



МАТЕМАТИКА

УДК 517.984

О СПЕКТРЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

М. И. Исмаилов

Бакинский государственный университет
E-mail: miqdadismailov1@rambler.ru

Работа посвящена исследованию частей спектра некоторых классов матричных операторов. Установлены соотношения между частями спектра матричного оператора с соответствующими частями спектра его элементов.

Ключевые слова: спектр, спектральный оператор, разложение единицы, спектральная мера, спектральный оператор скалярного типа.

On Spectrum of Some Classes of Matrix Operators

M. I. Ismailov

The paper is devoted to investigation of the spectrum of some classes of matrix operators. The relations between the parts of the spectrum of the matrix operators with corresponding parts of its elements are established.

Key words: spectrum, spectral operator, expansion of a unit, spectral measure, spectral operator of scalar type.

Приведем некоторые вспомогательные факты из [1]. Пусть X — банахово пространство, $T \in L(X)$ — линейный ограниченный оператор в X .

Точечным спектром $\sigma_p(T)$ оператора T называется множество точек спектра $\lambda \in \sigma(T)$ таких, что отображение $\lambda I - T$ не взаимно однозначно.

Остаточным спектром $\sigma_r(T)$ оператора T называется множество точек $\lambda \in \sigma(T)$ таких, что отображение $\lambda I - T$ взаимно однозначно, но многообразие $(\lambda I - T)X$ не плотно в X .

Непрерывным спектром $\sigma_c(T)$ оператора T называется множество точек $\lambda \in \sigma(T)$ таких, что отображение $\lambda I - T$ взаимно однозначно и многообразие $(\lambda I - T)X$ плотно в X .

Спектральная мера E на поле множеств Σ комплексной плоскости называется разложением единицы (или спектральным разложением) для оператора T , если

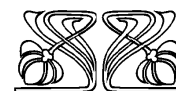
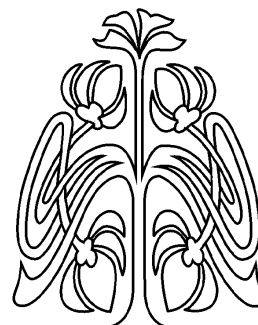
$$E(\alpha)T = TE(\alpha), \quad \sigma(T_\alpha) \subseteq \bar{\alpha}, \quad \alpha \in \Sigma,$$

где T_α — сужение оператора T на многообразии $E(\alpha)X$.

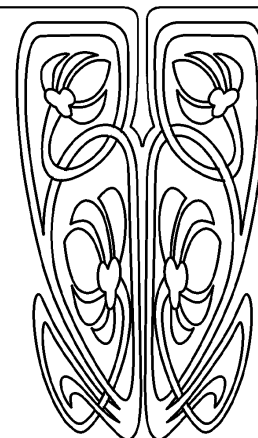
Оператор T со счетно-аддитивным разложением единицы, заданный на борелевских множествах комплексной плоскости, называется спектральным оператором.

Утверждение [1, с. 50]. Пусть T — ограниченный спектральный оператор в банаховом пространстве X с квазинильпотентной частью N и разложением единицы E , $\lambda \in \sigma(T)$. Тогда:

- 1) если $E(\lambda) = O$, то $\lambda \in \sigma_c(T)$,



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





2) если $E(\lambda) \neq O$, то $\lambda \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_p(N_\lambda)$, $\lambda \in \sigma_r(T) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_r(N_\lambda)$, $\lambda \in \sigma_c(T) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_c(N_\lambda)$, где $N_\lambda = N | E(\lambda)X$.

Пусть $A, B \in L(X)$. В пространстве $X^2 = X \times X$ рассмотрим матричный оператор

$$T = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Верны следующие равенства:

- 1) $\sigma(T) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$,
- 2) $\sigma_p(T) = \sigma_p(A) \cup \sigma_p(B)$,
- 3) $\sigma_r(T) = (\sigma_r(A) \cup \sigma_r(B)) \setminus (\sigma_p(A) \cup \sigma_p(B))$,
- 4) $\sigma_c(T) = (\sigma_c(A) \cup \sigma_c(B)) \setminus ((\sigma_r(A) \cup \sigma_r(B)) \cup (\sigma_p(A) \cup \sigma_p(B)))$.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) очевидны. Пусть $\lambda \in \sigma_r(T)$. Ясно, что $\lambda \notin \sigma_p(A) \cup \sigma_p(B)$, в противном случае $\lambda \in \sigma_p(T)$. Покажем, что $\lambda \in \sigma_r(A) \cup \sigma_r(B)$. Предположим противное $\lambda \notin \sigma_r(A) \cup \sigma_r(B)$. Тогда возможен один из случаев: а) $\lambda \in \sigma_c(A) \cap \sigma_c(B)$; б) $\lambda \in \sigma_c(A) \cap \rho(B)$; в) $\lambda \in \rho(A) \cap \sigma_c(B)$.

Поскольку $\lambda \in \sigma_r(T)$, то существует $\tilde{f} = (f_1, f_2) \in X^{*2}$ ($\tilde{f} \neq \tilde{o}$) такой, что $\tilde{f}((T - \lambda\tilde{I})\tilde{x}) = 0$ при всех $\tilde{x} = (x_1, x_2) \in X^2$, где \tilde{I} — тождественный оператор в X^2 . Переходя к координатам в последнем равенстве, получим $f_1((A - \lambda I)x_1) + f_2((B - \lambda I)x_2) = 0$. Отсюда в случаях а)–в) при $x_1 = 0$ получаем $f_2 = 0$, а при $x_2 = 0$ получаем $f_1 = 0$, что противоречит условию $\tilde{f} \neq \tilde{o}$.

Обратно: пусть $\lambda \in (\sigma_r(A) \cup \sigma_r(B)) \setminus (\sigma_p(A) \cup \sigma_p(B))$, но $\lambda \notin \sigma_r(T)$. Так как $\lambda \notin \sigma_p(A) \cup \sigma_p(B)$, то $\lambda \notin \sigma_p(T)$. Следовательно, $\lambda \in \sigma_c(T)$. Пусть $\lambda \in \sigma_r(A)$. Тогда существует $f_1 \in X^*$ ($f_1 \neq o$) такой, что $f_1((A - \lambda I)x_1) = 0$ при всех $x_1 \in X$. Возьмем $\tilde{f} = (f_1, 0) \in X^{*2}$. Очевидно, что $\tilde{f} \neq \tilde{o}$. Для любого $\tilde{x} = (x_1, x_2) \in X^2$ имеем $\tilde{f}((T - \lambda\tilde{I})\tilde{x}) = f_1((A - \lambda I)x_1) = 0$. Поскольку $\lambda \in \sigma_c(T)$, то $\tilde{f} \equiv \tilde{o}$, что противоречит предположению. Аналогично рассматривается случай, когда $\lambda \in \sigma_r(B)$. Утверждение 4) следует из справедливости утверждений 1)–3).

Следствие 1. Равенство $\sigma_p(T) = \emptyset$ равносильно выполнению условия $\sigma_p(A) = \sigma_p(B) = \emptyset$.

Следствие 2. Равенство $\sigma_r(T) = \emptyset$ верно при выполнении одного из условий:

- 1) $\sigma_r(A) = \sigma_r(B) = \emptyset$,
- 2) $\sigma_r(A) = \emptyset$, $\sigma_r(B) \subseteq \sigma_p(A)$,
- 3) $\sigma_r(B) = \emptyset$, $\sigma_r(A) \subseteq \sigma_p(B)$,
- 4) $\sigma_r(B) \subseteq \sigma_p(A)$, $\sigma_r(A) \subseteq \sigma_p(B)$.

Следствие 3. Равенство $\sigma_c(T) = \emptyset$ верно при выполнении одного из условий:

- 1) $\sigma_c(A) = \sigma_c(B) = \emptyset$,
- 2) $\sigma_c(A) = \emptyset$, $\sigma_c(B) \subseteq \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$,
- 3) $\sigma_c(B) = \emptyset$, $\sigma_c(A) \subseteq \sigma_p(B) \cup \sigma_r(B)$,
- 4) $\sigma_c(A) \subseteq \sigma_p(B) \cup \sigma_r(B)$, $\sigma_c(B) \subseteq \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$.

Теперь рассмотрим матричный оператор $T = \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$.

Теорема 2. 1) Если $\lambda \neq 0$, то

$$\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \lambda^2 \in \sigma(AB) \cup \sigma(BA), \quad \lambda \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow \lambda^2 \in \sigma_p(AB) \cup \sigma_p(BA),$$

$$\lambda \in \sigma_r(T) \Leftrightarrow \lambda^2 \in (\sigma_r(AB) \cup \sigma_r(BA)) \setminus (\sigma_p(AB) \cup \sigma_p(BA)),$$

$$\lambda \in \sigma_c(T) \Leftrightarrow \lambda^2 \in (\sigma_c(AB) \cup \sigma_c(BA)) \setminus ((\sigma_r(AB) \cup \sigma_r(BA)) \cup (\sigma_p(AB) \cup \sigma_p(BA)));$$

2) если $\lambda = 0$, то верны утверждения теоремы 1.

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 0$. Справедливость первых двух утверждений 1) очевидно, так как существование $(T - \lambda\tilde{I})^{-1}$ равносильно существованию $(AB - \lambda^2 I)^{-1}$ и $(BA - \lambda^2 I)^{-1}$ одновременно. Пусть $\lambda \in \sigma_r(T)$, но $\lambda^2 \notin (\sigma_r(AB) \cup \sigma_r(BA)) \setminus (\sigma_p(AB) \cup \sigma_p(BA))$. Ясно, что $\lambda^2 \notin \sigma_p(AB) \cup \sigma_p(BA)$, ибо $\lambda \in \sigma_p(T)$. Тогда возможны следующие случаи: а) $\lambda^2 \in \sigma_c(AB) \cap \sigma_c(BA)$; б) $\lambda^2 \in \sigma_c(AB) \cap \rho(BA)$; в) $\lambda^2 \in \rho(AB) \cap \sigma_c(BA)$.



Из $\lambda \in \sigma_r(T)$ следует, что существует $\tilde{f} = (f_1, f_2) \in X^{*2} (\tilde{f} \neq \tilde{o})$ такой, что $\tilde{f}((T - \lambda\tilde{I})\tilde{x}) = 0$ при всех $\tilde{x} = (x_1, x_2) \in X^2$, что в координатном виде равносильно равенству

$$f_1(Ax_2 - \lambda x_1) + f_2(Bx_1 - \lambda x_2) = 0.$$

Подставив в последнем равенстве произвольное $x_1 \in X$ и $x_2 = \frac{1}{\lambda}Bx_1$, получим $f_1((AB - \lambda^2 I)x_1) = 0$, а при любом $x_2 \in X$ и $x_1 = \frac{1}{\lambda}Ax_2$ получим $f_2((BA - \lambda^2 I)x_2) = 0$. Следовательно, при любом из условий а)–с) $f_1 = f_2 = 0$, что противоречит $\tilde{f} \neq \tilde{o}$.

Обратно: пусть $\lambda^2 \in (\sigma_r(AB) \cup \sigma_r(BA)) \setminus (\sigma_p(AB) \cup \sigma_p(BA))$. Покажем, что $\lambda \in \sigma_r(T)$. Предположим противное $\lambda \notin \sigma_r(T)$. Тогда $\lambda \in \sigma_c(T)$. Полагая $\lambda^2 \in \sigma_r(AB)$, получаем, что существует $f_1 \in X^* (f_1 \neq 0)$ такой, что $f_1((AB - \lambda^2 I)x_1) = 0$ при всех $x_1 \in X$. Возьмем f_2 такую, что $f_2(x_2) = \frac{1}{\lambda}f_1(Ax_2)$ при любом $x_2 \in X$. Рассмотрим $\tilde{f} = (f_1, f_2)$. Ясно, что $\tilde{f} \neq \tilde{o}$. Так как $A \in L(X)$, то $f_2 \in X^*$, и, следовательно, $\tilde{f} = (f_1, f_2) \in X^{*2}$. Для каждого $\tilde{x} = (x_1, x_2) \in X^2$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{f}((T - \lambda\tilde{I})\tilde{x}) &= f_1(Ax_2 - \lambda x_1) + f_2(Bx_1 - \lambda x_2) = f_1(Ax_2 - \lambda x_1) + \frac{1}{\lambda}f_1(ABx_1 - \lambda Ax_2) = \\ &= f_1(Ax_2 - \lambda x_1 + \frac{1}{\lambda}ABx_1 - Ax_2) = \frac{1}{\lambda}f_1((AB - \lambda^2 I)x_1) = 0. \end{aligned}$$

В силу того, что $\lambda \in \sigma_c(T)$, из последнего равенства получаем $\tilde{f} = \tilde{o}$. Полученное противоречие доказывает третье из соотношений утверждения 1). Справедливость последнего соотношения утверждения 1) следует из справедливости первых ее трех соотношений.

Случай 2) доказывается аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 3. Пусть $S_1, S_2 \in L(X)$, S_2S_1 — ограниченно обратимый спектральный оператор скалярного типа с разложением единицы E , $A, B \in L(X)$ — квазинильпотентные операторы, $AS_1 = S_1B$, $BS_2 = S_2A$, $S_2S_1 = S_1S_2$, $T = \begin{pmatrix} A & S_1 \\ S_2 & B \end{pmatrix}$, $\lambda \in \sigma(T)$. Тогда при $E(h(\lambda)) = O$, где $h(\lambda)$ — однозначная ветвь функции $\sqrt{\lambda}$, $\lambda \in \sigma_c(T)$, а при $E(h(\lambda)) \neq O$:

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma_p(T) &\Leftrightarrow 0 \in \sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda), \\ \lambda \in \sigma_r(T) &\Leftrightarrow 0 \in (\sigma_r(A_\lambda) \cup \sigma_r(B_\lambda)) \setminus (\sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda)), \\ \lambda \in \sigma_c(T) &\Leftrightarrow 0 \in (\sigma_c(A_\lambda) \cup \sigma_c(B_\lambda)) \setminus ((\sigma_r(A_\lambda) \cup \sigma_r(B_\lambda)) \cup (\sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda))), \end{aligned}$$

где $A_\lambda = A|E(h(\lambda))X$, $B_\lambda = B|E(h(\lambda))X$.

Доказательство. Из [3] вытекает, что матричный оператор T спектрален разложением единицы, которой служит матричный оператор $\tilde{E}(\cdot) = \begin{pmatrix} E(h(\cdot)) & O \\ O & E(h(\cdot)) \end{pmatrix}$ с квазинильпотентной частью

$\tilde{N} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$. Ясно, что из $E(h(\lambda)) = O \Leftrightarrow \tilde{E}(\cdot) = \tilde{O}$. Тогда применяя приведенное утверждение и теорему 1, получим

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma_p(T) &\Leftrightarrow 0 \in \sigma_p(\tilde{N}_\lambda) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda), \\ \lambda \in \sigma_r(T) &\Leftrightarrow 0 \in \sigma_r(\tilde{N}_\lambda) \Leftrightarrow 0 \in (\sigma_r(A_\lambda) \cup \sigma_r(B_\lambda)) \setminus (\sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda)), \\ \lambda \in \sigma_c(T) &\Leftrightarrow 0 \in \sigma_c(\tilde{N}_\lambda) \Leftrightarrow 0 \in (\sigma_c(A_\lambda) \cup \sigma_c(B_\lambda)) \setminus ((\sigma_r(A_\lambda) \cup \sigma_r(B_\lambda)) \cup (\sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda))), \end{aligned}$$

где $\tilde{N}_\lambda = \tilde{N}|E(\lambda)X^2$. Теорема доказана. \square

Теорема 4. Пусть $S_1, S_2 \in L(X)$ — спектральные операторы скалярного типа с разложениями единицы E_1 и E_2 соответственно, $A, B \in L(X)$ — квазинильпотентные операторы, $S_1A = AS_2$, $S_2B = BS_1$, $T = \begin{pmatrix} S_1 & A \\ B & S_2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \sigma(T)$. Тогда, если $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = O$, то $\lambda \in \sigma_c(T)$ в противном случае, т.е. $E_1(\lambda) \neq O$ либо $E_2(\lambda) \neq O$, справедливы:

$$\lambda \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda), \quad \lambda \in \sigma_r(T) \Leftrightarrow 0 \in (\sigma_r(A_\lambda) \cup \sigma_r(B_\lambda)) \setminus (\sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda)),$$



$$\lambda \in \sigma_c(T) \Leftrightarrow 0 \in (\sigma_c(A_\lambda) \cup \sigma_c(B_\lambda)) \setminus ((\sigma_r(A_\lambda) \cup \sigma_r(B_\lambda)) \cup (\sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda))),$$

где $A_\lambda = A|_{E_2(\lambda)X}$, $B_\lambda = B|_{E_1(\lambda)X}$.

Доказательство. Известно [3], что в условиях теоремы матричный оператор T является ограниченным спектральным оператором с разложением единицы $\tilde{E}(\cdot) = \begin{pmatrix} E_1(\cdot) & O \\ O & E_2(\cdot) \end{pmatrix}$ и квазинильпотентной частью $\tilde{N} = \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$.

Следовательно, если $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = O$, то $\tilde{E}(\lambda) = \tilde{O}$, и в силу приведенного утверждения $\lambda \in \sigma_c(T)$, где \tilde{O} — нулевой матричный оператор, а в случае $\tilde{E}(\lambda) \neq \tilde{O}$, что получается хотя бы при одном из условий $E_1(\lambda) \neq O$, $E_2(\lambda) \neq O$, верны:

$$\lambda \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_p(\tilde{N}_\lambda), \quad \lambda \in \sigma_r(T) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_r(\tilde{N}_\lambda), \quad \lambda \in \sigma_c(T) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_c(\tilde{N}_\lambda),$$

где $\tilde{N}_\lambda = \tilde{N}|_{\tilde{E}(\lambda)X^2}$. В силу утверждения 2) теоремы 2 получим

$$\begin{aligned} 0 \in \sigma_p(\tilde{N}_\lambda) &\Leftrightarrow 0 \in \sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda), & 0 \in \sigma_r(\tilde{N}_\lambda) &\Leftrightarrow 0 \in (\sigma_r(A_\lambda) \cup \sigma_r(B_\lambda)) \setminus (\sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda)), \\ 0 \in \sigma_c(\tilde{N}_\lambda) &\Leftrightarrow 0 \in (\sigma_c(A_\lambda) \cup \sigma_c(B_\lambda)) \setminus ((\sigma_r(A_\lambda) \cup \sigma_r(B_\lambda)) \cup (\sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda))). \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Библиографический список

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы : в 3 т. Т. III. Спектральные операторы. М. : Мир, 1974.
2. Ismailov M. I. On spectrum property of matrix operators in Banach space // Trans. NAS of Azerb. 2006. Vol. XXXIII. P. 47–52.
3. Исмаилов М. И. О спектральности матричных операторов в банаховом пространстве // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 4. С. 23–28.

УДК 517.984

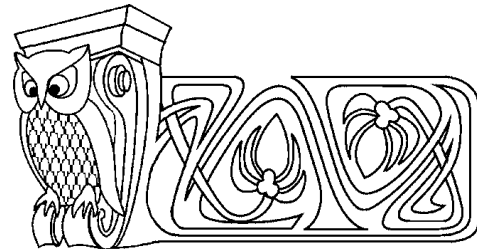
ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР С ЯДРОМ, ИМЕЮЩИМ СКАЧКИ НА ЛОМАНЫХ ЛИНИЯХ

О. А. Королева, А. П. Хромов

Саратовский государственный университет
E-mail: korolevaoart@yandex.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

В настоящей работе изучается равносходимость разложений в тригонометрические ряды Фурье и по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора, ядро которого терпит скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат.

Ключевые слова: равносходимость, резольвента, характеристические числа, собственные и присоединенные функции.



Integral Operator with Kernel Having Jumps on Broken Lines

O. A. Koroleva, A. P. Khromov

In this paper we study equiconvergence expansions in trigonometric Fourier series, and in eigenfunctions and associated functions of an integral operator whose kernel suffers jumps at the sides of the square inscribed in the unit square.

Key words: equiconvergence, resolvent, characteristic number, eigenfunctions and associated functions.

Рассмотрим интегральный оператор:

$$y = Af = \int_0^1 A(x, t) f(t) dt. \tag{1}$$

Обозначим: $A_1(x, t) = A(x, t)$, если $\{0 \leq t \leq 1/2 - x, 0 \leq x \leq 1/2\}$, $A_2(x, t) = A(x, t)$, если $\{1/2 + x \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1/2\}$, $A_3(x, t) = A(x, t)$, если $\{0 \leq t \leq -1/2 + x, 1/2 \leq x \leq 1\}$, $A_4(x, t) = A(x, t)$,



если $\{3/2 - x \leq t \leq 1, 1/2 \leq x \leq 1\}$, $A_5(x, t) = A(x, t)$, если $\{1/2 - x \leq t \leq 1/2 + x, 0 \leq x \leq 1/2\}$ и $\{-1/2 + x \leq t \leq 3/2 - x, 1/2 \leq x \leq 1\}$.

Предположим, что $A_i(x, t)$, $i = 1, \dots, 5$, непрерывно-дифференцируемые в своих областях, причем $A_5(x, 1/2 - x + 0) - A_1(x, 1/2 - x - 0) = a$, $A_5(x, 1/2 + x - 0) - A_2(x, 1/2 + x + 0) = b$, $A_5(x, -1/2 + x + 0) - A_3(x, -1/2 + x - 0) = c$, $A_5(x, 3/2 - x - 0) - A_4(x, 3/2 - x + 0) = d$, где a, b, c, d — постоянные.

Частный случай оператора (1) впервые рассматривался в [1].

1. Рассмотрим следующий оператор:

$$z = Bg = \int_0^{1/2} B(x, t)g(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1/2, \quad (2)$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x))^T$,

$$B(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & A(x, 1/2 - t) & A(x, 1/2 + t) & 0 \\ A(1/2 - x, t) & 0 & 0 & A(1/2 - x, 1 - t) \\ A(1/2 + x, t) & 0 & 0 & A(1/2 + x, 1 - t) \\ 0 & A(1 - x, 1/2 - t) & A(1 - x, 1/2 + t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Если $y = Af$, то $z = Bg$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1/2 - x)$, $z_3(x) = y(1/2 + x)$, $z_4(x) = y(1 - x)$, $g_1(x) = f(x)$, $g_2(x) = f(1/2 - x)$, $g_3(x) = f(1/2 + x)$, $g_4(x) = f(1 - x)$. Обратное: если $z = Bg$ и $g_1(x) = g_2(1/2 - x)$, $g_3(x) = g_4(1/2 - x)$, то $z_1(x) = z_2(1/2 - x)$, $z_3(x) = z_4(1/2 - x)$ и $y = Af$, где $f(x) = g_1(x)$, при $x \in [0, 1/2]$; $f(x) = g_3(-1/2 + x)$, при $x \in [1/2, 1]$ и $y(x) = z_1(x)$, при $x \in [0, 1/2]$; $y(x) = z_3(-1/2 + x)$, при $x \in [1/2, 1]$.

Доказательство. Пусть $y = Af$. Тогда имеем

$$y(x) = \int_0^{1/2} A(x, t)f(t) dt + \int_{1/2}^1 A(x, t)f(t) dt. \quad (3)$$

Пусть $x \in [0, 1/2]$. Представим (3) в виде

$$y(x) = \int_0^{1/2} A(x, 1/2 - t)f(1/2 - t) dt + \int_0^{1/2} A(x, 1/2 + t)f(1/2 + t) dt. \quad (4)$$

Здесь разрывы ядер в обоих интегралах на линии $x = t$. Положим в (4) $1/2 - x$ вместо x , и в обоих интегралах выполним такие замены t , чтобы опять разрывы ядер были на линии $x = t$, т. е. будем иметь

$$y(1/2 - x) = \int_0^{1/2} A(1/2 - x, t)f(1/2 - t) dt + \int_0^{1/2} A(1/2 - x, 1 - t)f(1 - t) dt. \quad (5)$$

Пусть теперь $x \in [1/2, 1]$. Тогда возьмем в (3) $1/2 + x$ вместо x (т. е. опять получаем, что $x \in [0, 1/2]$), и опять надлежащими заменами по t добьемся, что разрывы ядер в интегралах будут на линии $x = t$, т. е. имеем

$$y(1/2 + x) = \int_0^{1/2} A(1/2 + x, t)f(t) dt + \int_0^{1/2} A(1/2 + x, 1 - t)f(1 - t) dt. \quad (6)$$

Наконец, в (6) положим $1/2 - x$ вместо x , и, действуя далее как и в (3), придем к

$$y(1 - x) = \int_0^{1/2} A(1 - x, 1/2 - t)f(1/2 - t) dt + \int_0^{1/2} A(1 - x, 1/2 + t)f(1/2 + t) dt. \quad (7)$$

В итоге, (4)–(7) представляет собой $z = Bg$. Обратное очевидно. \square



Замечание. Представление типа (2) не единственно. Наше же представление хорошо тем, что компоненты матрицы $B(x, t)$ терпят разрывы лишь на линии $t = x$.

2. Займемся обращением оператора B . Представим B в виде

$$z(x) = Bg(x) = \int_0^x B_1(x, t)g(t) dt + \int_x^{1/2} B_2(x, t)g(t) dt, \quad (8)$$

где

$$B_1(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & A_5(x, 1/2 - t) & A_5(x, 1/2 + t) & 0 \\ A_1(1/2 - x, t) & 0 & 0 & A_2(1/2 - x, 1 - t) \\ A_3(1/2 + x, t) & 0 & 0 & A_4(1/2 + x, 1 - t) \\ 0 & A_5(1 - x, 1/2 - t) & A_5(1 - x, 1/2 + t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & A_1(x, 1/2 - t) & A_2(x, 1/2 + t) & 0 \\ A_5(1/2 - x, t) & 0 & 0 & A_5(1/2 - x, 1 - t) \\ A_5(1/2 + x, t) & 0 & 0 & A_5(1/2 + x, 1 - t) \\ 0 & A_3(1 - x, 1/2 - t) & A_4(1 - x, 1/2 + t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Дифференцируем (8) по x . Получим

$$z'(x) = \int_0^x B_{1x}(x, t)g(t)dt + \int_x^{1/2} B_{2x}(x, t)g(t)dt + Qg(x) = \int_0^x B_x(x, t)g(t)dt + Qg(x), \quad (9)$$

где $Q = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ -a & 0 & 0 & -b \\ -c & 0 & 0 & -d \\ 0 & c & d & 0 \end{pmatrix}.$

Считаем, что Q обратима, т. е. требуем, чтобы $bc - ad \neq 0$. Тогда из (9) получим

$$Pz'(x) = g(x) + \tilde{B}g(x), \quad (10)$$

где $P = Q^{-1}$, $\tilde{B}g(x) = \int_0^{1/2} \tilde{B}(x, t)g(t)dt$, $\tilde{B}(x, t) = PB_x(x, t)$.

Представим оператор \tilde{B} в пространстве $L_2^2[0, 1/2]$ в виде $\tilde{B} = W + V$, где $\|W\| < 1$, а V — конечномерный, т.е. $Vg(x) = \sum_{k=1}^m (g, \psi_k)\varphi_k(x)$, где $\{\psi_k\}_{k=1}^m, \{\varphi_k\}_{k=1}^m$ — линейно независимые системы в пространстве вектор-функций размерности 4, причём $\varphi_k(x)$ достаточно гладкие, например, вектор-функции полной ортогональной системы, образованной из тригонометрической,

$$(g, \varphi_k) = \sum_{j=1}^m \int_0^{1/2} g_j(t)\overline{\psi_k^j(t)}dt,$$

где $\psi_k^j(t)$ компоненты $\psi_k(t)$. Из (10) получаем

$$(E + W)^{-1} = Pz'(x) = g(x) + (E + W)^{-1}Vg(x). \quad (11)$$

Лемма 1. Оператор B^{-1} существует тогда и только тогда, когда

$$\text{rang } M = m,$$

где $M = \begin{pmatrix} E + (\tilde{\varphi}, \psi)^T \\ \int_0^{1/2} \tilde{B}(0, t)\tilde{\psi}^T(t) dt \end{pmatrix}$, E — единичная матрица $m \times m$, $(\tilde{\varphi}, \psi) = (\tilde{\varphi}_j, \psi_k)_{i,k=1}^m$,

$\tilde{\varphi}_k = (E + W)^{-1}\varphi_k$, $\tilde{\varphi}^T = (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_m)$.

Доказательство повторяет доказательство леммы 14 из [1].



Лемма 2. Пусть B^{-1} существует и для определенности минор Δ матрицы M , образованный из первых m строк, отличен от нуля. Тогда

$$B^{-1}z = (E + W)^{-1}Pz'(x) - \frac{1}{\Delta} \sum_{j,k=1}^m ((E + W)^{-1}Pz', \psi_j) \Delta_{jk} \tilde{\varphi}_k(x), \quad (12)$$

$$\int_0^{1/2} B(0, z) B^{-1}z(t) dt = z(0), \quad (13)$$

где Δ_{jk} — алгебраические дополнения элементов определителя Δ .

Доказательство. Пусть $z = Bg$. Тогда имеет место (10). Отсюда

$$((E + W)^{-1}Pz'(x), \psi_j) = (g, \psi_j) + \sum_{k=1}^m (g, \psi_k) (\tilde{\varphi}_k, \psi_j), \quad j = \overline{1, m}.$$

Так как определитель этой системы относительно (g, ψ_k) есть Δ , то, находя явно (g, ψ_k) и подставляя в (11), получаем (12). Соотношение (13) очевидно. \square

Теорема 2. Для оператора B^{-1} справедливо представление

$$B^{-1}z(x) = Pz'(x) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z(1/2) + a_3(x)z(x) + \int_0^{1/2} a(x, t)z(t) dt,$$

$$Sz(0) + Tz(1/2) + \int_0^{1/2} a(t)z(t) dt = 0.$$

где $a_i(x)$, $i = \overline{1, 3}$, $a'_3(x)$, $a(x)$ — непрерывные матрицы-функции, каждая компонента матрицы $a(x, t)$ имеет такой же характер гладкости, что и компоненты $B_x(x, t)$, $S = E + \int_0^{1/2} B(0, t)a_1(t) dt$,

$T = \int_0^{1/2} B(0, t)a_2(t) dt$ — постоянные матрицы 4×4 .

Доказательство повторяет доказательство теоремы 10 в [1].

3. Получим интегродифференциальную систему для резольвенты $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}A$ оператора A . Пусть $z = (E - \lambda B)^{-1}Bg$. Тогда $z - \lambda Bz = Bg$. Отсюда по теореме 2 получаем

$$Pz'(x) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z(1/2) + a_3(x)z(x) + \tilde{N}z - \lambda z(x) = g(x), \quad (14)$$

$$Sz(0) + Tz(1/2) + \int_0^{1/2} a(t)z(t) dt = 0, \quad (15)$$

где $\tilde{N}z = \int_0^{1/2} a(x, t)z(t) dt$.

Теорема 3. Если R_λ существует, то $R_\lambda f = v(x)$, где

$$v(x) = z_1(x) \quad \text{при } x \in [0, 1/2] \quad \text{и} \quad v(x) = z_3(x - 1/2) \quad \text{при } x \in [1/2, 1], \quad (16)$$

$z_1(x)$, $z_3(x)$ — первая и третья компоненты вектора $z(x)$, удовлетворяющего системе (14), (15). Обратно, если λ таково, что однородная краевая задача для (14), (15) имеет только нулевое решение, то R_λ существует и определяется по формуле (16).

Доказательство повторяет доказательство леммы 1 из [2].

4. Приступим к исследованию системы (14), (15). Минимальный многочлен матрицы $Q = P^{-1}$ совпадает с характеристическим многочленом и равен $\lambda^4 - \lambda^2(d^2 - 2bc + a^2) + (bc - ad)^2$. Значит, выполняется следующая лемма.



Лемма 3. При условии $d \neq a, (d+a)^2 - 4bc \neq 0$ матрица Q подобна диагональной $D = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$, причём $\omega_3 = -\omega_2, \omega_4 = -\omega_1, \omega_1 \neq \omega_2$. Пусть матрица Γ такая, что $\Gamma^{-1}P^{-1}\Gamma = D$. Выполнив в (14), (15) замену $z = \Gamma\tilde{z}$, получим

$$\tilde{z}'(x) + P_1(x)\tilde{z}(0) + P_2(x)\tilde{z}(1/2) + P_3(x)\tilde{z}(x) + N\tilde{z}(x) - \lambda D\tilde{z}(x) = m(x), \quad (17)$$

$$M_0\Gamma\tilde{z}(0) + M_1\Gamma\tilde{z}(1/2) + \Gamma \int_0^{1/2} \Omega(t)\tilde{z}(t) dt = 0, \quad (18)$$

где $P_i(x) = D\Gamma^{-1}a_i(x)\Gamma, N = D\Gamma^{-1}\tilde{N}\Gamma, m(x) = D\Gamma^{-1}g(x), \Omega(t) = a(t)\Gamma, M_0 = S\Gamma, M_1 = T\Gamma$.

При изучении системы (17), (18) затруднения вызывает матрица $P_3(x)$. Поэтому дадим её дальнейшее преобразование.

Лемма 4. Существует матрица-функция $H(x, \lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$ с непрерывно-дифференцируемыми компонентами матриц $H_0(x), H_1(x)$, причём $H_0(x)$ невырождена при всех x и диагональная такая, что преобразование $\tilde{z} = H(x, \lambda)v$ приводит систему (17), (18) к виду

$$v'(x) + P_1(x, \lambda)v(0) + P_2(x, \lambda)v(1/2) + P_3(x, \lambda)v(x) + N_\lambda v(x) - \lambda Dv(x) = m(x, \lambda), \quad (19)$$

$$U(v) = M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(1/2) + \int_0^{1/2} \Omega(t, \lambda)v(t)dt = 0, \quad (20)$$

где $P_1(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)P_1(x)H(0, \lambda), P_2(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)P_2(x)H(1/2, \lambda), P_3(x, \lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x, \lambda) \times [H_2'(x) + P_3(x)H_2(x)], N_\lambda = H^{-1}(x, \lambda)NH(x, \lambda), M_{0\lambda} = M_0H(0, \lambda), M_{1\lambda} = M_1H(1/2, \lambda), \Omega(t, \lambda) = \Omega(t)H(t, \lambda), m(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)m(x)$.

Доказывается так же, как и лемма 16 в [1].

5. Рассмотрим систему

$$w'(x) = \lambda Dw(x) + m(x), \quad (21)$$

$$U(w) = 0, \quad (22)$$

где U берётся из (20), а $m(x)$ — произвольная вектор-функция с компонентами из $L[0, 1/2]$. Будем считать, что $\text{Re } \lambda\omega_1 \geq \text{Re } \lambda\omega_2 \geq 0$. Так же, как в [1] (лемма 1), получаем следующую лемму.

Лемма 5. Для решения w системы (21), (22) имеет место представление

$$w(x) = w(x, \lambda) = -Y(x, \lambda) \Delta^{-1}(\lambda) \int_0^{1/2} U_x(g(x, t, \lambda))m(t)dt + g_\lambda m(x), \quad (23)$$

где $Y(x, \lambda) = \text{diag}(e^{\lambda\omega_1 x}, \dots, e^{\lambda\omega_4 x}), \Delta(\lambda) = U(Y(x, \lambda)), U_x$ означает, что U применяется по x ,

$$g(x, t, \lambda) = \text{diag}(g_1(x, t, \lambda), \dots, g_4(x, t, \lambda)),$$

$$g_i(x, t, \lambda) = \begin{cases} -\varepsilon(t, x)e^{\lambda\omega_i(x-t)}, & \text{при } \text{Re } \lambda\omega_i \geq 0, \\ \varepsilon(x, t)e^{\lambda\omega_i(x-t)}, & \text{при } \text{Re } \lambda\omega_i \leq 0, \end{cases}$$

$$\varepsilon(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \leq x \\ 0, & \text{при } t > x, \end{cases} \quad g_\lambda m(x) = \int_0^{1/2} g(x, t, \lambda)m(t)dt.$$

Лемма 6. Для матрицы $\Delta(\lambda)$ при больших λ имеет место следующее представление:

$$\Delta(\lambda) = ([a_{ij}] + [b_{ij}]e^{\mu\omega_j})_{i,j=1}^4, \quad (24)$$

где $\mu = \lambda/2, a_{ij}, b_{ij}$ — компоненты матриц K_0 и L_0 соответственно, $K_0 = S\Gamma H_0(0), L_0 = T\Gamma H_0(1/2), [a] = a + o(1)$.

Доказательство. Пусть $\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \Delta_1(\lambda)$, где $\Delta_0(\lambda) = M_{0\lambda}Y(0, \lambda) + M_{1\lambda}Y(1/2, \lambda), \Delta_1(\lambda) = \int_0^{1/2} \Omega(t, \lambda)Y(t, \lambda) dt$. Для $\Delta_0(\lambda)$ имеет место формула

$$\Delta_0(\lambda) = K_0 + \lambda^{-1}K_1 + (L_0 + \lambda^{-1}L_1)Y(1/2, \lambda),$$



где K_1, L_1 — постоянные матрицы. Элементы $\Delta_1(\lambda)$ имеют оценку $o(e^{\operatorname{Re} \mu \omega_i})$ для первого и второго столбиков и $o(1)$ — для третьего и четвёртого столбиков. Тогда утверждение леммы становится очевидным. \square

Лемма 7. Для $\det \Delta(\lambda)$ имеет место асимптотическая формула:

$$\det \Delta(\lambda) = \{\varphi(\lambda) + o(1)\}e^{\mu(\omega_1 + \omega_2)},$$

где $\varphi(\lambda) = \theta_0 + \theta_1 e^{\mu(-\omega_1)} + \theta_2 e^{\mu(-\omega_2)} + \theta_3 e^{\mu(\omega_3 - \omega_1 - \omega_2)} + \theta_4 e^{\mu(\omega_3 - \omega_2)} + \theta_5 e^{\mu(\omega_4 - \omega_2)} + \theta_6 e^{\mu(\omega_3 - \omega_1)} + \theta_7 e^{\mu(\omega_4 - \omega_1)} + \theta_8 e^{\mu(\omega_3 + \omega_4 - \omega_1 - \omega_2)}$, θ_i — комплексные числа, причём

$$\theta_0 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_{21} & b_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_{31} & b_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_{41} & b_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \theta_8 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} & b_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} & b_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} & b_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}.$$

Утверждение леммы следует из леммы 6.

Потребуем, чтобы $\theta_0 \theta_8 \neq 0$. Из (24) следует, что нули $\det \Delta(\lambda)$, а именно они являются собственными значениями (21), (22) и при больших $|\lambda|$ находятся в полосах, границы которых параллельны некоторым лучам, исходящим из точки $\mu = 0$, причём в каждой полосе в любом прямоугольнике единичной длины число нулей $\det \Delta(\lambda)$ ограничено числом, не зависящим от прямоугольника. Тогда известно, что если удалить все собственные значения вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ , то в получившейся области S_δ справедлива оценка:

$$|\Delta(\lambda)| \geq C |e^{\mu(\omega_1 + \omega_2)}|, \quad (25)$$

где $C > 0$ и зависит только от δ .

Лемма 8. Обозначим через $R_{1\lambda} m$ решение $w(x, \lambda)$ задачи (21), (22). В области S_δ при больших $|\lambda|$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|R_{1\lambda} m\|_\infty &= O(\|m\|_1), \\ \|R_{1\lambda} m\|_1 &= O(\psi(\lambda) \|m\|_1), \\ \|R_{1\lambda} m\|_\infty &= O(\psi(\lambda) \|m\|_\infty), \\ \|R_{1\lambda} \chi\|_\infty &= O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1$ — нормы в пространстве вектор-функций с компонентами из $L_\infty(0, 1/2), L(0, 1/2)$, $\chi(x)$ — вектор-функция, у которой каждая компонента есть характеристическая функция какого-нибудь отрезка, содержащегося в $[0, 1/2]$, $\psi(\lambda) = \sum_{j=1}^4 \aleph(|\operatorname{Re} \lambda \omega_j|)$, $\aleph(y) = (1 - e^{-y})/y$ при $y \geq 0$.

Доказательство. В силу (24) алгебраические дополнения элементов матрицы $\Delta(\lambda)$ имеют оценки $\Delta_{j1} = O(e^{\mu \omega_2})$, $\Delta_{j2} = O(e^{\mu \omega_1})$, $\Delta_{j3} = O(e^{\mu(\omega_1 + \omega_2)})$, $\Delta_{j4} = O(e^{\mu(\omega_1 + \omega_2)})$. Они получаются после разложения миноров по аддитивному свойству и вынесением самой большой степени экспоненты. Поэтому в силу (25) для элементов матрицы $Y(x, \lambda) \cdot \Delta^{-1}(\lambda)$ справедливы оценки: $O(e^{\lambda \omega_i(x-1/2)})$, $i = 1, 2$ и $O(e^{\lambda \omega_i x})$, $i = 3, 4$. Так же, как в [2], получим, что $\int_0^{1/2} g_j(x, t, \lambda) m_j(t) dt = O(\|m_j\|_1)$.

Следовательно, $U\left(\int_0^{1/2} g(x, t, \lambda) m(t) dt\right) = O(\|m\|_1)$, и первая оценка следует из (23).

Аналогично доказываются вторая и третья оценки. Четвертая оценка получается, если в качестве $m(x)$ взять $\chi(x)$. \square

Лемма 9. Для $f(x) \in L[0, 1]$ справедливо соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} H(x, \lambda) [v(x, \lambda) - R_{1\lambda} (H_0^{-1} m(x))] d\lambda \right\|_\infty = 0,$$

где $m(x) = D\Gamma^{-1}g(x)$.

Это утверждение доказывается по теореме Банаха–Штейнгауза.



6. Основная теорема. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} u'(x) &= \lambda Du(x) + m(x), \\ U_0(u) &= u(0) - u(1/2) = 0, \end{aligned}$$

где $m(x)$ — вектор-функция с компонентами из $L[0, 1/2]$. Ее решение обозначим через $R_{2\lambda}m$. Тогда для $R_{2\lambda}m$ имеет место формула (23), где Δ, U заменяются на Δ_0, U_0 . Удалим из S_δ вместе с круговыми окрестностями δ нули $\Delta_0(\lambda)$. Получим новую область, которую опять обозначим за S_δ . Тогда в S_δ выполняются леммы:

Лемма 10. *Имеет место*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} H(x, \lambda) [R_{1\lambda}m(x) - R_{2\lambda}m(x)] d\lambda \right\|_{[\varepsilon, 1/2-\varepsilon]} = 0,$$

где $\|\cdot\|_{[\varepsilon, 1/2-\varepsilon]}$ — норма в $C[\varepsilon, 1/2 - \varepsilon]$, $\varepsilon \in (0, 1/4)$.

Это утверждение устанавливается так же, как и лемма 13 в [2].

Лемма 11. *Если $v(x, \lambda)$ — решение задачи (19), (20), то*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [H(x, \lambda)v(x, \lambda) - H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}m(x))] d\lambda \right\|_{[\varepsilon, 1/2-\varepsilon]} = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} H(x, \lambda)v(x, \lambda) - H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}m(x)) &= H(x, \lambda) [v(x, \lambda) - R_{1\lambda}(H_0^{-1}m(x))] + H(x, \lambda) \times \\ &\times [R_{1\lambda}(H_0^{-1}m(x)) - R_{2\lambda}(H_0^{-1}m(x))] + [H(x, \lambda) - H_0(x)] R_{2\lambda}H_0^{-1}m. \end{aligned}$$

Тогда по леммам 9, 10 получаем требуемое. □

Теперь можно сформулировать теорему равносходимости.

Теорема 4. *Пусть существует A^{-1} , ядро $A(x, t)$ удовлетворяет условиям из леммы 3. Тогда в S_δ для любой $f(x) \in L[0, 1]$*

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - \sum_{j=1}^4 \gamma_{1j} \sigma_{r|\omega_j|}(\varphi_j, x)\|_{[\varepsilon, 1/2-\varepsilon]} &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - \sum_{j=1}^4 \gamma_{3j} \sigma_{r|\omega_j|}(\varphi_j, x - 1/2)\|_{[1/2+\varepsilon, 1-\varepsilon]} &= 0, \end{aligned}$$

где $S_r(f, x)$ — частичная сумма ряда Фурье, по с. п. ф. оператора A для тех характеристических чисел λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$, $\sigma_r(f, x)$ — частичная сумма тригонометрического ряда Фурье на $[0, 1/2]$ по системе $\{e^{4k\pi i x}\}$ для тех k , для которых $|4k\pi| < r$, γ_{ij} (δ_{ij}) — компоненты матрицы Γ (Γ^{-1}), $\varphi_j(x) = \delta_{j1}f(x) + \delta_{j2}f(1/2 - x) + \delta_{j3}f(1/2 + x) + \delta_{j4}f(1 - x)$.

Доказательство. Имеем

$$S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda(A)f dx, \quad \sigma_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_{0\lambda}f dx,$$

где $R_{0\lambda}f$ — решение краевой задачи $y' - \lambda y = f$, $y(0) = y(1/2)$.

Пусть $x \in [\varepsilon, 1/2 - \varepsilon]$. Тогда в силу лемм 10–13 имеем

$$S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} z_1(x) d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (\Gamma \tilde{z}(x))_1 d\lambda,$$

где $(\cdot)_1$ — первая компонента вектора, помещенного в скобки. Тогда

$$S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (\Gamma H(x, \lambda)v(x, \lambda))_1 d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (\Gamma H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}(x)m(x)))_1 d\lambda + o(1),$$



где $o(1) \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in [\varepsilon, 1/2 - \varepsilon]$. Значит,

$$\begin{aligned} S_r(f, x) &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\Gamma \int_{|\lambda|=r} H_0(x) R_{2\lambda} (h_1^{-1}(x)\omega_1\varphi_1(x), \dots, h_4^{-1}(x)\omega_4\varphi_4(x))^T d\lambda \right)_1 + o(1) = \\ &= (\Gamma \cdot (h_1(x)\sigma_{r|\omega_1|}(h_1^{-1}\varphi_1, x), \dots, h_4(x)\sigma_{r|\omega_4|}(h_4^{-1}\varphi_4, x))^T)_1 + o(1). \end{aligned}$$

По аналогу теоремы Штейнгауза

$$a(x)\sigma_r(f, x) = \sigma_r(a \cdot f, x) + o(1), \quad S_r(f, x) = \sum_{j=1}^4 \gamma_{1j}\sigma_{r|\omega_j|}(\varphi_j, x) + o(1).$$

Аналогично доказывается при $x \in [1/2 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ □

Лемма 12. Для того чтобы ω_1, ω_2 — различные корни уравнения

$$\lambda^2 - a_1\lambda + a_2 = 0, \tag{26}$$

где $a_1 = d^2 - 2bc + a^2$, $a_2 = (bc - ad)^2$, удовлетворяли условию $|\omega_1| = |\omega_2|$, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_1 = l(e^{\alpha i} + e^{\beta i}), \quad a_2 = l^2 e^{(\alpha+\beta)i}, \tag{27}$$

где $l = |\omega_1|$, $\alpha = \arg \omega_1$, $\beta = \arg \omega_2$.

Доказательство. Пусть $|\omega_1| = |\omega_2| = l$. Тогда $\omega_1 = l e^{\alpha i}$, $\omega_2 = l e^{\beta i}$, и α, β различны. Тогда из (26) получим систему

$$\begin{cases} a_2 - l e^{\alpha i} a_1 = -l^2 e^{2\alpha i}, \\ a_2 - l e^{\beta i} a_1 = -l^2 e^{2\beta i}. \end{cases} \tag{28}$$

Отсюда $a_1 = l(e^{\alpha i} + e^{\beta i})$, $a_2 = l^2 e^{(\alpha+\beta)i}$.

Обратно, пусть выполняется (27). Тогда выполняется (28). Другими словами, уравнение (26) имеет корни $\omega_1 = l e^{\alpha i}$, $\omega_2 = l e^{\beta i}$. Лемма доказана. □

Теорема 5. Если $|\omega_j| = l$, $j = \overline{1, 4}$, то

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - \sigma_{rl}(f, x)\|_{[\varepsilon, 1/2 - \varepsilon]} &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - \sigma_{rl}(g, x - 1/2)\|_{[1/2 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]} &= 0, \end{aligned}$$

где $g(x) = f(1/2 + x)$.

Доказательство. Рассмотрим

$$\sum_{j=1}^4 \gamma_{1j}\sigma_{rl}(\varphi_j, x) = \sigma_{rl}(\gamma_{11}\varphi_1 + \gamma_{12}\varphi_2 + \gamma_{13}\varphi_3 + \gamma_{14}\varphi_4, x).$$

Так как $\gamma_{11}\varphi_1 + \gamma_{12}\varphi_2 + \gamma_{13}\varphi_3 + \gamma_{14}\varphi_4 = (\Gamma \cdot (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^T)_1 = (\Gamma \cdot \Gamma^{-1}(f(x), f(1/2 - x), f(1/2 + x), f(1 - x))^T)_1 = f(x)$, то первое утверждение доказано.

Аналогично доказывается второе утверждение. □

Замечание. Постановка задачи и результат, представленный в теореме 1, принадлежат А. П. Хромову.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270).

Библиографический список

1. Хромов А. П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142.
2. Корнев В. В., Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.



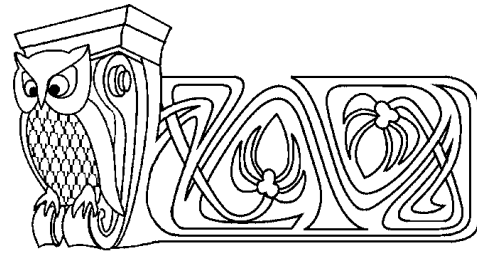
УДК 517.51, 517.98

ФРЕЙМЫ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

С. А. Крейс

Саратовский государственный университет

E-mail: KreisSA@info.sgu.ru



Frames and Periodic Groups of Operators

S. A. Kreis

In this paper some properties of periodic groups of operators which connected with frames theory are considered. We proof that there are no strongly continuous and uniformly bounded periodic one-parameter group of operators in Banach space which eigenvectors are cross-frame.

Key words: frame, cross-frame, one-parameter group of operators.

В статье рассматриваются свойства периодических групп операторов, связанные с фреймами в банаховых пространствах. Доказывается, что не существует такой сильно непрерывной равномерно ограниченной 2π -периодической однопараметрической группы операторов, действующей в банаховом пространстве, для которой элементы заданного кросс-фрейма, отличного от базиса, являются собственными векторами.

Ключевые слова: фрейм, кросс-фрейм, однопараметрическая группа операторов.

1. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

В теории приближений известна схема получения прямых и обратных теорем в абстрактном банаховом пространстве, снабженном действием однопараметрической группы операторов. При этом приближающим аппаратом служат аналоги классов Бернштейна B_σ целых функций экспоненциального типа, которые в случае периодической группы операторов сводятся к тригонометрическим вектор-полиномам. Соответствующие результаты получены Н. П. Купцовым [1] и его учениками [2, 3].

Определение 1. Пусть X — банахово пространство и $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ — сильно непрерывная изометрическая 2π -периодическая однопараметрическая группа ограниченных линейных операторов в X (или, короче, периодическая группа операторов), удовлетворяющая условиям:

- 1) $T_{t+s} = T_t T_s$ и $T_0 = I_X$;
- 2) $T_t x \rightarrow x$ при $t \rightarrow 0$ для всех $x \in X$;
- 3) $\|T_t x\| = \|x\|$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и $x \in X$;
- 4) $T_{t+2\pi} = T_t$.

Заметим, что в случае равномерно ограниченной группы $\|T_t x\| \leq C\|x\|$ после замены исходной нормы пространства X на эквивалентную ей норму $\|x\|_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|T_t x\|$ будет выполняться условие изометричности 3). Поэтому без потери общности мы сразу рассматриваем изометрические группы.

Инфинитезимальным (порождающим) оператором группы $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ называется оператор A , определяемый соотношением

$$Af = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t f - f}{t},$$

если указанный предел существует. Хорошо известно, что порождающий оператор A является замкнутым оператором с всюду плотной областью определения $D_A \subset X$.

Тригонометрической вектор-функцией называется элемент $e_k \in X$ такой, что $Ae_k = ike_k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Тригонометрическая вектор-функция e_k характеризуется соотношением $T_t e_k = e^{ikt} e_k$, $t \in \mathbb{R}$. Для тригонометрических вектор-полиномов $t_n = \sum_{k=-n}^n e_k$ справедливы аналоги классических результатов о величинах наилучшего приближения $E_n(f) = \inf_{t_n} \|f - t_n\|$, таких как неравенство Джексона–Стечкина, теорема Бернштейна и т. п., в которых участвуют модули гладкости $\omega_k(f, \delta) = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|\Delta_h^k f\|$, $k \in \mathbb{N}$, где $\Delta_h = T_h - I_X$ — разностный оператор.

Наличие такой общей схемы получения прямых и обратных теорем теории приближений естественным образом приводит к следующей задаче.

Дана система ненулевых элементов $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ банахова пространства X . Требуется построить периодическую группу операторов $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ в X (в смысле определения 1) такую, что $Ax_k = ikx_k$, $k \in \mathbb{Z}$, где A — порождающий оператор. Если $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ является безусловным базисом пространства X , то искомое построение возможно (см. [3]).



В настоящей работе нами исследуется вопрос о существовании периодической группы операторов в ситуации, когда данная система $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ образует кросс-фрейм [4]. Необходимые определения теории фреймов приведены далее.

2. КРОСС-ФРЕЙМЫ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть X — банахово пространство и X^* — сопряженное к нему. Далее, пусть задано банахово пространство X_d , состоящее из числовых последовательностей $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ и удовлетворяющее следующему условию: система канонических ортов $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ образует безусловный базис в X_d . Тогда сопряженное пространство X_d^* мы можем рассматривать снова как пространство числовых последовательностей $b = \{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, причем $(a, b) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k b_k$ — общий вид непрерывного линейного функционала на X_d . Кроме того, потребуем, чтобы сопряженная система $\{\varepsilon_k^*\}_{k \in \mathbb{Z}}$ была (безусловным) базисом в X_d^* . Это требование эквивалентно тому, что пространство X_d^* сепарабельно [5, с. 130].

В следующем определении 2 мы объединяем два подхода к записи рамочных неравенств, задающих фрейм в банаховом пространстве [6, 7]. Следует отметить, что в ситуации гильбертова пространства $X = X^* = H$ и $X_d = \ell^2(\mathbb{Z})$ мы приходим к известному понятию альтернативного дуального фрейма (см. [4]).

Определение 2. Пусть $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset X \setminus \{0\}$ и $\{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset X^* \setminus \{0\}$. Пусть, далее, для всех $x \in X$ имеет место принадлежность $\{(x, y_k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \in X_d$ и существуют постоянные $0 < A \leq B < \infty$ и $0 < A' \leq B' < \infty$ такие, что, во-первых, для любого $y \in X^*$ выполняются неравенства

$$A\|y\|_{X^*} \leq \|\{(x_k, y)\}_{k \in \mathbb{Z}}\|_{X_d^*} \leq B\|y\|_{X^*} \quad (1)$$

и, во-вторых, для любого $x \in X$ выполняются неравенства

$$A'\|x\|_X \leq \|\{(x, y_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}\|_{X_d} \leq B'\|x\|_X. \quad (2)$$

Наконец, предположим, что для всех $x \in X$ и всех $y \in X^*$ справедливы формулы восстановления:

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (x, y_k) x_k \quad (3)$$

и

$$y = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (x_k, y) y_k. \quad (4)$$

Тогда будем говорить, что пара систем $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $\{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ образует *кросс-фрейм*.

Введем в рассмотрение операторы синтеза и анализа, ассоциированные с кросс-фреймом $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $\{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Оператором синтеза по системе $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ называется оператор $S : X_d \rightarrow X$, определяемый равенством

$$Sa = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k x_k.$$

Оператор S корректно определен и является ограниченным линейным оператором, сопряженным к которому будет оператор анализа $R : X^* \rightarrow X_d^*$ по системе $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, действующий по формуле

$$Ry = \{(x_k, y)\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

(это следует из фреймовых неравенств (1), подробнее см. [7]). Аналогично, оператор анализа по системе $\{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ суть оператор $R' : X \rightarrow X_d$, заданный равенством

$$R'x = \{(x, y_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

По определению 2 оператор R' корректно определен и является ограниченным линейным оператором, сопряженным к которому будет оператор синтеза $S' : X_d^* \rightarrow X^*$ по системе $\{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$S'b = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k y_k.$$



В самом деле, для любой финитной числовой последовательности $b = \{b_k\}$ имеем

$$(x, S'b) = (x, \sum b_k y_k) = \sum (x, y_k) b_k = (R'x, b),$$

откуда с учетом фреймовых неравенств (2) получаем оценку

$$\| \sum b_k y_k \|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} (x, S'b) = \sup_{\|x\|_X \leq 1} (R'x, b) \leq B' \|b\|_{X_d^*} = B' \| \sum b_k \varepsilon_k^* \|_{X_d^*}.$$

Отсюда и по критерию Коши сходимости ряда находим, что для всех $b \in X_d^*$ ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k y_k$ сходится вместе с рядом $\sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \varepsilon_k^*$ (последний сходится в силу базисности системы $\{\varepsilon_k^*\}_{k \in \mathbb{Z}}$). Следовательно, имеем $(x, S'b) = (R'x, b)$ для всех $b \in X_d^*$.

Теперь заметим, что с учетом данных определений формулы восстановления (3) и (4) из определения 2 можно переписать в операторном виде

$$SR' = I_X, \quad S'R = I_{X^*},$$

а сами фреймовые неравенства (1) и (2) показывают, что операторы анализа R и R' являются инъекциями или, в другой терминологии, изоморфизмами X^* в X_d^* и X в X_d соответственно. Поэтому операторы синтеза S и S' являются сюръекциями.

3. СПЛЕТАЮЩИЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА СИНТЕЗА

Определение 3. Пусть заданы операторы $A : X_d \rightarrow X_d$ и $B : X \rightarrow X$. Оператор $S : X_d \rightarrow X$ называется *сплетающим оператором* для пары $[A, B]$, если следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} X_d & \xrightarrow{A} & X_d \\ \downarrow S & & \downarrow S \\ X & \xrightarrow{B} & X \end{array}$$

т. е. справедливо равенство $SA = BS$.

Пусть N — пространство коэффициентов нуль-рядов системы $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, т. е. (замкнутое) подпространство в X_d , состоящее из всех числовых последовательностей $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, для которых $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k x_k = 0$. Очевидно, что N совпадает с ядром оператора синтеза $N = \ker S$.

Теорема 1. Пусть задан оператор $A : X_d \rightarrow X_d$ и $S : X_d \rightarrow X$ — оператор синтеза. Тогда существование такого оператора $B : X \rightarrow X$, что S является сплетающим оператором для пары $[A, B]$, равносильно включению $A(N) \subset N$. При этом оператор B определяется однозначно.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть такой оператор B существует. Рассмотрим произвольный нуль-ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k x_k = 0$. Наряду с последовательностью $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in N$ также рассмотрим последовательность $a' = \{a'_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, заданную равенством $a' = Aa$. Тогда

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a'_k x_k = Sa' = SAa = BSa = B(0) = 0.$$

Это означает, что $a' \in N$. Включение $A(N) \subset N$ установлено.

Достаточность. Пусть справедливо включение $A(N) \subset N$. Для элемента $x \in X$ выберем $a \in X_d$ таким образом, чтобы $x = Sa$ и положим по определению $Bx = SAa$. Проверим корректность определения оператора B , т. е. его независимость от выбора $a \in X_d$. В самом деле, если $x = Sa_1 = Sa_2$, то $a_1 - a_2 \in N$ и, тем самым $A(a_1 - a_2) \in N$, откуда следует $SA(a_1 - a_2) = 0$. Таким образом, $SAa_1 = SAa_2$. Корректность определения оператора B установлена. Тождество $SA = BS$ выполняется по построению. Остается доказать единственность оператора B . Предположим, что существует другой оператор B' , удовлетворяющий тем же свойствам. Тогда $BS = SA = B'S$. Из сюръективности оператора синтеза следует, что операторы B и B' совпадают на всем пространстве X .



Теорема 2. Пусть задан оператор $B : X \rightarrow X$ и $S : X_d \rightarrow X$ — оператор синтеза. Тогда найдется такой оператор $A : X_d \rightarrow X_d$, что S является сплетающим оператором для пары $[A, B]$. При этом общий вид такого оператора дается формулой

$$A = R'BS + A_0, \quad (5)$$

где A_0 — произвольный оператор, удовлетворяющий условию $A_0(X_d) \subset N$.

Доказательство. Пусть для оператора $A : X_d \rightarrow X_d$ выполнено $BS = SA$. Покажем, что в таком случае он имеет вид (5). Подействуем оператором R' справа:

$$BSR' = SAR'. \quad (6)$$

Известно (см. [4]), что для ассоциированных с кросс-фреймом операторов S и R' справедливы равенства $SR' = I_X$ и $R'S = I_{X_d} - P$, где P — проектор на пространство N . Перепишем (6) с учетом этого факта:

$$B = SAR'. \quad (7)$$

Далее рассмотрим конструкцию $R'BS$. С учетом (7) получим

$$R'BS = R'SAR'S.$$

Отсюда находим

$$R'BS = (I_{X_d} - P)A(I_{X_d} - P) = A - AP - PA + PAP.$$

По теореме 1 имеем $A(N) \subset N$. Тогда положим $A_0 = AP + PA - PAP$. Очевидно, что $A_0(X_d) \subset N$. Окончательно будем иметь $A = R'BS + A_0$.

Теперь покажем, что при любом выборе оператора A вида (5) оператор синтеза S будет сплетающим для пары $[A, B]$. Для этого просто вычислим

$$SA = S(R'BS + A_0) = SR'BS + SA_0 = BS + 0 = BS.$$

4. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Следующая теорема была доказана Т. А. Кузнецовой [3] для безусловного базиса в банаховом пространстве.

Теорема 3. Пусть $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ — безусловный базис в банаховом пространстве X . Тогда существует такая сильно непрерывная равномерно ограниченная группа операторов $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, что $Ae_k = i\lambda_k e_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Мы покажем, что для кросс-фрейма в банаховом пространстве это свойство не выполняется, по крайней мере, в случае периодических групп. А именно справедлива следующая основная теорема.

Теорема 4. Пусть задан кросс-фрейм $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $\{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ в банаховом пространстве X , не являющийся базисом в X . Тогда не существует такой периодической группы операторов $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, порождающий оператор которой имеет следующий вид: $Ax_k = ikx_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть система $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ удовлетворяет свойству, описанному в формулировке теоремы, т. е. существует такая периодическая группа операторов $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, что $T_t x_k = e^{ikt} x_k$. Тогда по теореме 2 для любого числа $t \in \mathbb{R}$ мы можем найти такой оператор $V_t : X_d \rightarrow X_d$, что оператор синтеза S будет сплетающим для пары $[V_t, T_t]$, и нам также известен вид этого оператора: $V_t = R'T_t S + A_{0t}$, где в качестве A_{0t} можно взять произвольный оператор, удовлетворяющий условию $A_{0t}(X_d) \subset N$.

Теперь воспользуемся теоремой 3. Рассмотрим сильно непрерывную равномерно ограниченную группу операторов $\{W_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, действующую в пространстве X_d и такую, что $W_t \varepsilon_k = e^{ikt} \varepsilon_k$. Далее, пусть $P = I_{X_d} - R'S$ — рассмотренный при доказательстве теоремы 2 проектор на подпространство N . Положим $A_{0t} = PW_t$. Вычислим

$$V_t \varepsilon_k = R'T_t S \varepsilon_k + PW_t \varepsilon_k = R' e^{ikt} x_k + PW_t \varepsilon_k = R' S e^{ikt} \varepsilon_k + (I - R'S) e^{ikt} \varepsilon_k = e^{ikt} \varepsilon_k.$$



В таком случае $V_t = W_t$. По теореме 1 $V_t(N) \subset N$. Возьмем $a \in N$ и получим $V_t a \in N$ или, что одно и то же, $(I - P)V_t a = 0$. Разложим элемент a по базису $a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varepsilon_k$. Тогда $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (I - P) \varepsilon_k e^{ikt} = 0$, причем ряд сходится равномерно по $t \in \mathbb{R}$ ввиду равномерной ограниченности группы операторов $\{V_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. Следовательно, $a_k (I - P) \varepsilon_k = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Если бы при некотором k было $0 = (I - P) \varepsilon_k = R' S \varepsilon_k = R' x_k$, то $x_k = 0$ вопреки нашим предположениям. Значит, имеем $a_k = 0$ для всех k . Итак, приходим к равенству $N = \{0\}$. Это означает, что оператор синтеза S осуществляет изоморфизм пространств X_d и X и система $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ эквивалентна базису $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, а потому сама является базисом, что противоречит условию теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00097-а) и гранта Президента РФ для молодых российских ученых (проект МД-300.2011.1).

Библиографический список

1. Купцов Н. П. Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов // УМН. 1968. Т. 23, вып. 4. С. 117–178.
2. Терехин А. П. Ограниченная группа операторов и наилучшее приближение // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика : межвуз. науч. сб. Саратов, 1975. Вып. 2. С. 3–28.
3. Кузнецова Т. А. О подпространствах типа B_σ в пространствах с базисом // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика : межвуз. науч. сб. Саратов, 1976. Вып. 6, ч. 2. С. 140–151.
4. Крейс С. А. Альтернативные дуальные фреймы в банаховых пространствах // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов, 2009. Вып. 11. С. 36–38.
5. Дэй М. М. Нормированные линейные пространства. М. : Иностран. лит., 1961. 232 с.
6. Grochenig K. Describing functions: atomic decompositions versus frames // Monat. Math. 1991. Vol. 112. P. 1–41.
7. Терехин П. А. Фреймы в банаховом пространстве // Функциональный анализ и его приложения. 2010. Т. 44, вып. 3. С. 50–62.

УДК 517.968.23

ТРЕХЭЛЕМЕНТНАЯ ЗАДАЧА ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Н. Р. Перельман, К. М. Расулов

Смоленский государственный университет
E-mail: nataly@manner.ru

Статья посвящена исследованию трехэлементной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций. Получен конструктивный метод ее решения в единичном круге в случае, когда рассматриваемая задача не вырождается в двухэлементные краевые задачи без сдвига.

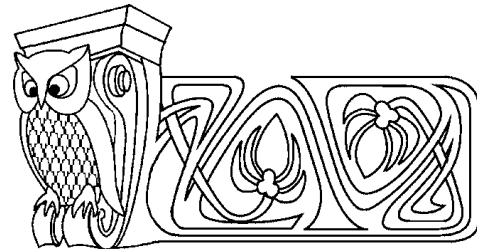
Ключевые слова: краевая задача, бианалитические функции, сдвиг Карлемана.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть T^+ — конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым контуром Ляпунова L . Для определенности будем полагать, что точка $z = 0$ принадлежит области T^+ . Рассматривается следующая краевая задача, впервые сформулированная в монографии [1].

Требуется найти все бианалитические функции $F(z)$ класса $A_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$, удовлетворяющие на L следующим краевым условиям:

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial x} = G_{11}(t) \frac{\overline{\partial F^+(t)}}{\partial x} + G_{12}(t) \frac{\partial F^+(t)}{\partial x} + g_1(t), \quad (1)$$



Three-Element Problem of Carleman Type for Bianaalytic Functions in a Circle

N. R. Perelman, K. M. Rasulov

The article is devoted to the investigation of three-element boundary value problem of Carleman type for bianaalytic functions. A constructive method for solution in a circle was found for the case when the problem was not reducible to a two-element boundary value problems without a shift.

Key words: boundary value problem, bianaalytic functions, Carleman shift.



$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial y} = -G_{21}(t) \overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial y}} + G_{22}(t) \frac{\partial F^+(t)}{\partial y} + ig_2(t), \quad (2)$$

где $G_{kj}(t), g_k(t)$ ($k = 1, 2, j = 1, 2$) — заданные на L функции класса $H^{(1)}(L)$, причем $G_{k1}(t) \neq 0$ на L ; $\alpha(t)$ — прямой или обратный сдвиг контура L , удовлетворяющий условию Карлемана $\alpha[\alpha(t)] = t$, и такой, что $\alpha'(t) \neq 0, \alpha(t) \in H^{(1)}(L)$.

Здесь множители (-1) перед $G_{21}(t)$ и i перед $g_2(t)$ в краевом условии (2) взяты для удобства в дальнейших обозначениях. Кроме того, без ограничения общности всюду в дальнейшем будем считать, что выполняется следующее «начальное условие»:

$$F(0) = 0. \quad (3)$$

Следуя [1], сформулированную задачу назовем *первой основной трехэлементной задачей типа Карлемана для бианалитических функций* или, короче, *задачей $K_{1,2}$* .

Основной целью настоящей работы является разработка конструктивного метода решения задачи $K_{1,2}$ в случае, когда $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ и $L = \{t : |t| = 1\}$.

2. О РЕДУКЦИИ ЗАДАЧИ $K_{1,2}$ К ДВУМ ТРЕХЭЛЕМЕНТНЫМ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ТИПА КАРЛЕМАНА В КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Покажем, что в случае $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ задача $K_{1,2}$ легко *редуцируется* к двум хорошо известным *трехэлементным* краевым задачам в классах аналитических в T^+ функций.

Действительно, так как (см., например, [1–3]) всякую бианалитическую в круге T^+ функцию можно представить в виде

$$F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z), \quad (4)$$

где $\varphi_0(z), \varphi_1(z)$ — аналитические в T^+ функции (называемые аналитическими компонентами функции $F(z)$), то с учетом того, что на окружности $L = \{t : |t| = 1\}$ выполняется тождество $\bar{t} = 1/t$ и в силу соотношений $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$ краевые условия (1) и (2) можно переписать так:

$$\Phi_k^+[\alpha(t)] = G_{k1}(t)\alpha(t)t\overline{\Phi_k^+(t)} + G_{k2}(t)\alpha(t)t^{-1}\Phi_k^+(t) + \alpha(t)g_k(t), \quad k = 1, 2, \quad (5)$$

где

$$\Phi_k^+(z) = z \frac{d\varphi_0(z)}{dz} + \frac{d\varphi_1(z)}{dz} + (-1)^{k-1}z\varphi_1(z), \quad k = 1, 2, \quad z \in T^+. \quad (6)$$

Очевидно, что каждое из равенств (5) (при фиксированном значении параметра k) представляет собой краевое условие хорошо известной *трехэлементной задачи типа Карлемана относительно аналитической в круге T^+ функции $\Phi_k^+(z)$* [4, с. 295].

Предположим, что обе краевые задачи (5) разрешимы и уже найдены их общие решения, т. е. аналитические в круге T^+ функции $\Phi_k^+(z), k = 1, 2$. Поскольку функции $G_{kj}(t), g_k(t)$ ($k = 1, 2, j = 1, 2$) и $\alpha(t)$ принадлежат классу $H^{(1)}(L)$, то решения краевых задач (5) будут принадлежат классу $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ (см., например, [1, с. 82]).

Покажем теперь, как по уже найденным функциям $\Phi_k^+(z), k = 1, 2$, можно получить решение исходной задачи $K_{1,2}$. Так как всякое решение задачи $K_{1,2}$ можно искать в виде (4), то для получения любого решения $F(z)$ этой задачи достаточно найти его *аналитические компоненты*, т. е. функции $\varphi_0(z), \varphi_1(z)$. Но в силу равенств (6) и с учетом (3) функции $\varphi_0(z), \varphi_1(z)$ можно определить по формулам:

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2z} (\Phi_1^+(z) - \Phi_2^+(z)), \quad (7)$$

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{\zeta} (\Phi_1^+(\zeta) + \Phi_2^+(\zeta)) + \frac{1}{\zeta^3} (\Phi_1^+(\zeta) - \Phi_2^+(\zeta)) - \frac{1}{\zeta^2} \left(\frac{d\Phi_1^+(\zeta)}{d\zeta} - \frac{d\Phi_2^+(\zeta)}{d\zeta} \right) \right] d\zeta, \quad (8)$$

где Γ — произвольная гладкая кривая, принадлежащая кругу T^+ и соединяющая точку 0 с произвольной точкой z этого круга.



Остается только установить условия, при которых функции $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$, определяемые по формулам (7) и (8), будут принадлежать классу $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$, а значит, искомая бианалитическая функция $F(z)$ будет принадлежать классу $A_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ (см., например, [1, с. 26]).

Поскольку $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_2^+(z)$ являются аналитическими в круге T^+ функциями класса $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$, то для них справедливы следующие разложения в степенные ряды:

$$\Phi_j^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} z^k,$$

где $a_{j,k} = \frac{d^{(k)}\Phi_j^+(0)}{dz^k}$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2, \dots$

Теперь нетрудно проверить, что функции $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$, определяемые по формулам (7) и (8) соответственно, будут аналитическими в круге T^+ функциями класса $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} a_{1,0} - a_{2,0} = 0, \\ a_{1,0} + a_{2,0} - a_{1,2} + a_{2,2} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Итак, при выполнении условий (9) решение искомой задачи $K_{1,2}$ можно получить по формуле (4), где $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$ — аналитические в круге T^+ функции, определяемые по формулам (7) и (8) соответственно.

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ и $\alpha(t)$, $G_{kj}(t)$, $g_k(t)$ ($k = 1, 2$; $j = 1, 2$) принадлежат классу $H^{(1)}(L)$. Тогда решение задачи $K_{1,2}$ в классе $A_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ бианалитических функций сводится к решению двух трехэлементных краевых задач вида (5) в классе аналитических функций $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$. При этом задача $K_{1,2}$ разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы две краевые задачи вида (5), и для их решений выполняются условия (9).

3. О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ $K_{1,2}$ В ВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

В силу теоремы 1 для построения метода решения задачи $K_{1,2}$ в классе бианалитических функций в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ достаточно решить две трехэлементные задачи типа Карлемана вида (5) относительно аналитических в круге T^+ функций $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_2^+(z)$.

Известно (см., например, [4, с. 295]), что каждая трехэлементная задача вида (5) (при фиксированном значении параметра k) вырождается в двухэлементную краевую задачу вида

$$A_k(t)\Phi_k^+(t) = B_k(t)\overline{\Phi_k^+(t)} + H_k(t), \quad k = 1, 2, \quad (10)$$

при выполнении следующих условий:

$$A_k(t) \neq 0, \quad B_k(t) \neq 0, \quad H_k(t) \neq 0, \quad t \in L, \quad k = 1, 2, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} A_k(t) &= 1 - G_{k1}[\alpha(t)]G_{k1}(t) - G_{k2}[\alpha(t)]\overline{G_{k2}(t)}, \\ B_k(t) &= t^2 \cdot \left\{ G_{k1}[\alpha(t)]G_{k2}(t) + G_{k2}[\alpha(t)]\overline{G_{k1}(t)} \right\}, \\ H_k(t) &= t \cdot \left\{ G_{k1}[\alpha(t)]g_k(t) + G_{k2}[\alpha(t)]\overline{g_k(t)} + g_k[\alpha(t)] \right\}, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (12)$$

Всюду в дальнейшем случай, когда для коэффициентов краевых условий (1) и (2) задачи $K_{1,2}$ выполняются условия (11), мы будем называть *вырожденным*.

Далее построим алгоритм решения задачи $K_{1,2}$ в вырожденном случае.

Вводя в рассмотрение вспомогательные аналитические в области $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$ (здесь \overline{C} — расширенная комплексная плоскость) функции вида (см. также [3, с. 290])

$$\Phi_k^-(z) = \overline{\Phi_k^+(1/z)}, \quad z \in T^-, \quad k = 1, 2, \quad (13)$$



из (10) будем иметь:

$$\Phi_k^+(t) = Q_k(t)\Phi_k^-(t) + q_k(t), \quad k = 1, 2, \quad (14)$$

где $Q_k(t) = B_k(t)/A_k(t)$, $q_k(t) = H_k(t)/A_k(t)$.

Замечание 1. Здесь мы учли, что граничные значения функций $\Phi_k^-(z)$, $k = 1, 2$, определенных по формулам (13), на окружности $L = \{t : |t| = 1\}$ удовлетворяют следующим условиям «симметрии»:

$$\Phi_k^+(t) = \overline{\Phi_k^-(t)}, \quad t \in L, \quad k = 1, 2. \quad (15)$$

Равенство (14) (при фиксированном значении параметра k) представляет собой краевое условие скалярной задачи Римана относительно ограниченной на бесконечности кусочно-аналитической функции $\Phi_k(z) = \{\Phi_k^+(z), \Phi_k^-(z)\}$ с линией скачков L .

Пусть $\chi_k = \text{Ind } Q_k(t)$ — индекс задачи Римана (14). Тогда, как известно (см., например, [3, 5]), при $\chi_k \geq 0$ задача Римана (14) (при каждом фиксированном значении параметра k) безусловно разрешима, и ее общее решение задается в виде

$$\Phi_k^\pm(z) = X_k^\pm(z) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q_k(\tau)}{X_k^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + P_{\chi_k}(z) \right], \quad z \in T^\pm, \quad (16)$$

где $X_k^+(z)$ и $X_k^-(z)$ — канонические функции задачи (14), а $P_{\chi_k}(z)$ — произвольный многочлен степени не выше χ_k . Если же $\chi_k < 0$, то при выполнении $-\chi_k - 1$ условий разрешимости вида

$$\int_L \frac{q_k(\tau)}{X_k^+(\tau)} \tau^{s-1} d\tau = 0, \quad s = 1, 2, \dots, -\chi_k - 1,$$

единственное решение задачи Римана (14) также задается формулой (16), где нужно положить $P_{\chi_k}(z) \equiv 0$.

Наконец, выбрав среди полученных решений задачи Римана (14) лишь те, граничные значения которых удовлетворяют условиям «симметрии» (15), определим функции $\Phi_k^+(z)$, являющиеся решениями краевой задачи (10). Отсюда с учетом теоремы 1 по формулам (4), (7) и (8) получим решение исходной задачи $K_{1,2}$ [6, 7].

Таким образом, при выполнении условий (11), получаем следующий алгоритм решения задачи $K_{1,2}$:

1. Сначала краевые условия (1) и (2) задачи $K_{1,2}$ приводим к виду (10) и переходим к следующему пункту.

2. Вводя в рассмотрение вспомогательные функции вида (13), переписываем равенства (10) в виде краевых условий двух скалярных задач Римана (14) и переходим к следующему пункту.

3. Решаем задачи Римана (14). Если хотя бы одна из задач Римана (14) неразрешима, то неразрешима и исходная задача $K_{1,2}$. Если же обе задачи Римана (14) разрешимы, то находим решения этих задач и переходим к следующему пункту.

4. Для полученных решений задач Римана (14) проверяем выполнение условий «симметрии» (15). Если хотя бы при одном значении параметра k не выполняется равенство вида (15), то исходная задача $K_{1,2}$ неразрешима. Если же выполняются оба равенства (15), то используя функции $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_2^+(z)$, найденные по формулам (16) и удовлетворяющие условиям (15), находим решения исходной задачи $K_{1,2}$ по формулам (4), (7) и (8).

Из сказанного выше следует, что в вырожденном случае для задачи $K_{1,2}$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ и выполняются условия (11). Тогда решение задачи $K_{1,2}$ в классе $A_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ бианалитических функций сводится к решению двух скалярных задач Римана (14) в классе $A(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$, ограниченных на бесконечности кусочно-аналитических функций $\Phi_k(z) = \{\Phi_k^+(z), \Phi_k^-(z)\}$ с линией скачков L . При этом задача $K_{1,2}$ разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы обе краевые задачи Римана (14), а также для их решений выполняются условия «симметрии» (15) и условия (9).

Замечание 2. Как видно из равенств (10), для более полного исследования задачи $K_{1,2}$, кроме вырожденного случая, целесообразно рассмотреть еще следующие три важных случая:



1) либо выполняются условия (невырожденный случай)

$$A_k(t) \equiv 0, \quad B_k(t) \equiv 0, \quad H_k(t) \equiv 0, \quad t \in L, \quad k = 1, 2; \quad (17)$$

2) либо выполняются условия (первый полувыврожденный случай)

$$\begin{cases} A_1(t) \equiv 0, & B_1(t) \equiv 0, & H_1(t) \equiv 0, & t \in L, \\ A_2(t) \neq 0, & B_2(t) \neq 0, & H_2(t) \neq 0, & t \in L; \end{cases}$$

3) либо выполняются условия (второй полувыврожденный случай)

$$\begin{cases} A_1(t) \neq 0, & B_1(t) \neq 0, & H_1(t) \neq 0, & t \in L, \\ A_2(t) \equiv 0, & B_2(t) \equiv 0, & H_2(t) \equiv 0, & t \in L. \end{cases}$$

Как было установлено в работе [8], методы решения трехэлементной задачи вида (5) в классах аналитических функций в невырожденном случае существенно зависят от характера функции сдвига $\alpha(t)$. Поэтому в невырожденном случае нужно отдельно построить алгоритмы решения задачи $K_{1,2}$ в зависимости от того, является ли сдвиг $\alpha(t)$ прямым или обратным. В настоящей работе ограничимся построением алгоритма решения задачи $K_{1,2}$ в случае, когда $\alpha(t)$ — обратный сдвиг контура L .

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ $K_{1,2}$ В НЕВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ И ОБРАТНОМ СДВИГЕ КОНТУРА

Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, $\alpha(t)$ — обратный сдвиг контура L , и выполняются условия (17). Ясно, что при выполнении условий (17) трехэлементные краевые задачи вида (5), вообще говоря, не приводятся к двухэлементным краевым (т. е. трехэлементные краевые задачи вида (5) не «вырождаются» в двухэлементные краевые задачи). Поэтому в силу теоремы 1 здесь возникает необходимость построения алгоритмов решения для двух невырожденных трехэлементных краевых задач вида (5) (при каждом фиксированном значении параметра k) в классах аналитических в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функций.

Далее, для решения трехэлементных краевых задач вида (5) в невырожденном случае воспользуемся методами, разработанными в статье К. М. Расулова [8].

Сначала, вводя обозначения

$$a_k(t) = G_{k2}(t)\alpha(t)t^{-1}, \quad b_k(t) = G_{k1}(t)\alpha(t)t, \quad h_k(t) = \alpha(t)g_k(t),$$

перепишем краевые условия (5) в более компактном виде

$$\Phi_k^+[\alpha(t)] = a_k(t)\Phi_k^+(t) + b_k(t)\overline{\Phi_k^+(t)} + h_k(t), \quad k = 1, 2. \quad (18)$$

Известно (см., например, [5, с. 296]), что из условий (17) с учетом (12) следует, что всюду на контуре L выполняется одно из следующих условий:

$$|a_k(t)| > |b_k(t)|, \quad |a_k(t)| < |b_k(t)|, \quad k = 1, 2. \quad (19)$$

В силу неравенств (19) (т. е. при выполнении условий (17)) трехэлементную задачу вида (18) (при каждом фиксированном значении параметра k) нужно исследовать отдельно в следующих двух случаях: $a_k(t) \neq 0$ на L и $b_k(t) \neq 0$ на L .

Для определенности всюду в дальнейшем рассмотрим случай, когда $a_k(t) \neq 0$ на L (случай $b_k(t) \neq 0$ на L исследуется совершенно аналогично).



Итак, требуется решить трехэлементную задачу вида (18) (для каждого фиксированного значения параметра k) при следующих предположениях:

- 1) $\alpha(t)$ — обратный сдвиг контура L ;
- 2) на контуре L выполняются условия (17);
- 3) во всех точках L выполняется условие

$$a_k(t) \neq 0. \tag{20}$$

Как показано в работе [8], при выполнении условия (20) для полного исследования трехэлементной задачи (18) нужно отдельно рассматривать следующие три подслучая (см. также [5, с. 142]):

- а) $a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t) - 1 \equiv 0$;
- б) $a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t) - 1 \neq 0, t \in L$;

в) когда выражение $a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t) - 1$ обращается в нуль в отдельных точках контура L (как, например, в случае $\alpha(t) = 1/t, a_k(t) = t^2 - 2, b_k(t) = \sqrt{2}(t - 1/t)$ и $h_k(t) \equiv 0$).

Сразу отметим, что при выполнении условий (17) из тождества $a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t) - 1 \equiv 0$ вытекает $b_k(t) \equiv 0$. Следовательно, в подслучае а) трехэлементная краевая задача (18) (при каждом фиксированном значении параметра k) равносильна известной (см., например, [5, § 13]) *двухэлементной* краевой задаче Карлемана вида

$$\Phi_k^+[\alpha(t)] = a_k(t)\Phi_k^+(t) + h_k(t), \quad k = 1, 2, \tag{21}$$

т. е. в данном подслучае *трехэлементная* задача (18) снова вырождается в хорошо известную *двухэлементную* краевую задачу (21).

Таким образом, в случае выполнения условий $a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t) - 1 \equiv 0, k = 1, 2$, получаем следующий результат.

Теорема 3. Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ и выполняются условия (17) и $a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t) - 1 \equiv 0, k = 1, 2$. Тогда решение задачи $K_{1,2}$ в классе $A_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ бианалитических функций сводится к решению двух скалярных задач Карлемана (21) в классе $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ аналитических в круге T^+ функций. При этом задача $K_{1,2}$ разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы обе краевые задачи Карлемана (21), а также для их решений выполняются условия (9).

Рассмотрим далее подслучай б), т. е. пусть $a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t) - 1 \neq 0, t \in L$. Тогда (в силу (17)) будем иметь: $b_k(t) \neq 0$ всюду на L . Поэтому краевое условие (18) (при каждом фиксированном значении параметра k) в данном случае можно переписать в виде

$$\Phi_k^+(t) = W_{k1}(t)\overline{\Phi_k^+(t)} + W_{k2}(t)\Phi_k^+[\alpha(t)] + f_k(t), \quad k = 1, 2, \tag{22}$$

где

$$W_{k1}(t) = -\frac{b_k(t)}{a_k(t)}, \quad W_{k2}(t) = \frac{1}{a_k(t)}, \quad f_k(t) = -\frac{q_k(t)}{a_k(t)}.$$

Далее для решения трехэлементной задачи (22) (при каждом фиксированном k) применим алгоритм, разработанный в статье [8]. А именно, вводя в рассмотрение вспомогательные аналитические в области T^- функции вида (13), перепишем равенства (22) так:

$$\Phi_k^+(t) = W_{k1}(t)\Phi_k^-(t) + \rho_k(t), \quad k = 1, 2, \tag{23}$$

где

$$\rho_k(t) = W_{k2}(t)\Phi_k^+[\alpha(t)] + f_k(t). \tag{24}$$

Если временно считать $\rho_k(t)$ известной функцией, то равенство (23) (при каждом фиксированном значении параметра k) будет представлять собой краевое условие скалярной задачи Римана относительно ограниченной на бесконечности кусочно-аналитической функции $\varphi_k(z) = \{\Phi_k^+(z), \Phi_k^-(z)\}$ с линией скачков L .

Пусть $\chi_k = \text{Ind } W_{k1}(t) \geq 0$. Тогда задача Римана (23) безусловно разрешима и ее общее решение можно задавать формулами (см., например, [2, с. 112]):

$$\Phi_k^+(z) = \frac{X_k^+(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\rho_k(\tau)}{X_k^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X_k^+(z)P_{\chi_k}(z), \quad z \in T^+, \tag{25}$$



$$\Phi_k^-(z) = \frac{X_k^-(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\rho_k(\tau)}{X_k^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X_k^-(z) P_{\chi_k}(z), \quad z \in T^-, \quad (26)$$

где $X_k^\pm(z)$ — канонические функции задачи Римана (23), а $P_{\chi_k}(z)$ — произвольный многочлен степени не выше χ_k .

Если же $\chi_k = \text{Ind } W_{k1}(t) < 0$, то при выполнении следующих $-\chi_k - 1$ условий разрешимости

$$\int_L \frac{W_{k2}(t) \Phi_k^+[\alpha(t)]}{X_k^+(t)} t^{k-1} dt = - \int_L \frac{\rho_k(t)}{X_k^+(t)} t^{k-1} dt, \quad k = 1, 2, \dots, -\chi_k - 1, \quad (27)$$

единственное решение задачи Римана (23) также задается формулами (25), (26), где нужно положить $P_{\chi_k}(z) \equiv 0$.

Далее, из формул (25) и (26) с учетом обозначений (24), формул Сохоцкого (см., например, [2, с. 38]) и равенства (см., например, [2, с. 40])

$$\frac{1}{2} \Phi_k^+(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi_k^+(\tau) d\tau}{\tau - t}$$

находим предельные значения $\Phi_k^+(z), \Phi_k^-(z)$ при $z \rightarrow t \in L$:

$$\Phi_k^+(t) = \int_L K_k^+(t, \tau) \Phi_k^+[\alpha(\tau)] d\tau + q_k^+(t), \quad t \in L, \quad (28)$$

$$\Phi_k^-(t) = \frac{1}{b_k(t)} \Phi_k^+[\alpha(t)] + \int_L K_k^-(t, \tau) \Phi_k^+[\alpha(\tau)] d\tau + q_k^-(t), \quad t \in L, \quad (29)$$

где

$$K_k^+(t, \tau) = \frac{X_k^+(t)}{2\pi i} \left(\frac{1}{a_k(\tau) X_k^+(\tau)} \frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{a_k(t) X_k^+(t)} \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \right),$$

$$K_k^-(t, \tau) = \frac{X_k^-(t)}{2\pi i} \left(\frac{1}{a_k(\tau) X_k^+(\tau)} \frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{a_k(t) X_k^+(t)} \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \right),$$

$$q_k^+(t) = \frac{1}{2} f_k(t) + \frac{X_k^+(t)}{2\pi i} \int_L \frac{f_k(\tau)}{X_k^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + X_k^+(t) P_{\chi_k}(t),$$

$$q_k^-(t) = - \frac{a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t)}{2a_k(t) \cdot b_k[\alpha(t)]} f_k(t) + \frac{X_k^-(t)}{2\pi i} \int_L \frac{f_k(\tau)}{X_k^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + X_k^-(t) P_{\chi_k}(t).$$

Нетрудно проверить (см. [8]), что при сделанных выше предположениях относительно функции сдвига $\alpha(t)$ и коэффициентов $G_{kj}(t), g_k(t)$ ($k = 1, 2; j = 1, 2$) краевых условий (1)–(2) будем иметь: $K_k^+(t, \tau), K_k^-(t, \tau) \in H_*^{(1)}(L \times L)$, а функции $q_k^+(t), q_k^-(t) \in H^{(1)}(L)$.

Потребуем теперь от функций, задаваемых формулами (25), (26) (т. е. от решений задачи Римана (23)), чтобы их граничные значения удовлетворяли условию «симметрии» вида (15). В силу формул (28) и (29) условие (15) равносильно следующему интегральному уравнению типа Фредгольма:

$$(N_k \nu_k)(t) \equiv \nu_k(t) + \int_L n_{k1}(t, \tau) \nu_k(\tau) d\tau - \overline{\int_L n_{k2}(t, \tau) \nu_k(\tau) d\tau} = r_k(t), \quad (30)$$

где $r_k(t) = b_k(t) [\overline{q_k^+(t)} - q_k^-(t)]$, $n_{k1}(t, \tau) = b_k(t) K_k^-(t, \tau)$, $n_{k2}(t, \tau) = \overline{b_k(t) K_k^+(t, \tau)}$, $\nu_k(t) = \Phi_k^+[\alpha(t)]$.

Введем в рассмотрение однородное интегральное уравнение, союзное с уравнением (30) (см. также [5, с. 365]):

$$(N'_k \mu_k)(t) \equiv \mu_k(t) + \int_L n_{k1}(\tau, t) \mu_k(\tau) d\tau - \int_L n_{k2}(\tau, t) \overline{\mu_k(\tau)} d\tau = 0. \quad (31)$$



Известно (см., например, [5, с. 370]), что для разрешимости неоднородного интегрального уравнения (30) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\operatorname{Re} \int_L r_k(t) \mu_{kj}(t) dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (32)$$

где $\mu_{k1}(t), \mu_{k2}(t), \dots, \mu_{km}(t)$ — полная система линейно независимых (над полем \mathbf{R}) решений однородного уравнения (31).

Замечание 3. Здесь важно отметить, что если $\chi_k = \operatorname{Ind} W_{k1}(t) \geq 0$, то некоторые из условий разрешимости (32) можно удовлетворить за счет определенного выбора значений произвольных постоянных, входящих в выражение $r_k(t)$.

Предположим, что интегральное уравнение (30) разрешимо (т. е. выполняются условия (32)) и $\nu_k(t) = \Phi_k^+[\alpha(t)]$ — его общее решение. Тогда, подставив функцию $\nu_k(t) = \Phi_k^+[\alpha(t)]$ в правые части формул (25) и (26), мы получим решения задачи Римана (23), удовлетворяющие условию «симметрии» (15).

Наконец, чтобы выделить среди решений $\Phi_k^+(z)$ задачи Римана (23), удовлетворяющих условию (15), функции, являющиеся решениями исходной трехэлементной задачи (18), нужно еще потребовать, чтобы для граничных значений $\Phi_k^+(t)$ этих решений выполнялось следующее равенство:

$$\Phi_k^+[\alpha(t)] = \nu_k(t), \quad t \in L, \quad (33)$$

где $\nu_k(t)$ — решения интегрального уравнения (30). Но в силу (28) равенство (33) равносильно тому, что функции $\Phi_k^+(t) = \nu_k[\alpha(t)]$ являются решениями интегрального уравнения

$$\nu_k[\alpha(t)] = \int_L K_k^+(t, \tau) \nu_k(\tau) d\tau + q_k^+(t), \quad t \in L. \quad (34)$$

Другими словами, условие (33) равносильно тому, что некоторые решения $\tilde{\nu}_k(t)$ интегрального уравнения (30) являются также решениями и уравнения (34).

Таким образом, для решения задачи $K_{1,2}$ в рассматриваемом случае можно использовать следующий алгоритм:

1. Решая интегральное уравнение (30) (при каждом фиксированном значении параметра k), в случае его разрешимости определяем функции $\nu_k(t) = \Phi_k^+[\alpha(t)]$, $k = 1, 2$, и переходим к пункту 2. Если же хотя бы при одном значении параметра k интегральное уравнение (30) неразрешимо, то исходная задача $K_{1,2}$ также неразрешима.

2. Среди решений интегрального уравнения (30) (при каждом фиксированном значении параметра k) выбираем только те функции $\tilde{\nu}_k(t) = \tilde{\Phi}_k^+[\alpha(t)]$, которые являются и решениями интегрального уравнения (34) и переходим к пункту 3. Если же ни одно решение уравнения (30) не удовлетворяет уравнению (34), то исходная задача $K_{1,2}$ неразрешима.

3. Если $\chi_k = \operatorname{Ind} W_{k1}(t) \geq 0$, то, поставив найденные в пункте 2 функции вида $\tilde{\nu}_k(t) = \tilde{\Phi}_k^+[\alpha(t)]$ в выражения для плотности $\rho_k(t) = W_{k2}(t) \tilde{\Phi}_k^+[\alpha(t)] + f_k(t)$ интегралов типа Коши в формулах (25) и (26), находим решения трехэлементной задачи (18). Если же $\chi_k = \operatorname{Ind} W_{k1}(t) < 0$, то сначала отбираем среди функций $\tilde{\nu}_k(t) = \tilde{\Phi}_k^+[\alpha(t)]$, найденных в пункте 2, только те, которые удовлетворяют еще условиям (27), а затем, подставив эти функции в правую часть формул (25) и (26), находим все решения трехэлементной задачи (18).

Итак, в данном случае с учетом теоремы 1 получаем следующий результат.

Теорема 4. Пусть $\alpha(t)$ — обратный сдвиг контура L и всюду на этом контуре выполняются условия (17) и $a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t) - 1 \neq 0$, $k = 1, 2$, $t \in L$. Тогда решение задачи $K_{1,2}$ сводится к последовательному решению двух интегральных уравнений вида (30) и двух интегральных уравнений вида (34), а также двух скалярных задач Римана вида (23). При этом для разрешимости задачи $K_{1,2}$ необходимо и достаточно, чтобы были одновременно разрешимы все четыре интегральных уравнения (30) и (34), а также две скалярные задачи Римана (23) и, кроме того, для решений задач Римана (23) выполнялись условия (9).



В заключение отметим, что в случае, когда выражение $a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t) - 1$ ($k = 1, 2$) обращается в нуль в отдельных точках контура L , трехэлементные задачи вида (18) (а значит, и исходная задача $K_{1,2}$) пока остаются не исследованными.

Библиографический список

1. *Расулов К. М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск : Изд-во Смоленск. гос. пед. ун-та, 1998. 345 с.
2. *Балк М. Б.* Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники ВИНТИ. Сер. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. 1991. Т. 85. С. 187–246.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.
4. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М. : Наука, 1977. 448 с.
5. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968. 511 с.
6. *Перельман Н. Р.* Трехэлементная задача типа Карлемана для трианалитических функций в круге // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы междунар. конф. Смоленск : СмолГУ, 2007. Вып. 8. С. 171–180.
7. *Расулов К. М., Тимов О. А.* О решении одной трехэлементной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций в круге // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы междунар. конф. Смоленск : Изд-во Смоленск. гос. пед. ун-та, 2004. Вып. 5. С. 153–159.
8. *Расулов К. М.* Трехэлементная односторонняя краевая задача со сдвигом Карлемана в классах аналитических функций в круге // Изв. Смоленск. гос. ун-та. 2008. № 2. С. 94–104.

УДК 512.554+512.643

ОБ ИДЕМПОТЕНТАХ АЛГЕБРЫ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

В. Б. Поплавский

Саратовский государственный университет
E-mail: poplavskivb@mail.ru

Изучается строение идемпотентных матриц с элементами из произвольной булевой алгебры в частичных полугруппах матриц произвольных размеров с конъюнктивным и дизъюнктивным частичным произведением. Показана связь разрешимости простейших матричных уравнений с некоторыми видами идемпотентных матриц, названных в статье вторичными идемпотентами. Также указывается связь произвольных идемпотентов со вторичными и изучаются их свойства.

Ключевые слова: булевы матрицы, матричные уравнения, идемпотенты.

ВВЕДЕНИЕ

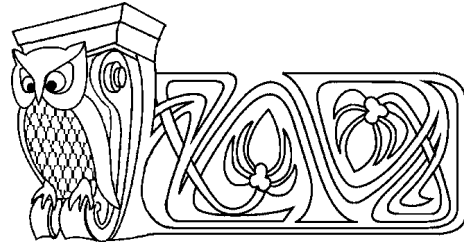
Пусть $\langle \mathbf{B}_{m \times n}, \cup, \cap, ', O, I \rangle$ есть булева алгебра $m \times n$ матриц с элементами из некоторой булевой алгебры $\langle \mathbf{B}, \cup, \cap, ', 0, 1 \rangle$. Операции объединения \cup , пересечения \cap , дополнения $'$ и, следовательно, отношение частичного порядка \subseteq определяются для матриц поэлементно. Матрицы O и I , образованные целиком из нулей (0) и единиц (1) соответственно, дают нуль и единицу такой вторичной булевой алгебры.

Определение 1. Матрицу $C = A \cap B \in \mathbf{B}_{m \times k}$ с элементами $C_j^i = \bigcup_{t=1}^n (A_t^i \cap B_t^j)$ назовём *конъюнктивным произведением* матриц согласованных размеров $A = (A_j^i) \in \mathbf{B}_{m \times n}$ и $B = (B_j^i) \in \mathbf{B}_{n \times k}$. *Дизъюнктивное произведение* $A \cup B$ определяется дуальным образом: $(A \cap B)' = A' \cup B'$ или $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Легко проверяется следующее утверждение.

Предложение 1. Если булевы матрицы A, B, C таких размеров, что операции умножения этих матриц определены, то имеют место следующие формулы:

1. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$
2. $A \cap E = A, E \cap A = A;$
3. $A \cap O = O, O \cap A = O;$
4. $(A \cap B)^T = B^T \cap A^T;$
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$ $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$



On Idempotents of Algebra of Boolean Matrices

V. B. Poplavski

The structure of idempotent matrices in partial semigroups of matrices of arbitrary sizes with elements from arbitrary Boolean algebra with conjunctive and disjunctive partial multiplications is investigated. The connection of solvability of the simplest matrix equations with some kind of idempotent matrices which are called «secondary idempotents» is shown. Also we show the connection of arbitrary idempotent matrices with secondary idempotents and investigate their properties.

Key words: Boolean matrices, matrix equations, idempotents.



$$6. \quad A \sqcap (B \sqcap C) \subseteq (A \sqcap B) \sqcap (A \sqcap C), \quad (A \sqcap B) \sqcap C \subseteq (A \sqcap C) \sqcap (B \sqcap C).$$

Выполняются также дуальные правила:

$$\begin{aligned} 1'. \quad A \sqcup (B \sqcup C) &= (A \sqcup B) \sqcup C; & 2'. \quad A \sqcup E' &= A, \quad E' \sqcup A = A; \\ 3'. \quad A \sqcup I &= I, \quad I \sqcup A = I; & 4'. \quad (A \sqcup B)^T &= B^T \sqcup A^T; \\ 5'. \quad A \sqcup (B \sqcap C) &= (A \sqcup B) \sqcap (A \sqcup C), & (A \sqcap B) \sqcup C &= (A \sqcup C) \sqcap (B \sqcup C); \\ 6'. \quad A \sqcup (B \sqcup C) &\supseteq (A \sqcup B) \sqcup (A \sqcup C), & (A \sqcup B) \sqcup C &\supseteq (A \sqcup C) \sqcup (B \sqcup C). \end{aligned}$$

Справедливо также:

$$A \sqcap (B \sqcup C) \subseteq (A \sqcap B) \sqcup C, \quad (A \sqcup B) \sqcap C \subseteq A \sqcup (B \sqcap C). \quad (1)$$

Здесь $E = (\delta_j^i)$ есть единичная матрица соответствующего размера (δ_j^i принимает значение 1, если $i = j$, и значение 0, если $i \neq j$); O и I определенные выше матрицы соответствующего размера; A^T означает транспонирование матрицы A .

Пусть символ $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ обозначает множество всех матриц конечных размеров, т.е. $\mathbf{M}(\mathbf{B}) = \bigcup_{m,n \in \mathbf{N}} \mathbf{B}_{m \times n}$.

Конъюнктивное и дизъюнктивное произведения являются ассоциативными, поэтому пары $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ и $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$ образуют частичные полугруппы относительно частичных, т.е. определенных не для всевозможных пар матриц, бинарных операций. При этом неравенство $A \subseteq B$ влечёт $A \sqcap C \subseteq B \sqcap C$, $C \sqcap A \subseteq C \sqcap B$ и $A \sqcup C \subseteq B \sqcup C$, $C \sqcup A \subseteq C \sqcup B$, что следует из свойств 5 или 6, а также 5' или 6' предложения 1 соответственно. Дополнение булевых матриц, рассматриваемое как отображение $' : \langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle \rightarrow \langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$, в силу равенства $(A \sqcap B)' = A' \sqcup B'$ является изоморфизмом частичных полугрупп.

Структура частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ в терминах идеалов изучалась в [1]. Здесь мы изучаем свойства алгебры $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap, \sqcup \rangle$, в которой равенства $A \sqcap (B \sqcup C) = (A \sqcap B) \sqcup C$ или $A \sqcup (B \sqcap C) = (A \sqcup B) \sqcap C$ в общем случае не выполняются (свойство (1)).

В связи с большим количеством приложений идемпотентные матрицы с элементами из решеток являются темой и объектом изучения многочисленных публикаций, среди которых мы приводим лишь малую часть. Так, обзор достижений в этом направлении и описание матричных идемпотентов над бинарной булевой алгеброй можно найти в [2]. Решеточное строение множества идемпотентных матриц над дистрибутивными решетками исследуется в [3].

В следующем параграфе исследуются признаки совместности простейших матричных уравнений. Показано, в частности, что для любой булевой матрицы A произвольного размера выполняются равенства

$$A = (A \sqcap A'^T) \sqcup A = A \sqcap (A'^T \sqcup A) = (A \sqcup A'^T) \sqcap A = A \sqcup (A'^T \sqcap A).$$

Здесь и далее полагаем, что $A'^T = (A^T)' = (A')^T$.

В параграфе 3 изучаются свойства произведений $A \sqcap A'^T$, $A'^T \sqcap A$, $A^T \sqcap A'$, $A' \sqcap A^T$, $A \sqcup A'^T$, $A'^T \sqcup A$, $A^T \sqcup A'$, $A' \sqcup A^T$. Показано, что все они являются идемпотентами особого типа, названного вторичным, в соответствующих частичных полугруппах $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$ и $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$.

Далее мы показываем, что порождаемость двумя матрицами одного и того же главного правого (левого) идеала частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ (или $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$) булевых матриц всевозможных размеров влечёт совпадение соответствующих им вторичных идемпотентов (теорема 3.2). Указывается также связь разрешимости простейших матричных уравнений со вторичными идемпотентами. Исследуется проблема делимости вторичных идемпотентов. В частности показано, что из левой делимости вторичных идемпотентов частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ следует их правая делимость.

В последнем параграфе устанавливается связь произвольных идемпотентов со вторичными, изучаются и их свойства. Показано, во-первых, что транзитивно-рефлексивное замыкание любого идемпотента частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ (которое, очевидно, совпадает с его рефлексивным замыканием) есть вторичный идемпотент. Во-вторых, для всякого транзитивно-рефлексивного замыкания \bar{A} произвольной квадратной матрицы A в частичной полугруппе $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ найдется матрица X (не обязательно квадратная), что $X \sqcup X'^T = \bar{A}$.



1. МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

Следующее предложение является модифицированной формой результата, принадлежащего Люцу [4, 5], для случая булевых матриц произвольных согласованных размеров над произвольной булевой алгеброй. Более того, оно обобщает на булевы матрицы известные эквивалентности: $a \cap x \subseteq b \leftrightarrow x \subseteq a' \cup b$ и $a \cup x \supseteq b \leftrightarrow x \supseteq a' \cap b$, которые справедливы для элементов a, b и x произвольной булевой алгебры.

Теорема 1.1. Для любых булевых матриц A, B и X согласованных размеров выполняется следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned} A \cap X \subseteq B &\longleftrightarrow X \subseteq A'^T \sqcup B; \\ X \cap A \subseteq B &\longleftrightarrow X \subseteq B \sqcup A'^T; \\ A \sqcup X \supseteq B &\longleftrightarrow X \supseteq A'^T \cap B; \\ X \sqcup A \supseteq B &\longleftrightarrow X \supseteq B \cap A'^T. \end{aligned}$$

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить первую эквивалентность неравенств, так как остальные доказываются аналогичным образом. Сделаем это поэлементно:

$$\begin{aligned} A \cap X \subseteq B &\longleftrightarrow (\forall i, j) \bigcup_k \{A_k^i \cap X_j^k\} \subseteq B_j^i \longleftrightarrow (\forall i, j, k) A_k^i \cap X_j^k \subseteq B_j^i \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow (\forall i, j, k) X_j^k \subseteq (A_k^i)' \cup B_j^i \longleftrightarrow (\forall i, j, k) X_j^k \subseteq ((A^T)_i^k)' \cup B_j^i \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow (\forall k, j) X_j^k \subseteq \bigcap_i \{((A^T)_i^k)' \cup B_j^i\} \longleftrightarrow X \subseteq (A^T)' \sqcup B. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 1.2. Для любых булевых матриц согласованных размеров A, B и переменной X выполняются следующие критерии совместности уравнений:

$$\begin{aligned} (\exists X) \quad A \cap X = B &\longleftrightarrow (A \cap A'^T) \sqcup B = A \cap (A'^T \sqcup B) = B; \\ (\exists X) \quad X \cap A = B &\longleftrightarrow B \sqcup (A'^T \cap A) = (B \sqcup A'^T) \cap A = B; \\ (\exists X) \quad A \sqcup X = B &\longleftrightarrow (A \sqcup A'^T) \cap B = A \sqcup (A'^T \cap B) = B; \\ (\exists X) \quad X \sqcup A = B &\longleftrightarrow B \cap (A'^T \sqcup A) = (B \cap A'^T) \sqcup A = B. \end{aligned}$$

Доказательство. Проверим первую эквивалентность. Пусть существует решение X уравнения $A \cap X = B$. Тогда $A \cap X \subseteq B$, что эквивалентно $X \subseteq A'^T \sqcup B$. Умножая последнее неравенство слева на матрицу A и применяя (1), получаем $B = A \cap X \subseteq A \cap (A'^T \sqcup B) \subseteq (A \cap A'^T) \sqcup B$. Заметим, что $A \cap A'^T \subseteq E'$, так как каждый элемент главной диагонали квадратной матрицы $A \cap A'^T$ есть 0. Окончательно получаем:

$$B = A \cap X \subseteq A \cap (A'^T \sqcup B) \subseteq (A \cap A'^T) \sqcup B \subseteq E' \sqcup B = B.$$

Таким образом, $A \cap (A'^T \sqcup B) = (A \cap A'^T) \sqcup B = B$.

С другой стороны, очевидно, из равенства $A \cap (A'^T \sqcup B) = B$ следует разрешимость уравнения $A \cap X = B$.

Остальные эквивалентности доказываются по аналогии. □

Теорема 1.3. Для любой булевой матрицы A произвольного размера выполняются равенства:

$$A = (A \cap A'^T) \sqcup A = A \cap (A'^T \sqcup A) = (A \sqcup A'^T) \cap A = A \sqcup (A'^T \cap A).$$

Доказательство. Указанные равенства следуют из теоремы 1.2 и того, что уравнения $A \cap X = A$ и $A \sqcup X = A$ всегда имеют решения $X = E$ и $X = E'$ соответственно. □

2. ВТОРИЧНЫЕ ИДЕМПОТЕНТЫ

Теорема 2.1. Квадратные матрицы $A \sqcup A'^T, A'^T \sqcup A, A^T \sqcup A', A' \sqcup A^T$ являются идемпотентами в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \cap \rangle$, а матрицы $A \cap A'^T, A'^T \cap A, A^T \cap A', A' \cap A^T$ — идемпотентами в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$.



Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать это утверждение только для первой матрицы $A \sqcup A^{T^T}$. С одной стороны, применяя (1) и теорему 1.3, получаем

$$(A \sqcup A^{T^T}) \sqcap (A \sqcup A^{T^T}) \subseteq A \sqcup (A^{T^T} \sqcap (A \sqcup A^{T^T})) = A \sqcup A^{T^T}.$$

С другой стороны,

$$(A \sqcup A^{T^T}) \sqcap (A \sqcup A^{T^T}) \supseteq (A \sqcup A^{T^T}) \sqcap E = A \sqcup A^{T^T},$$

так как $E \subseteq A \sqcup A^{T^T}$. □

Пусть $A^{\mathcal{R}} = A \sqcup A^{T^T}$ и $A^{\mathcal{L}} = A^{T^T} \sqcup A$ обозначают идемпотенты в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, порождённые матрицей A . Так как $(A^{\mathcal{R}})^{T^T} = (A \sqcup A^{T^T})^{T^T} = A \sqcap A^{T^T}$ и $(A^{\mathcal{L}})^{T^T} = (A^{T^T} \sqcup A)^{T^T} = A^{T^T} \sqcap A$, то $(A^{\mathcal{R}})^{T^T}$ и $(A^{\mathcal{L}})^{T^T}$ обозначают идемпотенты, порождённые матрицей A в частичной полугруппе $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$.

Теорема 2.2. *Справедливы следующие равенства:*

$$A^{\mathcal{R}} = (A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{R}} = (A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{L}} \quad \text{и} \quad A^{\mathcal{L}} = (A^{\mathcal{L}})^{\mathcal{L}} = (A^{\mathcal{L}})^{\mathcal{R}}.$$

Доказательство. Имеем

$$(A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{R}} = (A \sqcup A^{T^T}) \sqcup (A \sqcup A^{T^T})^{T^T} = (A \sqcup A^{T^T}) \sqcup (A \sqcap A^{T^T}) = A \sqcup (A^{T^T} \sqcup (A \sqcap A^{T^T})) = A \sqcup A^{T^T} = A^{\mathcal{R}}.$$

Аналогично,

$$(A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{L}} = (A \sqcup A^{T^T})^{T^T} \sqcup (A \sqcup A^{T^T}) = (A \sqcap A^{T^T}) \sqcup (A \sqcup A^{T^T}) = ((A \sqcap A^{T^T}) \sqcup A) \sqcup A^{T^T} = A \sqcup A^{T^T} = A^{\mathcal{R}}.$$

Равенство $A^{\mathcal{L}} = (A^{\mathcal{L}})^{\mathcal{L}} = (A^{\mathcal{L}})^{\mathcal{R}}$ следует из того, что $A^{\mathcal{R}} = (A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{R}} = (A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{L}}$, и равенств $(A^{T^T})^{\mathcal{L}} = A^{\mathcal{R}}$, $(A^{T^T})^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$. □

Теорема 2.3. *Для всякой идемпотентной в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ булевой матрицы A выполняется одно из следующих двух условий: 1) $A \subsetneq A^{\mathcal{R}}$ и $A \subsetneq A^{\mathcal{L}}$; 2) $A = A^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$.*

Доказательство. Пусть $A = A \sqcap A$, тогда из (1) и неравенства $A \sqcup A^{T^T} \supseteq E$ следует

$$A^{\mathcal{R}} = A \sqcup A^{T^T} = (A \sqcap A) \sqcup A^{T^T} \supseteq A \sqcap (A \sqcup A^{T^T}) \supseteq A \sqcap E = A.$$

Аналогично можно доказать неравенство $A \subseteq A^{T^T} \sqcup A = A^{\mathcal{L}}$.

Предположим теперь, что $A = A^{\mathcal{R}}$. Тогда, применяя теорему 2.2, получаем $A = A^{\mathcal{R}} = (A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{R}} = (A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{L}} = A^{\mathcal{L}}$. □

Определение 2.1. Назовем идемпотент A частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ *первичным*, если выполняется условие $A \neq A^{\mathcal{R}}$, и *вторичным*, если $A = A^{\mathcal{R}}$, т. е. $A = A^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$.

Аналогичные условия определяют вторичные идемпотенты частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$: $A = A \sqcap A^{T^T} = A^{T^T} \sqcap A$ или $A = (A^{\mathcal{R}})^{T^T} = (A^{\mathcal{L}})^{T^T}$.

Пример 2.1. Так как $O^{T^T} \sqcup O = I$ и $E = E^{T^T} \sqcup E = E \sqcup E^{T^T}$, $I = I^{T^T} \sqcup I = I \sqcup I^{T^T}$, то матрица O является первичным идемпотентом, а матрицы E и I — вторичными идемпотентами в частичной полугруппе $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$.

Матрица $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ является первичным идемпотентом в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, так как

$$D \sqcap D = D \quad \text{и} \quad D \sqcup D^{T^T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq D^{T^T} \sqcup D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ также даёт пример первичного идемпотента, но для неё выполняется

$$C \sqcup C^{T^T} = C^{T^T} \sqcup C \neq C.$$

Теорема 2.4. *Множество вторичных идемпотентов частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ и множество вторичных идемпотентов частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$ не пересекаются.*

Доказательство. Заметим, что неравенства $E \subseteq A \sqcup A^{T^T} = A^{\mathcal{R}}$ и $(B^{\mathcal{R}})^{T^T} = B \sqcap B^{T^T} \subseteq E'$ справедливы для любых матриц A и B соответствующих размеров. Тогда предположение, что для некоторых матриц A и B выполняется равенство $A^{\mathcal{R}} = (B^{\mathcal{R}})^{T^T}$, приводит к противоречию. □



3. РАЗРЕШИМОСТЬ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ И ВТОРИЧНЫЕ ИДЕМПОТЕНТЫ

Теорема 3.1. Пусть булевы матрицы A и B подходящих размеров. Тогда

$$\begin{aligned} (\exists X) \quad A \sqcup X = B &\longrightarrow A^{\mathcal{R}} \sqcap B^{\mathcal{R}} = B^{\mathcal{R}} \longrightarrow A^{\mathcal{R}} \subseteq B^{\mathcal{R}}; \\ (\exists X) \quad A \sqcap X = B &\longrightarrow B^{\mathcal{R}} \sqcap A^{\mathcal{R}} = B^{\mathcal{R}} \longrightarrow A^{\mathcal{R}} \subseteq B^{\mathcal{R}}; \\ (\exists X) \quad X \sqcup A = B &\longrightarrow A^{\mathcal{L}} \sqcap B^{\mathcal{L}} = B^{\mathcal{L}} \longrightarrow A^{\mathcal{L}} \subseteq B^{\mathcal{L}}; \\ (\exists X) \quad X \sqcap A = B &\longrightarrow B^{\mathcal{L}} \sqcap A^{\mathcal{L}} = B^{\mathcal{L}} \longrightarrow A^{\mathcal{L}} \subseteq B^{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

Доказательство. Из теоремы 1.2 и совместности уравнения $A \sqcup X = B$ имеем $(A \sqcup A'^T) \sqcap B = B$. Используя соотношения (1), получим

$$B \sqcup B'^T = E \sqcap (B \sqcup B'^T) \subseteq (A \sqcup A'^T) \sqcap (B \sqcup B'^T) \subseteq ((A \sqcup A'^T) \sqcap B) \sqcup B'^T = B \sqcup B'^T.$$

Следовательно, $(A \sqcup A'^T) \sqcap (B \sqcup B'^T) = B \sqcup B'^T$, т. е. $A^{\mathcal{R}} \sqcap B^{\mathcal{R}} = B^{\mathcal{R}}$.

Равенство $A^{\mathcal{R}} \sqcap B^{\mathcal{R}} = B^{\mathcal{R}}$ влечёт $A^{\mathcal{R}} \subseteq B^{\mathcal{R}}$. Действительно, так как $E \subseteq B^{\mathcal{R}}$, то $A^{\mathcal{R}} \sqcap E \subseteq A^{\mathcal{R}} \sqcap B^{\mathcal{R}}$. Это означает, что $A^{\mathcal{R}} \subseteq A^{\mathcal{R}} \sqcap B^{\mathcal{R}}$ для любых вторичных идемпотентов $A^{\mathcal{R}}$ и $B^{\mathcal{R}}$, а значит, $A^{\mathcal{R}} \subseteq B^{\mathcal{R}}$.

Из совместности уравнения $A \sqcap X = B$ имеем $(A \sqcap A'^T) \sqcup B = B$ или эквивалентное равенство $B'^T \sqcap (A \sqcup A'^T) = B'^T$. Тогда

$$B \sqcup B'^T = (B \sqcup B'^T) \sqcap E \subseteq (B \sqcup B'^T) \sqcap (A \sqcup A'^T) \subseteq B \sqcup (B'^T \sqcap (A \sqcup A'^T)) = B \sqcup B'^T.$$

Получили $(B \sqcup B'^T) \sqcap (A \sqcup A'^T) = B \sqcup B'^T$, т. е. $B^{\mathcal{R}} \sqcap A^{\mathcal{R}} = B^{\mathcal{R}}$, что тоже влечет неравенство $A^{\mathcal{R}} \subseteq B^{\mathcal{R}}$.

Остальные импликации теоремы проверяются по аналогии. \square

Разбиения частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, определяемые множествами главных правых и главных левых идеалов, позволяют определить эквивалентности на $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, которые, как и в теории полугрупп, будем называть \mathcal{R} - и \mathcal{L} -отношения Грина на частичной полугруппе всевозможных булевых матриц $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ соответственно (см. [1, 6]). Аналогичное замечание можно сделать и для частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$.

Следующая теорема объясняет наш выбор используемых обозначений вторичных идемпотентов \mathcal{R} -типа: $A^{\mathcal{R}}$ и $(A^{\mathcal{R}})^T$, или \mathcal{L} -типа: $A^{\mathcal{L}}$ и $(A^{\mathcal{L}})^T$ для частичных полугрупп $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ и $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$ соответственно.

Теорема 3.2. Порождаемость матрицами одного и того же одностороннего (правого или левого) главного идеала частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ (или $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$) влечёт совпадение вторичных идемпотентов, соответствующих этим матрицам.

Доказательство. Если A и B порождают один и тот же (допустим, правый) идеал в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, то $(\exists X) A \sqcap X = B$ и $(\exists Y) B \sqcap Y = A$. Тогда из теоремы 3.1 получаем $A^{\mathcal{R}} \subseteq B^{\mathcal{R}}$ и $A^{\mathcal{R}} \supseteq B^{\mathcal{R}}$, т. е. $A^{\mathcal{R}} = B^{\mathcal{R}}$. \square

Теорема 3.3. Односторонний идеал, порождённый вторичным идемпотентом, не может породиться другим вторичным идемпотентом.

Доказательство По теореме 2.2 выполняются равенства $(A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{R}} = (A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{L}} = A^{\mathcal{R}}$ и $(A^{\mathcal{L}})^{\mathcal{L}} = (A^{\mathcal{L}})^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$. Тогда утверждение непосредственно следует из теоремы 3.2. \square

Пример 3.1. Легко проверяется, что матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ порож-

дают один и тот же правый идеал частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$. Можно также показать, что $A^{\mathcal{R}} = B^{\mathcal{R}} = A'^T$.

В случае, когда матрица A в теореме 3.1 является вторичным идемпотентом, некоторые импликации этой теоремы становятся эквивалентностями. А именно имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.4. Для любых булевых матриц согласованных размеров A , B и переменной X выполняются следующие критерии совместности уравнений:

$$(\exists X) \quad A^{\mathcal{R}} \sqcap X = B \iff (A^{\mathcal{R}})^T \sqcup B = A^{\mathcal{R}} \sqcap B = B \iff A^{\mathcal{R}} \sqcap B = B; \quad (2)$$

$$(\exists X) \quad X \sqcap A^{\mathcal{R}} = B \iff B \sqcup (A^{\mathcal{R}})^T = B \sqcap A^{\mathcal{R}} = B \iff B \sqcap A^{\mathcal{R}} = B; \quad (3)$$



$$(\exists X) A^{\mathcal{R}} \sqcup X = B \iff A^{\mathcal{R}} \sqcap B = A^{\mathcal{R}} \sqcap ((A^{\mathcal{R}})^{\prime T} \sqcap B) = B \implies A^{\mathcal{R}} \sqcap B = B; \quad (4)$$

$$(\exists X) X \sqcup A^{\mathcal{R}} = B \iff B \sqcap A^{\mathcal{R}} = (B \sqcap (A^{\mathcal{R}})^{\prime T}) \sqcup A^{\mathcal{R}} = B \implies B \sqcap A^{\mathcal{R}} = B. \quad (5)$$

Доказательство. Используя теорему 1.2, получаем:

$$\begin{aligned} (\exists X) A^{\mathcal{R}} \sqcap X = B &\iff (A^{\mathcal{R}} \sqcap (A^{\mathcal{R}})^{\prime T}) \sqcup B = A^{\mathcal{R}} \sqcap ((A^{\mathcal{R}})^{\prime T} \sqcup B) = B \iff \\ &\iff (A^{\mathcal{R}} \sqcup (A^{\mathcal{R}})^{\prime T})^{\prime T} \sqcup B = A^{\mathcal{R}} \sqcap ((A^{\mathcal{R}})^{\prime T} \sqcup B) = B \iff \\ &\iff ((A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{R}})^{\prime T} \sqcup B = A^{\mathcal{R}} \sqcap ((A^{\mathcal{R}})^{\prime T} \sqcup B) = B \iff \\ &\iff (A^{\mathcal{R}})^{\prime T} \sqcup B = A^{\mathcal{R}} \sqcap B = B \implies A^{\mathcal{R}} \sqcap B = B \implies (\exists X) A^{\mathcal{R}} \sqcap X = B. \end{aligned}$$

Таким образом, $(\exists X) A^{\mathcal{R}} \sqcap X = B \iff (A^{\mathcal{R}})^{\prime T} \sqcup B = A^{\mathcal{R}} \sqcap B = B \iff A^{\mathcal{R}} \sqcap B = B$.

Аналогично проверяются остальные эквивалентности и импликации. \square

Замечание. В формулах теоремы 3.4 можно заменить матрицу $A^{\mathcal{R}}$ на $A^{\mathcal{L}}$, так как $(A^{\prime T})^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$.

Следствие 3.5. Для любого вторичного идемпотента $A = A^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$ и матрицы B согласованного размера выполняются импликации:

$$\begin{aligned} (\exists X) A \sqcup X = B &\implies (\exists X) A \sqcap X = B, \\ (\exists X) X \sqcup A = B &\implies (\exists X) X \sqcap A = B. \end{aligned}$$

Доказательство. Так как $A = A^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$, то утверждения следуют из (4) и (5). \square

Следствие 3.6. Для любых булевых матриц согласованных размеров A, B выполняются импликации:

$$(\exists X) A \sqcup X = B^{\mathcal{R}} \implies (\exists X) A^{\mathcal{R}} \sqcap X = B^{\mathcal{R}}, \quad (6)$$

$$(\exists X) A \sqcap X = B^{\mathcal{R}} \implies (\exists X) X \sqcap A^{\mathcal{R}} = B^{\mathcal{R}}, \quad (7)$$

$$(\exists X) X \sqcup A = B^{\mathcal{R}} \implies (\exists X) A^{\mathcal{L}} \sqcap X = B^{\mathcal{R}}, \quad (8)$$

$$(\exists X) X \sqcap A = B^{\mathcal{R}} \implies (\exists X) X \sqcap A^{\mathcal{L}} = B^{\mathcal{R}}.$$

Выполняются также импликации, которые получаются из предыдущих заменой в них матрицы $B^{\mathcal{R}}$ на матрицу $B^{\mathcal{L}}$.

Доказательство. Указанные импликации получаются из теоремы 3.1 и формул теоремы 2.2 заменой B на $B^{\mathcal{R}}$ (или B на $B^{\mathcal{L}}$). \square

Определение 3.1. Будем говорить, что матрица B \sqcap -делится на A слева в частичной полугруппе всевозможных булевых матриц $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, если уравнение $A \sqcap X = B$ имеет решение, и справа, если имеет решение уравнение $X \sqcap A = B$.

Правая и левая \sqcup -делимость в частичной полугруппе всевозможных булевых матриц $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$ определяются аналогично.

Теорема 3.7. Для вторичных идемпотентов частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ выполняются следующие утверждения:

a) правая (или левая) \sqcup -делимость этих идемпотентов влечёт их правую и левую \sqcap -делимость;

b) левая \sqcap -делимость этих идемпотентов влечёт их правую \sqcap -делимость.

Доказательство. Импликации (6) и (8) и равенства $A = A^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$ и $B = B^{\mathcal{R}} = B^{\mathcal{L}}$ дают то, что правая или левая \sqcup -делимость идемпотентов A и B влечёт их левую \sqcap -делимость.

То, что левая \sqcap -делимость вторичных идемпотентов A и B влечёт их правую \sqcap -делимость, из (7) следует. \square

Определение 3.2. Определим $B \leq A$ для идемпотентов B и A частичной полугруппы всевозможных булевых матриц $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, если $B \sqcap A = A \sqcap B = B$.

Легко проверяется, что это бинарное отношение является частичным порядком [6, § 1.8] и называется естественным частичным порядком на множестве идемпотентов.

Теорема 3.8. Для вторичных идемпотентов $A = A^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$ и $B = B^{\mathcal{R}} = B^{\mathcal{L}}$ выполняется $B \leq A$ тогда и только тогда, когда $A \sqcap B = B$.

Доказательство. Из b) следствия 3.7 и формул (2) и (3) получаем, что из $A \sqcap B = B$ следует $B \sqcap A = B$. \square



4. СВОЙСТВА МАТРИЧНЫХ ИДЕМПОТЕНТОВ И ТРАНЗИТИВНО-РЕФЛЕКСИВНЫХ ЗАМКЯНИЙ

Утверждение следующей теоремы для случая брауэровых решеток было получено в [3, лемма 2.3].

Теорема 4.1. Пусть A — идемпотент частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$. Матрица A есть вторичный идемпотент тогда и только тогда, когда $E \subseteq A$.

Доказательство. Из $E \subseteq A$ следует $E^{T'} \supseteq A^{T'}$. Тогда $A = A \sqcup E^{T'} \supseteq A \sqcup A^{T'}$. Так как для любого идемпотента выполняется $A \subseteq A \sqcup A^{T'}$ (см. теорему 2.3), получаем $A = A \sqcup A^{T'}$. Следовательно, $A = A^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$.

Заметим, что если A есть вторичный идемпотент, то $A = A \sqcup A^{T'} = A^{T'} \sqcup A \supseteq E$. □

Теорема 4.2. Пусть A — произвольный идемпотент частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ и E — единичная матрица того же размера, тогда $E \cup A$ является вторичным идемпотентом.

Доказательство. Учитывая теорему 4.1, достаточно показать, что объединение любого идемпотента с единичной матрицей того же размера есть идемпотент. Действительно, так как $A = A \sqcap A = A^2$, то из $(E \cup A)^2 = (E \cup A) \sqcap (E \cup A) = E \cup A \cup A^2$ получаем $(E \cup A)^2 = E \cup A$. □

Пример 4.1. Матрица D из примера 2.1 и матрица $D \cup E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ являются первичным и

вторичным идемпотентами в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ соответственно. Однако вторичные идемпотенты $D \cup E$, $D^{\mathcal{R}}$ и $D^{\mathcal{L}}$ являются различными.

Для первичного идемпотента C из примера 2.1 выполняются равенства $C \cup E = C^{\mathcal{R}} = C^{\mathcal{L}}$.

Теорема 4.3. Пусть для некоторых матриц A, B выполняется $B \sqcap A = A$. Тогда из неравенства $B \subseteq A \subseteq A^{\mathcal{R}}$ следует, что A — идемпотент частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$. Соответственно из $A \sqcap B = A$ и $B \subseteq A \subseteq A^{\mathcal{L}}$ следует, что A — идемпотент частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$.

В частности, из $E \subseteq A \subseteq A^{\mathcal{R}}$ или $E \subseteq A \subseteq A^{\mathcal{L}}$ следует, что A — вторичный идемпотент частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, т. е. $A = A^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$.

Доказательство. Умножая справа неравенство $B \subseteq A \subseteq A \sqcup A^{T'}$ на A , получаем $B \sqcap A \subseteq A \sqcap A \subseteq (A \sqcup A^{T'}) \sqcap A$. Применяя формулы из теоремы 1.3, получаем $A \subseteq A \sqcap A \subseteq A$, т. е. $A = A \sqcap A$.

Аналогично проверяется то, что из $A \sqcap B = A$ и $B \subseteq A \subseteq A^{\mathcal{L}}$ следует, что A — идемпотент частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$. Тогда по теореме 4.2 получаем, что неравенства $E \subseteq A \subseteq A^{\mathcal{R}}$ влекут то, что A — идемпотент, причем вторичный. □

Теорема 4.4. Для любой квадратной матрицы X верны эквивалентности:

$$(X \cup E) \subseteq (X \cup E)^{\mathcal{R}} \iff (X \cup E) \subseteq (X \cup E)^{\mathcal{L}} \iff (X \cup E) = (X \cup E)^{\mathcal{R}} \iff (X \cup E) = (X \cup E)^{\mathcal{L}}.$$

Причём идемпотентные в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ матрицы (такого же размера, как и указанная матрица E) являются решениями этих эквивалентных неравенств и уравнений.

Доказательство. Очевидно, из теорем 2.3, 4.1 и 4.3 следуют эквивалентности:

$$E \subseteq A \subseteq A^{\mathcal{R}} \iff E \subseteq A \subseteq A^{\mathcal{L}} \iff A = A^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}} \iff A = A^{\mathcal{R}} \iff A = A^{\mathcal{L}}.$$

Учитывая это замечание, получаем утверждение теоремы 4.4. □

Однако не всякое решение X неравенств или уравнений, указанных в теореме 4.4, является идемпотентом. Матрица $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ не является идемпотентной в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, но $X \cup E$ есть вторичный идемпотент (см. пример 4.1) и, следовательно, удовлетворяет указанным выше соотношениям.

Определение 4.1. Рефлексивным замыканием квадратной матрицы A в частичной полугруппе $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ называют матрицу $E \cup A$. Транзитивно-рефлексивным замыканием квадратной матрицы A в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ называют матрицу $\bar{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty} A^k = E \cup A \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots$, где A^k обозначает конъюнктивное произведение $A \sqcap \dots \sqcap A$, содержащее k сомножителей.

Для идемпотентных матриц понятия «рефлексивное замыкание» и «транзитивно-рефлексивное замыкание», очевидно, совпадают. Очевидно также, что транзитивно-рефлексивное замыкание любого



идемпотента есть вторичный идемпотент. Более того, транзитивно-рефлексивное замыкание всякой квадратной матрицы является идемпотентом, причем, учитывая теорему 4.1, вторичным. Наоборот, всякий вторичный идемпотент совпадает со своим транзитивно-рефлексивным замыканием. Таким образом, указанные в теореме 3.7 свойства делимости для вторичных идемпотентов становятся свойствами транзитивно-рефлексивных замыканий.

Замечание. Пусть \bar{A} — транзитивно-рефлексивное замыкание произвольной булевой квадратной матрицы A в частичной полугруппе $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$. Тогда уравнение $X \sqcup X'^T = \bar{A}$ разрешимо.

Действительно, так как транзитивно-рефлексивное замыкание \bar{A} есть вторичный идемпотент, то в качестве решения X уравнения $X \sqcup X'^T = \bar{A}$ можно взять любую матрицу, порождающую тот же правый идеал в частичной полугруппе $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$, что и идемпотент \bar{A} (см. теорему 3.2).

Аналогично, решением уравнения $X'^T \sqcup X = \bar{A}$ может быть любая матрица, порождающая тот же левый идеал, что и идемпотент \bar{A} .

Следующий пример показывает, что решения уравнения $X \sqcup X'^T = \bar{A}$ (или $X'^T \sqcup X = \bar{A}$) и матрица \bar{A} могут порождать разные односторонние идеалы.

Пример 4.2. Легко проверить, что матрицы $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ удовлетворяют равенству $X \sqcup X'^T = \bar{A}$. Причем матрицы X и A порождают один и тот же правый идеал (у них одинаковые столбцовые пространства, см. [1]). Однако матрицы X и $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ порождают разные односторонние идеалы.

Библиографический список

1. Поплавский В. Б. О рангах, классах Грина и теории определителей булевых матриц // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 4. С. 42–60.
2. Бисли Л. Б., Гутерман А. Э., Канг К.-Т., Сонг С.-З. Идемпотентные матрицы и мажорирование // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13, вып. 1. С. 11–29.
3. Кумаров В. Б. Решетка идемпотентных матриц над дистрибутивными решетками // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13, вып. 4. С. 121–144.
4. Luce R. D. A note on Boolean matrix theory // Proc. Am. Math. Soc. 1952. Vol. 3. P. 382–388.
5. Rudeanu S. Boolean functions and equations. Amsterdam; London : North-Holland Publishing Company; N.Y. : American Elsevier Publishing Company, Inc. 1974. 442 p.
6. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп : в 2 т. Т. 1. М. : Мир, 1972. 287 с.

УДК 517.984

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОРЯДКОВ НА НЕКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СЕТЯХ

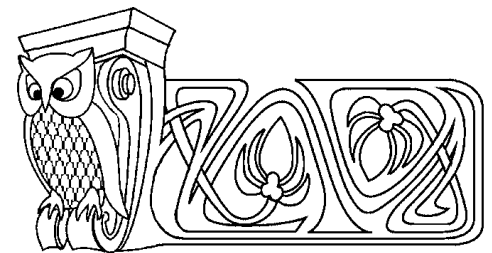
В. А. Юрко

Саратовский государственный университет
E-mail: YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для дифференциальных операторов произвольных порядков на некомпактных графах. Доказана теорема единственности восстановления потенциалов по матрицам Вейля.

Ключевые слова: некомпактные графы, обратные спектральные задачи, матрицы Вейля.

1. Исследуется нелинейная обратная спектральная задача восстановления потенциалов дифференциальных операторов произвольных порядков на некомпактных графах. Обратная спектральная задача для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля на графах изучалась в [1–8] и других



Uniqueness of Recovering Arbitrary Order Differential Operators on Noncompact Spatial Networks

V. A. Yurko

An inverse spectral problem is studied for arbitrary order differential operators on noncompact graphs. A uniqueness theorem of recovering potentials from the Weyl matrices is proved.

Key words: noncompact graphs, inverse spectral problems, Weyl matrices.



работах. Дифференциальные операторы высших порядков на компактных графах исследовались в [9–10]. В данной статье исследуются дифференциальные операторы высших порядков на некомпактных графах без циклов (деревьях). Доказана теорема единственности решения обратной задачи восстановления потенциалов по заданным матрицам Вейля. Отметим, что обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов на *интервале* достаточно подробно представлены в работах [11–16].

Рассмотрим некомпактное дерево T в \mathbf{R}^N с множеством вершин $V = \{v_1, \dots, v_r\}$ и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_r\}$, где $e_j = [v_{k_j}, v_j]$, $j = \overline{1, r-1}$, $k_j > j$ — конечные отрезки, а $e_r = (v_0, v_r]$ — бесконечный луч, $v_0 := \infty$. Пусть $\Gamma := \{v_1, \dots, v_p\}$ — множество конечных граничных вершин, а $E := \{e_1, \dots, e_p\}$ — множество компактных граничных ребер. Для двух точек $a, b \in T$ будем писать $a \leq b$, если a лежит на единственном простом пути, соединяющем v_0 с b . Будем писать $a < b$, если $a \leq b$ и $a \neq b$. Если $a < b$, то обозначим $[a, b] := \{z \in T : a \leq z \leq b\}$. В частности, если $e_j = [v_{k_j}, v_j]$, $j = \overline{1, r-1}$, $v_{k_j} < v_j$ — ребро, то мы будем называть v_{k_j} его начальной точкой, v_j — его конечной точкой и будем говорить, что e выходит из v_{k_j} и заканчивается в v_j .

Пусть μ_{sj} — число ребер между вершинами v_j и v_s . Обозначим $\sigma_s := \max_j \mu_{sj}$. Ясно, что $0 \leq \mu_{sj} \leq \sigma_s$, $\mu_{ss} = 0$, $\mu_{sj} = \mu_{js}$. Фиксируем v_s . Будем называть μ_{sj} порядком v_j относительно v_s . Пусть $V_s^{(\mu)} := \{v_j : \mu_{sj} = \mu\}$ — множество вершин порядка μ относительно v_s .

Фиксируем v_s и e_j . Пусть ε_{sj} — максимальный порядок концов ребра e_j относительно v_s . Число ε_{sj} называется порядком ребра e_j относительно вершины v_s . Ясно, что $\varepsilon_{ss} = 1$, $1 \leq \varepsilon_{sj} \leq \sigma_s$. Через $\mathcal{E}_s^{(\mu)} := \{e_j : \varepsilon_{sj} = \mu\}$ обозначим множество ребер порядка μ относительно v_s . Пусть v_{sj}^+ и v_{sj}^- — концы ребра e_j такие, что порядок v_{sj}^+ относительно v_s больше, чем порядок v_{sj}^- . Будем называть v_{sj}^+ (v_{sj}^-) дальним (ближним) концом e_j относительно v_s .

Каждое компактное ребро $e_j = [v_{k_j}, v_j] \in \mathcal{E}$, $j = \overline{1, r-1}$ рассматривается как отрезок $[0, l_j]$ и параметризуется параметром $x_j \in [0, l_j]$; l_j — длина e_j . Выберем следующую ориентацию: $x_j = 0$ соответствует конечной точке v_j , а $x_j = l_j$ — начальной точке v_{k_j} ребра e_j . Бесконечное ребро $e_r = (v_0, v_r]$ параметризуется параметром $x_r \in [0, \infty)$ так, что $x_r = 0$ соответствует v_r .

Интегрируемая функция Y на T может быть представлена в виде $Y = \{y_j\}_{j \in J}$, где $J := \{j : j = \overline{1, r}\}$, и функция $y_j(x_j)$ определена на ребре e_j .

Зафиксируем $n \geq 2$. Пусть $q_\nu = \{q_{\nu j}\}_{j=\overline{1, r}}$, $\nu = \overline{0, n-2}$ — интегрируемые комплекснозначные функции на T . Рассмотрим дифференциальное уравнение T :

$$y_j^{(n)}(x_j) + \sum_{\nu=0}^{n-2} q_{\nu j}(x_j) y_j^{(\nu)}(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad j = \overline{1, r}, \quad (1)$$

где λ — спектральный параметр, и $y_j^{(\nu)}(x_j) \in AC[0, l_j]$, $j = \overline{1, r}$, $\nu = \overline{0, n-1}$ при всех $l_r > 0$. Через $q = \{q_\nu\}_{\nu=\overline{0, n-2}}$ обозначим множество коэффициентов уравнения (1); q называется потенциалом.

Пусть $\lambda = \rho^n$. Тогда ρ — плоскость разбивается на сектора S раствора $\frac{\pi}{n}$ ($\arg \rho \in (\frac{\nu\pi}{n}, \frac{(\nu+1)\pi}{n})$, $\nu = \overline{0, 2n-1}$), в каждом из которых корни R_1, R_2, \dots, R_n уравнения $R^n - 1 = 0$ могут быть занумерованы так, что

$$\operatorname{Re}(\rho R_1) < \operatorname{Re}(\rho R_2) < \dots < \operatorname{Re}(\rho R_n), \quad \rho \in S. \quad (2)$$

Пусть $\rho^* := 2n \max_{\nu, j} \|q_{\nu j}\|_{L(e_j)}$. Известно (см. [17]), что при каждом фиксированном $j = \overline{1, r}$ на ребре e_j существует фундаментальная система решений $\{E_{kj}(x_j, \rho)\}_{k=\overline{1, n}}$ уравнения (1) такая, что в каждом секторе S со свойством (2) функции $E_{kj}^{(\nu-1)}(x_j, \rho)$, $k, \nu = \overline{1, n}$ аналитичны при $\rho \in S$, $|\rho| > \rho^*$, непрерывны при $\rho \in \overline{S}$, $|\rho| \geq \rho^*$, и при $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \overline{S}$,

$$E_{kj}^{(\nu-1)}(x_j, \rho) = (\rho R_k)^{\nu-1} \exp(\rho R_k x_j)[1], \quad (3)$$

где $k, \nu = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, r}$, $[1] = 1 + O(\rho^{-1})$.

Зафиксируем внутреннюю вершину v_m , $m = \overline{p+1, r}$. Через $R(v_m) := \{e \in \mathcal{E} : e = [v_m, w], w \in V\}$ обозначим множество ребер, выходящих из v_m , а через $R^+(v_m)$ — множество ребер, примыкающих к v_m . Пусть $R_m := \{j : e_j \in R(v_m)\}$ и пусть ω_m — число ребер, выходящих из v_m . Если



$R_m = \{\alpha_{jm}\}_{j=\overline{1, \omega_m}}$, то положим $e_{(jm)} := e_{\alpha_{jm}}$, $y_{(jm)} := y_{\alpha_{jm}}$, $l_{(jm)} := l_{\alpha_{jm}}$, $x_{(jm)} := x_{\alpha_{jm}}$. Рассмотрим линейные формы

$$U_{j\nu m}(Y) = \sum_{\mu=0}^{\nu} \gamma_{j\nu\mu m} y_{(jm)}^{(\mu)}(l_{(jm)}), \quad m = \overline{p+1, r}, \quad j = \overline{1, \omega_m}, \quad \nu = \overline{0, n-1},$$

где $\gamma_{j\nu\mu m}$ — комплексные числа, причем $\gamma_{j\nu\nu m} := \gamma_{j\nu\nu m} \neq 0$ и выполняются условия регулярности склейки (см. [10]). Пусть $\Psi_{sk} = \{\psi_{skj}\}_{j=\overline{1, r}}$, $s = \overline{1, p}$, $k = \overline{1, n}$ — решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям склейки

$$\left. \begin{aligned} \psi_{skm}^{(\nu)}(0, \lambda) + U_{j\nu m}(\Psi_{sk}) &= 0, \quad j = \overline{1, \omega_m}, \quad \nu = \overline{0, k-1}, \\ \psi_{skm}^{(\nu)}(0, \lambda) + \sum_{j=1}^{\omega_m} U_{j\nu m}(\Psi_{sk}) &= 0, \quad \nu = \overline{k, n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

в каждой внутренней вершине v_m , $m = \overline{p+1, r}$, а также граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \psi_{sks}^{(\nu-1)}(0, \lambda) &= \delta_{k\nu}, \quad \nu = \overline{1, k}, \\ \psi_{skj}^{(\xi-1)}(0, \lambda) &= 0, \quad \xi = \overline{1, n-k}, \quad j = \overline{1, p} \setminus s, \\ \psi_{skr}(x_r, \lambda) &= O(\exp(\rho R_k x_r)), \quad \rho \in S, \quad x_r \rightarrow \infty, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

в каждом секторе S со свойством (2). Здесь и далее, $\delta_{k\nu}$ — символ Кронекера. Решение Ψ_{sk} называется решением Вейля порядка k относительно граничной вершины v_s . Условия (4) называются условиями склейки порядка k . Введем матрицы

$$M_s(\lambda) = [M_{sk\nu}(\lambda)]_{k, \nu=\overline{1, n}}, \quad s = \overline{1, p},$$

где $M_{sk\nu}(\lambda) := \psi_{sks}^{(\nu-1)}(0, \lambda)$. Ясно, что $M_{sk\nu}(\lambda) = \delta_{k\nu}$ при $k \geq \nu$, и $\det M_s(\lambda) \equiv 1$. Матрица $M_s(\lambda)$ называется матрицей Вейля относительно граничной вершины v_s . Пусть $M = \{M_s\}_{s=\overline{1, p}}$ — множество матриц Вейля. Обратная задача ставится следующим образом.

Обратная задача 1. Дано M , построить q на T .

Понятие матриц Вейля M является обобщением понятия функции Вейля для классического оператора Штурма–Лиувилля и обобщением понятия матрицы Вейля, введенной в [14, 15] для уравнений высших порядков на интервале.

2. Обозначим $\beta_k := \Omega_{k-1} \Omega_k^{-1}$, $k = \overline{1, n}$, $\Omega_k := \det[R_\xi^{\nu-1}]_{\xi, \nu=\overline{1, k}}$, $\Omega_0 := 1$.

Лемма 1. Фиксируем $m = \overline{p+1, r}$, $k = \overline{1, n-1}$ и сектор S со свойством (2). Пусть $Y = \{y_j\}_{j \in J}$ — решение уравнения (1) на T , удовлетворяющее условиям склейки порядка k . Если при $\rho \in S$, $|\rho| \rightarrow \infty$, $x_{(jm)} \in (0, l_{(jm)}]$, $j = \overline{1, \omega_m}$, $\nu = \overline{0, n-1}$

$$y_{(jm)}^{(\nu)}(x_{(jm)}, \rho) = \sum_{\mu=n-k+1}^n A_{\mu j}(\rho) (\rho R_\mu)^\nu \exp(\rho R_\mu x_{(jm)}) [1], \quad (6)$$

то при $\rho \in S$, $|\rho| \rightarrow \infty$, $x_m \in (0, l_m]$, $\nu = \overline{0, n-1}$

$$y_m^{(\nu)}(x_m, \rho) = \sum_{\mu=n-k+1}^n A_\mu(\rho) (\rho R_\mu)^\nu \exp(\rho R_\mu x_m) [1]. \quad (7)$$

Доказательство. Используя фундаментальную систему решений $\{E_{\mu m}(x_m, \rho)\}_{\mu=\overline{1, n}}$ и учитывая (3), вычисляем

$$y_m^{(\nu)}(x_m, \rho) = \sum_{\mu=1}^n A_\mu(\rho) (\rho R_\mu)^\nu \exp(\rho R_\mu x_m) [1], \quad x_m \in [0, l_m], \quad \nu = \overline{0, n-1}. \quad (8)$$



Подставляя (6) и (8) в условия склейки, получаем линейную алгебраическую систему σ_{k0m} порядка $k\omega_m + n - k$ относительно $\{A_\mu(\rho)\}_{\mu=\overline{1, n-k}}$ и $\{A_{\mu j}(\rho)\}_{\mu=\overline{n-k+1, n}}$, $j = \overline{1, \omega_m}$ ($\{A_\mu(\rho)\}_{\mu=\overline{n-k+1, n}}$ рассматриваются как параметры). Определитель $D_{k0m}(\rho)$ системы σ_{k0m} имеет асимптотику

$$D_{k0m}(\rho) = d_{km} \exp(\rho(R_{n-k+1} + \dots + R_n)(l_{1m} + \dots + l_{\omega_m, m}))[1], \quad \rho \in S, \quad |\rho| \rightarrow \infty,$$

где $d_{km} \neq 0$. Решая σ_{k0m} , по формулам Крамера находим

$$A_\mu(\rho) = \sum_{\xi=n-k+1}^n (a_{\xi m \mu}^0 + O(\rho^{-1})) A_\xi(\rho), \quad \mu = \overline{1, n-k}, \quad (9)$$

где $a_{\xi m \mu}^0$ — константы. Подставляя (9) в (8), получаем (7). □

Следующая лемма доказывается аналогично.

Лемма 2. Фиксируем $t = \overline{p+1, r}$, $k = \overline{1, n-1}$, $s = \overline{1, \omega_m}$ и сектор S со свойством (2). Пусть $Y = \{y_j\}_{j \in J}$ — решение уравнения (1) на T , удовлетворяющее условиям склейки порядка k . Если при $\rho \in S$, $|\rho| \rightarrow \infty$, $\nu = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{1, \omega_m} \setminus s$

$$y_{(jm)}^{(\nu)}(x_{(jm)}, \rho) = \sum_{\mu=n-k+1}^n A_{\mu j}(\rho)(\rho R_\mu)^\nu \exp(\rho R_\mu x_{(jm)})[1], \quad x_{(jm)} \in (0, l_{(jm)}],$$

$$y_m^{(\nu)}(x_m, \rho) = \sum_{\mu=1}^k A_\mu(\rho)(\rho R_\mu)^\nu \exp(\rho R_\mu x_m)[1], \quad x_m \in [0, l_m),$$

то при $\rho \in S$, $|\rho| \rightarrow \infty$, $\nu = \overline{0, n-1}$

$$y_{(sm)}^{(\nu)}(x_{(sm)}, \rho) = \sum_{\mu=1}^k A_{\mu s}(\rho)(\rho R_\mu)^\nu \exp(\rho R_\mu x_{(sm)})[1], \quad x_{(sm)} \in [0, l_{(sm)}). \quad (10)$$

Лемма 3. Фиксируем сектор S со свойством (2). При $x_s \in (0, l_s)$, $k, \nu = \overline{1, n}$, $s = \overline{1, p}$, верна следующая асимптотическая формула:

$$\psi_{sks}^{(\nu-1)}(x_s, \lambda) = \frac{\beta_k}{\rho^{k-1}} (\rho R_k)^{\nu-1} \exp(\rho R_k x_s)[1], \quad \rho \in S, \quad |\rho| \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Доказательство. Покажем, что при $\rho \in S$, $|\rho| \rightarrow \infty$, $\nu = \overline{1, n}$

$$\psi_{skj}^{(\nu-1)}(x_j, \lambda) = \sum_{\mu=n-k+1}^n A_{\mu j}(\rho)(\rho R_\mu)^{\nu-1} \exp(\rho R_\mu x_j)[1], \quad x_j \in (0, l_j], \quad \text{если } v_j = v_{sj}^+, \quad (12)$$

$$\psi_{skj}^{(\nu-1)}(x_j, \lambda) = \sum_{\mu=1}^k A_{\mu j}(\rho)(\rho R_\mu)^{\nu-1} \exp(\rho R_\mu x_j)[1], \quad x_j \in [0, l_j), \quad \text{если } v_j = v_{sj}^-. \quad (13)$$

Если $j = r$, то $v_r = v_{sr}^-$, и (13) очевидно. Докажем (12)–(13) для $j = \overline{1, r-1}$. Разделим все ребра $\{e_j\}_{j \in J}$ на классы $\mathcal{E}_s^{(\mu)}$, $\mu = 1, \dots, \sigma_s$. Докажем (12)–(13) индукцией по $\mu = \sigma_s, \sigma_s-1, \dots, 1$.

1. Пусть $\mu = \sigma_s$, $e_j \in \mathcal{E}_s^{(\sigma_s)}$. Тогда e_j — граничное ребро и $v_j = v_{sj}^+$. Применяя лемму 1 из [10], получаем (12)–(13).

2. Фиксируем $\mu < \sigma_s$. Предположим, что (12)–(13) уже доказаны для всех $e_j \in \mathcal{E}_s^{(\mu+1)} \cup \dots \cup \mathcal{E}_s^{(\sigma_k)}$. Пусть теперь $e_j \in \mathcal{E}_s^{(\mu)}$. Обозначим $R_{sj} := \{\xi : e_\xi \in R^+(v_{sj}^+) \setminus e_j\}$. Тогда $R^+(v_{sj}^+) \setminus e_j := \{e_\xi\}_{\xi \in R_{sj}}$. Ясно, что $e_\xi \in \mathcal{E}_s^{(\mu+1)}$ при всех $\xi \in R_{sj}$.

Случай 1. Если $v_j = v_{sj}^+$, то по предположению индукции (12) верно при всех $\xi \in R_{sj}$:

$$\psi_{sk\xi}^{(\nu-1)}(x_\xi, \lambda) = \sum_{\mu=n-k+1}^n A_{\mu\xi}(\rho)(\rho R_\mu)^{\nu-1} \exp(\rho R_\mu x_\xi)[1], \quad x_\xi \in (0, l_\xi], \quad (14)$$

$\nu = \overline{1, n}$, $\rho \in S$, $|\rho| \rightarrow \infty$. Применяя лемму 1, получаем (12) для ребра e_j .



Случай 2. Если $v_j = v_{s_j}^-$, то существует $\eta \in R_{s_j}$ такое, что

$$\psi_{sk\eta}^{(\nu-1)}(x_\eta, \lambda) = \sum_{\mu=1}^k A_{\mu\eta}(\rho)(\rho R_\mu)^{\nu-1} \exp(\rho R_\mu x_\eta)[1], \quad x_\eta \in [0, l_\eta),$$

$\nu = \overline{1, n}$, $\rho \in S$, $|\rho| \rightarrow \infty$, и (14) верно при всех $\xi \in R_{s_j}$, $s \neq \eta$. Применяя лемму 2, получаем (13).

Так как $e_s \in \mathcal{E}_s^{(1)}$, $v_s = v_{s_s}^-$, то из (13) вытекает, что при $\rho \in S$, $|\rho| \rightarrow \infty$,

$$\psi_{sks}^{(\nu-1)}(x_s, \lambda) = \sum_{\mu=1}^k A_{\mu s}(\rho)(\rho R_\mu)^{\nu-1} \exp(\rho R_\mu x_s)[1], \quad x_s \in [0, l_s), \quad \nu, k = \overline{1, n}. \quad (15)$$

Согласно (5) имеем

$$\psi_{sks}^{(\nu-1)}(0, \lambda) = \delta_{k\nu}, \quad \nu = \overline{1, k}. \quad (16)$$

Подставляя (15) в (16), получаем линейную алгебраическую систему относительно коэффициентов $\{A_{\mu s}(\rho)\}_{\mu=\overline{1, k}}$. Определитель $D_{sk}(\rho)$ этой системы имеет вид $D_{sk}(\rho) = \Omega_k[1]$. Решая систему по формулам Крамера, вычисляем $A_{\mu s}(\rho) = (a_{\mu s}^0 + O(\rho^{-1}))\rho^{1-k}[1]$, $a_{\mu k}^0 = \beta_k$. Вместе с (15) это дает (11). Лемма 3 доказана. \square

Аналогично получаем, что при $\rho \in S$, $|\rho| \rightarrow \infty$, $s = \overline{1, p}$, $k = \overline{1, n-1}$, $\mu = \overline{k+1, n}$,

$$M_{sk\mu}(\lambda) = m_{k\mu}^0 \rho^{\mu-k}[1],$$

где $m_{k\mu}^0 = (\det[R_\eta^{\xi-1}]_{\eta, \xi=\overline{1, k}})^{-1} \det[R_\eta^{\xi-1}]_{\eta=\overline{1, k}, \xi=\overline{1, k-1, \mu}}$.

Пусть $\{C_{\mu j}(x_j, \lambda)\}_{\mu=\overline{1, n}}$, $j = \overline{1, r}$, — фундаментальная система решений уравнения (1) на ребре e_j при начальных условиях $C_{\mu j}^{(\nu-1)}(0, \lambda) = \delta_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = \overline{1, n}$. При каждом $x_j \in [0, l_j]$ функции $C_{\mu j}^{(\nu-1)}(x_j, \lambda)$, $\mu, \nu = \overline{1, n}$, являются целыми по λ порядка $1/n$ и

$$\det[C_{\mu j}^{(\nu-1)}(x_j, \lambda)]_{\mu, \nu=\overline{1, n}} \equiv 1. \quad (17)$$

Используя фундаментальную систему решений $\{C_{\mu j}(x_j, \lambda)\}_{\mu=\overline{1, n}}$, получим

$$\psi_{skj}(x_j, \lambda) = \sum_{\mu=1}^n M_{skj\mu}(\lambda) C_{\mu j}(x_j, \lambda), \quad s = \overline{1, p}, \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, r}, \quad (18)$$

где коэффициенты $M_{skj\mu}(\lambda)$ не зависят от x_j . В частности, $M_{sks\mu}(\lambda) = M_{sk\mu}(\lambda)$ и

$$\psi_{sks}(x_s, \lambda) = C_{ks}(x_s, \lambda) + \sum_{\mu=k+1}^n M_{sk\mu}(\lambda) C_{\mu s}(x_s, \lambda). \quad (19)$$

Из (17) и (19) вытекает, что

$$\det[\psi_{sks}^{(\nu-1)}(x_s, \lambda)]_{k, \nu=\overline{1, n}} \equiv 1. \quad (20)$$

3. Зафиксируем $s = \overline{1, p}$ и рассмотрим следующую вспомогательную обратную задачу.

Задача IP(s). Дана матрица Вейля M_s , построить функции $q_{\nu s}$, $\nu = \overline{0, n-2}$, на ребре e_s .

Докажем теорему единственности решения обратной задачи IP(s). Для этого, наряду с q , рассмотрим потенциал \tilde{q} . Условимся, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к q , то $\tilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к \tilde{q} .

Теорема 1. Фиксируем $s = \overline{1, p}$. Если $M_s = \tilde{M}_s$, то $q_{\nu s} = \tilde{q}_{\nu s}$, $\nu = \overline{0, n-2}$. Таким образом, задание матрицы Вейля M_s однозначно определяет потенциал на ребре e_s .

Доказательство. Обозначим

$$\psi_s(x_s, \lambda) := [\psi_{sks}^{(\nu-1)}(x_s, \lambda)]_{\nu, k=\overline{1, n}} \quad C_s(x_s, \lambda) := [C_{ks}^{(\nu-1)}(x_s, \lambda)]_{\nu, k=\overline{1, n}}.$$

Тогда соотношение (19) может быть записано в виде

$$\psi_s(x_s, \lambda) = C_s(x_s, \lambda) M_s^T(\lambda), \quad (21)$$



где T — знак транспонирования. В силу (17) и (20) имеем

$$\det \psi_s(x_s, \lambda) = \det C_s(x_s, \lambda) \equiv 1. \quad (22)$$

Определим матрицу $\mathcal{P}_s(x_s, \lambda) = [\mathcal{P}_{sjk}(x_s, \lambda)]_{j,k=\overline{1,n}}$ по формуле

$$\mathcal{P}_s(x_s, \lambda) = \psi_s(x_s, \lambda)(\tilde{\psi}_s(x_s, \lambda))^{-1}.$$

Учитывая (22), вычисляем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{sjk}(x_s, \lambda) &= \det [\tilde{\psi}_{s\nu s}^{(n-1)}(x_s, \lambda), \dots, \tilde{\psi}_{s\nu s}^{(k)}(x_s, \lambda), \psi_{s\nu s}^{(j-1)}(x_s, \lambda), \tilde{\psi}_{s\nu s}^{(k-2)}(x_s, \lambda), \dots, \tilde{\psi}_{s\nu s}(x_s, \lambda)]_{\nu=\overline{1,n}} = \\ &= \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu+k-n-1} \psi_{s\nu s}^{(j-1)}(x_s, \lambda) \times \\ &\times \det [\tilde{\psi}_{sn s}^{(\xi)}(x_s, \lambda), \dots, \tilde{\psi}_{s,\nu+1,s}^{(\xi)}(x_s, \lambda), \tilde{\psi}_{s,\nu-1,s}^{(\xi)}(x_s, \lambda), \dots, \tilde{\psi}_{s1s}^{(\xi)}(x_s, \lambda)]_{\xi=\overline{0,n-1} \setminus k-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (23) и леммы 3 следует, что при $x_s \in (0, 1)$, $k = \overline{1, n}$, $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\arg \lambda = \theta \neq 0, \pi$,

$$\mathcal{P}_{s1k}(x_s, \lambda) - \delta_{1k} = O(\rho^{-1}). \quad (24)$$

Преобразуем матрицу $\mathcal{P}_s(x_s, \lambda)$, используя (21):

$$\mathcal{P}_s(x_s, \lambda) = \psi_s(x_s, \lambda)(\tilde{\psi}_s(x_s, \lambda))^{-1} = C_s(x_s, \lambda)M_s^T(\lambda)(\tilde{M}_s^T(\lambda))^{-1}(\tilde{C}_s(x_s, \lambda))^{-1} = C_s(x_s, \lambda)(\tilde{C}_s(x_s, \lambda))^{-1}.$$

В силу (22) заключаем, что при каждом фиксированном x_s , матрица-функция $\mathcal{P}_s(x_s, \lambda)$ является целой по λ порядка $1/n$. Вместе с (26) это дает $\mathcal{P}_{s11}(x_s, \lambda) \equiv 1$, $\mathcal{P}_{s1k}(x_s, \lambda) \equiv 0$, $k = \overline{2, n}$. Так как $\mathcal{P}_s(x_s, \lambda)\tilde{\psi}_s(x_s, \lambda) = \psi_s(x_s, \lambda)$, то $\psi_{sks}(x_s, \lambda) \equiv \tilde{\psi}_{sks}(x_s, \lambda)$ при всех x_s, λ, k и, следовательно, $q_{\nu s} = \tilde{q}_{\nu s}$, $\nu = \overline{0, n-2}$. \square

4. Зафиксируем $v_m \notin \Gamma$ (т.е. $m = \overline{p+1, r}$). Обозначим $T_m^0 := \{z \in T : v_m < z\}$, $T_m := T \setminus T_m^0$. Ясно, что T_m^0 — компактное дерево, а T_m — некомпактное дерево с бесконечным ребром e_r . Пусть Γ_m — множество конечных граничных вершин T_m и пусть E_m — множество граничных ребер T_m . Положим $J_m := \{j : e_j \in T_m\}$. Если $Y = \{y_j\}_{j \in J}$ — функция на T , то $\{Y\}_m := \{y_j\}_{j \in J_m}$ — функция на T_m .

Зафиксируем $v_m \notin \Gamma$, $k = \overline{1, n}$. Пусть $\Psi_{mk} = \{\psi_{mkj}\}_{j \in J_m}$ — решение уравнения (1) на T_m , удовлетворяющее условиям склейки порядка k и краевым условиям

$$\left. \begin{aligned} \psi_{mkm}^{(\nu-1)}(0, \lambda) &= \delta_{k\nu}, \quad \nu = \overline{1, k}, \\ \psi_{mkj}^{(\xi-1)}(0, \lambda) &= 0, \quad \xi = \overline{1, n-k}, \quad v_j \in \Gamma_m \setminus v_m, \\ \psi_{mkr}(x_r, \lambda) &= O(\exp(\rho R_k x_r)), \quad \rho \in S, \quad x_r \rightarrow \infty, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

в каждом секторе S со свойством (2). Решение Ψ_{mk} называется решением Вейля порядка k относительно внутренней вершины v_m . Введем матрицу $M_m(\lambda) = [M_{mk\nu}(\lambda)]_{k,\nu=\overline{1,n}}$, где $M_{mk\nu}(\lambda) := \psi_{mkm}^{(\nu-1)}(0, \lambda)$. Тогда $M_{mk\nu}(\lambda) = \delta_{k\nu}$ при $k \geq \nu$ и $\det M_m(\lambda) \equiv 1$. Матрица $M_m(\lambda)$ называется матрицей Вейля для T_m относительно вершины v_m .

Лемма 4. Фиксируем $v_m \notin \Gamma$ и $k = \overline{1, n-1}$. Пусть $e_s = [v_m, v_s] \in R(v_m)$. Тогда

$$M_{m1\nu}(\lambda) = \frac{\psi_{s1m}^{(\nu-1)}(0, \lambda)}{\psi_{s1m}(0, \lambda)}, \quad \nu = \overline{2, n}, \quad (26)$$

$$M_{mk\nu}(\lambda) = \frac{\det[\psi_{s\mu m}(0, \lambda), \dots, \psi_{s\mu m}^{(k-2)}(0, \lambda), \psi_{s\mu m}^{(\nu-1)}(0, \lambda)]_{\mu=\overline{1,k}}}{\det[\psi_{s\mu m}^{(\xi-1)}(0, \lambda)]_{\xi,\mu=\overline{1,k}}}, \quad (27)$$

$$k = \overline{2, n-1}, \quad \nu = \overline{k+1, n}.$$



Доказательство. Обозначим $z_{m1j}(x_j, \lambda) := \psi_{s1j}(x_j, \lambda)/\psi_{s1m}(0, \lambda)$, $j \in J_m$. Функция $z_{m1j}(x_j, \lambda)$ является решением уравнения (1) на ребре e_j . В силу (25) функция $z_{m1j}(x_j, \lambda)$ удовлетворяет тем же краевым условиям, что и $\psi_{m1j}(x_j, \lambda)$; следовательно, $z_{m1j}(x_j, \lambda) \equiv \psi_{m1j}(x_j, \lambda)$. Итак,

$$\psi_{m1j}(x_j, \lambda) = \frac{\psi_{s1j}(x_j, \lambda)}{\psi_{s1m}(0, \lambda)}, \quad j \in J_m. \quad (28)$$

Аналогично вычисляем

$$\psi_{mkj}(x_j, \lambda) = \frac{\det[\psi_{s\mu m}(0, \lambda), \dots, \psi_{s\mu m}^{(k-2)}(0, \lambda), \psi_{s\mu j}(x_j, \lambda)]_{\mu=\overline{1, k}}}{\det[\psi_{s\mu m}^{(\xi-1)}(0, \lambda)]_{\xi, \mu=\overline{1, k}}}, \quad (29)$$

$k = \overline{2, n-1}$, $j \in J_m$. Так как $M_{mk\nu}(\lambda) := \psi_{mkm}^{(\nu-1)}(0, \lambda)$, то из (28) и (29) следует, что верны (26) и (27). \square

Используя фундаментальную систему решений $\{C_{\mu j}(x_j, \lambda)\}_{\mu=\overline{1, n}}$, получаем, что (18) верно при $s = \overline{1, r}$, $k = \overline{1, n}$, $j \in J_s$, где $J_s := J$ for $s = \overline{1, p}$, и коэффициенты $M_{skj\mu}(\lambda)$ не зависят от x_j . В частности, $M_{sks\mu}(\lambda) = M_{sk\mu}(\lambda)$, и (19) верно при $s = \overline{1, r}$, $k = \overline{1, n}$. Поэтому имеем

$$\psi_{skj}^{(\nu-1)}(l_j, \lambda) = \sum_{\mu=1}^n M_{skj\mu}(\lambda) C_{\mu j}^{(\nu-1)}(l_j, \lambda), \quad k, \nu = \overline{1, n}, \quad s = \overline{1, r}, \quad j \in J_s, \quad (30)$$

$$\psi_{sks}^{(\nu-1)}(l_s, \lambda) = C_{ks}^{(\nu-1)}(l_s, \lambda) + \sum_{\mu=k+1}^n M_{sk\mu}(\lambda) C_{\mu s}^{(\nu-1)}(l_s, \lambda), \quad k, \nu = \overline{1, n}, \quad s = \overline{1, r}. \quad (31)$$

Зафиксируем v_m ($m = \overline{p+1, r}$). Предположим, что потенциал q известен на дереве T_m^0 . Тогда можно вычислить решения $C_{kj}(x_j, \lambda)$ при $k = \overline{1, n}$, $e_j \in T_m^0$. Зафиксируем $e_s = [v_m, v_s] \in R(v_m)$ и $e_i = [v_m, v_i] \in R(v_m) \setminus e_s$. Рассмотрим дерево $T_i^1 := T_i^0 \cup \{e_i\}$. Положим $J_{i1} := \{j : e_j \in T_i^1\}$. Предположим, что функции $a_{skiv}(\lambda) := \psi_{ski}^{(\nu-1)}(l_i, \lambda)$, $\nu = \overline{1, k}$, известны.

Задача $Z_k(T_i^1, v_m, \{a_{skiv}\}_{\nu=\overline{1, k}})$. Рассмотрим решение Вейля Ψ_{sk} на дереве T_i^1 . Тогда Ψ_{sk} удовлетворяет условиям склейки и краевым условиям

$$\left. \begin{aligned} \psi_{ski}^{(\nu-1)}(l_i, \lambda) &= a_{skiv}(\lambda), \quad \nu = \overline{1, k}, \\ \psi_{skj}^{(\xi-1)}(0, \lambda) &= 0, \quad \xi = \overline{1, n-k}, \quad j \in J_{i1} \setminus i. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Положим $M_{skj\mu}(\lambda) := \psi_{skj}^{(\mu-1)}(0, \lambda)$, $j \in J_{i1}$. Тогда

$$\psi_{skj}(x_j, \lambda) = \sum_{\mu=1}^n M_{skj\mu}(\lambda) C_{\mu j}(x_j, \lambda), \quad j \in J_{i1}. \quad (33)$$

Подставляя (33) в (32) и условия склейки на T_i^1 , получаем линейную алгебраическую систему относительно $M_{skj\mu}(\lambda)$, $j \in J_{i1}$. Решая эту систему по формулам Крамера, находим матрицу

$$M_{skj\mu}(\lambda), \quad j \in J_{i1}, \quad \mu = \overline{1, n}. \quad (34)$$

Задачу вычисления матрицы (34) будем обозначать $Z_k(T_i^1, v_m, \{a_{skiv}\}_{\nu=\overline{1, k}})$.

5. Пусть заданы матрицы Вейля $M = \{M_s\}_{s=\overline{1, p}}$. Решение обратной задачи 1 состоит в последовательном выполнении так называемых A_ξ -процедур при $\xi = \sigma, \sigma-1, \dots, 1$, где $\sigma := \sigma_0$. Опишем A_ξ -процедуры.

A_σ -процедура. 1. Для каждого ребра $e_s \in \mathcal{E}^{(\sigma)}$ (ясно, что e_s — граничное ребро) решаем вспомогательную обратную задачу IP(s) и находим коэффициенты $q_{\nu s}(x_s)$, $x_s \in [0, l_s]$, $\nu = \overline{0, n-2}$, уравнения (1) на ребре e_s .

2. Для каждого ребра $e_s \in \mathcal{E}^{(\sigma)}$ строим $C_{\mu s}(x_s, \lambda)$, $x_s \in [0, l_s]$, $\mu = \overline{1, n}$, и, используя (31), вычисляем функции

$$\psi_{sks}^{(\nu-1)}(l_s, \lambda), \quad k, \nu = \overline{1, n}. \quad (35)$$



3. Для каждой фиксированной вершины $v_m \in V^{(\sigma-1)} \setminus \Gamma$, $k = \overline{1, n}$, и для всех $e_i, e_s \in R(v_m)$, $i \neq s$, выполняем следующие операции:

а) используя (35) и условия склейки в v_m , вычисляем

$$a_{skiv}(\lambda) := \psi_{ski}^{(\nu-1)}(l_i, \lambda), \quad \nu = \overline{1, k}, \quad (36)$$

где $a_{skiv}(\lambda)$ строятся как линейные комбинации функций (35) при $\nu = \overline{1, k}$;

б) рассмотрим дерево $T_i^1 := \{e_i\}$, которое в данном случае состоит из одного ребра e_i . Решая задачу $Z_k(T_i^1, v_m, \{a_{skiv}(\lambda)\}_{\nu=\overline{1, k}})$, вычисляем $\{M_{skiv}(\lambda)\}$, $\mu = \overline{1, n}$.

4. Для каждой фиксированной вершины $v_m \in V^{(\sigma-1)} \setminus \Gamma$ и для всех $e_j, e_s \in R(v_m)$, $j \neq s$, строим функции

$$\psi_{skj}^{(\nu-1)}(l_j, \lambda), \quad k, \nu = \overline{1, n}, \quad (37)$$

по (30). Далее, используя (35), (37) и условия склейки, находим $\psi_{skm}^{(\nu-1)}(0, \lambda)$, $k, \nu = \overline{1, n}$.

5. Для каждой $v_m \in V^{(\sigma-1)} \setminus \Gamma$ вычисляем матрицу Вейля $M_m(\lambda)$ по (26)–(27).

Выполним A_ξ -процедуры при $\xi = \overline{1, \sigma-1}$ по индукции. Фиксируем $\xi = \overline{1, \sigma-1}$ и предположим, что $A_\sigma, \dots, A_{\xi+1}$ — процедуры уже выполнены. Выполним теперь A_ξ -процедуру.

A_ξ -процедура. Для каждой вершины $v_s \in V^{(\xi)}$ дана матрица Вейля $M_s(\lambda)$. В самом деле, если $v_s \in V^{(\xi)} \cap \Gamma$, то $M_s(\lambda)$ известна априори, а если $v_s \in V^{(\xi)} \setminus \Gamma$, то $M_s(\lambda)$ вычислена ранее по $A_\sigma, A_{\sigma-1}, \dots, A_{\xi+1}$ -процедурам.

1. Для каждого ребра $e_s \in \mathcal{E}^{(\xi)}$ решаем вспомогательную обратную задачу IP(s) и находим коэффициенты $q_{\nu s}(x_s)$, $x_s \in [0, l_s]$, $\nu = \overline{0, n-2}$, уравнения (1) на ребре e_s . Если $\xi = 1$, то обратная задача 1 решена и мы заканчиваем вычисления. Если $\xi > 1$, то переходим к следующему пункту.

2. Для каждого ребра $e_s \in \mathcal{E}^{(\xi)}$ строим $C_{\mu s}(x_s, \lambda)$, $x_s \in [0, l_s]$, $\mu = \overline{1, n}$, и вычисляем функции (35), используя (31).

3. Для каждой фиксированной вершины $v_m \in V^{(\xi-1)} \setminus \Gamma$, $k = \overline{1, n}$ и для всех $e_i, e_s \in R(v_m)$, $i \neq s$ выполняем следующие операции:

а) используя (35) и условия склейки в v_m , получаем (36), где $a_{skiv}(\lambda)$ строятся как линейные комбинации функций (35) при $\nu = \overline{1, k}$;

б) Рассмотрим дерево $T_i^1 := T_i^0 \cup \{e_i\}$ с корнем v_m . Решая алгебраическую задачу $Z_k(T_i^1, v_m, \{a_{skiv}(\lambda)\}_{\nu=\overline{1, k}})$, находим матрицу $\{M_{skj\mu}(\lambda)\}$, $\mu = \overline{1, n}$, $j \in J_{i1}$, где $J_{i1} := \{j : e_j \in T_i^1\}$.

4. Для каждой фиксированной вершины $v_m \in V^{(\xi-1)} \setminus \Gamma$ и для всех $e_j, e_s \in R(v_m)$, $j \neq s$, строим функции (37), используя (30). Далее, используя (35), (37) и условия склейки, находим функции $\psi_{skm}^{(\nu-1)}(0, \lambda)$, $k, \nu = \overline{1, n}$.

5. Для каждой $v_m \in V^{(\xi-1)} \setminus \Gamma$ вычисляем матрицу Вейля $M_m(\lambda)$ по (26)–(27).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Задание матриц Вейля $M = \{M_s\}_{s=\overline{1, p}}$ однозначно определяет потенциал q на T . Решение обратной задачи 1 может быть получено последовательным выполнением $A_\sigma, A_{\sigma-1}, \dots, A_1$ -процедур.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

Библиографический список

1. Belishev M. I. Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method // Inverse Problems. 2004. Vol. 20. P. 647–672.
2. Yurko V. A. Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators on graphs // Inverse Problems. 2005. Vol. 21. P. 1075–1086.
3. Brown B. M., Weikard R. A Borg–Levinson theorem for trees // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 2005. Vol. 461, № 2062. P. 3231–3243.
4. Yurko V. A. Inverse problems for Sturm–Liouville operators on bush-type graphs // Inverse Problems. 2009. Vol. 25, № 10, 105008. 14 p.
5. Yurko V. A. An inverse problem for Sturm–Liouville operators on A-graphs // Applied Math. Letters. 2010. Vol. 23, № 8. P. 875–879.
6. Yurko V. A. Inverse spectral problems for differential operators on arbitrary compact graphs // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2010. Vol. 18, № 3. P. 245–261.
7. Юрко В. А. Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов на некомпакт-



- ных пространственных сетях // Диф. уравнения. 2008. Т. 44, № 12. С. 1658–1666.
8. Герасименко Н. И. Обратная задача рассеяния на некомпактном графе // ТМФ. 1988. Т. 74, № 2. С. 187–200.
 9. Yurko V. A. An inverse problem for higher-order differential operators on star-type graphs // Inverse Problems. 2007. Vol. 23, № 3. P. 893–903.
 10. Юрко В. А. Обратные задачи для дифференциальных операторов произвольных порядков на деревьях // Мат. заметки. 2008. Т. 83, вып. 1. С. 139–152.
 11. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977.
 12. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М. : Наука, 1984.
 13. Beals R., Deift P., Tomei C. Direct and Inverse Scattering on the Line // Math. Surveys and Monographs. Vol. 28. Amer. Math. Soc. Providence : RI, 1988.
 14. Yurko V. A. Inverse Spectral Problems for Differential Operators and their Applications. Amsterdam : Gordon and Breach, 2000.
 15. Yurko V. A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-Posed Problems Series. Utrecht : VSP, 2002.
 16. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007.
 17. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969.
 18. Freiling G., Yurko V. A. Inverse problems for differential operators on graphs with general matching conditions // Applicable Analysis. 2007. Vol. 86, № 6. P. 653–667.

МЕХАНИКА

УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ РАСТУЩЕЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

А. А. Барышев, С. А. Лычев*, А. В. Манжиров*

Саратовский государственный университет

E-mail: BaryshevAA@gmail.com

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

E-mail: lychevsa@mail.ru, manzh@inbox.ru

В работе исследованы вынужденные малые колебания растущей по толщине круговой цилиндрической оболочки с жестко закрепленными краями в рамках гипотез технической теории оболочек Кирхгофа–Лява. Материал предполагается упругим и изотропным, а ее толщина непрерывно увеличивается в результате притока материала извне. В процессе роста положение срединной поверхности не изменяется, т. е. наращивание оболочки происходит симметрично на обеих лицевых поверхностях.

Ключевые слова: растущая цилиндрическая оболочка, вынужденные колебания, аналитические решения, спектральные разложения, собственные функции.

Non-Stationary Vibration of Growth Circular Cylindrical Shell

A. A. Baryshev, S. A. Lychev, A. V. Manzhirov

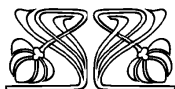
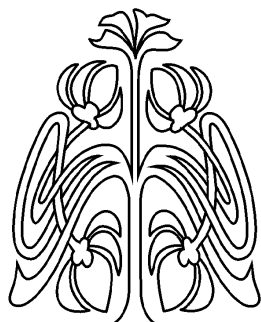
Small forced vibrations of growing cylindrical shell fixed on circular boundaries is studied in the framework of Kirchhoff–Love shell theory. The process of the accretion are characterized by the continuous adherence of material particles to its facial surface. Since the shell bends during the accretion, its stressed-strained state depends not only on loading, but also on the history of the process of accretion, i.e. the schedule of accretion. A schedule of elementary type, when during every infinitesimal time interval the particles of adhered material constitute the layer of constant infinitesimal thickness, is considered.

Key words: growing cylindrical shell, non-stationary vibrations, analytical solutions, spectral decomposition, eigenfunctions.

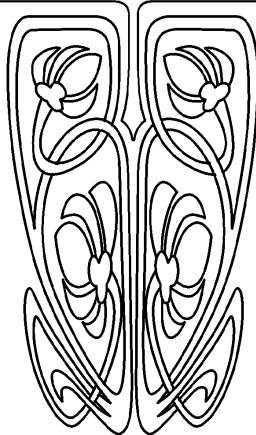
ВВЕДЕНИЕ

Различные по физической природе технологические процессы, такие как лазерное напыление, электрохимическое осаждение, фотополимеризация, с позиции механики сплошных сред объединяет то, что их результатами являются растущие тела. Формирование растущих тел происходит как непрерывное присоединение инфинитезимальных предварительно деформированных частей к конечному телу, причем в процессе роста само растущее тело испытывает деформацию. Этим определяется принципиальное отличие механики растущих тел от классической механики тел постоянного состава.

Характерной особенностью растущих тел являются поля остаточных напряжений, определяемые сценарием наращивания, что приводит к нежелательным последствиям, например, к искажениям геометрической формы создаваемого объекта, локальным нарушениям сплошности, потере устойчивости. В частности, учет искажений формы важен при разработке методов фотополимеризующей стереолитографии, а анализ устойчивости наращиваемых тонкостенных конструкций необходим при разработке микроэлектромеханических систем.



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Во многих технологических процессах растущие тела могут быть представлены в рамках механики тонкостенных конструкций. В связи с этим настоящая работа посвящена исследованию вопросов динамики тонкостенных конструкций в виде растущих по толщине цилиндрических оболочек. Считается, что наращивание происходит симметрично на обеих лицевых поверхностях.

В работе сформулирована задача о вынужденных малых колебаниях растущей по толщине круговой цилиндрической оболочки малой толщины h длиной $2L$ и радиусом R с жестко закрепленными краями. Математическая модель построена в предположении, что за сколь угодно малый промежуток времени к лицевым поверхностям присоединяется тонкий слой материала со скоростью, совпадающей со скоростью движения лицевых поверхностей.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Вначале сформулируем начально-краевую задачу о вынужденных колебаниях упругой круговой цилиндрической оболочки постоянного состава с жестко закрепленными краями. Уравнения движения такой оболочки известны (см., например [1]) и имеют вид

$$\begin{aligned} B \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) u + B \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + B \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ B \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + B \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) v + \frac{B}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ B \frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{B}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \left(\frac{B}{R^2} + D \nabla^2 \nabla^2 \right) w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= Q. \end{aligned}$$

Здесь α и β — координаты на срединной поверхности, отсчитываемые вдоль образующей и в окружном направлении (рис. 1), ρ — плотность массы, $B = \frac{Eh}{1-\nu^2}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — тангенциальная и изгибная жесткости, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала, u , v и w — тангенциальные смещения и прогиб точек срединной поверхности, t — время, $Q = Q(t)$ — интенсивность распределенной по лицевой поверхности поперечной нагрузки.

Будем считать, что оболочка замкнута, а ее края жестко заделаны. В этом случае краевые условия на основаниях формулируются в виде

$$u|_{\alpha=0,2L} = v|_{\alpha=0,2L} = w|_{\alpha=0,2L} = \frac{\partial w}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0,2L} = 0, \quad (1)$$

к которым следует добавить условия периодичности:

$$u(\beta + 2\pi R) = u(\beta), \quad v(\beta + 2\pi R) = v(\beta), \quad w(\beta + 2\pi R) = w(\beta). \quad (2)$$

Начальные условия определяют в начальный момент времени тангенциальные смещения u_0, v_0 и прогиб w_0 точек срединной поверхности, а также их начальные скорости $\dot{u}_0, \dot{v}_0, \dot{w}_0$, а именно:

$$u|_{t=0} = u_0, \quad v|_{t=0} = v_0, \quad w|_{t=0} = w_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{u}_0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{v}_0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{w}_0. \quad (3)$$

При построении модели о вынужденных колебаниях растущей оболочки будем предполагать, что за сколь угодно малый промежуток времени dt к лицевым поверхностям присоединяется слой материала dh . В силу этого предположения толщина оболочки увеличивается непрерывно и равномерно. В этом случае, следуя [2], уравнения движения растущей оболочки могут быть сформулированы в виде

$$B \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \dot{u} + B \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial \alpha \partial \beta} + B \frac{\nu}{R} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \alpha} = \rho h \ddot{u}, \quad (4)$$

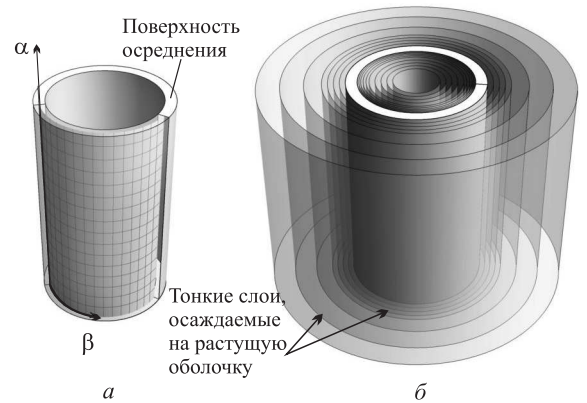


Рис. 1. Расчетная схема оболочки: a — оболочка постоянного состава, b — растущая оболочка



$$B \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \alpha \partial \beta} + B \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \dot{v} + \frac{B}{R} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \beta} = \rho h \ddot{v}, \quad (5)$$

$$B \frac{\nu}{R} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \alpha} + \frac{B}{R} \frac{\partial \dot{v}}{\partial \beta} + \left(\frac{B}{R^2} + D \nabla^2 \nabla^2 \right) \dot{w} + \rho h \ddot{w} = \dot{Q}. \quad (6)$$

В (4)–(6) точкой обозначена производная по времени. Отметим, что *уравнения растущих оболочек имеют третий порядок производных по времени*, а параметр h , определяющий толщину и входящий в коэффициенты, меняется со временем $h = h(t)$.

Считается, что скорость присоединения слоя совпадает со скоростью движения лицевых поверхностей оболочки. В противном случае, в уравнения (4)–(6) необходимо добавить слагаемые, характеризующие тормозящую силу, возникающую вследствие учета силы инерции присоединяемого материала в процессе роста.

Краевые условия сохраняют вид (1)–(2), а начальные данные в отличие от (3) содержат начальные ускорения $\ddot{u}_0, \ddot{v}_0, \ddot{w}_0$ точек срединной поверхности оболочки и записываются в следующей форме:

$$u|_{t=0} = u_0, \quad v|_{t=0} = v_0, \quad w|_{t=0} = w_0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \hat{u}_0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \hat{v}_0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = \hat{w}_0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = \ddot{u}_0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = \ddot{v}_0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = \ddot{w}_0.$$

Для построения решения сформулированных задач целесообразно перейти к безразмерным величинам, а именно безразмерным координатам — $x = \alpha/L - 1, \varphi = \beta/R$; безразмерному времени — $\tau = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} t$; безразмерным тангенциальным смещениям и прогибу — $\check{u} = u/R, \check{v} = v/R,$

$\check{w} = w/R$. Будем использовать безразмерные параметры $\delta = R/L, \tilde{h} = \frac{hR}{\sqrt{12}L^2}$ и безразмерный оператор Лапласа $\tilde{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$.

Введем оператор \mathcal{L} , характеризующий упругую реакцию оболочки на перемещения:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\left(\delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) & -\frac{1+\nu}{2} \delta \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} & -\nu \delta \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{1+\nu}{2} \delta \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} & -\left(\frac{1-\nu}{2} \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) & -\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \nu \delta \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & 1 + \tilde{h}^2 \tilde{\nabla}^2 \tilde{\nabla}^2 \end{pmatrix},$$

область определения которого задается оператором краевых условий:

$$\mathcal{B}[\mathbf{U}] = \left(\check{u}|_{x=-1}, \check{v}|_{x=-1}, \check{w}|_{x=-1}, \frac{\partial \check{w}}{\partial x} \Big|_{x=-1}, \check{u}|_{x=1}, \check{v}|_{x=1}, \check{w}|_{x=1}, \frac{\partial \check{w}}{\partial x} \Big|_{x=1} \right). \quad (7)$$

В формуле (7) используется вектор смещения с безразмерными компонентами: $\mathbf{U} = (\check{u}, \check{v}, \check{w})$.

Определим также вектор начального смещения $\mathbf{U}_0 = (u_0, v_0, w_0)/R$, вектор начальной скорости

$\mathbf{V}_0 = \sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}} (\hat{u}_0, \hat{v}_0, \hat{w}_0)$, вектор начального ускорения $\mathbf{W}_0 = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} R (\ddot{u}_0, \ddot{v}_0, \ddot{w}_0)$, вектор

безразмерных интенсивностей нагрузки $\mathbf{Q} = \frac{1-\nu^2}{Eh} R (0, 0, Q)$ и вектор скоростей интенсивности

$\hat{\mathbf{Q}} = \frac{1-\nu^2}{Eh} R (0, 0, \dot{Q})$.

В принятых обозначениях рассмотренные начально-краевые задачи могут быть записаны в следующих формах: *динамическая задача о вынужденных колебаниях оболочки постоянной толщины* (задача 1):

$$\mathcal{L}[\mathbf{U}] + \ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{Q}, \quad \mathcal{B}[\mathbf{U}] = 0, \quad \mathbf{U}|_{\tau=0} = \mathbf{U}_0, \quad \dot{\mathbf{U}}|_{\tau=0} = \mathbf{V}_0, \quad (8)$$

динамическая задача о вынужденных колебаниях растущей оболочки (задача 2):

$$\mathcal{L}[\dot{\mathbf{U}}] + \ddot{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{Q}}, \quad \mathcal{B}[\mathbf{U}] = 0, \quad \mathbf{U}|_{\tau=0} = \mathbf{U}_0, \quad \dot{\mathbf{U}}|_{\tau=0} = \mathbf{V}_0, \quad \ddot{\mathbf{U}}|_{\tau=0} = \mathbf{W}_0. \quad (9)$$

Соотношения (8), (9) определяют математические формулировки рассматриваемых в работе задач о вынужденных колебаниях нерастущей и растущей цилиндрической оболочки.



2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ В ФОРМЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Решение начально-краевых задач (8), (9) будем искать в классе интегрируемых с квадратом вектор-функций, определенных в области $[-1; 1] \times [0; 2\pi]$ в форме разложения по собственным функциям оператора \mathcal{L} [3]. Эти функции являются нетривиальными решениями задачи Штурма–Лиувилля:

$$\mathcal{L}[\mathbf{U}] = \lambda \mathbf{U}, \quad \mathcal{B}[\mathbf{U}] = 0. \quad (10)$$

В силу самосопряженности оператора \mathcal{L} его собственные значения являются вещественными, а собственные функции — ортогональны и образуют полную в пространстве \mathcal{L}_2 систему функций.

Условиям периодичности по окружной координате φ для любого целого m удовлетворяют собственные функции, образующие два семейства: четные по нормальным перемещениям — индекс «е» (even) и нечетные — индекс «о» (odd).

$$\mathbf{U}_{nm}^e = \begin{pmatrix} u_{nm}^e \cos m\varphi \\ v_{nm}^e \sin m\varphi \\ w_{nm}^e \cos m\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_{nm}^o = \begin{pmatrix} u_{nm}^o \sin m\varphi \\ v_{nm}^o \cos m\varphi \\ w_{nm}^o \sin m\varphi \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем индексы е, о будем опускать, поскольку процедуры нахождения собственных функций идентичны. Формулы, определяющие собственные функции $\mathbf{U}_{nm} = (u_{nm}, v_{nm}, w_{nm})$, в явном виде приведены в приложении.

Решение для оболочки постоянного состава будем искать в виде $\mathbf{U}(x, \varphi, \tau) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \psi_{nm}(\tau) \times \mathbf{U}_{nm}(x, \varphi)$, а для растущей оболочки — в форме $\mathbf{U}(x, \varphi, \tau) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \phi_{nm}(\tau) \mathbf{U}_{nm}(x, \varphi, \tau)$.

Заметим, что в случае вынужденных колебаний растущей оболочки решение не предполагает отделения пространственных переменных и времени.

Координатные функции $\psi_{nm}(\tau)$ задачи 1 находятся из бесконечной последовательности несвязанных задач Коши:

$$\psi_{kl}'' + \lambda_{kl} \psi_{kl} = q_{kl}, \quad \psi_{kl}(0) = \langle \mathbf{U}_0, \mathbf{U}_{kl} \rangle, \quad \psi_{kl}'(0) = \langle \mathbf{V}_0, \mathbf{U}_{kl} \rangle. \quad (11)$$

В задаче о растущей оболочке для определения координатных функций $\phi_{nm}(\tau)$ приходим к бесконечной последовательности связанных задач Коши:

$$\begin{aligned} \phi_{kl}''' + \lambda_{kl} \phi_{kl}' + \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(3\phi_{nm}'' \left\langle \frac{\partial \mathbf{U}_{nm}}{\partial \tau}, \mathbf{U}_{kl} \right\rangle + 3\phi_{nm}' \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{U}_{nm}}{\partial \tau^2}, \mathbf{U}_{kl} \right\rangle + \right. \\ \left. + \phi_{nm} \left\langle \frac{\partial^3 \mathbf{U}_{nm}}{\partial \tau^3} + \lambda_{nm} \frac{\partial \mathbf{U}_{nm}}{\partial \tau}, \mathbf{U}_{kl} \right\rangle \right) = \dot{q}_{kl}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\phi_{kl}(0) = \langle \mathbf{U}_0, \mathbf{U}_{kl} \rangle \Big|_{\tau=0}, \quad \phi_{kl}'(0) + \sum_{n,m=0}^{\infty} \phi_{nm}(0) \left\langle \frac{\partial \mathbf{U}_{nm}}{\partial \tau}, \mathbf{U}_{kl} \right\rangle \Big|_{\tau=0} = \langle \mathbf{V}_0, \mathbf{U}_{kl} \rangle \Big|_{\tau=0}, \quad (13)$$

$$\phi_{kl}''(0) + \sum_{n,m=0}^{\infty} \left\langle 2\phi_{nm}'(0) \frac{\partial \mathbf{U}_{nm}}{\partial \tau} + \phi_{nm}(0) \frac{\partial^2 \mathbf{U}_{nm}}{\partial \tau^2}, \mathbf{U}_{kl} \right\rangle \Big|_{\tau=0} = \langle \mathbf{W}_0, \mathbf{U}_{kl} \rangle \Big|_{\tau=0}. \quad (14)$$

В (11)–(14) угловыми скобками обозначено скалярное произведение функций в пространстве \mathcal{L}_2 , т. е.

$$\langle \mathbf{U}_{nm}, \mathbf{U}_{nm} \rangle = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} (\dot{u}_{nm}^2 + \dot{v}_{nm}^2 + \dot{w}_{nm}^2) d\varphi dx,$$

а $q_{kl} = \langle \mathbf{Q}, \mathbf{U}_{kl} \rangle$, $\dot{q}_{kl} = \langle \dot{\mathbf{Q}}, \mathbf{U}_{kl} \rangle$.

Решение записанных задач может быть получено методом усечения, а численное интегрирование проведено, например, методом Рунге–Кутты.



3. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

В качестве примера проведен анализ напряженно-деформированного состояния круговой цилиндрической оболочки, выполненной из алюминия. Геометрические размеры и механические свойства материала оболочки приняты следующими: $R = 0.01$ м, начальная толщина $h_0 = 10^{-4}$ м, $L = 0.01$ м; $E = 68$ ГПа, $\nu = 0.36$, $\rho = 2700$ кг/м³, а также безразмерная интенсивность внешней нагрузки $q_0 = 0.01$.

Будем считать, что присоединение материала происходит с постоянной скоростью и толщина оболочки изменяется по закону $h(t) = h_0 + v_{gr}t$.

В работе рассмотрен важный с практической точки зрения случай, когда к началу наращивания оболочка изогнута равномерно распределенной нагрузкой постоянной интенсивности $q_0 = \frac{1-\nu^2}{Eh} RQ_0$. В момент начала наращивания нагрузка снимается, и оболочка приходит в движение. Тогда векторы $\mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0, \mathbf{W}_0$ примут следующий вид: $\mathbf{U}_0 = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{q_{nm}}{\lambda_{nm}} \mathbf{U}_{nm}^e(x, \varphi)$, $\mathbf{V}_0 = 0$, $\mathbf{W}_0 = \sum_{n,m=0}^{\infty} q_{nm} \mathbf{U}_{nm}^e(x, \varphi)$,

где $q_{nm} = q_0 \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} w_{nm}(x, \varphi) d\varphi dx$.

На рис. 2 изображены поверхности, иллюстрирующие собственные функции оболочки при $m = 1$ и различных значениях n . Так, на рис. 2, б изображена функция, отражающая преимущественно нормальную форму, ε — продольную форму, а ∂ — крутильную.

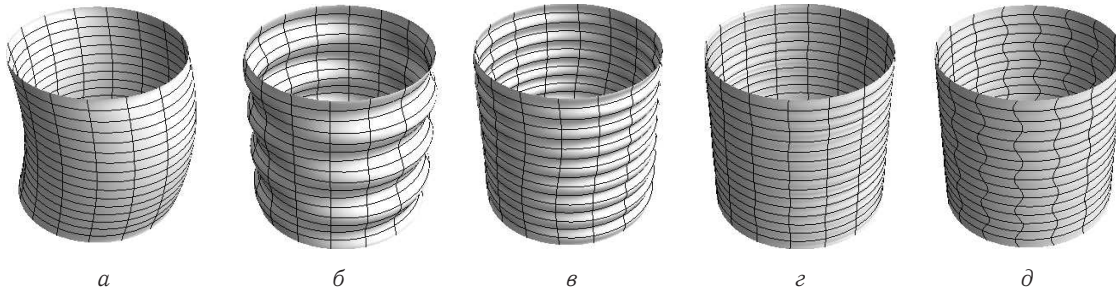


Рис. 2. Собственные формы колебаний цилиндрической оболочки при $n = 0$ (а), $n = 6$ (б), $n = 18$ (в), $n = 44$ (г), $n = 45$ (д)

Численное определение собственных значений и собственных функций краевой задачи для оператора \mathcal{L} имеет значительные технические трудности, связанные с возможным наличием кратных собственных значений и кратных корней алгебраического уравнения (16). В связи с этим контроль получаемого разложения возможно осуществить путем разложения в ряд по собственным функциям \mathbf{U}_{nm} вектор-функции $(0,0,1)$. Такие разложения представлены на рис. 3, а–в при $m = 1$ и с различным количеством слагаемых, причем последнее слагаемое имеет номер n_0 .

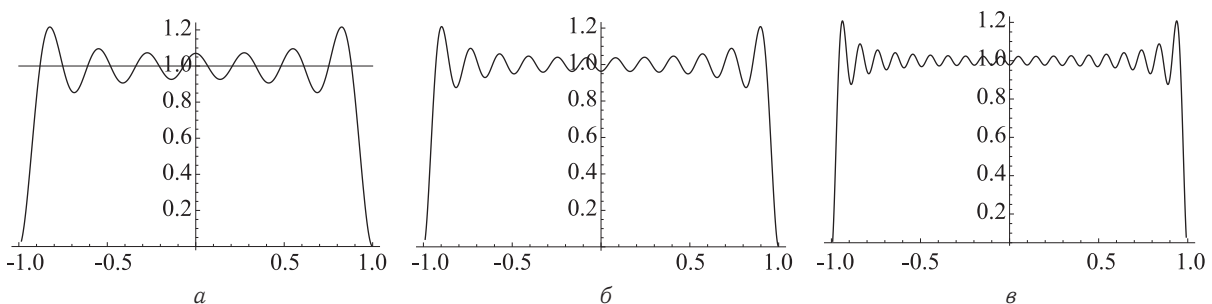


Рис. 3. Тестовое разложение вектор-функции $(0,0,1)$ при $n_0 = 15$ (а), $n_0 = 30$ (б), $n_0 = 60$ (в)

На рис. 4 (здесь и далее сплошная линия соответствует растущей оболочке, а пунктирная — оболочке постоянной толщины) представлены координатные функции растущей оболочки и оболочки постоянной толщины. Он показывает, что первые функции практически не отличаются, однако с ростом номера n расхождение становится значительным. Это означает, что в растущей оболочке собственные частоты уменьшаются. В связи с этим отличаются осциллограммы колебаний растущей оболочки и оболочки постоянного состава, что иллюстрирует рис. 5.

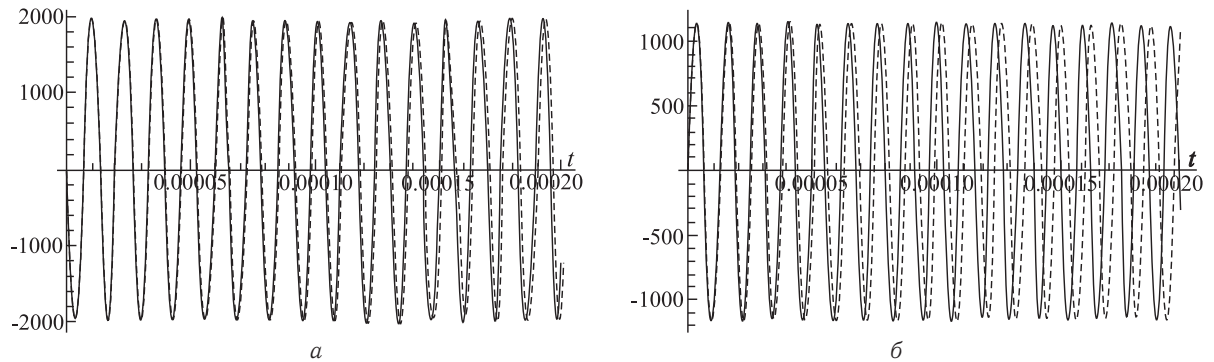


Рис. 4. Координатные функции оболочки при $m = 1$ и $n = 3$ (а), $n = 5$ (б)

На рис. 5 изображены изменения во времени нормального смещения точки срединной поверхности оболочки с безразмерными координатами $(0.6, 0)$. Они показывают, что присоединение материала к оболочке уменьшает амплитуду колебаний.

Таким образом, в работе сформулирована математическая модель о вынужденных колебаниях растущей по толщине круговой цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява. Полученная начально-краевая задача решена на основе метода спектрального разложения. Выявлены особенности деформирования растущей оболочки:

уменьшение частот собственных колебаний, вызванное притоком материала, и затухание колебаний, вызванных начальными возмущениями. Вместе с тем следует отметить, что при построении модели пренебрегается инерционностью присоединяемого материала и связанными с этим тормозящими силами. Влияние этих факторов на напряженно-деформированное состояние оболочки принципиально не изменяет модели, но требует дополнительного исследования.

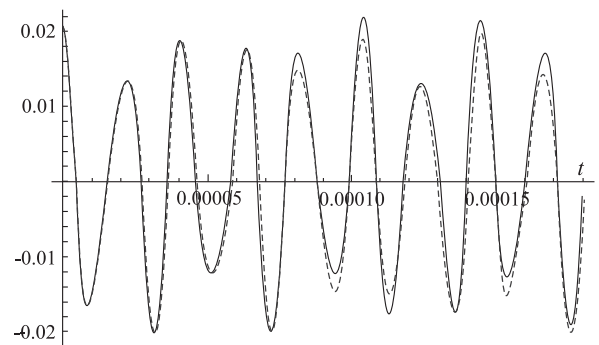


Рис. 5. Осциллограммы колебаний растущей оболочки и оболочки постоянного состава

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00669-а, 12-08-01119-а, 12-08-01260-а).

Библиографический список

1. Биргер И. А., Пановко Я. Г. Прочность. Устойчивость. Колебания : справочник : в 3 т. М. : Машиностроение, 1968. Т. 3. 567 с.
2. Лычев С. А., Лычева Т. Н., Манжиров А. В. Нестационарные колебания растущей круглой пластины // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 2. С. 199–208.
3. Коллац Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М. : Наука, 1968. 504 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем явные формулы собственных функций \tilde{U}_{nm} краевой задачи (10) и последовательность их определения. Индексы n, m в записываемых далее формулах будем опускать. Определим матрицу фундаментальных решений $M =$

$$M = \begin{pmatrix} A_1 e^{\mu_1 x} & A_2 e^{\mu_2 x} & \dots & \dots & A_8 e^{\mu_8 x} \\ B_1 e^{\mu_1 x} & B_2 e^{\mu_2 x} & \dots & \dots & B_8 e^{\mu_8 x} \\ C_1 e^{\mu_1 x} & C_2 e^{\mu_2 x} & \dots & \dots & C_8 e^{\mu_8 x} \end{pmatrix}$$

и вектор постоянных интегрирования $\mathbf{D} = (D_1, D_2, \dots, D_8)$, тогда

$$\tilde{U} = M\mathbf{D}. \tag{15}$$

Коэффициенты оператора \mathcal{L} параметрически зависят от времени, поэтому, в отличие от задачи для оболочек постоянной толщины A_k, B_k, C_k, μ_k также зависят от τ . В явном виде эти величины могут быть представлены следующим образом:

$$A_k = m\mu_k \delta \left(\nu - \frac{1+\nu}{2} \left(1 + \tilde{h}^2 (\mu_k^2 - \delta^{-2} m^2)^2 - \lambda \right) \right),$$



$$B_k = \left(\delta^2 \mu_k^2 - \frac{1-\nu}{2} m^2 + \lambda \right) \left(1 + \tilde{h}^2 (\mu_k^2 - \delta^{-2} m^2)^2 - \lambda \right) - (\nu \delta \mu_k)^2,$$

$$C_k = m \left(\frac{1+\nu}{2} \nu \delta^2 \mu_k^2 - \left(\delta^2 \mu_k^2 - \frac{1-\nu}{2} m^2 + \lambda \right) \right),$$

причем μ_k являются корнями характеристического уравнения:

$$b_0 \mu^8 + b_1 \mu^6 + b_2 \mu^4 + b_3 \mu^2 + b_4 = 0, \tag{16}$$

коэффициенты которого определяются равенствами $b_0 = \delta^4 \tilde{h}^2 (1-\nu)/2$, $b_1 = \delta^2 \tilde{h}^2 (\lambda(3-\nu) - 4m^2(1-\nu))/2$, $b_2 = (\tilde{h}^2(2\lambda^2 - 3m^2\lambda(3-\nu) + 6m^4(1-\nu)) + \delta^4(1-\nu)(1-\nu^2-\lambda))/2$, $b_3 = \delta^{-2}(-2m^2\lambda(2\tilde{h}^2\lambda - \delta^4(1-\nu)) - 3m^4\tilde{h}^2\lambda(-3+\nu) - 4m^6\tilde{h}^2(1-\nu) + \delta^4\lambda(3-\lambda(3-\nu) - \nu - 2\nu^2))/2$, $b_4 = \delta^{-4}(-m^6\tilde{h}^2 + m^2\delta^4\lambda + m^4\tilde{h}^2\lambda - \delta^4(-1+\lambda)\lambda)(2\lambda - m^2(1-\nu))/2$.

Собственные значения λ определяются численно из трансцендентного уравнения, получающегося при действии оператора \mathcal{B} на решения (15). Его можно записать следующим выражением:

$$\begin{vmatrix} A_1 e^{-\mu_1} & A_2 e^{-\mu_2} & \dots & \dots & A_8 e^{-\mu_8} \\ B_1 e^{-\mu_1} & B_2 e^{-\mu_2} & \dots & \dots & B_8 e^{-\mu_8} \\ C_1 e^{-\mu_1} & C_2 e^{-\mu_2} & \dots & \dots & C_8 e^{-\mu_8} \\ C_1 \mu_1 e^{-\mu_1} & C_2 \mu_2 e^{-\mu_2} & \dots & \dots & C_8 \mu_8 e^{-\mu_8} \\ A_1 e^{\mu_1} & A_2 e^{\mu_2} & \dots & \dots & A_8 e^{\mu_8} \\ B_1 e^{\mu_1} & B_2 e^{\mu_2} & \dots & \dots & B_8 e^{\mu_8} \\ C_1 e^{\mu_1} & C_2 e^{\mu_2} & \dots & \dots & C_8 e^{\mu_8} \\ C_1 \mu_1 e^{\mu_1} & C_2 \mu_2 e^{\mu_2} & \dots & \dots & C_8 \mu_8 e^{\mu_8} \end{vmatrix} = 0.$$

Постоянные D_k выбираются таким образом, что квадраты норм собственных функций были бы равны единице, т. е. выполнялось соотношение

$$\|\mathbf{U}\|^2 = \langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle = \pi \sum_{i,j=1}^8 \left(D_i D_j (A_i A_j + B_i B_j + C_i C_j) \frac{2 \sinh(\mu_i + \mu_j)}{\mu_i + \mu_j} \right).$$

УДК 519.68:[5/6+3]; 004.94; 544.015.4; 544.022.822

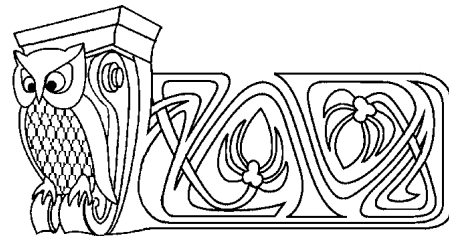
ПЕРКОЛЯЦИЯ СФЕР В КОНТИНУУМЕ

М. М. Бузмакова

Астраханский государственный университет
E-mail: mariya_nazarova@mail.ru

Предложена модель континуальной перколяции жестких сфер с проницаемыми оболочками, которая описывает фазовый переход золь-гель. Сферы имеют жесткие части радиусом r , которые не могут перекрываться друг с другом, и проницаемые оболочки шириной d , которые могут перекрываться. Такие сферы одинакового размера случайным образом помещаются в куб с линейным размером L . Вероятность возникновения связи между сферами пропорциональна объему перекрытия проницаемых оболочек. Если связь между сферами возникает, то сферы принадлежат одному кластеру. В задаче ищется перколяционный кластер, т. е. кластер, соединяющий нижний и верхний грани куба. Доля заполнения куба сферами, при которой вероятность возникновения перколяционного кластера равна 0.5, называется порогом перколяции. Порог перколяции соответствует точке геля. Получена зависимость значения порога перколяции от толщины проницаемой оболочки.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, перколяция, фазовый переход золь-гель.



Percolation of Spheres in Continuum

M. M. Buzmakova

The model of the continuum percolation of hard spheres with permeable shells, which describes phase transition sol-gel, has been investigated. Spheres have hard parts in radii r , which can't be blocked with each other, and permeable shells in width d , which can be blocked. Such spheres of the equal size have been randomly packing in the cub with linear size L . The probability of joining the spheres in a cluster is proportional to the volume of overlapping of permeable shells. Spheres belong to a cluster, if a communication between spheres arises. The percolation cluster is the cluster connecting bottom and top sides of the cube. The packing fraction, at which probability of occurrence of the percolation cluster is 0.5, is called as the percolation threshold. The percolation threshold corresponds to the gel point. The dependency of the percolation threshold of the hard spheres with permeable shells from a thickness of the shell has been obtained.

Key words: computer modeling, percolation, sol-gel phase transition.



ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время активно изучаются процессы самоорганизации в высыхающих каплях биологических жидкостей и водных растворов, содержащих белок и соль в разных соотношениях [1–3]. Процессы, протекающие в каплях высыхающих биологических жидкостей, представляют огромный интерес в медицине для диагностики ряда заболеваний [1, 2]. Для получения информации о состоянии здоровья человека в медицине применяют метод клиновидной дегидратации [2]. Этот метод состоит в следующем: на обезжиренное предметное стекло, расположенное строго горизонтально, наносится дозатором капля биологической жидкости (сыворотки крови, слюны, тканевой или спинномозговой жидкости и т. п.), высушивается и по полученному внешнему виду проводят диагностику широкого круга заболеваний. В частности, одним из диагностических признаков является характер растрескивания образцов. Для здорового человека характерно образование радиальных трещин при высыхании капли сыворотки крови; для образцов, полученных от больных людей, типично хаотическое растрескивание.

В работе [4] проанализировано влияние физико-химических свойств на растрескивание пленки, сформированной в течение высыхания капли неорганического коллоидного раствора на плоской подложке. При низком содержании соли в растворе в высушенном образце наблюдаются радиальные трещины; при среднем — хаотическое растрескивание; при высоком — возникает единственная круговая трещина. Содержание солей в исходном растворе (его ионная сила) определяет скорость процесса гелеобразования. Изменение содержания соли фактически означает изменение времени гелеобразования при неизменной скорости испарения. Таким образом, было показано, что характер растрескивания зависит от относительной скорости высыхания и гелеобразования. Если рассматривать сыворотку крови человека — одну из наиболее часто используемых для целей медицинской диагностики биологическую жидкость — то содержание солей в ней (ионная сила) остается постоянной и равной 0.9% (случай простейшего физиологического раствора). Иными словами, в случае биологической жидкости характер растрескивания высушенных образцов не может определяться ионной силой раствора. Хотя объемная доля белковых молекул в биологической жидкости может испытывать заметные колебания, эти изменения обычно сказываются не на характере растрескивания образцов, а на ширине валика, образующегося вблизи края капли. Можно предположить, что характер растрескивания образца в случае биологической жидкости определяется способностью самих молекул белка образовывать агрегаты.

Биологические жидкости являются сложными коллоидными системами. При высыхании капель биологических жидкостей происходит множество физических, биологических, биофизических, биохимических и физико-химических процессов, изучение которых является актуальной задачей на сегодняшний день [5, 6]. Одним из таких процессов является фазовый переход золь-гель, т. е. переход из жидкой дисперсной среды в среду со структурой, придающей ей свойства твердого тела. Увеличение концентрации дисперсной фазы (в нашем случае молекул белка) приводит к появлению контактов между частицами и началу структурирования — гелеобразования. Возникновение контакта между частицами характеризуется таким явлением, как молекулярный докинг (от англ. docking — стыковка), т. е. молекулы белка образуют связь только на определенном расстоянии и под определенным углом. Альбумин является транспортным белком: продукты метаболизма переносятся на его поверхности в почки. Загрязнение поверхности белка меняет способность молекул образовывать агрегаты, т. е. изменяет физико-химические свойства биожидкости, что, в свою очередь, определяет тип наблюдаемых паттернов. Представляет несомненный интерес исследование того, каким образом способность частиц образовывать связи друг с другом влияет на критическую концентрацию, при которой происходит фазовый переход золь-гель.

Одним из широко распространенных подходов для описания процесса гелеобразования является теория перколяции. Она изучает образование связанных объектов в неупорядоченной среде. С помощью теории перколяции описаны многие физические, химические и другие процессы [7–10]. Известны математические модели процесса гелеобразования, основанные на методах теории перколяции [11–15]. Используются решеточные и континуальные модели. В решеточных моделях занятые узлы рассматривают в качестве молекул растворенного вещества, а пустые — в качестве молекул рас-



творителя. Однако в большинстве случаев решеточные модели оказываются слишком упрощенными для описания реальных систем, так как, во-первых, молекулы растворенного вещества, как правило, не являются точечными объектами, во-вторых, координаты молекул в реальных системах являются непрерывными, а не дискретными. Кроме того, использование решеточных моделей предполагает наличие у моделируемой системы дальнего порядка — трансляционной симметрии. В жидкостях имеется только ближний порядок, поэтому искусственная дискретизация области привносит в модель неприсущие ей свойства. Если говорить конкретно о процессе гелеобразования белковых молекул, то характерный размер молекулы человеческого сывороточного альбумина составляет величину порядка 10^{-8} м (см., например, [16]), что на два порядка превышает характерные расстояния между молекулами воды. Поэтому молекулы альбумина в водном растворе более естественно рассматривать как частицы, находящиеся в непрерывной среде. Таким образом, описание процесса гелеобразования с помощью моделирования континуальной перколяционной системы представляется более адекватным по сравнению с решеточными моделями. Под континуальной перколяционной системой понимается пространственная трехмерная система с вещественными координатами.

Данная работа посвящена моделированию процесса гелеобразования. При моделировании используются методы теории перколяции. Предложена модель континуальной перколяции жестких сфер с проницаемыми оболочками. Континуальная перколяция сфер изучалась и ранее [17, 18], однако новизна нашего исследования заключается в том, что мы учитываем вероятность возникновения связи между сферами, которая пропорциональна объему перекрытия проницаемых оболочек. Жесткие сферы выступают в роли молекул, вероятность докинга молекул характеризуется толщиной проницаемой оболочки и вероятностью возникновения связи, которая пропорциональна объему перекрытия проницаемых оболочек. Точка образования геля (критическая концентрация молекул в водном растворе) соответствует порогу перколяции.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основной целью моделирования является выявление зависимости порога перколяции от толщины проницаемой оболочки сферы. Для достижения цели была поставлена перколяционная задача жестких сфер с проницаемыми оболочками. Была создана компьютерная модель континуальной перколяции жестких сфер с проницаемыми оболочками. Сферы имеют жесткие части радиусом r , которые не могут перекрываться друг с другом, и проницаемые оболочки шириной d , которые могут перекрываться. Такие сферы одинакового размера случайным образом упакованы в куб с линейным размером L . Две сферы принадлежат одному кластеру в том случае, если их проницаемые оболочки пересекаются и выполняется условие существования связи:

$$p_{\text{bond}} = \frac{V_{\text{per}}(l)}{V_{\text{per}}^{\text{max}}},$$

где $V_{\text{per}}(l) = \frac{\pi(2(r+d)-l)^2(4(r+d)+l)}{12}$, l — расстояние между центрами двух сфер, $V_{\text{per}}^{\text{max}} = V_{\text{per}}(2r) = 2\pi d^2((r+d) - d/3)$.

Используются следующие обозначения: $p = Vn/L^3$ — доля упаковки, V — объем сферы, n — количество упакованных сфер.

В задаче ищется перколяционный кластер, т.е. кластер, соединяющий нижний и верхний грани куба. Доля заполнения куба сферами, при которой вероятность возникновения перколяционного кластера равна 0.5, называется порогом перколяции.

В отличие от работ [17, 18], в нашем исследовании вероятность возникновения связи между сферами пропорциональна объему перекрытий их проницаемых оболочек.

2. МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для моделирования перколяции жестких сфер с проницаемыми оболочками была создана программа на языке программирования C++. Входными данными программы являются: L — линейный размер куба, r — радиус сферы, d/r — отношение толщины проницаемой оболочки к радиусу сферы, p_{min} — минимальное значение доли заполнения куба сферами, p_{max} — максимальное значение доли



заполнения куба сферами, step — шаг изменения доли заполнения, k_i — количество испытаний. При моделировании были использованы периодические граничные условия по всем трем направлениям. Моделирование проводилось методом Монте–Карло. Для генерации случайных чисел применялся алгоритм «Вихрь Мерсенна» [19]. Для идентификации принадлежности сферы к кластеру используется алгоритм Хошена–Копельмана [20], который был модифицирован под континуальную задачу. Идентификация перколяционного кластера осуществляется с помощью волнового алгоритма [21].

Рассмотрим все используемые алгоритмы подробнее. Для заданной доли упаковки рассчитывается количество сфер n , которые необходимо разместить в кубе. Генерируются координаты центра первой сферы (x_1, y_1, z_1) . Для каждой следующей сферы генерируются координаты центра (x_i, y_i, z_i) и проверяется, не пересекается ли ее жесткая часть с ранее упакованными сферами. Если не пересекается, она принимается, иначе — отвергается. И так далее, до тех пор пока не будет достигнута необходимая доля упаковки. После выполнения процедуры упаковки имеется n упакованных в куб сфер, каждая из которых имеет свой порядковый номер i , где $1 \leq i \leq n$. Эти номера в дальнейшем используются в модифицированном алгоритме Хошена–Копельмана для распределения сфер по кластерам.

Далее в программе используется модифицированный алгоритм Хошена–Копельмана, который за один проход идентифицирует все кластеры и дает распределение сфер по кластерам. Рассмотрим его более подробно, так как он несколько отличается от классического метода. Используются следующие обозначения: k — номер кластера, $\text{пек}[i]$ — кластерная метка i -й сферы, $\text{кк}[k]$ — размер k -го кластера. Алгоритм работает по следующей схеме:

1. Первой сфере присваивается кластерная метка 1 и размеру первого кластера также присваивается значение 1.
2. Для каждой следующей сферы i , где $2 \leq i \leq n$, проверяется, существуют ли среди ранее проверенных сфер (уже имеющих кластерную метку) ее соседи (соседями являются сферы, центры которых находятся на расстоянии, равном или меньшим $2(r+d)$ и выполняется условие наличия связи между ними $p_{\text{gen}} \leq p_{\text{bond}}$, где p_{gen} — случайно сгенерированное число от 0 до 1).
3. Если соседей не нашлось, то сфера i предположительно принадлежит новому кластеру. В этом случае k увеличивается на 1, сфере i присваивается k -е значение кластерной метки и значению размера k -го кластера присваивается 1.
4. Если встречается один сосед, то две сферы принадлежат одному кластеру. В этом случае сфере i присваивается кластерная метка соседа и размер кластера с данной меткой увеличивается на 1.
5. Если соседей нашлось несколько, то все сферы принадлежат одному кластеру. В этом случае соседи могут иметь как одинаковые, так и разные кластерные метки. Если все кластерные метки соседей одинаковые, то сфере i присваивается кластерная метка соседа и размер кластера с данной меткой увеличивается на 1. Если среди соседей есть такие, которые имеют разные кластерные метки, то возникает конфликт кластерных меток. В этом случае:
 - a) находим среди кластерных меток наименьшую, она является правильной кластерной меткой, остальные метки являются неправильными;
 - b) сфере i и всем соседям присваивается значение правильной кластерной метки, размер кластера с правильной меткой увеличивается на $(1+(\text{количество соседей}-1))$;
 - c) среди ранее рассмотренных сфер находятся те, которые имеют неправильные кластерные метки. Для каждой такой сферы меняем кластерную метку на правильную, размер кластера с правильной меткой увеличивается на количество таких сфер, а размеры кластеров с неправильными кластерными метками обнуляются.

Таким образом, при выполнении модифицированного алгоритма Хошена–Копельмана каждой сфере присваивается кластерная метка. Известно распределение сфер по кластерам, т. е. мы знаем сколько существует кластеров и размер каждого кластера. Это необходимо для определения среднего размера кластера. Кроме того, при выполнении данного алгоритма определяется, какие сферы являются соседями, известно сколько соседей имеет каждая сфера. Эта информация в дальнейшем используется в волновом алгоритме для идентификации перколяционного кластера и для нахождения распределения количества соседей по сферам, что необходимо для определения значения среднего количества соседей сферы B_c .



Для нахождения вероятности возникновения перколяции в системе необходимо проверить на каждом испытании, существует ли кластер, пронизывающий всю систему, — перколяционный кластер. Перколяционный кластер ищется по направлению снизу вверх, т. е. от сферы, находящейся в нижнем слое системы, к сфере, находящейся в верхнем слое системы. Таких сфер может оказаться несколько, необходимо рассмотреть все. Для этого создаются два массива, в первый $\min z$ записываются все номера сфер, для которых вертикальная координата z удовлетворяет условию $0 \leq z \leq (r + d)$, во второй $\max z$ — номера сфер, для которых $L - (r + d) \leq z \leq L$. Далее для каждой пары сфер из первого и второго массивов, которые имеют одинаковые кластерные метки, определяется, существует ли непрерывный путь между ними с помощью волнового алгоритма [21]. Если такая пара сфер находится, то дальнейшие сферы уже не проверяются. Данный алгоритм находит кратчайший путь по перколяционному кластеру, определяет длину этого пути. Также после нахождения перколяционного кластера нам известен его размер, т. е. сколько сфер принадлежит перколяционному кластеру. Это необходимо для определения его мощности и фрактальной размерности.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Произведены расчеты для системы со следующими размерами: $L = 10, 12, 15, 20, r = 0.5, d = 0.2, 0.3, \dots, 1$. Для каждого L, d произведено 100 испытаний и определено значение порога перколяции по следующей методике. Определена вероятность возникновения перколяционного кластера $P(p)$; далее полученные результаты компьютерного эксперимента аппроксимируются функцией $P(p) = (1 + \exp(-(p - p_c(L))a))^{-1}$ (рис. 1). Имеются различные подходы в выборе аппроксимирующей функции, в частности использование полиномов или прямых. Ни один из этих способов не имеет строго теоретического обоснования, однако применение различных аппроксимирующих функций приводит к одним и тем же значениям порога перколяции с ошибкой, не превышающей ошибки компьютерного эксперимента. При аппроксимации учитываются ошибки проведенных измерений следующим образом [22]. Для каждого значения вероятности возникновения перколяционного кластера найдено стандартное отклонение среднего $\sigma_{\bar{P}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (P_i - \bar{P})^2} / \sqrt{N}$. Далее, используя критерий Стьюдента, найден доверительный интервал $\bar{P} \pm t\sigma_{\bar{P}}$, в который с вероятностью 95% попадает наше значение вероятности возникновения перколяционного кластера, где $t = 1,98$ — это квантиль t -распределения Стьюдента на уровне $(1 + 0.95)/2$. Значение параметра p , при котором вероятность возникновения кластера равна 0.5, принимается за значение порога перколяции. При аппроксимации данных, полученных при компьютерном моделировании, получается значение порога перколяции с ошибкой

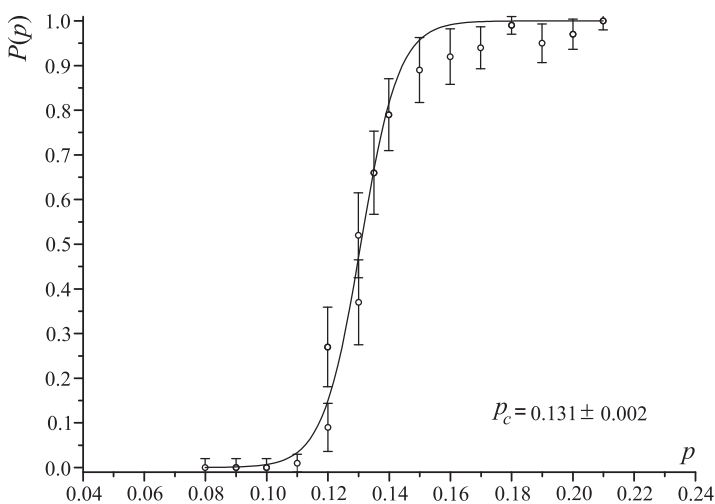


Рис. 1. Вероятность возникновения перколяционного кластера при линейном размере куба $L = 15$, в котором проводилось моделирование, и отношении толщины пронизываемой оболочки к радиусу сферы $d/r = 1$

на порядок ниже ошибки исходных данных, потому что при вычислении ошибки результата учитываются не только ошибки исходных данных, как веса, но и близость полученной кривой к экспериментальным данным. При этом используется критерий χ -квадрат: $\chi^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i (y_i - \bar{y}_i)^2$, где σ_i — ошибки исходных данных, y_i — значение аппроксимирующей функции в точке x_i и \bar{y}_i — значение, полученное в результате компьютерного эксперимента. Ошибка результата вычисляется, при использовании стандартного отклонения среднего $s = \sqrt{\frac{\chi^2}{n-1}}$, по формуле $\pm t \frac{s}{\sqrt{n}}$, где t — коэффициент Стьюдента.



Далее с помощью скейлингового отношения $|p(L) - p(\infty)| \propto L^{-1/\nu}$, где $\nu = 0.875 \pm 0.008$ — универсальный критический показатель [23], производится экстраполяция на случай бесконечной системы (термодинамический предел).

Получена зависимость значения порога перколяции от толщины проникаемой оболочки, которая аппроксимируется функцией (рис. 2): $p_c(\varepsilon) = b + A \exp(-\varepsilon/t)$, где $b = 0.05 \pm 0.01$, $A = 0.471 \pm 0.009$ и $t = 0.57 \pm 0.05$, $\varepsilon = d/r$. На графике представлены значения порогов перколяции для различных отношений толщины проникаемой оболочки к жесткому радиусу сферы от 0.3 до 1 (см. табл. 1). При отношении, равном 0.2, перколяция не наступает вследствие джамминга (явления, возникающего при случайном заполнении системы неточечными объектами в случае, когда пустоты в системе еще существуют, но их размера недостаточно для размещения объекта). Таким образом, разместить сферы уже не удастся, но и связи между ними возникают крайне редко из-за того, что проникаемая оболочка слишком тонкая, вследствие чего перколяционного кластера не существует.

Кроме порога перколяции получена зависимость вероятности возникновения связи между сферами от доли заполнения при различных значениях толщины оболочки (рис. 3). На рис. 3 наблюдается определенная закономерность: вероятность связи между сферами увеличивается при увеличении доли упаковки, причем чем тоньше толщина проникаемой оболочки, тем значения вероятности связи больше. Из этого можно сделать вывод, что чем ближе находятся частицы друг к другу, тем сильнее между ними взаимодействие, а вероятность того, что они принадлежат одному кластеру, возрастает. Полученные данные компьютерного моделирования хорошо аппроксимируются параллельными парабололами вида $p_{\text{bond}}(p) = a + bp^2$ при различных d/r (в пределах погрешности вычислений). Параметры аппроксимирующих функций приведены в табл. 2. При $d/r = 0.4, 0.3$ параллелизм нарушается вследствие плохой статистики, так как при малых значениях толщины проникаемой оболочки связь между сферами возникает редко.

Кроме определения порога перколяции рассчитаны другие характеристики системы: средний размер кластера, мощность перколяционного кластера. Приведены формулы для характеристик [23], где

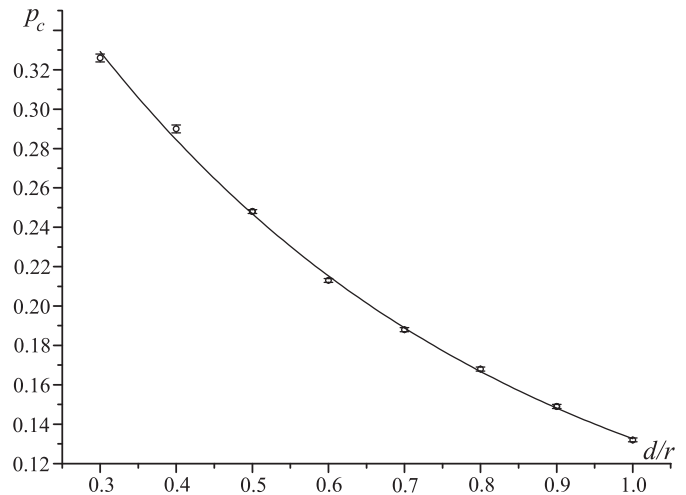


Рис. 2. Зависимость порога перколяции от толщины проникаемой оболочки в случае вероятности возникновения связи между

$$\text{сферами } p_{\text{bond}} = V_{\text{per}}/V_{\text{per}}^{\text{max}}$$

Таблица 1

Значения порогов перколяции p_c при различных d/r

d/r	p_c	d/r	p_c
1	0.132 ± 0.001	0.6	0.213 ± 0.001
0.9	0.149 ± 0.001	0.5	0.248 ± 0.001
0.8	0.168 ± 0.001	0.4	0.290 ± 0.002
0.7	0.188 ± 0.001	0.3	0.326 ± 0.002

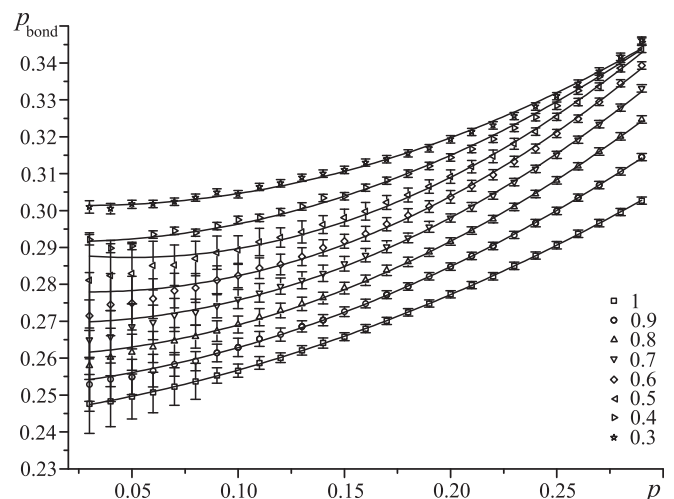


Рис. 3. Зависимость вероятности возникновения связи от доли заполнения при различных значениях толщины оболочки при линейном размере куба $L = 30$



Таблица 2

Параметры аппроксимирующих функций $p_{\text{bond}}(p) = a + bp^2$ данных компьютерного моделирования при различных d/r

d/r	a	b
1	0.2520 ± 0.0003	0.616 ± 0.006
0.9	0.2568 ± 0.0002	0.690 ± 0.005
0.8	0.2618 ± 0.0002	0.745 ± 0.003
0.7	0.2676 ± 0.0003	0.766 ± 0.005
0.6	0.2736 ± 0.0004	0.767 ± 0.007
0.5	0.2805 ± 0.0006	0.731 ± 0.009
0.4	0.2901 ± 0.0003	0.631 ± 0.008
0.3	0.2996 ± 0.0003	0.517 ± 0.008

используются обозначения $\langle N_s \rangle$ — среднее число кластеров размеров s , n — число упакованных сфер.

Распределение кластеров по размерам —

$$n_s(p) = \frac{\langle N_s \rangle}{n}; \quad (1)$$

Вероятность того, что случайно выбранная сфера принадлежит кластеру размера s —

$$w_s = \frac{sn_s(p)}{\sum_s sn_s(p)}; \quad (2)$$

Средний размер кластера —

$$S = \sum_s sw_s. \quad (3)$$

Вероятность того, что выбранная случайным образом сфера принадлежит перколяционному кластеру (мощность перколяционного кластера), представим в виде

$$P_\infty(p) = \frac{N_\infty V}{L^3}, \quad (4)$$

где N_∞ — количество сфер, принадлежащих перколяционному кластеру, V — объем сферы, L — линейный размер куба, в который сферы упаковываются.

Дополнительным подтверждением правильности полученных нами результатов можно считать характерное поведение среднего размера кластера, мощности перколяционного кластера (рис. 4).

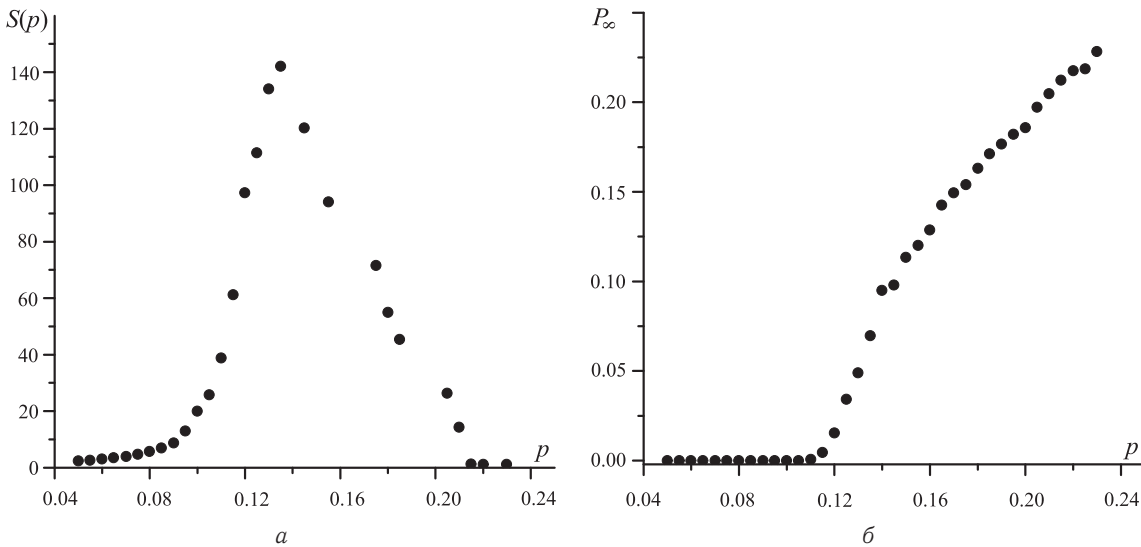


Рис. 4. Средний размер кластера $S(p)$ (а) и мощность перколяционного кластера $P_\infty(p)$ (б)

Перколяционный переход является геометрическим фазовым переходом. Порог перколяции разделяет две фазы. В первой фазе существуют только кластеры конечного размера и перколяционного кластера нет, в другой фазе существуют один бесконечный кластер и кластеры малых размеров. Многие важные характеристики кластера описаны вблизи порога перколяции показательной функции с различными критическими показателями [23]: $P_\infty(p) \propto |p - p_c|^\beta$, $S(p) \propto |p - p_c|^{-\gamma}$. Так для размерности системы $d = 3$ известны критические показатели $\gamma = 1,795 \pm 0.005$ и $\beta = 0.417 \pm 0.003$ [23]. Критические показатели являются универсальными для данного класса задач — для задач теории перколяции.

В настоящей работе были определены критические показатели $\gamma = 1,92 \pm 0.09$ при $p > p_c$, $\gamma = 1,98 \pm 0.05$ при $p < p_c$ и $\beta = 0.416 \pm 0.009$. Критические показатели были найдены по следующей



методике: графически строилась зависимость $S(p)$ от $|p_c - p|$, P_∞ от $(p - p_c)$ в логарифмическом масштабе. Далее, в каждом случае полученные точки аппроксимировались прямой, наклон которой принимался за значение соответствующего критического показателя.

Фрактальная размерность перколяционного кластера на пороге перколяции должна соответствовать формуле [7]: $d_f = d - \beta/\nu$. Для $d = 3$ фрактальная размерность перколяционного кластера будет ≈ 2.531 . В настоящей работе определено значение фрактальной размерности перколяционного кластера ($d_f = 2.64 \pm 0.13$) по стандартной методике [23].

Кроме того, найдены значения среднего количества соседей сферы B_c [24–26] на пороге перколяции для каждого значения толщины оболочки (рис. 5). Сначала находим распределение количества соседей по сферам, т. е. считаем количество сфер $N_{sph}(k)$, имеющих k соседей, где $0 \leq k \leq k_{max}$. Среднее значение количества соседей сферы вычисляем по формуле $B_c = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k_{max}} k N_{sph}(k)$, где n — количество сфер.

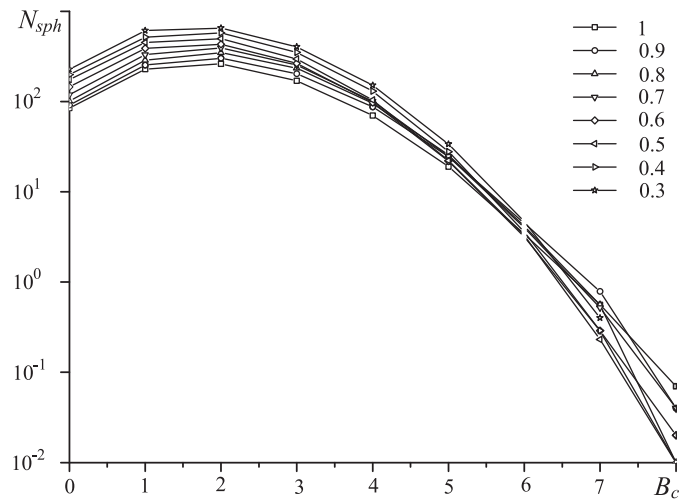


Рис. 5. Значение среднего количества соседей сферы B_c на пороге перколяции при различных значениях отношения толщины проницаемой оболочки к радиусу сферы d/r при линейном размере куба $L = 15$, в котором проводилось моделирование

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена модель континуальной перколяции жестких сфер с проницаемыми оболочками, отличающаяся от известных тем, что впервые вероятность возникновения связи между сферами зависит от объема перекрытия проницаемых оболочек.

Выявлена зависимость порога перколяции от толщины проницаемой оболочки. Кроме того, результаты исследования показали, что вероятность возникновения связи между частицами возрастает с увеличением доли заполнения системы частицами, причем чем тоньше проницаемая оболочка, тем больше значения вероятности возникновения связи. Также выявлено, что перколяция наступает только для объектов с толщиной оболочки, превышающей некоторое минимальное значение.

Полученные результаты позволяют оценить концентрацию молекул белка в водном растворе (порог перколяции), при которой начинает формироваться гелевая матрица в высыхающей капле биологической жидкости с учетом вероятности молекулярного докинга. Полученные результаты свидетельствуют о том, что в рамках нашей модели загрязнение поверхности альбумина продуктами метаболизма увеличивает толщину проницаемой оболочки, т. е. повышает способность молекул к агрегации.

Автор благодарен Ю. Ю. Тарасевичу за постановку задачи и обсуждение результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-97007-р_Поволжье_а, 09-02-90440-Укр_ф_а, 09-08-00822_а).

Библиографический список

1. Савина Л. В. Кристаллоскопические структуры сывротки крови здорового и больного человека. Краснодар: Сов. Кубань, 1999. 96 с.
2. Шабалин В. Н., Шатохина С. Н. Морфология биологических жидкостей человека. М.: Хризостом, 2001. 304 с.
3. Рапис Е. Г. Белок и жизнь (самоорганизация, самосборка и симметрия наноструктур белка). Иерусалим: Филобиблон; М.: Милта-ПКП ГИТ, 2002. 257 с.
4. Pauchard L., Parisse F., Allain C. Influence of salt content on crack patterns formed through colloidal suspension desiccation // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 59, № 3. P. 3737–3740.
5. Яхно Т. А., Яхно В. Г., Санин А. Г., Санина О. А., Пелюшенко А. С. Белок и соль: пространственные события в высыхающей капле // Журн. техн. физики. 2004. Т. 74, № 8. С. 100–108.
6. Яхно Т. А., Яхно В. Г. Основы структурной эволю-



- ции высыхающих капель биологических жидкостей // Журн. технической физики. 2009. Т. 79, № 8. С. 133–141.
7. *Stauffer D., Aharony A.* Introduction to Percolation Theory. L. : Taylor & Francis, 1992. 181 p.
8. *Sahimi M.* Application of Percolation Theory. L. : Taylor & Francis, 1994. 258 p.
9. *Займан Д.* Модели беспорядка. Теоретическая физика однородно неупорядоченных систем. М. : Мир, 1982. 591 с.
10. *Федер Е.* Фракталы. М. : Мир, 1991. 254 с.
11. *Ohira K., Sato M., Kohmoto M.* Fluctuations in chemical gelation // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 75, iss. 4, 041402.
12. *Gado E., Fierro A., Arcangelis L., Coniglio A.* Slow dynamics in gelation phenomena: From chemical gels to colloidal glasses // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 69, iss. 5, 051103.
13. *Jespersen S.* Cluster diffusion at the gelation point // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 66, iss. 3, 031502.
14. *Vernon D., Plischke M.* Viscoelasticity near the gel point: A molecular dynamics study // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64, iss. 3, 031505.
15. *Vernon D.* Model for gelation with explicit solvent effects: Structure and dynamics / D. Vernon, M. Plischke // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 67, iss. 1, 011401.
16. *Monkos K.* Determination of some hydrodynamic parameters of ovine serum albumin solutions using viscometric measurements // J. of Biological Phys. 2005. Vol. 31. P. 219–232.
17. *Rottureau M., Gimel J., Nicolai T., Durand D.* 3d Monte Carlo simulation of site-bond continuum percolation of spheres // The European Physical J. E: Soft Matter and Biological Physics. 2003. Vol. 11. P. 61–64.
18. *Johner N., Grimaldi C., Balberg I., Ryser P.* Transport exponent in a three-dimensional continuum tunneling-percolation model // Phys. Rev. B. 2008. Vol. 77, iss. 17, 174204.
19. *Matsumoto M.* Mersenne twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator // ACM Trans. on Modeling and Computer Simulations. 1998. Vol. 8, № 1. P. 3–30.
20. *Hoshen J., Kopelman R.* Percolation and cluster distribution. I. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm // Phys. Rev. B. 1976. Vol. 14, № 8. P. 3438–3445.
21. *Rubin F.* The Lee Path Connection Algorithm // IEEE Transactions on Computers. 1974. Vol. 23. P. 907–914.
22. *Тейлор Д.* Введение в теорию ошибок / пер. с англ. М. : Мир, 1985. 272 с.
23. *Тарасевич Ю. Ю.* Перколяция: теория, приложения, алгоритмы. М. : Едиториал УРСС, 2002. 112 с.
24. *Balberg I., Binenbaum N.* Invariant properties of the percolation thresholds in the soft-core-hard-core transition // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 35, № 12. P. 5174–5177.
25. *Эфрос А. Л.* Физика и геометрия беспорядка. М. : Наука, 1982. 260 с.
26. *Zhydkov V.* 3D continuum percolation approach and its application to lava-like fuel-containing materials behavior forecast // Condensed Matter Phys. 2009. Vol. 12, № 2. P. 193–203.

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СЛУЧАЯ МНОГОСЛОЙНОЙ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ

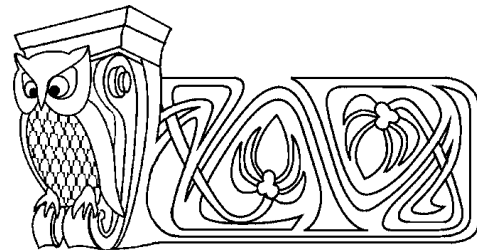
М. В. Вильде, Л. Ю. Коссович, Ю. В. Шевцова

Саратовский государственный университет
E-mail: mv_wilde@mail.ru

Производится асимптотическое интегрирование трехмерных динамических уравнений теории упругости для случая многослойных тонких оболочек произвольного очертания. Построены тангенциальное и поперечное низкочастотные длинноволновые приближения. Выведены двумерные разрешающие системы уравнений.

Ключевые слова: многослойные оболочки, низкочастотные длинноволновые приближения, асимптотические методы.

Целью данной работы является развитие асимптотических методов исследования динамических процессов в тонкостенных телах, предложенных в работах [1–5]. Метод асимптотического интегрирования трехмерных динамических уравнений теории упругости обобщается на случай многослойных



Asymptotic Integration of Dynamic Elasticity Theory Equations in the Case of Multilayered Thin Shell

M. V. Wilde, L. Yu. Kossovich, Yu. V. Shevtsova

Asymptotic integration of elasticity theory 3D equations is fulfilled for the case of multilayered arbitrary-shaped thin-walled shells. The tangential and the transverse long-wave low-frequency approximations are constructed. The governing 2D equations are derived.

Key words: multilayered shells, long-wave low-frequency approximations, asymptotic methods.



оболочек произвольного очертания. Рассматривается случай низкочастотных длинноволновых приближений, допускающий сведение трехмерных уравнений теории упругости к двумерным уравнениям относительно величин, заданных на срединной поверхности оболочки. В отличие от других работ, посвященных построению двумерных теорий многослойных оболочек (см., например, [6]), полиномиальный закон изменения НДС по толщинной координате не задается заранее, а определяется в ходе асимптотического интегрирования.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим многослойную оболочку произвольного очертания толщины $2h$. Будем предполагать, что каждый слой оболочки выполнен из изотропного упругого материала. Введем криволинейную триортогональную систему координат:

$$\bar{P}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \bar{M}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \bar{n}, \quad (1)$$

где (α_1, α_2) — параметры линий кривизны срединной поверхности оболочки, α_3 — расстояние по нормали, \bar{n} — единичный вектор нормали к срединной поверхности.

Поверхности раздела слоев зададим уравнениями

$$\alpha_3 = z_p = \text{const}, \quad p = \overline{1, n-1}, \quad h = z_0 > z_1 > \dots > -h = z_n, \quad (2)$$

n — число слоев. Подчеркнем, что поверхность $\alpha_3 = 0$ соответствует срединной поверхности оболочки и в общем случае не является поверхностью раздела слоев. Все величины, относящиеся к k -му слою, будем отмечать верхним (для искомым функций) или нижним (для постоянных параметров) индексом k . Толщину k -го слоя обозначим $2h_k$, тогда $z_{k-1} - z_k = 2h_k$.

Трехмерные динамические уравнения теории упругости для каждого слоя оболочки запишем в форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_i} \frac{\partial \sigma_{ii}^{(k)}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial \sigma_{ji}^{(k)}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \sigma_{3i}^{(k)}}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} (\sigma_{ii}^{(k)} - \sigma_{jj}^{(k)}) + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} (\sigma_{ij}^{(k)} + \sigma_{ji}^{(k)}) + \\ + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i H_j}{\partial \alpha_3} \sigma_{3i}^{(k)} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} \sigma_{i3}^{(k)} - \rho_k \frac{\partial^2 v_i^{(k)}}{\partial t^2} = 0, \quad (3) \\ \frac{1}{H_i} \frac{\partial \sigma_{i3}^{(k)}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial \sigma_{j3}^{(k)}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \sigma_{33}^{(k)}}{\partial \alpha_3} - \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} \sigma_{ii}^{(k)} - \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_3} \sigma_{jj}^{(k)} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i H_j}{\partial \alpha_3} \sigma_{33}^{(k)} + \\ + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} \sigma_{i3}^{(k)} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} \sigma_{j3}^{(k)} - \rho_k \frac{\partial^2 v_3^{(k)}}{\partial t^2} = 0, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(k)} &= \frac{E_k}{2(1+\nu_k)\kappa_k^2} \left[\frac{\nu_k}{1-\nu_k} \left(\frac{\partial v_3^{(k)}}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial v_j^{(k)}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} v_i^{(k)} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_3} v_3^{(k)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{H_i} \frac{\partial v_i^{(k)}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} v_j^{(k)} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} v_3^{(k)} \right], \\ \sigma_{33}^{(k)} &= \frac{E_k}{2(1+\nu_k)\kappa_k^2} \left[\frac{\nu_k}{1-\nu_k} \left(\frac{1}{H_i} \frac{\partial v_i^{(k)}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial v_j^{(k)}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} v_j^{(k)} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} v_i^{(k)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} v_3^{(k)} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_3} v_3^{(k)} \right) + \frac{\partial v_3^{(k)}}{\partial \alpha_3} \right], \quad (4) \\ \sigma_{3i}^{(k)} &= \frac{E_k}{2(1+\nu_k)} \left[\frac{1}{H_i} \frac{\partial v_3^{(k)}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial v_i^{(k)}}{\partial \alpha_3} - \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} v_i^{(k)} \right], \\ \sigma_{ij}^{(k)} &= \frac{E_k}{2(1+\nu_k)} \left[\frac{1}{H_j} \frac{\partial v_i^{(k)}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial v_j^{(k)}}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} v_i^{(k)} - \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} v_j^{(k)} \right], \end{aligned}$$



где $\kappa_k = \frac{c_{2,k}}{c_{1,k}} = \sqrt{\frac{1-2\nu_k}{2(1-\nu_k)}}$, $c_{1,k} = \sqrt{\frac{E(1-\nu_k)}{(1+\nu_k)(1-2\nu_k)\rho_k}}$, $c_{2,k} = \sqrt{\frac{E_k}{2(1+\nu_k)\rho_k}}$, $\sigma_{ij}^{(k)}$ — напряжения, $v_m^{(k)}$ — перемещения, t — время, H_i — параметры Ламе, E_k — модуль Юнга, ν_k — коэффициент Пуассона, $c_{1,k}$ — скорость волны расширения, $c_{2,k}$ — скорость волны сдвига. Здесь и далее всегда предполагается, что индексы принимают следующие значения: $i \neq j = 1, 2$, $m = 1, 2, 3$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, n-1}$. Параметры Ламе выражаются через коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки A_i^2 и главные радиусы кривизны R_i следующим образом:

$$H_i = A_i \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_i} \right). \quad (5)$$

Будем предполагать, что лицевые поверхности оболочки свободны от нагрузки. Тогда граничные условия на них будут иметь следующий вид:

$$\sigma_{3m}^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_3 = h, \quad \sigma_{3m}^{(n)} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_3 = -h. \quad (6)$$

На поверхностях раздела слоев зададим условия полного контакта:

$$\sigma_{3m}^{(p)} = \sigma_{3m}^{(p+1)}, \quad v_m^{(p)} = v_m^{(p+1)} \quad \text{при} \quad \alpha_3 = z_p. \quad (7)$$

Вывод уравнений для приближенных теорий будет осуществляться с помощью метода асимптотического интегрирования уравнений (3), (4), основанного на малости геометрического параметра $\eta = h/R$ (R — характерное значение радиусов кривизны срединной поверхности).

Введем масштабированные переменные

$$\alpha_i = R\eta^q \xi_i, \quad \alpha_3 = R\eta \zeta, \quad t = Rc_{2,1}^{-1} \eta^a \tau, \quad (8)$$

где q — показатель изменяемости, a — показатель динамичности (см. [1, 3]). Предположим, что дифференцирование по безразмерным переменным ξ_i , ζ , τ не меняет асимптотического порядка неизвестных величин. В безразмерных переменных уравнения (3), (4) запишутся в виде

$$\begin{aligned} & \eta^{-q} \left(\frac{1}{H_i} \frac{\partial \sigma_{ii}^{(k)}}{\partial \xi_i} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial \sigma_{jj}^{(k)}}{\partial \xi_j} \right) + \eta^{-1} \frac{\partial \sigma_{3i}^{(k)}}{\partial \zeta} + \frac{R}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} \left(\sigma_{ii}^{(k)} - \sigma_{jj}^{(k)} \right) + \frac{R}{H_i H_j} \times \\ & \times \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} \left(\sigma_{ij}^{(k)} + \sigma_{ji}^{(k)} \right) + \frac{R}{H_i H_j} \frac{\partial H_i H_j}{\partial \alpha_3} \sigma_{3i}^{(k)} + \frac{R}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} \sigma_{i3}^{(k)} - \eta^{-2a} \frac{E_k}{2(1+\nu_k)R} \frac{\partial^2 v_i^{(k)}}{\partial \tau^2} = 0, \quad (9) \\ & \eta^{-q} \left(\frac{1}{H_i} \frac{\partial \sigma_{i3}^{(k)}}{\partial \xi_i} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial \sigma_{j3}^{(k)}}{\partial \xi_j} \right) + \eta^{-1} \frac{\partial \sigma_{33}^{(k)}}{\partial \zeta} - \frac{R}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} \sigma_{ii}^{(k)} - \frac{R}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_3} \sigma_{jj}^{(k)} + \\ & + \frac{R}{H_i H_j} \frac{\partial H_i H_j}{\partial \alpha_3} \sigma_{33}^{(k)} + \frac{R}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} \sigma_{i3}^{(k)} + \frac{R}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} \sigma_{j3}^{(k)} - \eta^{-2a} \frac{E_k}{2(1+\nu_k)R} \frac{\partial^2 v_3^{(k)}}{\partial \tau^2} = 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}^{(k)} &= \frac{E_k}{(1-\nu_k^2)R} \left[\left(\eta^{-q} \frac{1}{H_i} \frac{\partial v_i^{(k)}}{\partial \xi_i} + \frac{R}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} v_j^{(k)} + \frac{R}{H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} v_3^{(k)} \right) + \right. \\ & \left. + \nu_k \left(\eta^{-q} \frac{1}{H_j} \frac{\partial v_j^{(k)}}{\partial \xi_j} + \frac{R}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} v_i^{(k)} + \frac{R}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_3} v_3^{(k)} \right) \right] + \frac{\nu_k}{1-\nu_k} \sigma_{33}^{(k)}, \\ \eta^{-1} \frac{E_k}{R} \frac{\partial v_3^{(k)}}{\partial \zeta} &= \sigma_{33}^{(k)} - \nu_k \left(\sigma_{ii}^{(k)} + \sigma_{jj}^{(k)} \right), \quad (10) \\ \frac{E_k}{2(1+\nu_k)} \left[\eta^{-q} \frac{1}{H_i} \frac{\partial v_3^{(k)}}{\partial \xi_i} + \eta^{-1} \frac{\partial v_i^{(k)}}{\partial \zeta} - \frac{R}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} v_i^{(k)} \right] &= \sigma_{3i}^{(k)}, \\ \frac{E_k}{2(1+\nu_k)} \left[\eta^{-q} \frac{1}{H_j} \frac{\partial v_3^{(k)}}{\partial \xi_j} + \eta^{-q} \frac{1}{H_i} \frac{\partial v_j^{(k)}}{\partial \alpha_i} - \frac{R}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} v_i^{(k)} - \frac{R}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} v_j^{(k)} \right] &= \sigma_{ij}^{(k)}. \end{aligned}$$



Введение переменных (8) позволяет вывести асимптотически приближенные уравнения для составляющих напряженно-деформированного состояния (НДС) при различных показателях изменчивости и динамичности. Остановимся на случае длинноволновых низкочастотных приближений, для которых $q < 1$, $a < 1$. Эти приближения разделяются на два типа: тангенциальные и поперечные. В первом случае тангенциальные компоненты вектора перемещений велики по сравнению с нормальной компонентой $v_i \gg v_3$. Во втором случае имеет место противоположная ситуация: $v_3 \gg v_i$. Приведем вывод тангенциальных и поперечных приближений в случае многослойной оболочки.

2. ТАНГЕНЦИАЛЬНЫЕ НИЗКОЧАСТОТНЫЕ ДЛИННОВОЛНОВЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

При построении тангенциального приближения следует положить $q = a$. Возьмем асимптотику НДС в виде

$$\begin{aligned} v_i^{(k)} &= R(\eta^q v_i^{0(k)} + \eta^{1+q} v_i^{1(k)}), & v_3^{(k)} &= R(\eta v_3^{0(k)} + \eta^{2q} v_3^{1(k)}), \\ \sigma_{ii}^{(k)} &= E_k(\sigma_{ii}^{0(k)} + \eta \sigma_{ii}^{1(k)}), & \sigma_{ij}^{(k)} &= E_k(\sigma_{ij}^{0(k)} + \eta \sigma_{ij}^{1(k)}), \\ \sigma_{3i}^{(k)} &= E_k(\eta^{1-q} \sigma_{3i}^{0(k)} + \eta^{2-q} \sigma_{3i}^{1(k)}), & \sigma_{33}^{(k)} &= E_k(\eta^{2-2q} \sigma_{33}^{0(k)} + \eta \sigma_{33}^{1(k)}). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь предполагается, что величины с индексами «0» и «1» имеют один и тот же асимптотический порядок. В формулах (11) НДС оболочки разделяется на основную и дополнительную компоненты. Основное НДС (индекс «0») аналогично НДС плоского слоя, дополнительное (индекс «1») — результат влияния кривизны оболочки. От случая однородной оболочки (см. [1, 3]) асимптотика (11) отличается представлениями для напряжений $\sigma_{3i}^{(k)}$ и $\sigma_{33}^{(k)}$. Подставим (11) в уравнения (9), (10) и отбросим величины порядка $O(\eta^{2-2q})$. При этом используем следующие разложения в ряды по степеням ζ :

$$\frac{1}{H_i} = \frac{1}{A_i} \left[1 - \eta \frac{\zeta}{R_i^*} + O(\eta^2) \right], \quad \frac{1}{H_i H_j} = \frac{1}{A_i A_j} \left[1 - \eta \zeta \left(\frac{1}{R_i^*} + \frac{1}{R_j^*} \right) + O(\eta^2) \right], \quad (12)$$

где $R_i^* = R_i/R$. Приравнивая члены одинакового порядка по η , получим системы уравнений относительно величин с индексами «0» и «1». Приведем систему относительно компонент $v_i^{0(k)}$, $v_3^{1(k)}$, $\sigma_{3i}^{0(k)}$, $\sigma_{33}^{1(k)}$, $\sigma_{ii}^{0(k)}$, $\sigma_{ij}^{0(k)}$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{A_i} \frac{\partial \sigma_{ii}^{0(k)}}{\partial \xi_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \sigma_{jj}^{0(k)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \sigma_{3i}^{0(k)}}{\partial \zeta} + \eta^q \frac{R}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (\sigma_{ii}^{0(k)} - \sigma_{jj}^{0(k)}) + \\ &+ \eta^q \frac{R}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (\sigma_{ij}^{0(k)} + \sigma_{ji}^{0(k)}) - \frac{1}{2(1 + \nu_k)} \theta_k^2 \frac{\partial^2 v_i^{0(k)}}{\partial \tau^2} = 0, \\ &\frac{1}{R_i^*} \sigma_{ii}^{0(k)} + \frac{1}{R_j^*} \sigma_{jj}^{0(k)} + \frac{\partial \sigma_{33}^{1(k)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{2(1 + \nu_k)} \theta_k^2 \frac{\partial^2 v_3^{1(k)}}{\partial \tau^2} = 0, \\ \sigma_{ii}^{0(k)} &= \frac{1}{1 - \nu_k^2} \left[\frac{1}{A_i} \frac{\partial v_i^{0(k)}}{\partial \xi_i} + \nu_k \frac{1}{A_j} \frac{\partial v_j^{0(k)}}{\partial \xi_j} + \eta^q \frac{R}{A_i A_j} \left(\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} v_j^{0(k)} + \nu_k \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} v_i^{0(k)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \eta^{2q} \left(\frac{1}{R_i^*} + \frac{\nu_k}{R_j^*} \right) v_3^{1(k)} \right], \\ \sigma_{ij}^{0(k)} &= \frac{1}{2(1 + \nu_k)} \left[\frac{1}{A_j} \frac{\partial v_i^{0(k)}}{\partial \xi_j} + \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_j^{0(k)}}{\partial \xi_i} - \eta^q \frac{R}{A_i A_j} \left(\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} v_i^{0(k)} + \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} v_j^{0(k)} \right) \right], \\ &\frac{\partial v_3^{1(k)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial v_i^{0(k)}}{\partial \zeta} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\theta_k^2 = c_{2,1}^2/c_{2,k}^2$.

Интегрируя полученные системы, установим зависимость компонент НДС от координаты ζ :

$$\begin{aligned} v_i^{0(k)} &= v_{i,0}^{0(k)}, & v_i^{1(k)} &= v_{i,0}^{1(k)} + \zeta v_{i,1}^{1(k)}, & v_3^{0(k)} &= v_{3,0}^{0(k)} + \zeta v_{3,1}^{0(k)}, & v_3^{1(k)} &= v_{3,0}^{1(k)}, \\ \sigma_{ii}^{0(k)} &= \sigma_{ii,0}^{0(k)}, & \sigma_{ii}^{1(k)} &= \sigma_{ii,0}^{1(k)} + \zeta \sigma_{ii,1}^{1(k)}, & \sigma_{ij}^{0(k)} &= \sigma_{ij,0}^{0(k)}, & \sigma_{ij}^{1(k)} &= \sigma_{ij,0}^{1(k)} + \zeta \sigma_{ij,1}^{1(k)}, \end{aligned} \quad (14)$$



$$\begin{aligned}\sigma_{3i}^{0(k)} &= \sigma_{3i,0}^{0(k)} + \zeta \sigma_{3i,1}^{0(k)}, & \sigma_{3i}^{1(k)} &= \sigma_{3i,0}^{1(k)} + \zeta \sigma_{3i,1}^{1(k)} + \zeta^2 \sigma_{3i,2}^{1(k)}, \\ \sigma_{33}^{0(k)} &= \sigma_{33,0}^{0(k)} + \zeta \sigma_{33,1}^{0(k)} + \zeta^2 \sigma_{33,2}^{0(k)}, & \sigma_{33}^{1(k)} &= \sigma_{33,0}^{1(k)} + \zeta \sigma_{33,1}^{1(k)}.\end{aligned}$$

Все величины, стоящие в правых частях (14) с запятой в нижнем индексе, являются функциями, не зависящими от ζ . Система относительно асимптотически главных компонент $v_{i,0}^{0(k)}$, $v_{3,0}^{1(k)}$, $\sigma_{ii,0}^{0(k)}$, $\sigma_{ij,0}^{0(k)}$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{1}{A_i} \frac{\partial \sigma_{ii,0}^{0(k)}}{\partial \xi_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \sigma_{ji,0}^{0(k)}}{\partial \xi_j} + \sigma_{3i,1}^{0(k)} + \eta^q \frac{R}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (\sigma_{ii,0}^{0(k)} - \sigma_{jj,0}^{0(k)}) + \\ + \eta^q \frac{R}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (\sigma_{ij,0}^{0(k)} + \sigma_{ji,0}^{0(k)}) - \frac{1}{2(1 + \nu_k)} \theta_k^2 \frac{\partial^2 v_{i,0}^{0(k)}}{\partial \tau^2} = 0, \\ \frac{1}{R_i^*} \sigma_{ii,0}^{0(k)} + \frac{1}{R_j^*} \sigma_{jj,0}^{0(k)} + \sigma_{33,1}^{1(k)} + \frac{1}{2(1 + \nu_k)} \theta_k^2 \frac{\partial^2 v_{3,0}^{1(k)}}{\partial \tau^2} = 0,\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ii,0}^{0(k)} &= \frac{1}{1 - \nu_k^2} \left[\frac{1}{A_i} \frac{\partial v_{i,0}^{0(k)}}{\partial \xi_i} + \nu_k \frac{1}{A_j} \frac{\partial v_{j,0}^{0(k)}}{\partial \xi_j} + \eta^q \frac{R}{A_i A_j} \left(\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} v_{j,0}^{0(k)} + \nu_k \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} v_{i,0}^{0(k)} \right) + \eta^{2q} \left(\frac{1}{R_i^*} + \frac{\nu_k}{R_j^*} \right) v_{3,0}^{1(k)} \right], \\ \sigma_{ij,0}^{0(k)} &= \frac{1}{2(1 + \nu_k)} \left[\frac{1}{A_j} \frac{\partial v_{i,0}^{0(k)}}{\partial \xi_j} + \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_{j,0}^{0(k)}}{\partial \xi_i} - \eta^q \frac{R}{A_i A_j} \left(\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} v_{i,0}^{0(k)} + \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} v_{j,0}^{0(k)} \right) \right].\end{aligned}$$

Подставим представления (11) в граничные условия (6), (7). Учитывая зависимости (14), получим

$$\begin{aligned}\sigma_{3i,0}^{0(1)} &= -\sigma_{3i,1}^{0(1)}, & \sigma_{33,0}^{0(1)} + \sigma_{33,1}^{0(1)} + \sigma_{33,2}^{0(1)} &= 0, & \sigma_{3i,0}^{1(1)} + \sigma_{3i,1}^{1(1)} + \sigma_{3i,2}^{1(1)} &= 0, & \sigma_{33,0}^{1(1)} &= -\sigma_{33,1}^{1(1)}, \\ \sigma_{3i,0}^{0(n)} &= \sigma_{3i,1}^{0(n)}, & \sigma_{33,0}^{0(n)} - \sigma_{33,1}^{0(n)} + \sigma_{33,2}^{0(n)} &= 0, & \sigma_{3i,0}^{1(n)} - \sigma_{3i,1}^{1(n)} + \sigma_{3i,2}^{1(n)} &= 0, & \sigma_{33,0}^{1(n)} &= \sigma_{33,1}^{1(n)}, \\ E_p(\sigma_{3i,0}^{0(p)} + r_p \sigma_{3i,1}^{0(p)}) &= E_{p+1}(\sigma_{3i,0}^{0(p+1)} + r_p \sigma_{3i,1}^{0(p+1)}), \\ E_p(\sigma_{33,0}^{0(p)} + r_p \sigma_{33,1}^{0(p)} + r_p^2 \sigma_{33,2}^{0(p)}) &= E_{p+1}(\sigma_{33,0}^{0(p+1)} + r_p \sigma_{33,1}^{0(p+1)} + r_p^2 \sigma_{33,2}^{0(p+1)}), \\ E_p(\sigma_{3i,0}^{1(p)} + r_p \sigma_{3i,1}^{1(p)} + r_p^2 \sigma_{3i,2}^{1(p)}) &= E_{p+1}(\sigma_{3i,0}^{1(p+1)} + r_p \sigma_{3i,1}^{1(p+1)} + r_p^2 \sigma_{3i,2}^{1(p+1)}), \\ E_p(\sigma_{33,0}^{1(p)} + r_p \sigma_{33,1}^{1(p)}) &= E_{p+1}(\sigma_{33,0}^{1(p+1)} + r_p \sigma_{33,1}^{1(p+1)}), \\ v_{i,0}^{0(p)} &= v_{i,0}^{0(p+1)}, & v_{i,0}^{1(p)} + r_p v_{i,1}^{1(p)} &= v_{i,0}^{1(p+1)} + r_p v_{i,1}^{1(p+1)}, \\ v_{3,0}^{0(p)} + r_p v_{3,1}^{0(p)} &= v_{3,0}^{0(p+1)} + r_p v_{3,1}^{0(p+1)}, & v_{3,0}^{1(p)} &= v_{3,0}^{1(p+1)},\end{aligned}\tag{16}$$

где $r_p = z_p/h$. Уравнения для двумерных величин с запятой в нижнем индексе, полученные в ходе асимптотического интегрирования, и соотношения (16) образуют замкнутую систему уравнений, из которой можно определить все величины, входящие в представления (14). Из (16) получаем, что величины $v_{i,0}^{0(k)}$, $v_{3,0}^{1(k)}$ не зависят от k . Последовательно выражая функции $\sigma_{3i,0}^{0(k)}$, $\sigma_{33,0}^{1(k)}$ через $\sigma_{3i,1}^{0(k)}$, $\sigma_{33,1}^{1(k)}$ соответственно, придем к соотношениям

$$\sum_{k=1}^n h_k E_k \sigma_{3i,1}^{0(k)} = 0, \quad \sum_{k=1}^n h_k E_k \sigma_{33,1}^{1(k)} = 0.\tag{17}$$

Получим двумерную форму записи разрешающей системы. С этой целью первые уравнения системы (15) умножим на $2h_k E_k$ и просуммируем по k . Введем обозначения

$$T_i = \sum_{k=1}^n 2h_k E_k \sigma_{ii,0}^{0(k)}, \quad S_{ij} = \sum_{k=1}^n 2h_k E_k \sigma_{ij,0}^{0(k)}, \quad u_i = R \eta^q v_{i,0}^{0(k)}, \quad w = R \eta^{2q} v_{3,0}^{1(k)},\tag{18}$$

а также усредненную плотность

$$\rho = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^n h_k \rho_k.\tag{19}$$



Учитывая (17) и переходя к исходным размерным переменным, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_i} \frac{\partial T_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_j} + k_j (T_i - T_j) + 2k_i S_{ij} - 2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ T_i = B_1 \left(\frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + k_i u_j + \frac{w}{R_i} \right) + B_2 \left(\frac{1}{A_j} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_j} + k_j u_i + \frac{w}{R_j} \right), \\ S_{ij} = B_3 \left(\frac{A_i}{A_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{u_i}{A_i} \right) + \frac{A_j}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{u_j}{A_j} \right) \right), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$k_i = \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}, \quad B_1 = 2 \sum_{k=1}^n \frac{h_k E_k}{1 - \nu_k^2}, \quad B_2 = 2 \sum_{k=1}^n \frac{h_k \nu_k E_k}{1 - \nu_k^2}, \quad B_3 = \sum_{k=1}^n \frac{h_k E_k}{1 + \nu_k}.$$

Из уравнений (20) следует выражение для скорости волны расширения в многослойной оболочке по двумерной теории:

$$c_3 = \sqrt{\frac{B_1}{2h\rho}}. \quad (21)$$

3. ПОПЕРЕЧНЫЕ НИЗКОЧАСТОТНЫЕ ДЛИННОВОЛНОВЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

При построении поперечного приближения следует положить $a = 2q - 1$, $1/2 \leq q < 1$. Возьмем асимптотику НДС в виде

$$\begin{aligned} v_i^{(k)} = R(\eta v_i^{0(k)} + \eta^{2q} v_i^{1(k)}), \quad v_3^{(k)} = R(\eta^q v_3^{0(k)} + \eta^{q+1} v_3^{1(k)}), \\ \sigma_{ii}^{(k)} = E_k(\eta^{1-q} \sigma_{ii}^{0(k)} + \eta^q \sigma_{ii}^{1(k)}), \quad \sigma_{ij}^{(k)} = E_k(\eta^{1-q} \sigma_{ij}^{0(k)} + \eta^q \sigma_{ij}^{1(k)}), \\ \sigma_{3i}^{(k)} = E_k(\eta^{2-2q} \sigma_{3i}^{0(k)} + \eta \sigma_{3i}^{1(k)}), \quad \sigma_{33}^{(k)} = E_k(\eta^{3-3q} \sigma_{33}^{0(k)} + \eta^{2-q} \sigma_{33}^{1(k)}). \end{aligned} \quad (22)$$

Асимптотика (22) отличается от случая однородной оболочки представлением для напряжения $\sigma_{3i}^{(k)}$. Подставим (22) в уравнения (9), (10) и повторим процесс, описанный выше для случая тангенциального приближения. Будем иметь следующие системы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_i} \frac{\partial \sigma_{ii}^{0(k)}}{\partial \xi_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \sigma_{jj}^{0(k)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \sigma_{3i}^{0(k)}}{\partial \zeta} + \eta^q \frac{R}{A_i A_j} \left(\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (\sigma_{ii}^{0(k)} - \sigma_{jj}^{0(k)}) + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (\sigma_{ij}^{0(k)} + \sigma_{ji}^{0(k)}) \right) = 0, \\ \frac{1}{A_i} \frac{\partial \sigma_{3i}^{0(k)}}{\partial \xi_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \sigma_{j3}^{0(k)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \sigma_{33}^{0(k)}}{\partial \zeta} + \eta^q \frac{R}{A_i A_j} \left(\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} \sigma_{3i}^{0(k)} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \sigma_{j3}^{0(k)} \right) - \\ - \eta^{4q-2} \left(\frac{\sigma_{ii}^{1(k)}}{R_i^*} + \frac{\sigma_{jj}^{1(k)}}{R_j^*} \right) - \frac{\theta_k^2}{2(1 + \nu_k)} \frac{\partial^2 v_3^{0(k)}}{\partial \tau^2} = 0, \\ \sigma_{ii}^{0(k)} = \frac{1}{1 - \nu_k^2} \left[\frac{1}{A_i} \frac{\partial v_i^{0(k)}}{\partial \xi_i} + \nu_k \frac{1}{A_j} \frac{\partial v_j^{0(k)}}{\partial \xi_j} + \eta^q \frac{R}{A_i A_j} \left(\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} v_j^{0(k)} + \nu_k \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} v_i^{0(k)} \right) \right], \\ \sigma_{ij}^{0(k)} = \frac{1}{2(1 + \nu_k)} \left[\frac{1}{A_j} \frac{\partial v_i^{0(k)}}{\partial \xi_j} + \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_j^{0(k)}}{\partial \xi_i} - \eta^q \frac{R}{A_i A_j} \left(\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} v_i^{0(k)} + \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} v_j^{0(k)} \right) \right], \\ \frac{\partial v_3^{0(k)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_3^{0(k)}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial v_i^{0(k)}}{\partial \zeta} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_i} \frac{\partial \sigma_{ii}^{1(k)}}{\partial \xi_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \sigma_{jj}^{1(k)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \sigma_{3i}^{1(k)}}{\partial \zeta} + \eta^q \frac{R}{A_i A_j} \left(\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (\sigma_{ii}^{1(k)} - \sigma_{jj}^{1(k)}) + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (\sigma_{ij}^{1(k)} + \sigma_{ji}^{1(k)}) \right) = 0, \\ \frac{1}{A_i} \frac{\partial \sigma_{3i}^{1(k)}}{\partial \xi_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \sigma_{j3}^{1(k)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \sigma_{33}^{1(k)}}{\partial \zeta} + \eta^q \frac{R}{A_i A_j} \left(\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} \sigma_{3i}^{1(k)} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \sigma_{j3}^{1(k)} \right) - \left(\frac{\sigma_{ii}^{0(k)}}{R_i^*} + \frac{\sigma_{jj}^{0(k)}}{R_j^*} \right) = 0, \\ \sigma_{ii}^{1(k)} = \frac{1}{1 - \nu_k^2} \left[\frac{1}{A_i} \frac{\partial v_i^{1(k)}}{\partial \xi_i} + \nu_k \frac{1}{A_j} \frac{\partial v_j^{1(k)}}{\partial \xi_j} + \left(\frac{1}{R_i^*} + \frac{\nu_k}{R_j^*} \right) v_3^{0(k)} + \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \eta^q \frac{R}{A_i A_j} \left(\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} v_j^{1(k)} + \nu_k \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} v_i^{1(k)} \right) \Big], \tag{24} \\
 \sigma_{ij}^{1(k)} &= \frac{1}{2(1 + \nu_k)} \left[\frac{1}{A_j} \frac{\partial v_i^{1(k)}}{\partial \xi_j} + \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_j^{1(k)}}{\partial \xi_i} - \eta^q \frac{R}{A_i A_j} \left(\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} v_i^{1(k)} + \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} v_j^{1(k)} \right) \right], \\
 \frac{\partial v_i^{1(k)}}{\partial \zeta} &= 0, \quad \frac{\partial v_3^{1(k)}}{\partial \zeta} = -\nu_k (\sigma_{ii}^{1(k)} + \sigma_{jj}^{1(k)}).
 \end{aligned}$$

Из (23) и (24) получим следующие зависимости для компонент НДС от нормальной координаты:

$$\begin{aligned}
 v_i^{0(k)} &= v_{i,0}^{0(k)} + \zeta v_{i,1}^{0(k)}, & v_i^{1(k)} &= v_{i,0}^{1(k)}, & v_3^{0(k)} &= v_{3,0}^{0(k)}, & v_3^{1(k)} &= v_{3,0}^{1(k)} + \zeta v_{3,1}^{1(k)}, \\
 \sigma_{ii}^{0(k)} &= \sigma_{ii,0}^{0(k)} + \zeta \sigma_{ii,1}^{0(k)}, & \sigma_{ii}^{1(k)} &= \sigma_{ii,0}^{1(k)}, & \sigma_{ij}^{0(k)} &= \sigma_{ij,0}^{0(k)} + \zeta \sigma_{ij,1}^{0(k)}, & \sigma_{ij}^{1(k)} &= \sigma_{ij,0}^{1(k)}, \tag{25} \\
 \sigma_{3i}^{0(k)} &= \sigma_{3i,0}^{0(k)} + \zeta \sigma_{3i,1}^{0(k)} + \zeta^2 \sigma_{3i,2}^{0(k)}, & \sigma_{3i}^{1(k)} &= \sigma_{3i,0}^{1(k)} + \zeta \sigma_{3i,1}^{1(k)}, \\
 \sigma_{33}^{0(k)} &= \sigma_{33,0}^{0(k)} + \zeta \sigma_{33,1}^{0(k)} + \zeta^2 \sigma_{33,2}^{0(k)} + \zeta^3 \sigma_{33,3}^{0(k)}, & \sigma_{33}^{1(k)} &= \sigma_{33,0}^{1(k)} + \zeta \sigma_{33,1}^{1(k)} + \zeta^2 \sigma_{33,2}^{1(k)}.
 \end{aligned}$$

Получена система уравнений, связывающая величины с запятой в нижнем индексе, не зависящие от ζ . Чтобы замкнуть эту систему, надо использовать граничные условия. Подставляя (22), (25) в (6), (7), будем иметь

$$\begin{aligned}
 \sigma_{3i,0}^{0(1)} + \sigma_{3i,1}^{0(1)} + \sigma_{3i,2}^{0(1)} &= 0, & \sigma_{3i,0}^{1(1)} + \sigma_{3i,1}^{1(1)} &= 0, \\
 \sigma_{33,0}^{0(1)} + \sigma_{33,1}^{0(1)} + \sigma_{33,2}^{0(1)} + \sigma_{33,3}^{0(1)} &= 0, & \sigma_{33,0}^{1(1)} + \sigma_{33,1}^{1(1)} + \sigma_{33,2}^{1(1)} &= 0, \\
 \sigma_{3i,0}^{0(n)} - \sigma_{3i,1}^{0(n)} + \sigma_{3i,2}^{0(n)} &= 0, & \sigma_{3i,0}^{1(n)} - \sigma_{3i,1}^{1(n)} &= 0, \\
 \sigma_{33,0}^{0(n)} - \sigma_{33,1}^{0(n)} + \sigma_{33,2}^{0(n)} - \sigma_{33,3}^{0(n)} &= 0, & \sigma_{33,0}^{1(n)} - \sigma_{33,1}^{1(n)} + \sigma_{33,2}^{1(n)} &= 0, \tag{26} \\
 E_p(\sigma_{3i,0}^{0(p)} + r_p \sigma_{3i,1}^{0(p)} + r_p^2 \sigma_{3i,2}^{0(p)}) &= E_{p+1}(\sigma_{3i,0}^{0(p+1)} + r_p \sigma_{3i,1}^{0(p+1)} + r_p^2 \sigma_{3i,2}^{0(p+1)}), \\
 E_p(\sigma_{3i,0}^{1(p)} + r_p \sigma_{3i,1}^{1(p)}) &= E_{p+1}(\sigma_{3i,0}^{1(p+1)} + r_p \sigma_{3i,1}^{1(p+1)}), \\
 E_p(\sigma_{33,0}^{0(p)} + r_p \sigma_{33,1}^{0(p)} + r_p^2 \sigma_{33,2}^{0(p)} + r_p^3 \sigma_{33,3}^{0(p)}) &= E_{p+1}(\sigma_{33,0}^{0(p+1)} + r_p \sigma_{33,1}^{0(p+1)} + r_p^2 \sigma_{33,2}^{0(p+1)} + r_p^3 \sigma_{33,3}^{0(p+1)}), \\
 E_p(\sigma_{33,0}^{1(p)} + r_p \sigma_{33,1}^{1(p)} + r_p^2 \sigma_{33,2}^{1(p)}) &= E_{p+1}(\sigma_{33,0}^{1(p+1)} + r_p \sigma_{33,1}^{1(p+1)} + r_p^2 \sigma_{33,2}^{1(p+1)}), \\
 v_{i,0}^{0(p)} + r_p v_{i,1}^{0(p)} &= v_{i,0}^{0(p+1)} + r_p v_{i,1}^{0(p+1)}, & v_{i,0}^{1(p)} &= v_{i,0}^{1(p+1)}, \\
 v_{3,0}^{0(p)} &= v_{3,0}^{0(p+1)}, & v_{3,0}^{1(p)} + r_p v_{3,1}^{1(p)} &= v_{3,0}^{1(p+1)} + r_p v_{3,1}^{1(p+1)}.
 \end{aligned}$$

Из (26) получаем, что функции $v_{3,0}^{0(k)}$, $v_{i,0}^{1(k)}$ не зависят от k . Поскольку в силу последнего уравнения (23) имеет место соотношение

$$v_{i,1}^{0(k)} = -\frac{1}{A_i} \frac{\partial v_{3,0}^{0(k)}}{\partial \xi_i}, \tag{27}$$

величина $v_{i,1}^{0(k)}$ также не зависит от k .

Получим разрешающую систему в двумерной форме. Умножим первое уравнение (23) на η^{2q-1} и сложим с первым уравнением (24). Учитывая (22), получим уравнение, которое в исходных размерных переменных имеет вид

$$\frac{1}{A_i} \frac{\partial \sigma_{ii}^{(k)}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \sigma_{ji}^{(k)}}{\partial \alpha_j} + k_j (\sigma_{ii}^{(k)} - \sigma_{jj}^{(k)}) + k_i (\sigma_{ij}^{(k)} + \sigma_{ji}^{(k)}) + \frac{\partial \sigma_{3i}^{(k)}}{\partial \alpha_3} = 0. \tag{28}$$

Введем усилия и моменты по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 T_i &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k-1}} \sigma_{ii}^{(k)} d\alpha_3, & S_{ij} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k-1}} \sigma_{ij}^{(k)} d\alpha_3, & G_i &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k-1}} \sigma_{ii}^{(k)} \alpha_3 d\alpha_3, \\
 H_{ij} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k-1}} \alpha_3 \sigma_{ij}^{(k)} d\alpha_3, & N_i &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k-1}} \sigma_{3i}^{(k)} d\alpha_3. \tag{29}
 \end{aligned}$$



Проинтегрируем (28) по α_3 . Из граничных условий (6), (7) имеем

$$\sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k-1}} \frac{\partial \sigma_{3i}^{(k)}}{\partial \alpha_3} d\alpha_3 = 0. \quad (30)$$

Тогда получим первые уравнения разрешающей системы в виде

$$\frac{1}{A_i} \frac{\partial T_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_j} + k_j (T_i - T_j) + 2k_i S_{ij} = 0. \quad (31)$$

Умножая (28) на α_3 и интегрируя по этой переменной, получим

$$\frac{1}{A_i} \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial H_{ij}}{\partial \alpha_j} + k_j (G_i - G_j) + 2k_i H_{ij} - N_i = 0. \quad (32)$$

Применим аналогичную схему для вывода последнего уравнения. С этой целью нужно воспользоваться вторыми уравнениями систем (23), (24). Введем прогиб w следующим образом:

$$w = R\eta^q v_{3,0}^{0(k)}. \quad (33)$$

Тогда разрешающее уравнение запишется в виде

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} - k_2 N_1 - k_1 N_2 + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (34)$$

Получим выражения для усилий и моментов, входящих в уравнения (31), (32), (34). Чтобы получить выражение для T_i , необходимо использовать представления для функций $\sigma_{ii}^{0(k)}$, $\sigma_{ii}^{1(k)}$ из (23), (24) и выражения (22). Интегрируя по α_3 и суммируя, получим в силу (29)

$$\begin{aligned} T_i = & B_1 \left[\frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + k_i u_j + \frac{w}{R_i} \right] + B_2 \left[\frac{1}{A_j} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_j} + k_j u_i + \frac{w}{R_j} \right] - \\ & - C_1 \left[\frac{1}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} \right) + k_i \frac{1}{A_j} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} \right] - C_2 \left[\frac{1}{A_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{1}{A_j} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} \right) + k_j \frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Аналогичным образом получим

$$\begin{aligned} G_i = & C_1 \left[\frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + k_i u_j + \frac{w}{R_i} \right] + C_2 \left[\frac{1}{A_j} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_j} + k_j u_i + \frac{w}{R_j} \right] - \\ & - D_1 \left[\frac{1}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} \right) + k_i \frac{1}{A_j} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} \right] - D_2 \left[\frac{1}{A_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{1}{A_j} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} \right) + k_j \frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} \right], \\ S_{ij} = & B_3 \left[\frac{A_i}{A_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{u_i}{A_i} \right) + \frac{A_j}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{u_j}{A_j} \right) \right] - 2C_3 \left[\frac{1}{A_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} \right) - k_j \frac{1}{A_j} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} \right], \\ H_{ij} = & C_3 \left[\frac{A_i}{A_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{u_i}{A_i} \right) + \frac{A_j}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{u_j}{A_j} \right) \right] - 2D_3 \left[\frac{1}{A_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} \right) - k_j \frac{1}{A_j} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} \right], \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 = 2 \sum_{k=1}^n \frac{h_k E_k}{1 - \nu_k^2} P_k, \quad C_2 = 2 \sum_{k=1}^n \frac{h_k \nu_k E_k}{1 - \nu_k^2} P_k, \quad D_1 = 2 \sum_{k=1}^n \frac{h_k E_k}{3(1 - \nu_k^2)} Q_k, \\ D_2 = 2 \sum_{k=1}^n \frac{h_k \nu_k E_k}{3(1 - \nu_k^2)} Q_k, \quad C_3 = \sum_{k=1}^n \frac{h_k E_k}{1 + \nu_k} P_k, \quad D_3 = \sum_{k=1}^n \frac{h_k E_k}{3(1 + \nu_k)} Q_k, \\ P_k = \left(\sum_{i=k}^n h_i - \sum_{i=1}^k h_i \right), \quad \tilde{P}_k = \left(\sum_{i=k+1}^n h_i - \sum_{i=1}^k h_i \right), \quad Q_k = \left(4h_k^2 + 6h_k \tilde{P}_k + 3\tilde{P}_k^2 \right). \end{aligned}$$



Полученные в данной работе приближенные системы уравнений могут быть использованы при исследовании длинноволновых колебаний и процессов распространения нестационарных волн в многослойных оболочках. В последнем случае они применимы вдали от фронтов волн.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00545-а).

Библиографический список

1. *Karapınar J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V.* Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego : Academic Press, 1998. 226 p.
2. *Коссович Л. Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1986. 176 с.
3. *Коссович Л. Ю., Каплунов Ю. Д.* Асимптотический анализ нестационарных упругих волн в тонких оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях // Изв. Сарат. ун-та. 2001. Т. 1, вып. 2. С. 111–131.
4. *Каплунов Ю. Д., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю.* Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая тонких оболочек // ПММ. 1993. Т. 57, вып. 1. С. 83–91.
5. *Коссович Л. Ю., Шевцова Ю. В.* Асимптотические приближения трехмерных динамических уравнений теории упругости в случае двухслойных пластин // Проблемы прочности и пластичности : межвуз. сб. Н. Новгород : Изд-во Нижегород. ун-та, 2005. Вып. 76. С. 102–111.
6. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М. : Наука, 1971. 446 с.

УДК 539.3

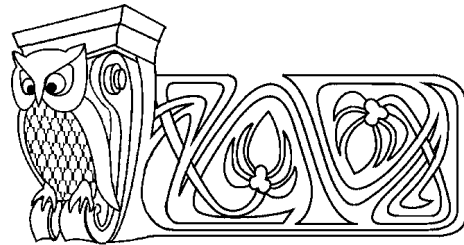
ОДНОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ГИБКИХ ТРУБКАХ

Ю. П. Гуляев

Саратовский государственный университет
E-mail: gulvis@yandex.ru

В статье описан новый вариант осреднения уравнений Навье–Стокса для осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости при минимальном числе упрощающих гипотез. Приведена полная система пространственно одномерных дифференциальных уравнений, описывающая динамику кровотока в системе крупных артериальных сосудов.

Ключевые слова: линеаризация, одномерные уравнения, осесимметричные колебания, закон Пуазейля.



One-Dimensional Equations of Motion of a Viscous Incompressible Fluid in Flexible Tubes

Yu. P. Gulyaev

This paper describes a new variant of the averaging of the Navier–Stokes equations for axisymmetric flow of a viscous incompressible fluid with a minimum number of simplifying hypotheses. The complete system is spatially one-dimensional differential equations describing the dynamics of blood flow in the large arteries.

Key words: linearized, one-dimensional equation, axisymmetric oscillations, Poiseuille law.

Одномерные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости [1] применяются для моделирования динамики кровотока в крупных артериях. Эти уравнения положены в основу создания быстродействующих многопараметрических моделей артериальных систем, которые достаточно быстро и точно могут численно описывать динамику кровотока в соответствующей части артериальной системы применительно к конкретному индивидууму. Используемый в настоящее время вариант уравнений, полученный с помощью осреднения уравнений Навье–Стокса для осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости и некоторых упрощающих предположениях [2], на наш взгляд, не полностью отражает характер течения жидкости в случае осевой симметрии потока и когда осевая скорость существенно больше радиальной скорости течения.

В данной работе предлагается новый, более строгий математический подход к выводу одномерных уравнений осесимметричных движений вязкой жидкости. При этом существенно сокращается число дополнительных гипотез. В частности, непосредственно закон Пуазейля, справедливый только для установившихся течений в тонких жестких трубках, здесь не используется.

Предположим, что происходит осесимметричное нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в предварительно натянутой гибкой цилиндрической трубке. В цилиндрической системе



координат, где ось z направлена по оси потока, уравнения Навье–Стокса имеют вид [3]:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rv_z)}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Для потоков жидкости с существенным преобладанием осевой скорости уравнения (1) легко линеаризуются и принимают более простой вид:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + 2v_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + 2v_0 \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rv_z)}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь v_0 — средняя скорость преобладающего осевого течения.

Из этих уравнений вытекает уравнение для давления p :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

Осредняя уравнение (3) по площади поперечного сечения круглой трубки номинального радиуса R и вводя среднее по сечению давление в потоке жидкости по формуле

$$p_c = \frac{2}{R^2} \int_0^R r p \, dr,$$

получим следующее соотношение:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{R}{2} \frac{\partial^2 p_c}{\partial z^2}. \quad (4)$$

Осреднение первого уравнения системы (1) по радиусу трубки приводит к известному одномерному уравнению движения для объёмного расхода жидкости Q [2]:

$$\rho \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q_0}{\pi R^2} \frac{\partial Q}{\partial z} \right) = -\pi R^2 \frac{\partial p_c}{\partial z} + 2\pi R \mu \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r=R} + \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}, \quad Q = 2\pi \int_0^R r v_z \, dr. \quad (5)$$

Здесь Q_0 — средний за период пульсации объёмный расход в направлении оси трубки.

Таким образом, в рамках линейной теории в данном случае учитывается конвективная часть ускорения частиц жидкости.

Аналогично преобразуется уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$v_r|_{r=R} = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial Q}{\partial z}. \quad (6)$$

Запишем второе уравнение системы (2) с учетом равенства (4) на границе контакта жидкости и стенки трубки:

$$\rho \left(\left. \frac{\partial v_r}{\partial t} \right|_{r=R} + 2v_0 \left. \frac{\partial v_r}{\partial z} \right|_{r=R} \right) = \frac{R}{2} \frac{\partial^2 p_c}{\partial z^2} + \mu \left(-\frac{\partial}{\partial z} \left(\left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r=R} \right) + \left. \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right|_{r=R} \right). \quad (7)$$

Легко показать, что уравнение (7) будет выполнено, если будет выполнено уравнение (4). Для этого нужно из уравнения (7) исключить с помощью уравнения неразрывности (6) радиальную скорость стенки трубы.



Найдем давление на контактной поверхности. Для этого второе уравнение системы (2) умножим на r^2 и проинтегрируем по частям в пределах от 0 до R . После применения к соответствующим интегралам теоремы о среднем значении окончательно получим:

$$p|_{r=R} = p_c - \rho \frac{R}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} \Big|_{r=R} + 2v_0 \frac{\partial v_r}{\partial z} \Big|_{r=R} \right) - \rho \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial z} + 2v_0 \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \right) + \mu \left[-\frac{\partial v_z}{\partial z} \Big|_{r=R} + \frac{2}{R} v_r|_{r=R} + \frac{R}{2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \Big|_{r=R} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial^3 Q}{\partial z^3} \right]. \quad (8)$$

Из уравнения неразрывности вытекает следующее равенство:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{1}{R} v_r|_{r=R} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \Big|_{r=R}. \quad (9)$$

Запишем уравнения осесимметричных колебаний круглой цилиндрической оболочки с учетом предварительного натяжения её стенок в продольном и поперечном направлениях [3]. Материал стенок предполагаем линейно упругим и изотропным. Деформации оболочки считаются малыми.

$$\rho_{ст} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{s_0 - T_0}{R} \frac{\partial w}{\partial z} + \tau, \quad \rho_{ст} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{T}{R} + \frac{T_0}{R^2} w + s_0 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + q, \quad (10)$$

$$s = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \nu \frac{w}{R} \right), \quad T_0 = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left(\frac{w}{R} + \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

где E — модуль Юнга материала, h — толщина оболочки, ν — коэффициент Пуассона, s_0 , T_0 — соответственно мембранные силы предварительного продольного и поперечного натяжений оболочки.

Для уравнений гидроупругости необходимо написать кинематические и статические контактные условия на поверхности контакта стенки оболочки с жидкостью.

1. Условие безотрывного обтекания и условия прилипания частиц [1] жидкости к внутренней стенке оболочки:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v_z|_{r=R}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = v_r|_{r=R}. \quad (11)$$

2. Статические контактные условия, выражающие условие непрерывности нормальных и касательных напряжений на поверхности контакта:

$$q = p|_{r=R} - 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{r=R}, \quad \tau = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \Big|_{r=R} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R} \right). \quad (12)$$

Определенная трудность возникает при нахождении скорости деформации сдвига на стенке трубы $\partial v_z / \partial r|_{r=R}$.

Здесь можно предложить следующий приближенный метод. Введем в рассмотрение среднее по сечению трубки скорость деформации частиц жидкости:

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)_{cp} = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \frac{\partial v_z}{\partial r} dr = \frac{2}{R} \left(v_z|_{r=R} - \frac{Q}{\pi R^2} \right) = \frac{2}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{Q}{\pi R^2} \right). \quad (13)$$

В случае установившегося течения вязкой жидкости в круглых трубках с жесткими стенками (течение Пуазейля) отношение скорости деформации сдвига на стенке трубки к средней по сечению трубки скорости деформации сдвига близко к двум. Предположим, что такое же отношение справедливо и для гибких трубок в общем случае осесимметричного неустановившегося течения. Тогда будем иметь:

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R} = 2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)_{cp} = \frac{4}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{Q}{\pi R^2} \right). \quad (14)$$

Из формулы (14), как частный случай, следует известное выражение скорости деформации сдвига на жесткой стенке при установившемся течении ($\partial u / \partial t = 0$).



Кроме того, можно получить простую формулу, связывающую скорость продольного перемещения стенки сосуда с объёмным расходом жидкости и осевой скоростью потока. Для этого определим среднюю скорость деформации сдвига частиц жидкости по-другому:

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)_{\text{cp}} = \frac{1}{R} \int_0^R \frac{\partial v_z}{\partial r} dr = \frac{1}{R} (v_z|_{r=R} - v_x(0)) = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - v_z|_{r=0}\right). \quad (15)$$

Вычитая почленно из формулы (13) формулу (15), окончательно получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2Q}{\pi R^2} - v_z|_{r=0}. \quad (16)$$

Измеряя методом доплерографии объёмный расход крови Q и максимальную осевую скорость потока, по формуле (16) можно найти скорость продольного перемещения стенки сосуда. Эта скорость в качестве дополнительной продольной составляющей может включать в себя скорость продольного реактивного сокращения мышц стенки сосуда при работе вторичного распределенного сердца.

Теперь запишем систему одномерных уравнений гидроупругости, которая может быть использована при моделировании пульсирующего кровотока в системе крупных артерий:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial Q}{\partial t} &= -\pi R^2 \frac{\partial p_c}{\partial z} + 2\pi R \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R} + \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}, & Q &= 2\pi \int_0^R r v_z dr, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial Q}{\partial z}, & \rho_{\text{ст}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{s_0 - T_0}{R} \frac{\partial w}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R} \right), \\ \rho_{\text{ст}} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\frac{T}{R} + \frac{T_0}{R^2} w + s_0 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + p|_{r=R} - 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{r=R}, \\ s &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \nu \frac{w}{R} \right), & T &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{w}{R} + \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ p|_{r=R} &= p_c + \rho \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial z} + 2v_0 \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \right) - \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + \frac{1}{\pi R^2} \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^3 Q}{\partial z^3} \right], \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{r=R} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} = \frac{1}{2\pi R^2} \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R} &= \frac{4}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{Q}{\pi R^2} \right), & \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{R} \left(\frac{2Q}{\pi R^2} - v_z|_{r=0} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Система замкнута, так как для определения десяти искомым функций Q , u , w , s , T , p_c , $p|_{r=R}$, $v_x|_{r=0}$, $\frac{\partial v_r}{\partial r}|_{r=R}$, $\frac{\partial v_z}{\partial r}|_{r=R}$ имеем десять уравнений.

В классе периодических функций времени эта система решается точно, и её общее решение можно представить комплексными рядами Фурье.

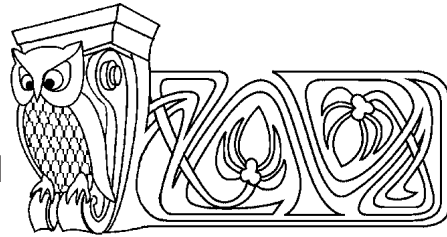
Библиографический список

1. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М. : Мир, 1983. 400 с.
2. Гуляев Ю. П., Коссович Л. Ю. Математические модели биомеханики в медицине / учеб. пособие для студ. мех.-мат. фак. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2001. 49 с.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика : в 2 ч. М. : Физматгиз, 1963. Ч. 2. 728 с.



УДК 539.374

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ АЗИМУТАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ВОЛНОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА



В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев*

Московский городской университет управления
Правительства Москвы

E-mail: vlad_koval@mail.ru

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

E-mail: y.radayev@gmail.com

Статья посвящена вопросам, связанным с построением 2π -периодических по «угловой» переменной решений дифференциального уравнения Матье для окружных гармоник эллиптического цилиндра, ассоциированных характеристических значений и азимутальных чисел, необходимых для формирования элементарных волновых функций эллиптического цилиндра. Классическая задача Штурма–Лиувилля для уравнения Матье приводится к спектральной задаче для линейного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве бесконечных квадратично суммируемых двусторонних последовательностей. Указанный оператор расщепляется затем в сумму диагонального оператора и симметричного бистохастического оператора. Предлагается подход, позволяющий дать весьма простые алгоритмы вычисления характеристических значений «углового» уравнения Матье с вещественными параметрами и соответствующих собственных функций. Приоритет при этом отдается применению наиболее симметричных форм и уравнений, не находивших ранее применения в теории уравнения Матье. По существу, указанные алгоритмы сводятся к построению матрицы, диагонализующей одну бесконечную симметричную пентадиагональную матрицу. Рассматривается проблема обобщения на случай эллиптической геометрии понятия азимутального числа волны, распространяющейся в цилиндрическом волноводе. Построены уточняющие друг друга двусторонние оценки для спектральных значений дифференциального оператора Матье с периодическими и полупериодическими граничными условиями.

Ключевые слова: уравнение Матье, собственное значение, азимутальное число, спектральная задача, волновое число, волновая функция, диагонализация, круг Гершгорина, овал Кассини, бистохастическая матрица.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Элементарные волновые функции эллиптического цилиндра, получающиеся как результат разделения переменных в уравнении Гельмгольца, представленном в координатах эллиптического цилиндра, являются произведениями так называемых «угловых» и «радиальных» функций Матье (Mathieu function, MF), удовлетворяющих дифференциальным уравнениям Матье. Два дифференциальных уравнения Матье преобразуются одно к другому с помощью весьма простой замены независимой переменной.

Дифференциальное уравнение Матье (Mathieu equation, ME):

$$\frac{d^2 Y}{dv^2} + (a - 2q \cos 2v)Y = 0,$$

где v ($-\pi \leq v \leq \pi$) — «угловая» переменная; a, q — постоянные, полученное впервые в работе [1] при

Upper and Low Bounds of Azimuthal Numbers Related to Elementary Wave Functions of an Elliptic Cylinder

V. A. Kovalev, Yu. N. Radayev

Numerical and analytical aspects of generating 2π -periodic solutions of the angular Mathieu equation obtained for the circumferential harmonics of an elliptic cylinder and localization problem for the Mathieu eigenvalues and corresponding azimuthal numbers are considered. Those are required in usual procedure of constructing the elliptic cylinder elementary wave functions playing a very important role in mathematical physics. The Sturm–Liouville eigenvalue problem for angular Mathieu equation is reformulated as the algebraic eigenvalue problem for a infinite linear self-adjoint pentadiagonal matrix operator acting in the complex bi-infinite sequence space l_2 . The matrix operator then can be splitted into a diagonal matrix and a infinite symmetric doubly stochastic matrix. Simple algorithms aimed at computation of the Mathieu eigenvalues and associated angular harmonics are discussed. The most symmetric forms and equations mostly known from the contemporary theory of the Mathieu equation are systematically used. Some of them are specially derived for the case and seem to be new in the theory of the angular Mathieu equation. An extension of the azimuthal numbers notion to the case of elastic and thermoelastic waves propagating in a long elliptic waveguide is proposed. Estimations of upper and low bounds for the angular Mathieu eigenvalues and azimuthal numbers are obtained by the aid of the Gerschgorin theorems and more accurate ones by the Cassini ovals technique.

Key words: Mathieu equation, eigenvalue, azimuthal number, spectral problem, wavenumber, wave function, diagonalization, Gerschgorin disk (circle), Cassini oval, doubly stochastic matrix.



решении задачи о колебаниях эллиптической мембраны более ста лет назад, начиная с момента своего появления в научных публикациях является объектом систематических исследований как теоретических, так и прикладных. Решения дифференциального уравнения Матье играют важную роль во многих задачах математической физики. Теория функций Матье была создана значительно позднее, чем аналогичные теории подавляющего большинства специальных функций математической физики. Вычислительные методы для функций Матье также сравнительно слабо развиты, поскольку вычисления, связанные с функциями Матье и ассоциированными с ними характеристическими и азимутальными значениями, значительно труднее вычислений, относящихся к другим известным специальным функциям математической физики.

Дифференциальное уравнение Матье является частным случаем уравнения Хилла:

$$\frac{d^2 Y}{dv^2} + [a - 2q\psi(2v)]Y = 0,$$

в котором

$$a = \theta_0, \quad -q\psi(2v) = \theta_2 \cos 2v + \theta_4 \cos 4v + \dots,$$

θ_{2j} — заданные постоянные, ряд из которых абсолютно сходится:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\theta_{2j}| < \infty.$$

Это уравнение впервые было получено в 1877 г. (опубликовано в 1886 г.) при исследовании среднего движения лунного перигея.

В прикладных задачах механики и электродинамики дифференциальное уравнение Матье обычно получается при построении элементарных волновых функций эллиптического цилиндра методом разделения переменных в скалярном уравнении Гельмгольца, представленном в координатах эллиптического цилиндра. Именно поэтому решения уравнения Матье иногда называют функциями эллиптического цилиндра. Заметим, что всегда предпочтительнее иметь решение уравнения Гельмгольца, выраженное в терминах функций Матье, поскольку прямые численные методы часто не в состоянии дать более или менее правильные результаты в коротковолновом диапазоне или их применение связано с необходимостью дискретизации области на весьма малые плоские элементы.

В частности, при исследовании распространения упругих и связанных термоупругих волн третьего типа (type-III thermoelastic waves, GNIII) в длинном цилиндрическом волноводе эллиптического поперечного сечения (см. [2]) векторный потенциал Ψ (который, в свою очередь, выражается через два скалярных потенциала ψ и χ) и скалярный потенциал Ω удовлетворяют уравнениям Гельмгольца:

$$\Delta \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} + k_{\perp}^2 \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = 0, \quad \Delta \Omega + \gamma^2 \Omega = 0 \quad (\gamma = \gamma_1, \gamma_2), \quad (1)$$

где $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ — оператор Лапласа; ∇ — трехмерный оператор Гамильтона; k_{\perp} — волновое число поперечной упругой волны; постоянные γ_j ($j = 1, 2$) имеют смысл волновых чисел плоской монохроматической связанной термоупругой волны, распространяющейся в неограниченной среде (см. [3] о волновых числах плоской термоупругой волны третьего типа (GNIII)). Постоянная k_{\perp} всегда вещественна и положительна. Постоянные γ_j ($j = 1, 2$) являются, вообще говоря, комплексными числами. В важном предельном случае гиперболических термоупругих волн второго типа (GNII) постоянные γ_j ($j = 1, 2$) вещественны и положительны.

2. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В ТРЕХМЕРНОМ УРАВНЕНИИ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА. «УГЛОВОЕ» И «РАДИАЛЬНОЕ» УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ

Если ввести ортогональные криволинейные координаты эллиптического цилиндра u, v, z согласно ($2c$ — расстояние между фокусами эллипса, u — «радиальная» координата, v — «угловая» координата, z — вертикальная координата)

$$x_1 = c \operatorname{ch} u \cos v, \quad x_2 = c \operatorname{sh} u \sin v, \quad x_3 = z, \quad (2)$$



то пространственный оператор Гамильтона может быть представлен в форме $(\mathbf{i}_{\langle u \rangle}, \mathbf{i}_{\langle v \rangle}, \mathbf{i}_{\langle z \rangle})$ — единичные локальные базисные орты криволинейной координатной системы эллиптического цилиндра)

$$\nabla = \frac{1}{c\sqrt{\gamma}} \left(\mathbf{i}_{\langle u \rangle} \frac{\partial}{\partial u} + \mathbf{i}_{\langle v \rangle} \frac{\partial}{\partial v} \right) + \mathbf{i}_{\langle z \rangle} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3)$$

Здесь и в дальнейшем для сокращения записи уравнений используется следующее обозначение:

$$\sqrt{\gamma} = \sqrt{\text{sh}^2 u + \sin^2 v}. \quad (4)$$

Заметим, что выполняется равенство

$$\sqrt{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\text{ch } 2u - \cos 2v}.$$

Оператор Лапласа в криволинейных координатах эллиптического цилиндра u, v, z , как показывают простые вычисления, имеет следующий вид:

$$\Delta = \frac{1}{c^2 \sqrt{\gamma}^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (5)$$

Трехмерный дифференциальный оператор Гельмгольца в координатах эллиптического цилиндра u, v, z на основании (5) и с учетом введенного выше обозначения (4) будет иметь следующую форму:

$$\Delta + \gamma^2 = \frac{1}{c^2 \sqrt{\gamma}^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma^2. \quad (6)$$

В случае волны, распространяющейся вдоль волновода (т. е. вдоль оси z), для повторного дифференцирования по вертикальной координате имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -k^2,$$

где k — волновое число (постоянная распространения) упругой или связанной термоупругой волны.

Отделение «угловой» координаты в волновых потенциалах ψ, χ, Ω приводит к угловым гармоникам, зависящим только от «угловой» переменной v . Угловые гармоники Матье $Y = Y(v)$ являются решениями «углового» (angular, circumferential) дифференциального уравнения Матье (b — параметр разделения переменных, называемый также характеристическим параметром уравнения Матье):

$$\frac{d^2 Y}{dv^2} + (b - c^2 \lambda^2 \cos^2 v) Y = 0, \quad (7)$$

где $\lambda^2 = k_{\perp}^2 - k^2$ либо $\lambda^2 = \gamma^2 - k^2$; с подлежащими определению характеристическими постоянными (собственными значениями) $b = b_j$ ($j = 0, 1, 2, 3, \dots$), образующими счетное ограниченное снизу множество и обеспечивающими существование 2π -периодических решений этого уравнения. Последнее требование совершенно необходимо, если элементарные волновые функции предполагаются однозначными. Как известно, 2π -периодические решения дифференциального уравнения Матье называются функциями Матье первого рода или просто функциями Матье.

В уравнении (7) принята стандартная для теории уравнения Матье расстановка знаков, хотя считается целесообразным записывать дифференциальное уравнение так, чтобы знак при неизвестной функции был положительным, а знак при второй производной — отрицательным. Тогда собственные значения, как правило, оказываются положительными.

Уравнение (7) допускает как периодическое (периода 2π), так и второе, непериодическое решение, ассоциированные с одним и тем же собственным значением $b = b_j$ ($j = 0, 1, 2, 3, \dots$). С прикладной точки зрения интерес представляют лишь 2π -периодические решения.

Отделение «радиальной» координаты u в волновых потенциалах ψ, χ, Ω приводит к «радиальным» функциям Матье $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(u)$, удовлетворяющим так называемому «радиальному» дифференциальному уравнению Матье с тем же самым характеристическим параметром b :

$$\frac{d^2 \mathcal{Y}}{du^2} + (c^2 \lambda^2 \text{ch } u - b) \mathcal{Y} = 0. \quad (8)$$



Теория «углового» уравнения Матъе (7) достаточно полно обсуждается в классических руководствах [4–9]. Компактное изложение имеется в книге [10]. Ряд связанных с уравнением Матъе вопросов как аналитического, так и вычислительного характера и в настоящее время нельзя считать полностью разрешенными, поэтому это уравнение продолжает привлекать к себе внимание исследователей.

Несмотря на то что развитая к настоящему времени теория «углового» уравнения Матъе допускает комплексные значения параметра λ , мы пока ограничимся случаем, когда постоянная λ^2 является вещественным положительным числом, поскольку именно этот случай соответствует распространяющимся без затухания связанным термоупругим волнам «второго звука» в длинном эллиптическом цилиндре, выступающим как термоупругий волновод.

В уравнение Матъе (7) удобнее ввести новые постоянные

$$a = b - \frac{c^2 \lambda^2}{2}, \quad q = \frac{c^2 \lambda^2}{4}, \quad (9)$$

после чего оно приобретает «каноническую» форму:

$$\frac{d^2 Y}{dv^2} + (a - 2q \cos 2v)Y = 0. \quad (10)$$

Именно такая форма будет систематически использоваться в дальнейшем. К сожалению, в теории функций Матъе нет общепринятого и твердо установившегося канонического вида «углового» уравнения Матъе, а также единообразных обозначений для его решений. Есть и другие возражения против признания формы (10) канонической, основанные на знаке минимального спектрального значения уравнения (10). Роль характеристической постоянной в «каноническом» уравнении Матъе (10) играет параметр a .

Если постоянная q принимает вещественные значения, то собственные значения уравнения Матъе также принимают вещественные значения. Заметим, что теория «углового» уравнения Матъе допускает ценой существенного ее усложнения также комплексные значения для постоянной q . В этом случае собственные значения уравнения Матъе могут быть комплексными числами.

3. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ «УГЛОВОГО» ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ

«Угловое» уравнение Матъе (10) в силу π -периодичности коэффициента всегда имеет решение вида

$$Y(v) = e^{i\nu v} P(v), \quad (11)$$

где характеристический показатель ν зависит от постоянных a и q , а $P(v)$ — периодическая (с наименьшим периодом π) функция, не равная тождественно нулю.

По понятным причинам нас будут интересовать лишь 2π -периодические решения уравнения Матъе вида (11). Характеристический показатель ν в том случае, когда решение уравнения Матъе 2π -периодично, есть целое число. Те значения постоянной a , для которых при заданном значении q выполняется условие $\nu = m$, являются собственными значениями. Заметим также, что при $\nu = m$ решение уравнения Матъе (11) имеет период π , если m четно, и период 2π , если m нечетно.

При вещественных значениях q собственные значения, как известно, будут вещественными и их можно упорядочить в порядке возрастания. Если постоянная $q \neq 0$, то каждому собственному значению соответствует не более одного периодического решения уравнения Матъе с наименьшим периодом π или 2π , четного или нечетного. Следовательно, среди собственных значений будут такие, которым отвечают четные 2π -периодические решения «углового» уравнения Матъе, и такие — которым отвечают нечетные 2π -периодические решения.

Собственные функции, обладающие наименьшим периодом π , и соответствующие собственные значения можно определять как решения периодической задачи Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} \frac{d^2 Y}{dv^2} + (a - 2q \cos 2v)Y = 0, \\ Y(0) = Y(\pi), \\ Y'(0) = Y'(\pi). \end{cases} \quad (12)$$



Собственные функции, обладающие наименьшим периодом 2π , и соответствующие собственные значения можно определять как решения полупериодической (антипериодической) задачи Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} \frac{d^2 Y}{dv^2} + (a - 2q \cos 2v)Y = 0, \\ Y(0) = -Y(\pi), \\ Y'(0) = -Y'(\pi). \end{cases} \quad (13)$$

Соответствующие граничным задачам (12) и (13) дифференциальные операторы называются обычно периодическим и полупериодическим дифференциальными операторами Матье.

Обе задачи, как нетрудно проверить, являются самосопряженными. Их исследование может поэтому опираться на достаточно хорошо разработанную в многочисленных публикациях теорию задач Штурма–Лиувилля (см., например, [11–13]). В частности, сразу можно сделать заключение о вещественности собственных значений как периодической (12), так и полупериодической (13) задач Штурма–Лиувилля.

Периодической задаче Штурма–Лиувилля (12) отвечает возрастающая последовательность собственных значений

$$a_0^{(e)}, a_2^{(e)}, a_2^{(o)}, a_4^{(e)}, a_4^{(o)}, \dots \quad (14)$$

Полупериодической задаче Штурма–Лиувилля (13) отвечает возрастающая последовательность собственных значений

$$a_1^{(e)}, a_1^{(o)}, a_3^{(e)}, a_3^{(o)}, \dots \quad (15)$$

Хорошо известно, что последовательности (14) и (15) упорядочиваются в одну строку следующим образом:

– при выполнении условия $q > 0$ имеем

$$a_0^{(e)} < a_1^{(o)} < a_1^{(e)} < a_2^{(o)} < a_2^{(e)} < a_3^{(o)} < a_3^{(e)} < \dots ;$$

– при выполнении условия $q < 0$ имеем

$$a_0^{(e)} < a_1^{(e)} < a_1^{(o)} < a_2^{(o)} < a_2^{(e)} < a_3^{(e)} < a_3^{(o)} < a_4^{(o)} \dots$$

В том случае, когда постоянная $q = 0$, получаем $a_0^{(e)} = 0$, а остальные собственные значения периодической и полупериодической задач Штурма–Лиувилля (12), (13) совпадают $a_m^{(e)} = a_m^{(o)} = m^2$ ($m = 1, 2, \dots$). При этом собственному значению $a_0^{(e)} = 0$ соответствует лишь одна характеристическая функция; каждому собственному значению m^2 ($m = 1, 2, \dots$) соответствует ровно две линейно независимых характеристических функции.

Собственные значения, ассоциированные с четными периодическими (наименьшего периода π или 2π) решениями «углового» уравнения Матье (10), упорядочив их по возрастанию, расположим в виде возрастающей последовательности

$$a_0^{(e)}, a_1^{(e)}, \dots, a_m^{(e)}, \dots \quad (16)$$

Соответствующие собственные функции (каждому собственному значению соответствует лишь одна собственная функция) могут быть разложены на отрезке $[-\pi, \pi]$ в ряды Фурье по косинусам:

$$Se_m(c\lambda, \cos v) = \sum_n' D_n^m \cos nv \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (17)$$

где штрих у знака суммы здесь и в дальнейшем указывает, что суммирование должно производиться по четным n , если m четно (причем $m = 0$ считается четным числом), и нечетным n , если m нечетно. Таким образом, функции Матье Se_m ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$) обладают наименьшим периодом, равным π , если m четно, и периодом 2π , если m нечетно.

В качестве условий нормировки собственных функций Se_m можно, например, принять следующие условия:

$$Se_m(c\lambda, 1) = 1 \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (18)$$



которые, очевидно, формулируется также в виде

$$\sum'_n D_n^m = 1 \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (19)$$

Для каждого m ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$) коэффициенты D_n^m могут быть последовательно определены из рекуррентной формулы, которая находится прямой подстановкой ряда Фурье (17) в «угловое» уравнение Матье (10):

$$(a_m^{(e)} - j^2)D_j^m - q(D_{j-2}^m + D_{j+2}^m) = 0 \quad (j \geq 3), \quad (20)$$

дополненной «начальными» соотношениями:

$$\begin{aligned} a_m^{(e)} D_0^m - qD_2^m = 0, \quad (a_m^{(e)} - 4)D_2^m - q(2D_0^m + D_4^m) = 0 \quad (m \text{ четно}), \\ (a_m^{(e)} - 1)D_1^m - q(D_1^m + D_3^m) = 0 \quad (m \text{ нечетно}). \end{aligned}$$

Нечетным периодическим (наименьшего периода π или 2π) решениям «углового» уравнения Матье (10) отвечает упорядоченная по возрастанию последовательность собственных значений:

$$a_1^{(o)}, a_2^{(o)}, \dots, a_m^{(o)}, \dots$$

Нечетные периодические решения «углового» уравнения Матье представляются на отрезке $[-\pi, \pi]$ рядами Фурье по системе синусов

$$\text{So}_m(c\lambda, \cos v) = \sum'_n F_n^m \sin nv \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (21)$$

Функции Матье So_m ($m = 1, 2, 3, \dots$) обладают наименьшим периодом, равным π , если m четно, и периодом 2π , если m нечетно.

Сформулируем условия нормировки для нечетных собственных функций «углового» уравнения Матье:

$$\left. \frac{d}{dv} \text{So}_m(c\lambda, \cos v) \right|_{v=0} = 1 \quad (m = 1, 2, 3, \dots); \quad (22)$$

нетрудно заметить, что они выражаются также в форме равенств

$$\sum'_n nF_n^m = 1 \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (23)$$

Для каждого m ($m = 1, 2, 3, \dots$) коэффициенты F_n^m также могут быть один за другим вычислены с помощью рекуррентной формулы, которая получается подстановкой ряда Фурье (21) в «угловое» уравнение Матье (10):

$$(a_m^{(o)} - j^2)F_j^m - q(F_{j-2}^m + F_{j+2}^m) = 0 \quad (j \geq 3), \quad (24)$$

дополненной «начальными» соотношениями:

$$\begin{aligned} (a_m^{(o)} - 4)F_2^m - qF_4^m = 0 \quad (m \text{ четно}), \\ (a_m^{(o)} - 1)F_1^m + q(F_1^m - F_3^m) = 0 \quad (m \text{ нечетно}). \end{aligned}$$

Собственные функции $\text{Se}_0(c\lambda, \cos v)$, $\text{Se}_m(c\lambda, \cos v)$, $\text{So}_m(c\lambda, \cos v)$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) «углового» уравнения Матье взаимно ортогональны на отрезке $[-\pi, \pi]$, поскольку выполняются равенства

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Se}_i(c\lambda, \cos v) \text{Se}_j(c\lambda, \cos v) dv = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2, 3, \dots; i \neq j), \\ \int_{-\pi}^{\pi} \text{So}_i(c\lambda, \cos v) \text{So}_j(c\lambda, \cos v) dv = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots; i \neq j), \\ \int_{-\pi}^{\pi} \text{Se}_i(c\lambda, \cos v) \text{So}_j(c\lambda, \cos v) dv = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots; j = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (25)$$



Определим также нормировочные коэффициенты $\alpha_j^{(e)} > 0$, $\alpha_j^{(o)} > 0$ согласно

$$\begin{aligned}\alpha_j^{(e)} &= \int_{-\pi}^{\pi} [\text{Se}_j(c\lambda, \cos v)]^2 dv \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \\ \alpha_j^{(o)} &= \int_{-\pi}^{\pi} [\text{So}_j(c\lambda, \cos v)]^2 dv \quad (j = 1, 2, \dots).\end{aligned}\tag{26}$$

Система «угловых» функций Матье $\text{Se}_0(c\lambda, \cos v)$, $\text{Se}_m(c\lambda, \cos v)$, $\text{So}_m(c\lambda, \cos v)$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) ортогональна и полна на отрезке $[-\pi, \pi]$. Это означает, что любая 2π -периодическая функция $f(v)$, обладающая кусочно-непрерывной производной, представляется на отрезке $[-\pi, \pi]$ сходящимся рядом Фурье по «угловым» гармоникам Матье:

$$f(v) = A_0 \text{Se}_0(c\lambda, \cos v) + \sum_{m=1}^{+\infty} [(A_m^{(e)} \text{Se}_m(c\lambda, \cos v) + A_m^{(o)} \text{So}_m(c\lambda, \cos v))].\tag{27}$$

Коэффициенты $A_0^{(e)}$, $A_m^{(e)}$, $A_m^{(o)}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) в разложении (27) вычисляются по известным из теории ортогональных разложений формулам

$$\begin{aligned}A_m^{(e)} &= \frac{1}{\alpha_m^{(e)}} \int_{-\pi}^{\pi} f(v) \text{Se}_m(c\lambda, \cos v) dv \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \\ A_m^{(o)} &= \frac{1}{\alpha_m^{(o)}} \int_{-\pi}^{\pi} f(v) \text{So}_m(c\lambda, \cos v) dv \quad (m = 1, 2, \dots).\end{aligned}\tag{28}$$

4. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ КВАДРАТИЧНО СУММИРУЕМЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ ДВУСТОРОННИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Основные проблемы, связанные с построением периодических решений уравнения Матье (10), заключаются в вычислении собственных значений и определении коэффициентов рядов Фурье (17), (21), представляющих собственные функции. Один из возможных подходов к решению этих задач состоит в следующем. Поскольку π -периодическая функция является также и 2π -периодической, то любое 2π -периодическое решение уравнения Матье можно представить рядом Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$, который удобнее всего взять в комплексной форме:

$$Y(v) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} g_s e^{isv},\tag{29}$$

где коэффициенты Фурье g_s образуют бесконечную двустороннюю последовательность и вычисляются по формулам Эйлера–Фурье:

$$g_k = \overline{g_{-k}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(v') e^{-ikv'} dv' \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Коэффициенты Фурье g_s ($s = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) есть, вообще говоря, комплексные числа. Однако если $Y(v)$ — четная функция, то все g_s — вещественные числа и $g_k = g_{-k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$); если $Y(v)$ — нечетная функция, то все g_s — чисто мнимые числа и $g_k = -g_{-k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Ясно, что во втором случае мнимую единицу можно вынести за знак суммы в (29) и исключить ее из рассмотрения, что никак не повлияет на исследование спектральной задачи для дифференциального оператора Матье.



Таким образом, в дальнейшем, когда это представляется удобным, можно считать что все g_s ($s = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) — вещественные числа, подчиненные дополнительным ограничениям: — «симметрии»

$$g_k = g_{-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (30)$$

для четного периодического решения;

— «антисимметрии»

$$g_k = -g_{-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (31)$$

для нечетного периодического решения.

Подставляя ряд (29) в уравнение Матье (10), получим трехчленную рекуррентную формулу¹:

$$(s^2 - a)g_s + q(g_{s+2} + g_{s-2}) = 0 \quad (s = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots), \quad (32)$$

которая допускает следующую компактную и изящную матричную запись:

$$(\mathbf{H} - a\mathbf{I})\mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad (33)$$

где \mathbf{I} — бесконечная единичная матрица, \mathbf{H} — бесконечная симметричная вещественная (при вещественном q) пентадиагональная (пятидиагональная) матрица

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & (-2)^2 & 0 & q & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & (-1)^2 & 0 & q & 0 & \cdots \\ \cdots & q & 0 & 0^2 & 0 & q & \cdots \\ \cdots & 0 & q & 0 & (1)^2 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & q & 0 & (2)^2 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (34)$$

\mathbf{g} — бесконечный квадратично суммируемый вектор-столбец

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \vdots \\ g_{-1} \\ g_0 \\ g_1 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Как уже было отмечено, компоненты g_s ($s = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) вектора \mathbf{g} можно считать вещественными.

Бесконечная по всем направлениям матрица \mathbf{H} характеризуется тем, что две ее диагонали, сверху и снизу ближе всего расположенные к главной диагонали, заполнены нулями; следующие по порядку две диагонали, параллельные главной, заполнены элементами q ; все остальные наддиагональные и поддиагональные элементы нулевые. Матрица \mathbf{H} имеет в качестве «центрального» элемента единственный нулевой элемент, располагающийся на главной диагонали. Она симметрична не только относительно своей главной диагонали, но и относительно второй диагонали, которая пересекает главную диагональ в том месте, где расположен упомянутый единственный диагональный нулевой элемент. На главной диагонали симметрично относительно нулевого элемента, играющего роль «центра» матрицы \mathbf{H} , располагаются в порядке возрастания квадраты натуральных чисел. Структура матрицы чрезвычайно важна для построения оценок ее собственных значений. Более полный учет структуры матрицы приводит к их более точной локализации.

¹Приводимое далее рекуррентное уравнение (32) должно решаться с учетом дополнительных ограничений (30), (31). Только в этом случае имеется, по крайней мере, теоретическая возможность последовательно друг за другом вычислить все коэффициенты Фурье g_s ($s = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) «угловой» гармоники Матье исходя из «начального».



Задача (33) — классическая спектральная задача для линейного оператора \mathbf{H} в гильбертовом пространстве бесконечных двусторонних последовательностей $G = \{g_s\}$ ($s = \overline{-\infty, +\infty}$) таких, что они квадратично суммируемы:

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} |g_s|^2 < +\infty,$$

со скалярным произведением (G, C) , определяемым согласно

$$(G, C) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} g_s \overline{c_s}.$$

Линейный оператор \mathbf{H} , действующий в этом пространстве, симметричен и обратим; обратный оператор вполне непрерывен; спектр оператора \mathbf{H} дискретен; каждое собственное значение задачи (33) не кратное; собственные векторы оператора \mathbf{H} образуют базис в рассматриваемом пространстве.

Линейная система алгебраических уравнений (33) имеет нетривиальное решение, только если

$$\det(\mathbf{H} - a\mathbf{I}) = 0. \quad (36)$$

Следовательно, 2π -периодические решения «углового» уравнения Матье (10) существуют только для таких значений a , которые являются собственными значениями матрицы \mathbf{H} . Если q вещественно, то \mathbf{H} — вещественная симметричная матрица, собственные значения которой также будут вещественными (и, кроме того, простыми) и их можно упорядочить в порядке возрастания. Более того, как указывалось выше, при выполнении условия $q > 0$ имеем цепочку строгих неравенств:

$$a_0^{(e)} < a_1^{(o)} < a_1^{(e)} < a_2^{(o)} < a_2^{(e)} < a_3^{(o)} < a_3^{(e)} < \dots \quad (37)$$

В том исключительном случае, когда $q = 0$, получаем $a_0^{(e)} = 0$, $a_m^{(e)} = a_m^{(o)} = m^2$ ($m = 1, 2, \dots$).

Заметим, что собственные векторы \mathbf{g} формируют столбцы ортогональной матрицы \mathbf{S} , диагонализующей матрицу \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^T,$$

где \mathbf{D} — диагональная матрица. Таким образом, вычисление коэффициентов Фурье g_s в (29) фактически связано с построением ортогональной матрицы \mathbf{S} , диагонализующей матрицу \mathbf{H} . Определение собственных значений периодического и полупериодического дифференциальных операторов Матье эквивалентно построению диагональной матрицы \mathbf{D} .

Алгебраической проблеме собственных значений посвящена обширная литература (см., например, [14]). Особо следует отметить книгу [15], в которой достаточно полно представлены численные методы нахождения собственных значений матриц и соответствующих им собственных векторов². Более современная проблематика, связанная с теорией матриц, отражена в книгах [16, 17].

5. ОЦЕНКИ СНИЗУ ДЛЯ СПЕКТРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА МАТЬЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ И ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Если значения q вещественны и положительны, то с помощью несложных рассуждений можно получить оценку снизу для спектрального параметра a , которая выступает в качестве необходимого условия существования 2π -периодического решения «углового» уравнения Матье.

Действительно, прежде всего, как указывалось выше, в случае вещественных q в разложении (29) можно ограничиться *вещественными* коэффициентами Фурье g_s , не забывая при этом о симметричных и антисимметричных ограничениях (30), (31).

Умножая далее рекуррентное уравнение (32) на g_s и совершая достаточно очевидные преобразования, находим

$$(s^2 - a)g_s g_s - qg_s g_s - qg_{s+2}g_{s+2} + q(g_s g_{s+2} + g_s g_{s-2} + g_s g_s + g_{s+2}g_{s+2}) = 0.$$

²Кроме того, мы полностью разделяем позицию автора этой книги: «Проблема собственных значений имеет обманчиво простую формулировку, и теоретическое ее обоснование известно уже в течение многих лет; в то же время определение точных решений представляет обширное многообразие нерешенных проблем» [15, с. 16].



Выполняя здесь суммирование по s , приходим к следующему равенству:

$$(s^2 - a - 2q) \sum_{s=-\infty}^{+\infty} g_s g_s + q \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (g_{s+2} + g_s)^2 = 0,$$

или

$$a + 2q = \frac{\sum_{s=-\infty}^{+\infty} s^2 g_s^2 + q \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (g_{s+2} + g_s)^2}{\sum_{s=-\infty}^{+\infty} g_s^2}, \quad (38)$$

откуда при положительных q сразу же следует оценка снизу для спектрального параметра:

$$a \geq -2q. \quad (39)$$

На основании последнего неравенства и (9) можно также заключить, что для спектрального параметра b будет справедлива оценка

$$b \geq 0. \quad (40)$$

Таким образом, упорядоченные по возрастанию собственные значения b_j приводят к неограниченно возрастающей последовательности эллиптических азимутальных чисел (азимутальных чисел Матье), квадраты которых суть собственные значения b_j :

$$\sqrt{b_0} < \sqrt{b_1} < \sqrt{b_2} < \sqrt{b_3} < \dots \quad (41)$$

Неравенство (39) показывает, что переход от (7) к «каноническому» уравнению (10) может выводить (и в действительности выводит) спектральный параметр за пределы области положительных значений, что не позволяет вести речь об азимутальных числах, соответствующих «каноническому» спектральному параметру a .

Найденную выше оценку (39) без труда можно даже несколько усилить, по крайней мере, для нечетных 2π -периодических решений уравнения Матье. В этом случае нулевой коэффициент Фурье $g_0 = 0$, и, следовательно, справедливо неравенство

$$\frac{\sum_{s=-\infty}^{+\infty} s^2 g_s^2}{\sum_{s=-\infty}^{+\infty} g_s^2} \geq 1,$$

учет которого в уравнении (38) позволяет дать следующую оценку, уточняющую (39):

$$a \geq 1 - 2q. \quad (42)$$

Из полученной оценки, принимая во внимание неравенства (37), заключаем

$$1 - 2q \leq a_1^{(o)} < a_1^{(e)} < a_2^{(o)} < a_2^{(e)} < a_3^{(o)} < a_3^{(e)} < \dots$$

Под эту оценку не попадает лишь минимальное собственное значение $a_0^{(e)}$, поскольку ему соответствует четное π -периодическое решение.

Рассмотрим далее уточнение оценки (39) в случае четного периодического решения. Вводя стандартные нормы

$$\|Y\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} Y(v)^2 dv}, \quad \|Y'\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} Y'(v)^2 dv},$$

так что

$$\|Y\|^2 = 2\pi \sum_{s=-\infty}^{+\infty} g_s^2, \quad \|Y'\|^2 = 2\pi \sum_{s=-\infty}^{+\infty} s^2 g_s^2,$$



на основании неравенства Виртингера (Wirtinger's inequality) находим $\|Y'\|^2 \geq \|Y\|^2 - 2\pi g_0^2$, т. е.

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} s^2 g_s^2 \geq \sum_{s=-\infty}^{+\infty} g_s^2 - g_0^2. \tag{43}$$

Тогда с помощью (38) и (43) устанавливается следующая оценка:

$$a + 2q \geq 1 - \frac{g_0^2}{\sum_{s=-\infty}^{+\infty} g_s^2}, \tag{44}$$

где в силу очевидных неравенств

$$0 < \frac{g_0^2}{\sum_{s=-\infty}^{+\infty} g_s^2} < 1$$

правая часть положительна и строго меньше единицы.

6. ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

Оценки собственных значений симметричной матрицы **H**, спектр которой совпадает со спектром дифференциального уравнения Матье, могут быть получены чисто алгебраическими методами, детальное описание которых дано в [15]. Одна из важнейших задач теории матриц связана с построением оценок собственных чисел матрицы по ее элементам. Обзор алгебраических методов оценки собственных значений матриц и результатов в этой области имеется в [18].

Для этого сначала необходимо разложить матрицу **H** на сумму диагональной матрицы

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & (-2)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & (-1)^2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0^2 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & (1)^2 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & (2)^2 & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{45}$$

и симметричной остаточной матрицы

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & 0 & 0 & q & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & q & 0 & \dots \\ \dots & q & 0 & 0 & 0 & q & \dots \\ \dots & 0 & q & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & q & 0 & 0 & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Остаточная матрица **L** играет роль «конечного» возмущения, накладываемого на диагональную матрицу **P**. В сумме диагональная матрица **P** и «конечное» возмущение **L** дают матрицу **H**. Важным является то обстоятельство, что пентадиагональная матрица **L** симметрична и бистохастична.

Обозначим через h , p и l спектральные параметры матриц **H**, **P** и **L** соответственно. Следует обратить внимание на то, что $h = a$. Упорядочим собственные значения матриц **H**, **P** и **L** по возрастанию влево и вправо от «центральных» собственных чисел h_0 , $p_0 = 0^2$, l_0 и введем для них соответствующую нумерацию:

$$\begin{aligned} & \dots, h_{-2}, h_{-1}, h_0, h_1, h_2, \dots, \\ & \dots, (-2)^2, (-1)^2, 0^2, (1)^2, (2)^2, \dots, \\ & \dots, l_{-2}, l_{-1}, l_0, l_1, l_2, \dots \end{aligned}$$



В 1931 г. С. А. Гершгориним (S. A. Gerschgorin) была доказана знаменитая теорема (см., например, [15, 17]), утверждающая, что любое собственное значение a_j произвольной квадратной матрицы $\mathbf{A} = (a_{kj})$ размера $n \times n$ с комплексными элементами располагается, по крайней мере, в одном из замкнутых кругов (кругов Гершгорина) с центрами a_{kk} ($k = 1, 2, \dots, n$) и радиусами (радиусами Гершгорина)

$$d_k = \sum_{j: j \neq k} |a_{kj}|,$$

т. е. удовлетворяют, по крайней мере, одному из неравенств

$$|a - a_{kk}| \leq d_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (47)$$

Здесь спектральный параметр a матрицы \mathbf{A} считается комплексной переменной, и речь идет о замкнутых кругах на комплексной плоскости ($\text{Re } a, \text{Im } a$).

Величины d_k ($k = 1, 2, \dots, n$) представляют собой k -ю усеченную (т. е. за вычетом абсолютного значения диагонального элемента) строчную сумму абсолютных значений элементов матрицы \mathbf{A} .

Гершгориним была доказана еще одна теорема, касающаяся распределения собственных значений по кругам (47), из которой вытекает, в частности, следующее заключение: если какой-либо из кругов Гершгорина изолирован от остальных, то он содержит в точности одно собственное значение.

В случае матрицы \mathbf{L} все круги Гершгорина имеют центры в нуле, а все усеченные строчные суммы d_s равны друг другу и равны $2|q|$. Поэтому, на основании теоремы Гершгорина, заключаем, что собственные значения l_s остаточной матрицы \mathbf{L} не могут по абсолютной величине превосходить значения $2q$ ($q > 0$):

$$|l_s| \leq 2q.$$

Следовательно (см. [15, с. 103]), для собственных чисел матрицы \mathbf{H} будут выполняться оценки

$$|h_s - p_s| \leq 2q \quad (s = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots), \quad (48)$$

устанавливающие двусторонние границы, в которых заключаются элементы спектра матрицы \mathbf{H} , а именно в случае не слишком больших q (точнее, когда $2q < 1/2$) круги Гершгорина $|h - p_s| \leq 2q$ ($s = 0, 1, 2, \dots$) изолированы друг от друга; в каждом круге Гершгорина радиуса $2q$ с центром $p_k = p_{-k} = k^2$ ($k = 1, 2, \dots$), как следует из второй теоремы Гершгорина, располагаются ровно два собственных значения матрицы \mathbf{H} ; круг Гершгорина радиуса $2q$ с центром $p_0 = 0^2$ содержит единственное собственное значение h_0 .

В случае комплексных квадратных матриц размерности, не меньшей чем 2, А. М. Островским (A. M. Ostrowski) в 1937 г. была получена [19] несколько улучшенная, по сравнению с результатом Гершгорина, спектральная оценка: если дана квадратная матрица $\mathbf{A} = (a_{kj})$ размера $n \times n$ ($n \geq 2$) с комплексными элементами, то собственные значения матрицы \mathbf{A} расположены в объединении замкнутых областей комплексной плоскости, ограниченных овалами Кассини (ovals of Cassini):

$$|a - a_{kk}| |a - a_{jj}| \leq d_k d_j \quad (k, j = 1, 2, \dots, n). \quad (49)$$

Можно показать, что объединение всех замкнутых областей, ограниченных овалами Кассини данной матрицы \mathbf{A} , расположено в объединении всех кругов Гершгорина. Именно в этом смысле оценка (49) уточняет оценку (47).

Применим только что сформулированные результаты непосредственно к матрице \mathbf{H} . Все собственные значения h_s этой матрицы будут расположены в объединении замкнутых областей

$$|h - h_{ss}| |h - h_{jj}| \leq d_k d_j = 4q^2 \quad (s, j = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots). \quad (50)$$

Эти неравенства позволяют сразу же получить более точную оценку снизу для наименьшего спектрального значения h_0 матрицы \mathbf{H} , т. е. фактически для $a_0^{(e)}$. Действительно, поскольку в соответствующем круге Гершгорина находится всего одно собственное значение (именно h_0), то для его более точной локализации воспользуемся овалом Кассини:

$$|h| |h - 1| = 4q^2. \quad (51)$$



Обозначая через $-d$ ($d > 0$) координату левой точки пересечения овала (51) с вещественной осью $\text{Im } h = 0$, для определения d можно получить квадратное уравнение:

$$d^2 + d - 4q^2 = 0,$$

из которого находим, что

$$d = \frac{\sqrt{1 + 16q^2} - 1}{2}.$$

Поэтому минимальное собственное значение матрицы \mathbf{H} , а вместе с ним и собственное значение $a_0^{(e)}$, подчиняются следующему ограничению:

$$-\frac{\sqrt{1 + 16q^2} - 1}{2} < \begin{pmatrix} h_0 \\ a_0^{(e)} \end{pmatrix}. \quad (52)$$

7. «РАДИАЛЬНОЕ» УРАВНЕНИЕ МАТЬЕ

«Радиальное» уравнение Матье (8) в «канонической» форме имеет вид

$$\frac{d^2 \mathcal{Y}}{du^2} - (a - 2q \operatorname{ch} u) \mathcal{Y} = 0 \quad (53)$$

и получается из «углового» уравнения (10) в результате замены независимой переменной $v \rightarrow iu$. Это обстоятельство иногда считают счастливой случайностью [5]. Поэтому «радиальные» функции Матье без труда строятся исходя из «угловых» гармоник Матье.

Особенно удобными в вычислительном плане оказываются разложения «радиальных» функций Матье в ряд по функциям Бесселя

$$J_n(\rho) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{n+2s} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (54)$$

Собственным значениям «углового» уравнения (10) $a_0^{(e)} < a_1^{(e)} < a_2^{(e)} < a_3^{(e)} < \dots$ отвечают «радиальные» функции Матье, для которых используется обозначение $\operatorname{Re}_m(c\lambda, \xi)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$); они имеют следующие разложения в ряды по функциям Бесселя:

$$\operatorname{Re}_m(c\lambda, \xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_n' i^{m-n} D_n^m J_n(c\lambda\xi) \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (55)$$

где $\xi = \operatorname{ch} u$, $i^{m-n} = e^{i(m-n)\pi/2}$.

Собственным значениям $a_1^{(o)} < a_2^{(o)} < a_3^{(o)} < \dots$ отвечают «радиальные» функции Матье, обозначаемые через $\operatorname{Ro}_m(c\lambda, \xi)$ ($m = 1, 2, \dots$):

$$\operatorname{Ro}_m(c\lambda, \xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_n' i^{n-m} F_n^m J_n(c\lambda\xi) \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (56)$$

Коэффициенты D_n^m в (55) и F_n^m в (56) те же самые, что и в разложениях (17), (21) для «угловых» гармоник Матье.

В результате замены независимой переменной $v \rightarrow iu$ из «угловой» гармоник Матье $\operatorname{Se}_m(c\lambda, \cos v)$ может быть получена (с точностью до множителя) «радиальная» функция Матье $\operatorname{Re}_m(c\lambda, \xi)$ ($\xi = \operatorname{ch} u$):

$$\operatorname{Se}_m(c\lambda, \xi) = \sqrt{2\pi} \beta_m^{(e)} \operatorname{Re}_m(c\lambda, \xi),$$

где поправочные множители $\beta_m^{(e)}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) вычисляются согласно

$$\beta_m^{(e)} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sum_n' i^{n-m} \frac{D_n^m}{D_0^m} & (m \text{ четно}), \\ \frac{2}{c\lambda\pi} \sum_n' n i^{n-m} \frac{D_n^m}{D_1^m} & (m \text{ нечетно}). \end{cases}$$



Совершенно аналогично находим ($m = 1, 2, \dots$)

$$i\text{So}_m(c\lambda, \xi) = \sqrt{2\pi}\beta_m^{(o)}\text{Ro}_m(c\lambda, \xi),$$

где

$$\beta_m^{(o)} = \begin{cases} \frac{4}{\pi c^2 \lambda^2} \sum'_n n \frac{F_n^m}{F_2^m} i^{n-m} & (m \text{ четно}), \\ \frac{2}{c\lambda\pi} \sum'_n \frac{F_n^m}{F_1^m} i^{n-m} & (m \text{ нечетно}). \end{cases}$$

8. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Заметим, что 2π -периодические функции Матье, как правило, встроены в системы символьных вычислений, подобные Maple и Mathematica. Однако они вызываются black-box командами, не позволяющими понять, как они в действительности работают. Ясно, что предлагаемый подход к построению периодических решений «углового» уравнения Матье (10) и вычислению спектральных значений (азимутальных чисел эллипса) сравнительно легко программируется практически в любой современной вычислительной среде. Дополнительным преимуществом выступает также то, что обсуждаемый метод построения периодических функций Матье не приводит к накоплению вычислительных погрешностей, поскольку он основывается на алгоритме диагонализации симметричной матрицы \mathbf{H} и представлении функций Матье рядами Фурье, коэффициенты которых формируют вектор-столбцы диагонализующей матрицы \mathbf{S} .

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00184-а).

Библиографический список

1. Mathieu E. Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique // J. des Mathématiques Pures et Appliquées. 1868. Vol. 13. P. 137–203.
2. Радаев Ю. Н., Таранова М. В. Связанное волновое термоупругое поле в длинном волноводе эллиптического поперечного сечения // Вестн. ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2011. № 1(9). С. 183–196.
3. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.
4. Стретт М. Д. О. Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков; Киев : Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1935. 240 с.
5. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. М. : Изд-во иностр. лит., 1953. 476 с.
6. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения : в 2 т. М. : Изд-во иностр. лит., 1953. Т. 1. 348 с.
7. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Изд-во иностр. лит., 1958. 476 с.
8. Arscott F. M. Periodic differential equations: An introduction to Mathieu, Lamé, and allied functions. Oxford; Frankfurt : Pergamon Press, 1964. X+284 p.
9. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М. : Наука, 1979. 832 с.
10. Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петью Г., Фогель Т. Функции математической физики : справочное руководство. М. : Физматгиз, 1963. 104 с.
11. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Гостехтеоретиздат, 1954. 352 с.
12. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля. Киев : Наук. думка, 1972. 220 с.
13. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М. : Наука, 1988. 432 с.
14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М. : Гостехтеоретиздат, 1953. 492 с.
15. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М. : Наука, 1970. 564 с.
16. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М. : Наука, 1969. 368 с.
17. Ланкастер П. Теория матриц. М. : Наука, 1978. 280 с.
18. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М. : Наука, 1972. 232 с.
19. Ostrowski A. M. Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale // Commentarii Mathematici Helvetici. 1937. Vol. 10. P. 69–96.



УДК 629.78

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ

М. С. Комарова

Саратовский государственный университет
E-mail: welecat@gmail.com

Реализован метод выбора параметров обратных связей газореактивных систем стабилизации спутников с упругими стержнями, основанный на минимизации среднеквадратичного отклонения вещественной частотной характеристики проектируемой системы относительно желаемой вещественной частотной характеристики. Приведены результаты анализа переходных функций ошибок стабилизации с учетом влияния времени запаздывания в газореактивных исполнительных органах систем стабилизации.

Ключевые слова: параметрический синтез, газореактивные системы стабилизации.

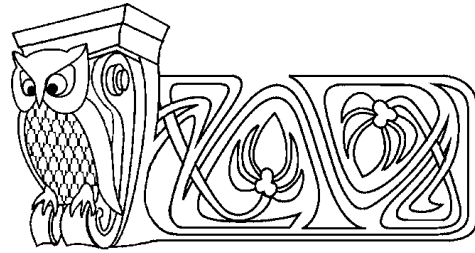
ВВЕДЕНИЕ

При решении задачи перенацеливания космического аппарата наблюдения особое место занимает проблема сокращения длительности этапа стабилизации, временные затраты на выполнение которого могут в несколько раз превышать затраты на угловой разворот [1]. Следовательно, особое значение приобретает задача параметрического синтеза газореактивной системы стабилизации, т.е. задача выбора значений параметров обратных связей, обеспечивающих требуемое качество переходных процессов. Задачи стабилизации спутников с упругими стержнями рассматривались ранее в работах [2, 3]. В работе [4] выполнено детальное исследование областей устойчивости спутников с упругими стержнями в пространстве параметров обратных связей методами теории комбинированных динамических систем (КДС) [5] с учетом влияния времени запаздывания в газореактивных исполнительных органах. В работе [6] на примере гироскопического интегратора линейных ускорений с плавающей платформой был предложен метод параметрического синтеза КДС, основанный на минимизации среднеквадратичного отклонения вещественной частотной характеристики проектируемой системы относительно желаемой вещественной частотной характеристики. В настоящей работе на примере газореактивных систем стабилизации спутников с упругими стержнями данный метод реализован применительно к стабилизируемым КДС с отрицательными интегральными обратными связями.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТАБИЛИЗИРУЕМОГО СПУТНИКА С УПРУГИМ ТЕЛОМ И ЗАКРЕПЛЕННЫМ НА ЕГО КОНЦЕ СТЕРЖНЕМ

Аналогично [4], линеаризованные уравнения движения газореактивной системы стабилизации спутника с упругим стержнем и закрепленным на его конце телом в безразмерных переменных и параметрах представляются в виде

$$\begin{aligned} J_c \ddot{\alpha} &= L + M_0 - aP_0 - p_1 \dot{\alpha}(t - \tau) - p_2 \alpha(t - \tau) - p_3 \int_0^{t-\tau} \alpha(\xi) d\xi, \\ m_c \ddot{y}_c &= -P_0, \quad J_1(\ddot{\alpha} + \ddot{\alpha}_1) = -M_1, \quad m_1[\ddot{y}_c + \ddot{y}_1 + (1 + a)\ddot{\alpha}] = P_1, \\ \ddot{u} + u'''' + \gamma u'''' + \ddot{y}_c + (a + x)\ddot{\alpha} &= 0, \quad (')' = \partial(\cdot)/\partial x, \\ u(0, t) = u'(0, t) = 0, \quad u(1, t) = y_1(t), \quad u'(1, t) &= \alpha_1(t), \\ M_0 = u''(0, t) + \gamma u''(0, t), \quad P_0 = u'''(0, t) + \gamma u'''(0, t), \\ M_1 = u''(1, t) + \gamma u''(1, t), \quad P_1 = u'''(1, t) + \gamma u'''(1, t), \\ \text{при } -\tau \leq t \leq 0 \quad \alpha(t) = \dot{\alpha}(t) &= 0, \\ \alpha_1(0) = \dot{\alpha}_1(0) = y_c(0) = \dot{y}_c(0) = y_1(0) = \dot{y}_1(0) = u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$



Parametrical Synthesis of Stabilization Systems

M. S. Komarova

Method of feedback parameters selection for gas jet stabilization systems with elastic rods, based on minimizing the mean square deviation of the real frequency response of the designed system with respect to the real desired frequency response, was implemented. The results of analysis of transient errors stabilization functions, taking into account the effect of time delay in gas jet executive stabilization systems are given.

Key words: parametrical synthesis, gas jet stabilization systems.



Здесь α — угол отклонения спутника от орбитальной системы координат (ошибка системы стабилизации); \ddot{y}_c — ускорение возмущенного движения центра масс спутника; $u(x, t)$ — прогиб срединной линии стержня; $y_1(t)$ — смещение центра масс закрепленного тела; P_0, M_0, P_1 и M_1 — соответственно силы и момент сил реакции стержня в точках его заделки в спутнике; m_c, m_1, J_c, J_1 — характерные массы и моменты инерции спутника и закрепленного тела. Интегральное слагаемое и характерное время запаздывания τ в первом уравнении (1) обеспечены наличием пропорционально-интегрально-дифференцирующего регулятора в системе управления, а также наличием запаздывания в газореактивных двигателях.

Производя прямое одностороннее интегральное преобразование Лапласа по времени t

$$\tilde{f}(\lambda) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\lambda t} dt, \quad f(t) = L^{-1}[\tilde{f}(\lambda)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_0 - i\infty}^{\xi_0 + i\infty} \tilde{f}(\lambda)e^{\lambda t} d\lambda \quad (2)$$

в уравнениях (1), находим (символ « \sim » над изображениями Лапласа далее опущен)

$$\begin{aligned} J_c[\lambda^3 + e^{-\tau\lambda}(p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3)]\alpha(\lambda) &= \lambda[L(\lambda) + M_0(\lambda) - aP_0(\lambda)], \\ m_c\lambda^2 y_c(\lambda) &= -P_0(\lambda), \quad J_1\lambda^2(\alpha(\lambda) + \alpha_1(\lambda)) = -M_1(\lambda), \\ m_1\lambda^2[y_c(\lambda) + y_1(\lambda) + (1+a)\alpha(\lambda)] &= P_1(\lambda); \end{aligned} \quad (3)$$

$$u''''(x, \lambda) - k^4(\lambda)u(x, \lambda) = k^4(\lambda)[y_c(\lambda) + (a+x)\alpha(\lambda)], \quad k(\lambda) = [-\lambda^2/(1+\gamma\lambda)]^{1/4}; \quad (4)$$

$$u(0, \lambda) = u'(0, \lambda) = 0, \quad u(1, \lambda) = y_1(\lambda), \quad u'(1, \lambda) = \alpha_1(\lambda); \quad (5)$$

$$\begin{aligned} M_0(\lambda) &= (1+\gamma\lambda)u''(0, \lambda), \quad P_0(\lambda) = (1+\gamma\lambda)u''''(0, \lambda), \\ M_1(\lambda) &= (1+\gamma\lambda)u''(1, \lambda), \quad P_1(\lambda) = (1+\gamma\lambda)u''''(1, \lambda). \end{aligned} \quad (6)$$

Линейная краевая задача (4)–(5) допускает точное решение, которое после подстановки в (6) приводит к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} M_0(\lambda) &= \lambda^2\mu_{11}[k(\lambda)]\alpha(\lambda) + (1+\gamma\lambda)\{\mu_{12}[k(\lambda)]\alpha_1(\lambda) + \mu_{13}[k(\lambda)]y_1(\lambda)\} + \lambda^2\mu_{14}[k(\lambda)]y_c(\lambda), \\ P_0(\lambda) &= \lambda^2\mu_{21}[k(\lambda)]\alpha(\lambda) + (1+\gamma\lambda)\{\mu_{22}[k(\lambda)]\alpha_1(\lambda) + \mu_{23}[k(\lambda)]y_1(\lambda)\} + \lambda^2\mu_{24}[k(\lambda)]y_c(\lambda), \\ M_1(\lambda) &= \lambda^2\mu_{31}[k(\lambda)]\alpha(\lambda) + (1+\gamma\lambda)\{\mu_{32}[k(\lambda)]\alpha_1(\lambda) + \mu_{33}[k(\lambda)]y_1(\lambda)\} + \lambda^2\mu_{34}[k(\lambda)]y_c(\lambda), \\ P_1(\lambda) &= \lambda^2\mu_{41}[k(\lambda)]\alpha(\lambda) + (1+\gamma\lambda)\{\mu_{42}[k(\lambda)]\alpha_1(\lambda) + \mu_{43}[k(\lambda)]y_1(\lambda)\} + \lambda^2\mu_{44}[k(\lambda)]y_c(\lambda), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_{\nu 1}(k) &= a\mu_{\nu 1}^{(1)}(k) + \mu_{\nu 1}^{(2)}(k), \quad \nu = 1, 2, 3, 4; \quad \mu_{11}^{(1)}(k) = \frac{\text{ch } k - \cos k - \text{sh } k \sin k}{k^2(\text{ch } k \cos k - 1)}, \\ \mu_{11}^{(2)}(k) &= \frac{k(\text{ch } k - \cos k) - \sin k(\text{ch } k - 1) + \text{sh } k(\cos k - 1)}{k^3(\text{ch } k \cos k - 1)}, \\ \mu_{12}(k) &= k \frac{\text{sh } k - \sin k}{\text{ch } k \cos k - 1}, \quad \mu_{13}(k) = -k^2 \frac{\text{ch } k - \cos k}{\text{ch } k \cos k - 1}, \quad \mu_{14}(k) = \mu_{11}^{(1)}(k), \quad \mu_{22}(k) = \mu_{13}(k), \\ \mu_{21}^{(1)}(k) &= \frac{\sin k(\text{ch } k - 1) + \text{sh } k(\cos k - 1)}{k(\text{ch } k \cos k - 1)}, \quad \mu_{23}(k) = k^3 \frac{\text{sh } k + \sin k}{\text{ch } k \cos k - 1}, \\ \mu_{21}^{(2)}(k) &= \frac{\text{ch } k - \cos k - k(\text{sh } k + \sin k) + \text{sh } k \sin k}{k^2(\text{ch } k \cos k - 1)}, \quad \mu_{24}(k) = \mu_{21}^{(1)}(k), \quad \mu_{31}^{(1)}(k) = \mu_{11}^{(1)}(k), \\ \mu_{31}^{(2)}(k) &= -\frac{(1 - \text{ch } k) \sin k + (\cos k + k \sin k - 1) \text{sh } k}{k^3(\text{ch } k \cos k - 1)}, \quad \mu_{32}(k) = -k \frac{\text{ch } k \sin k - \text{sh } k \cos k}{\text{ch } k \cos k - 1}, \\ \mu_{33}(k) &= k^2 \frac{\text{sh } k \sin k}{\text{ch } k \cos k - 1}, \quad \mu_{34}(k) = \mu_{11}^{(1)}(k), \quad \mu_{41}^{(1)}(k) = -\mu_{21}^{(1)}(k), \\ \mu_{41}^{(2)}(k) &= -\frac{\cos k - \text{ch } k + k \text{ch } k \sin k + (k \cos k - \sin k) \text{sh } k}{k^2(\text{ch } k \cos k - 1)}, \\ \mu_{42}(k) &= -\mu_{33}(k), \quad \mu_{43}(k) = k^3 \frac{\text{ch } k \sin k + \text{sh } k \cos k}{\text{ch } k \cos k - 1}, \quad \mu_{44}(k) = -\mu_{21}^{(1)}(k). \end{aligned} \quad (8)$$

Функции $\mu_{\nu j}(k)$, $\nu, j = 1, 2, 3, 4$ аналитичны в окрестности точки $k = 0$ и имеют полюса лишь на действительной либо мнимой оси комплексной плоскости (k). Выбор любой ветви радикала в



выражении для $k = k(\lambda)$ приводит к тому, что функции $\mu_{\nu j}(k)$, $\nu, j = 1, 2, 3, 4$ не имеют особенностей в правой половине и на мнимой оси комплексной плоскости (λ). Подстановка (7) в (3) приводит к системе линейных уравнений относительно искомым изображений $\alpha(\lambda)$, $\alpha_1(\lambda)$, $y_1(\lambda)$, $y_c(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \phi_{11}(\lambda)\alpha(\lambda) + \phi_{12}(\lambda)\alpha_1(\lambda) + \phi_{13}(\lambda)y_1(\lambda) + \lambda^2\phi_{14}(\lambda)y_c(\lambda) &= \lambda L(\lambda), \\ \phi_{21}(\lambda)\alpha(\lambda) + \phi_{22}(\lambda)\alpha_1(\lambda) + \phi_{23}(\lambda)y_1(\lambda) + \lambda^2\phi_{24}(\lambda)y_c(\lambda) &= 0, \\ \phi_{31}(\lambda)\alpha(\lambda) + \phi_{32}(\lambda)\alpha_1(\lambda) + \phi_{33}(\lambda)y_1(\lambda) + \lambda^2\phi_{34}(\lambda)y_c(\lambda) &= 0, \\ \phi_{41}(\lambda)\alpha(\lambda) + \phi_{42}(\lambda)\alpha_1(\lambda) + \phi_{43}(\lambda)y_1(\lambda) + \lambda^2\phi_{44}(\lambda)y_c(\lambda) &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} \phi_{11}(\lambda) &= [J_c + a\mu_{21}(k(\lambda)) - \mu_{11}(k(\lambda))]\lambda^3 + (p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3)e^{-\tau\lambda}, \\ \phi_{12}(\lambda) &= (1 + \gamma\lambda)\lambda[a\mu_{22}(k(\lambda)) - \mu_{12}(k(\lambda))], & \phi_{13}(\lambda) &= (1 + \gamma\lambda)\lambda[a\mu_{23}(k(\lambda)) - \mu_{13}(k(\lambda))], \\ \phi_{14}(\lambda) &= \lambda[a\mu_{24}(k(\lambda)) - \mu_{14}(k(\lambda))], & \phi_{21}(\lambda) &= \lambda^2\mu_{21}(k(\lambda)), & \phi_{22}(\lambda) &= (1 + \gamma\lambda)\mu_{22}(k(\lambda)), \\ \phi_{23}(\lambda) &= (1 + \gamma\lambda)\mu_{23}(k(\lambda)), & \phi_{24}(\lambda) &= m_c + \mu_{24}(k(\lambda)), & \phi_{31}(\lambda) &= \lambda^2[J_1 + \mu_{31}(k(\lambda))], \\ \phi_{32}(\lambda) &= J_1\lambda^2 + (1 + \gamma\lambda)\mu_{32}(k(\lambda)), & \phi_{33}(\lambda) &= (1 + \gamma\lambda)\mu_{33}(k(\lambda)), & \phi_{34}(\lambda) &= \mu_{34}(k(\lambda)), \\ \phi_{41}(\lambda) &= \lambda^2[m_1(1 + a) - \mu_{41}(k(\lambda))], & \phi_{42}(\lambda) &= -(1 + \gamma\lambda)\mu_{42}(k(\lambda)), \\ \phi_{43}(\lambda) &= m_1\lambda^2 - (1 + \gamma\lambda)\mu_{43}(k(\lambda)), & \phi_{44}(\lambda) &= m_1 - \mu_{44}(k(\lambda)). \end{aligned}$$

Решая систему линейных уравнений (9) относительно изображения ошибки стабилизации $\alpha(\lambda)$, находим

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda) &= \Phi(\lambda)L(\lambda), & \Phi(\lambda) &= Q(\lambda)/D(\lambda), \\ D(\lambda) &= \det\{\phi_{\nu j}(\lambda)\}, & \nu, j &= 1, 2, 3, 4; & Q(\lambda) &= \lambda \det\{\phi_{\nu j}(\lambda)\}, & \nu, j &= 2, 3, 4. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $\Phi(\lambda)$ — передаточная функция ошибки системы стабилизации. Квазимногочлены $D(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ аналитичны в правой комплексной полуплоскости (λ) и вблизи мнимой оси $Re\lambda = 0$, и

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-7}D(\lambda) = m_c m_1 J_c J_1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-5}Q(\lambda) = m_c m_1 J_1, \quad Re \lambda \geq 0.$$

Согласно теоремам об устойчивом квазимногочлене, а также об устойчивых, неустойчивых и асимптотически устойчивых квазирациональных дробях [5], система стабилизации будет асимптотически устойчива при выполнении условия

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg D(i\omega) = 7\pi/2 \tag{11}$$

и неустойчива в остальных случаях.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ УГЛОВОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ СПУТНИКА С ОДНИМ УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ

При $m_1 = J_1 = 0$ система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{aligned} J_c \ddot{\alpha} &= L + M_0 - aP_0 - p_1 \dot{\alpha}(t - \tau) - p_2 \alpha(t - \tau) - p_3 \int_0^{t-\tau} \alpha(\xi) d\xi, & m_c \ddot{y}_c &= -P_0, \\ \ddot{u} + u'''' + \gamma u'''' + \ddot{y}_c + (a + x)\ddot{\alpha} &= 0, & (') &= \partial()/\partial x, \\ u(0, t) = u'(0, t) &= 0, & u''(1, t) = u'''(1, t) &= 0, \\ M_0 = u''(0, t) + \gamma u''(0, t), & & P_0 = u'''(0, t) + \gamma u''(0, t), & \end{aligned} \tag{12}$$

$\alpha(t) = \dot{\alpha}(t) = 0$ при $-\tau \leq t \leq 0$, $y_c(0) = \dot{y}_c(0) = u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0$. Передаточная функция $\Phi(\lambda)$ системы угловой стабилизации находится аналогично § 1 и имеет вид

$$\Phi(\lambda) = Q(\lambda)/D(\lambda), \tag{13}$$



$$D(\lambda) = \{[J_c + \mu_0(k(\lambda))][m_c + \mu_3(k(\lambda))] - [a\mu_3 - \mu_1(k(\lambda))]^2\}\lambda^3 + [m_c + \mu_3(k(\lambda))](b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3)e^{-\tau\lambda},$$

$$Q(\lambda) = [m_c + \mu_3(k(\lambda))]\lambda,$$

$$\mu_0(k) = a^2\mu_3(k) - 2a\mu_1(k) - \mu_2(k), \quad \mu_1(k) = -k^{-2} \operatorname{sh} k \sin k / (1 + \operatorname{ch} k \cos k),$$

$$\mu_2 = k^{-3}(\operatorname{sh} k \cos k - \operatorname{ch} k \sin k) / (1 + \operatorname{ch} k \cos k),$$

$$\mu_3 = k^{-1}(\operatorname{ch} k \sin k + \operatorname{sh} k \cos k) / (1 + \operatorname{ch} k \cos k), \quad k(\lambda) = [-\lambda^2 / (1 + \gamma\lambda)]^{1/4}.$$

Аналогично § 1 система угловой стабилизации будет асимптотически устойчива, если

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg D(i\omega) = 3\pi/2, \quad (14)$$

и неустойчива в остальных случаях.

3. СТАБИЛИЗАЦИЯ СПУТНИКА С ВЫНОСНЫМИ ДВИГАТЕЛЯМИ НА УПРУГИХ СТЕРЖНЯХ

Безразмерные уравнения возмущенного движения системы стабилизации спутника с двумя выносными газореактивными двигателями на упругих стержнях имеют вид [4]:

$$J_c \ddot{\alpha} = L + 2M_0 - 2aP_0, \quad J_1(\ddot{\alpha} + \ddot{\alpha}_1) = -M_1,$$

$$m_1[\ddot{y}_1 + (1+a)\ddot{\alpha}] = P_1 - p_1\dot{\alpha}(t-\tau) - p_2\alpha(t-\tau) - p_3 \int_0^{t-\tau} \alpha(\xi) d\xi,$$

$$\ddot{u} + u'''' + \gamma u'''' + (a+x)\ddot{\alpha} = 0, \quad (')' = \partial()/\partial x, \quad (15)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u'(0, t) = 0, \quad u(1, t) = y_1(t), \quad u'(1, t) = \alpha_1(t),$$

$$M_0 = u''(0, t) + \gamma u''(0, t), \quad P_0 = u'''(0, t) + \gamma u'''(0, t),$$

$$M_1 = u''(1, t) + \gamma u''(1, t), \quad P_1 = u'''(1, t) + \gamma u'''(1, t),$$

$\alpha(t) = \dot{\alpha}(t) = 0$ при $-\tau \leq t \leq 0$, $\alpha_1(0) = \dot{\alpha}_1(0) = y_1(0) = \dot{y}_1(0) = u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0$. Передаточные функции системы стабилизации находятся аналогично § 1:

$$\alpha(\lambda) = \Phi(\lambda)L(\lambda), \quad \Phi(\lambda) = Q(\lambda)/D(\lambda), \quad (16)$$

$$D(\lambda) = \det\{\psi_{\nu j}(\lambda)\}, \quad \nu, j = 1, 2, 3; \quad Q(\lambda) = \det\{\psi_{\nu j}(\lambda)\}, \quad \nu, j = 2, 3.$$

Здесь

$$\psi_{11}(\lambda) = \lambda^2[J_c + 2a\mu_{21}(k(\lambda)) - 2\mu_{11}(k(\lambda))], \quad \psi_{12}(\lambda) = 2(1 + \gamma\lambda)[a\mu_{22}(k(\lambda)) - \mu_{12}(k(\lambda))],$$

$$\psi_{13}(\lambda) = 2(1 + \gamma\lambda)[a\mu_{23}(k(\lambda)) - \mu_{13}(k(\lambda))], \quad \psi_{21}(\lambda) = \lambda^2[J_1 + \mu_{31}(k(\lambda))],$$

$$\psi_{22}(\lambda) = J_1\lambda^2 + (1 + \gamma\lambda)\mu_{32}(k(\lambda)), \quad \psi_{23}(\lambda) = (1 + \gamma\lambda)\mu_{33}(k(\lambda)), \quad (17)$$

$$\psi_{31}(\lambda) = [m_1(1 + a) - \mu_{41}(k(\lambda))]\lambda^3 + (p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3)e^{-\tau\lambda},$$

$$\psi_{32}(\lambda) = -\lambda(1 + \gamma\lambda)\mu_{42}(k(\lambda)), \quad \psi_{33}(\lambda) = m_1\lambda^3 - (1 + \gamma\lambda)\lambda\mu_{43}(k(\lambda)),$$

а функции $\mu_{\nu j}(k)$, $\nu = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, 3$, определены согласно (8).

Аналогично § 1 система стабилизации асимптотически устойчива, если

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg D(i\omega) = 7\pi/2, \quad (18)$$

и неустойчива в остальных случаях. Как следует из выражений (17) для $\psi_{32}(\lambda)$ и $\psi_{33}(\lambda)$, все элементы второй строки определителя $Q(\lambda)$ явно содержат сомножитель λ . Другими словами, $Q(\lambda) = \lambda Q^*(\lambda)$, причем функция $Q^*(\lambda)$ аналитична в окрестности точки $\lambda = 0$.



4. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ

Передаточные функции системы стабилизации зависят от параметров обратных связей, т.е. $\Phi = \Phi(\lambda, p)$, $p = (p_1, p_2, p_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Пусть $\Omega_{st} \subset \mathbb{R}^3$ — область устойчивости в пространстве параметров обратных связей $p \in \mathbb{R}^3$. Принадлежность набора параметров обратных связей p области устойчивости Ω_{st} достаточно быстро проверяется при помощи теорем об устойчивом квазимногочлене, а также об устойчивых, неустойчивых и асимптотически устойчивых квазирациональных дробях. Фактически требуется проверка условий (11), (14) либо (18).

Передаточной функции соответствует переходная функция $h(t) = L^{-1}[\Phi(\lambda, p)/\lambda]$, представляющая собой реакцию на входное возмущение в виде $1(t)$, где $1(t)$ — функция единичного скачка Хевисайда. Если система асимптотически устойчива, то для нахождения переходных функций достаточно знать лишь вещественную частотную характеристику $R(\omega, p) = \text{Re}\Phi(i\omega, p)$, поскольку в данном случае

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega, p) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (19)$$

Под параметрическим синтезом будем понимать процедуру подбора величин параметров обратных связей $p = (p_1, p_2, p_3)^T \in \Omega_{st} \subset \mathbb{R}^3$ с целью обеспечения требуемого качества переходных функций. Пусть

$$R^*(\omega) = \text{Re}\Phi^*(i\omega) = [1 - (t_0\omega)^2]/[1 + (t_0\omega)^4] \quad (20)$$

— известная из теории автоматического управления так называемая «эталонная» вещественная частотная характеристика, которой соответствует переходная функция

$$h^*(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R^*(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = 1 - \sqrt{2} e^{-\frac{t}{t_0\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{t}{t_0\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (21)$$

имеющая экспоненциальный характер затухания переходного процесса с характерным временем не более $3t_0$. Для того, чтобы проектируемая система по своим свойствам в наименьшей степени отличалась от системы с эталонной вещественной частотной характеристикой (20), выполняем минимизацию функции

$$F(p) \rightarrow \min \quad (22)$$

$$F(p) = \begin{cases} \left(\frac{1}{R_A^2(0, p)} + \frac{1}{R_A^2(0, p_0)} \right) \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^2 c_j \left[\frac{d^j}{d\omega^j} (R_A(\omega, p) - R_A(0, p)R_A^*(\omega)) \right]^2 d\omega, & p \in \Omega_{st}, \\ \text{const} \gg 1, & p \notin \Omega_{st}, \end{cases}$$

$$R_A(\omega, p) = \sqrt{1 + \omega^2} \text{Re}\Psi(i\omega, p), \quad \Psi(\lambda, p) = \Phi(\lambda, p)/\lambda, \quad R_A^*(\omega) = \sqrt{1 + \omega^2} R^*(\omega).$$

Здесь $c_0 = 1$, p_0 — значения параметров обратных связей в момент начала процедуры параметрического синтеза, а малые поправочные коэффициенты $c_1 = 0.01 - 0.03$, $c_2 = 0.003 - 0.001$ позволяют избежать возникновения узких пиков конечной высоты действительной частотной характеристики. Поскольку слагаемые, содержащие производные частотных характеристик, несут поправочный характер, значения $dR_A(\omega, p)/d\omega$ и $d^2R_A(\omega, p)/d\omega^2$ можно оценивать разностными аппроксимациями. Минимизация функции $F(p)$ проводится методом, не требующим вычисления градиента целевой функции (Нелдера–Мида). Для выполнения параметрического синтеза не требуется детальной информации о конфигурации области устойчивости, необходимо лишь, чтобы начальные значения параметров обратных связей принадлежали области устойчивости $p = p_0 \in \Omega_{st}$.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ФУНКЦИЙ

Как следует из результатов работы [4], при отсутствии времени запаздывания $\tau = 0$ области устойчивости в пространстве параметров обратных связей $p = (p_1, p_2, p_3)^T$ газореактивной системы стабилизации спутника с одним упругим стержнем, а также газореактивной системы стабилизации спутника с упругим стержнем и закрепленным на его конце телом в плоскости (p_3, p_2) ограничены снизу и не имеют предела в направлении координаты p_2 . При $\tau \neq 0$ области устойчивости становятся ограниченными и достаточно быстро уменьшаются при возрастании времени запаздывания τ . Напро-



тив, система стабилизации орбитальной конструкции с выносными двигателями на упругих стержнях, даже при отсутствии времени запаздывания $\tau = 0$, имеет ограниченные и весьма малые области устойчивости, которые быстро исчезают с ростом τ .

Предположим, что на спутник действует возмущающий момент в форме функции Хевисайда $L(t) = 1(t)$. Так как $\tilde{L}(\lambda) = 1/\lambda$, переходная функция ошибки стабилизации любой из рассмотренных систем стабилизации выражается через интеграл Меллина (2)

$$\alpha(t) = L^{-1} \left[\frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_0 - i\infty}^{\xi_0 + i\infty} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} e^{\lambda t} d\lambda, \quad t \geq 0, \quad \xi_0 > 0, \quad (23)$$

вычисление которого проводилось при помощи эффективного алгоритма [7]. На рис. 1–5 пунктиром показаны переходные функции до выполнения параметрического синтеза при начальных значениях $p = p_0$ параметров обратных связей, соответствующие работе [4]. Сплошной линией показаны переходные функции после выполнения параметрического синтеза согласно (22).

Рассмотрим сначала динамическую модель спутника с одним упругим стержнем (§ 2) типа Geos 2 с параметрами $J_c = 0.07442$, $m_c = 34.75$, $a = 0.05$, $\gamma = 0.01$. При $\tau = 0$ переходные функции системы стабилизации до выполнения параметрического синтеза (представлены на рис. 1 пунктиром) характеризуются относительно быстрым уменьшением. При выполнении параметрического синтеза принято $t_0 = 1$, а переходные функции после выполнения параметрического синтеза показаны на рис. 1 сплошной линией.

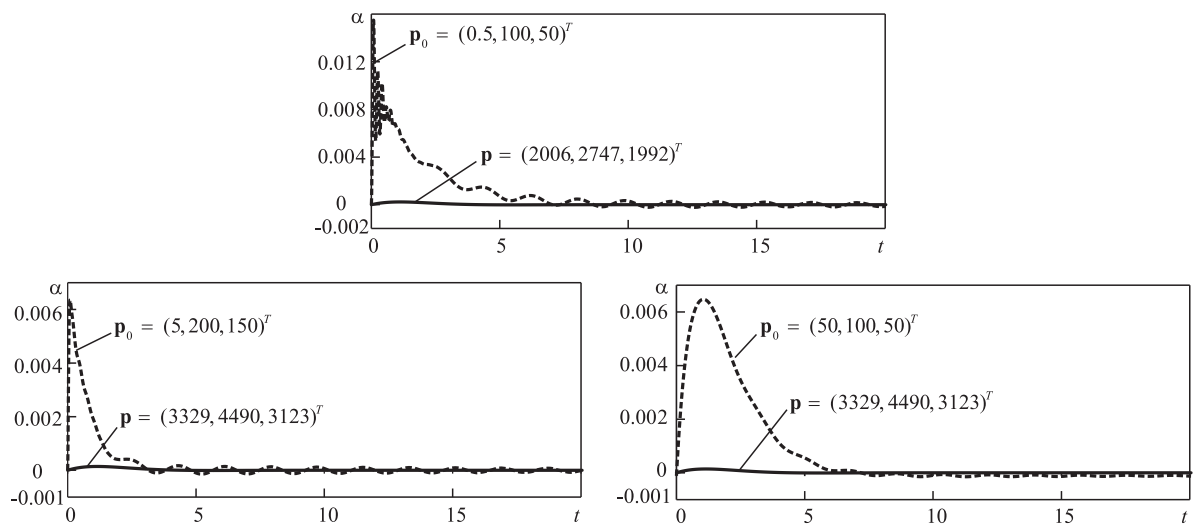


Рис. 1. Результаты параметрического синтеза динамической модели спутника с одним упругим стержнем при $\tau = 0$, $t_0 = 1$

Поскольку области устойчивости в данном случае являются неограниченными, выполнение параметрического синтеза позволяет значительно улучшить качество переходных процессов.

Увеличение характерного времени запаздывания τ приводит к тому, что области устойчивости становятся ограниченными и достаточно быстро исчезают с ростом τ . В связи с этим в некоторых случаях требуется выбирать относительно малые значения характерного времени t_0 . Тем не менее, как следует из результатов, представленных на рис. 2, выполнение параметрического синтеза и в данном случае позволяет значительно улучшить качество переходных процессов.

Рассмотрим далее динамическую модель системы стабилизации спутника с упругим стержнем и закрепленным на его конце абсолютно жестким телом (§ 1) с параметрами $J_c = 0.07442$, $m_c = 34.75$, $m_1 = 3$, $J_1 = 0.007$, $a = 0.05$, $\gamma = 0.01$. На рис. 3, а изображены переходные функции соответственно при $\tau = 0.001$, 0.005 , 0.01 . Параметрический синтез выполнялся при значении характерного времени $t_0 = 1$. Быстрое сокращение областей устойчивости при возрастании времени запаздывания τ несколько ограничивает возможности параметрического синтеза, но не препятствует значительному улучшению качества переходных функций.

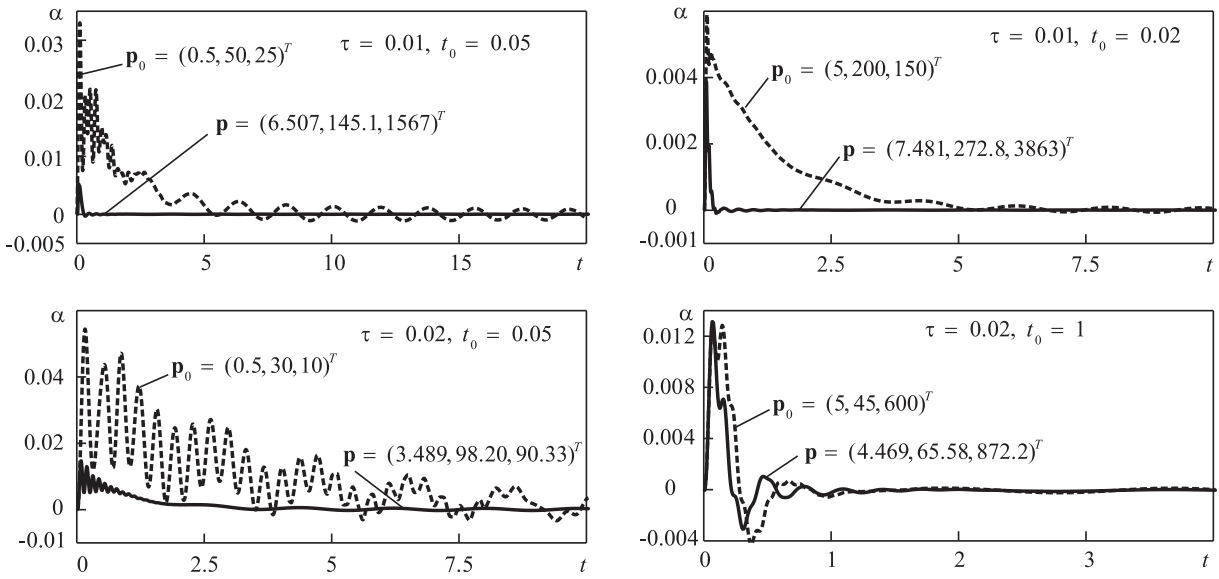


Рис. 2. Результаты параметрического синтеза динамической модели спутника с одним упругим стержнем при различных значениях τ и t_0

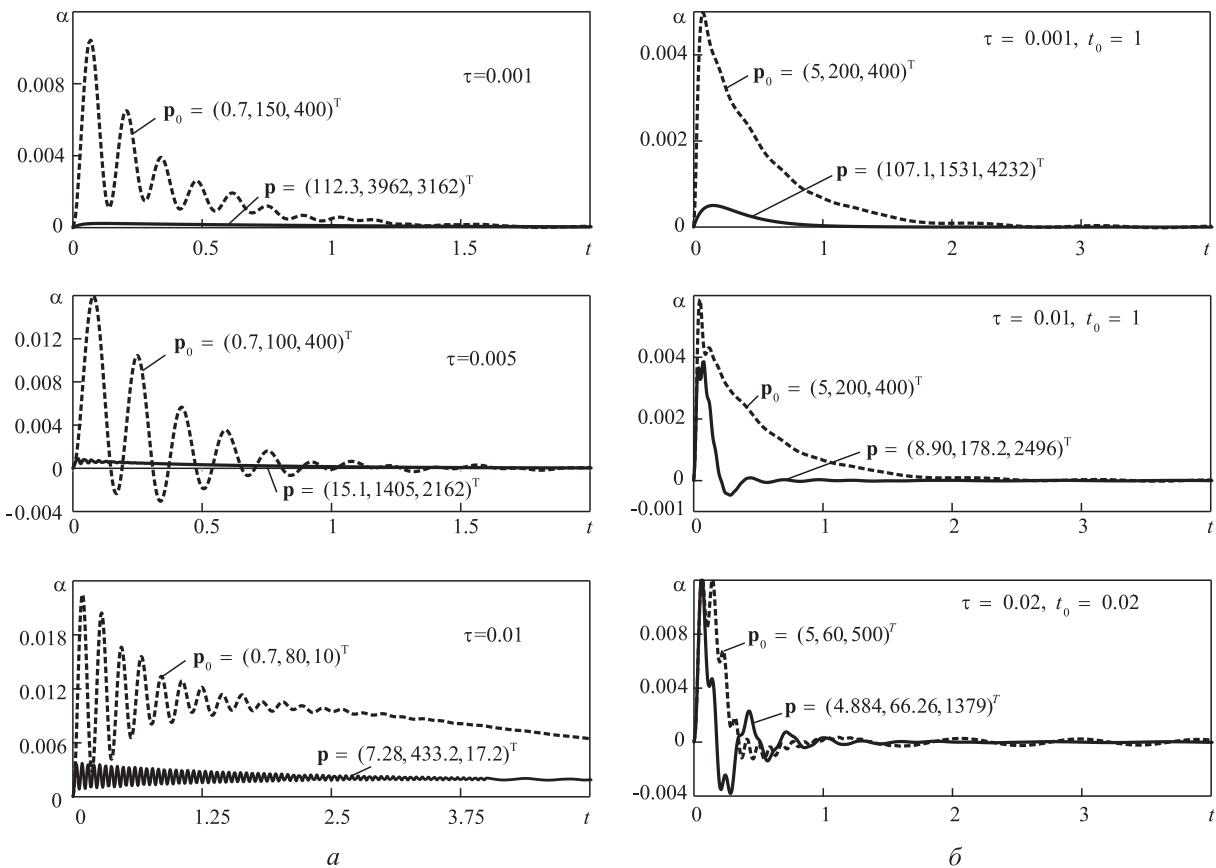


Рис. 3. Результаты параметрического синтеза динамической модели спутника с упругим стержнем и закрепленным на его конце твердым телом: а — $m_1 = 3, m_c = 34.75, J_1 = 0.007, J_c = 0.07442$; б — $m_1 = m_c = 34.75, J_1 = J_c = 0.07442$



Как следует из результатов [4], увеличение массы m_1 и момента инерции J_1 закрепленного на конце стержня абсолютно жесткого тела приводит к тому, что области устойчивости в пространстве параметров обратных связей могут оказаться более протяженными и существуют при несколько больших значениях характерного времени запаздывания τ . Переходные функции для случая $m_1 = m_c = 34.75$ и $J_1 = J_c = 0.07442$ при $\tau = 0.001, 0.01, 0.02$ приведены на рис. 3, б. Выполнение параметрического синтеза при $\tau = 0.001$ и $\tau = 0.01$ приводит к существенному улучшению качества переходных функций. При $\tau = 0.02$ до проведения параметрического синтеза переходная функция газореактивной системы стабилизации достаточно быстро уменьшается на интервале $(0, 2)$, однако при $t > 2$ продолжают малоамплитудные колебания с весьма малым затуханием. После параметрического синтеза переходная функция несколько интенсивнее осциллирует в начальные моменты времени на интервале $(0, 1)$, однако гораздо более быстро затухает при $t \geq 2$.

На рис. 4 приведены переходные функции газореактивной системы стабилизации спутника с двумя выносными двигателями на упругих стержнях (см. § 3) с параметрами $m_c = 34.75, J_c = 0.07442, m_1 = 3, J_1 = 0.007, a = 0.05, \gamma = 0.01$. Как следует из [4], система стабилизации орбитальной конструкции с выносными двигателями на упругих стержнях имеет ограниченные и весьма малые области устойчивости, которые быстро исчезают с ростом времени запаздывания τ . Видно, что в данном случае переходные функции носят колебательный характер с малым затуханием, однако выполнение параметрического синтеза при $t_0 = 1$ позволяет улучшить качество переходных процессов.

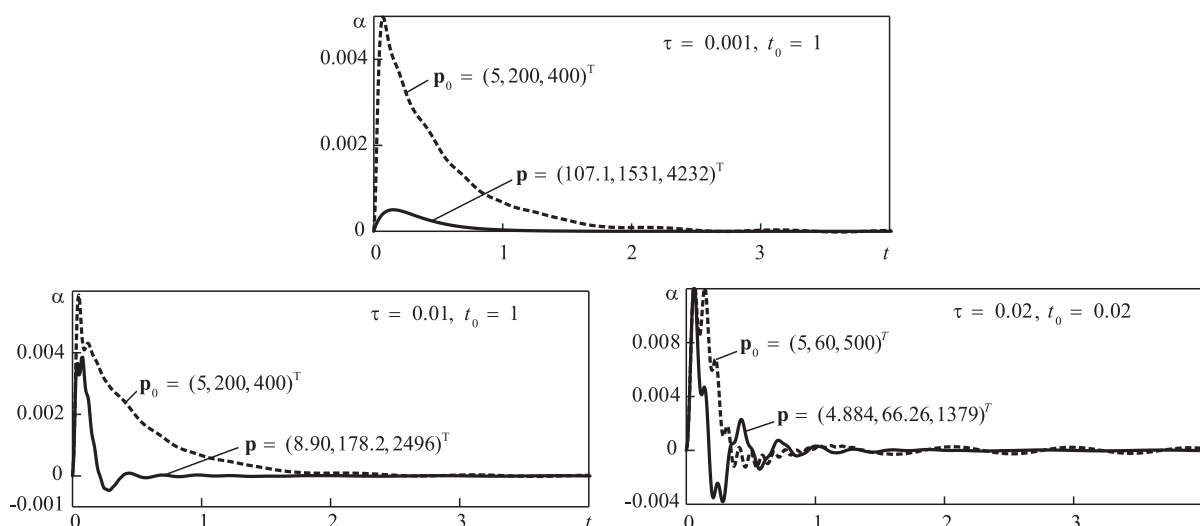


Рис. 4. Результаты параметрического синтеза динамической модели спутника с двумя выносными двигателями на упругих стержнях при различных значениях τ и t_0

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен метод параметрического синтеза управляемых комбинированных динамических систем, функционирующих в режиме стабилизации и содержащих отрицательные интегральные обратные связи. Выполнен параметрический синтез газореактивной системы стабилизации спутников с упругими стержнями. В случаях, когда осциллирующие переходные функции слабо затухают, предложенный метод позволяет значительно улучшить качество переходных процессов в проектируемой системе. Для выполнения параметрического синтеза не требуется детальной информации о конфигурации областей устойчивости в пространстве параметров обратных связей, необходимо лишь, чтобы начальные значения параметров обратных связей принадлежали области устойчивости.

Библиографический список

1. Мануйлов Ю. С., Новиков Е. А., Кравцов А. Н. Синтез и исследование оптимального регулятора угловой стабилизации космического аппарата наблюдения нежесткой конструкции // Авиакосмическое приборостроение. 2011. № 1. С. 16–25.
2. Злочевский С. И., Кубышкин Е. П. О стабилизации



спутника с гибкими стержнями. I // Космические исследования. 1989. Т. 27, вып. 5. С. 643–651.

3. Злочевский С. И., Кубышкин Е. П. О стабилизации спутника с гибкими стержнями. II // Космические исследования. 1991. Т. 29, вып. 6. С. 828–839.

4. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. К теории стабилизации спутников с упругими стержнями // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. № 6. С. 150–163.

5. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. К теории

комбинированных динамических систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2000. № 3. С. 54–69.

6. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. Динамический анализ и выбор параметров модели гироскопического интегратора линейных ускорений с плавающей платформой // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 4. С. 76–89.

7. Андрейченко Д. К. Эффективный алгоритм численного обращения интегрального преобразования Лапласа // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 2000. Т. 40, № 7. С. 1030–1044.

УДК 531.36; 534.1

ХАОТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ВОЛЧКА СО СМЕЩЁННЫМ ЦЕНТРОМ МАСС

Д. А. Лосякова

Самарский государственный аэрокосмический университет
E-mail: Losjakova@termech.ru

Изучено движение твёрдого тела с малым смещением центра масс с оси динамической симметрии. Получены аналитические условия для существования гиперболической особой точки на фазовом портрете системы и аналитическое решение для сепаратрис. Под действием малого возмущения, вызванного асимметрией, тело совершает хаотическое движение вблизи сепаратрис. С помощью численного моделирования, основанного на методе Мельникова в интерпретации Холмса–Масдена, получено условие существования хаотического движения, которое проиллюстрировано серией сечений Пуанкаре.

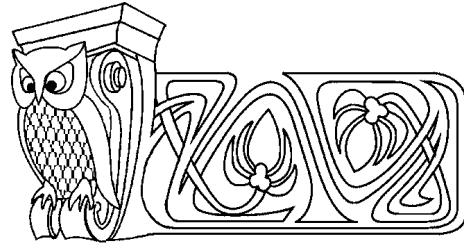
Ключевые слова: нелинейная система, периодические возмущения, хаос, гомоклинические орбиты, метод Мельникова, сечения Пуанкаре.

ВВЕДЕНИЕ

Изучается пространственное движение твёрдого тела с неподвижной точкой в случае Лагранжа под действием момента, действующего в нутационной плоскости. Задача усложняется, если рассматривать малую динамическую асимметрию, связанную со смещением центра масс с оси динамической симметрии. В этом случае появляется ещё одна позиционная координата — угол собственного вращения, что, при определённых условиях, может приводить к возможности возникновения хаоса.

Целью работы является изучение возможности возникновения хаотических движений тяжёлого твёрдого тела с малым смещением центра масс с оси динамической симметрии. Поставленная цель достигается путём выявления условий, при которых существует гиперболическая точка на фазовом портрете невозмущённой системы при отсутствии асимметрии; приведения уравнений движения к виду, допускающему использование метода Мельникова непосредственно или в интерпретации Холмса–Масдена; построения гомоклинической траектории невозмущённой системы; получения функции Мельникова и построения сечений Пуанкаре, подтверждающих существование хаоса. Подобные задачи были рассмотрены в [1], но при асимметрии, связанной с неравенством экваториальных моментов инерции $A \neq B$; в [2, 3] рассмотрен случай действия бигармонического момента $a \cos \theta + b \sin 2\theta$.

Результаты работы имеют практическое применение, например, движение космического аппарата относительно собственного центра масс при спуске в атмосфере описывается уравнениями, близкими к уравнениям Лагранжа. При разработке таких космических аппаратов, как правило, стремятся



Chaotic Motion of Top with Displaced Mass Center

D. A. Losyakova

The motion of solid body with a small displacement mass center from the axis of dynamic symmetry has been studied. Analytical conditions for the existence of a hyperbolic singular point in the phase portrait of the system and the analytical solution for the separatrices have been obtained. Body makes a chaotic motion near separatrices under the influence of small perturbations caused by the asymmetry of the body. Using the numerical simulation based on the Melnikov method in interpretation of Holmes–Marsden confirmation of the chaotic motion system has been received. This has been illustrated by a series of Poincare sections.

Key words: non-linear system, periodic perturbations, chaos, homoclinic orbits, Melnikov method, Poincare section.



обеспечить динамическую симметрию и придать им осесимметричную форму, но обычно возникает малая асимметрия, в том числе связанная со смещением центра масс [4].

1. ГАМИЛЬТОНИАН ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим твёрдое тело с одной неподвижной точкой. В качестве обобщённых координат выберем углы Эйлера (θ, φ, ψ) и соответствующие им обобщённые импульсы $(p_\theta, p_\varphi, p_\psi)$ (рис. 1). Кинетическая и потенциальная энергия тела задается формулами [5]:

$$T = \frac{1}{2} [A(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi)^2 + B(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi)^2 + C(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2], \quad (1)$$

$$\Pi = mg(a \sin \theta \sin \varphi + b \sin \theta \cos \varphi + c \cos \theta), \quad (2)$$

где A, B, C — главные моменты инерции тела, $a, b = O_1D, c = OD$ (рис. 1) — координаты центра масс тела D в системе отсчёта, связанной с телом $(Oxyz)$, mg — сила тяжести.

Будем рассматривать случай, когда поперечные моменты инерции тела равны между собой $A = B$, а значит, оси системы координат, связанной с телом, можно повернуть вокруг оси Oz таким образом, что одна из координат (a или b) может быть равна нулю. Не умоляя общности, будем считать, что $a = 0$. Тогда гамильтониан примет вид

$$H = \frac{p_\theta^2}{2A} + \frac{p_\varphi^2}{2C} + \frac{(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2}{2A \sin^2 \theta} + mgc \left(\frac{b}{c} \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \right). \quad (3)$$

Будем считать смещение центра масс по оси Ox таким, что $\mu = b/c \ll 1$ будет малым параметром. Тогда гамильтониан (3) запишем в виде [6, 7]:

$$H = H_0 + \mu H_1, \quad (4)$$

$$H_0 = \frac{p_\theta^2}{2A} + \frac{p_\varphi^2}{2C} + \frac{(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2}{2A \sin^2 \theta} + mgc \cos \theta, \quad (5)$$

$$H_1 = mgc \sin \theta \cos \varphi. \quad (6)$$

2. ОСОБЫЕ ТОЧКИ. ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ

Рассмотрим особенности фазового портрета в невозмущённом случае. Уравнения движения имеют интеграл энергии в виде

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + W(\theta) = h, \quad (7)$$

где

$$W(\theta) = \frac{G^2 + R^2 - 2GR \cos \theta}{2 \sin^2 \theta} + \beta \cos \theta, \quad (8)$$

$$GA = p_\psi, \quad RA = p_\varphi, \quad \beta = mgc/A.$$

Характер фазового портрета системы определяется формой зависимости $W(\theta)$. В частности, от количества и расположения экстремумов этой функции зависит число и тип особых точек. Можно показать, что функция (8) имеет единственный экстремум и этот экстремум — минимум. Это означает, что на фазовом портрете существует единственное устойчивое положение равновесия, а седловая точка отсутствует.

Более интересен случай, при котором возможно наличие максимума функции $W(\theta)$ и седловой точки на фазовом портрете системы. Это условие было предложено Р. J. Holmes и J. E. Marsden в [1]:

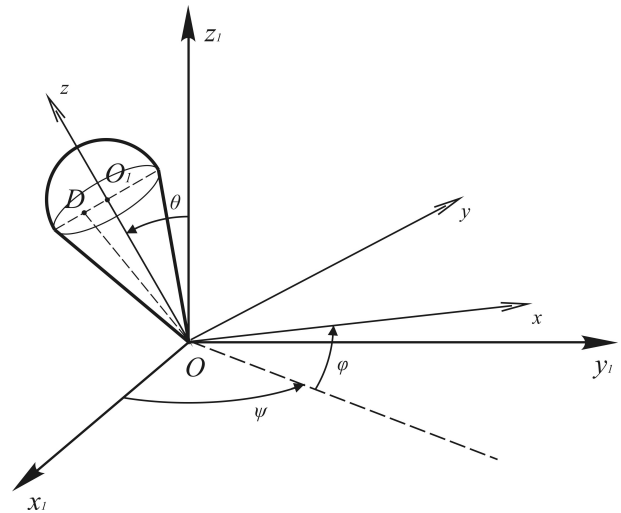


Рис. 1. Углы Эйлера

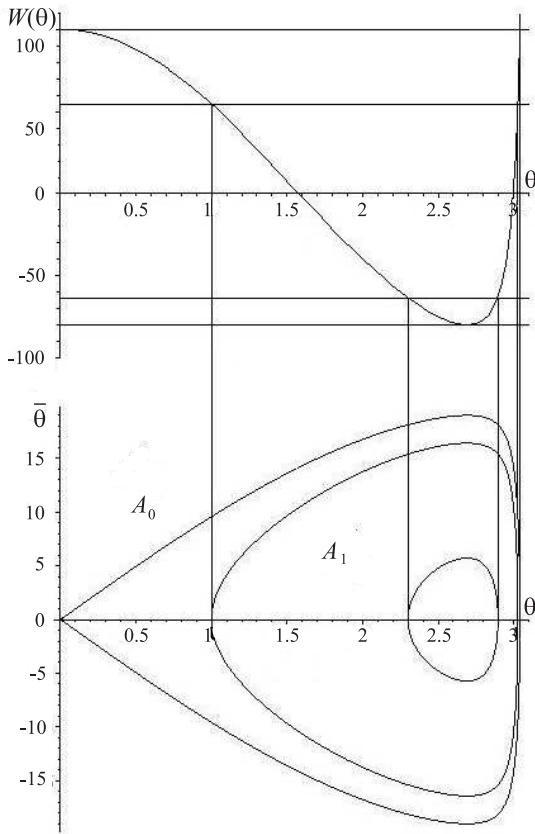


Рис. 2. Фазовый портрет

если $p_\varphi = p_\psi = Ap = \text{const}$ и $0 < p < 2\sqrt{\beta}$, то на фазовом портрете в пространстве (θ, p_θ) есть гиперболическая точка при $\theta = p_\theta = 0$ и гомоклиническая орбита.

Рассмотрим (8) при выполнении первого условия теоремы: $p_\varphi = p_\psi = Ap = \text{const}$. Тогда (8) примет вид

$$W(\theta) = \frac{p^2}{1 + \cos \theta} + \beta \cos \theta. \quad (9)$$

Исследуя функцию (9) на наличие экстремумов, несложно доказать, что при $0 < p < 2\sqrt{\beta}$ она имеет два экстремума на интервале $\theta \in [0, \pi)$: минимум при $\cos \theta = p/\sqrt{\beta} - 1$ и максимум при $\theta = 0$.

При выполнении условий теоремы фазовая плоскость разбивается сепаратрисой на две области: внешнюю A_0 и внутреннюю A_1 (см. рис. 2).

Таким образом, при выполнении условий теоремы, описанной в [1], появляются качественно новые свойства, не характерные для случая Лагранжа, обусловленные возможностью появления на фазовом портрете системы особой точки типа седло, соответствующей неустойчивому положению равновесия. Очевидно, что при наличии возмущений возможно хаотическое поведение системы и переходы из одной характерной области в другую.

3. ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ

Согласно методу В. К. Мельникова [8], для получения критерия возникновения хаоса в окрестности сепаратрис при возмущённом движении необходимо найти аналитические решения уравнения невозмущённого движения на гомоклинических траекториях — сепаратрисах, принадлежащих области A_1 , которые соединяются в седле $\theta = 0$. Равенство $h = W_0$ соответствует движению по сепаратрисе. Найдём гомоклинические траектории невозмущённой системы, для этого запишем интеграл энергии (7) с учётом (9):

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \beta \cos \theta + \frac{p^2}{1 + \cos \theta} = h_s, \quad (10)$$

где $h_s = \beta + p^2/2$ — значение h на сепаратрисе.

Дифференциальному уравнению (10) удовлетворяет решение

$$\cos \theta = 1 - \alpha \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{2\beta\alpha}}{2} t \right), \quad \alpha = 2 - p^2/2\beta, \quad (11)$$

представленное в [1]. Данное решение можно получить двумя способами, как непосредственным интегрированием (10) с начальным условием $\cos \theta_0 = p^2/2\beta - 1$, так и из общего решения уравнения движения твёрдого тела в случае Лагранжа при $p_\psi = p_\varphi$, учитывая что $\operatorname{sn}(u, 1) = \operatorname{th}(u)$.

Можно отметить, что полученное решение по своей структуре близко к известному решению волнового уравнения Кортевега–де Фриза [9]:

$$u(x, \tau) = \frac{2\kappa^2}{\cosh^2[\kappa(x - 4\kappa^2\tau - x_0)]},$$

а при

$$\tau = -t, \quad x_0 = 0, \quad x = 0, \quad \kappa = \sqrt{\alpha/2}, \quad \frac{\beta}{4} = \left(2 - \frac{p^2}{2\beta} \right)^2$$

совпадает с ним.



4. ВОЗМУЩЁННОЕ ДВИЖЕНИЕ. МЕТОД МЕЛЬНИКОВА

Для численного анализа возмущённой системы воспользуемся методом отображений Пуанкаре [7, 10, 11], который основан на рассмотрении многообразия с плоскими сечениями, перпендикулярными фазовой оси φ в четырёхмерном пространстве $(\theta, p_\theta, \varphi, p_\varphi)$, разделёнными интервалами, равными 2π . Это позволяет вместо исследования непрерывного процесса изучить динамику возмущённой системы с дискретной фазой φ .

При $\mu = 0$ наблюдается регулярная структура фазового пространства, траектории не имеют пересечений (рис. 3), и сечение Пуанкаре совпадает с невозмущённым фазовым портретом, представленным на рис. 2.

Следуя [1], запишем функцию Мельникова в виде

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ H_0, \frac{H_1}{\Omega} \right\}_{\theta, p_\theta} dt, \quad (12)$$

где подынтегральное выражение является скобкой Пуассона:

$$\left\{ H_0, \frac{H_1}{\Omega} \right\}_{\theta, p_\theta} = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial H_0}{\partial \theta} \frac{\partial H_1}{\partial p_\theta} - \frac{1}{\Omega} \frac{\partial H_0}{\partial p_\theta} \frac{\partial H_1}{\partial \theta} + \frac{H_1}{\Omega^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \frac{\partial H_0}{\partial p_\theta}, \quad (13)$$

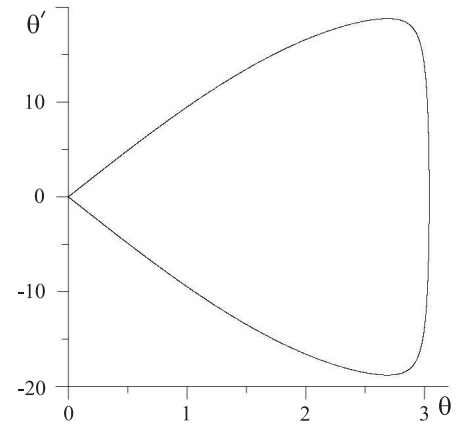


Рис. 3. Сечение Пуанкаре при $\mu = 0$

Проверив выполнение условия $\Omega(\theta) > 0$ (рис. 4), подставим гамильтониан (4) в (12), считая, что $p_\varphi = p_\psi = Ap = \text{const}$, (11) — решение для угла нутации на сепаратрисе, а решение для углов прецессии и собственного вращения могут быть найдены в квадратурах [1]:

$$\dot{\varphi}(t) = \Omega(\theta) = p \left(\frac{A}{C} - \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} \right), \quad \dot{\psi}(t) = \frac{p}{1 + \cos \theta}.$$

Функция Мельникова (12) неоднократно меняет знак (рис. 5), что означает наличие пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий и возникновение хаотических режимов, включающих «перетекание» траекторий из одной области в другую.

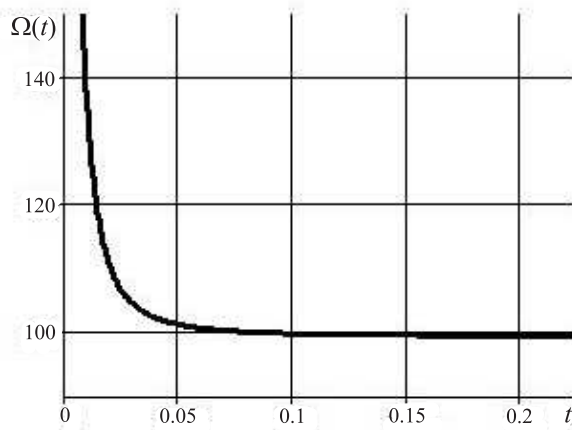


Рис. 4. Частота возмущения $\Omega(t)$

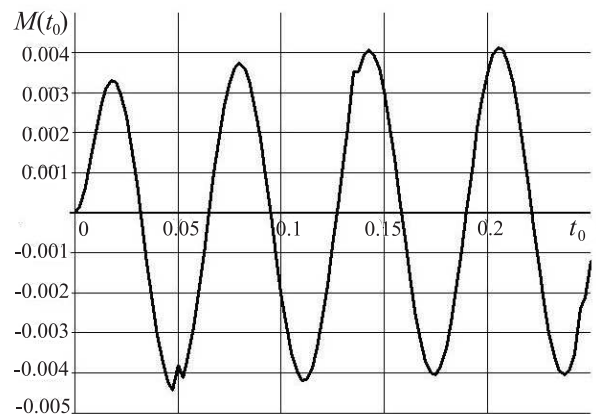


Рис. 5. Функция Мельникова $M(t_0)$

Также наличие хаотического движения может быть проиллюстрировано серией сечений Пуанкаре при различной величине возмущающего параметра μ (рис. 6).

Возмущения ($\mu \neq 0$) приводят к усложнению фазового пространства и возникновению хаотического слоя рядом с невозмущёнными сепаратрисами (см. рис. 6). С ростом величины возмущения происходит увеличение ширины хаотического слоя, и наблюдаются новые колебательные режимы, определяемые замкнутыми кривыми, нехарактерными для невозмущённого случая.

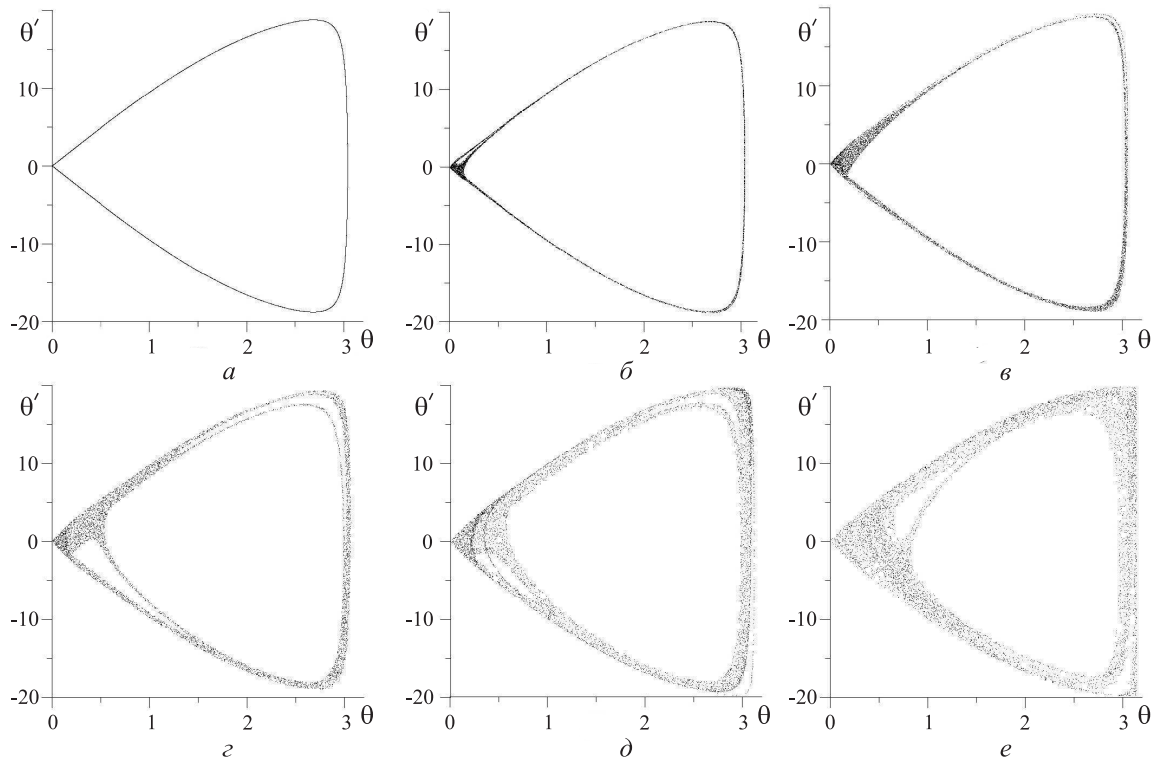


Рис. 6. Сечения Пуанкаре при $\mu = 0$ (а), $\mu = 0.1$ (б), $\mu = 0.5$ (в), $\mu = 1$ (г), $\mu = 2$ (д), $\mu = 5$ (е)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, асимметричное тело с неподвижной точкой при определённых начальных условиях $p_\varphi = p_\psi = Ap = \text{const}$ может иметь два положения равновесия в невозмущённом случае. Это обстоятельство определяет возможность появления хаоса при возмущённом движении. Отметим, что для задач, связанных со спуском космических аппаратов в атмосфере [12], является недопустимым попадание в область больших углов атаки (углов нутации), поэтому проведённые исследования имеют также важное прикладное значение.

Автор выражает благодарность профессору В. С. Асланову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09-01-00384).

Библиографический список

1. Holmes P. J., Marsden J. E. Horseshoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups // Indiana University Math. J. 1983. Vol. 32, № 5. С. 273–309.
2. Асланов В. С. Движение несимметричного твёрдого тела под действием бигармонического момента // Проблемы аналитической механики и теории устойчивости : сб. науч. ст., посвящ. памяти акад. В. В. Румянцев / Ин-т пробл. управления РАН. М.: Физматлит, 2009. 420 с.
3. Асланов В. С., Иванов Б. В. Хаотическое движение нелинейной системы // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2008. Т. 8 Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 4. С. 38–43.
4. Асланов В. С. Пространственное движение тела при спуске в атмосфере. М. : Физматлит, 2004. 160 с.
5. Маркеев А. П. Теоретическая механика : учебник для университетов. М. : ЧеРо, 1999. 572 с.
6. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М. : ВИНТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
7. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические колебания системы и бифуркации векторных полей. М.; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.
8. Мельников В. К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Московского мат. общества. 1963. № 12. С. 1–56.



9. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
10. Морозов А. Д., Драгун Т. Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. М.; Ижевск: ИКИ, 2003. 304 с.
11. Goirgilli A., Lazutkin V. F., Simo C. Visualization of

a hyperbolic structure in area preserving maps // Reg. & Chaot. Dyn. 1997. Vol. 2, № 3/4. P. 47–61.

12. Асланов В. С., Ледков А. С. Особенности вращательного движения космического аппарата при спуске в атмосфере Марса // Космические исследования. 2007. Т. 45, № 4. С. 351–357.

УДК 539.375

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ В ПОЛОСЕ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

М. В. Мирсалимов

Азербайджанский технический университет, Баку
E-mail: a-mirsalimov@mail.ru

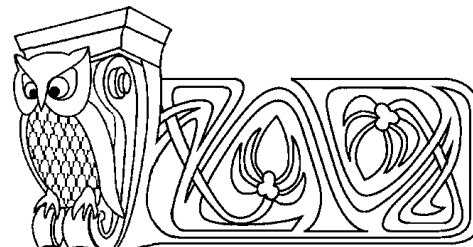
Проведено математическое описание модели зарождения трещины в полосе переменной толщины. Определение неизвестных параметров, характеризующих зародышевую трещину, сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений. Получено условие, определяющее критическое значение внешней нагрузки, при которой происходит трещинообразование.

Ключевые слова: полоса переменной толщины, зона предразрушения, зарождение трещины.

Полосы переменной толщины используются в различных отраслях техники. Это вызвано, в частности тем, что, часто изменяя толщину изделия, ему можно придать требуемые свойства.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается однородная изотропная полоса переменной толщины. Обозначим через $2L$ и $2h$ ширину и толщину полосы соответственно (рис. 1). Срединная плоскость (x, y) является плоскостью симметрии. Полоса переменной толщины находится в обобщенном плоском напряженном состоянии. Пусть полоса подвергается силовому нагружению. Считается, что заданы напряжения на границе $y = \pm L$ полосы (условие первой основной задачи). Принято, что в материале полосы после многократного нагружения появляется концентратор напряжений (область ослабленных межчастичных связей материала). При нагружении в прослойке перенапряженного материала образуется зона пластического течения. Пусть для определенности силовая нагрузка изменяется так, что в области ослабленных межчастичных связей материала осуществляется пластическое деформирование. Через некоторое число нагружений возможность пластического деформирования в области ослабленных межчастичных связей материала исчерпывается, и раскрытие берегов зоны пластического течения резко увеличивается. Если раскрытие берегов зоны предразрушения в точке максимальной концентрации достигает предельного значения δ_c для данного материала полосы, то в этой точке зарождается трещина. Важно отметить, что в предлагаемой расчетной модели удлинение зародышевой трещины происходит непрерывно от нулевой длины.



Modelling of Cracking in the Strip of Variable Thickness

M. V. Mirsalimov

The mathematical description of the model crack nucleation in a strip of variable thickness was conducted. Definition of the unknown parameters that characterize the nucleus crack is reduced to solving a system of singular integral equations. The condition that determines the critical value of external load at which cracking occurs was obtained.

Key words: strip of variable thickness, prefracture zone, nucleation of cracks.

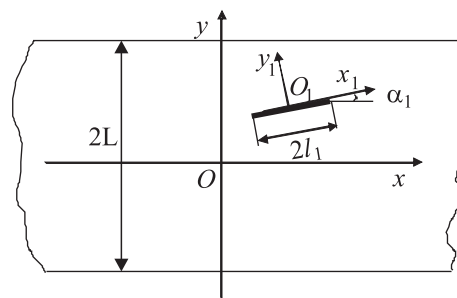


Рис. 1. Расчетная схема задачи о зарождении трещины в полосе переменной толщины



Задача моделирования процессов образования и роста трещины редуцируется к последовательно решаемым упругопластическим задачам. Разработка расчетной модели, в рамках которой можно было бы эффективно прогнозировать появление трещины в полосе переменной толщины, имеет важное значение для обеспечения безопасной эксплуатации изделий.

По мере нагружения полосы в материале будут возникать зоны предразрушения, которые моделируются как области ослабленных межчастичных связей материала. Взаимодействие берегов зоны предразрушения моделируется линиями пластического течения между ними (вырожденными зонами пластических деформаций). Размеры зон пластического течения при постоянном напряжении зависят от вида материала. На ранних стадиях разрушения из опыта хорошо известна общая тенденция к формированию областей с нарушенной структурой материала в виде узких слоев, занимающих незначительный объем тела по сравнению с его упругой зоной [1]. В рассматриваемом случае образование трещины представляет собой процесс перехода зоны предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала. Размеры зоны предразрушения заранее неизвестны и должны быть определены.

Твердое тело (полоса), деформируемое за пределом упругости, представляется как тело, деформируемое упруго всюду, кроме некоторых поверхностей зон предразрушения. Напомним, что упругая деформация представляет собой изменение в расстояниях между элементарными частицами без изменения порядка их расположения, в то время как пластическая деформация сопровождается изменением относительного расположения атомов за счет сдвигов одного слоя атомов относительно другого (элементарные пластические деформации). Поскольку указанные зоны (прослойки перенапряженного материала) малы по сравнению с остальной упругой частью полосы, их можно мысленно заменить разрезами, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала. Таким образом, задача, о деформации полосы переменной толщины за пределами упругости сводится к задаче о деформации некоторого упругого тела, имеющего условные разрезы. Силы, действующие по поверхностям этих зон, называются силами ослабленных связей, а зоны, в которых они появляются, — зонами предразрушения, или областями ослабленных связей. Считается, что толщина полосы $2h(x, y)$ удовлетворяет условиям $0 < h_1 \leq h(x, y) \leq h_2$, где h_1, h_2 — наименьшее и наибольшее значение толщины полосы соответственно. Функция толщины может быть представлена в виде

$$h(x, y) = h_0 [1 + \varepsilon \bar{h}(x, y)],$$

где $h_0 = (h_1 + h_2)/2$, $\varepsilon = (h_2 - h_1)/(h_2 + h_1)$, $-1 \leq \bar{h}(x, y) \leq 1$ — некоторая известная безразмерная непрерывная функция.

Зона предразрушения ориентирована в направлении максимальных растягивающих напряжений. В центре зоны предразрушения разместим начала локальной системы координат $x_1 O_1 y_1$, ось x_1 которой совпадает с линией расположения зоны предразрушения и образует угол α_1 с осью x (см. рис. 1). Взаимодействие берегов зоны предразрушения (связи между берегами) сдерживает зарождение трещины. При действии силовой нагрузки на границе полосы $y = \pm L$ в связях, соединяющих берега зоны предразрушения, возникают нормальные $\sigma_{y_1} = \sigma_s$ и касательные $\tau_{x_1 y_1} = \tau_s$ напряжения, где σ_s — предел текучести материала на растяжение, τ_s — предел текучести материала полосы на сдвиг.

Таким образом, к берегам зоны ослабленных межчастичных связей материала приложены нормальные σ_s и касательные τ_s напряжения.

Запишем общие уравнения статического деформирования полосы:

– уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0;$$

– закон Гука

$$N_x = \frac{2Eh}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad N_y = \frac{2Eh}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad N_{xy} = \frac{Eh}{1 + \nu} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

где N_x, N_y, N_{xy} — нормальные и сдвигающие усилия, приходящиеся на единицу длины соответственно; u, v — компоненты вектора смещений; E — модуль упругости материала полосы; ν — коэффициент Пуассона материала.



Краевые условия задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \text{при } y = L \quad \sigma_y - i\tau_{xy} &= p_1(x), & -\infty < x < \infty, \\ \text{при } y = -L \quad \sigma_y - i\tau_{xy} &= p_2(x), & -\infty < x < \infty, \\ \text{при } y_1 = 0 \quad \sigma_{y_1} - i\tau_{x_1y_1} &= \sigma_s - i\tau_s, & -l_1 \leq x_1 \leq l_1, \end{aligned} \quad (1)$$

где σ_y, τ_{xy} — компоненты тензора напряжений; $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — заданные функции, убывающие на бесконечности и удовлетворяющие условиям статики.

Для вычисления значения внешней нагрузки, при которой происходит зарождение трещины, нужно дополнить постановку задачи условием (критерием) появления трещины (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия примем критерий критического раскрытия берегов зоны предразрушения

$$|v^+ - v^- - i(u^+ - u^-)| = \delta_c, \quad (2)$$

где δ_c — характеристика сопротивления материала полосы трещинообразованию. Это дополнительное условие позволяет найти параметры полосы, при которых появляется трещина.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Решение системы уравнений статического деформирования полосы ищем в виде

$$\begin{aligned} N_x &= N_x^{(0)} + \varepsilon N_x^{(1)} + \dots, & N_y &= N_y^{(0)} + \varepsilon N_y^{(1)} + \dots, & N_{xy} &= N_{xy}^{(0)} + \varepsilon N_{xy}^{(1)} + \dots, \\ u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, & v &= v_0 + \varepsilon v_1 + \dots, & l_1 &= l_1^0 + \varepsilon l_1^1 + \dots \end{aligned}$$

Используем процедуру метода возмущений. В полученных уравнениях уравнение нулевого приближения совпадает с уравнениями классической плоской задачи теории упругости, а уравнения первого приближения представляют собой уравнения плоской задачи теории упругости с объемной силой

$$X_1 = N_x^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + N_{xy}^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y}, \quad Y_1 = N_y^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} + N_{xy}^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}. \quad (3)$$

Аналогично определяются составляющие X_2, Y_2 объемной силы для второго и последующих приближений.

Граничные условия задачи (1) принимают соответственно вид:

– для нулевого приближения

$$\begin{aligned} \text{при } y = L \quad \sigma_y^{(0)} - i\tau_{xy}^{(0)} &= p_1(x), & -\infty < x < \infty, \\ \text{при } y = -L \quad \sigma_y^{(0)} - i\tau_{xy}^{(0)} &= p_2(x), & -\infty < x < \infty, \\ \text{при } y_1 = 0 \quad \sigma_{y_1}^{(0)} - i\tau_{x_1y_1}^{(0)} &= \sigma_s - i\tau_s, & -l_1^0 \leq x_1 \leq l_1^0; \end{aligned} \quad (4)$$

– для первого приближения

$$\begin{aligned} \text{при } y = L \quad N_y^* - iN_{xy}^* &= -\bar{h}(x, 0)p_1^*, & -\infty < x < \infty, \\ \text{при } y = -L \quad N_y^* - iN_{xy}^* &= -\bar{h}(x, 0)p_2^*, & -\infty < x < \infty, \\ \text{при } y_1 = 0 \quad N_y^* - iN_{xy}^* &= -\bar{h}(x, y)(\sigma_s^* - i\tau_s^*), & -l_1^1 \leq x_1 \leq l_1^1, \end{aligned} \quad (5)$$

где $p_1^* - ip_2^* = 2h_0(p_1(x) - ip_2(x)), \sigma_1^* - i\tau_s^* = 2h_0(\sigma_s - i\tau_s)$.

Здесь при выводе уравнений первого приближения были приняты следующие обозначения:

$$N_x^* = N_x^{(1)} - \bar{h}(x, y)N_x^{(0)}, \quad N_y^* = N_y^{(1)} - \bar{h}(x, y)N_y^{(0)}, \quad N_{xy}^* = N_{xy}^{(1)} - \bar{h}(x, y)N_{xy}^{(0)}.$$

При решении задачи в каждом приближении используем принцип суперпозиции. Тогда напряженно-деформированное состояние полосы в каждом приближении можно представить в виде суммы двух напряженно-деформированных состояний. Первое состояние будет определяться из решения плоской задачи теории упругости для полосы при отсутствии зоны предразрушения. Второе состояние определяется из решения задачи для полосы с зоной предразрушения, на берегах которой дополнительно



приложены усилия, равные по величине и обратные по знаку, определяемые первым напряженным состоянием при $y_1 = 0$.

Рассмотрим нулевое приближение. Первое состояние для нулевого приближения (для полосы постоянной толщины) при отсутствии зоны предразрушения известно [2, 3].

Граничные условия задачи, определяющей второе состояние в нулевом приближении, принимает вид

$$\begin{aligned} \text{при } y = L & \quad \sigma_y^{(0)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(0)} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \\ \text{при } y = -L & \quad \sigma_y^{(0)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(0)} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \\ \text{при } y_1 = 0 & \quad \sigma_{y_1}^{(0)} - i\tau_{x_1 y_1}^{(0)} = \sigma_s - i\tau_s - (p_*^{(0)}(x_1) - iq_*^{(0)}(x_1)), \quad -l_1^0 \leq x_1 \leq l_1^0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $p_*^{(0)}(x_1)$ и $q_*^{(0)}(x_1)$ — нормальные и касательные напряжения, возникающие в сплошной бездефектной полосе на оси x_1 ($y_1 = 0$) от действия напряжений на границе $y = \pm L$ полосы в нулевом приближении.

Граничные условия задачи (6) с помощью формул Колосова–Мусхелишвили [4] запишем в виде краевой задачи для отыскания двух аналитических функций $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$:

$$\begin{aligned} \text{при } y = L & \quad \Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} + z\overline{\Phi_0'(z)} + \overline{\Psi_0(z)} = 0, \\ \text{при } y = -L & \quad \Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} + z\overline{\Phi_0'(z)} + \overline{\Psi_0(z)} = 0, \\ \text{при } y_1 = 0 & \quad \Phi_0(x_1) + \overline{\Phi_0(x_1)} + x_1\overline{\Phi_0'(x_1)} + \overline{\Psi_0(x_1)} = f^0(x_1), \end{aligned} \quad (7)$$

где $f^0(x_1) = \sigma_s - i\tau_s - (p_*^{(0)} - iq_*^{(0)})$, $|x_1| \leq l_1^0$.

Комплексные потенциалы $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ ищем в виде [3]

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^2 \int_{-l_k}^{l_k} \frac{g_k^0(t) dt}{t - z_k}, \quad \Psi_0(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^2 e^{-2i\alpha_k} \int_{-l_k}^{l_k} \left[\frac{\overline{g_k^0(t)}}{t - z_k} - \frac{\overline{T_k} e^{i\alpha_k}}{(t - z_k)^2} g_k^0(t) \right] dt, \quad (8)$$

где $T_k = te^{i\alpha_k} + z_k^0$, $z_k = e^{-i\alpha_k}(z - z_k^0)$, $\alpha_0 = \alpha_2 = 0$, $z_0^0 = iL$, $z_2^0 = -iL$, $l_0 = \infty$, $l_2 = \infty$.

Удовлетворяя функциями (8) краевым условиям (7), после некоторых преобразований получим систему трех интегральных уравнений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{g_0^0(t)}{t-x} + g_2^0(t)K_{0,2}(t-x) + \overline{g_2^0(t)}L_{0,2}(t-x) \right] dt = - \int_{-l_1^0}^{l_1^0} \left[g_1^0(t)K_{0,1}(t,x) + \overline{g_1^0(t)}L_{0,1}(t,x) \right] dt, \quad |x| < \infty, \quad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{g_2^0(t)}{t-x} + g_0^0(t)K_{2,0}(t-x) + \overline{g_0^0(t)}L_{2,0}(t-x) \right] dt = - \int_{-l_1^0}^{l_1^0} \left[g_1^0(t)K_{2,1}(t,x) + \overline{g_1^0(t)}L_{2,1}(t,x) \right] dt, \quad |x| < \infty,$$

$$\begin{aligned} \int_{-l_1^0}^{l_1^0} \left[\frac{g_1^0(t)}{t-x} + g_1^0(t)K_{1,1}(t,x) + \overline{g_1^0(t)}L_{1,1}(t,x) \right] dt + \int_{-\infty}^{\infty} \left[g_0^0(t)K_{1,0}(t,x) + \overline{g_0^0(t)}L_{1,0}(t,x) \right] dt + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \left[g_2^0(t)K_{1,2}(t,x) + \overline{g_2^0(t)}L_{1,2}(t,x) \right] dt = \pi f^0(x), \quad |x| < l_1^0. \end{aligned} \quad (10)$$

Ввиду некоторой громоздкости величины $K_{n,k}$, $L_{n,k}$ ($k, n = 0, 1, 2$) не приводятся. Из системы трех интегральных уравнений исключаются две неизвестные функции $g_0^0(t)$ и $g_2^0(t)$. Подставляя в (10) функции $g_0^0(x)$ и $g_2^0(x)$, найденные из решения интегральных уравнений (9), после некоторых преобразований получим одно комплексное сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $g_1^0(x)$:

$$\int_{-l_1^0}^{l_1^0} \left[\frac{g_1^0(t)}{t-x} + g_1^0(t)R_{11}(t,x) + \overline{g_1^0(t)}S_{11}(t,x) \right] dt = \pi f^0(x), \quad |x| < l_1^0. \quad (11)$$



Выражения для функций $R_{11}(t, x)$ и $S_{11}(t, x)$ из-за некоторой громоздкости величины не приводятся (они имеют вид, подобный (V.41) из [3]).

К сингулярному интегральному уравнению (11) для внутренней зоны предразрушения добавляется дополнительное условие:

$$\int_{-l_1^0}^{l_1^0} g_1^0(t) dt = 0, \quad (12)$$

обеспечивающее однозначность смещений при обходе контура зоны предразрушения в нулевом приближении. Комплексное сингулярное интегральное уравнение (11) при дополнительном условии (12) сводится к системе M алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомой функции $g_1^0(x_1)$ в узловых точках. Для получения системы алгебраических уравнений сначала приведем в интегральном уравнении (11) и в условии (12) все интервалы интегрирования к одному отрезку $[-1, 1]$ с помощью замены переменных $t = l_1^0 \tau$, $x = l_1^0 \xi$ ($|t| < l_1^0$, $|x| < l_1^0$). Решение сингулярного интегрального уравнения ищем в виде

$$g_1^0(\xi) = \frac{g_1^*(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}},$$

где $g_1^*(\xi)$ — регулярная в интервале $[-1, 1]$ функция.

Используя квадратурные формулы типа Гаусса [3, 5], сингулярное интегральное уравнение (11) при дополнительном условии (12) сведем к системе M алгебраических уравнений для определения M неизвестных $g_1^*(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M l_1^0 \left[g_1^*(t_m) R_{11}^*(l_1^0 t_m, l_1^0 x_r) + \overline{g_1^*(t_m)} S_{11}^*(l_1^0 t_m, l_1^0 x_r) \right] &= f^0(x_r), \\ \sum_{m=1}^M g_1^*(t_m) &= 0 \quad (r = 1, 2, \dots, M - 1; m = 1, 2, \dots, M), \end{aligned} \quad (13)$$

где $t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi$, $x_r = \cos \frac{\pi r}{M}$.

Так как решение сингулярного интегрального уравнения (11) ищется в классе всюду ограниченных функций (напряжений), то к системе (13) необходимо добавить условия ограниченности напряжений на концах зоны предразрушения $x_r = \pm l_1^0$ в нулевом приближении. Эти условия имеют вид

$$\sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_1^*(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0, \quad \sum_{m=1}^M (-1)^m g_1^*(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0. \quad (14)$$

Полученная алгебраическая система (13)–(14) из-за неизвестного размера зоны предразрушения нелинейная. Система уравнений (13)–(14) относительно $g_1^*(t_m)$ и l_1^0 позволяет при заданной внешней нагрузке найти напряженно-деформированное состояние полосы при наличии зоны предразрушения в нулевом приближении. Решение системы уравнений (13)–(14) позволяет найти приближенные значения функций $v_0(t_m)$, $u_0(t_m)$ и размеры зоны предразрушения. Для ее решения используется метод последовательных приближений, суть которого состоит в следующем. Решаем систему (13) при некотором определенном значении размера зоны предразрушения относительно остальных неизвестных. Остальные неизвестные входят в систему линейным образом. Значения размера зоны предразрушения и соответствующие значения остальных неизвестных не будут, вообще говоря, удовлетворять уравнениям (14). Подбирая значения параметров длины зоны предразрушения, будем многократно повторять вычисления, пока уравнения (14) не будут удовлетворяться с достаточной точностью. В каждом приближении алгебраическая система решалась методом Гаусса с выбором главного элемента.

Перейдем к построению решения задачи в первом приближении. Зная решение задачи в нулевом приближении, находим компоненты усилий $N_x^{(0)}$, $N_y^{(0)}$, $N_{xy}^{(0)}$. По формулам (3) находим компоненты объемной силы $F = X_1 + iY_1$ в первом приближении. Для определения первого состояния в первом приближении имеем уравнения плоской теории упругости при наличии объемных сил (3). При



наличии объемных сил решение плоской задачи для первого состояния ищем в виде

$$N_x^* = N_{x_*}^{(1)} + N_{x_1}^{(1)}, \quad N_y^* = N_{y_*}^{(1)} + N_{y_1}^{(1)}, \quad N_{xy}^* = N_{xy_*}^{(1)} + N_{xy_1}^{(1)},$$

где $N_{x_*}^{(1)}, N_{y_*}^{(1)}, N_{xy_*}^{(1)}$ — частное решение уравнений плоской теории упругости при наличии объемной силы (3); $N_{x_1}^{(1)}, N_{y_1}^{(1)}, N_{xy_1}^{(1)}$ — общее решение уравнений плоской теории упругости при отсутствии объемных сил.

Для усилий первого состояния в первом приближении при наличии объемных сил имеем общие представления

$$\begin{aligned} \frac{N_x^* + N_y^*}{2h_0} &= 4 \operatorname{Re} \left(\Phi_{10}(z) - \frac{1}{2(1+\kappa)} \frac{\partial F_1}{\partial z} \right), \\ \frac{N_y^* - N_x^* + 2iN_{xy}^*}{2h_0} &= 2 \left(\bar{z}\Phi'_{10}(z) + \Psi_{10}(z) + \frac{1}{2(1+\kappa)} \frac{\partial(\kappa\bar{F}_1 - Q_1)}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

В эти соотношения входят две аналитические функции $\Phi_{10}(z)$ и $\Psi_{10}(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$ и две функции $F_1(z, \bar{z}), Q_1(z, \bar{z})$, представляющие собой любые частные решения уравнений

$$\frac{\partial^2 F_1(z, \bar{z})}{\partial z \partial \bar{z}} = F, \quad \frac{\partial^2 Q_1(z, \bar{z})}{\partial z^2} = \bar{F}.$$

Граничные условия для нахождения комплексных потенциалов $\Phi_{10}(z)$ и $\Psi_{10}(z)$ на основании первых двух краевых условий (5) и общих представлений (15) имеют вид

$$\begin{aligned} \text{при } y = L \quad & \Phi_{10}(z) + \overline{\Phi_{10}(z)} + z\overline{\Phi'_{10}(z)} + \overline{\Psi_{10}(z)} = f_1(z) - \bar{h}p_1^*(x), \\ \text{при } y = -L \quad & \Phi_{10}(z) + \overline{\Phi_{10}(z)} + z\overline{\Phi'_{10}(z)} + \overline{\Psi_{10}(z)} = f_1(z) - \bar{h}p_2^*(x), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$f_1(z) = \frac{1}{1+\kappa} \operatorname{Re} \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{1}{2(1+\kappa)} \left(\kappa \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial z} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right). \quad (17)$$

Здесь функции $F_1(z, \bar{z})$ и $Q_1(z, \bar{z})$ определяются по формулам

$$F_1(z, \bar{z}) = \int^z dz \int^{\bar{z}} F(z, \bar{z}) d\bar{z}, \quad Q_1(z, \bar{z}) = \int^z dz \int^{\bar{z}} \overline{F(z, \bar{z})} dz. \quad (18)$$

Решение граничной задачи (16) известно [2, 3].

Согласно принципу суперпозиции граничные условия задачи, определяющие второе напряженно-деформированное состояние в первом приближении, получим в виде

$$\begin{aligned} \text{при } y = L \quad & N_y^* = 0, \quad N_{xy}^* = 0, \\ \text{при } y = -L \quad & N_y^* = 0, \quad N_{xy}^* = 0, \\ \text{при } y_1 = 0, |x_1| \leq l_1^1 \quad & N_{y_1}^* = -\bar{h}\sigma_s^* - p_*^{*(1)}, \quad N_{x_1 y_1}^* = -\bar{h}\tau_s^* - q_*^{*(1)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $p_*^{*(1)}(x_1) = 2h_0 p_*^{(1)}$ и $q_*^{*(1)}(x_1) = 2h_0 q_*^{(1)}$ — нормальные и касательные напряжения, возникающие в сплошной бездефектной полосе без зоны предразрушения по оси x_1 ($y_1=0$) в первом состоянии первого приближения соответственно.

Для определения комплексных потенциалов $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ второго состояния первого приближения имеем граничную задачу

$$\begin{aligned} \text{при } y = L \quad & \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} + z\overline{\Phi'_1(z)} + \overline{\Psi_1(z)} = 0, \\ \text{при } y = -L \quad & \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} + z\overline{\Phi'_1(z)} + \overline{\Psi_1(z)} = 0, \\ \text{при } y_1 = 0, |x_1| \leq l_1^1 \quad & \Phi_1(x_1) + \overline{\Phi_1(x_1)} + x_1\overline{\Phi'_1(x_1)} + \overline{\Psi_1(x_1)} = f^1(x_1), \end{aligned} \quad (20)$$

где $f^1(x_1) = -\bar{h}(\sigma_s - i\tau_s) - (p_*^{(1)} - iq_*^{(1)})$.



Комплексные потенциалы $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ ищем в виде, подобном (8). Поступая аналогично вышеизложенному, получим комплексное сингулярное интегральное уравнение относительно искомой функции $g_1^1(x_1)$ с дополнительным условием типа (12).

Как и в нулевом приближении, интегральное уравнение с дополнительным условием типа (12) сводим к системе комплексных алгебраических уравнений относительно M неизвестных $g_1^{*(1)}(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M l_1^1 \left[g_1^{*(1)}(t_m) R_{11}^*(l_1^1 t_m, l_1^1 x_r) + \overline{g_1^{*(1)}(t_m)} S_{11}^*(l_1^1 t_m, l_1^1 x_r) \right] &= f^1(x_r), \\ \sum_{m=1}^M g_1^{*(1)}(t_m) &= 0 \quad (r = 1, 2, \dots, M-1). \end{aligned} \quad (21)$$

Для замкнутости алгебраической системы (21) не хватает двух уравнений, определяющих размеры зоны предразрушения в первом приближении. Записывая условия конечности напряжений в вершинах зоны предразрушения $x_1 = \pm l_1^1$, получим недостающие два уравнения

$$\sum_{m=1}^M (-1)^m g_1^{*(1)}(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0, \quad \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_1^{*(1)}(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0. \quad (22)$$

Для определения раскрытия берегов зоны предразрушения и размеров зоны предразрушения задается закон изменения толщины полосы. Функцию $h(x, y)$ разложим в ряд Тейлора в окрестности начала координат, ограничиваясь для простоты несколькими первыми членами разложения. Проинтегрировав (18), находим функции $F_1(z, \bar{z})$ и $Q_1(z, \bar{z})$. По найденным функциям $F_1(z, \bar{z})$ и $Q_1(z, \bar{z})$ находим функцию $f_1(z)$. О способе решения алгебраической системы (21), (22) сказано выше. После решения алгебраической системы находим

$$g_1(x_1) = g_1^0(x_1) + \varepsilon g_1^1(x_1), \quad l_1 = l_1^0 + \varepsilon l_1^1.$$

Для определения предельного значения внешней нагрузки, при которой появится трещина, используем соотношение (2).

Используя решение задачи о зоне пластических деформаций, вычислим смещения на берегах зоны предразрушения:

$$-\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-l_1}^{x_1} g_1(x_1) dx_1 = v_*(x_1, 0) - i u_*(x_1, 0),$$

где $v_*(x_1, 0) = v^+ - v^-$, $u_*(x_1, 0) = u^+ - u^-$, μ — модуль сдвига материала.

Смещения на берегах зоны предразрушения при $x_1 = x_0$ будут

$$-\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-l_1}^{x_0} g_1(x_1) dx_1 = v_*(x_0, 0) - i u_*(x_0, 0).$$

Применяя замену переменных и заменяя интеграл суммой, находим

$$-\frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{\pi l_1}{M} \sum_{m=1}^{M_1} g_1(t_m) = v_*(x_0, 0) - i u_*(x_0, 0), \quad (23)$$

где M_1 — число узловых точек, содержащихся в отрезке $(-l_1, x_0)$.

Из (23) находим

$$v_*(x_0, 0) = -\frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{\pi l_1}{M} \sum_{m=1}^{M_1} v_1(t_m), \quad u_*(x_0, 0) = -\frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{\pi l_1}{M} \sum_{m=1}^{M_1} u_1(t_m).$$

Тогда модуль вектора смещений на берегах зоны предразрушения при $x_1 = x_0$ будет

$$V_0 = \sqrt{u_*^2 + v_*^2} = \frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{\pi l_1}{M} \sqrt{A^2 + B^2}, \quad (24)$$

где $A = \sum_{m=1}^{M_1} v_1(t_m)$, $B = \sum_{m=1}^{M_1} u_1(t_m)$.



Таким образом, условием, определяющим предельное значение внешней нагрузки, будет

$$\frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{\pi l_1}{M} \sqrt{A^2 + B^2} = \delta_c. \quad (25)$$

Совместное решение полученных алгебраических уравнений и (25) дает возможность (при известных характеристиках трещиностойкости материала) определить критическую величину внешней нагрузки, размеры зоны предразрушения (области ослабленных межчастичных связей материала) для состояния предельного равновесия, при котором появляется трещина.

На рис. 2 представлена зависимость длины зоны предразрушения $l_1/2L$ от безразмерной нагрузки p_0/σ_s для полосы, толщина которой меняется по линейному закону. В расчетах были приняты следующие значения параметров: $\nu = 0.3$; $E = 1.8 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha_1 = \pi/4$, $z_1^0 = 0$, $M = 30$.

На рис. 3 приведена зависимость безразмерной предельной нагрузки $p_c = \frac{p_0 \sqrt{L}}{\sqrt{E \sigma_s \delta_c}}$ от относительной толщины полосы h_1/h_0 .

Если зона предразрушения одним концом выходит на наружную поверхность полосы ($y = \pm L$), необходимость в дополнительном условии (12) в каждом приближении отпадает.

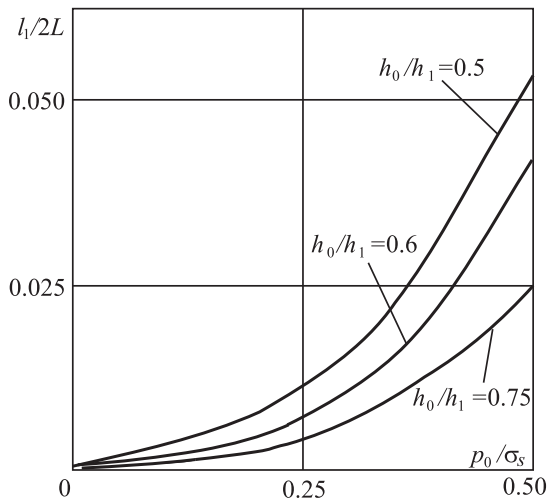


Рис. 2. Зависимость длины зоны предразрушения $l_1/2L$ от безразмерной нагрузки p_0/σ_s

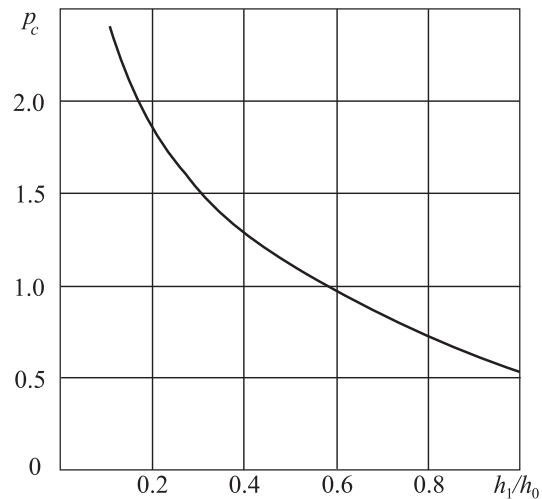


Рис. 3. Зависимость предельной нагрузки $p_c = \frac{p_0 \sqrt{L}}{\sqrt{E \sigma_s \delta_c}}$ от относительной толщины полосы $\frac{h_1}{h_0}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ модели зарождения трещины в полосе переменной толщины при силовом нагружении сводится к параметрическому совместному исследованию разрешающей алгебраической системы задачи и критерия появления трещины (25) при различных значениях свободных параметров полосы. Это различные механические характеристики материала и геометрические данные полосы. Построенная расчетная модель позволяет при изменении параметров α_1 и z_1^0 исследовать влияние расположения зоны ослабленных связей материала в полосе на трещинообразование.

В заключение отметим, что построенная модель, описывающая начало разрушения материала полосы, основана на дислокационных механизмах зарождения трещины. Дислокационные механизмы зарождения трещины получили экспериментальное подтверждение [1].

Библиографический список

1. Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев : Наук. думка, 1991. 416 с.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л. : Наука, 1967. 420 с.
3. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев : Наук. думка, 1976. 443 с.
4. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. : Наука, 1966. 707 с.
5. Мирсалимов В. М. Неоднородные упругопластические задачи. М. : Наука, 1987. 256 с.



ИНФОРМАТИКА

УДК 519.17

О ЧИСЛЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ РЕБЕР МИНИМАЛЬНОГО ВЕРШИННОГО 1-РАСШИРЕНИЯ СВЕРХСТРОЙНОГО ДЕРЕВА

М. Б. Абросимов

Саратовский государственный университет
E-mail: mic@rambler.ru

Граф G^* называется вершинным 1-расширением графа G , если граф G можно вложить в каждый граф, получающийся из графа G^* удалением любой его вершины вместе с инцидентными ребрами. Вершинное 1-расширение G^* графа G называется минимальным, если граф G^* имеет на одну вершину больше, чем граф G , а среди всех вершинных 1-расширений графа G с тем же числом вершин граф G^* имеет минимальное число ребер. Дерево называется сверхстройным (звездоподобным), если только одна его вершина имеет степень больше двух. В работе даются нижняя и верхняя оценки числа дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения произвольного сверхстройного дерева и указываются семейства деревьев, на которых эти оценки достигаются.

Ключевые слова: минимальное вершинное расширение, сверхстройное дерево, звездоподобное дерево, отказоустойчивая реализация.

On the Number of Additional Edges of a Minimal Vertex 1-Extension of a Starlike Tree

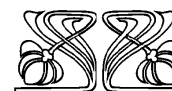
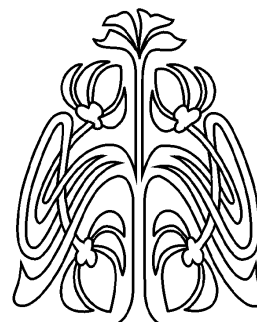
M. B. Abrosimov

For a given graph G with n nodes, we say that graph G^* is its 1-vertex extension if for each vertex v of G^* the subgraph $G^* - v$ contains graph G up to isomorphism. A graph G^* is a minimal vertex 1-extension of the graph G if G^* has $n + 1$ nodes and there is no 1-vertex extension with $n + 1$ nodes of G having fewer edges than G^* . A tree is called starlike if it has exactly one node of degree greater than two. We give a lower and upper bounds of the edge number of a minimal vertex 1-extension of a starlike tree and present trees on which these bounds are achieved.

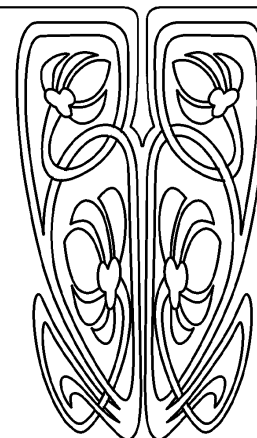
Key words: minimal vertex extension, starlike tree, fault tolerance.

ВВЕДЕНИЕ

Минимальные расширения (вершинные или реберные) являются продолжением предложенной J. P. Hayes [1] графовой модели для исследования отказоустойчивости. В [1] и последующей статье F. Naragu и J. P. Hayes [2] рассматривалась отказоустойчивость элементов дискретных систем (node fault tolerance, вершинное расширение). В работе [3] модель была распространена и на отказы связей элементов системы (edge fault tolerance, реберное расширение). Среди рассматриваемых систем особое внимание уделялось системам, граф которых является цепью, циклом или деревом. Исследованию минимальных вершинных 1-расширений частных случаев деревьев посвящены статьи [4–7]. Оказалось, что эта задача является вычислительно сложной [8] и поэтому общего аналитического описания минимального расширения (вершинного или реберного) для произвольного графа по-видимому не существует. В некоторых случаях удается предложить схему построения расширения, но не удается доказать его минимальность. В данной работе рассматриваются минимальные вершинные 1-расширения деревьев особого вида, кото-



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





рые называются сверхстройными, или звездоподобными. Был проведен вычислительный эксперимент [7] по построению минимальных вершинных 1-расширений для сверхстройных деревьев с числом вершин до 10 включительно. Мы далее будем использовать некоторые статистические данные, полученные в результате этих вычислений. В работе [4] была предложена схема построения минимальных вершинных 1-расширений для произвольного сверхстройного дерева. Далее будет показано, что это результат является ошибочным, а схема позволяет строить вершинные 1-расширения, но в общем случае не минимальные. Однако полученный авторами результат может быть использован как верхняя оценка для числа дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения сверхстройного дерева. В работе [9] аналогичный вопрос рассматривался для минимальных реберных 1-расширений, где удалось получить только нижнюю оценку. Дадим далее основные понятия, преимущественно в соответствии с книгой [10].

Графом (неориентированным) называется пара $G = (V, \alpha)$, где α — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V , называемое *отношением смежности*. **Степенью** вершины v в неориентированном графе G будем называть количество вершин в G , смежных с данной, и обозначать через $d(v)$. Вектор, составленный из степеней вершин графа G в порядке невозрастания, называется *вектором степеней*. Будем говорить, что вектор степеней (a_1, \dots, a_n) одного графа *мажорирует* вектор степеней (b_1, \dots, b_n) другого графа, если все компоненты второго не превышают по величине соответствующих компонент первого вектора: $a_i \geq b_i, i = 1, \dots, n$.

Связный граф без циклов называется *деревом*. Дерево называется *сверхстройным* (звездобразным), если в точности одна его вершина имеет степень больше 2. Эту вершину будем называть *корнем* сверхстройного дерева. Другое определение звездобразного дерева: это граф, гомеоморфный звезде. На рис. 1 представлено 5-вершинное сверхстройное дерево.

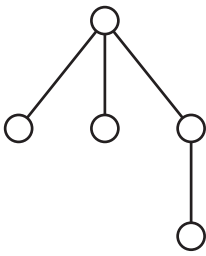


Рис. 1. Сверхстройное дерево $(2, 1, 1)$

Итак, вектор степеней сверхстройного дерева имеет вид $(k, 2, \dots, 2, 1, \dots, 1)$, где $k > 2$, и количество листьев в точности равно k [9]. Кратко вектор степеней сверхстройного дерева может быть записан в виде $(k, 2^m, 1^k)$. Среди сверхстройных деревьев есть представители других хорошо известных семейств графов.

В данной статье мы рассматриваем сверхстройные деревья, у которых степень корневой вершины $k > 2$. Однако если это ограничение убрать, то при $k = 1$ или $k = 2$ сверхстройное дерево является цепью P_n .

Если $m = 0$, то сверхстройное дерево является звездой $K_{1,k}$.

Сверхстройное дерево можно рассматривать как объединение k цепей с общей концевой вершиной. При этом дерево можно закодировать вектором, состоящим из длин цепей в порядке невозрастания: (m_1, \dots, m_k) , где $m_1 \geq \dots \geq m_k$. Очевидно, что такое кодирование сверхстройных деревьев при $k > 2$ является взаимно однозначным. В самом деле, любому вектору (m_1, \dots, m_k) будет соответствовать единственное с точностью до изоморфизма сверхстройное дерево с числом вершин $m_1 + \dots + m_k + 1$. В этом дереве корневая вершина будет иметь степень k , k вершин будут иметь степень 1, а остальные $m_1 + \dots + m_k - k$ вершин будут иметь степень 2. Будем называть такой код *вектором цепей*. Дерево на рис. 1 имеет вектор цепей $(2, 1, 1)$.

1. НИЖНЯЯ ОЦЕНКА

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k -расширением* (МВ- k Р) n -вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

- 1) граф G^* является вершинным k -расширением графа G , т. е. граф G вкладывается в каждый подграф графа G^* , получающийся удалением любых его k вершин;
- 2) граф G^* содержит $n + k$ вершин, т. е. $|V^*| = |V| + k$;
- 3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).

В данной работе мы будем рассматривать только случай $k = 1$. Построение минимального вершинного 1-расширения можно представить как добавление одной вершины и некоторого числа ребер. Для удобства количество дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения графа G обозначим через $ec(G)$.



Относительно специальных случаев сверхстройных деревьев некоторые результаты известны. Единственное минимальное вершинное 1-расширение цепи P_n есть цикл C_{n+1} , а любое минимальное вершинное k -расширение цепи P_n есть минимальное вершинное $(k - 1)$ -расширение цикла C_{n+1} (см. [1]).

Минимальное вершинное 1-расширение звезды $K_{1,k}$ единственно с точностью до изоморфизма, и получается добавлением вершины и соединением ее со всеми вершинами звезды. Для $k > 1$ также известен вид всех минимальных вершинных k -расширений звезды (см. [11]).

Покажем, что минимальное вершинное 1-расширение сверхстройного дерева (m_1, \dots, m_k) не может иметь меньше $k + 1$ дополнительных ребер.

Теорема 1. *Минимальное вершинное 1-расширение любого сверхстройного дерева T вида (m_1, \dots, m_k) отличается от него более чем на k дополнительных ребер:*

$$ec(T) > k.$$

Доказательство. Пусть T — сверхстройное дерево с вектором цепей (m_1, \dots, m_k) и $k > 2$. Обозначим через T^* некоторое минимальное вершинное 1-расширение дерева T . По определению после удаления любой вершины из графа T^* дерево T должно вкладываться в получившийся граф. Следовательно, граф T^* должен содержать вершину степени k или выше и будет отличаться от дерева T не менее чем на k дополнительных ребер. Таким образом, для доказательства леммы достаточно показать, что T^* не может отличаться на k дополнительных ребер.

Предположим, что это не так, и T^* отличается от T на k дополнительных ребер. Так как в T есть одна вершина степени k , то в T^* должно быть не менее двух вершин степени k или выше. Действительно, если бы это было не так и в T^* была бы только одна вершина v степени k или выше, то вложение дерева T в граф $T^* - v$ было бы невозможно. Рассуждая далее, убеждаемся, что в T^* не может быть вершин степени меньше 2. В самом деле, если бы степень некоторой вершины v в графе T^* была бы равна 1, то, удалив смежную с v вершину, мы бы получили граф с изолированной вершиной, в который дерево T вкладываться не будет. Наконец, в T^* не может быть вершины степени выше k , так как удаление такой вершины привело бы к удалению более k ребер. По предположению в получившийся граф должно вкладываться дерево T , однако оно отличается от T^* на k ребер.

Итак, делаем вывод, что если T^* — некоторое минимальное вершинное 1-расширение дерева T , которое отличается от T на k дополнительных ребер, то T^* имеет вектор степеней $(k, k, 2, \dots, 2)$. Обозначим через v_1 и v_2 вершины степени k графа T^* . Удаление одной из этих вершин приводит к удалению k ребер, следовательно, графы $T^* - v_1$, $T^* - v_2$ и T изоморфны. С учетом того, что степени остальных вершин графа T^* равны 2, это означает, что вершины v_1 и v_2 соединены k цепями, длины которых есть $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_k + 1$.

Предположим, что минимальная из длин этих цепей равна 1, т. е. $m_k = 1$. Это означает, что в T^* есть вершина v , которая смежна и с v_1 и с v_2 . Но тогда в графе $T^* - v$ старшая степень вершины будет $k - 1$, и вложение дерева T будет невозможно. Следовательно, длины всех цепей m_1, \dots, m_k должны быть больше 1, в частности, и минимальная из длин цепей $m_k > 1$.

Пусть u — вершина цепи минимальной длины m_k , смежная с вершиной v_1 . Рассмотрим удаление вершины u . В графе $T^* - u$ вершина v_1 будет иметь степень $k - 1$, а $d(v_2) = k$. Следовательно, только вершина v_2 может быть образом корневой вершины дерева T при вложении. Из вершины v_2 выходит k цепей, однако минимальная из них будет иметь длину $m_k - 1$. Таким образом, дерево T не может вкладываться в граф $T^* - u$. Полученное противоречие показывает, что дерево T не может иметь минимального вершинного 1-расширения с k дополнительными ребрами. \square

Итак, любое минимальное вершинное 1-расширение сверхстройного дерева T вида (m_1, \dots, m_k) при $k > 2$ должно отличаться от T не менее чем на $k + 1$ дополнительное ребро, должно иметь две вершины степени не ниже k , а степени остальных вершин не могут быть меньше 2. Звезды имеют минимальные вершинные 1-расширения как раз с таким числом дополнительных ребер. Существуют ли минимальные вершинные 1-расширения сверхстройных деревьев, кроме звезд, с числом дополнительных ребер $k + 1$, какими они могут быть и для каких сверхстройных деревьев это возможно?

Утверждение. *Пусть T — сверхстройное n -вершинное дерево с вектором цепей (m_1, \dots, m_k) и $k > 2$ такое, что $m_1 = 2$, а $m_k = 1$. Тогда граф T^* , полученный из этого дерева добавлением*



вершины и соединением ее со всеми листьями и корнем, является минимальным вершинным 1-расширением дерева T .

Доказательство. Заметим, что граф T^* , построенный по схеме из теоремы, будет иметь вектор степеней $(k + 1, k + 1, 2, \dots, 2)$ или $((k + 1)^2, 2^{m-1})$ и отличаться от дерева T на $k + 1$ дополнительных ребер. Покажем, что граф T^* является вершинным 1-расширением дерева T , тогда минимальность будет следовать из теоремы 1.

В графе T^* все вершины делятся на три группы подобных вершин (напомним, что две вершины графа называются *подобными*, если существует автоморфизм, при котором одна вершина является образом другой): вершины v_1 и v_2 степени $k + 1$, вершины, смежные с v_1 , и с v_2 (вершины из цепей длины 1), и вершины, смежные либо с v_1 , либо с v_2 (вершины из цепей длины 2).

При удалении вершины v_1 или v_2 получаем граф, изоморфный T , и вложение очевидно.

При удалении вершины u , смежной с v_1 , и с v_2 , вложение строится следующим образом: вершина v_1 — корень, вершина v_2 — заменяет удаленную вершину u и образует цепь длины 1, а остальные вершины остаются без изменений.

При удалении вершины v , смежной либо с v_1 , либо с v_2 , вложение строится следующим образом. Пусть для определенности вершина v смежна с вершиной v_2 , а w — другая смежная с v вершина: вершина v_1 — корень, вершина v_2 — заменяет удаленную вершину v и образует цепь v_1, v, w длины 2, а остальные вершины остаются без изменений. \square

Таким образом, существуют сверхстройные деревья с вектором степеней вида $(k, 2^m, 1^k)$, которые имеют минимальные вершинные 1-расширения с $k + 1$ дополнительным ребром и вектором степеней $((k + 1)^2, 2^{m+k})$. На основании проведенного вычислительного эксперимента [7] были проанализированы все 67 сверхстройных деревьев с количеством вершин от 4 до 10. Большинство из них (57) имеют минимальные вершинные 1-расширения с числом дополнительных ребер $k + 1$. Только у девяти деревьев минимальные вершинные 1-расширения имеют $k + 2$ дополнительных ребра (это деревья $(5, 1, 1)$, $(6, 1, 1)$, $(3, 3, 2)$, $(5, 1, 1, 1)$, $(6, 1, 1, 1)$, $(7, 1, 1)$, $(5, 3, 1)$, $(3, 2, 2, 2)$, $(5, 2, 2)$) и у одного дерева — $k + 3$ (это дерево имеет вид $(3, 3, 3)$). Дерево $(5, 3, 1)$ примечательно тем, что у него есть 117 неизоморфных минимальных вершинных 1-расширений.

Определим, какие еще вектора степеней могут быть у минимальных вершинных 1-расширений сверхстройных деревьев с $k + 1$ дополнительным ребром. Любой такой вектор с учетом рассмотренных выше ограничений на степени вершин минимального вершинного 1-расширения должен мажорировать вектор $(k, k, 2^{m+k})$, который описывает граф, отличающийся от заданного дерева на k дополнительных ребер. Это означает, что мы можем добавить две единицы к компонентам такого вектора. Таким образом, кроме вектора степеней $((k + 1)^2, 2^{m+k})$ возможны еще три: $(k + 1, k, 3, 2^{m+k-1})$, $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$ и $(k^2, 4, 2^{m+k-1})$. При $k = 3$ первый и последний вектора совпадают. На рис. 2 представлены все минимальные вершинные 1-расширения сверхстройного дерева $(2, 1, 1)$ (см. рис. 1) с векторами степеней трех оставшихся видов $(4, 4, 2, 2, 2)$, $(4, 3, 3, 2, 2)$ и $(3, 3, 3, 3, 2)$.

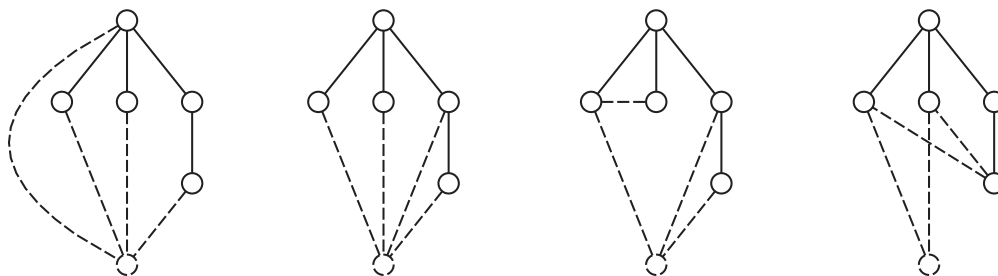


Рис. 2. МВ-1Р сверхстройного дерева $(2, 1, 1)$

Покажем, что никакое сверхстройное дерево при $k > 3$ не может иметь минимального вершинного 1-расширения с векторами степеней $(k^2, 4, 2^{m+k-1})$ и $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$.



2. ВЕКТОР $(k^2, 4, 2^{m+k-1})$

Теорема 2. *Не существует сверхстройных деревьев вида (m_1, \dots, m_k) и $k > 3$, минимальное вершинное 1-расширение которых имеет вектор степеней вида $(k^2, 4, 2^{m+k-1})$.*

Доказательство. В самом деле, предположим, что T — сверхстройное дерево вида (m_1, \dots, m_k) и $k > 3$, а T^* — его минимальное вершинное 1-расширение с вектором степеней $(k^2, 4, 2^{m+k-1})$. Обозначим для определенности через v_1 и v_2 вершины степени k , а через v — вершину степени 4 в графе T^* . Рассмотрим граф $T^* - v_1$. Вместе с вершиной v_1 удаляется k ее ребер, поэтому граф $T^* - v_1$ допускает вложение дерева T и отличается от него на одно ребро. Добавление одного ребра к дереву T с вектором степеней $(k, 2^m, 1^k)$ не может привести к появлению отличной от корневой вершины степени 4. При вложении дерева T в граф $T^* - v_1$ образом корневой вершины дерева T может быть или вершина v_2 , или при $k = 4$ вершина v .

Рассмотрим сначала случай $k > 4$. Образом корневой вершины дерева T может быть только вершина v_2 , а вершина v должна иметь степень меньше 4. Это означает, что вершины v и v_1 в графе T^* должны быть смежными. Аналогично рассмотрев граф $T^* - v_2$, приходим к выводу, что вершины v и v_2 в графе T^* также должны быть смежны. Но тогда в графе $T^* - v$ все вершины будут иметь степень меньше k , и вложение дерева T будет невозможно.

Остается рассмотреть случай $k = 4$. Граф T^* будет иметь вид $(4^3, 2^{m+k-1})$. Обозначим через v_1, v_2 и v_3 вершины степени 4. Рассмотрим удаление одной из этих вершин, например v_1 . Так как T^* является минимальным вершинным 1-расширением дерева T , то в графе $T^* - v_1$ должна остаться хотя бы одна вершина степени 4. Следовательно, вершина v_1 не может быть смежной одновременно с v_2 и v_3 . В то же время в графе $T^* - v_1$, как было установлено ранее, не может остаться две вершины степени 4. Это означает, что вершина v_1 должна быть смежной либо с v_2 , либо с v_3 . Пусть для определенности вершина v_1 смежная с v_2 и несмежная с v_3 . Повторяя рассуждения для графа $T^* - v_3$, мы приходим к выводу, что вершины v_2 и v_3 должны быть смежными, т. е. вершина v_2 будет смежной и с v_1 , и с v_3 . Но тогда в графе $T^* - v_2$ не будет вершин степени выше 3, и вложение исходного дерева T будет невозможно. \square

При $k = 3$ вектор $(k^2, 4, 2^{m+k-1})$ совпадает с вектором $(k + 1, k, 3, 2^{m+k-1})$, поэтому с учетом теоремы 2 вектор $(k^2, 4, 2^{m+k-1})$ не представляет интереса для поиска минимальных вершинных 1-расширений сверхстройных деревьев.

3. ВЕКТОР $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$

Теорема 3. *Не существует сверхстройных деревьев вида (m_1, \dots, m_k) и $k > 3$, минимальное вершинное 1-расширение которых имеет вектор степеней вида $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$.*

Доказательство. В самом деле, предположим, что T — сверхстройное дерево вида (m_1, \dots, m_k) и $k > 3$, а T^* — его минимальное вершинное 1-расширение с вектором степеней $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$. Обозначим для определенности через v_1 и v_2 вершины степени k в графе T^* .

Очевидно, что вершины v_1 и v_2 не могут быть смежными. Если бы это было так, то в графе $T^* - v_2$ не было бы вершин степени k . Аналогично, в графе T^* не может быть вершины, смежной одновременно с v_1 и v_2 . Если бы была такая вершина w , то в графе $T^* - w$ вершины v_1 и v_2 имели бы степень $k - 1$, и вложение дерева T было бы невозможно.

Рассмотрим граф $T^* - v_2$. Вместе с вершиной v_2 удаляется k ее ребер, поэтому граф $T^* - v_2$ допускает вложение дерева T и отличается от него на одно ребро. Рассмотрим, какой вид может иметь граф $T^* - v_2$ (рис. 3, а). Возможны три случая, схематично представленных на рис. 3, б–г. В графе $T^* - v_2$ может быть $k, k - 1$ или $k - 2$ вершин степени 1 и соответственно 2, 1 или 0 вершин степени 3.

Исследуем каждый случай.

Случай 1 (рис. 3, б). Обозначим через l_1, \dots, l_k длины цепей, выходящих из вершины степени k (это вершина v_1) и заканчивающихся вершиной степени 1. Так как дерево T^* вкладывается в граф $T^* - v_2$, то, не ограничивая общности, получаем, что $m_1 = l_1 - 1, \dots, m_k = l_k - 1$. Как было установлено ранее, $l_k > 2$, а следовательно, $m_k > 1$, т. е. в сверхстройном дереве T не может быть цепи длины 1.

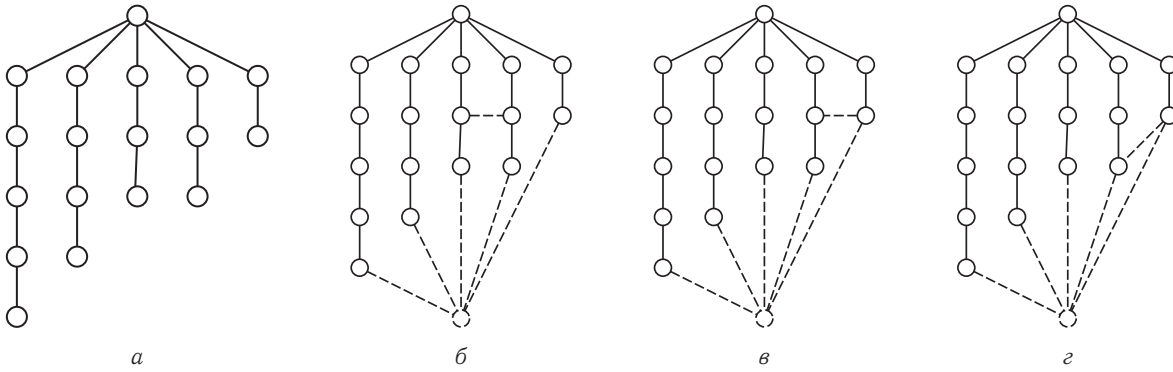


Рис. 3. Граф $T^* - v_2$ (а) и три случая для вектора $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$ (б-г)

Обозначим через v вершину, смежную с вершиной v_2 , в цепи длины l_k (т.е. в кратчайшей цепи, соединяющей вершины v_1 и v_2). Рассмотрим граф $T^* - v$. По предположению дерево T должно вкладываться в граф $T^* - v$. Однако в графе $T^* - v$ вершина v_2 имеет степень $k - 1$ и, следовательно, образом корневой вершины дерева T при вложении может быть только вершина v_1 . Однако из нее выходит цепь длины $m_k - 1$, которая меньше любой цепи в дереве T . Таким образом, этот случай исключается.

Случай 2 (рис. 3, б). Обозначим через l_1, \dots, l_{k-1} длину цепей, выходящих из вершины степени k (это по-прежнему вершина v_1) и заканчивающихся вершиной степени 1. Через l_k обозначим длину последней цепи, выходящей из вершины v_1 и заканчивающуюся вершиной, смежной с единственной вершиной степени 3. Далее, повторяя рассуждения первого случая, приходим к выводу, что и этот случай не возможен.

Случай 3 (рис. 3, г). Заметим, что в этом случае вершина v_2 в графе T^* смежна с двумя вершинами степени 3. В силу отмеченного свойства графа T^* вершина v_1 тогда не может быть смежна ни с одной из вершин степени 3, т.е. граф $T^* - v_1$ будет попадать под случай 1 и случай 3 также должен быть исключен. Таким образом, были рассмотрены все три возможных случая и оказалось, что ни в одном из них граф T^* не является вершинным 1-расширением дерева T . \square

Полученный результат означает, что если сверхстройное дерево вида (m_1, \dots, m_k) и имеет минимальное вершинное 1-расширение с вектором степеней вида $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$, то это возможно только при $k = 3$. Такие сверхстройные деревья существуют и далее одно из них будет использовано в качестве контрпримера.

4. ВЕКТОР $((k + 1)^2, 2^{m+k})$

Как мы уже убедились, существуют сверхстройные деревья, у которых минимальные вершинные 1-расширения имеют вектор степеней вида $((k + 1)^2, 2^{m+k})$. Следующая теорема дает полное описание сверхстройных деревьев, у которых минимальные вершинные 1-расширения имеют такой вид.

Теорема 4. Пусть T — сверхстройное дерево вида (m_1, \dots, m_k) и $k > 2$. Дерево T тогда и только тогда имеет минимальное вершинное 1-расширение с $k + 1$ дополнительным ребром и вектором степеней $((k + 1)^2, 2^{m+k})$, когда выполняется условие

$$(\forall i = 1, \dots, k : m_i > 1) (\forall j = 2, \dots, m_i) (\exists 1 \leq l \leq k) (m_l = j - 1 \vee m_l = m_i - j). \quad (1)$$

Доказательство. Заметим, что если в сверхстройном дереве длины всех цепей равны 1, т.е. дерево является звездой, то условие (1) выполняется. Обозначим через T сверхстройное дерево вида (m_1, \dots, m_k) и $k > 2$ с корневой вершиной v , а через T^* — граф, получающийся добавлением к дереву T вершины и соединением ее с вершиной v и всеми листьями T . Граф T^* будет иметь вектор степеней $((k + 1)^2, 2^{m+k})$. Обозначим две смежные вершины степени $k + 1$ через v_1 и v_2 .

Необходимость. Пусть граф T^* является минимальным вершинным 1-расширением дерева T . Покажем, что высказывание (1) истинно. Рассмотрим одну из ветвей дерева T — цепь P_{m_i} . Перенумеруем ее вершины: $v_1, v_{i1}, \dots, v_{ir}$. В графе T^* вершина v_{ir} соединена ребром с вершиной v_2 по



построению. Рассмотрим удаление некоторой вершины v_{ij} . Граф $T^* - v_{ij}$ имеет в точности две вершины степени не ниже k : v_1 и v_2 . Следовательно, только одна из них может быть корнем дерева. Из вершины v_1 выходит начальный фрагмент цепи P_{m_i} — цепь длины $j - 1$. Из вершины v_2 выходит концевой фрагмент цепи P_{m_i} — цепь длины $m_i - j$. Если v_1 будет вершиной дерева, изоморфного T , тогда из нее выходит цепь длины $j - 1$, а если v_2 , то $m_i - j$. Следовательно, цепь одной из этих длин должна существовать в дереве T . Так как цепь P_{m_i} и ее вершина v_{ij} выбраны произвольно, то и получается формула (1).

Достаточность. Пусть высказывание (1) верно. Покажем, что T^* является минимальным вершинным 1-расширением дерева T . Убедимся в том, что T^* является вершинным 1-расширением. Очевидно, что T вкладывается в $T^* - v_1$ и $T^* - v_2$. Рассмотрим удаление вершины v_{ij} некоторой цепи P_{m_i} . Не ограничивая общности, будем считать, что $i = 1$. Покажем, что дерево T вкладывается в $T^* - v_{1j}$. Граф $T^* - v_{1j}$ имеет в точности две вершины степени не ниже k : v_1 и v_2 . Следовательно, только одна из них может быть корнем дерева. Из вершины v_1 выходит начальный фрагмент цепи P_{m_1} — цепь длины $j - 1$. Из вершины v_2 выходит концевой фрагмент цепи P_{m_1} — цепь длины $m_1 - j$. Кроме того, вершины v_1 и v_2 соединены $k - 1$ цепями, длины которых $m_2 + 1, \dots, m_k + 1$.

Если $j = 1$, тогда вложение получается следующим образом: v_1 — корень, цепь $v_1, v_2, v_{1m_1}, \dots, v_{12}$ — цепь длины m_1 . Остальные цепи состояются из вершин цепей P_{m_2}, \dots, P_{m_k} .

Если $j = m_1$, то аналогично предыдущему случаю вложение получается так: v_2 — корень, цепь $v_2, v_1, v_{12}, \dots, v_{1m_1}$ — цепь длины m_1 . Остальные цепи состояются из вершин цепей P_{m_2}, \dots, P_{m_k} , начиная от v_2 , в обратном порядке.

Пусть $j \neq 1$ и $j \neq m_1$. По условию существует цепь, например P_{m_2} , такая, что ее длина равна или $j - 1$, или $m_1 - j$. В первом случае v_1 — корень, начало цепи P_{m_1} — цепь длины $j - 1$, а цепь $v_1, v_{21}, \dots, v_{2(j-1)}, v_2, v_{1m_1}, \dots, v_{1(j+1)}$ имеет длину m_1 . Остальные цепи состояются из вершин цепей P_{m_2}, \dots, P_{m_k} . Во втором случае v_2 — корень, конец цепи P_{m_1} , начиная с вершины v_2 — цепь длины $m_1 - j$, а цепь $v_2, v_{2m_1}, \dots, v_{21}, v_1, v_{11}, \dots, v_{1(j-1)}$ имеет длину m_1 . Остальные цепи состояются из вершин цепей P_{m_2}, \dots, P_{m_k} , начиная от v_2 , в обратном порядке.

Таким образом, граф T^* является вершинным 1-расширением дерева T , причем отличается от дерева T на $k + 1$ дополнительное ребро. По теореме 1 дерево T не может иметь расширения с k дополнительными ребрами и, следовательно, граф T^* является минимальным вершинным 1-расширением дерева T . \square

Замечание. Условие в формулировке теоремы означает, что если мы занумеруем, начиная от корня, все вершины цепи с длиной m_i сверхстройного дерева, то для каждой вершины с номером j в этой цепи должна найтись или цепь длины $j - 1$, или цепь длины $m_i - j$. При этом считаем, что цепь длины 0 в дереве есть, поэтому достаточно рассмотреть все вершины цепи, кроме первой и последней. Например, рассмотрим сверхстройное дерево с вектором цепей (4, 1, 1). Проверим, что условие выполняется для большей цепи:

$j = 2$ — цепь длины 1 в дереве есть;

$j = 3$ — цепи длины 2 в дереве нет, но цепь длины $4 - 3 = 1$ в дереве есть.

Таким образом, деревья (2, 1, 1), (3, 1, 1) или (4, 1, 1) подходят под условие теоремы 4. А вот сверхстройное дерево (5, 1, 1) — нет, так как для вершины v_{13} с номером $j = 3$ цепи длины 5 в дереве нет подходящей цепи длины 2 (см. рис. 5, а). Из 67 сверхстройных деревьев с числом вершин до 10 включительно 57 имеют минимальное вершинное 1-расширение, отличающееся на $k + 1$ дополнительное ребро. Из них только 3 дерева не попадают под действие теоремы 4. Это сверхстройные деревья с векторами цепей (5, 1, 1), (3, 2, 2) и (4, 3, 2).

По построению минимального вершинного 1-расширения с вектором степеней $((k + 1)^2, 2^{m+k})$ очевидно

Следствие. Пусть T — сверхстройное дерево вида (m_1, \dots, m_k) и $k > 2$. Если дерево T имеет минимальное вершинное 1-расширение с $k + 1$ дополнительным ребром и вектором степеней $((k + 1)^2, 2^{m+k})$, то оно имеет только одно минимальное вершинное 1-расширение с таким вектором степеней.



5. ВЕКТОР $((k + 1), k, 3, 2^{m+k-1})$

Полного описания данного семейства пока не известно. Рассмотрим некоторые общие идеи построения минимального вершинного 1-расширения по данной схеме. Пусть T — сверхстройное дерево вида (m_1, \dots, m_k) , а T^* — минимальное вершинное 1-расширение дерева T с вектором степеней $((k + 1), k, 3, 2^{m+k-1})$. Граф T^* отличается от дерева T на $k + 1$ дополнительных ребер. Обозначим через u вершину степени $k + 1$, а через v — вершину степени k .

Рассмотрим граф $T^* - u$. Удаление вершины u приводит к удалению $k + 1$ ребер, т. е. в получившемся графе будет столько же ребер, как и в дереве T . По предположению дерево T должно вкладываться в граф $T^* - u$, а раз количество ребер одинаково, то граф $T^* - u$ изоморфен дереву T . Это значит, что построение графа T^* можно представить следующим образом. Добавляется вершина u , которая соединяется с k листьями дерева T и еще одним ребром с вершиной степени 2. Таким образом, кандидатов на минимальное вершинное 1-расширение n -вершинного сверхстройного дерева T с вектором степеней $((k + 1), k, 3, 2^{m+k-1})$ будет менее чем $n - k - 1$ штук (очевидно, что достаточно рассматривать по одному представителю от цепей одинаковой длины). Предположим, что последнее ребро соединяет вершину u с некоторой вершиной w степени 2 в цепи длины m_1 . Если назначить номера вершинам этой цепи, начиная с вершины, смежной с вершиной v , то пусть номер вершины w будет j . Тогда вершины u и v соединены $k - 1$ цепью длины $m_i + 1$, $i = 2, \dots, n$. Кроме этих цепей из вершины v выходит цепь длины j , конец которой смежен с вершиной u , и кроме ребра $\{u, w\}$, вершины u и w соединены цепью длины $m_1 - j$. Рассмотрим удаление вершины v_{i1} , смежной с вершиной v в некоторой цепи m_i . По предположению дерево T вкладывается в получившийся граф. Образом корневой вершины может быть только вершина u , которая имеет в графе $T^* - v_{i1}$ степень $k + 1$. Из вершины u в графе $T^* - v_{i1}$ выходит цепь длины $m_i - 1$, следовательно, в дереве T также должна быть цепь такой длины. Проведенные рассуждения позволяют предложить одно семейство сверхстройных деревьев, представители которого имеют минимальные вершинные 1-расширения с вектором степеней $((k + 1), k, 3, 2^{m+k-1})$.

Теорема 5. Пусть T — сверхстройное дерево вида (m_1, \dots, m_k) и $k > 2$ такое, что $m_i - m_{i+1} \leq 1$, $i = 1, \dots, k - 1$. Тогда граф, получающийся из дерева T добавлением одной вершины, соединением ее с листьями дерева T и одной вершиной, смежной с листом, будет являться минимальным вершинным 1-расширением дерева T .

Доказательство. Покажем, что граф T^* , описанный в формулировке теоремы, будет являться вершинным 1-расширением дерева T , а минимальность будет следовать из теоремы 1. Обозначим, как и ранее, в графе T^* через u вершину степени $k + 1$, а через v — вершину степени k . Не ограничивая общности, будем считать, что при построении графа T^* добавленная вершина была соединена с предпоследней вершиной цепи $m_l > 1$: $v_{l(m_l-1)}$ (см. рис. 4).

Убедимся, что при удалении любой вершины графа T^* дерево T можно будет вложить в получившийся граф. Для графов $T^* - u$ и $T^* - v$ вложение дерева T очевидно. Далее исследуем удаление произвольной вершины v_{ij} цепи длины m_i . Как и ранее j — это номер вершины в цепи, начиная от вершины, смежной с вершиной v .

Рассмотрим удаление вершины v_{im_i} цепи $m_i = 1$, т. е. вершины цепи длины 1. Вложение строится следующим образом. Ребро $\{v_{lm_l}, u\}$ соответствует цепи m_k длины 1. Цепи m_i будет соответствовать цепь $u, v_{lm_{l-1}}, \dots, v_{l1}, v$. Все остальные цепи, выходящие из вершины u , будут соответствовать цепям исходного дерева T . Вложение построено.

Рассмотрим удаление вершины v_{i1} цепи $m_i > 1$, $i \neq l$, смежной с вершиной v . Вложение строится следующим образом. Вершина u соответствует корню дерева T . Остаток цепи m_i будет иметь длину $m_i - 1$ и соответствовать цепи подходящей длины дерева T . Цепи длины m_i дерева T будет соответствовать цепь длины $m_i - 1$ с вершиной v . Все остальные цепи, выходящие из вершины u , будут соответствовать цепям исходного дерева T . Вложение построено.

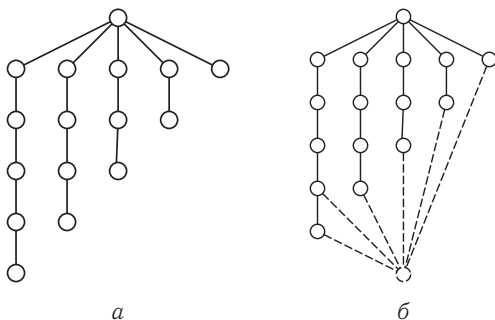


Рис. 4. Дерево $(5,4,3,2,1)$ и схема построения для вектора $(k + 1, k, 3, 2^{m+k-2})$

Рассмотрим удаление вершины v_{i1} цепи $m_i > 1$, $i \neq l$, смежной с вершиной v . Вложение строится следующим образом. Вершина u соответствует корню дерева T . Остаток цепи m_i будет иметь длину $m_i - 1$ и соответствовать цепи подходящей длины дерева T . Цепи длины m_i дерева T будет соответствовать цепь длины $m_i - 1$ с вершиной v . Все остальные цепи, выходящие из вершины u , будут соответствовать цепям исходного дерева T . Вложение построено.



Рассмотрим удаление вершины v_{im_i} цепи $m_i > 1$, $i \neq l$, смежной с вершиной u . Вложение строится следующим образом. Вершина u соответствует корню дерева T . Ребро $\{v_{lm_i}, u\}$ соответствует цепи m_k длины 1. Цепь m_k вместе с ребром $\{v_{k1}, u\}$ и остатком цепи m_i от вершины v длины $m_i - 2$ образуют цепь длины m_i . Цепи m_l будет соответствовать цепь $u, v_{lm_{l-1}}, \dots, v_{l1}$. Все остальные цепи, выходящие из вершины u , будут соответствовать цепям исходного дерева T . Вложение построено.

Рассмотрим удаление вершины v_{lm_l} цепи m_l , смежной с вершиной u . Вложение очевидно и строится следующим образом. Вершина u соответствует корню дерева T . Цепи m_l будет соответствовать цепь $u, v_{lm_{l-1}}, \dots, v_{l1}, v$. Все остальные цепи, выходящие из вершины u , будут соответствовать цепям исходного дерева T . Вложение построено.

Рассмотрим удаление вершины $v_{l(m_l-1)}$ цепи m_l , смежной с вершиной u . Вложение очевидно и строится следующим образом. Вершина u соответствует корню дерева T . Ребро $\{v_{lm_l}, u\}$ соответствует цепи m_k длины 1. Цепи m_l будут соответствовать цепь, оставшаяся часть цепи m_l до вершины v длины $m_l - 2$, цепь m_k длины 1 с ребром, соединяющим конец цепи с вершиной u . Все остальные цепи, выходящие из вершины u , будут соответствовать цепям исходного дерева T . Вложение построено.

Рассмотрим удаление произвольной вершины v_{ij} цепи m_i , не относящейся ни к одному из рассмотренных ранее случаев. Вложение строится следующим образом. Вершина v соответствует корню дерева T . Остаток цепи m_i от вершины v будет иметь длину $j - 1$ и соответствовать цепи подходящей длины дерева T . Цепь длины $j - 1$ вместе с вершиной u и остатком цепи m_i от вершины u будет соответствовать цепи m_i . Все остальные цепи, выходящие из вершины u , будут соответствовать цепям исходного дерева T . Вложение построено.

Таким образом, граф T^* , построенный по описанной схеме, действительно является вершинным 1-расширением сверхстройного дерева T из условия теоремы, а в силу теоремы 1 и его минимальным вершинным 1-расширением. \square

Следствие 1. Пусть T — сверхстройное дерево вида (m_1, \dots, m_k) и $k > 2$ такое, что $m_i - m_{i+1} \leq 1$, $i = 1, \dots, k - 1$. Тогда дерево T имеет, по крайней мере, m_1 различных минимальных вершинных 1-расширений, отличающихся от T на $k + 1$ дополнительное ребро.

Доказательство. Из теоремы 5 следует, что различных минимальных вершинных 1-расширений с вектором степеней $((k + 1), k, 3, 2^{m+k-1})$ будет, по крайней мере, столько, сколько есть различных цепей длины, отличной от 1, т. е. $m_1 - 1$. Заметим, что дерево из условия теоремы также попадает и под действие теоремы 4, что дает еще одно минимальное вершинное 1-расширение с вектором степеней $((k + 1)^2, 2^{m+k})$. Итого получается, что количество минимальных вершинных 1-расширений не менее чем m_1 . \square

Рассмотрим сверхстройное дерево T , являющееся объединением цепей длины 1 и 2, среди которых есть хотя бы одна цепь длины 1 и хотя бы одна цепь длины 2. Такое дерево попадает под условие и теоремы 4 и теоремы 5. А с учетом теоремы 3 получается

Следствие 2. Пусть сверхстройное дерево T является объединением k ($k > 3$) цепей длинами не более 2, среди которых есть хотя бы одна цепь длины 1 и хотя бы одна цепь длины 2. Тогда дерево T имеет в точности два неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения, которые строятся по схемам из теоремы 4 и теоремы 5.

6. ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА

Заметим, что любой граф имеет вершинное k -расширение с k дополнительными вершинами. Действительно, добавим к данному графу k вершин и соединим их ребрами между собой и со всеми вершинами графа. Очевидно, что полученный граф будет являться вершинным k -расширением. Такое вершинное k -расширение называется *тривиальным*. Число дополнительных ребер составит $k(k - 1)/2 + nk$, где n — число вершин исходного графа. Таким образом, тривиальное вершинное k -расширение позволяет получить простейшую верхнюю оценку для числа дополнительных ребер минимального вершинного k -расширения произвольного графа. При $k = 1$ получаем, что число дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения произвольного n -вершинного графа не более n .

В статье [4] было высказано более сильное утверждение по сравнению с теоремой 4. Прежде



чем перейти к его формулировке, дадим одно определение. Вершина v_{ij} сверхстройного дерева T называется *сложной*, если среди длин цепей дерева T нет цепи длины $j - 1$ или $m_i - j$. В теореме 4 рассматриваются сверхстройные деревья без сложных вершин. Сверхстройное дерево $(5, 1, 1)$ из предыдущего примера имеет одну сложную вершину — вершину v_{13} .

Утверждение [4]. Минимальное вершинное 1-расширение сверхстройного дерева с k цепями и p сложными вершинами содержит в точности $k + p + 1$ дополнительных ребер.

При $p = 0$ приведенное утверждение совпадает с теоремой 4. Однако при $p > 0$ схема доказательства в [4] исследует вариацию вершинного 1-расширения с вектором $((k + 1)^2, 2^{m+k})$. Пусть v_{ij} — сложная вершина, тогда предлагается добавить ребро из вершины старшей степени в вершину $v_{i(j-1)}$. Далее в [4] утверждается, что построенный граф будет являться минимальным вершинным 1-расширением заданного сверхстройного дерева. Однако ниже будет показано, что в общем случае построенный граф будет являться вершинным 1-расширением, но не обязательно минимальным.

Как было указано ранее, из 67 сверхстройных деревьев с числом вершин до 10 есть деревья, которые не попадают под действие теоремы 4, но имеют $k + 1$ дополнительное ребро. Оказывается, что все они являются контрпримерами к утверждению [4].

Сверхстройное дерево $(5, 1, 1)$ имеет одну сложную вершину, но имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение вида $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$, отличающееся на 4 дополнительных ребра.

Сверхстройное дерево $(3, 2, 2)$ также имеет одну сложную вершину, но имеет 2 минимальных вершинных 1-расширения вида $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$ и одно вида $((k + 1), k, 3, 2^{m+k-1})$, отличающихся на 4 дополнительных ребра.

Наконец, сверхстройное дерево $(4, 3, 2)$ имеет одну сложную вершину, но имеет 4 минимальных вершинных 1-расширения вида $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$, отличающихся на 4 дополнительных ребра.

Еще один интересный пример представляет собой сверхстройное дерево $(5, 2, 2)$. Можно заметить, что оно имеет две сложные вершины, но его 37 минимальных вершинных 1-расширений отличаются на 5, а не на 6 дополнительных ребер. Аналогичная ситуация с деревьями $(6, 1, 1)$ или $(3, 3, 2)$, у которых также по две сложные вершины, но минимальные вершинные 1-расширения отличаются на 5 дополнительных ребер.

Самое большое отклонение среди всех сверхстройных деревьев с числом вершин до 10 наблюдается на сверхстройном дереве $(7, 1, 1)$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что оно имеет 3 сложные вершины, но его 8 минимальных вершинных 1-расширений отличаются на 5, а не на 7 дополнительных ребер. Можно предположить, что на сверхстройных деревьях вида $(t, 1, 1)$ (количество сложных вершин в таких деревьях составляет $t - 3$, при $t > 3$) при увеличении t отклонение будет возрастать.

Каждый из этих контрпримеров показывает ошибочность утверждения в общем случае. Исследуем первый контрпример более подробно.

Пример. Рассмотрим сверхстройное дерево T с вектором цепей $(5, 1, 1)$. На рис. 5, а изображено это дерево. При непосредственной проверке убеждаемся, что единственной сложной вершиной является вершина v_{13} — вершина цепи длины 5.

Действительно, в дереве T нет цепи длины 2 ($j - 1 = 3 - 1 = 2$, $m_1 - j = 5 - 3 = 2$). На рис. 5, б, изображено вершинное 1-расширение, построенное по схеме [4]. Это расширение отличается на 5 дополнительных ребер. На самом деле это вершинное 1-расширение не является минимальным, и на рис. 5, в изображено единственное минимальное вершинное 1-расширение дерева T с вектором степеней $(3^4, 2^5)$, которое отличается на 4 дополнительных ребра. Пунктирными линиями обозначаются добавленные вершина и ребра.

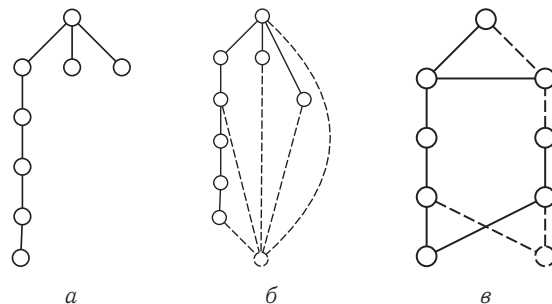


Рис. 5. Сверхстройное дерево $(5,1,1)$ и два его вершинных 1-расширения

Убедимся, что граф на рис. 5, в действительно является вершинным 1-расширением сверхстройного дерева $(5, 1, 1)$. В силу очевидной симметрии достаточно рассмотреть графы, получающиеся при



удалении верхней вершины и вершин, расположенных слева от нее. На рис. 6 показано вложение рассматриваемого дерева при удалении соответствующих вершин. Толстой линией выделена вершина, являющаяся образом корневой вершины, а лишние ребра обозначаются пунктирными линиями. Доказательство минимальности следует из теоремы 1.

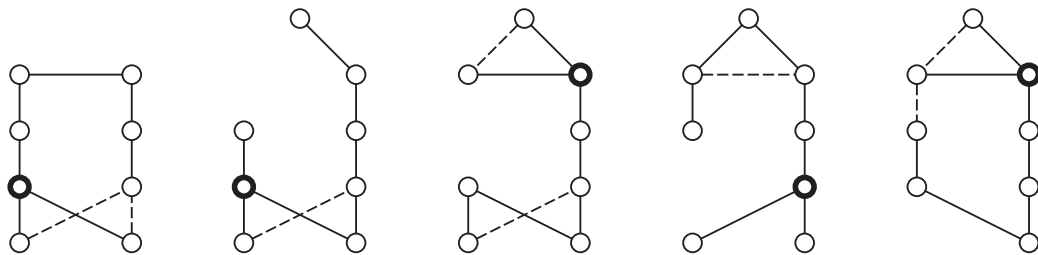


Рис. 6. Вложение дерева $(5, 1, 1)$ при удалении различных вершин

Ошибка в работе [4] состояла в том, что исследовалась лишь схема $((k + 1)^2, 2^{m+k})$, а другие возможности не рассматривались. Другими словами, исследовалась схема, в которой добавляется одна вершина и соединяется ребрами с некоторыми из остальных вершин. Вершинное k -расширение графа G называется T -неприводимым, если оно является частью тривиального k -расширения графа G , но никакая его собственная часть не является вершинным k -расширением графа G . По сути, авторы работы [4] описали T -неприводимые 1-расширения сверхстройных деревьев. Однако с точки зрения минимальных вершинных 1-расширений этот результат может использоваться лишь как верхняя оценка. Следует отметить, что существуют сверхстройные деревья с $p > 0$, на которых эта верхняя оценка достигается. Например, сверхстройное дерево $(5, 1, 1, 1)$ имеет одну сложную вершину и 6 минимальных вершинных 1-расширений, отличающихся на 6 дополнительных ребер. Одно из этих расширений имеет указанный в работе [4] вид. Аналогичная ситуация возникает для сверхстройного дерева $(6, 1, 1)$. Таким образом, нижняя и верхняя оценки для числа дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения произвольного сверхстройного дерева с k цепями и p сложными вершинами являются достижимыми, и можно сформулировать заключительный результат работы:

$$k \leq ec(T) \leq k + p.$$

Библиографический список

1. Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. Vol. 25, № 9. P. 875–884.
2. Harary F., Hayes J. P. Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. Vol. 27. P. 19–23.
3. Harary F., Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. Vol. 23. P. 135–142.
4. Harary F., Khurum M. One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees // Intern. J. Comput. Math. 1995. Vol. 56. P. 135–143.
5. Кабанов М. А. Об отказоустойчивых реализациях графов // Теоретические задачи информатики и ее приложений. Саратов, 1997. Вып. 1. С. 50–58.
6. Абросимов М. Б. Минимальные расширения графов // Новые информационные технологии в исследовании дискретных структур. Томск, 2000. С. 59–64.
7. Абросимов М. Б., Комаров Д. Д. Минимальные вершинные расширения сверхстройных деревьев с малым числом вершин / Саратов. гос. ун-т. Саратов, 2010. 38 с. Деп. в ВИНТИ 18.10.2010, № 590-B2010.
8. Абросимов М. Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 5. С. 643–650.
9. Абросимов М. Б. О нижней оценке числа ребер минимального реберного 1-расширения сверхстройного дерева // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2011. Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3, ч. 2. С. 111–117.
10. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М., 1997. 368 с.
11. Абросимов М. Б. Минимальные расширения неориентированных звезд // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов, 2006. Вып. 7. С. 3–5.