

# МАТЕМАТИКА

УДК 512.579

## ПОЛИГОНЫ И ЧАСТИЧНЫЕ ПОЛИГОНЫ НАД ПОЛУРЕШЕТКАМИ

Т. В. Апраксина, М. Ю. Максимовский

Московский государственный институт электронной техники (ТУ),  
кафедра высшей математики 1  
E-mail: taya.apraksina@gmail.com, maksimovskiy@gmail.com

Рассматриваются полигоны и частичные полигоны над полурешетками. Получено необходимое и достаточное условие того, что данное упорядоченное множество  $X$  является полигоном над полурешеткой. Изучены свойства частичных полигонов над полурешетками и получено достаточное условие продолжаемости частичного полигона  $X$  над полурешеткой  $S$  до полного полигона.

**Ключевые слова:** полигон, частичный полигон, полурешетка.

### Acts and Partial Acts over Semilattices

Т. V. Apraksina, M. Yu. Maksimovskiy

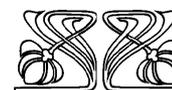
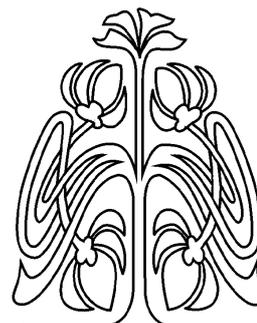
Moscow Institute of Electronic Technology,  
Chair of Higher Mathematics 1  
E-mail: taya.apraksina@gmail.com, maksimovskiy@gmail.com

We consider the acts and the partial acts over semilattices. We obtain a necessary and sufficient condition to be a partially ordered set  $X$  an act over a semilattice. The properties of partial acts are investigated and a sufficient condition is found for the expansion of partial act  $X$  over a semilattice  $S$  to a full  $S$ -act.

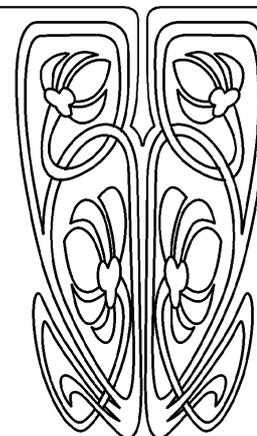
**Key words:** act, partially act, semilattice.

*Полигоном* над полугруппой  $S$  (см. [1]) называется множество  $X$  вместе с отображением  $X \times S \rightarrow X$ ,  $(x, s) \mapsto xs$ , причем  $x(st) = (xs)t$  при всех  $x \in X$ ,  $s, t \in S$ . *Частичный полигон* — это множество  $X$ , для которого задано частичное отображение  $X \times S \rightarrow X$ , причем для любых  $x \in X$ ,  $s, t \in S$  произведения  $x(st)$  и  $(xs)t$  существуют или не существуют одновременно и  $x(st) = (xs)t$  в случае, если оба этих выражения существуют. Частичный полигон является частичной универсальной алгеброй (см. монографию [2]). Полигон над полугруппой является алгебраической моделью автомата (см. [3]); здесь элементы множества  $X$  — состояния, а  $S$  — входные сигналы. Частичный полигон можно интерпретировать как автомат, удовлетворяющий условию: если произведение  $xs$  не определено, то автомат, находясь в состоянии  $x$  и получив на вход сигнал  $s$ , прекращает работу.

В ряде работ исследовались полигоны над полугруппами, имеющими несложное строение. Так, в статье [4] были полностью описаны в теоретико-множественных и теоретико-групповых терминах все полигоны над вполне простыми и вполне 0-простыми полугруппами. В [5, 6] были изучены полигоны над полурешетками (коммутативными полугруппами идемпотентов) и важным частным случаем полурешеток — цепями. Цель данной работы — продолжить исследование полигонов над полурешетками и цепями и распространить их на частичные полигоны.



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





Полурешеткой мы, как обычно, называем частично упорядоченное множество (в дальнейшем — просто упорядоченное множество), в котором любое двухэлементное подмножество имеет точную нижнюю грань. Известно (см. [7]), что полурешетку можно рассматривать как коммутативную полугруппу идемпотентов, в которой операция определяется по формуле  $a \cdot b = \inf\{a, b\}$  и, наоборот, коммутативная полугруппа идемпотентов является полурешеткой, если порядок определить по формуле  $a \leq b \Leftrightarrow ab = a$ .

При рассмотрении полигонов  $X$  над полугруппой  $S$  удобно считать, что к полугруппе  $S$  добавлена единица 1 (даже если  $S$  уже имела единицу) и  $x \cdot 1 = x$  при всех  $x \in X$ . Положим  $S^1 = S \cup \{1\}$ .

Для упорядоченного множества  $X$  и элемента  $x \in X$  нижний конус  $x^\nabla$  определяется следующим образом:  $x^\nabla = \{y \in X \mid y \leq x\}$ . Упорядоченное множество  $X$  называется *связным*, если для любых  $x, y \in X$  существует последовательность элементов  $x_0, x_1, \dots, x_n \in X$  такая, что  $x_0 = x$ ,  $x_n = y$  и  $(x_{i+1} \leq x_i)$  либо  $(x_i \leq x_{i+1})$  при  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ . Нетрудно проверить, что всякое упорядоченное множество является объединением попарно не пересекающихся связных подмножеств (*компонент связности*).

В работе [5] было доказано, что полигон  $X$  над полурешеткой  $S$  является частично упорядоченным множеством относительно порядка

$$x \leq y \iff x \in yS^1. \tag{1}$$

Естественно возникают две задачи:

(А) для данной полурешетки  $S$  описать полигоны над  $S$ ;

(Б) найти условия, при которых данное упорядоченное множество  $X$  является полигоном над некоторой полурешеткой.

Задача (А) была решена в [5] для случая, когда  $S$  — конечная цепь. Что касается задачи (Б), то в [5] были найдены необходимые условия на упорядоченное множество  $X$ , чтобы оно могло быть полигоном над какой-либо полурешеткой. А именно имеет место

**Предложение 1** [5, предл. 2 и 3]. *Если  $X$  — полигон над полурешеткой, то:*

(а) для любого  $x \in X$  нижний конус  $x^\nabla$  является полурешеткой;

(б) для любых  $x, y \in X$ , если  $x$  и  $y$  лежат в одной компоненте связности, то существует такое  $z$ , что  $z \leq x, y$ .

Нетрудно показать, что из (а) следует (б) для любого упорядоченного множества  $X$ . Однако условие (а) (а начит, и (б)) не является достаточным для того, чтобы упорядоченное множество  $X$  было полигоном над некоторой полурешеткой. Необходимое и достаточное условие этого будет приведено нами ниже.

Обозначим через  $T(X)$  полугруппу всех преобразований множества  $X$ , т.е. отображений  $\alpha : X \rightarrow X$ , умножающихся по правилу  $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$  при  $x \in X$ ,  $\alpha, \beta \in T(X)$ . Пусть  $X$  — упорядоченное множество. Обозначим через  $\Phi(X)$  множество отображений  $\varphi : X \rightarrow X$ , удовлетворяющих условиям:

(I)  $\forall x, y \in X \ x \leq y \Rightarrow x\varphi \leq y\varphi$  (т.е.  $\varphi$  *изотонно*);

(II)  $\forall x \in X \ x\varphi \leq x$  ( $\varphi$  — *уменьшающее*);

(III)  $\varphi^2 = \varphi$  ( $\varphi$  — *идемпотентное*);

(IV)  $\forall x, y \in X \ (x = x\varphi \ \& \ y \leq x \Rightarrow y = y\varphi)$ .

Заметим, что условия (I)–(III) означают, что  $\varphi$  является оператором замыкания на двойственном упорядоченном множестве  $X^* = (X, \geq)$ , а условие (IV) — тот факт, что множество замкнутых элементов стабильно относительно взятия в  $X^*$  мажоранты.

**Лемма 2.**  $\varphi\psi = \psi\varphi$  для любых  $\varphi, \psi \in \Phi(X)$ .

**Доказательство.** Пусть  $x \in X$  и  $\varphi, \psi \in \Phi(X)$ . Из условия 2 следует, что  $x\varphi\psi \leq x\varphi$ . Так как  $(x\varphi)\varphi = x\varphi$  (ввиду (III)), то из (IV) мы получаем, что  $x\varphi\psi\varphi = x\varphi\psi$ . Отсюда, учитывая (I) и (II), получим:  $x\varphi\psi = x\varphi\psi\varphi \leq x\psi\varphi$ . Таким образом,  $x\varphi\psi \leq x\psi\varphi$ . Аналогично получается, что  $x\psi\varphi \leq x\varphi\psi$ . Следовательно,  $x\psi\varphi = x\varphi\psi$ . Ввиду произвольности элемента  $x \in X$  получаем, что  $\varphi\psi = \psi\varphi$ .  $\square$

**Следствие 3.** Для любого частично упорядоченного множества  $X$  множество  $\Phi(X)$  является коммутативной полугруппой идемпотентов.

**Доказательство.** Используя лемму 2, можно показать, что  $\varphi\psi \in \Phi(X)$  для любых  $\varphi, \psi \in \Phi(X)$ .  $\square$



Очевидно, полугруппа  $\Phi(X)$  является подполугруппой полугруппы  $T(X)$ . Пусть  $X$  — полигон над полугруппой  $S$ . Будем говорить, что  $S$  действует на  $X$  *эффективно*, если

$$\forall s, t \in S (s \neq t \Rightarrow \exists x \in X (xs \neq xt)).$$

**Теорема 4.** Пусть  $X$  — упорядоченное множество. Тогда  $X$  является полигоном над некоторой полурешеткой в том и только том случае, если

$$\forall x, y \in X (x \leq y \Rightarrow \exists \varphi \in \Phi(X) (x = y\varphi)). \quad (2)$$

**Доказательство.** Пусть  $X$  — полигон над полурешеткой  $S$ . Возьмем элементы  $x, y \in X$  такие, что  $x \leq y$ . По определению порядка в  $X$  мы имеем:  $x = ys$  при некотором  $s \in S$ . Несложно проверить, что отображение  $\varphi_s : X \rightarrow X, x \mapsto xs$  удовлетворяет условиям (I)–(IV), поэтому  $\varphi_s \in \Phi(X)$ . Так как  $x = y\varphi_s$ , то выполняется условие теоремы 4.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть для упорядоченного множества  $X$  выполнено условие (2). По следствию 3  $\Phi(X)$  — полурешетка. Обозначим через  $1_X$  тождественное отображение  $x \mapsto x$  при всех  $x \in X$ . Очевидно,  $1_X$  удовлетворяет условиям (I)–(IV), поэтому  $1_X \in \Phi(X)$ . Так как  $\Phi(X)$  — подполугруппа полугруппы  $T(X)$ , то множество  $X$  является полигоном над полурешеткой  $\Phi(X)$ . Осталось проверить, что первоначальный частичный порядок на  $X$  совпадает с порядком, определенным по формуле (1). Действительно, если  $x \leq y$ , то, ввиду условия (2),  $x = y\varphi$  при некотором  $\varphi \in \Phi(X)$ . Наоборот, если  $x \in y\Phi(X)$ , то, ввиду условия (2),  $x = y\varphi$  при некотором  $\varphi \in \Phi(X)$ , а значит,  $x = y\varphi \leq y$ .  $\square$

**Замечание.** Из доказательства теоремы видно, что если упорядоченное множество  $X$  является полигоном над какой-нибудь полурешеткой, то оно является полигоном над полурешеткой  $\Phi(X)$ . Таким образом,  $\Phi(X)$  в этом случае является максимальной полурешеткой, действующей эффективно на  $X$ . (Здесь максимальность понимается по включению, так как все полурешетки, эффективно действующие на  $X$ , можно считать подмножествами множества  $T(X)$ ).

Рассмотрим теперь случай, когда упорядоченное множество  $X$  само является полурешеткой. Для каждого  $a \in X$  обозначим через  $\varphi_a$  отображение  $X \rightarrow X$ , определенное правилом  $x\varphi_a = \inf\{x, a\}$  ( $x \in X$ ).

**Теорема 5.** Если  $X$  — полурешетка, то отображение  $f : X \rightarrow \Phi(X), af = \varphi_a$ , является вложением полурешеток.

**Доказательство.** Легко проверяется, что отображение  $f$  является гомоморфизмом полурешеток  $X$  и  $\Phi(X)$ . Кроме того, очевидно, что если  $a \neq b$  при  $a, b \in X$ , то  $\varphi_a \neq \varphi_b$ , так как  $\Phi(X)$  действует эффективно на  $X$ .  $\square$

Назовем полурешетку  $X$  *направленной*, если для любых  $x, y \in X$  найдется элемент  $z \in X$  такой, что  $z \geq x, y$ . В частности, направленными полурешетками являются всякая решетка и всякая цепь. Нетрудно привести пример, показывающий, что не всякая направленная полурешетка является решеткой.

Будем говорить, что упорядоченное множество удовлетворяет *условию максимальности*, если любое непустое его подмножество имеет максимальный элемент.

**Теорема 6.** Пусть  $X$  — направленная полурешетка с условием максимальности. Тогда отображение  $f : X \rightarrow \Phi(X), af = \varphi_a$ , является изоморфизмом полурешеток  $X$  и  $\Phi(X)$ .

**Доказательство.** Заметим вначале, что в направленной полурешетке с условием максимальности всегда существует наибольший элемент. Обозначим его через  $u$ . Покажем, что для любого  $\varphi \in \Phi(X)$  имеет место равенство  $x\varphi = xa$  для некоторого  $a \in X$ . Если  $\varphi = 1_X$ , то  $\varphi = \varphi_u$ . Пусть  $\varphi \neq 1_X$ . Тогда найдется элемент  $y \in X$  такой, что  $y\varphi \neq y$ . Имеем:  $y\varphi \leq y, (y\varphi)\varphi = y\varphi$ . Ввиду условия максимальности существует максимальный элемент  $a \in X$  такой, что  $a\varphi = a$ . Покажем, что  $x\varphi = xa$  для всех  $x \in X$ . Возможны три случая.

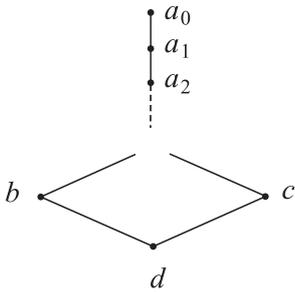
(a)  $y > a$ . Тогда  $y\varphi \geq a\varphi = a$ . Но элемент  $y\varphi$  неподвижный (т. е.  $y\varphi\varphi = y\varphi$ ), значит,  $y\varphi \leq a$  (ввиду максимальности элемента  $a$ ). Таким образом,  $y\varphi = a = \inf\{y, a\} = y \cdot a$ .

(b)  $y \leq a$ . Тогда  $y\varphi = y = y \cdot a$ .

(c)  $y$  и  $a$  не сравнимы. Так как  $X$  — направленная полурешетка, то найдется элемент  $z \in X$  такой, что  $z > a, y$ . Имеем:  $z > a, a\varphi = a$ . Отсюда  $z\varphi \geq a\varphi = a$ . Так как элемент  $z\varphi$  неподвижный и  $z\varphi \geq a$ ,



то  $z\varphi = a$  ввиду максимальности элемента  $a$ . Далее, так как  $y < z$ , то  $y\varphi \leq z\varphi = a$ . Таким образом,  $y\varphi \leq y, a$ . Осталось показать, что  $y\varphi = \inf\{y, a\}$ . Предположим, что  $c \in X$  — такой элемент, что  $c \leq a$  и  $c \leq y$ . Покажем, что  $c \leq y\varphi$ . Так как  $c \leq a, b$ , то  $c\varphi = c$ .  $c\varphi \leq y\varphi$ , значит,  $c \leq y\varphi$ .  $\square$



Направленная полурешетка, не являющаяся решеткой

Сделаем несколько замечаний относительно направленных полурешеток. Очевидно, что если  $X$  — полная направленная полурешетка с условием максимальности, то  $X$  — решетка. В частности, конечная направленная полурешетка является решеткой. Для бесконечных полурешеток это неверно: полурешетка, изображенная на рисунке является направленной и удовлетворяет условию максимальности, но решеткой не является, так как не существует  $\sup\{b, c\}$ .

Если отказаться от требования направленности, то теорема 6 перестает быть верной. Например, для полурешетки  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $3 \leq 1$ ,  $3 \leq 2$  мы имеем:

$$\Phi(X) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \right\},$$

поэтому  $X$  и  $\Phi(X)$  не изоморфны.

Перейдем теперь к частичным полигонам.

**Предложение 7.** Пусть  $X$  — частичный полигон над полурешеткой  $S$ . Положим

$$x \leq y \Leftrightarrow x = y \text{ или } x = ys \text{ при некотором } s \in S. \tag{3}$$

Тогда  $(X, \leq)$  — упорядоченное множество.

**Доказательство.** Рефлексивность отношения  $\leq$  очевидна. Пусть  $x \leq y$  и  $y \leq z$ . Тогда  $x = yt$ ,  $y = zs$  при некоторых  $s, t \in S^1$ . Отсюда получаем:  $x = (zs)t$ . Следовательно, существует произведение  $z(st)$  и  $x = z(st)$ . Это означает, что  $x \leq z$ . Наконец, пусть  $x \leq y$  и  $y \leq x$ . Тогда  $x = ys$ ,  $y = xt$  при некоторых  $s, t \in S^1$ . Отсюда получаем:  $x = ys = (xt)s = x(ts) = x(t^2s) = x(tst) = ((xt)s)t = (ys)t = xt = y$ .  $\square$

**Предложение 8.** Пусть  $X$  — частичный полигон над полурешеткой  $S$ . Тогда:

- (I) если  $x \in X$ ,  $s, t \in S$  таковы, что  $s \leq t$  и существует  $xs$ , то существует и  $xt$ ;
- (II) если существует  $xs$  и  $y \geq x$ , то существует и  $ys$ ;
- (III) если  $xs = x$  и  $y \leq x$ , то  $ys = y$ ;
- (IV) если  $x \leq y$  и существуют  $xs$  и  $ys$ , то  $xs = ys$ .

**Доказательство.** (I) Имеем:  $st = ts = s$ . Так как существует  $xs$ , то  $xs = x(ts) = (xt)s$ , поэтому существует  $xt$ .

(II) Так как  $y \geq x$ , то  $x = yt$  при некотором  $t \in S^1$ . Имеем:  $xs = (yt)s = y(ts) = y(st) = (ys)t$ , поэтому существует  $ys$ .

(III) Пусть  $xs = x$  и  $y \leq x$ . Тогда  $y = xt$  при некотором  $t \in S^1$ . Имеем:  $y = xt = (xs)t = x(st) = x(ts) = (xt)s = ys$ .

(IV) Имеем:  $x = yt$  при некотором  $t \in S^1$ . Следовательно,  $xs = (yt)s = y(ts) = y(st) = (ys)t$ , поэтому  $xs \leq ys$ .  $\square$

В теории частичных алгебраических операций важное место занимает вопрос о продолжении частичной операции до полной. Пусть  $X$  — частичный полигон над полугруппой  $S$ . Мы будем говорить, что этот частичный полигон продолжается до полного, если частичное отображение  $X \times S \rightarrow X$  продолжается до обычного отображения  $X \times S \rightarrow X$  и выполняется аксиома полигона  $(xs)t = x(st)$ .

**Предложение 9.** Пусть  $X$  — частичный полигон над полурешеткой  $S$ . Будем рассматривать  $X$  как упорядоченное множество относительно порядка (3). Если для каждого  $x \in X$  нижний конус  $x^\nabla$  является полурешеткой, то для любых  $x, y \in X$ , лежащих в одной компоненте связности, и любого  $s \in S$  произведение  $xs$  определено тогда и только тогда, когда  $ys$  определено.

**Доказательство.** Пусть существует  $xs$ . Так как  $xs$  и  $y$  лежат в одной компоненте связности, то по предложению 1 существует  $z \leq xs, y$ . Так как  $xs$  существует и  $z \leq xs$ , то по пункту (III)



предложения 8 существует  $zs$  и  $zs = z$ . Наконец, так как  $zs$  существует и  $y \geq z$ , то по пункту (II) предложения 8 существует и  $ys$ .  $\square$

Таким образом, для каждого  $s \in S$  и компоненты связности  $X_\alpha$  либо  $xs$  определено для всех  $x \in X_\alpha$ , либо  $xs$  не определено ни для одного  $x \in X_\alpha$ .

**Предложение 10.** Пусть  $X$  — связный частичный полигон над полурешеткой  $S$ . Обозначим через  $S_0$  множество таких  $s \in S$ , для которых  $xs$  определено для какого-нибудь  $x \in X$  (а значит, по предыдущему утверждению — для всех  $x \in X$ ). Тогда выполняются условия:

(I)  $S_0$  — подполурешетка полурешетки  $S$ ;

(II)  $\forall s, t \in S (s \in S_0 \& t \geq s) \Rightarrow t \in S_0$ ;

(III)  $S' = S \setminus S_0$  — идеал полугруппы  $S$ .

**Доказательство.** (I) Пусть  $s, t \in S_0$ . Покажем, что  $st \in S_0$ . Обозначим  $xs = y$ . Так как  $X$  — связный полигон, то из существования произведения  $xt$  следует существование произведения  $yt$ . Таким образом,  $st \in S_0$ .

(II) Следует непосредственно из пункта (II) предложения 8.

(III) Понятно, что  $S'$  — подполугруппа полугруппы  $S$ . Пусть  $s_1 \in S', s_2 \in S$ . Покажем, что  $s_1 s_2 \in S'$ . Действительно,  $x(s_1 s_2) = (x s_1) s_2$ , однако произведение  $x s_1$  не определено. Следовательно, ввиду произвольности выбора  $s_1 \in S', s_2 \in S$   $S' S \subseteq S$ . Аналогично можно показать, что  $S S' \subseteq S$ .  $\square$

**Теорема 11.** Пусть  $X$  — упорядоченное множество, являющееся частичным полигоном над полурешеткой  $S$ . Если каждая компонента связности имеет наименьший элемент, то частичный полигон  $X$  продолжается до полного полигона.

**Доказательство.** Пусть  $X = \cup X_\alpha$  — разбиение множества  $X$  на компоненты связности, причем в каждой компоненте  $X_\alpha$  есть наименьший элемент. Для  $x \in X_\alpha, s \in S$  положим

$$xs = \begin{cases} x \cdot s, & \text{если } xs \text{ существует,} \\ \min(X_\alpha), & \text{если } xs \text{ не существует.} \end{cases}$$

Покажем, что  $(x \cdot s) \cdot t = x \cdot (st)$  для всех  $x \in X_\alpha, s, t \in S$ . Пусть  $x \in X_\alpha$  и  $u = \min X_\alpha$ . Из определения ясно, что  $u \cdot s = u$  при всех  $s \in S$ . Проверка равенства  $(x \cdot s) \cdot t = x \cdot (st)$  разбивается на три случая.

a)  $(xs)t$  существует. Тогда  $x(st)$  тоже существует, и мы имеем:

$$(x \cdot s) \cdot t = (xs) \cdot t = (xs)t = x(st) = x \cdot (st).$$

b)  $xs$  существует, а  $(xs)t$  не существует. Тогда  $x(st)$  не существует, и мы имеем:

$$(x \cdot s) \cdot t = xs \cdot t = u, \quad x \cdot (st) = u.$$

c)  $xs$  не существует. Тогда  $(xs)t$  тоже не существует. Поэтому  $x \cdot (st)$  не существует. Мы имеем:

$$(x \cdot s) \cdot t = u \cdot t = u, \quad x \cdot (st) = u. \quad \square$$

### Библиографический список

1. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, Acts and Categories. Berlin : Walter deGruyter, 2000. 529 p.
2. Ляпин Е. С., Евсеев А. Е. Частичные алгебраические действия. СПб. : Образование, 1991. 163 с.
3. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. М. : Вышш. шк., 1994. 192 с.
4. Avdeev A. Yu., Kozhuhov I. B. Acts over completely 0-simple semigroups // Acta cybernetica. 2000. № 24. P. 523–531.
5. Максимовский М. Ю. О полигонах над полурешетками // Фунд. и прикл. мат. 2008. Т. 14, № 7. С. 151–156.
6. Кожухов И. Б., Максимовский М. Ю. Об автоматах над полурешетками // Системный анализ и информационно-управляющие системы : сб. науч. тр. / под ред. проф. В. А. Бархоткина. М. : МИЭТ, 2006. С. 19–34.
7. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп : в 2 т. Т. 1. М. : Мир, 1972. 283 с.



УДК 514.7

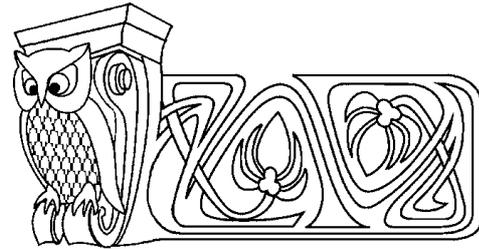
## О КОГОМОЛОГИЯХ АЛГЕБРЫ ЛИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА $S_1/Z_2$

Е. Ю. Волокитина

Саратовский государственный университет,  
кафедра геометрии  
E-mail: evgenia.yu@gmail.com

Вычислены диагональные когомологии алгебры Ли векторных полей на орбиформе  $S_1/Z_2$  с коэффициентами в пространстве гладких функций и 1-форм, одномерные и двумерные когомологии с коэффициентами в  $\mathbb{R}$ .

**Ключевые слова:** орбиформ, алгебра Ли, когомологии.



Cohomology of Lie Algebra of Vector Fields on  $S_1/Z_2$

E. Yu. Volokitina

Saratov State University,  
Chair of Geometry  
E-mail: evgenia.yu@gmail.com

In the present paper we calculate the diagonal cohomology of Lie algebra of vector fields on  $S_1/Z_2$  with coefficients in the space of smooth functions and 1-forms, one-dimensional and two-dimensional cohomology with coefficients in  $\mathbb{R}$ .

**Key words:** orbifold, Lie algebra, cohomology.

### ВВЕДЕНИЕ

В работах И. М. Гельфанда и Д. Б. Фукса [1, 2] было доказано, что кольцо  $H^*(\mathcal{U}(S_1))$  изоморфно тензорному произведению кольца полиномов с одной двумерной образующей и внешней алгебры с одной трехмерной образующей. В работе В. Н. Решетникова [3] рассматривалась задача о нахождении когомологий алгебры Ли векторных полей на окружности обращающихся в нуль в данной точке и были вычислены одномерные и двумерные когомологии.

Пусть  $S_1$  — единичная окружность в плоскости комплексного переменного  $z$ . В данной работе рассматриваются когомологии алгебры Ли векторных полей орбиформы  $S_1/Z_2$ , получающегося из окружности действием группы  $Z_2$ , порожденной отражением относительно оси  $x$ . Эта алгебра Ли является подалгеброй алгебры Ли векторных полей на окружности. Заметим, что ограничения коциклов, представляющих образующие Гельфанда – Фукса для  $H^*(\mathcal{U}(S_1))$ , на нашу подалгебру тривиальны.

### 1. ДИАГОНАЛЬНЫЕ КОГОМОЛОГИИ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ФУНКЦИЯХ И 1-ФОРМАХ

Пусть  $t$  — угловой параметр на окружности, тогда гладкими функциями на орбиформе  $S_1/Z_2$  являются четные периодические гладкие функции на  $\mathbb{R}$ . Векторными полями на  $S_1/Z_2$  являются дифференцирования алгебры гладких функций на  $S_1/Z_2$ . Любое векторное поле на окружности представляется в виде  $X(t)\frac{d}{dt}$ , где  $X(t)$  — гладкая периодическая функция. Аналогичным образом векторное поле на орбиформе  $S_1/Z_2$  можно представить в виде  $X(t)\frac{d}{dt}$ , где  $X(t)$  — нечетная периодическая гладкая функция. Алгебра Ли  $\mathcal{U}(S_1/Z_2)$  векторных полей на орбиформе  $S_1/Z_2$  — топологическая алгебра Ли с  $C^\infty$ -топологией. В дальнейшем будем вместо  $X(t)\frac{d}{dt}$  писать просто  $X(t)$ .

Пусть  $X \rightarrow Xv$  — непрерывное представление алгебры Ли  $\mathcal{U}(S_1/Z_2)$ , где  $v \in V$ ,  $V$  — топологическое пространство. Коцепью  $L \in C^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2), V)$  называется  $q$ -линейный, кососимметрический непрерывный функционал, определенный на  $\mathcal{U}(S_1/Z_2)$  и принимающий значения в  $V$ . Дифференциал  $d^q: C^q \rightarrow C^{q+1}$  определяется следующим образом:

$$d^q L(X_1, \dots, X_{q+1}) = \sum_{1 \leq i < j \leq q+1} (-1)^{i+j-1} L([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{q+1}) + \sum_{1 \leq s \leq q+1} (-1)^s X_s L(X_1, \dots, \widehat{X}_s, \dots, X_{q+1}), \quad (1)$$

где  $L \in C^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2), V)$  и  $[X(t), Y(t)] = X(t)Y'(t) - X'(t)Y(t)$ .

Если  $V$  — алгебра над  $\mathbb{R}$ , то стандартным образом определяется внешнее произведение коцепей: пусть  $L_1 \in C^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2), V)$ ,  $L_2 \in C^r(\mathcal{U}(S_1/Z_2), V)$ , тогда

$$L_1 \wedge L_2(X_1, \dots, X_{q+r}) =$$



$$= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq q+r} (-1)^{i_1 + \dots + i_q - \frac{q(q+1)}{2}} L_1(X_{i_1}, \dots, X_{i_q}) L_2(X_1, \dots, \widehat{X_{i_1}}, \dots, \widehat{X_{i_q}}, \dots, X_{q+r}).$$

Можно показать, что

$$d(L_1 \wedge L_2) = dL_1 \wedge L_2 + (-1)^q L_1 \wedge dL_2.$$

Для произвольного комплекса  $C^*(\mathcal{U}(S_1/Z_2), V)$ , где  $V$  — пространство гладких тензорных полей данного типа на  $S_1/Z_2$ , определяется так называемый диагональный комплекс  $C_\Delta^*(\mathcal{U}(S_1/Z_2), V)$ , состоящий из таких коцепей, что  $L(X_1, \dots, X_q) = 0$  в точке  $t$ , если хотя бы одно из векторных полей  $X_1, \dots, X_q$  равно нулю в окрестности  $t$ .

Рассмотрим сначала комплекс  $C_0^* = \{C_\Delta^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2), \Omega^0(S_1/Z_2)), d^q\}$ , где  $\Omega^0(S_1/Z_2)$  — алгебра гладких функций на орбиформе  $S_1/Z_2$ .

Каждую коцепь  $\omega$  из  $C_0^q$  можно представить в виде

$$\omega = \sum_{n_1, \dots, n_q} f^{n_1 \dots n_q} \omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q},$$

где  $f^{n_1 \dots n_q}$  — функция на окружности, четная, если  $n_1 + \dots + n_q - q$  — четно, и нечетная в противном случае; если  $X(t) \frac{d}{dt}$  — векторное поле на окружности, то  $\omega_n(X(t)) = \frac{d^n X(t)}{dt^n}$ . При этом сумма состоит из конечного числа ненулевых слагаемых. Для этого комплекса дифференциал (1) задается формулами:

$$\begin{aligned} d^q(f \omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q}) &= -\frac{df}{dt} \omega_0 \wedge \omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q} + f(n_1 + \dots + n_q - q) \omega_1 \wedge \omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q} + \\ &+ f \tilde{d}^q(\omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q}), \quad \text{если } n_1, \dots, n_q \neq 0, \\ & d^{q+1}(f \omega_0 \wedge \omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q}) = \\ &= -f(n_1 + \dots + n_q - q) \omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q} - f \omega_0 \wedge \tilde{d}^{q+1}(\omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q}), \\ \tilde{d}^q(\omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q}) &= \sum_{i=1}^q (-1)^{i-1} \sum_{j=2}^{[n_i/2]} (C_{n_i}^j - C_{n_i}^{n_i-j+1}) \omega_j \wedge \omega_{n_i-j+1} \wedge \omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\omega_{n_i}} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q}. \end{aligned}$$

Справедлива

**Теорема 1.** *Имеют место следующие изоморфизмы:*

$$H^0(C_0^*) = H^1(C_0^*) = \mathbb{R} \quad \text{и} \quad H^k(C_0^*) = 0 \quad \text{при } k \neq 0, 1.$$

Образующей одномерных когомологий является класс коцикла  $\omega_1$ .

**Доказательство.** Произвольную коцепь  $\omega$  нашего комплекса можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{n_1, \dots, n_q \neq 0, 1} f^{n_1, \dots, n_q} \omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q} + \sum_{k_1, \dots, k_{q-1} \neq 0, 1} g_0^{k_1, \dots, k_{q-1}} \omega_0 \wedge \omega_{k_1} \wedge \dots \wedge \omega_{k_{q-1}} + \\ &+ \sum_{l_1, \dots, l_{q-1} \neq 0, 1} g_1^{l_1, \dots, l_{q-1}} \omega_1 \wedge \omega_{l_1} \wedge \dots \wedge \omega_{l_{q-1}} + \sum_{m_1, \dots, m_{q-2} \neq 0, 1} h^{m_1, \dots, m_{q-2}} \omega_0 \wedge \omega_{m_1} \wedge \dots \wedge \omega_{m_{q-2}}. \end{aligned}$$

Положим  $n = \sum_{i=1}^q n_i$ ,  $k = \sum_{i=1}^{q-1} k_i$ ,  $l = \sum_{i=1}^{q-1} l_i$ ,  $m = \sum_{i=1}^{q-2} m_i$ .

Предположим  $q > 1$  и рассмотрим следующий оператор  $F^q: C_0^q \rightarrow C_0^{q-1}$ :

$$F^q \omega = \sum_{l_1, \dots, l_{q-1} \neq 0, 1} \frac{g_1^{l_1, \dots, l_{q-1}}}{l+1-q} \omega_{l_1} \wedge \dots \wedge \omega_{l_{q-1}} + \sum_{m_1, \dots, m_{q-2} \neq 0, 1} \frac{h^{m_1, \dots, m_{q-2}}}{q-m-2} \omega_0 \wedge \omega_{m_1} \wedge \dots \wedge \omega_{m_{q-2}},$$

если  $q - m - 2 \neq 0$ .  $q - m - 2$  может равняться нулю только в случае  $q = 2$ ,  $m = 0$ , тогда положим

$$F^2 \left( \sum_{n_1, n_2 \neq 0, 1} f^{n_1, n_2} \omega_{n_1} \wedge \omega_{n_2} + \sum_{k \neq 0, 1} g_0^k \omega_0 \wedge \omega_k + \sum_{l \neq 0, 1} g_1^l \omega_1 \wedge \omega_l + h \omega_0 \wedge \omega_1 \right) = \sum_{l \neq 0, 1} \frac{g_1^l}{l-1} \omega_l - \int_0^t h(\tau) d\tau \omega_1.$$



Так как  $h$  — нечетная функция, то ее интеграл по окружности равен 0 и функция  $\int_0^t h(\tau) d\tau$  — периодическая.

Прямыми вычислениями можно показать, что справедливо равенство  $F^{q+1} \circ d^q + d^{q-1} \circ F^q = id_{C_0^q}$ , т. е.  $F$  — оператор гомотопии. Следовательно,  $H^k(C_0^*) = 0$ , при  $k > 1$ .

Рассмотрим случай  $q = 1$ . Тогда форма нашего комплекса будет иметь вид  $\omega = f(t)\omega_n$ . Из формулы для дифференциала видно, что коцепь  $f(t)\omega_n$  не является коциклом при  $n > 1$ .

Пусть  $\omega = f(t)\omega_0$ . Коцепь такого вида является коциклом. Коцепи нулевого порядка — гладкие четные функции на окружности и  $df(X(t)) = -f'(t)X = -f'(t)\omega_0$ . Рассмотрим функцию  $g(t) = -\int_0^t f(\tau) d\tau$ , тогда  $dg = \omega$ , т. е. коцикл  $f(t)\omega_0$  является границей.

Остается случай  $\omega = f\omega_1$ . Дифференциал от такой формы равен нулю только в случае  $f \equiv \text{const}$ . Из формулы для дифференциала нуль-коцепи мы получаем, что форма  $\omega_1$  не является дифференциалом, а следовательно, ее класс когомологий является образующей одномерных когомологий данного комплекса и других образующих при  $q > 0$  нет. При  $q = 0$  циклами являются постоянные функции. Таким образом получаем, что  $H^k(C_0^*) = \mathbb{R}$ , если  $k = 0, 1$ .  $\square$

Рассмотрим теперь комплекс диагональных коцепей с коэффициентами в пространстве 1-форм на  $S_1/Z_2$   $C_1^* = \{C_\Delta^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2), \Omega^1(S_1/Z_2), d^q)\}$ . Любая коцепь  $C_1^q$  представляется в виде

$$\omega = \sum_{n_1, \dots, n_q} f^{n_1 \dots n_q} \omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q} dt,$$

где  $f^{n_1 \dots n_q}$  — функция на окружности, нечетная, если  $n_1 + \dots + n_q - q$  — четно, и четная в противном случае и

$$f^{n_1 \dots n_q} \omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q} dt(X_1, \dots, X_q) = f^{n_1 \dots n_q} \omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q}(X_1, \dots, X_q) dt.$$

Дифференциал вычисляется по формуле

$$d^q(f\omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q} dt) = (d^q(f\omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q}) - f\omega_1 \wedge \omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q}) dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} d^q(f\omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q} dt) &= -\frac{df}{dt} \omega_0 \wedge \omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q} dt + f(n_1 + \dots + n_q - q - 1) \omega_1 \wedge \omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q} dt + \\ &+ f \tilde{d}^q(\omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q}) dt, \quad \text{если } n_1, \dots, n_q \neq 0, \\ d^{q+1}(f\omega_0 \wedge \omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q} dt) &= \\ &= f(q + 1 - n_1 - \dots - n_q) \omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q} dt - f\omega_0 \wedge \tilde{d}^{q+1}(\omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q}) dt. \end{aligned}$$

Справедлива

**Теорема 2.** *Имеют место следующие изоморфизмы:*

$$H^1(C_1^*) = H^2(C_1^*) = \mathbb{R} \quad \text{и} \quad H^k(C_1^*) = 0, \quad \text{при } k \neq 1, 2.$$

Образующей одномерных когомологий является класс коцикла  $\omega_2 dt$ , а двумерных — класс коцикла  $\omega_1 \wedge \omega_2 dt$ .

**Доказательство.** Всякую коцепь нашего комплекса можно представить в виде

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{n_1, \dots, n_q \neq 0, 1} f^{n_1, \dots, n_q} \omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q} dt + \sum_{k_1, \dots, k_{q-1} \neq 0, 1} g_0^{k_1, \dots, k_{q-1}} \omega_0 \wedge \omega_{k_1} \wedge \dots \wedge \omega_{k_{q-1}} dt + \\ &+ \sum_{l_1, \dots, l_{q-1} \neq 0, 1} g_1^{l_1, \dots, l_{q-1}} \omega_1 \wedge \omega_{l_1} \wedge \dots \wedge \omega_{l_{q-1}} dt + \sum_{m_1, \dots, m_{q-2} \neq 0, 1} h^{m_1, \dots, m_{q-2}} \omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \omega_{m_1} \wedge \dots \wedge \omega_{m_{q-2}} dt. \end{aligned}$$

$n, k, l, m$  определяются также как и ранее. Предположим  $q > 1, q - l \neq 0$  и рассмотрим оператор  $F^q: C_1^q \rightarrow C_1^{q-1}$ :

$$F^q \omega = \sum_{l_1, \dots, l_{q-1} \neq 0, 1} \frac{g_1^{l_1, \dots, l_{q-1}}}{q - p} \omega_{l_1} \wedge \dots \wedge \omega_{l_{q-1}} dt + \sum_{m_1, \dots, m_{q-2} \neq 0, 1} \frac{h^{m_1, \dots, m_{q-2}}}{q - m - 1} \omega_0 \wedge \omega_{m_1} \wedge \dots \wedge \omega_{m_{q-2}} dt,$$



если  $m - q + 1 \neq 0$ . Пусть теперь  $m - q + 1 = 0$ . Это возможно только при  $q = 3, m = 2$ , тогда положим

$$F^3 \left( \sum_{n_1, n_2, n_3 \neq 0, 1} f^{n_1, n_2, n_3} \omega_{n_1} \wedge \omega_{n_2} \wedge \omega_{n_3} dt + \sum_{k_1, k_2 \neq 0, 1} g_0^{k_1, k_2} \omega_0 \wedge \omega_{k_1} \wedge \omega_{k_2} dt + \right. \\ \left. + \sum_{l_1, l_2 \neq 0, 1} g_1^{l_1, l_2} \omega_1 \wedge \omega_{l_1} \wedge \omega_{l_2} dt + h \omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 dt \right) = \sum_{l_1, l_2 \neq 0, 1} \frac{g_1^{l_1, l_2}}{l_1 - 2} \omega_{l_1} \wedge \omega_{l_2} dt - \int_0^t h(\tau) d\tau \omega_1 \wedge \omega_2,$$

где  $\int_0^t h(\tau) d\tau$  — периодическая функция, так как  $h$  — нечетная функция.

При  $p - k = 0$  (это возможно только при  $q = k = 2$ ) положим

$$F^2 \left( \sum_{n_1, n_2 \neq 0, 1} f^{n_1, n_2} \omega_{n_1} \wedge \omega_{n_2} dt + \sum g_0 \omega_0 \wedge \omega_2 dt + \sum_{l \neq 0, 1} g_1^l \omega_1 \wedge \omega_l dt + h \omega_0 \wedge \omega_1 dt \right) = \\ = - \int_0^t g_0(\tau) d\tau \omega_2 dt + h \omega_0 dt,$$

где  $\int_0^t g_0(\tau) d\tau$  — периодическая функция, так как  $g_0$  — нечетная функция.

Прямыми вычислениями можно показать, что справедливо равенство  $F^{q+1} \circ d^q + d^{q-1} \circ F^q = id_{C_1^q}$ , и, следовательно,  $F$  — оператор гомотопии.

Пусть теперь  $q = l$ . Это возможно только в том случае, когда  $q = 2, l = 2$ . В этом случае коцепь представляется в виде

$$\omega = \tilde{\omega} + \sum g_1 \omega_1 \wedge \omega_2 dt,$$

где

$$\tilde{\omega} = \sum_{n_1, n_2 \neq 0, 1} f^{n_1, n_2} \omega_{n_1} \wedge \omega_{n_2} dt + \sum_{k \neq 0, 1} g_0^k \omega_0 \wedge \omega_k dt + h \omega_0 \wedge \omega_1 dt.$$

Рассмотрим  $d^2(g_1 \omega_1 \wedge \omega_2 dt) = -\frac{dg_1(t)}{dt} \omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 dt$ . Слагаемое  $\frac{dg_1(t)}{dt} \omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 dt$  в  $d^2\omega$  ни с чем не может сократиться,  $\omega$  будет коциклом, только при  $g_1(t) \equiv \text{const} = c$ . В этом случае

$$d^2\omega = d^2\tilde{\omega}.$$

Для  $\tilde{\omega}$  определен оператор  $F$ , поэтому если  $\omega$  является коциклом, то  $\tilde{\omega}$  — граница. Из формулы для дифференциала 1-коцепи

$$d^1(f\omega_n dt) = \frac{df}{dt} \omega_0 \wedge \omega_n dt + f(2 - n)\omega_1 \wedge \omega_n + f\tilde{d}^1(\omega_n), \quad \text{если } n \neq 0.$$

Видно, что цикл  $\omega_1 \wedge \omega_2 dt$  не может являться границей, т. е. его класс когомологий является образующей двумерных когомологий. Получаем, что  $H^k(C_1^*) = 0$  при  $k > 2$  и  $H^2(C_1^*) = \mathbb{R}$ .

Пусть теперь  $q = 1$ . Тогда любая коцепь может быть записана в виде

$$\omega = f\omega_n dt + g_1 \omega_1 dt + g_0 \omega_0 dt.$$

Рассмотрим

$$d^1\omega = -\frac{df}{dt} \omega_0 \wedge \omega_n dt + f(n - 2)\omega_1 \wedge \omega_n + f\tilde{d}^1(\omega_n) dt - \frac{dg_1}{dt} \omega_0 \wedge \omega_1 dt + g_0 \omega_0 \wedge \omega_1 dt.$$

Откуда видно, что для выполнения равенства  $d^1\omega = 0$  необходимо, чтобы  $g_0 = \frac{dg_1}{dt}, \frac{df}{dt} = 0$ , и либо  $n = 2$ , либо  $f \equiv 0$  ( $f\tilde{d}^1(\omega_n) dt$  в этом случае равняется нулю автоматически). Тогда если  $d\omega = 0$ , то коцепь записывается в виде

$$\omega = c\omega_2 dt + g_1 \omega_1 dt + \frac{dg_1}{dt} \omega_0.$$



Так как дифференциал нуль-мерной коцепи записывается в виде

$$d^0(f dt) = -\frac{df}{dt}\omega_0 dt - f(t)\omega_1 dt,$$

то  $\omega = c\omega_2 dt - d(g_1 dt)$ . Коцикл  $\omega_2 dt$  не является границей нуль-мерной коцепи, и поэтому его класс когомологий является образующей одномерных когомологий. Из формулы для дифференциала нуль-мерных коцепей видно, что только нулевая коцепь является коциклом.

Таким образом, получаем, что  $H^1(C_1^*) = \mathbb{R}$  и  $H^0(C_1^*) = 0$ . □

Обозначим через  $\tilde{d}^q: C_0^q \rightarrow C_1^q$  внешний дифференциал форм на  $S/Z_2$ . В нашем случае он действует по формуле

$$\begin{aligned} \tilde{d}^q(f\omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q})(X_1, \dots, X_q) &= \frac{df}{dt}\omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q}(X_1, \dots, X_q)dt + \\ &+ f\omega_{n_1+1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q}(X_1, \dots, X_q)dt + f\omega_{n_1} \wedge \dots \wedge \omega_{n_q+1}(X_1, \dots, X_q)dt. \end{aligned}$$

Прямым вычислением можно показать, что  $d^q \tilde{d}^q = -\tilde{d}^{q+1} d^q$ . Тогда возникает двойной комплекс  $C^* = \bigoplus_{q,p} C_{\Delta}^q(\mathcal{U}(S/Z_2)), \Omega^p(S/Z_2)$  с полным дифференциалом  $d + \tilde{d}$ . Так как окружность одномерна, то в нашем случае  $p = 0, 1$ .

Справедлива

**Теорема 3.** *Имеют место следующие изоморфизмы:*

$$H^0(C^*) = H^3(C^*) = \mathbb{R} \quad \text{и} \quad H^k(C^*) = 0 \quad \text{при} \quad k \neq 0, 3.$$

Образующей трехмерных когомологий является класс коцикла  $\omega_1 \wedge \omega_2 dt$ .

**Доказательство.** Рассмотрим первую фильтрацию двойного комплекса и соответствующую спектральную последовательность  $E_r^{q,p}$ . Для нее  $E_2^{q,1} = H^q(\tilde{H}^1(C^*)) = H^q((C_1/\tilde{d}C_0)^*)$ , где  $H$  и  $\tilde{H}$  когомологии относительно дифференциалов  $d$  и  $\tilde{d}$  соответственно и  $E_2^{q,p} = 0$  при  $p \neq 1, q > 0$ .

Найдем сначала  $H^q(\tilde{d}C_0^*)$ . Определим для подкомплекса  $\tilde{d}C_0^*$  оператор  $\tilde{F}^q: \tilde{d}C_0^q \rightarrow \tilde{d}C_0^{q-1}$ . Пусть  $c = \tilde{d}^q \omega$ , тогда

$$\tilde{F}^q c = -\tilde{d}^{q-1}(F^q \omega),$$

где  $F$  — оператор гомотопии для  $C_0^*$ . Тогда в силу антикоммутирования дифференциалов и условия того, что  $F$  — оператор гомотопии, следует

$$d^{q-1}(\tilde{F}^q c) + \tilde{F}^{q+1}(d^q c) = c,$$

т. е.  $\tilde{F}$  — оператор гомотопии для  $\tilde{d}C_0^*$ . Образующая  $\omega_1$  одномерных когомологий с коэффициентами в функциях при действии  $\tilde{d}$  перейдет в образующую  $\omega_2 dt$  для  $H^1(\tilde{d}C_0^*)$ . В итоге получаем  $H^1(\tilde{d}C_0^*) = H^1(C_0^*) = \mathbb{R}$ ,  $H^q(\tilde{d}C_0^*) = 0$ , если  $q > 1$ , и  $H^0(\tilde{d}C_0^*) = 0$ , так как в комплексе  $C_1^*$  нет ненулевых нуль-мерных коциклов. Тогда из точной последовательности когомологий для  $C_1^*$ ,  $\tilde{d}C_0^*$  и  $C_1^*/\tilde{d}C_0^*$  получаем, что  $H^3(C^*) = \mathbb{R}$ ,  $H^0(C^*) = H^0(C_0^*) = \mathbb{R}$ ,  $H^k(C^*) = 0$  при  $k \neq 0, 3$ , а образующей трехмерных когомологий является класс коцепи  $\omega_1 \wedge \omega_2 dt$ . □

## 2. КОГОМОЛОГИИ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ В $\mathbb{R}$

Рассмотрим теперь комплекс коцепей  $C^*(\mathcal{U}(S_1/Z_2))$  с коэффициентами в тривиальном модуле  $\mathbb{R}$ . Дифференциал в этом случае задается правилом: если  $L \in C^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2))$ , то

$$dL(X_1, \dots, X_{q+1}) = \sum_{1 \leq i < j \leq q+1} (-1)^{i+j-1} L([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{q+1}).$$

Рассмотрим отображения  $\varphi_0: C_0^q \rightarrow C^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2))$ ,  $\varphi_1: C_0^q \rightarrow C^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2))$ ,  $\psi: C^{q+1} \rightarrow C^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2))$ , которые определяются следующим образом: пусть  $\omega \in C_0^q$ ,  $c \in C^{q+1}$ , тогда

$$\varphi_0(\omega)(X_1, \dots, X_q) = \omega(X_1, \dots, X_q)(0), \quad \varphi_1(\omega)(X_1, \dots, X_q) = \omega(X_1, \dots, X_q)(\pi),$$

$$\psi(c)(X_1, \dots, X_q) = \int_0^\pi c(X_1, \dots, X_q).$$

Можно показать, что эти отображения являются гомоморфизмами комплексов.



Для комплекса  $C^*(\mathcal{U}(S_1/Z_2))$  определяется диагональный подкомплекс. Коцепь  $c \in C^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2))$  принадлежит диагональному подкомплексу, если  $c(X_1, \dots, X_q) = 0$ , когда носители векторных полей  $X_1 \frac{d}{dt}, \dots, X_q \frac{d}{dt}$  имеют пустое пересечение. В одномерном случае полный комплекс и диагональный подкомплекс совпадают. В случае гладкого многообразия когомологии диагонального подкомплекса с коэффициентами в тривиальном модуле  $\mathbb{R}$  получаются из двойного комплекса с помощью гомоморфизма, аналогичного  $\psi$ . В нашем случае это не так. А именно справедлива

**Теорема 4.** *Имеют место следующие изоморфизмы:*

$$H^1(C^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2))) = H^2(C^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2))) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.$$

Образующими одномерных когомологий являются классы коциклов  $\varphi_0(\omega_1)$  и  $\varphi_1(\omega_1)$ , а двумерных — классы коциклов  $\psi(\omega_1 \wedge \omega_2 dt)$  и  $\varphi_0(\omega_1) \wedge \varphi_1(\omega_1)$ .

**Доказательство.** Известно, что подпространство векторных полей, порожденных векторными полями вида  $\sin kt \frac{d}{dt}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , всюду плотно в  $\mathcal{U}(S_1/Z_2)$ .

Поставим в соответствие коцепи  $L \in C^q(\mathcal{U}(S_1/Z_2))$  набор чисел  $\{a_{i_1, \dots, i_q}\}_{i_1, \dots, i_q \in \mathbb{Z}}$ , где  $a_{i_1, \dots, i_q} = L(\sin i_1 t, \dots, \sin i_q t)$ .  $L$  однозначно определяется этим набором. При этом, так как  $a_0 = 0$ , а  $a_{-i} = -a_i$  и в силу кососимметричности коцепи, можно считать, что  $i_1, \dots, i_q \in \mathbb{N}$  и  $i_1 > i_2 > \dots > i_q$ .

Условие  $dL = 0$  можно написать в терминах  $a_{i_1, \dots, i_q}$  следующим образом:

$$\frac{1}{2} \sum_{1 \leq l < k \leq q+1} (-1)^{l+k-1} ((i_l + i_k) a_{i_l - i_k, i_1, \dots, \widehat{i_l}, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_{q+1}} - (i_l - i_k) a_{i_l + i_k, i_1, \dots, \widehat{i_l}, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_{q+1}}) = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим случай  $q = 1$ . Тогда формула (2) будет иметь вид

$$(i_1 + i_2) a_{i_1 - i_2} - (i_1 - i_2) a_{i_1 + i_2} = 0. \quad (3)$$

Если  $i_1 + i_2$  — четное(нечетное) число, то и  $i_1 - i_2$  — четное(нечетное) число. Поэтому уравнения (3) разбиваются на две независимые группы: когда  $i_1 + i_2$  — четно и соответственно нечетно. Пусть  $i_1 = 1$ , тогда (3) примет вид  $(2k + 1) a_1 - a_{2k+1} = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Откуда получаем  $a_{2k+1} = (2k + 1) a_1$ . Аналогично, полагая  $i_1 = 2$ , получаем  $a_{2k} = k a_2$ , где  $k = 2, 3, \dots$ . Таким образом, размерность множества решений системы уравнений (3) не превосходит 2.

Обозначим  $c_1 = \varphi_0(\omega_1)$  и  $c_2 = \varphi_1(\omega_1)$ . Так как  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  — гомоморфизмы комплексов, то  $c_1$  и  $c_2$  являются коциклами. Обозначим  $a_1 = c_1(\sin t)$ ,  $a_2 = c_1(\sin 2t)$ ,  $b_1 = c_2(\sin t)$ ,  $b_2 = c_2(\sin 2t)$ . Из того что

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

следует, что  $c_1$  и  $c_2$  — линейно независимы. Таким образом, получаем  $H^1(C^*(\mathcal{U}(S_1/Z_2))) = \mathbb{R}^2$ .

Рассмотрим теперь случай  $q = 2$ . Тогда формула (2) будет иметь вид

$$(i_1 + i_2) a_{i_1 - i_2, i_3} - (i_1 - i_2) a_{i_1 + i_2, i_3} - (i_1 + i_3) a_{i_1 - i_3, i_2} + (i_1 - i_3) a_{i_1 + i_3, i_2} + (i_2 + i_3) a_{i_2 - i_3, i_1} - (i_2 - i_3) a_{i_2 + i_3, i_1} = 0. \quad (4)$$

Как и в одномерном случае уравнения (4) разбиваются на две независимые группы: 1) когда  $i_1 + i_2 + i_3$  — четное число и 2) когда  $i_1 + i_2 + i_3$  — нечетное число.

Пусть сначала  $i_1 + i_2 + i_3$  — четное число. В этом случае суммы индексов всех  $a_{k, l}$  — четные числа. Условие того, что коцикл  $a_{i_1, i_2}$  является границей, записывается в виде

$$a_{i_1, i_2} = \frac{1}{2} ((i_1 + i_2) a_{i_1 - i_2} - (i_1 - i_2) a_{i_1 + i_2}). \quad (5)$$

Записывая формулу (5) в случае, когда  $i_1 = i_2 + 2$ , получим  $a_{i_1, i_1 - 2} = (i_1 - 1) a_2 - a_{2(i_1 - 1)}$ . Откуда

$$2a_{2(i_1 - 1)} = 2(i_1 - 1) a_2 - a_{i_1, i_1 - 2}. \quad (6)$$



Пусть теперь  $i_1 + i_2 = 2m$ ,  $i_1 - i_2 = 2n$ . Тогда формула (5) примет вид

$$a_{i_1, i_2} = ma_{2n} - na_{2m}. \quad (7)$$

Полагая сначала  $i_1 = m + 1$ , а потом  $i_1 = n + 1$ , из формулы (6) найдем  $2a_{2m}$  и  $2a_{2n}$  и подставим в (7). Тогда получим, что в случае четной суммы индексов условие того, что коцикл является границей, можно записать в виде

$$a_{i_1, i_2} = \frac{i_1 - i_2}{2} a_{\frac{i_1+i_2}{2}+1, \frac{i_1+i_2}{2}-1} - \frac{i_1 + i_2}{2} a_{\frac{i_1-i_2}{2}+1, \frac{i_1-i_2}{2}-1}. \quad (8)$$

Обозначим

$$X_{i_1, i_2} = a_{i_1, i_2} - \frac{i_1 - i_2}{2} a_{\frac{i_1+i_2}{2}+1, \frac{i_1+i_2}{2}-1} - \frac{i_1 + i_2}{2} a_{\frac{i_1-i_2}{2}+1, \frac{i_1-i_2}{2}-1}.$$

Так как любая граница является коциклом, то каждое уравнение системы (4) может быть записано как линейная комбинация уравнений системы (8), т. е. в терминах  $X_{i_1, i_2}$ . При этом  $X_{i_1, i_2}$ , у которых  $i_1 - i_2 = 2$  в уравнения входят не будут,  $X_{i_1, i_1} = 0$ , так как  $a_{i_1, i_1} = 0$ , остальные  $X_{i_1, i_2}$  входят в уравнение с теми же коэффициентами, а нулевое решение соответствует границам.

Из формулы (4) видно, что в каждое уравнение входят  $a_{k, l}$  с суммой индексов  $k + l = i_1 + i_2 + i_3$  и меньше. Из этого следует, что в уравнения, для которых  $i_1 + i_2 + i_3 \leq 2k$ , входит лишь конечное число неизвестных с суммами индексов, не превосходящими  $2k$ . Индукцией по  $i_1 + i_2 + i_3$  покажем, что других решений кроме границ система (4) не имеет.

Пусть сначала  $i_1 + i_2 + i_3 = 6$  — наименьшая возможная сумма при  $i_1 > i_2 > i_3 > 0$ . Такой сумме соответствует единственный случай, когда  $i_1 = 3, i_2 = 2, i_3 = 1$ . Формула (4) будет иметь вид

$$5a_{1,1} - a_{5,1} - 4a_{2,2} + 2a_{4,2} + 3a_{1,3} - a_{3,3} = -a_{5,1} + 2a_{4,2} + 3a_{1,3} = 0,$$

или в терминах  $X_{k_1, k_2}$ :

$$-X_{5,1} = 0.$$

Предположим, что все  $X_{k_1, k_2}$ , входящие в уравнения, при  $k_1 + k_2 < 2m$  равны нулю. И пусть теперь  $i_1 + i_2 + i_3 = 2m$ . Записывая формулу (4) для случаев  $i_1 = m + l - 1, i_2 = m - l, i_3 = 1$ , где  $l = \overline{1, m-2}$ , и используя предположение индукции, получим, что

$$X_{m+2, m-2} = X_{m+3, m-3} = \dots = X_{m+(m-2), m-(m-2)} = X_{m+(m-2), m-(m-2)} = 0,$$

т. е.  $X_{k, l}$ , входящие в уравнения с суммой индексов равной  $2m$ , равны нулю — индукция завершена. Получаем, что в случае четной суммы индексов других решений уравнений (4) кроме границ нет.

Рассмотрим теперь случай, когда  $i_1 + i_2 + i_3$  — нечетное число.

Запишем условие того, что коцикл  $a_{i_1, i_2}$  является границей (формула (5)) для случая  $i_2 = i_1 - 1$ :  $a_{i_1, i_1-1} = \frac{1}{2}((2i_1 - 1)a_1 - a_{2i_1-1})$ . Откуда

$$a_{2i_1-1} = (2i_1 - 1)a_1 - 2a_{i_1, i_1-1}. \quad (9)$$

Запишем формулу (5) для случая нечетной суммы индексов или  $i_1 = 2k + 1, i_2 = 2l$ :

$$a_{2k+1, 2l} = \frac{1}{2}((2(k+l) + 1)a_{2(k-l)+1} - (2(k-l) + 1)a_{2(k+l)+1}). \quad (10)$$

Полагая сначала  $i_1 = k - l + 1$ , а затем  $i_1 = k + l + 1$ , найдем  $a_{2(k-l)+1}$  и  $a_{2(k+l)+1}$  из формулы (9) и подставим в (10). Полученное условие того, что коцикл является границей, запишем в виде

$$a_{2k+1, 2l} = (2(k-l) + 1)a_{k+l+1, k+l} - (2(k+l) + 1)a_{k-l+1, k-l}. \quad (11)$$

Обозначим  $X_{2k+1, 2l} = a_{2k+1, 2l} - (2(k-l) + 1)a_{k+l+1, k+l} - (2(k+l) + 1)a_{k-l+1, k-l}$ .



Аналогично четному случаю условие коцикла (формула (4)) может быть записано в терминах  $X_{2k+1, 2l}$ . При этом  $X_{i_1, i_1-1}$  в уравнения входят не будут. А границам соответствует нулевое решение.

Индукцией по сумме  $i_1 + i_2 + i_3$  покажем, что все  $X_{2k+1, 2l}$  можно выразить через  $X_{5, 2}$  и  $X_{1, 4}$ . Рассмотрим формулу (4) для случая  $i_1 = 4, i_2 = 2, i_3 = 1$ . Она будет иметь вид

$$6a_{2, 1} - 2a_{6, 1} - 5a_{3, 2} + 3a_{5, 2} + 3a_{1, 4} - a_{3, 4} = 0,$$

или в терминах  $X_{k, l}$ :

$$-2X_{6, 1} + 3X_{5, 2} + 3X_{1, 4} = 0.$$

Откуда получаем

$$X_{6, 1} = \frac{1}{2}(3X_{5, 2} + 3X_{1, 4}).$$

Предположим, что все  $X_{k_1, k_2}$ , у которых  $k_1 + k_2 < 2m + 1$ ,  $m > 3$ , выражаются через  $X_{5, 2}$  и  $X_{1, 4}$ . Пусть  $i_1 + i_2 + i_3 = 2m + 1$ . Записывая формулу (4) для  $i_1 = m + l, i_2 = m - l, i_3 = 1$ , где  $1 \leq l \leq m - 2$ , получим, что все  $X_{k_1, k_2}$  с суммой индексов  $k_1 + k_2 = 2m + 1$  можно выразить через  $X_{m+2, m-1}$ ,  $X_{5, 2}$  и  $X_{1, 4}$ .

Записывая формулу (4) для  $i_1 = m, i_2 = m - 1, i_3 = 2$ , получим, что и  $X_{m+2, m-1}$  выражается через  $X_{5, 2}$  и  $X_{1, 4}$ , т. е. мы получили, что все  $X_{k_1, k_2}$  с суммой индексов, равной  $2m + 1$ , выражаются через  $X_{5, 2}$  и  $X_{1, 4}$ , индукция завершена.

В итоге мы получаем, что размерность множества решений системы в терминах  $X_{k_1, k_2}$  не превосходит двух, т. е. не может быть больше двух независимых коциклов, не являющихся границами.

Рассмотрим коцепи  $\alpha$  и  $\beta$ , определяющиеся следующим образом:  $\alpha = c_1 \wedge c_2$ ,  $\beta = \psi(\omega_1 \wedge \omega_2 dt)$ ,  $\alpha$  является коциклом как внешнее произведение коциклов,  $\beta$  также является коциклом, так как  $\psi$  — гомоморфизм комплексов.

Пусть  $a_{i_1, i_2} = \alpha(\sin i_1 t, \sin i_2 t)$ . Если  $i_1 + i_2$  — четно, то  $a_{i_1, i_2} = 0$ , и  $a_{2k+1, 2l} = 2(2k + 1)2l$ ,  $a_{2k, 2l+1} = -2(2l + 1)2k$ . Тогда  $X_{5, 2} = a_{5, 2} - 3a_{4, 3} + 7a_{2, 1} \neq 0$ ,  $X_{4, 1} = a_{4, 1} - 3a_{3, 2} + 5a_{2, 1} \neq 0$ . Откуда следует, что коцикл  $\alpha$  не является границей.

Пусть  $b_{i_1, i_2} = \beta(\sin i_1 t, \sin i_2 t)$ . Если  $i_1 = 0, i_2 = 0$  или  $i_1 + i_2$  — четное число, то  $b_{i_1, i_2} = 0$ . В остальных случаях  $b_{i_1, i_2} = 2 \frac{i_1^3 i_2 + i_1 i_2^3}{i_1^2 - i_2^2}$ . Тогда  $Y_{5, 2} = b_{5, 2} - 3b_{4, 3} + 7b_{2, 1} \neq 0$ ,  $Y_{4, 1} = b_{4, 1} - 3b_{3, 2} + 5b_{2, 1} \neq 0$ , откуда следует, что коцикл  $\beta$  не является границей. А из того, что

$$\begin{vmatrix} X_{5, 2} & X_{4, 1} \\ Y_{5, 2} & Y_{4, 1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

следует, что  $\alpha$  с  $\beta$  определяют разные классы когомологий. Таким образом, мы получили, что  $H^2(C^*(\mathcal{U}(S_1/Z_2))) = \mathbb{R}^2$  с образующими классами коциклов  $\alpha$  и  $\beta$ .  $\square$

Можно предположить, что найденные классы когомологий являются образующими алгебры когомологий с коэффициентами в  $\mathbb{R}$ .

В заключение автор выражает благодарность М. В. Лосику за поставленную задачу и помощь в работе.

### Библиографический список

1. Гельфанд И. М., Фукс Д. Б. Когомологии алгебры Ли векторных полей на окружности // Функц. анализ и его прил. 1968. Т. 2, вып. 4. С. 92–93.
2. Гельфанд И. М., Фукс Д. Б. Когомологии алгебры Ли касательных векторных полей гладкого многообразия // Функц. анализ и его прил. 1969. Т. 3, вып. 3. С. 32–52.
3. Решетников В. Н. О когомологиях двух алгебр Ли векторных полей на окружности // УМН. 1971. Т. 26, вып. 1(157). С. 231–232.



УДК 514.764

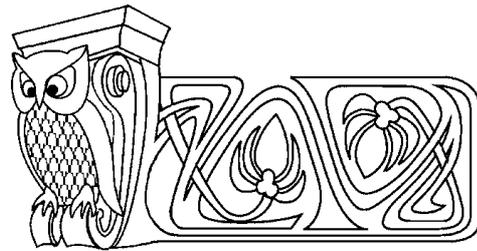
## ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

С. В. Галаев

Саратовский государственный университет,  
кафедра геометрии  
E-mail: sgalaev@mail.ru

В работе вводится понятие внутренней геометрии многообразия почти контактной метрической структуры. В терминах внутренней геометрии дается описание некоторых классов пространств с почти контактной метрической структурой. Вводится новый тип почти контактных метрических пространств — эрмитовых почти контактных метрических пространств.

**Ключевые слова:** почти контактное многообразие, многообразие Сасаки,  $K$ -контактное многообразие, внутренняя геометрия почти контактного метрического многообразия.



### The Intrinsic Geometry of Almost Contact Metric Manifolds

S. V. Galaev

Saratov State University,  
Chair of Geometry  
E-mail: sgalaev@mail.ru

In this paper the notion of the intrinsic geometry of an almost contact metric manifold is introduced. Description of some classes of spaces with almost contact metric structures in terms of the intrinsic geometry is given. A new type of almost contact metric spaces, more precisely, Hermitian almost contact metric spaces, is introduced.

**Key words:** almost contact manifold, Sasakian manifold,  $K$ -contact manifold, the intrinsic geometry of almost contact metric manifolds.

### ВВЕДЕНИЕ

Исследование геометрии многообразий почти контактной метрической структуры начинается с выходом основополагающих работ Chern Shiing-Shen [1], J. W. Gray [2], S. Sasaki [3]. Почти контактные метрические структуры являются нечетномерным аналогом почти эрмитовых структур, и между этими классами структур существует ряд важных взаимосвязей. В то же время геометрия почти контактных метрических структур существенно отличается от геометрии почти эрмитовых структур и требует принципиально новых средств изучения. Достаточно полно результаты, полученные в этой области до 1976 года, отражены в книге [4]. Большой вклад в развитие геометрии почти контактных метрических пространств внесли В. Ф. Кириченко и его ученики (см., например, [5, 6]). Получить представление о последних достижениях в этой области, а также о приложениях геометрии почти контактных метрических структур к теоретической физике, можно по работам [7, 8].

В настоящей работе вводится понятие внутренней геометрии многообразия почти контактной метрической структуры. В терминологии В. В. Вагнера многообразие почти контактной метрической структуры является неголономным многообразием коразмерности 1 с дополнительными, называемыми им внутренними, структурами. Понятие внутренней геометрии неголономного многообразия было определено Схоутеном как совокупности тех свойств, которые зависят только от параллельного перенесения внутри самого неголономного многообразия и от его оснащения в объемлющем пространстве. Вагнер пишет: «Схоутен показывает возможность непосредственного построения внутренней геометрии неголономного многообразия без использования параллельного перенесения во внешнем пространстве. В случае метрического неголономного многообразия внутренняя геометрия определяется заданием его оснащения и метрики внутри локальных касательных пространств» [9]. Развивая внутреннюю геометрию неголономного многообразия, Вагнер определяет и исследует свойства тензора кривизны неголономного многообразия, обобщающего тензор кривизны Схоутена. Тензор кривизны, названный позже тензором кривизны Вагнера, строится им сначала для неголономного метрического многообразия произвольной коразмерности [9], а затем уточняется для случая неголономного многообразия коразмерности 1 с внутренней линейной связностью [10]. Построенная Вагнером теория кривизны неголономного многообразия использовалась им для решения задач классической механики и вариационного исчисления.

В данной статье предлагается использовать методы неголономной геометрии, разработанные В. В. Вагнером, для исследования геометрии многообразий с почти контактной метрической структурой. Новый подход позволяет выделить новые типы пространств. Так, например, в работе дано определение эрмитова почти контактного метрического пространства. Известные уже результаты получают



новое описание на языке внутренней геометрии. Следуя идеологии, заложенной в работах Схоутена и Вагнера, мы определяем внутреннюю геометрию почти контактного метрического пространства  $X$  как совокупность тех свойств, которыми обладают: гладкое распределение  $D$ , задаваемое контактной формой  $\eta$ ; допустимое поле аффинора  $\varphi$  (называемое нами допустимой почти комплексной структурой) такое, что  $\varphi^2 = -1$ ; поле допустимых тензоров римановой метрики  $g$ , связанное с допустимой почти комплексной структурой равенством  $g(\varphi\vec{X}, \varphi\vec{Y}) = g(\vec{X}, \vec{Y})$ , где  $\vec{X}, \vec{Y}$  — допустимые векторные поля. К объектам внутренней геометрии почти контактного метрического пространства следует отнести и те объекты, которые являются производными от уже указанных внутренних структур: кососимметрическая 2-форма  $\omega = d\eta$ ; векторное поле  $\vec{\xi}$ , называемое полем Роба, описывающее оснащение распределения  $D - \vec{\xi} \in D^\perp$  и однозначно определяемое равенствами  $\eta(\vec{\xi}) = 1$ ,  $\ker \omega = \text{Span}(\vec{\xi})$  в случае, когда форма  $\omega$  имеет максимальный ранг; внутренняя связность  $\nabla$ , осуществляющая параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых и однозначно определяемая полем  $g$ ; связность  $\nabla^1$ , являющаяся естественным продолжением связности  $\nabla$  и осуществляющая параллельный перенос допустимых векторов вдоль произвольных кривых многообразия  $X$ .

Работа состоит из двух частей. В первой части излагаются основные понятия теории многообразий с почти контактной метрической структурой. Вводится понятие адаптированной системы координат. Адаптированные координаты играют в геометрии неголономных многообразий ту же роль, что и голономные координаты на голономном многообразии (см., например [10]). Адаптированные координаты существенно используются в геометрии слоений [11].

Далее вводится понятие допустимой (к распределению  $D$ ) тензорной структуры. Допустимая тензорная структура является объектом внутренней геометрии неголономного многообразия [10]. В работах по геометрии расслоенных пространств допустимые тензорные структуры называются полубазисными. Сообщаются некоторые сведения о внутренних связностях, совместимых с допустимыми тензорными структурами. Наряду со связностью, совместимой с допустимой римановой метрикой, изучаются связности, совместимые с допустимой почти комплексной структурой. Обсуждается понятие связности над распределением, введенное в работах [12, 13] и используемое затем применительно к неголономному многообразию с допустимой финслеровой метрикой в работах [14, 15]. Во второй части в терминах внутренней геометрии излагаются некоторые из основных положений геометрии почти контактных метрических пространств. Доказывается, что определяемая внутренним образом почти контактная метрическая структура соответствует некоторой почти контактной метрической структуре, определяемой обычным образом. Введенная ранее внутренняя связность используется для описания характеристик нормальных и сасакиевых структур.

## 1. ДОПУСТИМЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ СТРУКТУРЫ И СОВМЕСТИМЫЕ С НИМИ ВНУТРЕННИЕ СВЯЗНОСТИ

Пусть  $X$  — гладкое многообразие нечетной размерности  $n$ ,  $\Xi(X)$  —  $C^\infty(X)$ -модуль гладких векторных полей на  $X$ ,  $d$  — оператор внешнего дифференцирования. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса  $C^\infty$ . Для упрощения изложения тензорное поле в дальнейшем иногда называется тензором. Почти контактной метрической структурой на  $X$  называется совокупность  $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$  тензорных полей на  $X$ , где  $\varphi$  — тензор типа  $(1, 1)$ , называемый структурным эндоморфизмом,  $\vec{\xi}$  и  $\eta$  — вектор и ковектор, называемые соответственно структурным вектором и контактной формой,  $g$  — (псевдо) риманова метрика. При этом

$$\eta(\vec{\xi}) = 1, \varphi(\vec{\xi}) = 0, \eta \circ \varphi = 0, \varphi^2 \vec{X} = -\vec{X} + \eta(\vec{X})\vec{\xi}, g(\varphi\vec{X}, \varphi\vec{Y}) = g(\vec{X}, \vec{Y}) - \eta(\vec{X})\eta(\vec{Y}),$$

$\vec{X}, \vec{Y} \in \Xi(X)$ . Легко проверить, что тензор  $\Omega(\vec{X}, \vec{Y}) = g(\vec{X}, \varphi\vec{Y})$  кососимметричен. Он называется фундаментальной формой структуры. Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется почти контактным метрическим многообразием. В случае, когда  $\Omega = d\eta$ , почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой. Почти контактная метрическая структура называется нормальной, если  $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$ , где  $N_\varphi$  — кручение Нейенхайса, образованное тензором  $\varphi$ . Нормальная контактная метрическая структура называется сасакиевой структурой. Многообразие с заданной на нем сасакиевой структурой называется сасакиевым многообразием. Пусть  $D$  — гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой  $\eta$ ,  $D^\perp = \text{Span}(\vec{\xi})$  — его оснащение. В дальнейшем будем полагать, что ограничение формы  $\omega = d\eta$



на распределении  $D$  является невырожденной формой. В этом случае вектор  $\vec{\xi}$  однозначно определяется из условий  $\eta(\vec{\xi}) = 1$ ,  $\ker \omega = \text{Span}(\vec{\xi})$  и называется вектором Роба. Гладкое распределение  $D$  мы иногда будем называть неголономным многообразием.

Для исследования внутренней геометрии неголономного многообразия и вообще для изучения почти контактных метрических структур удобно использовать карты, обладающие дополнительными свойствами. Карту  $K(x^\alpha)$  ( $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$ ) ( $a, b, c, e = 1, \dots, n-1$ ) на многообразии  $X$  будем называть адаптированной к неголономному многообразию  $D$ , если  $D^\perp = \text{Span}\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ . Нетрудно установить, что любые две адаптированные карты связаны между собой преобразованиями вида:  $x^a = x^a(x^{\bar{a}})$ ,  $x^n = x^n(x^{\bar{a}}, x^{\bar{n}})$ . Такие системы координат называются Вагнером в работе [10] градиентными. Адаптированные карты находят применение в теории слоений (см., например [7]).

Пусть  $P : TX \rightarrow D$  — проектор, определяемый разложением  $TX = D \oplus D^\perp$ , и  $K(x^\alpha)$  — адаптированная карта. Векторные поля  $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$  линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему  $D$ :  $D = \text{Span}(\vec{e}_a)$ . Таким образом, мы имеем на многообразии  $X$  неголономное поле базисов  $(\vec{e}_a, \partial_n)$  и соответствующее ему поле кобазисов  $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$ . Непосредственно проверяется, что  $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = M_{ab}^n \partial_n$ , где компоненты  $M_{ab}^n$  образуют так называемый тензор неголономности [10]. Если потребовать, чтобы для всех адаптированных координат выполнялось равенство  $\vec{\xi} = \partial_n$ , то окажется справедливым равенство  $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n$ , где  $\omega = d\eta$ . В дальнейшем ограничимся рассмотрением исключительно адаптированных координат с условием  $\vec{\xi} = \partial_n$ . Адаптированным будем называть также базис  $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$  как базис, определяемый адаптированной картой. При преобразовании адаптированной системы координат векторы адаптированного базиса преобразуются следующим образом:  $\vec{e}_a = \frac{\partial x^{\bar{a}}}{\partial x^a} \vec{e}_{\bar{a}}$ .

Тензорное поле, заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению  $D$ ), если оно обращается в нуль каждый раз, когда его векторный аргумент принадлежит оснащению  $D^\perp$ , а ковекторный аргумент коллинеарен форме  $\eta$ . Координатное представление допустимого тензорного поля типа  $(p, q)$  в адаптированной карте имеет вид

$$t = t_{b_1, \dots, b_q}^{a_1, \dots, a_p} \vec{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}.$$

Так, в частности, под допустимым векторным полем будем понимать такое векторное поле, все значения которого лежат в распределении  $D$ , а под допустимой 1-формой будем понимать всякую 1-форму, обращающуюся в нуль на оснащении  $D^\perp$ . Понятно, что всякая тензорная структура, заданная на многообразии  $X$ , определяет на нем единственную допустимую тензорную структуру того же типа. Из определения почти контактной структуры следует, что аффинор  $\varphi$  является допустимым тензорным полем типа  $(1, 1)$ . Поле аффинора  $\varphi$  мы называем допустимой почти комплексной структурой. Форма  $\omega = d\eta$  также является допустимым тензорным полем. В геометрии расслоенных пространств допустимое тензорное поле называется полубазисным.

**Теорема 1.** Производные  $\partial_n t$  от компонент допустимого тензорного поля  $t$  в адаптированной системе координат являются компонентами допустимого тензорного поля того же типа.

Справедливость теоремы следует из того, что компоненты допустимого тензорного поля при преобразовании адаптированных координат преобразуются по закону  $t_{b_1, \dots, b_q}^{a_1, \dots, a_p} = t_{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_q}^{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_p} A_{\bar{a}_1}^{a_1} \dots A_{\bar{b}_1}^{b_1}$ , где

$$A_{\bar{a}_i}^{a_i} = \frac{\partial x^{a_i}}{\partial x^{\bar{a}_i}}.$$

Инвариантный характер сформулированного утверждения заключается в равенстве:  $L_{\vec{\xi}} t_{b_1, \dots, b_q}^{a_1, \dots, a_p} = \partial_n t_{b_1, \dots, b_q}^{a_1, \dots, a_p}$ , где  $L_{\vec{\xi}}$  — оператор дифференцирования Ли вдоль поля  $\vec{\xi}$ .

Назовем допустимое тензорное поле интегрируемым, если найдется такой атлас адаптированных карт, что в каждой из карт этого атласа компоненты поля постоянны. Из теоремы 1 немедленно получаем, что необходимым условием интегрируемости допустимого поля  $t$  является обращение в нуль производных  $\partial_n t$ . Назовем допустимую тензорную структуру  $t$  квазиинтегрируемой, если в адаптированных координатах выполняется равенство  $\partial_n t = 0$ . Форма  $\omega = d\eta$  является важным примером интегрируемой допустимой тензорной структуры. Введем в рассмотрение тензор  $\tilde{N}_\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = (P \circ N_\varphi)(\vec{X}, \vec{Y})$ , где  $\vec{X}, \vec{Y} \in \Xi(X)$ . Следующие две теоремы указывают на важность только что данных определений.



**Теорема 2.** *Аффинорная структура  $\varphi$  интегрируема тогда и только тогда, когда имеет место равенство  $\tilde{N}_\varphi = 0$ .*

**Доказательство.** *Необходимость.* Выражение для кручения Нейенхейса

$$N_\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = [\varphi\vec{X}, \varphi\vec{Y}] + \varphi^2[\vec{X}\vec{Y}] - \varphi[\varphi\vec{X}, \vec{Y}] - \varphi[\vec{X}, \varphi\vec{Y}]$$

тензора  $\varphi$  в адаптированных координатах имеет следующий вид:

$$N_{ab}^e = \varphi_a^c \vec{e}_c \varphi_b^e - \varphi_b^d \vec{e}_d \varphi_a^e + \varphi_c^e \vec{e}_b \varphi_a^c - \varphi_d^e \vec{e}_a \varphi_b^d, \quad (1)$$

$$N_{ab}^n = 2\varphi_a^c \varphi_b^d \omega_{dc}, \quad (2)$$

$$N_{na}^e = -\varphi_c^e \partial_n \varphi_a^c, \quad (3)$$

$$N_{na}^n = 0, \quad (4)$$

$$N_{nn}^a = 0. \quad (5)$$

Если структура  $\varphi$  интегрируема, то из (1)–(5) следует, что

$$N_\varphi(\vec{e}_a, \vec{e}_b) = \varphi_a^c \varphi_b^d M_{cd}^n \partial_n, \quad N_\varphi(\partial_n, \vec{e}_a) = -(\partial_n \varphi_b^c) \varphi_c^a \vec{e}_a.$$

Из последних равенств непосредственно следует, что  $\tilde{N}_\varphi = 0$ .

*Достаточность.* Пусть теперь  $\tilde{N}_\varphi = 0$ . Рассмотрим достаточно малую окрестность  $U$  произвольной точки многообразия  $X$ . При этом полагаем, что  $U = U_1 \times U_2$ ,  $TU = \text{Span}(\partial_a) \oplus \text{Span}(\partial_n)$ . Введем естественное обозначение:  $T(U_1) = \text{Span}(\partial_a)$ . Определим над множеством  $U$  изоморфизм расслоений  $\psi : D \rightarrow T(U_1)$  формулой  $\psi(\vec{e}_a) = \partial_a$ . Веденный изоморфизм индуцирует почти комплексную структуру на многообразии  $U_1$ , которая интегрируема в силу равенства  $\tilde{N}_\varphi = 0$ . Действительно, из (3) следует, что правая часть (1) совпадает с кручением почти комплексной структуры, индуцируемой на многообразии  $U_1$ . Выбирая подходящую систему координат на  $U_1$  и, следовательно, подходящую адаптированную систему координат на многообразии  $X$ , получаем карту, в которой компоненты аффинора  $\varphi$  постоянны.  $\square$

**Теорема 3.** *Почти контактная метрическая структура является нормальной тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:  $\tilde{N}_\varphi = 0$ ,  $\omega(\varphi\vec{u}, \varphi\vec{v}) = \omega(\vec{u}, \vec{v})$ .*

**Доказательство.** Используя координатные представления (1)–(5), замечаем, что условие  $N_\varphi + 2d\eta \otimes \xi = 0$  эквивалентно следующей системе равенств:

$$\varphi_a^c \vec{e}_c \varphi_b^e - \varphi_b^d \vec{e}_d \varphi_a^e + \varphi_c^e \vec{e}_b \varphi_a^c - \varphi_d^e \vec{e}_a \varphi_b^d = 0, \quad -\varphi_c^e \partial_n \varphi_a^c = 0, \quad 2\varphi_a^c \varphi_b^d \omega_{dc} = 2\omega_{ba}, \quad (6)$$

что и доказывает теорему.  $\square$

Следующее утверждение указывает на целесообразность введения таких понятий, как адаптированная система координат и интегрируемость допустимого тензорного поля.

**Теорема 4.** *Контактная метрическая структура является нормальной тогда и только тогда, когда аффинорная структура  $\varphi$  интегрируема.*

**Доказательство.** Справедливость утверждения следует из того, что для контактной метрической структуры условие  $N_\varphi + 2d\eta \otimes \xi = 0$  эквивалентно равенству  $\tilde{N}_\varphi = 0$ , так как условие (6), записываемое в безкоординатном виде  $\omega(\varphi\vec{u}, \varphi\vec{v}) = \omega(\vec{u}, \vec{v})$ , выполняется автоматически в силу определения контактной метрической структуры.  $\square$

Теорема 4 подтверждает важность введения в рассмотрение нового типа почти контактных метрических пространств. А именно почти контактное метрическое пространство назовем *эрмитовым почти контактным метрическим пространством*, если выполняется условие  $\tilde{N}_\varphi = 0$ .

Под внутренней линейной связностью в неголономном многообразии  $D$  [10] понимается отображение  $\nabla : \Gamma D \times \Gamma D \rightarrow \Gamma D$ , удовлетворяющее следующим условиям: 1)  $\nabla_{f_1 \vec{u}_1 + f_2 \vec{u}_2} = f_1 \nabla_{\vec{u}_1} + f_2 \nabla_{\vec{u}_2}$ ; 2)  $\nabla_{\vec{u}} f \vec{v} = f \nabla_{\vec{u}} \vec{v} + (\vec{u}f) \vec{v}$ , где  $\Gamma D$  — модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определяются из соотношения  $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c \vec{e}_c$ .

Кручение внутренней линейной связности  $S$  по определению полагается равным

$$S(\vec{X}, \vec{Y}) = \nabla_{\vec{X}} \vec{Y} - \nabla_{\vec{Y}} \vec{X} - P[\vec{X}, \vec{Y}].$$



Таким образом, в адаптированных координатах мы имеем  $S_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c$ . Перейдем к определению связности над распределением  $D$ . Введем в рассмотрение векторное расслоение  $(D, \pi, X)$ , тотальное пространство которого совпадает с распределением  $D$ .

Для того чтобы задать связность над распределением  $D$ , необходимо предварительно ввести на  $D$  структуру гладкого многообразия, которая задается следующим образом. Каждой адаптированной карте  $K(x^\alpha)$  на многообразии  $X$  ставится в соответствие карта  $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+\alpha})$  на многообразии  $D$ , где  $x^{n+\alpha}$  — координаты допустимого вектора в базисе  $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ .

Понятие *связности над распределением*, введенное в работах [12, 13], использовалось затем применительно к неголономному многообразию с допустимой финслеровой метрикой, в работах [14, 15]. Говорят, что над распределением  $D$  задана связность, если распределение  $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$ , где  $\pi : D \rightarrow X$  — естественная проекция, разбивается в прямую сумму вида  $\tilde{D} = HD \oplus VD$ , где  $VD$  — вертикальное распределение на тотальном пространстве  $D$ . Таким образом, задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта  $G_b^a(X^a, X^{n+a})$  такого, что  $HD = \text{Span}(\vec{e}_a)$ , где  $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$ .

Обычным образом проверяется, что связность над распределением  $D$  совпадает с линейной связностью в неголономном многообразии  $D$ , если имеют место равенство  $G_b^a(x^a, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^a)x^{n+c}$ . В работе [15] было введено понятие продолженной связности. Продолженная связность получается из внутренней связности с помощью равенства  $TD = \tilde{H}D \oplus VD$ , где  $HD \subset \tilde{H}D$ . По существу, продолженная связность является связностью в векторном расслоении.

Важнейший пример многообразия с допустимой тензорной структурой и совместимой с ней внутренней связностью рассмотрен В. В. Вагнером в работе [10]. В этой работе в неголономном многообразии вводится внутренняя метрика с помощью допустимого тензорного поля  $g$ , удовлетворяющего обычным свойствам метрического тензора в римановом пространстве.

Так же как и в голономном случае, введение метрики в неголономном многообразии определяет там внутреннюю линейную симметричную связность, коэффициенты которой определяются из системы уравнений:

$$\nabla_c g_{ab} = \vec{e}_c g_{ab} - \Gamma_{ca}^d g_{db} - \Gamma_{cb}^d g_{ad}.$$

Рассмотрим допустимую почти комплексную структуру  $\varphi$ . В дальнейшем нами будет использоваться утверждение, доказательство которого основано на идеях, используемых при доказательстве теоремы 3.4 [16, гл. 9]. А именно справедлива

**Теорема 5.** *Каждое неголономное многообразие с почти комплексной структурой  $\varphi$  и внутренней линейной связностью  $\nabla$  без кручения допускает внутреннюю линейную связность  $\tilde{\nabla}$ , совместимую со структурой  $\varphi$  и имеющую кручение  $S$  такое, что:*

$$S(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{4} \tilde{N}_\varphi(\vec{u}, \vec{v}),$$

где  $\vec{u}, \vec{v} \in \Gamma(D)$ .

Идея доказательства сводится к следующему определению связности  $\tilde{\nabla}$ :

$$\tilde{\nabla}_{\vec{u}} \vec{v} = \nabla_{\vec{u}} \vec{v} - Q(\vec{u}, \vec{v}), \tag{7}$$

где  $Q$  специальным образом конструируется с помощью  $\nabla$  и  $\varphi$  [16, с. 137].

## 2. ВНУТРЕННИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Введем понятие почти контактной метрической структуры в новом смысле. А именно будем говорить, что дано многообразие почти контактной метрической структуры в новом смысле, если на многообразии  $X$  с заданной на нем контактной формой  $\eta$  дополнительно задана пара допустимых тензорных структур  $(\varphi, g)$  такая, что  $\varphi^2 \vec{u} = -\vec{u}$ ,  $g(\varphi \vec{u}, \varphi \vec{v}) = g(\vec{u}, \vec{v})$ .

**Теорема 6.** *Задание многообразия почти контактной метрической структуры в новом смысле эквивалентно заданию многообразия почти контактной метрической структуры в старом смысле.*

**Доказательство.** Предположим, что на многообразии  $X$  задана почти контактная метрическая структура в новом смысле. Введем на многообразии  $X$  поле тензоров  $\tilde{g}$  римановой метрики, полагая



по определению:  $\tilde{g}(\vec{u}, \vec{v}) = g(\vec{u}, \vec{v})$ , где  $\vec{u}, \vec{v} \in \Gamma D$ ,  $\tilde{g}(\vec{u}, \vec{\xi}) = 0$ ,  $\tilde{g}(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = 1$ . Справедливость необходимых условий для аффинора  $\varphi$  и формы  $\tilde{g}$  устанавливается непосредственно.  $\square$

Будем говорить, что дано сасакиево многообразие в новом смысле, если на многообразии  $X$  с заданной на нем контактной метрической структурой дополнительно предполагается выполнение следующего условия:  $\tilde{N}_\varphi = 0$ . Теоремы 3 и 6 влекут справедливость следующего утверждения.

**Теорема 7.** *Задание сасакиево многообразия в новом смысле эквивалентно заданию сасакиево многообразия в старом смысле.*

Будем придерживаться следующих обозначений:  $\varphi$  и  $g$  — допустимые почти комплексная и риманова метрики соответственно,  $\nabla$  — внутренняя метрическая связность,  $\tilde{g}$  и  $\tilde{\nabla}$  — метрический тензор в объемлющем пространстве и его связность Леви – Чивита соответственно.

**Теорема 8.** *Контактная метрическая структура является нормальной тогда и только тогда, когда структура  $\varphi$  квазиинтегрируема и выполняется равенство  $\nabla\varphi = 0$ , где  $\nabla$  — внутренняя метрическая связность.*

**Доказательство. Необходимость.** Из теоремы 3 следует, что  $\tilde{N}_\varphi = 0$  и, следовательно, аффинорная структура  $\varphi$  квазиинтегрируема. Кроме того, конструируя из метрической связности новую связность, для которой  $S(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{4}\tilde{N}_\varphi(\vec{u}, \vec{v})$ ,  $\vec{u}, \vec{v} \in \Gamma(D)$ , убеждаемся в справедливости второго условия.

**Достаточность.** Из равенства (7) следует, что в нашем случае  $Q(\vec{u}, \vec{v}) = 0$  и  $\tilde{N}_\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ . Учитывая, что структура  $\varphi$  квазиинтегрируема, убеждаемся в справедливости теоремы.  $\square$

Заметим, что равенство  $\nabla\varphi = 0$  оказывается неверным, если связность  $\nabla$  и аффинорная структура  $\varphi$  рассматриваются как структуры, заданные на всем многообразии (см., например [7]).

Пусть, далее,  $\nabla^1$  — продолженная связность, конструируемая из внутренней связности следующим образом:  $\tilde{H}D = HD \oplus \text{Span}(\partial_n)$  (здесь  $\partial_n$  — векторное поле на многообразии  $D$ ). Продолженная связность позволяет сформулировать следующий характеристический признак интегрируемости почти комплексной структуры  $\varphi$ .

**Теорема 9.** *Почти комплексная структура  $\varphi$  интегрируема тогда и только тогда, когда выполняется равенство  $\nabla^1\varphi = 0$ .*

В заключение работы сформулируем утверждение, касающееся  $K$ -контактных многообразий.

**Теорема 10.** *Почти контактная метрическая структура является  $K$ -контактной структурой тогда и только тогда, когда форма  $g$  квазиинтегрируема.*

Справедливость теоремы следует из следующей цепочки эквивалентностей:

$$L_{\vec{\xi}}\tilde{g} = 0 \Leftrightarrow L_{\vec{\xi}}g = 0 \Leftrightarrow \partial_n g = 0.$$

## Библиографический список

1. Chern S. S Pseudogroupes continus infinis // Colloques Intern. Centre Nat. Rech. Sci. 1953. Vol. 52. P. 119–136.
2. Gray J. W. Some global properties of contact structures // Ann. of Math. 1959. Vol. 69, № 2. P. 421–450.
3. Sasaki S. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure // Tôhoku Math. J. Second Series. 1960. Vol. 12, № 3. P. 459–476.
4. Blair D. E. Contact manifolds in Riemannian geometry. Berlin; N.Y. : Springer-Verlag, 1976. 146 p.
5. Кириченко В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. ВИНТИ. 1986. Т. 18. С. 25–71.
6. Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р. Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 8. С. 71–100.
7. Boyer C. P., Nakataye M. On Sasaki-Einstein manifolds in dimension five // Geom. Dedicata. 2010. № 144. P. 141–156.
8. Stamin C., Udriste C. Nonholonomic geometry of Gibbs contact structure // A Appl. Math. Phys. Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. 2010. Vol. 72, № 1. P. 153–170.
9. Вагнер В. В. Дифференциальная геометрия неголомомных многообразий : VIII Междунар. конкурс им. Н. И. Лобачевского (1937) : отчёт. Казань : Казан. физ.-мат. общ-во, 1940. 327 с.
10. Вагнер В. В. Геометрия  $(n - 1)$ -мерного неголомомного многообразия в  $n$ -мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.
11. Малахальцев М. А. Слоения с листовыми структурами // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. ВИНТИ. 2002. Т. 73. С. 65–102.
12. Вершик А.М., Гершкович В. Я. Неголомомные ди-



намические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундаментальные направления ВИНТИ. 1987. Т. 16. С. 5–85.

13. Манин Ю. И. Калибровочные поля и комплексная геометрия. М. : Наука, 1984. 336 с.

14. Букушева А. В., Галаев С. В. О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к негोलомному многообразию // Математика. Механика : сб.

науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 12–14.

15. Galaev S. V. Extension of the interior connection of a nonholonomic manifold with a Finsler metric [Электронный ресурс]. arXiv:1103.4337v1 [math.DG] 22 Mar 2011. 9 p. URL: <http://arxiv.org/abs/1103.4337v1>.

16. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. М. : Наука, 1981. Т. 2. 416 с.

УДК 519.872

## ДИНАМИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗКИ В ЗАМКНУТЫХ СЕТЯХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ ТРЕБОВАНИЙ

Ю. И. Митрофанов, Е. С. Рогачко, Е. П. Станкевич

Саратовский государственный университет,  
кафедра системного анализа и автоматического управления  
E-mail: MitrophanovYul@info.sgu.ru, RogachkoES@info.sgu.ru,  
StankevichElena@mail.ru

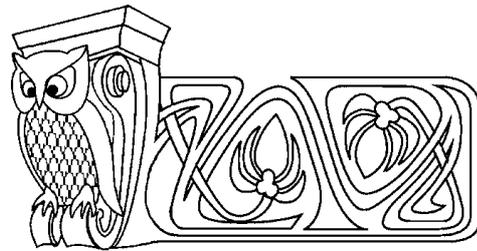
Предлагается метод управления распределением нагрузки в замкнутых сетях массового обслуживания с групповыми переходами требований. При использовании данного метода в сетях обслуживания рассматриваемого класса обеспечивается близкое к заданному распределение требований по системам. Управление осуществляется посредством использования в процессе функционирования сети различных маршрутных матриц в течение интервалов времени определенной длительности. Приводятся модели эволюции и приближенный метод вычисления стационарного распределения и других стационарных характеристик сетей массового обслуживания рассматриваемого класса.

**Ключевые слова:** сети массового обслуживания, групповые переходы требований, распределение нагрузки, управление маршрутизацией, стационарное распределение.

### ВВЕДЕНИЕ

В работах, посвященных проблемам распределения нагрузки в сетях массового обслуживания, под нагрузкой системы обслуживания, как правило, понимается число требований, пребывающих в ней. В сетях обслуживания используется распределение нагрузки двух типов — статическое и динамическое. Задачи статического распределения нагрузки решаются на этапах проектирования сетей массового обслуживания и непосредственно связаны с использованием методов оптимизации качества функционирования сетей обслуживания. Динамическое распределение нагрузки используется в процессе функционирования сетей массового обслуживания с целью повышения качества функционирования сетей за счет предотвращения скопления требований в системах или подсетях сетей обслуживания. Основу методов динамического распределения нагрузки составляет анализ состояний сети или систем обслуживания в определенные моменты времени и принятие решений на основе анализа об изменении соответствующих параметров сети. Разработке и развитию различных методов динамического управления распределением нагрузки в сетях массового обслуживания с одиночными переходами требований посвящено достаточно много работ [1–4].

В последнее время значительное внимание в теории массового обслуживания уделяется разработке и исследованию методов анализа сетей массового обслуживания с групповым поступлением,



### Dynamic Load Allocation in Closed Queueing Networks with Batch Movements

Yu. I. Mitrophanov, E. S. Rogachko, E. P. Stankevich

Saratov State University,  
Chair of Systems Analysis and Automatic Control  
E-mail: MitrophanovYul@info.sgu.ru, RogachkoES@info.sgu.ru,  
StankevichElena@mail.ru

A method of load allocation control in closed queueing networks with batch movements is proposed. When this method is used in queueing networks of considered type, close to given customer allocation among queueing systems is provided. The control is realized by use of different routing matrices during fixed time intervals in process of network operation. Models of evolution and an approximate method of computing a stationary distribution and other stationary characteristics of considered type queueing networks are presented.

**Key words:** queueing networks, batch movements, load allocation, routing control, stationary distribution.



обслуживанием и групповыми переходами требований. Мультипликативные формы стационарных распределений замкнутых и открытых сетей массового обслуживания с групповым поступлением и обслуживанием требований получены в работах [5, 6]. В работах [7–9] для сетей обслуживания различных типов с групповыми переходами требований, в том числе с маршрутизацией, зависящей от состояния сети, доказываются условия существования мультипликативной формы стационарного распределения. Эффективные в вычислительном отношении методы анализа сетей обслуживания с групповыми переходами требований рассматриваются в работах [10, 11]. Эти методы являются развитием ранее предложенных для сетей с одиночными переходами требований метода анализа средних значений и метода декомпозиции на основе теоремы Нортон.

В данной работе целью управления распределением нагрузки в замкнутой сети массового обслуживания с групповыми переходами требований является достижение в процессе функционирования сети приближения среднего числа требований в системах обслуживания к заданному числу требований в этих системах. Предлагается метод управления распределением нагрузки для сетей обслуживания рассматриваемого класса. При управлении распределением нагрузки в сети обслуживания используется динамическое управление маршрутизацией. Для нахождения стационарных характеристик рассматриваемой сети массового обслуживания с групповыми переходами требований и управлением распределением нагрузки используется приближенный метод анализа, основанный на результатах работ [12, 13].

## 1. МЕТОД УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НАГРУЗКИ

Пусть  $N$  — замкнутая сеть массового обслуживания с  $H$  требованиями одного класса и  $L$  системами массового обслуживания. Система  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ , содержит  $H$  обслуживающих приборов. Длительности обслуживания требований имеют экспоненциальное распределение с параметром  $\mu_i$ ,  $0 < \mu_i < 1$  (данные ограничения на значения  $\mu_i$  не влияют на общность полученных результатов). Состояние сети определяется вектором  $s = (s_i)$ , где  $s_i$  — число требований, находящихся в системе  $S_i$ . Предполагается, что изменение состояния сети происходит вследствие переходов между системами групп требований. Обозначим через  $X$  множество состояний сети,  $c_X = |X|$  — мощность множества  $X$ ,  $B = \{1, \dots, c_X\}$  — множество номеров состояний,  $I = \{1, \dots, L\}$  — множество номеров систем массового обслуживания. Для каждого состояния  $s \in X$  задана числовая характеристика  $V(s)$  — потенциал состояния, который определяет значимость пребывания сети в данном состоянии для достижения требуемых значений заданных характеристик качества ее функционирования. Состояние  $s^\circ = (s_i^\circ)$ ,  $i = 1, \dots, L$ , при пребывании в котором достигаются наилучшие значения этих характеристик, называется базовым. Состояния в множестве  $X$  упорядочиваются по убыванию потенциалов. Далее состояние сети с номером  $n$ ,  $n \in B$ , будем обозначать через  $s^{(n)}$ . Базовое состояние имеет наибольший потенциал,  $s^\circ = s^{(1)}$ . Требуемое распределение нагрузки в сети определяется заданием базового состояния.

Множество  $X$  делится на подмножества  $Y$  и  $Z$  доминантных и ординарных состояний,  $X = Y \cup Z$ ,  $c_Y = |Y|$  и  $c_Z = |Z|$ . Потенциалы доминантных состояний превосходят по величине потенциалы ординарных состояний. При формировании множеств  $Y$  и  $Z$  используется вектор  $b = (b_i)$ ,  $b_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, L$ , граничных значений числа требований в системах обслуживания. Состояния  $s \in X$ , для которых  $|s_i - s_i^\circ| \leq b_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ , относятся к множеству  $Y$ , остальные состояния — к множеству  $Z$ .

Для синхронизации событий, реализуемых в сети  $N$  в процессе ее функционирования, используется последовательность интервалов времени фиксированной длительности, называемых слотами. Длительность слота полагается равной единице. Моменты начала и окончания слота  $z$  обозначим соответственно через  $\eta$  и  $\tau$ . В момент  $\eta$  определяется состояние сети  $s$  (в этом состоянии сеть пребывает до начала следующего слота). В течение слота  $z$  в системе  $S_i$  завершается обслуживание  $d_i \leq s_i$  требований, которые до момента  $\tau$  будут занимать обслуживающие приборы. В момент  $\tau$  формируется вектор  $d = (d_i)$ ,  $i = 1, \dots, L$ , требований, выходящих после завершения обслуживания из систем.

Вероятность завершения обслуживания требования в данном слоте равна  $\mu_i$ . Если в начале слота  $z$  в системе  $S_i$  пребывает  $s_i$  требований, то вероятность завершения обслуживания в течение этого слота  $d_i$  требований определяется биномиальным распределением с параметром  $\mu_i$ . Тогда вероятность



формирования вектора  $d$  при пребывании сети  $N$  в состоянии  $s$  вычисляется по формуле

$$p(s, d) = \prod_{i=1}^L \binom{s_i}{d_i} \mu_i^{d_i} (1 - \mu_i)^{s_i - d_i}.$$

Обозначим через  $K_i$  и  $R_i$  множества номеров смежных с  $S_i$  выходных и входных систем соответственно. Согласно алгоритму маршрутизации требований, определяемому маршрутной матрицей сети, в момент  $\tau$  формируются подгруппы требований  $d_{ij}$ ,  $i \in I$ ,  $j \in K_i$ , направляемые из  $S_i$  в  $S_j$ . Из подгрупп  $d_{ij}$ ,  $j \in I$ ,  $i \in R_j$ , формируются группы  $a_j$  поступающих в конце слота  $z$  в  $S_j$  требований, т. е.  $a_j = \sum_{i \in R_j} d_{ij}$ . Таким образом, вектор  $d$  преобразуется в вектор  $a = (a_j)$ ,  $j = 1, \dots, L$ , входящих требований, и в момент  $\tau$  формируется новое состояние сети  $s' = s - d + a$ . Векторы  $d$  и  $a$  будем называть векторами перемещений. Обозначим через  $D$  множество всех векторов перемещений,  $c_D = |D|$ .

Состояние  $s'(s, d, a)$  назовем порожденным состоянием  $s$  и преобразованием вектора  $d$  в вектор  $a$ , если переход в это состояние из  $s$  происходит в результате таких переходов групп требований между системами сети, которые обеспечивают преобразование вектора  $d$  в вектор  $a$ . Множество всех состояний, порожденных состоянием  $s$  и вектором перемещений  $d$ , обозначим

$$\Omega(s, d) = \left\{ s' \in X : s' = s - d + a, a \in D, \sum_{i \in I} d_i = \sum_{j \in I} a_j \right\}.$$

Для состояния  $s$  и вектора перемещений  $d$  определим нуль-единичную матрицу  $N(s, d) = (\nu_{ij}(s, d))$ ,  $i, j = 1, \dots, L$ , называемую матрицей передач [14]. При формировании этой матрицы определяется номер системы  $j$ , переход в которую группы требований из  $S_i$  обеспечит переход сети из состояния  $s$  в состояние  $\check{s}(s, d) \in \Omega(s, d)$ , имеющее наибольший потенциал по сравнению с другими состояниями множества  $\Omega(s, d)$ , т. е.

$$V(\check{s}(s, d)) = \max_{s' \in \Omega(s, d)} V(s').$$

Значение элемента  $\nu_{ij}(s, d)$  матрицы  $N(s, d)$  полагается равным 1, а значения элементов  $\nu_{il}(s, d)$ ,  $l \neq j$ ,  $l = 1, \dots, L$ , — равными 0. Если  $s_i = 0$ , то  $\nu_{ii}(s, d) = 1$ . Матрица  $N(s, d)$  определяет маршруты групп требований, завершивших обслуживание в одной из систем при пребывании сети  $N$  в состоянии  $s$ .

В процессе функционирования сети  $N$  производится управление распределением нагрузки, реализуемое посредством соответствующего управления маршрутизацией групп требований. Основной целью управления распределением нагрузки в сети массового обслуживания является приближение распределения нагрузки к нагрузке, заданной базовым состоянием. Достижение этой цели обеспечивается при увеличении значения стационарной вероятности  $\pi(Y)$  пребывания сети в множестве доминантных состояний  $Y$ .

Различаются два режима функционирования сети  $N$  — нормальный и коррективный. Периоды функционирования сети в этих режимах будем называть соответственно нормальными и коррективными тактами. Вид очередного такта определяется типом состояния (доминантное или ординарное) сети в момент завершения предшествующего такта. Нормальный такт имеет фиксированную длительность  $\varphi$  ( $\varphi$  является положительной целочисленной константой) и начинается в некотором доминантном состоянии. Коррективный такт начинается в некотором ординарном состоянии, а заканчивается в базовом состоянии  $s^\circ$  в момент перехода в него сети. Таким образом, длительность коррективного такта, начавшегося в состоянии  $s^{(c_Y + J)}$ ,  $J \in \{1, \dots, c_Z\}$ , является случайной величиной, которую обозначим через  $\xi^J$  ( $\xi^J$  — время первого достижения сетью состояния  $s^\circ$  при начале эволюции из состояния  $s^{(c_Y + J)}$ ), с математическим ожиданием (м. о.)  $\bar{\xi}^J$ .

В нормальных и коррективных тактах применяются различные алгоритмы маршрутизации требований. В нормальном такте маршрутизация осуществляется с использованием заданной неприводимой маршрутной матрицы  $\Theta = (\theta_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, L$ , в коррективном такте — с использованием соответствующих матриц передач. Основным назначением коррективных тактов является возвращение сети в множество доминантных состояний.



## 2. МОДЕЛИ И АНАЛИЗ СЕТИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Предположим, что эволюция сети  $N$  в течение нормальных и коррективных тактов может быть описана с приемлемой точностью цепями Маркова соответственно  $\hat{C}$  и  $\tilde{C}^J$ ,  $J \in \{1, \dots, c_Z\}$ , с множеством состояний  $B$  и непрерывным временем. Множествами начальных состояний цепи  $\hat{C}$  и цепей  $\tilde{C}^J$  являются соответственно  $\{1, \dots, c_Y\}$  и  $\{c_Y + J\}$ , а матрицами вероятностей перехода —  $\hat{P} = (\hat{p}_{mn})$  и  $\tilde{P} = (\tilde{p}_{mn})$ ,  $m, n = 1, \dots, c_X$ . Элементы матрицы  $\hat{P}$  определяются следующим образом:

$$\hat{p}_{mn} = \sum_{\substack{d \in D: \\ s^{(m)} - d + a = s^{(n)}}} \hat{p}(d, a), \quad (1)$$

где

$$\hat{p}(d, a) = \begin{cases} p(s^{(m)}, d) \rho_{da}, & \text{если } p(s^{(m)}, d) > 0, \\ \delta_{da}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь  $\delta_{da}$  — символ Кронекера,  $\rho_{da}$  — вероятность преобразования вектора  $d$  в вектор  $a$  определяется выражением

$$\rho_{da} = \sum_{d_{ij} \in G} \prod_{i=1}^L \binom{d_i}{d_{i1}, \dots, d_{iL}} \prod_{j=1}^L \theta_{ij}^{d_{ij}},$$

где

$$G = \left\{ d_{ij}, i = 1, \dots, L, j \in K_i : \sum_{i=1}^L d_{ij} = a_j \right\}.$$

Элементы матрицы  $\tilde{P}$  определяются выражением (1) при замене знака  $\wedge$  на  $\sim$ , где

$$\tilde{p}(d, a) = \begin{cases} p(s^{(m)}, d), & \text{если } p(s^{(m)}, d) > 0 \text{ и } s^{(m)} - d + a = \check{s}(s^{(m)}, d), \\ 0, & \text{если } p(s^{(m)}, d) > 0 \text{ и } s^{(m)} - d + a \neq \check{s}(s^{(m)}, d), \\ \delta_{da}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для анализа сети  $N$  с групповыми переходами требований и управлением распределением нагрузки применяется метод, аналогичный рассмотренным в работах [12, 13] методам анализа сетей массового обслуживания с одиночными переходами требований и управлением распределением нагрузки и маршрутизацией.

Средние вероятности пребывания цепей  $\hat{C}$  и  $\tilde{C}^J$  в состоянии  $n \in B$  в течение интервала времени, равного длительности соответствующего такта, при начальном состоянии  $m$  определяются по формулам

$$\hat{\sigma}_{mn} = \frac{1}{\varphi} \int_0^\varphi \hat{p}_{mn}^{(t)} dt, m \in \{1, \dots, c_Y\},$$

$$\tilde{\sigma}_{mn} = \frac{1}{\xi^J} \int_0^{\xi^J} \tilde{p}_{mn}^{(t)} dt, J = m - c_Y, m \in \{c_Y + 1, \dots, c_X\},$$

где элементы матриц  $\hat{P}^{(t)} = (\hat{p}_{mn}^{(t)})$  и  $\tilde{P}^{(t)} = (\tilde{p}_{mn}^{(t)})$ ,  $m, n = 1, \dots, c_X$ , вероятностей перехода за время  $t$  цепей  $\hat{C}$  и  $\tilde{C}^J$  вычисляются с использованием соотношений  $\hat{P}^{(t)} = e^{(\hat{P}-E)t}$  и  $\tilde{P}^{(t)} = e^{(\tilde{P}-E)t}$  ( $E$  — единичная матрица).

Вводится в рассмотрение случайный процесс  $\Upsilon$  с непрерывным временем и множеством состояний  $B$ , для которого длительность пребывания в состоянии  $n$

$$\beta_n = \begin{cases} \varphi, n = 1, \dots, c_Y, \\ \xi^J, J = n - c_Y, n = c_Y + 1, \dots, c_X. \end{cases}$$

Процесс  $\Upsilon$  описывает процесс перехода сети  $N$  между состояниями, соответствующими начальным состояниям тактов функционирования сети.

Для процесса  $\Upsilon$  вычисляется стационарное распределение  $v = (v_n)$ ,  $n = 1, \dots, c_X$ , которое совпадает со стационарным распределением цепи Маркова  $\check{C}$  с непрерывным временем и множеством



состояний  $B$ , длительность пребывания которой в состоянии  $n \in B$  имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\check{\alpha}_n = 1/\beta_n$  [12]. Элементы инфинитезимального оператора  $\check{Q} = (\check{q}_{mn})$ ,  $m, n = 1, \dots, c_X$ , цепи  $\check{C}$  определяются следующим образом:

$$\check{q}_{mn} = \begin{cases} \frac{\hat{p}_{mn}^{(\varphi)}}{\varphi(1 - \hat{p}_{mm}^{(\varphi)})}, & m \in \{1, \dots, c_Y\}, \\ \frac{\tilde{p}_{mn}^{(\xi^J)}}{\xi^J(1 - \tilde{p}_{mm}^{(\xi^J)})}, & J = m - c_Y, m \in \{c_Y + 1, \dots, c_X\}, \end{cases} \quad m \neq n, \quad \check{q}_{mm} = -\check{\alpha}_m.$$

Таким образом, распределение  $v$  находится как решение уравнения  $v\check{Q} = 0$  с условием  $\sum v_n = 1$ .

Реализацию случайного процесса  $\Delta$ , описывающего эволюцию сети  $N$ , можно рассматривать как последовательность конечных реализаций цепей  $\check{C}$  и  $\check{C}^J$ ,  $J = 1, \dots, c_Z$ . Характеристики процесса  $\Delta$  приближенно определяются параметрами этих цепей и длительностями их реализаций, равными длительностям нормального такта  $\varphi$  и коррективного такта  $\xi^J$  соответственно.

Приближенные значения стационарных вероятностей состояний  $\pi_n$ ,  $n = 1, \dots, c_X$ , процесса  $\Delta$  при заданном значении  $\varphi$  определяются выражением

$$\pi_n = \sum_{m=1}^{c_Y} v_m \hat{\sigma}_{mn} + \sum_{J=1}^{c_Z} v_{c_Y+J} \tilde{\sigma}_{c_Y+J,n}.$$

Очевидно, что стационарная вероятность состояния  $s^{(n)} \in X$  сети  $N$  с управлением распределением нагрузки  $\pi(s^{(n)}) = \pi_n$ ,  $n \in B$ . Математическое ожидание числа требований в системе  $S_i$  вычисляется по формуле

$$\bar{s}_i = \sum_{k=0}^H k \sum_{\substack{s \in X: \\ s_i = k}} \pi(s),$$

интенсивность входящего потока требований в систему  $S_i$

$$\lambda_i = \bar{s}_i \mu_i,$$

м. о. длительности пребывания требований в системе  $S_i$

$$\bar{u}_i = \bar{s}_i / \lambda_i = 1 / \mu_i.$$

### 3. ПРИМЕРЫ

**Пример 1.** Пусть сеть  $N$  имеет следующие параметры:  $L = 4$ ,  $H = 5$ ,  $\mu = (\mu_i) = (0.4, 0.1, 0.3, 0.7)$ ,  $c_X = 56$ ,  $c_D = 126$ ,  $s^\circ = (2, 1, 1, 1)$ ,  $b = (1, 1, 1, 1)$ . В течение нормальных тактов используется маршрутная матрица

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Потенциалы состояний определяются по формулам

$$V(s^{(1)}) = 1, \quad V(s^{(n)}) = 1 / \sqrt{\sum_{i=1}^L (s_i^{(n)} - s_i^\circ)^2}, \quad n = 2, \dots, 56.$$

Множество  $Y$  будет включать состояния  $s^{(n)}$ ,  $n = 1, \dots, 19$ . Остальные состояния будут принадлежать множеству  $Z$ .

Пусть сеть  $N_0$  отличается от сети  $N$  только тем, что в ней отсутствует управление распределением нагрузки. Стационарная вероятность пребывания сети  $N_0$  в множестве  $Y$   $\pi_0(Y) = 0.214$ , стационарная вероятность базового состояния  $\pi_0(s^{(1)}) = 0.008$ , вектор м. о. числа требований в системах



сети  $\bar{s}_0 = (\bar{s}_{i,0}) = (0.594, 2.871, 1.185, 0.350)$  и вектор интенсивностей входящих потоков требований  $\lambda_0 = (\lambda_{i,0}) = (0.238, 0.287, 0.356, 0.245)$ .

Результаты экспериментов для сети  $N$  при различных значениях  $\varphi$  приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Характеристики качества функционирования сети  $N$

Вероятность	Длительность нормального такта $\varphi$							
	1	5	10	20	50	100	200	1000
$\pi(Y)$	0.661	0.572	0.483	0.390	0.299	0.259	0.237	0.219
$\pi(s^{(1)})$	0.281	0.206	0.156	0.105	0.055	0.033	0.021	0.012

Из табл. 1 видно, что при уменьшении  $\varphi$  вероятности  $\pi(Y)$  и  $\pi(s^{(1)})$  увеличиваются и при  $\varphi = 10$  первая из них — в 2 раза, а вторая почти в 20 раз превосходит соответствующие вероятности сети  $N_0$ . Из сравнения характеристик качества функционирования сетей  $N$  (см. табл. 1) и  $N_0$  непосредственно следует, что качество функционирования сети  $N$  при  $\varphi < 100$  существенно выше, чем сети  $N_0$ . Полученные результаты свидетельствуют о возможности достижения при малых значениях  $\varphi$  высокой эффективности метода динамического управления распределением нагрузки.

В табл. 2 показана зависимость стационарных характеристик сети  $N$  от значения длительности нормального такта  $\varphi$ .

Таблица 2

Зависимость стационарных характеристик сети  $N$

Характеристика	№ системы, $i$	Длительность нормального такта $\varphi$							
		1	5	10	20	50	100	200	1000
$\bar{s}_i$	1	1.635	1.412	1.222	1.010	0.795	0.702	0.650	0.606
	2	1.869	2.069	2.261	2.469	2.677	2.767	2.817	2.859
	3	1.110	1.142	1.150	1.160	1.173	1.178	1.181	1.184
	4	0.386	0.377	0.367	0.361	0.355	0.353	0.352	0.351
$\lambda_i$	1	0.654	0.565	0.489	0.404	0.318	0.281	0.260	0.243
	2	0.187	0.207	0.226	0.247	0.268	0.277	0.282	0.286
	3	0.333	0.343	0.345	0.348	0.352	0.354	0.355	0.355
	4	0.270	0.264	0.257	0.253	0.249	0.247	0.246	0.246

Для рассматриваемой сети м. о. длительности коррективного такта, если очередной такт в сети является коррективным, вычисляется по формуле  $\bar{\xi} = \frac{cZ}{\sum_{J=1}^{cZ} \bar{\xi}^J v_{cY+J}/v(Z)}$ , где  $v(Z) = \sum_{J=1}^{cZ} v_{cY+J}$  — доля коррективных тактов. Например, при  $\varphi = 1$   $\bar{\xi} = 7.789$ , а при  $\varphi = 100$   $\bar{\xi} = 9.362$ . При  $\varphi < \bar{\xi}$  сеть  $N$  в процессе функционирования пребывает большую часть времени в коррективном режиме, что обеспечивает улучшение ее стационарных характеристик. Поэтому при уменьшении  $\varphi$  значения  $\bar{s}_i$  приближаются к значениям  $s_i^0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Если  $\varphi \gg \bar{\xi}$ , то влияние коррективного режима незначительно, и при  $\varphi \rightarrow \infty$  значения характеристик сети  $N$  стремятся к значениям характеристик сети  $N_0$ .

**Пример 2.** Пусть  $N'$  — сеть массового обслуживания, отличающаяся от сети  $N$  только параметром  $\Theta$ :

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для сети  $N'_0$  без управления имеем  $\pi'_0(Y) = 0.106$ ,  $\pi'_0(s^{(1)}) = 0.004$ .

Следствием изменения топологии сети является увеличение в сети  $N'$  доли коррективных тактов  $v(Z)$  и м. о. длительности коррективного такта  $\bar{\xi}$  по сравнению со значениями этих величин в



сети  $N$ . Например, при  $\varphi = 1$   $\bar{\xi}' = 9.561$ , а при  $\varphi = 100$   $\bar{\xi}' = 10.200$ . Поэтому возрастает влияние управления на характеристики сети (табл. 3). В частности, при  $\varphi = 10$   $\pi'(Y)$  почти в 4 раза, а  $\pi'(s^{(1)})$  — в 40 раз превосходят вероятности  $\pi'_0(Y)$  и  $\pi'_0(s^{(1)})$  сети  $N'_0$ .

Таблица 3

Характеристики качества функционирования сети $N'$								
Вероятность	Длительность нормального такта $\varphi$							
	1	5	10	20	50	100	200	1000
$\pi'(Y)$	0.588	0.495	0.401	0.303	0.204	0.160	0.134	0.113
$\pi'(s^{(1)})$	0.275	0.218	0.167	0.112	0.058	0.033	0.019	0.008

**Пример 3.** Следует отметить, что изменение характеристик сети с управлением распределением нагрузки существенно зависит также от значения вектора интенсивностей обслуживания  $\mu$ . Построим сеть  $N''$ , которая отличается от сети  $N'$  тем, что  $\mu = (0.2, 0.7, 0.4, 0.7)$ . Тогда при  $\varphi = 10$   $\pi''_0(Y) = 0.702$ , а  $\pi''(Y) = 0.739$ , т. е. улучшение характеристики составляет всего 5 %. Это объясняется тем, что при данном векторе  $\mu$   $\bar{s}''_0 \approx s^o = (2, 1, 1, 1)$ , и управление распределением нагрузки не может привести к значительным изменениям характеристик качества функционирования сети.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе требуемое распределение нагрузки определяется заданием базового состояния и целью динамического управления распределением нагрузки является приближение средней нагрузки каждой системы к значению соответствующей компоненты вектора базового состояния. Достижение этой цели обеспечивается использованием при управлении распределением нагрузки в течение коррективных тактов метода управления маршрутизацией групп требований с использованием матриц передач. Представленные в статье примеры имеют иллюстративный характер и показывают, что применение матриц передач в течение коррективных тактов обеспечивает увеличение стационарных вероятностей пребывания рассматриваемых сетей в базовом состоянии и доминантных состояниях. Численные значения характеристик сетей обслуживания, как видно из приведенных примеров, существенно зависят от топологии и параметров сетей таких, как маршрутная матрица, используемая в течение нормальных тактов, и интенсивности обслуживания требований в системах обслуживания.

## Библиографический список

1. *Bovopoulos A. D., Lazar A. A.* Optimal load balancing for Markovian queueing networks // Proc. 30th Midwest Symp. Circ. and Syst. Syracuse; N.Y., 1987. P. 1428–1432.
2. *Alanyali M., Hajek B.* Analysis of simple algorithms for dynamic load balancing // Math. Oper. Res. 1997. Vol. 22, № 4. P. 840–871.
3. *Bonald T., Jonckheere M., Proutiere A.* Insensitive load balancing // Proc. of ACM Sigmetrics/Performance. N.Y., 2004. P. 6367–6378.
4. *Down D. G., Lewis M. E.* Dynamic load balancing in parallel queueing systems: stability and optimal control // Eur. J. Oper. Res. 2006. Vol. 168, № 2. P. 509–519.
5. *Henderson W., Pearce C. E. M., Taylor P. G., Dijk N. M.* Closed queueing networks with batch services // Queueing Systems. 1990. Vol. 6. P. 59–70.
6. *Henderson W., Taylor P. G.* Product form in networks of queues with batch arrivals and batch services // Queueing Systems. 1990. Vol. 6. P. 71–88.
7. *Boucherie R. J., Dijk N. M.* Product forms for queueing networks with state-dependent multiple job transitions // Adv. Appl. Prob. 1991. Vol. 23, № 1. P. 152–187.
8. *Serfozo R. F.* Queueing networks with dependent nodes and concurrent movements // Queueing Systems. 1993. Vol. 13. P. 143–182.
9. *Miyazawa M.* Structure-reversibility and departure functions of queueing networks with batch movements and state dependent routing // Queueing Systems. 1997. Vol. 25. P. 45–75.
10. *Coyle A. J., Henderson W., Pearce C. E. M., Taylor P. G.* A general formulation for mean-value analysis in product-form batch-movement queueing networks // Queueing Systems. 1994. Vol. 16. P. 363–372.
11. *Bause F., Boucherie R. J., Buchholz P.* Norton's theorem for batch routing queueing networks // Stochastic Models. 2001. Vol. 17. P. 39–60.
12. *Митрофанов Ю. И., Рогачко Е. С.* Модели и анализ сетей массового обслуживания с динамическим управлением распределением нагрузки // Автоматика и вычислительная техника. 2006. № 5. С. 69–77.
13. *Митрофанов Ю. И., Фокина Н. П.* Анализ сетей массового обслуживания с динамическим управлением маршрутизацией // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2007. Т. 7. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 27–33.
14. *Митрофанов Ю. И., Рогачко Е. С.* Управление распределением нагрузки в сетях массового обслуживания // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 94–102.



УДК 517.9

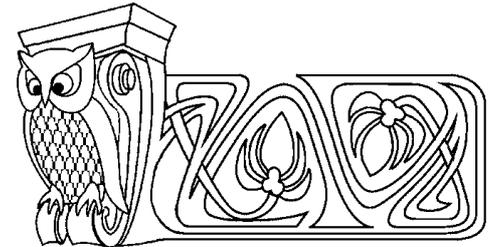
## О ЧИСЛОВОЙ ОБЛАСТИ ГЕНЕРАТОРА ПОЛУГРУППЫ

М. Ю. Романова

Воронежский государственный университет,  
кафедра математических методов исследования операций  
E-mail: maria.romanovaru@mail.ru

В статье строится полугруппа операторов, числовая область генератора которой покрывает всю комплексную плоскость. Показывается, что такая полугруппа операторов ограничена.

**Ключевые слова:** полугруппа операторов, генератор полугруппы, числовая область оператора, резольвента оператора.



### About Numerical Range of Semigroup's Generator

M. Yu. Romanova

Voronezh State University,  
Chair of Mathematical Methods of Operational Research  
E-mail: maria.romanovaru@mail.ru

In the article the semigroup is built. The numerical range of its generator covers complex plane. It is provided that such semigroup is bounded.

**Key words:** semigroup of operators, generator of semigroup, numerical range of operator, resolvent of operator.

Пусть  $\mathcal{H}$  — комплексное гильбертово пространство,  $End\mathcal{H}$  — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в  $\mathcal{H}$ .

Рассмотрим в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (1)$$

с линейным оператором  $A$ , имеющим плотную в  $\mathcal{H}$  область определения  $D(A)$ .

Обозначим через  $T : \mathbb{R}_+ = [0, \infty] \rightarrow End\mathcal{H}$  сильно непрерывную полугруппу операторов (полугруппу класса  $C_0$ ) [1], порождённую оператором  $A$  (т. е.  $A$  — производящий оператор, или генератор полугруппы  $T$ ).

**Определение 1** [1]. Числовой областью оператора  $A$  называется множество точек вида  $\Theta(A) = \{(Ax, x) : x \in D(A), \|x\| = 1\}$ .

Обозначим через  $C_\omega$  полуплоскость  $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq \omega\}$ , где  $\omega \in \mathbb{R}$ .

**Определение 2** [2]. Оператор  $A$  называется *ограниченным справа*, если существует  $\omega \in \mathbb{R}$  такое, что

$$\operatorname{Re}(Ax, x) \leq \omega(x, x), x \in D(A). \quad (2)$$

Другими словами, оператор  $A$  ограничен справа, если его числовая область лежит в полуплоскости  $C_\omega$ , т. е.  $\Theta(A) \subseteq C_\omega$ .

Рассмотрим сопряжённый оператор  $A^* : D(A^*) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ . Из (2) следует, что оператор  $A^*$  ограничен справа, если

$$\operatorname{Re}(A^*y, y) \leq \omega(y, y), y \in D(A^*). \quad (3)$$

Следующий результат содержится в работе [2].

**Теорема 1.** Для того, чтобы оператор  $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  был генератором сильно непрерывной полугруппы операторов  $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow End\mathcal{H}$ , удовлетворяющей оценке

$$\|T(t)\| \leq e^{\omega t}, \quad (4)$$

необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия (2) и (3).

Как хорошо известно [3], любая полугруппа класса  $C_0$  допускает оценку вида  $\|T(t)\| \leq Me^{\gamma t}$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $M \geq 1$ ,  $t \geq 0$ . Отметим, что другой способ оценок полугруппы операторов имеется в статье [4].

Возникает вопрос: всегда ли можно найти такое  $\omega$ , чтобы имела место оценка (4) для полугруппы? Этот вопрос эквивалентен тому, что числовая область находится в полуплоскости  $C_\omega$ . В данной работе дан отрицательный ответ и приведён пример полугруппы, для которой числовая область генератора покрывает всю комплексную плоскость, но при этом полугруппа ограничена.



Рассматривается гильбертово пространство  $l^2 = \bigoplus_{n \geq 2} \mathbb{C}^n$  последовательностей  $x = (x_2, x_3, \dots)$ , где  $x_n \in \mathbb{C}^n$ ,  $n \geq 2$ , со скалярным произведением  $\langle x, y \rangle = \sum_{n=2}^{\infty} (x_n, y_n)$ ,  $x_n, y_n \in \mathbb{C}^n$ . Следовательно,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \|x_n\|^2.$$

Рассмотрим последовательность нильпотентных операторов  $Q_n \in \text{End} \mathbb{C}^n$ ,  $n \geq 2$ , определяемых с помощью квадратной матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор  $Q_n$  действует на  $z \in \mathbb{C}^n$  следующим образом:

$$Q_n z = \left( \sum_{k=2}^n z_k, 0, 0, \dots, 0 \right), \quad n \geq 2,$$

и индекс нильпотентности каждого из операторов  $Q_n$  равен двум, т.е.  $Q_n^2 = 0$ .

Выберем последовательность  $z \in \mathbb{C}^n$ ,  $n \geq 2$ , следующим образом:

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z_k = \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \quad \alpha \in \mathbb{T}, \quad k \geq 2,$$

где символом  $\mathbb{T}(0, r)$  будем обозначать множество точек  $\mathbb{T}(0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ , т.е. окружность радиуса  $r$  с центром в нуле, при  $r = 1$ , через  $\mathbb{T}$  обозначим единичную окружность с центром в нуле. Таким образом,  $\|z\| = 1$ .

Числовая область  $\Theta(Q_n)$  нильпотентного оператора  $Q_n$  — множество точек, которое определяется из равенств вида [1]

$$(Q_n z, z) = \left\{ \left( \sum_{k=2}^n z_k \right) \bar{z}_1 \right\} = \left\{ \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{n-1}{\sqrt{n-1}} \right\} = \left\{ \frac{\bar{\alpha}}{2} \cdot \sqrt{n-1} \right\}, \quad \|z\| = 1.$$

Следовательно, числовая область  $\Theta(Q_n)$  оператора содержит множество  $\left\{ \frac{\bar{\alpha}}{2} \sqrt{n-1}, \alpha \in \mathbb{T}, n \geq 2 \right\} = \mathbb{T}(0, \frac{1}{2} \sqrt{n-1})$ ,  $n \geq 2$ , т.е. включает в себя окружность радиуса  $\frac{1}{2} \sqrt{n-1}$  с центром в нуле. В силу теоремы Хаусдорфа [1] множество  $\Theta(Q_n)$  выпукло, следовательно,  $\Theta(Q_n) \supset \mathbb{D}(0, \frac{1}{2} \sqrt{n-1})$ ,  $n \geq 2$ , где  $\mathbb{D}(0, \frac{1}{2} \sqrt{n-1})$ ,  $n \geq 2$ , — диск радиуса  $\frac{1}{2} \sqrt{n-1}$  с центром в нуле.

Далее рассмотрим операторы

$$A_n = -\frac{\sqrt{n-1}}{4} I_n + Q_n, \quad n \geq 2.$$

Рассмотрим полугруппу операторов  $(T(t), t \geq 0)$ , построенную следующим образом:

$$T(t)x = (e^{tA_2} x_2, e^{tA_3} x_3, \dots), \quad x \in l^2, \quad x_n \in \mathbb{C}^n, \quad n \geq 2, \quad t \geq 0.$$

На каждом инвариантном подпространстве  $l_n^2 = \{x \in l^2 : x_k = 0, k \neq n\}$  рассматривается сильно непрерывная полугруппа  $T_n(t) = T(t)|_{l_n^2}$ ,  $t \geq 0$ ,  $n \geq 2$ .

Норма оператора  $T$  допускает оценку вида

$$\|T(t)x\|^2 = \sum_{n \geq 2} \|e^{tA_n} x_n\|^2 \leq \sup_{t \geq 0} \|e^{tA_n}\|^2 \sum_{n \geq 2} \|x_n\|^2 \leq \sup_{t \geq 0} \|e^{tA_n}\|^2 \|x\|^2.$$

Поскольку  $e^{tA_n} = e^{-\frac{\sqrt{n-1}}{4} t} e^{Q_n t} = e^{-\frac{\sqrt{n-1}}{4} t} (I + Q_n t)$ , то

$$\|e^{tA_n}\| \leq e^{-\frac{\sqrt{n-1}}{4} t} \left( 1 + \frac{\sqrt{n-1}}{2} t \right).$$



Из этой оценки получаем, что  $\sup_{t \geq 0, n \geq 2} \|e^{tA_n}\| \leq \max_{t \geq 0, a \geq 0} e^{-\frac{at}{4}} \left(1 + \frac{at}{2}\right)$ . Максимум функции достигается в точке  $t_0 = \frac{2}{a}$  и равен  $\frac{2}{\sqrt{e}}$ .

Таким образом, полугруппа  $T$  ограничена, так как допускает оценку вида

$$\|T(t)x\|^2 \leq \frac{4}{e} \|x\|^2, \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Ввиду того, что эта полугруппа сильно непрерывна на каждом из конечномерных подпространств  $l_n^2$  и эта система подпространств плотна во всём пространстве, из ограниченности полугруппы следует её сильная непрерывность на всём пространстве. Таким образом,  $T$  — полугруппа класса  $C_0$ .

Пусть оператор  $A$  — генератор построенной полугруппы операторов  $(T(t), t \geq 0)$ . Поскольку числовая область сужения оператора  $A$  на каждое инвариантное подпространство  $l_n^2$  содержится в числовой области оператора  $A$ , то числовая область  $\Theta(A)$  оператора  $A$  содержит все множества

$$\Theta(A_n) \supset \mathbb{D} \left( -\frac{\sqrt{n-1}}{2}, \frac{\sqrt{n-1}}{4} \right), \quad n \geq 2,$$

где  $\mathbb{D} \left( -\frac{\sqrt{n-1}}{2}, \frac{1}{4}\sqrt{n-1} \right)$ ,  $n \geq 2$ , — диск радиуса  $\frac{1}{4}\sqrt{n-1}$  с центром в точке  $-\frac{\sqrt{n-1}}{2}$ .

Следовательно, числовая область оператора  $A$  покрывает всю комплексную плоскость, но при этом полугруппа  $T$  ограничена, т. е.  $\|T(t)\| \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$ ,  $t \geq 0$ .

Обозначим через  $R(i\lambda, A) = (A - i\lambda I)^{-1}$  резольвенту оператора  $A$ , где  $\rho(A)$  — резольвентное множество оператора  $A$ ,  $I$  — тождественный оператор. Далее покажем, что резольвента оператора  $A$  ограничена на мнимой оси, т. е.  $\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|R(i\lambda, A)\| \leq C < \infty$ , где  $C$  — некоторая константа.

Рассмотрим резольвенту  $R(i\lambda, A)$  оператора  $A$ , построенную следующим образом:

$$R(i\lambda, A)x = (R(i\lambda, A_2)x_2, R(i\lambda, A_3)x_3, \dots), \quad x \in l^2, \quad x_n \in \mathbb{C}^n, \quad n \geq 2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Норма резольвенты допускает оценку вида

$$\|R(i\lambda, A)x\|^2 = \sum_{n \geq 2} \|R(i\lambda, A_n)x_n\|^2 \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|R(i\lambda, A_n)\|^2 \sum_{n \geq 2} \|x_n\|^2 \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|R(i\lambda, A_n)\|^2 \|x\|^2,$$

т. е.  $\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|R(i\lambda, A)\| \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|R(i\lambda, A_n)\|$ ,  $n \geq 2$ .

Обозначим  $\lambda_n = -\frac{\sqrt{n-1}}{4}$ ,  $n \geq 2$ , тогда из представления

$$\begin{aligned} R(i\lambda, A_n) &= (A_n - i\lambda I) = (\lambda_n + Q_n - i\lambda I) = \frac{1}{\lambda_n - i\lambda} \left( I + \frac{Q_n}{\lambda_n - i\lambda} \right)^{-1} = \frac{1}{\lambda_n - i\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Q_n)^k}{(\lambda_n - i\lambda)^k} = \\ &= \frac{1}{\lambda_n - i\lambda} \left( I + \frac{Q_n}{\lambda_n - i\lambda} \right), \end{aligned}$$

следует, что

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|R(i\lambda, A_n)\| \leq \frac{1}{|\lambda_n - i\lambda|} \left( 1 + \frac{\|Q_n\|}{|\lambda_n - i\lambda|} \right) \leq \frac{4}{\sqrt{n-1}} \left( 1 + \frac{4\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n-1}} \right) \leq 12, \quad n \geq 2.$$

Следовательно,

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|R(i\lambda, A)\| \leq \sqrt{12}. \quad (6)$$

Таким образом, резольвента оператора  $A$  ограничена на мнимой оси, несмотря на то что числовая область оператора  $A$  покрывает всю комплексную плоскость.

Из приведённых построений следует



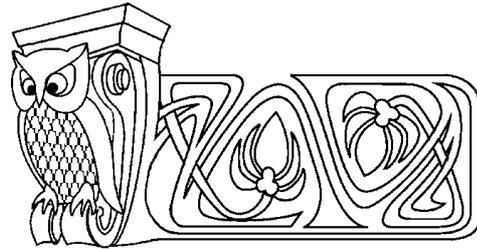
**Теорема 2.** Оператор  $A$  является генератором ограниченной полугруппы операторов  $T$  класса  $S_0$ , удовлетворяющей оценке (5), с резольвентой, удовлетворяющей оценке (6), а его числовая область  $\Theta(A)$  совпадает со всей комплексной плоскостью  $\mathbb{C}$ .

### Библиографический список

1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 739 с.
2. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
3. Engel K., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. N.Y.: Springer, 1999. 586 p.
4. Баскаков А. Г., Воробьев А. А., Романова М. Ю. Гиперболические полугруппы операторов и уравнение Ляпунова // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 2. С. 190–203.

УДК 517.54

## МОДИФИКАЦИЯ НОВОГО ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В МНОГОСВЯЗНОЙ КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ



Р. Б. Салимов

Казанский государственный архитектурно-строительный университет,  
кафедра высшей математики  
E-mail: salimov@5354.ru

Предлагается модификация нового подхода к решению краевой задачи Гильберта для аналитической функции в многосвязной области, основанное на построении решения соответствующей однородной задачи, когда определяется аналитическая в области функция по известным граничным значениям ее аргумента применительно к случаю, когда область является круговой.

**Ключевые слова:** краевая задача Гильберта, индекс задачи, оператор Шварца.

### Modification of New Approach to Solution of the Hilbert Boundary Value Problem for Analytic Function in Multi-Connected Circular Domain

R. B. Salimov

Kazan State University of Architecture and Engineering,  
Chair of Higher Mathematics  
E-mail: salimov@5354.ru

The author offers a new approach to the Riemann – Hilbert boundary value problem in multiconnected domain. The approach bases on certain construction of solution of corresponding homogeneous problem including determination of analytic function by known boundary values of its argument circular domain.

**Key words:** Riemann – Hilbert boundary value problem, index of a problem, Schwarz's operator.

Предлагается модификация рассмотренного в работе [1] нового подхода к решению краевой задачи Гильберта для аналитической в многосвязной круговой области функции.

Пусть  $D$  является  $(m + 1)$ -связной круговой областью, ограниченной полными окружностями  $L_0, L_1, \dots, L_m$  без общих точек, расположенными в плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , из которых  $L_0$  охватывает остальные.

Требуется найти функцию  $F(z) = u(z) + iv(z)$ , аналитическую и однозначную в области  $D$ , непрерывно продолжимую на её границу  $L = \bigcup_{j=0}^m L_j$  по краевому условию

$$\operatorname{Re} [(a(t) + ib(t))F(t)] = a(t)u(t) - b(t)v(t) = c(t), \quad (1)$$

где  $a(t), b(t), c(t)$  – заданные на  $L$  действительные функции точки  $t$  контура  $L$ , удовлетворяющие условию Гёльдера, – функции класса  $H$  на  $L$ , причем  $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$  всюду на  $L$ .

На  $L$  установим положительное направление обхода, при котором область  $D$  остается слева. Пусть  $t_{j0}$  – фиксированная точка кривой  $L_j$ . В дальнейшем для функции  $f(t)$ , заданной на  $L_j$ , под  $f(t_{j0} + 0)$  и  $f(t_{j0} - 0)$  будем понимать пределы, к которым стремится  $f(t)$ , когда точка  $t$  стремится к  $t_{j0}$  соответственно в отрицательном и положительном направлениях.

Краевое условие (1) запишем так

$$\operatorname{Re} [e^{-iv(t)} F(t)] = c(t)/|G(t)|, \quad (2)$$



где  $G(t) = a(t) - ib(t)$ ,  $\nu(t) = \arg G(t)$  — ветвь, непрерывная всюду на  $L$ , за исключением, быть может, точек  $t_{j0}$ , для которых

$$\nu(t_{j0} - 0) - \nu(t_{j0} + 0) = 2\pi \frac{\kappa_j}{2},$$

причем  $\kappa_j/2$  — целое число,  $j = \overline{0, m}$ .

Число  $\kappa = \sum_{j=0}^m \kappa_j$  назовем *индексом задачи Гильберта* (2), следуя Н. И. Мусхелишвили [2, с. 144] (заметим, что в книге [3, с. 144] индексом этой задачи называется число  $\kappa/2$ ).

Для простоты здесь ограничимся рассмотрением случая, когда  $\frac{\kappa}{2} \geq m$ .

1. Обозначим  $q_j, R_j$  соответственно центр и радиус окружности  $L_j$ ,  $j = \overline{0, m}$ , считая, что  $q_0 = 0, R_0 = 1$ . Примем  $t_{00} = 1, t_{j0} = q_j + R_j, j = \overline{1, m}$ . Пусть  $t = q_j + R_j e^{i\gamma}, 0 \leq \gamma < 2\pi$ , есть точка окружности  $L_j$ ; через  $s$  будем обозначать дуговую абсциссу указанной точки кривой  $L_j$ , отсчитываемую от точки  $t_{j0}$  в положительном направлении,  $j = \overline{0, m}, s = (2\pi - \gamma)R_j$  при  $j = \overline{1, m}$ . Под  $\arg(z - q_j)$  будем понимать непрерывную ветвь, однозначную в круге  $|z| < 1$ , разрезанном по линии, состоящей из отрезка с концами  $z = q_j, z = t_{j0}$ , и линии  $l_j$ , лежащей внутри области  $D$  и соединяющей точки  $t_{j0}, t_{00}, j = \overline{0, m}$ , (при  $j = 0$  линия  $l_j$  отсутствует), считаем, что эта ветвь на  $L_j$  принимает значение  $\arg(t - q_j) = \gamma, 0 \leq \gamma < 2\pi$ .

Пусть  $t_j = q_j + R_j e^{i\gamma_j}, 0 \leq \gamma_j < 2\pi$ , есть некоторая точка окружности  $L_j$ , положение этой точки, т.е. число  $\gamma_j$  будем считать заданным,  $j = \overline{1, m}$ .

Пусть  $\arg(z - t_j)$  — непрерывная ветвь, однозначная в круге  $|z| < 1$ , разрезанном по линии, состоящей из направленной как  $L_j$  дуги  $t_j t_{j0}$  этой окружности и вышеуказанной кривой  $l_j$ ; будем считать, что эта ветвь при  $\gamma_j > 0$  на окружности  $L_j$ , включая точки левого берега разреза по дуге  $t_j t_{j0}$ , принимает значения

$$\arg(t - t_j) = \begin{cases} (-\pi + \gamma + \gamma_j)/2, & 0 \leq \gamma < \gamma_j, \\ (\pi + \gamma + \gamma_j)/2, & \gamma_j < \gamma < 2\pi, \quad j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

При  $\gamma_j = 0$  эта формула принимает вид

$$\arg(t - t_{j0}) = (\pi + \gamma)/2, \quad 0 \leq \gamma < 2\pi.$$

Поэтому при вышеуказанном выборе ветвей аргументов непрерывная в области  $D$  ветвь

$$\arg \frac{z - t_j}{z - q_j} = \arg(z - t_j) - \arg(z - q_j)$$

на  $L_j$  в случае  $\gamma_j > 0$  принимает значение

$$\arg \frac{t - t_j}{t - q_j} = \begin{cases} (-\pi - \gamma + \gamma_j)/2, & 0 \leq \gamma < \gamma_j, \\ (\pi - \gamma + \gamma_j)/2, & \gamma_j < \gamma < 2\pi. \end{cases} \quad (3)$$

В частности, при  $\gamma_j = 0$  заключаем, что  $\arg \frac{z - t_{j0}}{z - q_j}$  на  $L_j$  принимает значение

$$\arg \frac{t - t_{j0}}{t - q_j} = \frac{\pi - \gamma}{2}, \quad 0 \leq \gamma < 2\pi. \quad (4)$$

2. Введем в рассмотрение функцию  $p_j(t) = 1$  на вышеуказанной дуге  $t_j t_{j0}$  окружности  $L_j, p_j(t) = 0$  на остальной части  $L_j$  и на всех других окружностях — компонентах  $L, j = \overline{1, m}$ . Далее краевое условие (2) запишем в равносильном виде

$$\operatorname{Re} [e^{-i\tilde{\nu}(t)} \tilde{F}(t)] = \tilde{c}(t), \quad (5)$$

где

$$\tilde{\nu}(t) = \nu(t) + \sum_{j=1}^m \left[ 2\pi p_j(t) + 2 \arg \frac{t - t_j}{t - q_j} + (1 + \kappa_j/2) \arg(t - q_j) \right], \quad (6)$$



$$\tilde{F}(z) = \prod_{j=1}^m \left[ (z - q_j)^{1+\kappa_j/2} \cdot \left( \frac{z - t_j}{z - q_j} \right)^2 \cdot F(z) \right], \quad (7)$$

$$\tilde{c}(t) = \frac{c(t)}{|G(t)|} \prod_{j=1}^m \left[ |t - q_j|^{1+\kappa_j/2} \cdot \left| \frac{t - t_j}{t - q_j} \right|^2 \right]. \quad (8)$$

Будем искать решение  $\tilde{F}(z)$  краевой задачи (5) в классе функций, непрерывных в области  $D$ , вплоть до её границы (при этом, как видно из формулы (7), функция  $F(z)$  может иметь особенности в точках  $t_j, j = \overline{1, m}$ ). Вначале найдем частное решение  $\tilde{F}_0(z)$  соответствующей однородной задачи

$$\operatorname{Re} [e^{-i\tilde{\nu}(t)} \tilde{F}_0(t)] = 0, \quad (9)$$

отличное от нуля всюду на  $L$ . Из (9) для аргумента

$$\arg \tilde{F}_0(t) = \tilde{\psi}(t) \quad (10)$$

такого решения, как и в [1], получим выражение

$$\tilde{\psi}(t) = \tilde{\nu}(t) + \frac{\pi}{2} + \pi n_j, \quad (11)$$

когда  $t \in L_j$ , где  $n_j$  — произвольное целое число,  $j = \overline{0, m}$ ,  $n_0 = 0$ . Таким образом, известны граничные значения  $\tilde{\psi}(t)$  функции  $\arg \tilde{F}_0(z)$  с точностью до слагаемого  $\pi n_j$  при нефиксированных пока значениях  $\gamma_j, j = \overline{1, m}$ . Остается найти функцию  $\tilde{F}_0(z)$ .

В статье [1] при нахождении функции  $\tilde{F}_0(z)$  были использованы результаты Э. И. Зверовича [4], связанные с отысканием регуляризующего множителя для решения краевой задачи Гильберта в случае многосвязной области, основанные на сложной теории с использованием аппарата теории функций на римановых поверхностях.

В настоящей работе для нахождения вышеуказанного частного решения  $\tilde{F}_0(z)$  задачи (9) предлагается более простой и прозрачный подход. Пусть  $z_0$  — заданная точка области  $D$ ,  $\arg(t - z_0)$  — граничное значение непрерывной ветви  $\arg(z - z_0)$ , однозначной в области  $D$ , разрезанной по линии, лежащей в области  $D$  и соединяющей точки  $z_0, t_{00}$ . Как видно из формул (6), (11), функция  $\tilde{\psi}(t) - (m + \kappa/2) \arg(t - z_0)$  непрерывна на каждой из окружностей  $L_j, j = \overline{0, m}$ , поэтому при обходе  $L_j, j = \overline{0, m}$ , приращения не получает. Следовательно, в силу принципа аргумента функция  $\tilde{F}_0(z)/(z - z_0)^{m+\kappa/2}$  не имеет нулей в области  $D$ . Тогда функция

$$\Phi(z) = -i \ln[\tilde{F}_0(z)/(z - z_0)^{m+\kappa/2}] \quad (12)$$

аналитична в области  $D$ , причем действительная часть её граничного значения равна  $\tilde{\psi}(t) - (m + \kappa/2) \arg(t - z_0)$ , т.е. согласно (10), (11) на  $L_j$

$$\operatorname{Re} \Phi(t) = \tilde{\nu}(t) + \frac{\pi}{2} + \pi n_j - (m + \kappa/2) \arg(t - z_0), \quad j = \overline{0, m}.$$

Отсюда в силу (6) с учетом выражений (3) для  $\arg \frac{t-t_j}{t-q_j}$  и  $p_j(t)$  будем иметь при  $t \in L_j, j = \overline{1, m}$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Phi(t) = & \frac{3\pi}{2} + \gamma_j + \pi n_j + \nu(t) + \sum_{j_1=1, j_1 \neq j}^m \left( \arg(t - q_{j_1}) + 2 \arg \frac{t - t_{j_1}}{t - q_{j_1}} \right) + \\ & + \sum_{j_1=1}^m \frac{\kappa_{j_1}}{2} \arg(t - q_{j_1}) - (m + \kappa/2) \arg(t - z_0), \end{aligned} \quad (13)$$

при  $t \in L_0$  получим

$$\operatorname{Re} \Phi(t) = \frac{\pi}{2} + \nu(t) + \sum_{j=1}^m \left( 2 \arg \frac{t - t_j}{t - q_j} + (1 + \kappa_j/2) \arg(t - q_j) \right) - (m + \kappa/2) \arg(t - z_0). \quad (14)$$



Поскольку функция  $\Phi(z)$  должна быть однозначной и аналитической в области  $D$ , то должны выполняться условия (см., например, [3, с. 383])

$$\int_L \operatorname{Re} \Phi(t) \alpha_k(t) ds = 0, \quad k = \overline{1, m}, \quad (15)$$

где  $\alpha_k(t) = \partial \beta_k(t) / \partial n$  есть производная по направлению внутренней для области  $D$  нормали в точке  $t$  границы  $L$  области  $D$ ,  $\beta_k(z)$  – гармоническая в области  $D$  функция, граничные значения которой определяются формулой

$$\beta_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in L_k, \\ 0 & \text{на остальных окружностях,} \end{cases} \quad (16)$$

$k = \overline{1, m}$ . Функции  $\beta_k(z)$ ,  $\alpha_k(t)$  считаем известными,  $k = \overline{1, m}$ .

Условия (15) с учетом (13), (14) запишем так

$$\begin{aligned} & \int_{L_0} \left[ \frac{\pi}{2} + \nu(t) + \sum_{j_1=1}^m \left( 2 \arg \frac{t - t_{j_1}}{t - q_{j_1}} + (1 + \kappa_{j_1}/2) \arg(t - q_{j_1}) \right) - (m + \kappa/2) \arg(t - z_0) \right] \alpha_k(t) ds + \\ & + \sum_{j=1}^m \int_{L_j} \left[ \frac{3\pi}{2} + \gamma_j + \pi n_j + \nu(t) + \sum_{j_1=1, j_1 \neq j}^m \left( \arg(t - q_{j_1}) + 2 \arg \frac{t - t_{j_1}}{t - q_{j_1}} \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{j_1=1}^m \frac{\kappa_{j_1}}{2} \arg(t - q_{j_1}) - (m + \kappa/2) \arg(t - z_0) \right] \alpha_k(t) ds = 0, \quad k = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Мы получили систему уравнений с неизвестными  $\gamma_j$  и  $n_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Учитывая, что мы ищем частное решение  $\tilde{F}_0(z)$  задачи (9), в предыдущих формулах и всюду в дальнейшем будем считать  $n_j = 2\tilde{n}_j$ , где  $\tilde{n}_j$  – целое число,  $j = \overline{1, m}$ .

Обозначая

$$a_{kj} = \int_{L_j} \alpha_k(t) ds, \quad k = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (17)$$

$$\theta_j = \gamma_j + 2\pi\tilde{n}_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (18)$$

последнюю систему представим так

$$\sum_{j=1}^m a_{kj} \theta_j + 2 \sum_{j=1}^m \int_{L_j} \left[ \sum_{j_1=1, j_1 \neq j}^m \arg \frac{t - t_{j_1}}{t - q_{j_1}} \right] \alpha_k(t) ds + 2 \int_{L_0} \left[ \sum_{j_1=1}^m \arg \frac{t - t_{j_1}}{t - q_{j_1}} \right] \alpha_k(t) ds = B_k, \quad k = \overline{1, m}, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} B_k = & - \int_{L_0} \left[ \frac{\pi}{2} + \nu(t) + \sum_{j_1=1}^m \left( 1 + \frac{\kappa_{j_1}}{2} \right) \arg(t - q_{j_1}) - \left( m + \frac{\kappa}{2} \right) \arg(t - z_0) \right] \alpha_k(t) ds - \\ & - \sum_{j=1}^m \int_{L_j} \left[ \frac{3\pi}{2} + \nu(t) + \sum_{j_1=1, j_1 \neq j}^m \arg(t - q_{j_1}) + \sum_{j_1=1}^m \frac{\kappa_{j_1}}{2} \arg(t - q_{j_1}) - \right. \\ & \left. - \left( m + \frac{\kappa}{2} \right) \arg(t - z_0) \right] \alpha_k(t) ds, \quad (20) \end{aligned}$$

здесь  $t_j = q_j + R_j e^{i\theta_j}$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Мы пришли к системе нелинейных уравнений с неизвестными  $\theta_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  (о решении системы сказано ниже). Определив из неё  $\theta_j$ ,  $2\pi N_j \leq \theta_j < 2\pi N_j + 2\pi$ , где  $N_j$  – целое число, взяв  $\tilde{n}_j = N_j$ , по формуле (18) найдем  $\gamma_j = \theta_j - 2\pi N_j$ ,  $0 \leq \gamma_j < 2\pi$ .



Считая, что числа  $\tilde{n}_j, \gamma_j, j = \overline{1, m}$ , уже определены ( $2\tilde{n}_j = n_j$ ), по формулам (13), (14) вычислим  $\operatorname{Re} \Phi(t)$  и с помощью оператора Шварца найдем однозначную аналитическую в области  $D$  функцию

$$\Phi(z) = S(\operatorname{Re} \Phi(t), z) + iv_0,$$

взяв произвольную действительную постоянную  $v_0 = 0$ .

Тогда согласно (12) будем иметь:

$$\tilde{F}_0(z) = e^{i\Phi(z)}(z - z_0)^{m+\kappa/2} \quad (21)$$

— частное решение задачи (9), отличное от нуля всюду на  $L$ . В силу (9)  $ie^{-i\tilde{v}(t)}\tilde{F}_0(t)$  — действительная величина, поэтому условие (5) можно записать так

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{\tilde{F}(t)}{i\tilde{F}_0(t)} \right] = c_*(t), \quad (22)$$

где

$$c_*(t) = \tilde{c}(t)/(ie^{-i\tilde{v}(t)}\tilde{F}_0(t)). \quad (23)$$

Как видно из (21), точка  $z_0$  является полюсом порядка  $m + \kappa/2$  функции  $\tilde{F}(z)/(i\tilde{F}_0(z))$ . Учитывая это, последнюю функцию будем искать в виде

$$\tilde{F}(z)/(i\tilde{F}_0(z)) = \Psi(z) + i\beta_0 + \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \mu_j/(z - z_0)^j, \quad (24)$$

где  $\Psi(z)$  — новая искомая аналитическая и однозначная в области  $D$  функция,  $\beta_0, \mu_j$  — произвольные соответственно действительная и комплексная постоянные.

Согласно (22), (24) всюду на  $L$  имеем

$$\operatorname{Re} \Psi(t) = c_*(t) - \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \operatorname{Re} [\mu_j/(t - z_0)^j]. \quad (25)$$

Функция  $\operatorname{Re} \Psi(t)$  должна удовлетворять условиям, аналогичным (15), поэтому должны выполняться соотношения

$$\sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \int_L \operatorname{Re} [\mu_j/(t - z_0)^j] \alpha_k(t) ds = \int_L c_*(t) \alpha_k(t) ds, \quad k = \overline{1, m}. \quad (26)$$

Эти соотношения представляют собой систему  $m$  линейных алгебраических уравнений с  $(2m + \kappa)$  неизвестными  $\operatorname{Re} \mu_j, \operatorname{Im} \mu_j, j = \overline{1, m + \kappa/2}$ . Считая условия (26) выполненными, по значениям  $\operatorname{Re} \Psi(t)$  формулы (25) с помощью оператора Шварца находим  $\Psi(z)$ , тогда в силу (24) будем иметь

$$\frac{\tilde{F}(z)}{i\tilde{F}_0(z)} = S \left( c_*(t) - \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \operatorname{Re} \frac{\mu_j}{(t - z_0)^j}, z \right) + i\beta_0 + \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \frac{\mu_j}{(z - z_0)^j}. \quad (27)$$

Отсюда, принимая во внимание (21) и выражение (7) для  $\tilde{F}(z)$ , получим

$$F(z) = ie^{i\Phi(z)}(z - z_0)^{m+\kappa/2} \left\{ S \left( c_*(t) - \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \operatorname{Re} \frac{\mu_j}{(t - z_0)^j}, z \right) + i\beta_0 + \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \frac{\mu_j}{(z - z_0)^j} \right\} / \left( \prod_{j=1}^m \left[ (z - q_j)^{1+\kappa_j/2} \cdot \left( \frac{z - t_j}{z - q_j} \right)^2 \right] \right). \quad (28)$$



Так как мы ищем решение  $F(z)$  краевой задачи (2), непрерывное на  $L$ , то должны потребовать, чтобы выражение в фигурных скобках (т.е. выражение (27)) последней формулы обращалось в нуль второго порядка в точках  $t_{j_1}$ ,  $j_1 = \overline{1, m}$ . С этой целью потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$\operatorname{Im} S\left(c_*(t) - \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \operatorname{Re} \frac{\mu_j}{(t-z_0)^j}, t_{j_1}\right) + \beta_0 + \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \operatorname{Im} \frac{\mu_j}{(t_{j_1}-z_0)^j} = 0, \quad j_1 = \overline{1, m}. \quad (29)$$

Кроме того, указанное выражение (27), заменив в нем предварительно  $t$  на  $t_* \in L$ , запишем для  $z = t = (q_{j_1} + R_{j_1} e^{i\gamma}) \in L_{j_1}$ . Далее, потребуем, чтобы производная по  $\gamma$  от него в точке  $t_{j_1}$  обращалась в нуль, и будем иметь

$$\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_{j_1}} \frac{\operatorname{Im} \left[ S(c_*(t_*), t) - S(c_*(t_*), t_{j_1}) \right]}{\gamma - \gamma_{j_1}} - \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \left\{ \operatorname{Im} \left[ S\left( \operatorname{Re} \frac{\mu_j}{(t_* - z_0)^j}, t \right) \right]_{\gamma=\gamma_{j_1}}' + \operatorname{Im} \frac{\mu_j j R_{j_1} e^{i\gamma_{j_1}}}{(t_{j_1} - z_0)^{j+1}} \right\} = 0, \quad (30)$$

здесь  $j_1 = \overline{1, m}$ . Последние условия (29), (30) являются необходимыми для непрерывности функции  $F(z)$  формулы (28) в точках  $t_{j_1}$ ; с учетом (8), (23) можно показать, что они являются и достаточными.

Соотношения (26), (29), (30) представляют собой систему  $3m$  уравнений с  $\kappa + 2m + 1$  действительными неизвестными  $\operatorname{Re} \mu_j$ ,  $\operatorname{Im} \mu_j$ ,  $\beta_0$ . Ранг матрицы этой системы равен  $3m$ , в чем убеждаемся, используя результаты, представленные в книге [3, с. 388]. Поэтому при  $\kappa \geq 2m$  решение  $F(z)$ , определяемое формулой (28), зависит от  $\kappa - m + 1$  действительных произвольных постоянных.

В случае  $\kappa < 2m$  задача рассматривается аналогично тому, как это есть в статье [1].

3. Вернемся к вопросу о решении системы (19). Как известно (см. например [3, с. 329]), определитель  $\Delta'$  матрицы  $\|a_{kj}\|$  отличен от нуля. Замечая, что  $a_{kk} < 0$ ,  $k = \overline{1, m}$  (см. например [5, с. 264]), рассмотрим матрицу  $\|a_{kj}/a_{kk}\|$ , определитель которой равен  $\Delta = \Delta' / (a_{11} a_{22} \cdots a_{mm})$  и отличен от нуля. Обозначим через  $A_{kj}$  алгебраическое дополнение к элементу  $a_{kj}/a_{kk}$  этого определителя. Разделим уравнение с номером  $k$  системы (19) на  $a_{kk}$  для каждого  $k = \overline{1, m}$ . Выражая с помощью формул Крамера  $\theta_j$ , входящие в первую сумму левой части каждого уравнения системы (19), запишем:

$$\theta_j = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^m A_{kj} \left\{ \frac{B_k}{a_{kk}} - 2 \sum_{j_*=1, j_1 \neq j_*}^m \int \left[ \sum_{j_1=1, j_1 \neq j_*}^m \arg \frac{t - t_{j_1}}{t - q_{j_1}} \right] \frac{\alpha_k(t)}{a_{kk}} ds - 2 \int_{L_0} \left[ \sum_{j_1=1}^m \arg \frac{t - t_{j_1}}{t - q_{j_1}} \right] \frac{\alpha_k(t)}{a_{kk}} ds \right\}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (31)$$

здесь, как и выше,  $t_j = q_j + R_j e^{i\theta_j}$ , и согласно (18)  $\theta_j$  — любое действительное число.

Систему (31) запишем в виде уравнения с оператором  $A$ :

$$x_* = A(x_*), \quad (32)$$

где вектор  $x_* = \{\theta_j\}_{j=1}^m$  — элемент банахова пространства  $X$  с нормой (см., например [6, с. 10, 49])  $\|x_*\| = \left( \sum_{j=1}^m \theta_j^2 \right)^{1/2}$ ,  $A(x_*)$  — вектор, координаты которого равны правым частям соответствующих уравнений системы (31), причем  $A$  является вполне непрерывным оператором [6, с. 409].

Так как каждая координата вектора  $A(x_*)$  является функцией периодической с периодом  $2\pi$  по каждому из аргументов  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ , то ясно, что в пространстве  $X$  найдется шар  $\|x_*\| < R'$  достаточно большого радиуса  $R'$ , который оператор  $A$  переводит в себя. Поэтому согласно принципу неподвижной точки Шаудера [6, с. 411] оператор  $A$  в указанном шаре имеет неподвижную точку, т.е. уравнение (32) имеет решение.

Итак, справедлива

**Теорема 1.** Система (31) имеет по крайней мере одно решение.



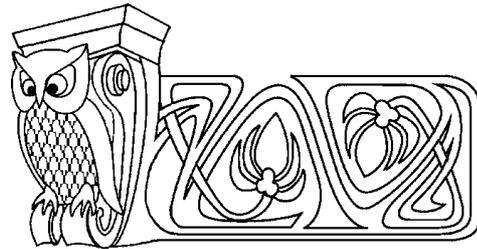
Для решения системы нелинейных уравнений (31) можно использовать известные методы решения таких систем. Можно показать, что система (31) имеет единственное решение в случае, когда все  $R_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , достаточно малы.

### Библиографический список

1. Салимов Р. Б. Новый подход к решению краевой задачи Гильберта для аналитической функции в много-связной области // Изв. вузов. Математика. 2000. № 2. С. 60–64.
2. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968. 511 с.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.
4. Зверович Э. И. Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровых классах на римановых поверхностях // УМН. 1971. Т. 26, вып. 1. С. 113–179.
5. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М. : Физматгиз, 1959. 628 с.
6. Треногин В. А. Функциональный анализ. М. : Наука, 1980. 495 с.

УДК 517.956.2

## РАЗРЕШИМОСТЬ В КЛАССИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ ЗАДАЧИ ПУАССОНА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ДВУМЕРНЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ



С. Л. Семенов

Воронежский государственный университет,  
кафедра функционального анализа  
E-mail: sergo\_7@list.ru

Устанавливается разрешимость в классическом смысле задачи Пуассона для оператора Лапласа на двумерных стратифицированных множествах.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения.

**Solvability of Poisson's Problem for Laplace Operator on Two Dimensional Stratified Sets in Usual Sense**

S. L. Semenov

Voronezh State University,  
Chair of Functional Analysis  
E-mail: sergo\_7@list.ru

Solvability of Poisson's problem for Laplace operator on two dimensional stratified sets is established in usual sense.

**Key words:** differential equations.

### ВВЕДЕНИЕ

Моделирование сложных физических систем часто сводится к исследованию уравнений на стратифицированных множествах (связных объединениях многообразий — стратов различной размерности). Например, задача о малых перемещениях механической системы, составленной из струн, мембран и упругих тел, или задача о диффузии в слоистой среде.

Исследование эллиптических дифференциальных уравнений на стратифицированных множествах активно проводится в настоящее время О. М. Пенкиным. Основные результаты о разрешимости эллиптических уравнений в этой области изложены в работах [1–3]. В них были получены условия слабой разрешимости для уравнений с «жестким» лапласианом и классической разрешимости для уравнений с «мягким» лапласианом. Было установлено, что для существования решений этих уравнений необходимо, помимо наложения ограничений на гладкость коэффициентов, входящих в уравнение, вводить ограничения на структуру стратифицированного множества. Так, в [1] доказано, что существование слабого решения обеспечивается на множествах, удовлетворяющих условию прочности, которое означает, что для каждого страта существует цепочка из стратов, соединяющая его с границей стратифицированного множества, причем размерности соседних стратов цепочки отличаются не больше чем на единицу и сама цепочка содержит только один страт, принадлежащий границе стратифицированного множества. В то же время условие прочности является недостаточным для существования классического решения. С целью установления существования классического решения для уравнения с «мягким» лапласианом было введено более строгое ограничение на структуру множества [2]. Классическая разрешимость обеспечивается на стратифицированном множестве, у которого достаточно малая окрестность любого страта, размерность которого меньше на 2 или более



максимальной размерности стратов множества, остается связной, если из этой окрестности изъять сам этот страт. Вопрос же о существовании классического решения для «жесткого» лапласиана пока открыт. В работах [4, 5] устанавливается классическая разрешимость задачи Вентцеля для уравнения Лапласа на области с гладкой границей, что гарантирует существование классического решения для задачи Пуассона для «жесткого» лапласиана на стратифицированном множестве, составленном из двух стратов: гладкой замкнутой поверхности и области, ограниченной этой поверхностью.

В настоящей работе изучается разрешимость задачи Пуассона для «жесткого» лапласиана на стратифицированном множестве. Точнее говоря, изучается классическая разрешимость следующей задачи:  $\Omega$  — стратифицированное множество, размерности стратов которого не превосходят двух, с непустой границей  $\partial\Omega$ . На данном множестве рассматривается следующее дифференциальное уравнение:

$$\Delta U(x) = F(x), \quad x \in \text{int } \Omega, \quad U|_{x \in \partial\Omega} = \psi.$$

Здесь под  $\Delta$  понимается «жесткий» оператор Лапласа, т.е. на каждом страте  $\sigma_{ik}$  размерности  $i$  оператор  $\Delta$  принимает вид

$$\Delta U(x) = \Delta_i U(x) + \sum_{k: \sigma_{ij} \prec \sigma_{i+1,k}} \frac{\partial}{\partial \nu_{j,k}} U, \quad x \in \sigma_{ij},$$

где  $\nu_{j,k}$  означает нормаль к  $\sigma_{ij}$ , направленную внутрь  $\sigma_{i+1,k}$ ,  $\Delta_i$  — обычный  $i$ -мерный оператор Лапласа. В нуль-мерных стратах требуется непрерывность функции  $U$ .

В работе устанавливается классическая разрешимость данной задачи в двумерном случае, при этом, кроме условий налагаемых на гладкость функций  $F$  и  $\psi$ , на структуру стратифицированного множества налагается требование существования прочной цепочки между двумя любыми стратами и условие, означающее, что каждый одномерный страт  $\sigma_{1k}$ , примыкающий к двумерному страту, является частью замкнутой кривой  $\Gamma$  — границы двумерного страта. При этом если изъять замыкание страта  $\sigma_{1k}$ , то кривая  $\Gamma$  перестанет быть замкнутой.

## 1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пространство  $L(\Omega)$  — пространство суммируемых функций.

Пространство  $C^{m+\lambda}(Q)$ , где  $(0 < \lambda < 1)$ ,  $m \in \mathbb{N}$  и  $Q$  — компактное подмножество  $R^n$ , обозначает пространство функций, имеющих непрерывные производные, вплоть до  $m$ -го порядка, и непрерывные, по Гельдеру, с показателем  $\lambda$  производные  $m$ -го порядка с нормой

$$\|u\|_{C^{m+\lambda}(Q)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \max_{x \in Q} |D^\alpha u| + \max_{|\alpha|=m} M_\lambda(D^\alpha u),$$

где  $D^\alpha$  — оператор дифференцирования для мультииндекса  $\alpha$  и  $M_\lambda(D^\alpha u)$  — постоянная Гельдера функции  $D^\alpha u$ .

Пространство  $C_0^{m+\lambda}(Q)$  — подпространство  $C^{m+\lambda}(Q)$ , образованное функциями  $u$  такими, что  $u(x)|_{x \in \partial Q} = 0$ .

Через  $\Omega$  будем обозначать область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ .

Под *кусочно-гладкой*  $(n-1)$ -мерной *поверхностью* будем понимать границу области  $\Omega$ ,  $\partial\Omega = \bigcup_{k=1}^m \partial\Omega_k$ , где  $\partial\Omega_k$  — гладкая  $(n-1)$ -мерная поверхность и граница каждой  $\partial\Omega_k$  является гладкой  $(n-2)$ -мерной поверхностью.

Через  $\theta$  будем обозначать множество точек потери гладкости  $\partial\Omega$ .

Поверхность будем называть *плоской*, если все ее главные кривизны тождественно равны нулю.

*Кусочно-плоской* поверхностью будем называть поверхность, если она кусочно-гладкая и  $\partial\Omega = \bigcup_{k=1}^m \partial\Omega_k$ , где все  $\partial\Omega_k$  — плоские поверхности.

*Потенциалом двойного слоя* будем называть

$$W\rho = \int_{\partial\Omega} \rho(x) \frac{(\vec{r}, N_x)}{r^n} dS_x \quad \text{при } n > 2, \quad W\rho = \int_{\partial\Omega} \rho(x) \frac{(\vec{r}, N_x)}{r^2} dS_x \quad \text{при } n = 2,$$



потенциалом простого слоя —

$$V\rho = \int_{\partial\Omega} \rho(x) \frac{1}{r^{n-2}} dS_x \quad \text{при } n > 2, \quad V\rho = \int_{\partial\Omega} \rho(x) \ln \frac{1}{r} dS_x \quad \text{при } n = 2,$$

где  $N_x$  — нормаль к  $\partial\Omega$  в точке  $x$ ,  $\vec{r} = x - y$ ,  $r = \|x - y\|$ .

В случаях, когда необходимо подчеркнуть, что значение потенциалов простого и двойного слоев берется в точке  $y$ , будем записывать  $(V\rho)(y)$  и  $(W\rho)(y)$  соответственно.

Черта сверху  $\overline{W\rho}$  означает прямое значение, т. е. значение, взятое в точках  $\partial\Omega \setminus \theta$ . При  $y \in \theta$  полагаем  $(\overline{W\rho})(y) = \lim_{\substack{z \rightarrow y \\ z \in \partial\Omega \setminus \theta}} (\overline{W\rho})(z)$ . Корректность подобного определения будет показана ниже.

Иногда будем записывать  $W_{\partial\Omega}$ , чтобы подчеркнуть область интегрирования. Если поверхность кусочно-гладкая, прямое значение в точке излома поверхности понимается в предельном смысле.

Через  $G_{\Omega}\rho$  будем обозначать оператор, заданный интегралом  $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\nu} G(x, y) \rho(y) dy$ , где  $G(x, y)$  — функция Грина для оператора Лапласа для множества  $\Omega$ .

Будем обозначать через  $\Phi$  оператор, обратный к  $-\frac{(n-2)\omega_n}{2}I + \overline{W}$  при  $n > 2$  и к  $-\pi + \overline{W}$  при  $n = 2$ .

## 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛОВ

В этом параграфе приводятся необходимые свойства потенциала двойного слоя, определенного на кусочно-плоской поверхности, и вытекающая из них теорема о нормальных производных.

Приведем в удобном для дальнейшего исследования виде формулировки классических результатов из теории потенциалов (см., например, [6, 7]). Начнем с предельных теорем для потенциалов. Классическая формулировка имеет следующий вид:

**Теорема 1** [7, с. 65]. Пусть  $\Omega$  — область в  $R^n$  с границей, являющейся поверхностью Ляпунова,  $\rho \in C(\partial\Omega)$ . Потенциал двойного слоя непрерывен в  $\overline{\Omega}$  и на  $\partial\Omega$  принимает значения

$$W\rho = -\frac{(n-2)\omega_n}{2}\rho + \overline{W\rho} \quad \text{при } n > 2, \quad W\rho = -\pi\rho + \overline{W\rho} \quad \text{при } n = 2,$$

где  $\omega_n$  — площадь  $n$ -мерного шара.

Распространение данного результата на поверхности с нерегулярной границей установлено в [6], где условие Ляпунова для поверхности заменено на

$$\sup_{\xi \in \partial\Omega} \{\text{var } \omega(\xi, \partial\Omega \setminus \xi) : \xi \in \partial\Omega\} < \infty.$$

Здесь  $\omega(\xi, \partial\Omega \setminus \xi)$  — функция, показывающая телесный угол, под которым видно множество  $\partial\Omega \setminus \xi$  из точки  $\xi$ . Строгое ее определение дается в [6]. Кусочно-плоская поверхность удовлетворяет данному условию. Вопрос о существовании предельных значений потенциала для поверхностей с нерегулярной границей был исследован в [6]. Формулировка теоремы о предельных значениях потенциала двойного слоя по сравнению со случаем поверхности Ляпунова внешне изменений не претерпит. Но в случае кусочно-плоской поверхности под прямым значением в точках излома поверхности понимается уже предел, полученный при стремлении точки по плоским  $(n-1)$ -мерным кускам поверхности. Эти пределы, полученные при стремлении к одной точке по разным плоским  $(n-1)$ -мерным кускам поверхности, будут совпадать, т. е. имеет место теорема

**Теорема 2** [6]. Пусть  $\rho \in C(\partial\Omega)$  и заданы потенциалы двойного и простого слоя на кусочно-гладкой поверхности. Тогда потенциал двойного слоя непрерывен в  $\overline{\Omega}$  и на  $\partial\Omega$  принимает значения

$$W\rho = -\frac{(n-2)\omega_n}{2}\rho + \overline{W\rho} \quad \text{при } n > 2, \quad W\rho = -\pi\rho + \overline{W\rho} \quad \text{при } n = 2$$

и оператор  $\overline{W}$  действует из  $C(\partial\Omega)$  в  $C(\partial\Omega)$  непрерывно.

Рассмотрим теперь вопрос представления решения задачи Дирихле для оператора Лапласа в виде потенциала двойного слоя, заданного на кусочно-плоской поверхности.



В [6] устанавливается следующая теорема.

**Теорема 3** [6]. Пусть  $\Omega$  — область в  $R^n$  и  $\partial\Omega$  удовлетворяет условиям

$$\sup_{\xi \in \partial\Omega} \{\text{var } \omega(\xi, \partial\Omega \setminus \xi) : \xi \in \partial\Omega\} < \infty,$$

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \{\text{var } (\omega(\xi, S \cap B_r(\xi))) : \xi \in \partial\Omega\} < \frac{\omega_n}{2}, \quad (1)$$

где  $\omega_n$  — площадь  $n$ -мерного шара. Тогда уравнения

$$-\frac{(n-2)\omega_n}{2}\rho + \overline{W}\rho = f \quad \text{при } n > 2, \quad -\pi\rho + \overline{W}\rho = f \quad \text{при } n = 2$$

разрешимы в  $C(\partial\Omega)$  относительно  $\rho$  единственным образом.

К сожалению, условию (1) удовлетворяют не все поверхности с кусочно-плоской границей. Тем не менее для дальнейших исследований будет достаточно следующей теоремы о представлении решения задачи Дирихле для оператора Лапласа.

**Теорема 4.** Пусть  $\Omega$  — область в  $R^n$  с кусочно-плоской границей. Тогда существует конечное множество областей с кусочно-плоской границей  $\{\Omega_i\}_{i=0}^m$ , что  $\Omega = \bigcup_{i=0}^m \Omega_i$ , и любое решение задачи Дирихле для оператора Лапласа представимо в виде потенциала двойного слоя на каждом  $\Omega_i$ .

**Доказательство.** Для представления решения задачи Дирихле достаточно выполнения для границы области условия (1), но оно удовлетворяется лишь в том случае, если все плоские куски границы образуют углы, меньшие  $\pi$ . В случае если плоские куски границы образуют угол больше  $\pi$ , область  $\Omega$  можно представить в виде конечного объединения областей  $\Omega_i$  с углами, меньшими  $\pi$ , и кусочно-плоской границей, что для любых двух точек  $x \in \Omega$  и  $y \in \Omega$  найдется цепочка попарно пересекающихся множеств  $\Omega_{i_k}$  такая, что  $x \in \Omega_{i_0}$ ,  $y \in \Omega_{i_m}$  и  $\Omega_{i_{k-1}} \cap \Omega_{i_k} \neq \emptyset$   $k = 0, 1, \dots, m$ . Решение на объединении множеств строится при помощи альтенирующего процесса Шварца [8, с. 296–302], результатом применения которого становится отыскание граничных условий на  $\partial\Omega_i \setminus \partial\Omega$  для каждого множества  $\Omega_i$ , при котором решение задачи Дирихле на области  $\Omega_{i_1}$  будет совпадать с решением задачи Дирихле для области  $\Omega_{i_2}$  на их пересечении. Каждая область  $\Omega_i$  удовлетворяет (1), и решение представимо в виде потенциала двойного слоя на ней.  $\square$

Установим теперь теоремы о непрерывности производных. С этой целью введем в рассмотрение функциональное пространство.

Пусть дано замкнутое множество  $\Gamma \in R^n$ ,  $n > 0$ , причем  $\partial\Gamma$  — кусочно-гладкая поверхность и дана последовательность открытых множеств  $\{D_i\}_{i=1}^\infty$ , что  $\partial D_i$  — гладкая поверхность,  $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \dots \subset \Gamma$  и  $\bigcup_{i=1}^\infty D_i = \Gamma$ ,  $1 > \lambda > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда определим пространство  $E^{k+\lambda}(\Gamma) = \{\phi : \phi \in C(\Gamma), \phi \in C^{k+\lambda}(D_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots\}$  с топологией, заданной системой полунорм

$$p_0(\phi) = \|\phi\|_{C(\Gamma)}, \quad p_i(\phi) = \|\phi\|_{C^{k+\lambda}(D_i)} \quad i = 1, 2, \dots$$

Построение самой топологии описывается в [9, с. 33–38]. В частности, локальную базу топологии в нулевой точке образуют множества типа  $\{x : p_i(x) < \varepsilon\}$  для всякого  $\varepsilon$ .

Пространство  $E_0^{k+\lambda}(\Gamma)$  определяется так же как и  $E^{k+\lambda}(\Gamma)$  с заменой  $C(\Gamma)$  на  $C_0(\Gamma)$ :  $E_0^{k+\lambda}(\Gamma) = \{\phi : \phi \in C_0(\Gamma), \phi \in C^{k+\lambda}(D_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots\}$ .

**Теорема 5.** Пусть  $\Omega$  — область с кусочно-плоской границей в  $R^n$ ,  $\Gamma$  — плоская  $(n-1)$ -мерная поверхность и  $\Gamma \subset \Omega$ . Тогда оператор  $\Phi$  действует непрерывно из  $C(\Omega) \cap E^{m+\lambda}(\Gamma)$  в  $C(\Omega) \cap E^{m+\lambda}(\Gamma)$ .

**Доказательство.** Достаточно доказать, что оператор  $\Phi$  действует непрерывно из  $C(\Omega) \cap E^{m+\lambda}(\Gamma)$  в  $C(\Omega) \cap C^{m+\lambda}(D_i)$  для всякого  $i$ . Это тривиально следует из нулевой кривизны границы, поскольку

$$(\overline{W}_\Omega \rho)(x) = (\overline{W}_{\Omega \setminus \Gamma} \rho)(x) \quad x \in \Gamma,$$

т. е.  $\overline{W}_\Omega \rho$  гладка на  $\Gamma$ , и нормы производных стремятся к нулю вместе с максимумом  $\rho$ .  $\square$



**Лемма 1.** Пусть  $\Lambda$  — кусочно-плоская  $(n - 1)$ -мерная незамкнутая поверхность в  $R^n$  и  $\Gamma$  — плоская  $(n - 1)$ -мерная поверхность такова, что  $\Lambda \cap \Gamma$  является  $(n - 2)$ -мерной плоской поверхностью и  $\Gamma$  пересекается под углами, отличными от 0 и  $2\pi$ . Тогда оператор  $\frac{\partial}{\partial \nu} W_\Lambda$  действует непрерывно из  $C(\Lambda)$  в  $L(\Gamma)$ , где  $\nu$  — нормаль к  $\Gamma$ .

**Доказательство.** В точках, не лежащих на  $\Lambda$ , можно записать

$$\frac{\partial}{\partial \nu} W_\Lambda \rho = \int_\Lambda \rho(x) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{(\vec{r}, N_x)}{r^n} dS_x = \int_\Lambda \rho(x) \left( \frac{(\nu, N_x)}{r^n} - \frac{n(\vec{r}, N_x)(\vec{r}, \nu)}{r^{n+2}} \right) dS_x,$$

тогда

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \nu} W_\Lambda \rho \right\|_{L(\Gamma)} \leq \|\rho\|_{C(\Lambda)} M \int_{\Gamma \times \Lambda} \frac{1}{r^n} dx dy.$$

Так как поверхности  $(n - 1)$ -мерные, то последний интеграл сходится при  $n > 2$ . Следовательно, в случае  $n > 2$  оператор  $\frac{\partial}{\partial \nu} W_\Lambda$  действует непрерывно из  $C(\Lambda)$  в  $L(\Gamma)$ .

Доказательство для случая  $n = 2$  проведем редукцией 3-мерного случая. Без ограничения общности можно полагать, что  $\Lambda$  и  $\Gamma$  пересекаются в одной точке  $x_0$ , иначе разобьем  $\Gamma$  на несколько отрезков. Пусть дана кривая  $\Lambda$ , продолжим ее до замкнутой ломаной кривой  $\tilde{\Lambda}$  так, что  $\Gamma$  попадет внутрь области, ограниченной  $\tilde{\Lambda}$ , и продолжим на нее  $\rho$  без увеличения нормы. Зафиксируем отрезок  $[0, h]$  и рассмотрим цилиндр  $\tilde{\Lambda} \times [0, h]$ . Возьмем функцию  $f(x, z) = (W_{\tilde{\Lambda}} \rho)(x)$ ,  $x \in \tilde{\Lambda}$  и  $z \in [0, h]$ . Тогда  $f(x, z)$  гармонична внутри области  $\tilde{\Lambda} \times [0, h]$  и существует  $\psi$  такая, что  $W_{\tilde{\Lambda} \times [0, h]} \psi = f$ . Тогда

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \nu} W_{\tilde{\Lambda} \times [0, h]} \psi \right\|_{L(\Gamma)} \leq M_1 \|\psi\|_{C(\tilde{\Lambda} \times [0, h])} = M_1 \|W_{\tilde{\Lambda}} \rho\|_{C(\tilde{\Lambda})} \leq M_2 \|\rho\|_{C(\tilde{\Lambda})} \leq M_2 \|\rho\|_{C(\Lambda)}.$$

В то же время, по построению

$$\int_{\Gamma \times [0, h]} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} W_{\tilde{\Lambda} \times [0, h]} \psi \right| dx dz = h \int_\Gamma \left| \frac{\partial}{\partial \nu} W_{\tilde{\Lambda} \setminus \Lambda} \phi \right| dx + h \int_\Gamma \left| \frac{\partial}{\partial \nu} W_\Lambda \phi \right| dx.$$

Если  $x_0$  не является одним из концов кривой  $\Lambda$ , то  $\left\| \frac{\partial}{\partial \nu} W_{\tilde{\Lambda} \setminus \Lambda} \phi \right\|_{C(\Gamma)} < M_3 \|\phi\|_{C(\Lambda)}$ . Если же  $x_0$  — конец кривой  $\Lambda$ , то в случае продления  $\phi$  константой  $\phi(x_0)$  в некоторой окрестности точки  $x_0$  снова имеем  $\left\| \frac{\partial}{\partial \nu} W_{\tilde{\Lambda} \setminus \Lambda} \phi \right\|_{C(\Gamma)} < M_3 \|\phi\|_{C(\Lambda)}$ . Отсюда при достаточно малых  $h$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \nu} W_\Lambda \phi \right\|_{L(\Gamma)} < M \|\phi\|_{C(\Lambda)}.$$

□

В [7, с. 91–95] была приведена формула, выражающая частные производные потенциала двойного слоя, с дифференцируемой плотностью  $\rho$  в случае трехмерного пространства. Ее двумерный аналог выводится абсолютно так же и имеет следующий вид: пусть  $\rho \in C^{1+\lambda}(\Omega)$ , тогда в случае замкнутой кривой  $\Omega$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} W \rho = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} V \cos(N, x_i) \mathcal{D}_{y_i} \rho + W \mathcal{D}_{y_j} \rho$$

и в случае незамкнутой кривой

$$\frac{\partial}{\partial x_j} W \rho = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} V \cos(N, x_i) \mathcal{D}_{y_i} \rho + W \mathcal{D}_{y_j} \rho + v \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial y_1} \Big|_A^B,$$

где  $\mathcal{D}_{y_i} \rho(y) = \left( \frac{\partial}{\partial \rho_i} v \right) - \frac{\partial}{\partial \nu} \rho \cos(N, y_i)$ , скобки означают, что взято предельное значение,  $N$  — нормаль к кривой и точки  $A$  и  $B$  — концы кривой  $\Omega$ . Отметим, что  $\mathcal{D}_{y_i} \rho(y)$  вычисляется для некоторого продления  $\rho$  с кривой  $\Omega$  в ее окрестность, но не зависит от способа продления.



Далее, когда рассматривается функция  $\phi$  из  $E_0(\Gamma)$  на  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma \subset \Gamma_1$  считаем  $\phi$  доопределенной нулем.

**Теорема 6.** Пусть  $\Omega$  — область в  $R^2$  с кусочно-плоской границей,  $\Gamma$  — отрезок,  $\Gamma \subset \partial\Omega$ ,  $\nu$  — нормаль к  $\Gamma$ . Оператор  $\frac{\partial}{\partial\nu}W\Phi$  действует непрерывно из  $E_0(\Gamma)$  в  $L(\Gamma)$ . Пусть  $D \subset \Gamma$  и  $\partial D$  — гладка, тогда оператор  $\frac{\partial}{\partial\nu}W\Phi$  действует непрерывно из  $E_0^{2+\lambda}(\Gamma)$  в  $C^{2+\lambda}(D)$ , где  $0 < \lambda < 1$ . Оператор  $\frac{\partial}{\partial\nu}W\Phi$  доопределяется до оператора  $\tilde{A}$ , действующего из  $C_0(\Gamma)$  в  $L(\Gamma)$  и из  $C_0(\Gamma)$  в  $C^\lambda(D)$  непрерывно.

**Доказательство.** Запишем оператор в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial\nu}W\Phi\rho = \frac{\partial}{\partial\nu}W\Phi\rho_1 + \frac{\partial}{\partial\nu}W\Phi\rho_2 + \frac{\partial}{\partial\nu}W\Phi\rho_3,$$

где  $(I - \bar{W})^{-1}\rho_1 \in C(\partial\Omega)$  и равно нулю на  $\Gamma$ ,  $(I - \bar{W})^{-1}\rho_2$  — гладкая на  $\partial\Omega$  функция, равная  $(I - \bar{W})^{-1}\rho$  на  $\partial\Gamma$  и  $\|(I - \bar{W})^{-1}\rho_2\|_{C^{2+\lambda}(\partial\Omega)} < M\|(I - \bar{W})^{-1}\rho\|_{C(\partial\Omega)}$ , где  $M$  не зависит от  $\rho$ ,  $(I - \bar{W})^{-1}\rho_3 \in E_0^{2+\lambda}(\Gamma)$ .

Для полного доказательства теоремы достаточно показать выполнение утверждений для каждого из слагаемых. Для  $(I - \bar{W})^{-1}\rho_1$  утверждение о непрерывности в пространство  $L$  справедливо ввиду теоремы 1. Остальные 2 пункта теоремы для  $\rho_1$  очевидны.

Рассмотрим  $(I - \bar{W})^{-1}\rho_2$ . Обозначим  $v = (I - \bar{W})^{-1}\rho_2$ . Выбирая оси координат так, что ось  $x_1$  совпадает с нормалью к  $\Gamma$ , представление производной двойного потенциала примет вид

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\bar{W}v = \frac{\partial}{\partial x_1}\bar{W}v = - \sum \frac{\partial}{\partial x_j}V_{\Omega \setminus \Gamma}(\cos(N, x_j)\mathcal{D}_{y_j}v) + W_{\Omega \setminus \Gamma}\mathcal{D}_{y_1}v.$$

Здесь в выражениях для  $\mathcal{D}_{y_j}v(y)$  в качестве функции  $v$  берется ее продление в некоторой окрестности каждого плоского участка границы  $\partial\Gamma$  по нормали тождественным образом, т. е.  $\mathcal{D}_{y_j}v(y) = \frac{\partial}{\partial y_j}v$ .

Отсюда следует непрерывность  $\frac{\partial}{\partial\nu}W\Phi\rho_2$  в  $L(\Gamma)$  и в  $C^\lambda(D)$ , а также существование и непрерывность продления оператора.

Наконец рассмотрим  $(I - \bar{W})^{-1}\rho_3$ . Отметим, что во внутренних точках  $D$  существуют нормальные производные у  $Wv$ , поскольку  $v$  имеет непрерывные, по Гельдеру, производные [7, с. 91–95]. Положим сначала, что  $(I - \bar{W})^{-1}\rho_3$  — гладкая функция. Снова возвращаясь к представлению производной потенциала двойного слоя с дифференцируемой плотностью, на этот раз на незамкнутой поверхности получим

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\bar{W}v = v \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial y_1} \Big|_A^B = 0,$$

где  $A$  и  $B$  — концы отрезка  $\Gamma$ . Ввиду плотности гладких функций в пространстве непрерывных функций получаем справедливость всех трех утверждений.  $\square$

**Теорема 7.** Пусть  $\Omega$  — область в  $R^2$  с кусочно-плоской границей,  $\Gamma$  — отрезок,  $\Gamma \subset \partial\Omega$ ,  $\nu$  — нормаль к  $\Gamma$ . Оператор  $\frac{\partial}{\partial\nu}G_\Omega$  действует непрерывно из  $E_0(\Gamma)$  в  $L(\Gamma)$ . Пусть  $D \subset \Gamma$  и  $\partial D$  — гладка, тогда оператор  $\frac{\partial}{\partial\nu}G_\Omega$  действует непрерывно из  $E_0^{2+\lambda}(\Gamma)$  в  $C^{2+\lambda}(D)$ , где  $0 < \lambda < 1$ .

Оператор  $\frac{\partial}{\partial\nu}G_\Omega$  может быть доопределен до оператора  $\tilde{A}$ , действующего из  $C_0(\Gamma)$  в  $L(\Gamma)$  и из  $C_0(\Gamma)$  в  $C^{2+\lambda}(D)$ , непрерывно.

**Доказательство.** Доказательство следует из установленного в теоремах 4 и 6 представления решения задачи Дирихле.  $\square$



### 3. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ПУАССОНА ДЛЯ ЖЕСТКОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Приведем определение стратифицированного множества.

*Стратифицированным множеством* мы называем подмножество  $\Omega$  пространства  $\mathbb{R}^d$ , представленное в виде объединения

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{d(\Omega)} \left( \bigcup_{j=1}^{n(k)} \sigma_{kj} \right) \quad (2)$$

— конечного числа многообразий без края (стратов),  $\sigma_{kj}$  — подмногообразий пространства  $\mathbb{R}^d$ . Здесь  $d(\Omega)$  — максимальная размерность входящих в  $\Omega$  стратов, а  $n(k)$  — количество стратов размерности  $k$ .

В обозначении  $\sigma_{kj}$  первый индекс показывает размерность страта, а второй — его номер при автономной, как это видно из (2), нумерации стратов данной размерности  $k$ ; если первый или второй индексы являются арифметическими выражениями, мы будем использовать запятую для отделеения первого индекса от второго. Будем писать  $\sigma_{kj} \succ \sigma_{li}$ , если  $k > l$ , и  $\sigma_{li} \subset \partial\sigma_{kj}$ . Здесь  $\partial\sigma_{kj}$  означает границу страта  $\sigma_{kj}$  в упомянутой выше топологии; легко видеть, что она равна разности  $\bar{\sigma}_{kj} \setminus \sigma_{kj}$ . Черта над буквой, как всегда, означает замыкание. Дополнительно предполагаем, что все  $\sigma_{ij}$  — плоские поверхности.

Приведем еще одно определение, необходимое для описания стратифицированных множеств.

Пусть дано стратифицированное множество  $\Omega$ . Будем говорить, что страты  $\sigma_{ki}$  и  $\sigma_{mj}$  соединены прочной цепочкой стратов  $\sigma_{k_1 i_1}, \sigma_{k_2 i_2}, \dots, \sigma_{k_p i_p}$ , если выполнены следующие условия:

- 1)  $\sigma_{k_1 i_1} = \sigma_{ki}$  и  $\sigma_{k_p i_p} = \sigma_{mj}$ ;
- 2) для любого  $1 \leq q \leq 1 - p$  либо  $\sigma_{k_q i_q} \prec \sigma_{k_{q+1} i_{q+1}}$ , либо  $\sigma_{k_q i_q} \succ \sigma_{k_{q+1} i_{q+1}}$ ;
- 3)  $|k_{q+1} - k_q| = 1$  для любого  $1 \leq q \leq 1 - p$ .

Отметим, что в определении не включается никаких ограничений о принадлежности стратов к границе стратифицированного множества.

Как было установлено в [1], разрешимость задачи Дирихле для оператора Лапласа на стратифицированном множестве зависит не только от гладкости многообразий, составляющих множество, и гладкости функций, входящих в состав уравнения, но и от структуры самого стратифицированного множества. С этой целью было введено понятие прочного стратифицированного множества, означающее, что любой страт можно соединить с некоторым граничным стратом  $\sigma_{mj}$  прочной цепочкой, причем все входящие в нее страты, кроме  $\sigma_{mj}$ , не являются граничными.

Так, в [3, с. 237] было высказано в качестве гипотезы достаточности для классической разрешимости условие «усиленной прочности», которое означает, что любые два страта могут быть соединены прочной цепочкой стратов, причем только крайние страты цепочки могут принадлежать границе стратифицированного множества.

Мы на структуру множества будем налагать следующие требования:

- 1) любые два страта могут быть соединены прочной цепочкой стратов;
- 2) для каждого страта  $\sigma_{ij}$  выполняется условие: если найдется страт  $\sigma_{i+1, m}$ , что  $\sigma_{ij} \prec \sigma_{i+1, m}$ , то  $\partial\sigma_{i+1, m}$  является замкнутой поверхностью, ограничивающей  $\sigma_{i+1, m}$ , в то время как  $\partial\sigma_{i+1, m} \setminus \sigma_{ij}$  замкнутой поверхностью не является. Обозначим через  $P(\sigma_{ij}, \sigma_{i+1, m})$  поверхность, ограничивающую  $\sigma_{i+1, m}$ .

Иными словами, второе условие означает, что если страт примыкает к страту размерности на 1 больше, то он является частью поверхности, ограничивающей этот страт старшей размерности, либо, с учетом первого условия, страт не примыкает к стратам большей размерности. Существенным является и то, что граница  $(i + 1)$ -мерного страта должна являться  $i$ -мерной поверхностью (многообразием).

Отметим также, что первое условие включает в себя условие прочности. Действительно, мы можем соединить любой страт прочной цепочкой с некоторым граничным. Если внутри цепочки содержатся граничные страты, то для удовлетворения условию прочности достаточно укоротить цепочку до первого встретившегося в ней граничного страта.

Далее будем рассматривать стратифицированные множества, удовлетворяющие введенным выше ограничениям на структуру множества, все страты которых плоские и имеют размерности не больше 2.

Приведем соображение, на основе которого строится доказательство существования решения задачи Пуассона для жесткого оператора Лапласа на стратифицированном множестве. Пусть решение



существует, тогда его сужение на каждый страт будет являться решением задачи Пуассона для классического оператора Лапласа с краевым условием Дирихле на границе страта. Мы же будем решать обратную задачу, т. е. построим функцию, являющуюся на каждом страте решением задачи Пуассона для классического оператора Лапласа, при этом функции, задающие краевые условия Дирихле, будем подбирать таким образом, что на границах стратов будут выполняться условия трансмиссии. Данное соображение приводит к необходимости точного описания топологии функциональных пространств, которым принадлежат решения классической задачи Пуассона на области с кусочно-гладкой границей в зависимости от гладкости их сужений на границу области.

Основной проблемой является тот факт, что решение задачи Дирихле для классического оператора Лапласа, заданной на множестве с кусочно-плоской границей, может не иметь первых производных в угловых граничных точках, даже в случае гладкости на границе. Поэтому топология функциональных пространств вводится с учетом этих угловых особенностей. Отметим также, что в [10] было показано, что функция, гармоничная на стратифицированном множестве, может не иметь первых производных в угловых точках стратов, даже если эти точки не принадлежат границе стратифицированного множества.

В предыдущем параграфе были даны определения пространств  $E^{k+\lambda}(\Gamma)$  и  $E_0^{k+\lambda}(\Gamma)$ . По сути, эти пространства включают функции, имеющие непрерывные, по Гельдеру, производные  $k$ -го порядка во внутренних точках  $\Gamma$ . Аналогично вводится пространство  $LE^{k+\lambda}(\Gamma) = \{\phi : \phi \in L(\Gamma), \phi \in C^\lambda(D_i), i = 1, 2, \dots\}$  с топологией

$$p_0(\phi) = \|\phi\|_{L(\Gamma)}, \quad p_i(\phi) = \|\phi\|_{C^{k+\lambda}(D_i)} \quad i = 1, 2, \dots$$

Далее определяется пространство функций, имеющих непрерывные производные в каждой точке  $\Gamma$ , за исключением заранее определенного подмножества  $\partial\Gamma$ .

Пусть дано замкнутое множество  $\Gamma \in R^n$ ,  $n > 0$ , причем  $\partial\Gamma$  — кусочно-гладкая замкнутая  $(n - 1)$ -мерная поверхность, кусочно-гладкая поверхность  $\Lambda \subset \partial\Gamma$  и дана последовательность замкнутых множеств  $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ , что  $\partial B_i$  — гладкая  $(n - 1)$ -мерная поверхность,  $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \dots \subset \Gamma$ ,  $\partial B_i \cap \Lambda = \emptyset$ ,  $\partial B_i \cap \partial\Gamma \neq \emptyset$ ,  $\partial B_1 \cap \partial\Gamma \subset B_2 \cap \partial\Gamma \subset \dots \subset \partial\Gamma$  и  $\overline{\partial\Gamma \setminus \Lambda} = \bigcup_i (\partial B_i \cap \partial\Gamma)$ ,  $1 > \lambda > 0$ ,  $1 > \lambda' > 0$ . Тогда определим пространство  $E^{2+\lambda, 1+\lambda'}(\Gamma, \Lambda) = \{\phi : \phi \in E^{2+\lambda}(\Gamma), \phi \in C^{1+\lambda'}(B_i), i = 1, 2, 3, \dots\}$  с топологией заданной системой полуноорм:

$$p_0(\phi) = \|\phi\|_{C(\Gamma)}, \quad p_i(\phi) = \|\phi\|_{C^{2+\lambda}(D_i)} + \|\phi\|_{C^{1+\lambda'}(B_i)} \quad i = 1, 2, \dots$$

**Теорема 8.** Пространства  $E^{k+\lambda}(\Gamma)$ ,  $E^{2+\lambda, 1+\lambda'}(\Gamma, \Lambda)$ ,  $E_0^{k+\lambda}(\Gamma)$ ,  $LE^\lambda(\Gamma, \Lambda)$  полные.

**Доказательство.** Приведем доказательство полноты  $E^{k+\lambda}(\Gamma)$ . Доказательства для остальных пространств проводится аналогично. Пусть  $\phi_n$  — фундаментальная последовательность в  $E^{k+\lambda}(\Gamma)$ , т. е. для каждой окрестности нуля  $V$  существует  $N$  такое, что из  $n_1 > N$  и  $n_2 > N$  следует  $\phi_{n_1} - \phi_{n_2} \in V$ . В частности, это означает фундаментальность  $\phi_n$  в  $C(\Gamma) \cap C^{k+\lambda}(D_i)$ , поскольку множество  $\{\phi : \|\phi\|_{C(\Omega)} + \|\phi\|_{C^{k+\lambda}(D_i)} < \varepsilon\}$  является окрестностью нуля в  $E^{k+\lambda}(\Gamma)$ , т. е. существует  $\psi_i$ , к которой  $\phi_n$  сходится. В силу  $C(\Gamma) \cap C^{k+\lambda}(D_i) \subset C(\Gamma) \cap C^{k+\lambda}(D_{i+1}) \subset \dots$  (здесь имеется в виду топологическое вложение пространств) последовательность  $\psi_i$  стационарна в  $C(\Gamma)$  и  $\psi_i \in C^{k+\lambda}(D_i)$ , т. е.  $\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi$  в поточечном смысле и  $\psi \in C^{k+\lambda}(D_i)$ .  $\square$

Далее распространим эти пространства на стратифицированные множества.

Сначала отметим, что для стратифицированных множеств функциональное пространство может определяться как для всего множества  $\Omega$ , так и отдельно для всех стратов. Например, пространство непрерывных функций можно определить как множество непрерывных на всем  $\Omega$  функций и как множество функций, непрерывных на каждом страте. Поэтому везде будем придерживаться первого варианта при определении пространств на всем  $\Omega$ , в противном случае будем указывать постратно принадлежность функциональным пространствам.

Пусть  $\Omega$  — стратифицированное множество,  $0 < \lambda < 1$ ,  $0 < \lambda' < 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда определим пространства  $E^{2+\lambda, 1+\lambda'}(\Omega, \partial\Omega) = \{\phi : \phi \in C(\Omega), \phi \in E^{2+\lambda}(\bar{\sigma}_{1j}), \phi \in E^{2+\lambda, 1+\lambda'}(\bar{\sigma}_{2j}, \bar{\partial\Omega} \cap \bar{\partial\sigma}_{2j})\}$ ,  $E^{k+\lambda}(\Omega) = \{\phi : \phi \in C(\Omega), \phi \in E^{k+\lambda}(\bar{\sigma}_{ij})\}$  и  $C^\lambda(\Omega) = \{\phi : \phi \in C(\bar{\sigma}_{ij})\}$ .



Как оговаривалось ранее,  $C^\lambda(\Omega)$  не подразумевает непрерывности функции на всем  $\Omega$ , а означает постратную непрерывность по Гельдеру.

Согласно [3] жестким оператором Лапласа на стратифицированном множестве  $\Omega$  называется следующий дифференциальный оператор:

$$\Delta U(x) = \Delta_i U(x) + \sum_{k: \sigma_{i,j} \prec \sigma_{i+1,k}} \frac{\partial}{\partial \nu_{j,k}} U, \quad x \in \sigma_{ij},$$

где  $\nu_{j,k}$  — нормаль к  $\sigma_{ij}$ , направленная внутрь  $\sigma_{i+1,k}$ ,  $\Delta_i$  — обычный  $i$ -мерный оператор Лапласа. В нуль-мерных стратах требуется непрерывность функции  $U$ .

Постановка задачи Пуассона для жесткого оператора Лапласа схожа с задачей для обычного оператора Лапласа.

Пусть  $\Omega$  — стратифицированное множество с непустой границей  $\partial\Omega$ ,  $1 > \lambda > 0$ ,  $F \in C^\lambda(\Omega)$ ,  $\psi \in C(\partial\Omega)$ . Классическим решением задачи Пуассона для жесткого оператора Лапласа называется функция  $U$ , для которой определен жесткий оператор Лапласа в каждой точке  $\Omega$  и удовлетворяющая в поточечном смысле дифференциальным соотношениям

$$\Delta U(x) = F(x), \quad x \in \text{int } \Omega, \quad U|_{x \in \partial\Omega} = \psi. \quad (3)$$

Основным результатом работы является доказательство достаточности условия, наложенного на структуру стратифицированного множества для существования решения задачи Пуассона для жесткого оператора Лапласа в случае размерности стратов, не превосходящих 2, в классе функций  $E^{2+\lambda, 1+\lambda}(\Omega, \partial\Omega)$ .

С целью замены уравнения (3) интегральным введем в рассмотрение операцию продления функции, определенной на одном страте, на все стратифицированное множество.

**Теорема 9.** Пусть дано стратифицированное множество  $\Omega$ , некоторый страт  $\Gamma$  и  $\phi \in C_0(\Gamma)$ . Тогда существует продление  $\bar{\phi}$  на все  $\Omega$ , представимое на каждом страте  $\sigma_{lm}$  в виде

$$G_{\sigma_{lm}} A_{l,m} \phi, \quad (4)$$

где  $A_{l,m}$  — нулевой оператор, если  $\sigma_{lm} \not\prec \sigma_{ij}$ , действует непрерывно из  $C_0(\bar{\Gamma})$  в  $C(\bar{\partial\sigma_{lm}})$  и из  $E_0^{n+\lambda_1}(\bar{\Gamma})$  в  $E^{n+\lambda_1}(\bar{\partial\sigma_{lm}})$ ,  $n \in \mathbb{N}$  и  $0 < \lambda'_1 < \lambda_1 < 1$ , если  $\sigma_{ij} \prec \sigma_{lm}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\phi \in C_0(\bar{\Gamma})$  и  $\Gamma$  — страт размерности  $i$ . В качестве доопределения  $\phi$  на страты, примыкающие к  $\Gamma$ , будем брать функцию, представляющую собой решение классической задачи Дирихле для оператора Лапласа, где краевое условие на  $\Gamma$  приравнено  $\phi$ .

Опишем процедуру доопределения. Согласно условию на структуру стратифицированного множества либо страт  $\Gamma$  не примыкает к стратам большей размерности и тогда  $\phi$  доопределяется нулем на все  $\Omega$ , либо  $\Gamma$  примыкает к стратам размерности  $i + 1$ . Положим  $\Gamma \prec \sigma_{i+1,k}$  и  $i > 0$ . В этом случае доопределим  $\phi$  нулем на  $P(\Gamma, \sigma_{i+1,k})$ , на все страты размерности которых не превосходят  $i$ . На произвольном страте  $\sigma_{i+1,k}$  рассмотрим функцию  $f = G_{\sigma_{i+1,k}} \phi$ . Ввиду того что  $f(x) = \phi(x)$ ,  $x \in P(\Gamma, \sigma_{i+1,k})$ ,  $f$  является продлением  $\phi$  на  $\sigma_{i+1,k}$ . В случае  $i = 0$  страт  $\sigma_{i+1,k}$  является отрезком, и в качестве оператора  $G_{\sigma_{i+1,k}} \phi$  будем обозначать оператор, ставящий в соответствие значению в точке  $\Gamma$  линейную функцию, равную нулю на  $\partial\sigma_{i+1,k} \setminus \Gamma$ , т. е. оператор, разрешающий задачу Дирихле на отрезке, в одном конце которого граничное условие равно нулю. Далее таким же образом  $\phi$  доопределяется на все страты размерностей, больших  $i$ .

Представление продленной функции  $\phi$  следует из построения, заметим лишь, что если  $\Gamma$  не примыкает к некоторому страту  $\sigma_{ij}$ , то оператор  $A$  в этом случае равен нулю, если же  $\Gamma$  примыкает к  $\sigma_{ij}$ , то оператор  $A$  является суперпозицией операторов типа  $G$ , определенных на стратах различной размерности. Поэтому с учетом того, что размерность стратов не превосходит 2, оператор  $A$  действует из  $C_0(\bar{\Gamma})$  в  $C(\bar{\partial\sigma_{ij}})$  и из  $E_0^{n+\lambda_1}(\bar{\Gamma}, \partial\Omega)$  в  $E^{n+\lambda_1}(\bar{\partial\sigma_{lm}}, \partial\Omega)$  непрерывно в силу теоремы 7.  $\square$

Теперь заменим задачу (3) другим операторным уравнением. Рассмотрим стратифицированное множество  $\Omega$  и будем обозначать через  $U_{i,j}$  функцию из  $E_0^{2+\lambda}(\bar{\sigma}_{ij})$  при  $i \leq 1$  и  $E_0^{2+\lambda, 1+\lambda'}(\bar{\sigma}_{2j}, \partial\Omega)$ . Решение задачи (3) будем искать в виде суммы продлений  $U_{i,j}$  на  $\Omega$ . Положим  $U = \sum_{i,j} \bar{U}_{i,j}$  и подставив



в (3) с учетом (4) получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 U_{l,m} + \sum_{k:\sigma_{lm} \prec \sigma_{l+1,k}} \sum_{i,j \in \sigma_{lm}} \int G_{l,m}(x,y) \frac{\partial}{\partial \nu_{m,k}} \bar{U}_{i,j}(y) dy &= F(x), \quad x \in \bar{\sigma}_{lm}, \quad \sigma_{lm} \notin \partial\Omega, \\
 U_{l,m} + \sum_{(i,j) \neq (l,m)} \bar{U}_{i,j}(x) &= \phi_{l,m}(x), \quad x \in \bar{\sigma}_{lm}, \quad \sigma_{lm} \in \partial\Omega,
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

где  $\phi_{l,m} \in C_0(\bar{\sigma}_{lm})$  и сумма всех продолжений  $\phi_{i,j}$  на страт  $\sigma_{lm}$  равна  $\phi|_{x \in \sigma_{lm}}$ . Данные преобразования были осуществлены формальным образом и для их строгого обоснования потребуется приведенная ниже лемма.

**Лемма 2.** Пусть  $G(x,y)$  — функция Грина задачи Пуассона для одномерного оператора Лапласа на отрезке  $\Omega$ . Тогда оператор, задаваемый формулой  $\int_{\Omega} G(x,y)\phi(y) dy$ , действует из  $LE^\lambda(\Omega)$  в  $C^1(\Omega)$  и из  $LE^{k+\lambda}(\Omega)$  в  $E^{k+2+\lambda}(\Omega)$  непрерывно, где  $1 > \lambda > 0$ .

**Доказательство.** Без ограничения общности можно считать, что  $\Omega = [0,1]$ . Покажем сначала непрерывность из  $LE^\lambda(\Omega)$  в  $E^{2+\lambda}(\Omega)$ . Пусть  $\phi_n \in LE^\lambda(\Omega)$  и  $\phi_n \rightarrow \phi$ . Тогда  $\int_{\Omega} G(x,y)\phi_n(y) dy$  — непрерывная по  $x$  функция. Поскольку  $\phi_n$  непрерывна во внутреннейности  $\Omega$ , достаточно установить, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 G(x,y)\phi(y) dy = 0$ . Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 G(x,y)\phi(y) dy = \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x y(1-x)\phi(y) dy + \lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 (1-y)\phi(y) dy = 0.$$

Подобные оценки получаются и для случая  $x \rightarrow 1$

Непрерывность оператора в  $C[0,1]$  следует из равномерной ограниченности функции Грина.

$$\left| \int_0^1 G(x,y)(\phi_n(y) - \phi(y)) dy \right| \leq \int_0^1 G(x,y)|\phi_n(y) - \phi(y)| dy \leq M \int_0^1 |\phi_n(y) - \phi(y)| dy.$$

Непрерывность в  $C^{k+\lambda}(D_i)$  следует из аналогичного результата для непрерывных на  $[0,1]$  функций. Покажем теперь непрерывность из  $LE^\lambda(\Omega)$  в  $C^1(\Omega)$ . Пусть  $x \in (0,1)$ , тогда

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 G(x,y)\phi(y) dy = \int_0^1 \frac{d}{dx} G(x,y)\phi(y) dy$$

ввиду непрерывности  $\phi$ . Существование производной в точках 0 и 1 устанавливается непосредственно.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^1 G(x,y)\phi(y) dy = \frac{1}{x} \int_0^x y(1-x)\phi(y) dy + \int_x^1 (1-y)\phi(y) dy.$$

Поскольку  $y \int_0^y \phi(z) dz$  — абсолютно непрерывна и  $\phi(y) = \frac{d}{dy} \int_0^y \phi(z) dz$  почти всюду на  $[0,1]$ , то первое слагаемое можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{x} \int_0^x y(1-x)\phi(y) dy = \frac{1-x}{x} \left( y \int_0^y \phi(z) dz \Big|_0^x - \int_0^x \int_0^y \phi(z) dz dy \right),$$

т. е.  $\left| \frac{1}{x} \int_0^x y(1-x)\phi(y) dy \right| < M \int_0^x |\phi(y)| dy$ . Откуда следует, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^1 G(x,y)\phi(y) dy = \int_0^1 (1-y)\phi(y) dy = \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{d}{dx} G(x,y)\phi(y) dy.$$



Непрерывность оператора  $\int_0^1 G(x, y)\phi(y) dy$  в  $C^1[0, 1]$  вытекает из равномерной ограниченности  $dG(x, y)/dx$ . □

**Теорема 10.** Пусть  $\Omega$  — стратифицированное множество со стратами, размерностью не больше 2. Тогда если функции  $U_{l,m}$  разрешают задачу

$$U_{l,m} + \sum_{k:\sigma_{lm} \prec \sigma_{l+1,k}} \sum_{ij} \int_{\sigma_{lm}} G_{l,m}(x, y) \frac{\partial}{\partial \nu_{m,k}} \bar{U}_{i,j}(y) dy = F(x), \quad x \in \bar{\sigma}_{lm}, \quad \sigma_{lm} \notin \partial\Omega,$$

$$U_{l,m} + \sum_{(i,j) \neq (l,m)} \bar{U}_{i,j}(x) = \psi_{l,m}(x), \quad x \in \bar{\sigma}_{lm}, \quad \sigma_{lm} \in \partial\Omega,$$

где  $U_{l,m} \in E_0^{2+\lambda}(\bar{\sigma}_{lm})$ , если  $\sigma_{lm} \notin \partial\Omega$ ,  $U_{l,m} \in C_0(\bar{\sigma}_{lm})$ , если  $\sigma_{lm} \in \partial\Omega$ ,  $F \in C^{2+\lambda}(\Omega)$  и  $\phi \in C(\partial\Omega)$ , то  $\sum_{i,j} \bar{U}_{i,j}$  разрешает задачу Пуассона

$$\Delta U(x) = \Delta F(x), \quad x \in \text{int } \Omega, \quad U|_{x \in \partial\Omega} = \psi,$$

где  $\phi_{l,m} \in C_0(\bar{\sigma}_{lm})$  и сумма всех продолжений  $\phi_{i,j}$  на страт  $\sigma_{lm}$  равна  $\phi|_{x \in \sigma_{lm}}$ .

**Доказательство.** В силу теоремы 9 и лемм 2 и 1 оператор  $\int_{\sigma_{1m}} G_{l,m}(x, y) \frac{\partial}{\partial \nu_{2,k}} \bar{U}_{i,j}(y) dy$  на стратах единичной размерности определен и непрерывно действует в  $E_0(\bar{\sigma}_{1m})$ . На двумерных стратах слагаемые типа  $\int_{\sigma_{lm}} G_{l,m}(x, y) \frac{\partial}{\partial \nu_{l+1,k}} \bar{U}_{i,j}(y) dy$  отсутствуют, так как страты имеют размерность не больше 2. Таким образом, все необходимые производные существуют. Тот факт, что  $\sum_{i,j} \bar{U}_{i,j}$  разрешает задачу Пуассона для жесткого оператора Лапласа проверяется непосредственной подстановкой в дифференциальное уравнение. □

Для доказательства тривиальности решения однородной задачи (5) нам потребуется ввести ряд определений, связанных с теорией функций на стратифицированных множествах. Их систематическое изложение и необходимые обоснования содержатся, например, в [3, 11–13].

Пусть  $\Omega$  стратифицированное множество вложено в  $R^n$ . Стратифицированным шаром  $B_r(x)$  с центром  $x \in \Omega$  радиуса  $r$  называется множество  $D_r(x) \cap \Omega$ , где  $D_r(x)$  — шар радиуса  $r$  в  $R^n$ .

Стратифицированной мерой  $\mu$  называется такая мера, которая для  $\omega \subset \Omega$

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{ij}} \mu_{i,j}(\omega \cap \sigma_{ij}),$$

где  $\mu_{i,j}$  — мера Лебега, заданная на стратах  $\sigma_{ij}$ , стратифицированного множества  $\Omega$ .

Пространства  $L_\mu(\Omega)$  и  $L_\mu^2(\Omega)$  — соответственно пространства суммируемых и суммируемых с квадратом функций по мере  $\mu$ .

Пространство  $\mathcal{D}(\Omega)$  — пространство гладких на  $\Omega$  функций  $u$  таких, что  $\text{supp } f \subset \text{int } \Omega$ .

Скалярное произведение  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение из  $L_\mu^2(\Omega)$ .

Пространство  $H_{0\mu}^1(\Omega)$  обозначает пополнение  $C_0^1(\Omega)$  по норме  $\|u\| = \left( \int_{\text{int } \Omega} (\nabla u)^2 d\mu \right)^{1/2}$ . Подробное построение этого пространства содержится в [1].

**Лемма 3.** Пусть  $\{U_{i,j}\}$  — решение однородного уравнения (5). Тогда для функции  $U = \sum_{i,j} \bar{U}_{i,j}$  и для любой  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  справедливо тождество

$$(\Delta U, \phi) = (U, \Delta \phi) = 0.$$

**Доказательство.** Сначала исследуем гладкость  $U$ . Ввиду того что рассматриваем однородное уравнение (5) и леммы 2, имеем  $u \in C^1(\bar{\sigma}_{1j}) \cap C^2(D_{i,j})$ , где  $D_{i,j}$  — любой отрезок вложенный в  $\sigma_{1j}$ . На двумерных стратах имеем только  $u \in C(\bar{\sigma}_{2j}) \cap C^2(B_{i,j})$ , где  $B_{i,j}$  строится так же как  $B_i$  в определении пространства  $E^{2+\lambda, 1+\lambda'}(\bar{\sigma}_{2j}, \Gamma)$ , если положить  $\Gamma$  объединением замыканий одномерных стратов, входящих в границу  $\sigma_{2j}$ . Факт непрерывности вторых производных в  $B_{i,j} \cap \sigma_{2j}$  следует из того, что  $U_{i,j} \in C^{2+\lambda} B_{i,j} \cap \partial\sigma_{2j}$  и модификации теоремы о непрерывности производных потенциала двойного



слоя с плотностью, имеющей непрерывные, по Гельдеру, производные [7, с. 123–127] (модификация заключается в применении доказательства теоремы не ко всей поверхности Ляпунова, а только к такой гладкой части кусочно-гладкой поверхности, минимальное расстояние от которой до точек потери гладкости исходной поверхности строго больше нуля). Можно построить функции  $\phi_i \in \bigcup_j C(\sigma_{2j})$ , что  $\phi_i(x) < M\phi$  ( $M$  не зависит от  $i$ ) и

$$\phi_i = \begin{cases} \phi_i(x) = \phi(x), & x \in \sigma_{ij}, i = 0, 1, \\ \phi_i(x) = \phi(x), & x \in B_{k,j} \subset \sigma_{ij}, \\ \phi_i(x) = 0, & x \in \sigma_{ij} \setminus B_{k+1,j}. \end{cases}$$

Тогда к функциям  $\phi_i \nabla U$  и  $U \nabla \phi_i$  применима теорема о дивергенции для стратифицированных множеств. Полное обоснование этого очень громоздко, укажем то, что доказательство этой теоремы приведенное [3, с. 225–226] останется справедливым для функций на двумерных стратах, имеющих непрерывные вторые производные, а на одномерных принадлежности классу  $C^1(\bar{\sigma}_{1j}) \cap C^2(D_{i,j})$ , ввиду того что степени гладкости на одномерных стратах достаточно для применения классической теоремы о дивергенции, принимающей вид формулы Ньютона – Лейбница.

Далее, повторяя вывод первой формулы Грина для стратифицированных множеств [3, с. 241–242], получаем два тождества

$$\int_{\text{int } \Omega} U \Delta \phi_i d\mu = - \int_{\text{int } \Omega} \nabla \phi_i \nabla U d\mu,$$

$$\int_{\text{int } \Omega} \phi_i \Delta U d\mu = - \int_{\text{int } \Omega} \nabla \phi_i \nabla U d\mu - \int_{\text{int } \Omega} \{\phi_i, (\nu, \nabla U)\} d\mu,$$

где  $\{\phi_i, (\nu, \nabla U)\}$  — сумма скачков функции  $\phi_i$  при переходе со стратов  $\sigma_{i+1,j}$  на страт  $\sigma_{ik}$ ,  $\sigma_{i+1,j} \succ \sigma_{ik}$ , а  $\nu$  — нормаль к страту  $\sigma_{ik}$ , направленная внутрь  $\sigma_{ij}$ . Устремляя  $i$  к бесконечности, получаем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\text{int } \Omega} \{\phi_i, (\nu, \nabla U)\} d\mu = 0,$$

ввиду того что  $\phi_i(x) < M\phi$  и  $\phi_i(x) \rightarrow \phi$  почти всюду. Учитывая, что  $\Delta U = 0$  почти всюду на  $\Omega$ , получаем окончательно

$$\int_{\text{int } \Omega} U \Delta \phi_i d\mu = \int_{\text{int } \Omega} \phi_i \Delta U d\mu = 0. \quad \square$$

**Лемма 4.** Однородное операторное уравнение (5) имеет только тривиальное решение.

**Доказательство.** Пусть  $\{U_{i,j}\}$  являются решением однородной задачи (5). Обозначим  $U = \sum_{i,j} \bar{U}_{i,j}$ . В [1] была установлена слабая разрешимость задачи Пуассона для уравнения Лапласа. Но в силу того что частные производные  $U$  не обязаны принадлежать  $L^2_\mu(\Omega)$ , мы не можем утверждать, что  $U$  будет слабым решением. Тем не менее мы можем рассматривать  $U$  как решение в смысле обобщенных функций. Более того с силу леммы 3 имеем  $(\Delta v, \varphi) = (v, \Delta \varphi) = 0$ , где  $v, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

Положим, что  $U(x_0) \neq 0$ ,  $x_0 \in \text{int } \Omega$ . Без ограничения общности можно полагать, что  $U(x_0) = 1$ , в противном случае необходимо умножить  $U$  на соответствующее число. Так как  $U$  — непрерывная функция, то существует стратифицированный шар  $B_r(x_0)$ , внутри которого  $U(x) > 1/2$ . Пусть  $f$  такая функция, что  $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\text{supp } f \subset B_r(x_0)$  и  $f(x) \geq 0$ . Тогда существует слабое решение  $\Delta v = f$ ,  $v \in H^1_{0\mu}(\Omega)$ . Так как  $\mathcal{D}(\Omega)$  плотно в  $H^1_{0\mu}(\Omega)$  по норме пространства  $L^2_\mu(\Omega)$ , то для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $\|\Delta \bar{v}_\varepsilon - f\|_{L^2_\mu(\Omega)} < \varepsilon$ , где  $\bar{v}_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Тогда получаем

$$(U, \Delta \bar{v}_\varepsilon) = (U, f) - (U, \Delta \bar{v}_\varepsilon - f) = 0.$$

С одной стороны, имеем  $(U, f) \geq \frac{1}{2} \|f\|_{L_\mu(\Omega)}$ , с другой,  $(U, \Delta \bar{v}_\varepsilon - f) < \varepsilon \|U\|_{L^2_\mu(\Omega)}$ , что при малом  $\varepsilon$  дает противоречие. Таким образом,  $U \equiv 0$ .



Положим теперь, что некоторое  $U_{i,j}$  отлично от нуля. Если страт нуль-мерный, то противоречие получаем сразу из того, что на нуль-мерном страте отлично от нуля по построению только одно слагаемое  $U_{i,j}$ . Если страт не нуль-мерный, то в силу того что  $U_{k,m}(x) = 0$  при  $x \in \partial\sigma_{km}$ , имеем

$$\sum_{i,j} \bar{U}_{i,j}(x) \Big|_{x \in \sigma_{ij}} = \sum_{l < i,j} \bar{U}_{l,j}(x) + U_{i,j}(x) = 0, \quad U_{i,j}(x) = - \sum_{l < i,j} \bar{U}_{l,j}(x).$$

Так как все продления  $\bar{U}_{l,j}$  по построению — гармонические функции на стратах, на которые они были доопределены, то  $U_{i,j}$  гармонична в  $\sigma_{ij}$ , а так как  $U_{i,j}(x)|_{x \in \partial\sigma_{ij}} \equiv 0$ , то  $U_{i,j} \equiv 0$ .  $\square$

Теперь приведем теорему, описывающую условия разрешимости операторных уравнений в пространствах с топологией заданной счетной системой полунорм.

**Теорема 11.** Пусть дано замкнутое множество  $\Omega \subset R^n$  и замкнутые множества  $D_i$  такие, что  $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset \Omega$  и  $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i = \Omega$ . Пусть даны  $E(\Omega)$  и  $F(\Omega)$  — банаховы пространства функций, действующих из  $\Omega$  в  $R^1$ ,  $\|\cdot\|_{F(\Omega)} \geq M \|\cdot\|_{E(\Omega)}$ ,  $\|\cdot\|_{F(D_1)} \leq M_2 \|\cdot\|_{F(D_2)} \leq \dots \leq M_i \|\cdot\|_{F(D_i)} \leq \dots$ . Если оператор  $A$  действует из  $E(\Omega) \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} F(D_i)$  в  $E(\Omega) \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} F(D_i)$  непрерывно, операторное уравнение  $(I + A)\psi = 0$  имеет только тривиальное решение и оператор  $A$  допускает представление  $A = L_i + B_i$ , где  $I + L_i$  непрерывно обратим в  $E(\Omega) \cap F(D_i)$ , оператор  $B_i$  вполне непрерывно действует из  $E(\Omega) \cap F(D_i)$  в  $E(\Omega) \cap F(D_i)$  и оператор  $L_i + B_i$  непрерывно действует из  $E(\Omega) \cap F(D_i)$  в  $E(\Omega) \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} F(D_i)$ , тогда  $I + A$  непрерывно обратим в  $E(\Omega) \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} F(D_i)$

**Доказательство.** Сделаем следующие преобразования

$$(I + A)\psi = f \quad \Rightarrow \quad (I + L_i + B_i)\psi = f \quad \Rightarrow \quad (I + (I + L_i)^{-1}B_i)\psi = (I + L_i)^{-1}f.$$

Оператор  $(I + L_i)^{-1}B_i$  компактно действует из  $E(\Omega) \cap F(D_i)$ . Оператор  $I + (I + L_i)^{-1}B_i$  обратим в  $E(\Omega) \cap F(D_i)$ , так как оператор  $L_i + B_i$  из  $E(\Omega) \cap F(D_i)$  в  $E(\Omega) \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} F(D_i)$  действует непрерывно и  $\ker(I + L_i + B_i) = \ker(I + (I + L_i)^{-1}B_i) = \{0\}$ . Возьмем множество  $\psi_i$  как решения уравнений

$$(I + (I + L_i)^{-1}B_i)\psi = (I + L_i)^{-1}f.$$

Снова в силу непрерывности оператора  $L_i + B_i$  из  $E(\Omega) \cap F(D_i)$  в  $E(\Omega) \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} F(D_i)$  имеем  $\psi_i \in E(\Omega) \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} F(D_i)$ , так как  $f \in E(\Omega) \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} F(D_i)$  и в силу единственности решения  $\psi_1 = \psi_2 = \dots$  в пространстве  $E(\Omega) \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} F(D_i)$ . Таким образом, существует  $(I + A)^{-1}$ . Непрерывность его следует из полноты  $E(\Omega) \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} F(D_i)$  и теоремы об открытом отображении для топологических векторных пространств [9, с. 58–60].  $\square$

Теперь сформулируем в виде теоремы основной результат работы.

**Теорема 12.** Пусть дано стратифицированное множество  $\Omega$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) все страты плоские и размерность каждого не превосходит 2;
- 2)  $\partial\Omega \neq \emptyset$ ;
- 3) любые два страта могут быть соединены прочной цепочкой стратов;
- 4) если страт  $\sigma_{1m}$  такой, что  $\sigma_{1j} \prec \sigma_{2m}$ , то  $\partial\sigma_{2m}$  является замкнутой кривой, содержащей  $\sigma_{1j}$ , а  $\partial\sigma_{2m} \setminus \sigma_{1j}$  замкнутой кривой не является.

Тогда задача Пуассона для жесткого оператора Лапласа

$$\Delta U(x) = f(x), \quad x \in \text{int } \Omega, \quad U|_{x \in \partial\Omega} = \psi, \tag{6}$$

где  $1 > \lambda > 0$ ,  $f \in C^\lambda(\Omega)$ ,  $\psi \in C(\partial\Omega)$ , разрешима единственным образом в классе функций  $E^{2+\lambda, 1+\lambda'}(\Omega, \partial\Omega)$  и решение представляется в виде  $U = \sum_{i,j} \bar{U}_{i,j}$ , где  $U_{i,j} \in E_0^{2+\lambda}(\bar{\sigma}_{ij})$  для  $i \leq 1$  и



$E_0^{2+\lambda, 1+\lambda}(\bar{\sigma}_{ij}, \partial\Omega)$  для  $i = 2$ , если  $\sigma_{ij} \notin \partial\Omega$  и  $U_{i,j} \in C_0(\bar{\sigma}_{ij})$ , если  $\sigma_{ij} \in \partial\Omega$ . Функции  $U_{i,j}$  являются решением следующего операторного уравнения:

$$U_{l,m}(x) + \sum_{k:\sigma_{l,k} \prec \sigma_{lm}} \sum_{i,j \in \sigma_{lm}} \int G_{l,m}(x,y) \frac{\partial}{\partial \nu_{m,k}} \bar{U}_{i,j}(y) dy = F(x), \quad x \in \sigma_{lm}, \sigma_{lm} \notin \partial\Omega, \quad F \in C^{2+\lambda}(\sigma_{lm}),$$

$$U_{l,m}(x) + \sum_{(i,j) \neq (l,m)} \bar{U}_{i,j}(x) = \phi(x), \quad x \in \sigma_{lm}, \sigma_{lm} \in \partial\Omega, \quad (7)$$

и для решения  $U$  задачи (6) имеет место оценка норм

$$\|U\|_{C(\Omega)} \leq M\|\phi\|_{C(\partial\Omega)} + N\|f\|_{C(\Omega)}, \quad \|U\|_{C^{2+\lambda}(D_k^{i,j})} \leq M_k\|\phi\|_{C(\partial\Omega)} + N_k\|f\|_{C^\lambda(\Omega)},$$

$$\|U\|_{C^{1+\lambda}(B_k^{2,j})} \leq M_k\|\phi\|_{C(\partial\Omega)} + N_k\|f\|_{C^\lambda(\Omega)},$$

где множества  $D_k^{i,j} \subset \sigma_{ij}$  и  $B_k^{2,j} \subset \sigma_{2j}$  взяты из определений пространств  $E^{2+\lambda}(\sigma_{ij})$  и  $E^{2+\lambda, 1+\lambda}(\bar{\sigma}_{ij}, \partial\Omega)$ .

**Доказательство.** Достаточно в силу теоремы 10 доказать разрешимость задачи (7). Заметим, что на стратах  $\sigma_{lm}$ , не примыкающих к стратам большей размерности и не являющихся граничными, после применения к ним оператора Лапласа операторные уравнения примут вид

$$\Delta U_{l,m} = \Delta F(x),$$

и тем самым их можно исключить из рассмотрения, выразив  $U_{l,m}$  через функцию Грина. Рассмотрим страт  $\sigma_{lm} \notin \partial\Omega$ . В силу представления (4) для  $\bar{U}_{i,j}$ , теоремы 7, если  $\sigma_{ij} \notin \partial\Omega$ , или леммы 1, если  $\sigma_{ij} \in \partial\Omega$ , и леммы 2 получаем, что операторы, заданные формулой  $\int_{\sigma_{lm}} G_{l,m}(x,y) \frac{\partial}{\partial \nu_{l-1,k}} \bar{U}_{i,j}(y) dy$ , действуют непрерывно из  $E_0^{2+\lambda}(\bar{\sigma}_{ij})$  в  $E_0^{4+\lambda}(\bar{\sigma}_{ij})$ . Введем последовательность непрерывных на  $\sigma_{lm}$  функций  $I_{l,m}(D_k, y)$ , равных 1 на  $D_k$  и равных 0 на  $\sigma_{lm} \setminus D_{k+1}$ , и рассмотрим оператор, задаваемый формулой

$$\int_{\sigma_{lm}} G_{l,m}(x,y) I_{l,m}(D_k, y) \frac{\partial}{\partial \nu_{m,k}} \bar{U}_{i,j}(y) dy.$$

В силу теоремы 7 существует его продолжение на  $C_0(\bar{\sigma}_{ij}) \cup C^{2+\lambda}(D_p)$ .

Далее, оператор  $\int_{\sigma_{lm}} G_{l,m}(x,y) I_{l,m}(D_k, y) \frac{\partial}{\partial \nu_{l-1,k}} \bar{U}_{i,j}(y) dy$  действует из  $C_0(\bar{\sigma}_{ij})$  в  $C_0(\bar{\sigma}_{lm})$  вполне непрерывно, в силу того что оператор, порождаемый функцией Грина, вполне непрерывен в пространстве непрерывных функций. Полная непрерывность в  $E_0^{2+\lambda}(\bar{\sigma}_{ij})$  следует из компактности вложения  $C^4(\Gamma)$  в  $C^3(\Gamma)$ . В довершение отметим, что непосредственными выкладками показывается для функции Грина одномерного оператора Лапласа, что последовательность операторов  $\int_{\Gamma} G_{l,m}(x,y) I_{l,m}(D_k, y) \psi(y) dy$  сходится к  $\int_{\Gamma} G_{l,m}(x,y) \psi(y) dy$  в  $E_0^{2+\lambda}(\Gamma)$ . Тогда перенумеруем все страты одним индексом  $k$  вместо двойного и определим пространство  $F(\Omega)$  как прямое произведение пространств  $E_0^{2+\lambda}(\bar{\sigma}_{ij})$ , если  $\sigma_{ij} \notin \partial\Omega$  и  $C_0(\bar{\sigma}_{ij})$ , если  $\sigma_{ij} \in \partial\Omega$ .  $D_r^k$  будет обозначать  $D_r \subset \sigma_k$ . Пространство  $F(\Omega)$  является полным. Через  $F^{2+\lambda}(D_r)$  будем обозначать пространство, образованное прямым произведением пространств  $C_0(\sigma_k)$  и  $C^{2+\lambda}(D_r^k)$ , если  $\sigma_k \notin \partial\Omega$ , взятых по всем  $k$ . Пространство  $F^{2+\lambda}(D_r)$  является банаховым. Уравнения (7) запишутся в виде

$$\rho + \Psi\rho = F,$$

где  $\Psi\rho = A_r\rho + B_r\rho$  и  $\rho = (U_1, U_2, \dots, U_t)$ . Если  $\sigma_k \in \partial\Omega$ , то  $A_r = 0$ , и имеем  $B_r U = \sum_{i \neq r} \bar{U}_i$ . Если  $\sigma_k \notin \partial\Omega$ , то получаем уравнения

$$A_r U = \sum_{i \in \{i: \sigma_i \prec \sigma_k\}} \sum_j \int G_k(x,y) \frac{\partial}{\partial \nu_i} \bar{U}_j(y) dy - \sum_{i \in \{i: \sigma_i \prec \sigma_k\}} \sum_j \int G_k(x,y) I_k(D_r^k, y) \frac{\partial}{\partial \nu_i} \bar{U}_j(y) dy,$$



и тогда

$$B_r U = \sum_{i \in \{i: \sigma_i < \sigma_k\}} \sum_j \int_{\sigma_k} G_k(x, y) I_k(D_r^k, y) \frac{\partial}{\partial v_i} \bar{U}_j(y) dy.$$

По построению все  $B_r$  вполне непрерывны в  $F^{2+\lambda}(D_n)$  для  $n \leq r$ ,  $A_r$  просто непрерывны в  $F^{2+\lambda}(D_n)$ . Более того,  $A_r$  сходится к нулю в  $F^{2+\lambda}(D_n)$  при  $r \rightarrow \infty$ . Тогда для каждого  $n$  найдется такое  $r$ , что операторная норма  $\|A_r\|_{F^{2+\lambda}(D_n)} < 1$  и, следовательно,  $I + A_r$  обратим. Тогда в силу теоремы 12 непрерывно обратим  $I + \Psi$ , тем самым доказывая существование решения (7).

Оценки решения задачи (6) вытекают из непрерывной обратимости  $I + \Psi$  в  $F^{2+\lambda}(\Omega)$  и из того, что  $F(x) = \int_{\sigma_{ij}} G_{i,j}(x, y) f(y) dy$ .  $\square$

### Библиографический список

1. Пенкин О. М., Богатов Е. М. О слабой разрешимости задачи Дирихле на стратифицированных множествах // Мат. заметки. 2000. Т. 68, № 6. С. 874–886.
2. Nicaise S., Penkin O. M. Poincaré-Perron's method for the Dirichlet problem on stratified sets // J. of Math. Anal. and Appl. 2004. Vol. 296, № 2. P. 504–520.
3. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2004. 272 с.
4. Лукьянов В. В., Назаров А. И. Решение задачи Вентцеля для уравнения Лапласа и Гельмгольца с помощью повторных потенциалов // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 1998. Т. 250. С. 203–218.
5. Лукьянов В. В., Назаров А. И. Исправления к статье «Решение задачи Вентцеля для уравнения Лапласа и Гельмгольца с помощью повторных потенциалов» // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2005. Т. 324. С. 129–130.
6. Бураго Ю. Д., Мазья В. Г. Многомерная теория потенциалов и решение краевых задач для областей с нерегулярными границами // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. 1967. Вып. 3. С. 5–86.
7. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Физматлит, 1953. 415 с.
8. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики: в 2 т. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1945. Т. 2. 620 с.
9. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 443 с.
10. Nicaise S., Sanding A. M. Transmission problems for the laplace and elasticity operators: Regularity and boundary integral formulation // Math. Model and Methods in Appl. Sci. 1999. Vol. 9. P. 855–898.
11. Пенкин О. М., Покорный Ю. В. О несовместных неравенствах для эллиптических операторов на стратифицированных множествах // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 8. С. 1107–1113.
12. Gavrillov A. A., Nicaise S., Penkin O. M. Poincaré's inequality on stratified sets and applications // Evolution Equations: Applications to Physics, Industry, Life Sciences and Economics (Levico Terme, 2000): Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. Basel: Birkhäuser, 2003. Vol. 55. P. 195–213.
13. Penkin O. M. About a geometrical approach to multistructures and some qualitative properties of solutions // Partial Differential Equations on Multistructures (Luminy, 1999). Lecture Notes in Pure and Appl. Math. / eds. F. Ali Mehmeti, J. von Belov, S. Nicaise. N. Y.: Marcel Dekker, 2001. Vol. 219. P. 183–191.

УДК 517

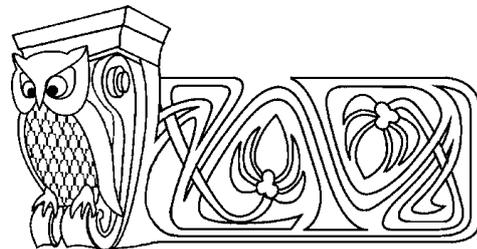
## О НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ МИНИМУМА ОДНОГО КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА С ИНТЕГРАЛОМ СТИЛЬТЪЕСА

С. А. Шабров

Воронежский государственный университет,  
кафедра математического анализа  
E-mail: shaspoteha@mail.ru

В работе получено необходимое условие экстремума квадратичного функционала с интегралом Стильтьеса.

**Ключевые слова:** функционал, необходимое условие, интеграл Стильтьеса, производная по мере.



On a Necessary Condition of at Least one Quadratic Functional with an Integral Stieltjes

S. A. Shabrov

Voronezh State University,  
Chair of Mathematical Analysis  
E-mail: shaspoteha@mail.ru

In this paper is obtained a necessary condition for an extremum of a quadratic functional with a Stieltjes integral.

**Key words:** functional, a necessary condition, Stieltjes integral, derivative on the measure.



## ВВЕДЕНИЕ

В работе получено необходимое условие экстремума функционала:

$$\Phi(u) = \int_0^l \frac{pu''_{x\mu}}{2} d\mu + \int_0^l \frac{ru'_x}{2} dx + \int_0^l \frac{u^2}{2} dQ - \int_0^l u dF, \quad (1)$$

определенного на множестве  $E$  — абсолютно непрерывных на  $[0; l]$  функций, первая производная которых  $\mu$ -абсолютно непрерывна на  $[0; l]$ , и удовлетворяющих условиям  $u(0) = u'(0) = u(l) = u'(l) = 0$ .

Функция  $\mu(x)$ , порождающая меру  $\mu$ , предполагается строго возрастающей на  $[0; l]$ . Также будем считать, что множество  $S(\mu)$  — точек разрыва функции  $\mu(x)$ , непусто, что является наиболее интересным с точки зрения приложений. На протяжении всей работы мы предполагаем выполненными следующие условия: 1)  $p(x)$ ,  $r(x)$ ,  $Q(x)$  и  $F(x)$  имеют конечное на  $[0; l]$  изменение; 2)  $p(x) > 0$ ; 3) интеграл  $\int_0^l \frac{dt}{p(t)}$  конечен; 4)  $r(x) \geq 0$  для всех  $x \in [0; l]$ ; 5)  $Q(x)$  — не убывает на  $[0; l]$ .

Первая производная в равенстве (1) понимается в классическом смысле, вторая — в следующем смысле:  $v(x)$  называется  $\mu$ -производной функции  $u(x)$ , если для всех  $x \in [0; l] \setminus S(\mu)$  справедливо равенство  $u(x) - u(0) = \int_0^x v(s) d\mu(s)$ . Мы принимаем следующее соглашение для функции  $\varphi(x)$ , принадлежащей  $BV[0; l]$  — пространству функций ограниченной на  $[0; l]$  вариации: если для некоторой внутренней точки  $\eta$  отрезка  $[0; l]$  справедливо равенство  $\varphi(\eta - 0) = \varphi(\eta + 0)$ , то  $\varphi(\eta)$  равно  $\varphi(\eta - 0)$  ( $= \varphi(\eta + 0)$ ), т. е.  $\varphi(x)$  непрерывна в точке  $\eta$ .

Все интегралы в (1) понимаются по Лебегу – Стильесу, причем все кроме первого существуют и по Риману – Стильесу.

## ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Задача минимизации функционала (1) на множестве  $E$  возникает при моделировании малых деформаций растянутых шарнирно сочлененных стержней, в точках шарнирного соединения прикреплена пружина, реагирующая на поворот, когда (1) описывает потенциальную (полную) энергию системы.

Если  $u_0 \in E$  дает минимум функционалу (1), то, следуя схеме Лагранжа, первая вариация

$$\int_0^l pu''_{x\mu} dh'_x + \int_0^l ru'_x h'_x dx + \int_0^l u_0 h dQ - \int_0^l h dF = 0 \quad (2)$$

для любой  $h \in E$ . Третий интеграл на основании результатов работы [1] допускает запись

$$\int_0^l u_0 h dQ = \int_0^l h d\alpha,$$

где  $\alpha(x) = \int_0^x u_0 dQ$  ( $x \notin S(Q)$ ). После интегрирования по частям интеграла  $\int_0^l h d(\alpha - F)$  равенство (2) принимает вид

$$\int_0^l pu''_{x\mu} dh'_x + \int_0^l (ru'_x - \alpha + F) h'_x dx = 0$$

(внеинтегральные слагаемые равны нулю, так как  $h \in E$ ). Вводя в рассмотрение абсолютно непрерывную на  $[0; l]$  функцию  $\beta(x) = \int_0^x ((ru'_x)(s) - \alpha(s) + F(s)) ds$  и интегрируя  $\int_0^l \beta'_x h'_x dx$  по частям, имеем:

$$\int_0^l (pu''_{x\mu} - \beta) dh'_x = 0 \quad (3)$$

(внеинтегральные слагаемые снова равны нулю в силу принадлежности  $h$  множеству  $E$ ).



Далее нам потребуется следующая лемма.

**Лемма.** Пусть  $A(x) \in BV[0; l]$ ; для любой  $h \in E$  интеграл  $\int_0^l A(x) dh'_x$  равен нулю. Тогда  $A(x)$  есть линейная функция.

Доказательство вполне стандартно (см. [2]). Для любых  $C_1$  и  $C_2$  интеграл  $\int_0^l (C_1 + C_2x) dh'_x$  равен нулю, поэтому вполне очевидно существование таких  $C_1$  и  $C_2$ , что функция

$$h(x) = \int_0^x \int_0^t (A(s) - C_1 - C_2s) ds dt$$

принадлежит  $E$ . Для этой функции мы будем иметь равенство  $\int_0^l (A(x) - C_1 - C_2x)^2 dx = 0$ , из которого с учетом нашей договоренности и следует утверждение леммы.  $\square$

Из равенства (3) на основании леммы вытекает тождество

$$pu''_{x\mu} - \beta(x) \equiv C_1 + C_2x. \quad (4)$$

Из (4) в силу абсолютной непрерывности функций  $\beta(x)$  и  $C_1 + C_2x$  следует абсолютная непрерывность  $(pu''_{x\mu})(x)$  на  $[0; l]$ . Тогда (4) допускает дифференцирование по  $x$ :

$$(pu''_{x\mu})'_x(x) - (ru'_0x)(x) + \alpha(x) - F(x) \equiv C_2. \quad (5)$$

В работе [3] показано существование такой функции  $\sigma(x)$ , которая порождает меру  $\sigma$ , что функции  $x$ ,  $\mu(x)$ ,  $r(x)$ ,  $Q(x)$  и  $F(x)$  являются  $\sigma$ -абсолютно непрерывными на  $[0; l]$ . Следует отметить, что в равенстве (5) переменная  $x$  «пробегает» множество  $\overline{[0; l]}_S$ , в котором каждая точка  $\xi$  множества  $S = S(\mu) \cup S(r) \cup S(Q) \cup S(F)$  заменена на упорядоченную пару собственных элементов  $\{\xi - 0; \xi + 0\}$ , бывшие ранее предельными. Строится это множество следующим образом. На множестве  $J_S = [0; l] \setminus S$  введем метрику  $\varrho(x; y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$ . Если  $S \neq \emptyset$ , то метрическое пространство  $(J_S, \varrho)$  очевидно неполно. Стандартное пополнение и дает нам  $\overline{[0; l]}_S$ .

Вернемся к равенству (5), которое допускает  $\sigma$ -дифференцирование:

$$(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_0x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = F'_{\sigma}. \quad (6)$$

Уравнение (6) определено на множестве  $\overline{[0; l]}_{\sigma} = \overline{[0; l]}_S \cup S(\sigma)$ , причем в точках  $\xi \in S(\sigma)$  уравнение (6) принимает вид

$$\Delta(pu''_{x\mu})'_x(\xi) - \Delta(ru'_0x)'_{\sigma} + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi),$$

где  $\Delta\psi(\xi) = \psi(\xi + 0) - \psi(\xi - 0)$  — полный скачок функции  $\psi(x)$  в точке  $\xi$ .

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема.** Если  $u_0(x)$  дает минимум функционалу (1) на множестве  $E$ , то  $u_0(x)$  принадлежит пространству  $\tilde{E} \subset E$  вторая квазипроизводная  $(pu''_{x\mu})(x)$  абсолютно непрерывна на  $[0; l]$ ,  $(pu''_{x\mu})'_x - \sigma$ -абсолютно непрерывна на  $[0; l]$  и является решением краевой задачи

$$\begin{cases} (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_0x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = F'_{\sigma}, \\ u(0) = u'_x(0) = u(l) = u'_x(l) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

**Замечание.** Доказанную теорему можно обобщить и на функционалы более общего вида:

$$\tilde{\Phi}(u) = \int_0^l \tilde{F}_1(u''_{x\mu}) d\mu + \int_0^l \tilde{F}_2(x, u, u'_x) dx.$$

Разрешимость краевой задачи устанавливается стандартным приемом: доказываем ее невырожденность (при описанных выше условиях это очевидно) и строится функция Грина (доказывая изначально разрешимость уравнения в (7) в форме задачи Коши (именно здесь и используется третье условие)).



Следует отметить, что изучать уравнение в (7) можно и с позиций теории обобщенных функций (которое получается после обобщенного дифференцирования уравнения (4)). Однако при использовании этого подхода, во-первых, возникает проблема умножения обобщенной функции на разрывную, которая в общем случае неразрешима; во-вторых, даже при решении (в каком-то смысле) первой проблемы удается установить лишь слабую разрешимость уравнения; в-третьих, уравнение с обобщенными коэффициентами рассматривается как равенство функционалов, что делает невозможным применение качественных методов анализа (типа теорем Ролля) решений. Последнее стало возможным при использовании поточечного подхода, предложенного Ю. В. Покорным [2] в 1999 году, при котором уравнение расценивается как поточечно заданное, т. е. обыкновенное.

Покажем теперь, что при выполнении условий 1)–5) экстремаль  $u_0(x)$  (решение краевой задачи) функционала (1) доставляет минимум. В самом деле, вторая вариация функционала  $\Phi(u)$  на допустимой экстремале имеет вид

$$\delta^2\Phi(u_0)h = \frac{1}{2} \int_0^l p h_{x\mu}'^2 d\mu + \frac{1}{2} \int_0^l r h_x'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l h^2 dQ,$$

которая при всех  $h \in E$  принимает неотрицательные значения.

#### Библиографический список

1. Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б., Шабров С. А. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах. М. : Физматлит, 2009. 192 с.
2. Покорный Ю. В. Интеграл Стильтеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. АН. 1999. Т. 364, № 2. С. 167–169.
3. Шабров С. А. О  $\mu$ -регуляризации функции с конечным изменением // Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета Воронеж. гос. ун-та. Воронеж, 1999. С. 166–169.

## МЕХАНИКА

УДК 622.233.6

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ МНОГОСТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ

А. А. Битюрин

Ульяновский государственный технический университет,  
кафедра теоретической и прикладной механики  
Email: denjgy0706@yandex.ru

Осуществляется математическое моделирование продольного упругого центрального удара многоступенчатого стержня о жесткую преграду при неударяющих связях. Математическое моделирование проводится путем точного аналитического решения волнового дифференциального уравнения методом Даламбера с заданием необходимых начальных и граничных условий. С применением формулы Эйлера получено аналитическое выражение для расчета критической предударной скорости, при которой наступает потеря устойчивости ступенчатого стержня.

**Ключевые слова:** удар, устойчивость, моделирование, скорость, деформация.

**Mathematical Modelling of Critical Speed of the Multistage Core at Longitudinal Blow**

A. A. Bityurin

Ulyanovsk State Technical University,  
Chair of Theoretical and Applied Mechanics  
E-mail: denjgy0706@yandex.ru

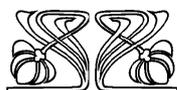
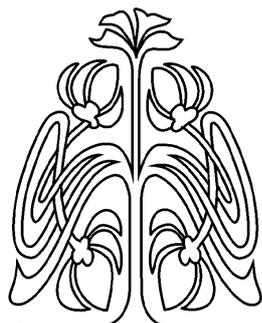
Mathematical modeling of longitudinal elastic central blow of a multistage core about a rigid barrier is carried out, at not keeping communications. Mathematical modeling is carried out by the exact analytical decision of the wave differential equation by a method of Dаламбера with the task of necessary initial and boundary conditions. With application of the formula of Euler analytical expression for calculation of critical pretonic speed at which there comes loss of stability of a step core is received.

**Key words:** blow, stability, modeling, speed, deformation.

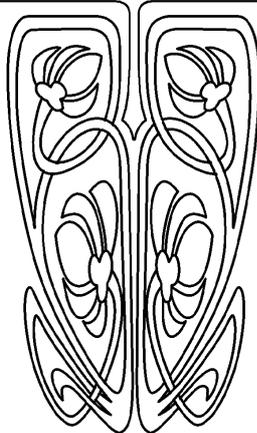
#### ВВЕДЕНИЕ

Устойчивое состояние формы равновесия деформированного элемента зависит от величины приложенной к нему продольной нагрузки. Достижение нагрузками критических значений равносильно разрушению рассматриваемого элемента или системы элементов, так как устойчивая форма равновесия будет утрачена, что связано с неограниченным ростом напряжений и деформаций. В качестве продольной сжимающей нагрузки может выступать в том числе и ударная сила, возникающая при взаимодействии ударного элемента с жестким препятствием или технологической средой. В этой связи вопрос потери устойчивости рабочих элементов (бойка, волновода и т. д.) имеющих на сегодня ударных механизмов и машин в процессе их работы стоит достаточно актуально.

Впервые задача о динамической устойчивости упругих стержней при мгновенном продольном действии сжимающей нагрузки, которая в дальнейшем сохраняет своё постоянное значение, была решена М. А. Лаврентьевым и А. Ю. Ишлинским в работе [1]. Позднее проводилось теоретическое исследование потери устойчивости мно-



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





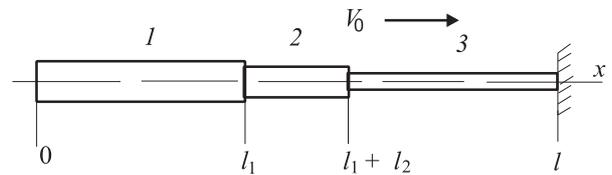
венно сжатого бесконечного упругого стержня методом малых возмущений [2], а также исследование потери устойчивости полубесконечного упругого стержня [3, 4]. В работах [5], [6] В. И. Малым предложен подход для исследования потери устойчивости стержней при больших и малых прогибах на основе асимптотического метода линеаризации на неустановившейся стадии выпучивания при ударе полубесконечного упругого стержня телом большой массы, движущимся с постоянной скоростью.

Выполнение поставленных задач сводилось либо к аналитическому, либо к численному решению линеаризованного дифференциального уравнения четвертого порядка, а также системы дифференциальных уравнений движения стержня с начальной прогибью. Недостатком такого подхода является очевидная трудность математического решения, сопряженная с громоздкими математическими выкладками, а также удовлетворительная сходимость результатов математического моделирования и экспериментальных данных лишь в узком интервале изменения той или иной характеристики, связанная с накоплением погрешности вычислений в ходе проведения математических операций. Задача о потере устойчивости неоднородных ступенчатых стержней при ударе в работах [1–9] не рассматривалась.

Ниже приводится расчет критической предупредной скорости неоднородного многоступенчатого стержня, имеющего три однородных участка различной длины и площади поперечных сечений. Решается волновое дифференциальное уравнение точным аналитическим методом Даламбера. С применением метода характеристик строится диаграмма относительной продольной деформации, с помощью которой рассчитываются критические значения силы и предупредной скорости.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрена модель продольного удара многоступенчатого стержня о жесткую преграду (рис. 1). Длина начального участка ступенчатого стержня равна  $l_1$ , второго участка —  $l_2$ , третьего —  $l_3 = l - (l_1 + l_2)$ , масса стержня  $m$ , предупредная скорость стержня  $V_0$ . Все участки стержня состоят из одного материала. Используется волновая модель продольного удара [10, 11].



Движение поперечных сечений однородных участков стержня описывается волновыми дифференциальными уравнениями:

Рис. 1. Схема удара неоднородного многоступенчатого стержня о жесткую преграду при неударяющих связях

$$\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad l_1 \leq x \leq l_1 + l_2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u_3(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_3(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad l_1 + l_2 \leq x \leq l, \quad (3)$$

где  $u_1(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$ ,  $u_3(x, t)$  — продольное перемещение поперечного сечения начального участка 1, второго участка 2 и третьего конечного участка 3 многоступенчатого стержня соответственно,  $x$  — координата сечения,  $t$  — время,  $a$  — скорость распространения продольной волны деформации [10, 11].

Начальные условия определяют состояние участков стержня перед его соударением с жесткой преградой, при  $t = t_0 = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(x, t_0)}{\partial t} = V_0, & \quad \frac{\partial u_1(x, t_0)}{\partial x} = 0, & \quad \frac{\partial u_2(x, t_0)}{\partial t} = V_0, & \quad \frac{\partial u_2(x, t_0)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u_3(x, t_0)}{\partial t} = V_0, & & \quad \frac{\partial u_3(x, t_0)}{\partial x} = V_0. & \end{aligned}$$



Краевые условия определяют отсутствие силы в сечении  $x = 0$  и равенство нулю скорости сечения  $x = l$  при взаимодействии участка 3 неоднородного стержня с жесткой преградой:

$$\frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_3(l, t)}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

а также определяют равенство сил и условия сопряжения в сечениях  $x = l_1$  и  $x = l_1 + l_2$  однородных участков 1, 2 и 3 при непосредственном их взаимодействии:

$$EA_1 \frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial x} = EA_2 \frac{\partial u_2(l_1, t)}{\partial x}, \quad EA_2 \frac{\partial u_2(l_1 + l_2, t)}{\partial x} = EA_3 \frac{\partial u_3(l_1 + l_2, t)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(l_1, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_2(l_1 + l_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_3(l_1 + l_2, t)}{\partial t},$$

где  $E$  — модуль упругости первого рода,  $A_1, A_2, A_3$  — площади поперечных сечений однородных участков 1, 2 и 3 соответственно [10, 11].

Разрыв контакта в ударном сечении  $x = l$  происходит при условии отрицательной скорости этого сечения:

$$\frac{\partial u_3(l, t)}{\partial t} < 0.$$

Повторный удар с жесткой преградой может возникнуть после разрыва контакта в ударном сечении при условии его положительной скорости:

$$\frac{\partial u_3(l, t)}{\partial t} > 0.$$

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Решение дифференциальных уравнений (1)–(3) реализуется точным аналитическим методом Даламбера в виде суммы двух функций [10, 11]

$$u_1(x, t) = f_1(at - x) + \varphi_1(at + x), \quad 0 \leq x \leq l_1,$$

$$u_2(x, t) = f_2(at - x) + \varphi_2(at + x), \quad l_1 \leq x \leq l_1 + l_2,$$

$$u_3(x, t) = f_3(at - x) + \varphi_3(at + x), \quad l_1 + l_2 \leq x \leq l,$$

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} = -f'_1(at - x) + \varphi'_1(at + x), \quad \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = a[f'_1(at - x) + \varphi'_1(at + x)],$$

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} = -f'_2(at - x) + \varphi'_1(at + x), \quad \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = a[f'_2(at - x) + \varphi'_1(at + x)],$$

$$\frac{\partial u_3(x, t)}{\partial x} = -f'_3(at - x) + \varphi'_1(at + x), \quad \frac{\partial u_3(x, t)}{\partial t} = a[f'_3(at - x) + \varphi'_3(at + x)],$$

где  $f_1(at - x), f_2(at - x), f_3(at - x)$  — функции, описывающие прямые волны, распространяющиеся соответственно по участкам 1, 2 и 3 в направлении оси  $Ox$ ;  $\varphi_1(at + x), \varphi_2(at + x), \varphi_3(at + x)$  — функции, описывающие обратные волны, распространяющиеся по участкам 1, 2 и 3 в противоположном направлении;  $f'_1(at - x), f'_2(at - x), f'_3(at - x), \varphi'_1(at + x), \varphi'_2(at + x), \varphi'_3(at + x)$  — производные функций.

Перейдем к относительным величинам, характеризующим прямые и обратные волны  $\tilde{f}'(at - x) = f'(at - x) / \frac{V_0}{a}$ ;  $\tilde{\varphi}'(at + x) = \varphi'(at + x) / \frac{V_0}{a}$ , деформацию в сечении и его скорость  $\tilde{\varepsilon}(x, t) = -\tilde{f}'(at - x) + \tilde{\varphi}'(at + x)$ ,  $\tilde{\nu}(x, t) = \frac{\nu(x, t)}{V_0} = \tilde{f}'(at - x) + \tilde{\varphi}'(at + x)$ .

В случае удара неоднородного многоступенчатого стержня о жесткую преграду, возникает ряд трудностей в определении критической ударной нагрузки, вызывающей потерю устойчивого состояния, поскольку в данном случае в процессе удара функция относительной продольной деформации  $\tilde{\varepsilon}$  будет кусочно-линейная [10, 11].



Пусть в момент времени  $T = t_i$  один из однородных участков произвольного многоступенчатого стержня находится под действием системы продольных сил  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , для которого построена диаграмма относительной продольной деформации  $\tilde{\varepsilon}$  (рис. 2, а). Эти силы действуют в различных поперечных сечениях стержня, расстояния до которых от переходного сечения с другим однородным участком известны:  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Величину продольной силы  $P_i$  на рассматриваемом однородном участке по закону Гука [12], используя данные диаграммы, представим в виде

$$P_i = EA \frac{V_0}{a} (\tilde{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_{i-1}). \quad (5)$$

Учитывая жесткую связь рассматриваемого однородного участка с последующим, отбросим последующий однородный участок, заменяя его жесткой заделкой. Таким образом, получаем схему нагружения рассматриваемого участка для расчета на устойчивость как для жестко заделанного стержня, длина которого равна длине этого участка (рис. 2, б).

Для расчета рассматриваемого однородного участка стержня на устойчивость при продольной сжимающей нагрузке можно заменить данную систему продольных сил (рис. 2, б) одной силой, действующей на свободном торце, которую обозначим  $P_{\text{экв}}$  (рис. 3).

Величину продольной силы  $P_{\text{экв}}$  можно считать по известной зависимости, приводимой в [12], если известны величины сил  $P_1, P_2, \dots, P_n$  и координаты их приложения  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , а также длина  $l_1$

$$P_{\text{экв}} = \left[ \pm P_1 \left( \frac{b_1}{l_1} \right)^2 \pm P_2 \left( \frac{b_2}{l_1} \right)^2 \pm \dots \pm P_i \left( \frac{b_i}{l_1} \right)^2 \pm P_n \left( \frac{b_n}{l_1} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

Здесь знак «+» берется в случае, если соответствующая продольная сила сжимающая и знак «-», если сила растягивающая.

В формулах (5) и (6)  $a$  — скорость распространения продольной волны деформации в данном материале стержня,  $E$  — модуль упругости,  $A$  — площадь поперечного сечения рассматриваемого однородного участка,  $\tilde{\varepsilon}_i$  — относительная продольная деформация на  $i$ -м отрезке рассматриваемого однородного участка многоступенчатого стержня.

Для тонких однородных участков ( $l > 15d$ , где  $l$  и  $d$  — соответственно длина и диаметр рассматриваемого участка) при расчете на устойчивость применима формула Эйлера [12]:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_{\text{min}}}{(\mu l)^2}, \quad (7)$$

где  $J_{\text{min}}$  — минимальный момент инерции поперечного сечения относительно главных центральных осей инерции,  $\mu$  — коэффициент приведения длины, зависящий от схемы закрепления стержня [12],  $l$  — длина рассматриваемого однородного участка. В данном случае это будет длина  $l_1$ , поскольку через  $l$  обозначена общая длина ступенчатого стержня. Если рассматриваемый однородный участок, имеющий свободный торец, жестко связан с последующим (см. рис. 2, а), то коэффициент приведения

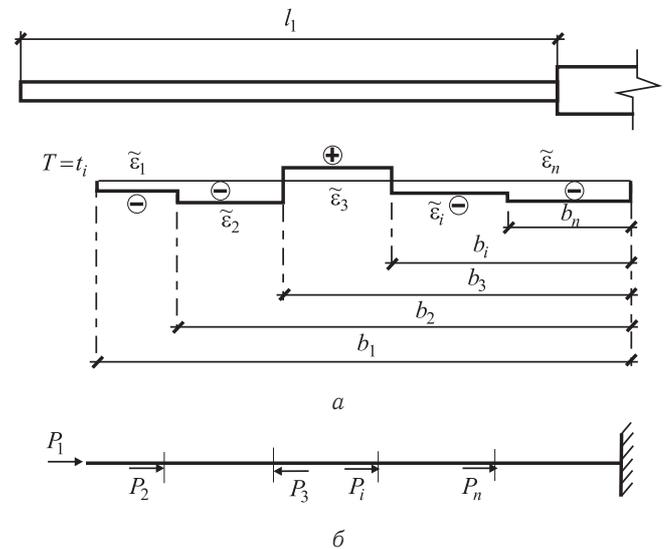


Рис. 2. Однородный участок произвольного многоступенчатого стержня: а — диаграмма относительной продольной деформации  $\tilde{\varepsilon}$ ; б — схема нагружения для расчета на устойчивость жестко заделанного стержня

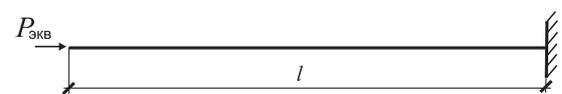


Рис. 3



длины для рассматриваемого однородного участка  $\mu$  принимается равным 2 [12]. Аналогичным путем можно рассматривать любой однородный участок многоступенчатого стержня, и в зависимости от его связей с другими участками или с жесткой преградой  $\mu$  будет принимать значения от 0.7 до 2 [12].

Необходимо отметить, что в данном случае речь идет о динамической задаче, тогда как формула Эйлера применяется в случае статического нагружения. Ударная сила, действующая на ступенчатый стержень в результате волновых преобразований, рассматривается как постоянная статическая нагрузка в течение малого промежутка времени.

Для выполнения условия сохранения устойчивого состояния многоступенчатого стержня необходимо, чтобы  $P_{\text{экр}} < P_{\text{кр}}$ , т.е. используя (5)–(7) и учитывая, что для круглого поперечного сечения  $J_{\text{мин}} = \frac{\pi d^4}{64}$ , получим

$$V_0 < V_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 d^2 a}{16(\mu l)^2} \left[ \tilde{\varepsilon}_1 \left( \frac{b_1}{l_1} \right)^2 + (\tilde{\varepsilon}_2 - \tilde{\varepsilon}_1) \left( \frac{b_2}{l_1} \right)^2 + (\tilde{\varepsilon}_3 - \tilde{\varepsilon}_2) \left( \frac{b_3}{l_1} \right)^2 + (\tilde{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_3) \left( \frac{b_i}{l_1} \right)^2 + (\tilde{\varepsilon}_n - \tilde{\varepsilon}_i) \left( \frac{b_n}{l_1} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (8)$$

В формуле (8) положительные значения  $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \dots, \tilde{\varepsilon}_n$  берутся со знаком плюс, отрицательные — минусом. Эта формула применима для расчета критической предупредительной скорости многоступенчатой стержневой системы с любым числом однородных участков.

### 3. ПРИМЕР

Рассмотрим продольный удар многоступенчатого стержня о жесткую преграду с длинами участков  $l_1 = 0.4l, l_2 = 0.2l, l_3 = 0.4l$ , соотношением площадей поперечных сечений каждого предыдущего участка к последующему:  $\tilde{A} = A_1/A_2 = A_2/A_3 = 2$ . Методом характеристик построено поле состояний (рис. 4).

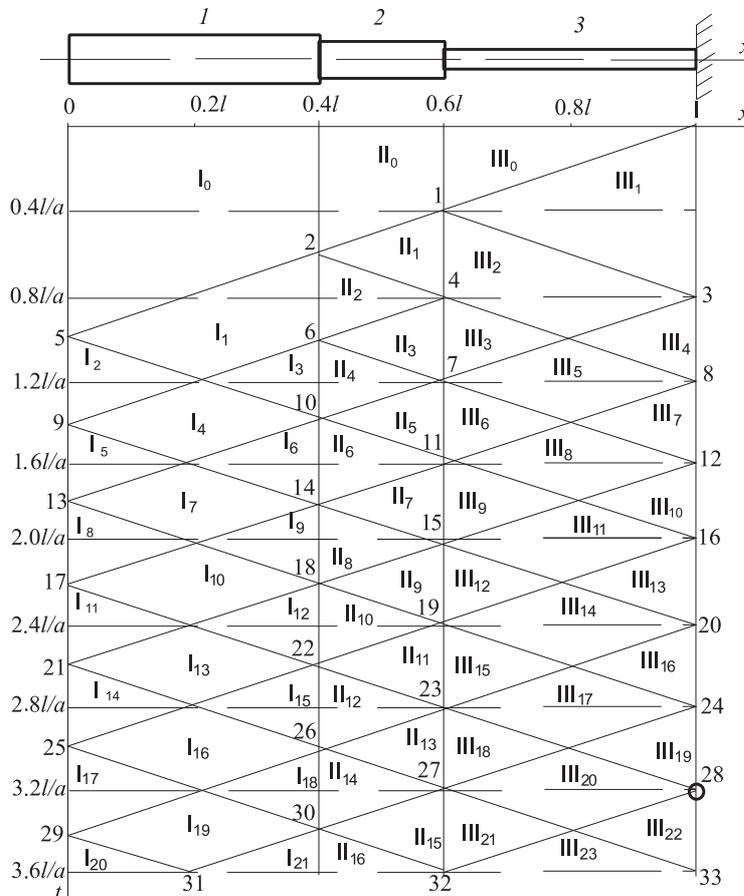


Рис. 4. Поле состояний



Области состояний  $I_0-I_{21}$ ,  $II_0-II_{16}$ ,  $III_0-III_{23}$  с соответствующими значениями  $\tilde{f}'(at - x_j)$ ,  $\tilde{\varphi}'(at + x_j)$ ,  $\tilde{\varepsilon}(x, t)$ ,  $\tilde{\nu}(x, t)$  определяют параметры прямых и обратных волн деформаций, продольную деформацию и скорость поперечных сечений.

Длительность состояния для произвольного сечения определяется разностью ординат  $t$ , которые имеют точки наклонных линий для этого сечения.

В момент удара стержня о жесткую преграду ( $t = 0$ ) в ударном сечении  $x = l$  формируется новая обратная волна, параметры которой определяются из условия (4):

$$\tilde{f}'(at - l) + \tilde{\varphi}'(at + l) = 0, \quad \tilde{f}'(at - l) = -\tilde{\varphi}'(at + l),$$

т. е. формируемая в ударном сечении  $x = l$  обратная волна соответствует параметрам падающей волны с обратным знаком. Поскольку падающая прямая волна  $\tilde{f}'(at - l) = -0.5$ , то отраженная от ударного сечения новая обратная волна  $\tilde{\varphi}'(at + l) = 0.5$  (см. рис. 4, линия  $l-1$ ).

Данными волнами будут охвачены поперечные сечения в области первого состояния третьего участка  $III_1$ . Относительная продольная деформация в соответствующих сечениях третьего участка  $\tilde{\varepsilon}(x, t) = -1$ , относительная скорость  $\tilde{\nu}(x, t) = 0$ . Длительность данного состояния для произвольного сечения третьего участка определяется разностью ординат  $t$ , которые имеют точки линии  $l-1$  и  $l-3$  для этого сечения. В момент времени  $t = 0.4l/a$  обратная волна  $\tilde{\varphi}'_3(at + l) = -0.5$  достигнет переходного сечения  $x = l_1 + l_2 = 0.6l$ . В этот же момент времени слева на данное сечение будет падать прямая волна  $\tilde{f}'(at - 0) = 0.5$ . По этой причине в переходном сечении слева сформируется новая обратная волна  $\tilde{\varphi}'_2(at + 0.6l) = -0.17$  (см. рис. 4, линия  $l-2$ ) и новая прямая волна  $\tilde{f}'_3(at - 0.6l) = 0.83$  (см. рис. 4, линия  $l-3$ ). В области первого состояния второго участка  $II_1$  поперечные сечения будут охвачены прямой волной  $\tilde{f}'_0(at - 0) = 0.5$  и обратной волной  $\tilde{\varphi}'_2(at + 0.6l) = -0.17$ . Относительная продольная деформация в сечениях второго участка  $\tilde{\varepsilon}(x, t) = -0.67$ , относительная скорость  $\tilde{\nu}(x, t) = 0.33$ . Длительность данного состояния определяется разностью ординат точек наклонных линий  $l-2$  и  $2-4$  для соответствующего сечения.

Далее переходим к построению диаграммы относительной продольной деформации (рис. 5), используя поле состояний (см. рис. 4).

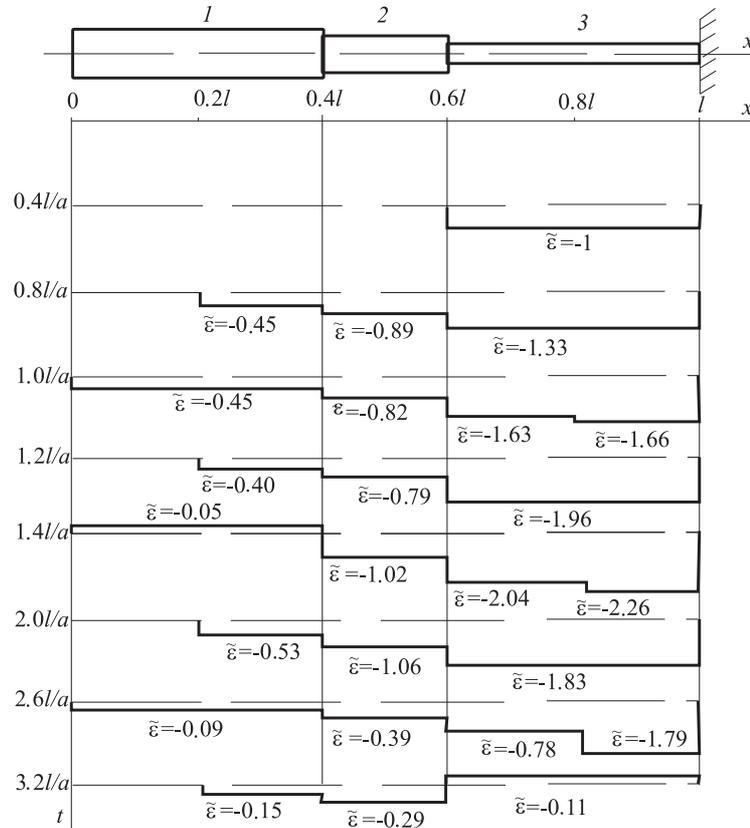


Рис. 5. Диаграмма относительной продольной деформации



Анализируя диаграмму, можно сделать вывод, что максимальное значение деформации имеет место на третьем однородном участке ступенчатого стержня при  $t = 1.4l/a$  (на отрезке  $0.6l \times 0.8l$   $\tilde{\epsilon}_{\max} = -2.04$ , на отрезке  $0.8l \times l$   $\tilde{\epsilon}_{\max} = -2.26$ ). Следовательно, в данный момент времени при достижении предупредной скорости некоторого критического значения третий однородный участок может потерять устойчивость. Для расчета критической предупредной скорости используем полученную формулу (8). Учитывая данные диаграммы (см. рис. 5) и подставляя соответствующие величины в (8), учитывая длину  $l_3 = 0.4l$  и  $\mu = 0.7$  [12] в соответствии со схемой закрепления рассматриваемого участка, получим  $V_{кр} = 0.38 \frac{\pi^2 d^2 a}{(l)^2}$ . Таким образом, потеря устойчивости ступенчатого стержня возможна при  $t = 1.4l/a$ , поскольку при рассчитанной величине предупредной скорости  $V_{кр}$ , в данный момент времени может быть достигнуто критическое значение продольной силы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применяя рассмотренный подход, можно рассчитать минимальную величину критической предупредной скорости, при которой ступенчатая стержневая система любой конфигурации теряет устойчивое состояние при продольном ударе. Таким образом, волновая модель с применением метода характеристик и формулы Эйлера позволяет получить достаточно простое решение задачи потери устойчивости ступенчатого стержня при продольном ударе. При расчете на устойчивость стержневых элементов, у которых  $l < 15d$ , целесообразно применять численные методы расчета, основанные на законе сохранения механической энергии.

В случае гибких тонких стержней, у которых длина превышает диаметр более чем в 100 раз, необходимо вести расчет, исходя из того, что элемент конструкции подвергается действию нагрузок, превосходящих критическую. В этом случае для практических целей важно исследовать закритическую деформацию сжатых стержней. Кроме того, этот вопрос имеет большое теоретическое значение, так как позволяет установить случаи неприменимости линейных уравнений и уточнить критерии устойчивости.

## Библиографический список

1. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. 1949. Т. 64, № 6. С. 779–782.
2. Малышев Б. М. Устойчивость стержня при ударном сжатии // Изв. АН СССР. МТТ. 1966. № 4. С. 137–142.
3. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М. : ГИТТЛ, 1962. 880 с.
4. Малый В. И. Длинноволновое приближение в задачах о потере устойчивости при ударе // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 138–144.
5. Малый В. И. Выпучивание стержня при продольном ударе. Малые прогибы // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 181–186.
6. Малый В. И. Выпучивание стержня при продольном ударе. Большие прогибы // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 1. С. 52–61.
7. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М. : Машиностроение, 1978. 312 с.
8. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М. : Наука, 1987. 352 с.
9. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М. : Наука, 1974. 808 с.
10. Алимов О. Д., Манжосов В. К., Еремьянц В. Э. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах. М. : Наука, 1985. 354 с.
11. Битюрин А. А., Манжосов В. К. Моделирование продольного удара однородных стержней при неударяющих связях // Вестн. УлГТУ. 2005. № 3. С. 23–25.
12. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев : Наук. думка, 1989. 732 с.



УДК 539.3

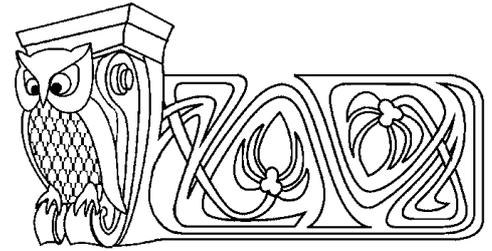
## АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

В. В. Карпов

Санкт-Петербургский государственный  
архитектурно-строительный университет,  
кафедра прикладной математики и информатики  
E-mail: karpov.v.v@lan.spbgasu.ru

Рассматриваются три варианта алгоритмов исследования устойчивости тонкостенных оболочек: алгоритм, основанный на методе Ритца и итерационных процессах; алгоритм, основанный на методе наискорейшего спуска; алгоритм, основанный на методе продолжения решения по параметру. Дается анализ результатов исследования устойчивости оболочек, полученных с использованием этих алгоритмов.

**Ключевые слова:** алгоритмы устойчивости оболочек, алгоритм метода Ритца, алгоритм метода наискорейшего спуска, алгоритм метода продолжения по параметру.



**Analysis of Algorithms Study of Stability of Thin-Walled Shells**

V. V. Karpov

Saint-Petersburg State University of Architecture  
and Civil Engineering,  
Chair of Applied Mathematics and Informatics  
E-mail: vvkarpov@lan.spbgasu.ru

We consider three variants of algorithms for studying the stability of thin-shell: An algorithm based on the Ritz method and iterative processes, an algorithm based on the method of steepest descent, the algorithm based on a method of extending the solution to the parameter. Analyzes the results of the study of shells produced using these algorithms.

**Key words:** algorithms for the stability of shells, the algorithm of the Ritz method, the algorithm is the method of steepest descent algorithm of the continuation parameter.

При исследовании устойчивости тонкостенных оболочек решаются нелинейные задачи. При решении нелинейно-упругих задач и задач ползучести задача исследования устойчивости оболочек существенно усложняется. Дифференциальные уравнения равновесия весьма громоздки, поэтому целесообразнее использовать методы минимизации функционала полной энергии деформации.

Функционал полной энергии деформации подкрепленных оболочек вращения при решении линейно-упругих задач будет иметь вид [1]

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b \left\{ (h + \bar{F})(\varepsilon_x^2 + 2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \mu_1\gamma_{xy}^2 + \mu_1k(\psi_x - \theta_1)^2 + \mu_1k(\psi_y - \theta_2)^2) + \right. \\ & + 2\bar{S}(\varepsilon_x\chi_1 + \mu\varepsilon_x\chi_2 + \varepsilon_y\chi_2 + \mu\varepsilon_y\chi_1 + 2\mu_1\gamma_{xy}\chi_{12}) + \left. \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1^2 + 2\mu\chi_1\chi_2 + \chi_2^2 + 4\mu_1\chi_{12}^2) - \right. \\ & \left. - \frac{2(1-\mu^2)}{E} (P_xU + P_yV + qW) \right\} AB \, dx \, dy; \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} V - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2, & \varepsilon_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} U - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} V + \theta_1\theta_2, \\ \theta_1 &= - \left( \frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right), & \theta_2 &= - \left( \frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right), \\ \chi_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \psi_y, & \chi_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \psi_x, \\ 2\chi_{12} &= \frac{1}{A} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \psi_x + \frac{\partial B}{\partial x} \psi_y \right), \end{aligned}$$

$P_x, P_y, q$  — компоненты внешней нагрузки вдоль осей  $x, y, z$ ;  $A, B$  — параметры Ляме;  $E, \mu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки.



Высота и расположение ребер задается функцией

$$H(x, y) = \sum_{j=1}^m h^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n h^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i),$$

где  $h^i, h^j$  — высота ребер параллельных осей  $y$  и  $x$  соответственно,  $h^{ij} = \min\{h^i, h^j\}$ ,  $\bar{\delta}(x - x_j)$ ,  $\bar{\delta}(y - y_i)$  — единичные столбчатые функции, равные единице в местах присоединения ребер и равные нулю вне таких мест. Контакт ребра и обшивки происходит по полосе.

Таким образом, толщина всей конструкции равна  $h + H$ . Если  $H > 0$ , то оболочка подкреплена ребрами или накладками, а если  $H < 0$ , то она ослаблена вырезами;

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \int_{h/2}^{h/2+H} dz = H, & \bar{S} &= \int_{h/2}^{h/2+H} z dz = \frac{H(h+H)}{2}, \\ \bar{J} &= \int_{h/2}^{h/2+H} z^2 dz = 0.25h^2H + 0.5hH^2 + \frac{1}{3}H^3. \end{aligned}$$

Наиболее простой в реализации алгоритм исследования устойчивости оболочки основан на методе Ритца. При этом получается система нелинейных алгебраических уравнений. Для решения таких систем применяется метод итераций, когда все нелинейные члены переносятся в правую часть.

Искомые функции перемещений  $U(x, y)$ ,  $V(x, y)$ ,  $W(x, y)$  и углов поворота нормали  $\psi_x(x, y)$ ,  $\psi_y(x, y)$  представляем в виде

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{I=1}^n U(I)X1(I)Y1(I), & V(x, y) &= \sum_{I=1}^n V(I)X2(I)Y2(I), & W(x, y) &= \sum_{I=1}^n W(I)X3(I)Y3(I), \\ \psi_x(x, y) &= \sum_{I=1}^n PS(I)X4(I)Y4(I), & \psi_y(x, y) &= \sum_{I=1}^n PN(I)X5(I)Y5(I), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $U(I), V(I), W(I), PS(I), PN(I)$  — неизвестные числовые параметры или функции переменной  $t$  при решении задач ползучести;  $X1 - X5$  — аппроксимирующие функции переменной  $x$ , удовлетворяющие при  $x = 0$  и  $x = a$  заданным краевым условиям;  $Y1 - Y5$  — аппроксимирующие функции переменной  $y$ , удовлетворяющие краевым условиям при  $y = 0, y = b$ .

В соответствии с методом Ритца, подставив (2) в (1), получим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial U(I)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V(I)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial W(I)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial PS(I)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial PN(I)} = 0,$$

которую кратко можно записать в виде

$$F_{\text{Л}}(X) - cpP = F_{\text{Н}}(X).$$

Здесь  $X = (U(I), V(I), W(I), PS(I), PN(I))^T$ ,  $F_{\text{Л}}(X)$  — линейная часть,  $F_{\text{Н}}(X)$  — нелинейная часть уравнений;  $cpP$  — нагруженный член.

При последовательном увеличении нагрузки  $q$  сначала решается геометрически линейная задача

$$F_{\text{Л}}(X) - cpP = 0,$$

затем методом итерации находится решение геометрически нелинейной задачи

$$F_{\text{Л}}(X_i) - cpP = F_{\text{Н}}(X_{i-1}). \quad (3)$$

Процесс итераций заканчивается, когда прогибы на предыдущей и последующей итерациях практически совпадают. Нагрузка, при которой процесс итераций расходится, принимается за критическую нагрузку.



В качестве примера рассматриваемого алгоритма для исследования устойчивости подкрепленных пологих оболочек рассмотрим три варианта оболочек:

- 1)  $\bar{a} = \bar{b} = 600, k_\xi = k_\eta = 953.64;$
  - 2)  $\bar{a} = \bar{b} = 600, k_\xi = k_\eta = 476.82;$
  - 3)  $\bar{a} = \bar{b} = 600, k_\xi = k_\eta = 238.41.$
- Здесь  $\bar{a} = a/h, \bar{b} = b/h, k_\xi = a^2 k_x/h, k_\eta = b^2 k_y/h.$

Прогиб в безразмерном виде и безразмерная нагрузка будут иметь вид  $\bar{W} = \frac{W}{h}, \bar{P} = \frac{a^4 q}{Eh^4}.$  Оболочки могут быть подкреплены 18 или 36 ребрами высотой  $3h$  и шириной  $2h.$

На рис. 1, *a–в* представлены графики «нагрузка  $\bar{P}$  – прогиб  $\bar{W}$ » в центре оболочки (кривая с индексом 1, кривая с индексом 2 – это прогиб  $\bar{W}(0.25, 0.25)$ ). Кривые с номером 1 соответствуют оболочке без ребер, 2 – оболочке, подкрепленной 18 ребрами, 3 – оболочке, подкрепленной 36 ребрами. Расчеты проведены при  $N = 9.$

Как видно из рис. 1, *a–в*, по рассмотренной методике находится только первая из возможных критических нагрузок. При этой нагрузке процесс итерации расходится, и закритическое поведение конструкции исследовать не удастся. Следует отметить, что такая методика удобна и при решении нелинейно-упругих задач (физически нелинейных) и задач ползучести.

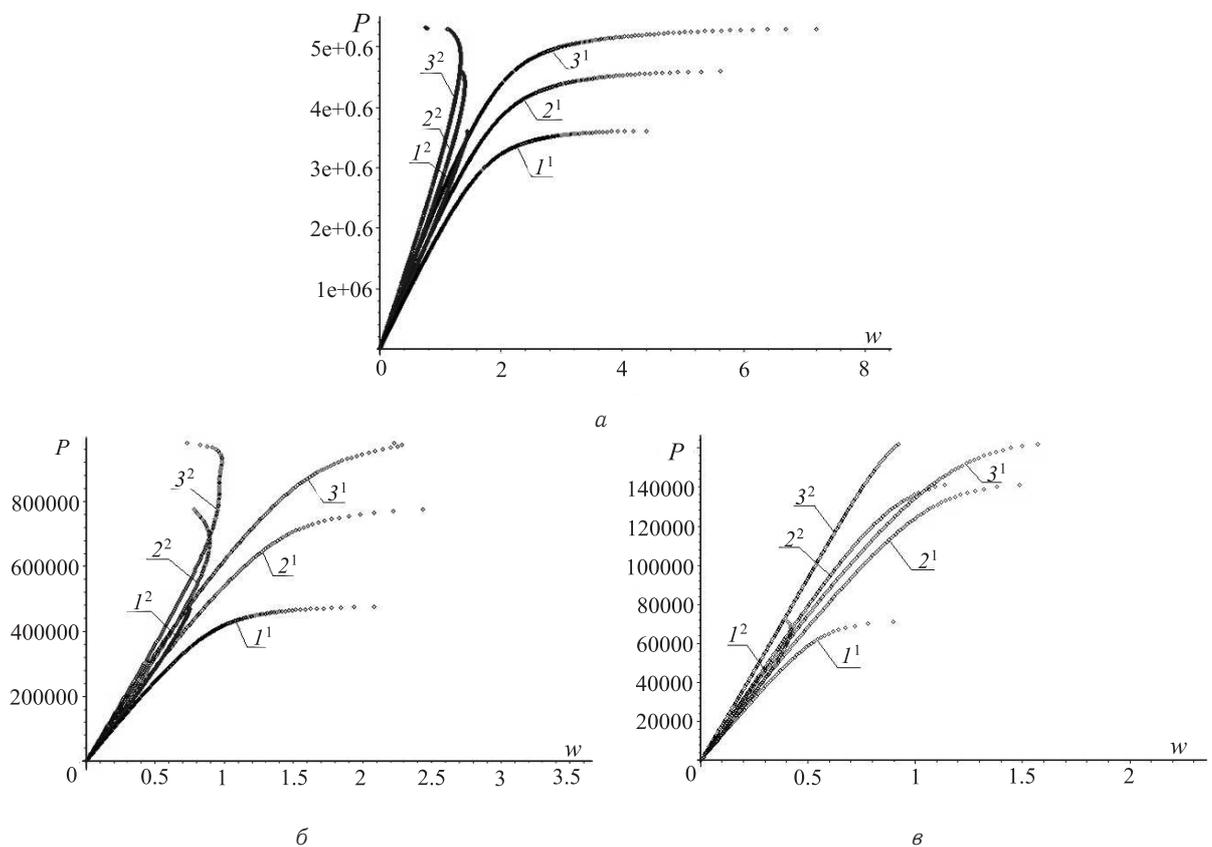


Рис. 1. Кривые зависимости « $\bar{P} - \bar{W}$ » для вариантов оболочки 1 (*a*); 2 (*б*); 3 (*в*), подкрепленной различным числом ребер

Тонкостенные оболочки могут иметь несколько форм потери устойчивости, когда прохлопывается только часть оболочки. Причем такое прохлопывание может происходить несколько раз перед тем, как оболочка прохлопнется полностью. Для исследования местных и общих форм потери устойчивости необходимо иметь возможность исследовать поведение конструкции и в закритической области. Такую возможность дает алгоритм, основанный на методе наискорейшего спуска [2, 3].

Если разложения искомых функций в ряды (2) подставить в функционал (1), то получим нелинейную функцию от неизвестных параметров  $U(I), V(I), W(I), PS(I), PN(I)$  или кратко  $\Phi(X, q).$  При каждом значении нагрузки  $q$  находится минимум этой функции по методу наискорейшего спуска,



когда последовательно уточняется значение  $X$ , начиная с некоторого начального значения  $X_0$

$$X_i = X_{i-1} - t_i \frac{\partial \Phi(X_{i-1}, q)}{\partial X}.$$

Если алгоритм, основанный на методе Рунге и итерационных процессах, требует многократного решения систем линейных алгебраических уравнений с изменяющейся в процессе итераций правой частью, что занимает достаточно большое время расчета на ЭВМ, то алгоритм, основанный на методе наискорейшего спуска, свободен от этого недостатка. Некоторая сложность возникает с нахождением параметра  $t_i$  на каждой итерации, но эта задача решается методом золотого сечения.

На рис. 2, а–в представлены графики «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » оболочки в характерных точках (в центре, четверти и наибольший прогиб) для панелей цилиндрических оболочек. Рассматривается несколько вариантов стальных цилиндрических панелей с радиусом  $r = 5.4$  м и толщиной  $h = 0.01$  м, разными размерами  $a$  вдоль оси  $x$  и углами разворота  $y_k$  (рад) вдоль оси  $y$ .

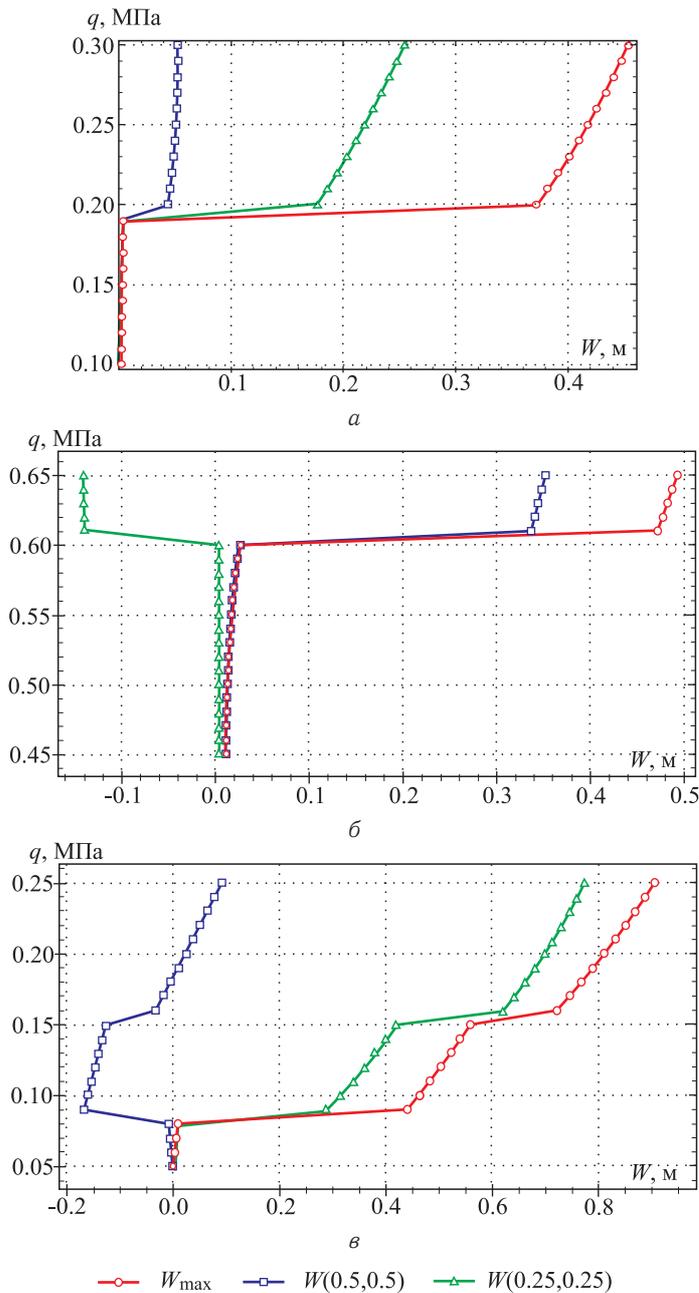


Рис. 2. График «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ »:  $a = 10$  м,  $y_k = 1.57$  (а);  
 $a = 10$  м,  $y_k = 3.14$  (б);  $-a = 20$  м,  $y_k = 1.57$  (в)



Как видно из рис. 2, а, б, для панели с параметром  $a = 10$  м происходит один раз перескок в новое равновесное состояние и после потери устойчивости прогиб оболочки в различных точках начинает монотонно возрастать. Для панели с параметром  $a = 20$  м при  $y_k = 1.57$  происходит несколько перескоков в новое равновесное состояние (несколько потерь устойчивости) после чего прогибы в разных точках начинают монотонно возрастать.

Таким образом, этот алгоритм позволяет находить как местные, так и общие формы потери устойчивости оболочек, но не позволяет находить нижние критические нагрузки и точки бифуркации. Эта методика также позволяет решать как физически нелинейные задачи, так и задачи ползучести.

Решения нелинейных задач не единственны. Существует при одной и той же нагрузке несколько форм равновесных состояний. Существуют точки пересечения кривых «нагрузка – прогиб», которые называют точками бифуркации. Вблизи таких точек может наступить перескок с одной формы равновесия на другую. Поэтому необходимо при исследовании устойчивости оболочек находить не только критические нагрузки, но и точки бифуркации.

Алгоритм, основанный на методе продолжения решения по параметру, позволяет находить как верхние, так и нижние критические точки кривой «нагрузка – прогиб» и, кроме того, находить точки бифуркации [2, 4].

Уравнения равновесия (3) кратко можно еще записать в виде

$$F(X, P) = 0.$$

Продифференцировав это уравнение по параметру  $P$  получим

$$\frac{\partial F}{\partial X} \frac{dX}{dP} + \frac{\partial F}{\partial P} = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) линейное относительно  $\frac{dX}{dP}$ . Если при  $P = P_0$  известно  $X = X_0$ , то, используя для решения краевой задачи для уравнения (4) метод Эйлера, получим расчетную схему

$$X_{i+1} = X_i + \Delta X_i, \quad P_{i+1} = P_i + \Delta P_i,$$

где  $\Delta P_i$  задается, а  $\Delta X_i$  находится из линейного уравнения

$$F'_X(X_i, P_i) \Delta X_i + F'_P(X_i, P_i) \Delta P_i = 0.$$

На рис. 3 представлены графики «нагрузка  $\bar{P}$  – прогиб  $\bar{W}$ » в центре оболочки (сплошные линии) и в четверти (пунктирные линии) для пологой оболочки с параметрами  $a = b = 120h$ ,  $k_\xi = k_\eta = 32$ , подкрепленной двумя ребрами, проходящими параллельно сторонам оболочки и пересекающимися в центре (кривая 2) и 8 ребрами (по 4 в каждом направлении, кривая 8) высотой  $3h$  и шириной  $2h$ . Индекс  $T$  означает, что ребра имеют высоту  $15h$  и ширину  $3h$ . Для оболочки, подкрепленной 8 ребрами, происходит общая потеря устойчивости при  $\bar{P} = 1750$ . При этом прогиб при потере устойчивости составляет около двух толщин оболочки, т. е. половину от величины стрелы подъема оболочки (для рассматриваемой оболочки стрела подъема составляет  $4h$ ). Для оболочки, подкрепленной 2 ребрами, вначале наступает местная потеря устойчивости при  $\bar{P} = 800$  (прохлопываются четыре панели между ребрами и краем оболочки, точка  $M$  переходит в точку  $M_1$ , а точка  $N$  – в точку  $N_1$ ), затем при  $\bar{P} = 1185$  происходит общая потеря устойчивости (оболочка прохлопывается полностью). Для оболочки, подкрепленной более жесткими ребрами (кривая с индексом  $T$ ), местная потеря устойчивости происходит, а общей потери устойчивости может не произойти. Путем анализа знака определителя матрицы Якоби  $J$  можно определить точки бифуркации. В точках бифуркации определитель этой матрицы меняет знак.

Методика, основанная на методе продолжения решения по параметру, сложна для решения физически нелинейных задач и задач ползучести.

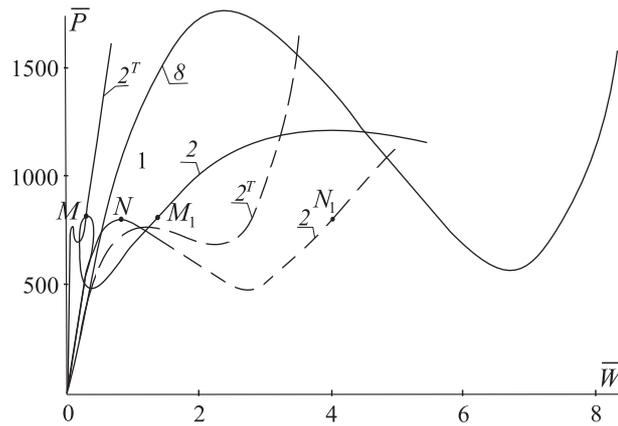


Рис. 3. Зависимость нагрузки от прогиба при различных формах потери устойчивости

Таким образом, анализируя рассмотренные алгоритмы решения задач устойчивости тонкостенных оболочек, можно сделать следующие выводы.

1. Алгоритм, основанный на методе Рунге и итерационных процессах, наиболее прост в реализации на ЭВМ. Он удобен при расчете напряженно-деформированного состояния (НДС) строительных конструкций, так как может быть применен с любого значения нагрузки. Кроме того, конструкции, применяемые в строительстве, могут работать при нагрузках, не только меньших первой критической нагрузки, но и до нагрузок, при которых наступают пластические деформации, или деформации ползучести. Применение такого алгоритма показано в работах автора и его учеников [1, 2, 5].

2. Алгоритм, основанный на методе наискорейшего спуска, позволяющий определить местные и общие формы потери устойчивости, впервые был применен в исследовании устойчивости подкрепленных оболочек вращения в работах [2, 3]. Процесс нахождения НДС оболочки может начинаться с любого значения нагрузки. Этот алгоритм удобен в тех задачах, где требуется знать весь процесс последовательной потери устойчивости оболочки.

3. В дополнение к возможностям перечисленных выше алгоритмов скажем об алгоритме, основанном на методе продолжения решения по параметру и позволяющем находить еще нижние критические нагрузки и точки бифуркации. Такой алгоритм применялся в работах автора и его учеников [1, 2, 4], а также в работах [6, 7].

4. Алгоритмы, основанные на методе Рунге и итерационных процессах и методе наискорейшего спуска при соответствующем подборе числа разложений искомым функций в ряды, дают решение с достаточно высокой точностью. Точность алгоритма, основанного на методе продолжения решения по параметру, зависит не только от числа функций разложений искомым функций в ряды, но и от величины шага нагружения  $\Delta q$ . Для повышения точности расчетов необходимо или брать достаточно малое значение  $\Delta q$ , если для решения линеаризованных уравнений применяется метод Эйлера, или использовать более точные методы для линеаризации уравнений.

### Библиографический список

1. Карпов В. В. Математическое моделирование, алгоритмы исследования модели, вычислительный эксперимент в теории оболочек. СПб., 2006. 330 с.
2. Карпов В. В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек : в 2 ч. Ч. 1: Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. М., 2010. 286 с.
3. Баранова Д. А., Карпов В. В. Алгоритмы исследования устойчивости оболочек, основанные на методе наискорейшего спуска // Математическое моделирование и краевые задачи : тр. седьмой Всерос. науч. конф. с междунар. участием : в 2 ч. Ч. 1. Самара, 2010. С. 47–51.
4. Карпов В. В., Игнатьев О. В., Сальников А. Ю. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования. М.; СПб., 2002. 420 с.
5. Карпов В. В., Кудрявцев В. К. Устойчивость ребри-



стых пологих оболочек при длительном нагружении // Вестн. ВолгГАСУ. Сер. Строительство и архитектура. 2006. Вып. 6 (21). С. 53–57.

6. Карпов В. В., Филатов В. Н. Закритические деформации гибких пластин в температурном поле с учетом изменения свойств материала от температуры // Тр.

VII Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. М., 1970. С. 276–279.

7. Карпов В. В., Петров В. В. Уточнение решений при исследовании шаговых методов в теории гибких пластин и оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 5. С. 189–191.

УДК 533.6

## ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ АЭРОУПРУГОСТИ КРЫЛА

Е. П. Лукашик

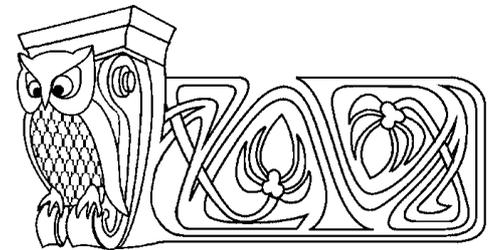
Кубанский государственный университет, Краснодар,  
кафедра информационных технологий  
E-mail: lep\_9091@mail.ru

В настоящей работе рассматривается круг вопросов, связанных с анализом деформированного состояния тонкого упругого крыла при колебаниях в ограниченной акустической среде. В качестве аппарата математических исследований выбрана теория обобщенных функций. Результаты проведенного численного эксперимента подтвердили наличие в акустической среде демпфирующих сил и резонансных явлений, обусловленных гибкими свойствами крыла.

**Ключевые слова:** ограниченная акустическая среда, тонкое крыло, обобщенные функции, демпфирующие силы, динамическая неустойчивость.

В классической аэроупругости представлены исследования в основном по сравнительно жестким, слабо деформируемым крыльям. Однако в последнее время и в технике, и в научных разработках значительное внимание уделяется упругим несущим поверхностям. Увеличивается диапазон рабочих высот для летательных аппаратов, чаще используются малые высоты, где особенно существенно влияние турбулентности атмосферы. Задачи контроля и управления за реальными процессами аэроупругости становятся предметом обсуждения на международных научных школах, семинарах по гидродинамике больших скоростей, по моделям механики сплошной среды и др. Во многих работах ставится цель найти объективно существующие аналитические зависимости, которые могут представлять интерес с точки зрения управления аэродинамическими процессами [1]. Однако стремление учесть известные свойства материалов требует комплексных исследований явлений, зачастую с привлечением сведений из различных смежных областей.

Решение рассмотренной в данной работе контактной задачи аэроупругости поднимает две взаимно связанные проблемы. Первая из них касается определения внешних гидродинамических сил (при некотором заданном движении поверхности упругого тела), а вторая — оценки деформаций, возникающих в конструкции при уже «известной» нагрузке (выраженной через гидродинамические нагрузки и зависящей от параметров самой конструкции). Для связанной задачи аэродинамики рассмотрена математическая модель, основанная на волновом уравнении, описывающем малые колебания жидкости, и на линейном уравнении изгиба тонких пластин при наличии заданных постоянных усилий в срединной плоскости. Такое приближение позволяет несколько упростить анализ сложных механических явлений, обусловленных взаимодействием аэродинамических и упругих сил, в некоторых



**Application of Generalized Functions in Dynamical Contact Problems of Wing Aeroelasticity**

**E. P. Lukaschik**

Kuban State University, Krasnodar,  
Chair of Information Technology  
E-mail: lep\_9091@mail.ru

The range of problems dealing with analysis of deformed state of thin elastic wing at the oscillations in limited acoustic medium is considered in this article. The theory of generalized functions was chosen as an instrument for the mathematical research. By results of performed numerical experiment the existence of damp forces in the acoustic medium and resonance effects caused by elastic properties of the wing was confirmed.

**Key words:** limited acoustic media, thin wing, generalized functions, damp forces, dynamical instability.



случаях получить результат в аналитическом виде, что облегчает качественный анализ, и в то же время сохранить основные особенности аэроупругих явлений.

Использование техники обобщенных функций [2–5] позволило математически корректно свести краевую задачу аэроупругости к сингулярному интегральному уравнению, решение которого производилось методом дискретных вихрей [6].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Моделируем крыло тонкой пластиной длиной  $2a$ , расположенной на расстоянии  $h$  от твердой границы. Начало декартовой системы координат расположим в центре пластины.

Распределение перепада давления вдоль упругой пластины, которое определяет ее гидроупругое поведение, формируется течением жидкости. Будем рассматривать безвихревое течение сжимаемой жидкости в линеаризованной постановке в предположении о слабой искривленности тонкой пластины и малости амплитуд волн, вызываемых колебаниями пластины.

Волновая картина в акустической среде описывается волновым уравнением для потенциала возмущенных скоростей  $\varphi(x, z, t)$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $c$  — скорость звука.

На границе среды потребуем выполнения следующих условий:

*условие непротекания крыла:*

$$\varphi_z = v_z(x, t), \quad z = 0, \quad |x| \leq a.$$

Вертикальная скорость  $v_z(x, t) = v_0(x, t) + f'_t(x, t)$  складывается из заданных возмущений  $v_0(x, t)$  и составляющей, вызванной упругими деформациями поверхности крыла  $f(x, t)$ :

*условие непротекания твердой границы:*

$$\varphi_z = 0, \quad z = -h;$$

*отсутствие возмущений на бесконечности:*

$$|\varphi| \rightarrow 0, \quad r = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty;$$

*условие излучения возмущенных волн.*

При  $x \rightarrow \pm\infty$   $\varphi = C_{\pm} e^{\pm i\nu \cdot x}$  ( $\nu > 0$ ). Волновое число  $\nu$  определяется параметрами задачи.

При рассмотрении установившихся колебаний  $v_0(x, t) = \tilde{v}_0(x) e^{-i\omega t}$  ( $\omega$  — частота колебаний) в линейной постановке зависимость от времени для всех исследуемых величин будет выражаться гармоническими функциями. Так, для потенциала возмущенных скоростей и упругих перемещений при условии, что период деформации крыла совпадает с периодом его колебаний, используем следующие выражения в комплексном виде:  $\varphi(x, z, t) = \tilde{\varphi}(x, z) e^{-i\omega t}$ ,  $f(x, t) = \tilde{f}(x) e^{-i\omega t}$ . В дальнейшем знак « $\sim$ » в обозначениях комплексных амплитуд будем опускать.

Комплексная амплитуда потенциала  $\varphi(x, z)$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \varphi + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi = 0$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \varphi_z = v_z(x) = v_0(x) - i\omega f, \quad z = 0, \\ \varphi_z = 0, \quad z = -h, \\ |\varphi| \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

В качестве уравнения связи формы профиля с распределением давления вдоль его границ возьмем уравнение равновесия для случая цилиндрического изгиба пластины при наличии заданных постоянных усилий в срединной плоскости [7]:

$$-\rho_0 h_0 \omega^2 f + D \frac{d^4 f}{dx^4} = p(x), \quad (3)$$



где  $D$  — изгибная жесткость пластины,  $h_0$  — толщина пластины,  $\rho_0$  — плотность материала пластины,  $p(x)$  — аэродинамическое давление.

Различные способы закрепления упругой пластины задают граничные условия для уравнения изгиба (3).

По известному распределению упругих перемещений можно определить динамические характеристики гибкого крыла, например, изгибающий момент  $M(x)$  и перерезывающую силу  $Q(x)$  [7]:

$$M(x) = -D \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \quad Q(x) = -D \frac{d^3 f(x)}{dx^3}. \quad (4)$$

Введем в рассмотрение функцию, характеризующую скачок касательных скоростей в точках пластины:

$$\gamma(x) = \frac{\partial \varphi_+}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_-}{\partial x}, \quad x \in [-a, a]. \quad (5)$$

Индексы «+» и «-» указывают величины, относящиеся соответственно к верхней и нижней поверхности пластинки.

С физической точки зрения функцию  $\gamma(x)$  можно интерпретировать как интенсивность вихревого слоя, моделирующего влияние колебательных движений крыла на невозмущенное состояние акустической среды. Считая, что завихренность вне крыла отсутствует, продолжим функцию  $\gamma(x)$  на всю действительную ось, определив ее значения за пределами отрезка  $[-a, a]$  как нулевые.

Для установления аэродинамических сил необходимо узнать распределение аэродинамического давления  $p(x)$  по поверхности крыла. Используя интеграл Коши – Лагранжа, выразим давление через потенциал возмущенных скоростей

$$p(x) = -i\rho\omega(\varphi_+ - \varphi_-) = -i\omega\rho \int_{-a}^x \gamma(\xi) d\xi, \quad (6)$$

где  $\rho$  — плотность акустической среды.

Требование ограниченности давления на краях профиля можно представить в виде

$$\int_{-a}^a \gamma(\xi) d\xi = 0. \quad (7)$$

Опираясь на физический смысл функции  $\gamma(x)$  последнее равенство можно интерпретировать как условие бесциркуляционности возмущенного течения.

Аэродинамические подъемная сила  $N$  и момент  $M$  относительно центра крыла связаны с вихревой интенсивностью соотношениями:

$$N = i\omega\rho \int_{-a}^a \xi \cdot \gamma(\xi) d\xi, \quad M = \frac{i\omega\rho}{2} \int_{-a}^a \xi^2 \cdot \gamma(\xi) d\xi. \quad (8)$$

Таким образом, математическая модель колебательного движения тонкого гибкого крыла представляет собой связанную контактную задачу. Для решения поставленной задачи применим аэродинамический подход, согласно которому задача изгиба крылового профиля будет считаться вспомогательной для определения возмущений скорости точек крыла, формирующих аэродинамическое давление.

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассмотрим колебания упругого свободного однородного крыла, присоединенного к фюзеляжу. Масса фюзеляжа равна  $2m_F$ . Данная модель упругого крыла рассматривалась в работе [8].

Симметричные возмущения, вызванные поступательными колебаниями, и, как видно из рис. 1, симметричные условия закрепления приводят к симметричному распределению поперечной нагрузки по крылу и симметричным деформациям. В силу симметрии можно рассматривать, например, только



левую половину системы, изображенной на рис. 1. Таким образом, упругие перемещения колеблющегося крыла определяются как решение уравнения

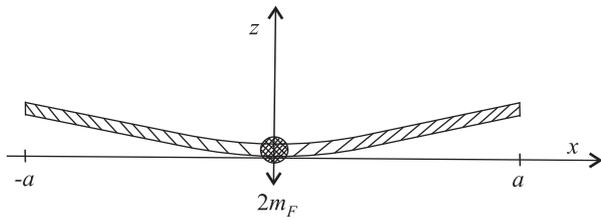


Рис. 1. Однородное крыло, прикрепленное к фюзеляжу

$$-\rho_0 h_0 \omega^2 f + D \frac{d^4 f}{dx^4} = -i \omega \rho \int_{-a}^x \gamma(s) ds$$

с граничными условиями для случая симметричного движения:

$$\begin{cases} f'(0) = 0, & f'''(0) = m_F \omega^2 f(0), \\ f''(-a) = 0, & f'''(-a) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Далее в работе будем использовать безразмерные величины:  $f = \bar{f} \cdot a$ ,  $x = \bar{x} \cdot a$ ,  $z = \bar{z} \cdot a$ ,  $h = \bar{h} \cdot a$ ,  $\kappa = \frac{\rho a^3 c^2}{D}$  — параметр упругости,  $\nu = \frac{\omega a}{c}$  — приведенная частота,  $m = \frac{\rho_0 h_0}{\rho a}$  — относительная масса крыла,  $\mu = \frac{m_F}{\rho_0 h_0 a}$  — относительная масса фюзеляжа.

В безразмерном виде задача изгиба однородного крыла под действием аэродинамической нагрузки выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} f^{IV}(x) - \beta^4 f &= -i \frac{\beta^4}{m} \int_{-1}^x \gamma(s) ds, & \beta^4 &= m \nu^2 \kappa, \\ f'(0) &= 0, & f'''(0) &= \mu \cdot \beta^4 \cdot f(0), \\ f''(-1) &= 0, & f'''(-1) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Решение данной задачи проведем методом функций Грина, что позволит получить зависимость упругих перемещений от произвольного распределения вихревой интенсивности вдоль профиля. При построении функции Грина используем балочные функции Крылова [9]:

$$\begin{aligned} S(x) &= 0.5(\operatorname{ch} x + \cos x), & U(x) &= 0.5(\operatorname{ch} x - \cos x), \\ V(x) &= 0.5(\operatorname{sh} x - \sin x), & T(x) &= 0.5(\operatorname{sh} x + \sin x), \end{aligned}$$

для которых выполняются соотношения:

$$S'(x) = V(x), \quad V'(x) = U(x), \quad U'(x) = T(x), \quad T'(x) = S(x).$$

В результате получим следующее выражение для упругих перемещений:

$$f(x) = \frac{i}{m} \left\{ \int_{-1}^x \gamma(s) [1 - S(\beta(x-s))] ds + A \cdot S(\beta(1+x)) + B \cdot T(\beta(1+x)) \right\}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 \gamma(s) \frac{S(\beta)[\mu\beta(1 - S(\beta s)) - T(\beta s)] + V(\beta s)[U(\beta) - \mu\beta T(\beta)]}{S(\beta)[T(\beta) - \mu\beta S(\beta)] - V(\beta)[U(\beta) - \mu\beta T(\beta)]} ds, \\ B &= - \int_{-1}^0 \gamma(s) \frac{V(\beta)[\mu\beta(1 - S(\beta s)) - T(\beta s)] + V(\beta s)[T(\beta) - \mu\beta S(\beta)]}{S(\beta)[T(\beta) - \mu\beta S(\beta)] - V(\beta)[U(\beta) - \mu\beta T(\beta)]} ds. \end{aligned}$$

В выражении (11)  $-1 \leq x \leq 0$ . Учитывая свойство симметрии картины возмущенного течения, запишем выражение для упругих перемещений в произвольной точке профиля крыла:

$$f(x) = \frac{i}{m} \int_{-1}^0 \gamma(s) G(-|x|, s) ds, \quad -1 < x < 1,$$

$$G(x, s) = \Theta(x-s) \cdot [1 - S(\beta(x-s))] + \frac{1}{S(\beta)[T(\beta) - \mu\beta S(\beta)] - V(\beta)[U(\beta) - \mu\beta T(\beta)]} \times$$



$$\begin{aligned} & \times \left\{ S(\beta(1+x)) \cdot [S(\beta) \cdot [\mu\beta(1-S(\beta s)) - T(\beta s)] + V(\beta s) \cdot [U(\beta) - \mu\beta T(\beta)]] - \right. \\ & \left. - T(\beta(1+x)) \cdot [V(\beta) \cdot [\mu\beta(1-S(\beta s)) - T(\beta s)] + V(\beta s) \cdot [T(\beta) - \mu\beta S(\beta)]] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\Theta(x)$  — функция Хэвисайда.

### 3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ АЭРОДИНАМИКИ

Задача для потенциала возмущенных скоростей  $\varphi(x, y)$  в безразмерном виде представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi + \nu^2\varphi &= 0, \\ \varphi_z = v_z(x) = v_0(x) - i\omega f, & \quad z = 0, \\ \varphi_z &= 0, \quad z = -h, \\ |\varphi| &\rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (13)$$

Потенциал  $\varphi(x, y)$ , как будет показано ниже, следует определять в пространстве обобщенных функций медленного роста [2]. Для решения поставленной задачи используем преобразование Фурье по переменной  $x$ , которое для обобщенных функций всегда существует [4]:  $\Phi(\alpha, z) = F[\varphi(x, z)](\alpha)$ .

В Фурье-образах задача (13) примет вид

$$\begin{aligned} \Phi_z''(\alpha, z) - \chi^2\Phi &= 0, \\ \Phi_z &= V(x), \quad z = 0, \\ \Phi_z &= 0, \quad z = -h, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\chi^2 = \alpha^2 - \nu^2$ ,  $V(x) = F[v_z(x)]$ .

Решение задачи (14) представим в виде пары функций

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi_+, & z \geq 0, \\ \Phi_-, & -h < z < 0, \end{cases}$$

для которых выполняется условие сопряжения при  $z = 0$ :

$$\Phi'_{+z} = \Phi'_{-z}. \quad (15)$$

Составляющие решения определяем в виде

$$\Phi_+ = Ae^{-\chi z} + Be^{\chi z}, \quad \Phi_- = Ce^{-\chi z} + De^{\chi z}.$$

Для однозначной разрешимости краевой задачи (14) необходимо определить ветвь радикалов  $\chi(\alpha)$ . При выборе ветви можно использовать физическую интерпретацию решения, чтобы обеспечить выполнение условий излучения и отсутствия возмущений на бесконечности. Для определенности при  $|\alpha| > \nu$  примем  $\text{Re } \chi(\alpha) > 0$ . Тогда условие отсутствия возмущений на бесконечности потребует положить  $B = 0$ , что приведет к выражению:  $\Phi_+ = Ae^{-\chi(\alpha)z}$ . Применением обратного преобразования Фурье получим выражение для потенциала течения в области над крылом:

$$\varphi_+ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha) e^{-\chi(\alpha)z} e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Данное выражение при  $|\alpha| > \nu$  представляет собой суперпозицию плоских неоднородных волн, распространяющихся вдоль оси  $Ox$ , амплитуда которых экспоненциально убывает по мере удаления вверх от крыла.

При  $|\alpha| < \nu$  имеем суперпозицию однородных плоских волн, уравнение распространения которых имеет вид:  $-\text{Im } \chi \cdot z - \alpha x - \omega t = \text{const}$ . Фазовая скорость таких волн, распространяющихся вдоль оси  $Oz$  ( $x$  фиксировано), равна  $\dot{z} = -\frac{\omega}{\text{Im } \chi}$ . В соответствии с принципом излучения в решении должны



присутствовать только волны, идущие от источника возмущений, т. е. скорость волн, перемещающихся вверх от крыла, должна быть положительна. Для этого необходимо, чтобы  $\text{Im } \chi(\alpha) < 0$ .

Используя условие на твердой границе и условие сопряжения решений (15), получим следующие выражения для составляющих решения:

$$\Phi_+ = A \cdot e^{-\chi(\alpha)z}, \quad \Phi_- = -A \cdot e^{\chi(\alpha)z} \cdot \frac{(1 + e^{-2\chi(\alpha)(h+z)})}{(1 - e^{-2\chi(\alpha)h})}.$$

Учитывая связь вихревой интенсивности с потенциалом скорости ( $\Gamma(\alpha) = -i\alpha(\Phi_+ - \Phi_-)$ ), приходим к соотношению

$$\Gamma(\alpha)(1 - e^{-2\chi h}) = -2i\alpha A, \tag{16}$$

которое можно рассматривать как уравнение относительно обобщенной функции  $A(\alpha)$ . Общее решение этого уравнения в пространстве обобщенных функций имеет вид [5]:

$$A(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)}{-2i} \left[ (1 - e^{-2\chi(\alpha)h}) P \frac{1}{\alpha} + C\delta(\alpha) \right],$$

где  $\delta(\alpha)$  — функция Дирака,  $P \frac{1}{s}$  — обобщенная функция, действующая на основные функции по правилу:

$$\left( P \frac{1}{s}, f(s) \right) = Vp \int \frac{f(s)}{s} ds = \lim \left( \int_{+\varepsilon}^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon} \right) \frac{f(s)}{s} ds.$$

Запишем выражение для Фурье-образа нормальной скорости при  $z = 0$ :

$$\Phi_{+z} = -\chi(\alpha)A(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)}{2i} \chi(\alpha)(1 - e^{-2\chi(\alpha)h}) P \frac{1}{\alpha} + C\Gamma(\alpha)\delta(\alpha).$$

Учитывая, что для обобщенной функции Дирака  $\Gamma(\alpha)\delta(\alpha) = \Gamma(0)\delta(\alpha)$ , а в силу бесциркуляционности возмущенного течения  $\Gamma(0) = \int_{-1}^{+1} \gamma(s) ds = 0$ , условие непротекания профиля представим в виде

$$\Gamma(\alpha) \cdot K(\alpha) = V(\alpha), \quad K(\alpha) = \frac{\chi(\alpha)}{2i} (1 - e^{-2\chi h}) P \frac{1}{\alpha}. \tag{17}$$

Отметим поведение функции  $K(\alpha)$  на бесконечности:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} K(\alpha) = \frac{1}{2i} \text{sign}(\alpha) + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

Произведение обобщенной функции медленного роста  $K(\alpha)$  и образа финитной функции  $\Gamma(\alpha)$  является образом свертки их оригиналов [5]. Применением обратного преобразования Фурье к уравнению (17) приходим к сверточному уравнению:  $(\gamma * k) = v_z(x)$ .

С учетом финитности функции  $\gamma(x)$  сверточное уравнение запишем в виде

$$\int_{-1}^{+1} \gamma(s)k(x-s) ds = v_z(x), \tag{18}$$

где  $k(x) = F^{-1}(K(\alpha))(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\alpha)e^{-i\alpha x} d\alpha$ .

Эффективность многих численных методов напрямую зависит от выбранной методики вычисления функции ядра. При выборе методики полезно учитывать поведение образа ядра  $K(\alpha)$ . Функция (17) неоднозначна при  $\alpha = \pm i$ , а также имеет полюс в точке  $\alpha = 0$ . Поведение на бесконечности указывает, что ядро  $k(x)$  будет содержать сингулярное слагаемое, так как  $F^{-1}\left(\frac{\text{sign } \alpha}{2i}\right) = -\frac{1}{2\pi} P \frac{1}{x}$ , т. е. интеграл в (18) является сингулярным интегралом 1-го рода.



Преобразуем выражение (17) для  $K(\alpha)$ , выделив в виде отдельного слагаемого сингулярную составляющую. Для этого выполним следующие действия:

$$K(\alpha) = \left[ \frac{\chi}{2i}(1 - e^{-2\chi h})P\frac{1}{\alpha} - \frac{\text{sign}[\alpha + \text{sign}(x) \cdot \nu]}{2i} \right] + \frac{\text{sign}[\alpha + \text{sign}(x) \cdot \nu]}{2i}.$$

Обозначив выражение в квадратных скобках как  $R(\alpha)$  и учитывая, что

$$F^{-1} \left( \frac{\text{sign}[\alpha + \text{sign}(x) \cdot \nu]}{2i} \right) = -\frac{1}{2\pi} e^{i\nu|x|} P\frac{1}{x},$$

получим

$$k(x) = F^{-1}(R(\alpha)) - \frac{1}{2\pi} e^{i\nu|x|} P\frac{1}{x}. \quad (19)$$

Покажем, что  $R(\alpha) \approx O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$  на бесконечности.

Так, для случая  $x < 0$  имеем следующее выражение для функции  $R(\alpha)$ :

$$R(\alpha) = \begin{cases} \frac{\chi(\alpha)}{2i}(1 - e^{-2\chi h})P\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2i}, & \alpha < \nu, \\ \frac{\beta(\alpha)}{2i}(1 - e^{-2\chi h})P\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2i}, & \alpha > \nu. \end{cases}$$

При  $\alpha \rightarrow +\infty$ :

$$\frac{\chi(\alpha)}{2i}P\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2i} = \frac{|\alpha|}{2i\alpha} \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2}\right)^{1/2} - \frac{1}{2i} = \frac{1}{2i} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{\alpha^2} + o\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\right] - \frac{1}{2i} = \frac{-1}{4i} \frac{\nu^2}{\alpha^2} + o\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

При  $\alpha \rightarrow -\infty$ :

$$\frac{\chi(\alpha)}{2i}P\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2i} = \frac{|\alpha|}{2i\alpha} \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2}\right)^{1/2} + \frac{1}{2i} = \frac{-1}{2i} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{\alpha^2} + o\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\right] + \frac{1}{2i} = \frac{1}{4i} \frac{\nu^2}{\alpha^2} + o\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

Аналогичный порядок убывания на бесконечности имеет функция  $R(\alpha)$  при  $x > 0$ .

Для таких функций преобразование Фурье можно понимать в классическом смысле, выделив в окрестности нуля интеграл в смысле главного значения.

Таким образом, определение ядра  $k(x)$  сведено к вычислению интегралов:

$$F^{-1}(R(\alpha)) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{-\text{sign}(x) \cdot \nu} \left( \chi(\alpha) \cdot (1 - e^{-2\chi h})P\frac{1}{\alpha} + 1 \right) e^{-i\alpha x} dx + \frac{1}{4\pi i} \int_{-\text{sign}(x) \cdot \nu}^{+\infty} \left( \chi(\alpha) \cdot (1 - e^{-2\chi h})P\frac{1}{\alpha} - 1 \right) e^{-i\alpha x} dx. \quad (20)$$

Для вычисления интегралов Фурье аналитически продолжим функции  $R(\alpha)$  в комплексную плоскость  $\alpha$ . Аналогичный подход при решении динамических контактных задач теории упругости применяется в работе [10]. Выберем ветвь многолистной функции  $R(\alpha)$  комплексного переменного  $\alpha = \sigma + i\tau$ , обеспечивающую выполнение на вещественной оси указанных требований для радикала:  $\text{Re} \chi(\alpha) > 0$ ,  $\text{Im} \chi(\alpha) < 0$ . Для этого достаточно провести разрезы, целиком лежащие в 1 и 3 квадрантах комплексной плоскости  $\alpha$ , и взять главную ветвь радикалов  $\sqrt{1} = 1$ .

В ходе численного эксперимента было получено, что более предпочтительным представляется использование не традиционных разрезов по вертикальным прямым, а ломаных разрезов (аналогичный вариант разреза предлагается в работе Б. Нобла [11]). В нашем случае разрезы строятся из отрезков действительной оси, четвертой окружности ( $|\alpha| = \varepsilon$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  и  $-\pi \leq \theta \leq -\frac{\pi}{2}$ ), лучей вдоль мнимой оси ( $\pm i\varepsilon$ ,  $\pm i\infty$ ).



Интегралы в (20) будем понимать как пределы при  $r \rightarrow \infty$  интегралов по интервалам  $-r < \alpha < -\text{sign}(x)\nu$  и  $-\text{sign}(x)\nu < \alpha < r$ . Деформируем контуры интегрирования так, чтобы при  $x < 0$  полюс  $\alpha = 0$  обойти сверху, а при  $x > 0$  — снизу.

Более подробно изложим методику вычисления интегралов (20) для случая  $x < 0$ . Замкнем контуры интегрирования в верхней полуплоскости  $\alpha$ . Учитывая разрез в верхней полуплоскости, получим два замкнутых контура, каждый из которых состоит из горизонтального участка вещественной

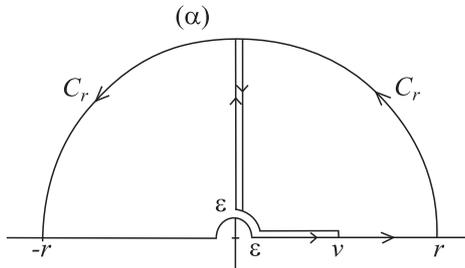


Рис. 2. Контур интегрирования при  $x < 0$

оси, соответствующего берега разреза и дуги радиуса  $r$  (рис. 2). Внутри каждого контура подынтегральная функция голоморфна. Следовательно, по теореме Коши интеграл по замкнутому контуру равен нулю.

Применяя формулы Сохоцкого [1], имеем

$$\int_L \frac{f(\alpha)}{\alpha - \mu} d\alpha = \mp \pi i f(\mu) + Vp \int_L \frac{f(\alpha)}{\alpha - \mu} d\alpha,$$

где «-», если контур  $L$  обходит полюс сверху, и «+», если — снизу.

Для  $\alpha = \sigma + i\tau$  в верхней полуплоскости  $\tau > 0$ , подынтегральная функция за счет множителя  $e^{\tau x}$  экспоненциально убывает, в силу чего интеграл по дугам  $C_r$  при  $r \rightarrow \infty$  стремится к нулю.

На вещественном участке разреза  $\alpha = \sigma < \nu$ , на мнимой оси разреза  $\alpha = i\tau$ , т. е. на берегах разреза  $\chi(\alpha)$  принимает чисто мнимые значения. Для выбранной ветви радикала на левом берегу разреза  $\text{Im} \chi(\alpha) < 0$ , а на правом берегу  $\text{Im} \chi(\alpha) > 0$ . Исходя из вышесказанного, получаем слева от разреза:

$$\begin{aligned} Vp \int_{-\infty}^{\nu} R(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha &= -\frac{\pi i \nu}{4} (1 - e^{2i\nu h}) - \int_{\epsilon}^{\nu} \left[ \frac{\sqrt{\nu^2 - \sigma^2}}{2\sigma} (1 - e^{2ih\sqrt{\nu^2 - \sigma^2}}) - \frac{1}{2i} \right] e^{-i\sigma x} d\sigma + \\ &+ \int_{\epsilon}^{\infty} \left[ \frac{\sqrt{\nu^2 + \tau^2}}{2\tau} (1 - e^{2ih\sqrt{\nu^2 + \tau^2}}) - \frac{1}{2} \right] e^{\tau x} d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

Справа от разреза имеем:

$$\begin{aligned} Vp \int_{\nu}^{\infty} R(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha &= -\frac{\pi i \nu}{4} (1 - e^{-2i\nu h}) - \int_{\epsilon}^{\nu} \left[ \frac{\sqrt{\nu^2 - \sigma^2}}{2\sigma} (1 - e^{-2ih\sqrt{\nu^2 - \sigma^2}}) - \frac{1}{2i} \right] e^{-i\sigma x} d\sigma + \\ &+ \int_{\epsilon}^{\infty} \left[ \frac{\sqrt{\nu^2 + \tau^2}}{2\tau} (1 - e^{-2ih\sqrt{\nu^2 + \tau^2}}) - \frac{1}{2} \right] e^{\tau x} d\tau. \end{aligned} \quad (22)$$

Складывая (21) и (22), получим:

$$\begin{aligned} Vp \int_{-\infty}^{\infty} R(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha &= \frac{-\pi i \nu}{2} (1 - \cos(2h\nu)) - \int_{\epsilon}^{\nu} \frac{\sqrt{\nu^2 - \sigma^2}}{\sigma} (1 - \cos(2h\sqrt{\nu^2 - \sigma^2})) e^{-i\sigma x} d\sigma + \\ &+ \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\sqrt{\nu^2 + \tau^2}}{\tau} (1 - \cos(2h\sqrt{\nu^2 + \tau^2})) e^{\tau x} d\tau + \left\{ \frac{1}{i} \int_0^{\nu} e^{-i\sigma x} d\sigma - \int_0^{\infty} e^{\tau x} d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Учитывая, что  $\int_0^{\infty} e^{x\tau} d\tau = -P \frac{1}{x}$ , разность в фигурных скобках последнего выражения преобразуем к виду  $e^{-ix\nu} P \frac{1}{x}$ , что позволит после подстановки (23) в (19) сократить сингулярное слагаемое.

В результате для случая  $x < 0$  получим выражение для ядра

$$k(x) = -\frac{i\nu}{4} (1 - \cos(2h\nu)) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\sqrt{\nu^2 + \tau^2}}{\tau} (1 - \cos(2h\sqrt{\nu^2 + \tau^2})) e^{\tau x} d\tau - \right.$$



$$- \int_{\varepsilon}^{\nu} \frac{\sqrt{\nu^2 - \sigma^2}}{\sigma} (1 - \cos(2h\sqrt{\nu^2 - \sigma^2})) e^{-i\sigma x} d\sigma \left. \right\}.$$

Замыкая контуры интегрирования интегралов (20) для  $x > 0$  в нижней полуплоскости ( $\alpha$ ), аналогичными преобразованиями приходим к результату:

$$k(x) = -\frac{i\nu}{4}(1 - \cos(2h\nu)) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\varepsilon}^{\nu} \frac{\sqrt{\nu^2 - \sigma^2}}{\sigma} (1 - \cos(2h\sqrt{\nu^2 - \sigma^2})) e^{i\sigma x} d\sigma - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sqrt{\nu^2 + \tau^2}}{\tau} (1 - \cos(2h\sqrt{\nu^2 + \tau^2})) e^{-\tau x} d\tau \right\}.$$

Окончательное выражение для функции ядра при  $-1 < x < 1$  примет вид

$$k(x) = -\frac{i\nu}{4}(1 - \cos(2h\nu)) + k_0(x),$$

$$k_0(x) = \frac{\text{sign}(x)}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^{\nu} \frac{\sqrt{\nu^2 - \sigma^2}}{\sigma} (1 - \cos(2h\sqrt{\nu^2 - \sigma^2})) e^{i\sigma|x|} d\sigma - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sqrt{\nu^2 + \tau^2}}{\tau} (1 - \cos(2h\sqrt{\nu^2 + \tau^2})) e^{-\tau|x|} d\tau \right\}. \quad (24)$$

Подставим в левую часть уравнения (18) полученное выражение для  $k(x)$ , имеем:

$$\int_{-1}^{+1} \gamma(x) k(x-s) ds = \int_{-1}^{+1} \gamma(x) k_0(x-s) ds - \frac{i\nu}{4}(1 - \cos(2h\nu)) \cdot \Gamma(0).$$

Для бесциркуляционного течения  $\Gamma(0) = 0$ . В итоге приходим к интегральному уравнению гармонических колебаний тонкого профиля в акустической среде вблизи твердой границы:

$$\int_{-1}^{+1} \gamma(x) k_0(x-s) ds = v_z(x). \quad (25)$$

Ядро  $k_0(x)$  задается выражением (24).

#### 4. МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Выражение (12) для упругих перемещений используем при определении нормальной скорости  $v_z(x)$  в правой части интегрального уравнения (25). В результате последнее преобразуется к виду

$$\int_{-1}^{+1} \gamma(s) K_0(x, s) ds = v_0(x). \quad (26)$$

$$K_0(x, s) = \begin{cases} k_0(x-s) + iG(-|x|, s), & -1 \leq x \leq 0, \\ k_0(x-s), & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Тип полученного уравнения определяет функция  $k_0(x)$  (24), в силу чего интеграл в (26) понимается в смысле Коши.

При бесциркуляционном обтекании аэродинамическое давление пропорционально ускорению. Для коэффициентов присоединенной массы  $\lambda$  и присоединенного момента инерции  $I$  верны соотношения:

$$\lambda = \int_{-1}^{+1} s\gamma(s) ds, \quad I = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} s^2\gamma(s) ds. \quad (27)$$



Численное решение сингулярного интегрального уравнения (26) выполним методом дискретных вихрей [6], что приведет к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \gamma(s_j) K_0(x_i, s_j) = v_0(x_i), \\ \sum_{j=1}^N \gamma(s_j) = 0, \end{cases} \quad (28)$$

где  $x_i = -1 + \frac{4i-1}{2N-1}$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ ,  $s_j = -1 + \frac{4j-3}{2N-1}$ ,  $j = \overline{1, N}$ .

Последнее уравнение системы (28) выражает требование бесциркуляционности течения. Выбор узлов и точек коллокации обеспечивает нахождение решения сингулярного уравнения в классе функций, неограниченных на обоих концах, что характерно для данного типа течения.

Определив интенсивность точечных вихрей  $\gamma(s_j)$ ,  $j = \overline{1, N}$ , можно вычислить действующие на крыло аэродинамические силы, вызванные этими силами упругие деформации поверхности крыла, а также обусловленные упругостью крыла изгибающий момент и перерезывающую силу.

### 5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сравнение результатов расчетов гидродинамических сил для акустической среды с соответствующим решением для несжимаемой жидкости показывает, что в случае сжимаемой жидкости, кроме сил, находящихся в фазе с ускорением и считающихся проявлением так называемых «присоединенных масс» газа, появляются демпфирующие силы в фазе со скоростью. Последнее обстоятельство означает, что колебания частиц газа, вызванные гармоническими колебаниями пластинки, являются затухающими. При этом коэффициент присоединенных масс зависит от частоты колебаний, и зависимость эта не монотонна, а имеет счетное множество резонансных пиков, выраженных достаточно слабо вследствие влияния значительных демпфирующих сил.

Проведенные расчеты свидетельствуют о том, что при удалении от экрана резонансные пики встречаются чаще, но сами пики становятся все более пологими. Зависимости, представленные на рис. 3 для крыла малой гибкости, соответствуют закономерностям, полученным в работе [12] для колебаний жесткого крыла в акустической среде.

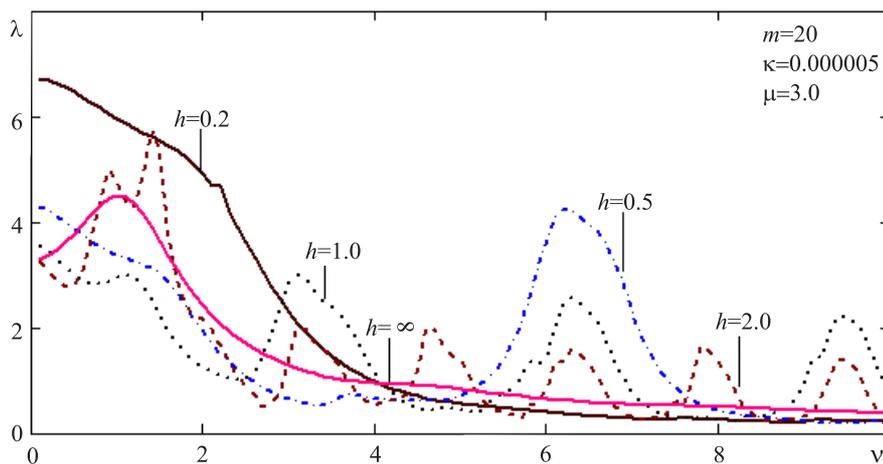


Рис. 3. Зависимости присоединенной массы от частоты для достаточно жесткого крыла на различных отстояниях от экрана

В случае крыла умеренной гибкости при определенных значениях частоты происходит резкое изменение аэродинамического давления (рис. 4). Аналогичные резонансные явления наблюдаются для давления и при изменении жесткости крыла (рис. 5).

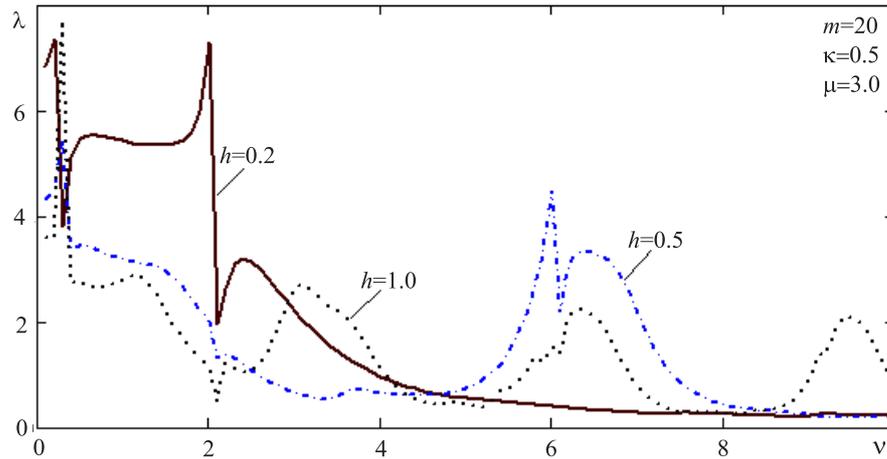


Рис. 4. Зависимость подъемной силы от частоты колебаний для гибкого крыла (критические точки:  $\nu_1 = 0.4$  ( $\beta_1 = 1.871$ ),  $\nu_2 = 2.1$  ( $\beta_2 = 4.583$ ),  $\nu_3 = 6.13$  ( $\beta_3 = 7.81$ ))

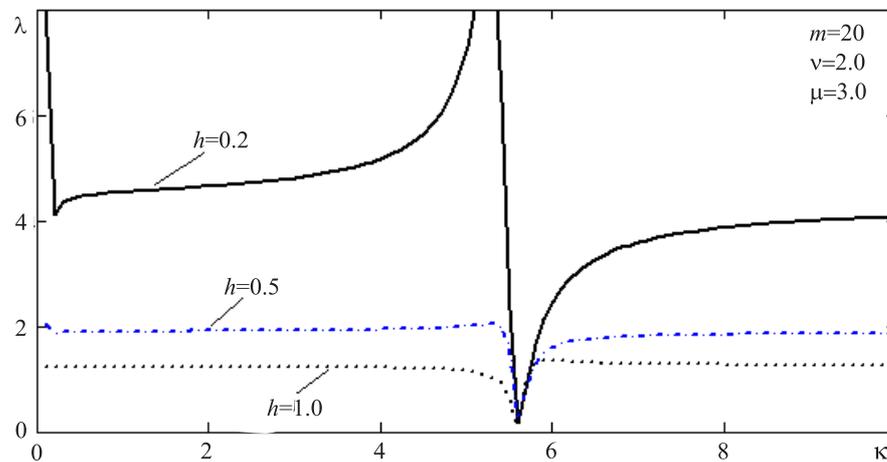


Рис. 5. Влияние упругих свойств крыла на аэродинамическую силу (критические точки:  $\kappa_1 = 0.12$ ,  $\kappa_2 = 5.65$ )

Результаты численных расчетов показали, что значения критических точек зависят от частоты колебаний, упругих свойств крыла и его массы. Эти точки соответствуют собственным числам задачи изгиба крыла (13), которые приближенно можно определить как решения частотного уравнения:

$$\mu\beta(1 + \operatorname{ch} \beta \cdot \cos \beta) = \operatorname{sh} \beta \cdot \cos \beta + \operatorname{ch} \beta \cdot \sin \beta, \quad \beta = \sqrt[4]{m\kappa\nu^2}.$$

Первые три ненулевых решения этого трансцендентного уравнения для  $\mu = 3.0$ ,  $\kappa = 5.0$ ,  $m = 20$  приближенно равны:  $\beta_1 = 1.754$ ,  $\beta_2 = 4.613$ ,  $\beta_3 = 7.81$ , что совпадает с данными работы [8]. Критические точки  $\nu_n$  и  $\kappa_n$ , наблюдаемые на рис. 2 и рис. 3 соответственно, подтверждаются приведенными выше решениями указанного частотного уравнения.

На рис. 6 представлено распределение упругих деформаций на половине профиля крыла при значениях  $\kappa$ , близких к критическим. Качественно эти кривые согласуются с первой и второй собственными формами, представленными в работе [8].

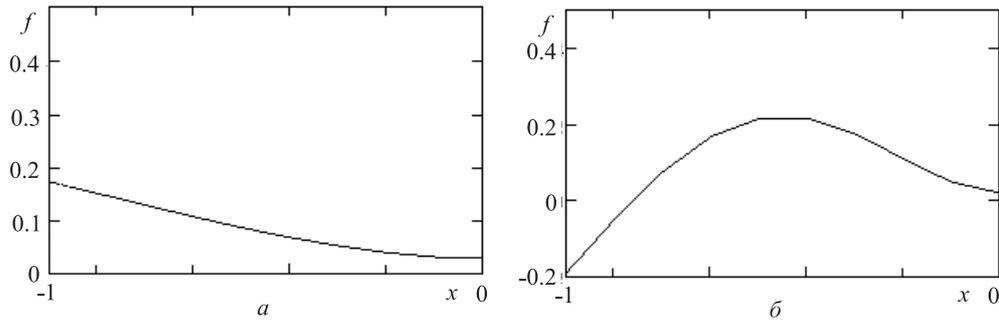


Рис. 6. Распределение упругих деформаций вблизи точек динамической неустойчивости ( $m = 20$ ,  $\mu = 3.0$ ,  $h = 0.2$ ,  $\nu = 2.0$ ,  $\kappa = 0.12$  (а),  $\kappa = 5.8$  (б))

### Библиографический список

1. Белоцерковский С. М., Кочетков Ю. А., Красовский А. А., Новицкий В. В. Введение в аэроавтоупругость. М.: Наука, 1980. 384 с.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
3. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. Сенквенциальный подход. М.: Мир, 1976. 312 с.
4. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 288 с.
5. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
6. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 768 с.
7. Тимошенко С. П., Войновски-Кригер С. А. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1963. 636 с.
8. Бисплингофф Р. Л., Эшли Х., Халфмен Р. Л. Аэроупругость. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 800 с.
9. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.
10. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
11. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
12. Ефремов И. И., Лукащук Е. П., Грибашев С. А. Гармонические колебания пластинки вблизи твердой границы сжимаемой жидкости // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: тр. междунар. шк.-семинаров. Орел, 2008. Вып. 6. С. 38–45.

УДК 539.374: 517.958

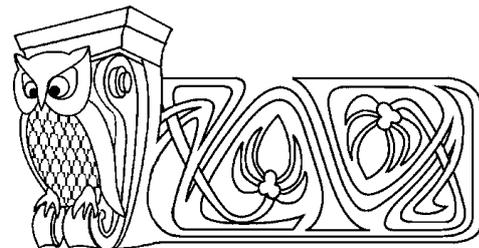
## ТЕЧЕНИЕ МАТЕРИАЛА СЛИБАРА – ПАСЛЯ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Н. А. Окулов

Филиал Российского государственного социального университета, Наро-Фоминск, кафедра педагогики, психологии и информационных технологий  
E-mail: okulovna@rambler.ru

Рассматривается вопрос о численном моделировании неустановившегося течения вязкопластического материала в плоском канале. Определяющие соотношения принимаются в форме Слибара – Пасля. Задача решается в напряжениях. Доказана теорема о слабом разрыве на границах раздела жестких и вязкопластических зон. Предложен оригинальный численный метод решения задачи. Приведены результаты численного моделирования.

**Ключевые слова:** вязкопластическая среда, материал Слибара – Пасля, численное моделирование.



### Flow of Slibar – Paslay Material in a Flat Channel

N. A. Okulov

Branch of Russian State Social University, Naro-Fominsk, Chair of Pedagogy, Psychology and Information Technologies  
E-mail: okulovna@rambler.ru

The question of the numerical simulation of unstable flow of a viscoplastic material in a flat channel is considered. Defining relations are taken in the form of Slibar – Paslay. The problem is solved in stresses. Theorem about the weak discontinuity at the interfaces between rigid and viscoplastic zones is proved. The original numerical method for solving the problem is offered. Numerical simulation results are presented.

**Key words:** viscoplastic fluid, material of Slibar – Paslay, numerical simulation.



## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается неустановившееся однонаправленное течение вязкопластической среды в плоском канале  $\Omega = \{x, y \mid -\infty < x < +\infty, 0 \leq y \leq H\}$ . Задан продольный градиент давления, зависящий только от времени:  $p'_x = P(t)$ . Постановка задачи инвариантна относительно сдвига вдоль оси абсцисс. Единственная ненулевая компонента скорости  $v_x$  и касательное напряжение  $\sigma_{xy}$  зависят только от поперечной координаты и времени:  $v_x = v(y, t)$ ,  $\sigma_{xy} = \tau(y, t)$ .

Материальная точка может находиться либо в жестком состоянии, если в этой точке тензор скоростей деформации равен нулю, либо, в противном случае, — в вязкопластическом состоянии. Связное множество материальных точек, находящихся в жестком состоянии, будем называть жесткой зоной. Аналогично определяется зона вязкопластического течения.

Реологической моделью среды служит модель материала Слибара – Паслая [1, 2], вязкопластические свойства которого задаются параметрами:  $\eta$  — структурная вязкость,  $\tau_s$  и  $\tau_d$  ( $\tau_d < \tau_s$ ) — статический и динамический пределы пластичности соответственно. Эта модель учитывает эффект запаздывания течения некоторых вязкопластических сред. Авторы модели в работе [1] рассматривали только случай монотонного процесса нагружения. Снимем это ограничение. В данной работе под материалом Слибара – Паслая будем понимать вязкопластическую среду, которая обладает следующими свойствами (формулировка для случая однонаправленного течения в плоском канале).

1. В жестких зонах материал не деформируется

$$\frac{\partial v(y, t)}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

В вязкопластических зонах скорость и напряжение связаны соотношением

$$\tau(y, t) - \alpha \cdot \tau_d = \eta \frac{\partial v(y, t)}{\partial y}, \quad \alpha = \text{sign}(\tau). \quad (2)$$

2. При  $|\tau| < \tau_d$  материальная точка находится в жестком, а при  $|\tau| > \tau_s$  — в вязкопластическом состоянии. При  $\tau_d \leq |\tau| \leq \tau_s$  материальная точка может находиться в любом из этих состояний.

3. Переход материальной точки из жесткого состояния в вязкопластическое возможен только при  $|\tau| = \tau_s$ . Обратный переход возможен только тогда, когда  $|\tau| = \tau_d$ .

**Следствие.** Материальная точка не меняет своего состояния, пока выполняется неравенство  $\tau_d < |\tau| < \tau_s$ .

Материал Слибара – Паслая рассматривается как несжимаемая сплошная среда, имеющая плотность  $\rho$ . Массовые силы отсутствуют. Уравнение движения имеет вид

$$\rho \frac{\partial v(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial \tau(y, t)}{\partial y} - P(t). \quad (3)$$

Оно должно выполняться во всех внутренних точках канала за исключением, быть может, границ раздела жестких и вязкопластических зон. Стенку  $y = H$  будем называть верхней, а стенку  $y = 0$  — нижней. На верхней стенке задается касательное напряжение:  $\tau(H, t) = \psi(t)$ , а на неподвижной нижней стенке — условие прилипания:  $v(0, t) = 0$ . Начальное условие задается для напряжения:  $\tau(y, 0) = \varphi(y)$ .

**Цель исследования.** Для моментов времени  $t > 0$  требуется определить количество и положение жестких и вязкопластических зон. Для каждой вязкопластической зоны требуется определить распределение напряжений и скоростей, а для каждой жесткой зоны — скорость ее движения и распределение напряжений.

**Переход к безразмерным переменным.** В качестве характерных значений напряжения, расстояния, времени, скорости, ускорения и градиента давления примем

$$\langle \tau \rangle = \tau_d, \quad \langle y \rangle = H, \quad \langle t \rangle = \frac{H^2 \rho}{\eta}, \quad \langle v \rangle = \frac{H \tau_d}{\eta}, \quad \langle w \rangle = \frac{\tau_d}{H \rho}, \quad \langle P \rangle = \frac{\tau_d}{H}.$$



Переход к безразмерным переменным произведем стандартным образом:  $\tilde{g} = g/\langle g \rangle$ , где  $g$  — размерная переменная,  $\langle g \rangle$  — ее характерное значение,  $\tilde{g}$  — безразмерная переменная. Дальнейшее изложение будем вести в безразмерных переменных. Помету « $\sim$ » будем опускать. Отметим также, что теперь  $\tau_d = 1$ ,  $\tau_s > 1$ .

Определяющие соотношения (1), (2) и уравнение движения (3) в безразмерных переменных имеют следующий вид:

$$\frac{\partial v(y, t)}{\partial y} = \begin{cases} 0, & \text{в жестких зонах;} \\ \tau(y, t) - \alpha, & \text{в вязкопластических зонах,} \end{cases} \quad (4)$$

$$\frac{\partial v(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial \tau(y, t)}{\partial y} - P(t). \quad (5)$$

Исключив с помощью соотношений (4) из уравнения движения (5) скорость, получим два уравнения, одно из которых должно выполняться в вязкопластических зонах:

$$\frac{\partial \tau(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \tau(y, t)}{\partial y^2}. \quad (6)$$

Другое — в жестких

$$\frac{\partial^2 \tau(y, t)}{\partial y^2} = 0. \quad (7)$$

**Замечание.** В жесткой зоне, примыкающей к нижней стенке (если такая зона имеется), выполняется уравнение

$$\frac{\partial \tau(y, t)}{\partial y} = P(t). \quad (8)$$

**Теорема о слабом разрыве.** Пусть скорость  $v(y, t)$  и напряжение  $\tau(y, t)$  непрерывны на некоторой границе раздела зон  $y = \xi(t)$ , и имеет место соотношение (4), тогда на этой границе выполняется соотношение

$$\{\tau'_y(y, t)\}_{y=\xi(t)} = \begin{cases} 0, & |\tau(\xi(t), t)| \neq \tau_s, \\ \alpha \cdot (\tau_s - 1) \cdot \dot{\xi}(t), & |\tau(\xi(t), t)| = \tau_s, \end{cases} \quad (9)$$

где  $\{\tau'_y(y, t)\}_{y=\xi(t)}$  — скачок производной  $\tau'_y(y, t)$  при переходе через границу раздела зон (из вязкопластической зоны в жесткую).

**Доказательство.** Для определенности рассмотрим случай, когда твердая зона располагается выше границы  $y = \xi(t)$ . Рассмотрим некоторый момент времени  $t = t_0$ . Будем предполагать, что граница  $y = \xi(t)$  существует на некотором отрезке времени  $[t_0, t_1]$ , и ее скорость движения  $\dot{\xi}(t)$  конечна. Здесь и далее точкой обозначается производная по времени. Тогда существует значение  $\Delta > 0$  такое, что на рассматриваемом отрезке времени граница не выйдет за пределы отрезка  $[y_1, y_2]$ , где  $y_1 = \xi(t_0) - \Delta$ ,  $y_2 = \xi(t_0) + \Delta$ , и, следовательно, интервалы  $[y_1, \xi(t)]$  и  $[\xi(t), y_2]$  все это время будут принадлежать соответственно вязкопластической и жесткой зонам.

Рассмотрим количество движения вязкопластической среды в полосе  $y_1 \leq y \leq y_2$  (в расчете на единицу ее длины)

$$K = \int_{y_1}^{y_2} v(y, t) dy = K_1 + K_2, \quad K_1 = \int_{y_1}^{\xi(t)} v(y, t) dy, \quad K_2 = \int_{\xi(t)}^{y_2} v(y, t) dy.$$

В жесткой зоне скорость всех частиц одинакова и равна  $v(\xi(t), t)$ . Следовательно,  $K_2 = v(\xi(t), t) \times [y_2 - \xi(t)]$ . В области  $y_1 \leq y \leq \xi(t)$  разложим скорость  $v(y, t)$  по формуле Тейлора:

$$v(y, t) = v(\xi(t), t) + v'_y(c_1, t) \cdot [y - \xi(t)],$$



где  $c_1$  — некоторая точка интервала  $[y, \xi(t)]$ . Проводя интегрирование, получим

$$K(t) = 2v(\xi(t), t) \cdot \Delta + \int_{y_1}^{\xi(t)} v'_y(c_1, t) \cdot [y - \xi(t)] dy.$$

Отсюда следует, что

$$\dot{K}(t_0) = 2W(t_0) \cdot \Delta - \dot{\xi}(t_0) \cdot \int_{y_1}^{\xi(t_0)} v'_y(c_1, t_0) dy + \int_{y_1}^{\xi(t_0)} [v'_y(c_1, t_0)]'_{t_0} \cdot [y - \xi(t_0)] dy,$$

где  $W(t)$  — ускорение твердой зоны. Предельным переходом получаем

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \dot{K}(t_0) = 2W(t_0) - \dot{\xi}(t_0) \cdot v'_y(\xi(t_0)-, t_0). \quad (10)$$

Учитывая, что в вязкопластической зоне имеет место второе из равенств (4), эту формулу запишем в виде

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \dot{K}(t_0) = 2W(t_0) - (\tau(\xi(t_0), t_0) - \alpha) \cdot \dot{\xi}(t_0).$$

Важно отметить, что при ее выводе динамические соотношения не были использованы.

Обратимся теперь к динамике. На основании теоремы об изменении количества движения можем записать

$$\dot{K}(t) = \tau(y_2, t) - \tau(y_1, t) - 2P(t) \cdot \Delta.$$

В жесткой зоне напряжение меняется линейно, следовательно,

$$\tau(y_2, t) = \tau(\xi(t), t) + [W(t) + P(t)] \cdot [y_2 - \xi(t)].$$

Значение  $\tau(y_1, t)$  найдем, используя формулу Тейлора:

$$\tau(y_1, t) = \tau(\xi(t), t) + \tau'_y(\hat{y}_1, t) \cdot [y_1 - \xi(t)],$$

где  $\hat{y}_1$  — некоторая промежуточная точка интервала  $[y_1, \xi(t)]$ . Используя указанные выражения для  $\tau(y_1, t)$  и  $\tau(y_2, t)$ , находим предел

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \dot{K}(t_0) = W(t_0) - P(t_0) + \tau'_y(\xi(t_0)-, t_0). \quad (11)$$

Приравнивая правые части формул (10) и (11) и учитывая, что в жесткой зоне  $W(t_0) + P(t_0) = \tau'_y(\xi(t_0) + t_0)$ , получаем

$$\{\tau'_y(y, t_0)\}_{y=\xi(t_0)} = (\tau(\xi(t_0), t_0) - \alpha) \cdot \dot{\xi}(t_0).$$

Отметим, что при  $|\tau(\xi(t_0), t_0)| = 1$  имеем равенство  $(\tau(\xi(t_0), t_0) - \alpha) = 0$ , а при  $1 < |\tau(\xi(t_0), t_0)| < \tau_s$  имеем равенство  $\dot{\xi}(t_0) = 0$ . Следовательно,

$$\{\tau'_y(y, t_0)\}_{y=\xi(t_0)} = \begin{cases} 0, & |\tau(\xi(t_0), t_0)| \neq \tau_s; \\ \alpha \cdot (\tau_s - 1) \cdot \dot{\xi}(t_0), & |\tau(\xi(t_0), t_0)| = \tau_s. \end{cases}$$

Итак, для случая, когда жесткая зона располагается выше границы раздела, теорема доказана. Для случая, когда жесткая зона находится ниже границы раздела, теорема доказывается аналогичным образом.

**Условия сопряжения на границах раздела зон.** Следствием предположения о сплошности среды являются условия непрерывности скорости и напряжения на границах раздела зон. Теорема о слабом разрыве позволяет условие непрерывности скорости заменить на условие (9).



В дальнейшем на каждой границе раздела зон будем ставить два условия: условие непрерывности напряжения

$$\tau(y, t)|_{y=\xi(t)-} = \tau(y, t)|_{y=\xi(t)+} \quad (12)$$

и условие скачка нормальной производной (9). Эти условия будем называть условиями сопряжения.

**Начальное и граничные условия.** При  $t = 0$  задается начальное распределение напряжений. На нижней стенке канала будем требовать обращения скорости в ноль, а на верхней — задавать напряжение. Эти условия через напряжение записываются следующим образом:

$$\tau'_y(0, t) = P(t), \quad \tau(1, t) = \psi(t). \quad (13)$$

## 2. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

**Замечание.** В данной статье способ построения разностной схемы и алгоритм ее решения рассматриваются для случая, когда имеются две зоны. Жесткая зона прилегает к нижней стенке, а вязкопластическая — к верхней. Формулы для случаев с иным количеством и составом зон могут быть получены аналогичным образом.

**Сетка.** Областью решения задачи на плоскости  $Oyt$  является полуполоса  $D = \{y, t | 0 \leq y \leq 1, t \geq 0\}$ . Задачу о течении материала Слибара – Паслая в плоском канале будем решать последовательно, продвигаясь во времени шаг за шагом. Этим шагам в области решения соответствуют временные слои  $t = t_m, m = 0, 1, \dots$ . На каждом слое строится пространственная сетка  $y = y_i^m, i = 1, 2, \dots, N$ , где  $N$  — число узлов. Пространственная нумерация узлов ведется в порядке продвижения от стенки  $y = 0$  к стенке  $y = 1$ . Пространственные координаты узлов  $y_i^m$  будем называть уровнями узлов.

На каждом шаге решается следующая триединая задача:

- 1) определение величины временного шага,
- 2) определение уровней узлов этого временного слоя,
- 3) определение узловых значений напряжения.

Подчеркнем, что сетка формируется в процессе решения задачи. Ее временные и пространственные шаги  $(\Delta t)_m = t_m - t_{m-1}, h_i^m = y_i^m - y_{i-1}^m$ , вообще говоря, непостоянные.

При построении сетки будем требовать, чтобы граница раздела  $y = \xi(t)$  проходила через узлы. В этом случае

$$\xi^m = \xi(t_m) = y_{n^m}^m,$$

где  $n^m$  — пространственный номер разделительного узла (узла, через который проходит граница раздела) на  $m$ -м временном слое.

Отличительным признаком предлагаемого численного метода является процедура перебора версий. Поэтому его естественно называть *методом версий*.

*Версия* — это предположение (гипотеза) о том, какое положение занимает граница раздела зон на рассматриваемом временном слое относительно ее положения на предыдущем слое. Для численного описания версии введем в рассмотрение переменную *ver*. Она может принимать пять символических значений:  $ver = +1$  — уровень поднялся и номер разделительного узла увеличился на единицу ( $\xi^m > \xi^{m-1}, n^m = n^{m-1} + 1$ );  $ver = +0$  — уровень поднялся, но номер разделительного узла остался прежним ( $\xi^m > \xi^{m-1}, n^m = n^{m-1}$ );  $ver = 0$  — уровень и номер разделительного узла остались прежними ( $\xi^m = \xi^{m-1}, n^m = n^{m-1}$ );  $ver = -0$  — уровень опустился, но номер разделительного узла остался прежним ( $\xi^m < \xi^{m-1}, n^m = n^{m-1}$ );  $ver = -1$  — уровень опустился и номер разделительного узла уменьшился на единицу ( $\xi^m < \xi^{m-1}, n^m = n^{m-1} - 1$ ).

Будем полагать  $h_{n^m+1}^m = \delta, h_{n^m}^m = h_{n^m+1}^{m-1} + h_{n^m}^{m-1} - \delta$  и задавать для переменной  $\delta$  либо интервал



допустимых значений (если  $var \neq 0$ ), либо конкретное значение (если  $var = 0$ ):

$$\begin{aligned}
 var = -1 : & \quad \frac{1}{2}h_{n^{m-1}}^{m-1} < \delta < h_{n^{m-1}}^{m-1} + \frac{1}{2}h_{n^{m-1}-1}^{m-1}, \\
 var = -0 : & \quad h_{n^{m-1}+1}^{m-1} < \delta \leq h_{n^{m-1}+1}^{m-1} + \frac{1}{2}h_{n^{m-1}}^{m-1}, \\
 var = 0 : & \quad \delta = h_{n^{m-1}+1}^{m-1}, \\
 var = +0 : & \quad \frac{1}{2}h_{n^{m-1}+1}^{m-1} \leq \delta < h_{n^{m-1}+1}^{m-1}, \\
 var = +1 : & \quad \frac{1}{2}h_{n^{m-1}+2}^{m-1} < \delta < h_{n^{m-1}+2}^{m-1} + \frac{1}{2}h_{n^{m-1}+1}^{m-1}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Все остальные пространственные шаги, кроме указанных выше, будем брать равными соответствующим шагам предыдущего временного слоя.

Совокупность пространственных шагов на  $m$ -м временном слое удобно рассматривать как  $N$ -мерный вектор  $H^{(m)} = (h_1^m, h_2^m, \dots, h_N^m)$ . Подчеркнем, что вектор пространственных шагов зависит от переменной  $\delta$ :  $H^{(m)} = H^{(m)}(\delta)$ .

### Формирование разностной схемы

Проведя конечно-разностную аппроксимацию уравнений (6)–(8), граничных условий (13) и условий сопряжения (9), (12), получим разностную схему. При этом узлу на нижней стенке и каждому внутреннему узлу жесткой зоны ( $i = 1, \dots, n^m - 1$ ) будет поставлено в соответствие уравнение

$$\frac{\tau_{i+1}^m - \tau_i^m}{h_{i+1}^m} = P(t_{m-1} + (\Delta t)_m). \tag{15}$$

Разделительному узлу ( $i = n^m$ ) – два уравнения

$$\begin{aligned}
 ver_1 \in \{+1, +0\} : & \quad 1) |\tau_i^m| = 1, \quad 2) P(t_{m-1} + (\Delta t)_m) - \frac{\tau_{i+1}^m - \alpha}{h_{i+1}^m} = 0, \\
 ver_1 = 0 : & \quad 1) P(t_{m-1} + (\Delta t)_m) - \frac{\tau_{i+1}^m - \tau_i^m}{h_{i+1}^m} = 0, \quad 2) 1 \leq |\tau_i^m| \leq \tau_s; \\
 ver_1 \in \{-1, -0\} : & \quad 1) |\tau_i^m| = \tau_s, \quad 2) P(t_{m-1} + (\Delta t)_m) - \frac{\tau_{i+1}^m - \alpha \cdot \tau_s}{h_{i+1}^m} = \alpha \cdot (\tau_s - 1) \frac{y_i^m - \xi^{m-1}}{(\Delta t)_m}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Каждому внутреннему узлу в вязкопластической зоне ( $i = n^m + 1, \dots, N - 1$ ) – уравнение

$$\frac{2\tau_{i+1}^m h_i^m + 2\tau_{i-1}^m h_{i+1}^m - 2\tau_i^m (h_i^m + h_{i+1}^m)}{h_i^m h_{i+1}^m (h_i^m + h_{i+1}^m)} = \frac{\tau_i^m - \tau_i^{m-1}}{(\Delta t)_m}. \tag{17}$$

Узлу на верхней стенке ( $i = N$ ) – уравнение

$$\tau_i^m = \psi(t_{m-1} + (\Delta t)_m). \tag{18}$$

### 3. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

На каждом временном шаге выполняем следующую совокупность действий.

1. Задаем величину временного шага  $(\Delta t)_m$ .
2. Формируем множество версий. Выдвигаем одну из них.
3. Решаем систему, состоящую из разностной схемы (15)–(18) и ограничения (14).
- 3а. Если система имеет решение, то рассматриваемую версию объявляем истинной, оформляем решение и переходим на следующий временной шаг.
- 3б. Если система не имеет решения, то выдвигаем следующую версию и переходим к п.3.
4. Если множество версий исчерпано и ни одна из них не является истинной, то корректируем временной шаг в сторону уменьшения и переходим к п. 2.



**Пояснения.** 1. Хорошо зарекомендовал себя следующий способ задания временного шага:  $(\Delta t)_m = (\Delta t)_{m-1}/q$ ,  $0 < q < 1$ .

2. Множество версий данного временного шага формируется, исходя из найденного на предыдущем шаге значения напряжения на разделительной границе, по следующему правилу:

$$|\tau_{n^{m-1}}^{m-1}| = 1 \Rightarrow ver = \{0, +0, +1\}, \quad 1 < |\tau_{n^{m-1}}^{m-1}| < \tau_s \Rightarrow ver = \{0\},$$

$$|\tau_{n^{m-1}}^{m-1}| = \tau_s \Rightarrow ver = \{0, -0, -1\}.$$

Выдвинуть версию — значит указать на конкретную версию, в рамках которой будут выполняться дальнейшие действия.

3. Решение системы, состоящей из разностной схемы (15)–(18) и ограничения (14), осуществляется в два этапа.

Этап 1. Формирование и решение СЛАУ в аналитическом виде. Уравнения (15), (17), (18) и первое из уравнений (16) будем рассматривать как единую СЛАУ

$$A^{(m)}\tau^{(m)} = B^{(m)}, \tag{19}$$

где  $\tau^{(m)} = (\tau_1^m, \dots, \tau_N^m)^T$  — вектор узловых значений напряжения в узлах  $m$ -го слоя. Отметим, что матрица  $A^{(m)}$  является трехдиагональной.

Элементы матрицы  $A^{(m)}$  и столбца  $B^{(m)}$  выражаются через заданные функции времени  $P(t_{m-1} + (\Delta t)_m)$  и  $\psi(t_{m-1} + (\Delta t)_m)$ , известные узловые значения напряжения на предыдущем временном слое  $\tau^{(m-1)}$  и пространственные шаги сетки на рассматриваемом временном слое  $H^{(m)}(\delta)$ . Поэтому, решив СЛАУ (19), получим решение как функцию переменной  $\delta$ :  $\tau^{(m)} = \tau^{(m)}(\delta)$ . В частности, получим функцию

$$\tau_{n^{m+1}}^m = \tau_{n^{m+1}}^m(\delta). \tag{20}$$

**Примечание.** Современные математические системы, например MAPLE, способны давать решение СЛАУ в аналитическом виде.

Этап 2 (случай  $var \neq 0$ ). Численное решение нелинейного уравнения на интервале. Подставив правую часть соотношения (20) во второе условие сопряжения (16), получим следующее нелинейное уравнение относительно  $\delta$ :

$$ver \in \{+0, +1\} : P(t_m + (\Delta t)_m) - \frac{\tau_{n^{m+1}}^m(\delta) - \alpha}{\delta} = 0,$$

$$ver \in \{-0, -1\} : P(t_m + (\Delta t)_m) - \frac{\tau_{n^{m+1}}^m(\delta) - \alpha \cdot \tau_s}{\delta} = \alpha \cdot (\tau_s - 1) \frac{y_{n^{m-1}}^{m-1} + \delta - \xi^{m-1}}{(\Delta t)_m},$$

которое будем решать численно на интервале, задаваемом двойным неравенством (14). Уравнение либо не имеет решения, либо имеет конкретное решение  $\delta = \delta^*$ . В последнем случае рассматриваемая версия является истинной.

Этап 2 (случай  $var = 0$ ). Проверка второго условия (16). Полагаем  $\delta = h_{n^{m-1}+1}^{m-1}$  и проверяем двойное неравенство второго условия (16). Если оно выполнено, то версия  $var = 0$  является истинной. Полагаем  $\delta^* = \delta$ .

За истинное значение пространственного номера  $n^m$  разделительного узла принимаем то значение, которое соответствует истинной версии. За истинное значение временного шага принимаем фактическое значение  $(\Delta t)_m$  и вычисляем истинное время  $t_m = t_{m-1} + (\Delta t)_m$ . За истинные векторы узловых значений напряжения и пространственных шагов принимаем  $\tau^{(m)} = \tau^{(m)}(\delta^*)$ ,  $H^{(m)} = H^{(m)}(\delta^*)$ . Зная пространственные шаги, находим уровни  $y_i^m$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Затем находим положение границы раздела зон:  $\xi^m = y_{n^m}^m$ . Используя узловые значения напряжения, находим поле скоростей по формуле

$$v(y, t_m) = \begin{cases} \int_{\xi^m}^y (\tau(y, t_m) - \alpha) dy, & \xi^m < y \leq 1, \\ 0, & 0 \leq y \leq \xi^m, \end{cases}$$

с помощью какой-либо процедуры численного интегрирования.

4. Хорошо работает следующий способ корректировки временного шага:  $(\Delta t)_m = (\Delta t)_m \cdot q$ .



#### 4. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Ниже в графической форме представлены результаты численного решения двух модельных задач. В обеих задачах на нижней стенке задается условие прилипания. На рис. 1 и рис. 3 серым цветом выделена зона вязкопластического течения. На рис. 2 и рис. 4 участки графиков, соответствующие жестким зонам, выполнены сплошной линией, а соответствующие вязкопластической зоне — пунктирной.

**Пример 1.**  $P(t) = 0$ ,  $\tau(1, t) = 2.25 \cdot \sin(3t)$ ,  $\tau(y, 0) = 0$ ,  $\tau_s = 1.5$  (рис. 1 и рис. 2).

Течение имеет периодический характер с периодом  $2\pi/3$ . На первом полупериоде течение осуществляется следующим образом. При  $0 \leq t < 0.24$  весь материал находится в жестком состоянии. В момент  $t = 0.24$  на верхней стенке зарождается вязкопластическая зона. При  $0.24 < t < 0.87$  имеются две зоны: вязкопластическая, прилегающая к верхней стенке, и жесткая, прилегающая к нижней стенке. В момент  $t = 0.87$  жесткая зона исчезает. При  $0.87 \leq t < 0.90$  весь материал находится в вязкопластическом состоянии.

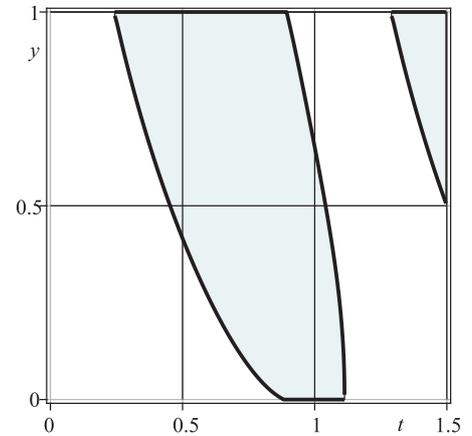
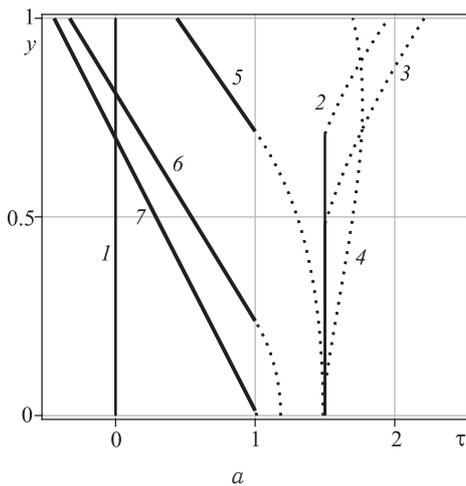


Рис. 1. Динамика изменения положения и размеров жестких и вязкопластической зон

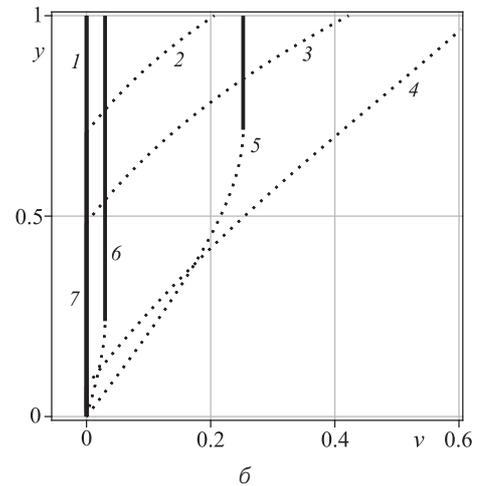


Рис. 2. Распределения напряжения (а) и скорости (б) по сечению канала. Графики 1–7 соответствуют моментам времени  $t = 0.00, 0.35, 0.46, 0.76, 0.98, 1.09, 1.11$

В момент  $t = 0.90$  на верхней стенке зарождается жесткая зона. При  $0.90 < t < 1.11$  имеются две зоны: вязкопластическая, прилегающая к нижней стенке, и жесткая, прилегающая к верхней стенке. В момент  $t = 1.11$  вязкопластическая зона исчезает, весь материал переходит в жесткое состояние и находится в этом состоянии до момента  $t = 1.29$ .

**Пример 2.**  $P = -8 \sin(4t)$ ,  $\tau(1, t) = 0$ ,  $\tau(y, 0) = 0$ ,  $\tau_s = 2$  (рис. 3 и 4).

Картина течения вязкопластического материала в канале следующая. При  $0 \leq t < 0.06$  весь материал находится в жестком состоянии. В момент  $t = 0.06$  на нижней стенке зарождается вязкопластическая зона. При  $0.06 < t < 0.93$  имеются две зоны: вязкопластическая, прилегающая к нижней стенке, и жесткая, прилегающая к верхней стенке.

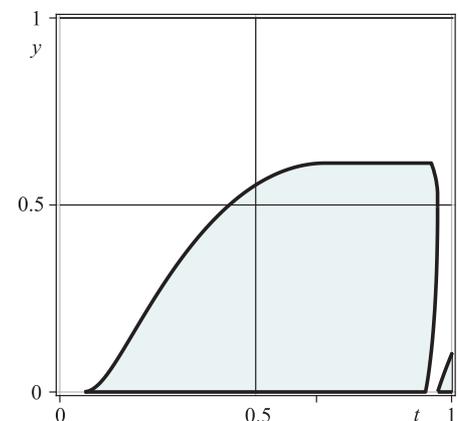


Рис. 3. Динамика изменения положения и размеров жестких и вязкопластической зон



В момент  $t = 0.93$  на нижней стенке зарождается жесткая зона. При  $0.93 < t < 0.96$  имеются три зоны: две жесткие, прилегающие к верхней и нижней стенкам, и вязкопластическая, находящаяся между ними. В момент  $t = 0.96$  жесткие зоны соединяются, и в этот же момент зарождается вязкопластическая зона на нижней стенке.

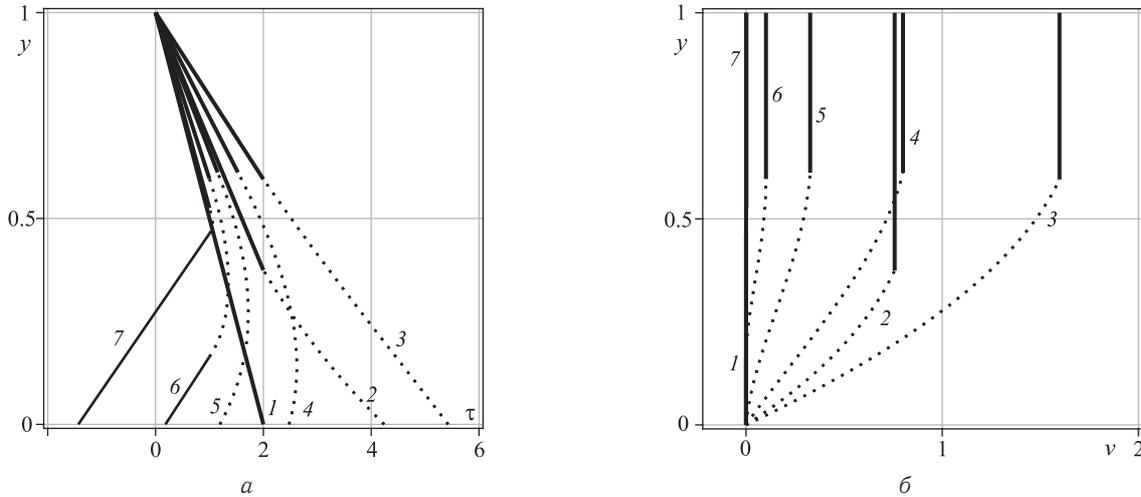


Рис. 4. Распределения напряжения (а) и скорости (б) по сечению канала. Графики 1–7 соответствуют моментам времени  $t = 0.06, 0.32, 0.58, 0.85, 0.92, 0.95, 0.96$

**Примечание.** Используя полученное решение, несложно построить решение задачи о движении материала Слибара – Паслая в канале с двумя неподвижными стенками. Расстояние (безразмерное) между стенками равно двум. Материал прилипает к стенкам канала. Течение вызывается гармонически изменяющимся во времени градиентом давления  $P = -8 \sin(4t)$ .

Для построения искомого решения необходимо продолжить решение примера 2 в область  $1 < y \leq 2$  по формулам

$$\begin{aligned} \tau(y, t) &= -\tau(2 - y, t), \\ v(y, t) &= v(2 - y, t). \end{aligned}$$

Отметим, что построенное решение будет иметь большее количество жестких и вязкопластических зон. Например, при  $0.93 < t < 0.96$  будет пять зон: три жесткие (две прилегают к стенкам канала и одна находится в его средней части) и две вязкопластические, находящиеся между жесткими зонами.

Метод версий, использованный в данной статье для численного моделирования течения материала Слибара – Паслая в канале, открывает новые возможности для решения широкого круга задач типа Стефана. В работах [3–5] он применялся при математическом моделировании теплофизических процессов с фазовыми переходами и течений вязкопластических сред.

### Библиографический список

1. Slibar A., Paslay P. R. Retarded Flow of Bingham Materials // J. of Appl. Mech. 1959. Vol. 26. P. 107–113.
2. Сафрончик М. И. Торможение пластины о слой «запаздывающей» вязкопластичной среды с учетом пристенного скольжения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 88–93.
3. Окулова Н. Н. Численно-аналитическое исследование задачи о распределении напряжений в вязкопластической полосе // Вестн. Самар. ун-та. Естественно-научная сер. 2007. № 6. С. 78–84.
4. Окулов Н. А. Об одном численном методе решения одномерных задач типа Стефана // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12. С. 238–246.
5. Окулов Н. А. Упругий удар по вязкопластическому стержню // Вычисл. мех. сплош. сред. 2011. Т. 4, № 2. С. 96–109.



УДК 622.4:536.21

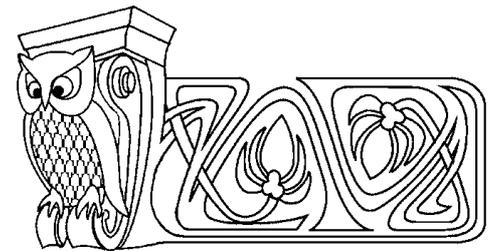
## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В БЕСКОНЕЧНОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ ОТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ ПРИ КОНВЕКТИВНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ

М. А. Осипенко, О. И. Дударь, Е. С. Дударь

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
кафедра теоретической механики  
E-mail: olegdudar@yandex.ru

Методом функций Грина в сочетании с преобразованием Лапласа получено решение задачи о распространении тепла в бесконечном твердом теле от движущегося в цилиндрической полости газа.

**Ключевые слова:** цилиндрическая полость, нестационарная теплопроводность, конвективный теплообмен, функция Грина, преобразование Лапласа, функции Бесселя и Неймана.



The Heat Conductivity in the Infinite Solid of the Convection  
in a Cylindrical Cavity

M. A. Osipenko, O. I. Dudar, E. S. Dudar

Perm National Research Polytechnical University,  
Department of Theoretical Mechanics  
E-mail: olegdudar@yandex.ru

The problem of heat conductivity in the infinite solid from gas moving in a cylindrical cavity is solved by the combination of the Green function method and the Laplace transformation.

**Key words:** cylindrical cavity, nonstationary heat conductivity, convective heat transfer, Green's function, Laplace transformation, Bessel's and Neumann's functions.

### ВВЕДЕНИЕ

Задача распространения тепла в бесконечном пространстве от движущегося в цилиндрической полости газа является одной из основных в горной теплофизике и теплофизике подземных сооружений. Ее решение позволяет рассчитывать тепловой режим горных выработок, тоннелей, метрополитенов и других подземных сооружений. Н. С. Carslaw [1], А. Н. Щербань и О. А. Кремнев [2] получили решение данной задачи с помощью преобразования Лапласа для случая неизменной во времени температуры движущегося в полости газа. В работах А. С. Галицына и А. Н. Жуковского [3], а также А. С. Галицына [4] для получения решения использовалось модифицированное преобразование Вебера при произвольном законе изменения температуры движущегося в полости газа и произвольном начальном условии. А. Ф. Галкин и Ю. А. Хохолов [5] задачу решали численно в сопряженной постановке, то есть одновременно для твердой и газовой фаз.

В настоящей статье задача решена для случая произвольного изменения температуры движущегося в полости газа и произвольного начального условия, то есть в той же постановке, что и в работах [3, 4]. Однако для решения применялся метод функций Грина в сочетании с преобразованием Лапласа. Найденное решение позволило выявить допущенную в работе [4] неточность.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу передачи тепла от газа (воздуха), движущегося в цилиндрической полости, окружающему её бесконечному однородному изотропному твердому телу (горному массиву). Полагая, что влияние осевой координаты отсутствует, поэтому изменение температуры в горном массиве описывается нестационарным уравнением теплопроводности, записанным в полярной системе координат:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad r > r_0, \quad t > 0, \quad (1)$$

где  $T$  — температура,  $a$  — коэффициент температуропроводности горного массива,  $r_0$  — радиус полости.

Будем полагать, что в начальный момент времени температура в массиве с полостью является произвольной функцией радиуса

$$T|_{t=0} = T_0(r), \quad r > r_0, \quad (2)$$

но при этом на бесконечности как в начальный, так и в любой другой момент времени она равна  $T_\infty$ :

$$T_0|_{r \rightarrow \infty} = T_\infty, \quad T|_{r \rightarrow \infty} = T_\infty, \quad (3)$$



где  $T_\infty$  — естественная температура горных пород, то есть температура пород при отсутствующей полости.

В качестве граничных условий примем условие конвективного теплообмена на стенке полости

$$\left( -\frac{\partial T}{\partial r} + h(T - T_a(t)) \right) \Big|_{r=r_0} = 0, \quad (4)$$

где  $h = \alpha/\lambda$ ,  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности горного массива,  $T_a(t)$  — закон изменения температуры воздуха в полости.

По аналогии с работами [1, 6, 7] решение задачи (1)–(4) можно записать с использованием функции Грина  $g(r', r, t)$ :

$$T(r, t) = T_\infty + ahr_0 \int_0^t g(r_0, r, t - \tau)[T_a(\tau) - T_\infty]d\tau + \int_{r_0}^\infty g(r', r, t)[T_0(r') - T_\infty]r'dr'. \quad (5)$$

Тогда решение исходной задачи сводится к определению функции Грина, которая может быть найдена из решения следующей сопряженной задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} = a \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial g}{\partial r'} \right) + \frac{1}{r} \delta(r' - r) \delta(t), & r' > r_0, t \geq 0, \\ g|_{t=0} = 0, \\ \left( -\frac{\partial g}{\partial r'} + hg \right) \Big|_{r'=r_0} = 0, \\ g|_{r' \rightarrow \infty} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

здесь через  $\delta$  обозначена дельта-функция Дирака.

Решение задачи в такой постановке позволяет не конкретизировать вид функций  $T_0(r)$  и  $T_a(t)$ , входящих в начальное и граничное условия.

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ ФУНКЦИИ ГРИНА

Применив к (6) преобразование Лапласа [8] по переменной  $t$ , получаем следующую задачу для изображения функции Грина  $G(r', r, p)$ :

$$\begin{cases} pG = a \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial G}{\partial r'} \right) + \frac{1}{r} \delta(r' - r), & r' > r_0, \\ \left( -\frac{\partial G}{\partial r'} + hG \right) \Big|_{r'=r_0} = 0, \\ G|_{r' \rightarrow \infty} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где  $p$  — комплексный параметр.

Вводя новые переменные

$$x = sr, \quad x' = sr', \quad x_0 = sr_0, \quad s = \sqrt{p/a}, \quad (8)$$

и учитывая в (7) дельта-функцию «явно», приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} x'^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x'^2} + x' \frac{\partial G}{\partial x'} - x'^2 G = 0, & |x_0| < |x'| < |x|, |x'| > |x|, \\ G|_{x'=x+0} - G|_{x'=x-0} = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x'} \Big|_{x'=x+0} - \frac{\partial G}{\partial x'} \Big|_{x'=x-0} = -\frac{1}{ax}, \\ \left( -\frac{\partial G}{\partial x'} + \frac{1}{s} hG \right) \Big|_{x'=x_0} = 0, \\ G|_{x' \rightarrow \infty} = 0. \end{cases} \quad (9)$$



Первое уравнение в системе (9) — это модифицированное уравнение Бесселя с индексом нуль. Его решение имеет вид [9, 10]:

$$G = \begin{cases} AI_0(x') + BK_0(x'), & |x_0| < |x'| < |x|, \\ CI_0(x') + DK_0(x'), & x' > |x|, \end{cases}$$

где  $I_0, K_0$  — функции нулевого порядка: модифицированная Бесселя и Макдональда соответственно.

Так как  $I_0(x') \rightarrow \infty$  при  $x' \rightarrow \infty$  [7], то из последнего уравнения системы (9) сразу следует, что  $C = 0$ . Далее, используя известные свойства рассматриваемых цилиндрических функций [11, 12]

$$I'_0(x) = I_1(x), \quad K'_0(x) = -K_1(x),$$

где  $I_1, K_1$  — функции первого порядка: модифицированная Бесселя и Макдональда соответственно, приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $A, B, D$ :

$$\begin{cases} -AI_0(x) - BK_0(x) + DK_0(x) = 0, \\ -AI_1(x) + BK_1(x) - DK_1(x) = -\frac{1}{ax}, \\ A[-I_1(x_0) + (h/s)I_0(x_0)] + B[K_1(x_0) + (h/s)K_0(x_0)] = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Учитывая значение определителя Вронского [10]

$$I_0(x)K_1(x) + I_1(x)K_0(x) = \frac{1}{x},$$

решение системы (10) можем записать в виде

$$A = \frac{K_0(x)}{a}, \quad B = A \frac{I_1(x_0) - (h/s)I_0(x_0)}{K_1(x_0) + (h/s)K_0(x_0)}, \quad D = \frac{I_0(x)}{a} + B.$$

Возвращаясь к старым переменным, получим следующее решение для изображения функции Грина:

$$G(r', r, s) = \begin{cases} \frac{K_0(sr)[I_0(sr')K(sr_0) - K_0(sr')I(sr_0)]}{aK(sr_0)}, & r_0 < r' < r, \\ \frac{K_0(sr')[I_0(sr)K(sr_0) - K_0(sr)I(sr_0)]}{aK(sr_0)}, & r < r', \end{cases}$$

где  $K(sr_0) = sK_1(sr_0) + hK_0(sr_0)$ ,  $I(sr_0) = -sI_1(sr_0) + hI_0(sr_0)$ . Если принять обозначения:  $m = \min(r', r)$ ,  $M = \max(r', r)$ , то решение можно записать одной формулой

$$G(r', r, s) = \frac{K_0(sM)[I_0(sm)K(sr_0) - K_0(sm)I(sr_0)]}{aK(sr_0)}. \quad (11)$$

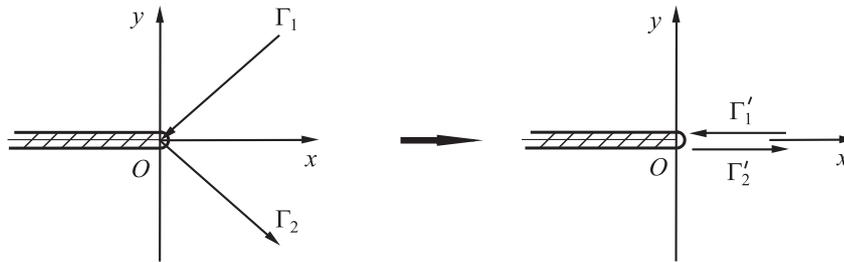
#### 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИИ ГРИНА

Для определения оригинала по изображению (11) воспользуемся формулой обращения преобразования Лапласа [8]:

$$g(r', r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} G(r', r, p)e^{pt} dp. \quad (12)$$

Функция  $G(r', r, p)$  содержит корень и логарифм комплексного числа  $p$ . Следовательно, функция  $G(r', r, p)$  многозначна и для нее выбираем такую ветвь, для которой при вещественных положительных  $p$  корень будет положителен, а логарифм вещественен.

В формуле (12) интеграл берется по мнимой оси. Чтобы привести его к более удобному виду, не содержащему комплексных чисел, перейдем к новой переменной интегрирования  $\xi = \mp i s = \mp i \sqrt{p/a}$ , где нижний знак относится к нижней мнимой полуоси, а верхний — к верхней. При этом для переменной  $\xi$  нижняя полуось перейдет в полуось  $\Gamma_1$ , а верхняя — в полуось  $\Gamma_2$  (рисунок).



Деформирование контура интегрирования  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  в контур  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$

По аналогии с работой [8] можно показать, что знаменатель функции  $G(r', r, p)$  не имеет нулей, поэтому выбранная для  $G(r', r, p)$  ветвь аналитична на всей комплексной плоскости за исключением начала координат с разрезом по отрицательной вещественной полуоси. Для аналитичной функции контуры  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  можно деформировать в контуры  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$  (см. рисунок), делая тем самым  $\xi$  вещественным положительным числом. Тогда формулу (12) можно привести к виду

$$g(r', r, t) = -\frac{a}{\pi i} \left( \int_0^0 G(r', r, s)|_{s=-i\xi} e^{-a\xi^2 t} \xi d\xi + \int_0^\infty G(r', r, s)|_{s=i\xi} e^{-a\xi^2 t} \xi d\xi \right). \quad (13)$$

Подставив (11) в (13) и используя формулы связи [10–12]:

$$\begin{aligned} I_0(\pm ix) &= J_0(x), & I_1(\pm ix) &= \pm iJ_1(x), \\ K_0(\pm ix) &= \frac{i\pi}{2} [\mp J_0(x) + iN_0(x)], & K_1(\pm ix) &= \frac{\pi}{2} [-J_1(x) \pm iN_1(x)], \end{aligned}$$

где  $x$  — вещественное положительное число,  $J_0, J_1$  — функции Бесселя, а  $N_0, N_1$  — функции Неймана нулевого и первого порядка соответственно, получим следующее выражение для оригинала:

$$g(r', r, t) = \int_0^\infty \frac{[N_0(\xi m)J(\xi r_0) - J_0(\xi m)N(\xi r_0)][N_0(\xi M)J(\xi r_0) - J_0(\xi M)N(\xi r_0)]}{J^2(\xi r_0) + N^2(\xi r_0)} e^{-a\xi^2 t} \xi d\xi, \quad (14)$$

где  $J(\xi r_0) = \xi J_1(\xi r_0) + hJ_0(\xi r_0)$ ,  $N(\xi r_0) = \xi N_1(\xi r_0) + hN_0(\xi r_0)$ .

Тем самым определена функция Грина для задачи (6). В частности, если принять  $r' = r_0$ , то  $m = \min(r_0, r) = r_0$ ,  $M = \max(r_0, r) = r$ . Тогда, учитывая значение определителя Вронского [10]

$$N_0(x)J_1(x) - J_0(x)N_1(x) = \frac{2}{\pi x}, \quad (15)$$

получим следующее выражение для функции Грина при условии  $r' = r_0$ :

$$g(r_0, r, t) = \frac{2}{\pi r_0} \int_0^\infty \frac{N_0(\xi r)J(\xi r_0) - J_0(\xi r)N(\xi r_0)}{J^2(\xi r_0) + N^2(\xi r_0)} e^{-a\xi^2 t} \xi d\xi. \quad (16)$$

Подставляя формулы (14) и (16) в (5) получим решение исходной задачи (1)–(4) распространения тепла в бесконечном горном массиве от движущегося в цилиндрической полости воздуха:

$$\begin{aligned} T(r, t) &= T_\infty + \frac{2ah}{\pi} \int_0^\infty \frac{N_0(\xi r)J(\xi r_0) - J_0(\xi r)N(\xi r_0)}{J^2(\xi r_0) + N^2(\xi r_0)} \left\{ \int_0^t e^{-a\xi^2(t-\tau)} [T_a(\tau) - T_\infty] d\tau \right\} \xi d\xi + \\ &+ \int_{r_0}^\infty \int_0^\infty \frac{[N_0(\xi r')J(\xi r_0) - J_0(\xi r')N(\xi r_0)][N_0(\xi r)J(\xi r_0) - J_0(\xi r)N(\xi r_0)]}{J^2(\xi r_0) + N^2(\xi r_0)} e^{-a\xi^2 t} \xi d\xi [T_0(r') - T_\infty] r' dr'. \end{aligned}$$



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

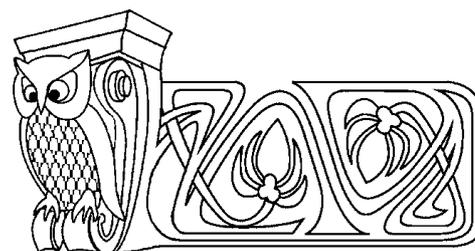
Рассмотрена задача о распространении тепла в бесконечном пространстве (горном массиве) от цилиндрической полости, по которой движется поток газа (воздуха). Методом функций Грина в сочетании с преобразованием Лапласа получено решение этой задачи при произвольном законе изменения температуры воздуха и произвольном начальном условии. Решение может быть использовано для расчета теплового режима подземных сооружений с формой, близкой к цилиндрической.

## Библиографический список

1. Carslaw H. S., Jaeger J. C. Conduction of Heat in Solids. Oxford : Clarendon Press, 1959. 450 p.
2. Щербань А. Н., Кремнев О. А. Научные основы расчета и регулирования теплового режима глубоких шахт : в 2 т. Киев : Изд-во АН УССР, 1959. Т. 1. 425 с.
3. Галицын А. С., Жуковский А. Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. Киев : Наук. думка, 1976. 286 с.
4. Галицын А. С. Краевые задачи теплофизики подземных сооружений. Киев : Наук. думка, 1983. 236 с.
5. Галкин А. Ф., Хохолов Ю. А. Теплоаккумулирующие выработки. Новосибирск : ВО «Наука», 1992. 133 с.
6. Будаков Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М. : Физматлит, 2003. 688 с.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М. : Изд-во МГУ, 1999. 798 с.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М. : Наука, 1987. 688 с.
9. Бицадзе А. В., Калинин Д. Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М. : Наука, 1985. 312 с.
10. Корнев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М. : Наука, 1971. 288 с.
11. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. М. : Наука, 1984. 344 с.
12. Попов Б. А., Теслер Г. С. Вычисление функций на ЭВМ. Киев : Наук. думка, 1984. 600 с.

УДК 539.374

## ВЛИЯНИЕ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ НА ВИСКОЗИМЕТРИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МЕЖДУ ЖЕСТКИМИ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ



А. С. Устинова

Институт автоматизации и процессов управления  
Дальневосточного отделения РАН, Владивосток,  
лаборатория механики деформируемого твердого тела  
E-mail: ustynova@iacp.dvo.ru

Рассматривается вязкопластическое течение несжимаемого упруговязкопластического материала между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями, когда на одной из них возможно проскальзывание материала. Решение строится в рамках модели больших упруговязкопластических деформаций. Рассмотрены обратимое деформирование, развите и торможение вязкопластического течения, разгрузка и деформирование при повороте в обратном направлении. Получены законы движения границ областей вязкопластического течения.

**Ключевые слова:** упругость, вязкопластичность, большие деформации, остаточные напряжения.

## Influence of Slipping on Viscosimetric Flow of a Elastoviscoplastic Material Between Rigid Coaxial Cylinders

A. S. Ustinova

Institute of Automation and Control Processes,  
Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok,  
Laboratory of a Deformable Solid Mechanics  
E-mail: ustynova@iacp.dvo.ru

The viscoplastic flow of an incompressible elastoviscoplastic material between two rigid coaxial cylindrical surfaces is considered when slipping of a material is possible at one of them. The solution is constructed using the model of large elastoviscoplastic deformations. Reversible deformation, development and braking of a viscoplastic flow, unloading and deformation under rotation in the opposite direction are considered. Laws of movement of elastic-plastic boundaries are received.

**Key words:** elasticity, viscoplasticity, large deformations, residual stresses.

## ВВЕДЕНИЕ

Вискозиметрические и прямолинейные течения неньютоновских материалов в рамках модели Шведова – Бингама рассматривались достаточно подробно [1–7]. Упругие свойства деформируемых материалов при этом не учитывались. В настоящее время представляет интерес исследование эффектов,



обусловленных упругими свойствами среды. К последним относятся недопустимые геометрические изменения деформированных тел в процессах разгрузки и формирования в них остаточных напряжений. Математическое моделирование подобных эффектов возможно только в рамках теории больших упругопластических деформаций. Ниже в рамках такой модели приводится решение задачи о вискозиметрическом течении среды между двумя жесткими цилиндрами, когда на одном из них возможно проскальзывание.

### 1. ОСНОВНЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Задача решается в рамках модели больших упругопластических деформаций, предложенной в [8] и обобщенной на случай учета вязких свойств материала на стадии пластического течения [9]. В прямоугольной декартовой системе координат кинематика среды определяется зависимостями

$$\begin{aligned} d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{ks}e_{sj}, \\ \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2}((\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj})), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij}^p - p_{ik}\varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}v_j, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\ r_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij}(\varepsilon_{sk} - \varepsilon_{sk}^p). \end{aligned} \tag{1}$$

В соотношениях (1)  $d_{ij}$  — компоненты тензора деформаций Альманси;  $e_{ij}$ ,  $p_{ij}$  — их обратимые и необратимые составляющие;  $u_i$ ,  $v_i$  — компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды;  $D/Dt$  — объективная производная тензоров по времени;  $\varepsilon_{ij}^p$  (источник в уравнении переноса для тензора необратимых деформаций) — компоненты тензора скоростей пластических деформаций. Наличие нелинейной составляющей  $z_{ij}$  тензора вращений  $r_{ij}$ , которая выписана полностью в [8, 9], связано с выполнением требования неизменности тензора пластических деформаций  $p_{ij}$  в процессах разгрузки.

Материал считаем несжимаемым и тогда, следуя [8, 9], получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj} - 2d_{kj}) \quad \text{при} \quad p_{ij} \equiv 0, \\ \sigma_{ij} &= -p_1\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}) \quad \text{при} \quad p_{ij} \neq 0, \\ W &= -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b - \mu)J_1J_2 - \chi J_1^3 + \dots, \\ J_k &= \begin{cases} L_k, & \text{при} \quad p_{ij} \equiv 0 \\ I_k, & \text{при} \quad p_{ij} \neq 0 \end{cases}, \quad L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik}d_{ki}, \\ I_1 &= e_{kk} - \frac{1}{2}e_{sk}e_{ks}, \quad I_2 = e_{st}e_{ts} - e_{sk}e_{kt}e_{ts} + \frac{1}{4}e_{sk}e_{kt}e_{tn}e_{ns}. \end{aligned} \tag{2}$$

В зависимостях (2)  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений,  $p$ ,  $p_1$  — добавочные гидростатические давления,  $W$  — упругий потенциал,  $\mu$  — модуль сдвига,  $b$ ,  $\chi$  — постоянные материала.

В качестве пластического потенциала используется функция нагружения Треска [10]:

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max |\varepsilon_k^p|, \tag{3}$$

где  $k$  — предел текучести;  $\eta$  — коэффициент вязкости;  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_k^p$  — главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций.

Связь скоростей необратимых деформаций с напряжениями устанавливается ассоциированным законом пластического течения:

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = k, \quad \lambda > 0. \tag{4}$$



## 2. НАЧАЛЬНОЕ УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ И ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ

Пусть упруговязкопластический материал заполняет область  $r_0 \leq r \leq R$  между двумя жесткими цилиндрическими поверхностями. Решение будем искать в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . Вначале рассмотрим случай, когда материал деформируется за счет поворота внутреннего цилиндра радиусом  $r = r_0$ , в то время как внешний цилиндр радиусом  $r = R$  жестко закреплен, и на его поверхности выполнено условие прилипания:

$$u_r = u_\varphi = v_\varphi = 0 \quad \text{при} \quad r = R. \quad (5)$$

Компоненты вектора перемещений при движении точек среды по окружностям определяются зависимостями

$$u_r = r(1 - \cos \theta(r, t)), \quad u_\varphi = r \sin \theta(r, t),$$

здесь  $\theta(r, t)$  — центральный угол закручивания.

Отличными от нуля компонентами тензора деформаций Альманси являются следующие:

$$d_{rr} = -\frac{1}{2}g^2, \quad d_{r\varphi} = \frac{1}{2}g, \quad g = r \frac{\partial \theta}{\partial r}.$$

При увеличении угла поворота внутреннего жесткого цилиндра сначала происходит только упругое деформирование. При достижении некоторого значения  $\theta_0 = \theta(r_0, t_0)$  в окрестности внутренней поверхности начинается пластическое течение. Считаем, что на внутренней жесткой стенке при обратимом деформировании выполняется условие прилипания, а при пластическом течении материала возможно его проскальзывание:

$$\begin{aligned} |\sigma_{r\varphi}|_{r=r_0} &\leq \gamma |\sigma_{rr}|_{r=r_0}, & [\omega] &= 0 & \text{обратимое деформирование,} \\ \sigma_{r\varphi}|_{r=r_0} &= -\gamma |\sigma_{rr}|_{r=r_0} - \xi[\omega], & [\omega] &= \omega^+ - \omega^- & \text{вязкопластическое течение,} \end{aligned} \quad (6)$$

здесь  $\gamma$  — коэффициент сухого трения,  $\xi$  — коэффициент вязкого трения,  $\omega^+$  — угловая скорость жесткого цилиндра,  $\omega^-$  — угловая скорость материала в окрестности внутреннего жесткого цилиндра.

Вычислим параметры напряженно-деформированного состояния в момент начала пластического течения. Из зависимостей (2) для компонент напряжений с точностью до слагаемых второго порядка малости по деформациям следуют соотношения

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz} = -(p + 2\mu) - \frac{1}{2}(b + \mu)g^2 = -s, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -s + \mu g^2, \quad \sigma_{r\varphi} = \mu g.$$

Интегрируя уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0 \quad (7)$$

и используя граничное условие (5), найдем

$$\theta = \frac{c}{2\mu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{c}{r^2}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{zz} = \frac{c^2}{4\mu} \left( \frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4} \right) + \sigma_0, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{c^2}{4\mu} \left( \frac{1}{r_0^4} - \frac{3}{r^4} \right) + \sigma_0,$$

где  $c$  — неизвестная постоянная интегрирования,  $\sigma_0$  — значение компоненты тензора напряжений  $\sigma_{rr}$  на поверхности  $r = r_0$ .

Из условия пластичности (3) и условия (6) в момент начала пластического течения найдем

$$\theta_0 = \frac{k}{2\mu} \left( 1 - \frac{r_0^2}{R^2} \right), \quad c = -kr_0^2, \quad \sigma_0 = \frac{k}{\gamma}.$$

Начиная с момента времени  $t = t_0 = 0$  в окрестности внутренней поверхности развивается область вязкопластического течения  $r_1 \leq r \leq r_1(t)$ ,  $r_1(t)$  — движущаяся граница этой области, отделяющая ее от зоны упругого деформирования  $r_1(t) \leq r \leq R$ .



Согласно зависимостям (1) для компонент вектора скорости и тензора скоростей деформаций справедливы кинематические соотношения

$$v_\varphi = r \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) = \frac{\partial d_{r\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{2} r \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial t}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{r\varphi}^e + \varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{\partial e_{r\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\varepsilon_{rr}^p = \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} + 2p_{r\varphi} (r_{\varphi r} + \varepsilon_{r\varphi}^p), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^p = \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} + 2p_{r\varphi} (r_{r\varphi} + \varepsilon_{r\varphi}^p), \quad \varepsilon_{rr}^p = -\varepsilon_{\varphi\varphi}^p = -2\varepsilon_{r\varphi}^p e_{r\varphi}.$$

Рассчитаем параметры напряженно-деформированного состояния в некоторый момент времени  $t = t'_1 \geq t_0$ . Интегрируя уравнения равновесия (квазистатическое приближение) в области упругого деформирования с использованием (5), найдем

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{c_1}{r^2}, \quad v_\varphi = 0, \quad \theta = \frac{c_1}{2\mu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad c_1 = c(t'_1). \quad (9)$$

Из второго соотношения в (2) для компонент напряжений в области пластического течения имеем:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz} - (p_1 + 2\mu) - \frac{1}{2}(b + \mu)e_{r\varphi}^2 = -s_1(t), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -s_1(t) + 4\mu e_{r\varphi}^2, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\mu e_{r\varphi}. \quad (10)$$

В то же время интегрированием уравнений равновесия можно получить

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{m(t'_1)}{r^2}, \quad e_{r\varphi} = \frac{m(t'_1)}{2\mu r^2}. \quad (11)$$

Из условия непрерывности компонент напряжений и соотношений (10) и (11) следует, что

$$m(t'_1) = c_1, \quad s(t'_1) = s_1(t'_1).$$

Согласно условию пластичности (3) и ассоциированному закону пластического течения (4) получаем

$$\sigma_{r\varphi} = -k + \eta \varepsilon_{r\varphi}^p, \quad \lambda = -\varepsilon_{r\varphi}^p / (k - \eta \varepsilon_{r\varphi}^p). \quad (12)$$

Используя (11) и (12), можно вычислить скорость пластической деформации в области  $r_0 \leq r \leq r_1(t)$

$$\varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{1}{\eta} \left( \frac{c_1}{r^2} + k \right).$$

С учетом кинематических зависимостей (8) и условий непрерывности перемещений, деформаций и скоростей на упругопластической границе  $r = r_1$  в области необратимого деформирования найдем

$$\theta = tF(c_1, r, r_1) + A(c_1), \quad v_\varphi = rF(c_1, r, r_1), \quad c_1 = -kr_1^2,$$

$$F(c_1, r, r_1) = \frac{2}{\eta} \left( k \ln \frac{r}{r_1} + \frac{c_1}{2} \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right), \quad A(c_1) = \frac{c_1}{2\mu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right).$$

Если скорость поворота жесткого цилиндра изменяется со временем, например по закону  $\omega^+ = \alpha t$ , то для определения границы вязкопластической области, используя граничное условие (6), получим уравнение

$$F(c_1, r_0, r_1) = \alpha t + H(r_1), \quad H(r_1) = \frac{k}{\xi} \left( 1 - \frac{r_1^2}{r_0^2} \right).$$

На рис. 1 показано развитие области вязкопластического течения при значении постоянных

$$\frac{r_0}{R} = 0.5, \quad \frac{\eta\sqrt{\alpha}}{\mu} = 0.01, \quad \frac{\xi\sqrt{\alpha}}{\mu} = 0.05, \quad \frac{k}{\mu} = 0.00621. \quad (13)$$



По найденной функции  $r_1(t)$  определяются функция  $\theta(r, t)$ , напряжения, полные и обратимые деформации как в области обратимого деформирования, так и в области вязкопластического течения. Согласно (1) компоненты пластических деформаций определяются зависимостями

$$p_{r\varphi} = \frac{kt}{\eta} \left( 1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right), \quad p_{\varphi\varphi} = 2e_{r\varphi}p_{r\varphi},$$

$$p_{rr} = 2d_{r\varphi}(e_{r\varphi} - d_{r\varphi}).$$

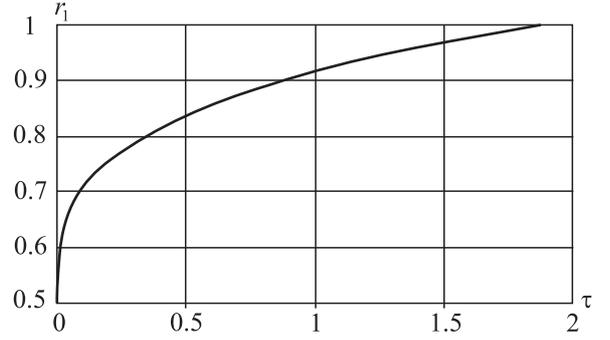


Рис. 1. Развитие области вязкопластического течения

### 3. ТОРМОЖЕНИЕ, РАЗГРУЗКА И ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ПРИ ПОВОРОТЕ ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ В ОБРАТНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Далее рассмотрим процесс торможения, когда начиная с момента времени  $t_1$  ( $r_1(t_1) < R$ ) угловая скорость внутреннего цилиндра уменьшается по закону

$$\omega^+ = \alpha t_1 - \beta(t - t_1). \tag{14}$$

При уменьшении скорости поворота внутренней жесткой поверхности и неизменном напряжении  $\sigma_{r\varphi} = \frac{c_2}{r^2}$ ,  $c_2 = -kr_1^2$  вязкопластическое течение продолжается в области  $r_0 \leq r \leq r_2(t)$ , в области  $r_2(t) \leq r \leq r_1$  пластические деформации перестают изменяться, в области  $r_1 \leq r \leq R$  происходит обратимое деформирование.

В упругой области по-прежнему справедливы зависимости (9). В области с неизменяющимися пластическими деформациями, используя условие непрерывности скоростей при  $r = r_1$ , получим, что угловая скорость  $\omega = 0$  во всей этой области. В области вязкопластического течения  $r_0 \leq r \leq r_2(t)$  из равенства скоростей на поверхности  $r = r_2$  найдем  $\omega = F(c_2, r, r_2)$ .

Используя граничные условия (6) и (14) для определения границы  $r_2$ , получим уравнение

$$\alpha t_1 - \beta(t - t_1) + H(r_1) = F(c_2, r_0, r_2).$$

Компонента  $p_{r\varphi}$  пластических деформаций в области  $r_2(t) \leq r \leq r_1$  с накопленными неизменяющимися пластическими деформациями находится по формуле

$$p_{r\varphi} = \frac{k}{\eta} \left( 1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) \left[ \left( \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) t_1 + \frac{H(r_1)}{\beta} - \frac{1}{\beta} F(c_2, r_0, r) \right].$$

Используя соотношение  $d_{r\varphi} = e_{r\varphi} + p_{r\varphi}$  и условие непрерывности перемещений при  $r = r_2$ , определим функцию  $\theta$  в области  $r_2(t) \leq r \leq r_1$

$$\theta = \left[ t_1 \left( \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) + \frac{H(r_1)}{\beta} \right] F(c_2, r, r_1) + \frac{1}{2\beta} \left[ F^2(c_2, r_0, r) - F^2(c_2, r_0, r_1) \right] + A(c_2).$$

В области вязкопластического течения  $r_0 \leq r \leq r_2(t)$  получим

$$\theta = \left[ t_1 \left( \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) + \frac{H(r_1)}{\beta} \right] F(c_2, r_2, r_1) + \frac{1}{2\beta} \left[ F^2(c_2, r_0, r_2) - F^2(c_2, r_0, r_1) \right] + F(c_2, r, r_2) + A(c_2).$$

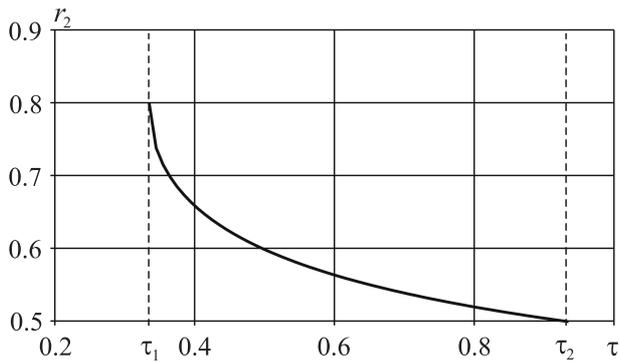


Рис. 2. Изменение границы области вязкопластического течения в процессе торможения

Полученное решение справедливо до момента времени  $t = t_2$ , в который граница  $r_2$  совпадает с поверхностью  $r = r_0$ . На рис. 2 показано изменение границы  $r_2$  с течением времени.

Далее в материале будет происходить разгрузка, при которой напряжение  $\sigma_{r\varphi}$  будет уменьшаться по абсолютной величине. Функция  $\theta$  в этом случае определяется следующими зависимостями:

– в упругой области:

$$\theta = A(c_3), \quad c_3 = -r_0^2(k + \xi(\alpha t_1 - \beta(t - t_1))),$$

– в пластической области:

$$\theta = \left[ t_1 \left( \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) + \frac{H(r_1)}{\beta} \right] F(c_2, r, r_1) + \frac{1}{2\beta} \left[ F^2(c_2, r_0, r) - F^2(c_2, r_0, r_1) \right] + A(c_3). \quad (15)$$

В момент времени  $t = t_3$  скорость поворота внутреннего жесткого цилиндра станет равной нулю ( $\sigma_{r\varphi}|_{r=r_0} = -k$ ). Рассмотрим, как будет изменяться напряженно-деформированное состояние, если с момента времени  $t = t_3$  поворачивать цилиндр в обратную сторону. До достижения углом поворота значения  $\theta(r_0, t_4) = \theta_4$  в материале будет происходить только обратимое деформирование, а на жесткой стенке будет выполняться условие прилипания (первое соотношение (6)). В конечный момент разгрузки  $t = t^*$  ( $\sigma_{r\varphi} = 0$ ) для функции  $\theta$  найдем

– в упругой области:

$$\theta = 0,$$

– в пластической области:  $\theta = \left[ t_1 \left( \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) + \frac{H(r_1)}{\beta} \right] F(c_2, r, r_1) + \frac{1}{2\beta} \left[ F^2(c_2, r_0, r) - F^2(c_2, r_0, r_1) \right]$ .

Начиная с момента времени  $t = t^*$  напряжение  $\sigma_{r\varphi}$  возрастает, до тех пор пока в окрестности внутренней поверхности  $r = r_0$  напряженное состояние не выйдет на поверхность нагружения

$$\sigma_{r\varphi}|_{r=r_0} = k, \quad (16)$$

и не начнет развиваться новая область пластического течения. Начальный параметр для пластического течения равен

$$\theta_4 = \left[ t_1 \left( \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) + \frac{H(r_1)}{\beta} \right] F(c_2, r_0, r_1) - \frac{1}{2\beta} F^2(c_2, r_0, r_1) + A(c_4), \quad c_4 = kr_0^2.$$

После того как на поверхности  $r = r_0$  выполнится условие пластичности (16) ( $t = t_4$ ), начнет свое развитие область вязкопластического течения  $r_0 \leq r \leq r_3(t)$ . В области  $r_1 \leq r \leq R$ , как и выше, справедливы зависимости (9), в которых  $c_1$  следует заменить новым значением  $c_5$ , в области с накопленными необратимыми деформациями  $r_3(t) \leq r \leq r_1$  функция  $\theta(r, t)$  находится по формуле (15), где  $c_3$  заменено текущим значением  $c_5$ . В области пластического течения  $r_0 \leq r \leq r_3(t)$  найдем

$$p_{r\varphi} = \frac{t}{\eta} \left( \frac{c_5}{r^2} - k \right) + \frac{k}{\eta} \left( 1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) \left[ \left( \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) t_1 + \frac{H(r_1)}{\beta} - \frac{1}{\beta} F(c_2, r_0, r) \right], \quad c_5 = kr_3^2,$$

$$\theta = \frac{1}{2\beta} \left[ F^2(c_2, r_0, r) - F^2(c_2, r_0, r_1) \right] + \left[ t_1 \left( \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) + \frac{H(r_1)}{\beta} \right] F(c_2, r, r_1) + tF_1(c_5, r_3, r) + A(c_5), \quad (17)$$

$$F_1(c_5, r_3, r) = \frac{2}{\eta} \left( k \ln \frac{r_3}{r} - \frac{c_5}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_3^2} \right) \right), \quad \omega = F_1(c_5, r_3, r).$$



Рассмотрим напряженно-деформируемое состояние, начиная с момента времени  $t = t_5$ , в который движущаяся граница  $r_3(t)$  достигнет поверхности  $r = r_1$ , первоначально ограничивающей пластическую область. При этом в материале будут три области: упругая область  $r_3(t) \leq r \leq R$  и области вязкопластического течения  $r_0 \leq r \leq r_1$  и  $r_1 \leq r \leq r_3(t)$ , в которых пластические деформации вычисляются по-разному. В области обратимого деформирования функция  $\theta(r, t)$  определяется зависимостями (9), где  $c_1$  заменено значением  $c_5$ .

В области вязкопластического течения  $r_1 \leq r \leq r_3(t)$ , используя условие непрерывности перемещений, найдем

$$p_{r\varphi} = \frac{t - t_5}{\eta} \left( \frac{c_5}{r^2} - k \right), \quad \theta = (t - t_5)F_1(c_5, r_3, r) + A(c_5), \quad \omega = F_1(c_5, r_3, r).$$

В области  $r_0 \leq r \leq r_1$  компонента  $p_{r\varphi}$  пластических деформаций находится по формуле (17), а для угла поворота и угловой скорости будут выполняться соотношения

$$\theta = \frac{1}{2\beta} \left[ F^2(c_2, r_0, r) - F^2(c_2, r_0, r_1) \right] + \left[ t_2 \left( \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) + \frac{H(r_1)}{\beta} \right] F(c_2, r, r_1) + tF_1(c_5, r_1, r) + (t - t_5)F_1(c_5, r_3, r_1) + A(c_5), \quad \omega = F_1(c_5, r_3, r_1).$$

Для определения упругопластической границы  $r_3$  в этом случае следует уравнение  $-\alpha t - H(r_3) = F_1(c_5, r_3, r_0)$ .

На рис. 3. показана функция  $\theta(r)$  в моменты времени  $t_1, t_1 < t'_2 < t_2, t_2, t_4, t_4 < t'_5 < t_5, t_5, t_5 < t'_6$ .

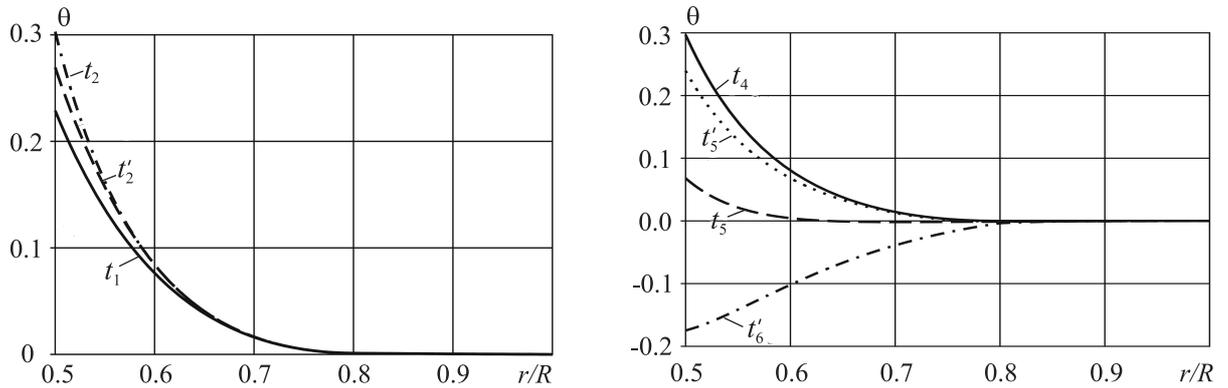


Рис. 3. Распределение угла поворота в зависимости от радиуса

#### 4. ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПРИ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИИ НА ВНЕШНЕЙ ЖЕСТКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим теперь деформирование материала в случае ускоренного вращения внутреннего жесткого цилиндра, когда условие проскальзывания выполняется в окрестности внешнего цилиндра, а условие прилипания — на внутреннем:

– обратимое деформирование :  $|\sigma_{r\varphi}|_{r=R} \leq \gamma |\sigma_{rr}|_{r=R} \quad u_r|_{r=R} = u_\varphi|_{r=R} = \omega|_{r=R} = 0,$

– вязкопластическое течение :  $\sigma_{r\varphi}|_{r=R} = -\frac{kr_0^2}{R^2} - \omega|_{r=R}, \quad \omega|_{r=r_0} = \alpha t.$

При обратимом деформировании материала будут справедливы соотношения п. 2. В условиях пластического течения материала имеем

– в упругой области:

$$\omega = -\frac{r_0^2}{R^2} H(r_1), \quad \theta = tF(c_1, r_1, r_0) + \theta_0 + \frac{\alpha t^2}{2} + A_1(c_1), \quad A_1(c_1) = \frac{c_1}{2\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right),$$



– в области вязкопластического течения:

$$\omega = F(c_1, r, r_0) + \alpha t, \quad \theta = tF(c_1, r, r_0) + \theta_0 + \frac{\alpha t^2}{2} + A_1(c_1), \quad c_1 = -kr_1^2.$$

Для определения границы области вязкопластического течения следует решить уравнение

$$\alpha t + F(c_1, r_1, r_0) = -\frac{r_0^2}{R^2}H(r_1).$$

При уменьшении скорости поворота внутреннего цилиндра найдем:

– в упругой области:

$$\begin{aligned} \omega &= F(c_2, r_2, r_0) + \alpha t_1 - \beta(t - t_1), \quad c_2 = -kr_1^2(t_1), \\ \theta &= \left[ t_1 \left( \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) + \frac{r_0^2 H(r_1)}{\beta R^2} \right] F(c_2, r_1, r_2) + \frac{1}{2\beta} \left[ F^2(c_2, r_0, r_1) - F^2(c_2, r_0, r_2) \right] + \\ &+ tF(c_2, r_2, r_0) + \theta_0 + \alpha t_1 t - \frac{\alpha t_1^2}{2} - \frac{\beta(t - t_1)^2}{2} + A_1(c_2), \end{aligned}$$

– в области с неизменяющимися пластическими деформациями:

$$\begin{aligned} \omega &= F(c_2, r_2, r_0) + \alpha t_1 - \beta(t - t_1), \\ \theta &= \left[ t_1 \left( \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) + \frac{r_0^2 H(r_1)}{\beta R^2} \right] F(c_2, r, r_2) + \frac{1}{2\beta} \left[ F^2(c_2, r_0, r) - F^2(c_2, r_0, r_2) \right] + \\ &+ tF(c_2, r_2, r_0) + \theta_0 + \alpha t_1 t - \frac{\alpha t_1^2}{2} - \frac{\beta(t - t_1)^2}{2} + A_1(c_2), \end{aligned}$$

– в области вязкопластического течения:

$$\omega = F(c_2, r, r_0) + \alpha t_1 - \beta(t - t_1), \quad \theta = tF(c_2, r, r_0) + \theta_0 + \alpha t_1 t - \frac{\alpha t_1^2}{2} - \frac{\beta(t - t_1)^2}{2} + A_1(c_2).$$

После того как граница  $r_2$  достигнет поверхности  $r_0$ , напряжение  $\sigma_{r\varphi}$  будет уменьшаться по абсолютной величине, пока угловая скорость внутреннего жесткого цилиндра не уменьшится до нуля. При повороте цилиндра в обратную сторону наблюдаются те же эффекты, что и в случае, описанном в п. 2–3. На рис. 4. приведено распределение угла поворота в зависимости от радиуса в различные моменты времени.

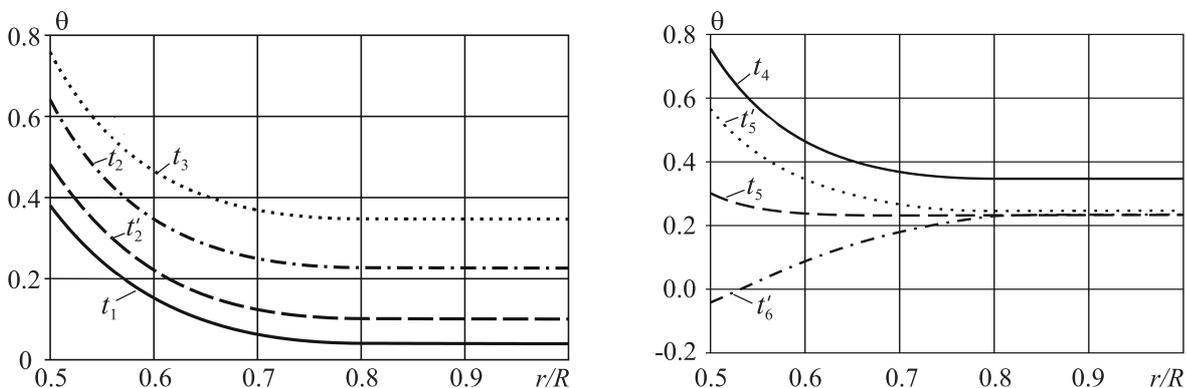


Рис. 4. Распределение угла поворота в зависимости от радиуса

Аналогично были получены решения краевых задач в случае поворота внешнего жесткого цилиндра, когда проскальзывание материала возможно либо в окрестности неподвижного внутреннего цилиндра, либо подвижного внешнего.

**Библиографический список**

1. Бахшиян Ф. А. Вращение жесткого цилиндра в вязкопластичной среде // ПММ. 1948. Т. 12, вып. 6. С. 650–661.
2. Быковцев Г. И., Чернышов А. Д. О вязкопластическом течении в некруговых цилиндрах при наличии перепада давления // ПМТФ. 1964. № 4. С. 94–96.
3. Мосолов П. П., Мясников В. П. Механика жесткопластических сред. М. : Наука, 1981. 208 с.
4. Мясников В. П. Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязкопластической среды // ПМТФ. 1961. № 2. С. 79–86.
5. Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х. Нестационарные движения вязкопластических сред. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1970. 415 с.
6. Резунов А. В., Чернышов А. Д. Задача о чистом сдвиге вязкопластического материала между двумя цилиндрическими поверхностями // Механика деформируемого твердого тела : межвуз. сб. Куйбышев: Волжская коммуна, 1975. С. 32–36.
7. Сафрончик А. И. Вращение цилиндра с переменной скоростью в вязкопластичной среде // ПММ. 1959. Т. 23, вып. 6. С. 998–1014.
8. Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. АН СССР. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
9. Ковтанюк Л. В., Шитиков А. В. О теории больших упругопластических деформаций при учете температурных и реологических эффектов // Вестн. ДВО РАН. 2006. № 4. С. 87–93.
10. Знаменский В. А., Ивлев Д. Д. Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 6. С. 114–118.

## ИНФОРМАТИКА

УДК 519.1

### ОПТИМАЛЬНАЯ ЭЙЛЕРОВА РЕКОНСТРУКЦИЯ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ МЕТОДОМ ДОБАВЛЕНИЯ ДУГ

А. В. Гавриков

Саратовский государственный университет,  
кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии  
E-mail: alexandergavrikov1989@gmail.com

В работе решается следующая задача: дан орграф, необходимо добавить минимальное число дуг, чтобы орграф стал эйлеровым.

**Ключевые слова:** теория графов, эйлеровы орграфы, реконструкции орграфов, транспортная сеть, максимальный поток минимальной стоимости, добавление дуг.

**Optimal Eulerian Modification of Digraphs by Addition of Arcs**

A. V. Gavrikov

Saratov State University,  
Chair of the Theoretical Foundations of Computer Security and Cryptography  
E-mail: alexandergavrikov1989@gmail.com

The following problem is solved: given a directed graph, it is necessary to add to it a minimal number of arcs to obtain an Eulerian directed graph.

**Key words:** graph theory, Eulerian graphs, modification of digraphs, transport network, min-cost-max-flow, addition of arch.

#### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Общая постановка задачи формулируется следующим образом. Пусть  $K$  — некоторый класс графов, а  $G$  — граф, не принадлежащий  $K$ . Требуется произвести те или иные изменения в структуре графа  $G$ , чтобы полученный граф  $G'$  оказался  $K$ -графом (см. [1]). В качестве допустимых реконструкций данного графа обычно рассматриваются следующие:

- 1) отождествление некоторых вершин графа,
- 2) ориентация ребер данного неориентированного графа,
- 3) переориентация некоторых дуг,
- 4) добавление новых дуг (ребер),
- 5) удаление некоторых дуг (ребер).

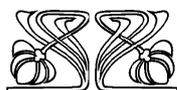
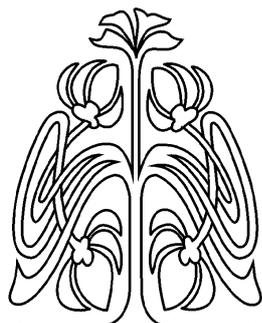
Нами рассматриваются реконструкции, приводящие к построению эйлеровых орграфов. Решены следующие задачи:

1. Дан произвольный связный орграф, необходимо путем переориентации минимального количества дуг сделать его эйлеровым. Решение задачи опубликовано в [2].

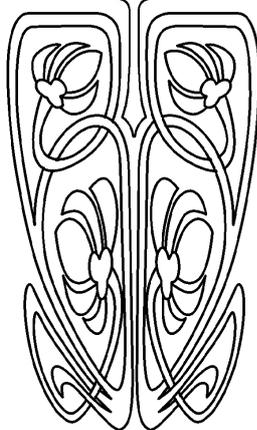
2. Дан произвольный орграф, необходимо путем добавления минимального количества дуг сделать его эйлеровым. Этой задаче посвящена данная работа.

3. Дан произвольный орграф, необходимо путем удаления минимального количества дуг сделать его квазиэйлеровым. Решение опубликовано в [3].

Разработана программа для ЭВМ, где алгоритмически реализованы все поставленные задачи (см. [4]).



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





## 2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

*Ориентированным графом* (или — *орграфом*) называется пара  $\vec{G} = (V, \alpha)$ , где  $V$  — конечное непустое множество (вершины орграфа), а  $\alpha \subseteq V \times V$  — отношение на множестве  $V$  (дуги орграфа) (см. [5, 6]).

*Неориентированным графом* (или — *графом*) называется пара  $G = (V, \alpha)$ , где  $\alpha \subseteq V \times V$  — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве  $V$  (ребра графа).

*Путем* называют последовательность дуг  $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)$ , где  $(v_i, v_{i+1}) \in \alpha$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , и никакая дуга не встречается более одного раза.

*Длиной пути* называется количество входящих в него дуг.

Путь называется *циклическим*, если  $v_1 = v_n$ .

Путь длины  $|\alpha|$  называется *эйлеровым*.

Путь называется *простым*, если каждая его вершина принадлежит не более чем двум его ребрам (дугам).

*Циклом* называется простой циклический путь.

*Расстоянием от вершины  $u$  до вершины  $v$*  называется длина кратчайшего пути из вершины  $u$  в вершину  $v$ .

Орграф, в котором существует циклический эйлеров путь, называется *эйлеровым*.

*Степенью исхода вершины  $v$*  в орграфе называют количество дуг, имеющих своим началом  $v$ . Степень исхода вершины  $v$  обозначают  $d^+(v) = |\alpha(v)|$ .

*Степенью захода вершины  $v$*  в орграфе называют количество дуг, имеющих своим концом  $v$ . Степень захода вершины  $v$  обозначают  $d^-(v) = |\alpha^{-1}(v)|$ .

В неориентированном графе  $d^+(v) = d^-(v) := d(v)$ . Число  $d(v)$  называется степенью вершины  $v$ . При этом вершина называется четной или нечетной в зависимости от соответствующего свойства числа.

*Источником* называется вершина, степень захода которой равна 0.

*Стоком* называется вершина, степень исхода которой равна 0.

Орграф  $\vec{G} = (V, \alpha)$  называется *связным*, если  $(\forall u, v \in V) (\exists v_1, v_2, \dots, v_n \in V) (u = v_1 \ \& \ (v_1, v_2) \in \alpha \cup \alpha^{-1} \ \& \ (v_2, v_3) \in \alpha \cup \alpha^{-1} \ \& \ \dots \ \& \ (v_{n-1}, v_n) \in \alpha \cup \alpha^{-1})$ .

Орграф, состоящий из объединения эйлеровых орграфов, называется *квазиэйлеровым*.

*Транспортной сетью* назовем орграф  $\vec{G} = (V, \alpha)$  с источником  $s$  и стоком  $t$ , где каждая дуга  $(u, v)$  имеет неотрицательную пропускную способность  $c(u, v)$  и цену  $cost(u, v)$ .

*Потоком* в транспортной сети  $\vec{G} = (V, \alpha)$  называется функция  $flow: \alpha \rightarrow R$ , удовлетворяющая следующим свойствам:

1.  $flow(u, v) \leq c(u, v)$  — ограничение, связанное с пропускной способностью;
2.  $flow(u, v) = -flow(v, u)$  — антисимметричность;
3.  $(\forall v \in (V - \{s, t\})) (\sum_{u \in V} flow(u, v) = 0)$  — сохранение потока.

*Величина потока*  $|flow|$  определяется как  $\sum_{v \in V} flow(s, v)$ .

*Максимальным потоком* в транспортной сети называется поток максимальной величины.

*Единицей транспортной сетью* назовем орграф  $\vec{G} = (V, \alpha)$  с источником  $s$  и стоком  $t$ , где каждая дуга  $(u, v)$  имеют пропускную способность  $c(u, v) = 1$  и цену  $cost(u, v) = 1$ .

Дуга  $(u, v)$  в транспортной сети называется *насыщенной* потоком, если  $flow(u, v) > 0$ .

*Остаточной пропускной способностью дуги*  $(u, v) \in \alpha$  называется величина  $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$ .

Для заданной транспортной сети  $\vec{G} = (V, \alpha)$  и потока  $flow(u, v)$  *остаточной транспортной сетью, порожденной потоком*  $flow(u, v)$ , является сеть  $\vec{G}_f = (V, \alpha_f)$ , где  $\alpha_f = \{(u, v) \in V \times V : c_f(u, v) > 0\}$ .



Для заданной транспортной сети  $\vec{G} = (V, \alpha)$  и потока  $flow(u, v)$  увеличивающим путем является путь из  $s$  в  $t$  в остаточной сети  $\vec{G}_f = (V, \alpha_f)$ .

Стоимостью потока называется величина  $\sum_{u,v \in V} flow(u, v) \cdot cost(u, v)$ .

Максимальным потоком минимальной стоимости в транспортной сети называется поток, стоимость которого не больше стоимости любого другого максимального потока.

### 3. СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

**Лемма 1 (существование решения задачи).** Для орграфа  $\vec{G} = (V, \alpha)$  всегда возможно добавить дуги так, чтобы полученный орграф стал эйлеровым.

**Доказательство.** Полный орграф, в котором между каждой парой вершин есть дуги в обоих направлениях и который может быть получен из любого орграфа добавлением дуг, является эйлеровым.  $\square$

**Теорема 1** (см. [6]). *Связный орграф тогда и только тогда является эйлеровым, когда  $(\forall v \in V)(d^+(v) = d^-(v))$ .*

Балансом вершины  $v$  в орграфе назовем число  $bal(v) = d^+(v) - d^-(v)$ . Вершина считается положительной, отрицательной или нулевой в зависимости от соответствующего свойства числа  $bal(v)$ .

В эйлеровом орграфе баланс каждой вершины равен нулю. Это следует из теоремы 1. Путем добавления минимального количества дуг необходимо добиться выполнения этого условия. Для этого для каждой вершины  $v$  необходимо добавить как минимум  $|bal(v)|$  инцидентный ей дуг, чтобы ее баланс стал нулевым. Дуги можно добавлять только из дополнения орграфа  $\vec{G}' = (V, \bar{\alpha} - \Delta)$ .

Число добавленных дуг в орграфе не может быть меньше, чем сумма балансов всех вершин, деленная пополам, формально  $(\sum_{v \in V} |bal(v)|)/2$ . Иначе в орграфе останутся ненулевые вершины.

**Лемма 2.** *Каждая добавленная дуга будет содержаться либо в цикле из добавленных дуг, либо в пути из отрицательной вершины в положительную вершину.*

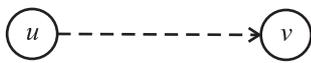


Рис. 1

**Доказательство.** Рассмотрим две произвольные вершины  $u$  и  $v$  исходного орграфа такие, что не существует дуги из вершины  $u$  в вершину  $v$ . Добавим дугу  $(u, v)$  (рис. 1). Добавленные дуги будем обозначать пунктиром.

Посмотрим, как такое преобразование исходного орграфа повлияет на степени вершин. Возможны несколько случаев:

1.  $bal(u) < 0$ . В этом случае вершина  $u$  является отрицательной. После добавления дуги  $(u, v)$  ее баланс увеличился на единицу и приблизился к нулю. Баланс вершины  $v$  в таком случае может быть либо положительным, либо неположительным.

1.1.  $bal(v) > 0$ . В этом случае вершина  $v$  являлась положительной. Ее баланс при добавлении дуги уменьшился на единицу и приблизился к нулю. Добавлен путь из отрицательной вершины в положительную. Утверждение леммы выполнено.

1.2.  $bal(v) \leq 0$ . Чтобы сделать баланс вершины  $v$  нулевым, необходимо добавить  $|bal(v)|$  дуг, имеющих началом вершину  $v$ , как было сказано выше. После добавления дуги  $(u, v)$  необходимо будет добавить еще одну дугу, имеющую началом вершину  $v$ , т. е. на одну дугу больше, чем требовалось для исходного орграфа. Пусть добавлена дуга  $(v, w)$  (рис. 2).

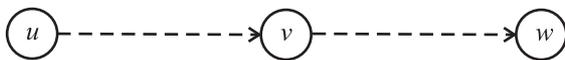


Рис. 2

Ситуация с вершиной  $w$  будет аналогичной. Если ее баланс положителен, то утверждение леммы выполнено, если неположителен, то необходимо будет добавить дугу, имеющую началом вершину  $w$ . Так как в работе рассматриваются конечные орграфы, то возможны две перспективы. Либо в исходный орграф добавится путь из отрицательной вершины  $u$  в некоторую положительную вершину, либо добавится цикл. Утверждение леммы выполнено.

2.  $bal(u) \geq 0$ . В этом случае вершина  $u$  является неотрицательной. Чтобы ее баланс сделать нулевым, необходимо добавить  $|bal(u)|$  дуг, имеющих своим концом вершину  $u$ . После добавления дуги  $(u, v)$  ее баланс увеличился на единицу. Следовательно, необходимо будет добавить еще одну



дугу, имеющую своим концом вершину  $u$ . Обозначим такую дугу  $(w, u)$  (рис. 3).

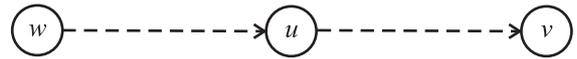


Рис. 3

Если вершина  $w$  являлась отрицательной, то тогда ее баланс увеличится на единицу и приблизится к нулю. Иначе надо будет добавлять дугу  $(w_1, w)$ , чтобы приблизить баланс вершины  $w$  к нулю. С вершиной  $w_1$  произойдет аналогичная ситуация. В конце концов, в исходный орграф добавится дуга  $(w_{i+1}, w_i)$ , где вершина  $w_{i+1}$  будет отрицательной, либо добавится цикл. При добавлении цикла утверждение леммы выполнено. Если процесс «закончится» на положительной вершине, то необходимо будет рассмотреть два варианта.

2.1.  $bal(v) > 0$ . В этом случае баланс вершины  $v$  является положительным. Добавлен путь из отрицательной вершины в положительную вершину.

2.2.  $bal(v) \leq 0$ . Случай аналогичен пункту 1.2.

В итоге каждая добавленная дуга будет содержаться либо в пути из отрицательной вершины в положительную, либо в цикле из добавленных дуг.  $\square$

Конструктивный смысл леммы заключается в том, что в исходный орграф добавляются либо пути из отрицательных вершин в положительные, либо циклы.

Изначально орграф представляет множество компонент связности, из которых часть — эйлеровы компоненты связности, а остальные нет. Обозначим число неэйлеровых компонент связности через  $s$ , а число эйлеровых — через  $e$ .

Чтобы сделать баланс каждой вершины нулевым, будем добавлять пути из отрицательных вершин в положительные вершины. Назовем такой способ добавления дуг добавлением по принципу путей (в дальнейшем — ДПП).

**Лемма 3.** Минимальное число путей, которое необходимо добавить в способе ДПП, составляет  $\left(\sum_{v \in V} |bal(v)|\right) / 2$ .

**Доказательство.** Каждый добавленный путь изменяет балансы двух ненулевых вершин.  $\square$

В дальнейшем будем обозначать  $k = \left(\sum_{v \in V} |bal(v)|\right) / 2$ .

ДПП, в котором среди всех возможных способов добавления путей будет суммарное минимальное число дуг, назовем оптимальным добавлением по принципу путей (в дальнейшем — ОДПП). Количество дуг в ОДПП обозначим через  $m$ . Нахождение ОДПП и добавление дуг из этого способа позволяет получить квазиэйлеров орграф. Действительно, все вершины полученного орграфа являются нулевыми. Однако это не гарантирует того, что полученный орграф будет связным. О том, как конструктивно найти дуги, входящие в ОДПП, и сделать исходный орграф связным, будет сказано ниже.

При добавлении  $m$  дуг в исходный орграф может получиться разное количество компонент связности. Покажем это на примере. Рассмотрим орграф на рис. 4, а. Для данного орграфа  $k = 3$ . Значит, минимальное число путей в ОДПП для данного орграфа равно трем, следовательно, минимальное число добавленных дуг  $m$  не может быть меньше трех. Путем добавления трех дуг в орграф на рис. 4, а можно получить качественно разные результаты: орграф на рис. 4, б имеет три компоненты связности, орграф на рис. 4, в — две компоненты связности, орграф на рис. 4, г — одну.

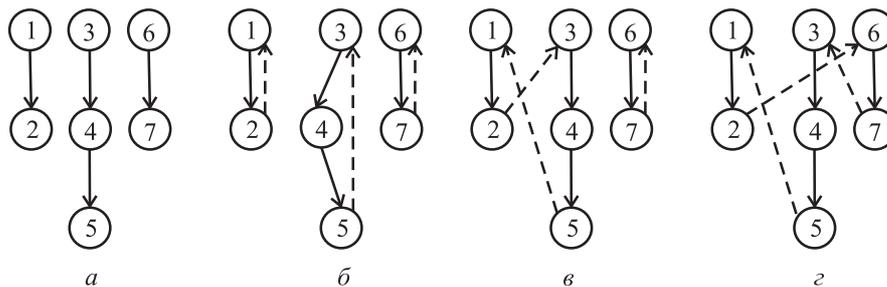


Рис. 4



Пусть в исходный оргграф добавлены дуги из способа ОДПП. Имеет место

**Лемма 4.** *Путем некоторых действий с  $t$  добавленными дугами из способа ОДПП можно все неэйлеровы компоненты связности «соединить» в одну. В итоге в полученном орграфе будет ровно  $e + 1$  компонент связности.*

**Доказательство.** Рассмотрим две компоненты связности полученного орграфа, в которых присутствуют добавленные дуги. Для определенности обозначим добавленную дугу в первой компоненте через  $(u_1, u_2)$ , а во второй —  $(v_1, v_2)$  (рис. 5, а). Таким образом, в полученном орграфе нет дуг  $(u_1, v_2)$  и  $(v_1, u_2)$ , иначе рассматриваемые дуги не принадлежали бы разным компонентам связности. Заменяем дуги  $(u_1, u_2)$  и  $(v_1, v_2)$ , на дуги  $(u_1, v_2)$  и  $(v_1, u_2)$  (рис. 5, б). Для этого удалим дуги  $(u_1, u_2)$  и  $(v_1, v_2)$  и добавим дуги  $(u_1, v_2)$  и  $(v_1, u_2)$ . В этом случае балансы вершин  $u_1, v_1, u_2, v_2$  не изменились, две компоненты связности «соединились», а число добавленных дуг осталось прежним. Прodelывая данные действия с добавленными дугами, пока это возможно и необходимо, можно добиться того, что в орграфе останется  $e + 1$  компонент связности.  $\square$

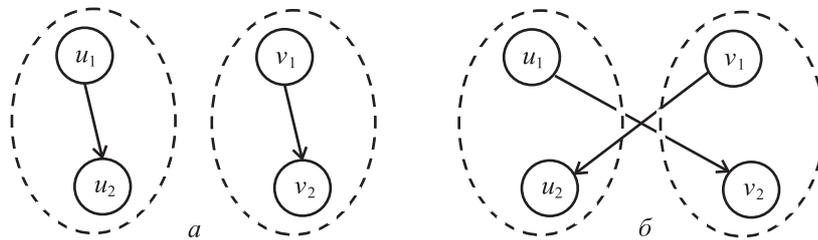


Рис. 5

**Пример.** Рассмотрим оргграф на рис. 4, в. В нем есть две компоненты связности: первая состоит из вершин 1, 2, 3, 4, 5, вторая — из вершин 6, 7. «Соединим» эти компоненты. Возьмем добавленную дугу  $(2, 3)$  из первой компоненты связности и дугу  $(6, 7)$  из второй компоненты связности. Заменяем выбранные дуги на дуги  $(2, 6)$  и  $(7, 3)$ . В итоге получим связный эйлеров оргграф (см. рис. 4, з).

Из леммы 4 можно вывести, что в плане объединения неэйлеровых компонент все ОДПП эквивалентны. Ее доказательство дает конструктивный метод «соединения» всех неэйлеровых компонент в орграфе после добавления дуг из ОДПП.

Осталось сделать полученный оргграф связным. На данном этапе оргграф состоит из  $e + 1$  компонент связности,  $e$  из которых были эйлеровыми компонентами в исходном орграфе. Оставшуюся компоненту, которая получена после преобразований в леммы 4, назовем базисной.

Дуги в произвольной ОДПП — это  $k$  путей из отрицательных вершин в положительные. Обозначим через  $l_1, l_2, \dots, l_k$  длины путей в этом способе, где  $l_i$  — длина  $i$ -го пути,  $1 \leq i \leq k$ .

**Лемма 5.** *Путем некоторых действий с добавленными дугами из способа ОДПП можно «присоединить» как максимум  $\sum_{i=1}^k (l_i - 1) = t - k$  изначально эйлеровых компонент связности к базисной компоненте.*

**Доказательство.** Выберем произвольный путь  $u, v_1, \dots, v_n, v$  из  $n+1$  добавленных дуг (рис. 6, а). Путем работы с данными дугами можно «соединить» как максимум  $n$  компонент связности. Для этого выберем одну из «промежуточных» вершин пути (не  $u$  и не  $v$ ), для определенности вершину  $v_1$ , удалим входящую в нее добавленную дугу, в данном случае  $(u, v_1)$ , удалим выходящую из нее дугу  $(v_1, v_2)$  и добавим дуги  $(u, z)$ ,  $(z, v_2)$ , где  $z$  — вершина из «несоединенной» компоненты связности (рис. 6, б). В результате количество компонент связности уменьшилось на 1. Данные преобразования можно проделывать с другими промежуточными вершинами выбранного пути, пока есть «несоединенные» компоненты связности.

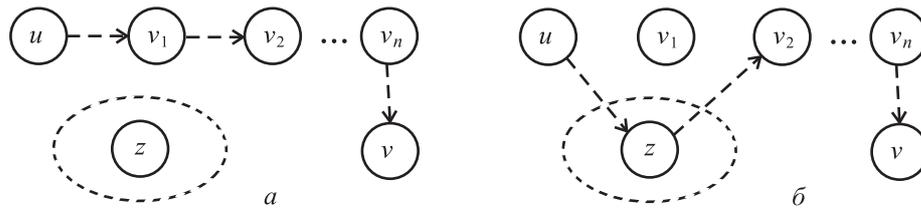


Рис. 6

Выбрав другой путь из добавленных дуг длины  $len$ , можно «присоединить» еще  $len - 1$  компонент связности к базисной компоненте. В результате всего можно «соединить» как максимум  $\sum_{i=1}^k (l_i - 1) = m - k$  компонент связности, где  $l_i$  — длина  $i$ -го пути в способе ОДПП. Всего данные преобразования необходимо будет проделывать  $\min(e, m - k)$  раз, либо пока есть «несоединенные» эйлеровы компоненты, либо пока есть для этого возможность.  $\square$

**Пример.** Пусть дан орграф на рис. 7, а. У него есть три ненулевых вершины: 1, 2 и 3. Путем добавления трех дуг, указанных пунктиром на рис. 7, б, получим квазиэйлеров орграф. Добавлены два пути: 2, 1, 3 и 2, 3. Базисной компонентой является компонента связности, состоящая из вершин 1, 2, 3. Выберем промежуточную вершину 2 и одну из вершин в «несоединенной» компоненте, для определенности 5. Удалим дуги (2, 1) и (1, 3) добавим дуги (2, 5) и (5, 3) по рецепту леммы 5. В итоге получим связный эйлеров орграф на рис. 7, в.

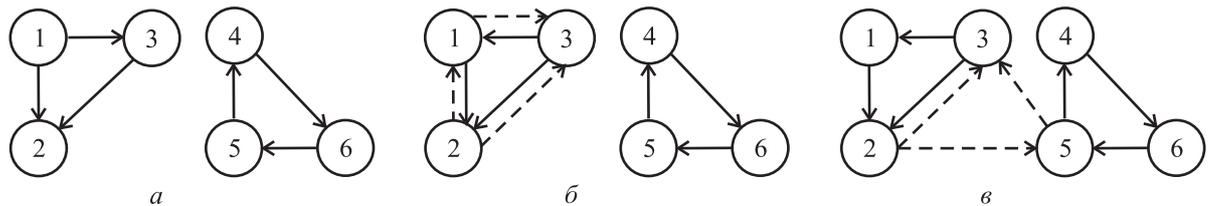


Рис. 7

Для того чтобы соединить оставшиеся  $e - (m - k)$  компонент связности, если  $e > m - k$ , потребуется еще как минимум такое же число дуг. Тем самым будет добавлен цикл. Возьмем одну из добавленных дуг  $(u, v)$  и вместо нее добавим путь  $u, w_1, \dots, w_n, v$ , где  $w_1$  — вершина в «несоединенной» компоненте связности,  $w_2$  — вершина в другой «несоединенной» компоненте связности и т. д. Данные преобразования показаны на рис. 8, а, б.

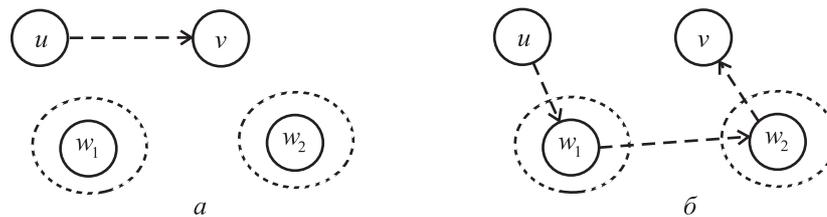


Рис. 8

В итоге всего в исходный орграф необходимо будет добавить  $m + \max(e - m + k, 0)$  дуг. Докажем оптимальность предложенного метода.

**Теорема 2.** Величина  $m + \max(e - m + k, 0)$ , где  $m$  — количество дуг в способе ОДПП,  $e$  — количество эйлеровых компонент в исходном орграфе,  $k = \left(\sum_{v \in V} |bal(v)|\right) / 2$ , является минимально возможным числом дуг, которые необходимо добавить в исходный орграф, чтобы он стал эйлеровым.

**Доказательство.** Допустим, от противного, что существует решение, в котором используется меньшее число дуг. Из леммы 2 известно, что каждая добавленная дуга содержится либо в пути из отрицательной вершины в положительную, либо в цикле. Покажем, что в любом методе решения



задачи в орграф будет добавлено точно  $k$  путей из отрицательных вершин в положительные. Путей не может быть меньше, чем  $k$ , согласно лемме 3. Покажем, что их также не может быть больше, чем  $k$ . Пусть уже добавлено  $k$  путей в исходный орграф из отрицательных вершин в положительные. При добавлении некоторого пути из вершины  $u$  в вершину  $v$  необходимо будет добавить путь из вершины  $v$  в вершину  $u$ , чтобы сделать баланс всех вершин нулевым. Таким образом, в орграф будет добавлен цикл, а число добавленных путей останется прежним.

После нахождения дуг в способе ОДПП и построений в доказательстве леммы 4 и леммы 5 возможны две ситуации: либо не осталось «несоединенных» эйлеровых компонент, если  $e \leq t - k$ , либо остались такие компоненты, если  $e > t - k$ . Первый случай не нуждается в дополнительном рассмотрении, так как число дуг в ОДПП по определению минимально, а преобразования в лемме 4 и лемме 5 не требуют новых добавленных дуг. Рассмотрим второй случай, когда  $e > t - k$ . Предположим, существует некоторый альтернативный набор из  $k$  путей с  $m'$  дугами. Ясно, что  $m' > t$ , иначе получаем решение, приведенное выше. Имея  $m'$  дуг, можно «соединить» все неэйлеровы компоненты связности исходного орграфа и еще как максимум  $m' - k$  эйлеровых компонент исходного орграфа. В дальнейшем возможны два варианта: либо в орграфе остались еще «несоединенные» эйлеровы компоненты, формально  $e > m' - k$ , либо нет, если  $e \leq m' - k$ . В первом случае добавлено всего  $m' + (e - m' + k) = e + k$  дуг (нам понадобится дополнительно  $e - m' + k$  дуг, чтобы «соединить» оставшиеся эйлеровы компоненты связности в цикл), что не улучшает ранее предложенный метод. Рассмотрим второй случай:  $e \leq m' - k$ , т. е.  $m' \geq e + k$ . В то же время предполагается, что найдено лучшее решение задачи, т. е.  $m'$  должно быть строго меньше, чем  $t + (e - t + k) = e + k$ . Таким образом, получаем противоречие:  $m' \geq e + k$  и  $m' < e + k$ .

Рассмотрев все возможные случаи, делаем вывод, что для решения поставленной задачи необходимо добавить как минимум  $t + \max(e - t + k, 0)$  дуг в исходный орграф.  $\square$

Вернемся к рассмотрению дуг в способе ОДПП. Эти дуги составляют набор путей из отрицательных вершин в положительные вершины, как было сказано выше. Наглядно данная схема представлена на рис. 9, а, где  $out_i, 1 \leq i \leq l$ , — это отрицательные вершины, а  $in_i, 1 \leq i \leq h$ , — положительные.

Скорректируем способ ДПП: добавим в орграф новые вершины  $begin$  и  $end$ , а также для каждой отрицательной вершины  $out_i, 1 \leq i \leq l$ , добавим  $|bal(out_i)|$  дуг и для каждой положительной вершины  $in_i, 1 \leq i \leq h$ , добавим  $|bal(in_i)|$  дуг (рис. 9, б). Данную корректировку назовем расширенной ДПП.

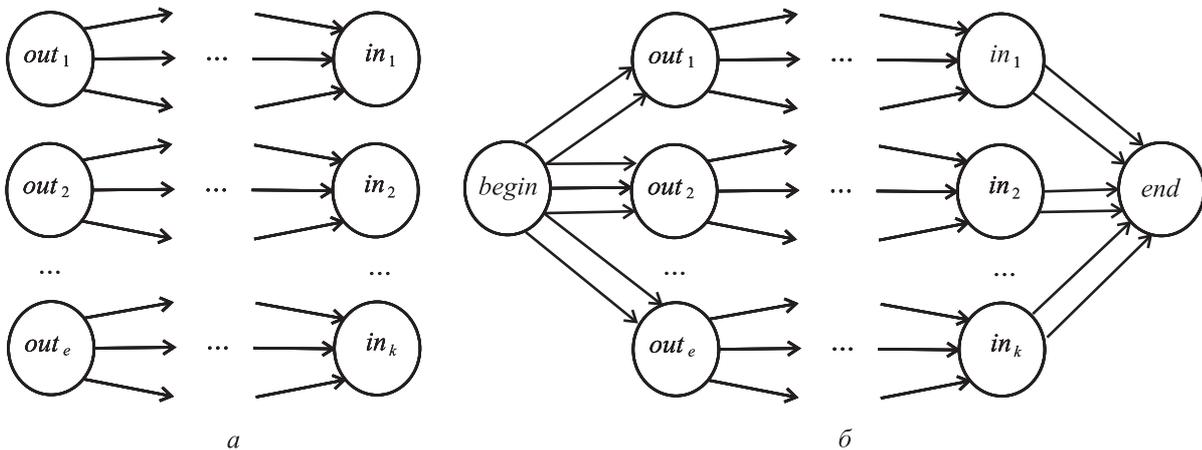


Рис. 9

**Теорема 3.** Дуги, содержащиеся в расширенном способе ДПП, соответствуют дугам в единичной транспортной сети, которые насыщены потоком. При этом:  $s \Leftrightarrow begin, t \Leftrightarrow end$  и  $(u, v) \in \text{ДПП} \Leftrightarrow flow(u, v) = 1$ .

**Доказательство.** Связкой путей  $B(u, v)$  между вершинами  $u$  и  $v$  в орграфе  $\vec{G} = (V, \alpha)$  назовем произвольный набор путей из вершины  $u$  в вершину  $v$ . Очевидно, что дуги в расширенном способе ДПП — связка путей между вершинами  $begin$  и  $end$ , формально  $B(begin, end)$ .

Рассмотрим дуги в единичной транспортной сети, насыщенные потоком. Это множество путей из источника в сток, непересекающихся по дугам, так как пропускная способность каждой дуги



изначально равна единице, т. е. эти дуги представляют собой связку путей между источником и стоком, формально  $B(s, t)$ .

В итоге, с абстрактной точки зрения, дуги из расширенного способа ДПП и дуги в единичной транспортной сети, насыщенные потоком, не различаются.  $\square$

Конструктивный смысл теоремы состоит в том, что для поиска дуг в расширенном способе ДПП можно использовать потоковые алгоритмы.

Величина максимального потока минимальной стоимости в единичной транспортной сети равна  $\sum_{u, v \in V} flow(u, v)$ , так как пропускная способность и цена каждой дуги равна единице. Как видно, эта величина соответствует количеству дуг, насыщенных потоком. Следовательно, для нахождения дуг из расширенной ОДПП необходимо найти максимальный поток минимальной стоимости в единичной транспортной сети.

Основываясь на вышеприведенных выкладках, предложим алгоритм нахождения оптимальной эйлеровой реконструкции путем добавления дуг.

#### 4. АЛГОРИТМ

1. Преобразуем исходный оргграф  $\vec{G} = (V, \alpha)$  в транспортную сеть:
  - придаем каждой дуге  $(u, v)$  пропускную способность  $(c, v) = 0$  и цену  $cost(u, v) = 0$ ;
  - к исходному оргграфу добавляем две новые вершины: источник  $s$  и сток  $t$ ;
  - для каждой вершины  $v$ , такой что  $d^+(v) < d^-(v)$ , добавляем  $|bal(v)|$  дуг  $(s, v)$ , с ценой и пропускной способностью равными 1;
  - для каждой вершины  $v$ , такой что  $d^+(v) > d^-(v)$ , добавляем  $|bal(v)|$  дуг  $(v, t)$ , с ценой и пропускной способностью равными 1;
  - в оргграф  $\vec{G} = (V, \alpha)$  добавляем всевозможные дуги из его дополнения, полагая их пропускную способность и цену равными 1.
2. Находим максимальный поток минимальной стоимости между источником  $s$  и стоком  $t$  в построенной транспортной сети.
3. «Соединяем» все неэйлеровы компоненты связности и еще  $m - k$  эйлеровых по рецепту леммы 4 и леммы 5.
4. Добавляем еще  $\max(e - m + k, 0)$  дуг, чтобы «соединить» оставшиеся компоненты связности.

#### 5. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СЛОЖНОСТЬ АЛГОРИТМА

Время, затраченное на выполнение пунктов 1, 3, 4 алгоритма, не превосходит  $O(n^2)$ , где  $n = |V|$  — количество вершин в исходном оргграфе. В итоге время алгоритма равно времени поиска максимального потока минимальной стоимости. На данный момент известна реализация за  $O(n^4)$  (см. [7]).

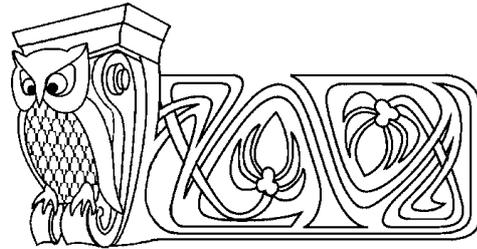
#### Библиографический список

1. Салий В. Н. Оптимальные реконструкции графов // Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры. Саратов, 2008. С. 59–65.
2. Гавриков А. В. Оптимальная переориентация дуг оргграфа, приводящая к эйлерову оргграфу // Наука и образование: проблемы и перспективы : материалы 11-й региональной науч.-практ. конф. асп., студ. и учащихся (Бийск, 15–16 мая 2009 г.) : в 2 ч. Бийск, 2009. Ч. 2. С. 271–273.
3. Гавриков А. В. Оптимальная квазиэйлерова реконструкция оргграфа путем удаления дуг // Научные исследования студентов Саратовского государственного университета : материалы итог. студ. науч. конф. Саратов, 2010. С. 52–54.
4. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2100616499, выданное Роспатентом. Оптимальные эйлеровы реконструкции ориентированных графов / Гавриков А. В.; зарегистр. в Реестре программ для ЭВМ 30.09.2010.
5. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети : пер. с англ. М., 1973.
6. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М., 1997.
7. Седжвик Р. Фундаментальные алгоритмы на C++. Алгоритмы на графах : пер. с англ. СПб., 2002.



УДК 681.3.06, 681.322

## ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ МЕТОДОМ ИМИТАЦИИ ОТЖИГА НА СИСТЕМАХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ И РАСПРЕДЕЛЁННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ



А. Н. Савин, Н. Е. Тимофеева

Саратовский государственный университет,  
кафедра дискретной математики и информационных  
технологий  
E-mail: savinan@info.sgu.ru

Представлены результаты адаптации алгоритма нахождения глобального минимума многоэкстремальной целевой функции многих переменных с ограничениями, основанного на методе имитации отжига для систем параллельных и распределённых вычислений. Исследована надёжность нахождения глобального минимума в зависимости от количества узлов параллельной вычислительной системы. Показано, что распараллеленный вариант алгоритма имитации отжига, использующий схему болцмановского тушения, позволяет за небольшое время надёжно находить область глобального минимума.

**Ключевые слова:** глобальная оптимизация, имитация отжига, многоэкстремальная целевая функция, параллельные вычислительные системы.

The Application of Optimization Algorithm Using Simulated Annealing Method for Parallel Computing Systems

A. N. Savin, N. E. Timofeeva

Saratov State University,  
Chair of Discrete Mathematics and Information Technologies  
E-mail: savinan@info.sgu.ru

This article presents the results of the adaptation algorithm for searching the global minimum of multiextreme criterion function of great count of variables with constraints based on the method of simulated annealing algorithm for systems of parallel and distributed computing. The reliability of the searching global minimum, depending on the number of nodes of parallel computer system is investigated. Distributed simulated annealing algorithm using the scheme of quenching, created by Boltzmann allows to search out the area of the global minimum for a short time is represented.

**Key words:** global optimization, simulated annealing, multiextreme criterion function, parallel computing system.

### ВВЕДЕНИЕ

Многие сферы деятельности человека в настоящее время, такие как разработка новых материалов и устройств, телекоммуникационные сети требуют решения оптимизационных задач [1]. Как известно, подобные задачи сводятся к поиску экстремумов целевой функции (ЦФ) различными методами [2]. Наличие всевозможных ограничений на оптимизируемые параметры и многоэкстремальность ЦФ, как правило, приводят к большим вычислительным затратам и соответственно к невозможности нахождения решения за приемлемое время при использовании одного компьютера [1].

Данная проблема может быть решена применением современных параллельных и распределённых вычислительных систем в сочетании с использованием эффективных распараллеленных алгоритмов оптимизации.

В данной работе была поставлена задача изучения возможности распараллеливания алгоритма нахождения глобального минимума многоэкстремальной ЦФ многих переменных с явными ограничениями (ограничениями типа равенств), основанного на стохастическом методе имитации отжига [3].

### 1. ОБЩИЙ ВИД ЗАДАЧИ ПОИСКА ГЛОБАЛЬНОГО МИНИМУМА ПРИ НАЛИЧИИ ЯВНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Поиск глобального минимума функции  $f : R^n$  при наличии явных ограничений осуществляется на некотором собственном подмножестве  $\Omega$  метрического пространства  $R^n$ :

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \min, \quad x \in \Omega, \quad \Omega \subset R^n, \quad (1)$$

где подмножество  $\Omega$  определяется ограничениями типа равенств  $q(x) = 0$ , где  $q : R^n$ .

Пусть имеется некоторое множество  $X$ , состоящее из элементов  $x$ , принадлежащих подмножеству  $\Omega \subset R^n$ , и на нём определена скалярная функция  $f(x)$ . Говорят, что  $f(x)$  имеет локальный минимум в точке  $x^*$ , если существует некоторая конечная  $\epsilon$ -окрестность этой точки, в которой выполняется условие:

$$f(x^*) < f(x), \quad \|x - x^*\| \leq \epsilon.$$

У функции может быть много локальных минимумов. Если выполняется неравенство  $f(x^*) < f(x)$ ,  $x \in X$ , где  $x \neq x^*$  — любая точка множества  $X$ , то говорят о глобальном минимуме функции  $f(x)$  [4].



## 2. ПОИСК ГЛОБАЛЬНОГО МИНИМУМА МЕТОДОМ ИМИТАЦИИ ОТЖИГА

Поиск глобального минимума функции (1) при наличии явных ограничений на варьируемые параметры может быть осуществлён методом имитации отжига, предложенным S. Kirkpatrick [3].

Этот метод представляет собой алгоритмический аналог физического процесса управляемого охлаждения и использует упорядоченный случайный поиск новых состояний системы с более низкой температурой [5, 6].

В процессе медленного управляемого охлаждения расплавленного материала, называемого отжигом, кристаллизация расплава сопровождается глобальным уменьшением его энергии  $E$ , однако допускаются ситуации, в которых она может на какое-то время возрастать (в частности, при подогреве расплава для предотвращения слишком быстрого его остывания). Благодаря допустимости кратковременного повышения энергетического уровня, возможен выход из ловушек локальных минимумов энергии, которые возникают при реализации процесса. Только понижение температуры  $T$  до абсолютного нуля делает невозможным какое-либо самостоятельное повышение энергетического уровня расплава.

В этом случае элементы  $x$  подмножества  $\Omega$  в (1) представляют собой состояния воображаемой физической системы (энергетические уровни), а значение функции  $f(x)$  в этих точках используется как энергия системы  $E = f(x)$ .

В каждый момент времени предполагается заданной уменьшающаяся с течением времени по определенному закону температура  $T$  системы, находящейся в состоянии  $x$ .

Новое состояние системы  $x'$  выбирается в соответствии с заданным порождающим семейством вероятностных распределений  $\zeta(x, T)$ , которое при фиксированных  $x$  и  $T$  задаёт случайный элемент  $x' = G(x, T)$ .

После генерации нового состояния  $x' = G(x, T)$  система с вероятностью  $p(\Delta E, T)$  переходит к следующему шагу в состоянии  $x'$ , в противном случае повторяется процесс генерации  $x'$  (в некоторых модификациях метода следующий шаг начинается с состояния  $x$ , но с уменьшенным значением температуры  $T$ ). Здесь  $\Delta E = f(x) - f(x')$  — приращение энергии.

В качестве вероятности принятия нового состояния  $p(\Delta E, T)$  выбирается либо точное значение соответствующей физической величины

$$p(\Delta E, T) = 1/(1 + \exp(\Delta E/T)),$$

либо наиболее часто используемое приближенное значение

$$p(\Delta E, T) = \exp(-\Delta E/T).$$

Вторая формула используется наиболее часто. При этом  $p(\Delta E, T) > 1$  в случае  $\Delta E < 0$ , и тогда вероятность принятия нового состояния  $p(\Delta E, T)$  считается равной 1. Соответственно если новое состояние  $x'$  даёт лучшее значение оптимизируемой функции, т. е.  $f(x') < f(x)$ , то переход в это состояние произойдет в любом случае.

Поиск минимума ЦФ заканчивается при уменьшении температуры  $T$  до некоторого заданного уровня  $T_{end}$ .

Конкретная схема отжига задается следующими параметрами:

- законом изменения температуры  $T(k)$ , где  $k$  — номер шага;
- порождающим семейством вероятностных распределений  $\zeta(x, T)$ ;
- функцией вероятности принятия нового состояния  $p(\Delta E, T)$ .

Исторически первой схемой метода имитации отжига является схема больцмановского отжига. В ней изменение температуры задаётся в виде

$$T(k) = T_0 / \ln(1 + k), \quad k > 0.$$

Порождающее семейство вероятностных распределений  $\zeta(x, T)$  выбирается как семейство нормальных распределений с математическим ожиданием  $x$  и дисперсией  $T$  и соответственно задаётся плотностью

$$g(x'; x, T) = (2\pi T)^{-n/2} \cdot \exp(-|x' - x|^2/(2T)),$$

где  $n$  — размерность метрического пространства состояний.



Для данной схемы доказано, что при достаточно больших  $T_0$  и количестве шагов гарантируется нахождение глобального минимума.

Недостатком схемы больцмановского отжига является очень медленное уменьшение температуры  $T$ . Решение этой проблемы возможно путём замены закона изменения температуры, например, на следующий:

$$T(k) = r \cdot T(k - 1), \quad (2)$$

где температурный коэффициент  $r$  выбирается, как правило, в пределах  $0.7 \div 0.99$ .

Такая схема имитации отжига называется тушением. Она очень быстро сходится, что позволяет экономить вычислительные ресурсы. При этом не гарантируется нахождения глобального минимума, но, как правило, быстро находится близкое решение, а на практике и сам минимум [7].

В данной работе требовалось разработать метод оптимизации, позволяющий за небольшое время надёжно находить только область глобального минимума. Соответственно на основе анализа различных схем имитации отжига, проведённого в [6], был выбран алгоритм поиска глобального минимума ЦФ (1) методом имитации отжига по схеме больцмановского тушения. Блок-схема процедуры, реализующей данный алгоритм, приведена рис. 1.

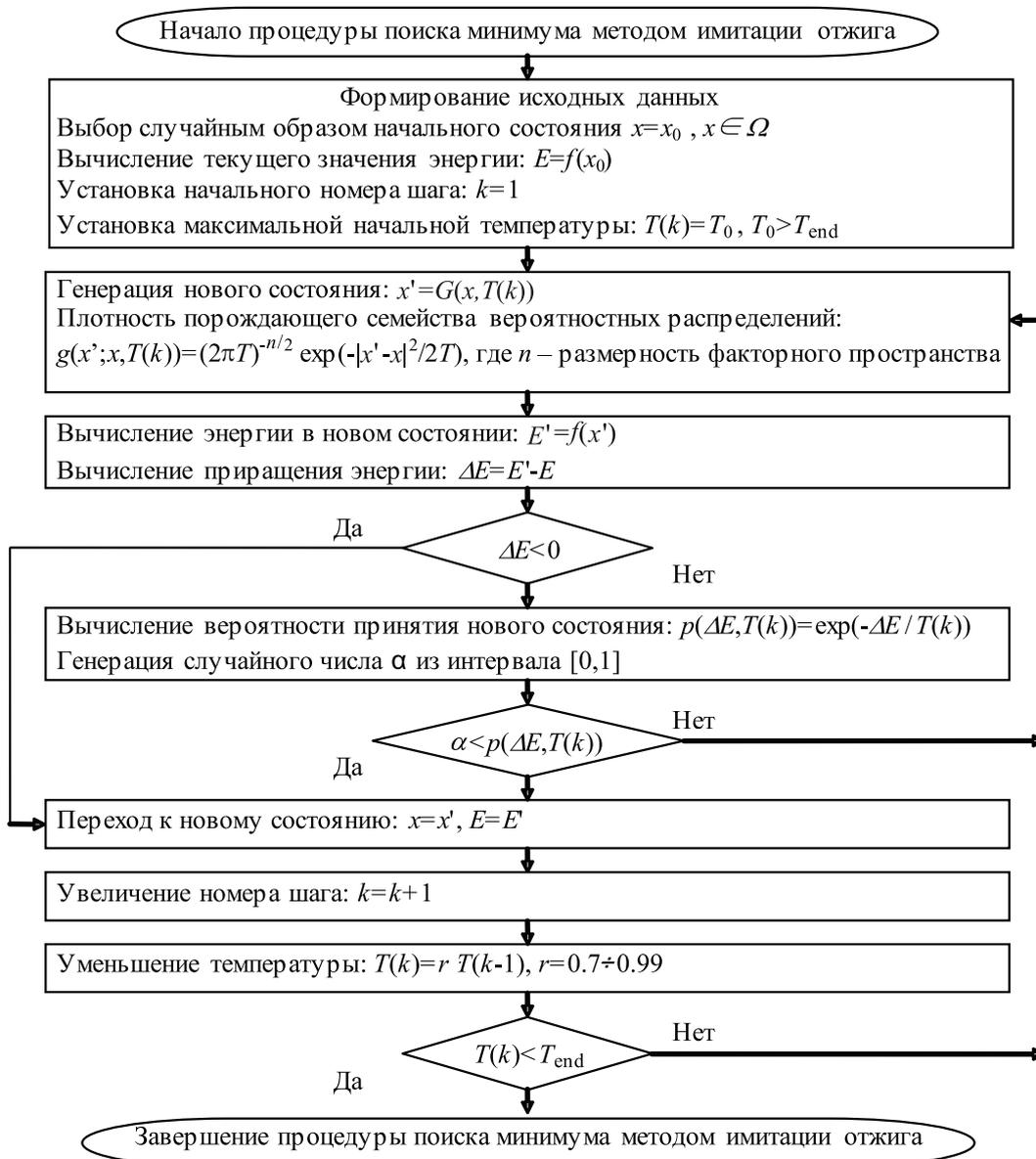


Рис. 1. Блок-схема процедуры поиска минимума ЦФ методом имитации отжига по схеме больцмановского тушения



В результате тестирования, представленного на рис. 1 алгоритма, выявлено, что решение (область минимума) находится за действительно малое время, но недостатком является возможность нахождения локальных минимумов, а не глобального.

Данная проблема может решаться многократным повторным запуском процедуры поиска при одинаковых начальных условиях, так как генерация новых точек в факторном пространстве осуществляется случайным образом, а затем выбором лучшего значения. Однако это приводит к пропорциональному увеличению вычислительных и соответственно временных затрат, что недопустимо для сложных, многопараметрических ЦФ.

В этом случае повышение эффективности работы алгоритма с точки зрения минимизации времени вычислений возможно путём его распараллеливания.

### 3. АДАПТАЦИЯ АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ МЕТОДОМ ИМИТАЦИИ ОТЖИГА ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Неудобством метода имитации отжига (см. рис. 1) с точки зрения распараллеливания является то, что каждое новое состояние системы  $x'$  генерируется на основе её предыдущего состояния  $x$ , и, следовательно, нет возможности распараллеливания какой-либо части алгоритма.

Поэтому было предложено осуществлять вычисление минимумов ЦФ (1) одновременно на нескольких машинах (клиентская часть алгоритма) и выбирать затем лучшее решение (глобальное) на выделенной машине (серверная часть алгоритма).

В выполняемой на нескольких машинах клиентской части при одинаковых начальных условиях осуществляется поиск минимума ЦФ (1) методом имитации отжига по схеме больцмановского тушения с помощью процедуры, представленной на рис. 1.

Затем результаты, полученные в клиентских частях, передаются в серверную часть (рис. 2), в которой осуществляется выбор решения с наименьшим значением ЦФ, что должно обеспечивать глобальность найденного минимума.



Рис. 2. Блок-схема алгоритма оптимизации методом имитации отжига, выполняемого на параллельной вычислительной системе. Пунктиром выделена часть алгоритма, выполняемая на клиентских машинах

Реализованный таким образом на параллельной вычислительной системе алгоритм оптимизации методом имитации отжига должен обеспечивать надёжный поиск глобального минимума ЦФ за счёт многократного повторения поиска в заданной явными ограничениями области.

При этом, так как многократный процесс поиска минимума осуществляется одновременно на соответствующем числе машин, затраченное на выполнение всего параллельного алгоритма время приблизительно должно равняться времени выполнения одного процесса и практически не должно



зависеть от числа процессов. Соответственно при использовании  $p$  клиентских машин можно уменьшить временные затраты при поиске глобального минимума примерно в  $p$  раз.

Программная реализация предложенного варианта алгоритма оптимизации методом имитации отжига осуществлена на языке программирования Java для применения в распределённых и параллельных вычислительных системах, использующих технологии GigaSpaces eXtreme Application Platform [8].

#### 4. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ РАСПАРАЛЛЕЛЕННОГО АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ МЕТОДОМ ИМИТАЦИИ ОТЖИГА

Оценка надёжности и эффективности распараллеленного алгоритма оптимизации методом имитации отжига по схеме больцмановского тушения осуществлялась на многоэкстремальных ЦФ при количестве параметров оптимизации  $n$ , равном 4, 6 и 8:

– число параметров оптимизации  $n$  равно 4:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 0.1 \cos(3x_1) - 0.2 \cos(2x_2) - 0.5 \cos(5x_3) - 0.6 \cos(x_4), \quad (3)$$

где  $-0.5 < x_i < 1, i = 1, \dots, 4$ ;

– число параметров оптимизации  $n$  равно 6:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 - 0.1 \cos(3x_1) - 0.2 \cos(2x_2) - 0.3 \cos(5x_3) - 0.5 \cos(x_4) - 0.1 \cos(2x_5) - 0.2 \cos(x_6), \quad (4)$$

где  $-0.5 < x_i < 1, i = 1, \dots, 6$ ;

– число параметров оптимизации  $n$  равно 8:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 - 0.1 \cos(3x_1) - 0.2 \cos(2x_2) - 0.2 \cos(5x_3) - 0.4 \cos(x_4) - 0.1 \cos(2x_5) - 0.2 \cos(x_6) - 0.1 \cos(4x_7) - 0.1 \cos(x_8), \quad (5)$$

где  $-0.5 < x_i < 1, i = 1, \dots, 8$ .

Глобального минимума  $f_{min} = -1.4$  все эти функции достигают при  $x_i = 0, i = 1, \dots, n$ .

Тестирование проводилось при следующих условиях: начальная температура  $T_0 = 0.5$ , конечная  $T_{end} = 0.005$ , коэффициент изменения температуры  $r = 0.97$ . При таких значениях параметров нахождение области глобального минимума обеспечивалось за небольшое количество итераций.

Как указывалось выше, рассматриваемый алгоритм поиска глобального минимума должен иметь хорошую сходимость, но большую погрешность. Соответственно одной из задач тестирования было выявление зависимости точности нахождения глобального минимума от количества одновременно работающих процессов  $p$  и количества оптимизируемых параметров функции  $n$ .

Результаты поиска минимума ЦФ (3)–(5) методом имитации отжига в зависимости от числа одновременно работающих процессов  $p$ , усредненные по итогам 100 запусков вычислительной системы, приведены на рис. 3, а.

Как видно из рис. 3, а, для всех значений числа оптимизируемых параметров функции  $n$  при малом количестве работающих процессов  $p$  результат выдается с большим разбросом, но при увеличении  $p$  результаты стабилизируются и приближаются к глобальному минимуму, так как поиск в этом случае ведётся в большей части заданной явными ограничениями области факторного пространства.

При этом увеличение числа параллельно работающих процессов  $p$  с 1 до 16 приводит к уменьшению размеров области глобального минимума, оцениваемой по среднеквадратическому отклонению минимального значения ЦФ, на 60, 55 и 50% для  $n = 4, n = 6$  и  $n = 8$  соответственно (рис. 3, б).

Следовательно, увеличение числа процессов  $p$  при параллельном поиске области глобального минимума многопараметрической ЦФ методом имитации отжига повышает надёжность и точность вычислений.



При решении реальных оптимизационных задач большое время занимает вычисление ЦФ. Соответственно эффективность метода оптимизации можно оценивать по требуемому для поиска глобального минимума количеству вычислений ЦФ. На рис. 4, а приведено количество вычислений ЦФ тестируемым методом в зависимости от количества одновременно работающих процессов  $p$  и количества оптимизируемых параметров  $n$ .

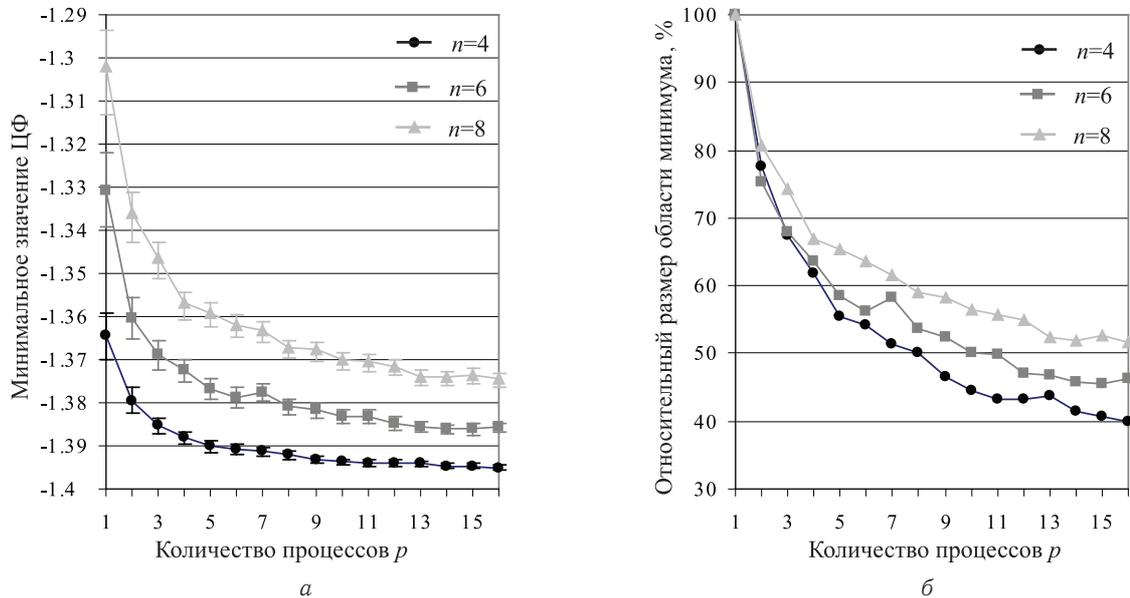


Рис. 3. Зависимость найденного минимального значения ЦФ с указанием 95%-ного доверительного интервала (а) и размеров области глобального минимума (б) от количества параметров оптимизации  $n$  и числа одновременно работающих процессов поиска минимума  $p$

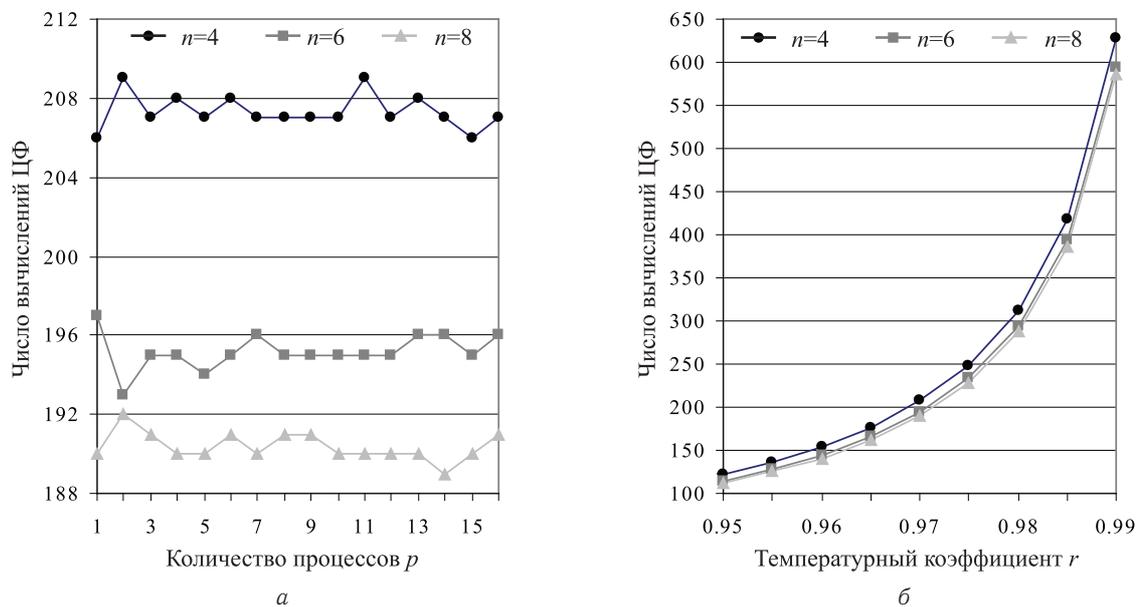


Рис. 4. Зависимость числа вычислений ЦФ от количества параметров оптимизации  $n$  и одновременно работающих процессов  $p$  (а), а также от температурного коэффициента  $r$  (б) в параллельном алгоритме

Видно (см. рис. 4, а), что время выполнения параллельного алгоритма, пропорциональное числу вычислений ЦФ, практически не зависит от числа процессов  $p$  и примерно равно времени выполнения одного процесса при одинаковых  $n$ .

Увеличение числа параметров оптимизации  $n$  приводит к незначительному уменьшению числа вычислений ЦФ, но увеличивает размеры найденной области глобального минимума.

Значительное влияние на количество вычислений ЦФ и соответственно на эффективность тестируемого метода оптимизации оказывает значение температурного коэффициента  $r$  в законе изменения



температуры (2). Из рис. 4, б видно, что увеличение  $r$  с 0.95 до 0.99 приводит к увеличению числа вычислений ЦФ практически в 6 раз. Однако при этом размеры найденной области глобального минимума уменьшаются, то есть точность повышается. Следовательно, при решении конкретных задач есть возможность выбирать параметры закона изменения температуры (2) для обеспечения баланса между временными затратами и точностью.

Таким образом, из результатов тестирования видно, что предложенный параллельный вариант алгоритма оптимизации методом имитации отжига по схеме больцмановского тушения может эффективно применяться для решения задач поиска области глобального минимума многоэкстремальной ЦФ при наличии явных ограничений на варьируемые параметры. Точное значение глобального минимума может быть найдено с помощью хорошо разработанных методов поиска локальных экстремумов, например методом Хука – Дживса [2].

## ВЫВОДЫ

В работе предложен вариант распараллеливания алгоритма оптимизации методом имитации отжига, основанный на многократном повторном запуске процедуры поиска при одинаковых начальных условиях и предназначенный для нахождения области глобального минимума многоэкстремальной ЦФ многих переменных с ограничениями на параллельных и распределённых вычислительных системах.

Исследована надёжность нахождения области глобального минимума ЦФ предложенным методом и размеры найденной области в зависимости от количества узлов параллельной вычислительной системы и числа параметров оптимизации. При этом показано, что увеличение числа процессов при параллельном поиске приближает его результаты к глобальному минимуму, а размеры найденной области глобального минимума уменьшаются за счёт обследования большей части заданной явными ограничениями области факторного пространства.

Проведена оценка эффективности предложенного метода поиска области глобального минимума с точки зрения количества вычислений ЦФ. Выявлено, что увеличение числа параметров оптимизации приводит к незначительному уменьшению числа вычислений ЦФ, но увеличивает размеры найденной области глобального минимума. Показано также, что выбором параметров закона изменения температуры (2) можно поддерживать баланс между временными затратами и точностью.

Точное значение глобального минимума многоэкстремальной ЦФ в найденной предложенным методом области может быть определено с помощью известных методов поиска локальных экстремумов [2].

*Работа выполнена при финансовой поддержке программы Министерства образования и науки РФ «Подготовка и переподготовка профильных специалистов на базе центров образования и разработок в сфере информационных технологий в Южном и Северо-Кавказском федеральных округах» (государственный контракт 07.Р20.11.0029).*

## Библиографический список

1. Орлянская И. В. Современные подходы к построению методов глобальной оптимизации // Электронный журнал «Исследовано в России». С. 2097–2108. URL: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/189.pdf> (дата обращения 02.12.2011).
2. Банди Б. Методы оптимизации : вводный курс. М.: Радио и связь, 1988. 128 с.
3. Kirkpatrick S., Gelatt C. D., Vecchi M. P. Optimization by simulated annealing // Science. 1983. Vol. 220. P. 671–680.
4. Калиткин Н. Н. Численные методы. М. : Наука, 1978. 512 с.
5. Ingber L. Simulated Annealing: Practice versus theory // Mathematical and Computer Modelling. 1993. Vol. 18(11). P. 29–57.
6. Лопатин А. С. Метод отжига // Стохастическая оптимизация в информатике. СПб. : Изд-во СПбГУ, 2005. Вып. 1. С. 133–149.
7. Wilson J. D. Design of high-efficiency wide-bandwidth coupled-cavity traveling-wave tube phase velocity tapers with simulated annealing algorithms // IEEE Trans. Electron Devices. Vol. 48. Jan. 2001. P. 95–100.
8. GigaSpaces eXtreme Application Platform (XAP). URL: <http://www.gigaspaces.com/xap> (дата обращения 02.12.2011).