — нормированное пространство,  $Z_1$  —  $H$ -пространство,  $b_1(x, y) : Y_1 \rightarrow Z_1$  — билинейное отображение:

$$\exists m_1, M_1 > 0 : m_1 \|x\|_X \|y\|_{Y_1} \leq \|x \cdot y\|_{Z_1} \leq M_1 \|x\|_X \|y\|_{Y_1}$$

для всех  $x \in X$  и  $y \in Y_1$ . Здесь  $x \cdot y \equiv b_1(x, y)$ .

Обозначим через  $\tilde{\omega}(y)$ ,  $y \in Y_1$ , оператор, определенный формулой  $\tilde{\omega}(y)(z) = \langle z, y \rangle$ ,  $z \in Z_1$ . Ясно, что  $\tilde{\omega}(y) \in L(Z_1, X)$ ,  $y \in Y_1$ .

**Теорема 2.** Пусть  $Y, Y_1$  — нормированные пространства,  $X, Z$  и  $Z_1$  —  $H$ -пространства, система  $\{y_n\}_{n \in N} \subset Y$  имеет  $b$ -биортогональную систему  $\{y_n^*\}_{n \in N}$ , система  $\{\varphi_n\}_{n \in N} \subset Y_1$  образует  $b_1$ -базис в  $Z_1$  с пространством коэффициентов  $\tilde{X}_\Phi$  и имеет  $b_1$ -биортогональную систему  $\{\varphi_n^*\}_{n \in N}$ . Для того чтобы пара  $\{y_n; y_n^*\}_{n \in N}$  была  $b_{\tilde{X}_\Phi}$ -бесселевой в  $Z$ , необходимо, а в случае  $b$ -полноты системы  $\{y_n\}_{n \in N}$  и достаточно, существование оператора  $T \in L(Z, Z_1) : T(xy_n) = x \cdot \varphi_n$  для всех  $x \in X, n \in N$ .

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $\{y_n; y_n^*\}_{n \in N}$  —  $b_{\tilde{X}_\Phi}$ -бесселева пара в  $Z$ . Для каждого  $m \in N$  рассмотрим оператор  $T_m \in L(Z, Z_1)$ , заданный формулой  $T_m z = \sum_{k=1}^m \langle z, y_k^* \rangle \cdot \varphi_k$ .

В силу  $b_1$ -базисности  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$  ясно, что существует  $\lim_{m \rightarrow \infty} T_m z = \sum_{k=1}^{\infty} \langle z, y_k^* \rangle \cdot \varphi_k$  и, значит,  $\{\|T_m\|\}_{m \in N}$  ограничена. Пусть  $T : Tz = \lim_{m \rightarrow \infty} T_m z$ . Тогда  $T \in L(Z, Z_1)$  и  $Tz = \sum_{k=1}^{\infty} \langle z, y_k^* \rangle \cdot \varphi_k$ .

Для всех  $x \in X$  и  $n \in N$  получаем

$$T(xy_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle xy_n, y_k^* \rangle \cdot \varphi_k = x \cdot \varphi_n.$$

**Достаточность.** Пусть существует оператор  $T \in L(Z, Z_1)$  такой, что  $T(xy_n) = x \cdot \varphi_n$  для всех  $x \in X, n \in N$ . Тогда для любых  $x \in X$  и  $n, k \in N$  имеем

$$\delta_{kn} x = \langle x \varphi_k, \varphi_n^* \rangle = \langle T(xy_k), \varphi_n^* \rangle = \tilde{\omega}(\varphi_n^*)(T(xy_k)) = \left( T^{b^*} \tilde{\omega}(\varphi_n^*) \right) (xy_k).$$

В силу  $b$ -полноты  $\{y_n\}_{n \in N}$  из последнего соотношения заключаем, что  $T^{b^*} \tilde{\omega}(\varphi_n^*) = \omega(y_n^*)$  для всех  $n \in N$ . Наконец, из

$$\langle z, y_n^* \rangle = \omega(y_n^*)(z) = (T^{b^*} \tilde{\omega}(\varphi_n^*))(z) = \tilde{\omega}(\varphi_n^*)(Tz) = \langle Tz, \varphi_n^* \rangle \in X, \quad z \in Z, \quad n \in N,$$

следует, что  $\{\langle z, y_n^* \rangle\}_{n \in N} \in \tilde{X}_\Phi$ . Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 3.** Пусть  $Y$  — нормированное пространство,  $X$  и  $Z$  —  $H$ -пространства, система  $\{y_n\}_{n \in N} \subset Y$   $b$ -полна в  $Z$  и имеет  $b$ -биортогональную систему  $\{y_n^*\}_{n \in N}$ , система  $\Phi = \{\varphi_n\}_{n \in N} \subset Y$  образует  $b$ -базис в  $Z$ , с пространством коэффициентов  $\tilde{X}_\Phi$  и имеет  $b$ -биортогональную систему  $\{\varphi_n^*\}_{n \in N}$ . Тогда для того чтобы система  $\{y_n\}_{n \in N}$  была  $b_{\tilde{X}_\Phi}$ -бесселевой в  $Z$ , необходимо и достаточно, чтобы оператор  $A_{\tilde{X}} : \tilde{X}_\Phi \rightarrow \tilde{X}_\Phi$ , определенный выражением  $A_{\tilde{X}} \tilde{x} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n \varphi_n, y_k^* \rangle \right\}_{k \in N}$ ,  $\tilde{x} = \{x_n\}_{n \in N}$ , был ограниченным в  $\tilde{X}_\Phi$ .

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $\{y_n\}_{n \in N}$  —  $b_{\tilde{X}_\Phi}$ -бесселева система в  $Z$ . Тогда в силу теоремы 2 существует оператор  $A \in L(Z)$  такой, что  $A(xy_n) = x \varphi_n$  для всех  $x \in X, n \in N$ . Для любых  $x \in X, n, k \in N$  имеем

$$\delta_{nk} x = \langle x \varphi_n, \varphi_k^* \rangle = \omega(\varphi_k^*)(A(xy_n)) = (A^{b^*} \omega(\varphi_k^*))(xy_n),$$



где  $A^{b^*}$  — оператор,  $b$ -сопряженный к оператору  $A$ . Отсюда в силу  $b$ -полноты  $\{y_n\}_{n \in N}$  получаем, что  $A^{b^*} \omega(\varphi_n^*) = \omega(y_n^*)$ ,  $n \in N$ .

Рассмотрим оператор  $A_{\tilde{X}}$ :  $\tilde{X}_\Phi \rightarrow \tilde{X}_\Phi$ , заданный формулой

$$A_{\tilde{X}} \tilde{x} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n \varphi_n, y_k^* \rangle \right\}_{k \in N} \quad \tilde{x} = \{x_n\}_{n \in N}.$$

Корректность этого определения следует из  $b$ -базисности  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$ .

Пусть  $T : Z \rightarrow \tilde{X}_\Phi$  — естественный изоморфизм. Возьмем любое  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  и обозначим через  $z = T^{-1} \tilde{x}$ . Тогда

$$\begin{aligned} A_{\tilde{X}} \tilde{x} &= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n \varphi_n, y_k^* \rangle \right\}_{k \in N} = \{\langle z, y_k^* \rangle\}_{k \in N} = \{(A^{b^*} \omega(\varphi_k^*))(z)\}_{k \in N} = \\ &= \{\omega(\varphi_k^*)(Az)\}_{k \in N} = \{\langle Az, \varphi_k^* \rangle\}_{k \in N} = T(Az) = T(AT^{-1} \tilde{x}) = (TAT^{-1}) \tilde{x}. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения получаем, что  $A_{\tilde{X}} = TAT^{-1}$ . Значит,  $A_{\tilde{X}} \in L(\tilde{X}_\Phi)$ .

*Достаточность.* Пусть оператор  $A_{\tilde{X}}$ , определенный равенством  $A_{\tilde{X}} \tilde{x} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n \varphi_n, y_k^* \rangle \right\}_{k \in N}$ ,  $\tilde{x} = \{x_n\}_{n \in N}$ , линеен и ограничен в  $\tilde{X}_\Phi$ . Обозначим через  $A = T^{-1} A_{\tilde{X}} T$ . Очевидно, что оператор  $A \in L(Z)$ .

Далее, для любого  $x \in X$  и  $n \in N$  имеем

$$\begin{aligned} A(xy_n) &= (T^{-1} A_{\tilde{X}} T)(xy_n) = (T^{-1} A_{\tilde{X}})(\{\langle xy_n, \varphi_k^* \rangle\}_{k \in N}) = \\ &= T^{-1}(\{\langle xy_n, y_k^* \rangle\}_{k \in N}) = T^{-1}(\{\delta_{kn} x\}_{k \in N}) = x \varphi_n. \end{aligned}$$

Остается применить теорему 2. Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 4.** Пусть  $Y, Y_1$  — нормированные пространства,  $X, Z$  и  $Z_1$  —  $H$ -пространства. Для того чтобы  $Z_1$  имел  $b_1$ -базис  $\Phi = \{\varphi_n\}_{n \in N} \subset Y_1$  с  $b_1$ -биортогональной системой  $\{\varphi_n^*\}_{n \in N}$  и пространством коэффициентов  $\tilde{X}_\Phi$  таким, что  $b$ -полная система  $\{y_n\}_{n \in N} \subset Y$  с  $b$ -биортогональной системой  $\{y_n^*\}_{n \in N}$  была  $b_{\tilde{X}_\Phi}$ -бесселевой в  $Z$ , необходимо и достаточно, чтобы существовали операторы  $T \in L(Z, Z_1)$  и  $A : Y_1 \rightarrow Y_1$ , удовлетворяющие условиям:

$$1) \text{ Ker } T^* = \{0\}, T^{b^*} \tilde{\omega}(A\varphi_n) = \omega(y_n^*), T(xy_n) = x \cdot \varphi_n \text{ для всех } n \in N \text{ и } x \in X;$$

$$2) \left\| \sum_{k=1}^m T(\langle z, A\varphi_k \rangle y_k) \right\|_{Z_1} \leq \tilde{M} \|z\|_{Z_1} \text{ для всех } z \in Z_1, \text{ где } \tilde{M} \text{ — некоторая постоянная и}$$

$$T^* \in L(Z_1^*, Z^*).$$

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$  —  $b_1$ -базис в  $Z_1$ ,  $\{y_n\}_{n \in N}$  —  $b$ -биортогональная и  $b$ -полная  $b_{\tilde{X}_\Phi}$ -бесселевая система в  $Z$ . В силу теоремы 2 существует оператор  $T \in L(Z, Z_1)$  такой, что  $T(xy_n) = x \cdot \varphi_n$  для всех  $x \in X, n \in N$ . Поэтому для каждого  $x \in X$  имеем

$$\delta_{nk} x = \langle x \cdot \varphi_k, \varphi_k^* \rangle = \langle T(xy_k), \varphi_n^* \rangle = \tilde{\omega}(\varphi_n^*)(T(xy_k)) = (T^{b^*} \tilde{\omega}(\varphi_n^*))(xy_k).$$

Поскольку система  $\{y_n\}_{n \in N}$   $b$ -полна, то из последнего соотношения вытекает, что  $T^{b^*} \tilde{\omega}(\varphi_n^*) = \omega(y_n^*)$  для всех  $n \in N$ . Из  $b$ -биортогональности системы  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$  в  $Z$  следует, что система  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$   $b$ -минимальна в  $Z$ . На самом деле, если существует  $k_0 \in N$  и для каждого  $x \in X$  ( $x \neq 0$ )  $x \cdot \varphi_{k_0} \in \overline{L_b(\{\varphi_n\}_{n \in N, n \neq k_0})}$ , то  $\langle x \cdot \varphi_{k_0}, \varphi_{k_0}^* \rangle = 0$ , что противоречит равенству  $\langle x \cdot \varphi_{k_0}, \varphi_{k_0}^* \rangle = x$ . Так как  $\|x \cdot \varphi_k - x \cdot \varphi_{k_0}\|_Z \leq M_1 \|x\|_X \|\varphi_k - \varphi_{k_0}\|_Y$ , то  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$  минимальна в  $Y$ , ибо система  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$  не  $b$ -минимальна в  $Z$ .

Пусть  $A : Y_1 \rightarrow Y_1$  — оператор, определенный на  $L(\{\varphi_n\}_{n \in N})$  по линейности выражением  $A\varphi_n = \varphi_n^*$  для любого  $n \in N$ . Корректность определения оператора  $A$  следует из минимальности системы  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$ . Тогда  $T^{b^*} \tilde{\omega}(A\varphi_n) = \omega(y_n^*)$ .

Поскольку  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$  образует  $b_1$ -базис и  $T(xy_n) = x \cdot \varphi_n$  для всех  $x \in X, n \in N$ , то  $\overline{R(T)} = Z$ . Следовательно,  $R(T)^\perp = \{0\}$ . Значит,  $\text{Ker } T^* = \{0\}$ .



Далее, учитывая  $b_1$ -базисность системы  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$ , для всех  $m \in N$  и  $z \in Z_1$  имеет место оценка

$$\left\| \sum_{k=1}^m T(\langle z, A\varphi_k \rangle y_k) \right\|_{Z_1} = \left\| \sum_{k=1}^m \langle z, A\varphi_k \rangle \cdot \varphi_k \right\|_{Z_1} = \left\| \sum_{k=1}^m \langle z, \varphi_k^* \rangle \cdot \varphi_k \right\|_{Z_1} \leq M \|z\|_{Z_1}.$$

*Достаточность.* Пусть существуют операторы  $T \in L(Z, Z_1)$  и  $A : Y_1 \rightarrow Y_1$ , удовлетворяющие условиям 1) и 2). Пусть  $T(xy_n) = x \cdot \varphi_n$ ,  $A\varphi_n = \varphi_n^*$  для всех  $x \in X$  и  $n \in N$ . Покажем, что система  $\Phi = \{\varphi_n\}_{n \in N}$  образует  $b_1$ -базис в  $Z_1$ , а система  $\{y_n\}_{n \in N} - b_{\tilde{X}_\Phi}$ -бесселева в  $Z$ . Для любых  $x \in X$  и  $n, k \in N$  имеем

$$\langle x \cdot \varphi_k, \varphi_n^* \rangle = \langle T(xy_k), A\varphi_n \rangle = \tilde{\omega}(A\varphi_n)(T(xy_k)) = (T^{b*} \tilde{\omega}(A\varphi_n))(xy_k) = \omega(y_n^*)(xy_k) = \delta_{nk}x,$$

т. е. система  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$  имеет  $b_1$ -биортогональную систему  $\{\varphi_n^*\}_{n \in N}$ . Покажем, что  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$   $b_1$ -полна.

Предположим противное. Тогда существует некоторый ненулевой элемент  $\varphi^* \in Z_1^*$  такой, что для любого  $n \in N$  имеет место соотношение  $\varphi^*(x \cdot \varphi_n) = 0$ . Поэтому  $0 = \varphi^*(x \cdot \varphi_n) = \varphi^*(T(xy_n)) = (T^* \varphi^*)(xy_n)$ . Отсюда и из  $b$ -полноты системы  $\{y_n\}_{n \in N}$  следует, что  $T\varphi^* = 0$ .

Так как по условию теоремы  $\text{Ker } T^* = \{0\}$ , то  $\varphi^* = 0$ , что противоречит предположению. Значит, система  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$   $b_1$ -полна.

Теперь покажем, что для любого  $m \in N$  проекторы  $P_m(z) = \sum_{k=1}^m \langle z, \varphi_k^* \rangle \cdot \varphi_k$  равномерно ограничены.

Имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^m \langle z, \varphi_k^* \rangle \cdot \varphi_k \right\|_{Z_1} = \left\| \sum_{k=1}^m \langle z, A\varphi_k \rangle \cdot \varphi_k \right\|_{Z_1} = \left\| \sum_{k=1}^m T(\langle z, A\varphi_k \rangle y_k) \right\|_{Z_1} \leq M \|z\|_{Z_1}.$$

Таким образом, проекторы равномерно ограничены.

В силу утверждения 2 система  $\{\varphi_n\}_{n \in N}$  образует  $b_1$ -базис в  $Z_1$ . Применяя теорему 2, получим  $b_{\tilde{X}_\Phi}$ -бесселевость системы  $\{y_n\}_{n \in N}$  в  $Z$ . Теорема доказана.  $\square$

*Автор выражает благодарность профессору Б.Т. Билалову за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.*

### Библиографический список

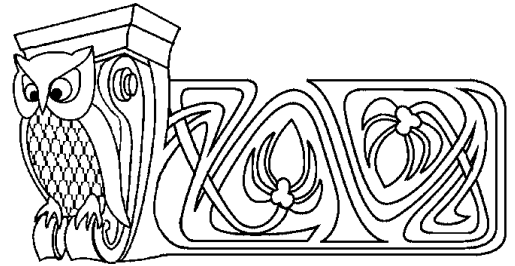
1. Бари Н.К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Учен. записки МГУ. Математика. 1951. Т. IV, вып. 148. С. 69–107.
2. Schur I. Über endlich Gruppen und Hermitische Formen // Math. Zeit. 1918. Vol. 1. P. 183–207.
3. Никишин Е.М. О сходимости некоторых функциональных рядов // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1967. Т. 31, вып.1. С. 15–26.
4. Козлов В.Я. О локальной характеристике полной ортогональной нормированной системы функций // Мат. сборник. 1948. Т. 23, вып. 3. С. 441–474.
5. Олевский А.М. О продолжении последовательности функций до полной ортонормированной системы // Мат. заметки. 1969. Т. 6, вып. 6. С. 737–747.
6. Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
7. Czaaja W. Remark on Naimark's duality // Proc. Amer. Math. Soc. 2008. Vol. 136, № 3. P. 867–871.
8. Новиков С.Я. Бесселевы последовательности как проекции ортогональных систем // Мат. заметки. 2007. Т. 81, вып. 6. С. 893–903.
9. Вейц Б.Е. Системы Бесселя и Гильберта в пространствах Банаха и вопросы устойчивости // Изв. вузов. Математика. 1965. Т. 2. С. 7–23.
10. Canturija Z.A. On some properties of biorthogonal systems in Banach space and their applications in spectral theory // Soobs. Akad. Nauk Gruz. SSR. 1964. Vol. 2, iss. 34. P. 271–276.
11. Pelczynski A., Singer I. On non-equivalent bases and conditional bases in Banach spaces // Studia Math. 1964. Iss. 25. P. 5–25.
12. Билалов Б.Т., Гусейнов З.Г.  $K$ -бесселевы и  $K$ -гильбертовы системы.  $K$ -базисы // Докл. АН. 2009. Т. 429, № 3. С. 298–300.
13. Терехин П.А. Проекционные характеристики бесселевых систем // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 44–51.





УДК 513.812

# КЛАССИФИКАЦИЯ КОМПЛЕКСОВ ПРЯМЫХ В РЕПЕРЕ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ $\bar{F}_3^2$



Г. В. Киотина

Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина,  
кафедра математики и методики преподавания математических  
дисциплин  
E-mail: KiotinaGV@yandex.ru

Методом внешних форм Картана изучаются комплексы прямых в бифлаговом пространстве гиперболического типа, введённом автором. Доказано, что в этом пространстве в окрестности нулевого порядка существует 5 видов неспециальных комплексов. Для каждого из них строится подвижной репер первого порядка.

**Ключевые слова:** пространство бифлаговое, абсолют, группа, автоморфизмы, дифференцирование внешнее, репер: подвижной, канонический; окрестность, комплекс: специальный, неспециальный.

## The Classification of Complexes of Lines in Zeroth Order Frame in $\bar{F}_3^2$ Space

G.V. Kiotina

Ryazan State University named for S. A. Yesenin,  
Chair of Mathematics and Method of Teaching of Mathematical  
Disciplines  
E-mail: KiotinaGV@yandex.ru

Complexes of lines in hyperbolic type of biflag space introduced by the author are studied by the method of external Cartan forms. We prove that 5 non-special variants of complexes exist in mentioned space in zero order neighborhood. For every complex a first-order moving flag was drawn.

**Key words:** space biflag, absolute, group, automorphism, measurement invariant differentiation external, frame: moving, canonical; neighborhood, complex: special, non-special.

Пространством с обобщённой проективной метрикой Кэли – Клейна мы называем проективное  $n$ -мерное пространство с абсолют, с помощью которого в каждом пучке  $m$ -плоскостей (за исключением, может быть, некоторого множества этих пучков) определено эллиптическое, гиперболическое, или параболическое измерение углов между  $m$ -плоскостями (при  $m = 0$  — расстояний между точками), одного вида при данном  $m = \overline{0, m-1}$ , инвариантное относительно группы проективных автоморфизмов абсолюта [1].

В данной работе классифицируются комплексы прямых в окрестности нулевого порядка в бифлаговом пространстве  $\bar{F}_3^2$ , абсолют которого состоит из пары плоскостей  $P_2^1$  и  $P_2^2$ , определяющих квадртку  $k_2$  ранга 2 индекса 1, пары прямых  $P_1^1 = P_2^1 \cap P_2^2$ ,  $P_1^2 \subset P_2^1$  и пары точек  $A = P_1^1 \cap P_1^2$  и  $B \in P_1^1$ .

Канонический репер  $R = \{E_i, E\}$ ,  $i = \overline{0, 3}$ , пространства  $\bar{F}_3^2$  зададим следующим образом: вершины  $E_2$  и  $E_3$  поместим в точки  $A$  и  $B$ , причём  $E_3 \equiv A$ , вершины  $E_0$  и  $E_1$  выберем сопряжёнными относительно квадртки  $k_2$ , единичную точку возьмём произвольно на прямой  $P_1^2$ .

Группу  $G$  проективных автоморфизмов абсолюта будем называть *группой движений* пространства  $\bar{F}_3^2$ . Группа  $G$  изоморфна группе матриц вида  $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ b_0 & b_1 & 0 & b_3 \end{pmatrix}$ , где  $a^2 - b^2 = \pm 1$ ,  $a_0 + a_1 + a_2 = a + b$ .

Отсюда следует, что деривационные формулы и уравнения структуры пространства  $\bar{F}_3^2$  имеют вид

$$dE_i = \omega_i^j E_j, \quad d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \quad (1)$$

где  $\omega_0^0 = \omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = \omega_2^1 = \omega_3^2 = \omega_3^1 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = 0$ ,  $\omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_0^1 = \omega_1^1$ ,  $i, j = \overline{0, 3}$ .

Таким образом, имеем шесть независимых дифференциальных форм инфинитезимального перемещения канонического репера пространства  $\bar{F}_3^2$ , т. е. подвижность пространства  $\bar{F}_3^2$  равна 6 и совпадает с подвижностью классических неевклидовых пространств.

Помещая вершины  $E_0$  и  $E_1$  на прямую  $u$  комплекса, выделим главные формы  $\omega_0^\alpha$  и  $\omega_1^\alpha$  ( $\alpha = 2, 3$ ) перемещения канонического репера, которые обращаются в ноль при неподвижной прямой  $u$ .



Так как многообразие прямых комплекса зависит от трёх параметров, то четыре главные формы в репере нулевого порядка удовлетворяют одному линейному уравнению:

$$K_\alpha \omega_0^\alpha + K_\alpha^1 \omega_1^\alpha = 0, \quad (2)$$

где  $K_\alpha$  и  $K_\alpha^1$  — функции, зависящие от параметров перемещения прямой  $u$ . В зависимости от условий, которым удовлетворяют коэффициенты  $K_\alpha$  и  $K_\alpha^1$ , будем иметь различные виды комплексов.

## 1. НЕСПЕЦИАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ ПРЯМЫХ

**Теорема 1.** Если в уравнении (2)  $K_\alpha K_\beta^1 \neq 0$  при  $\beta \neq \alpha$ , то это уравнение в репере первого порядка можно привести к одному из видов:

$$\omega_0^\alpha = K\omega_1^\beta + \omega_0^\beta, \quad \omega_0^\alpha = K\omega_1^\beta.$$

**Доказательство.** При  $K_\alpha K_\beta^1 \neq 0$  уравнение (2) можно записать в виде

$$\omega_0^\alpha = K\omega_1^\beta + K_1\omega_0^\beta + K_2\omega_1^\alpha, \quad K \neq 0. \quad (3)$$

При  $\alpha = 2$  имеем уравнение

$$\omega_0^2 = K\omega_1^3 + K_1\omega_0^3 + K_2\omega_1^2, \quad K \neq 0. \quad (4)$$

Для построения репера первого порядка, связанного с прямой  $u$  комплекса, рассмотрим нормальную корреляцию, при которой каждой точке  $M$  прямой  $u$  ставится в соответствие плоскость  $\Pi$ , касательная вдоль прямой  $u$  к конусу с вершиной в точке  $M$  прямых комплекса в проективном пространстве  $P_3$ . Известно, что это соответствие является проективным.

Плоскость  $\Pi$  пересекает абсолютную прямую  $P_1^1$  в точке  $M_1$ . Тем самым между точками прямых  $u$  и  $P_1^1$  устанавливается проективное инволюционное соответствие, которое, как и в [2], назовём *нормальной коллинеацией*. В качестве вершины  $E_0$  на прямой  $u$  выберем (при  $K_2 \neq \text{const}$ ) точку, соответствующую точке  $E_2$  в нормальной коллинеации. За точку  $E_1$  примем точку, сопряжённую для  $E_0$  на прямой  $u$ . Касательная плоскость  $\Pi_1$  вдоль прямой  $E_1E_0$  к конусу с вершиной в точке  $E_1$  прямых комплекса пересекает прямую  $P_1^1$  в точке  $M$ . Если точка  $M \neq E_3$ , то примем её за точку  $E_2(0; 0; 1)$ .

Найдём уравнение комплекса (4) в построенном репере первого порядка. Для конуса с вершиной в точке  $E_0$  прямых комплекса при неподвижной точке  $E_0$  имеем  $dE_0 \equiv 0$  и, следовательно,  $\omega_0^i = 0$  при всех  $i = \overline{0, 3}$ . Так как касательная плоскость  $\Pi$  к конусу с вершиной в точке  $E_0$  вдоль прямой  $E_0E_1$  пересекает прямую  $P_1^1$  в точке  $E_2$ , т.е. не содержит точку  $E_3$ , то коэффициент  $\omega_1^3$  при  $E_3$  в разложении  $dE_1$  в касательной плоскости  $\Pi$  равен нулю. Тогда из уравнения (4) получим  $K_2\omega_1^2 = 0$ , т.е.  $K_2 = 0$  (при  $K_2 \neq \text{const}$ ). Далее, рассмотрим два случая.

1. В случае, когда точке  $E_1$  в нормальной коллинеации соответствует точка  $E_2$ , получим (при неподвижной точке  $E_1$ )  $dE_1 \equiv 0$ ,  $\omega_1^i = 0$ ,  $dE_0 = \omega_0^1E_1 + \omega_0^2E_2 + \omega_0^3E_3$ , т.е.  $\omega_0^3 = \omega_0^2$ . Из уравнения (4) следует, что  $K_1 = 1$ . Уравнение (4) примет вид

$$\omega_0^2 = K\omega_1^3 + \omega_0^3. \quad (5)$$

2. В случае, когда точке  $E_1$  в нормальной коллинеации соответствует точка  $E_3$ , получим, что в разложении  $dE_0$  в касательной плоскости  $\Pi_1$  к конусу с вершиной в точке  $E_1$  отсутствует слагаемое с точкой  $E_2$ , т.е.  $\omega_0^2 = 0$ . Учитывая, что  $\omega_1^i = 0$  при  $dE_1 \equiv 0$ , из уравнения (4) получим  $K_1\omega_0^3 = 0$ . Отсюда следует, что  $K_1 = 0$ . Уравнение комплекса (4) в этом случае принимает вид

$$\omega_0^2 = K\omega_1^3. \quad (6)$$

Аналогичный результат получим при  $\alpha = 3$ . Теорема доказана.  $\square$

Уравнение (5) принимает вид (6) при переходе к новому базису:  $\tilde{\omega}_0^2 = \omega_0^2 - \omega_0^3$ ,  $\tilde{\omega}_0^3 = \omega_0^2 + \omega_0^3$ ,  $\tilde{\omega}_1^3 = \omega_1^3$ ,  $\tilde{\omega}_1^2 = \omega_1^2$ .



В новом базисе абсолютная точка  $A$  принимается за точку  $E_2$ . Некоторые виды комплексов в этом базисе изучены в [3].

По аналогии с комплексами в классических неевклидовых пространствах коэффициент  $K$  в уравнениях (6) и (5) назовём *кривизной* комплекса. При  $K = \text{const}$  комплексы (6) и (5) обозначим (6') и (5') и назовем их *комплексами постоянной кривизны*.

Комплексы (5'), (6') являются частными случаями комплекса (5), (6).

Для выяснения характеристического свойства комплекса (6) введём определение.

**Определение.** Точки прямой  $u$  комплекса, соответствующие в нормальной коллинеации точкам  $E_2$  и  $E_3$  абсолюта назовём *абсолютными точками* прямой комплекса.

На каждой прямой  $u$  комплекса имеются две абсолютные точки. Обозначим их  $M_2$  и  $M_3$ . Для комплекса (6) абсолютные точки  $M_2, M_3$  являются вершинами  $E_0, E_1$  подвижного репера. Так как вершины  $E_0, E_1$  подвижного репера сопряжены относительно абсолютной квадрики  $k_2$ , то имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** На каждой прямой комплекса (6) имеется пара сопряженных абсолютных точек. Комплекс (6) назовём *абсолютно-сопряженным*.

**Теорема 3.** Репер первого порядка для комплексов (6), (5), (6'), (5') является каноническим. Произвол существования комплексов (5), (6) — одна функция от трёх переменных, и одна функция от двух переменных для комплексов (5'), (6').

**Доказательство.** Дифференцируя внешним образом уравнение (4), получим следующее квадратичное уравнение:

$$(dK_2 + ((K_2)^2 - 1)\omega_0^1) \wedge \omega_1^2 + (dK_1 + (K + K_1K_2)\omega_0^1 + K_1(\omega_2^2 - \omega_3^3)) \wedge \omega_0^3 + \\ + (dK + K(\omega_2^2 - \omega_3^3) + (K_2K + K_1)\omega_0^1) \wedge \omega_1^3 = 0. \quad (7)$$

Разрешая уравнение (7) по лемме Картана, получим:

$$dK_2 + ((K_2)^2 - 1)\omega_0^1 = q_{11}\omega_1^2 + q_{12}\omega_0^3 + q_{13}\omega_1^3, \\ dK_1 + (K + K_1K_2)\omega_0^1 + K_1(\omega_2^2 - \omega_3^3) = q_{12}\omega_1^2 + q_{22}\omega_0^3 + q_{23}\omega_1^3, \\ dK + (K_2K + K_1)\omega_0^1 + K(\omega_2^2 - \omega_3^3) = q_{13}\omega_1^2 + q_{23}\omega_0^3 + q_{33}\omega_1^3. \quad (8)$$

Обозначая через  $\pi_i^j$  дифференциальные формы  $\omega_i^j$  при неподвижной прямой и учитывая (1), получим 3 уравнения относительно пяти дифференциальных форм  $\pi_0^1, \pi_3^3, dK, dK_1, dK_2$ , из которых при  $K_2 \neq \text{const}$  следует простейшее решение:

$$K_2 = \pi_0^1 = 0, \quad K_1 = 1, \quad \pi_3^3 = 0, \quad dK = 0, \quad (9)$$

а также частное решение при  $K_1 \neq \text{const}$ :

$$K_2 = K_1 = 0, \quad \pi_0^1 = \pi_3^3 = 0, \quad dK = 0. \quad (9')$$

Решения (9) и (9') задают соответственно комплексы (5) и (6). Из этих решений следует, что все дифференциальные формы комплексов (5) и (6) становятся главными, и репер первого порядка является каноническим, в том числе и при  $dK = 0$ .

Выясним произвол существования этих комплексов. Покажем выполнимость критерия Картана. Из того что имеем одно квадратичное уравнение (7), следует, что  $S_1 = 1$ .

Для комплексов (5), (6)  $q = 3$ , а учитывая, что  $S_1 \geq S_2 \geq S_3$ , получим  $S_1 = S_2 = S_3 = 1$  и число  $Q = S_1 + 2S_2 + 3S_3 = 6$ . Число  $N$ , равное числу независимых коэффициентов  $q_{ij}$  в уравнениях (8), также равно 6, т. е.  $N = Q$ . Критерий Картана выполняется. Так как  $S_3 = 1$ , то произвол существования комплексов (5), (6) — одна функция от трёх переменных.

Для комплексов (5'), (6') легко показать, что уравнения (8) зависимы, и поэтому  $q = 2$ , а  $Q = S_1 + 2S_2 = 3$ . Число  $N$  для этих комплексов также равно трём, так как 6 независимых коэффициентов  $q_{ij}$  удовлетворяют трём линейным условиям. Критерий Картана выполняется, комплексы (5'), (6') существуют с произволом в одну функцию от двух переменных. Теорема доказана.  $\square$



При доказательстве теоремы 3 мы исключили случай, когда коэффициент  $K_2$  в репере нулевого порядка является постоянным.

При  $K_2 = \text{const}$  уравнение комплекса (4) запишем в виде

$$\omega_1^3 = q\omega_0^2 + q_1\omega_1^2 + q_2\omega_0^3. \quad (10)$$

Уравнение (10) получается из уравнения (3) (при  $\alpha = 3$ ) перенумерованием индексов 0 и 1, т. е. комплекс (10) получается из комплекса (3) заменой вершин  $E_0 \leftrightarrow E_1$  в подвижном репере комплекса. Поэтому аналогично предыдущему уравнение (10) можно привести к одному из видов:  $\omega_1^3 = q\omega_0^2 + \omega_1^2$  или  $\omega_1^3 = q\omega_0^2$ .

В том случае, когда в репере нулевого порядка в уравнении комплекса (3) оба коэффициента  $K_1$  и  $K_2$  постоянны, т. е.  $dK_1 = dK_2 = 0$ , из уравнений (8) при неподвижной прямой получим (при  $(K_2)^2 \neq 1$ ):

$$dK = 0, \quad K_1 = 1, \quad \pi_0^1 = \pi_3^3 = 0. \quad (11)$$

Уравнение (3) принимает вид

$$\omega_0^2 = K\omega_1^3 + K_2\omega_1^2 + \omega_0^3, \quad K_2 = \text{const}. \quad (12)$$

Комплекс (12) существует с тем же произволом, что и комплекс (5), и репер первого порядка для него является каноническим.

В нормальной коллинеации, связанной с прямой комплекса (12), вершинам  $E_2, E_3$  соответствуют абсолютные точки  $M_2(1; -K_2; 0; 0)$ ,  $M_3(1; K; 0; 0)$ .

Так как  $K_2 = \text{const}$ , то на каждой прямой комплекса (12) имеется инвариантная на всем многообразии прямых комплекса абсолютная точка  $M_3$ , а при  $K = \text{const}$  — две инвариантные абсолютные точки:  $M_2$  и  $M_3$ .

Комплекс (12) при  $K = \text{const}$  назовём *абсолютно-инвариантным*, а при  $K \neq \text{const}$  — *абсолютно-полуинвариантным*.

Учитывая  $(E_0E_1M_1M_2) = -K_2/K$ , получим, что коэффициент  $K_2$  характеризует отклонение вершин репера  $E_0, E_1$  от абсолютных точек.

Число  $K_2/K$  назовём *второй кривизной комплекса* (12).

Для абсолютно-инвариантного комплекса обе кривизны постоянны.

При  $K_2 = \pm 1$  комплекс (12) имеет вид

$$\omega_0^2 = K\omega_1^3 \pm \omega_1^2 + \omega_0^3. \quad (13)$$

Для комплексов (13) уравнение (7) не зависит от  $\omega_1^2$ , поэтому все три коэффициента в первом уравнении системы (8) равны нулю, т. е.  $N = 3$ . Учитывая, что в системе (8) два линейно независимых уравнения, имеем  $q = 2$ , а  $Q = 3$ .

Комплекс (13) существует с произволом в одну функцию от двух переменных.

Выясним его строение. При  $K_2 = -1$   $f(E_2) = E^0(1; 1; 0; 0)$ , т. е. точка  $E^0$  является абсолютной точкой. Так как  $E^0$  описывает поверхность, являющуюся инвариантной плоскостью  $P_2^1$ , то комплекс (13) расслаивается согласно [4, с. 120] в двухпараметрическое множество пучков прямых с центрами в точках плоскости  $P_2^1$ .

При  $K_2 = 1$  имеем комплекс того же вида, центры пучков его принадлежат абсолютной плоскости  $P_2^2$ . Комплекс (13) является квазиспециальным [4, с. 120].

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 4.** *Существуют 5 типов комплексов ненулевой кривизны:*

- 1) комплекс общего вида;
- 2) абсолютно-сопряженный комплекс;
- 3) квазиспециальный комплекс;
- 4) абсолютно-полуинвариантный комплекс;
- 5) абсолютно-инвариантный комплекс.

*В каждом из трёх первых типов выделяются комплексы постоянной кривизны.*



## 2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ И ВЫРОЖДЕННЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ

Для комплексов, кривизна которых равна нулю для любой прямой,  $K_\alpha K_\beta^1 = 0$  при всех  $\beta \neq \alpha$ ,  $\alpha = 2, 3$ . Комплекс (2) в этом случае принимает один из видов:

$$K_\alpha \omega_0^\alpha = K_\beta \omega_0^\beta, \quad K_\alpha^1 \omega_1^\alpha = K_\beta^1 \omega_1^\beta, \quad K_\alpha \omega_0^\alpha = K_\beta^1 \omega_1^\alpha.$$

Сформулируем без доказательства следующую теорему.

**Теорема 5.** *Существуют три типа комплексов нулевой кривизны: специальный, тангенциально-вырожденный специальный, вырожденный специальный. Для комплексов первых двух типов существует канонический репер первого порядка. Канонический репер вырожденного специального комплекса не существует.*

Специальный комплекс состоит из прямых, касающихся некоторой поверхности  $V$ . Если поверхность  $V$  является тангенциально-вырожденной, то комплекс мы называем *тангенциально-вырожденным специальным*. Вырожденный специальный комплекс состоит из однопараметрического множества связок прямых, центры которых описывают некоторую кривую в абсолютной плоскости [5].

### Библиографический список

1. Киотина Г. В. Группа движений обобщенно-галилеева пространства // Вестн. Рязан. ГПУ. 2004. С. 117–126.
2. Розенфельд Б. А., Зацепина О. В., Стеганцева П. Г. Гиперкомплексы прямых в евклидовом и неевклидовом пространствах // Изв. вузов. Математика. 1990. № 3. С. 57–66.
3. Киотина Г. В. Комплексы прямых в бифлаговом пространстве  $\bar{F}_3^2$  // Труды вторых Колмогоровских чтений. Ярославль, 2004. С. 338–344.
4. Кованцов Н. И. Теория комплексов. Киев, 1963. 292 с.
5. Киотина Г. В., Зацепина О. В., Ромакина Л. Н. Специальные комплексы прямых в пространствах  $\bar{F}_3^2$ ,  ${}^1S_5$ ,  $B_3^n$  // Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры: тез. докл. международ. конф. Саратов, 2008. С. 85–86.

УДК 513.6

## ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ПРОСТРАНСТВ ТОЛЕРАНТНЫХ ПЕТЕЛЬ

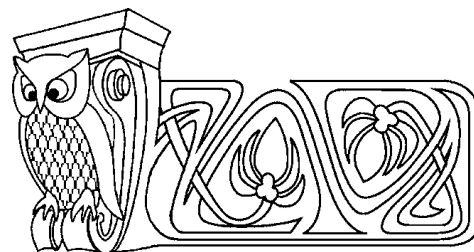
Е. В. Коробченко

Саратовский государственный университет,  
кафедра компьютерной алгебры и теории чисел.  
E-mail: KorobchenkoEV@mail.ru

В статье доказывается теорема об изоморфизме между гомотопическими группами исходного толерантного пространства и гомотопическими группами на единицу меньшей размерности пространства толерантных петель исходного пространства.

**Ключевые слова:** толерантное пространство, пространство толерантных петель, гомотопические группы толерантного пространства.

*Толерантное пространство* (Т-пространство), по определению Зимана [1], — это пара  $(X, \tau)$ , где  $X$  — множество, а  $\tau \subset X \times X$  — рефлексивное и симметричное отношение, называемое *отношением толерантности*. Отображение  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \theta)$  Т-пространств называется *толерантным* (Т-отображением), если из  $x_1 \tau x_2$  следует  $f(x_1) \theta f(x_2)$ . К настоящему времени имеется достаточно развитая гомологическая и гомотопическая теория Т-пространств [2].



Homotopy Groups of Space of Tolerant Loops.

E. V. Korobchenko

Saratov State University,  
Chair of Computer Algebra and the Theory of Numbers  
E-mail: KorobchenkoEV@mail.ru

In the article is proved the theorem about isomorphism between homotopy groups of initial tolerant space and homotopy groups with decremented by one dimension of space of tolerant loops.

**Key words:** tolerant space, space of tolerant loops, homotopy groups of tolerant space.



В гомотопической толерантной теории гомотопические параметры берутся из толерантных отрезков  $(I_m, \iota_m)$  длины  $m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ), в которых

$$I_m = \left\{ \frac{k}{m} \mid k = \overline{0, m} \right\}, \quad \frac{k}{m} \iota_m \frac{l}{m} \stackrel{df}{\iff} |k - l| \leq 1.$$

Произведение Т-отрезков для краткости будем обозначать  $(I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) = \left( \prod_{i=1}^n I_{m_i}, \prod_{i=1}^n \iota_{m_i} \right)$  и называть  $n$ -мерным толерантным кубом размера  $\overline{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \times^n \mathbb{N}$ .

Т-отображения  $f_0, f_1 : (X, \tau) \rightarrow (Y, \theta)$  называются *толерантно гомотопными относительно подмножества*  $A \subset X$ , что записывается в виде  $f_0 \sim f_1(\text{rel } A)$ , если существуют  $n \in \mathbb{N}$  и Т-отображение  $F : (X \times I_n, \tau \times \iota_n) \rightarrow (Y, \theta)$  такие, что

$$1) (\forall x \in X) F(x, 0) = f_0(x), F(x, 1) = f_1(x), \quad 2) (\forall x \in A)(\forall k = \overline{0, n}) F\left(x, \frac{k}{n}\right) = f_0(x).$$

Если  $n = 1$ , то Т-отображения  $f_0, f_1$  называются просто *толерантно гомотопными* и записываются в виде  $f_0 \approx f_1(\text{rel } A)$ , или  $f_0 \approx f_1$  при  $A = \emptyset$ .

Всякое толерантное отображение  $\omega_m : (I_m, \iota_m) \rightarrow (X, \tau)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , называется *толерантным путем (Т-путем)* в пространстве  $(X, \tau)$  длины  $m$ , соединяющим начало пути  $x_0 = \omega_m(0) \in X$  с концом пути  $x_m = \omega_m(1) \in X$ . Точки  $x_k = \omega_m(k/m)$ ,  $k = \overline{0, m}$ , называется *траекторией* толерантного пути  $\omega_m$ .

Обозначим через  $P(X, x_0)$  множество Т-путей в  $(X, \tau)$  с началом в точке  $x_0 \in X$ . Если  $\omega_m(0) = \omega_m(1) = x_0$ , то  $\omega_m$  называется *толерантной петлей (Т-петлей)* в точке  $x_0$ .

Обозначим через  $\Omega(X, x_0) = \{\omega_m \in P(X, x_0) \mid \omega_m(0) = \omega_m(1) = x_0\}$  подмножество Т-петель множества Т-путей в  $(X, \tau)$ . На множестве  $P(X)$  имеется обычная частичная операция  $*$ , сопоставляющая Т-путям  $\omega_{m_1} : (I_{m_1}, \iota_{m_1}) \rightarrow (X, \tau)$ ,  $\omega'_{m_2} : (I_{m_2}, \iota_{m_2}) \rightarrow (X, \tau)$ , удовлетворяющим условию  $\omega_{m_1}(1) = \omega'_{m_2}(0)$ , новый путь

$$\omega_{m_1} * \omega'_{m_2} : (I_{m_1+m_2}, \iota_{m_1+m_2}) \rightarrow (X, \tau),$$

задаваемый формулой

$$\omega_{m_1} * \omega'_{m_2} \left( \frac{k}{m_1+m_2} \right) = \begin{cases} \omega_{m_1}(k/m_1), & k = \overline{0, m_1}, \\ \omega'_{m_2}((k - m_1)/m_2), & k = \overline{m_1, m_1+m_2}. \end{cases}$$

**Определение 1.** Пусть  $\omega_{m_1}, \omega'_{m_2} \in P(X, x_0)$  — произвольные Т-пути пространства  $(X, \tau)$  с началом в точке  $x_0 \in X$  и пусть для определенности  $m_2 \geq m_1$ . Тогда Т-пути  $\omega_{m_1}$  и  $\omega'_{m_2}$  назовем  *$\varkappa$ -толерантными*, если выполняются следующие свойства:

1)  $\omega'_{m_2} = \varepsilon_{m_2-m_1} * \gamma'_{m_1}$ , где  $\varepsilon_{m_2-m_1}$  — постоянный путь длины  $m_2 - m_1$ :  $(\forall k = \overline{0, m_2 - m_1}) \varepsilon_{m_2-m_1}(k/(m_2 - m_1)) \equiv x_0$ , а  $\gamma'_{m_1}$  представляет собой отрезок пути  $\omega'_{m_2}$ :  $(\forall k = \overline{0, m_1}) \gamma'_{m_1}(k/m_1) = \omega'_{m_2}((k + m_2 - m_1)/m_2)$ ;

2)  $\omega_{m_1} \approx \gamma'_{m_1}$ .

При  $m_1 = m_2 = m$  постоянный путь  $\varepsilon_{m_2-m_1} = \varepsilon_0$  длины 0 является формальным объектом. Его траектория состоит из одной единственной точки  $x_0$ , и относительно операции  $*$  он ведет себя как нейтральный элемент, т. е.  $\varepsilon_0 * \gamma'_m = \gamma'_m = \omega'_m$ . Это означает, что согласно определению 1 имеет место правило:

$$\omega_m \varkappa \omega'_m \iff \omega_m \approx \omega'_m \iff [(\forall k, l = \overline{0, m}) |k - l| \leq 1 \Rightarrow \omega_m(k/m) \tau \omega'_m(l/m)].$$

Из определения 1 следует, что все постоянные пути с началом в точке  $x_0$  являются  $\varkappa$ -толерантными друг другу.

Назовем  $n$ -мерным толерантным сфероидом (Т-сфероидом) размера  $\overline{m}$  пространства  $(X, \tau)$  в точке  $x_0 \in X$  любое толерантное отображение  $\alpha_{\overline{m}} : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \rightarrow (X, \tau)$  такое, что  $\alpha_{\overline{m}}(\partial I_{\overline{m}}) = x_0$ , где  $\partial I_{\overline{m}} = \left\{ (k_i/m_i)_{i=1, \dots, n} \in I_{\overline{m}} \mid (\exists i = \overline{1, n}) k_i \in \{0, m_i\} \right\}$ .



Договоримся в дальнейшем записывать  $\overline{M} = (M_1, \dots, M_n) \geq \overline{m}$ , если  $M_i \geq m_i$  для всех  $i = \overline{1, n}$ . Для  $\overline{M} \geq \overline{m}$  определим продление  $\alpha_{\overline{M}, \overline{m}}$  сфероида  $\alpha_{\overline{m}}$ :

$$\alpha_{\overline{M}, \overline{m}} : (I_{\overline{M}}, \iota_{\overline{M}}) \rightarrow (X, \tau), \quad \alpha_{\overline{M}, \overline{m}} = \begin{cases} \alpha_{\overline{m}} \left( (k_i/m_i)_{i=\overline{1, n}} \right), & (\forall i = \overline{1, n}) k_i \leq m_i, \\ x_0, & (\exists i = \overline{1, n}) k_i \geq m_i. \end{cases}$$

**Определение 2.**  $n$ -мерные Т-сфероиды произвольного размера  $\alpha_{\overline{m}^{(1)}}$ ,  $\alpha'_{\overline{m}^{(2)}}$  пространства  $(X, \tau)$  в точке  $x_0$  назовем *толерантно гомотопными* и обозначим  $\alpha_{\overline{m}^{(1)}} \simeq \alpha'_{\overline{m}^{(2)}}$ , если существует  $\overline{M} \in \times^n \mathbb{N}$  такое, что  $\overline{M} \geq \overline{m}^{(j)}$ ,  $j = 1, 2$ , и имеет место толерантная гомотопия:

$$F : \alpha_{\overline{M}, \overline{m}^{(1)}} \sim \alpha'_{\overline{M}, \overline{m}^{(2)}} (\text{rel } \partial I_{\overline{M}}). \quad (1)$$

Классы эквивалентности толерантно гомотопных Т-сфероидов будем обозначать  $[\alpha_{\overline{m}}]$ , а множество классов —  $\pi_n(X, x_0)$ .

На множество  $n$ -мерных Т-сфероидов произвольного размера определим операцию  $*$ , сопоставив Т-сфероидам  $\alpha_{\overline{m}^{(1)}} : (I_{\overline{m}^{(1)}}, \iota_{\overline{m}^{(1)}}) \rightarrow (X, \tau)$ ,  $\beta_{\overline{m}^{(2)}} : (I_{\overline{m}^{(2)}}, \iota_{\overline{m}^{(2)}}) \rightarrow (X, \tau)$  Т-сфероид  $\alpha_{\overline{m}^{(1)}} * \beta_{\overline{m}^{(2)}} : (I_{\overline{m}^{(1)} + \overline{m}^{(2)}}, \iota_{\overline{m}^{(1)} + \overline{m}^{(2)}}) \rightarrow (X, \tau)$  такой, что для любого  $i = \overline{1, n}$  и всех  $k_i = 0$ ,  $m_i^{(1)} + m_i^{(2)}$  имеет место представление

$$(\alpha_{\overline{m}^{(1)}} * \beta_{\overline{m}^{(2)}}) \left( \left( \frac{k_i}{m_i^{(1)} + m_i^{(2)}} \right)_{i=\overline{1, n}} \right) = \begin{cases} \alpha_{\overline{m}^{(1)}} \left( (k_i/m_i^{(1)})_{i=\overline{1, n}} \right), & (\forall i = \overline{1, n}) k_i \leq m_i^{(1)}, \\ \beta_{\overline{m}^{(2)}} \left( ((k_i - m_i^{(1)})/m_i^{(2)})_{i=\overline{1, n}} \right), & (\forall i = \overline{1, n}) k_i \geq m_i^{(1)} \\ x_0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для Т-сфероидов  $\alpha_{\overline{m}}$  определяется двойное замедление  $\tilde{\alpha}_{\overline{m}} : (I_{2\overline{m}}, \iota_{2\overline{m}}) \rightarrow (X, \tau)$  формулой

$$\tilde{\alpha}_{\overline{m}} \left( \left( \frac{k_i}{2m_i} \right)_{i=\overline{1, n}} \right) = \alpha_{\overline{m}} \left( \left( \frac{1}{m_i} \left[ \frac{k_i}{2} \right] \right)_{i=\overline{1, n}} \right).$$

Такое двойное замедление имеет свойства (см. [3]), позволяющие доказать, что на множестве классов толерантно гомотопных  $n$ -мерных Т-сфероидов произвольного размера корректно определена операция

$$[\alpha_{\overline{m}^{(1)}}] * [\beta_{\overline{m}^{(2)}}] = [\alpha_{\overline{m}^{(1)}} * \beta_{\overline{m}^{(2)}}], \quad (2)$$

превращающая множество  $\pi_n(X, x_0)$  в группу, которая называется  $n$ -й гомотопической группой Т-пространства. Нейтральным элементом группы  $\pi_n(X, x_0)$  будет класс  $[\varepsilon_{\overline{m}}^n]$ , где  $\varepsilon_{\overline{m}}^n \equiv x_0$ . Операцию, определенную формулой (2) при условии  $m_i^{(1)} = m_i^{(2)}$ , можно задать другой формулой

$$[\alpha_{\overline{m}^{(1)}}] * [\beta_{\overline{m}^{(2)}}] = [\gamma_{(m_1^{(1)}+m_1^{(2)}), \dots, m_l^{(1)}, \dots, m_n^{(1)}+m_n^{(2)}}^{(l)}], \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{(m_1^{(1)}+m_1^{(2)}), \dots, m_l^{(1)}, \dots, m_n^{(1)}+m_n^{(2)}}^{(l)} \left( \frac{k_1}{m_1^{(1)} + m_1^{(2)}}, \dots, \frac{k_l}{m_l^{(1)}}, \dots, \frac{k_n}{m_n^{(1)} + m_n^{(2)}} \right) &= \alpha_{\overline{m}^{(1)}}^{s(l, k_l)} * \beta_{\overline{m}^{(2)}}^{s(l, k_l)}, \\ \alpha_{\overline{m}^{(1)}}^{s(l, k_l)} : I_{m_1^{(1)}} \times \dots \times I_{m_{l-1}^{(1)}} \times I_{m_{l+1}^{(1)}} \times \dots \times I_{m_n^{(1)}} &\rightarrow X, \\ \alpha_{\overline{m}^{(1)}}^{s(l, k_l)} \left( \frac{k_1}{m_1^{(1)}}, \dots, \frac{k_{l-1}}{m_{l-1}^{(1)}}, \frac{k_{l+1}}{m_{l+1}^{(1)}}, \dots, \frac{k_n}{m_n^{(1)}} \right) &= \alpha_{\overline{m}^{(1)}} \left( \frac{k_1}{m_1^{(1)}}, \dots, \frac{k_l}{m_l^{(1)}}, \dots, \frac{k_n}{m_n^{(1)}} \right), \\ \beta_{\overline{m}^{(2)}}^{s(l, k_l)} : I_{m_1^{(1)}} \times \dots \times I_{m_{l-1}^{(1)}} \times I_{m_{l+1}^{(1)}} \times \dots \times I_{m_n^{(1)}} &\rightarrow X, \\ \beta_{\overline{m}^{(2)}}^{s(l, k_l)} \left( \frac{k_1}{m_1^{(2)}}, \dots, \frac{k_{l-1}}{m_{l-1}^{(2)}}, \frac{k_{l+1}}{m_{l+1}^{(2)}}, \dots, \frac{k_n}{m_n^{(2)}} \right) &= \beta_{\overline{m}^{(2)}} \left( \frac{k_1}{m_1^{(2)}}, \dots, \frac{k_l}{m_l^{(2)}}, \dots, \frac{k_n}{m_n^{(2)}} \right). \end{aligned}$$



**Теорема 1.** Пусть  $(X, \tau)$  — произвольное толерантное пространство с отмеченной точкой  $x_0 \in X$ , пусть  $(\Omega(X, x_0), \varkappa)$  — пространство толерантных петель пространства  $(X, \tau)$  с отмеченной петлей  $\varepsilon_1 \in \Omega(X, x_0)$ . Тогда для каждого натурального  $n \geq 2$  имеется изоморфизм

$$\psi_n : \pi_n(X, x_0) \cong \pi_{n-1}(\Omega(X, x_0), \varepsilon_1).$$

**Доказательство.** Рассмотрим произвольный сфероид  $\alpha_{\overline{m}'} : (I_{\overline{m}'}, t_{\overline{m}'}) \rightarrow (\Omega(X, x_0), \varkappa)$ ,  $\alpha_{\overline{m}'}(\partial I_{\overline{m}'}) = \varepsilon_1$ ,  $\alpha_{\overline{m}'}^{(\overline{k}')} = \alpha_{\overline{m}'} \left( \frac{k_1}{m_1}, \dots, \frac{k_{n-1}}{m_{n-1}} \right)$ , где  $\overline{k}' = (k_1, \dots, k_{n-1})$ ,  $\overline{m}' = (m_1, \dots, m_{n-1})$ . Обозначим через  $d^{(\overline{k}')}$  длину петли  $\alpha_{\overline{m}'}^{(\overline{k}')}$ . Возьмем максимальную длину всех петель  $m_n = \max_{\overline{k}'} d^{(\overline{k}'})$ .

Определим новое отображение  $\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'}) : I_{\overline{m}} \rightarrow X$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{m} &= (\overline{m}', m_n), \quad \overline{k} = (\overline{k}', k_n), \quad k_n = \overline{0, m_n}, \\ \varphi_n^{(\overline{k})}(\alpha_{\overline{m}'}) &= \varphi_n(\alpha_{\overline{m}'}) \left( \frac{k_1}{m_1}, \dots, \frac{k_{n-1}}{m_{n-1}}, \frac{k_n}{m_n} \right) = \begin{cases} \left( \alpha_{\overline{m}'}^{(\overline{k}')} \right)^{-1} (k_n/m_n), & 0 \leq k_n \leq d^{(\overline{k}')}, \\ x_0, & k_n \geq d^{(\overline{k}')}. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Покажем, что (4) определяет  $n$ -мерный сфероид в пространстве  $(X, \tau)$ .

Возьмем  $\overline{k} = (\underbrace{k_1, \dots, k_{n-1}}_{\overline{k}'}, k_n)$ ,  $\overline{l} = (\underbrace{l_1, \dots, l_{n-1}}_{\overline{l}'}, l_n)$  такие, чтобы для всех  $i = \overline{1, n}$  имело место неравенство  $|k_i - l_i| \leq 1$ . Необходимо показать, что

$$\varphi_n^{\overline{k}}(\alpha_{\overline{m}'}) \tau \varphi_n^{\overline{l}}(\alpha_{\overline{m}'}), \quad (5)$$

$$\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'}) (\partial I_{\overline{m}}) = x_0. \quad (6)$$

Так как  $\alpha_{\overline{m}'}$  — сфероид в пространстве  $(\Omega(X, x_0), \varkappa)$ , для  $\overline{k}'$  и  $\overline{l}'$  имеем  $\alpha_{\overline{m}'}^{(\overline{k}')} \varkappa \alpha_{\overline{m}'}^{(\overline{l}'})$ . По определению 1 это означает, в предположении  $d^{(\overline{k}')} \geq d^{(\overline{l}'})$ , что

$$\alpha_{\overline{m}'}^{(\overline{k}')} = \varepsilon_{d^{(\overline{k}')} - d^{(\overline{l}'})} * \gamma_{d^{(\overline{l}'})}, \quad \alpha_{\overline{m}'}^{(\overline{l}'}) \approx \gamma_{d^{(\overline{l}'})}.$$

$\varepsilon_{m_n - d^{(\overline{k}'})} * \alpha_{\overline{m}'}^{(\overline{k}')} = [\varphi_n^{\overline{k}}(\alpha_{\overline{m}'})]^{-1}$  и  $\varepsilon_{m_n - d^{(\overline{l}'})} * \alpha_{\overline{m}'}^{(\overline{l}'}) = [\varphi_n^{\overline{l}}(\alpha_{\overline{m}'})]^{-1}$  — два просто толерантно гомотопных  $\tau$ -пути. Тогда  $\varphi_n^{(k_1, \dots, k_{n-1}, k_n)}(\alpha_{\overline{m}'})$  и  $\varphi_n^{(l_1, \dots, l_{n-1}, l_n)}(\alpha_{\overline{m}'})$  представляют собой  $\tau$ -толерантные точки этих путей с толерантными аргументами  $\frac{k_n}{m_n} \tau_{m_n} \frac{l_n}{m_n}$  при условии  $\overline{k}' \tau_{m_n} \overline{l}'$ . Это доказывает (5). Свойство (6) следует из (4) и того факта, что для сфероида  $\alpha_{\overline{m}'}(\partial I_{\overline{m}'}) = \varepsilon_1$ .

Покажем, что отображение  $\psi_n : \pi_{n-1}(\Omega(X, x_0)) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ , задаваемое формулой

$$\psi_n([\alpha_{\overline{m}'}]) = [\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'})], \quad (7)$$

где  $\alpha_{\overline{m}'}$  — произвольный сфероид в  $\Omega(X, x_0)$ , определенно корректно и является изоморфизмом групп  $\psi_n : \pi_{n-1}(\Omega(X, x_0)) \cong \pi_n(X, x_0)$ .

Корректность (7) означает, что для толерантных сфероидов  $\alpha_{\overline{m}'(1)} \simeq \overline{\alpha}_{\overline{m}'(2)}$  имеет место

$$\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'(1)}) \simeq \varphi_n(\overline{\alpha}_{\overline{m}'(2)}). \quad (8)$$

Согласно определению 2 для сфероидов  $\alpha_{\overline{m}'(1)}$  и  $\overline{\alpha}_{\overline{m}'(2)}$  существуют  $\overline{M}' \geq \overline{m}'^{(j)}$ ,  $j = 1, 2$ , такие, что  $\alpha_{\overline{M}', \overline{m}'(1)} \sim \overline{\alpha}_{\overline{M}', \overline{m}'(2)}(\text{rel } \partial I_{\overline{M}'})$ . Достаточно ограничиться рассмотрением простой толерантной гомотопии

$$\alpha_{\overline{M}', \overline{m}'(1)} \approx \overline{\alpha}_{\overline{M}', \overline{m}'(2)}(\text{rel } \partial I_{\overline{M}'}). \quad (9)$$

Из формулы (4) следует

$$\varphi_n(\alpha_{\overline{M}', \overline{m}'(1)}) = (\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'(1)}))_{\overline{M}', \overline{m}'(1)}. \quad (10)$$

Поэтому для доказательства (8) достаточно показать, что

$$\varphi_n(\alpha_{\overline{M}', \overline{m}'(1)}) \approx \varphi_n(\overline{\alpha}_{\overline{M}', \overline{m}'(2)})(\text{rel } \partial I_{\overline{M}'}), \quad \overline{M} = (\overline{M}', m_n). \quad (11)$$





Формула (9) означает, что для всех  $\vec{k}' \iota_{\vec{M}'} \vec{l}'$  справедливо  $\alpha_{\vec{M}', \vec{m}'(1)}^{(\vec{k}')} \approx \bar{\alpha}_{\vec{M}', \vec{m}'(2)}^{(\vec{l}')}$ . Тогда, используя рассуждения, приведенные выше (см. доказательство свойства (6)), получаем, что для всех  $\vec{k}' = (k_1, \dots, k_{n-1}, k_n)$  и всех  $\vec{l}' = (l_1, \dots, l_{n-1}, l_n)$ , где  $|k_i - l_i| \leq 1$  при любом  $i = \overline{1, n}$ , справедливо  $\varphi_n^{(\vec{k}')}(\alpha_{\vec{M}', \vec{m}'(1)}) \tau \varphi_n^{(\vec{l}')}(\bar{\alpha}_{\vec{M}', \vec{m}'(2)})$ , что и доказывает (11).

Докажем гомоморфность  $\psi_n$ . Обозначим  $M_n = \max\{m_n^{(1)}, m_n^{(2)}\}$ . Предположим, что  $M_n = m_n^{(2)}$ . Тогда, используя (4), (7), (10) и (2), (3), получаем:

$$\begin{aligned} \psi_n([\alpha_{\vec{m}'(1)}] * [\bar{\alpha}_{\vec{m}'(2)}]) &= [\varphi_n(\alpha_{\vec{m}'(1)} * \bar{\alpha}_{\vec{m}'(2)})] = [\varphi_n(\alpha_{\vec{m}'(1)})_{(\vec{m}'(1), M_n), \vec{m}'} * \varphi_n(\bar{\alpha}_{\vec{m}'(2)})] = \\ &= [\varphi_n(\alpha_{\vec{m}'(1)})_{(\vec{m}'(1), M_n), \vec{m}'}] * [\varphi_n(\bar{\alpha}_{\vec{m}'(2)})] = [\varphi_n(\alpha_{\vec{m}'(1)})] * [\varphi_n(\bar{\alpha}_{\vec{m}'(2)})] = \psi_n([\alpha_{\vec{m}'(1)}]) * \psi_n([\bar{\alpha}_{\vec{m}'(2)}]). \end{aligned}$$

Для доказательства сюръективности  $\psi_n$  возьмем произвольный элемент  $[\beta_{\vec{m}}] \in \pi_n(X, x_0)$ . Для построения прообраза этого элемента при отображении  $\psi_n$  определим сначала отображение  $\chi'_{n-1}(\beta_{\vec{m}}) : I_{\vec{m}'} \rightarrow \Omega(X, x_0)$  следующей формулой:

$$(\chi'_{n-1}(\beta_{\vec{m}}))^{(\vec{k}')} \left( \frac{k_n}{m_n} \right) = (\beta_{\vec{m}})^{-1} \left( \vec{k}', \frac{k_n}{m_n} \right), \quad (12)$$

$$\vec{m}' = (m_1, \dots, m_{n-1}), \quad \vec{k}' = (k_1, \dots, k_{n-1}), \quad k_n = \overline{0, m_n}.$$

Так как  $\beta_{\vec{m}}$  толерантно по каждому аргументу, то из (12) следует, что для любого  $\vec{k}'$  путь  $(\chi'_{n-1}(\beta_{\vec{m}}))^{(\vec{k}')}$  является толерантным в  $X$ . Ввиду того что  $\beta_{\vec{m}} - T$ -сфероид и  $(\vec{k}', 0), (\vec{k}', 1) \in \partial I_{\vec{m}'}$ , получаем равенства  $(\chi'_{n-1}(\beta_{\vec{m}}))^{(\vec{k}')} (0) = (\chi'_{n-1}(\beta_{\vec{m}}))^{(\vec{k}')} (1) = x_0$ . Таким образом, в любой точке  $\vec{k}'$  значение  $(\chi'_{n-1}(\beta_{\vec{m}}))^{(\vec{k}')}$  представляет собой толерантную петлю с вершиной в  $x_0$ .

Далее покажем, что  $\chi'_{n-1}(\beta_{\vec{m}}) -$  толерантное отображение, т. е. для всех  $\vec{k}' \iota_{\vec{m}'} \vec{l}'$  справедливо

$$(\chi'_{n-1}(\beta_{\vec{m}}))^{(\vec{k}')} \varkappa (\chi'_{n-1}(\beta_{\vec{m}}))^{(\vec{l}')} \quad (13)$$

Соотношение (13) означает, что для толерантных  $k_n \iota_n l_n$

$$(\chi'_{n-1}(\beta_{\vec{m}}))^{(\vec{k}')} \left( \frac{k_n}{m_n} \right) \tau (\chi'_{n-1}(\beta_{\vec{m}}))^{(\vec{l}')} \left( \frac{l_n}{m_n} \right). \quad (14)$$

Используя определение  $\chi'_{n-1}$ , соотношение (14) можно переписать в виде

$$(\beta_{\vec{m}})^{-1} \left( \vec{k}', \frac{k_n}{m_n} \right) \tau (\beta_{\vec{m}})^{-1} \left( \vec{l}', \frac{l_n}{m_n} \right). \quad (15)$$

Справедливость формулы (15) следует из толерантности отображения  $\beta_{\vec{m}}$ . Таким образом,  $\chi'_{n-1}(\beta_{\vec{m}}) -$  толерантное отображение, но  $\chi'_{n-1}(\beta_{\vec{m}})$  не является сфероидом, так как отсутствует необходимое условие на границе. Для того чтобы выполнить это условие, строим сфероид  $\chi_{n-1}(\beta_{\vec{m}}) : I_{(m'_1+2, m'_2+2, \dots, m'_{n-1}+2)} \rightarrow \Omega(X, x_0)$ , определение которого, чтобы избежать громоздкости записи, представлено графически на рис. 1 ( $n = 2$ ).

В результате имеем толерантный сфероид  $\chi_{n-1}(\beta_{\vec{m}})$  в  $\Omega(X, x_0)$ . На рис. 2 изображены очевидные толерантные гомотопии сфероидов (см. [3]).

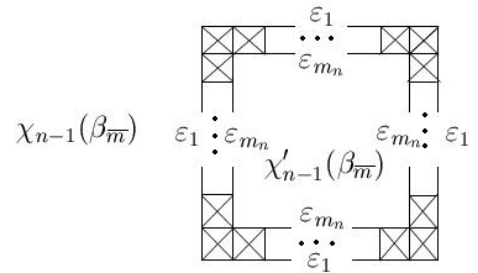


Рис. 1. Определение сфероида  $\chi_{n-1}(\beta_{\vec{m}})$

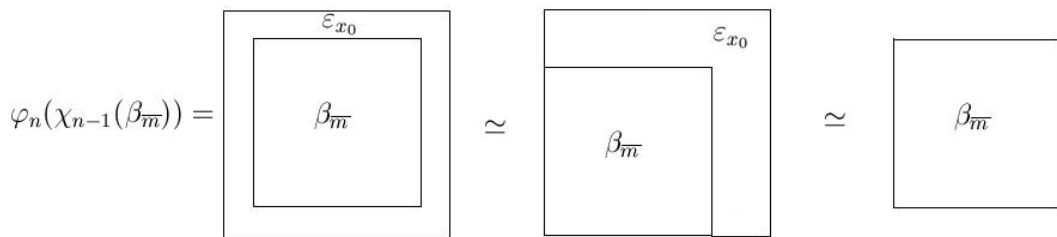


Рис. 2. Гомотопия  $\varphi_n(\chi_{n-1}(\beta_{\vec{m}})) \simeq \beta_{\vec{m}}$



Эти гомотопии показывают, что  $\psi_n([\chi_{n-1}(\beta_{\overline{m}})]) = [\varphi_n(\chi_{n-1}(\beta_{\overline{m}}))] = [\beta_{\overline{m}}]$ . Таким образом, сюръективность отображения  $\psi_n$  доказана.

Для доказательства инъективности  $\psi_n$  предположим, что  $\psi_n([\alpha_{\overline{m}'}]) = [\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'})] = [\varepsilon_{\overline{m}}^n]$ . Следовательно,  $\beta_{\overline{m}} = \varphi_n(\alpha_{\overline{m}'}) \simeq \varepsilon_{\overline{m}}^n$ . Последнее согласно определению 2 означает, что существует  $\overline{M} \in \times^n \mathbb{N}$  такое, что  $(\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'}))_{\overline{M}, \overline{m}} \sim \varepsilon_{\overline{M}}^n(\text{rel } \partial I_{\overline{M}})$ , что, в свою очередь, означает наличие цепочки просто гомотопных толерантных сфероидов:

$$(\varphi_n(\alpha_{\overline{m}'}))_{\overline{M}, \overline{m}} = {}^{(0)}\beta_{\overline{M}, \overline{m}} \approx {}^{(1)}\beta_{\overline{M}, \overline{m}} \approx \dots \approx {}^{(t)}\beta_{\overline{M}, \overline{m}} = \varepsilon_{\overline{M}}^n. \quad (16)$$

Эти сфероиды определяют цепочку сфероидов в  $\Omega(X)$ ,  $\chi_{n-1}({}^{(j)}\beta_{\overline{M}, \overline{m}})$ ,  $j = \overline{0, t}$ . Из (16) и определения  $\chi_{n-1}$  непосредственной проверкой получаем:

$$\alpha_{\overline{M}', \overline{m}'} = \chi_{n-1}({}^{(0)}\beta_{\overline{M}, \overline{m}}) \approx \chi_{n-1}({}^{(1)}\beta_{\overline{M}, \overline{m}}) \approx \dots \approx \chi_{n-1}({}^{(t)}\beta_{\overline{M}, \overline{m}}) = (\varepsilon_{\varepsilon_1})_{\overline{M}}^n.$$

Это означает, что  $[\alpha_{\overline{m}'}] = [(\varepsilon_{\varepsilon_1})^n]$ . Таким образом, инъективность  $\psi_n$  доказана.

### Библиографический список

1. Zeeman E. C. The topology of the brain and visual perception // The topology of 3-manifolds and related topics. New Jersey, 1962. P. 240–256.
2. Небалуев С. И. Гомологическая теория толерантных пространств: учеб. пособие. Саратов, 2006. 111 с.
3. Небалуев С. И. Высшие гомотопические группы толерантных пространств // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: межвуз. сб. науч. тр. Саратов, 2003. Вып. 2. С. 15–30.

УДК 517.984

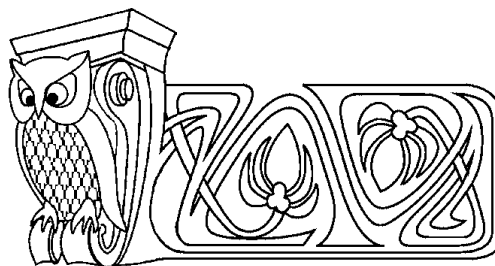
## ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА А. А. ДОРОДНИЦЫНА ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ НА СЛУЧАЙ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Е. М. Малек

Магнитогорский государственный технический университет, кафедра математики  
E-mail: emaleko@rambler.ru

Пусть  $A$  — самосопряженный дискретный оператор с простым спектром, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве  $\mathbb{H}$  и имеющий там ядерную резольвенту,  $B$  — самосопряженный и ограниченный в  $\mathbb{H}$  оператор. Тогда можно подобрать такое  $\varepsilon > 0$ , что собственные числа и собственные функции возмущенного оператора  $A + \varepsilon B$  будут вычисляться по методу А. А. Дородницына.

**Ключевые слова:** гильбертово пространство, возмущенный оператор, спектр.



Generalization of Method A. A. Dorodnicyn Close Calculation of Eigenvalues and Eigenvectors of Symmetric Matrices on Case of Self-Conjugate Discrete Operators

E. M. Maleko

Magnitogorsk State Technical University,  
Chair of Mathematics  
E-mail: emaleko@rambler.ru

Let the discrete self-conjugate operator  $A$  operates in separable Hilbert space  $\mathbb{H}$  and has the kernel resolvent with simple spectrum. Self-conjugate and limited operator  $B$  operates also in  $\mathbb{H}$ . Then it is possible to find such number  $\varepsilon > 0$ , that eigenvalues and eigenfunctions of the perturbation operator  $A + \varepsilon B$  will be calculated on a method of Dorodnicyn.

**Key words:** Hilbert space, perturbation operator, spectrum.

Часто при решении краевых задач важно знать не только их собственные числа, но и собственные функции. А. А. Дородницын разработал [1, с. 180–181] метод вычисления собственных чисел и векторов матриц вида

$$C(\varepsilon) = A + \varepsilon B,$$

где  $A, B, C(\varepsilon)$  — симметричные квадратные матрицы размера  $n \times n$ ,  $\varepsilon > 0$  — некоторое число. Собственные числа  $\lambda_i = \lambda_i(0)$  и вектора  $x_i = x_i(0)$  матрицы  $A$  предполагаются известными.



Метод заключается в сведении системы уравнений

$$(A + \varepsilon B)x_i(\varepsilon) = \lambda_i(\varepsilon)x_i(\varepsilon), \quad i = \overline{1, n},$$

на вычисление собственных чисел  $\lambda_i(\varepsilon)$  и векторов  $x_i(\varepsilon)$  к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных  $\lambda_i(\varepsilon)$  и  $x_i(\varepsilon)$ . Систему ОДУ можно решать любыми из известных методов и, в частности, численными методами, причем в [1, с. 180–181] автор продемонстрировал применение метода Эйлера и его модификации. Возникает естественный интерес к возможности обобщения данного подхода с конечномерного на бесконечномерный случай, то есть об его использовании для нахождения собственных чисел и собственных функций самосопряженных дискретных операторов [1, с. 180–181].

## 1. МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЕРВЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ САМОСOPЯЖЕННЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть  $A$  — самосопряженный дискретный оператор с простым спектром, который действует в действительном сепарабельном гильбертовом пространстве (СГП)  $\mathbb{H}$  и имеет там ядерную резольвенту,  $B$  — ограниченный, самосопряженный оператор в  $\mathbb{H}$  и такой, что существуют  $\varepsilon_0 > 0$  и класс операторов

$$\mathfrak{C}_{\varepsilon_0} := \{C(\varepsilon) := A + \varepsilon B \mid 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}, \quad (1)$$

где  $C(\varepsilon)$  — самосопряженный дискретный оператор с простым спектром.

Будем предполагать, что известны собственные значения  $\lambda_i = \lambda_i(0)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , и соответствующие собственные функции  $x_i = x_i(0)$  оператора  $A$ , причем числа  $\lambda_i$  занумерованы по возрастанию их модулей. Собственные функции  $x_i$  обладают свойством  $(x_i, x_j) = \delta_{i,j}$ ,  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $\mathbb{H}$ ,  $\delta_{i,j}$  — символ Кронекера, а их совокупность  $(x_i)_{i=1}^{\infty}$  пусть образует в  $\mathbb{H}$  ортонормированный базис (ОНБ). Далее покажем, что если  $\lambda_i(\varepsilon) \in \mathbb{C}^1([0, \varepsilon_0])$  и  $x_i(\varepsilon) \in \mathfrak{F}([0, \varepsilon_0], \mathbb{H})$  действуют как функции параметра  $\varepsilon$ , то для вычисления собственных чисел  $\lambda_i(\varepsilon)$  и собственных функций  $x_i(\varepsilon)$  оператора  $C(\varepsilon) \in \mathfrak{C}_{\varepsilon_0}$  применим метод А. А. Дородницына [1, с. 180–181]. Под множеством  $\mathfrak{F}([0, \varepsilon_0], \mathbb{H})$  будем понимать совокупность всех функций  $y(\cdot)$ , дифференцируемых на отрезке  $[0, \varepsilon_0]$  по Фреше со значениями в  $\mathbb{H}$  и таких, что для любого  $v \in [0, \varepsilon_0]$

$$\lim_{w \rightarrow v} \left\| \frac{dy(w)}{d\varepsilon} - \frac{dy(v)}{d\varepsilon} \right\|_{\mathbb{H}} \rightarrow 0, \quad A \frac{dy(v)}{d\varepsilon} = \frac{dAy(v)}{d\varepsilon}, \quad B \frac{dy(v)}{d\varepsilon} = \frac{dBy(v)}{d\varepsilon},$$

где  $\|\cdot\|$  — норма в  $\mathbb{H}$ .

Приведем суть метода А. А. Дородницына [1, с. 180–181]: «... Один из методов определения собственных чисел и векторов основан на теории возмущений, т. е. разложении этих величин в ряды по степеням  $\varepsilon$ . Однако применение теории возмущений ограничивается достаточно малыми значениями  $\varepsilon$ , так как при некоторых значениях  $\varepsilon$  ряды становятся расходящимися, хотя на пути от  $\varepsilon = 0$  до данного значения  $\varepsilon$  собственные числа и векторы, рассматриваемые как функции параметра  $\varepsilon$ , не имеют особенностей. Но даже и в этом случае, если ряд сходится, вычисление большого числа членов может оказаться очень трудоемким.

Уравнению для собственных чисел и собственных векторов можно сопоставить эквивалентную систему дифференциальных уравнений. . . ».

Приведем метод для случая произвольного оператора  $C(\varepsilon) \in \mathfrak{C}_{\varepsilon_0}$ ,  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ . Рассмотрим для любого фиксированного  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  бесконечную систему уравнений на собственные значения  $\lambda_i(\varepsilon)$  и нормированные собственные функции  $x_i(\varepsilon)$ :

$$(A + \varepsilon B)x_i(\varepsilon) = \lambda_i(\varepsilon)x_i(\varepsilon), \quad (x_i(\varepsilon), x_i(\varepsilon)) = 1, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Дифференцируя (2) по  $\varepsilon$ , будем иметь

$$(A + \varepsilon B) \frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon} + Bx_i(\varepsilon) = \lambda_i(\varepsilon) \frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon} + x_i(\varepsilon) \frac{d\lambda_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}, \quad \left( \frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}, x_i(\varepsilon) \right) = 0. \quad (3)$$



Для произвольно взятого  $i \in \mathbb{N}$  получаем из (3) бесконечную систему равенств

$$\left( (A + \varepsilon B) \frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon} + Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon) \right) = \left( \lambda_i(\varepsilon) \frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon} + x_i(\varepsilon) \frac{d\lambda_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}, x_k(\varepsilon) \right), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Отсюда имеем

$$\left( \frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}, \lambda_k(\varepsilon)x_k(\varepsilon) \right) + (Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon)) = \lambda_i(\varepsilon) \left( \frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}, x_k(\varepsilon) \right) + (x_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon)) \frac{d\lambda_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}, \quad (4)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Из (4) для  $k = i$  получаем

$$\frac{d\lambda_i(\varepsilon)}{d\varepsilon} = (Bx_i(\varepsilon), x_i(\varepsilon)), \quad i \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

а для  $k \neq i$

$$(Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon)) = (\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon)) \left( \frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}, x_k(\varepsilon) \right) + (x_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon)) \frac{d\lambda_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}. \quad (6)$$

Поделим (6) на  $(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon))$  и умножим на  $x_k(\varepsilon)$ :

$$\frac{(Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon))}{(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon))} x_k(\varepsilon) = \left( \frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}, x_k(\varepsilon) \right) x_k(\varepsilon) + x_k(\varepsilon) \frac{(x_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon))}{(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon))} \frac{d\lambda_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}. \quad (7)$$

Подставляем в (7) вместо  $d\lambda_i(\varepsilon)/d\varepsilon$  правую часть из (5):

$$\frac{(Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon))}{(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon))} x_k(\varepsilon) = \left( \frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}, x_k(\varepsilon) \right) x_k(\varepsilon) + \frac{(Bx_i(\varepsilon), (x_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon))x_i(\varepsilon))}{(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon))} x_k(\varepsilon),$$

откуда

$$x_k(\varepsilon) \frac{(Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon)) - (x_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon))x_i(\varepsilon)}{(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon))} = \left( \frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}, x_k(\varepsilon) \right) x_k(\varepsilon). \quad (8)$$

Суммируем (8) по  $k$  от 1 до  $\infty$ , исключая случай  $k = i$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon)) - (x_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon))x_i(\varepsilon)}{(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon))} x_k(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}, x_k(\varepsilon) \right) x_k(\varepsilon)$$

(штрих (') означает, что  $k \neq i$ ). Учитывая, что скалярное произведение  $(dx_i(\varepsilon)/d\varepsilon, x_i(\varepsilon))$  равно нулю для любого натурального  $i$  совместно с базисностью в  $\mathbb{H}$  набора  $\{x_k(\varepsilon)\}$ , из последнего равенства получаем:

$$\frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon)) - (x_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon))x_i(\varepsilon)}{(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon))} x_k(\varepsilon). \quad (9)$$

Докажем базисность набора  $\{x_k(\varepsilon)\}$  в  $\mathbb{H}$ .

**Случай I.** Для  $k \neq i$  из формулы (6), поменяв местами  $i$  и  $k$ , имеем

$$(Bx_k(\varepsilon), x_i(\varepsilon)) = (\lambda_k(\varepsilon) - \lambda_i(\varepsilon)) \left( \frac{dx_k(\varepsilon)}{d\varepsilon}, x_i(\varepsilon) \right) + (x_k(\varepsilon), x_i(\varepsilon)) \frac{d\lambda_k(\varepsilon)}{d\varepsilon}. \quad (10)$$

Из самосопряженности оператора  $B$  следует равенство

$$(Bx_k(\varepsilon), x_i(\varepsilon)) = (x_k(\varepsilon), Bx_i(\varepsilon)),$$

а из действительности СГП  $\mathbb{H}$  —

$$(x_k(\varepsilon), Bx_i(\varepsilon)) = (Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon)).$$

Тогда из (10) с учетом последних двух равенств получим:

$$(Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon)) = (\lambda_k(\varepsilon) - \lambda_i(\varepsilon)) \left( \frac{dx_k(\varepsilon)}{d\varepsilon}, x_i(\varepsilon) \right) + (x_k(\varepsilon), x_i(\varepsilon)) \frac{d\lambda_k(\varepsilon)}{d\varepsilon}. \quad (11)$$



Вычтем из равенства (11) равенство (6), используя свойство скалярного произведения  $(a, b) = (b, a)$  в действительном СГП  $\mathbb{H}$ :

$$0 = (\lambda_k(\varepsilon) - \lambda_i(\varepsilon)) \frac{d}{d\varepsilon} (x_k(\varepsilon), x_i(\varepsilon)) + (x_k(\varepsilon), x_i(\varepsilon)) \left( \frac{d\lambda_k(\varepsilon)}{d\varepsilon} - \frac{d\lambda_i(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right),$$

откуда

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} \left[ (\lambda_k(\varepsilon) - \lambda_i(\varepsilon)) (x_k(\varepsilon), x_i(\varepsilon)) \right].$$

Проинтегрируем последнее дифференциальное равенство по всему отрезку  $[0, \varepsilon_0]$ :

$$(\lambda_k(\varepsilon) - \lambda_i(\varepsilon)) (x_k(\varepsilon), x_i(\varepsilon)) = C.$$

Учитывая, что  $(x_k(0), x_i(0)) = \delta_{ki}$ ,  $(\lambda_k(\varepsilon) - \lambda_i(\varepsilon)) \neq 0$ ,  $k \neq i$ ,  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ , получим  $C = 0$ . Поэтому для любого  $\varepsilon$  из  $[0, \varepsilon_0]$  выполняется равенство  $(x_k(\varepsilon), x_i(\varepsilon)) = 0$ ,  $k \neq i$ .

**Случай II.** Для  $k = i$  и  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  из (2), (3) имеем систему

$$\begin{cases} 0 = \frac{d}{d\varepsilon} (x_i(\varepsilon), x_i(\varepsilon)), \\ (x_i(0), x_i(0)) = 1. \end{cases}$$

Интегрируя дифференциальное равенство системы по всему отрезку  $[0, \varepsilon_0]$ , получим  $(x_i(\varepsilon), x_i(\varepsilon)) = C_1$ , откуда с учетом второго равенства системы  $C_1 = 1$ . Поэтому  $(x_i(\varepsilon), x_i(\varepsilon)) = 1$  для любого  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  и  $i \in \mathbb{N}$ . Таким образом,  $(x_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon)) = \delta_{ik}$ ,  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ , в результате (9) переписывается в виде

$$\frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon))}{(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon))} x_k(\varepsilon), \quad i \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

А так как  $\{x_i(0)\}_{i=1}^{\infty}$  — ОНБ в  $\mathbb{H}$ , то и  $\{x_i(\varepsilon)\}_{i=1}^{\infty}$  — ОНБ в  $\mathbb{H}$  для любого  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ . Докажем это. Так как резольвента  $R_{\lambda}(A)$  ( $\lambda \neq \lambda_i, \forall i$ ) — ядерный оператор,  $B$  — ограниченный оператор, то функциональный ряд в правой части формулы (12) сильно сходится в  $\mathbb{H}$  на отрезке  $[0, \varepsilon_0]$  для каждого  $i \in \mathbb{N}$  и мажорируется абсолютно сходящимся числовым рядом. Тогда в силу почленной интегрируемости этого ряда на  $[0, \varepsilon_0]$  получаем формулы

$$x_i(\varepsilon) = x_i(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\varepsilon} \frac{(Bx_i(t), x_k(t))}{(\lambda_i(t) - \lambda_k(t))} x_k(t) dt, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

из которых с учетом  $(x_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon)) = \delta_{ik}$  следует, что для любого  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$   $\{x_i(\varepsilon)\}_{i=1}^{\infty}$  — базис Рисса, причем ортонормированный.

Таким образом, системе уравнений (2) на собственные числа  $\lambda_i(\varepsilon)$  и собственные функции  $x_i(\varepsilon)$  оператора  $C(\varepsilon) \in \mathfrak{C}_{\varepsilon_0}$  можно сопоставить систему дифференциальных уравнений (5), (12). Итак, доказана следующая лемма.

**Лемма 1.** Система уравнений (2) на собственные числа  $\lambda_i(\varepsilon)$  и собственные функции  $x_i(\varepsilon)$  оператора  $C(\varepsilon) \in \mathfrak{C}_{\varepsilon_0}$  (см. (1)) на отрезке  $[0, \varepsilon_0]$  эквивалентна системе дифференциальных уравнений (5), (12) на том же отрезке, если  $\lambda_i(\varepsilon) \in \mathbb{C}^1([0, \varepsilon_0])$  и  $x_i(\varepsilon) \in \mathfrak{F}([0, \varepsilon_0], \mathbb{H})$  как функции параметра  $\varepsilon$ . При этом для любого  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  система функций  $\{x_i(\varepsilon)\}_{i=1}^{\infty}$  — ОНБ в  $\mathbb{H}$ .

В следующей лемме выделяется класс операторов, для которых автоматически выполняются условия леммы 1.

**Лемма 2.** Пусть оператор  $C(\varepsilon) := A + \varepsilon B$  действует в СГП  $\mathbb{H} := L_2^{\omega}(a, b)$ , где  $(a, b)$  — конечномерный или бесконечномерный промежуток,  $\|\cdot\|^2 := \int_a^b |\cdot|^2 \omega(t) dt$ ,  $\omega(t)$  — весовая (неотрицательная) функция на  $(a, b)$ ,  $A$  — самосопряженный дискретный дифференциальный оператор второго порядка с ядерной резольвентой, область определения которого состоит из всех функций  $f$ , абсолютно непрерывных вместе со своими первыми производными на любом отрезке  $[\alpha, \beta]$  из  $(a, b)$ ,  $B$  — оператор умножения на вещественнозначную функцию  $p \in L_{\infty}(a, b)$ ,  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ , причем число  $\varepsilon_0$  такое, что  $\|B\| \leq \frac{1}{2\varepsilon_0} \min_{i \neq j} |\lambda_i(0) - \lambda_j(0)|$ .

Тогда для любого номера  $i \in \mathbb{N}$  будем иметь  $\lambda_i(\varepsilon) \in \mathbb{C}^1([0, \varepsilon_0])$  и  $x_i(\varepsilon) \in \mathfrak{F}([0, \varepsilon_0], \mathbb{H})$ .



**Доказательство.** Из свойств оператора  $A$  с учетом нормированности его собственных функций  $x_i(0)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , имеем, что  $\{x_i(0)\}_{i=1}^{\infty}$  — ОНБ в  $\mathbb{H}$ . К тому же, из свойств оператора  $B$  следует, что для любого  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  имеем  $C(\varepsilon) \in \mathfrak{C}_{\varepsilon_0}$ . А из включения  $Bx_i(\varepsilon) \in \mathbb{H}$  и разложения

$$Bx_i(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} (Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon)) x_k(\varepsilon)$$

ясно, что найдется такое число  $B_1 > 0$ , для которого выполняются неравенства  $|(Bx_i(\varepsilon), x_k(\varepsilon))| \leq B_1$  для любого  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  и всех  $(i, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Тогда из (12) получаем оценку

$$\left\| \frac{dx_i(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right\| \leq B_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon)|} < \infty, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \quad i \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Из равенства (5) видно, что для любого  $i \in \mathbb{N}$  функция  $\lambda_i(\varepsilon)$  имеет ограниченную производную  $\frac{d\lambda_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}$  в каждой точке  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ , поэтому  $\lambda_i(\varepsilon)$  непрерывна на  $[0, \varepsilon_0]$ . Тогда сумма в (14) является также непрерывной функцией переменной  $\varepsilon$  на отрезке  $[0, \varepsilon_0]$ .

Для любых  $u$  и  $v$  из  $[0, \varepsilon_0]$  справедливо неравенство

$$\|x_i(u) - x_i(v)\| \leq \|x_i(u)\| + \|x_i(v)\| = 2,$$

поэтому из (14) получаем

$$\left\| \frac{dx_i(u)}{d\varepsilon} - \frac{dx_i(v)}{d\varepsilon} \right\| \leq 2B_1 \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_i(u) - \lambda_k(u)|} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_i(v) - \lambda_k(v)|} \right|.$$

Следовательно, для любого  $v \in [0, \varepsilon_0]$  и любого  $i \in \mathbb{N}$  имеем

$$\lim_{w \rightarrow v} \left\| \frac{dx_i(v)}{d\varepsilon} - \frac{dx_i(w)}{d\varepsilon} \right\| \rightarrow 0.$$

Условия же

$$A \frac{dx_i(v)}{d\varepsilon} = \frac{dAx_i(v)}{d\varepsilon}, \quad B \frac{dx_i(v)}{d\varepsilon} = \frac{dBx_i(v)}{d\varepsilon}, \quad v \in [0, \varepsilon_0] \quad i \in \mathbb{N},$$

выполнимы ввиду представления операторов  $A$  и  $B$ . Отсюда  $x_i(\varepsilon) \in \mathfrak{F}([0, \varepsilon_0], \mathbb{H})$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .

Из дифференцируемости (по Фреше) функций  $x_i(\varepsilon)$  на  $[0, \varepsilon_0]$  и формулы (5) следует непрерывность функций  $\frac{d\lambda_i(\varepsilon)}{d\varepsilon}$  на этом же отрезке. Поэтому  $\lambda_i(\varepsilon) \in \mathcal{C}^1([0, \varepsilon_0])$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Лемма доказана.

Для того чтобы использовать компьютер в вычислениях по полученным формулам, необходимо выполнение следующих условий:

1) знак  $\infty$  в формулах (5) и (12) поменять на достаточно большое натуральное  $n$ ;

2) найти матричные представления  $MA_n$ ,  $MB_n$  сужений  $A_n$ ,  $B_n$  самосопряженных операторов  $A$ ,  $B$  на линейное подпространство  $\mathfrak{L}_n := L(x_1(0), \dots, x_n(0)) \subset \mathbb{H}$ , а тем самым и матричное представление  $MC_n(\varepsilon_0) = MA_n + \varepsilon_0 MB_n$  сужения  $C_n(\varepsilon_0)$  самосопряженного оператора  $C(\varepsilon_0) = A + \varepsilon_0 B$  на  $\mathfrak{L}_n$ ;

3) выбрать натуральное  $m$  таким, чтобы шаг  $h = \varepsilon_0/m$  был достаточно малым положительным числом;

4) использовать следующие обозначения:

•  $\lambda_i^0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и  $x_1^0 = (1, 0, 0, \dots, 0)^t$ ,  $x_2^0 = (0, 1, 0, \dots, 0)^t$ ,  $x_3^0 = (0, 0, 1, \dots, 0)^t$ , ...,  $x_n^0 = (0, 0, 0, \dots, 1)^t$  — собственные числа и вектора матрицы  $MA_n \equiv MC_n(0) = MA_n + 0 \cdot MB_n$  (ясно, что  $\lambda_i^0 = \lambda_i(0) = \lambda_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ );

•  $\lambda_i^m$  и  $x_i^m$  — приближенные собственные числа и собственные вектора матрицы  $MC_n(\varepsilon_0)$ ;

•  $\lambda_i^\nu$  и  $x_i^\nu$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\nu = \overline{1, m-1}$ , — промежуточные числа и вектора, которые вместе с  $\lambda_i^m$  и  $x_i^m$  находятся любым из линейных одношаговых или многошаговых численных методов решения дифференциальных уравнений;

•  $\lambda_i(n, \varepsilon)$  и  $x_i(n, \varepsilon)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , — собственные числа и функции оператора  $C_n(\varepsilon)$ , действующего в  $\mathfrak{L}_n$ .



Точные значения собственных чисел  $\lambda_i(n, \varepsilon)$  и собственных функций  $x_i(n, \varepsilon)$  оператора  $C_n(\varepsilon)$  для любого  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  вычисляются с учетом условия 1) из системы

$$\frac{d\lambda_i(n, \varepsilon)}{d\varepsilon} = (Bx_i(n, \varepsilon), x_i(n, \varepsilon)), \quad i = \overline{1, n}, \quad (15)$$

$$\frac{dx_i(n, \varepsilon)}{d\varepsilon} = \sum_{k=1}^n \frac{(Bx_i(n, \varepsilon), x_k(n, \varepsilon))}{(\lambda_i(n, \varepsilon) - \lambda_k(n, \varepsilon))} x_k(n, \varepsilon), \quad i = \overline{1, n}. \quad (16)$$

Число  $n$  выбирается достаточно большим, чтобы при каждом  $\delta \in [0, \varepsilon_0]$  оператор  $C_n(\delta)$  имел простой спектр (спектры оператора  $C_n(\delta)$  и соответствующей матрицы  $MC_n(\delta)$  совпадают). Тогда, уменьшая шаг  $h = \varepsilon_0/m$  ( $m$  при этом увеличивается) для получения более качественных аппроксимаций по одному из численных методов решения системы (15), (16), будем иметь следующие приближения:

$$\lambda_i(\varepsilon_0) \approx \lambda_i(n, \varepsilon_0) \approx \lambda_i^m, \quad i = \overline{1, n}, \quad (17)$$

$$x_i(\varepsilon_0) \approx x_i(n, \varepsilon_0) \approx X_i^m(n, \varepsilon_0) := \sum_{j=1}^n x_{ij}^m \cdot x_j(0), \quad i = \overline{1, n}, \quad (18)$$

где  $x_{ij}^m, j = \overline{1, n}$ , — компоненты вектора  $x_i^m$ .

Таким образом, увеличивая  $n$  и  $m$  (при этом величина шага  $h = \varepsilon_0/m$  будет уменьшаться) без учета вычислительной погрешности по вышеуказанному способу, можно добиться получения таких чисел  $\lambda_i^m$  и функций  $X_i^m(n, \varepsilon_0)$ , которые как угодно мало отличаются соответственно по модулю и по норме от искомым собственным числам  $\lambda_i(\varepsilon_0)$  и собственным функциям  $x_i(\varepsilon_0)$  оператора  $C(\varepsilon_0)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Доказанный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия леммы 1 и  $n \gg 1$  таково, что при каждом  $\delta \in [0, \varepsilon_0]$  оператор  $C_n(\delta)$  (или соответствующая матрица  $MC_n(\delta)$ ) имеет простой спектр. Тогда для приближенного вычисления первых собственных чисел  $\lambda_i(\varepsilon)$  и функций  $x_i(\varepsilon)$  оператора  $C(\varepsilon) \in \mathfrak{C}_{\varepsilon_0}$ , вместо системы (5), (12), можно использовать систему (15), (16). Решением последней являются собственные числа  $\lambda_i(n, \varepsilon) (\rightarrow \lambda_i(\varepsilon))$  и собственные функции  $x_i(n, \varepsilon) (\rightarrow x_i(\varepsilon))$  оператора  $C_n(\varepsilon)$ .

**Замечание.** Собственные числа  $\lambda_i(n, \varepsilon)$  и собственные функции  $x_i(n, \varepsilon)$  оператора  $C_n(\varepsilon)$  находятся (может быть и приближенно) с помощью любого из методов (в том числе и численных) решения систем дифференциальных уравнений.

## 2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РУНГЕ – КУТТЫ В ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ПЕРВЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВОЗМУЩЕННЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Хорошо известен метод Рунге – Кутты для приближенного решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (см., например, [2, с. 226–228]).

$$y' = f(t, y), \quad t \in [0, \varepsilon], \quad (') = d/dt, \quad (19)$$

с начальным условием

$$y(0) = y_0, \quad (20)$$

где  $f(t, y)$  — некоторая заданная функция двух переменных. Будем считать, что для задачи Коши (15), (16) выполняются требования, обеспечивающие существование и единственность на отрезке  $[0, \varepsilon]$  ее решения  $y = y(t)$  (такие требования можно найти в любом курсе дифференциальных уравнений или в соответствующем разделе курса высшей математики, см., например, [3–5]).

Придерживаясь в дальнейшем изложении обозначений, введенных в предыдущем параграфе, выберем натуральное  $m$  таким, чтобы шаг  $h = \varepsilon_0/m$  был достаточно малым положительным числом. Тогда отрезок  $[0, \varepsilon_0]$  можно разбить системой равноотстоящих друг от друга точек (или узлов)  $\{t_i\}_{i=0}^m$ ,  $t_i = i \cdot h$ , а приближенные значения  $y_{i+1}$ ,  $i = \overline{0, m-1}$ , функции-решения  $y = y(t)$  в узлах



$t = t_j, j = \overline{1, m}$ , находить с помощью метода Рунге – Кутты:

$$\begin{cases} \eta_1^i = hf(t_i, y_i), \\ \eta_2^i = hf(t_i + h/2, y_i + \eta_1^i/2), \\ \eta_3^i = hf(t_i + h/2, y_i + \eta_2^i/2), \\ \eta_4^i = hf(t_i + h, y_i + \eta_3^i), \\ \Delta y_i = (\eta_1^i + 2\eta_2^i + 2\eta_3^i + \eta_4^i) / 6, \\ y_{i+1} = y_i + \Delta y_i. \end{cases} \quad (21)$$

Таким образом, задача Коши (15), (16) с начальными условиями  $(x_i(0), x_i(0)) = 1, i = \overline{1, n}$ , приближенно решается с использованием формул (21).

Пусть выполнены условия теоремы 1. Адаптируя формулы (21) к описанной выше задаче Коши, получаем следующие формулы Рунге – Кутты для приближенного вычисления собственных чисел  $\lambda_i(n, \varepsilon_0)$  и собственных функций  $x_i(n, \varepsilon_0)$  оператора  $C_n(\varepsilon_0)$ :

$$\lambda_i^{-\nu+1} = \lambda_i^{-\nu} + \Delta \lambda_i^{-\nu}, \quad x_i^{-\nu+1} = x_i^{-\nu} + \Delta x_i^{-\nu}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \nu = \overline{0, m-1}, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_i^{-\nu} &= (\eta_1(\lambda_i^{-\nu}) + 2\eta_2(\lambda_i^{-\nu}) + 2\eta_3(\lambda_i^{-\nu}) + \eta_4(\lambda_i^{-\nu})) / 6, \\ \Delta x_i^{-\nu} &= (\eta_1(x_i^{-\nu}) + 2\eta_2(x_i^{-\nu}) + 2\eta_3(x_i^{-\nu}) + \eta_4(x_i^{-\nu})) / 6, \\ \eta_1(\lambda_i^{-\nu}) &= h(MB_n x_i^{-\nu}, x_i^{-\nu}), \quad \eta_1(x_i^{-\nu}) = h \sum_{k=1}^n \frac{(MB_n x_i^{-\nu}, x_k^{-\nu})}{\lambda_i^{-\nu} - \lambda_k^{-\nu}} x_k^{-\nu}, \\ \eta_2(\lambda_i^{-\nu}) &= h(MB_n(x_i^{-\nu} + \eta_1(x_i^{-\nu})/2), x_i^{-\nu} + \eta_1(x_i^{-\nu})/2), \\ \eta_2(x_i^{-\nu}) &= h \sum_{k=1}^n \frac{(MB_n(x_i^{-\nu} + \eta_1(x_i^{-\nu})/2), x_k^{-\nu} + \eta_1(x_k^{-\nu})/2)}{(\lambda_i^{-\nu} + \eta_1(\lambda_i^{-\nu})/2) - (\lambda_k^{-\nu} + \eta_1(\lambda_k^{-\nu})/2)} (x_k^{-\nu} + \eta_1(x_k^{-\nu})/2), \\ \eta_3(\lambda_i^{-\nu}) &= h(MB_n(x_i^{-\nu} + \eta_2(x_i^{-\nu})/2), x_i^{-\nu} + \eta_2(x_i^{-\nu})/2), \\ \eta_3(x_i^{-\nu}) &= h \sum_{k=1}^n \frac{(MB_n(x_i^{-\nu} + \eta_2(x_i^{-\nu})/2), x_k^{-\nu} + \eta_2(x_k^{-\nu})/2)}{(\lambda_i^{-\nu} + \eta_2(\lambda_i^{-\nu})/2) - (\lambda_k^{-\nu} + \eta_2(\lambda_k^{-\nu})/2)} (x_k^{-\nu} + \eta_2(x_k^{-\nu})/2), \\ \eta_4(\lambda_i^{-\nu}) &= h(MB_n(x_i^{-\nu} + \eta_3(x_i^{-\nu})), x_i^{-\nu} + \eta_3(x_i^{-\nu})), \\ \eta_4(x_i^{-\nu}) &= h \sum_{k=1}^n \frac{(MB_n(x_i^{-\nu} + \eta_3(x_i^{-\nu})), x_k^{-\nu} + \eta_3(x_k^{-\nu}))}{(\lambda_i^{-\nu} + \eta_3(\lambda_i^{-\nu})) - (\lambda_k^{-\nu} + \eta_3(\lambda_k^{-\nu}))} (x_k^{-\nu} + \eta_3(x_k^{-\nu})). \end{aligned}$$

Для получения окончательных результатов остается воспользоваться формулами (17), (18).

### 3. ДЕМОНСТРАЦИЯ МЕТОДА А. А. ДОРОДНИЦЫНА НА КОНКРЕТНЫХ ПРИМЕРАХ

Реальные вычисления базируются на методе Рунге – Кутты, погрешность которого контролировать очень непросто, поэтому точность получаемых результатов будем оценивать в каждом конкретном случае по норме невязок.

**Пример 1.** Возмущенный квадрат оператора Эрмита.

Рассмотрим действующий в СГП  $\mathbb{H} = L_2^\omega(-\infty, \infty)$ ,  $\omega = \exp(-t^2)$ , оператор  $A = \mathfrak{M}^2$ , где  $\mathfrak{M} := -d^2/dt^2 + 2td/dt + I$ . Областью определения  $\mathcal{D}(A)$  оператора  $A$  будем считать совокупность всех функций  $f$  со следующими свойствами:  $f, f', f''$  и  $f'''$  – абсолютно непрерывны на любом отрезке числовой оси,  $Af \in \mathbb{H}$ . Хорошо известно, что спектр оператора  $A$  составляют числа  $\lambda_n = (2n + 1)^2, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , а соответствующими собственными функциями, образующими в  $\mathbb{H}$  ортонормированный базис, являются  $x_n = c_n^{-1} H_n$ , где  $H_n$  – многочлены Эрмита,  $c_n = \|H_n\|, \|\cdot\| = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) |\cdot|^2 dt \right)^{1/2}$  – норма в  $\mathbb{H}$ .





Пусть  $B$  — оператор умножения на вещественнозначную функцию  $p \in L_\infty(-\infty, \infty)$ , причем  $B$  и  $\varepsilon > 0$  такие, что  $\varepsilon \|p\|_\infty < \min_i |\lambda_{i+1} - \lambda_i|/2 = |\lambda_1 - \lambda_0|/2 = 4$ , где  $\|p\|_\infty = \operatorname{essential\,sup}_{t \in (-\infty, \infty)} |p(t)|$ . Тогда оператор  $C(\varepsilon) = A + \varepsilon B$  — самосопряженный, имеет простой спектр и ядерную резольвенту в  $\mathbb{H}$ .

Пусть  $n = 10$ ,  $m = 20$ , функция

$$p(t) = \begin{cases} 3t^3 - 5t + 1, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases}$$

а  $\varepsilon = 1$ . Поэтому  $\varepsilon \|p\|_\infty < 4$ ,  $h = \varepsilon/m = 0.05$ . Используем принятые ранее обозначения:  $\lambda_i^0 = \lambda_i$ ,  $i = \overline{0, 10}$ ,  $x_0^0 = (1, 0, 0, \dots, 0)^t$ ,  $x_1^0 = (0, 1, 0, \dots, 0)^t$ ,  $\dots$ ,  $x_{10}^0 = (0, 0, 0, \dots, 1)^t$  — собственные числа и собственные вектора матрицы  $MA_{10} \equiv MC_{10}(0) = MA_{10} + 0 \cdot MB_{10} = \{(Ax_i, x_j)\}_{i,j=0}^{10}$ ,  $MB_{10} = \{(Bx_i, x_j)\}_{i,j=0}^{10}$  — матричное представление оператора  $B$  в подпространстве  $\mathfrak{L}_{10} := L(x_0(0), \dots, x_{10}(0)) \subset \mathbb{H}$ .

Найдем по формулам (22) числа  $\lambda_i^{20}$  и вектора  $x_i^{20}$ ,  $i = \overline{0, 10}$ , применяя математический пакет Maple 8 и производя вычисления с числами, имеющими в своей десятичной записи 30 значащих цифр. Далее, следуя формулам (17), (18), получим приближенные значения собственных чисел  $\lambda_i(1)$  и функций  $x_i(1)$  оператора  $C(1)$ . Для экономии места выпишем только первое (с нулевым номером) найденное собственное число и соответствующую собственную функцию:

$$\begin{aligned} \lambda_0(1) &\approx \lambda_0^{20} = 1.68325964047228615895304567067, \\ x_0(1) &\approx X_0^{20}(10, 1) = 0.172852411522452732283240620798t + \\ &+ 0.0161714626849581430341225747620t^2 - 0.0332630886742984437857110142244t^3 - \\ &- 0.0013313284545034926518046539626t^4 + 0.0059938149957721848041390704801t^5 + \\ &+ 0.00001958221262714376783006493532t^6 - 0.0005538233684346475051342875848t^7 + \\ &+ 0.00000701757897230179079573819614t^8 + 0.0000187668792460739630590612255t^9 - \\ &- 0.00000036193691274157718621237835t^{10} + 0.737304953743735332327626813166. \end{aligned}$$

Оценка нормы невязки

$$\varpi_0 := C(1)X_0^{20}(10, 1) - \lambda_0^{20}X_0^{20}(10, 1) : \|\varpi_0\| < 0.358.$$

Следует отметить, что выписанные значения собственного числа и собственной функции не могут быть округлены до меньшего количества значащих цифр, так как в противном случае возрастет число  $\|\varpi_0\|$ .

**Пример 2.** Возмущенный оператор Якоби.

Рассмотрим действующий в СГП  $\mathbb{H} = L_2^\omega(-1, 1)$ ,  $\omega = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ ,  $\alpha > -1$ ,  $\beta > -1$ ,  $\alpha + \beta \neq -1$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$ , оператор  $A := -(1-t^2)d^2/dt^2 - [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)t]d/dt + I$ . Областью определения  $\mathcal{D}(A)$  этого оператора будем считать совокупность всех функций  $f$  со следующими свойствами:  $f$  и  $f'$  — абсолютно непрерывны на отрезке  $[-1, 1]$ ,  $Af \in \mathbb{H}$ . Спектр оператора  $A$  составляют числа  $\lambda_n = 1 + n(n + \alpha + \beta + 1)$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , а соответствующими собственными функциями, образующими в  $\mathbb{H}$  ортонормированный базис, являются  $x_n = c_n^{-1}P_n^{\alpha, \beta}$ , где  $P_n^{\alpha, \beta}$  — многочлены Якоби,  $c_n = \|P_n^{\alpha, \beta}\|$ ,  $\|\cdot\| = \left( \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha(1+t)^\beta |\cdot|^2 dt \right)^{1/2}$  — норма в  $\mathbb{H}$ .

Пусть  $B$  — оператор умножения на вещественнозначную функцию  $p \in L_\infty(-1, 1)$ , причем  $B$  и  $\varepsilon > 0$  такие, что

$$\varepsilon \|p\|_\infty < \min_i |\lambda_{i+1} - \lambda_i|/2 = |\lambda_1 - \lambda_0|/2 = 1 + (\alpha + \beta)/2,$$

где  $\|p\|_\infty = \operatorname{essential\,sup}_{t \in (-1, 1)} |p(t)|$ . Тогда оператор  $C(\varepsilon) = A + \varepsilon B$  — самосопряженный, имеет простой спектр и ядерную резольвенту в  $\mathbb{H}$ .

Пусть  $n = 10$ ,  $m = 20$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 3$ , функция  $p(t) = t^5 - 2t^2 + 2t - 1$ , а  $\varepsilon = 0.5$ . Поэтому  $\varepsilon \|p\|_\infty < 7/2$ ,  $h = \varepsilon/m = 0.025$ .



Действуя далее по аналогии с примером 1, получим

$$\begin{aligned} \lambda_0(0.5) &\approx \lambda_0^{20} = 0.496252345561275424674873429038, \\ x_0(0.5) &\approx X_0^{20}(10, 0.5) = -0.009425746658442445493517548993t^5 - \\ &- 0.132236442075371243951636119933t + 0.0000325467761782429542351920036t^{10} - \\ &- 0.00001872550752696226530880978t^9 + 0.0001014969974237650980134617141t^8 - \\ &- 0.000483143633569305374449122052t^7 + 0.0011034066866850296388669062734t^6 + \\ &+ 0.067949307253583680810569364214t^2 - 0.0141406522325402414511498967100t^3 + \\ &+ 0.001702401730599740806867245977t^4 + 0.977204080555186842538043968210, \\ \|\varpi_0\| &:= \|C(0.5)X_0^{20}(10, 0.5) - \lambda_0^{20}X_0^{20}(10, 0.5)\| < 0.00000014. \end{aligned}$$

Величина нормы невязки  $\varpi_0$  позволяет утверждать о близости найденного числа  $\lambda_0^{20}$  и функции  $X_0^{20}(10, 0.5)$  к собственному числу  $\lambda_0(0.5)$  и собственной функции  $x_0(0.5)$  оператора  $C(0.5)$ .

**Пример 3.** Возмущенный оператор Лежандра.

Рассмотрим действующий в СГП  $\mathbb{H} = L_2(-1, 1)$  оператор  $A := -(1 - t^2)d^2/dt^2 + 2td/dt + I$ . Областью определения  $\mathcal{D}(A)$  оператора  $A$  будем считать совокупность всех функций  $f$  со следующими свойствами:  $f$  и  $f'$  — абсолютно непрерывны на отрезке  $[-1, 1]$ ,  $Af \in \mathbb{H}$ . Спектр оператора составляют числа  $\lambda_n = 1 + n(n + 1)$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , а соответствующими собственными функциями, образующими в  $\mathbb{H}$  ортонормированный базис, являются  $x_n = c_n^{-1}P_n$ , где  $P_n$  — многочлены Лежандра,  $c_n = \|P_n\|$ ,  $\|\cdot\| = \left(\int_{-1}^1 |\cdot|^2 dt\right)^{1/2}$  — норма в  $\mathbb{H}$ .

Пусть  $B$  — оператор умножения на функцию  $p \in L_\infty(-1, 1)$ , причем  $B$  и  $\varepsilon > 0$  такие, что

$$\varepsilon \|p\|_\infty < \min_i |\lambda_{i+1} - \lambda_i|/2 = |\lambda_1 - \lambda_0|/2 = 1,$$

где  $\|p\|_\infty = \text{essential sup}_{t \in (-1, 1)} |p(t)|$ . Тогда оператор  $C(\varepsilon) = A + \varepsilon B$  — самосопряженный, имеет простой спектр и ядерную резольвенту в  $\mathbb{H}$ .

Пусть  $n = 10$ ,  $m = 10$ ,  $\varepsilon = 0.25$ , а функция  $p(t) = -2t^4 + 4t^3 - 3t + 2$ . Поэтому  $\varepsilon \|p\|_\infty < 1$ ,  $h = \varepsilon/m = 0.025$ .

Поступая по аналогии с предыдущими примерами, получим

$$\begin{aligned} \lambda_0(0.25) &\approx \lambda_0^{10} = 1.39155094610708474412969606809, \\ x_0(0.25) &\approx X_0^{10}(10, 0.25) = 0.087656021785344767263824203424t + \\ &+ 0.0374539869118713617963177283584t^2 - 0.0555362118750024681521054622133t^3 + \\ &+ 0.0135867107043037157836667027872t^4 - 0.0004962158447060425623694180032t^5 + \\ &+ 0.0019065271966706892165078357403t^6 - 0.0007364779940267664554795233136t^7 + \\ &+ 0.0001109135954921552896171880499t^8 - 0.0000383538824838061054232240805t^9 + \\ &+ 0.0000179555667176151627264453590t^{10} + 0.690720016035003127316804278867, \\ \|\varpi_0\| &:= \|C(0.25)X_0^{10}(10, 0.25) - \lambda_0^{10}X_0^{10}(10, 0.25)\| < 0.00000051. \end{aligned}$$

**Пример 4.** Возмущенный квадрат оператора Лагерра.

Рассмотрим действующий в весовом СГП  $\mathbb{H} = L_2^w(0, \infty)$ ,  $w(t) = e^{-t}t^\alpha$ ,  $\alpha > -1$ ,  $\alpha \neq 0$ , оператор  $A = \mathfrak{M}^2$ , где  $\mathfrak{M} := -td^2/dt^2 - (\alpha + 1 - t)d/dt + I$ . Областью определения  $\mathcal{D}(A)$  оператора  $A$  будем считать совокупность всех функций  $f$  со следующими свойствами:  $f$ ,  $f'$ ,  $f''$  и  $f'''$  — абсолютно непрерывны на любом отрезке неотрицательной части числовой оси,  $Af \in \mathbb{H}$ . Спектр оператора  $A$  составляют числа  $\lambda_n = (1 + n)^2$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , а соответствующими собственными функциями, образующими в  $\mathbb{H}$  ортонормированный базис, являются  $x_n = c_n^{-1}L_n^\alpha$ , где  $L_n^\alpha$  — многочлены Лагерра,  $c_n = \|L_n^\alpha\|$ ,  $\|\cdot\| = \left(\int_0^\infty e^{-t}t^\alpha |\cdot|^2 dt\right)^{1/2}$  — норма в  $\mathbb{H}$ .



Пусть  $B$  — оператор умножения на функцию  $p \in L_\infty(0, \infty)$ , причем  $B$  и  $\varepsilon > 0$  такие, что

$$\varepsilon \|p\|_\infty < \min_i |\lambda_{i+1} - \lambda_i|/2 = |\lambda_1 - \lambda_0|/2 = 3/2,$$

где  $\|p\|_\infty = \operatorname{essential\,sup}_{t \in (0, \infty)} |p(t)|$ . Тогда оператор  $C(\varepsilon) = A + \varepsilon B$  — самосопряженный, имеет простой спектр и ядреную резольвенту в  $\mathbb{H}$ .

Пусть  $n = 10$ ,  $m = 20$ ,  $\alpha = 1$ , функция  $p(t) = \exp(-t)(t^3 - 2t^2 + 3t - 1)$ , а  $\varepsilon = 1$ . Поэтому  $\varepsilon \|p\|_\infty < 3/2$ ,  $h = \varepsilon/m = 0.05$ .

Действуя по аналогии с предыдущими примерами, получим

$$\begin{aligned} \lambda_0(1) &\approx \lambda_0^{20} = 1.62001614319061257051596195543, \\ x_0(1) &\approx X_0^{20}(10, 1) = -0.052640007616461352878265389744t + \\ &+ 0.012732364063459791135650944933t^2 - 0.00204673650450553741374697814182t^3 + \\ &+ 0.00044652270392081656185756789t^4 - 0.00007473792690780671519384085169t^5 + \\ &+ 0.00000756682745671286932390335t^6 - 0.00000045535437726594010067173277t^7 + \\ &+ 0.00000001594769598859182470616t^8 - 0.29901461822146940812316361 \cdot 10^{-9} \cdot t^9 + \\ &+ 0.230941905674454297781 \cdot 10^{-11} \cdot t^{10} + 0.768981445312051871432936928070, \end{aligned}$$

$$\|\varpi_0\| := \|C(1)X_0^{20}(10, 1) - \lambda_0^{20}X_0^{20}(10, 1)\| < 0.0223.$$

Описанный метод обладает достоинством: его нетрудно реализовать на практике, используя компьютерные математические пакеты, а контролировать методом невязок.

### Библиографический список

1. Дородницын А. А. Избранные научные труды: в 2 т. Т. 1. М.: ВЦ РАН, 1997. 396 с.
2. Вержбицкий В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2001. 382 с.
3. Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. М.: Наука, 1981. 384 с.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики: в 5 т. Т. 2. М.: Наука, 1967. 656 с.
5. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Гос. изд-во ТТЛ, 1953. 468 с.

УДК 517.5

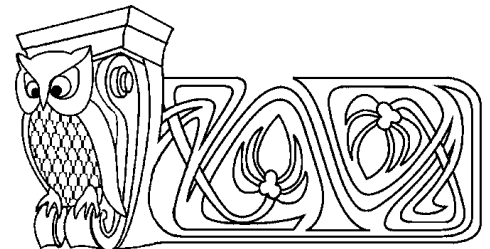
## МНОГОЧЛЕНЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

А.А. Нурмагомедов

Дагестанский государственный педагогический университет, Махачкала, кафедра прикладной математики  
E-mail: alimn@mail.ru

В работе исследуются асимптотические свойства многочленов  $\hat{p}_n(t)$ , ортогональных с весом  $\Delta t_j$  на произвольных сетках, состоящих из конечного числа  $N$  точек отрезка  $[-1, 1]$ . А именно установлена асимптотическая формула, в которой при возрастании  $n$  вместе с  $N$  асимптотическое поведение этих многочленов близко к асимптотическому поведению многочленов Лежандра. Кроме того, исследованы аппроксимативные свойства сумм Фурье по этим многочленам.

**Ключевые слова:** многочлен, ортогональная система, сетка, вес, весовая оценка, асимптотическая формула, приближение.



### Polynomials, Orthogonal on Non-Uniform Grids

A.A. Nurmagomedov

Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Chair of Applied Mathematics  
E-mail: alimn@mail.ru

Asymptotic properties of polynomials  $\hat{p}_n(t)$ , orthogonal with weight  $\Delta t_j$  on any finite set of  $N$  points from segment  $[-1, 1]$  are investigated. Namely an asymptotic formula is proved in which asymptotic behaviour of these polynomials as  $n$  tends to infinity together with  $N$  is closely related to asymptotic behaviour of the Lasiandra polynomials. Furthermore are investigated the approximating properties of the sums by Fourier on these polynomials.

**Key words:** polinomial, ortogonal system, set, weight, weighted estimate, asymptotic formula, approximation.



## ВВЕДЕНИЕ

В последнее время интерес к теории многочленов, ортогональных на дискретных системах точек, сильно возрос, она получила интенсивное развитие и нашла многочисленные приложения. Большая часть этих приложений приводит к задаче об асимптотических свойствах и весовых оценках ортогональных многочленов. В прикладных и теоретических исследованиях часто применяются разложения в ортогональные ряды. При этом приходится решать следующую промежуточную задачу: для заданной функции  $f = f(x)$  из того или иного класса и выбранной ортонормированной системы  $\{\varphi_n\}$  требуется оценить отклонение частичной суммы  $S_n(f) = S_n(f, x)$  ряда Фурье функции  $f$  по системе  $\{\varphi_n\}$  от самой функции  $f$ .

Приведенная задача хорошо известна и детально изучена для многих классических ортонормированных систем. В частности, в работах [1, 2] было исследовано поведение частичных сумм Фурье – Якоби  $S_m^{\alpha, \beta}(f)$  порядка  $m$  функции  $f \in C[-1, 1]$ . Доказано, что при  $\lambda = \max\{\alpha, \beta\} > -1/2$  норма оператора частичных сумм Фурье – Якоби растет со скоростью  $O(m^{\lambda+1/2})$ . Тем не менее, оставался ряд классических ортонормированных систем, часто применяемых на практике в качестве базисов, для которых указанная задача почти не была исследована. Это многочлены, ортогональные на сетках.

Основной причиной того, что задача о приближении функций суммами Фурье по ортогональным на сетках многочленам оставалась не решенной, явилось отсутствие исследований по асимптотическим свойствам самих ортогональных многочленов дискретной переменной. И здесь следует заметить, что исследованию этой задачи посвящены многочисленные работы И. И. Шарапудинова. Например, в работе [3] исследован вопрос о сходимости частичных сумм Фурье – Чебышева  $S_{n, N}(f)$  порядка  $n \leq N - 1$  к функции  $f \in C[-1, 1]$  при  $n = O(N^{1/2})$ . В частности, доказано, что при  $n = O(N^{1/2})$  норма оператора  $S_{n, N} = S_{n, N}(f)$  в  $C[-1, 1]$  имеет порядок  $\|S_{n, N}\| = O(n^{1/2})$ .

И по аналогии с этими работами мы также исследовали асимптотические свойства многочленов, ортогональных на произвольных сетках, и аппроксимативные свойства сумм Фурье по этим многочленам.

Пусть  $T_N = \{t_j\}_{j=0}^N$  – дискретное множество (сетка), состоящее из конечного числа различных точек отрезка  $[-1, 1]$ :  $-1 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = 1$ .

Через

$$\hat{p}_k(t) = \hat{p}_k(t; T_N) \quad (k = 0, 1, \dots, N - 1) \quad (0.1)$$

обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему на сетке  $T_N$  в следующем смысле ( $0 \leq n, m \leq N - 1$ ):

$$(\hat{p}_n, \hat{p}_m) = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_n(t_j) \hat{p}_m(t_j) \Delta t_j = \delta_{nm}, \quad (0.2)$$

где  $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, N - 1$ . Для определенности будем считать, что старший коэффициент многочлена  $\hat{p}_n(t)$  положителен, т. е.

$$\hat{p}_n(t) = k_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_0, \quad k_n > 0. \quad (0.3)$$

Ниже нам понадобится обобщение на интегральные метрики известного неравенства В. А. Маркова для производных алгебраических многочленов. А именно пусть  $q_n(t)$  – произвольный алгебраический многочлен степени  $n$ ,  $0 \leq r \leq n$ . Тогда имеет место [4, 5] оценка

$$\int_{-1}^1 |q_n^{(r)}(t)| dt \leq c(r) n^{2r} \int_{-1}^1 |q_n(t)| dt, \quad (0.4)$$

где  $c(r), c(\alpha, \beta), \dots, c(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$  – положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров, вообще говоря, различные в разных местах. Через  $\varkappa_r$  мы обозначим наименьшую константу в неравенстве (0.4), т. е.

$$\varkappa_r = \inf_{q_n} \frac{\int_{-1}^1 |q_n^{(r)}(t)| dt}{n^{2r} \int_{-1}^1 |q_n(t)| dt},$$



где нижняя грань берется по всем алгебраическим многочленам  $q_n(t)$  степени  $n$ , не равными нулю тождественно.

Далее, пусть  $\hat{P}_n(t)$  — ортонормированный многочлен Лежандра,

$$\delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} \Delta t_j. \quad (0.5)$$

В данной работе установлена:

1) асимптотическая формула

$$\hat{p}_n(t) = \hat{P}_n(t) + v_{n,N}(t),$$

в которой для остаточного члена  $v_{n,N}(t)$  при  $1 \leq n \leq a\delta_N^{-1/2}$  ( $0 < a \leq \{(1-b)/(4\kappa_1)\}^{1/2}$ ,  $0 < b < 1$ ) имеет место оценка

$$|v_{n,N}(t)| \leq c(a, b) \delta_N^{1/2} n^{3/2} \left( \sqrt{1-t^2} + \frac{1}{n} \right)^{-1/2}.$$

2) весовая оценка

$$|\hat{p}_n(t)| \leq c(a, b) \left( \delta_N^{1/2} n^{3/2} + 1 \right) \left( \sqrt{1-t^2} + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \quad (-1 \leq t \leq 1).$$

Здесь следует заметить, что аналогичные результаты нами были получены в работе [6] в случае, когда конечная последовательность многочленов  $\{\hat{p}_k(t)\}_{k=0}^{N-1}$  образует ортонормированную систему на множестве  $X_N = \{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ , где  $x_j = \frac{t_j + t_{j+1}}{2}$ ,  $j = 0, 1, \dots, N-1$ .

3) оценка: для функции Лебега

$$L_{n,N}(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \left| \sum_{k=0}^n \hat{p}_k(t) \hat{p}_k(t_j) \right| \Delta t_j$$

при  $n = O(\delta_N^{-1/5})$  равномерно относительно  $-1 \leq t \leq 1$  справедливо неравенство

$$L_{n,N}(t) \leq c(a, b) n^{1/2}.$$

## 1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ ЯКОБИ

Мы здесь приведем некоторые сведения о многочленах Якоби и Лежандра. Определим многочлены Якоби  $P_n^{\alpha, \beta}(t)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) с помощью обобщенной формулы Родрига:

$$P_n^{\alpha, \beta}(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{k(t)} \frac{d^n}{dt^n} \{k(t) \sigma^n(t)\},$$

где  $\alpha, \beta$  — произвольные действительные числа,  $\sigma(t) = 1-t^2$ ,  $k(t) = k(t; \alpha, \beta) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$ . Если  $\alpha, \beta > -1$ , то многочлены Якоби образуют ортогональную систему на  $[-1, 1]$  с весом  $k(t)$  в следующем смысле:

$$\int_{-1}^1 k(t) P_n^{\alpha, \beta}(t) P_m^{\alpha, \beta}(t) dt = h_n^{\alpha, \beta} \delta_{nm},$$

где

$$h_n^{\alpha, \beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{n! (2n+\alpha+\beta+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$$

и, следовательно,  $h_n^{\alpha, \beta} \asymp n^{-1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Ниже нам понадобятся следующие свойства многочленов Якоби [7]:

– производная

$$\frac{d^r}{dt^r} P_n^{\alpha, \beta}(t) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_r}{2^r} P_{n-r}^{\alpha+r, \beta+r}(t) \quad (0 \leq r \leq n), \quad (1.1)$$

где  $(a)_0 = 1$ ,  $(a)_\nu = a(a+1) \dots (a+\nu-1)$ ;

– весовая оценка ( $-1 \leq t \leq 1$ )

$$\sqrt{n}|P_n^{\alpha,\beta}(t)| \leq c(\alpha, \beta) \left(\sqrt{1-t} + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1+t} + \frac{1}{n}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}}, \quad (1.2)$$

в частности

$$\begin{aligned} \sqrt{n}|P_n^{\alpha,\beta}(t)| &\leq c(\alpha, \beta) (1-t)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \quad (0 \leq t \leq 1-n^{-2}), \\ \sqrt{n}|P_n^{\alpha,\beta}(t)| &\leq c(\alpha, \beta) n^{\alpha+\frac{1}{2}} \quad (1-n^{-2} \leq t \leq 1); \end{aligned} \quad (1.3)$$

– симметрия

$$P_n^{\alpha,\beta}(-t) = (-1)^n P_n^{\beta,\alpha}(t);$$

– равенство

$$P_{n+1}^{\alpha,\beta}(t) = \frac{n+\alpha+1}{n+1} P_n^{\alpha,\beta}(t) - \frac{2n+\alpha+\beta+2}{2(n+1)} (1-t) P_n^{\alpha+1,\beta}(t). \quad (1.4)$$

Одним из частных случаев многочленов Якоби при  $\alpha = \beta = 0$  являются многочлены Лежандра, ортогональные с единичным весом  $k(t) \equiv 1$  на сегменте  $[-1, 1]$ :

$$\frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) dt = \delta_{nm},$$

для которых, в частности, неравенство (1.2) имеет вид

$$\sqrt{n}|P_n(t)| \leq c \left(\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.5)$$

## 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Здесь мы докажем некоторые утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

**Лемма 2.1.** Пусть функция  $f(t)$  непрерывно дифференцируема на  $[-1, 1]$ ,  $-1 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = 1$ ,  $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, N-1$ . Тогда имеет место следующее равенство:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \Delta t_j + r_N(f),$$

в котором для остаточного члена  $r_N(f)$  имеет место оценка

$$|r_N(f)| \leq \delta_N \int_{-1}^1 |f'(x)| dx. \quad (2.1)$$

**Доказательство.** Мы имеем

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t) dt. \quad (2.2)$$

Далее, воспользовавшись формулой Тейлора, мы можем записать

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t) dt &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[ f(t_j) + \int_{t_j}^t f'(x) dx \right] dt = f(t_j) \Delta t_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{t_j}^t f'(x) dx dt = \\ &= f(t_j) \Delta t_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1} - x) f'(x) dx. \end{aligned} \quad (2.3)$$



Поскольку (см. (0.5))  $\left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1} - x)f'(x) dx \right| \leq \delta_N \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f'(x)| dx$ , то из (2.2) и (2.3) мы находим

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \Delta t_j + r_N(f),$$

где

$$|r_N(f)| = \left| \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1} - x)f'(x) dx \right| \leq \delta_N \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f'(x)| dx = \delta_N \int_{-1}^1 |f'(x)| dx.$$

Лемма 2.1 доказана.

**Лемма 2.2.** Для нормированного многочлена Лежандра  $\hat{P}_n(t) = \sqrt{(2n+1)/2} P_n(t)$  имеет место следующая формула:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \hat{P}_n^2(t_j) \Delta t_j = 1 - r_{n,N}, \quad (2.4)$$

в которой

$$|r_{n,N}| \leq c \delta_N n \ln(n+1). \quad (2.5)$$

**Доказательство.** Полагая  $f(t) = \hat{P}_n^2(t) = \frac{2n+1}{2} P_n^2(t)$ , воспользуемся леммой 2.1. Тогда

$$1 = \int_{-1}^1 \hat{P}_n^2(t) dt = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{P}_n^2(t_j) \Delta t_j + r_{n,N}, \quad (2.6)$$

где  $r_{n,N} = r_N(\hat{P}_n^2)$  и, стало быть,

$$|r_{n,N}| \leq \delta_N \int_{-1}^1 |\{\hat{P}_n^2(t)\}'| dt = 2\delta_N \int_0^1 |\{\hat{P}_n^2(t)\}'| dt. \quad (2.7)$$

Далее, в силу (1.1)

$$\{\hat{P}_n^2(t)\}' = \frac{2n+1}{2} \{P_n^2(t)\}' = (2n+1)\{P_n(t)P_n'(t)\} = \frac{(2n+1)(n+1)}{2} P_n(t)P_{n-1}^{1,1}(t).$$

Поэтому в силу весовой оценки (1.2) ((1.5)) получим

$$|\{\hat{P}_n^2(t)\}'| \leq c(n+1) \left( \sqrt{1-t^2} + \frac{1}{n} \right)^{-2}.$$

Отсюда, в свою очередь, имеем

$$\int_0^1 |\{\hat{P}_n^2(t)\}'| dt \leq c(n+1) \int_0^1 \left( \sqrt{1-t^2} + \frac{1}{n} \right)^{-2} dt \leq c(n+1) \ln(n+1). \quad (2.8)$$

Сопоставляя (2.6)–(2.8), приходим к оценке (2.5). Лемма 2.2 доказана.

**Лемма 2.3.** Пусть  $\varkappa_1 \delta_N n^2 < 1/4$ . Тогда для ортонормированного многочлена (0.3) имеет место следующая формула:

$$\int_{-1}^1 \hat{p}_n^2(t) dt = 1 + R_{n,N},$$

в которой

$$|R_{n,N}| \leq \frac{4\varkappa_1 \delta_N n^2}{1 - 4\varkappa_1 \delta_N n^2}. \quad (2.9)$$

**Доказательство.** В силу леммы 2.1

$$\int_{-1}^1 \hat{p}_n^2(t) dt = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_n^2(t_j) \Delta t_j + R_{n,N}, \quad (2.10)$$

где  $R_{n,N} = r_N(\hat{p}_n^2)$  и, стало быть, в силу (2.1)

$$|R_{n,N}| \leq \delta_N \int_{-1}^1 |\{\hat{p}_n^2(t)\}'| dt. \quad (2.11)$$

Далее, из неравенства (0.4) следует, что

$$\int_{-1}^1 |\{\hat{p}_n^2(t)\}'| dt \leq 4\kappa_1 n^2 \int_{-1}^1 \hat{p}_n^2(t) dt. \quad (2.12)$$

Сопоставляя (2.11) и (2.12), получим

$$|R_{n,N}| \leq 4\kappa_1 \delta_N n^2 \int_{-1}^1 \hat{p}_n^2(t) dt. \quad (2.13)$$

Кроме того, из (2.10) и (2.13) следует, что

$$\int_{-1}^1 \hat{p}_n^2(t) dt \leq 1 + 4\kappa_1 \delta_N n^2 \int_{-1}^1 \hat{p}_n^2(t) dt. \quad (2.14)$$

Если теперь  $\kappa_1 \delta_N n^2 < 1/4$ , то из (2.14) получаем

$$\int_{-1}^1 \hat{p}_n^2(t) dt \leq \frac{1}{1 - 4\kappa_1 \delta_N n^2}. \quad (2.15)$$

А теперь из (2.13) и (2.15) непосредственно следует оценка (2.9). Лемма 2.3 доказана.

**Лемма 2.4.** Пусть  $k_n$  — старший коэффициент многочлена  $\hat{p}_n(t)$ , а  $\lambda_n$  — старший коэффициент многочлена Лежандра  $\tilde{P}_n(t)$ . Тогда

$$\frac{1}{1 + c\delta_N n \ln(n+1)} \leq \frac{k_n}{\lambda_n} \leq \frac{1}{(1 - 4\kappa_1 \delta_N n^2)^{1/2}}. \quad (2.16)$$

**Доказательство.** Нетрудно заметить, что если  $\hat{P}_n(t) = \lambda_n \tilde{P}_n(t)$ , то

$$\lambda_n^2 = \frac{1}{\int_{-1}^1 \tilde{P}_n^2(t) dt},$$

где  $\tilde{P}_n(t)$  — многочлен Лежандра с единичным старшим коэффициентом. Если  $\hat{p}_n(t)$  — многочлен из последовательности (0.1), то

$$k_n^2 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{N-1} \tilde{p}_n^2(t_j) \Delta t_j}, \quad (2.17)$$

где  $\tilde{p}_n(t)$  — многочлен из последовательности (0.1) с единичным старшим коэффициентом. Далее, в силу (2.4), (2.5) и (2.17) получим:

$$\frac{k_n^2}{\lambda_n^2} = \frac{1}{\lambda_n^2 \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{p}_n^2(t_j) \Delta t_j} \geq \frac{1}{\sum_{j=0}^{N-1} \hat{P}_n^2(t_j) \Delta t_j} \geq \frac{1}{1 + c\delta_N n \ln(n+1)}.$$





Отсюда, в свою очередь, следует левая часть неравенства (2.16). Чтобы доказать правую часть этого неравенства, мы воспользуемся интегральным неравенством Коши – Буняковского. Тогда получим:

$$\frac{k_n}{\lambda_n} = \int_{-1}^1 \hat{p}_n(t) \hat{P}_n(t) dt \leq \left( \int_{-1}^1 \hat{p}_n^2(t) dt \right)^{1/2} \left( \int_{-1}^1 \hat{P}_n^2(t) dt \right)^{1/2} \leq \frac{1}{(1 - 4\kappa_1 \delta_N n^2)^{1/2}}.$$

Лемма 2.4 доказана.

### 3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ $\hat{p}_n(t)$

Здесь мы получим асимптотическую формулу для многочленов  $\hat{p}_n(t)$ , ортонормированных на  $T_N$  в смысле (0.2).

**Теорема 3.1.** Пусть  $0 < b < 1$ ,  $0 < a \leq \{(1 - b)/(4\kappa_1)\}^{1/2}$  и  $1 \leq n \leq a\delta_N^{-1/2}$ . Тогда имеет место асимптотическая формула:

$$\hat{p}_n(t) = \hat{P}_n(t) + v_{n,N}(t), \tag{3.1}$$

где для остаточного члена  $v_{n,N}(t)$  которой справедлива оценка

$$|v_{n,N}(t)| \leq c(a, b) \delta_N^{1/2} n^{3/2} \left( \sqrt{1 - t^2} + \frac{1}{n} \right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.2}$$

**Доказательство.** Оценим следующий интеграл:

$$\int_{-1}^1 \{v_{n,N}(t)\}^2 dt = \int_{-1}^1 \{\hat{P}_n(t) - \hat{p}_n(t)\}^2 dt = \int_{-1}^1 \hat{P}_n^2(t) dt - 2 \int_{-1}^1 \hat{P}_n(t) \hat{p}_n(t) dt + \int_{-1}^1 \hat{p}_n^2(t) dt = I_1 + I_2 + I_3.$$

Ясно, что  $I_1 = 1$ ,  $I_2 = -2 \frac{k_n}{\lambda_n}$ . А в силу (2.15)  $I_3 = 1 + \frac{4\kappa_1 \delta_N n^2}{1 - 4\kappa_1 \delta_N n^2}$ . Тогда

$$\int_{-1}^1 \{v_{n,N}(t)\}^2 dt \leq \frac{c\delta_N n \ln(n+1)}{1 + c\delta_N n \ln(n+1)} + \frac{4\kappa_1 \delta_N n^2}{1 - 4\kappa_1 \delta_N n^2} < c(a, b, \kappa_1) \delta_N n^2. \tag{3.3}$$

Из неравенства (3.3), используя теорему 7.71.1 [7], легко получить утверждение теоремы 3.1.

Сопоставляя (3.1), (3.2) с (1.5), мы приходим к следующему утверждению.

**Теорема 3.2.** Пусть  $0 < b < 1$ ,  $0 < a \leq \{(1 - b)/(4\kappa_1)\}^{1/2}$  и  $1 \leq n \leq a\delta_N^{-1/2}$ . Тогда существует постоянная  $c(a, b) > 0$  такая, что

$$|\hat{p}_n(t)| \leq c(a, b) \left( \delta_N^{1/2} n^{3/2} + 1 \right) \left( \sqrt{1 - t^2} + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \quad (-1 \leq t \leq 1). \tag{3.4}$$

### 4. ОЦЕНКА ФУНКЦИИ ЛЕБЕГА СУММ ФУРЬЕ ПО МНОГОЧЛЕНАМ $\hat{p}_n(t)$

Пусть  $C[-1, 1]$  – пространство непрерывных на отрезке  $[-1, 1]$  функций  $f(t)$  с нормой

$$\|f\| = \|f\|_{C[-1,1]} = \max_{-1 \leq t \leq 1} |f(t)|,$$

$\mathcal{P}_n$  – пространство алгебраических многочленов степени  $n$ ,  $E_n(f) = \min_{q_n \in \mathcal{P}_n} \|f - q_n\|_{C[-1,1]}$  – наилучшее приближение функции  $f$  алгебраическими многочленами степени  $n$ .

Через  $S_{n,N}(f) = S_{n,N}(f, t)$  обозначим частичную сумму  $n$ -го порядка ряда Фурье функции  $f(t)$  по системе  $\{\hat{p}_k(t)\}_{k=0}^{N-1}$ , т. е.  $S_{n,N}(f) = \sum_{k=0}^n \hat{f}_k \hat{p}_k(t)$ , где  $\hat{f}_k = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \hat{p}_k(t_j) \Delta t_j$ .

Рассмотрим задачу об оценке отклонения частичной суммы  $S_{n,N}(f)$  ряда Фурье функции  $f$  по системе  $\{\hat{p}_k(t)\}_{k=0}^{N-1}$  от самой функции  $f$  при  $t \in [-1, 1]$  и  $n, N \rightarrow \infty$ .

Положим

$$L_{n,N}(t) = \sum_{j=0}^{N-1} |K_{n,N}(t, t_j)| \Delta t_j, \tag{4.1}$$



$$K_{n,N}(t, t_j) = \sum_{k=0}^n \hat{p}_k(t) \hat{p}_k(t_j). \quad (4.2)$$

Как известно, задача об оценке величины  $|f(t) - S_{n,N}(f, t)|$  с помощью неравенства Лебега

$$|f(t) - S_{n,N}(f, t)| \leq (1 + L_{n,N}(t)) E_n(f) \quad (4.3)$$

сводится к задаче об оценке функции Лебега  $L_{n,N}(t)$ .

Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 4.1.** Пусть  $f \in C[-1, 1]$ ,  $0 < b < 1$ ,  $0 < a \leq \left(\frac{1-b}{4\alpha_1}\right)^{1/2}$ ,  $n = O(\delta_N^{-1/5})$ . Тогда справедливо неравенство ( $-1 \leq t \leq 1$ )

$$L_{n,N}(t) \leq c(a, b) n^{1/2}.$$

**Доказательство.** Пусть  $0 \leq t \leq 1 - 4n^{-2}$ . Функцию  $L_{n,N}(t)$ , определяемую равенством (4.1), разобьем по следующей схеме:

$$\begin{aligned} L_{n,N}(t) = & \sum_{-1 \leq t_j \leq -1/2} |K_{n,N}(t, t_j)| \Delta t_j + \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} |K_{n,N}(t, t_j)| \Delta t_j + \\ & + \sum_{y_1 \leq t_j \leq y_2} |K_{n,N}(t, t_j)| \Delta t_j + \sum_{y_2 \leq t_j \leq 1} |K_{n,N}(t, t_j)| \Delta t_j = A_1 + A_2 + A_3 + A_4, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  $y_1 = t - \frac{\sqrt{1-t^2}}{n}$ ,  $y_2 = t + \frac{\sqrt{1-t^2}}{n}$ .

Чтобы оценить  $A_1$ , воспользуемся формулой Кристоффеля – Дарбу ( $n \leq N - 2$ ):

$$\sum_{k=0}^n \hat{p}_k(t) \hat{p}_k(t_j) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \cdot \frac{\hat{p}_{n+1}(t) \hat{p}_n(t_j) - \hat{p}_n(t) \hat{p}_{n+1}(t_j)}{t - t_j}, \quad (4.5)$$

где  $k_n$  – старший коэффициент многочлена  $\hat{p}_n(t)$ . Далее, пользуясь, с одной стороны, тем, что для старшего коэффициента  $\lambda_n$  ортонормированного многочлена Лежандра  $\hat{P}_n(t)$  имеет место неравенство  $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \leq c$ , а с другой стороны, в силу неравенства (2.16) мы имеем

$$\begin{aligned} \mu_n = \frac{k_n}{k_{n+1}} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \frac{k_n/\lambda_n}{k_{n+1}/\lambda_{n+1}} & \leq c \frac{1 + \delta_N n \ln(n+1)}{(1 - 4\alpha_1 \delta_N n^2)^{1/2}} \leq c(b)(1 + \delta_N n \ln(n+1)) \leq \\ & \leq c(b) \left(1 + \delta_N n^2 \cdot \frac{\ln(n+1)}{n}\right) \leq c(a, b). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из  $n = O(\delta_N^{-1/5})$  следует  $n+1 = O(\delta_N^{-1/5})$ . Кроме того, если  $0 \leq t \leq 1 - 4n^{-2}$  и  $-1 \leq t_j \leq -1/2$ , то  $\frac{1}{|t - t_j|} \leq 2$ . Отсюда и в силу (4.2), (4.5), (4.6) находим

$$\begin{aligned} A_1 = & \sum_{-1 \leq t_j \leq -1/2} |K_{n,N}(t, t_j)| \Delta t_j \leq |K_{n,N}(t, t_0)| \Delta t_0 + \sum_{-1 < t_j \leq -1+4n^{-2}} |K_{n,N}(t, t_j)| \Delta t_j + \\ & + \sum_{-1+4n^{-2} < t_j \leq -1/2} |K_{n,N}(t, t_j)| \Delta t_j \leq c(a, b) [|\hat{p}_{n+1}(t) \hat{p}_n(t_0)| + |\hat{p}_n(t) \hat{p}_{n+1}(t_0)|] \Delta t_0 + \\ & + c(a, b) \sum_{-1 < t_j \leq -1+4n^{-2}} (|\hat{p}_{n+1}(t) \hat{p}_n(t_j)| + |\hat{p}_n(t) \hat{p}_{n+1}(t_j)|) \Delta t_j + \\ & + c(a, b) \sum_{-1+4n^{-2} < t_j \leq -1/2} (|\hat{p}_{n+1}(t) \hat{p}_n(t_j)| + |\hat{p}_n(t) \hat{p}_{n+1}(t_j)|) \Delta t_j = A_{10} + A_{11} + A_{12}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Оценим  $A_{10}$ . В силу (0.5), (3.4) при  $n = O(\delta_N^{-1/5})$  имеем ( $t_0 = -1$ )

$$A_{10} \leq c(a, b) \left[ |p_{n+1}(t)| n^{1/2} + |p_n(t)| (n+1)^{1/2} \right] \Delta t_0 \leq$$



$$\leq c(a, b)n^{1/2}[|p_{n+1}(t)| + |p_n(t)|]\delta_N \leq c(a, b)n\delta_N \leq c(a, b)n^{-4}. \quad (4.8)$$

Если  $-1 < t_j \leq -1 + 4n^{-2}$ , то  $2 - 4n^{-2} \leq 1 - t_j < 2$ ,  $0 < 1 + t_j \leq 4n^{-2}$ . Тогда в силу (3.4) получаем ( $n = O(\delta_N^{-1/5})$ ):

$$\begin{aligned} A_{11} &\leq c(a, b) \sum_{-1 < t_j \leq -1 + 4n^{-2}} (|\hat{p}_{n+1}(t)| \left[ \sqrt{1+t_j} + \frac{1}{n} \right]^{-1/2} + |\hat{p}_n(t)| \left[ \sqrt{1+t_j} + \frac{1}{n+1} \right]^{-1/2}) \Delta t_j \leq \\ &\leq c(a, b) \left[ |\hat{p}_{n+1}(t)|n^{1/2} + |\hat{p}_n(t)|(n+1)^{1/2} \right] \sum_{-1 < t_j \leq -1 + 4n^{-2}} \Delta t_j \leq \\ &\leq c(a, b)n^{1/2} [|\hat{p}_{n+1}(t)| + |\hat{p}_n(t)|] n^{-2} \leq c(a, b)n^{-1}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Если же  $-1 + 4n^{-2} < t_j \leq -1/2$ , то  $(3/2) \leq 1 - t_j \leq 2 - 4n^{-2} < 2$  и  $4n^{-2} \leq 1 + t_j \leq 1/2$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} A_{12} &\leq c(a, b) [|\hat{p}_{n+1}(t)| + |\hat{p}_n(t)|] \sum_{-1 + 4n^{-2} < t_j \leq -1/2} (1 + t_j)^{-1/4} \Delta t_j \leq \\ &\leq c(a, b) [|\hat{p}_{n+1}(t)| + |\hat{p}_n(t)|] \int_{-1 + 4n^{-2}}^{-1/2} (1 + \tau)^{-1/4} d\tau \leq c(a, b) \min\{(1 - t)^{-1/4}, n^{1/2}\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Сопоставляя (4.7)–(4.10), находим

$$A_1 \leq c(a, b) \min\{(1 - t)^{-1/4}, n^{1/2}\}. \quad (4.11)$$

Теперь оценим  $A_2$ . Пользуясь (4.2), (4.5) и асимптотической формулой (3.1), получаем:

$$\begin{aligned} A_2 &\leq c(a, b) \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \left| \frac{\hat{p}_{n+1}(t)\hat{p}_n(t_j) - \hat{p}_n(t)\hat{p}_{n+1}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j = \\ &= c(a, b) \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \left\{ |(\hat{P}_{n+1}(t) + v_{n+1,N}(t))(\hat{P}_n(t_j) + v_{n,N}(t_j)) - \right. \\ &\quad \left. - (\hat{P}_n(t) + v_{n,N}(t))(\hat{P}_{n+1}(t_j) + v_{n+1,N}(t_j))\right\} / |t - t_j| \Delta t_j \leq \\ &\leq c(a, b) \left\{ \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \left| \frac{\hat{P}_{n+1}(t)\hat{P}_n(t_j) - \hat{P}_n(t)\hat{P}_{n+1}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j + \right. \\ &\quad + \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \left| \frac{\hat{P}_{n+1}(t)v_{n,N}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j + \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \left| \frac{\hat{P}_n(t_j)v_{n+1,N}(t)}{t - t_j} \right| \Delta t_j + \\ &\quad + \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \left| \frac{v_{n+1,N}(t)v_{n,N}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j + \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \left| \frac{\hat{P}_n(t)v_{n+1,N}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j + \\ &\quad \left. + \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \left| \frac{\hat{P}_{n+1}(t_j)v_{n,N}(t)}{t - t_j} \right| \Delta t_j + \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \left| \frac{v_{n,N}(t)v_{n+1,N}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j \right\} = \\ &= A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24} + A_{25} + A_{26} + A_{27}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Займемся  $A_{21}$ . Пользуясь тождеством (1.4) при  $\alpha = \beta = 0$ , можем записать

$$P_{n+1}(t)P_n(t_j) - P_n(t)P_{n+1}(t_j) = (1 - t_j)P_n^{1,0}(t_j)P_n(t) - (1 - t)P_n^{1,0}(t)P_n(t_j).$$

Тогда учитывая, что  $\hat{P}_n(t) = \sqrt{(2n+1)/2}P_n(t)$ , в силу (1.3), (1.5) имеем

$$A_{21} \leq c(a, b) \frac{2n+1}{2} \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \left| \frac{(1 - t_j)P_n^{1,0}(t_j)P_n(t) - (1 - t)P_n^{1,0}(t)P_n(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j \leq c(a, b)(1 - t)^{-1/4} \times$$

$$\times \sum_{-\frac{1}{2} \leq t_j \leq y_1} \frac{(1-t_j)^{1/4}}{t-t_j} \Delta t_j + c(a,b)(1-t)^{1/4} \sum_{-\frac{1}{2} \leq t_j \leq y_1} \frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t-t_j} \Delta t_j = A_{21}^{(1)} + A_{21}^{(2)}. \quad (4.13)$$

Далее, в силу неравенства  $(1-t_j)^{1/4} \leq (1-t)^{1/4} + (t-t_j)^{1/4}$  получаем:

$$\begin{aligned} A_{21}^{(1)} &\leq c(a,b) \left[ \sum_{-\frac{1}{2} \leq t_j \leq y_1} \frac{\Delta t_j}{t-t_j} + (1-t)^{-1/4} \sum_{-\frac{1}{2} \leq t_j \leq y_1} \frac{\Delta t_j}{(t-t_j)^{3/4}} \right] \leq \\ &\leq c(a,b) \left[ \int_{-1/2}^{y_1} \frac{d\tau}{t-\tau} + (1-t)^{-1/4} \int_{-1/2}^{y_1} \frac{d\xi}{(t-\xi)^{3/4}} \right] \leq \\ &\leq c(a,b) \left[ \left( \ln \frac{n}{\sqrt{1-t^2}} + \ln(3/2) \right) + (1-t)^{-1/4} (t+1/2)^{1/4} \right] \leq \\ &\leq c(a,b) \left[ \ln(n+1) + n^{1/2} \right] \leq c(a,b) n^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

А так как для  $-1/2 \leq t_j \leq t - \sqrt{1-t^2}/n$

$$\left( \frac{3}{2} \right)^{-1/4} \leq (1-t_j)^{-1/4} \leq \left( 1-t + \frac{\sqrt{1-t^2}}{n} \right)^{-1/4},$$

то

$$\begin{aligned} A_{21}^{(2)} &\leq c(a,b) \sum_{-\frac{1}{2} \leq t_j \leq y_1} \frac{\Delta t_j}{t-t_j} \leq c(a,b) \int_{-1/2}^{y_1} \frac{d\tau}{t-\tau} \leq \\ &\leq c(a,b) \left( \ln \frac{n}{\sqrt{1-t^2}} + \ln \frac{3}{2} \right) \leq c(a,b) \ln(n+1). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Из (4.13)–(4.15) имеем

$$A_{21} \leq c(a,b) n^{1/2}. \quad (4.16)$$

Для  $-1/2 \leq t_j \leq t - \sqrt{1-t^2}/n$  имеем  $t-t_j \leq 1-t_j$ . Отсюда и в силу (1.5) ((1.3) при  $\alpha = 0$ ), (3.2) при  $n = O(\delta_N^{-1/5})$  получаем

$$\begin{aligned} A_{22} &\leq c(a,b) \delta_N^{1/2} n^{3/2} (1-t)^{-1/4} \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t-t_j} \Delta t_j \leq c(a,b) \delta_N^{1/2} n^2 \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \frac{\Delta t_j}{(t-t_j)^{5/4}} \leq \\ &\leq c \delta_N^{1/2} n^2 \int_{-1/2}^{y_1} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/4}} \leq c(a,b) \delta_N^{1/2} n^{5/2} \leq c(a,b). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Аналогично доказываются следующие оценки ( $n = O(\delta_N^{-1/5})$ ):

$$A_{2i} \leq c(a,b) \quad (i = 3, 5, 6). \quad (4.18)$$

Далее, в силу (3.2) при  $n = O(\delta_N^{-1/5})$  находим

$$\begin{aligned} A_{24} &\leq c(a,b) \delta_N n^3 (1-t)^{-1/4} \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t-t_j} \Delta t_j \leq c(a,b) \delta_N n^{7/2} \sum_{-1/2 \leq t_j \leq y_1} \frac{\Delta t_j}{(t-t_j)^{5/4}} \leq \\ &\leq c(a,b) \delta_N n^{7/2} \int_{-1/2}^{y_1} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/4}} \leq c(a,b) \delta_N n^4 \leq c(a,b) n^{-1}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Такую же оценку допускает и  $A_{27}$ . Отсюда и из (4.12), (4.16)–(4.19) при  $n = O(\delta_N^{-1/5})$  получаем

$$A_2 \leq c(a,b) n^{1/2}. \quad (4.20)$$



Теперь оценим  $A_3$ . В силу (3.4), (4.2) при  $n = O(\delta_N^{-1/5})$  имеем

$$\begin{aligned} A_3 &= \sum_{y_1 \leq t_j \leq y_2} |K_{n,N}(t, t_j)| \Delta t_j \leq \sum_{k=0}^n |\hat{p}_k(t)| \sum_{y_1 \leq t_j \leq y_2} |\hat{p}_k(t_j)| \Delta t_j \leq \\ &\leq c(a, b) \sum_{k=0}^n |\hat{p}_k(t)| \sum_{y_1 \leq t_j \leq y_2} (1-t_j)^{-1/4} \Delta t_j \leq c(a, b) \sum_{k=0}^n |\hat{p}_k(t)| \frac{y_2 - y_1}{(1-y_2)^{1/4}} = \\ &= c(a, b) \sum_{k=0}^n |\hat{p}_k(t)| \frac{\frac{\sqrt{1-t^2}}{n}}{\left(1-t - \frac{\sqrt{1-t^2}}{n}\right)^{1/4}} < c(a, b) (1-t)^{-1/4} n \frac{(1-t)^{1/2}}{n(1-t)^{1/4} \left(1 - \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right)} \leq c(a, b). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Перейдем к оценке  $A_4$ . В силу (3.1), (4.2), (4.5) и (4.6) при  $n = O(\delta_N^{-1/5})$  мы находим

$$\begin{aligned} A_4 &= c(a, b) \sum_{y_2 \leq t_j \leq 1} \left| \frac{\hat{p}_{n+1}(t) \hat{p}_n(t_j) - \hat{p}_n(t) \hat{p}_{n+1}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j \leq \\ &\leq c(a, b) \left\{ \sum_{y_2 \leq t_j \leq 1} \left| \frac{\hat{P}_{n+1}(t) \hat{P}_n(t_j) - \hat{P}_n(t) \hat{P}_{n+1}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j + \right. \\ &+ \sum_{y_2 \leq t_j \leq 1} \left| \frac{\hat{P}_{n+1}(t) v_{n,N}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j + \sum_{y_2 \leq t_j \leq 1} \left| \frac{\hat{P}_n(t_j) v_{n+1,N}(t)}{t - t_j} \right| \Delta t_j + \\ &+ \sum_{y_2 \leq t_j \leq 1} \left| \frac{v_{n+1,N}(t) v_{n,N}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j + \sum_{y_2 \leq t_j \leq 1} \left| \frac{\hat{P}_n(t) v_{n+1,N}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j + \\ &+ \left. \sum_{y_2 \leq t_j \leq 1} \left| \frac{\hat{P}_{n+1}(t_j) v_{n,N}(t)}{t - t_j} \right| \Delta t_j + \sum_{y_2 \leq t_j \leq 1} \left| \frac{v_{n,N}(t) v_{n+1,N}(t_j)}{t - t_j} \right| \Delta t_j \right\} = \\ &= A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} + A_{45} + A_{46} + A_{47}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Рассмотрим  $A_{42}$ . В силу (1.5), (3.2) при  $n = O(\delta_N^{-1/5})$  имеем

$$\begin{aligned} A_{42} &\leq c(a, b) \delta_N^{1/2} n^{3/2} (1-t)^{-1/4} \sum_{y_2 \leq t_j \leq \frac{1+t}{2}} \frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t_j - t} \Delta t_j + \\ &+ c(a, b) \delta_N^{1/2} n^{3/2} (1-t)^{-1/4} \sum_{\frac{1+t}{2} \leq t_j \leq 1-n^{-2}} \frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t_j - t} \Delta t_j + \\ &+ c(a, b) \delta_N^{1/2} n^{3/2} (1-t)^{-1/4} \sum_{1-n^{-2} \leq t_j \leq 1} \frac{n^{1/2}}{t_j - t} \Delta t_j = A_{42}^{(1)} + A_{42}^{(2)} + A_{42}^{(3)}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Если  $y_2 \leq t_j \leq (1+t)/2$ , то  $1-t_j \geq t_j - t$ . Тогда для  $A_{42}^{(1)}$  при  $n = O(\delta_N^{-1/5})$  получаем

$$\begin{aligned} A_{42}^{(1)} &\leq c(a, b) \delta_N^{1/2} n^2 \sum_{y_2 \leq t_j \leq \frac{1+t}{2}} \frac{\Delta t_j}{(t_j - t)^{5/4}} = c(a, b) \delta_N^{1/2} n^2 \sum_{y_2 \leq t_j \leq \frac{1+t}{2}} \frac{\Delta t_j}{(t_{j+1} - t)^{5/4}} \frac{(t_{j+1} - t)^{5/4}}{(t_j - t)^{5/4}} < \\ &< c(a, b) \delta_N^{1/2} n^2 \sum_{y_2 \leq t_j \leq \frac{1+t}{2}} \frac{\Delta t_j}{(t_{j+1} - t)^{5/4}} \left( \frac{\delta_N}{t_j - t} + 1 \right)^{5/4} \leq c(a, b) \delta_N^{1/2} n^2 \int_{y_2}^{\frac{1+t}{2}} \frac{d\tau}{(\tau - t)^{5/4}} \leq \\ &\leq c(a, b) \delta_N^{1/2} n^2 n^{1/2} \leq c(a, b). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Если же  $(1+t)/2 \leq t_j \leq 1-n^{-2}$ , то  $1-t_j \leq t_j-t$ . Тогда для  $A_{42}^{(2)}$  имеем

$$\begin{aligned} A_{42}^{(2)} &\leq c(a,b)\delta_N^{\frac{1}{2}}n^2 \sum_{\frac{1+t}{2} \leq t_j \leq 1-n^{-2}} \frac{\Delta t_j}{(1-t_j)^{5/4}} \leq c(a,b)\delta_N^{\frac{1}{2}}n^2 \int_{\frac{1+t}{2}}^{1-n^{-2}} \frac{d\tau}{(1-\tau)^{5/4}} \leq \\ &\leq c(a,b)\delta_N^{1/2}n^2 \left[ n^{1/2} - \left( \frac{1+t}{2} \right)^{-1/4} \right] \leq c(a,b). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Далее, для  $A_{42}^{(3)}$  имеет место оценка

$$A_{42}^{(3)} \leq c(a,b)\delta_N^{\frac{1}{2}}n^{\frac{5}{2}} \sum_{1-n^{-2} \leq t_j \leq 1} \frac{1}{t_j-t} \Delta t_j \leq c(a,b)\delta_N^{\frac{1}{2}}n^{\frac{9}{2}} \sum_{1-n^{-2} \leq t_j \leq 1} \Delta t_j \leq c(a,b)\delta_N^{1/2}n^{5/2} \leq c(a,b).$$

Отсюда и из (4.23)–(4.25) выводим

$$A_{42} \leq c(a,b). \quad (4.26)$$

Аналогично доказываются следующие оценки:

$$A_{4i} \leq c(a,b) \quad (i = 3, 5, 6). \quad (4.27)$$

Перейдем к рассмотрению сумм  $A_{44}$  и  $A_{47}$ , остановившись для определенности на  $A_{44}$ . В силу (3.2) при  $n = O(\delta_N^{-1/5})$  имеем

$$\begin{aligned} A_{44} &\leq c(a,b)\delta_N n^3 (1-t)^{-1/4} \sum_{y_2 \leq t_j \leq \frac{1+t}{2}} \frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t_j-t} \Delta t_j + \\ &+ c(a,b)\delta_N n^3 (1-t)^{-1/4} \sum_{\frac{1+t}{2} \leq t_j \leq 1-n^{-2}} \frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t_j-t} \Delta t_j + \\ &+ c(a,b)\delta_N n^3 (1-t)^{-1/4} \sum_{1-n^{-2} \leq t_j \leq 1} \frac{n^{1/2}}{t_j-t} \Delta t_j = A_{44}^{(1)} + A_{44}^{(2)} + A_{44}^{(3)}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Для  $y_2 \leq t_j \leq (1+t)/2$  имеем  $1-t_j \geq t_j-t$ . Следовательно, по аналогии с (4.24) получаем:

$$\begin{aligned} A_{44}^{(1)} &\leq c(a,b)\delta_N n^{\frac{7}{2}} \sum_{y_2 \leq t_j \leq \frac{1+t}{2}} \frac{\Delta t_j}{(t_j-t)^{5/4}} \leq c(a,b)\delta_N n^{7/2} \int_{y_2}^{\frac{1+t}{2}} \frac{d\tau}{(\tau-t)^{5/4}} \leq \\ &\leq c(a,b)\delta_N n^{\frac{7}{2}} n^{1/2} \leq c(a,b)n^{-1}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Поскольку  $1-t_j \leq t_j-t$  для  $(1+t)/2 \leq t_j \leq 1-n^{-2}$ , то

$$\begin{aligned} A_{44}^{(2)} &\leq c(a,b)\delta_N n^{\frac{7}{2}} \sum_{\frac{1+t}{2} \leq t_j \leq 1-n^{-2}} \frac{\Delta t_j}{(1-t_j)^{5/4}} \leq \\ &\leq c(a,b)\delta_N n^{\frac{7}{2}} \int_{\frac{1+t}{2}}^{1-n^{-2}} \frac{d\tau}{(1-\tau)^{5/4}} \leq c(a,b)\delta_N n^4 \leq c(a,b)n^{-1}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Далее, для  $A_{44}^{(3)}$  имеет место оценка

$$\begin{aligned} A_{44}^{(3)} &\leq c(a,b)\delta_N n^4 \sum_{1-n^{-2} \leq t_j \leq 1} \frac{1}{t_j-t} \Delta t_j \leq c(a,b)\delta_N n^6 \sum_{1-n^{-2} \leq t_j \leq 1} \Delta t_j \leq \\ &\leq c(a,b)\delta_N n^4 \leq c(a,b)n^{-1}. \end{aligned} \quad (4.31)$$



Сопоставляя (4.28)–(4.31), получаем:

$$A_{44} \leq c(a, b)n^{-1}. \quad (4.32)$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$A_{47} \leq c(a, b)n^{-1}. \quad (4.33)$$

Оценим  $A_{41}$ . Аналогично тому как была установлена оценка (4.17), находим

$$\begin{aligned} A_{41} &\leq c(a, b) \frac{2n+1}{2} \sum_{y_2 \leq t_j \leq 1} \left| \frac{(1-t_j)P_n^{1,0}(t_j)P_n(t) - (1-t)P_n^{1,0}(t)P_n(t_j)}{t-t_j} \right| \Delta t_j \leq \\ &\leq c(a, b)(1-t)^{-\frac{1}{4}} \left[ \sum_{y_2 \leq t_j \leq 1-n^{-2}} \frac{(1-t_j)^{1/4}}{t_j-t} \Delta t_j + n^{-1/2} \sum_{1-n^{-2} \leq t_j \leq 1} \frac{\Delta t_j}{t_j-t} \right] + \\ &+ c(a, b)(1-t)^{1/4} \left[ \sum_{y_2 \leq t_j \leq 1-n^{-2}} \frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t_j-t} \Delta t_j + n^{1/2} \sum_{1-n^{-2} \leq t_j \leq 1} \frac{\Delta t_j}{t_j-t} \right] \leq \\ &\leq c(a, b) \{ (1-t)^{-1/4} \sum_{y_2 \leq t_j \leq 1-n^{-2}} \frac{(1-t_j)^{1/4}}{t_j-t} \Delta t_j + (1-t)^{1/4} \sum_{y_2 \leq t_j \leq 1-n^{-2}} \frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t_j-t} \Delta t_j + \\ &+ \sum_{1-n^{-2} \leq t_j \leq 1} \frac{\Delta t_j}{t_j-t} + n^{1/2} \sum_{1-n^{-2} \leq t_j \leq 1} \frac{\Delta t_j}{t_j-t} \} = A_{41}^{(1)} + A_{41}^{(2)} + A_{41}^{(3)} + A_{41}^{(4)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{41}^{(4)} &\leq c(a, b)n^{5/2} \sum_{1-n^{-2} \leq t_j \leq 1} \Delta t_j \leq c(a, b)n^{1/2}, \quad A_{41}^{(3)} \leq c(a, b) \int_{1-n^{-2}}^1 \frac{d\tau}{\tau-t} \leq c(a, b) \ln(n+1), \\ A_{41}^{(2)} &\leq c(a, b) \sum_{y_2 \leq t_j \leq 1-n^{-2}} \frac{(1-t_j)^{-\frac{1}{4}}}{t_j-t} \Delta t_j = c(a, b) \sum_{y_2 \leq t_j \leq \frac{1+t}{2}} \frac{(1-t_j)^{-\frac{1}{4}}}{t_j-t} \Delta t_j + \\ &+ c(a, b) \sum_{\frac{1+t}{2} \leq t_j \leq 1-n^{-2}} \frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t_j-t} \Delta t_j \leq c(a, b) \left[ \sum_{y_2 \leq t_j \leq \frac{1+t}{2}} \frac{\Delta t_j}{(t_j-t)^{5/4}} + \sum_{\frac{1+t}{2} \leq t_j \leq 1-n^{-2}} \frac{\Delta t_j}{(1-t_j)^{5/4}} \right] \leq \\ &\leq c(a, b) \left[ \int_{y_2}^{\frac{1+t}{2}} \frac{d\tau}{(\tau-t)^{5/4}} + \int_{\frac{1+t}{2}}^{1-n^{-2}} \frac{d\zeta}{(1-\zeta)^{5/4}} \right] \leq c(a, b)n^{1/2}. \end{aligned}$$

Далее, в силу неравенства  $(1-t_j)^{1/4} \leq (1-t)^{1/4} + (t_j-t)^{1/4}$  получаем:

$$\begin{aligned} A_{41}^{(1)} &\leq c(a, b) \left[ \sum_{y_2 \leq t_j \leq 1-n^{-2}} \frac{\Delta t_j}{t_j-t} + (1-t)^{-1/4} \sum_{y_2 \leq t_j \leq 1-n^{-2}} \frac{\Delta t_j}{(t_j-t)^{3/4}} \right] \leq \\ &\leq c(a, b) \left[ \int_{y_2}^{1-n^{-2}} \frac{d\tau}{\tau-t} + (1-t)^{-1/4} \int_{y_2}^{1-n^{-2}} \frac{d\xi}{(\xi-t)^{3/4}} \right] \leq c(a, b) [\ln(n+1) + n^{1/2}] \leq c(a, b)n^{1/2}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $A_{41} \leq c(a, b)n^{1/2}$ . Отсюда сопоставляя (4.22), (4.26), (4.27), (4.32), (4.33), мы выводим ( $n = O(\delta_N^{-1/5})$ )

$$A_4 \leq c(a, b)n^{1/2}. \quad (4.34)$$

Собираем оценки (4.11), (4.20), (4.21), (4.34) и, сопоставляя их с равенством (4.4), находим

$$L_{n,N}(t) \leq c(a, b)n^{1/2}, \quad (4.35)$$

где  $0 \leq t \leq 1 - 4n^{-2}$ ,  $n = O(\delta_N^{-1/5})$ .

Перейдем к случаю, когда  $1 - 4n^{-2} \leq t \leq 1$ . Чтобы оценить  $L_{n,N}(t)$  при  $1 - 4n^{-2} \leq t \leq 1$ , разобьем сумму в правой части равенства (4.1) по следующей схеме:

$$L_{n,N}(t) = \sum_{-1 \leq t_j \leq -1/2} |K_{n,N}(t, t_j)| \Delta t_j + \sum_{-1/2 \leq t_j \leq 1 - n^{-2}} |K_{n,N}(t, t_j)| \Delta t_j + \sum_{1 - n^{-2} \leq t_j \leq 1} |K_{n,N}(t, t_j)| \Delta t_j = B_1 + B_2 + B_3. \quad (4.36)$$

При  $1 - 4n^{-2} \leq t \leq 1$  имеем  $1 - t \leq 4n^{-2}$ . Следовательно, из (1.5) вытекает оценка  $|\hat{P}_n(t)| \leq cn^{1/2}$ . Учитывая это неравенство, суммы  $B_1$  и  $B_2$  оцениваются совершенно аналогично тому, как это было сделано для  $A_1, A_2$  и  $A_3$ . Это дает при  $n = O(\delta_N^{-1/5})$

$$B_1 \leq c(a, b)n^{1/2}, \quad B_2 \leq c(a, b)n^{1/2}. \quad (4.37)$$

Что касается  $B_3$ , то воспользовавшись оценкой (3.4), имеем

$$B_3 = \sum_{1 - n^{-2} \leq t_j \leq 1} \left| \sum_{k=0}^n \hat{p}_k(t) \hat{p}_k(t_j) \right| \Delta t_j \leq c(a, b) \sum_{1 - n^{-2} \leq t_j \leq 1} \left| \sum_{k=0}^n k \right| \Delta t_j \leq c(a, b)n^2 \sum_{1 - n^{-2} \leq t_j \leq 1} \Delta t_j \leq c(a, b). \quad (4.38)$$

Из (4.36)–(4.38) получаем ( $n = O(\delta_N^{-1/5})$ ):

$$L_{n,N}(t) \leq c(a, b)n^{1/2}, \quad (1 - 4n^{-2} \leq t \leq 1). \quad (4.39)$$

Сопоставляя (4.35) и (4.39), убеждаемся в справедливости теоремы в случае, когда  $0 \leq t \leq 1$ . Далее, посредством аналогичных рассуждений, такую же оценку можно получить и для случая, когда  $-1 \leq t \leq 0$ . Теорема 4.1 доказана полностью.

Из (4.3) и теоремы 4.1 непосредственно вытекает следующая теорема.

**Теорема 4.2.** Пусть  $f \in C[-1, 1], 0 < b < 1, 0 < a \leq \left\{ \frac{1-b}{4\epsilon_1} \right\}^{1/2}, n = O(\delta_N^{-1/5})$ . Тогда равномерно относительно  $-1 \leq t \leq 1$  справедлива оценка

$$|f(t) - S_{n,N}(f, t)| \leq c(a, b)E_n(f)n^{1/2}.$$

Из теоремы 4.2 и теоремы Джексона вытекает следующее утверждение.

**Теорема 4.3.** Пусть  $f \in Lip_\gamma M, \frac{1}{2} < \gamma \leq 1, 0 < b < 1, 0 < a \leq \left\{ \frac{1-b}{4\epsilon_1} \right\}^{1/2}, n = O(\delta_N^{-1/5})$ . Тогда справедлива оценка  $\|f - S_{n,N}(f)\| \leq c(a, b, \gamma, M)(n + 1)^{1/2 - \gamma}$ .

Выражаю глубокую признательность профессору И.И. Шарпудинову за постановку задачи и помощь в ее реализации.

### Библиографический список

1. Агаханов С. А., Натансон Г. И. Функция Лебега сумм Фурье – Якоби // Вестн. Ленингр. ун-та. 1968. Вып. 1. С. 11–13.
2. Бадков В. М. Оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье – Якоби // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, вып. 6. С. 1263–1283.
3. Шарпудинов И. И. О сходимости метода наименьших квадратов // Мат. заметки. 1993. Т. 53, вып. 3. С. 131–143.
4. Даугавет И. К., Рафальсон С. З. О некоторых неравенствах для алгебраических многочленов // Вестн. Ленинград. ун-та. 1974. № 19. С. 18–24.
5. Конягин С. В. О неравенстве В. А. Маркова для многочленов в метрике  $L$  // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1980. № 145. С. 117–125.
6. Нурмагомедов А. А. Об асимптотике многочленов, ортогональных на произвольных сетках // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2008. Т. 8. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 28–31.
7. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.





УДК 512.643.2+512.558

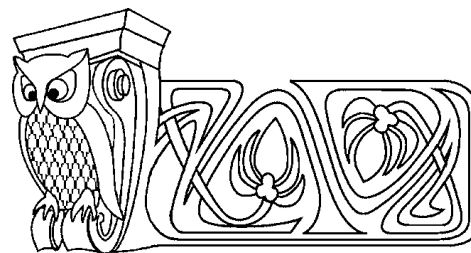
## ФОРМУЛЫ КРАМЕРА ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ НАД БУЛЕВОЙ АЛГЕБРОЙ

В. Б. Поплавский

Саратовский государственный университет,  
кафедра геометрии  
E-mail: poplavskivb@mail.ru

Получены аналоги классических формул Крамера для систем линейных уравнений и неравенств с квадратной матрицей коэффициентов из произвольной булевой алгебры.

**Ключевые слова:** линейные системы, Крамер, булевы матрицы, обратимые матрицы, детерминант, перманент.



**Cramer's Formulas for Systems of Linear Equations  
and Inequalities Over Boolean Algebra**

V. B. Poplavski

Saratov State University  
Chair of Geometry  
E-mail: poplavskivb@mail.ru

There obtained analogies of classical Cramer's formulas for systems of linear equations and inequalities with square matrix of coefficients from Boolean algebra.

**Key words:** linear systems, Cramer, Boolean matrices, invertible matrices, determinant, permanent.

### ВВЕДЕНИЕ

Теория детерминантов квадратных матриц с элементами из коммутативного кольца возникла из проблемы классификации алгебраических кривых в результате поиска Габриэлем Крамером способа решения систем линейных уравнений (1750 г.). Привлекая своим изяществом, формулы Крамера подвинули к построению теории определителей над полями и распространению её на тела, кольца и полукольца.

Так, первые попытки введения «некоммутативных» детерминантов были сделаны Артуром Кэли для кватернионов. Далее, в основном в XX веке, с возникновением задач физики высоких энергий и теории элементарных частиц происходит появление различных типов некоммутативных определителей [1]. Последователи Ж. Дьёдонне [2, 3] вводят понятие определителя как гомоморфизма, определённого на группе обратимых квадратных матрицах над телом в его факторгруппу по коммутанту, т. е. как отображение, удовлетворяющее классической формуле Коши – Бине для определителей произведения квадратных матриц. Всякий гомоморфизм мультипликативной полугруппы квадратных матриц с элементами из некоторого кольца в некоторую коммутативную полугруппу с единицей, как показал И. С. Понизовский [4], можно рассматривать как определитель со свойствами аддитивности для строк и столбцов, левой однородностью для строк и правой однородностью для столбцов, обладающий в некотором смысле антиперестановочностью строк и столбцов и позволяющий считать обратимость матрицы  $A$ , эквивалентной условию  $\det A \neq 0$ . Такой подход позволяет в некоторых случаях получить выражение элементов обратных матриц через детерминант и записать решения систем линейных уравнений в форме, аналогичной формулам Крамера (см., например, [5]).

Стремление ввести определитель квадратной матрицы в случае коммутативного полукольца также наталкивается на определенные проблемы. Это прежде всего происходит от того, что не все элементы полукольца имеют аддитивные обратные. Для матриц с элементами из коммутативного полукольца такие проблемы решались (например, в работах [6–10] и автором этой статьи) в случае произвольной булевой алгебры.

Определяя детерминант квадратной матрицы с элементами из произвольной булевой алгебры через симметрическую разность полуперманентов, определяемых ниже, мы не получаем гомоморфизма мультипликативной полугруппы квадратных матриц в коммутативное полукольцо, каковым является булева алгебра. Кроме этого он не обладает свойством полилинейности относительно строк и столбцов. Однако для такого детерминанта выполняется неравенство:  $\det AB \leq \det A \cdot \det B$  и некоторое неравенство, заменяющее полилинейность относительно строк и столбцов. Это позволяет доказать, что введенный таким образом детерминант является инвариантом  $H$ -классов Грина в частичной полугруппе булевых матриц всевозможных размеров. Более того, оказывается, что такой определитель



даёт возможность ввести понятие минорного ранга, аналогичного соответствующему понятию в теории над полем. Этот ранг является инвариантом **D**-классов или совпадающих с ними **J**-классов Грина в частичной полугруппе булевых матриц всевозможных размеров. Эти и другие свойства таких булевых определителей, а также их приложения, можно найти в работе [11].

Метод решения линейных систем Крамера тесно связан с формулами разложения детерминантов по строке или столбцу, а также с выражением элементов обратной матрицы через алгебраические дополнения. Для матриц с элементами из коммутативного полукольца такие проблемы решались, например, в работах [7, 8, 10], а в случае произвольной булевой алгебры в статьях [12, 13].

В данной работе мы получаем аналоги классических формул Крамера для квадратных систем линейных уравнений с обратимой матрицей коэффициентов из произвольной булевой алгебры и распространяем их на случай систем линейных неравенств с произвольными квадратными матрицами коэффициентов.

## 1. ПЕРМАНЕНТЫ, ДЕТЕРМИНАНТЫ И ЭЛЕМЕНТЫ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ

Матрицы одного и того же размера  $m \times n$  с элементами из произвольной булевой алгебры  $\langle \mathbf{B}, \cup, \cap, ', 0, 1 \rangle$  вновь образуют булеву алгебру  $\langle \mathbf{B}_{m \times n}, \cup, \cap, ', O, J \rangle$ . Операции объединения  $\cup$ , пересечения  $\cap$  и дополнения  $'$  матриц определяются поэлементно. Нулем и единицей такой вторичной булевой алгебры служат матрицы  $O$  и  $J$  размера  $m \times n$ , образованные целиком из нулей и единиц соответственно.

**Определение 1.1.** Произведением матрицы  $A = (A_j^i) \in \mathbf{B}_{m \times n}$  на матрицу  $B = (B_s^t) \in \mathbf{B}_{n \times k}$  назовём матрицу  $C = A \cdot B \in \mathbf{B}_{m \times k}$ , элементы которой вычисляются по формуле  $C_s^i = \bigcup_{t=1}^n (A_t^i \cap B_s^t)$ .

Очевидно, что множество квадратных матриц с операцией произведения образует некоммутативную полугруппу с единицей  $E = (\delta_j^i)$ , где  $\delta_j^i = 1$ , если  $i = j$ , и  $\delta_j^i = 0$ , если  $i \neq j$ .

**Определение 1.2.** Определителем квадратной матрицы  $A = (A_j^i)$  с элементами из произвольной булевой алгебры  $\langle \mathbf{B}, \cup, \cap, ', 0, 1 \rangle$  назовём симметрическую разность

$$\text{Det } A = (\bigvee^+ A \cap (\bigvee^- A)') \cup (\bigvee^- A \cap (\bigvee^+ A)')$$

$$\text{полуперманентов } \bigvee^+ A = \bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \bar{P}} (A_1^{\alpha_1} \cap A_2^{\alpha_2} \cap \dots \cap A_n^{\alpha_n}) \text{ и } \bigvee^- A = \bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in P} (A_1^{\alpha_1} \cap A_2^{\alpha_2} \cap \dots \cap A_n^{\alpha_n}).$$

В этих формулах  $\bar{P}$  и  $P$  обозначают соответственно все чётные и нечётные подстановки верхних строчных индексов.

Перманентом квадратной матрицы  $A = (A_j^i)$  называют  $\text{Per } A = (\bigvee^+ A \cup \bigvee^- A)$ .

**Определение 1.3.** Ориентированными присоединёнными матрицами для матрицы  $A$  назовём матрицы  $\overset{+}{adj} A$  и  $\overset{-}{adj} A$ , элементами которых являются  $(\overset{\pm}{adj} A)_j^i = \sigma^{i+j} (\bigvee^{\pm} A) \partial_j^i A$  для всех  $i, j = 1, \dots, n$ . Здесь символом  $\partial_j^i A$  обозначена матрица, полученная из матрицы  $A$  удалением  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца с условием, что остальные строки и столбцы сохраняют прежний порядок следования друг за другом, а  $\sigma^{i+j}$  — функция знака. Функции знака  $\overset{m}{\sigma}$  на ориентированных полуперманентах квадратной булевой матрицы  $A$  определяются следующим образом:  $\overset{m}{\sigma} (\bigvee^+ A) = \bigvee^+ A$ ,  $\overset{m}{\sigma} (\bigvee^- A) = \bigvee^- A$ , если  $m$  — чётное, и  $\overset{m}{\sigma} (\bigvee^+ A) = \bigvee^- A$ ,  $\overset{m}{\sigma} (\bigvee^- A) = \bigvee^+ A$ , если  $m$  — нечётное.

**Определение 1.4.** Матрица  $A$  называется обратимой, если существует такая матрица  $A^{-1}$ , что выполняются равенства  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ . Матрицу  $A^{-1}$  называют обратной матрицей для  $A$ .

Общий вид обратимой булевой матрицы и различные условия обратимости хорошо известны (см. [8, 13–15]). Вывод формул из следующего утверждения, имеющих определённое сходство с известными выражениями для элементов обратных числовых матриц, можно найти в [12].

**Теорема 1.1.** Если  $(n \times n)$ -матрица  $A$  обратима, то элементы обратной булевой матрицы  $A^{-1}$  определяются равенствами

$$(A^{-1})_i^j = \text{Per } \partial_j^i A = \text{Det } \partial_j^i A, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

т. е. они находятся как алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы  $A^T$ .



## 2. ФОРМУЛЫ КРАМЕРА

Рассмотрим систему  $n$  линейных уравнений  $\bigcup_{k=1}^n (A_k^i \cap X^k) = B^i$  с  $n$  неизвестными  $X^i, i = 1, \dots, n$  и перепишем её в матричной форме:  $AX = B$ . Аналог классических формул Крамера даёт следующее утверждение.

**Теорема 2.2.** Система  $n$  линейных уравнений  $\bigcup_{k=1}^n (A_k^i \cap X^k) = B^i$  с  $n$  неизвестными  $\{X^i; i = 1, \dots, n\}$  и с обратимой матрицей коэффициентов  $A$  имеет единственное решение, которое можно найти по формуле  $X^i = \text{Per } A_{\langle B \Rightarrow [i] \rangle}$ . Здесь  $A_{\langle B \Rightarrow [i] \rangle}$  — матрица, полученная из квадратной булевой матрицы  $A$  заменой её  $i$ -го столбца столбцом  $B$ .

**Доказательство.** Так как булева квадратная  $n \times n$ -матрица  $A$  коэффициентов данной системы является обратимой, то, с одной стороны, для каждой неизвестной выражение  $X^i = (A^{-1}B)^i = \bigcup_{k=1}^n ((A^{-1})_k^i \cap B^k)$  даёт единственное решение. С другой стороны, учитывая, что  $\text{Per } A_{\langle B \Rightarrow [i] \rangle} = \bigcup_{k=1}^n (B^k \cap \text{Per } \partial_i^k A)$  есть разложение перманента по  $i$ -му столбцу (см. [12]) и теорему 1.1, получаем  $X^i = \text{Per } A_{\langle B \Rightarrow [i] \rangle}$ .  $\square$

**Пример 2.1.** Пусть коэффициенты  $a$  и  $b$  в системе уравнений

$$\begin{cases} (a \cap x) \cup (b \cap y) = c, \\ (b \cap x) \cup (a \cap y) = d \end{cases}$$

удовлетворяют условиям  $a \cup b = 1$  и  $a \cap b = 0$ . Тогда матрица коэффициентов перед неизвестными обратима, и единственное решение, найденное по формулам Крамера, будет следующее:

$$x = \text{Per} \begin{pmatrix} c & b \\ d & a \end{pmatrix} = (a \cap c) \cup (b \cap d) \text{ и } y = \text{Per} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = (a \cap d) \cup (b \cap c).$$

Получим теперь формулы Крамера для квадратных систем линейных неравенств.

**Теорема 2.3.** Пусть  $A$  — квадратная матрица размера  $n \times n$  и  $X, B$  — столбцы размера  $n \times 1$ . Тогда из неравенства  $AX \subseteq B$  следует, что  $\text{Det } A \cap X \subseteq (\text{adj } A \cup \bar{\text{adj}} A)B$ .

**Доказательство.** Так как  $\text{Det } A \subseteq \text{Per } A$  и для перманентов выполняются формулы разложения по любому столбцу или строке (см. [12]), то несложно показать справедливость неравенства  $\text{Det } A \cap E \subseteq ((\text{adj } A)A) \cup ((\bar{\text{adj}} A)A)$ , где  $E$  — единичная матрица. Тогда из неравенства  $AX \subseteq B$  в силу изотонности произведения получаем неравенства  $(\text{adj } A)(AX) \subseteq (\text{adj } A)B$  и  $\bar{\text{adj}} A(AX) \subseteq (\bar{\text{adj}} A)B$ . Следовательно, используя ассоциативность произведения булевых матриц и его дистрибутивность относительно объединения матриц, получаем неравенство  $\text{Det } A \cap X \subseteq (\text{adj } A \cup \bar{\text{adj}} A)B$ .  $\square$

Продолжение формул Крамера на случай систем линейных неравенств с коэффициентами из произвольной булевой алгебры даёт следующее утверждение.

**Теорема 2.4.** Для решений системы  $n$  линейных неравенств  $\bigcup_{k=1}^n (A_k^i \cap X^k) \subseteq B^i$  с  $n$  неизвестными  $X^i (i = 1, \dots, n)$  выполняются неравенства  $\text{Det } A \cap X^i \subseteq \text{Per } A_{\langle B \Rightarrow [i] \rangle}$ .

**Доказательство.** Указанные неравенства получаются из формулы предыдущей теоремы 2.3 переходом к её поэлементной записи и формул разложения полуперманентов для матрицы  $A_{\langle B \Rightarrow [i] \rangle}$  по столбцу  $B$ .  $\square$

**Пример 2.2.** Пусть  $A$  — квадратная матрица, а  $X$  и  $O$  — столбцы в уравнении  $AX = O$  над произвольной булевой алгеброй. Если  $\text{Det } A = 1$ , то  $X = O$  является единственным решением этого уравнения. Действительно, так как  $AX = O \leftrightarrow AX \subseteq O$ , то выполняются формулы предыдущей теоремы и  $X^i \subseteq \text{Per } A_{\langle O \Rightarrow [i] \rangle}$ . В правых частях последних формул находятся перманенты матриц с нулевым столбцом, а такие перманенты равны нулю. Таким образом,  $X^i \subseteq \text{Per } A_{\langle O \Rightarrow [i] \rangle} = 0$  для всех значений  $i$ , поэтому  $X = O$  является единственным решением уравнения  $AX = O$ .

В качестве следствий из рассмотренного примера получаем, во-первых, нулевая линейная комбинация строк или столбцов квадратной матрицы над произвольной булевой алгеброй с единичным детерминантом возможна только с нулевыми коэффициентами. Во-вторых, булевы квадратные матрицы с детерминантом равным единице дают примеры не взаимно однозначных (необратимых) в общем случае линейных операторов, определенных на полумодуле булевых векторов-столбцов, с ядром, состоящим из одного лишь нуля.



## Библиографический список

1. Дуплий С. А., Котульская О. И. Квазидетерминанты, некоммутативные детерминанты и необратимые суперматричные структуры // Вестн. Харьков. национально-го ун-та. 2003. Т. 585, вып. 1, 21. С. 19–28.
2. Dieudonne' J. Les determinants sur un corps noncommutatiff // Bul. Soc. Math. France. 1943. Vol. 71. P. 27–45.
3. Артин Э. Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1969. 284 с.
4. Понизовский И. С. Об определителе матриц с элементами из некоторого кольца // Мат. сборник. 1958. Т. 45 (87), № 1. С. 3–16.
5. Кирчей И. И. Правило Крамера для кватернионных систем линейных уравнений // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13, № 4. С. 67–94.
6. Соколов О. Б. Применение булевых определителей к анализу логических многополюсников // Ученые записки Казанск. госун-та. 1963. Т. 123, № 6. С. 155–164.
7. Chesley D. S., Bevis J. H. Determinants for matrices over lattices // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1969. A. 68, № 2. P. 138–144.
8. Reutenauer C., Straubing H. Inversion of matrices over a commutative semiring // J. of Algebra. 1984. Vol. 88. P. 350–360.
9. Kuntzmann J. Théorie des réseaux (graphes). Paris: Dunod, 1972.
10. Poplin P. L., Hartwig R. E. Determinantal identities over commutative semirings // Linear Algebra Appl. 2004. Vol. 387. P. 99–132.
11. Поплавский В. Б. О рангах, классах Грина и теории определителей булевых матриц // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 4. С. 42–60.
12. Поплавский В. Б. О разложении определителей булевых матриц // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13, вып. 4. С. 199–223.
13. Поплавский В. Б. Обратимые и присоединенные булевы матрицы // Чебышевский сб. 2005. Т. 6, вып. 1. С. 174–181.
14. Rutherford D. E. Inverses of Boolean matrices // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1963. Vol. 6, № 1. P. 49–53.
15. Скорняков Л. А. Обратимые матрицы над дистрибутивными структурами // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 2. С. 182–185.

УДК 512.548 + 512.571

## О КОНГРУЭНЦИЯХ ЧАСТИЧНЫХ $n$ -АРНЫХ ГРУППОИДОВ

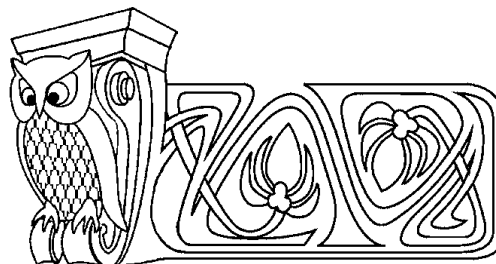
А.В. Решетников

Московский институт электронной техники,  
кафедра высшей математики – 1  
E-mail: a\_reshetnikov@lavabit.com

Введено понятие  $R_i$ -конгруэнции частичного  $n$ -арного группоида как обобщение понятия правой или левой конгруэнции обычного группоида. Доказано, что при фиксированном  $i$   $R_i$ -конгруэнции частичного  $n$ -арного группоида  $G$  образуют решётку, в которой решётка конгруэнций на  $G$  не обязательно является подрешёткой. Построен пример, когда решётка конгруэнций частичного  $n$ -арного группоида  $G$  не является подрешёткой решётки отношений эквивалентности на  $G$ . Дается характеристика частичных  $n$ -арных группоидов, на которых при некотором  $i$  каждое отношение эквивалентности является  $R_i$ -конгруэнцией.

**Ключевые слова:** частичный группоид,  $n$ -арный группоид, решётка конгруэнций, решётка односторонних конгруэнций, решётка отношений эквивалентности.

Свойства конгруэнций универсальных алгебр активно изучаются многими авторами, и в этом направлении имеется немало интересных результатов; их обзор представлен, например, в [1]. Хорошо известно, что конгруэнции произвольной универсальной алгебры  $A$  образуют решётку по включению, и эта решётка является подрешёткой решётки отношений эквивалентности на множестве  $A$ . В работе [2] изучались алгебры, у которых конгруэнцией является любое отношение эквивалентности. Для таких алгебр была получена простая характеристика. К тому же она была уточнена для частных случаев универсальных алгебр — группоидов и полугрупп [2].



### On Congruences of Partial $n$ -ary Groupoids

A.V. Reshetnikov

Moscow Institute of Electronic Technology,  
Chair of Higher Mathematics – 1  
E-mail: a\_reshetnikov@lavabit.com

$R_i$ -congruence is defined for partial  $n$ -ary groupoids as a generalization of right congruence of a full binary groupoid. It is proved that for any  $i$  the  $R_i$ -congruences of a partial  $n$ -ary groupoid  $G$  form a lattice, where the congruence lattice of  $G$  is not necessary a sublattice. An example is given, demonstrating that the congruence lattice of a partial  $n$ -ary groupoid is not always a sublattice of the equivalence relations lattice of  $G$ . The partial  $n$ -ary groupoids  $G$  are characterized such that for some  $i$ , all the equivalence relations on  $G$  are its  $R_i$ -congruences.

**Key words:** partial groupoid,  $n$ -ary groupoid, congruence lattice, one-sided congruence lattice, equivalence relation lattice.



Представляет интерес обобщить результаты работы [2] на случай частичных универсальных алгебр, которые изучены в гораздо меньшей степени, чем обычные (полные) универсальные алгебры. Многие понятия (например, ассоциативность) обобщаются на случай частичных универсальных алгебр различными неэквивалентными способами. Основы теории частичных универсальных алгебр изложены в монографии [3]. Свойства алгебраических объектов далеко не всегда сохраняются при обобщениях такого рода. Не всегда сохраняется, как будет доказано в данной работе, упомянутое свойство решётки конгруэнций быть подрешёткой решётки отношений эквивалентности. Мы определим квазиконгруэнцию и покажем, что для полных универсальных алгебр понятия квазиконгруэнции и конгруэнции совпадают, а для частичных алгебр решётка конгруэнций не обязана быть даже подрешёткой решётки квазиконгруэнций.

Некоторое обобщение результатов работы [2] даётся во второй части данной работы. В конце рассмотрен пример, показывающий, что частичные универсальные алгебры, у которых каждое отношение эквивалентности является квазиконгруэнцией, устроены гораздо сложнее полных универсальных алгебр, обладающих таким же свойством.

### 1. О КОНГРУЭНЦИЯХ ЧАСТИЧНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

Напомним некоторые определения (подробнее см. в [3]). Пусть  $A$  — произвольное множество,  $A'$  — какое-либо подмножество множества  $A^n$ ,  $f : A' \rightarrow A$  — отображение. Тогда говорят, что на множестве  $A$  задана *частичная  $n$ -арная операция*  $f$ . Пусть  $\Sigma = \{f_\alpha | \alpha \in I\}$  — множество (конечное или бесконечное) частичных операций, заданных на  $A$ . Тогда  $A$  называется *частичной универсальной алгеброй*. При этом множество  $\Sigma$  называется *сигнатурой* частичной универсальной алгебры  $A$ . Если в сигнатуру частичной универсальной алгебры  $A$  входит только одна операция, являющаяся частичной  $n$ -арной, то будем говорить, что  $A$  — *частичный  $n$ -арный группоид*.

Отношение эквивалентности  $\sim$  на частичной универсальной алгебре  $A$  называется *конгруэнцией*, если для любой операции  $f \in \Sigma$  и любых элементов  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$  таких, что  $a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n$ , выполняется следующее условие: если  $f(a_1, \dots, a_n)$  и  $f(b_1, \dots, b_n)$  определены, то  $f(a_1, \dots, a_n) \sim f(b_1, \dots, b_n)$ . Отношение эквивалентности  $\sim$  на частичном  $n$ -арном группоиде  $A$  назовём  *$R_i$ -конгруэнцией*, или *конгруэнцией на  $i$ -й позиции*, если для любой операции  $f \in \Sigma$  и любых  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b, c \in A$  таких, что  $b \sim c$ , выполняется условие: либо  $f(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)$  не определено, либо  $f(a_1, \dots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \dots, a_n)$  не определено, либо  $f(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n) \sim f(a_1, \dots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \dots, a_n)$ . Если  $A$  является бинарным (т. е. обычным) группоидом, то  $R_1$ -конгруэнция на  $A$  — это то же самое, что *правая конгруэнция* на  $A$ , а  $R_2$ -конгруэнция на  $A$  — это *левая конгруэнция* на  $A$ .

Множество всех отношений эквивалентности на множестве  $A$  обозначим через  $\text{Eq } A$ , множество всех конгруэнций —  $\text{Con } A$ , множество всех  $R_i$ -конгруэнций —  $R_i \text{Con } A$ . Введём также следующие отношения эквивалентности на множестве  $A$ :  $\Delta = \{(a, a) | a \in A\}$ ,  $\rho_{a,b} = \Delta \cup \{(a, b), (b, a)\}$  (при  $a \neq b$ ).

Следующее утверждение непосредственно следует из определений.

**Предложение 1.1.** Пусть  $A$  — частичный  $n$ -арный группоид. Каким бы ни было натуральное число  $i \leq n$ , любая конгруэнция на  $A$  является на нём  $R_i$ -конгруэнцией.

Другими словами,  $\text{Con } A \subseteq R_1 \text{Con } A \cap \dots \cap R_n \text{Con } A$ . Но, как показывает следующий пример, в общем случае  $\text{Con } A \neq R_1 \text{Con } A \cap \dots \cap R_n \text{Con } A$ .

**Пример 1.1.** Пусть  $A = \{a, b, c\}$  и каждый из элементов  $a, c$  совпадает с каким-нибудь из произведений  $aa, ab, ba, bb$  (при этом некоторые из этих четырёх произведений могут быть не определены). Тогда отношение эквивалентности  $\rho_{a,b}$  не является конгруэнцией. Если не определены произведения  $aa$  и  $bb$  или  $ab$  и  $ba$ , то отношение  $\rho_{a,b}$  может оказаться одновременно правой и левой конгруэнцией — например, в случае частичного группоида, заданного следующей таблицей Кэли:

	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	—	—
$b$	—	$c$	—
$c$	—	—	—



Другими словами, класс частичных ( $n$ -арных) группоидов, у которых каждое отношение эквивалентности является одновременно  $R_1, \dots, R_n$ -конгруэнцией, шире, чем класс частичных ( $n$ -арных) группоидов, у которых каждое отношение эквивалентности является конгруэнцией. Введём обозначение:  $R_1 \text{ Con } A \cap \dots \cap R_n \text{ Con } A = \text{QCon } A$ . Элемент множества  $\text{QCon } A$  назовём квазиконгруэнцией.

Пусть  $\sigma \in \text{QCon } A$ . Получим достаточное условие того, что  $\sigma \in \text{Con } A$ . Множество всех тех наборов  $(a_1, \dots, a_n)$ , для которых определено произведение  $f(a_1, \dots, a_n)$ , обозначим через  $V$ ; таким образом,  $V \subseteq A^n$ . Являясь отношением эквивалентности,  $\sigma$  разбивает группоид на классы эквивалентности. Для каждого набора классов  $(K_1, \dots, K_n)$  введём бинарное отношение  $E_{K_1, \dots, K_n} \subseteq (V \cap (K_1 \times \dots \times K_n))^2$ , в котором пусть находятся наборы, отличающиеся ровно одной компонентой, и только они. Тогда будет иметь место следующее утверждение.

**Предложение 1.2.** Если для данной квазиконгруэнции все графы  $(V, E_{K_1, \dots, K_n})$  являются связными, то эта квазиконгруэнция является конгруэнцией.

**Доказательство.** Пусть произведения  $f(a_1, \dots, a_n)$  и  $f(b_1, \dots, b_n)$  определены для некоторых  $a_1 \sim b_1 \in K_1, \dots, a_n \sim b_n \in K_n$ . Класс эквивалентности, в котором находится элемент  $f(a_1, \dots, a_n)$ , обозначим через  $K$ . Имеем  $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in V \cap K_1 \times \dots \times K_n$ . Тогда, поскольку граф  $(V, E_{K_1, \dots, K_n})$  является связным, можно построить путь  $(e_1, \dots, e_l)$  из  $(a_1, \dots, a_n)$  в  $(b_1, \dots, b_n)$ . Следующим образом получаем, что  $f(b_1, \dots, b_n) \in K$ :  $f(a_1, \dots, a_n) \in K$ , а если  $(c_1, \dots, c_n) \in V \cap K_1 \times \dots \times K_n$ ,  $f(c_1, \dots, c_n) \in K$  и из вершины  $(c_1, \dots, c_n)$  какое-то ребро графа  $(V, E_{K_1, \dots, K_n})$  ведёт в вершину  $(d_1, \dots, d_n)$ , то наборы  $(c_1, \dots, c_n)$  и  $(d_1, \dots, d_n)$  отличаются ровно одной компонентой, и потому по определению квазиконгруэнции  $f(d_1, \dots, d_n) \in K$ .

Из предложения следует, что если  $A$  является полным ( $n$ -арным) группоидом, то каждая квазиконгруэнция на  $A$  является конгруэнцией на  $A$ , т.е. для полного группоида выполняется равенство  $\text{Con } A = \text{QCon } A$ .

В произвольной решётке  $L$  операции инфимума и супремума будем обозначать соответственно  $\wedge_L$  и  $\vee_L$ . При этом, если понятно, о какой решётке идёт речь, будем писать просто  $\wedge$  и  $\vee$ .

Напомним следующий известный факт из теории решёток.

**Предложение 1.3.** Полная по инфимумам полурешётка с наибольшим элементом является полной решёткой.

Пользуясь им, докажем следующее утверждение.

**Предложение 1.4.** Пусть  $A$  — частичный  $n$ -арный группоид. Тогда каждое из множеств  $R_1 \text{ Con } A, \dots, R_n \text{ Con } A, \text{QCon } A, \text{Con } A$  является решёткой, причём в любой из этих решёток  $\sigma \wedge \tau = \sigma \cap \tau$ .

**Доказательство.** Легко видеть, что пересечение  $[R_i]$  конгруэнций частичного группоида является его  $[R_i]$  конгруэнцией. Так как  $A^2$  является наибольшим элементом в любом из множеств  $R_1 \text{ Con } A, \dots, R_n \text{ Con } A, \text{QCon } A, \text{Con } A$ , то из предложения 1.3 следует, что каждое из этих множеств является полной решёткой.

Хорошо известно, что если  $a, b, c, d$  — различные элементы полного  $n$ -арного группоида  $A$ , то справедливы следующие утверждения:

- (i)  $\rho_{a,b}, \rho_{c,d} \in R_i \text{ Con } A \Rightarrow \rho_{a,b} \cup \rho_{c,d} = \rho_{a,b} \vee \rho_{c,d} \in R_i \text{ Con } A$ ;
- (ii)  $\rho_{a,b}, \rho_{c,d} \in \text{Con } A \Rightarrow \rho_{a,b} \cup \rho_{c,d} = \rho_{a,b} \vee \rho_{c,d} \in \text{Con } A$ ;
- (iii)  $\rho_{a,b}, \rho_{b,c} \in R_i \text{ Con } A \Rightarrow \Delta \cup \{a, b, c\}^2 = \rho_{a,b} \vee \rho_{b,c} \in R_i \text{ Con } A$ ;
- (iv)  $\rho_{a,b}, \rho_{b,c} \in \text{Con } A \Rightarrow \Delta \cup \{a, b, c\}^2 = \rho_{a,b} \vee \rho_{b,c} \in \text{Con } A$ .

Из них следует, что если  $A$  — полный  $n$ -арный группоид, то каждое из множеств  $R_i \text{ Con } A$  является подрешёткой решётки  $\text{Eq } A$ , а множество  $\text{Con } A = \text{QCon } A$  является подрешёткой каждой из решёток  $R_i \text{ Con } A$ . Для частичного же  $n$ -арного группоида, как мы сейчас докажем, остаётся в силе только утверждение (i). Более того, если  $A$  — частичный  $n$ -арный группоид, то мы покажем, что из  $\rho_{a,b}, \rho_{b,c} \in \text{Con } A$  не следует, что  $\Delta \cup \{a, b, c\}^2 \in R_i \text{ Con } A$ .



**Пример 1.2.** Пусть произведение элементов частичного группоида  $A$  определено следующей таблицей Кэли ( $x, y$  — произвольные элементы):

	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	—	$d$	$x$
$b$	—	—	$d$	$x$
$c$	$d$	$d$	$d$	$x$
$d$	$x$	$x$	$x$	$y$

Нетрудно видеть, что отношения  $\rho_{a,b}$  и  $\rho_{b,c}$  являются конгруэнциями, в то время как отношение  $\Delta \cup \{a, b, c\}^2$  не является ни правой, ни левой конгруэнцией этого частичного группоида. Этим опровергаются импликации (iii) и (iv).

**Пример 1.3.** Рассмотрим частичный группоид со следующей таблицей умножения:

	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$a$	$a$	—
$b$	$a$	$b$	—	$d$
$c$	$a$	—	$c$	$d$
$d$	—	$d$	$d$	$d$

Легко показать, что каждое отношение эквивалентности вида  $\rho_{x,y}$  является конгруэнцией данного группоида. В то же время отношение  $\sigma = \Delta \cup \{a, b\}^2 \cup \{c, d\}^2$  не является конгруэнцией, так как  $(a, b), (c, d) \in \sigma$ , но  $(ac, bd) = (a, d) \notin \sigma$ . Этим опровергается импликация (ii).

**Предложение 1.5.** Пусть  $a, b, c, d$  — различные элементы частичного  $n$ -арного группоида  $A$ . Тогда  $\rho_{a,b}, \rho_{c,d} \in R_i \text{Con } A \Rightarrow \rho_{a,b} \cup \rho_{c,d} = \rho_{a,b} \vee_{R_i \text{Con } A} \rho_{c,d} \in R_i \text{Con } A$ .

**Доказательство.** Легко видеть, что  $\rho_{a,b} \cup \rho_{c,d} \in R_i \text{Con } A$ . Но так как в решётке  $\text{Eq } A$  выполняется  $\rho_{a,b} \cup \rho_{c,d} = \rho_{a,b} \vee \rho_{c,d}$ , то в решётке  $R_i \text{Con } A$  отношение  $\rho_{a,b} \cup \rho_{c,d}$  является супремумом отношений  $\rho_{a,b}$  и  $\rho_{c,d}$ .

Таким образом, оказывается, что решётки конгруэнций частичных  $n$ -арных группоидов устроены сложнее, чем решётки конгруэнций полных  $n$ -арных группоидов. Из предложения 1.1, из определений квазиконгруэнции и  $R_i$ -конгруэнции следует, что для любого частичного  $n$ -арного группоида

$$\text{Con } A \subseteq \text{QCon } A \subseteq R_i \text{Con } A \subseteq \text{Eq } A.$$

Покажем, что ни одно из этих четырёх множеств не является в общем случае подрешёткой какого-либо другого множества из этих четырёх.

Из примера 1.2 следует, что в решётке  $\text{Eq } A$  ни одно из подмножеств  $\text{Con } A, R_i \text{Con } A, \text{QCon } A$  не является в общем случае подрешёткой. Действительно,  $\Delta \cup \{a, b, c\}^2 = \rho_{a,b} \vee_{\text{Eq } A} \rho_{b,c}$ , но  $\rho_{a,b} \vee_L \rho_{b,c} = A^2$  при  $L = \text{Con } A, R_i \text{Con } A, \text{QCon } A$ .

Пример 1.3 показывает, что в решётках  $\text{QCon } A$  и  $R_i \text{Con } A$  подмножество  $\text{Con } A$  не обязательно является подрешёткой. Действительно, из предложения 1.5 следует, что  $\Delta \cup \{a, b\}^2 \cup \{c, d\}^2 = \rho_{a,b} \vee_{\text{QCon } A} \rho_{c,d} = \rho_{a,b} \vee_{R_i \text{Con } A} \rho_{c,d}$ , но  $\Delta \cup \{a, b\}^2 \cup \{c, d\}^2 \neq \rho_{a,b} \vee_{\text{Con } A} \rho_{c,d}$ .

**Пример 1.4.** В частичном бинарном группоиде следующей таблицей Кэли:

	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$a$	$a$	$a$
$b$	—	—	—	—
$c$	$d$	$d$	$d$	$d$
$d$	—	—	—	—

выполняется следующее соотношение:  $\rho_{a,b} \vee_{R_2 \text{Con } A} \rho_{b,c} = \Delta \cup \{a, b, c\}^2 \notin R_1 \text{Con } A$ . Из него следует, что в решётке  $R_i \text{Con } A$  подмножество  $\text{QCon } A$  не является в общем случае подрешёткой.



## 2. О ЧАСТИЧНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБРАХ, У КОТОРЫХ КАЖДОЕ ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЯВЛЯЕТСЯ КОНГРУЭНЦИЕЙ

В работе [2] была доказана теорема, характеризующая алгебры, у которых каждое отношение эквивалентности является конгруэнцией. Чтобы её сформулировать, нам понадобятся следующие определения. Операция  $f$  (на универсальной алгебре  $A$ ) называется *константой*, если существует такое  $c \in A$ , что  $f(a_1, \dots, a_n) = c$  при всех  $a_1, \dots, a_n \in A$ . Операция  $f$  — *проекция*, если существует такое  $i$ , что  $f(a_1, \dots, a_n) = a_i$  при всех  $a_1, \dots, a_n \in A$ .

**Теорема 2.1** [2, теорема 3.3]. Пусть  $A$  — универсальная алгебра с сигнатурой  $\Sigma$ . Все отношения эквивалентности на алгебре  $A$  являются её конгруэнциями в том и только том случае, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- (i)  $|A| \leq 2$ ;
- (ii) каждая операция  $f \in \Sigma$  является константой или проекцией.

Нам также понадобятся следующие определения, первое из которых обобщает понятие области определения из [3]. Областью определения частичной  $n$ -арной операции  $f$  на частичной универсальной алгебре  $A$  называется множество  $\text{dom} f = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n : \text{существует } f(a_1, \dots, a_n)\}$ . Областью значений для  $f$  называется множество  $\text{im} f = \{f(a_1, \dots, a_n) | (a_1, \dots, a_n) \in \text{dom} f\}$ .

**Лемма 2.2.** Пусть на множестве  $A$  определена частичная унарная операция  $\varphi$ . Любое отношение эквивалентности на  $A$  является конгруэнцией тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- (i)  $|\text{dom} \varphi| = 2$  и  $\text{dom} \varphi = \text{im} \varphi$ ;
- (ii)  $\varphi(x) = x$  для любого  $x \in \text{dom} \varphi$ ;
- (iii) при некотором  $c \in A$  выполняется  $\varphi(x) = c$  для всех  $x \in \text{dom} \varphi$ .

**Доказательство.** Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Рассмотрим 3 случая.

*1-й случай:*  $|\text{dom} \varphi| = 2$ . Пусть  $\text{dom} \varphi = \{a, b\}$ . Если  $\varphi(a) = \varphi(b)$ , то выполняется (iii). Если  $\varphi(a) = a$  и  $\varphi(b) = b$ , то выполняется (ii). Если  $\varphi(a) = b$  и  $\varphi(b) = a$ , то выполняется (i). Иначе отношение эквивалентности  $\rho_{a,b}$  не является конгруэнцией.

*2-й случай:*  $\text{im} \varphi \subseteq \text{dom} \varphi$ . В этом случае подмножество  $\text{dom} \varphi$  является полной подалгеброй. Применяя теорему 2.1 к множеству  $\text{dom} \varphi$  и используя определение подалгебры, получим, что выполняется хотя бы одно из условий (i) — (iii).

*3-й случай:*  $|\text{dom} \varphi| \geq 3$ ,  $\text{im} \varphi \setminus \text{dom} \varphi \neq \emptyset$ . Тогда найдётся такой элемент  $x \in \text{dom} \varphi$ , что  $\varphi(x) \notin \text{dom} \varphi$ . Условия (i) и (ii) не выполнены. Если условие (iii) также не выполнено, то найдётся такой элемент  $y \in \text{dom} \varphi$ , что  $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ . Поскольку при этом  $\{\varphi(x), \varphi(y)\} \neq \{x, y\}$ , то отношение  $\rho_{x,y}$  не является конгруэнцией в противоречие с условием леммы. Таким образом, в данном случае выполняется условие (iii).

Если ни один из рассмотренных случаев не имеет места, то  $|\text{dom} \varphi| \leq 1$ , и выполняется условие (iii).

Набор  $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$  элементов частичного  $n$ -арного группоида  $A$  назовём  *$R_i$ -единицей*, или *единицей на  $i$ -й позиции*, если для любого элемента  $b \in A$  произведение  $f(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)$  либо равно  $b$ , либо не определено. Набор  $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$  элементов из  $A$  назовём *обобщённым  $R_i$ -нулём*, или *обобщённым нулём на  $i$ -й позиции*, если для любых элементов  $b, c \in A$  из того что произведения  $f(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)$  и  $f(a_1, \dots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \dots, a_n)$  существуют, следует, что они равны.  $R_1$ -единицу частичного бинарного группоида назовём просто правой единицей, а обобщённый  $R_1$ -нуль частичного бинарного группоида — просто обобщённым правым нулём.

Для произвольного  $\alpha \in A^{n-1}$  определим частичную  $n$ -арную операцию  $f_\alpha(x)$  следующим образом:  $f_{(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)}(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$ . Будем говорить, что частичная унарная операция  $\varphi$ , заданная на некотором множестве, является *ограничением транспозиции*, если для некоторых элементов  $x, y$  выполняются условия  $\varphi(x) = y$  и  $\varphi(y) = x$ , а для других аргументов значение частичной операции  $\varphi$  не определено.





**Теорема 2.3.** Все отношения эквивалентности частичного  $n$ -арного группоида  $A$  являются его  $R_i$ -конгруэнциями в том и только том случае, если для каждого элемента  $\alpha \in A^{n-1}$  выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- (i)  $\alpha$  является единицей на  $i$ -й позиции;
- (ii)  $\alpha$  является обобщённым нулём на  $i$ -й позиции;
- (iii)  $f_\alpha$  является ограничением транспозиции.

**Доказательство.** Все отношения эквивалентности на  $A$  являются  $R_i$ -конгруэнциями тогда и только тогда, когда все они являются конгруэнциями каждой из частных алгебр  $(A, f_\alpha)$ . Из леммы 2.2 следует, что для этого необходимо и достаточно выполнения хотя бы одного из условий (i)–(iii) теоремы.

При  $n = 2$  получаем описание частичных бинарных группоидов, у которых каждое отношение эквивалентности является правой конгруэнцией:

**Теорема 2.4.** Все отношения эквивалентности частичного бинарного группоида  $A$  являются его  $R_1$ -конгруэнциями (т. е. правыми конгруэнциями) в том и только том случае, если для каждого элемента  $a \in A$  выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- (i)  $a$  является правой единицей;
- (ii)  $a$  является обобщённым правым нулём;
- (iii) частичная унарная операция  $f_a(x) = xa$  является ограничением транспозиции.

Теорема 2.1 описывает полные универсальные алгебры, у которых каждое отношение эквивалентности является квазиконгруэнцией. Ключевую роль в этой теореме играют понятия константы и проекции. В случае частичных универсальных алгебр можно также определить константу как операцию  $f : A^n \rightarrow A$ , для которой  $|f(A, A, \dots, A)| \leq 1$ , и проекцию, как операцию  $f(x_1, \dots, x_n)$  такую, что  $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  либо не определено, либо равно  $x_i$ . Однако теорема, аналогичная теореме 2.1, для частичных универсальных алгебр неверна, как показывает следующий пример.

**Пример 2.1.** Пусть на множестве  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  ( $n \geq 4$ ) частичное умножение задано следующим образом:  $a_i a_j = a_i$ , если оба индекса  $i, j$  являются чётными;  $a_i a_j = a_j$ , если оба индекса  $i, j$  являются нечётными; иначе  $a_i a_j$  не определено. Тогда эта частичная операция не является ни константой ( $a_1 a_1 = a_1 \neq a_2 = a_2 a_2$ ), ни проекцией на первый аргумент ( $a_1 a_3 = a_3 \neq a_1$ ), ни проекцией на второй аргумент ( $a_2 a_4 = a_2 \neq a_4$ ). В то же время легко видеть, что каждое отношение эквивалентности является квазиконгруэнцией на  $A$ , а значит,  $\text{Con } A = \text{Eq } A$ .

Отметим следующее следствие из теоремы 2.3.

**Предложение 2.5.** Пусть частичный  $n$ -арный группоид  $A$  удовлетворяет условию:

$$|f(a_1, \dots, a_{i-1}, A, a_{i+1}, \dots, a_n)| \geq 3 \text{ при всех } a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in A.$$

Тогда любое отношение эквивалентности на  $A$  является его  $R_i$ -конгруэнцией в том и только том случае, если  $A$  можно дополнить до полного  $n$ -арного группоида, у которого любое отношение эквивалентности является  $R_i$ -конгруэнцией на  $A$ .

**Доказательство.** Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Рассмотрим произвольный элемент  $\alpha \in A^{n-1}$ . Ввиду условия данной теоремы случай (iii) теоремы 2.3 невозможен, поэтому  $\alpha$  является единицей на  $i$ -й позиции или обобщённым нулём на  $i$ -й позиции. Ясно, что в первом случае  $f_\alpha$  дополняется до проекции на  $i$ -ю компоненту, а во втором случае — до константы. Тогда  $A$  будет дополнен до полного группоида, в котором каждый элемент  $\alpha \in A^{n-1}$  является единицей на  $i$ -й позиции или обобщённым нулём на  $i$ -й позиции. По теореме 2.3 это будет полный группоид, у которого каждое отношение эквивалентности является  $R_i$ -конгруэнцией.

Выражаю благодарность И. Б. Кожухову за постановку некоторых вопросов, ответы на которые получены в данной статье.

### Библиографический список

1. Общая алгебра: в 2 т. Т. 2 / В. А. Артамонов, В. Н. Салий, Л. А. Скорняков и др.; под общ. ред. Л. А. Скорнякова. М.: Наука, Физматлит, 1991, (гл. Универсальные алгебры. С. 295–367).
2. Кожухов И. Б., Решетников А. В. Алгебры, у которых все отношения эквивалентности являются конгруэнциями // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2010. Т. 16, № 3. С. 161–192.
3. Ляпин Е. С., Евсеев А. Е. Частичные алгебраические действия. СПб.: Образование, 1991. 163 с.



УДК 517.977

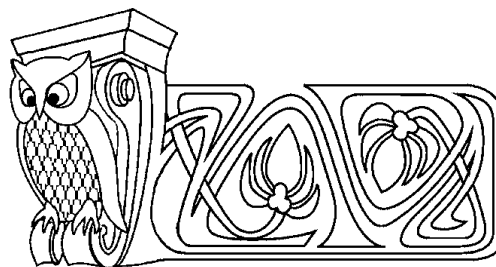
## ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА К ОПТИМИЗАЦИОННЫМ МОДЕЛЯМ ЭКОНОМИКИ

Н. Ю. Трошина, С. В. Трошина\*

Саратовский государственный университет,  
кафедра математической экономики;  
\*ООО «Хоум Кредит энд Финанс Банк», Москва  
E-mail: troshina.n@gmail.com, svetatroshina@gmail.com

В данной работе рассматриваются три варианта модели работы сбытовой фирмы, представляющие собой дискретные задачи оптимального управления. На основе принципа максимума Понтрягина строится алгоритм решения этих задач. Приведены результаты численных расчетов.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, модель фирмы.



### Application the Pontryagin's Maximum Principle to Optimal Economics Models

N. Yu. Troshina, S. V. Troshina\*

Saratov State University,  
Chair of Mathematical Economics;  
\*Home Credit and Financ Bank Limited Liability Company, Moscow  
E-mail: troshina.n@gmail.com, svetatroshina@gmail.com

In this paper three models of firm are considered as the discrete optimal control problems. The algorithm for solution is based on Pontryagin's Maximum Principle. The paper contains numerical examples.

**Key words:** optimal control, model firm.

В статье метод, разработанный в [1–3] для решения дискретных линейно-квадратичных задач оптимального управления, применяется к задачам оптимизации деятельности торгового предприятия. Метод основан на применении принципа максимума Понтрягина и приводит задачу нахождения оптимального управления (цены товара) к решению конечного числа систем линейных алгебраических уравнений. Наиболее общие модели производственно-сбытовой деятельности фирмы описаны в [4], там же содержится обширный список литературы по этому вопросу. В настоящей статье строится модель, учитывающая затраты на хранение и продажу.

Будем рассматривать некоторый период времени  $T$  (например, дней). Обозначим объем товаров на складе в начале дня через  $x(t)$  ( $t = 0, \dots, T$ ), причем, известно, что  $x(0) = N$ . Спрос на товар обозначим через  $V(t)$  (это объем продаж за 1 день). Динамику продаж можно описать уравнением:

$$x(t+1) = x(t) - V(t) - kx(t), \quad t = 0, \dots, T-1,$$

где  $k$  — коэффициент порчи. Обозначим затраты дня через  $Y(t)$ . Они складываются из затрат на продажу и хранение. Пусть  $n$  — затраты на продажу 1 единицы товара,  $m$  — затраты на хранение 1 единицы товара. Динамика изменения затрат:

$$Y(t+1) = Y(t) + nV(t) + mx(t), \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Пусть  $u(t)$  — цена 1 единицы товара, назначенная продавцом на данный день. Тогда дневной доход от продажи составит  $V(t)u(t)$ . Будем рассматривать линейную функцию спроса, положим  $V(t) = c_1u(t) + c_2$ , где  $c_1, c_2$  — заданные коэффициенты. Таким образом, деятельность торгового предприятия моделируется следующей системой уравнений:

$$x(t+1) = x(t) - c_1u(t) - c_2 - kx(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \quad x(0) = N, \quad (1)$$

$$Y(t+1) = Y(t) + n(c_1u(t) + c_2) + mx(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \quad Y(0) = 0. \quad (2)$$

**Задача 1.** Введем критерий оптимальности деятельности предприятия, учитывающий следующие показатели. Цена на товар должна определяться таким образом, чтобы общий доход был как можно больше, а ежедневные расходы приближались к запланированным (пусть они будут определяться величиной  $a(t)$ ). Цена при этом должна колебаться в некоторых заданных границах, определяемых величиной  $r(t)$ .

Кроме того, будем предполагать, что в конце срока товар будет полностью продан, а на переменные  $x(t), Y(t)$  наложим ограничения неотрицательности. В результате приходим к следующей задаче оптимального управления: требуется минимизировать квадратичный функционал



$$I = \alpha \sum_{t=0}^T (Y(t) - a(t))^2 - \beta_1 \sum_{t=0}^{T-1} V(t)u(t) + \beta_2 \sum_{t=0}^{T-1} (u(t) - r(t))^2 \rightarrow \min$$

(где  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  — неотрицательные весовые коэффициенты) на траекториях системы (1), (2) при ограничениях:

$$x(0) = N, \quad Y(0) = 0, \quad x(T) = 0, \quad x(t) \geq 0, \quad Y(t) \geq 0, \quad t = 0, \dots, T.$$

Преобразуем полученную задачу. Сделаем замену:  $y(t) = Y(t) - a(t)$ . Тогда уравнение (2) примет вид

$$y(t+1) = mx(t) + y(t) + n(c_1u(t) + c_2) + a(t) - a(t+1), \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Учитывая вид функции спроса, получим:

$$I = \alpha \sum_{t=0}^T y^2(t) + \sum_{t=0}^{T-1} [cu^2(t) + d(t)u(t) + \beta_2 r^2(t)],$$

где  $c = \beta_2 - \beta_1 c_1$ ,  $d(t) = -\beta_1 c_2 - 2\beta_2 r(t)$ .

Преобразуем задачу к векторной форме. Введем обозначения:  $A = \begin{pmatrix} 1-k & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$ ,  $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ,  
 $t = 0, \dots, T$ ,  $b = \begin{pmatrix} -c_1 \\ c_1 n \end{pmatrix}$ ,  $\delta(t) = \begin{pmatrix} -c_2 \\ a(t) - a(t+1) + c_2 n \end{pmatrix}$ ,  $t = 0, \dots, T-1$ ,  $z_0 = \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -a(t) \end{pmatrix}$ ,  
 $t = 1, \dots, T$ ,  $a(0) = 0$ ,  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$ .

В результате получим задачу оптимального управления в следующей постановке:

$$z(t+1) = Az(t) + bu(t) + \delta(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (3)$$

$$z(0) = z_0, \quad x(T) = 0, \quad (4)$$

$$z(t) \geq \bar{z}(t), \quad t = 0, \dots, T, \quad (5)$$

$$I(z, u) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^T \langle Mz(t), z(t) \rangle + \sum_{t=0}^{T-1} [cu^2(t) + d(t)u(t) + \beta_2 r^2(t)] \rightarrow \min, \quad (6)$$

где  $x = \{x(0), x(1), \dots, x(T)\}$  — дискретная траектория,  $u = \{u(0), u(1), \dots, u(T-1)\}$  — дискретное управление,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение векторов.

Решение задачи (3)–(6) будем обозначать  $(\hat{z}, \hat{u})$ .

При предположении управляемости системы (3) и выполнении условия Слейтера (существует допустимая пара  $(z_0, u_0)$  такая, что для любого  $t$   $z_0(t) > \bar{z}(t)$ ) для полученной задачи справедлива

**Теорема 1.** Если  $(\hat{z}, \hat{u})$  — решение задачи (3)–(6) то существуют вектор  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))^* \geq 0$  ( $t = 0, \dots, T$ ), вектор  $\bar{\omega} = (\omega, 0)^*$  и вектор-функция  $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))^*$  ( $t = 0, \dots, T$ ), для которых выполняется сопряженное уравнение:

$$\psi(t) = A^*(t)\psi(t+1) - M\hat{z}(t) + \gamma(t), \quad t = 0, \dots, T-1,$$

а также условие трансверсальности:

$$\psi(T) = -M\hat{z}(T) + \gamma(T) + \bar{\omega}$$

и условия дополняющей нежесткости:

$$\gamma_1(t)\hat{x}(t) = 0, \quad \gamma_2(t)(\hat{y}(t) + a(t)) = 0, \quad t = 0, \dots, T.$$

При этом оптимальное управление определяется по формуле

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{2c}(b^*\psi(t+1) - d(t)), \quad t = 0, \dots, T-1 \quad (7)$$

(здесь и в дальнейшем знак \* означает транспонирование).



**Доказательство.** Применим теорию Дубовицкого – Милютин [5]. В пространстве пар  $(z, u)$  рассмотрим конусы вариаций и их сопряженные, соответствующие функционалу (6) и ограничениям (3)–(5). Используя представления для сопряженных конусов (см. [3, 6]), запишем уравнение Эйлера для пары  $(z, u)$ , удовлетворяющей уравнению  $z(t+1) = Az(t) + bu(t)$  и условию  $z(0) = 0$ . Будем иметь:

$$-\lambda_0 \sum_{t=0}^T \langle M\hat{z}(t), z(t) \rangle - \lambda_0 \sum_{t=0}^{T-1} (2c\hat{u}(t) + d(t))u(t) + \sum_{t=0}^T \langle \gamma(t), z(t) \rangle + \langle \bar{\omega}, z(T) \rangle = 0,$$

где  $\lambda_0 \geq 0$ ,  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))^* \geq 0$ , причем,  $\gamma_1(t)\hat{x}(t) = 0$ ,  $\gamma_2(t)(\hat{y}(t) + a(t)) = 0$ ,  $t = 0, \dots, T$ .

Для рассматриваемой пары  $(z, u)$  и для произвольной вектор-функции  $\psi(t) \in R^2$  ( $t = 0, \dots, T$ ) справедливо равенство

$$\sum_{t=0}^{T-1} \langle -\lambda_0 M\hat{z}(t) - \psi(t) + A^* \psi(t+1) + \gamma(t), z(t) \rangle + \langle -\lambda_0 M\hat{z}(T) + \bar{\omega} - \psi(T) + \gamma(T), z(T) \rangle + \sum_{t=0}^{T-1} [-\lambda_0 (2c\hat{u}(t) + d(t)) + \langle \psi(t+1), b \rangle] u(t) = 0.$$

Выберем  $\psi(t)$  так, чтобы выполнялась сопряженная система и условие трансверсальности:

$$\psi(t) = A^* \psi(t+1) - \lambda_0 M\hat{z}(t) + \gamma(t), \quad \psi(T) = -\lambda_0 M\hat{z}(T) + \gamma(T) + \bar{\omega}.$$

В силу произвольности  $u(t)$  получим:

$$\lambda_0 (2c\hat{u}(t) + d(t)) = \langle \psi(t+1), b \rangle, \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Так как выполняется условие Слейтера, то можно показать, что  $\lambda_0 \neq 0$ , т.е. можно положить  $\lambda_0 = 1$ . Поэтому для оптимального управления будем иметь формулу (7). Теорема доказана.

Можно доказать, что необходимые условия оптимальности, полученные в теореме 1, являются также и достаточными.

Запишем условие трансверсальности в координатах:

$$\psi_1(T) = \gamma_1(T) + \omega, \quad \psi_2(T) = -2\alpha y(T) + \gamma_2(T).$$

Обозначим

$$B = \frac{1}{2c} bb^*, \quad s(t) = \delta(t) - \frac{d(t)}{2c} b. \tag{8}$$

Для нахождения оптимального управления будем иметь следующую краевую задачу (краевая задача принципа максимума):

$$z(t+1) = Az(t) + B\psi(t+1) + s(t), \tag{9}$$

$$\psi(t) = A^* \psi(t+1) - Mz(t) + \gamma(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \tag{10}$$

$$z(0) = z_0, \tag{11}$$

$$x(T) = 0, \tag{12}$$

$$\psi_2(T) = -2\alpha y(T) + \gamma_2(T). \tag{13}$$

Нужно найти решение этой задачи при условиях:

$$\gamma_1(t)x(t) = 0, \quad \gamma_2(t)(y(t) + a(t)) = 0, \quad t = 0, \dots, T,$$

$$x(t) \geq 0, \quad y(t) \geq -a(t), \quad \gamma_1(t), \quad \gamma_2(t) \geq 0, \quad t = 0, \dots, T.$$

Построение алгоритма решения полученной краевой задачи основано на следующей теореме.

**Теорема 2.** Если векторы  $z(t)$ ,  $\psi(t)$ , удовлетворяют уравнениям (9), (10), то они выражаются через граничные значения  $z(T)$ ,  $\psi(T)$  по формулам:

$$z(t) = A_t z(T) + B_t \psi(T) + \sum_{\tau=t}^{T-1} R_t(\tau) \gamma(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} P_t(\tau) s(\tau), \tag{14}$$

$$\psi(t) = C_t z(T) + D_t \psi(T) + \sum_{\tau=t}^{T-1} N_t(\tau) s(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} Q_t(\tau) \gamma(\tau) + \gamma(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \tag{15}$$



где матричные коэффициенты  $A_t, B_t, C_t, D_t, P_t(\tau), Q_t(\tau), N_t(\tau), R_t(\tau)$  определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} A_{T-1} &= A^{-1}, & B_{T-1} &= -A^{-1}B, & P_{T-1}(T-1) &= -A^{-1}, & R_{T-1}(T-1) &= 0, \\ C_{T-1} &= -MA_{T-1}, & D_{T-1} &= A^* - MB_{T-1}, & N_{T-1}(T-1) &= -MP_{T-1}(T-1), \\ & & & & Q_{T-1}(T-1) &= 0; \end{aligned}$$

для  $t = 0, \dots, T-2$ :

$$\begin{aligned} A_t &= A^{-1}(A_{t+1} - BC_{t+1}), & B_t &= A^{-1}(B_{t+1} - BD_{t+1}), \\ P_t(\tau) &= A^{-1}(P_{t+1}(\tau) - BN_{t+1}(\tau)) & (\tau = t+1, \dots, T-2), & P_t(t) &= -A^{-1}, \\ R_t(\tau) &= A^{-1}(R_{t+1}(\tau) - BQ_{t+1}(\tau)) & (\tau = t+1, \dots, T-2), \\ R_{t+1}(t) &= -A^{-1}B, & R_t(t) &= 0, & C_t &= A^*C_{t+1} - MA_t, & D_t &= A^*D_{t+1} - MB_t, \\ N_t(\tau) &= A^*N_{t+1}(\tau) - MP_t(\tau) & (\tau = t+1, \dots, T-2), & N_t(t) &= -MP_t(t), \\ Q_t(\tau) &= A^*Q_{t+1}(\tau) - MR_t(\tau) & (\tau = t+1, \dots, T-2), \\ Q_t(t+1) &= A^* - MR_t(t), & Q_t(t) &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство этой теоремы проводится по индукции аналогично доказательству теоремы 3 из работы [3].

Используя граничные условия, исключим из формул (14), (15) переменные  $z(T), \psi(T)$ . Для этого запишем формулу (14) для  $t = 0$ :

$$z(0) = A_0z(T) + B_0\psi(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} R_0(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1} P_0(\tau)s(\tau).$$

Предполагая, что  $B_0$  — невырожденная матрица, и учитывая граничное условие (11), отсюда найдем:

$$\psi(T) = B_0^{-1}z_0 - B_0^{-1}[A_0z(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} R_0(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1} P_0(\tau)s(\tau)]. \quad (16)$$

Обозначим:  $[W]_i$  —  $i$ -ая строка матрицы  $W$ ;  $[W]_{ij}$  —  $(ij)$ -й элемент матрицы  $W$ . Если запишем (16) в координатах, то, учитывая (12) и условие трансверсальности (13), найдем:

$$y(T) = h\{\gamma_2(T) - [B_0^{-1}]_{21}N + \sum_{\tau=0}^{T-1} [B_0^{-1}R_0(\tau)]_2\gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1} [B_0^{-1}P_0(\tau)]_2s(\tau)\}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(T) &= [B_0^{-1}]_{11}N + [-B_0^{-1}A_0]_{12}h\{\gamma_2(T) - [B_0^{-1}]_{21}N + \sum_{\tau=0}^{T-1} [B_0^{-1}R_0(\tau)]_2\gamma(\tau) + \\ &+ \sum_{\tau=0}^{T-1} [B_0^{-1}P_0(\tau)]_2s(\tau)\} + \sum_{\tau=0}^{T-1} [-B_0^{-1}R_0(\tau)]_1\gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1} [-B_0^{-1}P_0(\tau)]_1s(\tau), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $h = (2\alpha + [-B_0^{-1}A_0]_{22})^{-1}$ , причем в случае, когда выражение в скобках равно нулю, можно изменить параметр  $\alpha$ .

Подставим найденное значение  $y(T)$  в (13):

$$\psi_2(T) = -2\alpha h\{\gamma_2(T) - [B_0^{-1}]_{21}N + \sum_{\tau=0}^{T-1} [B_0^{-1}R_0(\tau)]_2\gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1} [B_0^{-1}P_0(\tau)]_2s(\tau)\} + \gamma_2(T). \quad (19)$$

Запишем уравнения (14), (15) в координатах, а затем подставим в полученные равенства  $x(T) = 0$ , а также значения  $y(T), \psi_1(T), \psi_2(T)$  согласно формулам (17)–(19). После соответствующих преобразований получим:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{\tau=0}^{T-1} K_t(\tau)\gamma(\tau) + (q_t + [B_t]_{12})\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} L_t(\tau)s(\tau) - \\ &- q_t[B_0^{-1}]_{21}N + [B_t]_{11}[B_0^{-1}]_{11}N, \quad t = 1, \dots, T-1, \end{aligned} \quad (20)$$



где  $q_t = ([A_t]_{12} + [B_t]_{11}[-B_0^{-1}A_0]_{12} - 2\alpha[B_t]_{12})h$ ,  $t = 1, \dots, T-1$ , а строки  $K_t(\tau)$ ,  $L_t(\tau)$  определяются следующим образом:

$$K_t(\tau) = \begin{cases} q_t[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2 + [B_t]_{11}[-B_0^{-1}R_0(\tau)]_1, & \tau = 0, \dots, t-1, \\ q_t[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2 + [B_t]_{11}[-B_0^{-1}R_0(\tau)]_1 + [R_t(\tau)]_1, & \tau = t, \dots, T-1, \end{cases}$$

$$L_t(\tau) = \begin{cases} q_t[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2 + [B_t]_{11}[-B_0^{-1}P_0(\tau)]_1, & \tau = 0, \dots, t-1, \\ q_t[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2 + [B_t]_{11}[-B_0^{-1}P_0(\tau)]_1 + [P_t(\tau)]_1, & \tau = t, \dots, T-1; \end{cases}$$

$$y(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} G_t(\tau)\gamma(\tau) + (f_t + [B_t]_{22})\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} H_t(\tau)s(\tau) - f_t[B_0^{-1}]_{21}N + [B_t]_{21}[B_0^{-1}]_{11}N, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad (21)$$

где  $f_t = ([A_t]_{22} + [B_t]_{21}[-B_0^{-1}A_0]_{12} - 2\alpha[B_t]_{22})h$ ,  $t = 1, \dots, T-1$ , а строки  $G_t(\tau)$ ,  $H_t(\tau)$  определяются следующими формулами:

$$G_t(\tau) = \begin{cases} f_t[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2 + [B_t]_{21}[-B_0^{-1}R_0(\tau)]_1, & \tau = 0, \dots, t-1, \\ f_t[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2 + [B_t]_{21}[-B_0^{-1}R_0(\tau)]_1 + [R_t(\tau)]_2, & \tau = t, \dots, T-1, \end{cases}$$

$$H_t(\tau) = \begin{cases} f_t[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2 + [B_t]_{21}[-B_0^{-1}P_0(\tau)]_1, & \tau = 0, \dots, t-1, \\ f_t[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2 + [B_t]_{21}[-B_0^{-1}P_0(\tau)]_1 + [P_t(\tau)]_2, & \tau = t, \dots, T-1; \end{cases}$$

$$y(T) = \sum_{\tau=0}^{T-1} G(\tau)\gamma(\tau) + h\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} H(\tau)s(\tau) - h[B_0^{-1}]_{21}N, \quad (22)$$

где  $G(\tau) = h[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2$ ,  $H(\tau) = [B_0^{-1}P_0(\tau)]_2$ ;

$$\psi_1(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} I_t(\tau)\gamma(\tau) + (\chi_t + [D_t]_{12})\gamma_2(T) + \gamma_1(t) + \sum_{\tau=0}^{T-1} J_t(\tau)s(\tau) - \chi_t[B_0^{-1}]_{21}N + [D_t]_{11}[B_0^{-1}]_{11}N, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (23)$$

где  $\chi_t = ([C_t]_{12} + [D_t]_{11}[-B_0^{-1}A_0]_{12} - 2\alpha[D_t]_{12})h$ ,  $t = 0, \dots, T-1$ , а строки  $I_t(\tau)$ ,  $J_t(\tau)$  определяются следующими формулами:

$$I_t(\tau) = \begin{cases} \chi_t[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2 + [D_t]_{11}[-B_0^{-1}R_0(\tau)]_1, & \tau = 0, \dots, t-1, \\ \chi_t[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2 + [D_t]_{11}[-B_0^{-1}R_0(\tau)]_1 + [Q_t(\tau)]_1, & \tau = t, \dots, T-1, \end{cases}$$

$$J_t(\tau) = \begin{cases} \chi_t[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2 + [D_t]_{11}[-B_0^{-1}P_0(\tau)]_1, & \tau = 0, \dots, t-1, \\ q_t[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2 + [D_t]_{11}[-B_0^{-1}P_0(\tau)]_1 + [N_t(\tau)]_1, & \tau = t, \dots, T-1; \end{cases}$$

$$\psi_2(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} V_t(\tau)\gamma(\tau) + (\phi_t + [D_t]_{22})\gamma_2(T) + \gamma_2(t) + \sum_{\tau=0}^{T-1} F_t(\tau)s(\tau) - \phi_t[B_0^{-1}]_{21}N + [D_t]_{21}[B_0^{-1}]_{11}N, \quad (24)$$

где  $\phi_t = ([C_t]_{22} + [D_t]_{21}[-B_0^{-1}A_0]_{12} - 2\alpha[D_t]_{22})h$ ,  $t = 0, \dots, T-1$ , а строки  $V_t(\tau)$ ,  $F_t(\tau)$  определяются следующими формулами:

$$V_t(\tau) = \begin{cases} \phi_t[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2 + [D_t]_{21}[-B_0^{-1}R_0(\tau)]_1, & \tau = 0, \dots, t-1, \\ V_t(\tau) = \varphi_t[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2 + [D_t]_{21}[-B_0^{-1}R_0(\tau)]_1 + [Q_t(\tau)]_2, & \tau = t, \dots, T-1, \end{cases}$$



$$F_t(\tau) = \begin{cases} \varphi_t[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2 + [D_t]_{21}[-B_0^{-1}P_0(\tau)]_1, & \tau = 0, \dots, t-1, \\ \varphi_t[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2 + [D_t]_{21}[-B_0^{-1}P_0(\tau)]_1 + [N_t(\tau)]_2, & \tau = t, \dots, T-1; \end{cases}$$

$$\psi_1(T) = \sum_{\tau=0}^{T-1} I_T(\tau)\gamma(\tau) + [-B_0^{-1}A_0]_{12}h\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} J_T(\tau)s(\tau) + [B_0^{-1}]_{11}N - [-B_0^{-1}A_0]_{12}h[B_0^{-1}]_{21}N, \quad (25)$$

где строки  $I_T(\tau), J_T(\tau)$  определяются следующими формулами:

$$I_T(\tau) = [-B_0^{-1}A_0]_{12}h[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2 + [-B_0^{-1}R_0(\tau)]_1,$$

$$J_T(\tau) = [-B_0^{-1}A_0]_{12}h[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2 + [-B_0^{-1}P_0(\tau)]_1;$$

$$\psi_2(T) = \sum_{\tau=0}^{T-1} V_T(\tau)\gamma(\tau) + (1 - 2\alpha h)\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} F_T(\tau)s(\tau) + 2\alpha h[B_0^{-1}]_{21}N, \quad (26)$$

где строки  $V_T(\tau), F_T(\tau)$  определяются следующими формулами:

$$V_T(\tau) = -2\alpha h[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2, \quad F_T(\tau) = -2\alpha h[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2.$$

Из условий дополняющей нежесткости получим уравнения для нахождения множителей  $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ :

$$\gamma_1(t) \left( \sum_{\tau=0}^{T-1} K_t(\tau)\gamma(\tau) + (q_t + [B_t]_{12})\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} L_t(\tau)s(\tau) - q_t[B_0^{-1}]_{21}N + [B_t]_{11}[B_0^{-1}]_{11}N \right) = 0, \quad t = 0, \dots, T,$$

$$\gamma_2(t) \left( \sum_{\tau=0}^{T-1} G_t(\tau)\gamma(\tau) + (f_t + [B_t]_{22})\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} H_t(\tau)s(\tau) - f_t[B_0^{-1}]_{21}N + [B_t]_{21}[B_0^{-1}]_{11}N + a(t) \right) = 0, \quad t = 0, \dots, T-1,$$

$$\gamma_2(T) \left( \sum_{\tau=0}^{T-1} G(\tau)\gamma(\tau) + h\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} H(\tau)s(\tau) - h[B_0^{-1}]_{21}N + a(T) \right) = 0.$$

Существование решения полученных уравнений вытекает из существования решения исходной задачи.

**Задача 2.** В задаче 1 положим при всех  $t$   $a(t) = 0, \beta_2 = 0$  и введем ограничение на цену  $u(t) \geq p$ , где  $p$  задано и  $p > 0$ . Получим следующую оптимизационную модель:

$$x(t+1) = x(t) - c_1u(t) - c_2 - kx(t), \quad t = 0, \dots, T-1,$$

$$Y(t+1) = Y(t) + n(c_1u(t) + c_2) + mx(t), \quad t = 0, \dots, T-1,$$

$$x(0) = N, \quad Y(0) = 0, \quad x(T) = 0,$$

$$x(t) \geq 0, \quad Y(t) \geq 0, \quad t = 0, \dots, T, \quad u(t) \geq p, \quad t = 0, \dots, T-1,$$

$$I(x, Y, u) = \alpha \sum_{t=0}^T (Y(t))^2 - \beta_1 \sum_{t=0}^{T-1} V(t)u(t) \rightarrow \min.$$

В векторной форме она будет иметь вид

$$z(t+1) = Az(t) + bu(t) + \delta, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (27)$$

$$z(0) = z_0, \quad x(T) = 0, \quad z(t) \geq 0, \quad t = 0, \dots, T, \quad u(t) \geq p, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (28)$$

$$I(z, u) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^T \langle Mz(t), z(t) \rangle + \sum_{t=0}^{T-1} [cu^2(t) + du(t)] \rightarrow \min, \quad (29)$$



где  $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ ,  $\delta = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_2 n \end{pmatrix}$ ,  $c = -\beta_1 c_1$ ,  $d = -\beta_1 c_2$ . Остальные обозначения те же, что и в задаче 1.

При тех же условиях, что и раньше, справедлива

**Теорема 3.** Если  $(z, u)$  — решение задачи (27)–(29), то существуют числа  $\gamma_1(t)$ ,  $\gamma_2(t) \geq 0$  ( $t = 0, \dots, T$ ),  $\mu(t) \geq 0$  ( $t = 0, \dots, T - 1$ ), вектор  $\bar{\omega} = (\omega, 0)^*$  и вектор-функция  $\psi(t) \in R^2$ , для которых выполняется сопряженное уравнение:

$$\psi(t) = A^*(t)\psi(t+1) - Mz(t) + \gamma(t), \quad t = 0, \dots, T - 1,$$

а также условие трансверсальности:

$$\psi(T) = -Mz(T) + \gamma(T) + \bar{\omega}$$

и условия дополняющей нежесткости:

$$\gamma_1(t)x(t) = 0, \quad \gamma_2(t)Y(t), \quad t = 0, \dots, T, \quad \mu(t)(u(t) - p) = 0, \quad t = 0, \dots, T - 1.$$

При этом оптимальное управление определяется по формуле

$$u(t) = \frac{1}{2c}(b^*\psi(t+1) - d + \mu(t)), \quad t = 0, \dots, T - 1. \quad (30)$$

Доказать эту теорему можно, используя доказательство теоремы 1 настоящей статьи и теоремы 1 из работы [1].

Обозначим:

$$S(t) = \delta(t) - \frac{d - \mu(t)}{2c}b = s(t) + \frac{\mu(t)}{2c}b. \quad (31)$$

Краевая задача принципа максимума в данном случае будет иметь вид

$$z(t+1) = Az(t) + B\psi(t+1) + S(t), \quad (32)$$

$$\psi(t) = A^*\psi(t+1) - Mz(t) + \gamma(t), \quad t = 0, \dots, T - 1, \quad (33)$$

$$z(0) = z_0, \quad x(T) = 0, \quad (34)$$

$$\psi_2(T) = -2\alpha Y(T) + \gamma_2(T), \quad (35)$$

$$\gamma_1(t)x(t) = 0, \quad \gamma_2(t)Y(t) = 0, \quad t = 0, \dots, T, \quad (36)$$

$$\mu(t)\left[\frac{1}{2c}(b^*\psi(t+1) - d + \mu(t)) - p\right] = 0, \quad t = 0, \dots, T - 1, \quad (37)$$

$$x(t), Y(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t) \geq 0, \quad t = 0, \dots, T, \quad \mu(t) \geq 0, \quad t = 0, \dots, T - 1.$$

**Теорема 4.** Если векторы  $z(t)$ ,  $\psi(t)$  удовлетворяют уравнениям (32), (33), то они выражаются через граничные значения  $z(T)$ ,  $\psi(T)$  по формулам:

$$z(t) = A_t z(T) + B_t \psi(T) + \sum_{\tau=t}^{T-1} R_t(\tau) \gamma(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} P_t(\tau) S(\tau),$$

$$\psi(t) = C_t z(T) + D_t \psi(T) + \sum_{\tau=t}^{T-1} N_t(\tau) S(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} Q_t(\tau) \gamma(\tau) + \gamma(t), \quad t = 0, \dots, T - 1,$$

где матричные коэффициенты  $A_t$ ,  $B_t$ ,  $C_t$ ,  $D_t$ ,  $P_t(\tau)$ ,  $Q_t(\tau)$ ,  $N_t(\tau)$ ,  $R_t(\tau)$  определяются теми же рекуррентными соотношениями, что и в теореме 2.

Доказательство этой теоремы в точности совпадает с доказательством теоремы 2, так как уравнение (32) отличается от уравнения (9) лишь свободным членом  $S(t)$ .

Очевидно, что для задачи 2 будут иметь место формулы (20)–(26), если в них заменить  $s(t)$  на  $S(t)$ .

Введем дополнительные обозначения:

$$k_t = q_t + [B_t]_{12}, \quad t = 1, \dots, T - 1, \quad g_t = f_t + [B_t]_{22}, \quad t = 1, \dots, T - 1,$$





$$\sigma(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} L_t(\tau)s(\tau) - q_t[B_0^{-1}]_{21}N + [B_t]_{11}[B_0^{-1}]_{11}N, \quad t = 1, \dots, T-1,$$

$$\rho(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} H_t(\tau)s(\tau) - f_t[B_0^{-1}]_{21}N + [B_t]_{21}[B_0^{-1}]_{11}N, \quad t = 1, \dots, T-1,$$

$$\rho(T) = \sum_{\tau=0}^{T-1} H(\tau)s(\tau) - h[B_0^{-1}]_{21}N,$$

$$I_t = \chi_t + [D_t]_{12}, \quad r_t = 1, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad I_T = [-B_0^{-1}A_0]_{12}h, \quad r_T = 0,$$

$$V_t = \varphi_t + [D_t]_{22}, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad V_T = 1 - 2\alpha(2\alpha + [-B_0^{-1}A_0]_{22})^{-1},$$

$$\nu(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} J_t(\tau)s(\tau) - \chi_t[B_0^{-1}]_{21}N + [D_t]_{11}[B_0^{-1}]_{11}N,$$

$$\nu(T) = \sum_{\tau=0}^{T-1} J_T(\tau)s(\tau) + [B_0^{-1}]_{11}N - [-B_0^{-1}A_0]_{12}h[B_0^{-1}]_{21}N,$$

$$\omega(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} F_t(\tau)s(\tau) - \varphi_t[B_0^{-1}]_{21}N + [D_t]_{21}[B_0^{-1}]_{11}N,$$

$$\omega(T) = \sum_{\tau=0}^{T-1} F_T(\tau)s(\tau) + 2\alpha(2\alpha + [-B_0^{-1}A_0]_{22})^{-1}[B_0^{-1}]_{21}N.$$

Тогда для переменных, удовлетворяющих равенствам (32)–(35), будем иметь:

$$x(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} K_t(\tau)\gamma(\tau) + k_t\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} L_t(\tau)\frac{b}{2c}\mu(\tau) + \sigma(t), \quad t = 1, \dots, T-1,$$

$$Y(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} G_t(\tau)\gamma(\tau) + g_t\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} H_t(\tau)\frac{b}{2c}\mu(\tau) + \rho(t), \quad t = 1, \dots, T-1,$$

$$Y(T) = \sum_{\tau=0}^{T-1} G(\tau)\gamma(\tau) + h\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} H(\tau)\frac{b}{2c}\mu(\tau) + \rho(T),$$

$$\psi_1(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} I_t(\tau)\gamma(\tau) + I_t\gamma_2(T) + r_t\gamma_1(t) + \sum_{\tau=0}^{T-1} J_t(\tau)\frac{b}{2c}\mu(\tau) + \nu(t), \quad t = 0, \dots, T,$$

$$\psi_2(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} V_t(\tau)\gamma(\tau) + V_t\gamma_2(T) + r_t\gamma_2(t) + \sum_{\tau=0}^{T-1} F_t(\tau)\frac{b}{2c}\mu(\tau) + \omega(t), \quad t = 0, \dots, T,$$

Согласно (30) для оптимального управления получим:

$$u(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} M_{t+1}(\tau)\gamma(\tau) + m_{t+1}\gamma_2(T) + \frac{b_1 r_{t+1}}{2c}\gamma_1(t+1) + \frac{b_2 r_{t+1}}{2c}\gamma_2(t+1) + \sum_{\tau=0}^{T-1} E_{t+1}(\tau)\mu(\tau) + \frac{b_1}{2c}\nu(t+1) + \frac{b_2}{2c}\omega(t+1) - \frac{1}{2c}d + \frac{1}{2c}\mu(t),$$

где

$$M_t(\tau) = \frac{b_1}{2c}I_t(\tau) + \frac{b_2}{2c}V_t(\tau), \quad m_t = \frac{b_1}{2c}I_t + \frac{b_2}{2c}V_t, \quad t = 0, \dots, T-1,$$

$$m_T = \frac{b_1}{2c}I_T + \frac{b_2}{2c}V_T, \quad E_t(\tau) = \frac{b_1}{2c}J_t(\tau)\frac{b}{2c} + \frac{b_2}{2c}F_t(\tau)\frac{b}{2c}.$$

Из условий дополняющей нежесткости (36)–(37) получим уравнения для нахождения множителей  $\gamma_1(t)$ ,  $\gamma_2(t)$ ,  $\mu(t)$ :

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) \left( \sum_{\tau=0}^{T-1} K_t(\tau)\gamma(\tau) + k_t\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} L_t(\tau)\frac{b}{2c}\mu(\tau) + \sigma(t) \right) &= 0, \quad t = 0, \dots, T, \\ \gamma_2(t) \left( \sum_{\tau=0}^{T-1} G_t(\tau)\gamma(\tau) + g_t\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} H_t(\tau)\frac{b}{2c}\mu(\tau) + \rho(t) \right) &= 0, \quad t = 0, \dots, T-1, \\ \gamma_2(T) \left( \sum_{\tau=0}^{T-1} G(\tau)\gamma(\tau) + h\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} H(\tau)\frac{b}{2c}\mu(\tau) + \rho(T) \right) &= 0, \\ \mu(t) \left( \sum_{\tau=0}^{T-1} M_{t+1}(\tau)\gamma(\tau) + m_{t+1}\gamma_2(T) + \frac{b_1r_{t+1}}{2c}\gamma_1(t+1) + \frac{b_2r_{t+1}}{2c}\gamma_2(t+1) + \right. \\ \left. + \sum_{\tau=0}^{T-1} E_{t+1}(\tau)\mu(\tau) + \frac{b_1}{2c}\nu(t+1) + \frac{b_2}{2c}\omega(t+1) - \frac{1}{2c}d + \frac{1}{2c}\mu(t) - p \right) &= 0, \quad t = 0, \dots, T-1. \end{aligned}$$

**Задача 3.** В задаче 2 отбросим ограничение на правом конце  $x(T) = N$  и добавим в критерий качества слагаемое  $\beta_3x(T)$  ( $\beta_3 > 0$ ). Получим следующую оптимизационную модель:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) - c_1u(t) - c_2 - kx(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \\ Y(t+1) &= Y(t) + n(c_1u(t) + c_2) + mx(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \\ x(0) &= N, \quad Y(0) = 0, \\ x(t) \geq 0, \quad Y(t) \geq 0, \quad t &= 0, \dots, T, \quad u(t) \geq p, \quad t = 0, \dots, T-1, \\ I(x, Y, u) &= \alpha \sum_{t=0}^T (Y(t))^2 - \beta_1 \sum_{t=0}^{T-1} V(t)u(t) + \beta_3x(T) \rightarrow \min. \end{aligned}$$

В векторной форме полученная модель запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} z(t+1) &= Az(t) + bu(t) + \delta, \quad t = 0, \dots, T-1, \\ z(0) &= z_0, \quad z(t) \geq 0, \quad t = 0, \dots, T, \quad u(t) \geq p, \quad t = 0, \dots, T-1, \\ I(z, u) &= \frac{1}{2}\alpha \sum_{t=0}^T \langle Mz(t), z(t) \rangle + \langle l, z(T) \rangle + \sum_{t=0}^{T-1} [cu^2(t) + du(t)] \rightarrow \min, \end{aligned}$$

где  $l = (\beta_3, 0)^*$ . Остальные обозначения те же, что и раньше.

**Теорема 5.** Если  $(z, u)$  – решение задачи 3, то существуют числа  $\gamma_1(t) \geq 0$ ,  $\gamma_2(t) \geq 0$  ( $t = 0, \dots, T$ ),  $\mu(t) \geq 0$  ( $t = 0, \dots, T-1$ ) и вектор-функция  $\psi(t) \in R^2$ , для которых выполняется сопряженное уравнение:

$$\psi(t) = A^*(t)\psi(t+1) - Mz(t) + \gamma(t), \quad t = 0, \dots, T-1,$$

а также условие трансверсальности:

$$\psi(T) = -Mz(T) + \gamma(T) + l$$

и условия дополняющей нежесткости:

$$\gamma_1(t)x(t) = 0, \quad \gamma_2(t)Y(t) = 0, \quad t = 0, \dots, T, \quad \mu(t)(u(t) - p) = 0, \quad t = 0, \dots, T-1.$$

При этом оптимальное управление определяется по формуле

$$u(t) = \frac{1}{2c}(b^*\psi(t+1) - d + \mu(t)), \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теорем 1, 3.



Выпишем краевую задачу принципа максимума:

$$\begin{aligned} z(t+1) &= Az(t) + B\psi(t+1) + S(t), \\ \psi(t) &= A^*\psi(t+1) - Mz(t) + \gamma(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \quad z(0) = z_0, \quad \psi(T) = -Mz(T) + \gamma(T) + l, \\ \gamma_1(t)x(t) &= 0, \quad \gamma_2(t)Y(t) = 0, \quad t = 0, \dots, T, \\ \mu(t) \left[ \frac{1}{2c}(b^*\psi(t+1) - d + \mu(t)) - p \right] &= 0, \quad t = 0, \dots, T-1, \\ x(t), Y(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t) &\geq 0, \quad t = 0, \dots, T, \quad \mu(t) \geq 0, \quad t = 0, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Здесь через  $S(t)$  обозначено то же, что и в задаче 2 (формула (31)).

Для построенной модели так же, как и в предыдущем случае, имеет место теорема 2, если в формулировке заменить  $s(t)$  на  $S(t)$

Как и в предыдущих задачах, с помощью этой теоремы найдем выражение переменных  $z(t), \psi(t)$  через множители  $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \mu(t)$ :

$$\begin{aligned} z(t) &= \sum_{\tau=0}^{T-1} K_t(\tau)\gamma(\tau) + k_t\gamma(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} L_t(\tau)\frac{b}{2c}\mu(\tau) + \sigma_t, \quad t = 1, \dots, T, \\ \psi(t) &= \sum_{\tau=0}^{T-1} V_t(\tau)\gamma(\tau) + \gamma(t) + v_t\gamma(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} F_t(\tau)\frac{b}{2c}\mu(\tau) + h_t, \quad t = 0, \dots, T. \end{aligned} \quad (38)$$

В данной задаче использованы следующие обозначения. Для  $t = 1, \dots, T-1$ :

$$\begin{aligned} k_t &= -n_t(n_0)^{-1}B_0 + B_t, \quad n_0 = B_0M - A_0, \quad n_t = -B_tM + A_t, \\ \sigma_t &= \sum_{\tau=0}^{T-1} L_t(\tau)s(\tau) - n_t(n_0)^{-1}z_0 + (-n_t(n_0)^{-1}B_0 + B_t)l, \\ K_t(\tau) &= -n_t(n_0)^{-1}R_0(\tau), \quad L_t(\tau) = -n_t(n_0)^{-1}P_0(\tau), \quad \tau = 0, \dots, t-1, \\ K_t(\tau) &= -n_t(n_0)^{-1}R_0(\tau) + R_t(\tau), \quad L_t(\tau) = -n_t(n_0)^{-1}P_0(\tau) + P_t(\tau) \quad \tau = t, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Для  $t = T$ :

$$\begin{aligned} k_T &= (n_0)^{-1}B_0, \quad \sigma_T = \sum_{\tau=0}^{T-1} L_T(\tau)s(\tau) - (n_0)^{-1}(z_0 - B_0l), \\ K_T(\tau) &= (n_0)^{-1}R_0(\tau), \quad L_T(\tau) = (n_0)^{-1}P_0(\tau), \quad \tau = 0, \dots, T-1, \end{aligned}$$

Для  $t = 0, \dots, T-1$ :  $v_t = r_t(n_0)^{-1}B_0 + D_t$ ,  $r_t = C_t - D_tM$ ,

$$\begin{aligned} h_t &= \sum_{\tau=0}^{T-1} F_t(\tau)s(\tau) - r_t(n_0)^{-1}z_0 + ((C_t - D_tM)(n_0)^{-1}B_0 + D_t)l, \\ V_t(\tau) &= r_t(n_0)^{-1}R_0(\tau), \quad F_t(\tau) = r_t(n_0)^{-1}P_0(\tau), \quad \tau = 0, \dots, t-1, \\ V_t(\tau) &= r_t(n_0)^{-1}R_0(\tau) + Q_t(\tau), \quad F_t(\tau) = r_t(n_0)^{-1}P_0(\tau) + N_t(\tau), \quad \tau = t, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Для  $t = T$ :  $v_T = -M(n_0)^{-1}B_0$ ,

$$\begin{aligned} h_T &= \sum_{\tau=0}^{T-1} F_T(\tau)s(\tau) + M(n_0)^{-1}(z_0 - B_0l) + l; \\ V_T(\tau) &= -M(n_0)^{-1}R_0(\tau), \quad F_T(\tau) = -M(n_0)^{-1}P_0(\tau), \quad \tau = 0, \dots, T-1, \end{aligned}$$

Если запишем формулу (38) в координатах, то для оптимального управления будем иметь:

$$u(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} M_{t+1}(\tau)\gamma(\tau) + m_{t+1}\gamma(T) + \frac{b_1}{2c}\gamma_1(t+1) + \frac{b_2}{2c}\gamma_2(t+1) +$$



$$+ \sum_{\tau=0}^{T-1} E_{t+1}(\tau)\mu(\tau) + \frac{b_1}{2c}[h_{t+1}]_1 + \frac{b_2}{2c}[h_{t+1}]_2 - \frac{1}{2c}d + \frac{1}{2c}\mu(t),$$

где

$$M_t(\tau) = \frac{b_1}{2c}[V_t(\tau)]_1 + \frac{b_2}{2c}[V_t(\tau)]_2, \quad m_t = \frac{b_1}{2c}[v_t]_1 + \frac{b_2}{2c}[v_t]_2, \quad E_t(\tau) = \frac{b_1}{2c}[F_t(\tau)]_1 \frac{b}{2c} + \frac{b_2}{2c}[F_t(\tau)]_2 \frac{b}{2c}.$$

Из условий дополняющей нежесткости получим уравнения для нахождения множителей  $\gamma_1(t)$ ,  $\gamma_2(t)$ ,  $\mu(t)$ :

$$\gamma_1(t) \left( \sum_{\tau=0}^{T-1} [K_t(\tau)]_1 \gamma(\tau) + [k_t]_1 \gamma(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} [L_t(\tau)]_1 \frac{b}{2c} \mu(\tau) + [\sigma_t]_1 \right) = 0, \quad t = 0, \dots, T,$$

$$\gamma_2(t) \left( \sum_{\tau=0}^{T-1} [K_t(\tau)]_2 \gamma(\tau) + [k_t]_2 \gamma(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} [L_t(\tau)]_2 \frac{b}{2c} \mu(\tau) + [\sigma_t]_2 \right) = 0, \quad t = 0, \dots, T,$$

$$\mu(t) \left( \sum_{\tau=0}^{T-1} M_{t+1}(\tau) \gamma(\tau) + m_{t+1} \gamma(T) + \frac{b_1}{2c} \gamma_1(t+1) + \frac{b_2}{2c} \gamma_2(t+1) + \sum_{\tau=0}^{T-1} E_{t+1}(\tau) \mu(\tau) + \frac{b_1}{2c}[h_{t+1}]_1 + \frac{b_2}{2c}[h_{t+1}]_2 - \frac{1}{2c}d + \frac{1}{2c}\mu(t) - p \right) = 0, \quad t = 0, \dots, T-1.$$

**Численные примеры.** Вычисления проведены в редакторе Mathcad для параметров  $T = 4$ ,  $c_1 = -0.8$ ,  $c_2 = 15$ ,  $k = 0.08$ ,  $m = 0.3$ ,  $n = 0.2$ ,  $N = 50$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta_1 = 0.9$ ,  $\beta_2 = 0.8$ ,  $a = (0, 17, 29, 38, 43)$ ,  $r = (5, 5.1, 5.2, 5.3)$ ,  $\beta_3 = 0.3$ ,  $p = 3$ . Результаты вычислений приведены в табл. 1–3.

Модель 1

Таблица 1

$t$	0	1	2	3	4	Общий доход	Общий расход
$u(t)$	6.08	6.134	6.138	6.117	–		
$x(t)$	50	35.869	22.907	10.985	0		
$Y(t)$	0	17.026	29.808	38.695	45.012		

Модель 2

Таблица 2

$t$	0	1	2	3	4	Общий доход	Общий расход
$u(t)$	3	4.207	7.749	8.657	–		
$x(t)$	50	33.4	19.106	8.777	0		
$Y(t)$	0	17.526	29.864	37.356	41.604		

Модель 3

Таблица 3

$t$	0	1	2	3	4	Общий доход	Общий расход
$u(t)$	3	6.489	10.245	11.41	–		
$x(t)$	50	33.4	20.919	12.441	5.574		
$Y(t)$	0	17.526	29.502	37.138	42.045		

### Библиографический список

1. Трошина Н. Ю. О решении дискретной линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 4. С.52–60.
2. Трошина Н. Ю. О дискретной линейно-квадратичной задаче оптимального управления со связанными краевыми условиями // Докл. Академии воен. наук. 2007. Т. 25, № 1. С. 101–104.
3. Трошина Н. Ю. Минимизация потерь прибыли в одной микромодели производства // Вестн. Сарат. гос. соц.-эконом. ун-та. 2007. № 18(4). С. 117–121.
4. Ширяев В. И., Баев И. А., Ширяев Е. В. Экономико-



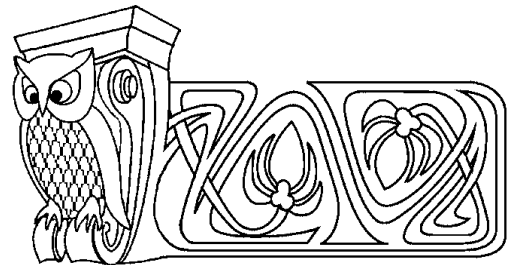
математическое моделирование фирмы. М.: КомКнига, 2006. 224 с.

5. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ. 1965. № 3. С. 395–453.

6. Трошина Н. Ю. Принцип максимума для дискретной задачи оптимального управления со связанными краевыми условиями // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2002. Вып. 4. С.137–140.

УДК 517.51:517.91/.93

## ПРИБЛИЖАЮЩИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ



А. А. Хромов, Г. В. Хромова\*

Саратовский государственный университет, кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики,

\*кафедра математической физики и вычислительной математики

E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Approximating Properties of Solutions of the Differential Equation with Integral Boundary Condition

A. A. Khromov, G. V. Khromova\*

Saratov State University, Chair of Differential Equations and Applied Mathematics,

\*Chair of Mathematical Physics and Calculating Mathematics

E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

На базе решений дифференциального уравнения первого порядка строятся приближения к непрерывным функциям с интегральными граничными условиями.

With the use of the solution of the first-order differential equation the approximations to the continuous functions with integral boundary conditions are constructed.

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение, приближение функций, интегральные условия, резольвента.

**Key words:** differential equation, approximation of functions, resolvent.

Данная работа основана на приближающих свойствах резольвент обыкновенных дифференциальных операторов.

В работе [1] эти свойства были исследованы для произвольного линейного дифференциального оператора с регулярными краевыми условиями. В работе [2] такие свойства исследовались уже для простейших дифференциальных операторов с нерегулярными краевыми условиями.

В данной работе показано, что использование резольвент дифференциальных операторов позволяет учесть краевые условия, наложенные на приближаемую функцию (в данном случае — интегральные) и получать приближения, удовлетворяющие этим же краевым условиям, что бывает важным при решении как теоретических, так и прикладных задач.

1. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L: y', U(y) \equiv \int_0^1 p(t)y(t) dt = 0, \quad (1)$$

где  $y(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $p(x) \in C^1[0, 1]$ .

Найдём резольвенту  $R_\lambda(L)$ , полагая  $\lambda = -r > 0$ . Обозначим её через  $R_{-r}$ .

**Лемма 1.** *Справедливо представление*

$$R_{-r}u = g_{-r}u - \frac{1}{\Delta(-r)} e^{-rx} U(g_{-r}u), \quad (2)$$

где  $r > 0$ ,  $g_{-r}u = \int_0^x e^{-r(x-t)}u(t) dt$ ,  $\Delta(-r) = U(e^{-rx})$ .

**Доказательство.** Легко видеть, что  $g_r(u)$  есть решение уравнения  $y' + ry = u$ , а общее решение этого уравнения имеет вид  $y = g_r u + Ce^{-rx}$ , откуда получаем (2).  $\square$

Пусть  $u(x) \in C_0[0, 1] \equiv \{u(x) \in C[0, 1] : U(u) = 0\}$ .

**Лемма 2.** При  $p(t) \in C^1[0, 1]$ ,  $u(x) \in C_0[0, 1]$  для  $U(g_{-r}u)$  справедливо представление

$$U(g_{-r}u) = \frac{1}{r} \int_0^1 K_{-r}(t)u(t)dt, \tag{3}$$

где  $K_{-r}(t) = -p(1)e^{-r(1-t)} + e^{rt} \int_t^1 p'(\tau)e^{-r\tau}d\tau$ .

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned} U(g_{-r}u) &= \int_0^1 p(t) \int_0^t e^{-r(t-\tau)}u(\tau)d\tau dt = \int_0^1 e^{r\tau}u(\tau) \left[ \frac{1}{r}(-p(t)e^{-rt}) \Big|_{\tau}^1 + \frac{1}{r} \int_{\tau}^1 e^{-rt}p'(t)dt \right] d\tau = \\ &= \frac{1}{r} \int_0^1 \left[ p(\tau) - p(1)e^{-r(1-\tau)} + e^{r\tau} \int_{\tau}^1 p'(t)e^{-rt}dt \right] u(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда получаем (3). □

**Лемма 3.** Если  $p(t) \in C^1[0, 1]$ ,  $p(0) \neq 0$ , то при достаточно больших  $r$  справедлива оценка

$$\Delta(-r) \geq \frac{C}{r}, \tag{4}$$

где  $C \neq 0$ .

**Доказательство.** Имеем

$$\Delta(-r) = \int_0^1 p(t)e^{-rt}dt = \frac{1}{r}(p(t)e^{-rt}) \Big|_0^1 + \frac{1}{r} \int_0^1 p'(t)e^{-rt}dt = \frac{1}{r} \left[ p(0) - p(1)e^{-r} + \int_0^1 p'(t)e^{-rt}dt \right].$$

Из равенства  $\int_0^1 p'(t)e^{-rt}dt = O\left(\frac{1}{r}\right)$  следует, что

$$\Delta(-r) = \frac{1}{r} \left[ p(0) + O\left(\frac{1}{r}\right) \right],$$

а отсюда вытекает оценка (4). □

**Лемма 4.** Для любой  $u \in C[0, 1]$  при достаточно больших  $r$  справедлива оценка

$$\|g_{-r}u\|_{C[0,1]} = O\left(\frac{1}{r}\|u\|_C\right).$$

**Доказательство** вытекает из вида  $g_{-r}u$ . □

**Лемма 5.** Для  $u \in C_0[0, 1]$  при  $p(t) \in C^1[0, 1]$  и достаточно больших  $r$  справедлива оценка

$$U(g_{-r}u) = O\left(\frac{1}{r^2}\|u\|_C\right).$$

**Доказательство.** Имеем

$$\int_0^1 e^{-r(1-t)}u(t)dt = O\left(\frac{1}{r}\|u\|_C\right), \quad \left| \int_t^1 p'(\tau)e^{-r\tau}d\tau \right| = O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Отсюда и из (4) получаем утверждение леммы. □

**Лемма 6.** Для  $u \in C_0[0, 1]$  при  $p(t) \in C^1[0, 1]$ ,  $p(0) \neq 0$  и достаточно больших  $r$  справедлива оценка

$$\|rR_{-r}u\|_{C[0,1]} = O(\|u\|_C).$$



**Доказательство.** Из лемм 1 и 4 получаем  $\|rg_{-r}u\|_C = O(\|u\|_C)$ , а из лемм 3 и 5 —

$$\frac{e^{-rx}}{\Delta(-r)}U(g_{-r}u) = O\left(\frac{e^{-rx}}{r}\|u\|_C\right).$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

**2.** Выясним, для каких  $u \in C_0[0, 1]$  имеет место сходимость:

$$\|rR_{-r}u - u\|_{C[0,1]} \rightarrow 0, \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Рассмотрим множество  $M_0 = \{u \in C^1[0, 1] : U(u) = U_1(u) = 0\}$ , где  $U_1(u) = p(1)u(1) - p(0)u(0) - \int_0^1 p'(t)u(t) dt$ .

Очевидно, для дифференцируемой функции выполняется  $U_1(u) \equiv U(u')$ .

**Лемма 7.** Если  $\int_0^1 p(t)dt \neq 0$ , то  $M_0 = M_1 = \{u \in C^1[0, 1] : u = R_0g, g \in C_0[0, 1]\}$ .

**Доказательство.** Из равенства (2), которое, очевидно, справедливо и при  $r = 0$ , следует, что  $R_0$  существует, поскольку  $\Delta(0) = \int_0^1 p(t)dt$ .

Докажем сначала включение  $M_0 \subset M_1$ . Пусть  $u \in M_0$ . Положим  $u' = g$ . Так как  $U(u) = 0$ , то  $u = R_0g$ , где  $g \in C_0[0, 1]$  в силу условия  $U(u') = 0$ .

Теперь пусть  $u \in M_1$ , т. е.  $u = R_0g$ . Тогда  $U(u) = 0$ , так как  $U(R_0g) = 0$ . Далее,  $u' = g$ , а так как  $g \in C_0[0, 1]$ , то  $U(u') = 0$ , т. е.  $U_1(u) = 0$ . Значит,  $u \in M_0$ . Лемма доказана. □

**Лемма 8.** Если  $p(t)$  — непрерывная на отрезке  $[0, 1]$  функция, не равная тождественно нулю, то существует  $\mu > 0$  такое, что  $\int_0^1 p(t)e^{-\mu t}dt \neq 0$ .

**Доказательство.** Предположим противное. Пусть  $F(\mu) \equiv \int_0^1 p(t)e^{-\mu t}dt = 0$  при любом  $\mu > 0$ . По теореме единственности аналитической функции  $F(\mu) = 0$  при любом комплексном  $\mu$ . А по теореме единственности разложения в степенной ряд функции  $F(\mu)$  коэффициенты этого ряда равны нулю, т. е.  $\int_0^1 p(t)t^k dt = 0, k = 0, 1, \dots$ . Отсюда следует, что  $\int_0^1 p(t)P(t)dt = 0$ , где  $P(t)$  — любой многочлен.

Возьмём последовательность многочленов  $P_n(t)$ , сходящуюся к  $p(t)$ . Она существует по теореме Вейерштрасса. Из того что  $\int_0^1 p(t)P_n(t)dt = 0$ , следует:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 p(t)P_n(t)dt = 0$ . Тогда придём к тому, что  $\int_0^1 p^2(t)dt = 0$ , откуда  $p(t) \equiv 0$ , что противоречит условию леммы. Лемма доказана. □

**Лемма 9.** Если  $\int_0^1 p(t)dt = 0$ , то  $M_0 = M_{1\mu} = \{u \in C^1[0, 1] : u = R_{-\mu}g, g \in C_0[0, 1]\}$ , где  $\mu > 0$  и таково, что  $\int_0^1 p(t)e^{-\mu t}dt \neq 0$ .

**Доказательство.** Повторяем схему доказательства леммы 7. Из условия леммы 9 следует, что  $R_{-\mu}$  существует, так как  $\int_0^1 p(t)e^{-\mu t}dt = \Delta(-\mu)$ .

Пусть  $u \in M_0$ . Положим  $u' + \mu u = g$ . Учитывая, что  $U(u) = 0$ , получаем  $u = R_{-\mu}g$ , где  $g \in C_0[0, 1]$  в силу условия  $U_1(u) = 0$  ( $U_1(u) = U(u')$ , откуда  $U(g) = U(u') + \mu U(u) = 0$ ).

Теперь пусть  $u \in M_{1\mu}$ , т. е.  $u = R_{-\mu}g$ . В силу равенства  $U(R_{-\mu}g) = 0$  получаем  $U(u) = 0$ . А так как  $g \in C_0[0, 1]$ , то  $U(u') \equiv U_1(u) = 0$ , значит,  $u \in M_0$ . Отсюда следует утверждение леммы. □

В дальнейшем для определённости будем рассматривать случай, когда  $\int_0^1 p(t)dt \neq 0$ .

**Теорема 1.** Если  $u(x) \in M_0, p(t) \in C^1[0, 1], p(0) \neq 0$ , то имеет место сходимость (5).

**Доказательство.** Рассмотрим тождество Гильберта для резольвенты:

$$\frac{R_{-r} - R_0}{-r} = R_{-r}R_0.$$



Запишем его в виде

$$R_0 - rR_{-r}R_0 = R_{-r}. \quad (6)$$

По лемме 7  $u = R_0g$ ,  $g \in C_0[0, 1]$ . Применяем (6) к функции  $g$ , получаем  $u - rR_{-r}u = R_{-r}g$ . Из леммы 6 вытекает сходимость (5).  $\square$

Найдём необходимое и достаточное условие сходимости (5).

Рассмотрим множество  $M = \{u \in C[0, 1] : U(u) = U_1(u) = 0\}$ .

**Лемма 10.** При  $p(t) \in C^1[0, 1]$  справедливо равенство  $\overline{M}_0 = M$ , где  $\overline{M}_0$  — замыкание множества  $M_0$  в равномерной метрике.

**Доказательство.** Очевидно,  $M_0 \subset M$ . Пусть  $u \in M$ . Построим многочлен, принадлежащий множеству  $M_0$  и аппроксимирующий функцию  $u(x)$ . Зададим  $\varepsilon > 0$ . По теореме Вейерштрасса существует многочлен  $P(x)$  такой, что  $\|u - P\|_C < \varepsilon$ . Из этой оценки в силу равенств  $U(P) \equiv U(P - u)$ ,  $U_1(P) \equiv U_1(P - u)$  выполняются оценки

$$|U(P)| < C\varepsilon, \quad |U_1(P)| < C\varepsilon. \quad (7)$$

(Обозначаем здесь и в дальнейшем одной и той же буквой  $C$  константы в оценках, когда конкретизация оценки несущественна.)

Теперь построим многочлен  $\tilde{P}(x) = P(x) + C_0 + C_1x$  с такими коэффициентами  $C_0$  и  $C_1$ , чтобы  $\tilde{P}(x) \in M_0$  (т. е. чтобы  $U(\tilde{P}) = U_1(\tilde{P}) = 0$ ).

Из (7) вытекают оценки  $C_0 \leq C\varepsilon$ ,  $C_1 \leq C\varepsilon$ , а из них — оценка  $\|\tilde{P} - P\|_C \leq C\varepsilon$ .

Тогда из оценки  $\|u - \tilde{P}\|_C \leq \|u - P\|_C + \|P - \tilde{P}\|_C$  следует утверждение леммы.  $\square$

**Теорема 2.** При  $p(t) \in C^1[0, 1]$ ,  $p(0) \neq 0$ ,  $\int_0^1 p(t) dt \neq 0$  для сходимости (5) необходимо и достаточно, чтобы  $u \in M$ .

**Доказательство.** Пусть выполняется сходимость (5). Так как  $U(R_{-r}u) = 0$ , то  $R_{-r}u \in C_0[0, 1]$ . Множество  $C_0[0, 1]$  является замкнутым в равномерной метрике. Поэтому из (8) следует, что  $u \in C_0[0, 1]$ . Но тогда  $R_{-r}u \in M_{-r}$ , где  $M_{-r} = \{y \in C^1[0, 1] : y = R_{-r}v, v \in C_0[0, 1]\}$ . Поскольку  $U(v) = 0$  и  $U(R_{-r}v) = 0$ , а  $R_{-r}v$  удовлетворяет уравнению  $(R_{-r}v)' + r(R_{-r}v) = v$ , то  $R_{-r}v \in M_0$ , т. е.  $M_{-r} \subset M_0$ .

Таким образом, мы получаем, что  $R_{-r}u \in M_0$ , а из (5) —  $u \in \overline{M}_0 = M$ . Необходимость доказана.

Пусть теперь  $u \in M$ . Зададим  $\varepsilon > 0$  и найдём функцию  $u_\varepsilon \in M_0$  такую, что  $\|u - u_\varepsilon\|_C < \varepsilon$ .

Имеем

$$\|rR_{-r}u - u\|_C \leq \|u - u_\varepsilon\|_C + \|rR_{-r}u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_C + \|rR_{-r}u_\varepsilon - rR_{-r}u\|_C.$$

По теореме 1 справедлива оценка  $\|rR_{-r}u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_C \leq \varepsilon$  при  $r \geq r_0$ , а по лемме 6 —

$$\|rR_{-r}(u_\varepsilon - u)\|_C \leq \|rR_{-r}\|_C \|u_\varepsilon - u\|_C \leq C\varepsilon.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.  $\square$

**Следствие.** При  $p = 1$  для сходимости (5) необходимо и достаточно, чтобы  $u \in M_2$ , где  $M_2 = \{u(x) \in C[0, 1] : U(u) = 0, u(1) = u(0)\}$ .

**Доказательство** следует из того, что в данном случае  $U_1(u) = u(1) - u(0)$  и, значит,  $M = M_2$ .  $\square$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270-а) и гранта Президента по государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).*

### Библиографический список

1. Хромова Г. В. Приближающие свойства резольвент дифференциальных операторов в задаче приближения функций и их производных // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1998. Т. 38, № 7. С. 1106–1113.
2. Хромов А. А. Приближающие свойства степеней резольвенты оператора дифференцирования // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 75–78.





# МЕХАНИКА

УДК 629.78

## ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕННОГО АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МОМЕНТА НА ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС

В. С. Асланов, А. В. Пироженок\*, А. В. Кислов, А. И. Маслова\*

Самарский государственный аэрокосмический университет им. акад. С.П. Королева, кафедра теоретической механики;

\*Институт технической механики Национальной академии наук Украины и Национального космического агентства Украины, Днепрпетровск  
E-mail: Aslanov\_vs@mail.ru, Alex.Pirozhenko@mail.ru, alexkislov2008@mail.ru, Maslova\_anjta@mail.ru

Рассматривается движение твердого тела относительно центра масс в плоскости круговой орбиты под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследуется режим движения гравитационной стабилизации спутника, когда его продольная ось движется в окрестности местной вертикали. В модели аэродинамического момента учтены изменения плотности атмосферы при орбитальном движении спутника и изменения коэффициента аэродинамического момента в зависимости от его ориентации к набегающему потоку. Построено аналитическое решение уравнения малых колебаний и показано, что переменность аэродинамического момента может оказывать существенное влияние на точность стабилизации спутника.

**Ключевые слова:** спутник, изменения плотности атмосферы, переменность коэффициента аэродинамического момента, уравнение Хилла, параметрический резонанс.

### Influence of the Variable Aerodynamic Moment on Satellite Attitude Motion

V. S. Aslanov, A. V. Pirozhenko\*, A. V. Kislov, A. I. Maslova\*

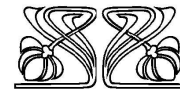
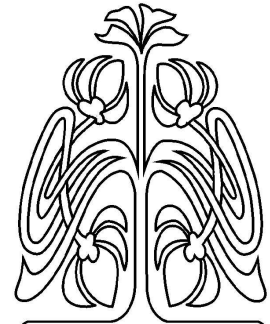
Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov, Chair of Theoretical Mechanics;

\*Institute of Technical Mechanics National Academy of Sciences of Ukraine and National Space Agency of Ukraine, Dnipropetrovsk  
E-mail: Aslanov\_vs@mail.ru, Alex.Pirozhenko@mail.ru, alexkislov2008@mail.ru, Maslova\_anjta@mail.ru

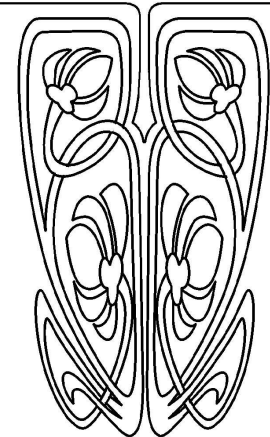
Attitude motion of a rigid body in the plane of a circular orbit under gravitational and aerodynamic moments is considered. The mode of the motion of a satellite gravitational stabilization when its long axis moves in the vicinity of a local vertical is investigated. Allowance of variations in the atmosphere density at a satellite orbital motion and in the aerodynamic moment coefficient depending on its orientation to an approach flow is included in the aerodynamic moment model. An analytical solution of a small oscillations equation is obtained, and it is shown that the variability of the aerodynamic moment may have a pronounced effect on the accuracy of the satellite stabilization.

**Key words:** satellite, atmosphere density variations, coefficient of the aerodynamic moment variations, Hills equations, parametric resonance.

Исследованию динамики спутника относительно центра масс с учетом гравитационного и аэродинамического моментов посвящено множество работ (см., например, [1, 2]). Большинство исследований проводились при определенных предположениях: постоянстве коэффициента лобового сопротивления спутника и постоянстве плотности атмосферы на круговой орбите [1, 2]. Вместе с тем в работах [3–6] отмечалась необходимость учета переменности коэффициента аэродинамического момента и изменения плотности атмосферы вдоль орбиты. В [7] показано, что для высот 550–750 км учет суточного



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





эффекта вздутия атмосферы на солнечной стороне Земли может приводить к изменению плотности на постоянной высоте в 5 раз. При совместном учете суточного эффекта вздутия атмосферы и изменений высоты орбиты, обусловленных несферичностью Земли, плотность на орбите может меняться в 8 раз. При таких изменениях плотности предположение о ее постоянстве не представляется вполне обоснованным. Кроме того, в колебательном движении спутника появляется дополнительное периодическое возмущение, которое может приводить к резонансным эффектам.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается движение спутника как твердого тела относительно центра масс в плоскости круговой орбиты под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследуется режим движения гравитационной стабилизации, когда наибольшая ось эллипсоида инерции (продольная ось) спутника движется в окрестности местной вертикали. Предполагается, что моменты инерции спутника таковы, что обеспечивается физическая реализация гравитационной стабилизации движения. Примем, что  $B \geq A > C$ ,  $(A - C)/B > 0.5$ , где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — главные центральные моменты инерции,  $C$  — момент инерции относительно продольной оси спутника. При построении уравнений движения предполагается, что спутник движется по кеплеровой круговой орбите. При моделировании плотности атмосферы учитываются изменения высоты орбиты спутника, обусловленные нецентральностью гравитационного поля Земли.

Новизна задачи обусловлена использованием новой модели аэродинамического момента, в которой учтены его основные переменные составляющие. Модель аэродинамического момента, во-первых, учитывает непостоянство коэффициента аэродинамического момента при изменении ориентации спутника к набегающему потоку. Предполагается, что коэффициент аэродинамического момента пропорционален синусу угла отклонения продольной оси спутника от местной вертикали  $\varphi$  (рис. 1).

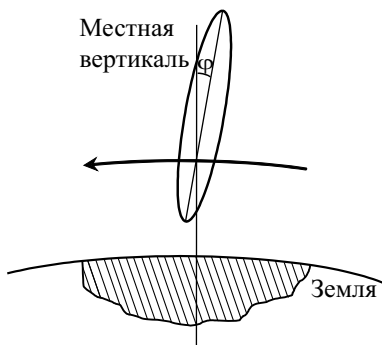


Рис. 1. Спутник на орбите

Это предположение основано на возможности разложения коэффициента аэродинамического момента в ряд Фурье по углу атаки. В [8] показано, что для ряда спутников с системой гравитационной стабилизации это предположение является достаточно обоснованным при углах отклонения, не превосходящих  $10^\circ$ .

Во-вторых, модель аэродинамического момента учитывает изменения плотности атмосферы при движении спутника по орбите, обусловленные неравномерностью плотности на заданной высоте из-за вздутия атмосферы на подсолнечной стороне Земли, а также изменением высоты орбиты из-за нецентральности гравитационного поля Земли.

Как показано в [7], рассматриваемые изменения плотности атмосферы хорошо описываются рядом Фурье с удержанием первых трех гармоник.

Актуальность исследований обусловлена важностью решения задачи повышения качества работы систем стабилизации движения спутника.

## 2. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

В качестве исходного уравнения рассматривается уравнение движения спутника относительно центра масс в плоскости круговой орбиты [9]:

$$B\ddot{\varphi} = -3\omega_0^2(A - C)\sin\varphi\cos\varphi + M_a, \quad (1)$$

где  $\omega_0$  — угловая скорость орбитального движения,  $M_a$  — момент аэродинамических сил, точки ( $\dot{\varphi}$ ) означают производные по времени  $t$ .

Момент аэродинамических сил для режима гравитационной стабилизации будем описывать выражением [8]

$$M_a = a_0(1 + \sigma_a \sin\varphi)\frac{\rho V^2}{2},$$

где  $a_0$  — величина, характеризующая среднее значение коэффициента аэродинамического сопротивления (размерность  $[м^3]$ ),  $\sigma_a$  — безразмерный коэффициент, характеризующий изменение момента



при изменении ориентации спутника (далее, будем рассматривать КА, для которых  $\sigma_a < 0.5$ ),  $V$  — модуль скорости спутника относительно потока,  $\rho$  — плотность атмосферы.

Плотность атмосферы будем описывать следующей зависимостью [7]:

$$\rho(t) = b_0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^3 \bar{b}_n \cos(n\omega_0 t + f_n) \right],$$

где  $b_0$  — средняя на орбите плотность атмосферы,  $\bar{b}_n, f_n$  — коэффициенты, характеризующие распределение плотности при движении спутника по орбите.

Плотность атмосферы на орбите, ее среднее значение ( $b_0$ ) и изменения при орбитальном движении ( $\bar{b}_n, n = 1, 2, 3$ ) зависят от множества факторов. Рассматривается влияние следующих факторов: высота орбиты, изменение высоты спутника при движении по орбите из-за нецентральности гравитационного поля Земли, расположение орбиты по отношению к солнечному горбу, а также уровень солнечной активности. Учет других факторов [10, 11], например, таких как сезонные изменения плотности атмосферы, может привести лишь к некоторым количественным отличиям в  $b_0$  и  $\bar{b}_n$ , и не оказывает влияния на методику и качественные результаты исследований.

Будем предполагать, что коэффициенты  $a_0, \sigma_a, b_0, \bar{b}_n, f_n$  не зависят от времени;  $V = R\omega_0$ , где  $R$  — расстояние от центра Земли до центра масс спутника.

Переходя к новой независимой переменной  $\tau = \omega_0 t$  уравнение (1) можно записать в виде

$$\varphi'' = -3I \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} H \lambda (1 + \sigma_a \sin \varphi) \left( 1 + \sum_{n=1}^3 \bar{b}_n \cos(n\tau + f_n) \right), \quad (2)$$

где  $I = (A - C)/B$ ,  $\lambda = a_0/B$ ,  $H = b_0 R^2$  (штрихом обозначены производные по  $\tau$ ). Величина  $\lambda$  имеет размерность [м/кг]. Величина  $H$  (размерность [кг/м]) зависит только от параметров орбиты и является усредненным по орбите приведенным скоростным напором.

### 3. КВАЗИСТАТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Движение спутника в режиме гравитационной стабилизации можно рассматривать как колебания относительно некоторого (смещенного относительно местной вертикали) положения продольной оси спутника, т. е.

$$\varphi = \varphi_0 + \tilde{\varphi}(\tau), \quad (3)$$

где  $\varphi_0$  — среднее положение продольной оси спутника относительно местной вертикали (угол смещения),  $\tilde{\varphi}(\tau)$  описывает колебания спутника относительно  $\varphi_0$ .

Значение среднего положения  $\varphi_0$  определяется равенством гравитационного и аэродинамического моментов при постоянной, равной средней, плотности атмосферы. Угол смещения  $\varphi_0$  является квазистатическим решением уравнения (2) при  $\varphi = \text{const}$ ,  $\bar{b}_n = 0, n = 1, 2, 3$ . Тогда

$$\sin \varphi_0 \cos \varphi_0 = s(1 + \sigma_a \sin \varphi_0), \quad (4)$$

где  $s = \frac{\lambda H}{6I}$  — безразмерный коэффициент.

Запишем (4) в виде

$$\sin \varphi_0 = \frac{s}{\cos \varphi_0 - s\sigma_a}. \quad (5)$$

Из (5) следует, что при  $\cos \varphi_0 > |s\sigma_a|$  знак  $\varphi_0$  совпадает со знаком  $s$  (т. е. знаком  $a_0$ ) и с ростом  $|s|$  увеличивается  $|\varphi_0|$ ; совпадение знаков  $s$  и  $\sigma_a$  приводит к увеличению смещения продольной оси спутника. Характер зависимости  $\varphi_0$  от коэффициентов  $s$  и  $\sigma_a$  приведен на рис. 2.

Из рисунка видно, что при малых  $|s|$  (соответственно малых  $|\varphi_0|$ ) переменность коэффициента аэродинамического момента  $\sigma_a$  слабо влияет на  $|\varphi_0|$ ; в зависимости от  $s$  угол смещения может превосходить десятки градусов.

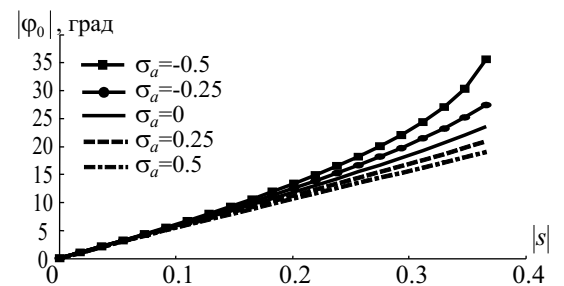


Рис. 2. Зависимость угла сдвига  $\varphi_0$  от параметров  $s$  и  $\sigma_a$



Отметим, что угол смещения  $\varphi_0$  для одного и того же спутника будет различным в зависимости от параметра  $H$ . Следовательно, для достижения режима движения гравитационной стабилизации необходимо, чтобы характеристики спутника соответствовали ожидаемой плотности атмосферы для предполагаемых высоты и уровня солнечной активности. Это означает, что величины  $I$  и  $\lambda$  должны соответствовать величине  $H$  таким образом, чтобы коэффициент  $|s|$  был мал, а следовательно, мал и угол  $|\varphi_0|$ .

Далее, будем предполагать, что параметры спутника и плотности атмосферы таковы, что  $|\varphi_0|$  не превосходит нескольких градусов. Для определенности примем, что  $|s| < 0.1$ , тогда  $|\varphi_0| < 6^\circ$ .

#### 4. УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ СПУТНИКА

Рассмотрим малые колебания спутника относительно среднего положения  $\varphi_0$ . Подставляя (3) в уравнение (2) и линеаризуя полученное выражение с учетом (4), найдем

$$\ddot{\varphi} + [k^2 - 3Is\sigma_a \cos \varphi_0 \sum_{n=1}^3 \bar{b}_n \cos(n\tau + f_n)]\tilde{\varphi} = d \sum_{n=1}^3 \bar{b}_n \cos(n\tau + f_n), \quad (6)$$

где введены следующие обозначения:  $k^2 = 3I(\cos 2\varphi_0 - s\sigma_a \cos \varphi_0)$ ,  $d = 3Is(1 + \sigma_a \sin \varphi_0)$ .

Уравнение (6) представляет собой уравнение типа Хилла (с периодическими коэффициентами) с периодической правой частью. Для исследования свойств решения такого уравнения целесообразно применять приближенные методы [9, 12].

Особенностью уравнения (6) является наличие малого коэффициента  $s$ . Уравнение (6) можно отнести к следующему, более общему, виду уравнений:

$$\ddot{y} + (a^2 + \varepsilon P(t))y = F(t), \quad (7)$$

где  $y$  — искомая величина,  $a$  — постоянный коэффициент,  $\varepsilon \ll 1$  — малый параметр,  $t$  — независимая переменная,  $P(t)$ ,  $F(t)$  — функции, которые могут быть представлены в виде линейной комбинации элементарных тригонометрических функций с частотами  $a_{P_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ ,  $a_{F_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  соответственно, точки ( $\dot{y}$ ) означают производные по  $t$ .

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (7) с начальными условиями  $y(0) = y_0$ ,  $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ . Без потери общности будем считать, что свободные члены  $P(t)$ ,  $F(t)$  равны нулю.

Отметим, что выделение малого параметра в (7) предполагает, что другие параметры системы являются величинами порядка единицы, т.е.  $a$ ,  $y_0$ ,  $\dot{y}_0$ ,  $A_{P_i}$ ,  $A_{F_i} \sim 1$ , где  $A_{P_i}$ ,  $A_{F_i}$  — амплитуды изменений функций  $P(t)$  и  $F(t)$  при соответствующих частотах.

Введем новую переменную  $y_1$  с теми же начальными условиями ( $y_1(0) = y_0$ ,  $\dot{y}_1(0) = \dot{y}_0$ ):

$$y_1 = y - \tilde{y}^0,$$

где  $\tilde{y}^0$  — решение уравнения  $\ddot{\tilde{y}} + a^2\tilde{y} = F(t)$  с нулевыми начальными условиями, т.е. [13]

$$\tilde{y}^0 = \frac{1}{a} \int_0^t F(\tau) \sin a(t - \tau) d\tau.$$

Будем предполагать, что система не находится в окрестности линейного резонанса, т.е.  $|a - a_{F_i}| \gg \varepsilon$ . Тогда каждый член  $F(t)$  привнесет в изменение  $\tilde{y}^0$  слагаемые

$$\frac{A_{F_i}}{a^2 - (a_{F_i})^2} \sin(a_{F_i}t + \beta_{F_i}), \quad -\frac{A_{F_i}}{a(a^2 - (a_{F_i})^2)} (a \cos at \sin \beta_{F_i} + a_{F_i} \sin at \cos \beta_{F_i}),$$

амплитуда которых имеет порядок единицы, где  $\beta_{F_i}$  — сдвиг фазы, соответствующий частоте  $a_{F_i}$ , при представлении  $F(t)$  в ряд по синусам,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Уравнение для  $y_1$  запишется в виде

$$\ddot{y}_1 + (a^2 + \varepsilon P(t))y_1 = -\varepsilon P(t)\tilde{y}^0 = \varepsilon F_1(t). \quad (8)$$



Поскольку  $P(t)$  не содержит свободных членов, то произведение  $P(t)\tilde{y}^0$  не будет содержать членов с частотой  $a$ , и его можно представить в виде линейной комбинации элементарных тригонометрических функций с частотами  $|a \pm a_{Pi}|$ ,  $|a_{Pi} \pm a_{Fi}|$ , а также свободного члена.

Заменой переменных  $\tilde{y}_1 = y_1 - y_1^0$ , где  $y_1^0 = \varepsilon F_{10}/a^2$ , а  $F_{10}$  — свободный член  $F_1$ , приведем уравнение (8) к виду уравнения (7)

$$\ddot{\tilde{y}}_1 + (a^2 + \varepsilon P(t))\tilde{y}_1 = \varepsilon \tilde{F}_1(t), \quad (9)$$

но с правой частью, пропорциональной  $\varepsilon$ ,  $\tilde{F}_1(t) = F_1 - P(t)y_1^0$ . К частотам  $F_1$  в  $\tilde{F}_1$  прибавятся частоты  $a_{Pi}$ . Изменяются также и начальные условия  $\tilde{y}_1(0) = y_0 - y_1^0$ , а  $\dot{\tilde{y}}_1(0) = \dot{y}_0$ .

Вообще говоря, возможно продолжение процедуры замены переменной для повышения порядка малости правой части (9) (построения частного решения с нулевыми начальными условиями уравнения (7)). Но продолжение этой процедуры сталкивается с необходимостью удаления в уравнениях типа (8) резонансных членов, порождаемых самой процедурой. Это приводит к достаточно громоздким преобразованиям.

Таким образом, проведенная замена переменных позволила явно ввести в правую часть уравнений малый параметр, что дает возможность применить асимптотические методы для исследования движений.

Построим с помощью метода усреднения первое приближение по  $\varepsilon$  для решения (9). Для этого введем новые переменные  $B$  и  $w$  — амплитуду и фазу колебаний переменной  $\tilde{y}_1$ :

$$\tilde{y}_1 = B \cos w, \quad \dot{\tilde{y}}_1 = -B \dot{w} \sin w.$$

Нетрудно получить (см., например, [14]), что уравнения для  $B$  и  $w$  имеют вид

$$\dot{B} = \frac{\varepsilon B}{2a} P(t) \sin 2w - \frac{\varepsilon}{a} \tilde{F}_1(t) \sin w, \quad \dot{w} = a + \frac{\varepsilon}{a} P(t) \cos^2 w - \frac{\varepsilon}{aB} \tilde{F}_1(t) \cos w,$$

т. е. приводятся к виду, стандартному для применения метода усреднения. Усредним уравнения вдоль порождающего решения  $B = \text{const}$ ,  $w = a(t - t_0)$ , получаемого при  $\varepsilon=0$ . В случае, когда система не близка к параметрическому резонансу  $|2a - a_{Pi}| \gg \varepsilon$  и линейному резонансу  $|a - a_{Fi}| \gg \varepsilon$ , где  $a_{Fi}$  — частоты  $F_1$ , получим, что амплитуда колебаний  $\tilde{y}_1$  не изменяется в первом приближении по  $\varepsilon$ .

Нетрудно видеть, что проведенные выше рассуждения доказывают, что при отсутствии резонансов решение уравнения (7) с точностью порядка  $\varepsilon$  совпадает с решением уравнения  $\ddot{y} + a^2 y = F(t)$  на интервале времени порядка  $1/\varepsilon$ .

Таким образом, при отсутствии резонансных совпадений частот движение спутника в плоскости круговой орбиты при малых  $\tilde{\varphi}$  с точностью порядка  $|s\tilde{\varphi}|$  описывается уравнением

$$\ddot{\tilde{\varphi}} + k^2 \tilde{\varphi} = d \sum_{n=1}^3 \bar{b}_n \cos(n\tau + f_n). \quad (10)$$

## 5. ЧАСТОТЫ И РЕЗОНАНСЫ В СИСТЕМЕ

Определим возможность резонансных совпадений частот в системе. Для качественных оценок условие неблизости к резонансам в уравнении (7) запишем как условие  $\sqrt{\varepsilon}$  удаленности частот:  $\left| \frac{a_j}{a} - 1 \right| > \sqrt{\varepsilon}$  и  $\left| \frac{a_{Pi}}{2a} - 1 \right| > \sqrt{\varepsilon}$ , где через  $a_j$  обозначены частоты функций  $F$  и  $F_1$ . Для уравнения (6) запишем его в виде:  $\left| \frac{i}{k} - 1 \right| > |s|$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ , и  $\left| \frac{n}{2k} - 1 \right| > |s|$ ,  $n = 1, 2, 3$ . Так как в рассматриваемом случае  $|s| \ll 1$ , частота колебаний спутника близка к частоте гравитационных колебаний,  $|k - \sqrt{3I}| \approx |s|$ , то, как нетрудно видеть, система может быть близка только к линейному резонансу  $k \approx 1$  и к параметрическому резонансу, обусловленному близостью удвоенной частоты собственных колебаний с утроенной частотой орбитального движения (третьей гармоникой разложения плотности атмосферы),  $2k \approx 3$ . Отметим, что учет других, более высоких, гармоник разложения плотности не приводит к появлению новых резонансов.

Расчет значений  $k$  для определенных выше параметров дает следующий диапазон возможного изменения:  $1.18 \leq k \leq 1.73$ . Таким образом, для рассматриваемых случаев в движении спутников линейный резонанс невозможен, а возможен только параметрический резонанс  $2k \approx 3$ .

### 6. ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА В НЕРЕЗОНАНСНЫХ СЛУЧАЯХ

С учетом решения уравнения (10), изменение угла  $\varphi$  можно представить в виде [13]

$$\varphi = \varphi_0 + (\varphi^0 - \varphi_0) \cos k\tau + \frac{\varphi'^0}{k} \sin k\tau + \sum_{n=1}^3 A_n \left[ \frac{n}{k} \sin k\tau \sin f_n - \cos k\tau \cos f_n + \cos(n\tau + f_n) \right]. \quad (11)$$

где  $\varphi^0 = \varphi(0)$ ,  $\varphi'^0 = \varphi'(0)$  — начальные условия движения,  $A_n = d \frac{\bar{b}_n}{k^2 - n^2}$  — амплитуда вынужденных колебаний с частотой  $n$ .

Из решения (11) видно, что амплитуда вынужденных колебаний спутника существенно зависит от частоты собственных колебаний  $k$ . Учитывая, что соотношение моментов инерции спутника может изменяться в диапазоне  $0.5 < I < 1$  и  $|s| < 0.1$ , величина  $k^2$  находится приблизительно в диапазоне от 1.4 до 3, т.е. в зависимости от инерционных параметров, амплитуда вынужденных колебаний с орбитальной частотой может как вдвое увеличиваться, так и вдвое уменьшаться относительно амплитуды приведенного аэродинамического момента с данной частотой (приведенная динамическая жесткость системы для орбитальной частоты находится в диапазоне от 0.4 до 2). Для удвоенной орбитальной частоты приведенная динамическая жесткость находится в диапазоне от 1 до 2.6. Влияние третьей гармоники разложения плотности атмосферы, при отсутствии параметрического резонанса, очень мало в силу высокой динамической жесткости системы и наблюдаемой при расчетах малости коэффициента  $\bar{b}_3$ .

### 7. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Проведенные расчеты движения спутника по круговым орбитам на высотах 550–750 км показывают, что амплитуды переменной составляющей плотности атмосферы  $\bar{b}_n$  ( $\bar{b}_n > 0$ ) могут достигать значений:  $\bar{b}_1$  — до 0.83,  $\bar{b}_2$  — до 0.23,  $\bar{b}_3$  — до 0.02 (расчеты плотности проводятся согласно [11]).

Численное интегрирование уравнения (2) для указанного диапазона изменения параметров показывает, что в случае, когда система не находится в окрестности резонансов и при малых амплитудах колебаний решение (11) дает хорошее совпадение с решением исходного уравнения. Например, при движении спутника с параметрами, близкими к параметрам украинского спутника «Сич-1М»:  $I = 0.555$ ,  $\sigma_a = -0.116$ ,  $\lambda = -0.0037$  м/кг, на высоте 750 км по полярной орбите, плоскость которой перпендикулярна оси симметрии атмосферного горба, при низком уровне солнечной активности  $F_0 = 75 \cdot 10^{-22}$  Вт/(м<sup>2</sup>Гц) амплитуда вынужденных колебаний будет составлять всего 0.02° (рис. 3, а) и отличия между численным ( $\varphi_{\text{числ}}$ ) и аналитическим ( $\varphi_{\text{ан}}$ ) решениями уравнений (2) и (11) соответственно пренебрежимо малы. При движении этого же спутника на высоте 550 км по экваториальной орбите с максимальными изменениями плотности атмосферы в условиях высокой солнечной активности  $F_0 = 250 \cdot 10^{-22}$  Вт/(м<sup>2</sup>Гц) амплитуда вынужденных колебаний достигает 15° (рис. 3, б). Здесь уже наблюдаются отличия в решениях (2) и (11) (на рис. 3  $\varphi_{\text{числ}}$  и  $\varphi_{\text{ан}}$  соответственно), проявляющиеся в основном в сдвиге фазы колебаний. Можно утверждать, что эти отличия обусловлены нелинейностью уравнения (2), поскольку проведенные численные расчеты решений уравнений (11) и (6) в этом случае практически совпадают.

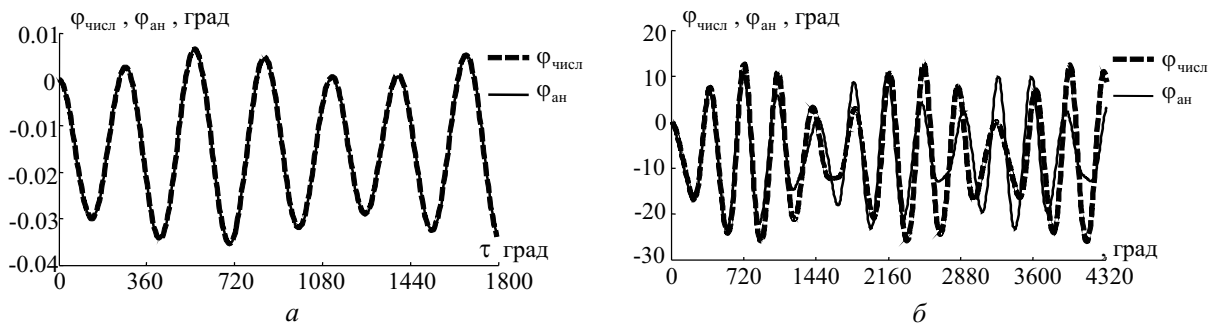


Рис. 3. Сравнение численного и аналитического решений для разных орбит

Сравним влияние переменной плотности атмосферы и стационарного (среднего) значения плотности на движение спутника. Переменность плотности атмосферы обуславливает появление вынуж-



денных колебаний с амплитудами  $A_n$ . Среднее значение плотности сказывается в основном на абсолютном значении угла смещения  $\varphi_0$ . Отношение амплитуды вынужденных колебаний с орбитальной частотой  $A_1$  к модулю угла смещения при  $\sigma_a = 0$  приближенно равно  $\frac{A_1}{|\varphi_0|} \approx \frac{\bar{b}_1}{1 - 1/k^2}$ . В рассматриваемом случае коэффициент динамичности системы [15]  $1/(1 - k^{-2})$  меняется приблизительно от 1.5 до 3.5. Тогда с учетом возможных значений  $\bar{b}_1$  можно утверждать, что существуют орбиты, для которых амплитуда вынужденных колебаний больше угла смещения. Более того, можно утверждать, что для спутников с отношением моментов инерции  $I$ , близким к 0.5, амплитуда вынужденных колебаний может превышать абсолютную величину угла смещения в несколько раз.

## ВЫВОДЫ

Предложена модель динамики спутника в плоскости круговой орбиты с учетом основных переменных составляющих аэродинамического момента. Построено квазистатическое решение, определяющее смещение продольной оси спутника относительно местной вертикали при постоянной, равной средней по орбите, плотности атмосферы. Получены оценки угла смещения в зависимости от безразмерного коэффициента, характеризующего отношение гравитационного и аэродинамического моментов.

Показано, что малые колебания спутника описываются уравнениями типа Хилла с периодической правой частью. Построено приближенное аналитическое решение малых колебаний при отсутствии резонансов и показано, что амплитуда вынужденных колебаний в зависимости от частоты собственных колебаний системы может как увеличиваться, так и уменьшаться относительно амплитуды приведенного аэродинамического момента.

Показано, что амплитуда вынужденных колебаний, обусловленная переменностью плотности атмосферы, может быть в несколько раз большей угла смещения, зависящего от среднего значения плотности атмосферы на орбите.

Проведен анализ возможности возникновения резонансов и показано, что в системе может наблюдаться параметрический резонанс, обусловленный близостью удвоенной частоты собственных колебаний с утроенной частотой орбитального движения.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00384-а)*

## Библиографический список

1. Сарычев В. А. Вопросы ориентации искусственных спутников. М.: ВИНТИ, 1978. 223 с.
2. Сарычев В. А., Мирер С. А., Дегтярев А. А., Дуарте Е. К. Исследование положений равновесия спутника, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов. Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. М., 2004.
3. Ковтуненко В. М., Камеко В. Ф., Яскевич Э. П. Аэродинамика орбитальных космических аппаратов. Киев: Наук. думка, 1977. 156 с.
4. Сарычев В. А., Сазонов В. В. Влияние сопротивления атмосферы на одноосную гравитационную ориентацию искусственного спутника // Космические исследования. 1982. Т. 20, № 5. С. 659–673.
5. Сазонов В. В. Об одном механизме потери устойчивости режима гравитационной ориентации спутника // Космические исследования. 1989. Т. 27, № 6. С. 836–848.
6. Басс В. П., Петрушенко Н. В., Стасенко С. Т. Анализ аэродинамических возмущений, действовавших на космический аппарат «Океан-О» в условиях его эксплуатации // Техническая механика. 2004. Вып. 1. С. 86–95.
7. Маслова А. И., Пироженко А. В. Изменения плотности атмосферы при движении космических аппаратов на низких околоземных орбитах // Космична наука і технологія. 2009. Т. 15, № 1. С. 13–18.
8. Маслова А. И., Пироженко А. В. Аппроксимация момента аэродинамических сил, действующих на космический аппарат с гравитационной системой стабилизации // Техническая механика. 2008. Вып. 1. С. 9–20.
9. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
10. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 864 с.
11. ГОСТ Р 25645.166–2004. Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полетов искусственных спутников Земли. М.: ИПК Изд-во стандартов, 2004. 24 с.
12. Горяченко В. Д. Элементы теории колебаний. М.: Высш. шк., 2001. 395 с.
13. Кильчевский Н. А. Курс теоретической механики: в 2 т. Т. 1. Кинематика, статика, динамика. М.: Наука, 1972. 456 с.
14. Алпатов А. П., Белецкий В. В., Драновский В. И., Закржевский А. Е., Пироженко А. В., Трогер Г., Хоро-



шилов В. С. Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. 558 с.

15. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1991. 256 с.

УДК 62.534(031)

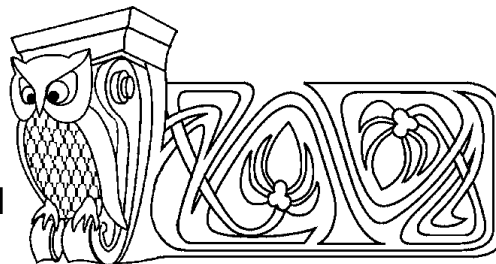
## ПОСТРОЕНИЕ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

С. П. Безгласный, Е. В. Куркина

Самарский государственный аэрокосмический университет им. акад. С.П. Королева, кафедра теоретической механики  
E-mail: bezglasnsp@rambler.ru, ekaterina.kurkina@mail.ru

Решена задача о построении асимптотически устойчивых произвольно заданных программных движений неавтономной гамильтоновой системы. Решение получено синтезом активного программного управления, приложенного к системе, и стабилизирующего управление по принципу обратной связи. Управление построено в виде точного аналитического решения в классе непрерывных функций. Задача решена на основе прямого метода Ляпунова теории устойчивости с использованием функции Ляпунова со знакопостоянными производными. В качестве примеров решены задачи о синтезе и стабилизации программных движений однородного стержня переменной длины и математического маятника переменной длины во вращающейся плоскости.

**Ключевые слова:** гамильтониан, неавтономная система, программное движение, функция Ляпунова.



### Construction and Stabilization Program Motions of Nonautonomous Hamiltonian Systems

S. P. Bezglasnyi, E. V. Kurkina

Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov, Chair of Theoretical Mechanics  
E-mail: bezglasnsp@rambler.ru, ekaterina.kurkina@mail.ru

We consider program motion of Hamiltonian system and solve the problem of construction asymptotically stability programm motion. The programm motion can be any function. Control is received in the method and the method of limiting functions and systems. In this case we use the Lyapunov's functions having constant signs derivatives. The following examples are considered: stabilization of program motions of homogeneous rod of variable length and stabilization of program motions of mathematical pendulum variable length in the rotation plane.

**Key words:** Hamiltonian, nonautonomous system, program motion, Lyapunov's function.

### ВВЕДЕНИЕ

Задачи об управляемых программных движениях механических систем являются актуальными и привлекают внимание многих исследователей. Построение и исследование свойств и условий устойчивости таких движений рассматривались в работах многих ученых, например [1–4].

В данной работе ставится и решается задача об определении управления, реализующего и стабилизирующего произвольные заданные движения механической гамильтоновой системы. Решение задачи сводится к исследованию нулевого решения неавтономной системы и проводится на основе прямого метода Ляпунова [5]. Метод предельных систем [6] и его модификация [7] позволяют при использовании функций Ляпунова со знакопостоянными производными строить искомое управление в замкнутой аналитической форме в классе непрерывных функций.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается управляемая механическая система, движение которой описывается уравнениями Гамильтона:

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H(t, q, p)}{\partial p} + u, \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(t, q, p)}{\partial q} + v, \end{cases} \quad (1)$$

где  $q = (q_1, \dots, q_n)^T$  —  $n$ -вектор обобщенных координат в действительном линейном пространстве  $R^n$  с нормой  $\|q\|$ ,  $p = (p_1, \dots, p_n)^T$  —  $n$ -вектор обобщенных моментов,  $p \in R^n$  с нормой  $\|p\|$  и  $H(t, q, p)$  — гамильтониан системы,  $u, v$  — силы управляющих воздействий.

Приведем постановку и решение задачи о стабилизации программных движений системы, которая состоит в следующем: для выбранного произвольного движения механической системы надо





построить программное управляющее воздействие, реализующее это заданное движение, и синтезировать позиционное стабилизирующее управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость программного движения.

Введем следующее определение.

**Определение.** Программным (желаемым) движением системы назовем пару  $p^* = p^*(t)$ ,  $q^* = q^*(t)$ , где  $q^*(t)$  и  $p^*(t)$  — ограниченные, дважды кусочно-непрерывно дифференцируемые  $n$ -мерные вектор-функции, описывающие некоторое заданное движение механической системы.

В общем случае функции  $q^*(t)$ ,  $p^*(t)$  могут не являться решением системы (1). Поэтому сначала поставим и решим задачу о реализации программного движения  $q^*(t)$ ,  $p^*(t)$  системы (1).

## 2. ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И УРАВНЕНИЯ В ОТКЛОНЕНИЯХ

Пусть необходимо, чтобы система совершала некоторое программное движение  $(q^*(t), p^*(t))$ . Добавим к правой части системы (1) управляющие силы вида  $u^p$  и  $v^p$ :

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H(t, q, p)}{\partial p} + u^p, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H(t, q, p)}{\partial q} + v^p. \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя программное движение в систему (1) с управляющими силами  $u^p$  и  $v^p$ , получим уравнения управляемого движения вида

$$\begin{cases} \dot{q}^* = \frac{\partial H(t, q^*, p^*)}{\partial p} + u^p, \\ \dot{p}^* = -\frac{\partial H(t, q^*, p^*)}{\partial q^*} + v^p. \end{cases} \quad (3)$$

Из системы (3) вычислим программное управление:

$$\begin{cases} u^p = \dot{q}^* - \frac{\partial H(t, q^*, p^*)}{\partial p_i}, \\ v^p = \dot{p}^* + \frac{\partial H(t, q^*, p^*)}{\partial q^*}. \end{cases} \quad (4)$$

Подставим (4) в систему (2):

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H(t, q, p)}{\partial p} + \dot{q}^* - \frac{\partial H(t, q^*, p^*)}{\partial p_i}, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H(t, q, p)}{\partial q} + \dot{p}^* + \frac{\partial H(t, q^*, p^*)}{\partial q^*}. \end{cases} \quad (5)$$

Полученные уравнения (5) имеют решение, соответствующее выбранному программному движению  $q^*(t)$ ,  $p^*(t)$ . Программные движения могут быть неустойчивыми, т. е. нереализуемыми на практике. Исследуем его на устойчивость и стабилизируем в случае необходимости до асимптотической устойчивости.

Сведем решение задачи о стабилизации программных движений к задаче стабилизации нулевого решения неавтономной гамильтоновой системы. Это позволит применить к задаче о стабилизации программных движений методы и результаты, разработанные для исследования устойчивости и стабилизации нулевого положения равновесия неавтономных систем [7, 8].

Введем отклонения по правилу

$$\begin{cases} x = q - q^*(t), \\ y = p - p^*(t). \end{cases}$$

В силу линейности замены и линейности оператора дифференцирования структура уравнений Гамильтона при переходе к уравнениям в отклонениях не изменится.



Выпишем уравнения движения механической системы в отклонениях в виде системы уравнений Гамильтона. Уравнения (5) примут вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H(t, x + q^*(t), y + p^*(t))}{\partial y} - \frac{\partial H(t, q^*(t), p^*(t))}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\frac{\partial H(t, x + q^*(t), y + p^*(t))}{\partial x} + \frac{\partial H(t, q^*(t), p^*(t))}{\partial x}. \end{cases} \quad (6)$$

В дальнейшем будем рассматривать классические натуральные системы, для которых гамильтониан имеет вид [9]

$$H(t, p, q) = \frac{1}{2} p^T A p + U(t, q), \quad (7)$$

где  $A$  — матрица коэффициентов квадратичной формы кинетической энергии. С учетом гамильтониана (7) уравнения возмущенного движения в отклонениях (6) запишутся в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - A^*)p^* + Ay, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2} y^T \frac{\partial A}{\partial q} y - p^{*T} \frac{\partial A}{\partial q} y + \frac{1}{2} p^{*T} \left[ \frac{\partial A^*}{\partial q^*} - \frac{\partial A}{\partial q} \right] p^* + \frac{\partial U^*}{\partial q^*} - \frac{\partial U}{\partial q}. \end{cases} \quad (8)$$

Обозначим

$$p^{*T} \frac{\partial A}{\partial q} = B(t, q), \quad \frac{1}{2} p^{*T} \left[ \frac{\partial A^*}{\partial q^*} - \frac{\partial A}{\partial q} \right] p^* + \frac{\partial U^*}{\partial q^*} - \frac{\partial U}{\partial q} = C_0(t, q).$$

Тогда систему (8) представим в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - A^*)p^* + Ay, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2} y^T \frac{\partial A}{\partial q} y - By + C_0. \end{cases} \quad (9)$$

### 3. ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть  $C$  — положительно определенная, неисчезающая, ограниченная матрица:

$$c_0 E \leq C \leq c_1 E \quad (0 < c_0 < c_1 - \text{const}),$$

где  $E$  — единичная матрица.

Рассмотрим положительно определенную по отклонениям  $x$  и  $y$ , допускающую бесконечно малый высший предел, функцию Ляпунова [10]:

$$V(x, y, t) = \frac{1}{2} y^T A y + x^T C x. \quad (10)$$

Полная производная функции Ляпунова (10) по времени будет иметь вид

$$\dot{V} = \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^T \dot{y} + \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (11)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -y^T \left[ AB - \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial t} \right] y + \frac{1}{2} x^T \frac{\partial C}{\partial t} x + y^T A C_0 + x^T C A y - \frac{1}{2} y^T A \left[ y \frac{\partial A}{\partial q} y \right] + \\ & + \left( \frac{1}{2} y \frac{\partial A}{\partial x} y \right)^T A y + \left( \frac{1}{2} y \frac{\partial A}{\partial x} y \right)^T [(A - A^*)p^*] + (Cx)^T [(A - A^*)p^*]. \end{aligned}$$

Поставим и решим задачу о стабилизации программного движения  $q^*(t)$ ,  $p^*(t)$ .

**Определение.** Управляющие воздействия  $u^s = u^s(x, y, t)$  и  $v^s = v^s(x, y, t)$  называются *стабилизирующими*, если они обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения  $x = y = 0$  системы (9).

**Постановка задачи о стабилизации:** определить стабилизирующие управления  $u^s = u^s(x, y, t)$  и  $v^s = v^s(x, y, t)$ , при добавлении которых в систему (9) ее решение  $x = y = 0$  становится асимптотически устойчивым.



Выберем стабилизирующее управление в виде

$$u^s = -(A - A^*)p^*, \quad v^s = -C_0 - Cx - A^{-1}Dy, \quad (12)$$

где  $D = D(t)$  — симметричная, положительно определенная матрица размерности  $n \times n$ . Добавив силы (12) в систему (9), имеем уравнения управляемых движений:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ay, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}y^T \frac{\partial A}{\partial q} y - By - Cx - A^{-1}Dy. \end{cases} \quad (13)$$

Тогда полная производная (11) от функции Ляпунова в силу системы (13) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -y^T \left[ AB - \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial t} \right] y + \frac{1}{2} x^T \frac{\partial C}{\partial t} x + y^T AC_0 + x^T CAy - \frac{1}{2} y^T A \left[ y \frac{\partial A}{\partial q} y \right] + \\ &+ \left( \frac{1}{2} y \frac{\partial A}{\partial x} y \right)^T Ay + y^T Au = -y^T \left[ AB - \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial t} \right] y + \frac{1}{2} x^T \frac{\partial C}{\partial t} x + y^T AC_0 + \\ &+ x^T CAy - \frac{1}{2} y^T A \left[ y \frac{\partial A}{\partial q} y \right] + \left( \frac{1}{2} y \frac{\partial A}{\partial x} y \right)^T Ay - y^T AC_0 - y^T ACy - y^T Dy = \\ &= -y^T \left[ AB - \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial t} \right] y + \frac{1}{2} x^T \frac{\partial C}{\partial t} x - \frac{1}{2} y^T A \left[ y \frac{\partial A}{\partial q} y \right] + \left( \frac{1}{2} y \frac{\partial A}{\partial x} y \right)^T Ay - y^T Dy. \end{aligned}$$

Перепишем:

$$\dot{V} = -y^T \left[ AB - \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial t} + D \right] y + \frac{1}{2} x^T \frac{\partial C}{\partial t} x + N,$$

где обозначено

$$N = -\frac{1}{2} y^T A \left[ y \frac{\partial A}{\partial q} y \right] + \left( \frac{1}{2} y \frac{\partial A}{\partial x} y \right)^T Ay$$

— слагаемые старше второго порядка малости, ими можно пренебречь.

В итоге имеем

$$\dot{V} \cong -y^T \left[ AB - \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial t} + D \right] y + \frac{1}{2} x^T \frac{\partial C}{\partial t} x. \quad (14)$$

В качестве основных результатов о стабилизации программных движений гамильтоновых систем приведем следующие утверждения.

**Утверждение 1.** Пусть матрицы  $A$  и  $C$  не зависят от  $t$ , т. е. выполнены условия

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial t} = 0.$$

Тогда управление (12) стабилизирует программное движение  $q^* = q^*(t)$ ,  $p^* = p^*(t)$  при условии, что  $D + AB$  — положительно определенная.

**Утверждение 2.** Пусть выполнены условия

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial t} \leq 0.$$

Тогда управление (12) стабилизирует программное движение  $q^* = q^*(t)$ ,  $p^* = p^*(t)$  при условии, что  $D + AB$  — положительно определенная.

**Утверждение 3.** Пусть выполнены условия

$$\frac{\partial A}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial C}{\partial t} = 0.$$

Тогда управление (12) стабилизирует программное движение  $q^* = q^*(t)$ ,  $p^* = p^*(t)$  при условии, что

$$D \geq \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial t} - AB.$$



**Утверждение 4.** Пусть выполнены условия

$$\frac{\partial A}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial C}{\partial t} \leq 0, \quad (15)$$

Тогда управление (13) стабилизирует программное движение  $q^* = q^*(t)$ ,  $p^* = p^*(t)$  при условии (15).

Представленные утверждения отличаются тем, что в утверждениях 2 и 4 производная функции Ляпунова есть отрицательно определенная по всем переменным, и наличие асимптотической устойчивости нулевого решения справедливо на основании теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [5]. В утверждениях 1 и 3 производная (14) при управлении (12) является отрицательно определенной функцией только по переменным  $y$ , т. е. знакопостоянной. На основе теоремы 3 из [7] имеем асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (9), т. е. программного решения  $q^*(t), p^*(t)$  исходной управляемой системы (1).

#### 4. СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

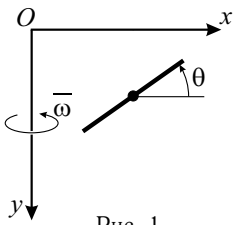


Рис. 1

Рассмотрим однородный тяжелый стержень переменной длины массой  $m = 1$ , движущийся без трения в плоскости  $Oxy$ , которая вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг неподвижной вертикальной оси  $Oy$ , лежащей в этой плоскости (рис. 1). Пусть  $\xi, \eta$  — координаты центра масс стержня,  $\theta$  — угол отклонения стержня от вертикали. Длина стержня изменяется по закону  $k = k(t) = a + b \cos t$ . Система имеет три степени свободы.

Поставим задачу о реализации управляющими силами, прикладываемыми к системе, произвольно заданных движений механической системы и стабилизации этих движений.

Гамильтониан системы примет вид

$$H(\xi, \eta, \theta) = \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + k^2(t)\dot{\theta}^2 + \omega^2 k^2(t) \cos^2 \theta + \omega^2 \xi^2) - g\eta.$$

Выберем программное движение так, чтобы центр масс стержня двигался по окружности радиуса  $R = 1$  с центром в точке  $O(2, 2)$ , и при этом стержень вращался в плоскости  $Oxy$  вокруг центра масс с постоянной угловой скоростью  $\omega_0 = \text{const}$ . Программное движение имеет вид

$$\begin{cases} \xi^* = \cos t + 2, \\ \eta^* = \sin t + 2, \\ \theta^* = \omega_0 t. \end{cases}$$

Уравнения в отклонениях (9) запишутся в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{x}_3 = y_3/k^2, \\ \dot{y}_1 = \omega^2 x_1, \\ \dot{y}_2 = 0, \\ \dot{y}_3 = -\omega^2 k^2 \sin x_3 \cos(x_3 + 2\omega_0 t). \end{cases}$$

Выбрав управление в виде (12) согласно утверждению 3

$$\begin{cases} u_1 = -\omega^2 x_1 - c_{11}x_1 - d_{11}y_1, \\ u_2 = -c_{22}x_2 - d_{22}y_2, \\ u_3 = \omega^2 k^2 \sin x_3 \cos(x_3 + 2q_3^*) - c_{33}x_3 - k^2 d_{33}y_3, \end{cases}$$



получим уравнения движения стабилизированной системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{x}_3 = y_3/k^2, \\ \dot{y}_1 = -c_{11}x_1 - d_{11}y_1, \\ \dot{y}_2 = -c_{22}x_2 - d_{22}y_2, \\ \dot{y}_3 = -c_{33}x_3 - k^2 d_{33}y_3. \end{cases}$$

## 5. СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

Рассмотрим маятник переменной длины на вращающемся основании. Пусть плоскость  $Oxy$  с подвижной системой координат  $Oxy$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $Oy$ . В точке  $B$  на подвижной оси  $Ox$  прикреплен математический маятник массой  $m$  переменной длины  $l = l(t)$ , совершающий относительные движения в плоскости  $Oxy$  (рис. 2).

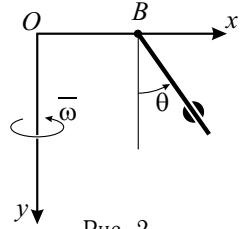


Рис. 2

Поставим задачу о реализации внешними управляющими силами, прикладываемыми к системе, произвольно заданных движений маятника и о стабилизации этих движений.

Гамильтониан системы примет вид

$$H(l, \theta) = ml^2 + ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{m}{2}[l^2 + \dot{\theta}^2 l^2 + \omega^2(\xi_0^2 + 2\xi_0 l \sin \theta + l^2 \sin^2 \theta)] - mgl \cos \theta.$$

Выбрав программное движение в виде

$$\begin{cases} l^* = l_0 + a \sin t, \\ \theta^* = \omega_0 t, \end{cases}$$

получаем следующие уравнения в отклонениях:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1/m, \\ \dot{x}_2 = \frac{y_2 + m\omega_0(l_0 + a \sin t)^2}{m(x_1 + l_0 + a \sin t)^2} - \omega_0, \\ \dot{y}_1 = \frac{(y_2 + m\omega_0(l_0 + a \sin t)^2)^2}{m(x_2 + l_0 + a \sin t)^3} + \frac{\omega^2}{m}((x_1 + l_0 + a \sin t) \sin^2(x_2 + \omega_0 t) + \\ + \xi_0 \sin(x_2 + \omega_0 t)) + mg \cos(x_2 + \omega_0 t) - m\omega_0^2(l_0 + a \sin t) - \\ - \frac{\omega^2}{m}(\xi_0 \sin \omega_0 t + (l_0 + a \sin t) \sin^2 \omega_0 t) - mg \cos \omega_0 t, \\ \dot{y}_2 = \frac{\omega^2 \xi_0 (x_1 + l_0 + a \sin t)}{m} \cos(x_2 + \omega_0 t) + \frac{\omega^2}{2m} (x_1 + l_0 + a \sin t)^2 \sin 2(x_2 + \omega_0 t) - \\ - mg(x_1 + l_0 + a \sin t) \sin(x_2 + \omega_0 t) - \frac{\omega^2}{2m} (2\xi_0(l_0 + a \sin t) \cos \omega_0 t + \\ + (l_0 + a \sin t)^2 \sin 2\omega_0 t) + mg(l_0 + a \sin t) \sin \omega_0 t. \end{cases}$$

На основе утверждения 1 управления

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ u_2 = \frac{p_2^*}{mq_1^{*2}} - \frac{p_2^*}{mq_1^{*2}}, \\ v_1 = \frac{-p_2^{*2}}{mq_1^{*3}} + \frac{p_2^{*2}}{m(q_1^* + x_1)^3} + \frac{\omega^2}{m}(\xi_0 \sin q_2^* + q_1^* \sin^2 q_2^*) - mg \cos q_2^* - \frac{\omega^2}{m}(\xi_0 \sin(q_2^* + x_2) + \\ + (q_1^* + x_1) \sin^2(q_2^* + x_2)) - mg \cos(q_2^* + x_2) - c_{11}x_1 - md_{11}y_1, \\ v_2 = \frac{\omega^2}{2m}(2\xi_0 q_1^* \cos q_2^* + q_1^{*2} \sin 2q_2^*) + mgq_1^* \sin q_2^* - \frac{\omega^2}{2m}(2\xi_0(q_1^* + x_1) \cos(q_2^* + x_2) + \\ + (q_1^* + x_1)^2 \sin 2(q_2^* + x_2)) + mg(q_1^* + x_1) \sin(q_2^* + x_2) - c_{22}x_2 - mq_1^2 d_{22}y_2. \end{cases}$$



стабилизируют выбранное программное движение. При этом управляемая система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1/m \\ \dot{x}_2 = \frac{y_2}{m(x_1 + l_0 + a \sin t)^2} \\ \dot{y}_1 = \frac{y_2 + 2y_2m\omega_0(l_0 + a \sin t)^2}{m(x_2 + l_0 + a \sin t)^3} - c_{11}x_1 - md_{11}y_1, \\ \dot{y}_2 = -c_{22}x_2 - m(x_1 + l_0 + a \sin t)^2 d_{22}y_2. \end{cases}$$

Проиллюстрируем полученные результаты графическим представлением численного интегрирования построенной управляемой системы. Интегрирование проведено при следующих значениях параметров системы:  $m = 1$  кг,  $\omega = 1$  рад/с,  $l_0 = 2$  м,  $a = 0.5$  м,  $\omega_0 = 5$  рад/с,  $c_{11} = 10$ ,  $c_{22} = 10$ ,  $d_{11} = 10$ ,  $d_{22} = 10$  и следующих начальных отклонениях:  $x_1(0) = 0.1$  м,  $x_2(0) = 0.1$  рад,  $y_1(0) = 0.1$  кг м/с,  $y_2(0) = 0.1$  кг рад/с.

На рис. 3, а изображены отклонения  $x_1, x_2$ , а на рис. 3, б — отклонения  $y_1, y_2$ . Представленные графики демонстрируют асимптотическую сходимость отклонений, тем самым имеем стабилизированные произвольно выбранные программные движения маятника.

Результаты, полученные в работе, развивают и обобщают результаты из [8, 10].

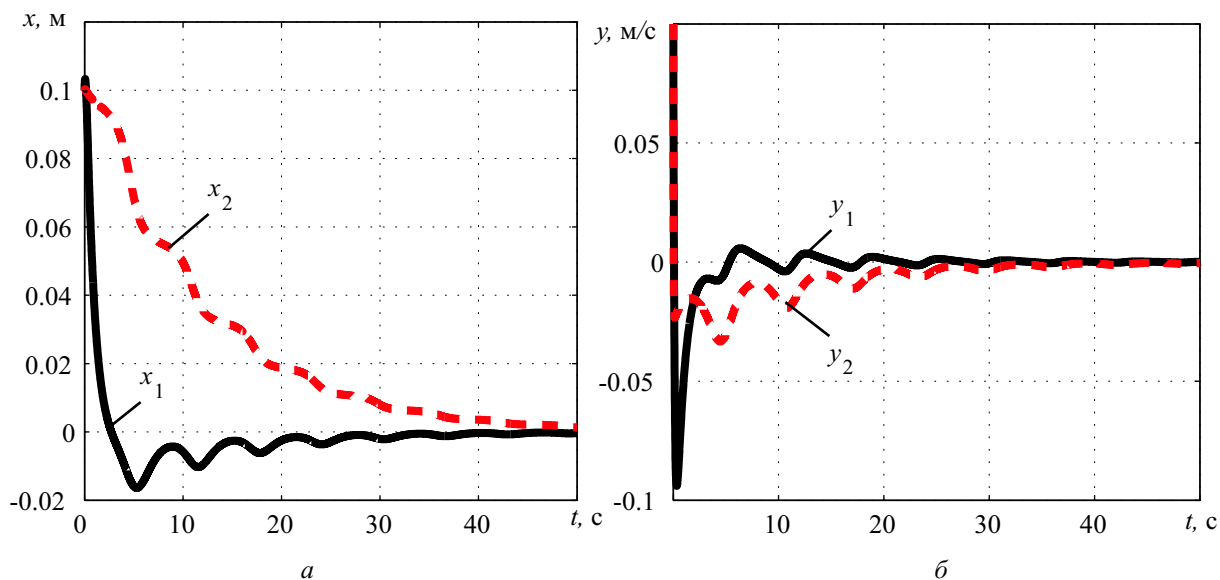


Рис. 3

### Библиографический список

1. Летов А. М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 359 с.
2. Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г., Фурасов В. Д. Построение систем программного движения. М.: Наука, 1971. 352 с.
3. Зубов В. И. Проблема устойчивости процессов управления. Л.: Судостроение, 1980. 375 с.
4. Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 1989. 447 с.
5. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
6. Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary equations // J. Differ. Equat. 1977. Vol. 23. P. 216–223.
7. Андреев А. С. Об устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Вып. 2. С. 40–45.
8. Bezglasnyi S. P. The stabilization of equilibrium state of nonlinear hamiltonian systems // Seminarberichte aus dem Fachbereich Mathematik. FernUnivetsität in Hagen. 2001. Bd. 71. P. 45–53.
9. Маркеев А. П. Теоретическая механика. М.: Физматлит, 1990. 414 с.
10. Bezglasnyi S. P. The stabilization of program motions of controlled nonlinear mechanical systems // Korean J. Comput. and Appl. Math. 2004. Vol. 14, № 1. P. 251–266.



УДК 539

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ВНУТРИ КОЛЬЦА НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ С ДВУМЯ СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

В. О. Бытев, Е. А. Гербер

Тюменский государственный университет (Институт математики и компьютерных наук),  
кафедра математического моделирования  
E-mail: vbytev@utmn.ru, e.a.gerber@gmail.com

В статье рассматривается решение задачи по определению поля скоростей и поля температуры внутри теплоизолированного кольца несжимаемой вязкой жидкости с двумя свободными границами в неклассической модели гидродинамики. Решение системы уравнений Навье – Стокса и теплопроводности получено на основе численных методов. Анализ результатов численного эксперимента выявил влияние недиссипативной вязкости на распределение температуры внутри кольца.

**Ключевые слова:** гидродинамика, уравнения Навье – Стокса, распределение температуры, жидкое кольцо, свободные границы.

### ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена задаче отыскания решений уравнений Навье – Стокса и теплопроводности (осесимметричный вариант уравнений) для плоского теплоизолированного кольца вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами, совершающего вращательно-симметричное движение по инерции в рамках неклассической модели гидродинамики [1]. Примером рассматриваемого объекта может быть газопылевое облако.

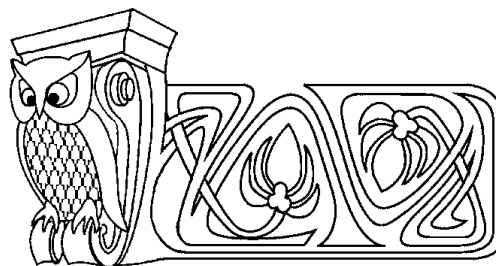
В работе Л. В. Овсянникова [2] впервые определяются основы подхода к изучению задач со свободными границами. Однозначная разрешимость задачи по описанию динамики кольца в рамках классической системы уравнений Навье – Стокса была доказана в [3], там же была установлена и асимптотика его поведения при  $t \rightarrow \infty$ . Динамика свободного кольца при стремлении коэффициента кинематической вязкости к нулю ( $\nu \rightarrow 0$ ) рассматривалась в работе В. В. Пухначева [4]. В работах О. М. Лаврентьевой [5, 6] изучено поведение жидкого кольца при наличии сил поверхностного натяжения.

Ввиду того что в рамках неклассической модели гидродинамики вместо коэффициента динамической вязкости используется ее тензорный аналог, в котором наряду с обычной динамической вязкостью присутствует ещё и ее недиссипативная часть, становится интересным вопрос о характере ее влияния как на поле скоростей, так и на вид распределения температуры. В работах [7, 8] были представлены результаты численного моделирования, позволившие выявить характер влияния недиссипативной составляющей тензора вязкости на поле скоростей жидкого кольца.

Целью данного исследования является вопрос, связанный с выявлением степени влияния недиссипативной составляющей тензора вязкости на распределение температуры внутри движущегося теплоизолированного кольца вязкой несжимаемой жидкости. В литературе известно лишь ограниченное число случаев, допускающих интегрирование уравнений Навье – Стокса в аналитическом виде, поэтому достижение успеха в этой области возможно лишь при использовании численных методов. Все результаты этого исследования получены в процессе численного моделирования.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В классической модели стоксовой жидкости тензор напряжений имеет вид  $T = -pI + 2\mu D$ , где  $I$  — шаровой единичный тензор,  $\mu$  — обычная динамическая вязкость,  $D$  — тензор скорости деформации.



Temperature Distribution Inside the Ring of Liquid with Two Free Borders in the Nonclassical Model of Hydrodynamics

V. O. Bytev, E. A. Gerber

Tyumen State University (Institute of Mathematics and Computer Sciences),  
Chair of Mathematical Modeling  
E-mail: vbytev@utmn.ru, e.a.gerber@gmail.com

The article deals with the task to determine the velocity field and temperature field inside the insulated ring of incompressible viscous fluid with two free boundaries in the non-classical model of hydrodynamics. The solution to the Navier – Stokes equations and heat equation obtained by numerical methods. Analysis of the results of numerical experiments reveal the effect of nondissipative viscosity on the temperature distribution inside the ring.

**Key words:** hydrodynamics, Navier – Stokes equations, temperature distribution, liquid ring, free borders.



Впервые в работе [9] авторами был рассмотрен вариант обобщения модели стоксовой жидкости, в которой вместо обычной динамической вязкости используется тензор динамической вязкости в следующем виде:

$$M = \begin{pmatrix} \mu & \mu_0 \\ -\mu_0 & \mu \end{pmatrix},$$

где  $\mu_0$  — недиссипативная составляющая общей вязкости, которая формально может иметь любой знак. Таким образом, рассматривается своеобразный вариант анизотропной вязкости. Система уравнений для описания движения кольца и потока тепла в нем с учетом вида тензора вязкости представлена в виде

$$\begin{cases} \rho \frac{d\vec{u}}{dt} - M\Delta\vec{u} + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0, \\ \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} (k\nabla T) + 2(MD) : D, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\vec{u}(u_r(t, r); u_\phi(t, r))$  — вектор скорости, а для уравнения теплопроводности использовано обозначение скалярного произведения тензоров. В предположении осесимметричности плоского движения свободного жидкого кольца выпишем в явном виде уравнения, связанные с переносом импульса и теплоты в полярной системе координат. После проведения несложных преобразований вид слагаемого, связанного с диссипацией энергии в уравнении теплопроводности, совпал с таковым в классической трактовке, при этом все слагаемые связанные с недиссипативной вязкостью сократились. Таким образом, систему уравнений (1) можно записать в следующей форме:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_\phi^2}{r} - \nu \left( \frac{\partial u_r}{r \partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right) + \nu_0 \left( \frac{u_\phi}{r^2} - \frac{\partial u_\phi}{r \partial r} - \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + \frac{u_r u_\phi}{r} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \nu_0 \left( \frac{\partial u_r}{r \partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right) + \nu \left( \frac{u_\phi}{r^2} - \frac{\partial u_\phi}{r \partial r} - \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial r^2} \right) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} = 0, \quad (4)$$

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] + \mu \left\{ 2 \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \frac{u_r}{r} \right)^2 + \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\phi}{r} \right) \right]^2 \right\}. \quad (5)$$

Если все теплофизические величины жидкости являются константами, то система уравнений распадается на две независимые группы. Первые три уравнения не содержат слагаемых, связанных с температурой, а решение последнего уравнения можно найти только в том случае, если известно решение первых трех уравнений для поля скоростей. Конвективная составляющая температурного поля зависит от радиальной составляющей скорости, а диссипативная — от обеих составляющих скорости. Граничные условия для уравнений (2)–(4) можно определить из условия равенства нулю тензора напряжений на свободных границах при  $r = R_{1,2}(t)$ , а именно из следующих равенств:

$$\begin{cases} T_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} + \mu_0 \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right) = 0, \\ T_{r\phi} = \mu \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right) - 2\mu_0 \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Движение жидкости возможно лишь при наличии внешних массовых сил (в нашем случае их нет), либо при наличии внешних сил, создающих перепад давления, либо при наличии начального распределения поля скоростей, обусловленного внешними силами (в этом случае будет происходить движение вязкой жидкости по инерции). Очевидно, что начальное распределение поля скоростей должно быть согласовано с условиями (6). Таким образом, если задано начальное распределение скорости, а соответственно и давления, то появляется возможность отыскания решения системы уравнений для поля скоростей, но трудность его поиска связана с тем, что в данной системе в явном виде не присутствует уравнение для определения поля давления. Для решения этой проблемы, как правило, прибегают к





эквивалентной форме записи системы уравнений для скоростей в виде системы уравнений в переменных скорость – давление или эквивалентной ей в переменных функция тока и вихрь. Приведем для справки систему уравнений в переменных скорость – вихрь:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + u_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} = \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} \right], \\ \frac{\partial p_r}{r \partial r} + \frac{\partial^2 p_r}{\partial r^2} = \rho \left[ \nu_0 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} \right) - \left\{ u_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right) + \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 \right\} \right], \end{cases}$$

где  $\Omega = \frac{u_\phi}{r} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r}$  – вспомогательная переменная для описания вихря. Основное отличие полученной системы от системы уравнений для классического варианта описания поведения стоксовой жидкости, связано со слагаемым  $\nu_0 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} \right)$  в уравнении для определения давления (в классическом варианте оно отсутствует). Таким образом, можно сказать, что недиссипативная вязкость может влиять не только на закономерности изменения поля скоростей, но и поля давления в жидкости.

Главной проблемой поиска численного решения системы уравнений (2)–(5) является то, что область интегрирования меняется в зависимости от времени. Для решения этой проблемы авторами [7, 10] использовался прием, связанный с введением новых переменных, позволяющих осуществить отображение изменяющейся области интегрирования на фиксированную область. В качестве переменной, отслеживающей изменение положения внутренней границы кольца, взято отношение  $\xi(t) = \frac{R_2^2(t)}{R_{20}^2}$ . Можно показать, что новая переменная  $\eta = -\xi + \frac{r^2}{R_{20}^2}$ , определяющая положение любой

точки жидкого кольца, будет изменяться в фиксированных пределах, а именно  $0 \leq \eta \leq a = \frac{R_{10}^2}{R_{20}^2} - 1$ . Последнее соотношение обусловлено тем, что осесимметричный характер движения сохраняет форму кольца, а его площадь в силу условия несжимаемости должна оставаться постоянной. Если кроме этого перейти к безразмерным переменным:

$$u_r = \frac{\nu \Psi(t)}{r}, \quad u_\phi = \frac{\nu \omega(r, t) r}{R_{20}^2}, \quad \tau = \frac{\nu t}{R_{20}^2},$$

где  $\nu$  – обычная кинематическая вязкость, а  $\Psi(t)$ ,  $\omega(r, t)$  – неизвестные функции, определяющие закономерности изменения радиальной и угловой составляющих скорости, то система уравнений (2)–(5) вместе с начальными и краевыми условиями переписется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{d\tau} &= \frac{a\Psi(\Psi - 4)}{\xi(a + \xi) \ln(1 + \xi/a)} + \frac{1}{\ln(1 + \xi/a)} \int_0^a \left( 4\varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \omega^2 \right) d\eta, \quad \Psi(0) = \Psi_0, \quad \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = 2\Psi, \quad \xi(0) = 1, \\ \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{2\Psi \omega}{(\xi + \eta)} &= 8 \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + 4(\xi + \eta) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2}, \quad \left( \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{\varepsilon}{(\xi + \eta)^2} \Psi \right) \Big|_{\eta=0, a} = 0, \quad \omega(\eta, 0) = \omega_0(\eta), \quad (7) \\ A \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} &= B \frac{\partial}{\partial \eta} \left( (\xi + \eta) \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right) + \frac{\Psi^2}{(\xi + \eta)^2} + (\xi + \eta)^2 \left( \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right)^2, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0, a} = 0, \quad \Theta(\eta, 0) = \Theta_0(\eta), \end{aligned}$$

где использована безразмерная величина  $\varepsilon = \nu_0/\nu$ , равная отношению соответствующих вязкостей,  $A, B$  – комбинация теплофизических характеристик жидкости,  $\Theta = T(t, \eta)/T_{baz}$  – относительная температура.

Для проведения экспериментов по численному моделированию использовалась программа «Ring v1.1» [10], написанная на языке Delphi на основе конечно разностной аппроксимации системы уравнений (7). Тестирование программы осуществлялось путем сравнения численного решения с известным аналитическим решением при начальном условии  $\Psi_0 = 4$  для первого уравнения этой системы. Анализ результатов численного моделирования показал достаточно хорошее согласие между этими решениями. Использование этой программы позволило исследовать характер влияния недиссипативной вязкости на динамику жидкого кольца в зависимости от ее величины и знака отношения



вязкостей  $\varepsilon$  путем варьирования ее значений. Для осуществления сквозного счета программа «Ring v1.1», была доработана, и к блоку численного решения уравнений движения и неразрывности был добавлен блок для численного расчета температурного поля.

## 2. ИТОГИ РАСЧЕТА

На первом этапе численного моделирования распределения температуры во вращающемся жидком кольце проводились для воды, т. е. использовались ее теплофизические характеристики. Значения параметра  $\varepsilon$  выбиралось из интервала  $[0.001 \div 40]$ . В нулевой момент времени относительная температура кольца принималась одинаковой, что соответствует значению для относительной температуры  $\Theta(0, \eta) = 1$ . Этот вариант начального распределения был выбран для того, чтобы процесс диссипации энергии движения жидкого кольца был доминирующим при условии, что границы кольца теплоизолированы. Несмотря на то что поле скоростей менялось достаточно существенно, никаких эффектов влияния недиссипативной составляющей вязкости обнаружено не было. Результаты численного эксперимента с большой точностью выдавали  $\Theta(\tau, \eta) = 1$ , для любого набора значений параметра  $\varepsilon$ , т. е. первоначальное распределение температуры в жидком вращающемся кольце практически оставалось неизменным.

Для объяснения подобного поведения температурного поля была проведена оценка величины диссипативной части энергии, которая перейдет в тепло для реального вещества, например в нашем случае для воды. Характерные значения рассчитанных составляющих скорости равны соответственно:  $u_r = 5 \cdot 10^{-6} \frac{m}{sec}$  и  $u_\phi = 0.5 \cdot 10^{-6} \frac{m}{sec}$ . Абсолютное значение модуля скорости  $|\vec{u}| \approx 5 \cdot 10^{-6} \frac{m}{sec}$ . Если вся кинетическая энергия перейдет в тепло, то справедливо равенство

$$m \frac{u^2}{2} = m C_p \Delta T. \quad (8)$$

Подставляя соответствующие значения в (8), получим оценку для разности температур  $\Delta T = \frac{u^2}{2C_p} \approx \frac{25 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 2.6 \cdot 10^3} \approx 5 \cdot 10^{-15}$  град. Величина абсолютно неувимая на фоне ошибок, получающихся в ходе процесса численного решения системы (7). Таким образом, показано, что для ньютоновской жидкости, которой является обычная вода, в зоне ламинарного течения (число Рейнольдса  $Re = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 0.5}{1 \cdot 10^{-6}} \approx 3$ ), влияние недиссипативной вязкости ничтожно мало.

Для того, чтобы выявить эффект влияния недиссипативной вязкости на распределение температуры и сделать его более выпуклым, дальнейший процесс численного моделирования был проведен для жидкости с физическими характеристиками, равными  $C_p = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\nu = 1$ , в соответствующих размерностях при прежних условиях.

Результаты численного моделирования в этом случае показывают заметное влияние величины недиссипативной вязкости на поведение температурного поля. Иллюстрация поведения относительной температуры представлена на рис. 1, где показан характер ее изменения в радиальном направлении в разные моменты относительного времени. Поле скоростей было построено для начального радиального распределения скорости при  $\Psi_0 = 4$ , что соответствует тому, что радиальная составляющая скорости направлена от центра кольца в начальный момент времени.

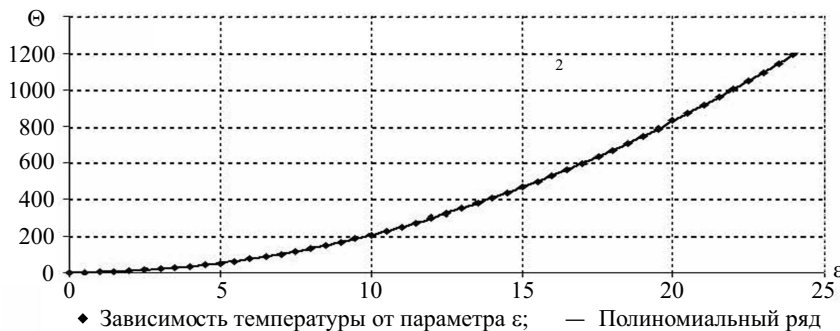


Рис. 1. Изменение распределения температуры вдоль радиуса в разные моменты времени



Относительная температура кольца меняется достаточно динамично. Вначале идет разогрев наружной части кольца, а затем и внутренней. Подобное поведение можно объяснить разностью абсолютных величин скоростей на границах кольца. По истечении некоторого времени температура кольца достигает своего максимального значения и становится практически постоянной по всей площади кольца, так как кольцо практически останавливается. Величина максимальной относительной температуры  $\Theta_{max} = \text{const}$  напрямую определяется лишь абсолютным значением  $\varepsilon$ , т. е. величиной недиссипативной вязкости, так как по условию в нашем случае,  $\nu = 1$ .

Используем данные по составляющим скорости для этого случая, например при  $\varepsilon = 10$  получили следующие средние по радиусу составляющие скорости: радиальная —  $u_{r\_sr} = 5 \frac{m}{sec}$ , угловая —  $u_{\phi\_sr} = 80 \frac{m}{sec}$ . Оценка числа Рейнольдса дает величину  $Re \approx 80$ , что позволяет сделать вывод о том, что движение жидкости для этого случая все еще осуществляется в ламинарном режиме.

Так как температура кольца стремится к насыщению, то становится интересным характер зависимости  $\Theta_{max}(\varepsilon)$  — максимального значения относительной температуры от абсолютной величины отношения вязкостей. На рис. 2 изображена зависимость  $\Theta_{max}(\varepsilon)$  при прочих фиксированных характеристиках. Набор точек, полученных в результате численного моделирования для величины нагрева кольца  $\Delta\Theta_{max}(\varepsilon) = \Theta_{max}(\varepsilon) - 1$  достаточно хорошо описывается зависимостью

$$\Delta\Theta_{max}(\varepsilon) = 2\varepsilon^2. \quad (9)$$

Объяснение подобного поведения, скорее всего, возможно на основании соотношения (8). Действительно, при всех имеющихся допущениях прирост относительной температуры за счет диссипации будет пропорционален квадрату средней скорости вращения. Поскольку начальное распределение угловой составляющей скорости должно быть согласовано с граничным условием для третьего уравнения системы (7), то в качестве начального распределения угловой скорости, соответствующего этому условию, в данной программе использовалось выражение  $\omega(0, \eta) = \varepsilon\Psi_0/(1 + \eta)$ . Очевидно, что в данном случае начальное распределение угловой части скорости, являющейся основной составляющей полной скорости элемента жидкости (рис. 3), прямо пропорционально отношению вязкостей, что и объясняет квадратичную зависимость прироста относительной температуры. Таким образом, можно считать, что нет прямого влияния недиссипативной составляющей вязкости на распределение относительной температуры. Что касается характера влияния недиссипативной вязкости на поведение составляющих полной скорости, то следует отметить, что с ростом ее величины заметным образом изменяется характер поведения радиальной составляющей скорости движения жидкого кольца.

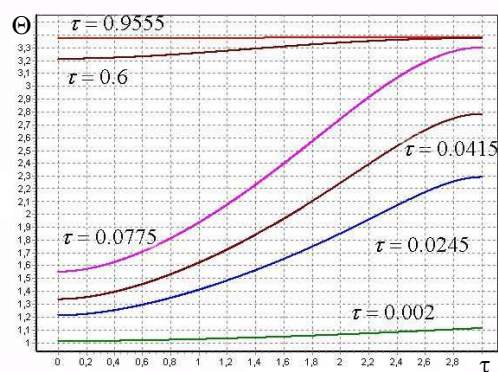


Рис. 2. Зависимость  $\Theta_{max}(\varepsilon)$

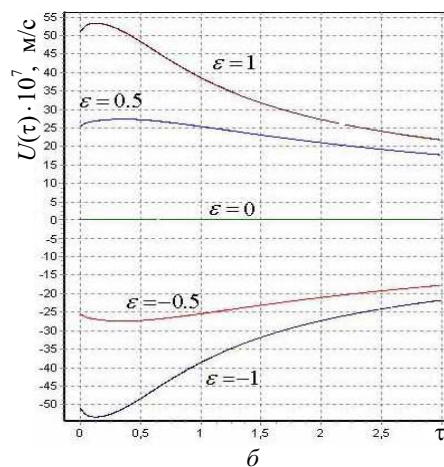
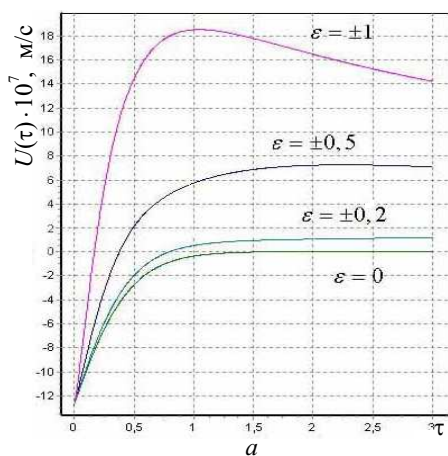


Рис. 3. Изменение вектора скорости скорости при различных значениях  $\varepsilon$  и  $\Psi_0 = -4$ : а — изменение радиальной составляющей скорости, б — изменение угловой составляющей скорости



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе созданной программы был проведен численный эксперимент по определению как поля скоростей, так и поля температур жидкого кольца. На основе полученных результатов исследован эффект влияния недиссипативной составляющей тензора вязкости на вид распределения температурного поля. Показано, что для реальных жидкостей эффект повышения температуры за счет диссипации ничтожен. На примере модельной жидкости исследован характер прогрева вращающегося по инерции жидкого теплоизолированного кольца со свободными границами и предложен вариант объяснения полученной закономерности. Так же установлено, что недиссипативная составляющая тензора вязкости влияет на изменение температурного поля кольца только косвенно, через поле скоростей.

## Библиографический список

1. Андреев В. К., Бублик В. В., Бытев В. О. Симметрии неклассических моделей гидродинамики. Новосибирск, 2003. 352 с.
2. Овсянников Л. В. Общие уравнения и примеры // Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей: сб. работ теор. отдела ИГ СО АН СССР. Новосибирск, 1967. С. 5–75.
3. Бытев В. О. Неустановившиеся движения кольца вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами // ПМТФ. 1970. № 3. С. 88–98.
4. Пухначев В. В. Неклассические задачи теории пограничного слоя. Новосибирск, 1980.
5. Лаврентьева О. М. Неустановившееся движение вращающегося кольца вязкой капиллярной жидкости // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. ИГ СО АН СССР. Новосибирск, 1978. Вып. 31. С. 52–60.
6. Лаврентьева О. М. Предельные режимы движения вращающегося вязкого кольца // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. ИГ СО АН СССР. Новосибирск, 1980. Вып. 44. С. 15–34.
7. Бытев В. О., Гербер Е. А. Об одной задаче с двумя свободными границами // Современные проблемы математики и её прикладные аспекты: материалы Всерос. науч.-практ. конф. Пермь, 2010. С. 100.
8. Бытев В. О., Гербер Е. А. Численное моделирование динамики жидкого кольца // Научные информационные технологии: тр. XIV молодежной науч.-практ. конф. Переславль-Залесский, 2010. С. 109–114.
9. Bytev V. O. Building of Mathematical Models of continuum media on the basis of invariante principle // Acta Appl. Math. 1989. Vol. 16. P. 117–142
10. Бытев В. О., Гербер Е. А. О восстановлении точного решения и о распространении температуры в кольце жидкости // Математическое и информационное моделирование: сб. науч. тр. Тюмень, 2009. Вып. 11. С. 50–57.

УДК 539.374

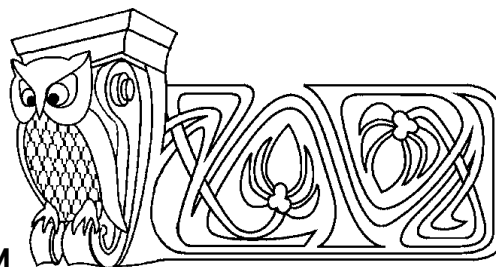
## УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ ОСЕВОМ НАГРУЖЕНИИ

Д. В. Гоцев

Военный авиационный инженерный университет, Воронеж,  
кафедра математики  
E-mail: rbgotsev@mail.ru

В рамках точных трехмерных уравнений устойчивости исследована устойчивость состояния равновесия цилиндрической оболочки с наполнителем при осевом нагружении. Вычисления проводились для случая, когда материал оболочки моделировался упругим телом, а материал наполнителя – средой со сложными реологическими свойствами – упруговязкопластической. Дана оценка влияния на величину критического давления параметров оболочки и наполнителя.

**Ключевые слова:** точные трехмерные уравнения, устойчивость равновесия, цилиндрическая оболочка, наполнитель, сложная реология, осевое сжатие.



## Stability of the Cylindrical Cover with the Elastic-Viscous-Plastic Filler at Axial Compression

D. V. Gotsev

Military Aviation Engineering University, Voronezh,  
Chair of Mathematics  
E-mail: rbgotsev@mail.ru

Within the limits of the exact three-dimensional equations of stability of an equilibrium state of a cylindrical cover with a filler is investigated at axial compression. Calculations were spent for a case when the cover material was modelled by an elastic body, and a filler material – environment with difficult rheological properties – elastic-viscous-plastic. The estimation of influence on size of critical pressure of parameters of a cover and a filler is given.

**Key words:** exact three-dimensional equations, stability of balance, cylindrical cover, filler, difficult rheology, axial compression.



## ВВЕДЕНИЕ

Известно [1], что труба из материала со сложной реологией теряет устойчивость раньше, чем исчерпает свою несущую способность. Поэтому определение нагрузки, при которой возможна потеря устойчивости основного состояния представляет практический интерес при расчете монолитной крепи для шахтных стволов, обсадных труб вертикальных скважин и т.д. Исследованию устойчивости цилиндрической оболочки с упругопластическим наполнителем при осевом нагружении посвящены работы [2, 3]. При этом наполнитель описывался соотношениями теории малых упругопластических деформаций [4, 5] и предположений степенной зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций. В отличие от [2, 3] в настоящей работе на основе точных трехмерных линеаризованных уравнений устойчивости [6] исследуется устойчивость основного состояния цилиндрической оболочки с наполнителем при осевом нагружении. При этом материал наполнителя моделировался средой с более сложными реологическими свойствами — упруговязкопластической. Первый этап решения этой задачи заключается в нахождении основного (докритического) напряженно деформированного состояния цилиндрической оболочки с наполнителем, второй — в решении самой линеаризованной задачи устойчивости, т.е. в определении критической величины сжимающего давления, равномерно распределенного по внешнему контуру оболочки.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При решении данной задачи основное напряженно деформированное состояние определялось в рамках второго варианта геометрически линейной теории (т.е. сдвиги и удлинения пренебрежимо малы по сравнению с единицей и геометрические соотношения взяты в линейной форме [7]). При этом в упругой области (оболочке) имеет место закон Гука, а в пластической области (наполнителе) соотношения теории упруговязкопластического тела.

Для описания упруговязкопластических свойств воспользуемся моделью среды со сложными реологическими свойствами и функцией нагружения в виде [6]

$$F = (S_i^j - c(\varepsilon_i^j)^p - \eta(e_i^j)^p)(S_j^i - c(\varepsilon_j^i)^p - \eta(e_j^i)^p) - k^2 \quad (1)$$

и ассоциированным законом течения в форме

$$(e_i^j)^p = \lambda_0(S_i^j - c(\varepsilon_i^j)^p - \eta(e_i^j)^p). \quad (2)$$

Верхние индексы  $p$  и  $e$  приписываются величинам, характеризующим пластическое и упругое состояния тела соответственно. Здесь  $S_j^i = \sigma_j^i - \frac{1}{3}\sigma_k^k g_j^i$  — компоненты девиатора тензора напряжений,  $(\varepsilon_i^j)^p$  — компоненты тензора пластических деформаций,  $(e_i^j)^p$  — компоненты тензора скоростей пластических деформаций;  $c$  и  $\eta$  — коэффициенты упрочнения и вязкости соответственно,  $k$  — предел текучести,  $\lambda_0$  — неопределенный множитель. При этом компоненты тензора полных деформаций  $\varepsilon_j^i$  удовлетворяют условию [6]

$$\varepsilon_j^i = (\varepsilon_j^i)^p + (\varepsilon_j^i)^e. \quad (3)$$

Компоненты тензора упругих деформаций связаны с компонентами тензора напряжений законом Гука:

$$\sigma^{ij} = (\lambda g^{ij} g^{rk} + \mu(g^{ik} g^{jr} + g^{ir} g^{jk}))\varepsilon_{rk}. \quad (4)$$

Здесь  $\lambda$ ,  $\mu$  — параметры Ламе,  $g^{ij}$  — компоненты метрического тензора.

Компоненты тензора полных деформаций связаны с компонентами вектора перемещений  $u_i$  формулами Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i). \quad (5)$$

Здесь и далее  $\nabla$  — символ ковариантного дифференцирования.

Уравнения равновесия и граничные условия приняты в обычной форме.

Рассмотрим конструкцию, состоящую из шарнирно-опёртой сжимаемой упругой цилиндрической оболочки толщиной  $2h$  и длиной  $l$  с упруговязкопластическим наполнителем при сжатии усилиями интенсивности  $q$  вдоль образующей (рис. 1). Причем усилия действуют как на оболочку, так и наполнитель, которые одинаково деформируются на величину  $\varepsilon_{zz}^{(1)0} = \varepsilon_{zz}^0 = \varepsilon$ . Здесь и далее индекс «0» вверх

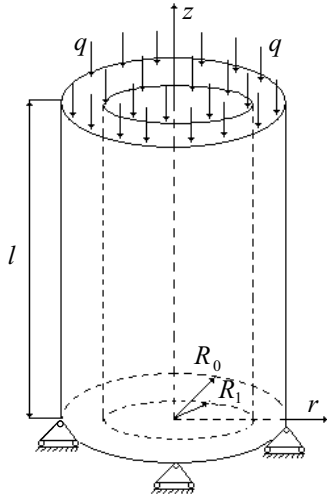


Рис. 1

эличин обозначает их принадлежность к основному докритическому состоянию, индекс «(1)» сверху — принадлежность к оболочке, его отсутствие — принадлежность к заполнителю.

Исходя из уравнений равновесия и граничных условий на боковой поверхности, привлекая при этом соотношения (1)–(5), учитывая условия несжимаемости для заполнителя, а также условия на линии спая оболочка – заполнитель находим докритическое напряженно деформированное состояние данной конструкции, которое в полярных координатах  $(r, \theta)$  имеет вид: в сжимаемой упругой оболочке

$$\begin{aligned} u_r^{0(1)} &= C_1 r + \frac{C_2}{r}, & \varepsilon_{rr}^{0(1)} &= -\frac{C_1}{r^2} - \frac{\varepsilon}{2}, & \varepsilon_{\theta\theta}^{0(1)} &= \frac{C_1}{r^2} - \frac{\varepsilon}{2}, \\ \varepsilon_{zz}^{0(1)} &= \varepsilon, & \sigma_{zz}^{0(1)} &= 2C_1 \lambda^{(1)} + (\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})\varepsilon, \\ \sigma_{rr}^{0(1)} &= 2C_1(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}) - 2C_2\mu^{(1)}/r^2 + \lambda^{(1)}\varepsilon, \\ \sigma_{\theta\theta}^{0(1)} &= 2C_1(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}) + 2C_2\mu^{(1)}/r^2 + \lambda^{(1)}\varepsilon, \end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{(\lambda^{(1)} R_1^2 + \mu^{(1)} R^2)\varepsilon + qR_1^2}{2(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})R_1^2 + 2\mu^{(1)}R^2}, \quad C_2 = \frac{(\mu^{(1)}\varepsilon - q)R^2 R_1^2}{2(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})R_1^2 + 2\mu^{(1)}R^2}; \quad (6)$$

в упруговязкопластическом заполнителе

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^0 &= \varepsilon_{\theta\theta}^0 = -\frac{\varepsilon}{2}, & \varepsilon_{zz}^0 &= \varepsilon, & (\varepsilon_{zz}^0)^p &= -2(\varepsilon_{rr}^0)^p, & (\varepsilon_{rr}^0)^p &= (\varepsilon_{\theta\theta}^0)^p = \frac{\mu\varepsilon + k/\sqrt{6}}{2\mu + c} \left( \exp\left(-\frac{2\mu + c}{\eta}t\right) - 1 \right), \\ \sigma_{rr}^0 &= \sigma_{\theta\theta}^0 = -\frac{q(2\mu^{(1)} + \lambda^{(1)})R_1^2 + \varepsilon\mu^{(1)}\mu^{(1)}(R_1^2 - R^2)}{(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})R_1^2 + \mu^{(1)}R^2}, \\ \sigma_{zz}^0 &= \sigma_{rr}^0 + 6\mu \left( \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon_{rr}^{0p} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

В (6), (7)  $R$  – радиус заполнителя,  $R_1 = R + 2h$  – внешний радиус оболочки.

Исследование устойчивости основного состояния (6), (7) составной двухслойной оболочки в предположении, что слои работают совместно без проскальзывания и отставания, сводится к решению уравнений равновесия в вариациях [8] для областей оболочки и заполнителя при соответствующих граничных условиях.

Уравнения равновесия для областей упругой оболочки и упруговязкопластического заполнителя имеют вид [8]

$$\nabla_i(\sigma_j^i + \sigma_k^i \nabla^k u_j) - \rho s^2 u_j = 0, \quad s = i\Omega, \quad \Omega = \alpha + i\beta. \quad (8)$$

Граничные условия на внешнем контуре оболочки запишем в виде

$$(\sigma_j^{i(1)} + \sigma_k^i \nabla^k u_j^{(1)})N_i^{(1)} = p_j. \quad (9)$$

При этом в случае «следящей» нагрузки  $p_i = p_k \nabla^k u_j$ , в случае «мертвой» нагрузки  $p_i = 0$ ,  $N_j^{(1)}$  – орты нормали.

Условия непрерывности компонент тензора напряжений и вектора перемещений на границе контакта оболочки и заполнителя, при  $r = R$  имеют вид

$$(\sigma_j^i + \sigma^{0ik} \nabla_i u_j)N_j - (\sigma_j^{i(1)} + \sigma^{0ik(1)} \nabla_k u_j^{(1)})N_j^{(1)} = 0, \quad (10)$$

$$u_j^{(1)} - u_j = 0. \quad (11)$$

Линеаризованная связь между значениями амплитуд компонент тензоров напряжений и деформаций для несжимаемой упруговязкопластической среды согласно [6] представима в виде

$$\sigma_j^i = (\alpha_{ik} g^{kk} \nabla_k u_k + p_0)g_j^i + (1 - g_j^i)g^{ii} G_j^i (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i), \quad (12)$$



для сжимаемой упругой среды согласно [5] — в виде

$$\sigma_j^{i(1)} = \alpha_{ik}^{(1)} g^{kk} \nabla_k u_k^{(1)} g_j^i + (1 - g_j^i) g^{ii} G_j^{i(1)} (\nabla_i u_j^{(1)} + \nabla_j u_i^{(1)}). \quad (13)$$

В (12), (13) отсутствует суммирование по индексам  $i$  и  $j$ ,  $p_0$  — множитель Лагранжа. Величины  $\alpha_{ij}$ ,  $\alpha_{ij}^{(1)}$ ,  $G_j^i$ ,  $G_j^{i(1)}$  имеют вид

$$\alpha_{ij}^{(1)} = \lambda^{(1)} \delta_{jj} + 2\mu^{(1)} \delta_{ij}, \quad G_j^{i(1)} = \mu^{(1)}, \quad \alpha_{ij} = 2\mu \delta_{ij} - 3\alpha \overset{0}{f}_{ij} \overset{0}{f}_{jj}, \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{4}{3} \mu^2 [k^2 (2\mu + c - \eta s)]^{-1}, \quad f_{ij}^0 = S_{ij}^0 - c(\varepsilon_{ij}^0)^p, \quad G_j^i = \mu. \quad (15)$$

К соотношениям (8), (12), (15) для наполнителя следует присоединить условия несжимаемости

$$\nabla_k u^k = 0. \quad (16)$$

Уравнения (8)–(16) представляют собой связную краевую задачу устойчивости относительно амплитуд компонент векторов перемещений  $u^{(1)}$ ,  $v^{(1)}$ ,  $w^{(1)}$  и  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , гидростатического давления  $p$  соответственно для оболочки и наполнителя. Нетривиальное решение этой задачи соответствует потере устойчивости основного состояния.

Для нахождения собственных значений задачи компоненты вектора перемещений и гидростатическое давление в наполнителе аппроксимируем следующим образом:

$$u = \psi_{n1}(r) \cos n\theta \sin \gamma z, \quad v = \psi_{n2}(r) \sin n\theta \sin \gamma z, \quad w = \psi_{n3}(r) \cos n\theta \cos \gamma z, \quad (17)$$

$$p_0 = P_n(r) \cos n\theta \sin \gamma z, \quad \gamma = m\pi/l.$$

Здесь  $n$ ,  $m$  — параметры волнообразования. В оболочке перемещения  $u^{(1)}$ ,  $v^{(1)}$ ,  $w^{(1)}$  имеют вид (17), где величинам  $\psi_{ni}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) следует приписать символ «(1)» вверх. Выбор решения задачи устойчивости в форме (17) предполагает, что наполнитель и оболочка работают совместно без проскальзывания и отставания, и соответствует неосесимметричной форме потери устойчивости.

Подставляя функции  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p_0$ ,  $u^{(1)}$ ,  $v^{(1)}$ ,  $w^{(1)}$  в линеаризованные уравнения равновесия (8) и учитывая при этом (12)–(16), после ряда преобразований получаем системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

для оболочки

$$dy^{(1)}(r)/dr = C(r)y^{(1)}(r) \quad (R \leq r \leq R + 2h); \quad (18)$$

для наполнителя

$$dy(r)/dr = D(r)y(r) \quad (r \leq R), \quad (19)$$

где  $y^{(1)} = (\psi_{n1}^{(1)}, \psi_{n2}^{(1)}, \psi_{n3}^{(1)}, \psi_{n1}^{(1)'}, \psi_{n2}^{(1)'}, \psi_{n3}^{(1)'})$ ,  $y = (\psi_{n1}, \psi_{n2}, \psi_{n3}, P_n, \psi_{n1}', \psi_{n2}')$  — векторы,  $C$  и  $D$  — матрицы шестого порядка. Элементы  $c_{ij}$  и  $d_{ij}$  матриц  $C$  и  $D$ , отличные от нуля таковы:

$$\begin{aligned} c_{14} = c_{25} = c_{36} = 1, \quad c_{41} &= (n^2(\overset{0}{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)} + \mu^{(1)}) + \gamma^2 r^2(\overset{0}{\sigma}_{zz}^{(1)} + \mu^{(1)}) + \overset{0}{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)} + \alpha_{11}^{(1)} - \rho^{(1)} \omega r^2)/r, \\ c_{42} &= n(2\overset{0}{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)} + \mu^{(1)} + \alpha_{11}^{(1)})/r, \quad c_{44} = \overset{0}{\sigma}_{rr}^{(1)} + \alpha_{11}^{(1)} + r \overset{0}{\sigma}_{rr,r}^{(1)}, \quad c_{45} = n(\mu^{(1)} + \alpha_{12}^{(1)}), \\ c_{46} &= \gamma(\mu^{(1)} + \alpha_{12}^{(1)})r, \quad c_{51} = n(2\overset{0}{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)} + \mu^{(1)} + \alpha_{11}^{(1)})/r, \\ c_{52} &= (n^2(\overset{0}{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)} + \alpha_{11}^{(1)}) + \gamma^2 r^2(\overset{0}{\sigma}_{zz}^{(1)} + \mu^{(1)}) + \overset{0}{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)} + \mu^{(1)} - \rho^{(1)} \omega r^2)/r, \quad c_{53} = -n\gamma(\mu^{(1)} + \alpha_{12}^{(1)}), \\ c_{55} &= \overset{0}{\sigma}_{rr}^{(1)} + r \overset{0}{\sigma}_{rr,r}^{(1)} + \mu^{(1)}, \quad c_{61} = -\gamma(\mu^{(1)} + \alpha_{12}^{(1)}), \quad c_{62} = -n\gamma(\mu^{(1)} + \alpha_{12}^{(1)}), \\ c_{63} &= (n^2(\overset{0}{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)} + \mu^{(1)}) + \gamma^2 r^2(\overset{0}{\sigma}_{zz}^{(1)} + \alpha_{11}^{(1)}) - \rho^{(1)} \omega r^2)/r, \\ c_{64} &= -\gamma(\mu^{(1)} + \alpha_{12}^{(1)})r, \quad c_{66} = \overset{0}{\sigma}_{rr}^{(1)} + r \overset{0}{\sigma}_{rr,r}^{(1)} + \mu^{(1)}; \end{aligned} \quad (20)$$



$$\begin{aligned}
d_{14} = d_{25} = d_{36} = 1, \quad d_{41} &= (n^2(\sigma_{\theta\theta}^0 + \mu) + \gamma^2 r^2(\sigma_{zz}^0 + \mu) + \sigma_{\theta\theta}^0 - \sigma_{rr}^0 + \sigma_{rr,r}^0 - \rho\omega r^2)/r^2, \\
d_{42} &= n(2\sigma_{\theta\theta}^0 + \mu - \sigma_{rr}^0 + r\sigma_{rr,r}^0)/r^2, \quad d_{43} = -\gamma\sigma_{rr,r}^0, \quad d_{45} = n(\alpha_{11} - \alpha_{12} - \mu - \sigma_{rr}^0)/r, \\
d_{46} &= \gamma(\alpha_{23} - \alpha_{11} + \mu - \sigma_{rr}^0), \quad d_{51} = n(2\sigma_{\theta\theta}^0 + \alpha_{11} - \alpha_{12})/r, \\
d_{52} &= (n^2(\sigma_{\theta\theta}^0 - \mu + \alpha_{11} - \alpha_{12}) + \gamma^2 r^2(\sigma_{zz}^0 + \mu) + \sigma_{\theta\theta}^0 + \mu - \rho\omega r^2)/r, \\
d_{53} &= n\gamma(\alpha_{12} - \alpha_{23}), \quad d_{54} = n, \quad d_{55} = \mu + \sigma_{rr}^0 + r\sigma_{rr,r}^0, \\
d_{63} &= (n^2(\sigma_{\theta\theta}^0 + \mu) + \gamma^2 r^2(\sigma_{zz}^0 - \mu + \alpha_{33} - \alpha_{23}) - \rho\omega r^2)/r^2, \quad d_{64} = \gamma.
\end{aligned} \tag{21}$$

Коэффициенты  $c_{ij}$  для  $i = 4$  надо поделить на  $r(\sigma_{rr}^{(1)} + \alpha_{11}^{(1)})$ , а для  $i = 5, 6$  — на  $r(\sigma_{rr}^{(1)} + \mu^{(1)})$ . Аналогично  $d_{ij}$  для  $i = 5, 6$  надо поделить на  $r(\sigma_{rr} + \mu)$ . При этом для сжимаемой упругой оболочки

$$\alpha_{11}^{(1)} = \alpha_{22}^{(1)} = \alpha_{33}^{(1)} = 2\mu^{(1)} + \lambda^{(1)}, \quad \alpha_{12}^{(1)} = \alpha_{21}^{(1)} = \alpha_{13}^{(1)} = \alpha_{23}^{(1)} = \alpha_{31}^{(1)} = \alpha_{32}^{(1)} = \lambda^{(1)}, \tag{22}$$

а для упруговязкопластического заполнителя

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 2\mu - \frac{\alpha k^2}{2}, \quad \alpha_{33} = 2\mu - 2\alpha k^2, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = -\frac{\alpha k^2}{2}, \quad \alpha_{13} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha k^2. \tag{23}$$

Граничные условия (9) и (11) с учетом (12)–(16) запишутся в виде

– условия контакта при  $r = R$ :

$$\begin{aligned}
&(\sigma_{rr}^0 + \alpha_{11})\Psi'_{n1} + \alpha_{12}\Psi_{n1}/r + \alpha_{12}\Psi_{n2}/r - \gamma\alpha_{13}\Psi_{n3} + P_n = \\
&= (\sigma_{rr}^{(1)} + \alpha_{11}^{(1)})\Psi_{n1}^{(1)'} + \alpha_{12}^{(1)}\Psi_{n1}^{(1)}/r + \alpha_{12}^{(1)}\Psi_{n2}^{(1)}/r - \gamma\alpha_{13}^{(1)}\Psi_{n3}^{(1)}, \\
&r(\sigma_{rr}^0 + \mu)\Psi'_{n2} - n\mu\Psi_{n1} - \mu\Psi_{n2} = r(\sigma_{rr}^{(1)} + \mu^{(1)})\Psi_{n1}^{(1)'} - n\mu^{(1)}\Psi_{n1}^{(1)} - \mu^{(1)}\Psi_{n2}^{(1)}, \\
&(\sigma_{rr}^0 + \mu)\Psi'_{n3} + \gamma\mu\Psi_{n1} = (\sigma_{rr}^{(1)} + \mu^{(1)})\Psi_{n1}^{(1)'} + \gamma\mu^{(1)}\Psi_{n1}^{(1)}, \quad u = u^{(1)}, \quad v = v^{(1)}, \quad w = w^{(1)};
\end{aligned} \tag{24}$$

– условия на поверхности при  $r = R_1$ :

$$\begin{aligned}
&(\sigma_{rr}^{(1)} + \alpha_{11}^{(1)})\Psi_{n1}^{(1)'} + \alpha_{12}^{(1)}\Psi_{n1}^{(1)}/r + \alpha_{12}^{(1)}\Psi_{n2}^{(1)}/r - \gamma\alpha_{13}^{(1)}\Psi_{n3}^{(1)} = 0, \\
&r(\sigma_{rr}^{(1)} + \mu^{(1)})\Psi_{n1}^{(1)'} - n\mu^{(1)}\Psi_{n1}^{(1)} - \mu^{(1)}\Psi_{n2}^{(1)} = 0, \\
&(\sigma_{rr}^{(1)} + \mu^{(1)})\Psi_{n1}^{(1)'} + \gamma\mu^{(1)}\Psi_{n1}^{(1)} = 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Поскольку точное аналитическое решение краевой задачи (18)–(25) найти не удастся, будем искать приближенное решение методом конечных разностей [9]. В результате получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений, которую можно представить в матричной форме  $(X_{ij})(Y_i) = 0$ . Отсюда следует, что определение критического значения параметра нагружения  $q_*$  сводится к разрешимости матричного уравнения

$$\det(X_{ij}) = 0. \tag{26}$$

При вычислении определителя необходимо учитывать соотношения (6), (7), описывающие напряженно-деформируемое докритическое состояние. Минимизация должна проводиться по шагу разностной сетки  $\beta$ , параметрам волнообразования по контуру  $m$  и образующей  $n$ , параметрам материала оболочки и заполнителя  $\lambda_j$  и величине  $s = i\Omega$ . Таким образом, получаем задачу многомерной оптимизации величины  $q$  в зависимости от  $s, m, n$  при условии

$$\Phi = \det(X_{ij}(q, s, m, n, \lambda_j)) = 0. \tag{27}$$

Задача определения критической нагрузки  $q_*$  при фиксированных значениях  $\beta$  и параметрах  $\lambda_j$  может быть решена в два этапа. На первом этапе необходимо определить область в пространстве параметров  $q, s, m, n$ , в которой происходит смена знака функции  $\Phi(q, s, m, n, \beta, \lambda_j)$ ,  $0 \leq s < \infty$ ,





$m, n = 1, 2, \dots$ , на втором согласно (26)) вычисляется значение  $q_* = \min_{s, m, n} q(s, m, n)$ , при котором  $\Phi(q_*, s_*, m_*, n_*, \beta, \lambda_j) = 0$ . Оптимизацию по параметру  $\beta$  проводить необходимо следующим образом. Вычисление критической нагрузки прекращается, если после уменьшения шага разностной сетки в два раза получаемые значения нагрузки отличаются друг от друга с заданной точностью.

Численный счет проводился для безразмерных величин, при этом все величины, имеющие размерность напряжений, относились к модулю сдвига  $\mu^{(1)}$  для упругого материала оболочки, а величины, имеющие размерность длины, — к радиусу наполнителя  $R$ .

На рис. 2, 3 показаны зависимости величины критической нагрузки  $q_*$  от толщины упругой оболочки  $(R_1 - R)$  при различных значениях коэффициентов вязкости и упрочнения, которым соответствуют значения параметров волнообразования  $m = n = 3$ .

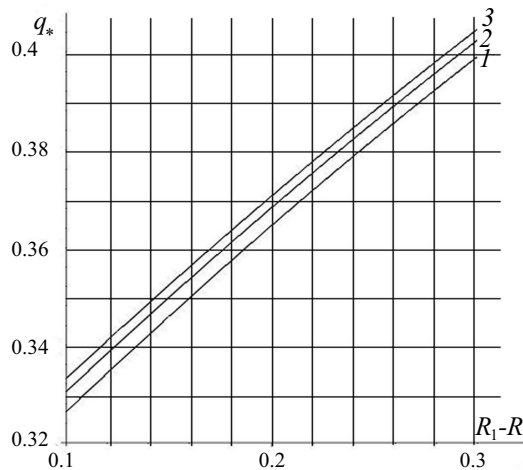


Рис. 2

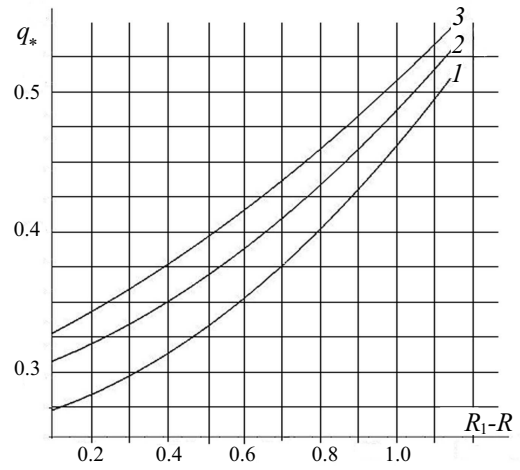


Рис. 3

На рис. 2 кривая 1 соответствует коэффициенту упрочнения  $c = 0.0005$ , кривая 2 —  $c = 0.01$ , кривая 3 —  $c = 0.2$ . При этом коэффициент вязкости материала наполнителя  $\eta = 0.2$ . На рис. 3 кривая 1 соответствует  $\eta = 0.001$ , кривая 2 —  $\eta = 0.01$ , кривая 3 —  $\eta = 0.1$ . При этом коэффициент упрочнения  $c = 0.2$ . Для обоих рисунков  $\varepsilon = 0.07$ ,  $\mu = 0.8$ ,  $\lambda^{(1)} = 24$ ,  $\kappa = 0.07$ ,  $l = 1000$ .

Из анализа результатов численного счета следует, что

- при увеличении толщины упругого слоя оболочки значение критической нагрузки  $q_*$  увеличивается (см. рис. 1, 2);
- с ростом коэффициентов упрочнения  $c$  и вязкости  $\eta$  область устойчивости увеличивается.

### Библиографический список

1. Ильющин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
2. Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища школа, 1986. 511 с.
3. Бабич И. Ю., Черевко М. А. Устойчивость цилиндрических оболочек с упругопластическим наполнителем при осевом сжатии // Прикл. механика. 1984. Т. 20, № 3. С. 60–64.
4. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
5. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
6. Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Изд-во Воронеж. унта, 1997. 359 с.
7. Новожилов В. В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
8. Спорыхин А. Н., Шашкин А. И. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород. М.: Физматлит, 2004. 232 с.
9. Корнишин М. С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. М.: Наука, 1964. 192 с.

УДК 539.3

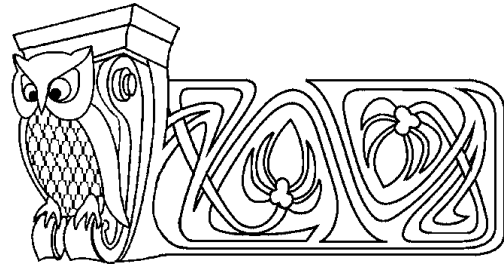
## ИССЛЕДОВАНИЕ КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО ИЗГИБА СТЕРЖНЯ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

А. В. Гриценко

Воронежский государственный университет,  
кафедра математического и прикладного анализа  
E-mail: gritsenko@teamidea.ru

Проведено исследование существования квазистатического поведения упругого консольного стержня, нагруженного потенциальными внешними воздействиями. Для случая, когда математической моделью является вариационная задача, получена статически особая точка, при пересечении которой траекторией нагружения происходит смена вида квазистатического процесса.

**Ключевые слова:** изгиб стержня, вариационная задача.



## Investigation of Quasi-Static Bending of the Bar on the Basis of Variation Problem

A. V. Gritsenko

Voronezh State University,  
Chair of Mathematical and Applied Analysis  
E-mail: gritsenko@teamidea.ru

The investigation of the existence of quasi-static behavior of elastic cantilever bar subjected to potential external effects. For the case when the mathematical model is a variational problem is obtained statically singular point, when crossing the path of loading is a change of type of quasi-static process.

**Key words:** bending of the bar, variation problem.

Рассмотрим проблему осуществления квазистатического поведения упругого стержня при продольно-поперечном изгибе, нагруженного внешними силами, как показано на рис. 1.

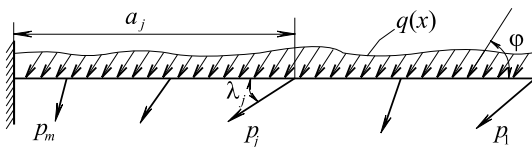


Рис. 1

Поскольку внешние силы в рассматриваемой задаче являются потенциальными, то исследование существования квазистатического процесса можно проводить в статической постановке. Рассмотрим случай, когда математической моделью является вариационная задача [1].

Потенциальная энергия изогнутого стержня и работа внешних сил с точностью до величин второго порядка малости определяется следующим образом [2]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EI(u'')^2 dx,$$

$$A = \int_0^{\ell} \left\{ \frac{1}{2} q \left( \int_0^x (u')^2 d\xi \right) \cos \varphi + qu \sin \varphi \right\} dx + \sum_{j=1}^m \left( \frac{1}{2} p_j \cos \lambda_j \int_0^{a_j} (u')^2 dx + p_j u(a_j) \sin \lambda_j \right).$$

Согласно принципу возможных перемещений, функция  $u(x)$ , описывающая форму изогнутого стержня, является решением вариационной задачи:

$$\delta(\Pi - A) = 0. \tag{1}$$

Пусть при  $\lambda_j = \lambda_{j0}$ ,  $\varphi = \varphi_0$ ,  $q = q_0(x)$  функция

$$u = u_0(x, p_j) \tag{2}$$

является точкой экстремума функционала  $\Phi = \Pi - A$ , т. е. является решением задачи (1).

Для проведения исследований существования квазистатического процесса вида, близкого к (2), как следует из теоремы о неявных функциях [1, 2], надо построить вспомогательный функционал относительно функции  $\zeta(x)$ :

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left\{ EI(u'' - \zeta'')^2 - \left( \int_x^{\ell} q_0(\xi) d\xi \right) (u' - \zeta')^2 \cos \varphi_0 - 2q(u - \zeta) \sin \varphi_0 \right\} dx -$$



$$-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left( p_j \cos \lambda_{j0} \int_0^{a_j} (u' - \zeta')^2 dx + 2p_j(u(a_j) - \zeta(a_j)) \sin \lambda_{j0} \right). \quad (3)$$

Квадратичный функционал  $\Phi_2$ , соответствующий функционалу  $\Phi_1$ , как следует из (3), будет иметь вид

$$\Phi_2 = \int_0^\ell \left\{ EI(\zeta'')^2 - \left( \int_x^\ell q_0(\xi) d\xi \right) (\zeta')^2 \cos \varphi_0 \right\} dx - \sum_{j=1}^m \left( p_j \cos \lambda_{j0} \int_0^{a_j} (\zeta')^2 dx \right). \quad (4)$$

Согласно [3, 4] для существования рассматриваемого квазистатического процесса необходимо, чтобы вариационная задача

$$\delta\Phi_2 = 0 \quad (5)$$

имела только тривиальное решение.

Решение задачи (5) будем искать в виде (граничные условия  $\zeta(0) = \zeta'(0) = 0$ )

$$\zeta = \frac{b_1}{\ell} x^2 + \frac{b_2}{\ell^3} x^4.$$

Для однородного стержня постоянного сечения при  $q(x) \equiv q_0$  ( $q_0 = \text{const}$ ) и  $m = 1$  из (4) и (5) получаем, что (5) сводится к отысканию экстремума следующей функции двух переменных:

$$\chi(b_1, b_2) = \frac{EI}{\ell} \left\{ 4b_1^2 + \frac{144}{5}b_2^2 + 16b_1b_2 - \alpha_1 \left( \frac{4}{3}b_1^2 + \frac{16}{7}b_2^2 + \frac{16}{5}b_1b_2 \right) \cos \lambda_{10} - \alpha_2 \left( \frac{1}{3}b_1^2 + \frac{3}{7}b_2^2 + \frac{8}{15}b_1b_2 \right) \cos \varphi_0 \right\}, \quad (6)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{p_1 \ell^2}{EI}, \quad \alpha_2 = \frac{q_0 \ell^3}{EI}.$$

Условия экстремума функции (6) имеют вид

$$\begin{aligned} (60 - 20\alpha_1 \cos \lambda_{10} - 5\alpha_2 \cos \varphi_0)b_1 + (120 - 24\alpha_1 \cos \lambda_{10} - 4\alpha_2 \cos \varphi_0)b_2 &= 0, \\ (840 - 168\alpha_1 \cos \lambda_{10} - 8\alpha_2 \cos \varphi_0)b_1 + (3024 - 240\alpha_1 \cos \lambda_{10} - 45\alpha_2 \cos \varphi_0)b_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Условие равенства нулю определителя системы (7) будет следующим:

$$768\alpha_1^2 \cos^2 \lambda_{10} + 133\alpha_2^2 \cos^2 \varphi_0 - 534\alpha_1\alpha_2 \cos \lambda_{10} \cos \varphi_0 - 34560\alpha_1 \cos \lambda_{10} - 11940\alpha_2 \cos \varphi_0 + 80640 = 0. \quad (8)$$

На рис. 2 приведены графики зависимости критических значений параметров внешних нагрузок  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , соответствующие (8): 1 — при  $\lambda_{10} = \varphi_0 = 0$ , 2 — при  $\lambda_{10} = \varphi_0 = \pi/3$ . Кривые, представленные на рис. 2, определяют границу области существования квазистатического процесса, соответствующего (2). При пересечении траекторий нагружения этих графиков происходит смена вида квазистатического процесса.

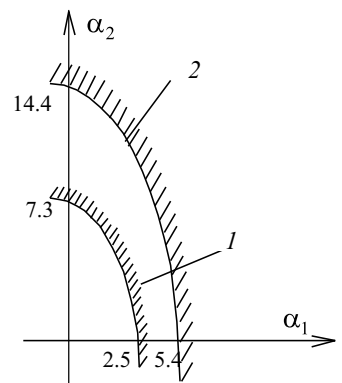


Рис. 2

### Библиографический список

1. Ланцош К. Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965. 408 с.
2. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.
4. Минаева Н. В. Адекватность математических моделей деформируемых тел. М.: Научная книга, 2006. 236 с.



УДК 519.917

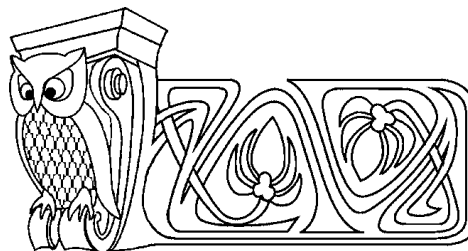
## ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ БОЛЬШИХ $T$

С. В. Лексина

Самарский государственный университет,  
кафедра математики и бизнес-информатики  
E-mail: lesveta@rambler.ru

В работе рассматриваются вопросы, связанные с решением краевых задач для системы гиперболических уравнений второго порядка, в которых отсутствуют смешанные производные. Проведено построение продолжения функций, определяющих начальные и финальные условия.

**Ключевые слова:** волновое уравнение, система волновых уравнений, краевые задачи.



The Second Boundary Problem for the System Hyperbolic Type  
Second Order for Large  $T$

S. V. Lexina

Samara State University,  
Chair of Mathematics and Business Computer Science  
E-mail: lesveta@rambler.ru

In the paper we consider the control problem for objects which vibration are described by the system of wave equations with boundary condition of the second kind.

**Key words:** wave equation, system of wave equations, boundary control.

### 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Известно [1], что волновое уравнение служит математической моделью многих физических процессов (акустические и электромагнитные колебания [2, 3], колебание струны [4], мембраны [5]), а также является основой для описания явлений, связанных с землетрясением [6].

Исследование систем дифференциальных уравнений с частными производными легко объясняется их заведомо более значительными по сравнению с системами обыкновенных дифференциальных уравнений возможностями в построении математических моделей для описания самых разнообразных процессов и явлений. Например, в работе [7] рассматривается гиперболическая система первого порядка, описывающая процесс теплопереноса в однородной пластинке.

Объектом исследования в данной работе является система гиперболического типа второго порядка:

$$\mathbf{w}_{tt} - A\mathbf{w}_{xx} = 0, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{w}(x, t) = \text{col}(w_1, w_2, \dots, w_m)$  — вектор-функция,  $A$  — постоянная квадратная матрица порядка  $m$  с положительными действительными собственными значениями.

Система (1.1) при  $m = 2$  описывает продольно-крутильные колебания длинной, естественно закрученной нити [8, 9]:

$$\begin{cases} w_{1tt} - \frac{g}{q}EFw_{1xx} = \frac{gk}{q}EFw_{2xx}; \\ w_{2tt} - \frac{g}{qr^2}(B + kEF)w_{2xx} = \frac{gk}{qr^2}EFw_{1xx}, \end{cases}$$

где  $EF$  и  $B$  — продольная и крутильная жесткость нити,  $g$  — вес единицы длины нити,  $k$  — коэффициент раскрутки,  $r$  — радиус инерции поперечного сечения нити,  $q$  — ускорение свободного падения.

Под естественно закрученной нитью подразумевается нить, обладающая продольной и крутильной жесткостью, а также способная раскручиваться при растяжении и удлиняться при раскручивании. Модель естественно закрученной нити более точно отражает основные свойства реального стального каната, в частности, описывает его свойства раскручивания при свободном натяжении и дает возможность оценить крутящие моменты, возникающие при продольных колебаниях. При составлении уравнений движения естественно закрученной нити были введены следующие обозначения [8]:  $w_1(x, t)$  — продольные деформации (полное удлинение части нити),  $w_2(x, t)$  — поворот нити. В качестве примера естественно закрученной нити можно рассмотреть стальной канал [9].

Граничные условия для функций  $w_1(x, t)$ ,  $w_2(x, t)$  на конце  $x = l$  образуют уравнения движения концевого груза. Если  $w_2(l, t) = 0$ , то это означает, что груз прикрепленный на конце  $x = l$  нити не может совершать поворотов.



В работах [7, 10, 11] рассматривается краевая задача, моделирующая процесс теплопереноса в стержне при заданном температурном режиме на концах в рамках гиперболического закона теплопроводности.

Отметим, что круг гиперболических уравнений и систем гиперболических уравнений ограничен теми объектами, для которых известна интегральная форма представления решения в точках области его определения [12]. Класс таких уравнений достаточно узок. Одним из известных методов построения решений краевых задач в явном виде является метод Римана и его различные обобщения. В связи с этим в теории линейных уравнений второго порядка гиперболического типа функция Римана играет важную роль, с ее помощью удается записать в явном виде решение задач Коши и Гурса. Так, например, Вольтерра [13], Адамар [14] привели формулу представления решений задачи Коши для гиперболического уравнения второго порядка с числом независимых переменных больше двух, Бургатти [15] и Реллих [16] привели формулу представления Римана для линейных уравнений высших порядков с числом независимых переменных, равным двум, имеются решения задачи Коши и Гурса для уравнения Бианки [17, 18], записываемые в [19] через функцию Римана, Хольмгрен [20, 21], Б. Н. Бурмистров [22] обобщили метод Римана на системы уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными. В монографии А. В. Бицадзе [23] приведено обобщение метода Римана на один класс гиперболических систем второго порядка с двумя независимыми переменными и кратными характеристиками. При этом показано, что вопрос о нахождении матрицы Римана сводится к решению системы интегральных уравнений Вольтерра второго порядка, которая всегда имеет единственное решение.

В работах [24–26] приведены уравнения и системы уравнений, для которых функция Римана и ее аналоги построены и выражены через специальные функции.

Иногда удается решить краевые задачи для уравнений гиперболического типа и без вспомогательных функций (функций Римана, Римана – Адамара). В работе [27] отмечено, что общие решения, если их возможно найти, являются чрезвычайно полезными, особенно в вопросах прикладного характера. Если известно общее решение дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений, то скорее всего возможно решить и краевую задачу. Число уравнений, для которых известны общие решения, очень мало. Это волновое уравнение, уравнение Эйлера – Пуассона – Дарбу [28], некоторые системы частного вида [23], а также ряд нелинейных уравнений [29].

Рассмотрим систему волновых уравнений (1.1) в области  $Q_{l,T} = [0, l] \times [0, T]$ . Предположим, что характеристическое уравнение матрицы  $A$  имеет корень  $\lambda$  кратности  $m$ , либо  $m$  различных собственных значений, тогда существует матрица  $S$  такая, что

$$\Lambda = S^{-1}AS,$$

где  $\Lambda$  – жорданова клетка, подобная матрице  $A$  (в случае кратных собственных значений), либо диагональная матрица, в которой на главной диагонали стоят различные собственные значения.

Выполним в системе (1.1) замену  $w = S^{-1}u$ , получим систему

$$u_{tt} - \Lambda u_{xx} = 0, \quad (1.2)$$

в области  $Q_{l,T}$ , где  $u(x, t) = \text{col}(u_1, u_2, \dots, u_m)$  – вектор-функция.

В случае, когда  $\Lambda$  – жорданова клетка, матричное уравнение (1.2) эквивалентно системе:

$$\begin{cases} u_{1tt} - \lambda^2 u_{1xx} = 0, \\ u_{2tt} - \lambda^2 u_{2xx} = u_{1xx}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ u_{mtt} - \lambda^2 u_{mxx} = u_{m-1xx}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Общее решение  $i$ -го уравнения системы (1.3) для  $i \geq 2$  определяется формулой [30]

$$u_i = \sum_{k=1}^i \frac{\delta^{(i-k)} u_k^0}{(i-k)!} + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(-1)^k C_{2k-1}^{k-1}}{(2\lambda)^{2k}} \sum_{m=1}^{i-k} \frac{\delta^{(i-k-m)} (u_m^0 - u_m^0(x, -t))}{(i-k-m)!},$$



где  $\delta \equiv \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda}$ ,  $\delta^0 \equiv 1$ ,  $u_j^0$  – общее решение соответствующего однородного волнового уравнения, определяемое [1]:

$$u_j^0(x, t) = f_j(x + \lambda t) + g_j(x - \lambda t). \quad (1.4)$$

В случае, когда  $\Lambda$ —диагональная матрица, матричное уравнение (1.2) эквивалентно системе однородных волновых уравнений, общее решение которых определяется формулой (1.4), с волновым числом  $\lambda = \lambda_j$ .

## 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Краевой задачей называют задачу для матричного волнового уравнения в области  $\overline{Q}_{l,T}$  с начальными (или финальными) условиями и граничными условиями при  $x = 0$  и  $x = l$  одного рода.

Для системы (1.1) в области  $Q_{l,T}$  рассмотрим начальные условия:

$$w(x, 0) = \varphi(x), \quad w_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (2.1)$$

финальные условия:

$$w(x, T) = \widehat{\varphi}(x), \quad w_t(x, T) = \widehat{\psi}(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (2.2)$$

граничные условия второго рода:

$$w_x(0, t) = \mu(t), \quad w_x(l, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.3)$$

где  $\varphi(x)$ ,  $\psi$ ,  $\widehat{\varphi}$ ,  $\widehat{\psi}$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  – вектор-функции, размерности  $m$ .

### Вторая краевая задача с начальными условиями.

Найти вектор-функцию  $w(x, t)$ , удовлетворяющую системе (1.1) в прямоугольнике  $Q_{l,T}$ , начальным условиям (2.1) и граничным условиям второго рода (2.3).

### Вторая краевая задача с финальными условиями.

Найти вектор-функцию  $w(x, t)$ , удовлетворяющую системе (1.1) в прямоугольнике  $Q_{l,T}$ , финальным условиям (2.2) и граничным условиям второго рода (2.3).

Рассмотрим вторую краевую задачу с начальными (финальными) условиями для системы (1.1) в области  $Q_{l,T}$ , при  $T > l/\min\{\lambda_i\}$ . Введем обозначение  $q_i = [T\lambda_i/l]$ ,  $[x]$  – целая часть числа  $x$ .

Выполним в системе (1.1) замену  $w = S^{-1}u$ , приводящую систему (1.1) к системе  $m$  однородных волновых уравнений, начальные условия (2.1) примут вид

$$\mathbf{u}(x, 0) = S \cdot \mathbf{w}(x, 0) = \widetilde{\varphi}(x), \quad \mathbf{u}_t(x, 0) = S \cdot \mathbf{w}_t(x, 0) = \widetilde{\psi}(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.4)$$

финальные условия (2.2):

$$\mathbf{u}(x, T) = S \cdot \mathbf{w}(x, T) = \widetilde{\widehat{\varphi}}(x), \quad \mathbf{u}_t(x, T) = S \cdot \mathbf{w}_t(x, T) = \widetilde{\widehat{\psi}}(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.5)$$

и граничные условия (2.3):

$$\mathbf{u}_x(0, t) = S \cdot \mathbf{w}_x(0, t) = \widetilde{\mu}(t), \quad \mathbf{u}_x(l, t) = S \cdot \mathbf{w}_x(l, t) = \widetilde{\nu}(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.6)$$

Представим решение второй краевой задачи с начальными условиями в области  $Q_{l,T}$  в виде суммы решений двух задач для системы однородных волновых уравнений.

Задача I:

$$\mathbf{u}(x, 0) = \widetilde{\varphi}(x), \quad \mathbf{u}_t(x, 0) = \widetilde{\psi}(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\mathbf{u}_x(0, t) = 0, \quad \mathbf{u}_x(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T;$$

Задача II:

$$\mathbf{u}(x, 0) = 0, \quad \mathbf{u}_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\mathbf{u}_x(0, t) = \mu(t), \quad \mathbf{u}_x(l, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$



Решение задачи I в области  $Q_{l,T}$ ,  $T > l/\lambda_i$  имеет вид

$$u_i(x, t) = \frac{{}^{q_i}\tilde{\Phi}_i(x + \lambda_i t) + {}^{q_i}\tilde{\Phi}_i(x - \lambda_i t)}{2} + \frac{1}{2\lambda_i} \int_{x-\lambda_i t}^{x+\lambda_i t} {}^{q_i}\tilde{\Psi}_i(s) ds,$$

где  $u_i(x, t)$  — решение задачи I для  $i$ -го уравнения системы  $m$  однородных волновых уравнений,  ${}^{q_i}\tilde{\Phi}_i$ ,  ${}^{q_i}\tilde{\Psi}_i$  — некоторые продолжения функций  $\tilde{\varphi}_i(x)$ ,  $\tilde{\psi}_i(x)$  на отрезки  $[-q_i l, -(q_i - 1)l]$ ,  $[q_i l, (q_i + 1)l]$ .

Продолжения функций  $\tilde{\varphi}_i(x)$ ,  $\tilde{\psi}_i(x)$  в условиях задачи I на отрезки вида  $[-q_i l, -(q_i - 1)l]$ ,  $[q_i l, (q_i + 1)l]$  определяются следующими формулами:

при  $x \in [-q_i l; -(q_i - 1)l]$ :

$${}^{q_i}\tilde{\Phi}'_i(x) = (-1)^{q_i} \tilde{\varphi}'_i \left( (-1)^{q_i} x + \left[ \frac{1 + (-1)^{q_i}}{2} q_i l - \frac{1 - (-1)^{q_i}}{2} l (q_i - 1) \right] \right), \quad (2.7)$$

$${}^{q_i}\tilde{\Psi}_i(x) = \tilde{\psi}_i \left( (-1)^{q_i} x + \left[ \frac{1 + (-1)^{q_i}}{2} q_i l - \frac{1 - (-1)^{q_i}}{2} l (q_i - 1) \right] \right); \quad (2.8)$$

при  $x \in [q_i l; (q_i + 1)l]$ :

$${}^{q_i}\tilde{\Phi}'_i(x) = (-1)^{q_i} \tilde{\varphi}'_i \left( (-1)^{q_i} x + \left[ \frac{1 - (-1)^{q_i}}{2} (q_i + 1) l - \frac{1 + (-1)^{q_i}}{2} l q_i \right] \right), \quad (2.9)$$

$${}^{q_i}\tilde{\Psi}_i(x) = \tilde{\psi}_i \left( (-1)^{q_i} x + \left[ \frac{1 - (-1)^{q_i}}{2} (q_i + 1) l - \frac{1 + (-1)^{q_i}}{2} l q_i \right] \right). \quad (2.10)$$

Доказательство формул (2.7)–(2.10) проводится методом математической индукции.

Решение задачи II для  $i$ -го уравнения системы  $m$  однородных волновых уравнений в области  $Q_{l,T}$ , при  $T < l/\lambda_i$ :

$$u_i(x, t) = -\lambda_i \int_0^{t-\frac{x}{\lambda_i}} \tilde{\mu}_i(s) ds + \lambda_i \int_0^{t-\frac{l-x}{\lambda_i}} \tilde{\nu}_i(s) ds,$$

при  $l/\lambda_i < T < 2l/\lambda_i$ :

$$u_i(x, t) = -\lambda_i \int_0^{t-\frac{x}{\lambda_i}} \tilde{\mu}_i(s) ds - \lambda_i \int_0^{\frac{x+\lambda_i t-2l}{\lambda_i}} \tilde{\mu}_i(s) ds + \lambda_i \int_0^{t-\frac{l-x}{\lambda_i}} \tilde{\nu}_i(s) ds + \lambda_i \int_0^{\frac{\lambda_i t-x-l}{\lambda_i}} \tilde{\nu}_i(s) ds.$$

Продолжая процесс далее, получим решение  $u_i(x, t)$  в виде следующей суммы:

$$u_i(x, t) = \sum_{m=0}^{q_i} \lambda_i \frac{-1 - (-1)^m}{2} \left\{ \int_0^{\frac{\lambda_i t-x-m l}{\lambda_i}} \tilde{\mu}_i(s) ds - \int_0^{\frac{\lambda_i t+x-(m+1)l}{\lambda_i}} \tilde{\nu}_i(s) ds \right\} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{q_i} \lambda_i \frac{-1 + (-1)^m}{2} \left\{ \int_0^{\frac{\lambda_i t+x-(m+1)l}{\lambda_i}} \tilde{\mu}_i(s) ds - \int_0^{\frac{\lambda_i t-x-m l}{\lambda_i}} \tilde{\nu}_i(s) ds \right\}.$$

Выполнение граничных условий (2.6) проверяется непосредственной подстановкой.

Решение  $u(x, t) = \text{solon}(u_1, \dots, u_m)$  второй краевой задачи с начальными условиями для системы  $m$  однородных волновых уравнений в области  $Q_{l,T}$ ,  $T > l/\min\{\lambda_i\}$  примет вид

$$u_i(x, t) = \frac{{}^{q_i}\tilde{\Phi}_i(x + \lambda_i t) + {}^{q_i}\tilde{\Phi}_i(x - \lambda_i t)}{2} + \frac{1}{2\lambda_i} \int_{x-\lambda_i t}^{x+\lambda_i t} {}^{q_i}\tilde{\Psi}_i(s) ds +$$

$$+ \sum_{m=0}^{q_i} \lambda_i \frac{-1 - (-1)^m}{2} \left\{ \int_0^{t-\frac{x+m l}{\lambda_i}} \tilde{\mu}_i(s) ds - \int_0^{t+\frac{x-(m+1)l}{\lambda_i}} \tilde{\nu}_i(s) ds \right\} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{q_i} \lambda_i \frac{-1 + (-1)^m}{2} \left\{ \int_0^{t + \frac{x - (m+1)l}{\lambda_i}} \tilde{\underline{\mu}}_i(s) ds - \int_0^{t - \frac{x + ml}{\lambda_i}} \tilde{\underline{\nu}}_i(s) ds \right\}, \quad (2.11)$$

где  $u_i(x, t)$  — решение второй краевой задачи с начальными условиями для  $i$ -го уравнения системы в области  $Q_{l,T}$ ,  $T > l/\lambda_i$ .

Аналогично, устанавливается, что решение второй краевой задачи с финальными условиями для системы  $m$  однородных волновых уравнений в области  $Q_{l,T}$ ,  $T > l/\min\{\lambda_i\}$  примет вид

$$\begin{aligned} u_i(x, t) = & \frac{{}^{q_i}\tilde{\Phi}_i(x + \lambda_i(t - T)) + {}^{q_i}\tilde{\Phi}_i(x - \lambda_i(t - T))}{2} - \frac{1}{2\lambda_i} \int_{x - \lambda_i(t - T)}^{x + \lambda_i(t - T)} {}^{q_i}\tilde{\Psi}_i(s) ds - \\ & - \sum_{m=0}^{q_i} \lambda_i \frac{1 + (-1)^m}{2} \left\{ \int_{t + \frac{x + ml}{\lambda_i}}^T \tilde{\underline{\mu}}_i(s) ds - \int_{t + \frac{(m+1)l - x}{\lambda_i}}^T \tilde{\underline{\nu}}_i(s) ds \right\} + \\ & + \sum_{m=0}^{q_i} \lambda_i \frac{-1 + (-1)^m}{2} \left\{ \int_{t + \frac{(m+1)l - x}{\lambda_i}}^T \tilde{\underline{\mu}}_i(s) ds - \int_{t + \frac{x + ml}{\lambda_i}}^T \tilde{\underline{\nu}}_i(s) ds \right\}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $u_i(x, t)$  — решение второй краевой задачи с финальными условиями для  $i$ -го уравнения системы в области  $Q_{l,T}$ ,  $T > l/\lambda_i$ .

Таким образом, справедливы следующие утверждения.

**Теорема 1.** Если функции  ${}^{q_i}\tilde{\Phi}_i(x) \in C^2[-q_i l; (q_i + 1)l]$ ,  ${}^{q_i}\tilde{\Psi}_i(x) \in C^1[-q_i l; (q_i + 1)l]$ ,  ${}^{q_i}\tilde{\Phi}_i$ ,  ${}^{q_i}\tilde{\Psi}_i$  — четные продолжения функций  $\tilde{\varphi}_i$ ,  $\tilde{\psi}_i$  на отрезки  $[-q_i l, -(q_i - 1)l]$ ,  $[q_i l, (q_i + 1)l]$ , определяемые формулами (2.7)–(2.10),  $\tilde{\underline{\mu}}_i(t)$ ,  $\tilde{\underline{\nu}}_i(t) \in C^1[-T; T]$ , выполнены условия согласования для вектор-функций  $\tilde{\varphi}'(0) = \tilde{\mu}(0)$ ,  $\tilde{\varphi}'(l) = \tilde{\nu}(0)$ , тогда решение  $u(x, t) = \text{colon}(u_1, \dots, u_m)$  второй краевой задачи для системы  $m$  однородных волновых уравнений в области  $Q_{l,T}$  при  $T > l/\max\{\lambda_i\}$  имеет вид (2.11).

**Теорема 2.** Если функции  ${}^{q_i}\tilde{\Phi}_i(x) \in C^2[-q_i l; (q_i + 1)l]$ ,  ${}^{q_i}\tilde{\Psi}_i(x) \in C^1[-q_i l; (q_i + 1)l]$ ,  ${}^{q_i}\tilde{\Phi}_i$ ,  ${}^{q_i}\tilde{\Psi}_i$  — четные продолжения функций  $\tilde{\varphi}_i$ ,  $\tilde{\psi}_i$  на отрезки  $[-q_i l, -(q_i - 1)l]$ ,  $[q_i l, (q_i + 1)l]$ , функции  $\tilde{\underline{\mu}}_i(t) = \tilde{\mu}_i(t)$ , при  $t \in [0, T]$ ,  $\tilde{\underline{\mu}}_i(T) = 0$ ,  $\tilde{\underline{\mu}}_i(t) \equiv 0$  при  $t > T$ , аналогичным условиям удовлетворяет и функция  $\tilde{\underline{\nu}}_i(t)$ ,  $\tilde{\underline{\mu}}_i(t)$ ,  $\tilde{\underline{\nu}}_i(t) \in C^1[0; 2T]$  и выполнены условия согласования для вектор-функций  $\tilde{\varphi}(0) = \tilde{\mu}(T)$ ,  $\tilde{\varphi}(l) = \tilde{\nu}(T)$ , тогда решение  $u(x, t) = \text{colon}(u_1, \dots, u_m)$  второй краевой задачи с финальными условиями для системы  $m$  однородных волновых уравнений в области  $Q_{l,T}$   $T > l/\max\{\lambda_i\}$  имеет вид (2.12).

Выполним преобразование  $\mathbf{w} = S^{-1}\mathbf{u}$ , приводящее систему (1.1) к виду (1.3). Начальные условия примут вид (2.4) (финальные условия вид (2.5)), граничные условия первого рода — вид (2.6).

**Теорема 3.** Если функции  ${}^q\tilde{\Phi}_k \in C^{2+i-k}[0, l]$ ,  ${}^q\tilde{\Psi}_k \in C^{1+i-k}[0, l]$ , функции  ${}^q\tilde{\Phi}_k$ ,  ${}^q\tilde{\Psi}_k$  — продолжения функций  $\tilde{\varphi}_k$ ,  $\tilde{\psi}_k$  на отрезки  $[ql, (q + 1)l]$ ,  $[-ql, -(q - 1)l]$ ,  $q = [T\lambda/l]$ ,  $\tilde{\underline{\mu}}_k, \tilde{\underline{\nu}}_k \in C^{1+i-k}[-T, T]$ ,  $([0, 2T])$  тогда решение второй краевой задачи с начальными (финальными) условиями для системы (1.3) в области  $Q_{l,T}$  при  $T > l/\lambda$  представимо:

$$u_i(x, t) = \sum_{k=1}^i \frac{1}{(i - k)!} \delta^{(i-k)} F_\lambda({}^q\tilde{\Phi}_k, {}^q\tilde{\Psi}_k, \tilde{\underline{\mu}}_k, \tilde{\underline{\nu}}_k),$$

где  $F_\lambda$  — решение второй краевой задачи с начальными (финальными) условиями для соответствующего однородного уравнения системы (1.3) при  $T > l/\lambda$ , определяемое формулой (2.18) и (2.12) соответственно.

Выполняя замену  $\mathbf{u} = S \cdot \mathbf{w}$ , получим решение второй краевой задачи с начальными (финальными) условиями для исходной системы (1.1).



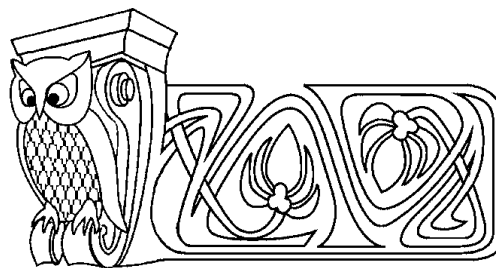
**Библиографический список**

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
2. Шашков А. Г., Бубнов А. Г., Яновский С. Ю. Волновые явления теплопроводности: Системно-структурный подход. М.: Едиториал УРСС, 2004. 296 с.
3. Глэдвелл Г. М. Л. Обратные задачи теории колебаний. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 608 с.
4. Арнольд В. И. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: ФАЗИС, 1999. 180 с.
5. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
6. Буллен К. Е. Введение в теоретическую сейсмологию. М.: Мир, 1966. 460 с.
7. Романовский Р. К., Жукова О. Г. Гиперболическая модель задачи граничного управления процессом теплопереноса в одномерном твердом материале // Докл. АН ВШ РФ. 2006. № 1(6). С. 69–77.
8. Горошко О. А., Савин Г. Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наук. думка, 1971.
9. Горошко О. А., Чиж А. А. К вопросу о продольно-крутильных колебаниях упругой естественно закрученной нити (каната) переменной длины с концевым грузом, движущимся по жестким направляющим. Киев: Техника, 1964. С. 56–64.
10. Жукова О. Г., Романовский Р. К. Граничное управление процессом теплопроводности в одномерном материале. Гиперболическая модель // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 5. С. 650–654.
11. Жукова О. Г., Романовский Р. К. Двустороннее граничное управление процессом теплопереноса в одномерном материале. Гиперболическая модель // Сибирский журн. индустриальной математики. 2007. Т. 10, № 4. С. 32–40.
12. Терлецкий В. А. К оптимизации гиперболических систем // Методы оптимизации и их приложения: тр. XII Байкальской междунар. конф. Иркутск, 2001. Т. 2. С. 167–171.
13. Volterra V. Sur les vibrations des corps elastiques isotropes // Acta Math. 1894. № 18. P. 161–232.
14. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Физматлит, 1994. 544 с.
15. Burgatti P. Sull' estensione del metodo d'integrazione di Riemann all' equazioni lineari d'ordine n con due variabili indipendenti // Rend. reale accad. lincei. Ser 5a 1906. Vol. 15, № 2. P. 602–609.
16. Rellich F. Verallgemeinerung der Riemannschen Integrations-methode auf Differentialgleichungen n-ter Ordnung in zwei Veränderlichen // Math. Ann. 1930. № 103. P. 249–278.
17. Bianchi L. Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore // Atti R. Accad. Lincei. Rend. Cl. Sc. fis., mat. e natur. 1895. Vol. 4, 1 sem. P. 133–142.
18. Bateman H. Logarithmic solutions of Bianchi's equation // Proc. USA Acad. 1933. Vol. 19. P. 852–854.
19. Жегалов В. И., Миронов А. Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казан. мат. о-во, 2001. 226 с.
20. Holmgren E. Sur les systemes lineaires aux derivees partielles du preimier ordre à daux variables independents à caracteristiques reeles et distinctes // Arkiv för Math., Astr. och Fysik. 1906. Bd. 5, № 1.
21. Holmgren E. Sur les systemes lineaires aux derivees partielles du preimier ordre à caracteristiques reeles et distinctes // Arkiv för Math., Astr. och Fysik. 1909. Bd. 6, № 2. P. 1–10.
22. Бурмистров Б. Н. Решение задачи Коши методом Римана для системы уравнений первого порядка с вырождением на границе // Тр. семинара по крайвым задачам. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1971. Вып. 8. С. 41–54.
23. Бицадзе А. В. Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических систем второго порядка // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225, № 1. С. 31–34.
24. Андреев А. А., Волкодав В. Ф., Шевченко Г. Н. О функции Римана // Дифференциальные уравнения: тр. пединститутов РСФСР. 1974. Вып. 4. С. 25–31.
25. Андреев А. А. О построении функции Римана // Дифференциальные уравнения: тр. пединститутов РСФСР. 1975. Вып. 6. С. 3–9.
26. Андреев А. А. Об одном классе систем дифференциальных уравнений гиперболического типа // Дифференциальные уравнения: тр. пединститутов РСФСР. 1980. Вып. 16.
27. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954.
28. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. шк., 1970. 712 с.
29. Ames W. F. Nonlinear Partial differential equations in engineering. N.Y.; L.: Academic Press, 1965.
30. Лексина С. В. Задача граничного управления в условиях второй краевой задачи для матричного волнового уравнения // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. 2009. № 4(70). С. 20–29.



УДК 539.4

## ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ANSYS К РАСЧЕТУ ТОЛСТОСТЕННОГО ТРУБОПРОВОДА, ПОДВЕРГАЮЩЕГОСЯ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ЛОКАЛЬНОЙ ВОДОРОДНОЙ КОРРОЗИИ



И. Г. Овчинников, С. А. Бубнов\*

Саратовский государственный технический университет,  
кафедра мостов и транспортных сооружений;

\*Балашовский институт (филиал) Саратовского  
государственного университета им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: serbubnov@rambler.ru

Рассматривается способ применения программного комплекса ANSYS к решению задач расчета напряженно-деформированного состояния и разрушения цилиндрического конструктивного элемента, находящегося в условиях неоднородной водородной коррозии.

**Ключевые слова:** водородная коррозия, разрушение конструктивного элемента, локальный прогрев, метод конечных элементов.

**Application of Program Complex ANSYS to Calculation of the Thick-Walled Pipeline Which is Exposed to High-Temperature Local Hydrogen Corrosion**

I. G. Ovchinnikov, S. A. Bubnov\*

Saratov State Technical University,  
Chair of Bridges and Transport Constructions;

\*Balashov Affiliation of Saratov State University  
E-mail: serbubnov@rambler.ru

The way of application of program complex ANSYS to the decision of problems of calculation of the is intense-deformed condition and destruction of the cylindrical constructive element which is in conditions of non-uniform hydrogen corrosion is considered.

**Key words:** hydrogen corrosion, destruction of a constructive element, local warming up, method of final elements.

Теоретические основы метода конечных элементов (МКЭ) были заложены еще в 1943 г. Курантом [1]. С увеличением производительности вычислительной техники он, как и любой другой численный метод, получил широкое применение в задачах физики и техники. В последнее время появилось достаточное количество программных комплексов, реализующих МКЭ для решения различных типов задач. Одним из таких комплексов является ANSYS. Наличие встроенного языка параметрического программирования (APDL) позволяет адаптировать его к решению нестандартных задач. Например, возможно осуществить учет воздействия водородсодержащей среды на моделируемый конструктивный элемент.

Исследованию влияния водорода и водородсодержащей среды на материалы элементов конструкций посвящен ряд работ [2, 3] и др. В результате водородной коррозии происходит изменение механических свойств материала (в худшую сторону), что сказывается на сокращении срока службы конструкции.

Рассмотрим толстостенную трубу, нагруженную внутренним давлением водородсодержащей среды  $P = 24$  МПа и находящуюся в неоднородном и нестационарном температурном поле. Неоднородность создается участком локального

прогрева на наружной поверхности, температура которого линейно возрастает с течением времени (рис. 1). Температура на внутренней поверхности  $T_1 = 700$  К, на наружной —  $T_2 = 720$  К. Температура локального участка возрастает от 750 К до 800 К.

Первым этапом для проведения расчета является построение геометрической модели объекта. В нашем случае ограничимся фрагментом объекта для экономии оперативной памяти ЭВМ в дальнейшем (см. рис. 1). Для удобства все построения

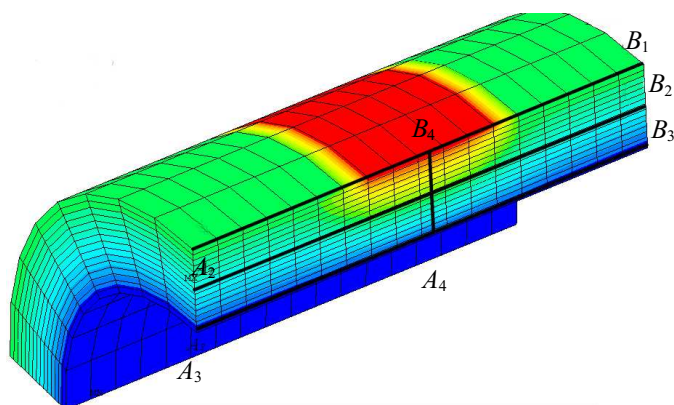


Рис. 1. Распределение теплового поля



выполнены в цилиндрической системе координат, которая активируется командой *csys,1*. Создание модели осуществляется путем твердотельного моделирования, т.е. указываются геометрические границы модели, определяются параметры управления размером и формой элементов, а затем программа автоматически выполняет построение всех узлов и элементов.

Второй этап заключается в выборе типов используемых конечных элементов, соответствующих виду решаемой задачи, и разбивке геометрической модели на конечные элементы. В нашем случае первоначально требуется определить тепловое поле, т.е. решить нестационарную задачу теплопроводности. Для этой цели подойдет двадцатиузловой 3-D элемент Solid90 [4]. Регулярная сетка предпочтительнее свободной, поэтому разобьем все линии геометрической модели на отрезки, длина которых будет соответствовать размеру стороны конечного элемента. При построении упорядоченной сетки необходимо следить за тем, чтобы противоположно расположенные линии состояли из одинакового числа отрезков.

Третий этап включает в себя приложение нагрузок к рассматриваемому образцу и получение решения. Результаты сохраняются в файле для последующего использования их в качестве граничных условий в структурной задаче. На этом этапе необходимо провести вычисление значений параметра химического взаимодействия  $\mu$  для каждого элемента в соответствующий момент времени, решив уравнение

$$\frac{d\mu}{dt} = k\mu(1 - \mu), \quad \mu(t_0) = \mu_0,$$

методом Рунге – Кутты четвертого порядка, реализованным с помощью макроса. Здесь  $k = k(P, T, \Pi)$  — коэффициент, зависящий от давления  $P$ , температуры  $T$  и параметра поврежденности  $\Pi$ . Его значение рассчитывается на каждом временном шаге на основе решенной тепловой задачи. В ANSYS удобно поступить следующим образом: создать массив параметра  $\mu$ , номер столбца которого соответствует номеру конечного элемента, а номер строки — моменту времени, для которого получено значение  $\mu$ . Модуль упругости  $E^i$  и коэффициент Пуассона  $\nu^i$ , а также коэффициенты  $B^i$  и  $n^i$  в уравнении установившейся ползучести для  $i$ -го конечного элемента в фиксированный момент времени будут зависеть от  $\mu$  следующим образом:

$$E^i = E_0 - \mu^i(E_0 - E_1), \quad \nu^i = \nu_0 - \mu^i(\nu_0 - \nu_1), \quad B^i = B_0 \exp \left[ \mu^i \ln \left( \frac{B_1}{B_0} \right) \right], \quad n^i = n_0 - \mu^i(n_0 - n_1),$$

где  $E_0, \nu_0, B_0, n_0$  — коэффициенты для исходного состояния;  $E_1, \nu_1, B_1, n_1$  соответствуют обезуглероженному состоянию;  $\mu^i$  — значение параметра химического взаимодействия для элемента  $i$  в фиксированный момент времени. Аналогично массиву  $\mu$  составим массивы для хранения значений  $E, \nu, B, n$ . Таким образом, получим материал, свойства которого меняются по объему конструктивного элемента и по времени согласно изменению параметра  $\mu$ .

При неравномерном распределении температуры по объему конструктивного элемента необходимо учитывать зависимости модуля Юнга и коэффициент Пуассона от температуры. Будем считать их нелинейными как для исходного материала, так и для полностью обезуглероженного (рис. 2). За базовую температуру возьмем температуру на внутренней поверхности трубы.

На четвертом этапе необходимо сменить тип элемента на Solid186, чтобы определить напряженно деформированное состояние рассматриваемой трубы. Это можно сделать при помощи команды *ETCHG,tts*. Новые элементы имеют те же размеры, форму и координаты узловых точек, что и предыдущий тип. Решать задачу будем временными шагами от начального момента времени  $t_0$  до момента разрушения, определяемого по достижении параметра поврежденности  $\Pi$  предельного значения в какой-либо точке конструкции [2]. На каждом временном

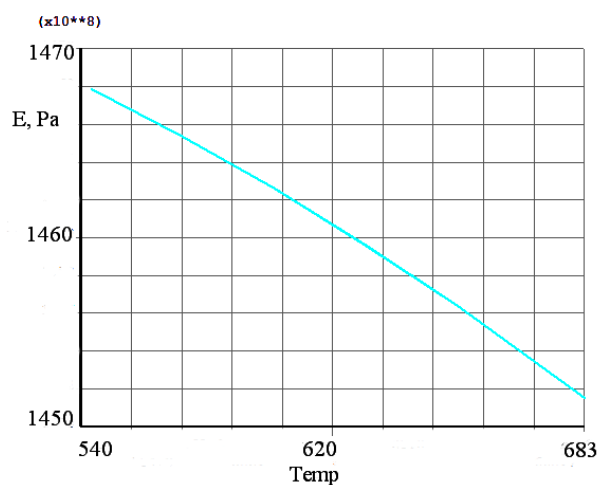


Рис. 2. Зависимость модуля упругости от температуры



шаге решается структурная задача с соответствующим набором характеристик материала, которые берутся из созданных ранее массивов. Промежуточные результаты также сохраняются в соответствующие массивы.

Рис. 3 иллюстрирует движение фронта обезуглероживания по различным направлениям в разные моменты времени.

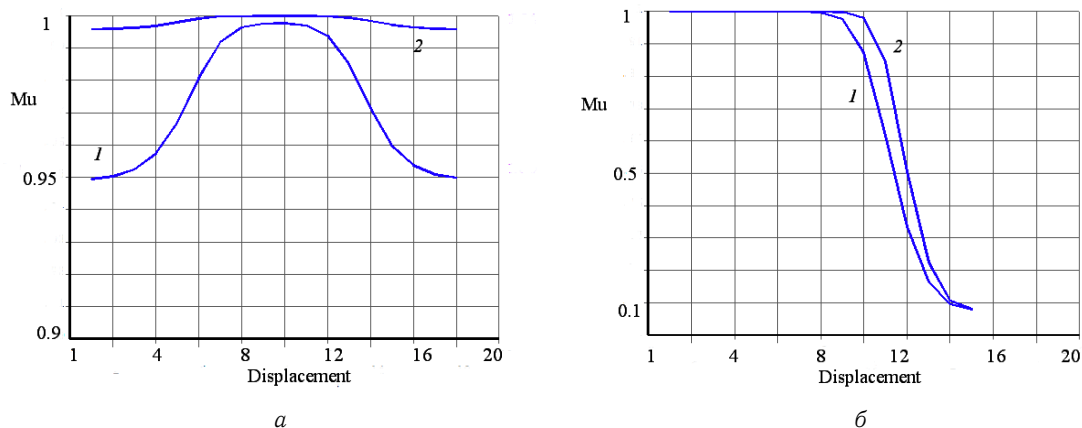


Рис. 3. Значения параметра химического взаимодействия по направлению  $A_2B_2$  (а) и по направлению  $A_4B_4$  (б) в моменты времени: 1 – через 100 ч после начала взаимодействия с водородом, 2 – через 164 ч (момент разрушения)

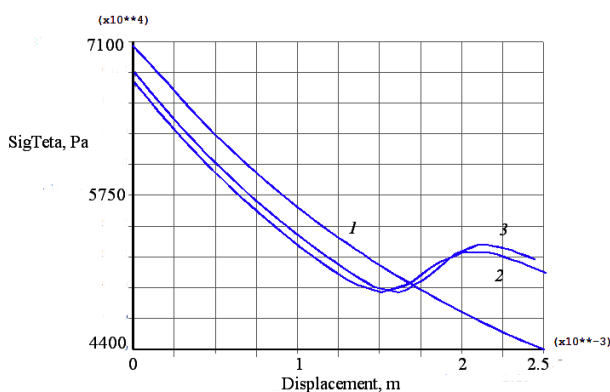


Рис. 4. Распределение окружных напряжений по направлению  $A_4B_4$ : 1 – 1 ч, 2 – 100 ч, 3 – 164 ч

В области повышенных температур процесс обезуглероживания протекает интенсивнее. Это приводит к снижению напряжений в обезуглероженной зоне и к повышению их в граничной необезуглероженной. Параметр поврежденности достигает своего предельного значения на внутренней поверхности трубы напротив зоны локального прогрева.

Окружные напряжения по направлению  $A_4B_4$  претерпевают неравномерное по сечению перераспределение (рис. 4).

Анализ результатов моделирования показывает, что разрушение рассматриваемой толсто-стенной трубы наступает через 164 ч.

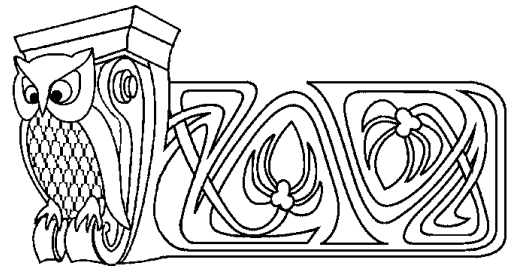
### Библиографический список

1. Courant R. Variable methods for the solution of problems of equilibrium and vibration // Bull. Amer. Math. Soc. 1943. Vol. 49, № 1. P. 1–23.
2. Арчаков Ю. И. Водородная коррозия стали. М., 1985. 192 с.
3. Овчинников И. Г. Работоспособность конструкций в условиях высокотемпературной водородной коррозии. Саратов, 1985. 176 с.
4. ANSYS Theory Reference. ANSYS Release 11.0. Documentation Inc., 2007.



УДК 539.3

## МЕТОД ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ КАК ЭФФЕКТИВНОЕ СРЕДСТВО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ



В. Б. Пеньков, Л. В. Саталкина\*

Липецкий государственный технический университет,  
кафедра теоретической механики  
\*кафедра прикладной математики  
E-mail: viktorp@lipetsk.ru, satalkina\_lyubov@mail.ru

**Method of Boundary States as an Effective Technique of Solving  
of Heterogeneous Problems of Elasticity Theory**

**V. B. Penkov, L. V. Satalkina\***

Lipetsk State Technical University,  
Chair of Applied Mathematics,  
\*Chair of Applied Mathematics  
E-mail: viktorp@lipetsk.ru, satalkina\_lyubov@mail.ru

Метод граничных состояний в сочетании с методом возмущений обнаружил свою эффективность при решении неоднородных задач статической теории упругости. Построены и проиллюстрированы решения основных задач теории упругости для тела геометрической конфигурации «гвоздь», выполненного из неоднородного материала с осесимметричной неоднородностью.

Method of boundary states in combination with perturbation technique discovers its efficiency on heterogeneous problems of elastostatics. Solutions of problems for body of geometric configuration «peg», produced from heterogeneous material with axisymmetric heterogeneity is performed and illustrated.

**Ключевые слова:** гильбертово пространство, коэффициенты Фурье, ортонормированный базис, метод граничных состояний.

**Key words:** Hilbert space, Fourier coefficient, orthonormal basis, method of boundary states.

### 1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассматривается задача статической теории упругости, в которой механические параметры среды являются функциями точек среды. Трудности преодолеваются комбинированием метода Пуанкаре с методом граничных состояний (МГС). Это дает возможность построения приближенного аналитического решения указанного класса задач [1].

После приведения к безразмерному виду основные положения статической термоупругости представляются соотношениями:

– уравнениями равновесия

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \quad (1.1)$$

– соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1.2)$$

– обобщенным законом Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda \vartheta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \vartheta = \varepsilon_{kk}, \quad (1.3)$$

где  $\sigma_{ij}$  — напряжения,  $F_i$  — массовые силы,  $u_i$  — перемещения,  $\varepsilon_{ij}$  — деформации,  $\lambda, \mu$  — параметры Ламе,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\vartheta$  — объемные деформации.

### 2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Полагая все параметры упругой среды непрерывно зависящими от  $x_i$ , представим их в виде степенных рядов по малому параметру  $\beta$ :

$$\{\lambda, \mu, \nu\} = \{\lambda_0, \mu_0, \nu_0\} + \sum_{k=1}^{\infty} \{\lambda_k(x_i), \mu_k(x_i), \nu_k(x_i)\} \beta^k,$$

будем искать характеристики упругостатического поля в виде асимптотических рядов:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^0 + \beta \sigma_{ij}^1 + \dots; \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^0 + \beta \varepsilon_{ij}^1 + \dots; \\ u_i &= u_i^0 + \beta u_i^1 + \dots; \\ F_i &= F_i^0 + \beta F_i^1 + \dots; \\ \vartheta &= \vartheta^0 + \beta \vartheta^1 + \dots \end{aligned}$$



### 3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КАЖДОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

#### 3.1. Разложение основных соотношений по малому параметру

Исходные соотношения приводятся к бесконечной последовательности линейных систем уравнений:

$$\sigma_{ij,j}^0 + F_i^0 = 0, \quad \sigma_{ij,j}^1 + F_i^1 = 0, \dots, \quad \varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{2}(u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0), \quad \varepsilon_{ij}^1 = \frac{1}{2}(u_{i,j}^1 + u_{j,i}^1), \dots, \\ \sigma_{ij}^0 = \lambda_0 \vartheta^0 \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij}^0, \quad \sigma_{ij}^1 = (\lambda_0 \vartheta^1 + \lambda_1 \vartheta^0) \delta_{ij} + (2\mu_0 \varepsilon_{ij}^1 + 2\mu_1 \varepsilon_{ij}^0).$$

Вообще для приближения  $k$  имеем зависимости:

$$\sigma_{ij,j}^k + F_i^k = 0, \quad \varepsilon_{ij}^k = \frac{1}{2}(u_{i,j}^k + u_{j,i}^k), \quad \sigma_{ij}^k = \lambda_0 \vartheta^k \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij}^k + S_{ij}^{k*}, \quad \vartheta^k = \varepsilon_{ii}^k, \\ S_{ij}^{0*} = 0, \quad S_{ij}^{1*} = \lambda_1 \vartheta^0 \delta_{ij} + 2\mu_1 \varepsilon_{ij}^0, \quad S_{ij}^{2*} = (\lambda_2 \vartheta^0 + \lambda_1 \vartheta^1) \delta_{ij} + 2(\mu_1 \varepsilon_{ij}^1 + \mu_2 \varepsilon_{ij}^0), \dots \quad (3.1)$$

Совокупность соотношений (3.1) определяет последовательность задач, решением которых должны явиться поля соответствующих приближений. Заметим, что структура уравнений одинакова. Однако существенны некоторые отличия: в задаче последующего приближения фигурируют поля предшествующих приближений, их необходимо учитывать при построении решения.

#### 3.2. Декомпозиция решения задачи каждого приближения

Представим искомое поле напряжений  $\sigma_{ij}^k$  в виде суммы неизвестной части  $S_{ij}^k$  и известной поправки  $S_{ij}^{k*}$ . Получим  $\sigma_{ij}^k = S_{ij}^k + S_{ij}^{k*}$ , где обозначено  $S_{ij}^k = \lambda_0 \vartheta^k \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij}^k$ .

Такие преобразования приводят упругую задачу каждого приближения к унифицированной задаче теории упругости при наличии объемных сил:

$$S_{ij,j}^k + X_i^k = 0, \quad \varepsilon_{ij}^k = \frac{1}{2}(u_{i,j}^k + u_{j,i}^k), \quad S_{ij}^k = \lambda_0 \vartheta^k \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij}^k. \quad (3.2)$$

где  $X_i^k = F_i^k + S_{ij,j}^{k*}$ .

Для решения задачи каждого приближения удобно применять МГС.

### 4. ОСНОВЫ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

МГС основан на понятии состояния среды, под которым понимается любое частное решение определяющих уравнений среды безотносительно к условиям, поставленным на границе тела [1]. Понятие состояния среды трансформируется в понятие внутреннего состояния  $\xi$ , если речь заходит о конкретном теле, имеющем свои границы. Совокупность всех возможных внутренних состояний образует гильбертово пространство внутренних состояний  $\Xi$ . Поэтому внутреннее состояние может быть представлено в виде ряда Фурье по элементам ортонормированного базиса:  $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} \dots \xi^{(n)} \dots \in \Xi$ ,  $(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}) = \delta_{ij}$ :

$$\xi = \sum_k c_k \xi^{(k)},$$

где  $c_k = (\xi, \xi^{(k)})_{\Xi}$  — коэффициенты Фурье.

След, который оставляет на границе тела внутреннее состояние  $\xi$ , воспринимается как граничное состояние  $\gamma$ , соответствующее внутреннему. Совокупность всех граничных состояний образует гильбертово пространство граничных состояний  $\Gamma$ . Для него также справедливо разложение в ряд Фурье по элементам ортонормированного базиса:  $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \dots \gamma^{(n)} \dots \in \Gamma$ ,  $(\gamma^{(i)}, \gamma^{(j)}) = \delta_{ij}$ :

$$\gamma = \sum_k c_k \gamma^{(k)}, \quad c_k = (\gamma, \gamma^{(k)})_{\Gamma}.$$

Если пространства внутренних и граничных состояний изоморфны в смысле Гильберта:

$$(\xi^{(1)} + \xi^{(2)}) = (\gamma^{(1)} + \gamma^{(2)}), \quad \alpha \xi = \alpha \gamma, \quad (\gamma^{(i)}, \gamma^{(j)})_{\Gamma} = (\xi^{(i)}, \xi^{(j)})_{\Xi},$$

то изучение внутреннего состояния сводится к изучению соответствующего граничного состояния. При этом базисному набору элементов пространства  $\Xi$  однозначно соответствует базисный набор элементов пространства  $\Gamma$ .



## 5. МЕТОД ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ СТАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Система уравнений (1.1)-(1.3) эквивалентна уравнениям Ламе в частных производных второго порядка относительно перемещений [2]:

$$\mu_0 u_{i,jj}^k + (\lambda_0 + \mu_0) u_{j,ji}^k + X_i^k = 0.$$

В случае потенциальных сил  $X_i^k = -\Pi_{,i}^k$  уравнение Ламе имеет общее решение (Папковича – Нейбера [2])

$$u_i^k = 4(1 - \nu_0) B_i - (x_j B_j + B_0)_{,i} + \chi_{,i}^k, \quad (5.1)$$

где  $\Pi^k$  — потенциал объемных сил  $k$ -го приближения,  $B_i$  — компонента произвольного гармонического вектора  $B$ .

В случае односвязной конечной области уместно общее решение Аржаных – Слободянского [2]:

$$u_i^k = 4(1 - \nu_0) B_i + x_j B_{i,j} - x_i B_{j,j} + \chi_{,i}^k.$$

где  $\chi^k$  удовлетворяют уравнениям Пуассона

$$\chi_{,ii}^k = \frac{1 - 2\nu_0}{2\mu_0(1 - \nu_0)} \Pi^k. \quad (5.2)$$

Представим решение (5.1) в виде суммы

$$u_i = u_i^L + u_i^P, \quad (5.3)$$

где второе слагаемое полагается в задаче известной частью

$$u_i^P = \chi_{,i},$$

а первое слагаемое

$$u_i^L = 4(1 - \nu_0) B_i + x_j B_{i,j} - x_i B_{j,j} \quad (5.4)$$

строится методом граничных состояний как результат решения краевой задачи для однородных уравнений Ламе, в которой граничные условия содержат поправку относительно известной величины  $u_i^L|_{\partial V} = u_i|_{\partial V} - u_i^P|_{\partial V}$  (вторая основная задача теории упругости) или  $p_i^L|_{\partial V} = p_i|_{\partial V} - p_i^P|_{\partial V}$ ,  $p_i^P|_{\partial V} = \sigma_{ij}^P|_{\partial V} n_j$ ,  $\sigma_{ij}^P = \lambda_0 \vartheta \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij}^P$ ,  $\vartheta = \varepsilon_{kk}^P$ ,  $\varepsilon_{ij}^P = \frac{1}{2}(u_{i,j}^P + u_{j,i}^P)$  (первая основная задача).

Под внутренним состоянием  $\xi$  упругой среды будем полагать набор  $\xi = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}$ . Скалярное произведение в пространстве  $\Xi$  определяется как

$$(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})_{\Xi} \equiv \int_V \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dv.$$

Выражение (5.4) формально оставляет за нулевым элементом пространства  $\Xi$  недоопределенность из-за несущественности значения уровня отсчета перемещения, которая легко преодолевается введением нормировки: в некоторой фиксированной точке каждое из состояний пространства должно иметь нулевое значение вектора перемещения.

Базис пространств внутренних состояний набирается в соответствии с (5.1) при отсутствии массовых сил через систему гармонических многочленов. После ортогонализации базиса атрибуты результирующего внутреннего состояния представляются рядами Фурье в соответствии с формулой (3.2)

$$u_i = \sum_k c_k u_i^{(k)}, \quad \sigma_{ij} = \sum_k c_k \sigma_{ij}^{(k)}, \quad \varepsilon_{ij} = \sum_k c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}. \quad (5.5)$$

Под граничным состоянием будем понимать набор функций точек границы  $\gamma = \{u_i, p_i\}$ , где  $u_i|_{\partial V}$ ,  $p_i|_{\partial V}$  — поверхностные усилия на границе тела:  $p_i = \sigma_{ij} n_j$ . Скалярное произведение в пространстве  $\Gamma$  определяется как

$$(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)})_{\Gamma} = \int_{\partial V} p_i^{(1)} u_i^{(2)} ds.$$

Формула (5.6) также позволяет представить все атрибуты граничного состояния рядами Фурье:

$$u_i = \sum_k c_k u_i^{(k)}, \quad p_i = \sum_k c_k p_i^{(k)}. \quad (5.6)$$

Оба пространства  $\Xi$  и  $\Gamma$  сопряжены гильбертовым изоморфизмом [3].

Таким образом, набор коэффициентов Фурье определяет упругое состояние в теле.

Решение первой задачи теории упругости сводится к отысканию коэффициентов Фурье через квадратуры

$$c_k = \int_{\partial V} p_i^L |_{\partial V} u_i^{(k)} dS. \quad (5.7)$$

Решение второй задачи сводится к расчету коэффициентов Фурье также через квадратуры

$$c_k = \int_{\partial V} u_i^L |_{\partial V} p_i^{(k)} dS.$$

Различные смешанные постановки реализуются через бесконечные системы уравнений, разрешимость некоторых из них доказана [1, 4].

## 6. ЗАДАЧИ О ДЕФОРМИРОВАНИИ НЕОДНОРОДНОГО «ГВОЗДЯ»

### 6.1. Постановка задачи неоднородной теории упругости

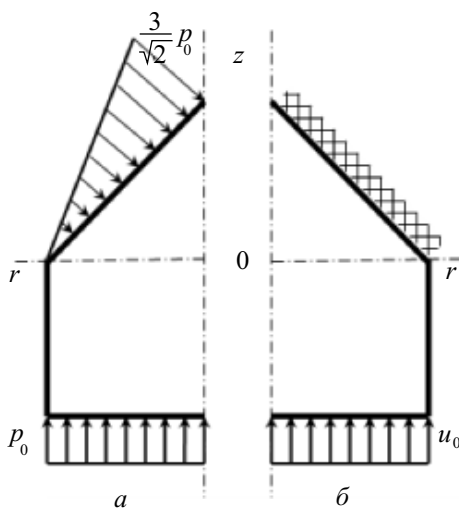


Рис. 1. Параметры нагружения «гвоздя»: а – первая задача, б – вторая задача

Задача решалась для нетривиального тела: цилиндра, накрытого конусом. Такое тело в дальнейшем будем называть «гвоздь» (рис. 1). «Гвоздь» безразмерного радиуса 1 параметризован цилиндрической системой координат  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = z$ ,  $r \in [0, 1]$ ,  $\varphi \in [-\pi, \pi)$ ,  $z \in [-1, 1 - r]$ . Материал среды характеризуется механическими параметрами Ламе, являющимися функциями точек границы, что в безразмерном представлении имеет вид:  $\mu(x, y, z) = 1 + \frac{1}{10}(x^2 + y^2)$ ,  $\lambda(x, y, z) = \frac{2}{3} + \frac{28}{45}(x^2 + y^2)$ . Граница разбита на три участка (основание, цилиндр, конус):  $\partial V = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ .

Рассматриваются две механические постановки задачи:

1) поверхность сектора нагружена распределенным усилием:

$$\mathbf{p}|_{S_1} = \{0, 0, p_0\}, \quad \mathbf{p}|_{S_2} = \{0, 0, 0\},$$

$$\mathbf{p}|_{S_3} = p_0 \left\{ \frac{(-3 + 3r) \cos \varphi}{\sqrt{2}}, \frac{(-3 + 3r) \sin \varphi}{\sqrt{2}}, \frac{(-3 + 3r)}{\sqrt{2}} \right\};$$

2) точки поверхности тела перемещаются в соответствии с условиями

$$\mathbf{u}|_{S_1} = \{0, 0, u_0\}, \quad \mathbf{u}|_{S_2} = \{0, 0, -u_0 z\}, \quad \mathbf{u}|_{S_3} = \{0, 0, 0\}.$$

Требуется построить напряженно деформированное состояние в условиях первой и второй основных задач.

### 6.2. Формирование базисов пространств состояний

Рассмотрим процесс формирования базисов внутреннего и граничного состояний на примере одного из элементов ([5], элемент 15 из табл. 1.1)

Вектор перемещения строим по формуле (5.1) при отсутствии объемных сил ( $\chi = 0$ ), где гармонический вектор есть  $B = \{0, 0, -x^2 y + y z^2\}$ .





Получаем

$$u^{(15)} = \begin{pmatrix} -2xyz \\ -2y^2z \\ \frac{1}{5}(31x^2y + 21yz^2) \end{pmatrix}.$$

Из соотношения Коши находим компоненты тензора деформаций:

$$\hat{\varepsilon}^{(15)} = \begin{pmatrix} -2yz & -xz & -\frac{36}{5}xy \\ -xz & -4yz & -\frac{1}{10}(31x^2 + 10y^2 - 21z^2) \\ -\frac{36}{5}xy & -\frac{1}{10}(31x^2 + 10y^2 - 21z^2) & \frac{42}{5}yz \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензора напряжений строим в соответствии с законом Гука:

$$\hat{\sigma}^{(15)} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{5}yz & -2xz & \frac{72}{5}yx \\ -2xz & -\frac{32}{5}yz & -\frac{1}{5}(31x^2 + 10y^2 - 21z^2) \\ -2xz & -\frac{72}{5}yx & \frac{92}{5}yz \end{pmatrix}.$$

Полные линейно-независимые наборы векторов  $u$  и тензоров  $\hat{\varepsilon}$  и  $\hat{\sigma}$  определяют базис внутреннего состояния.

Построим граничное состояние, изоморфное внутреннему. Значение вектора перемещения на границе установим как его предельное значение изнутри области. Перемещения на границах  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  вычисляем, используя соответствующую параметризацию:

$$u^{(15)}|_{S_1} = \begin{pmatrix} 2r^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ 2r^2 \sin^2 \varphi \\ 4.2r \sin \varphi - 6.2r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad u^{(15)}|_{S_2} = \begin{pmatrix} -2z \cos \varphi \sin \varphi \\ -2z \sin^2 \varphi \\ 4.2z^2 \sin \varphi - 6.2 \cos^2 \varphi \sin \varphi \end{pmatrix},$$

$$u^{(15)}|_{S_3} = -2r \sin \varphi \begin{pmatrix} r \cos \varphi (1 - r) \\ r \sin \varphi (1 - r) \\ (-2.1 + 4.2r - 2.1r^2 + 3.1r^2 \cos^2 \varphi) \end{pmatrix}.$$

Находим усилия на границе (удержано два знака в дробной части)

$$p^{(15)}|_{S_1} = \sigma^{(15)}|_{S_1} \cdot n_1 = \begin{pmatrix} 14.4r^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ -4.2 + 6.2r^2 \cos^2 \varphi + 2r^2 \sin^2 \varphi \\ 18.4r \sin \varphi \end{pmatrix},$$

$$p^{(15)}|_{S_2} = \sigma^{(15)}|_{S_2} \cdot n_2 = \begin{pmatrix} -4.4z \cos \varphi \sin \varphi \\ -2z \cos^2 \varphi - 6.4z \sin^2 \varphi \\ \sin \varphi (4.2z^2 - 2.6 \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi) \end{pmatrix},$$

$$p^{(15)}|_{S_3} = \sigma^{(15)}|_{S_3} \cdot n_3 = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \varphi (3.11 + 7.07r) \\ 2.97 \sin \varphi - r \sin \varphi (5.94 - 2.97r + \cos^2 \varphi (1.41 + 2.97r) + \sin^3 \varphi (4.53 - 3.11r)) \\ \sin \varphi (2.97 + 7.07r - 10.04r^2 - 14.57 \cos^2 \varphi - 1.41r \sin^2 \varphi) \end{pmatrix}.$$

Скалярное произведение в пространстве граничных состояний (5.5) с учетом параметризации поверхности приняло форму

$$(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}) = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^1 p_i^{(1)} u_i^{(2)} r dr + \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-1}^0 p_i^{(1)} u_i^{(2)} dz + \sqrt{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^1 p_i^{(1)} u_i^{(2)} r dr.$$

Описанный процесс формирует изоморфные исходные базисы пространств состояний.



### 6.3. Решение основных задач

Решение первой задачи сводится к вычислениям по следующей цепочке действий:

- 1) нахождение массовых сил  $S_{ij,j}^{k*}$  для каждого приближения в соответствии с (3.1) ( $S_{ij}^{0*} = 0$ );
- 2) восстановление потенциала объемных сил  $\Pi_k$  методом наименьших квадратов;
- 3) построение частного решения уравнения Пуассона (5.2);
- 4) декомпозиция решения (5.3), где  $u_i^P = \chi_{,i}(u_i^{0P} = 0)$  и определение  $\varepsilon_{ij}^P, \sigma_{ij}^P, p_i^P$  по цепочке действий, описанной в п. 5;
- 5) поправка в ГУ:  $p_i^L = p_i - p_i^P$ ;
- 6) расчет коэффициентов Фурье в соответствии с (5.7), переписанной для границы «гвоздя»:

$$c_k = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^1 p_i^L u_i^k r dr + \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-1}^0 p_i^L u_i^k dz + \sqrt{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^1 p_i^L u_i^k r dr;$$

- 7) построение внутреннего  $u_i^L, \varepsilon_{ij}^L, \sigma_{ij}^L$  и граничного  $u_i^L|_{\partial V} p_i^L|_{\partial V}$  состояний в соответствии с (5.5), (5.6) соответственно;
- 8) суммирование полей, помеченных «L» и «P»:

$$u_i = u_i^L + u_i^P, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^L + \varepsilon_{ij}^P, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^L + \sigma_{ij}^P, \quad u_i|_{\partial V} = u_i^L|_{\partial V} + u_i^P|_{\partial V}, \quad p_i|_{\partial V} = p_i^L|_{\partial V} + p_i^P|_{\partial V}.$$

Результатом решения задачи явились поля перемещений, деформаций и напряжений в теле и перемещения и усилия на границе тела. По результатам асимптотических приближений построены конечные суммы полей. Ввиду громоздкости выражений результаты решения задачи представлены в графической форме.

На рис. 2 представлен график зависимости напряжений  $\sigma_{xz}$  (как наиболее характерного представителя поля) первой основной задачи, построенный по суммам начальных асимптотик (0 — тонкая сплошная, 0 + 1 — толстая, 0 + 1 + 2 — точечная). Распределения построены на луче, исходящем из начала координат в направлении  $\{1, 0, -1\}$ . Характер зависимости свидетельствует о достаточности двух асимптотических приближений для описания состояния тела.

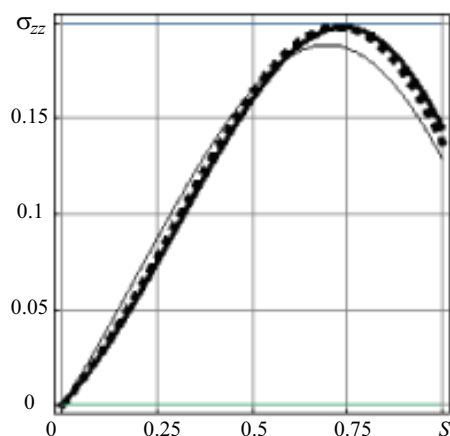


Рис. 2. Напряжения  $\sigma_{xz}$

На рис. 3–6 изображены купюры полей в осевом сечении для результирующих асимптотических приближений первой и второй основных задач. Незначительные качественные отличия в приближениях в первой основной задаче наблюдаются только в радиальных перемещениях, хотя количественные отличия налицо. В задаче о смятии «гвоздя» проявляются качественные отличия в приближениях в полях напряжений.

На рис. 3–6 изображены купюры полей в осевом сечении для результирующих асимптотических приближений первой и второй основных задач. Незначительные качественные отличия в приближениях в первой основной задаче наблюдаются только в радиальных перемещениях, хотя количественные отличия налицо. В задаче о смятии «гвоздя» проявляются качественные отличия в приближениях в полях напряжений.

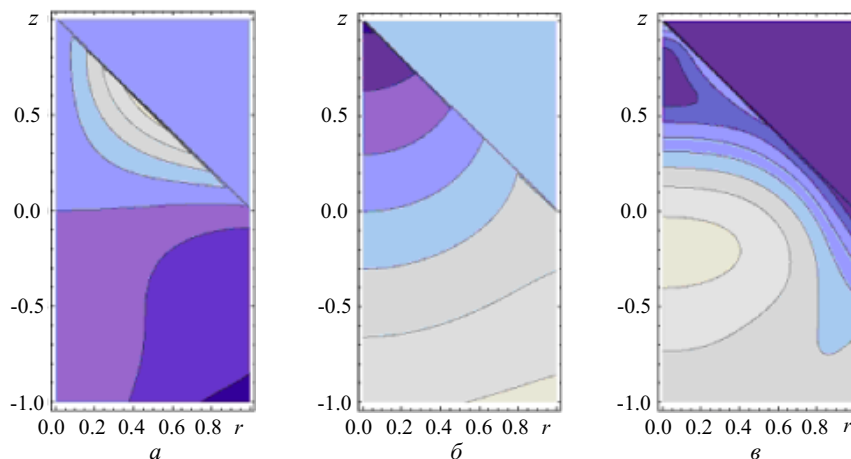


Рис. 3. Перемещения и изохормы первой основной задачи: а — радиальные, б — осевые, в — наибольшие касательные напряжения

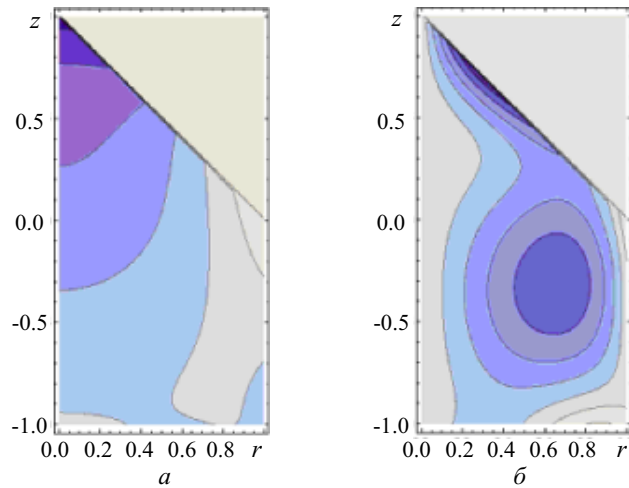


Рис. 4. Напряжения первой основной задачи:  $a$  — осевое,  $b$  — сдвиговое

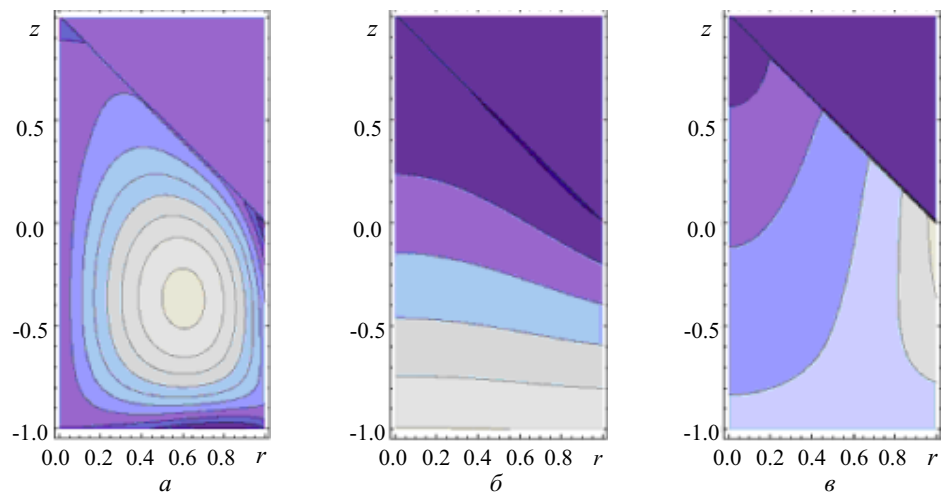


Рис. 5. Перемещения и изохромы второй основной задачи:  $a$  — радиальные,  $b$  — осевые,  $v$  — наибольшие касательные напряжения

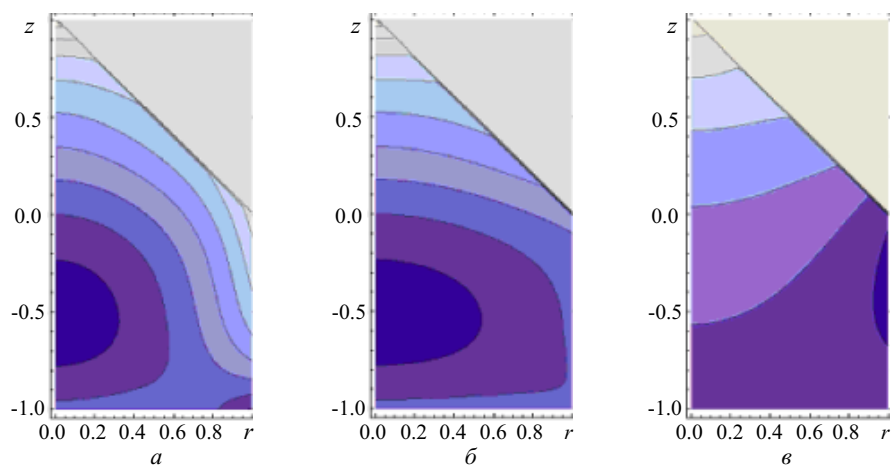


Рис. 6. Напряжения первой основной задачи:  $a$  — радиальное,  $b$  — осевое,  $v$  — сдвиговое



## ВЫВОДЫ

1. Означенные классы задач имеют как самостоятельное значение, так и вспомогательное: к таким задачам часто приводятся нелинейные постановки после проведения декомпозиции. Технология решения этих задач методом граничных состояний заслуживает специального внимания.

2. Разработанный метод может эффективно применяться для решения задач термоэластостатики с несвязанными температурными и механическими полями, а также с полями, связанными в граничных условиях.

## Библиографический список

1. Пеньков В. Б., Пеньков В. В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный мат. журн. 2001. Т. 2, № 2. С. 115–137.
2. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
3. Колмогоров А. Н. Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004. 571 с.
4. Пеньков В. Б., Рожков А. Н. Метод граничных состояний в основной контактной задаче теории упругости // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 11, вып. 2. Механика. С. 101–106.
5. Харитonenко А. А. Моделирование состояний гармонических сред и разработка метода распознавания состояний: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тула, 2006. 100 с.



# ИНФОРМАТИКА

УДК 519.17

## О НИЖНЕЙ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА РЕБЕР МИНИМАЛЬНОГО РЕБЕРНОГО 1-РАСШИРЕНИЯ СВЕРХСТРОЙНОГО ДЕРЕВА

М. Б. Абросимов

Саратовский государственный университет,  
кафедра теоретических основ компьютерной безопасности  
E-mail: mic@rambler.ru

Граф  $G^*$  называется реберным 1-расширением графа  $G$ , если граф  $G$  можно вложить в каждый граф, получающийся из графа  $G^*$ , удалением любого его ребра. Реберное 1-расширение  $G^*$  графа  $G$  называется минимальным, если графы  $G$  и  $G^*$  имеют одинаковое число вершин, а среди всех реберных 1-расширений графа  $G$  с тем же числом вершин граф  $G^*$  имеет минимальное число ребер. Дерево называется сверхстройным, если только одна его вершина имеет степень больше двух. В работе дается нижняя оценка числа дополнительных ребер минимального реберного 1-расширения произвольного сверхстройного дерева и указывается семейство деревьев, на которых эта оценка достигается.

**Ключевые слова:** минимальное реберное расширение, сверхстройное дерево, звездоподобное дерево, отказоустойчивая реализация.

**On Lower Bound of Edge Number of Minimal Edge 1-Extension of Starlike Tree**

M.B. Abrosimov

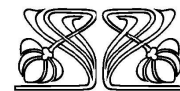
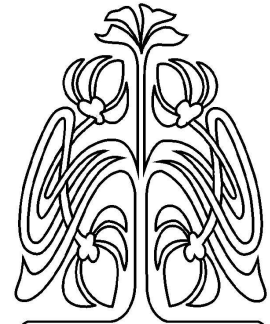
Saratov State University,  
Chair of Theoretical Foundations of Computer Security and Cryptography  
E-mail: mic@rambler.ru

For a given graph  $G$  with  $n$  nodes, we say that graph  $G^*$  is its 1-edge extension if for each edge  $e$  of  $G^*$  the subgraph  $G^* - e$  contains graph  $G$  up to isomorphism. Graph  $G^*$  is minimal 1-edge extension of graph  $G$  if  $G^*$  has  $n$  nodes and there is no 1-edge extension with  $n$  nodes of graph  $G$  having fewer edges than  $G$ . A tree is called starlike if it has exactly one node of degree greater than two. We give a lower bound of edge number of minimal edge 1-extension of starlike tree and provide family on which this bound is achieved.

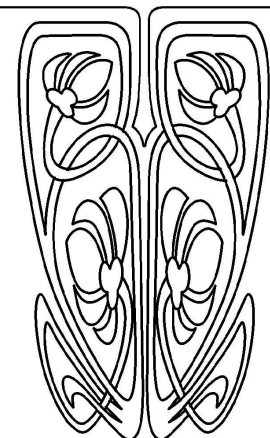
**Key words:** minimal edge extension, starlike tree, fault tolerance.

### ВВЕДЕНИЕ

Минимальные расширения (вершинные или реберные) являются продолжением предложенной Хейзом в работе [1] графовой модели для исследования отказоустойчивости. В этой работе и его последующей статье [2] с соавтором Харари рассматривается отказоустойчивость элементов дискретных систем (node fault tolerance, вершинное расширение). В работе [3] модель была распространена и на отказы связей элементов системы (edge fault tolerance, реберное расширение). Среди рассматриваемых систем особое внимание уделялось системам, граф которых является цепью, циклом или деревом. Исследованию минимальных вершинных 1-расширений частных случаев деревьев посвящены статьи [4–6]. В работе [7] приводятся все минимальные реберные 1-расширения для сверхстройных деревьев с числом вершин до 10 включительно. Оказалось, что задача является вычислительно сложной [8] и поэтому общего аналитического реше-



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





ния описания минимального расширения (вершинного или реберного) для произвольного графа по-видимому не существует. В данной работе рассматриваются минимальные реберные 1-расширения деревьев особого вида, которые называются сверхстройными или звездоподобными. В работе используются понятия теории графов, преимущественно в соответствии с книгой [9].

**Графом** (неориентированным) называется пара  $G = (V, \alpha)$ , где  $\alpha$  — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин  $V$ , называемое отношением смежности. Связный граф без циклов называется *деревом*. Степенью вершины  $v$  в неориентированном графе  $G$  будем называть количество вершин в  $G$ , смежных с данной, и обозначать через  $d(v)$ . Вектор, составленный из степеней вершин графа  $G$  в порядке невозрастания, называется вектором степеней. Будем говорить, что вектор степеней  $(a_1, \dots, a_n)$  одного графа *мажорирует* вектор степеней  $(b_1, \dots, b_n)$  другого графа, если все компоненты второго не превышают по величине соответствующих компонент первого вектора:  $a_i \geq b_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Дерево называется *сверхстройным* (*звездообразным*), если в точности одна его вершина имеет степень больше двух. Эту вершину будем называть *корнем* сверхстройного дерева. Другое определение звездообразного дерева: это граф, гомеоморфный звезде. На рис. 1 представлены малые сверхстройные деревья.

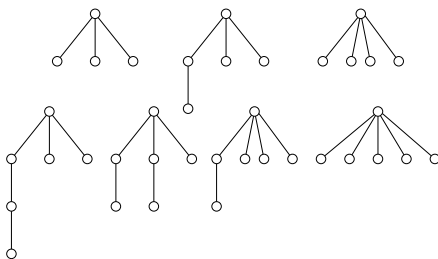


Рис. 1. Сверхстройные деревья с числом вершин 4, 5 и 6

**Утверждение.** *Дерево является сверхстройным тогда и только тогда, когда количество листьев равно наибольшей из степеней вершин.*

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $T$  — сверхстройное дерево, а  $v$  — его корень. Из определения сверхстройного дерева следует, что степень вершины  $v$  является наибольшей среди степеней остальных вершин. Пусть  $u$  — произвольная вершина, смежная с  $v$ . По определению она либо является листом, либо имеет степень 2. Но тогда есть

еще в точности одна вершина смежная с  $u$ , кроме  $v$ . Продолжая рассуждение, приходим к выводу, что в дереве  $T$  количество листьев равно степени корневой вершины  $v$ .

**Достаточность.** Пусть в дереве  $T$  вершина  $v$  имеет наибольшую степень. Выберем ее в качестве корня. Заметим, что каждая ветвь, исходящая из корня, заканчивается не менее чем одним листом. Ветвь заканчивается одним листом тогда и только тогда, когда она является цепью, т. е. когда все вершины этой ветви, кроме первой (корня) и последней (листа), имеют степень 2.  $\square$

Таким образом, вектор степеней сверхстройного дерева имеет вид  $(k, 2, \dots, 2, 1, \dots, 1)$ , где  $k > 2$  и количество листьев равно  $k$ . Кратко вектор степеней сверхстройного дерева может быть записан в виде  $(k, 2^m, 1^k)$ . Среди сверхстройных деревьев есть представители других хорошо известных семейств графов.

В данной статье мы рассматриваем сверхстройные деревья, у которых степень корневой вершины  $k > 2$ . Однако если это ограничение убрать, то при  $k = 1$  или  $k = 2$  сверхстройное дерево является цепью  $P_n$ .

Если  $m = 0$ , то сверхстройное дерево является звездой  $K_{1,k}$ .

Сверхстройное дерево можно рассматривать как объединение  $k$  цепей с общей концевой вершиной. При этом дерево можно закодировать вектором, состоящим из длин цепей в порядке неубывания:  $(m_1, \dots, m_k)$ , где  $m_1 \geq \dots \geq m_k$ . Очевидно, что такое кодирование сверхстройных деревьев при  $k > 2$  является взаимно однозначным. В самом деле, любому вектору  $(m_1, \dots, m_k)$  будет соответствовать единственное с точностью до изоморфизма сверхстройное дерево с числом вершин  $m_1 + \dots + m_k + 1$ . В этом дереве корневая вершина будет иметь степень  $k$ ,  $k$  вершин будут иметь степень 1, а остальные  $m_1 + \dots + m_k - k$  вершин будут иметь степень 2. Будем называть такой код *вектором цепей*. Сверхстройные деревья на рис. 1 имеют коды  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 1, 1)$ ,  $(3, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 1)$ ,  $(2, 1, 1, 1)$  и  $(1, 1, 1, 1, 1)$ . Вектора цепей подсказывают способ перечисления всех сверхстройных деревьев с заданным числом вершин  $n$ . Так как  $n = m_1 + \dots + m_k + 1$ , то, построив все разложения числа  $n - 1$  на три и более слагаемых, мы найдем все возможные вектора цепей  $n$ -вершинных сверхстройных деревьев. Таким образом, количество неизоморфных сверхстройных деревьев с числом вершин 4, 5, ... есть 1, 2, 4, 7, 11, 17, 25, 36, 50, 70, 94, 127, ... [10]



## 1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Граф  $G^* = (V^*, \alpha^*)$  называется *минимальным реберным  $k$ -расширением* (МР- $k$ Р)  $n$ -вершинного графа  $G = (V, \alpha)$ , если выполняются следующие условия:

- 1) граф  $G^*$  является реберным  $k$ -расширением  $G$ , т.е. граф  $G$  вкладывается в каждый граф, получающийся удалением из  $G^*$  любых его  $k$  ребер;
- 2) граф  $G^*$  содержит  $n$  вершин, т.е.  $|V^*| = |V|$ ;
- 3)  $\alpha^*$  имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).

Построение минимального реберного  $k$ -расширения можно представить себе как добавление к заданному графу некоторого числа *дополнительных* ребер. Если рассматриваются простые графы, то минимальное реберное  $k$ -расширение может быть не у любого графа. Например, полный граф  $K_n$  не имеет минимальных реберных  $k$ -расширений ни при каких натуральных значениях  $k$ . Граф, получающийся из графа  $G$  удалением ребра  $e$  будем обозначать  $G - e$ .

Относительно специальных случаев сверхстройных деревьев некоторые результаты известны. Единственное минимальное реберное 1-расширение цепи  $P_n$  есть цикл  $C_n$ , а любое минимальное реберное  $k$ -расширение цепи  $P_n$  есть минимальное реберное  $(k - 1)$ -расширение цикла  $C_n$  (см. [3]).

Минимальное реберное 1-расширение звезды  $K_{1,k}$  единственно с точностью до изоморфизма и получается соединением двух листьев со всеми остальными вершинами звезды и между собой. Для  $k > 1$  также известен вид всех минимальных реберных  $k$ -расширений (см. [11]).

В этой работе мы дадим нижнюю оценку на количество дополнительных ребер минимального реберного 1-расширения произвольного сверхстройного дерева и покажем, что эта оценка является достижимой, указав специальное семейство сверхстройных деревьев, минимальные реберные 1-расширения которых имеют соответствующее число дополнительных ребер.

Пусть  $T$  — сверхстройное дерево с вектором цепей  $(m_1, \dots, m_k)$  и вектором степеней  $(k, 2^m, 1^k)$ . Определим ограничения, которым должно удовлетворять любое минимальное реберное 1-расширение  $T^*$  сверхстройного дерева  $T$ . Заметим, что

- 1) граф  $T^*$  не может иметь вершин со степенью меньше двух, так как удаление любого инцидентного такой вершине ребра привело бы к появлению изолированной вершины;
- 2) граф  $T^*$  не может иметь единственную вершину степени  $k$ , так как удаление любого инцидентного такой вершине ребра привело бы к графу, у которого все вершины имеют степень меньше  $k$ .

Из пункта 1 следует, что вектор степеней графа  $T^*$  будет мажорировать вектор  $(k, 2^{m+k})$ .

Из пункта 2 следует две альтернативы: либо в  $T^*$  есть вершина степени более  $k$ , либо, как минимум, две вершины степени — не менее  $k$ . Оценим количество дополнительных ребер в каждом из случаев.

1. Если в графе  $T^*$  есть вершина степени более  $k$ , то вектор степеней графа  $T^*$  будет мажорировать вектор  $(k + 1, 2^{m+k})$ . Чтобы определить минимально возможное в этом случае число дополнительных ребер, вычтем из суммы компонент этого вектора сумму степеней вершин дерева  $T$  и разделим пополам:  $(k + 1)/2$ .

2. Если в графе  $T^*$  есть как минимум две вершины степени не менее  $k$ , то вектор степеней графа  $T^*$  будет мажорировать вектор  $(k, k, 2^{m+k-1})$ . Чтобы определить минимально возможное в этом случае число дополнительных ребер вычтем из суммы компонент этого вектора сумму степеней вершин дерева  $T$  и разделим пополам:  $k - 1$ .

Так как  $k > 2$ , то лишь при  $k = 3$  схема 2 может иметь такое же количество дополнительных ребер, как и схема 1, а во всех остальных случаях больше. Таким образом, получаем

**Теорема 1.** *Минимальное реберное 1-расширение сверхстройного дерева  $T$  с вектором степеней  $(k, 2, \dots, 2)$  содержит не менее чем  $(k + 1)/2$  при нечетном  $k$  и  $(k + 2)/2$  при четном  $k$  дополнительных ребер.*

Далее мы покажем, что оценки из этой теоремы не могут быть улучшены. Исследуем схему 1.

**Теорема 2.** *Сверхстройное дерево  $T$  с вектором цепей  $(m_1, \dots, m_k)$  тогда и только тогда имеет минимальное реберное 1-расширение с вектором степеней  $(k + 1, 2, \dots, 2)$ , отличающееся на  $(k + 1)/2$  дополнительных ребер, когда:*

- 1) среди его цепей есть цепи всех длин от 1 до  $m_1$  (максимальной длины цепи);



2) цепь максимальной длины  $m_1$  единственна;

3) все остальные цепи можно разбить на пары так, чтобы их длины в сумме давали  $m_1$ .

**Доказательство.** Пусть  $k$  — нечетно и  $T$  — сверхстройное дерево с вектором цепей  $(m_1, \dots, m_k)$ , а  $G^*$  — его минимальное реберное 1-расширение с вектором степеней  $(k+1, 2, \dots, 2)$ , отличающееся на  $(k+1)/2$  дополнительных ребер. Заметим, что последнее условие теоремы эквивалентно тому, что концы всех цепей, кроме максимальной, могут быть соединены таким образом, чтобы все получившиеся циклы имели длину  $m_1 + 1$

Нетрудно видеть, что граф  $G^*$ , построенный по первой схеме, представляет собой объединение циклов с общей вершиной, которую для определенности обозначим  $v$ . Построение графа  $G^*$  из дерева  $T$  можно представить себе следующим образом: одна висячая вершина соединяется с корневой вершиной, а остальные висячие вершины попарно соединяются между собой.

Количество циклов в  $G^*$  обозначим через  $t = d(v)/2 = (k+1)/2$ . Длины циклов в  $G^*$  обозначим через  $p_1, \dots, p_t$ . Для определенности будем считать, что  $m_1 \geq \dots \geq m_k$  и  $p_1 \geq \dots \geq p_t$ . Очевидно, что  $p_1 \geq m_1 + 1$ .

**Необходимость.** Рассмотрим удаление произвольного ребра в графе  $G^*$ . Это ребро принадлежит некоторому циклу длины  $p_i$ . Если ребро инцидентно вершине  $v$ , то после удаления ребра вместо цикла появится цепь длины  $p_i - 1$ . Если ребро не инцидентно вершине  $v$ , то цикл распадается на две цепи. Так как по предположению дерево  $T$  вкладывается в получившийся граф, то для каждой из этих цепей должна найтись цепь такой же длины и в дереве  $T$ . В силу произвольности выбора ребра можно сделать вывод, что в дереве  $T$  должны быть цепи длины  $1, 2, \dots, p_1 - 1$ . С учетом полученной ранее оценки  $p_1 \geq m_1 + 1$  имеем  $p_1 = m_1 + 1$ . Таким образом, утверждение 1 доказано.

Предположим, что в дереве  $T$  есть несколько цепей максимальной длины  $m_1$ . Так как конец только одной из этих цепей может быть соединен с корневой вершиной и может образовать цикл максимальной длины  $p_1 = m_1 + 1$ , то концы остальных цепей длины  $m_1$  должны быть соединены с концами некоторых других цепей. Но это приведет к тому, что длины получившихся циклов будут больше, чем  $p_1 = m_1 + 1$ , а это противоречит предположению о том, что  $p_1$  является максимальной длиной цикла. Таким образом, утверждение 2 доказано.

Предположим, что  $p_1 > p_t$ , т. е. не все циклы имеют одинаковую длину  $p_1$ . Рассмотрим граф, получающийся из  $G^*$  удалением ребра  $e$ , инцидентного вершине  $v$  из цикла минимальной длины  $p_t$  и попробуем построить вложение дерева  $T$  в получившийся граф. Вершина  $v$  в графе  $G^* - e$  имеет степень  $k$  и единственным образом соответствует корневой вершине дерева. Из вершины  $v$  выходит одна цепь длины  $p_t - 1$ , и  $(k-1)/2$  циклов, из которых нужно выделить  $k-1$  цепей. По предположению  $p_t - 1 < m_1$ , т. е. единственная цепь, получившаяся после удаления ребра  $e$ , не может быть цепью максимальной длины. Таким образом, один из циклов максимальной длины  $p_1$  будет содержать в себе цепь максимальной длины  $m_1$ . Однако тогда остается еще  $(k-3)/2$  циклов и этого недостаточно, чтобы построить вложение для оставшихся  $k-2$  цепей. Полученное противоречие доказывает утверждение 3, а вместе с ним и необходимость.

**Достаточность.** Предположим, что дерево  $T$  удовлетворяет условиям 1–3 теоремы. Построим граф  $G^*$  из дерева  $T$  следующим образом: концевую вершину цепи максимальной длины  $m_1$  соединяем с корневой вершиной, а остальные концевые вершины цепей попарно соединяются между собой, таким образом, чтобы длина цикла была  $m_1 + 1$ : конец цепи длины 1 соединяется с концом цепи длины  $m_1 - 1$ , конец цепи длины 2 соединяется с концом цепи длины  $m_1 - 2$  и т. д. Докажем, что граф  $G^*$  будет минимальным реберным 1-расширением дерева  $T$ .

Рассмотрим два случая удаления произвольного ребра  $e$  из графа  $G^*$ .

1. Ребро  $e$  инцидентно корневой вершине  $v$ . Удаление ребра  $e$  приведет к тому, что из корневой вершины  $v$  будет выходить одна цепь длины  $m_1$  и  $(k-1)/2$  циклов, каждый из которых имеет длину  $m_1 + 1$ . Получившаяся цепь будет соответствовать единственной цепи дерева  $T$  максимальной длины  $m_1$ , а в каждом из  $(k-1)/2$  циклов выделим по две цепи подходящей длины так, чтобы получить оставшиеся  $k-1$  цепей дерева  $T$ . Вложение построено.

2. Ребро  $e$  не инцидентно корневой вершине  $v$ . Удаление ребра  $e$  приведет к тому, что из корневой вершины  $v$  будет выходить две цепи, сумма длин которых будет равна  $m_1$  и  $(k-1)/2$  циклов, каждый из которых имеет длину  $m_1 + 1$ . Получившиеся цепи будут соответствовать подходящим





цепям дерева  $T$ . Один из оставшихся циклов используем для вложения цепи максимальной длины  $m_1$ , а в каждом из  $(k-1)/2$  оставшихся циклов выделим по две цепи подходящей длины так, чтобы получить оставшиеся  $k-1$  цепей дерева  $T$ . Вложение построено. Минимальность построенного реберного 1-расширения  $G^*$  следует из теоремы 1. Теорема доказана.  $\square$

На рис. 2 представлено 7-вершинное сверхстройное дерево с вектором цепей  $(3, 2, 1)$  и все его минимальные реберные 1-расширения (MP-1P), первое из которых построено по теореме 2. Это дерево является минимальным по числу вершин среди представителей рассматриваемого в теореме 2 семейства.

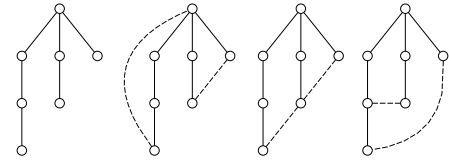


Рис. 2. Сверхстройное дерево  $(3, 2, 1)$  и все его MP-1P

**Следствие.** Сверхстройные деревья, удовлетворяющие условию теоремы 2, при  $k > 3$  имеют единственное с точностью до изоморфизма минимальное реберное 1-расширение.

## 2. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СЕМЕЙСТВА

Идея доказательства теоремы 2 легко переносится и на более общий случай сверхстройных деревьев.

**Теорема 3.** Сверхстройное дерево  $T$  с вектором цепей  $(m_1, \dots, m_k)$  тогда и только тогда имеет реберное 1-расширение с вектором степеней  $(k+d, 2, \dots, 2)$ ,  $d > 0$ , отличающееся на  $(k+d)/2$  дополнительных ребер, когда:

- 1) среди его цепей есть цепи всех длин от 1 до его высоты  $m_1$  (максимальной длины цепи);
- 2) цепей максимальной длины  $m_1$  в точности  $d$ ;
- 3) все остальные цепи можно разбить на пары так, чтобы их длины в сумме давали  $m_1$ .

**Доказательство.** Пусть  $k+d$  — четно и  $T$  — сверхстройное дерево с вектором цепей  $(m_1, \dots, m_k)$ , а  $G^*$  — его реберное 1-расширение (быть может, не минимальное) с вектором степеней  $(k+d, 2, \dots, 2)$ , отличающееся на  $(k+d)/2$  дополнительных ребер. Доказательство следует схеме предыдущей теоремы.

Нетрудно видеть, что граф  $G^*$  представляет собой объединение циклов с общей вершиной, которую для определенности обозначим  $v$ . Построение  $G^*$  из дерева  $T$  можно представить следующим образом:  $d$  висячих вершин соединяются с корневой вершиной, а остальные висячие вершины попарно соединяются между собой.

Количество циклов в  $G^*$  обозначим через  $t = d(v)/2 = (k+d)/2$ . Длины циклов в  $G^*$  обозначим через  $p_1, \dots, p_t$ . Для определенности будем считать, что  $m_1 \geq \dots \geq m_k$  и  $p_1 \geq \dots \geq p_t$ . Очевидно, что  $p_1 \geq m_1 + 1$ .

**Необходимость.** Рассмотрим удаление произвольного ребра в графе  $G^*$ . Это ребро принадлежит некоторому циклу длины  $p_i$ . Если ребро инцидентно вершине  $v$ , то после удаления ребра вместо цикла появится цепь длины  $p_i - 1$ . Если ребро не инцидентно вершине  $v$ , то цикл распадается на две цепи. Так как по предположению дерево  $T$  вкладывается в получившийся граф, то для каждой из этих цепей должна найтись цепь такой же длины и в дереве  $T$ . В силу произвольности выбора ребра можно сделать вывод, что в дереве  $T$  должны быть цепи длины  $1, 2, \dots, p_1 - 1$ . С учетом полученной ранее оценки  $p_1 \geq m_1 + 1$  имеем  $p_1 = m_1 + 1$ . Таким образом, утверждение 1 доказано.

Пусть в дереве  $T$  есть более  $d$  цепей максимальной длины  $m_1$ . Так как концы только  $d$  из этих цепей могут быть соединены с корневой вершиной и образовать цикл максимальной длины  $p_1 = m_1 + 1$ , то концы остальных цепей длины  $m_1$  должны быть соединены с концами некоторых других цепей. Но это приведет к тому, что длины получившихся циклов будут больше, чем  $p_1 = m_1 + 1$ , а это противоречит предположению о том, что  $p_1$  является максимальной длиной цикла. Таким образом, утверждение 2 доказано.

Предположим, что  $p_1 > p_t$ , т.е. не все циклы имеют одинаковую длину  $p_1$ . Рассмотрим граф, получающийся из  $G^*$  удалением ребра  $e$ , инцидентного вершине  $v$ , из цикла минимальной длины  $p_t$  и попробуем построить вложение дерева  $T$  в получившийся граф. Вершина  $v$  в графе  $G^*$  —  $e$  имеет степень  $k+1$  и единственным образом соответствует корневой вершине дерева. Из вершины  $v$  выходит одна цепь длины  $p_t - 1$ , и  $k/2$  циклов, из которых нужно выделить  $k-1$  цепь. По



предположению  $p_t - 1 < m_1$ , т.е. единственная цепь, получившаяся после удаления ребра  $e$  не может быть цепью максимальной длины. Таким образом, два цикла максимальной длины  $p_1$  будут содержать в себе две цепи максимальной длины  $m_1$ . Однако тогда остается еще  $(k - 4)/2$  циклов и этого недостаточно, чтобы построить вложение для оставшихся  $k - 2$  цепей. Полученное противоречие доказывает утверждение 3, а вместе с ним и необходимость. заменим на абзац: Предположим, что  $p_1 > p_t$ , т.е. не все циклы имеют одинаковую длину  $p_1$ . Рассмотрим граф, получающийся из  $G^*$  удалением ребра  $e$  инцидентного вершине  $v$  из цикла минимальной длины  $p_t$  и попробуем построить вложение дерева  $T$  в получившийся граф. Вершина  $v$  в графе  $G^* - e$  имеет степень  $k + d - 1$  и единственным образом соответствует корневой вершине дерева. Из вершины  $v$  выходит одна цепь длины  $p_t - 1$  и  $(k + d - 2)/2$  циклов, из которых нужно выделить  $k - 1$  цепь. По предположению  $p_t - 1 < m_1$ , т.е. единственная цепь, получившаяся после удаления ребра  $e$  не может быть цепью максимальной длины. Таким образом,  $d$  циклов максимальной длины  $p_1$  будут содержать в себе  $d$  цепей максимальной длины  $m_1$ . Однако тогда остается еще  $(k - d - 2)/2$  циклов и этого недостаточно, чтобы построить вложение для оставшихся  $k - d - 1$  цепей. Полученное противоречие доказывает утверждение 3, а вместе с ним и необходимость.

**Достаточность.** Предположим, что дерево  $T$  удовлетворяет условиям 1–3 теоремы. Построим граф  $G^*$  из дерева  $T$  следующим образом: концевые вершины цепей максимальной длины  $m_1$  соединим с корневой вершиной, а остальные концевые вершины цепей попарно соединяются между собой, таким образом, чтобы длина цикла была  $m_1 + 1$ : конец цепи длины 1 соединяется с концом цепи длины  $m_1 - 1$ , конец цепи длины 2 соединяется с концом цепи длины  $m_1 - 2$  и т.д. Докажем, что граф  $G^*$  будет реберным 1-расширением дерева  $T$ .

Рассмотрим два случая удаления произвольного ребра  $e$  из графа  $G^*$ .

1. Ребро  $e$  инцидентно корневой вершине  $v$ . Удаление ребра  $e$  приведет к тому, что из корневой вершины  $v$  будет выходить одна цепь длины  $m_1$  и  $(k + d - 2)/2$  циклов, каждый из которых имеет длину  $m_1 + 1$ . Получившаяся цепь будет соответствовать цепи дерева  $T$  максимальной длины  $m_1$ ,  $d - 1$  циклов будут содержать остальные цепи максимальной длины, а в каждом из  $(k - d)/2$  циклов выделим по две цепи подходящей длины так, чтобы получить оставшиеся  $k - d$  цепей дерева  $T$ . Вложение построено.

2. Ребро  $e$  не инцидентно корневой вершине  $v$ . Удаление ребра  $e$  приведет к тому, что из корневой вершины  $v$  будет выходить две цепи, сумма длин которых будет равна  $m_1$  и  $(k + d - 2)/2$  циклов, каждый из которых имеет длину  $m_1 + 1$ . Получившиеся цепи будут соответствовать подходящим цепям дерева  $T$ . Из оставшихся циклов  $d$  штук используем для вложения  $d$  цепей максимальной длины  $m_1$ , а в каждом из  $(k - d - 2)/2$  оставшихся циклов выделим по две цепи подходящей длины так, чтобы получить оставшиеся  $k - d - 2$  цепей дерева  $T$ . Вложение построено. Теорема доказана.  $\square$

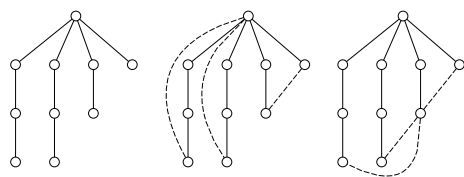


Рис. 3. Сверхстройное дерево  $(3, 2, 2, 1)$  и все его МР-1Р

На рис. 3 представлено 10-вершинное сверхстройное дерево с вектором цепей  $(3, 3, 2, 1)$  и все его минимальные реберные 1-расширения, первое из которых построено по теореме 3.

**Следствие.** Для сверхстройных деревьев, удовлетворяющих условию теоремы 3, при  $d = 2$  соответствующее реберное 1-расширение будет и минимальным.

### Библиографический список

1. Hayes J.P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. Vol. 25. № 9. P. 875–884.
2. Harary F., Hayes J.P. Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. Vol. 23. P. 135–142.
3. Harary F., Hayes J.P. Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. Vol. 27. P. 19–23.
4. Harary F., Khurum M. One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees // Internet J. Comput. Math. 1995. Vol. 56. P. 135–143.
5. Кабанов М.А. Об отказоустойчивых реализациях графов // Теоретические задачи информатики и ее приложений. Саратов, 1997. Вып.1. С. 50–58.
6. Абросимов М.Б. Минимальные расширения графов // Новые информационные технологии в исследовании дискретных структур. Томск, 2000. С. 59–64.



7. Минимальные реберные расширения сверхстройных деревьев с малым числом вершин / М.Б. Абросимов, Д. Д. Комаров; Саратов. гос. ун-т. Саратов, 2010. 27 с. Деп. в ВИНТИ 18.10.2010, № 589-В2010.
8. Абросимов М. Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 5. С. 643–650.
9. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М., 1997. 368 с.
10. Sloane N. J. A., Plouffe S. The Encyclopedia of Integer Sequences. San Diego, 1995. 587 p.
11. Абросимов М. Б. Минимальные расширения неориентированных звезд // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов, 2006. Вып. 7. С. 3–5.

## PERSONALIA

### К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ САВЕЛИЯ ВЛАДИМИРОВИЧА ФАЛЬКОВИЧА (1911–1982)



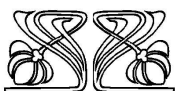
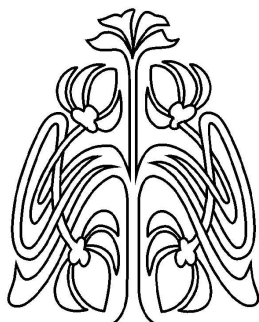
2 июня 2011 г. исполнилось 100 лет со дня рождения профессора Савелия Владимировича Фальковича, долгое время возглавлявшего кафедру теоретической механики и аэрогидромеханики Саратовского университета, основателя и первого редактора сборников «Аэродинамика».

С. В. Фалькович родился в Саратове в 1911 г. После окончания средней школы он как «классово чуждый элемент» (сын врача) не смог поступить в вуз, но получил разрешение преподавать математику и физику на курсах по подготовке в вузы и техникумы. Также Савелий Владимирович вёл занятия на рабфаке Саратовского автодорожного института.

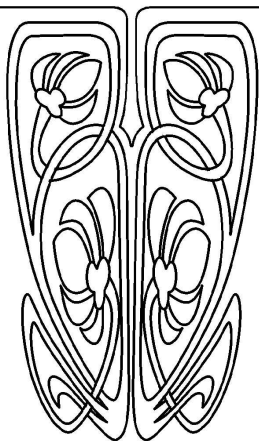
В 1931 г. С. В. Фалькович поступил на физико-математический факультет Саратовского университета. После его окончания, в 1936 г., Савелий Владимирович был оставлен на кафедре теоретической механики ассистентом.

В то время основным направлением научных исследований кафедры, возглавляемой Б. К. Ризенкампом, была теория движения грунтовых вод. С. В. Фалькович начал упорно и плодотворно работать над сложными задачами по фильтрации жидкости, представляющими интерес для гидротехники. Молодому учёному удалось получить точное решение задач о высачивании грунтовой воды на откосе; фильтрации в двухслойном грунте при произвольно расположенной линии раздела слоев; дренаже при помощи системы труб и др. Для их решения он применял различные функционально-теоретические методы: аналитическую теорию дифференциальных уравнений, преобразование Меллина и теорию автоморфных функций. Итогом данных исследований стала кандидатская диссертация на тему «Некоторые задачи установившегося движения грунтовых вод», защищенная 18 июня 1941 г. Важные результаты, полученные в ней, стали классическими, вошли в учебники по фильтрации, а статья «Теория фильтрации жидкости в пористых средах», написанная совместно с П. Я. Кочиной (впоследствии ставшей академиком), была переведена и издана в США. С этого времени имя С. В. Фальковича получило международную известность, вошло в классические учебники, а сам учёный-теоретик навсегда связал свою жизнь с прикладными проблемами, востребованными в различных отраслях промышленности и экономики.

С началом Великой Отечественной войны Савелий Владимирович читал практически все общие и специальные курсы для студентов-механиков Саратовского университета, заменив коллег, ушедших на фронт.



**ПРИЛОЖЕНИЯ**





В июне 1944 г., когда возникла острая необходимость в высококлассных специалистах, способных участвовать в разработке реактивных двигателей и нового поколения авиации, академик Н. Е. Кочин пригласил С. В. Фальковича на работу в Институт механики АН СССР в качестве докторанта, а затем, с декабря 1947 г., старшего научного сотрудника.

Бурное развитие авиации в нашей стране определило становление и развитие науки о движении газов — аэродинамики, теоретические основы которой были заложены двумя великими русскими советскими учёными: Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным. С. В. Фалькович стал непосредственным продолжателем их славного дела. В этот период основным предметом исследований Савелия Владимировича становится динамика околосзвуковых течений газа.

В цикле работ, опубликованных в 1945–1947 гг. и ставших частью докторской диссертации 36-летнего учёного, теоретически исследовался очень трудный с точки зрения математики вопрос: трансзвуковой режим полёта самолета.

Эти работы совместно с изысканиями другого замечательного советского учёного Ф. И. Франкля заложили основы нового научного направления — трансзвуковой аэродинамики. Эта область знаний и сейчас продолжает интенсивно развиваться. Труды С. В. Фальковича «Об одном классе сопел Лавалея» и «К теории сопла Лавалея» принесли ему широкую известность как крупнейшему специалисту по околосзвуковой газовой динамике. Эти работы были опубликованы в США в виде отдельных выпусков «Докладов Национального Комитета по аэронавтике».

Обобщением оригинальных исследований в указанном направлении стала монография С. В. Фальковича «Линейная теория крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке», опубликованная в 1950 г., как одна из первых в мировой литературе по данному вопросу. «Околосзвуковой закон подобия Кармана – Фальковича», «переменные Фальковича» — эти понятия знакомы всем специалистам по газовой динамике.

В 1949 г. Савелий Владимирович возвратился в Саратовский университет, где до последних дней жизни заведовал кафедрой теоретической механики и аэрогидродинамики, а также был основателем научной школы газодинамики и аэродинамики околосзвуковых и сверхзвуковых скоростей.

Деятельность С. В. Фальковича всегда отличалась широтой научных интересов. Он вел плодотворные исследования в разных областях механики — аэродинамики, теории сыпучих сред, теории упругости — и получал важные теоретические результаты.

По заказу различных предприятий и институтов коллективом кафедры под его руководством выполнены исследования:

- по движению газа в газопроводе,
- устойчивости земляных откосов,
- газовому каротажу скважин,
- аэродинамической теории металлизации изделий,
- аэродинамике газовых горелок,
- мелиорации,
- течению двухфазной жидкости,
- конструированию профиля крыла самолета и др.

Некоторые работы проводились в контакте с ведущим аэродинамическим институтом нашей страны (ЦАГИ).

Высокий научный потенциал и богатая эрудиция учёного являлись основой его лекторского мастерства. Савелий Владимирович обладал способностью ясно и просто излагать самые сложные вопросы своей науки, его лекции всегда пользовались большой популярностью.

Воспитанники С. В. Фальковича в настоящее время плодотворно трудятся во многих крупнейших научно-исследовательских институтах нашей страны: Институте проблем механики РАН (Москва), ЦАГИ (Жуковский), Институте гидродинамики Сибирского отделения РАН (Новосибирск) и др. Савелий Владимирович подготовил более 20 кандидатов наук и 9 докторов наук. Он являлся научным консультантом по кандидатской диссертации Л. В. Овсянникова, которая была посвящена околосзвуковым течениям в соплах Лавалея. Впоследствии Лев Васильевич получил выдающиеся математические результаты, разработав метод группового анализа дифференциальных уравнений с частными производными, стал академиком РАН.



С. В. Фалькович всегда охотно работал с молодёжью, требовательно и доброжелательно относился к начинающим учёным.

За успехи в деле подготовки специалистов он был награждён орденом «Знак почета» и медалью «За доблестный труд».

В течение многих лет Савелий Владимирович состоял членом Национального Комитета по теоретической и прикладной механике, специализированного совета по присуждению учёных степеней, учёного совета Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского.

С. В. Фалькович обладал широтой научных интересов: он глубоко знал историю, литературу, искусство. Не случайно В.А. Артисевич, легендарная директриса Зональной научной библиотеки СГУ, постоянно включала Савелия Владимировича в Библиотечный совет, консультировалась с ним по вопросу приобретения зарубежных научных изданий.

С. В. Фалькович был непревзойденным знатоком живописи, блестящим рассказчиком.

Жизнь Савелия Владимировича пришлась на непростые периоды советской истории, но он всегда демонстрировал высокое достоинство и порядочность, был подлинным интеллигентом. Многочисленные коллеги и ученики С. В. Фальковича отзываются о нём как о светлом человеке.

*Г. П. Шиндяпин, И. А. Чернов*